Universidade de São Paulo
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de
Ribeirão Preto
Departamento de Economia
Programa de Pós-graduação em Economia - Área: Economia
Aplicada

Daniel Spinoso Prado

Localização horizontal de produtos sob efeito de rede.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Pigead de Almeida Prado

Ribeirão Preto

2016

Prof. Dr. Marco Antonio Zago
Reitor da Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Dante Pinheiro Martinelli
Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de
Ribeirão Preto

Prof. Dr. Renato Leite Marcondes
Chefe do Departamento de Economia

Prof. Dr. Cláudio Ribeiro de Lucinda
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Economia - Área:
Economia Aplicada

DANIEL SPINOSO PRADO

Localização horizontal de produtos sob efeito de rede.

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Ciências. Versão Corrigida. A original encontra-se disponível na FEA-RP/USP

Orientador: Prof. Dr. Fernando Pigeard de Almeida Prado

Ribeirão Preto

2016

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Prado, Daniel Spinoso
Localização horizontal de produtos sob efeito de rede./ Daniel Spinoso Prado;
Orientador: Prof. Dr. Fernando Pigeard de Almeida Prado
Ribeirão Preto, 2016- 145 p. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, 2016.

1. Teoria dos Jogos. 2. Equilíbrio de Nash 3. Jogos Dinâmicos I. Orientador: Prof. Dr. Fernando Pigeard de Almeida Prado. II. Universidade De São Paulo - Campus Ribeirão Preto. III. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade. IV. Localização horizontal de produtos sob efeito de rede.

CDU

Nome: Prado, Daniel Spinoso

Título: Localização horizontal de produtos sob efeito de rede.

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Ciências. Versão Corrigida. A original encontra-se disponível na FEA-RP/USP

Aprovada em

Banca Examinadora

**Prof. Dr. Jefferson Donizeti Pereira
Bertolai**
FEA-RP/USP

Prof. Dr. Jaylson Jair da Silveira
CNM/UFSC

Prof. Dr. Vladimir Belitsky
IME/USP

Agradecimentos

A Deus, por sua provisão constante e por permitir que isso acontecesse.

A esta universidade, seu corpo docente e funcionários pela confiança e oportunidade concedida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Fernando Pigeard de Almeida Prado, pelos conhecimentos compartilhados e imenso apoio, sem o qual tudo isso não seria possível.

À minha família, pelo incentivo, apoio e acima de tudo pelo amor incondicional expresso.

A Carol, minha companheira, que em toda dificuldade demonstrou seu amor me apoiando e me motivando a seguir.

Aos meus amigos de mestrado que compartilharam dificuldades e me incentivaram quando preciso.

Meus agradecimentos aos amigos Marcelo, Victória e Igor, companheiros que fizeram parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida com certeza.

Aos amigos da eterna turma XI de Economia da FEARP-USP.

A equipe de corrida PegasUSP em nome do meu treinador Filipe Oliveira que me ensinou muito sobre determinação e disciplina para buscar meus objetivos.

A toda equipe do LEPES, em especial ao Prof. Dr. Daniel Domingues dos Santos, pela oportunidade e conhecimento que obtive trabalhando no laboratório.

A todos que de alguma forma, direta ou indireta, participaram dessa fase da minha vida.

“Faça o que for necessário para ser feliz. Mas não se esqueça que a felicidade é um sentimento simples, você pode encontrá-la e deixá-la ir embora por não perceber sua simplicidade.”.
(Mario Quintana)

Resumo

PRADO, D. S. **Localização horizontal de produtos sob efeito de rede**. 2016. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2016.

O modelo a ser apresentado consiste em um jogo de preço e localização entre duas firmas. Utiliza-se o pressuposto de que os consumidores têm sua utilidade positivamente afetada por um efeito de rede, ou seja, são diretamente influenciados pela tamanho da demanda do bem. Dispondo os consumidores uniformemente distribuídos dentro de um intervalo linear $[0, 1]$, buscamos encontrar os equilíbrios de preço e localização do jogo proposto. Verificamos que, dados os pressupostos do modelo, existem equilíbrios de Nash para cada subjogo e dependerão da força dos efeitos de rede. Quando os efeitos de rede são fortes o suficiente, os preços praticados serão inicialmente reduzidos até que o monopólio seja alcançado por uma das firmas, quando o preço será elevado e a outra firma passará a cobrar um preço nulo. No subjogo de localizações foi possível identificar que, no caso em que o poder do efeito de rede está acima de um determinado nível, as firmas não irão diferenciar seus produtos e se localizarão em algum ponto dentro do intervalo fechado $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

Palavras-chaves: Teoria do Jogos. Equilíbrio de Nash. Jogos Dinâmicos

Abstract

PRADO, S. P. **Horizontal localization of products under network effects** 2016. Dissertation (Master Degree) - Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2016.

The model to be presented is a price-location game between two firms. The assumption is that consumers' utility is positively affected by a network effect, i.e. it is directly influenced by the size of demand. Distributing consumers uniformly in a linear interval $[0, 1]$ we seek the price and location equilibrium of the proposed game. We found that, given the model assumptions, there are Nash equilibria for each subset that depend on the strength of network effects. When network effects are strong enough, prices are initially reduced until the monopoly is reached by one of the firms, then the price rises and the other firm shall charge a null price. In the subgame of locations, when the power of the network effect is above a certain level, the firms will not differentiate their products and will be located at any point within the closed interval $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

Key-words: Game Theory. Nash Equilibrium. Dynamics Games

Lista de ilustrações

Figura 1 – Convergência da diferença de demanda para $0 \leq \beta < 1$	26
Figura 2 – Simulação de $\Pi(l^{(i)}, \frac{1}{5})$, $J = 10$ e $v = 1$	38
Figura 3 – Simulação de $\Pi(l^{(i)}, \frac{2}{5})$, $J = 10$ e $v = 1$	39
Figura 4 – Equilíbrios de Nash de Γ	39

Sumário

	Sumário	10
1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Efeitos de Rede	11
1.2	Jogos de localização e preço	12
1.3	Jogos de localização e preço sob efeitos de rede	13
2	METODOLOGIA	15
3	MODELO	16
3.1	Utilidade do consumidor	16
3.2	Demanda de Curto Prazo	16
3.3	Jogo de localização e preço dinâmico	18
4	RESULTADOS	20
4.1	Notações e definições	20
4.2	Demanda de Longo Prazo	24
4.3	Equilíbrios de Preços	26
4.3.1	Equilíbrio sobre efeito de rede fraco	26
4.3.2	Equilíbrio sob efeito de rede forte	29
4.4	Pagamentos de Equilíbrio	32
4.5	Equilíbrios de Localização	33
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	41
	REFERÊNCIAS	43
	APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÕES	44

1 Introdução

A decisão sobre o preço e a diferenciação dos produtos entre as empresas foi objeto de estudo de alguns trabalhos, que se diferenciam pelas condições impostas à competição entre as firmas, e.g., a imposição de preços de reservas finitos (LERNER; SINGER, 1937) e a suposição de custos de transportes não lineares (D'ASPREMONT; GABSZEWICZ; THISSE, 1979). Neste estudo analisaremos o efeito de externalidades de rede sobre a diferenciação de produtos entre as firmas.

1.1 Efeitos de Rede

Efeitos de Rede positivos (ou externalidades de rede positivas) são verificados nas interações entre consumidores. Trata-se de um efeito sobre a decisão dos consumidores, que agregam valor a um produto consumido conforme mais pessoas consomem o mesmo produto.

Katz e Shapiro (1985) trazem alguns exemplos de casos nos quais a utilidade do consumidor é afetada positivamente pelos efeitos de rede. Eles evidenciam a presença de externalidades de rede nas tecnologias de comunicação, por exemplo no caso do telefone, no qual o indivíduo é beneficiado quando há um número grande de pessoas que também possuem telefone. Outro exemplo citado é a escolha do fabricante do computador: um número maior de clientes provavelmente gera um número maior de recursos disponíveis para aquele computador (softwares, acessórios etc.). O último exemplo trata de marcas populares, com as quais o consumidor se sente mais à vontade devido à experiência do fabricante, dando uma maior garantia de qualidade e melhor assistência ao produto, como no caso de automóveis.

Becker (1991) levanta outro exemplo de efeitos de rede, citando o caso de um restaurante que tem longas filas de espera e outro, com serviços similares, localizado logo à frente, sempre com mesas vazias, questionando por que o restaurante com filas não

aumenta seus preços diminuindo a demanda e aumentando a receita. A partir do exemplo do restaurante, Becker apresenta o problema de decisão do consumidor, concluindo que a demanda por este bem depende positivamente da demanda agregada pelo mesmo bem, ou seja, parte do valor do restaurante está vinculada à sua demanda elevada; aumentar o preço, diminuindo a fila de espera, pode gerar uma perda ainda maior de clientes.

Seguindo a linha de Becker, Karni e Levin (1994) descrevem um modelo mais formal para o exemplo dos restaurantes. Em seu trabalho eles buscam inicialmente desenvolver microfundamentos para demandas na presença de externalidade, para em seguida encontrar suporte às conclusões de Becker. Como resultado obtêm uma demanda positivamente inclinada para um certo intervalo de preço, mas destaca que outros fatores podem alterar o equilíbrio ao longo do tempo, pois seu resultado toma como dadas as preferências dos indivíduos, o que pode variar entre períodos.

Mais próximo do que pretendemos realizar nesse trabalho, um modelo dinâmico é construído por Cabral (2011), nele assume-se que há uma taxa de mortalidade e nascimento constante da população e as firmas, sujeitas ao efeito de rede, competem entre si pelos novos consumidores a cada período. Cada indivíduo tem um payoff positivo no momento que decide de qual firma consumir e a cada período da vida tem ganhos de utilidade provenientes somente do tamanho da demanda (externalidade de rede). As estratégias de equilíbrio dependem da força das externalidades de rede. Os resultados se aproximam dos esperados neste trabalho e, quando o poder das externalidades de rede é grande o suficiente, superando os outros fatores, o preço assume uma trajetória crescente e o mercado apresenta uma curva de oferta positivamente inclinada.

1.2 Jogos de localização e preço

Jogos de localização e preço permitem analisar os efeitos sobre a diferenciação entre produtos resultante da competição entre firmas. Segundo Vega-Redondo (2003), definindo que cada ponto no intervalo em análise determina as características do bem, a localização dos indivíduos mostra a preferência de cada consumidor e os custos de transporte podem

ser interpretados como o custo de consumir um produto com características diferentes ao de sua preferência.

Em seu artigo seminal e que introduziu a forma de análise como a que sugerimos, Hotelling (1929) propõe um modelo de localização e preço com duas empresas em que os indivíduos se distribuem uniformemente em um intervalo de tamanho l e demonstra que, em equilíbrio, as empresas teriam como estratégia ótima a mínima diferenciação, ambas se localizando no centro do intervalo. Hotelling também analisa se o equilíbrio irá maximizar o bem-estar dos indivíduos, no que ele chama de análise da questão do capitalismo versus socialismo, verificando se a soma do total de gastos com transporte pelos consumidores é minimizada. De acordo com Hotelling, o resultado contribui favoravelmente ao socialismo, dado que os custos de transporte não são minimizados em equilíbrio.

Posteriormente d'Aspremont, Gabszewicz e Thisse (1979) demonstram que os resultados encontrados por Hotelling não constituem um equilíbrio de Nash, e, portanto, o princípio da mínima diferenciação, baseado no trabalho de Hotelling, seria inválido.

1.3 Jogos de localização e preço sob efeitos de rede

Prado (2013) propõe um modelo de diferenciação de produtos em que firmas disputam por consumidores sujeitos a efeitos positivos de rede. Ele estuda como a diferenciação de produtos e a dinâmica de preços são afetadas pelo efeito de rede.

Os resultados obtidos por Prado foram ampliados em colaboração com Eyal Winter, da Universidade de Hebraica de Jerusalém, no âmbito da chamada FAPESP-HUJ (veja síntese em <http://agencia.fapesp.br/19801>). Esses resultados, em publicação, generalizam a resposta de Becker (1991), sob a suposição (técnica) de que o espaço de endereços é circular. Eles mostram que a polarização da demanda, observada por Becker, resulta da proximidade (similaridade) dos restaurantes e do tamanho máximo de coalizões desviantes, i.e., grupos de consumidores que coordenam suas decisões de consumo em conjunto.

Vale ressaltar que o exemplo do restaurante é apenas uma interpretação para os

resultados obtidos. Potencialmente esses resultados podem ser aplicados à concorrência entre redes de celular, cujas decisões de contratos são tomadas em grupos. Tecnicamente, tais grupos são caracterizados por subconjuntos do espaço de endereços de consumidores, que possuem medida positiva. Nesse contexto, o nível de diferenciação de produtos é dado pela diferenciação dos pacotes de serviços oferecidos.

O estudo de Prado identifica três padrões de diferenciação de produtos (mínima, intermediária e máxima diferenciação), cuja existência depende da relação entre o efeito de rede e o tamanho máximo de coalizões de consumidores.

Quando as externalidades são fortes o suficientes, Prado identifica que uma das firmas irá monopolizar o mercado praticando preços baixos inicialmente e elevando conforme a demanda aumenta, ou seja, há uma curva de oferta positivamente inclinada para um certo intervalo de preços. Cabral, Salant e Woroch (1999) avaliou o comportamento de monopolistas na presença de externalidades de rede e os resultados de seu modelo confirmam o comportamento encontrado por Prado.

No estudo de Cabral, que foca somente no jogo de preços em um mercado monopolista, sempre que as externalidades de rede tem força acima de um limite definido por parâmetros do modelo, o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos é caracterizado por uma estratégia de preço de entrada reduzido que aumenta conforme os efeitos de rede exercem impactos positivos na demanda da firma.

Ahlin e Ahlin (2013) descreve um modelo partindo das premissas iniciais de Hotelling (1929), incluindo externalidades de rede negativas, as quais se refere como congestionamento. Os resultados corroboram com os achados de Hotelling concluindo que o Princípio da Mínima diferenciação é válido nesse caso. Porém, as mesmas críticas feitas por d'Aspremont, Gabszewicz e Thisse (1979) ao trabalho de Hotelling, dado a linearidade dos custos, o que gera demandas descontínuas, podem ser levantadas, tratando-se portanto, também, de um caso específico que depende de suas premissas.

2 Metodologia

Neste estudo, analisaremos a diferenciação de produtos resultante da competição de duas firmas num mercado em que a utilidade dos consumidores é influenciada pelo efeito de rede. Focaremos nas localizações de equilíbrio das firmas em função da força do efeito de rede sobre os consumidores.

Em nosso modelo, diferentemente de Prado (2013),¹ trataremos o espaço de endereços no intervalo $[0, 1]$. A partir dessa alteração, acreditamos que os resultados permitirão identificar não só a diferenciação de produtos (distância entre as firmas), mas também as localizações de equilíbrio das firmas.

O trabalho é teórico. Usaremos o instrumental da Teoria dos Jogos, mais precisamente, jogos dinâmicos. Como ponto de partida, procuraremos por equilíbrios perfeitos em subjogos de um jogo de localização e preço descritos por uma função de utilidade de consumo que contempla efeitos de rede. Em seguida analisaremos as propriedades de tais equilíbrios (em particular, as localizações das firmas) em função dos parâmetros do modelo.

¹ Prado (2013) considerou um modelo circular de endereços de consumidores.

3 Modelo

Manteremos as demais premissas do modelo de Prado (2013). Consideraremos um modelo de diferenciação espacial de produto, similar ao modelo de Hotelling, em que a utilidade bruta de cada consumidor depende da fração de consumidores que optam pelo produto no tempo imediatamente anterior. O custo de transporte será tomado na mesma forma quadrática¹ vd^2 , onde v é um parâmetro positivo e d é a distância entre as firmas.

3.1 Utilidade do consumidor

A utilidade de um consumidor x que, no tempo t , opta por um produto i definida pela seguinte expressão:

$$U_x(i) = JN_{t-1}^{(i)} - P_t^{(i)} - C_x^{(i)} \quad (3.1)$$

onde x denota o consumidor, i é a firma escolhida pelo agente x , J é uma constante positiva (efeito de rede), $N_{t-1}^{(i)}$ é a fração de consumidores que optam pela firma i no tempo $t-1$, $P_t^{(i)}$ o preço cobrado pela firma i no tempo t e $C_x^{(i)}$ o custo de transporte quadrático (proporcional ao quadrado da distância entre o consumidor x e a localização da firma i).

3.2 Demanda de Curto Prazo

Sejam $l^{(1)}$ e $1-l^{(2)}$ as localizações das firmas no intervalo $[0, 1]$, onde, sem perda de generalidade, assumimos que $l^{(1)} \leq 1-l^{(2)}$. Definindo os custos de transportes quadráticos por $C_x^{(1)} = v(x - l^{(1)})^2$ e $C_x^{(2)} = v(x - (1 - l^{(2)}))^2$, onde $v \geq 0$, temos:

$$C_x^{(1)} = C_x^{(2)} \quad \forall x \in [0, 1] \text{ se e somente se } v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) = 0$$

¹ Essa suposição é meramente técnica. Veja d'Aspremont, Gabszewicz e Thisse (1979).

Portanto, sob a suposição $v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) = 0$, temos que $U_x(1) \geq U_x(2)$ se e somente se $JN_{t-1}^{(1)} - P_t^{(1)} \geq JN_{t-1}^{(2)} - P_t^{(2)}$. Como a última condição não depende de x , propomos:

$$N_t^{(1)} = \begin{cases} 1 & \text{se } P_t^{(1)} - P_t^{(2)} < J(N_{t-1}^{(1)} - N_{t-1}^{(2)}) \\ N_{t-1}^{(1)} & \text{se } P_t^{(1)} - P_t^{(2)} = J(N_{t-1}^{(1)} - N_{t-1}^{(2)}) \\ 0 & \text{se } P_t^{(1)} - P_t^{(2)} > J(N_{t-1}^{(1)} - N_{t-1}^{(2)}) \end{cases} \quad (3.2)$$

e conseqüentemente $N_t^{(2)} = 1 - N_t^{(1)}$.

Suponhamos agora $v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) > 0$. Neste caso, a diferença de custos $C_x^{(1)} - C_x^{(2)}$ depende do consumidor x , e a demanda da firma 1 (de localização esquerda da firma 2) no tempo t é determinada pela posição do consumidor indiferente nesse tempo:

$$N_t^{(1)} = \Pi_{[0,1]}(x), \text{ onde } U_x(1) = U_x(2) \quad (3.3)$$

onde $U_x(i)$ é a utilidade do consumidor de localização x definida em (3.1), e $\Pi_{[0,1]}$ é definida como: $\Pi_{[0,1]}(x) = x$ se $x \in [0, 1]$, $\Pi_{[0,1]}(x) = 1$ se $x > 1$ e $\Pi_{[0,1]}(x) = 0$ se $x < 0$.

Considerando os custos de transportes quadráticos e as função de utilidade do consumidor (3.1), a localização x do consumidor indiferente satisfaz:

$$JN_{t-1}^{(1)} - P_t^{(1)} - v(x - l^{(1)})^2 = JN_{t-1}^{(2)} - P_t^{(2)} - v(x - (1 - l^{(2)}))^2 \quad (3.4)$$

Resolvendo a equação (3.4) em x , e substituindo a solução em (3.3), segue:

$$\begin{aligned} N_t^{(1)} &= \Pi_{[0,1]} \left[\frac{l^{(1)} - l^{(2)} + 1}{2} + \frac{P_t^{(2)} - P_t^{(1)} + J(N_{t-1}^{(1)} - N_{t-1}^{(2)})}{2v(1 - l^{(1)} - l^{(2)})} \right] \\ N_t^{(2)} &= 1 - N_t^{(1)} = \Pi_{[0,1]} \left[\frac{l^{(2)} - l^{(1)} + 1}{2} + \frac{P_t^{(1)} - P_t^{(2)} + J(N_{t-1}^{(2)} - N_{t-1}^{(1)})}{2v(1 - l^{(1)} - l^{(2)})} \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Notemos que essas funções de demanda correspondem às funções de demanda apresentadas por d'Aspremont, Gabszewicz e Thisse (1979) no caso em que o efeito de

rede é nulo ($J = 0$). No caso em que esse efeito é positivo, a demanda do produto mais demandado no instante anterior é maior que a demanda de d'Aspremont, Gabszewicz e Thisse (1979), e vice-versa.

3.3 Jogo de localização e preço dinâmico

A estratégia $s^{(i)}$ de cada firma i é uma função da história passada do jogo h . No início do jogo, no tempo $t = 0$, a história do jogo é o conjunto vazio, $h = \emptyset$. No tempo $t = 0$, cada jogador escolhe uma localização $s^{(i)}(\emptyset)$ no intervalo $[0, 1]$, espaço de endereços dos consumidores. Após a escolha simultânea de suas localizações, cada jogador escolhe um preço $s^{(i)}(h)$ que dependerá da história não-vazia e não-terminal do jogo. Uma tal história h (não-vazia e não-terminal), pode assumir duas formas: $h = l(h)$ ou $h = (l(h), (P_1(h), N_1(h)), (P_2(h), N_2(h)) \dots (P_r(h), N_r(h)))$, onde $l(h) = (l^{(1)}(h), l^{(2)}(h))$, $P_t(h) = (P_t^{(1)}(h), P_t^{(2)}(h))$ e $N_t(h) = (N_t^{(1)}(h), N_t^{(2)}(h))$, $t = 1, 2, \dots, r$, sendo que $l^{(i)}(h)$ é a localização da firma i , e $P_t^{(i)}(h)$ e $N_t^{(i)}(h)$ são o preço e a demanda da firma i no tempo t segundo a história h . Denotamos o índice do último elemento de h por $\tau(h)$. Por exemplo, se $h = (l(h), (P_1(h), N_1(h)), (P_2(h), N_2(h)))$, então $\tau(h) = 2$. Denotaremos por $\mathcal{H}$ e $\bar{\mathcal{H}}$ o conjunto das histórias não-terminais (finitas) e terminais (infinitas) do jogo, respectivamente.

Dada a dependência $N_t = \phi(l, N_{t-1}, P_t)$ apresentada em (3.5), denotamos por $\mathcal{O}(s) \in \bar{\mathcal{H}}$ a história terminal que resulta da interação das estratégias $s^{(1)}$ e $s^{(2)}$, onde utilizaremos as seguintes notações abreviadas: $l^{(i)}(s) = l^{(i)}(\mathcal{O}(s))$, $P_t^{(i)}(s) = P_t^{(i)}(\mathcal{O}(s))$, e $N_t^{(i)}(s) = N_t^{(i)}(\mathcal{O}(s))$. Em palavras, $l^{(i)}(s)$, $P_t^{(i)}(s)$, e $N_t^{(i)}(s)$ são, respectivamente, a localização, o preço, e a demanda da firma i no tempo t , que resultam da interação das estratégias $s^{(1)}$ e $s^{(2)}$. Mais especificamente, os vetores $l(s)$, $P_t(s)$, e $N_t(s)$ são definidos indutivamente como segue: No tempo $t = 0$, cada jogador i escolhe uma localização segundo sua estratégia $s^{(i)}$: $l(s) = (s^{(1)}(\emptyset), s^{(2)}(\emptyset))$. Em seguida (ainda no tempo $t = 0$), a natureza escolhe um estado ω uniformemente no intervalo $\Omega = [0, 1]$, representando a demanda inicial da firma 1, isto é, $N_0^{(1)}(s)$ e $N_0^{(2)}(s)$ são variáveis aleatórias definidas

por $N_0^{(1)}(s)(\omega) = N_0^{(1)}(\omega) = \omega$ e $N_0^{(2)}(s)(\omega) = N_0^{(2)}(\omega) = 1 - \omega$. No tempo 1, cada jogador i observa apenas o vetor de localizações $l(s)$ e escolhem seu primeiro preço, isto é, $P_1^{(i)}(s) = s^{(i)}(l(s))$. Dado os vetores bidimensionais $l(s)$, $N_0(s)$ e $P_1(s)$, o vetor de demandas no tempo 1 é definido por $N_1(s) = \phi(l(s), N_0(s), P_1(s))$, formando a história $l(s), (P_1(s), N_1(s))$. Uma vez gerada a história $\mathcal{O}_t(s)$ até o tempo t , onde $\mathcal{O}_t(s) = (l(s), (P_1(s), N_1(s)), (P_2(s), N_2(s)) \dots (P_t(s), N_t(s)))$, $t \geq 1$, os vetores $P_{t+1}(s)$ e $N_{t+1}(s)$, são definidos por $P_{t+1}(s) = (s^{(1)}(\mathcal{O}_t(s)), s^{(2)}(\mathcal{O}_t(s)))$ e $N_{t+1}(s) = \phi(l(s), N_t(s), P_{t+1}(s))$.

Dado um perfil de estratégias s , a função de pagamento $\pi^{(i)}(s)$ do jogador i será dada pelo valor esperado do lucro médio de i ao longo do tempo (supondo custo zero),² isto é

$$\pi^{(i)}(s) = \mathbb{E}\left(V_s(N_0(s))\right), \quad V_s(N_0(s)) = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T N_t^{(i)}(s) P_t^{(i)}(s) \quad (3.6)$$

onde $\mathbb{E}$ é operador esperança.

Observação. O operador $\mathbb{E}$ é necessário pois o vetor de demandas iniciais N_0 é aleatório. Vale notar que $V_s(N_0)$ é função de s e N_0 . Assim, toda a aleatoriedade de $V_s(N_0)$ vem da aleatoriedade de N_0 .

Em (3.6), tomamos o $\liminf$ (limite inferior) do lucro médio ao longo do tempo porque o $\liminf$ sempre existe, enquanto que o $\lim$ (limite simples) pode não existir, a depender do perfil de estratégias s . Para maiores detalhes a respeito, veja Fudenberg e Tirole (1991), p.148.

² Toma-se como pressuposto que os indivíduos são “completamente pacientes”, ver Fudenberg e Tirole (1991)

4 Resultados

4.1 Notações e definições

Introduziremos as seguintes notações e definições.

1) $\mathbf{G}$ é o jogo (entre firmas) definido na seção anterior, $\mathbf{G}(h)$ é o subjogo de G que se inicia imediatamente após história h de G , onde $\mathbf{G}(\emptyset) = \mathbf{G}$, sendo $\emptyset$ a história vazia. Os conjuntos de histórias não-terminais e terminais de $G(h)$ serão denotados por $\mathcal{H}(h)$ e $\bar{\mathcal{H}}(h)$, respectivamente, onde $\bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}(\emptyset)$ e $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\emptyset)$. Quando $h = (l^{(1)}, l^{(2)})$, isto é, quando h for a história das localizações, usaremos as notações $\mathbf{G}(l)$, $\mathcal{H}(l)$ e $\bar{\mathcal{H}}(l)$ no lugar de $G(h)$, $\mathcal{H}(h)$ e $\bar{\mathcal{H}}(h)$, respectivamente. Se $h \neq \emptyset$, então $\mathcal{H}(h) = \cup_{r=1}^{\infty} (\mathbb{R}_+^2 \times [0, 1]^2)^{\{1, 2, \dots, r\}}$ e $\bar{\mathcal{H}}(h) = (\mathbb{R}_+^2 \times [0, 1]^2)^{\{1, 2, \dots\}}$, onde $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Assim, se $h' \in \mathcal{H}(h)$, então $h' = ((P_1(h'), N_1(h')), (P_2(h'), N_2(h')) \dots (P_r(h'), N_r(h')))$ para algum $r \geq 1$. Se $h' \in \bar{\mathcal{H}}(h)$, então $h' = ((P_1(h'), N_1(h')), (P_2(h'), N_2(h')) \dots)$. Uma estratégia de $G(h)$ é uma função $s^{(i)} : \{\emptyset\} \cup \mathcal{H}(h) \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Se s é um perfil de estratégias de $G(h)$, $h \neq \emptyset$, denotaremos $l(s) = l(h)$ e definiremos a variável aleatória $N_0(s)$, indexada por s , como segue

$$N_0(s)(\omega) = \begin{cases} \omega & \text{se } \tau(h) = 0 \\ N_{\tau(h)}(h) & \text{se } \tau(h) > 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Nestes dois casos ($\tau(h) = 0$ e $\tau(h) > 0$), $P_t^{(i)}(s)$ e $N_t^{(i)}(s)$, $t \geq 1$ serão computados da mesma forma indutiva que no caso $h = \emptyset$. Denotaremos a função de pagamento de $G(h)$ por π_h . Dada a convenção estabelecida em (4.1), temos

$$\pi_h(s) = \begin{cases} \mathbb{E}(V_s(N_0)) \Big|_{l(s)=l(h)} & \text{se } \tau(h) = 0 \\ V_s(N_{\tau(h)}(h)) \Big|_{l(s)=l(h)} & \text{se } \tau(h) > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Vale observar que $V_s(N_{\tau(h)}(h)) \Big|_{l(s)=l(h)}$ não é aleatório.

2) Para cada história terminal $h' \in \bar{\mathcal{H}}(h)$ e estratégia $s^{(i)}$ de $G(h)$, denotaremos por $\tau(s^{(i)}, h')$, o tempo em que o jogador i “para de monitorar o jogo” $G(h)$ ao longo de h' quando ele adota a estratégia $s^{(i)}$. Mais especificamente:

$$\tau(s^{(i)}, h') = \min \left\{ n \geq \eta(h) - 1 \mid \forall \bar{h} \in \bar{\mathcal{H}}(h) \text{ com } \bar{h}_n = h'_n : s^{(i)}(\bar{h}_r) = s^{(i)}(h'_r) \forall r \geq n \right\}$$

onde $\eta(h) = 0$ se $h = \emptyset$, e $\eta(h) = 1$ se $h \neq \emptyset$, e $\bar{h}_{\eta(h)-1} = \emptyset$ (história vazia). Para $n \geq n(h)$, $\bar{h}_n$ denota a restrição da história terminal $\bar{h}$ ao conjunto de tempos $\{\eta(h), \eta(h) + 1, \dots, n\}$. Definimos h'_n de forma similar. Adotaremos a seguinte convenção: $\min(\emptyset) = \infty$.

2') Se existir uma história terminal $\bar{h} \in \bar{\mathcal{H}}(h)$, onde $h' = \bar{h}_{\tau(h')}$ e $\tau(s^{(i)}, \bar{h}) \leq \tau(h')$, então definiremos $\tau(s^{(i)}, h') = \tau(s^{(i)}, \bar{h})$. Note que a definição de $\tau(s^{(i)}, h')$ não depende de $\bar{h}$, pois para qualquer outro $\bar{\bar{h}}$, onde $h' = \bar{\bar{h}}_{\tau(h')}$ e $\tau(s^{(i)}, \bar{\bar{h}}) \leq \tau(h')$, vale $\tau(s^{(i)}, \bar{\bar{h}}) = \tau(s^{(i)}, \bar{h})$.

3) Se s é um perfil de estratégias do subjogo $G(h)$, adotaremos a notação abreviada $\tau^{(i)}(s) = \tau(s^{(i)}, \mathcal{O}(s))$, onde $\mathcal{O}(s)$ denota a história terminal gerada pela interação das estratégias $s^{(1)}$ e $s^{(2)}$. Em palavras, $\tau^{(i)}(s)$ é o último tempo em que o jogador i monitora o jogo $G(h)$. A partir do tempo $\tau^{(i)}(s) + 1$, o jogador passa a repetir a mesma ação $s^{(i)}(\mathcal{O}_{\tau^{(i)}(s)}(s))$, onde $\mathcal{O}_{\tau^{(i)}(s)}(s)$ denota a restrição da história terminal $\mathcal{O}(s)$ ao conjunto de tempos $\{0, 1, 2, \dots, \tau^{(i)}(s)\}$. Mais especificamente, vale $s^{(i)}(\mathcal{O}_t(s)) = s^{(i)}(\mathcal{O}_{\tau^{(i)}(s)}(s))$ for all $t \geq \tau^{(i)}(s)$.

4) **Estratégia Fracamente Estacionária (EFE) de $G(h)$.** Uma estratégia $s^{(i)}$ do jogo $G(h)$ é fracamente estacionária se, para qualquer estratégia $s^{(j)}$ do oponente de i ($s^{(j)}$ não necessariamente fracamente estacionária), $\tau^{(i)}(s)$ for quase certamente finito.

5) Para cada estratégia de $s^{(i)}$ de $G(h)$, denotaremos por $\mathcal{H}(s^{(i)})$ o conjunto de histórias não terminais e resultantes em $G(h)$, nas quais o jogador i monitora o jogo $G(h)$, isto é,

$$\mathcal{H}(s^{(i)}) = \bigcup_{s^{(j)}} \left\{ \mathcal{O}_t(s^{(i)}, s^{(j)}) \mid \eta(h) - 1 \leq t \leq \tau^{(i)}(s^{(i)}, s^{(j)}) \right\} \quad (4.3)$$

onde $\mathcal{O}_t(s^{(i)}, s^{(j)})$ denota a restrição da história terminal $\mathcal{O}(s^{(i)}, s^{(j)})$ ao conjunto de tempos $\{\eta(h)-1, \eta(h), \dots, t\}$. A união em (4.3) é tomada sobre todas as estratégias $s^{(j)}$ do oponente de i . Note que a história vazia pertence $\mathcal{H}(s^{(i)})$.

6) **Equilíbrio Fracamente Estacionário de $G(h)$ para $h \neq \emptyset$.** Um perfil de estratégias fracamente estacionárias s_* de $G(h)$ para $h \neq \emptyset$ é um Equilíbrio Perfeito em Subjogos de Estratégias Fracamente Estacionárias, ou simplesmente Equilíbrio Fracamente Estacionário (EFE) de $G(h)$ se, para cada jogador i e cada história $h' \in \mathcal{H}(s_*^{(i)})$, e cada estratégia fracamente estacionária $s^{(i)}$ do subjogo $G(hh')$ valer:

$$\pi_{hh'}^{(i)}(s_*^{(i)} | h'), (s_*^{(j)} | h')) \geq \pi_{hh'}^{(i)}(s^{(i)}, (s_*^{(j)} | h')) \quad (4.4)$$

Acima, $\pi_{hh'}^{(i)}$ é a função de pagamento do subjogo $G(hh')$, e $(s_*^{(i)} | h')$ denota a estratégia que $s_*^{(i)}$ induz no subjogo $G(hh')$. A notação $(s_*^{(j)} | h')$ é empregada de forma similar. Vale observar que $\pi_{h\emptyset}^{(i)} = \pi_h^{(i)}$, e $(s_*^{(i)} | \emptyset) = s_*^{(i)}$, onde $\emptyset$ denota a história vazia, e $\pi_h^{(i)}$ denota a função de pagamento do subjogo $G(h)$.

7) **Equilíbrio Fracamente Estacionário de G .** O perfil de estratégias s_* de G é um Equilíbrio Fracamente Estacionário de G se, para cada jogador i , cada vetor de localizações $l = (l^{(1)}, l^{(2)})$, e estratégia $s^{(i)}$ de G , valer:

$$\begin{aligned} I) \quad & \pi^{(i)}(s_*^{(i)}, s_*^{(j)}) \geq \pi^{(i)}(s^{(i)}, s_*^{(j)}) \\ II) \quad & \forall l \in [0, 1]^2 : ((s_*^{(i)} | l), (s_*^{(j)} | l)) \text{ é um EFE de } G(l) \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde lembramos que $G(l)$ denota o subjogo de preço que se inicia após a história de localizações $l = (l^{(1)}, l^{(2)})$, sendo $(s_*^{(i)} | l)$ e $(s_*^{(j)} | l)$ as estratégias induzidas no subjogo $G(l)$ por $s_*^{(i)}$ e $s_*^{(j)}$, respectivamente.

Observação sobre estacionariedade fraca. Os tempos $0, 1, 2, \dots, \tau^{(i)}(s)$ são os tempos em que o jogador i monitora o jogo G no perfil de estratégia s . Ações tomadas a partir do tempo $\tau^{(i)}(s) + 1$ são constantes no tempo e dependem somente da história do jogo até o tempo $\tau^{(i)}(s)$. Consideraremos apenas estratégias fracamente estacionárias, isto é, estratégias em que $\tau^{(i)}(s)$ é quase certamente finito.

Um exemplo simples de estratégia fracamente estacionária é o seguinte. Suponha que o jogador i mantenha seu preço igual 0 até que ele monopolize o mercado ou até que o tempo $t = 10$ seja alcançado. Se ele monopolizar o mercado num tempo $t_* < 10$, então ele passa repetir o preço 7,3 em todos os tempos subsequentes $t_* + 1, t_* + 2 \dots$

independentemente da história do jogo a se formar nesses tempos. Se ele não monopolizar o mercado até o tempo $t = 10$, ele continua a jogar um preço igual a zero em todos os tempos subsequentes $11, 12, 13, \dots$. Neste exemplo, $\tau^{(i)}(s) \leq 10$. O valor exato de $\tau^{(i)}(s)$ depende de s e também da natureza que determina (ao acaso) as demandas iniciais $N_0^{(i)}(s)$. Isso significa que $\tau^{(i)}(s)$ é uma variável aleatória quase certamente finita.

Vale observar que o exemplo acima é bastante simples. Em geral, estratégias fracamente estacionárias são bem mais flexíveis comparadas a estratégias estacionárias em que cada jogador escolha sempre a mesma ação ao longo do tempo. Note que o horizonte de monitoramento do jogo $\tau^{(i)}(s)$ depende de toda a história do jogo $\mathcal{O}(s)$, e portanto $\tau^{(i)}(s)$ pode ser arbitrariamente grande. Note também que o preço constante, jogado a partir de $\tau^{(i)}(s) + 1$, depende da história anterior do jogo, formada até $\tau^{(i)}(s)$. Finalmente, observamos que um Equilíbrio Fracamente Estacionário requer perfeição em subjogos (condição (4.4)). Portanto, equilíbrios não críveis baseados em ameaças não críveis estão excluídos.

Em suma, a suposição de estacionariedade fraca pressupõe que cada jogador inicialmente monitora o jogo até levá-lo a um estado desejado, e quando esse estado é alcançado (ou quando ele se mostra inviável de ser alcançado), o jogador repete uma mesma ação sem mais levar em conta o comportamento do oponente. O motivo que nos levou a optar por esse refinamento de equilíbrio é que ele nos parece plausível do ponto de vista comportamental e, ao mesmo tempo, é flexível o suficiente para capturarmos diferentes tipos de equilíbrios (cujos limites de preço e demanda são unicamente determinados). Por outro lado, o refinamento de equilíbrio também é restritivo o suficiente a fim de evitarmos uma multiplicidade de equilíbrios que poderia ocorrer quando jogadores cooperam entre si mediante a adoção de estratégias de retaliações (veja *Folk Theorems* em Fudenberg e Tirole (1991)). Vale observar que tais estratégias de retaliação exige que cada jogador monitore o comportamento do oponente permanentemente, o que justamente esta sendo excluído no presente refinamento de equilíbrio.

4.2 Demanda de Longo Prazo

Para não carregar a notação, adotaremos as seguintes abreviações $l^{(i)} = l^{(i)}(s)$, $N_t^{(i)} = N_t^{(i)}(s)$, $P_t^{(i)} = P_t^{(i)}(s)$ e $p^{(i)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_t^{(i)}(s)$ sempre que as afirmações subjacentes referentes $l^{(i)}(s)$, $N_t^{(i)}(s)$, $P_t^{(i)}(s)$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t^{(i)}(s)$ valerem para um perfil arbitrário de estratégias fracamente estacionárias s .

Para facilitar a análise, é conveniente considerar a dinâmica da diferença de demanda dada por:

$$m_t^{(i)} = N_t^{(i)} - N_t^{(j)} \quad (4.6)$$

No caso em que $v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) = 0$, segue de (3.2):

$$m_t^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{se } P_t^{(i)} - P_t^{(j)} < Jm_{t-1}^{(i)} \\ m_{t-1}^{(i)} & \text{se } P_t^{(i)} - P_t^{(j)} = Jm_{t-1}^{(i)} \\ -1 & \text{se } P_t^{(i)} - P_t^{(j)} > Jm_{t-1}^{(i)} \end{cases} \quad (4.7)$$

No caso em que $v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) > 0$, segue de (3.5):

$$m_t^{(i)} = \Pi_{[-1,1]} \left[l^{(i)} - l^{(j)} + \frac{P_t^{(j)} - P_t^{(i)}}{v(1 - l^{(1)} - l^{(2)})} + \frac{J}{v(1 - l^{(1)} - l^{(2)})} m_{t-1}^{(i)} \right] \quad (4.8)$$

onde $\Pi_{[-1,1]}$ é definida por $\Pi_{[-1,1]}(x) = x$ se $|x| \leq 1$, e $\Pi_{[-1,1]}(x) = \frac{x}{|x|}$ se $|x| > 1$.

Vale notar que m_t possui a seguinte estrutura:

$$m_t^{(i)} = \Pi_{[-1,1]} [\beta m_{t-1}^{(i)} + \alpha_t^{(i)}] \quad (4.9)$$

onde

$$\beta = \frac{J}{v(1 - l^{(1)} - l^{(2)})}, \quad \alpha_t^{(i)} = l^{(i)} - l^{(j)} + \frac{P_t^{(j)} - P_t^{(i)}}{v(1 - l^{(1)} - l^{(2)})} \quad (4.10)$$

A proposição a seguir será útil para caracterizarmos os equilíbrios fracamente estacionários de $G(l)$ no caso em que $\beta < 1$.

Proposição 4.2.1. *Seja $0 \leq \beta < 1$. Suponha que exista t_0 tal que $\alpha_t^{(i)} = \alpha_{t_0}^{(i)}$ para $t \geq t_0$. Se $m_t^{(i)} = \Pi_{[-1,1]} [\beta m_{t-1}^{(i)} + \alpha_t^{(i)}]$, $t = 1, 2, \dots$. Então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_t^{(i)} = \Pi_{[-1,1]} \left(\frac{\alpha_{t_0}^{(i)}}{1 - \beta} \right) \quad (4.11)$$

Demonstração da Proposição 4.2.1. Suponha inicialmente que $m_t^{(i)}$ converge para um número $m_*^{(i)}$. Neste caso, $m_*^{(i)}$ é um ponto fixo de $m \mapsto \Pi_{[-1,1]} [\beta m + \alpha_{t_0}^{(i)}]$, pois:

$$m_*^{(i)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pi_{[-1,1]} [\beta m_{t-1}^{(i)} + \alpha_t^{(i)}] = \Pi_{[-1,1]} \left[\beta \left(\lim_{t \rightarrow \infty} m_{t-1}^{(i)} \right) + \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t^{(i)} \right] = \Pi_{[-1,1]} [\beta m_*^{(i)} + \alpha_{t_0}^{(i)}]$$

Levando em conta a condição $0 \leq \beta < 1$, a equação $m_*^{(i)} = \Pi_{[-1,1]} [\beta m_*^{(i)} + \alpha_{t_0}^{(i)}]$ possui uma única solução em $m_*^{(i)}$. Essa solução é dada pelo lado direito da equação (4.11).

Resta provar que $m_t^{(i)}$ é convergente. Suponha inicialmente $I) m_{t_0}^{(i)} \geq \frac{\alpha_{t_0}^{(i)}}{1-\beta}$. Se multiplicarmos $I)$ por $(1 - \beta)$, obtemos $m_{t_0}^{(i)} \geq \beta m_{t_0}^{(i)} + \alpha_{t_0}^{(i)}$. Por outro lado, como $\frac{\alpha_{t_0}^{(i)}}{1-\beta}$ é o ponto fixo de $m \mapsto \beta m + \alpha_{t_0}^{(i)}$, aplicando esta função dos dois lados da inequação $I)$, também obtemos: $\beta m_{t_0}^{(i)} + \alpha_{t_0}^{(i)} \geq \frac{\alpha_{t_0}^{(i)}}{1-\beta}$. Resumindo, de $I)$ obtemos $II) m_{t_0} \geq \beta m_{t_0}^{(i)} + \alpha_{t_0}^{(i)} \geq \frac{\alpha_{t_0}^{(i)}}{1-\beta}$. Aplicando a função não-decrescente $x \mapsto \Pi_{[-1,1]}(x)$ às inequações em $II)$ obtemos: $m_{t_0}^{(i)} \geq m_{t_0+1}^{(i)} \geq \Pi_{[-1,1]}(\frac{\alpha_{t_0}^{(i)}}{1-\beta})$. Partindo das últimas três inequações, podemos repetir o mesmo argumento e obter $m_{t_0}^{(i)} \geq m_{t_0+1}^{(i)} \geq m_{t_0+2}^{(i)} \geq \Pi_{[-1,1]}(\frac{\alpha_{t_0}^{(i)}}{1-\beta})$. Por indução, concluímos que $m_{t_0}^{(i)} \geq m_{t_0+1}^{(i)} \geq m_{t_0+2}^{(i)} \geq \dots \geq m_{t_0+n}^{(i)} \geq \Pi_{[-1,1]}(\frac{\alpha_{t_0}^{(i)}}{1-\beta})$. Isto é, $(m_t^{(i)})_{t \geq t_0}$ é não-crescente, limitada inferiormente por $\Pi_{[-1,1]}(\frac{\alpha_{t_0}^{(i)}}{1-\beta})$ e portanto convergente. Se $m_{t_0}^{(i)} < \frac{\alpha_{t_0}^{(i)}}{1-\beta}$ podemos provar de forma análoga que $(m_t^{(i)})_{t \geq t_0}$ é não-decrescente, limitada superiormente por $\Pi_{[-1,1]}(\frac{\alpha_{t_0}^{(i)}}{1-\beta})$ e portanto convergente. Q.E.D. (Veja Figura 1).

Figura 1 – Convergência da diferença de demanda para $0 \leq \beta < 1$.

4.3 Equilíbrios de Preços

Nesta seção apresentaremos os equilíbrios do subjogo $G(l)$ de preço para cada par $l = (l^{(1)}, l^{(2)})$ de localizações fixas. Separaremos os equilíbrios em quatro casos: I) $0 \leq J < v(1 - l^{(1)} - l^{(2)})$, II) $0 \leq v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) < J$, III) $0 < v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) = J$ e $l^{(1)} \neq l^{(2)}$ e IV) $0 < v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) = J$ e $l^{(1)} = l^{(2)}$.

4.3.1 Equilíbrio sobre efeito de rede fraco

Suponha $0 \leq J < v(1 - l^{(1)} - l^{(2)})$. Neste caso, a diferença de demanda segue a fórmula recursiva em (4.9). Seja $p^{(i)}$ o preço limite do jogador i em um perfil arbitrário de estratégias fracamente estacionárias s de $G(l)$. Então existe um t_0 tal que $\alpha_t^{(i)} = \alpha_{t_0}^{(i)}$ para $t \geq t_0$, onde $\alpha_t^{(i)} = l^{(i)} - l^{(j)} + \frac{P_t^{(j)} - P_t^{(i)}}{v(1 - l^{(1)} - l^{(2)})}$, $P_0^{(i)} = p^{(i)}$ e $P_0^{(j)} = p^{(j)}$. Segue de (4.9), (4.10) e da Proposição 4.2.1:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (N_t^{(1)} - N_t^{(2)}) &= \Pi_{[-1,1]} \left(\frac{l^{(1)} - l^{(2)} + \frac{p^{(j)} - p^{(i)}}{v(1 - l^{(1)} - l^{(2)})}}{1 - \frac{J}{v(1 - l^{(1)} - l^{(2)})}} \right) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (N_t^{(1)} + N_t^{(2)}) &= 1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Assim, o limite de demanda é $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t^{(i)}$ é função dos limites de preço: $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t^{(i)} = D^{(i)}(p^{(1)}, p^{(2)})$, onde

$$D^{(i)}(p^{(1)}, p^{(2)}) = \Pi_{[0,1]} \left(\frac{p^{(j)} - p^{(i)} + v(l^{(i)} - l^{(j)})(1 - l^{(i)} - l^{(j)})}{2(v(1 - l^{(i)} - l^{(j)}) - J)} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.13)$$

Como a função de pagamento (3.6) é dada pela média dos lucros ao longo do tempo, o pagamento do jogador i em um perfil de estratégias fracamente estacionária é $\pi_l^{(i)}(s) = \mathbb{E}\left(F^{(i)}\left(p^{(1)}(s), p^{(2)}(s)\right)\right)$, onde

$$F^{(i)}\left(p^{(1)}, p^{(2)}\right) = D^{(i)}\left(p^{(1)}, p^{(2)}\right)p^{(i)} \quad (4.14)$$

onde $D^{(i)}$ é dada por (4.13).

Note que o pagamento $\pi_l^{(i)}(s)$ da firma i depende de s apenas através dos limites de preço $p^{(1)}(s)$ e $p^{(2)}(s)$ (no caso $0 \leq J < v(1 - l^{(1)} - l^{(2)})$). Resulta desse fato que s_* é um equilíbrio fracamente estacionário de $G(l)$ se e somente se, com probabilidade 1, $(p^{(1)}(s_*), p^{(2)}(s_*))$ for um equilíbrio de Nash do jogo estático com função de pagamento $F^{(i)}(p^{(1)}, p^{(2)})$ definida em (4.14), vide Proposição 4.3.2. A proposição a seguir apresenta o único equilíbrio de Nash do jogo estático com função de pagamento (4.14).

Proposição 4.3.1. *Seja $0 \leq J < v(1 - l^{(1)} - l^{(2)})$. Então o jogo estático com função de pagamento $F^{(i)}(p^{(1)}, p^{(2)})$ (apresentada em (4.14)), possui um único equilíbrio de Nash em estratégias puras $p_*^{(i)}(l)$, $i = 1, 2$ que é função de $l = (l^{(1)}, l^{(2)})$ e é definido por:*

$$p_*^{(i)}(l) = \begin{cases} 0 & \text{se } l^{(i)} - l^{(j)} \leq -\frac{3(T-J)}{T} \\ \frac{T}{3}(l^{(i)} - l^{(j)}) + (T - J) & \text{se } -\frac{3(T-J)}{T} < l^{(i)} - l^{(j)} \leq \frac{3(T-J)}{T} \\ T(l^{(i)} - l^{(j)}) - (T - J) & \text{se } l^{(i)} - l^{(j)} > \frac{3(T-J)}{T} \end{cases} \quad (4.15)$$

onde $T = v(1 - l^{(i)} - l^{(j)})$.

A demonstração da Proposição 4.3.1 será apresentada no apêndice. A partir da Proposição 4.3.1 e das considerações que a antecedem, obtemos a seguinte Proposição. O corolário será demonstrado mais adiante.

Proposição 4.3.2. *Seja $0 \leq J < v(1 - l^{(1)} - l^{(2)})$, e $p_*^{(i)}(l)$ definido em (4.15). O jogo $G(l)$ possui pelo menos um equilíbrio fracamente estacionário. Além disso, para todo EFE*

$\mathfrak{s}$ de $G(l)$ vale:

$$p^{(i)}(\mathfrak{s}) = p_*^{(i)}(l) \quad \text{quase certamente} \quad (4.16)$$

Em particular, a demanda limite e o pagamento do jogador i no equilíbrio fracamente estacionário $\mathfrak{s}$ são dados por $\lim_{t \rightarrow \infty} N^{(i)}(\mathfrak{s}) = D^{(i)}(p_*^{(1)}(l), p_*^{(2)}(l))$ quase certamente e

$$\pi_l^{(i)}(\mathfrak{s}) = \Pi^{(i)}(l) = D^{(i)}(p_*^{(1)}(l), p_*^{(2)}(l)) p_*^{(1)}(l) \quad (4.17)$$

onde $D^{(i)}$ é dada por (4.13) e $p_*^{(i)}(l)$ definido em (4.15).

Observações. Note que, sob a suposição de que $J = 0$, o preço-limite de equilíbrio coincide com o preço de equilíbrio de d'Aspremont, Gabszewicz e Thisse (1979), que é $p_*^{(i)} = \frac{T}{3}(l^{(i)} - l^{(j)}) + T$. Note ainda que esse preço nunca zera sob a suposição $T > 0$ (custo de transporte positivo entre firmas), isso ocorre pois $l^{(i)} - l^{(j)} \geq -1$. A existência de efeito J torna possível um preço de equilíbrio igual zero, mesmo sob a suposição $T > 0$. Suponha por exemplo $l^{(j)} \geq l^{(i)} + \delta$ para algum $0 < \delta < 1$, e $J = T(1 - (\delta/3))$. Neste caso vale $l^{(i)} - l^{(j)} \leq -\delta = -\frac{3(T-J)}{T}$. Assim, segundo (4.15), temos $p_*^{(i)}(l) = 0$.

Demonstração da Proposição 4.3.2. Vamos inicialmente mostrar que $G(l)$ possui pelo menos um EFE. Para cada jogador i , seja $\mathfrak{s}^{(i)}(h) = p_*^{(i)}(l)$, $\forall h \in \mathcal{H}(l)$, onde $p_*^{(i)}(l)$ é dado por (4.15). Por definição de $\mathfrak{s}^{(i)}$, $\mathcal{H}(\mathfrak{s}^{(i)}) = \emptyset$. Isto é, o jogador i não monitora o jogo quando ele aplica $\mathfrak{s}^{(i)}$. Portanto, é suficiente verificar $\pi_l(s^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)}) \leq \pi_l(\mathfrak{s})$. Seja $s = (s^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)})$, então

$$F^{(i)}[p(s)] = F^{(i)}[p^{(i)}(s), p_*^{(j)}(l)] \leq F^{(i)}[p_*^{(i)}(l), p_*^{(j)}(l)] = F^{(i)}[p(\mathfrak{s})]$$

Consequentemente, $\pi_l(s^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)}) = \mathbb{E}[F^{(i)}(p(s))] \leq \mathbb{E}[F^{(i)}(p(\mathfrak{s}))] = \pi_l(\mathfrak{s})$.

Seja $\mathfrak{s}$ um equilíbrio fracamente estacionário de $G(l)$. Vamos mostrar que $p(\mathfrak{s}) = p_*(l)$ quase certamente. Suponha por contradição que $\mathbb{P}(p(\mathfrak{s}) \neq p_*(l)) > 0$. Assim, existe um jogador i tal que o seguinte evento ocorre com probabilidade positiva: $\Omega^{(i)} = \left\{ F^{(i)}[B^{(i)}(p^{(j)}(\mathfrak{s})), p^{(j)}(\mathfrak{s})] > F^{(i)}[p^{(i)}(\mathfrak{s}), p^{(j)}(\mathfrak{s})] \right\}$, onde $B^{(i)}$ denota a função de melhor resposta do jogador i no jogo estático com função de pagamento $F^{(i)}$ definido em (4.14).

Neste caso, o jogado i poderia fazer melhor adotando a seguinte estratégia.

$$s^{(i)}(h) = \begin{cases} B^{(i)}(P_{t_*}^{(j)}(h)), & \text{se } \tau(h) \geq t_* > \tau^{(j)}(\mathfrak{s}, h) \\ \mathfrak{s}^{(i)}(h), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.18)$$

De fato, se $s = (s^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)})$, então $p^{(i)}(s) = B^{(i)}(p^{(j)}(\mathfrak{s}))$ e $p^{(j)}(s) = p^{(j)}(\mathfrak{s})$ quase certamente. Portanto, $F^{(i)}[p(s)] = F^{(i)}[B^{(i)}(p^{(j)}(\mathfrak{s})), p^{(j)}(\mathfrak{s})] \geq F^{(i)}[p(\mathfrak{s})]$. Como a desigualdade estrita ocorre com probabilidade positiva, isto é, como $\Omega^{(i)}$ ocorre com probabilidade positiva, segue que

$$\pi_l^{(i)}(s^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)}) = \mathbb{E}\left[F^{(i)}(p^{(i)}(s), p^{(j)}(s))\right] > \mathbb{E}\left[F^{(i)}(p^{(i)}(\mathfrak{s}), p^{(j)}(\mathfrak{s}))\right] = \pi_l^{(i)}(\mathfrak{s})$$

o que contraria o fato de $\mathfrak{s}$ ser um EFE. Q.E.D.

4.3.2 Equilíbrio sob efeito de rede forte

Se o efeito de rede J é maior que um valor crítico, os resultados se modificam substancialmente. Nesse caso, ambos os jogadores fixam seus preços iniciais no nível mais baixo possível (a fim de monopolizar o mercado) e, uma vez que um jogador i monopoliza o mercado, ele aumenta seu preço até um preço-limite $\mathcal{P}^{(i)}(l)$ ao qual o monopólio não se perde para a firma concorrente (que potencialmente poderia entrar no mercado novamente). A lógica por trás desse comportamento de mercado é que, sob forte efeito de rede, uma das firmas é capaz de monopolizar o mercado a um preço muito acima do custo marginal mesmo que o virtual oponente (com baixo valor de rede) pratique preço igual a zero.

Nesse equilíbrio de monopólio, se a firma i perde o monopólio para o oponente, seu preço-limite é igual a zero, enquanto se ela obtém o monopólio, ela cobra o preço-limite $\mathcal{P}^{(i)}(l)$, que depende das localizações $l = (l^{(1)}, l^{(2)})$ e dos parâmetros do modelo ν e J . Vale observar que $\mathcal{P}^{(i)}(l)$ é não crescente no custo de transporte ν e crescente no efeito em rede J . A última monotonicidade (em relação a J) pode ser explicada da seguinte forma: se o efeito de rede J aumenta, o valor da rede do monopolista também aumenta. Como a rede do adversário está vazia, o valor de sua rede permanece constante, e o monopolista

amplia sua vantagem sobre o concorrente. Como consequência, o monopolista cobra um preço ainda maior por sua rede mais valorizada.

Os resultados descritos acima serão formalizados nas proposições a seguir. Nestas proposições (e em suas demonstrações) adotaremos a seguinte notação. Diremos que A implica B quase certamente (escrevendo $A \xrightarrow{q.c.} B$) se $A - B$ possuir medida nula. Por exemplo, se X e Y são variáveis aleatórias, diremos que $X > 2 \xrightarrow{q.c.} Y < 7$ se $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > 2\} - \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) < 7\}$ possuir medida nula.

Proposição 4.3.3. *Seja $0 \leq v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) < J$. O jogo $G(l)$ possui pelo menos um equilíbrio fracamente estacionário. Se $\mathfrak{s}$ é um equilíbrio fracamente estacionário, então vale as seguintes afirmações (4.19), (4.20) e (4.21):*

$$\begin{aligned} \bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = 1 & \xrightarrow{q.c.} p^{(i)}(\mathfrak{s}) = \mathcal{P}^{(i)}(l) \\ \bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = -1 & \xrightarrow{q.c.} p^{(i)}(\mathfrak{s}) = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$Prob\left(\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = 1\right) = \Pi_{[0,1]}\left(\frac{1 - m^{(i)}(l)}{2}\right) \quad (4.20)$$

$$|m^{(i)}(l)| < 1 \Rightarrow P_1^{(i)}(\mathfrak{s}) = 0 \quad (4.21)$$

onde

$$m^{(i)}(l) = \frac{v(1 - l^{(i)} - l^{(j)})}{J - v(1 - l^{(i)} - l^{(j)})}(l^{(j)} - l^{(i)}), \quad (4.22)$$

$$m_t^{(i)}(\mathfrak{s}) = N_t^{(i)}(\mathfrak{s}) - N_t^{(j)}(\mathfrak{s}), \bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = \lim_{t \rightarrow \infty} m_t^{(i)}(\mathfrak{s}), p^{(i)}(\mathfrak{s}) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_t^{(i)}(\mathfrak{s}),$$

$$\mathcal{P}^{(i)}(l) = (l^{(i)} - l^{(j)} - 1)v(1 - l^{(i)} - l^{(j)}) + J \quad (4.23)$$

Em particular, o pagamento do jogador i no equilíbrio $\mathfrak{s}$ é

$$\pi_l(\mathfrak{s}) = \Pi^{(i)}(l) = \Pi_{[0,1]}\left(\frac{1 - m^{(i)}(l)}{2}\right) \mathcal{P}^{(i)}(l) \quad (4.24)$$

A Proposição A.0.2 será demonstrada no Apêndice. Ela afirma que o mercado será monopolizado com probabilidade 1. Este fato segue da equação (4.20), tendo em vista que $m^{(j)}(l) = -m^{(i)}(l)$, e portanto $\Pi_{[0,1]}\left(\frac{1 - m^{(i)}(l)}{2}\right) + \Pi_{[0,1]}\left(\frac{1 - m^{(j)}(l)}{2}\right) = 1$, sendo que a probabilidade de o jogador i monopolizar o mercado depende de l . Essa probabilidade,

em geral, é não-monótona em $l^{(i)}$ para $0 \leq l^{(i)} \leq 1 - l^{(j)}$. Além disso, se o jogador i monopolizar o mercado com probabilidade positiva, porém inferior a 1 (o que é equivalente a $|m^{(1)}(l)| < 1$), então seu preço inicial $P_1^{(i)}(\mathfrak{s})$ será zero.¹ Uma vez monopolizado o mercado, o monopolista i joga o preço $\mathcal{P}^{(i)}(l)$, e o oponente joga preço zero. O preço $\mathcal{P}^{(i)}(l)$ é crescente em $l^{(i)}$ para $0 \leq l^{(i)} \leq 1 - l^{(j)}$. Por fim, vale destacar que, em qualquer equilíbrio $\mathfrak{s}$, o pagamento $\pi_l^{(i)}(\mathfrak{s})$ é unicamente determinado pelo vetor de localizações l .

O fato de o preço $\mathcal{P}^{(i)}(l)$ ser crescente em $l^{(i)}$ possui a seguinte interpretação. Quanto maior $l^{(i)}$ (para $0 \leq l^{(i)} \leq 1 - l^{(j)}$), maior é a similaridade dos dois produtos. Consequentemente, menor será o incentivo de um consumidor deixar de optar pelo monopolista e passar a consumir de seu concorrente. Isso porque o produto do concorrente pouco difere do produto do monopolista, mas tem a desvantagem de não ser consumido por ninguém (demanda zero). Assim, ao se aproximar de seu concorrente, o virtual monopolista aumenta sua vantagem sobre o competidor e cobra um preço maior pelo seu produto (sem perder o monopólio para o competidor). Note no entanto que o pagamento do monopolista não necessariamente será maximizado quando $l^{(i)} = 1 - l^{(j)}$. Isso porque a probabilidade de monopólio pode ser decrescente em $l^{(i)}$ (para determinados valores $l^{(i)}$ e a depender de $l^{(j)}$).

Proposição 4.3.4. *Seja $0 < v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) = J$ e $l^{(i)} > l^{(j)}$. O jogo $G(l)$ possui pelo menos um equilíbrio fracamente estacionário. Se $\mathfrak{s}$ é um equilíbrio fracamente estacionário, então:*

$$\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = 1, \quad p^{(i)}(\mathfrak{s}) = (l^{(i)} - l^{(j)})J \quad \text{e} \quad p^{(j)}(\mathfrak{s}) = 0 \quad \text{quase certamente} \quad (4.25)$$

onde $m_t^{(i)}(\mathfrak{s}) = N_t^{(i)}(\mathfrak{s}) - N_t^{(j)}(\mathfrak{s})$, $\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = \lim_{t \rightarrow \infty} m_t^{(i)}(\mathfrak{s})$, $p^{(i)}(\mathfrak{s}) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_t^{(i)}(\mathfrak{s})$.

Em particular, o pagamento do jogador i no equilíbrio $\mathfrak{s}$ é

$$\pi_l(\mathfrak{s}) = \Pi^{(i)}(l) = (l^{(i)} - l^{(j)})J \quad (4.26)$$

Demonstração da Proposição 4.3.4. As afirmações em (4.25) resultam diretamente da Proposição A.0.2 aplicada ao caso em que $0 < v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) = J$ e $l^{(i)} \neq l^{(j)}$, onde

¹ A interpretação é que o jogador escolhe o menor preço no presente a fim de maximizar a probabilidade de monopolizar o mercado no futuro.

adotamos a seguinte convenção:

$$m^{(i)}(l) = \begin{cases} \infty & \text{se } l^{(j)} > l^{(i)} \\ -\infty & \text{se } l^{(j)} < l^{(i)} \end{cases}$$

A Proposição A.0.2 vale também no caso em que $0 < v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) = J$ e $l^{(i)} \neq l^{(j)}$. A demonstração neste caso é análoga à demonstração no caso em que $0 \leq v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) < J$. Q.E.D.

Proposição 4.3.5. *Seja $0 < v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) = J$ e $l^{(i)} = l^{(j)}$. O jogo $G(l)$ possui pelo menos um equilíbrio fracamente estacionário. Se $\mathfrak{s}$ é um equilíbrio fracamente estacionário, então:*

$$p^{(1)}(\mathfrak{s}) = p^{(2)}(\mathfrak{s}) = 0 \quad \text{quase certamente} \quad (4.27)$$

onde $p^{(i)}(\mathfrak{s}) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_t^{(i)}(\mathfrak{s})$.

Em particular, o pagamento do jogador i no equilíbrio $\mathfrak{s}$ é

$$\pi_l(\mathfrak{s}) = \Pi^{(i)}(l) = 0 \quad (4.28)$$

A demonstração da Proposição 4.3.5 será apresentada no apêndice.

4.4 Pagamentos de Equilíbrio

A seguinte proposição apresenta do jogador i em um equilíbrio fracamente estacionário $\mathfrak{s}$ de $G(l)$, $l \in [0, 1]^2$.

Proposição 4.4.1. *Seja $\mathfrak{s}$ um equilíbrio fracamente estacionário de $G(l)$, onde $l \in [0, 1]^2$. O pagamento do jogador i em $\mathfrak{s}$ depende apenas de l , v e J e é dado por $\pi_l^{(i)}(\mathfrak{s}) = \Pi^{(i)}(l)$,*

onde

$$\Pi^{(i)}(l) = \begin{cases} D^{(i)}(p_*^{(1)}(l), p_*^{(2)}(l))p_*^{(1)}(l) & \text{se } 0 \leq J < v(1 - l^{(i)} - l^{(j)}) \\ \mathcal{P}^{(i)}(l) & \text{se } 0 \leq v(1 - l^{(i)} - l^{(j)}) = J \\ \Pi_{[0,1]} \left(\frac{1-m^{(i)}(l)}{2} \right) \mathcal{P}^{(i)}(l) & \text{se } 0 \leq v(1 - l^{(i)} - l^{(j)}) < J \end{cases} \quad (4.29)$$

sendo que $D^{(i)}(p_*^{(1)}(l), p_*^{(2)}(l))p_*^{(1)}(l)$ foi definido em (4.17), $\mathcal{P}^{(i)}(l)$ foi definido em (4.23), $m^{(i)}(l)$ foi definido em (4.22), e $\Pi_{[0,1]}$ é a função definida por $\Pi_{[0,1]}(x) = x$ para $0 \leq x \leq 1$, $\Pi_{[0,1]}(x) = 0$ se $x < 0$, e $\Pi_{[0,1]}(x) = 1$ se $x > 1$.

Demonstração da Proposição 4.4.1.

A Proposição 4.4.1 decorre diretamente das Proposições 4.3.2 – 4.3.5. Q.E.D.

4.5 Equilíbrios de Localização

Definido os pagamentos em cada subjogo de preço (para localizações $l^{(1)}$ e $l^{(2)}$ fixas), resta agora encontrar as localizações de equilíbrio $l_*^{(1)}$ e $l_*^{(2)}$ por indução retroativa. Isto é, investigaremos o conjunto dos equilíbrios de Nash $(l_*^{(1)}, l_*^{(2)})$ do jogo de localizações (estático) definido como segue:

Definição 4.5.1. Seja Γ o jogo de dois jogadores de definido pela função de pagamento $\Pi : [0, 2]^2 \mapsto \mathbb{R}$ dada por:

$$\Pi^{(i)}(l^{(i)}, l^{(j)}) = I_{[0,1]} \left(\frac{1 - m^{(i)}(l^{(i)}, l^{(j)})}{2} \right) \mathcal{P}^{(i)}(l^{(i)}, l^{(j)})$$

onde $m^{(i)}(l) = \frac{v(1-l^{(i)}-l^{(j)})}{J-v(1-l^{(i)}-l^{(j)})}(l^{(j)} - l^{(i)})$ e $\mathcal{P}^{(i)}(l) = (l^{(i)} - l^{(j)} - 1)v(1 - l^{(i)} - l^{(j)}) + J$.

A proposição a seguir mostra que todo equilíbrio de Nash $(l_*^{(1)}, l_*^{(2)})$ de Γ , definido em (4.5.1), é um vetor de localizações escolhido em um equilíbrio fracamente estacionário de G , e vice-versa.

Proposição 4.5.1. *Seja $J > 0$ e $v \geq 0$. O perfil de localizações $(l_*^{(1)}, l_*^{(2)})$ é um equilíbrio de Nash do jogo estático Γ , definido em (4.5.1), se, e somente se, existir um equilíbrio fracamente estacionário s_* de G tal que $(s_*^{(1)}(\emptyset), s_*^{(2)}(\emptyset)) = (l_*^{(1)}, l_*^{(2)})$.*

Demonstração da Proposição 4.5.1. Seja l_* um equilíbrio de Nash do jogo de localizações (estático) definido pela função de pagamento $\Pi^{(i)}(l^{(i)}, l^{(j)})$, apresentada em (4.29). Devido às Proposições 4.3.2 – 4.3.5, para cada $l \in [0, 1]^2$, existe um equilíbrio fracamente estacionário $s_*^{(i)}[l]$ de $G(l)$. Dada a função $l \mapsto s_*^{(i)}[l]$, definimos o seguinte perfil de estratégias do jogo G : $s_*^{(i)}(\emptyset) = l_*^{(i)}$, e $s_*^{(i)}(l, h) = s_*^{(i)}[l](h)$, onde (l, h) é uma história de G que se inicia com um perfil de localizações arbitrário $l = (l^{(1)}, l^{(2)})$. A seguir verificaremos que o perfil de estratégias s_* de G , assim definido, é um EFE de G . Como $(s_*|l) = s_*^{(i)}[l]$, a condição II) de (4.5) está satisfeita por definição, isto é, $(s_*|l)$ é um EFE de $G(l)$ para cada $l \in [0, 1]^2$. Verificaremos agora a condição I) de (4.5). Seja $s^{(i)}$ um perfil de estratégias de G , onde $s^{(i)}(\emptyset) = l^{(i)}$. Definindo $l = (l^{(i)}, l_*^{(j)})$ temos

$$\begin{aligned}
 \pi^{(i)}(s^{(i)}, s_*^{(i)}) &= \pi_l((s^{(i)}|l), (s_*^{(j)}|l)) \\
 &= \pi_l((s^{(i)}|l), s_*^{(j)}[l]) \\
 &\leq \pi_l(s_*^{(i)}[l], s_*^{(j)}[l]) \\
 &= \Pi^{(i)}(l^{(i)}, l_*^{(j)}) \\
 &\leq \Pi^{(i)}(l_*^{(i)}, l_*^{(j)}) \\
 &= \pi_{l_*}(s_*^{(i)}[l_*], s_*^{(j)}[l_*]) \\
 &= \pi^{(i)}(s_*^{(i)}, s_*^{(i)})
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Suponha agora que s_* seja um EFE de G , onde $s_*^{(i)}(\emptyset) = l_*^{(i)}$. Mostraremos que l_* é um equilíbrio de Nash do jogo com função de pagamento $\Pi(l^{(i)}, l^{(j)})$ definida em (4.29). Para $l^{(i)} \in [0, 1]$ arbitrário, definimos $s^{(i)}$ tal que $s^{(i)}(\emptyset) = l^{(i)}$ e $s^{(i)}(h) = s_*^{(i)}(h)$ para $h \neq \emptyset$. Seja $l = (l^{(i)}, l_*^{(j)})$. Como $(s_*|l)$ e $(s_*|l_*)$ são equilíbrios fracamente estacionários de $G(l)$ e $G(l_*)$, respectivamente, temos: $\Pi^{(i)}(l^{(i)}, l_*^{(j)}) = \pi_l^{(i)}((s_*^{(i)}|l), (s_*^{(j)}|l))$ e $\Pi^{(i)}(l_*^{(i)}, l_*^{(j)}) =$

$\pi_{l_*}^{(i)}((s_*^{(i)}|l_*), (s_*^{(j)}|l_*))$. Portanto:

$$\begin{aligned}
 \Pi^{(i)}(l^{(i)}, l_*^{(j)}) &= \pi_l^{(i)}((s_*^{(i)}|l), (s_*^{(j)}|l)) \\
 &= \pi_l^{(i)}((s^{(i)}|l), (s_*^{(j)}|l)) \\
 &= \pi^{(i)}(s^{(i)}, s_*^{(j)}) \\
 &\leq \pi^{(i)}(s_*^{(i)}, s_*^{(j)}) \\
 &= \pi_{l_*}^{(i)}((s_*^{(i)}|l_*), (s_*^{(j)}|l_*)) \\
 &= \Pi^{(i)}(l_*^{(i)}, l_*^{(j)})
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Q.E.D.

O seguinte lema será útil para calcularmos os equilíbrios de localização no caso em que $0 \leq v < J$.

Lema 4.5.1. *Seja $0 \leq v < J$ e $0 \leq l^{(i)} \leq 1 - l^{(j)} \leq 1$. Então*

$$I_{[0,1]} \left(\frac{1 - m^{(i)}(l)}{2} \right) = \frac{1 - m^{(i)}(l)}{2}$$

onde $m^{(i)}(l) = \frac{v(1-l^{(i)}-l^{(j)})}{J-v(1-l^{(i)}-l^{(j)})}(l^{(j)} - l^{(i)})$.

A demonstração do Lema A.0.8 será apresentada no Apêndice.

A seguinte proposição pode ser feita sobre os possíveis pares de estratégia do jogo Γ

Proposição 4.5.2. *Seja $0 < v < J$. Se $l^{(i)} < 1 - l^{(j)}$, então $(l^{(i)}, l^{(j)})$ não é um equilíbrio de Nash de Γ , definido em (4.5.1).*

Demonstração da Proposição 4.5.2. Consideraremos dois casos:

Caso $l^{(i)} = l^{(j)}$. Neste caso, podemos supor $l^{(i)} = l^{(j)} < 1/2$ (caso contrário $l^{(i)} = 1 - l^{(j)}$).

Calculando $\Pi^{(i)}(l^{(i)}, l^{(j)})$ e $\Pi^{(i)}(1 - l^{(j)}, l^{(j)})$, obtemos:

$$\Pi^{(i)}(l^{(i)}, l^{(j)}) = l^{(i)} - \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} < \frac{\gamma}{2} = \Pi^{(i)}(1 - l^{(j)}, l^{(j)})$$

Caso $l^{(i)} \neq l^{(j)}$. Suponha sem perda de generalidade $l^{(i)} < l^{(j)}$. Então, $0 < l^{(i)} < \min \{l^{(j)}, 1 - l^{(j)}\} \leq \frac{1}{2}$. Seja $g(x) = \Pi^{(i)}(x, l^{(j)})$ o pagamento do jogador i quando ele adota a estratégia

x . Mostraremos que $g(x)$ é estritamente crescente no intervalo fechado e não vazio $[l^{(i)}, \underline{l}^{(i)}]$, onde $\underline{l}^{(i)} = \min \{l^{(j)}, 1 - l^{(j)}\}$. Esse fato mostra que $(l^{(i)}, l^{(j)})$ não é um equilíbrio de Nash, pois $\Pi^{(i)}(l^{(i)}, l^{(j)}) = g(l^{(i)}) < g(\underline{l}^{(i)}) = \Pi^{(i)}(\underline{l}^{(i)}, l^{(j)})$.

A função $g(x)$ é dada por

$$g(x) = \frac{v}{2} \left[1 - \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \right] \left[g_3(x) \right]$$

onde $g_1(x) = (l^{(j)} - x)(1 - l^{(j)} - x)$, $g_2(x) = x + \gamma + l^{(j)} - 1$, $g_3(x) = (l^{(j)})^2 - (1 - x)^2 + \gamma$, sendo $\gamma = J/v$.

Notemos que $g_2(x)$ e $g_3(x)$ são estritamente crescentes no intervalo $[0, 1]$, e portanto, também o são no intervalo $[l^{(i)}, \underline{l}^{(i)}]$ (pois $[l^{(i)}, \underline{l}^{(i)}] \subset [0, 1]$). Para concluir, basta mostrar que $g_1(x)$ é estritamente decrescente em $[l^{(i)}, \underline{l}^{(i)}]$.

Derivando $g_1(x)$, obtemos $g'_1(x) = 2x - 1$. Assim, $g'_1(x) < 0$ para todo $x < 1/2$. Portanto, $g_1(x)$ é estritamente decrescente no intervalo $(-\infty, \frac{1}{2}]$. Como $\underline{l}^{(i)} = \min \{l^{(j)}, 1 - l^{(j)}\} \leq \frac{1}{2}$, temos $[l^{(i)}, \underline{l}^{(i)}] \subset (-\infty, \frac{1}{2}]$, de onde concluímos que $g_1(x)$ também é estritamente decrescente em $[l^{(i)}, \underline{l}^{(i)}]$. Q.E.D.

As Proposição 4.5.2 mostra que somente localizações coincidentes são candidatas a serem equilíbrios de Nash. A Proposição 4.5.3, a ser apresentada a diante, mostra quais localizações coincidentes são equilíbrios de Nash do jogo de localizações Γ . Para facilitar a demonstração da Proposição 4.5.3, introduziremos inicialmente o seguinte Lema.

Lema 4.5.2. *Seja $0 < v < J$. Definindo $H(x)$ o pagamento da firma i quando ela adota a localização x no jogo Γ , para uma localização fixa $l^{(j)}$ do jogador j , isto é, $H(x) = \Pi(x, l^{(j)})$. Então:*

1. *Se $l^{(j)} < 1/4$, então existe $x_* \in [0, 1 - l^{(j)}]$: $H(x_*) > H(1 - l^{(j)})$.*
2. *Se $l^{(j)} \geq 1/4$, então, $H(x)$ é estritamente crescente em $[0, 1 - l^{(j)}]$*

Demonstração do Lema 4.5.3. Devido ao Lema A.0.8, e fazendo $\gamma = J/v$, temos:

$$H(x) = v \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{v(1 - x - l^{(j)})}{\gamma - (1 - x - l^{(j)})} (l^{(j)} - x) \right] \left[(x - l^{(j)} - 1)(1 - x - l^{(j)}) + \gamma \right]$$

Derivando $H(x)$, obtemos

$$H'(x) = \frac{H_1(x)(ax^2 + bx + c)}{H_2(x)}$$

onde $H_1(x) = \gamma - 1 + 2x - x^2 + (l^{(j)})^2$, $H_2(x) = 2[\gamma - 1 + x + l^{(j)}]^2$, $a = -3$, $b = 6 - 4l^{(j)} - 4\gamma$, e $c = 3\gamma - 3 + 4l^{(j)} - (l^{(j)})^2$.

Como $\gamma > 1$ e $l^{(j)} \geq 0$, temos que $H_1(x) > 0$ e $H_2(x) > 0$ para qualquer $x \in [0, 1]$. Assim, o sinal de $H'(x)$ é igual ao sinal de $ax^2 + bx + c$.

Portanto, se x_1 e x_2 são as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde $x_1 < x_2$, então $H(x)$ é decrescente no intervalo $[x_2, 1 - l^{(j)}]$. A seguir mostraremos a primeira afirmação do lema. Para tanto, basta mostrar que $1 - l^{(j)} > x_2$ para $l^{(j)} < 1/4$.

Calculando x_2 obtemos

$$x_1 = \frac{1}{3} \left[3 - 2\gamma - 2l^{(j)} - \sqrt{w} \right], \quad x_2 = \frac{1}{3} \left[3 - 2\gamma - 2l^{(j)} + \sqrt{w} \right]$$

onde $w = -3\gamma + 4\gamma^2 + 8\gamma l^{(j)} + (l^{(j)})^2 > 0$, já que $\gamma > 1$ e $l^{(j)} \geq 0$.

Como $l^{(j)} < 1/4$ e $\gamma > 1$, temos as seguintes implicações: $3\gamma > 12\gamma l^{(j)} \Rightarrow (2\gamma - l^{(j)})^2 = 4\gamma^2 - 4\gamma l^{(j)} + (l^{(j)})^2 > -3\gamma + 4\gamma^2 + 8\gamma l^{(j)} + (l^{(j)})^2 = w$. Como $0 \leq l^{(j)} \leq 1 < \gamma$, segue $2\gamma - l^{(j)} \geq 0$ e portanto $2\gamma - l^{(j)} = \sqrt{(2\gamma - l^{(j)})^2} > \sqrt{w}$, isto é, $2\gamma - l^{(j)} > \sqrt{w}$. Somando $3 - 2\gamma - 2l^{(j)}$ dos dois lados da inequação anterior e dividindo esses lados por 3, obtemos $1 - l^{(j)} > x_2$.

Vamos agora provar a segunda afirmação do Lema. Para tanto basta mostrar que $x_1 < 0 \leq 1 - l^{(j)} \leq x_2$ para $l^{(j)} \geq 1/4$. Inicialmente $x_1 < 3 - 3/2 - \sqrt{3 + 1/16} < 0$. Como $l^{(2)} \in [0, 1]$, resta mostrar $1 - l^{(j)} \leq x_2$ sob a suposição $l^{(j)} \geq 1/4$. Como $l^{(j)} \geq 1/4$ e $\gamma > 1$, temos as seguintes implicações: $3\gamma \leq 12\gamma l^{(j)} \Rightarrow (2\gamma - l^{(j)})^2 = 4\gamma^2 - 4\gamma l^{(j)} + (l^{(j)})^2 \leq -3\gamma + 4\gamma^2 + 8\gamma l^{(j)} + (l^{(j)})^2 = w$. Como $0 \leq l^{(j)} \leq 1 < \gamma$, segue $2\gamma - l^{(j)} \geq 0$ e portanto $2\gamma - l^{(j)} = \sqrt{(2\gamma - l^{(j)})^2} \leq \sqrt{w}$, isto é, $2\gamma - l^{(j)} \leq \sqrt{w}$. Somando $3 - 2\gamma - 2l^{(j)}$ dos dois lados da inequação anterior e dividindo esses lados por 3, obtemos $1 - l^{(j)} \leq x_2$. Q.E.D.

Proposição 4.5.3. *Seja $0 < v < J$. Então $(l^{(i)}, l^{(j)})$ é um equilíbrio de Nash de Γ , definido em (4.5.1), se e somente se $l^{(i)} = 1 - l^{(j)}$ e $1/4 \leq l^{(j)} \leq 3/4$.*

Demonstração da Proposição 4.5.3. Se $l^{(i)} \neq 1 - l^{(j)}$ então $(l^{(i)}, l^{(j)})$ não é um equilíbrio de Nash de Γ , de acordo com a Proposição 4.5.2. Pelo item 1 do Lema 4.5.2, se $l^{(i)} = 1 - l^{(j)}$ e $l^{(j)} < 1/4$, então $(l^{(i)}, l^{(j)})$ não é um equilíbrio de Nash de Γ . Por simetria, se $l^{(i)} = 1 - l^{(j)}$ e $l^{(j)} > 3/4$, então $(l^{(i)}, l^{(j)})$ também não é um equilíbrio de Nash de Γ .

Mostraremos agora que se $l^{(i)} = 1 - l^{(j)}$ e $1/4 \leq l^{(j)} \leq 3/4$, então $(l^{(i)}, l^{(j)})$ é um equilíbrio de Nash de Γ . Por simetria do modelo, basta mostrar que:

$$0 \leq x < 1 - l^{(j)} : \quad \Pi^{(i)}(x, l^{(j)}) \leq \Pi^{(i)}(1 - l^{(j)}, l^{(j)})$$

$$0 \leq x < l^{(i)} : \quad \Pi^{(i)}(x, 1 - l^{(j)}) \leq \Pi^{(i)}(l^{(j)}, 1 - l^{(j)})$$

Se $l^{(i)} = 1 - l^{(j)}$ e $1/4 \leq l^{(j)} \leq 3/4$, então $l^{(j)} \geq 1/4$. Neste caso ($l^{(j)} \geq 1/4$), pelo item 2 do Lema 4.5.2, a primeira condição acima é verdadeira, pois $x \mapsto \Pi^{(i)}(x, l^{(j)})$ é estritamente crescente em $[0, 1 - l^{(j)}]$. Como $1/4 \leq l^{(j)} \leq 3/4$ também implica que $1 - l^{(j)} \geq 1/4$, a segunda condição está garantida pelo mesmo motivo. Q.E.D.

Para exemplificar o comportamento das funções de pagamentos as figuras abaixo representam abaixo os gráficos para dois casos. Quando $l^{(j)} = \frac{1}{5}$ (Figura 2), ou seja, está fora do intervalo de estratégias de equilíbrio, e $l^{(j)} = \frac{2}{5}$ (Figura 3), está dentro do intervalo de estratégias de equilíbrio, consideramos os demais parâmetros, $J = 10$ e $v = 1$.

Figura 2 – Simulação de $\Pi(l^{(i)}, \frac{1}{5})$, $J = 10$ e $v = 1$.

Figura 3 – Simulação de $\Pi(l^{(i)}, \frac{2}{5})$, $J = 10$ e $v = 1$.

Na figura 4 a linha em destaque representa o intervalo de estratégias que são equilíbrios de Nash do jogo Γ

Figura 4 – Equilíbrios de Nash de Γ .

É válido notar que os resultados encontrados são válidos para $v \neq 0$, quando $v = 0$ as localizações passam a não importar para as decisões dos consumidores e qualquer localização se torna um equilíbrio.

Efeitos de Rede Fraco

A condição para que o efeito de rede seja considerado fraco, $J < v(1 - l^{(i)} - l^{(j)})$, não é garantida para todos valores de $l^{(i)}$ e $l^{(j)}$, note que quanto mais as firmas se aproximam o lado direito da condição se aproxima de zero, assim, dado que $J > 0$, sempre existirá uma distância mínima para que a condição seja satisfeita. Com isso a análise do equilíbrio nesse caso se torna mais complexa pois as duas condições devem ser consideradas na análise.

O caso já resolvido por d'Aspremont, Gabszewicz e Thisse (1979), em que $J = 0$, é um caso específico de efeito de rede fraco, nessa hipótese o efeito é nulo, seu equilíbrio

é dado por $l^{(i)} = l^{(j)} = 0$, ou seja as firmas optam pela máxima diferenciação de seus produtos.

5 Considerações finais

Neste trabalho buscamos analisar o efeito da inclusão de efeitos de rede em um equilíbrio de um jogo de preços e localização entre duas firmas dentro de um intervalo linear de dimensão unitária.

Das características do modelo proposto, obtivemos demandas de curto prazo para cada uma das firmas, as quais dependem das demandas no período imediatamente anterior, ou seja, a história que as empresas levam em conta para tomar suas decisões no período t carrega informações das localizações das firmas definidas no início do jogo e dos preços e as demandas em $t - 1$.

À partir dessas demandas de curto prazo foi possível calcular quais seriam as demandas de longo prazo. Dadas as restrições impostas no modelo, verificamos que essas demandas convergem para um ponto fixo que depende de um estado da natureza definido por ω , que dita as demandas iniciais do jogo.

Para o jogo de preço notamos que, conforme era previsto pela literatura existente, quando os efeitos de rede são fortes as empresas irão cobrar um preço mais baixo inicialmente e, assim que uma delas monopoliza o mercado, esse preço será elevado e a outra firma passa a cobrar um preço nulo.

Quando os efeitos de rede são fracos o equilíbrio de preços também é único. Nesta condição as demandas só convergem para monopólio se as demandas iniciais ditadas por ω já resultarem em monopólio, caso contrário a demanda converge para um ponto de equilíbrio entre as demandas. Um resultado curioso e diferente do encontrado por (PRADO, 2013) é o fato da existência de equilíbrios de preços em que as firmas estão cobrando preços iguais a zero.

A garantia de que os equilíbrios de preço encontrados são únicos decorre do pressuposto de que as estratégias são fracamente estacionárias, que diz que a partir de um certo tempo do jogo os preços escolhidos não mudarão mais e dependerão apenas da história

até aquele período em que uma das firmas monopoliza o mercado.

Com relação equilíbrios de localização, no caso em que os efeitos de rede são fortes, identificamos a existência de infinitos equilíbrios de Nash nos quais as firmas não irão se diferenciar (posicionarão sobre o mesmo ponto) dentro do intervalo fechado $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. O resultado é interessante e se difere dos resultados encontrados para o intervalo circular (PRADO, 2013) e no modelo sem efeitos de rede (D'ASPREMONT; GABSZEWICZ; THISSE, 1979).

Quando os efeitos de rede são suficientemente fortes, o fato de ser necessário considerar os dois casos torna a complexidade ainda maior. Pouco ainda pode-se afirmar sobre esses equilíbrios. Fica em aberto, portanto, para continuidade da pesquisa, a formalização a generalização das proposições de equilíbrio para o jogo de localizações para o caso em que J e v podem assumir quaisquer valores..

Referências

- AHLIN, C.; AHLIN, P. D. Product differentiation under congestion: Hotelling was right. **Economic Inquiry**, Wiley Online Library, v. 51, n. 3, p. 1750–1763, 2013.
- BECKER, G. S. A note on restaurant pricing and other examples of social influences on price. **Journal of Political Economy**, JSTOR, p. 1109–1116, 1991.
- CABRAL, L. Dynamic price competition with network effects. **The Review of Economic Studies**, Oxford University Press, v. 78, n. 1, p. 83–111, 2011.
- CABRAL, L. M.; SALANT, D. J.; WOROCH, G. A. Monopoly pricing with network externalities. **International Journal of Industrial Organization**, Elsevier, v. 17, n. 2, p. 199–214, 1999.
- D'ASPREMONT, C.; GABSZEWICZ, J. J.; THISSE, J.-F. On hotelling's "stability in competition". **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, JSTOR, p. 1145–1150, 1979. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1911955>>.
- FUDENBERG, D.; TIROLE, J. **Game Theory**. [S.l.]: The MIT Press, 1991. ISBN 0262061414.
- HOTELLING, H. Stability in competition. **Economic Journal** **39**, **41** **57.**, 1929.
- KARNI, E.; LEVIN, D. Social attributes and strategic equilibrium: A restaurant pricing game. **Journal of Political Economy**, JSTOR, p. 822–840, 1994.
- KATZ, M. L.; SHAPIRO, C. Network externalities, competition, and compatibility. **The American economic review**, JSTOR, p. 424–440, 1985. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1814809>>.
- LERNER, A. P.; SINGER, H. W. Some notes on duopoly and spatial competition. **The Journal of Political Economy**, JSTOR, p. 145–186, 1937.
- PRADO, F. P. A. Game theory and application. In: _____. [S.l.]: Nova York: Nova Publishers, 2013. cap. Product Differentiation in the Presence of Social Interactions of Consumers, p. 165–176.
- VEGA-REDONDO, F. **Economics and the Theory of Games**. [S.l.]: Cambridge university press, 2003.

APÊNDICE A – Demonstrações

A seguir apresentaremos a demonstração da Proposição 4.3.1. A fim de apresentá-la adotaremos a seguinte convenção. Seja $B^{(i)}(p^{(i)})$ o conjunto das melhores respostas do jogador i quando o jogador j joga $p^{(j)}$. Se $B^{(i)}(p^{(i)})$ possuir apenas um elemento, $B^{(i)}(p^{(i)}) = \{p^{(j)}\}$, então identificaremos $B^{(i)}(p^{(i)}) = p^{(j)}$. A demonstração da Proposição 4.3.1 também fará uso do seguinte Lema.

Lema A.0.1. *Seja $B^{(i)}$ a função de melhor resposta do jogador i , e suponha*

1. $|B^{(1)}(p^{(2)})| = 1, \forall p^{(2)} \geq 0$,
2. $p_*^{(2)} \in B^{(2)}\left(B^{(1)}(p_*^{(2)})\right)$,
3. *Para qualquer $p^{(2)} \geq 0, p^{(2)} \neq p_*^{(2)}$, vale $p^{(2)} \notin B^{(2)}\left(B^{(1)}(p^{(2)})\right)$.*

Então $(B^{(i)}(p_*^{(2)}), p_*^{(2)})$ é o único equilíbrio de Nash (puro) do jogo.

O Lema A.0.1 decorre imediatamente da definição de equilíbrio de Nash.

Demonstração da Proposição 4.3.1. Denotando $\lambda^{(i)} = J - T + l^{(j)} - l^{(i)}$, $\gamma = 2(T - J)$ e $T = v(1 - l^{(i)} - l^{(j)})$, a função de pagamento (4.14) pode ser escrita como segue: $\pi_l^{(i)}(p^{(1)}, p^{(2)}) = \Pi_{[0,1]} \left(\frac{p^{(j)} - p^{(i)} - \lambda^{(i)}}{\gamma} \right) p^{(i)}$, ou

$$\pi_l^{(i)}(p^{(1)}, p^{(2)}) = \begin{cases} p^{(i)} & \text{se } p^{(i)} < p^{(j)} - \lambda^{(i)} - \gamma \\ \frac{-p^{(i)} + p^{(j)} - \lambda^{(i)}}{\gamma} p^{(i)} & \text{se } p^{(j)} - \lambda^{(i)} - \gamma < p^{(i)} \leq p^{(j)} - \lambda^{(i)} \\ 0 & \text{se } p^{(i)} > p^{(j)} - \lambda^{(i)} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Maximizando $\pi_l^{(i)}(p^{(1)}, p^{(2)})$ em $p^{(i)}$, obtemos a função de melhor resposta do jogador i :

$$B^{(i)}(p^{(j)}) = \begin{cases} [0, \infty) & \text{se } p^{(j)} \leq \lambda^{(i)} \\ \frac{p^{(j)}}{2} - \frac{\lambda^{(i)}}{2} & \text{se } \lambda^{(i)} < p^{(j)} < \lambda^{(i)} + 2\gamma \\ p^{(j)} - \lambda^{(i)} - \gamma & \text{se } p^{(j)} \geq \lambda^{(i)} + 2\gamma \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Levando em conta a função de melhor resposta (A.2), mostraremos que $(p_*^{(1)}, p_*^{(2)})$ é o único equilíbrio de Nash do jogo, onde $p_*^{(i)}$ é dado por

$$p_*^{(i)} = \begin{cases} -\lambda^{(i)} - \gamma & \text{se } \lambda^{(i)} \leq -2\gamma \\ \frac{\gamma - \lambda^{(i)}}{3} & \text{se } -2\gamma < \lambda^{(i)} \leq \gamma \\ 0 & \text{se } \lambda^{(i)} > \gamma \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

onde observamos que (A.3) é equivalente à (4.15).

Inicialmente temos $\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} = -\gamma < 0$. Assim existe um i_* tal que $\lambda^{(i_*)} < 0$. Assumiremos $\lambda^{(1)} < 0$ (sem perda de generalidade), e mostraremos que $(p_*^{(1)}, p_*^{(2)})$ é o único equilíbrio de Nash do jogo, em dois casos: 1) $\lambda^{(1)} \leq -2\gamma$; e 2) $-2\gamma < \lambda^{(1)} < 0$. Em ambos os casos, $\lambda^{(1)}$ é negativo, e assim $\lambda^{(1)} < p^{(2)}$. Portanto, em ambos os casos vale $|B^{(1)}(p^{(2)})| = 1$ para qualquer $p^{(2)} \geq 0$; veja definição de $B^{(i)}$ em (A.2).

1. Suponha inicialmente $\lambda^{(1)} \leq -2\gamma$. Neste caso $\lambda^{(2)} \geq \gamma$. Provaremos, mediante aplicação do Lema A.0.1, que $(p_*^{(1)}, p_*^{(2)}) = (-\lambda^{(1)} - \gamma, 0)$ é o único equilíbrio de Nash do jogo. Como $p_*^{(2)} = 0$ e $\lambda^{(1)} \leq -2\gamma$, segue que $p_*^{(2)} \geq \lambda^{(1)} + 2\gamma$. Portanto, segundo (A.2), $B^{(1)}(p_*^{(2)}) = B^{(1)}(0) = 0 - \lambda^{(1)} - \gamma$. Lembrando que $-\lambda^{(1)} - \gamma = \lambda^{(2)}$, segue $B^{(1)}(p_*^{(2)}) = \lambda^{(2)} \leq \lambda^{(2)}$. Como $B^{(1)}(p_*^{(2)}) \leq \lambda^{(2)}$, segue $B^{(2)}(B^{(1)}(p_*^{(2)})) = [0, \infty)$, e portanto $p_*^{(2)} = 0 \in B^{(2)}(B^{(1)}(p_*^{(2)}))$. Resta mostrar que $p^{(2)} \notin B^{(2)}(B^{(1)}(p^{(2)}))$ para todo $p^{(2)} \neq p_*^{(2)}$. Como $p_*^{(2)} = 0$, basta mostrar que $B^{(2)}(B^{(1)}(p^{(2)})) < p^{(2)}$ para todo $p^{(2)} > 0$, o que será provado em dois casos: i) $0 < p^{(2)} < 2\gamma$, e ii) $p^{(2)} \geq 2\gamma$. Em ambos os casos, $p^{(2)} > 0$ e $\lambda^{(1)} \leq -2\gamma$. Portanto $p^{(2)} \geq \lambda^{(1)} + 2\gamma$, e $B^{(1)}(p^{(2)}) = p^{(2)} - \lambda^{(1)} - \gamma$; veja definição de $B^{(i)}$ em (A.2).

Caso i) $0 < p^{(2)} < 2\gamma$. Como $B^{(1)}(p^{(2)}) = p^{(2)} - \lambda^{(1)} - \gamma$, segue $-\lambda^{(1)} - \gamma < B^{(1)}(p^{(2)}) < \gamma - \lambda^{(1)}$. Lembrando que $\lambda^{(1)} = -\lambda^{(2)} - \gamma$, temos $\lambda^{(2)} < B^{(1)}(p^{(2)}) < \lambda^{(2)} + 2\gamma$, e $B^{(1)}(B^{(1)}(p^{(2)})) = [B^{(1)}(p^{(2)}) - \lambda^{(2)}]/2 = [(p^{(2)} - \lambda^{(1)} - \gamma) - \lambda^{(2)}]/2 = [(p^{(2)} - (-\lambda^{(2)} - \gamma) - \gamma) - \lambda^{(2)}]/2 = p^{(2)}/2 < p^{(2)}$. Isto é, $B^{(1)}(B^{(1)}(p^{(2)})) < p^{(2)}$.

Caso ii) $p^{(2)} \geq 2\gamma$. Como $B^{(1)}(p^{(2)}) = p^{(2)} - \lambda^{(1)} - \gamma$, segue $B^{(1)}(p^{(2)}) \geq 2\gamma - \lambda^{(1)} - \gamma = \gamma - \lambda^{(1)}$. Substituindo $\lambda^{(1)} = -\lambda^{(2)} - \gamma$, temos $B^{(1)}(p^{(2)}) \geq \lambda^{(2)} + 2\gamma$. Portanto, $B^{(2)}(B^{(1)}(p^{(2)})) = B^{(1)}(p^{(2)}) - \lambda^{(2)} - \gamma = (p^{(2)} - \lambda^{(1)} - \gamma) - \lambda^{(2)} - \gamma = (p^{(2)} - (-\lambda^{(2)} - \gamma) - \gamma) - \lambda^{(2)} - \gamma = p^{(2)} - \gamma < p^{(2)}$, e novamente $B^{(1)}(B^{(1)}(p^{(2)})) < p^{(2)}$.

2. Suponha agora $-2\gamma < \lambda^{(1)} < 0$. Provaremos, mediante aplicação do Lema A.0.1, que $(p_*^{(1)}, p_*^{(2)}) = (\frac{\gamma - \lambda^{(1)}}{3}, \frac{\gamma - \lambda^{(2)}}{3})$ é o único equilíbrio de Nash do jogo. Como $p_*^{(2)} = \frac{\gamma - \lambda^{(2)}}{3} = \frac{\lambda^{(1)} + 2\gamma}{3}$, temos $\lambda^{(1)} < p_*^{(2)} < \lambda^{(1)} + 2\gamma$. Portanto, $B^{(1)}(p_*^{(2)}) = (p_*^{(2)} - \lambda^{(1)})/2 = (\frac{\lambda^{(1)} + 2\gamma}{3} - \lambda^{(1)})/2 = \frac{\gamma - \lambda^{(1)}}{3}$. Mostraremos agora que $B^{(2)}(B^{(1)}(p_*^{(2)})) = p_*^{(2)}$. Como $B^{(1)}(p_*^{(2)}) = \frac{\lambda^{(1)} + 2\gamma}{3}$, $-2\gamma < \lambda^{(1)} < 0$ e $\lambda^{(1)} = -\lambda^{(2)} - \gamma$, segue $\lambda^{(2)} < B^{(1)}(p_*^{(2)}) < \lambda^{(2)} + 2\gamma$. Portanto $B^{(2)}(B^{(1)}(p_*^{(2)})) = (\frac{\lambda^{(2)} + 2\gamma}{3} - \lambda^{(2)})/2 = \frac{\gamma - \lambda^{(2)}}{3} = p_*^{(2)}$. Agora provaremos que se $0 \leq p^{(2)} < p_*^{(2)}$, então $B^{(2)}(B^{(1)}(p^{(2)})) > p^{(2)}$; e se $p^{(2)} > p_*^{(2)}$, então $B^{(2)}(B^{(1)}(p^{(2)})) < p^{(2)}$.

Suponha inicialmente $0 \leq p^{(2)} < p_*^{(2)} = \frac{\lambda^{(1)} + 2\gamma}{3}$. Como $-2\gamma < \lambda^{(1)} < 0$, segue $\lambda^{(1)} < p^{(2)} < \lambda^{(1)} + 2\gamma$. Portanto $B^{(1)}(p^{(2)}) = (p^{(2)} - \lambda^{(1)})/2$. Como $0 \leq p^{(2)} < \frac{\lambda^{(1)} + 2\gamma}{3}$, segue $(0 - \lambda^{(1)})/2 < B^{(1)}(p^{(2)}) < (\frac{\lambda^{(1)} + 2\gamma}{3} - \lambda^{(1)})/2$. Substituindo $\lambda^{(1)} = -\lambda^{(2)} - \gamma$, obtemos $(\lambda^{(2)} + \gamma)/2 \leq B^{(1)}(p^{(2)}) < (\lambda^{(2)} + 2\gamma)/3$. Como $-2\gamma < \lambda^{(1)} < 0$, segue $-\gamma < \lambda^{(2)} < \gamma$, e portanto $\lambda^{(2)} < B^{(1)}(p^{(2)}) < \lambda^{(2)} + 2\gamma$. Assim, $B^{(2)}(B^{(1)}(p^{(2)})) =$

$((p^{(2)} - \lambda^{(1)})/2 - \lambda^{(2)})/2 = ((p^{(2)} - \lambda^{(1)})/2 + \lambda^{(1)} + \gamma)/2 = (p^{(2)} + \lambda^{(1)} + 2\gamma)/4 > p^{(2)}$, onde a última desigualdade segue da hipótese $\frac{\lambda^{(1)}+2\gamma}{3} > p^{(2)}$. Em suma, se $0 \leq p^{(2)} < p_*^{(2)}$, então $B^{(2)}(B^{(1)}(p^{(2)})) > p^{(2)}$.

Suponha agora $p_*^{(2)} < p^{(2)} < \lambda^{(1)} + 2\gamma$, isto é, $\frac{\lambda^{(1)}+2\gamma}{3} < p^{(2)} < \lambda^{(1)} + 2\gamma$. Como $-2\gamma < \lambda^{(1)} < 0$, segue $\lambda^{(1)} < p^{(2)} < \lambda^{(1)} + 2\gamma$, e $B^{(1)}(p^{(2)}) = (p^{(2)} - \lambda^{(1)})/2$. Como $\frac{\lambda^{(1)}+2\gamma}{3} < p^{(2)} < \lambda^{(1)} + 2\gamma$, temos $(\frac{\lambda^{(1)}+2\gamma}{3} - \lambda^{(1)})/2 < B^{(1)}(p^{(2)}) < ((\lambda^{(1)}+2\gamma) - \lambda^{(1)})/2$. Isto é, $\frac{\gamma - \lambda^{(1)}}{3} < B^{(1)}(p^{(2)}) < \gamma$. Substituindo $\lambda^{(1)} = -\lambda^{(2)} - \gamma$, segue $\frac{\lambda^{(2)}+2\gamma}{3} < B^{(1)}(p^{(2)}) < \gamma$. Agora como $-2\gamma < \lambda^{(1)} < 0$, segue $-\gamma < \lambda^{(2)} < \gamma$. Portanto, $\lambda^{(2)} < \frac{\lambda^{(2)}+2\gamma}{3} < B^{(1)}(p^{(2)}) < \gamma < \lambda^{(2)} + 2\gamma$. Ou seja, $\lambda^{(2)} < B^{(1)}(p^{(2)}) < \lambda^{(2)} + 2\gamma$. Assim $B^{(2)}(B^{(1)}(p^{(2)})) = ((p^{(2)} - \lambda^{(1)})/2 - \lambda^{(2)})/2 = ((p^{(2)} - \lambda^{(1)})/2 + \lambda^{(1)} + \gamma)/2 = (p^{(2)} + \lambda^{(1)} + 2\gamma)/4 < p^{(2)}$, onde a última desigualdade segue da hipótese $\frac{\lambda^{(1)}+2\gamma}{3} < p^{(2)}$. Em suma, se $p_*^{(2)} < p^{(2)} < \lambda^{(2)} + 2\gamma$, então $B^{(2)}(B^{(1)}(p^{(2)})) < p^{(2)}$.

Suponha agora $\lambda^{(1)} + 2\gamma \leq p^{(2)} < 2\gamma$. Neste caso, $B^{(1)}(p^{(2)}) = p^{(2)} - \lambda^{(1)} - \gamma$, e vale $(\lambda^{(1)} + 2\gamma) - \lambda^{(1)} - \gamma \leq B^{(1)}(p^{(2)}) < 2\gamma - \lambda^{(1)} - \gamma$. Substituindo $\lambda^{(1)} = -\lambda^{(2)} - \gamma$, segue $\gamma \leq B^{(1)}(p^{(2)}) < \lambda^{(2)} + 2\gamma$. Como $\lambda^{(2)} < \gamma$, segue $\lambda^{(2)} < B^{(1)}(p^{(2)}) < \lambda^{(2)} + 2\gamma$, e $B^{(2)}(B^{(1)}(p^{(2)})) = ((p^{(2)} - \lambda^{(1)} - \gamma) - \lambda^{(2)})/2 = p^{(2)}/2$, onde a última igualdade segue de $-\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)} = \gamma$. Como $p^{(2)} > 0$, segue $B^{(2)}(B^{(1)}(p^{(2)})) = p^{(2)}/2 < p^{(2)}$. Em suma, se $\lambda^{(2)} + 2\gamma \leq p^{(2)} < 2\gamma$, então $B^{(2)}(B^{(1)}(p^{(2)})) < p^{(2)}$.

Suponha agora $p^{(2)} \geq 2\gamma$. Como $\lambda^{(1)} < 0$, segue $\lambda^{(1)} + 2\gamma \leq p^{(2)}$, e $B^{(1)}(p^{(2)}) = p^{(2)} - \lambda^{(1)} - \gamma \geq 2\gamma - \lambda^{(1)} - \gamma$. Substituindo $\lambda^{(1)} = -\lambda^{(2)} - \gamma$, segue $B^{(1)}(p^{(2)}) \geq \lambda^{(2)} + 2\gamma$. Portanto $B^{(2)}(B^{(1)}(p^{(2)})) = B^{(1)}(p^{(2)}) - \lambda^{(2)} - \gamma = (p^{(2)} - \lambda^{(1)} - \gamma) - \lambda^{(2)} - \gamma = p^{(2)} - \gamma$, onde a última igualdade segue de $-\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)} = \gamma$. Como $\gamma > 0$, segue $B^{(2)}(B^{(1)}(p^{(2)})) = p^{(2)} - \gamma < p^{(2)}$. Em suma, se $p^{(2)} \geq 2\gamma$, então $B^{(2)}(B^{(1)}(p^{(2)})) < p^{(2)}$. Q.E.D.

A seguir provaremos os seguintes Lemas que serão utilizados na demonstração Proposição A.0.2.

Lema A.0.2. *Seja $0 \leq v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) < J$, $\mathcal{P}^{(i)}(l)$ definido por (4.23) e $m^{(i)}(l)$ definido por (4.22). O seguinte perfil s_* de estratégias é um EFE de $G(l)$. $s_*^{(i)}(\emptyset) = 0$, e se $h \neq \emptyset$, então*

$$s_*^{(i)}(h) = \begin{cases} \mathcal{P}^{(i)}(l), & \text{se } t^{(i)}(h) \leq \tau(h) \text{ e } m_{\tau^{(i)}(h)}^{(i)}(h) \geq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

onde para qualquer $h \in \mathcal{H}(l) \cup \bar{\mathcal{H}}(l)$, $h \neq \emptyset$, definimos:

$$t^{(i)}(h) = \min \left\{ t \in \{1, 2, \dots, \tau(h)\} \mid m_t^{(i)}(h) \notin (m^{(i)}(l), 1) \right\} \quad (\text{A.5})$$

onde $\min \emptyset = \infty$.

A interpretação da estratégia $s_*^{(i)}$ é a seguinte: ao adotar $s_*^{(i)}$, o jogador monitora o jogo $G(l)$ e repete mesmo preço zero, enquanto a história observada h for tal que a diferença de demanda ao longo de h estiver entre $m^{(i)}(l)$ e 1, isto é, $s_*^{(i)}(h) = 0$ se $m_t^{(i)}(h) \in (m^{(i)}(l), 1)$ para $0 \leq t \leq \tau(h)$, onde $\tau(h)$ denota o índice do último elemento de h (se $h = (a_0, a_1, \dots, a_r)$, então $\tau(h) = r$). Assim que o jogador observar uma história h tal que a diferença de demanda ao longo de h estiver fora do intervalo aberto $(m^{(i)}(l), 1)$, o jogador passa a repetir um mesmo preço indefinidamente. O índice $\tau^{(i)}(h)$ é o primeiro tempo t ao longo de h , onde ou $m_t^{(i)}(h) \leq m^{(i)}(l)$ ou $m_t^{(i)}(h) \geq 1$.

Se existir um tempo t satisfazendo uma das duas inequações anteriores, então $t^{(i)}(h) \leq \tau(h)$, caso contrário $t^{(i)}(h) = \infty$. Se $t^{(i)}(h) \leq \tau(h)$, então $s_*^{(i)}(h) = 0$ se $m_{t^{(i)}(h)}^{(i)}(h) \leq m^{(i)}(l)$, e $s_*^{(i)}(h) = \mathcal{P}^{(i)}(l)$ se $m_{t^{(i)}(h)}^{(i)}(h) \geq 1$. Em particular, $s_*^{(i)}(h') = s_*^{(i)}(h)$, para qualquer história h' , onde $t^{(i)}(h) \leq \tau(h')$ e $h'_{t^{(i)}(h)} = h_{t^{(i)}(h)}$.¹

Demonstração do Lema A.0.2. Pelo Lema A.0.3, $(s_*|h)$ é um perfil de estratégias fracamente estacionárias de $G(lh)$ para qualquer $h \in \mathcal{H}(s_*^{(i)})$. Em particular, fazendo $h = \emptyset$, segue que s_* é um perfil de estratégias fracamente estacionárias de $G(l)$.

Resta mostrar que s_* é um equilíbrio fracamente estacionário de $G(l)$. Isto é, resta mostrar que para qualquer $h \in \mathcal{H}(s_*^{(i)})$, e qualquer estratégia fracamente estacionária $s^{(i)}$ do jogador i no subjogo $G(lh)$, deve valer:

$$\pi_{lh}^{(i)}((s_*^{(i)}|h), (s_*^{(j)}|h)) \geq \pi_{lh}^{(i)}(s^{(i)}, (s_*^{(j)}|h)) \quad (\text{A.6})$$

A demonstração de (A.6) resulta diretamente do Lema A.0.6. Q.E.D.

Lema A.0.3. *Seja $0 \leq v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) < J$. Se s_* é o perfil de estratégias de $G(l)$ definido em (A.4), então $(s_*|h)$ é um perfil de estratégias fracamente estacionário de $G(lh)$ para qualquer $h \in \mathcal{H}(l)$ (em particular, para qualquer $h \in \mathcal{H}(s_*^{(i)}) \subset \mathcal{H}(l)$).*

Demonstração do Lema A.0.3. Seja s um perfil de estratégias de $G(lh)$, onde $s^{(i)} = (s_*^{(i)}|h)$. Mostraremos que $\tau^{(i)}(s)$ é finito quase certamente. Suponha por contradição que, para algum estado da natureza $\omega \in [0, 1]$, valesse $\tau^{(i)}(s)(\omega) = \infty$, então pela definição de $s_*^{(i)}$, valeria

$$m^{(i)}(l) < m_t^{(i)}(s)(\omega) < 1 \quad \text{e} \quad P_t^{(i)}(s)(\omega) = 0 \quad \text{para todo } t \geq 1 \quad (\text{A.7})$$

Vamos inicialmente mostrar que, se a condição (A.7) não valer em algum tempo tempo $t_* \geq 1$ finito, então $\tau^{(i)}(s)(\omega) < \infty$. Para mostrar isso, vamos supor a existência de um tal t_* e vamos mostrar que $s^{(i)}(h'_t) = s^{(i)}(h'_{t_*})$ para qualquer $t \geq t_*$ e qualquer $h' \in \mathcal{H}(lh)$ tal que $h'_{t_*} = \mathcal{O}_{t_*}(s)(\omega)$. O próximo parágrafo apresenta essa prova.

¹ Para qualquer história h e tempo $t \leq \tau(h)$, denotamos por h_t a história inicial de h até o tempo t , isto é, se $h = (a_0, a_1, \dots, a_t, a_{t+1}, \dots)$, então $h_t = (a_0, a_1, \dots, a_t)$.

Suponha que (A.7) seja violada em tempo $t_* \geq 1$ finito, e seja $h' \in \bar{\mathcal{H}}(lh)$, tal que $h'_{t_*} = \mathcal{O}_{t_*}(s)(\omega)$. Então, pela definição de $s_*^{(i)}$ em (A.4), temos as seguintes implicações: se $m_{t_*}^{(i)}(h'_{t_*}) \leq m^{(i)}(l)$ ou $m_{t_*}^{(i)}(h'_{t_*}) \geq 1$ então $m_{\tau(hh'_{t_*})}^{(i)}(hh'_{t_*}) \leq m^{(i)}(l)$ ou $m_{\tau(hh'_{t_*})}^{(i)}(hh'_{t_*}) \geq 1$. Consequentemente, $s^{(i)}(h'_t) = (s_*^{(i)}|h)(h'_t) = s_*^{(i)}(hh'_t) = s_*^{(i)}(hh'_{t_*}) = (s_*^{(i)}|h)(h'_{t_*}) = s^{(i)}(h'_{t_*})$ para todo $t \geq t_*$. Se $P_t^{(i)}(h'_{t_*}) > 0$ então $s_*^{(i)}(hh'_{t_*-1}) = (s_*^{(i)}|h)(h'_{t_*-1}) = s^{(i)}(h'_{t_*-1}) > 0$. Consequentemente, $m_{t_{**}}^{(i)}(hh'_{t_{**}-1}) \geq 1$ para algum $t_{**} \leq \tau(hh'_{t_*-1})$. Portanto, $s_*^{(i)}(hh'_t) = s_*^{(i)}(hh'_{t_*}) = s_*^{(i)}(hh'_{t_{**}-1})$ para qualquer $t \geq t_*$. Ou seja, $s^{(i)}(h'_t) = s^{(i)}(h'_{t_*})$ para todo $t \geq t_*$.

Agora, mostraremos que (A.7) leva a uma contradição, o que por sua vez prova que $\tau^{(i)}(s)(\omega) < \infty$. Para tanto, adotaremos as notações abreviadas $m_t^{(i)}(s)$, $P_t^{(i)}(s)$, ... no lugar de $m_t^{(i)}(s)(\omega)$, $P_t^{(i)}(s)(\omega)$, ..., respectivamente. Pela equação (4.9), vale $m_t(s) = I_{[-1,1]}(\alpha_t^{(i)}(s) + \beta m_{t-1}(s))$, onde $m^{(i)}(l) < m_{t-1}^{(i)}(s) < 1$ para todo $t \geq 1$. Mostraremos inicialmente que $-1 \leq \alpha_t^{(i)}(s) + \beta m_{t-1}(s) \leq 1$ para todo $t \geq 1$. Se $\alpha_t^{(i)}(s) + \beta m_{t-1}(s) > 1$, teríamos $m_t(s) = 1$, o que contraria a hipótese $m^{(i)}(l) < m_t^{(i)}(s) < 1$ para todo $t \geq 0$. Portanto $\alpha_t^{(i)}(s) + \beta m_{t-1}(s) \leq 1$.

Mostraremos agora $\alpha_t^{(i)}(s) + \beta m_{t-1}(s) \geq -1$. Fazendo $\alpha^{(i)}(l) = l^{(i)} - l^{(j)}$, temos $m^{(i)}(l) = \alpha^{(i)}(l)/(1 - \beta)$. Como $m_{t-1}^{(i)}(s) > m^{(i)}(l) = \alpha^{(i)}(l)/(1 - \beta)$, segue $\alpha^{(i)}(l) + \beta m_{t-1}^{(i)}(s) > m_{t-1}^{(i)}(s) \geq -1$. Lembrando que $P_t^{(i)}(s) = 0$, $P_t^{(j)}(s) \geq 0$, resulta $\alpha_t^{(i)}(s) \geq \alpha^{(i)}(l)$. Portanto $\alpha_t^{(i)}(s) + \beta m_{t-1}^{(i)}(s) > \alpha^{(i)}(l) + \beta m_{t-1}^{(i)}(s) > m_{t-1}^{(i)}(s) \geq -1$.

Uma vez que $-1 \leq \alpha_t^{(i)}(s) + \beta m_{t-1}^{(i)}(s) \leq 1$ para todo $t \geq 1$, segue que $m_t(s) = I_{[-1,1]}(\alpha_t^{(i)}(s) + \beta m_{t-1}^{(i)}(s)) = \alpha_t^{(i)}(s) + \beta m_{t-1}^{(i)}(s)$ para todo $t \geq 1$. Iterando $m_t(s)$, obtemos $m_t(s) = \sum_{n=0}^{t-1} \alpha_{t-n}^{(i)}(s) \beta^n + m_0^{(i)}(s) \beta^t \geq \sum_{n=0}^{t-1} \alpha^{(i)}(l) \beta^n + m_0^{(i)}(s) \beta^t$. Como $\sum_{n=0}^{t-1} \alpha^{(i)}(l) \beta^n = \frac{\alpha^{(i)}(l)}{1-\beta} - \frac{\alpha^{(i)}(l)}{1-\beta} \beta^t$ e $m^{(i)}(l) = \frac{\alpha^{(i)}(l)}{1-\beta}$, segue $m_t^{(i)}(s) \geq (m_0^{(i)}(s) - m^{(i)}(l)) \beta^t + m^{(i)}(l)$. Uma vez que por hipótese vale $\beta > 1$ e $(m_0^{(i)}(s) - m^{(i)}(l)) > 0$, existe um t_* tal que $(m_0^{(i)}(s) - m^{(i)}(l)) \beta^{t_*} + m^{(i)}(l) \geq 1$. A última desigualdade implica $m_{t_*}^{(i)}(s) \geq 1$, o que contradiz (A.7). Q.E.D.

Lema A.0.4. *Seja $0 \leq v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) < J$. Se s é um perfil de estratégias de $G(lh)$, onde $s^{(i)} = (s_*^{(i)}|h)$, $h \in \mathcal{H}(s_*^{(i)})$ e s_* é o perfil de estratégias de $G(l)$ definido em (A.4), então as três afirmações a seguir são verdadeiras:*

1. Se $m_1^{(i)}(s) \leq m^{(i)}(l)$, então $p^{(i)}(s) = 0$
2. Se $m^{(i)}(l) < m_1^{(i)}(s)$, então $p^{(i)}(s) = \mathcal{P}^{(i)}(l)$ e $\bar{m}^{(i)}(s) = 1$
3. Se $m^{(i)}(l) < m_0^{(i)}(s)$, então $m^{(i)}(l) < m_1^{(i)}(s)$

Demonstração do Lema A.0.4. *Prova da Implicação 1).* Esta implicação é uma consequência imediata da definição de $s_*^{(i)}$. Ou seja, se $m_1^{(i)}(s) \leq m^{(i)}(l)$, então $P_t^{(i)}(s) = 0$ para todo $t > 1$, e portanto $p^{(i)}(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_t^{(i)}(s) = 0$.

Prova da Implicação 2). Mostraremos inicialmente que $m^{(i)}(l) < m_1^{(i)}(s)$ implica em $m_{t_*}^{(i)}(s) = 1$, onde t_* é o primeiro tempo em que $m_{t_*}^{(i)}(s) \leq m^{(i)}(l)$ ou $m_{t_*}^{(i)}(s) \geq 1$. (Note que t_* é finito, pois $t_* = \tau^{(i)}(s)$, e $s^{(i)} = (s_*^{(i)}|h)$ é fracamente estacionária pelo Lema A.0.3). Suponha por contradição $m_{t_*}^{(i)}(s) \leq m^{(i)}(l)$. Neste caso $(m_{t_*}^{(i)}(s) \leq m^{(i)}(l))$, e por definição de $s_*^{(i)}$, temos $P_t^{(i)}(s) = 0$ para todo $t \geq 1$. Portanto $\alpha^{(i)}(l) \leq \alpha_t^{(i)}(s)$ para todo $t \geq 1$. Como $1 - \beta < 0$ e $\alpha^{(i)}(l)/(1 - \beta) = m^{(i)}(l) < m_1^{(i)}(s)$, segue $m_1^{(i)}(s) < \alpha^{(i)}(l) + \beta m_1^{(i)}(s) \leq \alpha_2^{(i)}(s) + \beta m_1^{(i)}(s)$, onde a última desigualdade resulta de $P_2^{(i)}(s) = 0$ e $P_2^{(j)}(s) \geq 0$. Assim, $m^{(i)}(l) < m_1^{(i)}(s) = I_{[-1,1]}(m_1^{(i)}(s)) \leq I_{[-1,1]}(\alpha_2^{(i)}(s) + \beta m_1^{(i)}(s)) = m_2^{(i)}(s)$. De forma análoga, concluímos em geral que $m^{(i)}(l) < m_t^{(i)}(s)$ implica $m^{(i)}(l) < m_{t+1}^{(i)}(s)$ para qualquer $t \geq 1$. Dado que por hipótese, $m^{(i)}(l) < m_1^{(i)}(s)$, segue por indução finita $m^{(i)}(l) < m_t^{(i)}(s)$ para todo $t \geq 1$. Mas isso contradiz a existência de um $t_* \geq 1$ finito tal que $m_{t_*}^{(i)}(s) \leq m^{(i)}(l)$. Portanto, se $m^{(i)}(l) < m_1^{(i)}(s)$, então $m_{t_*}^{(i)}(s) = 1$.

Agora, pela definição $s_*^{(i)}$, sabemos que se $m_{t_*}^{(i)}(s) = 1$, então $P_t^{(i)}(s) = \mathcal{P}^{(i)}(l)$ para $t = t_* + 1, t_* + 2, \dots$. Assim, pela implicação acima provada $(m^{(i)}(l) < m_1^{(i)}(s) \Rightarrow m_{t_*}^{(i)}(s) = 1)$, concluímos que se $m^{(i)}(l) < m_1^{(i)}(s)$, então $p^{(i)}(s) = \mathcal{P}^{(i)}(l)$.

Mostraremos agora que se $m^{(i)}(l) < m_1^{(i)}(s)$, então $\bar{m}^{(i)}(s) = 1$. Como já provado acima, se $m^{(i)}(l) < m_1^{(i)}(s)$, então $m_{t_*}^{(i)}(s) = 1$ e $P_t^{(i)}(s) = \mathcal{P}^{(i)}(l)$ para $t = t_* + 1, t_* + 2, \dots$. Como $P_{t_*+1}^{(i)}(s) = \mathcal{P}^{(i)}(l)$, segue que $\alpha_{t_*+1}^{(i)}(s) = \alpha^{(i)}(l) + \frac{P_{t_*+1}^{(j)}(s) - \mathcal{P}^{(i)}(l)}{T} \geq \alpha^{(i)}(l) - \frac{\mathcal{P}^{(i)}(l)}{T} = 1 - \beta$, lembrando que $\mathcal{P}^{(i)}(l) = (\alpha^{(i)}(l) - 1)T + J$ e $\beta = J/T$. Portanto $1 \geq m_{t_*+1}^{(i)}(s) = I_{[-1,1]}(\alpha_{t_*+1}^{(i)}(s) + \beta m_{t_*}^{(i)}(s)) \geq I_{[-1,1]}((1 - \beta) + \beta) \geq 1$. De forma análoga, segue que $m_{t_*+1}^{(i)}(s) = 1$ implica $m_{t_*+2}^{(i)}(s) = 1$, e assim por diante. Por indução finita, concluímos que $m_t^{(i)}(s) = 1$ para todo $t > t_*$, e portanto, $\bar{m}^{(i)}(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} m_t^{(i)}(s) = 1$.

Prova da Implicação 3). Inicialmente, temos $P_1^{(i)}(s) = s^{(i)}(\emptyset) = (s_*^{(i)}|h)(\emptyset) = s_*^{(i)}(h)$. Portanto, se $h = \emptyset$, então $P_1^{(i)}(s) = s_*^{(i)}(\emptyset) = 0$. Se $h \neq \emptyset$, então $P_1^{(i)}(s) = s_*^{(i)}(h) = 0$, pois, como $h \in \mathcal{H}(s_*)$, segue $m_t^{(i)}(h) \in (m^{(i)}(l), 1)$ para todo $t = 1, 2, \dots, \tau^{(i)}(h)$. Em ambos os casos ($h = \emptyset$ e $h \neq \emptyset$), resulta que $P_1^{(i)}(s) = 0$. Portanto, $\alpha^{(i)}(l) \leq \alpha_1^{(i)}(s)$. Como $\alpha^{(i)}(l) \leq \alpha_1^{(i)}(s)$, $1 - \beta < 0$ e $\alpha^{(i)}(l)/(1 - \beta) = m^{(i)}(l) < m_0^{(i)}(s)$, segue $m^{(i)}(l) < m_0^{(i)}(s) < \alpha^{(i)}(l) + \beta m_0^{(i)}(s) \leq \alpha_1^{(i)}(s) + \beta m_0^{(i)}(s)$, onde a última desigualdade resulta de $P_1^{(i)}(s) = 0$ e $P_1^{(j)}(s) \geq 0$. Assim, $m^{(i)}(l) < m_0^{(i)}(s) = I_{[-1,1]}(m_0^{(i)}(s)) \leq I_{[-1,1]}(\alpha_1^{(i)}(s) + \beta m_0^{(i)}(s)) = m_1^{(i)}(s)$. Q.E.D.

Lema A.0.5. *Seja $0 \leq v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) < J$. Se s é um perfil de estratégias de $G(lh)$, onde $s^{(i)} = (s_*^{(i)}|h)$, $h \in \mathcal{H}(s_*^{(i)})$ e s_* é o perfil de estratégias de $G(l)$ definido em (A.4), então*

$$\begin{aligned} \pi_{lh}^{(i)}(s) &= \text{Prob}\left(m_1^{(i)}(s) > m^{(i)}(l)\right) \mathcal{P}^{(i)}(l) \\ &\geq \text{Prob}\left(m_0^{(i)}(s) > m^{(i)}(l)\right) \mathcal{P}^{(i)}(l) \end{aligned} \tag{A.8}$$

Em particular, se $h = \emptyset$, então s é um perfil de estratégia de $G(l)$, $m_0^{(i)}(s)$ é distribuído uniformemente em $[-1, 1]$, e portanto

$$\pi_l^{(i)}(s) = \pi_{l\emptyset}^{(i)}(s) \leq I_{[0,1]} \left(\frac{1 - m^{(i)}(l)}{2} \right) \mathcal{P}^{(i)}(l) \quad (\text{A.9})$$

Demonstração do Lema A.0.5. A igualdade em (A.8) segue imediatamente dos itens 1) e 2) do Lema A.0.4. A Desigualdade em (A.8) segue do item 3) do Lema A.0.4. Q.E.D.

Lema A.0.6. Seja $0 \leq v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) < J$. Se s é um perfil de estratégias fracamente estacionárias de $G(lh)$, $h \in \mathcal{H}(s_*^{(i)})$, e s_* é o perfil de estratégias de $G(l)$ definido em (A.4), então

$$\pi_l^{(i)}(s^{(i)}, (s_*^{(j)}|h)) \leq \text{Prob} \left(m_0^{(i)}((s_*^{(i)}|h), s^{(j)}) > m^{(i)}(l) \right) \mathcal{P}^{(i)}(l) \quad (\text{A.10})$$

Em particular, levando em conta o Lema A.0.5, (A.10), concluímos:

$$\pi_l^{(i)}(s^{(i)}, (s_*^{(j)}|h)) \leq \text{Prob} \left(m_0^{(i)}((s_*^{(i)}|h), s^{(j)}) > m^{(i)}(l) \right) \mathcal{P}^{(i)}(l) = \pi_l^{(i)}(s_*|h) \quad (\text{A.11})$$

Em particular, se $h = \emptyset$

$$\pi_l^{(i)}(s_*) = I_{[0,1]} \left(\frac{1 - m^{(i)}(l)}{2} \right) \mathcal{P}^{(i)}(l) \quad (\text{A.12})$$

Demonstração do Lema A.0.6. Seja $\tilde{s} = (s^{(i)}, (s_*^{(j)}|h))$. Suponha inicialmente que $p^{(i)}(\tilde{s}) > \mathcal{P}^{(i)}(l)$ implique $\bar{N}^{(i)}(\tilde{s}) = \lim_{t \rightarrow \infty} N_t^{(i)}(\tilde{s}) = 0$ (o que será provado adiante). Como a demanda $N_t^{(i)}(\tilde{s})$ é limitada por 1, segue que

$$p^{(i)}(\tilde{s}) \bar{N}^{(i)}(\tilde{s}) \leq \mathcal{P}^{(i)}(l) \quad (\text{A.13})$$

Agora, como $\tilde{s}^{(j)} = (s_*^{(j)}|h)$, sabemos (pelo Lema A.0.4) que $m_0^{(j)}(\tilde{s}) > m^{(j)}(l)$ implica $\bar{m}^{(j)}(s) = 1$. Tendo em vista que $m_t^{(j)}(\tilde{s}) = -m_t^{(i)}(\tilde{s})$ e $m^{(j)}(l) = -m^{(i)}(l)$, segue que $m_0^{(i)}(\tilde{s}) < m^{(i)}(l)$ implica $\bar{m}^{(i)}(s) = -1$. Ou seja $m_0^{(i)}(\tilde{s}) < m^{(i)}(l)$ implica $\bar{N}^{(i)}(\tilde{s}) = 0$. Levando em conta (A.13), concluímos portanto:

$$\begin{aligned} \pi_l^{(i)}(\tilde{s}) &= \mathbb{E} \left(p^{(i)}(\tilde{s}) \bar{N}^{(i)}(\tilde{s}) \middle| m_0^{(i)}(\tilde{s}) \geq m^{(i)}(l) \right) \text{Prob} \left(m_0^{(i)}(\tilde{s}) \geq m^{(i)}(l) \right) \\ &\leq \mathcal{P}^{(i)}(l) \text{Prob} \left(m_0^{(i)}(\tilde{s}) \geq m^{(i)}(l) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Para concluir, mostraremos

$$\text{Prob} \left(m_0^{(i)}(\tilde{s}) \geq m^{(i)}(l) \right) = \text{Prob} \left(m_0^{(i)}(\tilde{\tilde{s}}) \geq m^{(i)}(l) \right) \quad (\text{A.15})$$

onde $\tilde{s} = (s^{(i)}, (s_*^{(j)}|h))$ e $\tilde{\tilde{s}} = ((s_*^{(i)}|h), s^{(j)})$.

Se $h = \emptyset$, então $m_0^{(i)}(\tilde{s})(\omega) = m_0^{(i)}(\tilde{s})(\omega) = \omega$ para qualquer $\omega \in [0, 1]$. Se $h \neq \emptyset$, então $m_0^{(i)}(\tilde{s})(\omega) = m_0^{(i)}(\tilde{s})(\omega) = m_{\tau(h)}^{(i)}(h)$ para qualquer $\omega \in [0, 1]$.

Resta mostrar que $p^{(i)}(\tilde{s}) > \mathcal{P}^{(i)}(l)$ implica $\bar{N}^{(i)}(\tilde{s}) = 0$. Suponha $p^{(i)}(\tilde{s}) > \mathcal{P}^{(i)}(l)$. Mostraremos que $\bar{N}^{(i)}(\tilde{s}) = 0$ em dois casos: *i)* Se $m_1^{(j)}(\tilde{s}) > m^{(j)}(l)$, então segue do Lema A.0.4 que $\bar{m}^{(j)}(\tilde{s}) = 1$, e portanto, $\bar{N}^{(i)}(\tilde{s}) = 0$; *ii)* se $m_1^{(j)}(\tilde{s}) \leq m^{(j)}(l)$, então segue do Lema A.0.4 que $p^{(j)}(\tilde{s}) = 0$, e portanto, $p^{(i)}(\tilde{s}) - p^{(j)}(\tilde{s}) = p^{(i)}(\tilde{s}) > \mathcal{P}^{(i)}(l)$. Pelo Lema A.0.7 (que será apresentado e demonstrado a seguir), concluímos $\bar{N}^{(i)}(\tilde{s}) = 0$. Q.E.D.

Lema A.0.7. *Seja $0 < J$ e $0 \leq v(1 - l^{(1)} - l^{(2)}) \leq J$. Seja s um perfil de estratégias fracamente estacionárias de $G(lh)$. Se $p^{(i)}(s) - p^{(j)}(s) > \mathcal{P}^{(i)}(l)$ então $\bar{N}^{(i)}(s) = 0$.*

Demonstração do Lema A.0.7. Suponha $p^{(i)}(s) - p^{(j)}(s) > \mathcal{P}^{(i)}(l)$. Então $P_t^{(j)}(s) - P_t^{(i)}(s) = p^{(j)}(s) - p^{(i)}(s) < -\mathcal{P}^{(i)}(l)$ para $t > \max\{\tau^{(i)}(s), \tau^{(j)}(s)\}$. Tendo em vista a definição de $\alpha_t^{(i)}(s)$ (função de $P_t^{(i)}(s) - P_t^{(j)}(s)$) e $\mathcal{P}^{(i)}(l)$, segue $\alpha_t^{(i)}(s) = \bar{\alpha}^{(i)}(s) = \alpha^{(i)}(l) + \frac{p^{(j)}(s) - p^{(i)}(s)}{T} < \alpha^{(i)}(l) + \frac{-\mathcal{P}^{(i)}(l)}{T} = (1 - \beta)$ para $t > \tau_m(s) = \max\{\tau^{(i)}(s), \tau^{(j)}(s)\}$.

Suponha por contradição $\bar{N}^{(i)}(s) > 0$, isto é, $\bar{m}(s) > -1$. Neste caso, $-1 < \alpha_t^{(i)}(s) + \beta m_{t-1}^{(i)}(s)$ para todo $t > \tau_m(s)$. Caso contrário, existiria um $t > \tau_m(s)$, tal que $m_t^{(i)}(s) = -1$, e conseqüentemente, $m_{t+1}^{(i)}(s) = I_{[-1,1]}(\alpha_{t+1}^{(i)}(s) + \beta m_t^{(i)}(s)) = I_{[-1,1]}(\alpha_{t+1}^{(i)}(s) - \beta) \leq I_{[-1,1]}((1 - \beta) - \beta) = -1$, onde a última igualdade segue de $\beta \geq 1$ e $\alpha_{t+1}^{(i)}(s) < 1 - \beta$ para $t > \tau_m(s)$. Neste caso, concluiríamos por indução finita que $-1 = m_t^{(i)}(s) = m_{t+1}^{(i)}(s) = \dots$, o que teria como consequência $\bar{m}^{(i)}(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} m_t^{(i)}(s) = -1$. Por outro lado, também vale $\alpha_t^{(i)}(s) + \beta m_{t-1}^{(i)}(s) < (1 - \beta) + \beta = 1$ para todo $t > \tau_m(s)$.

Pelo exposto acima, concluímos que *a)* $\lim_{t \rightarrow \infty} m_t^{(i)}(s) > -1$ implica *b)* $|\alpha_t^{(i)}(s) + \beta m_{t-1}^{(i)}(s)| < 1$ para todo $t > \tau_m(s)$. Mostraremos agora que *b)* implica $\lim_{t \rightarrow \infty} m_t^{(i)}(s) = -\infty$, o que é um absurdo, pois $|m_t^{(i)}(s)| \leq 1$ para todo $t \geq 0$. Por absurdo concluímos portanto que $\lim_{t \rightarrow \infty} m_t^{(i)}(s) = -1$. Se $|\alpha_t^{(i)}(s) + \beta m_{t-1}^{(i)}(s)| < 1$ para todo $t > \tau_m(s)$, então $m_t^{(i)}(s) = I_{[-1,1]}(\alpha_t^{(i)}(s) - \beta) = \alpha_t^{(i)}(s) - \beta m_{t-1}^{(i)}(s) = \bar{\alpha}^{(i)}(s) - \beta m_{t-1}^{(i)}(s)$ para todo $t > \tau_m(s)$. Iterando em $m_t^{(i)}(s)$, resulta para $t > \tau_m(s)$

$$m_t^{(i)}(s) = \begin{cases} (t - \tau_m(s))\bar{\alpha}^{(i)}(s) + m_{\tau_m(s)}^{(i)}(s), & \text{se } \beta = 1 \\ \left(m_{\tau_m(s)}^{(i)}(s) - \frac{\bar{\alpha}^{(i)}(s)}{1-\beta}\right)\beta^{(t-\tau_m(s))} + \frac{\bar{\alpha}^{(i)}(s)}{1-\beta}, & \text{se } \beta > 1 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Como $m_{\tau_m(s)}^{(i)}(s) \leq 1$ e $\bar{\alpha}^{(i)}(s) < (1 - \beta) \leq 0$, segue em ambos os casos ($\beta = 1$ e $\beta > 1$) $\lim_{t \rightarrow \infty} m_t^{(i)}(s) = -\infty$. Q.E.D.

Demonstração da Proposição A.0.2. A demonstração faz uso das seguintes afirmações:

$$1. p^{(i)}(\mathfrak{s}) > p^{(j)}(\mathfrak{s}) + \mathcal{P}^{(i)}(l) \xrightarrow{q.c.} \bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = -1.$$

Prova: Lema A.0.7.

$$2. \bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) > m^{(i)}(l) \xrightarrow{q.c.} p^{(i)}(\mathfrak{s}) = p^{(j)}(\mathfrak{s}) + \mathcal{P}^{(i)}(l) \text{ e } \bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = 1.$$

Prova: Suponha por contradição que não valha a implicação. Então, devido a 1, existe um t_* suficientemente grande tal que o seguinte evento Ω_{t_*} possui probabilidade positiva: $\Omega_{t_*} = \{t_* > \max\{\tau^{(1)}(\mathfrak{s}), \tau^{(2)}(\mathfrak{s})\}, m_{t_*}^{(i)}(\mathfrak{s}) > m^{(i)}(l) \text{ e } \bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s})p^{(i)}(\mathfrak{s}) < p^{(j)}(\mathfrak{s}) + \mathcal{P}^{(i)}(l)\}$. Neste caso, o jogador i poderia fazer melhor adotando a seguinte estratégia fracamente estacionária:

$$s^{(i)}(h) = \begin{cases} 0, & \text{se } \tau(h) \geq t_* > \tau_m(\mathfrak{s}, h), \quad m_{t_*}^{(i)}(h) > m^{(i)}(l), \quad m_{\tau(h)}^{(i)}(h) < 1 \\ P_{t_*}^{(j)}(h) + \mathcal{P}^{(i)}(l), & \text{se } \tau(h) \geq t_* > \tau_m(\mathfrak{s}, h), \quad m_{t_*}^{(i)}(h) > m^{(i)}(l), \quad m_{\tau(h)}^{(i)}(h) = 1 \\ \mathfrak{s}^{(i)}(h), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

onde $\tau_m(\mathfrak{s}, h) = \max\{\tau(\mathfrak{s}^{(1)}, h), \tau(\mathfrak{s}^{(2)}, h)\}$.

A seguir mostraremos que $\pi_l^{(i)}(\mathfrak{s}^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)}) < \pi_l^{(i)}(s^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)})$, o que por sua vez contradiz o fato de $\mathfrak{s}$ ser um equilíbrio fracamente estacionário.

Seja $s^{(j)} = \mathfrak{s}^{(j)}$. Se $\omega \in \Omega_{t_*}$, então:

$$\bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega)p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) < p^{(j)}(\mathfrak{s})(\omega) + \mathcal{P}^{(i)}(l) = \bar{N}^{(i)}(s)(\omega)p^{(i)}(s)(\omega).$$

Se $\omega \in \Omega_{t_*}^c$, então $\bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega)p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) = \bar{N}^{(i)}(s)(\omega)p^{(i)}(s)(\omega)$.

Como Ω_{t_*} possui medida positiva, temos:

$$\pi_l^{(i)}(\mathfrak{s}^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)}) = \mathbb{E}\left(\bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s})p^{(i)}(\mathfrak{s})\right) < \mathbb{E}\left(\bar{N}^{(i)}(s)p^{(i)}(s)\right) = \pi_l^{(i)}(s^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)})$$

$$3. \bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) > m^{(i)}(l) \xrightarrow{q.c.} p^{(j)}(\mathfrak{s}) = 0.$$

Prova: Suponha por contradição que $\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) > m^{(i)}(l)$ e $p^{(2)}(\mathfrak{s}) > 0$ com probabilidade positiva. Então, pelo item anterior, com probabilidade positiva, $p^{(i)}(\mathfrak{s}) = p^{(j)}(\mathfrak{s}) + \mathcal{P}^{(i)}(l) > \mathcal{P}^{(i)}(l)$ e $\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = 1$. Assim existe um t_* suficientemente grande tal que o seguinte evento Ω_{t_*} possui probabilidade positiva: $\Omega_{t_*} = \{t_* > \max\{\tau^{(1)}(\mathfrak{s}), \tau^{(2)}(\mathfrak{s})\}, m_{t_*}^{(i)}(\mathfrak{s}) = 1 \text{ e } P_{t_*}^{(j)}(\mathfrak{s}) = P_{t_*}^{(j)}(\mathfrak{s}) + \mathcal{P}^{(i)}(l) > \mathcal{P}^{(i)}(l)\}$, onde $\mathcal{P}^{(i)}(l) > 0$ já que, por hipótese, a constante $m^{(i)}(l)$ é menor que 1, uma vez que o evento $\{m^{(i)}(l) < \bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s})\}$ ocorre com probabilidade positiva e $\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) \leq 1$. Neste

caso, o jogador j poderia fazer melhor adotando a seguinte estratégia fracamente estacionária:

$$s^{(j)}(h) = \begin{cases} P_{t_*}^{(j)}(h)/2, & \text{se } \tau(h) \geq t_* > \tau_m(\mathfrak{s}, h), \quad m_{t_*}^{(i)}(h) = 1, \quad P_{t_*}^{(i)}(h) = P_{t_*}^{(j)}(h) + \mathcal{P}^{(i)}(l) \\ \mathfrak{s}^{(j)}(h), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

onde $\tau_m(\mathfrak{s}, h) = \max\{\tau(\mathfrak{s}^{(1)}, h), \tau(\mathfrak{s}^{(2)}, h)\}$.

A seguir mostraremos que $\pi_l^{(j)}(\mathfrak{s}^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)}) < \pi_l^{(i)}(\mathfrak{s}^{(i)}, s^{(j)})$, o que por sua vez contradiz o fato de $\mathfrak{s}$ ser um equilíbrio fracamente estacionário.

Seja $s^{(i)} = \mathfrak{s}^{(i)}$. Se $\omega \in \Omega_{t_*}$, então:

$$\bar{N}^{(j)}(\mathfrak{s})(\omega)p^{(j)}(\mathfrak{s})(\omega) = 0 < p^{(j)}(\mathfrak{s})(\omega)/2 = \bar{N}^{(j)}(s)(\omega)p^{(j)}(s)(\omega).$$

Se $\omega \in \Omega_{t_*}^c$, então $\bar{N}^{(j)}(\mathfrak{s})(\omega)p^{(j)}(\mathfrak{s})(\omega) = \bar{N}^{(j)}(s)(\omega)p^{(j)}(s)(\omega)$.

Como Ω_{t_*} possui medida positiva, temos:

$$\pi_l^{(j)}(\mathfrak{s}^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)}) = \mathbb{E}\left(\bar{N}^{(j)}(\mathfrak{s})p^{(j)}(\mathfrak{s})\right) < \mathbb{E}\left(\bar{N}^{(j)}(s)p^{(j)}(s)\right) = \pi_l^{(j)}(\mathfrak{s}^{(i)}, s^{(j)})$$

4. $\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) > m^{(i)}(l) \xrightarrow{q.c.} p^{(i)}(\mathfrak{s}) = \mathcal{P}^{(i)}(l), \quad p^{(j)}(\mathfrak{s}) = 0$ e $\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = 1$.
 $\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) < m^{(i)}(l) \xrightarrow{q.c.} p^{(i)}(\mathfrak{s}) = 0, \quad p^{(j)}(\mathfrak{s}) = \mathcal{P}^{(j)}(l)$ e $\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = -1$.
 $\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = m^{(i)}(l) \xrightarrow{q.c.} p^{(i)}(\mathfrak{s}) = 0$ e $p^{(j)}(\mathfrak{s}) = 0$.
 Em particular, $\pi_l^{(i)}(\mathfrak{s}) = \text{Prob}(\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) > m^{(i)}(l))\mathcal{P}^{(i)}(l)$.

Prova: As duas primeiras afirmações resultam dos itens 2 e 3. Provaremos que se $\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = m^{(i)}(l)$, então $p^{(1)}(\mathfrak{s}) = p^{(2)}(\mathfrak{s}) = 0$. Inicialmente segue da hipótese $(\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = m^{(i)}(l))$ que $p^{(1)}(\mathfrak{s}) = p^{(2)}(\mathfrak{s})$. Suponha por absurdo que $p^{(1)}(\mathfrak{s}) = p^{(2)}(\mathfrak{s}) > 0$ com probabilidade positiva. Suponho sem perda de generalidade que $m^{(i)}(l) \leq 0$.² Neste caso, existe t_* suficientemente grande tal que o seguinte evento Ω_{t_*} possui probabilidade positiva: $\Omega_{t_*} = \{t_* > \max\{\tau^{(1)}(\mathfrak{s}), \tau^{(2)}(\mathfrak{s})\}, m_{t_*}^{(i)}(\mathfrak{s}) = m^{(i)}(l) \text{ e } P_{t_*}^{(i)}(\mathfrak{s}) = P_{t_*}^{(j)}(\mathfrak{s}) > 0\}$. Neste caso, o jogador i poderia fazer melhor adotando a seguinte estratégia fracamente estacionária:

$$s^{(i)}(h) = \begin{cases} \frac{3}{4}P_{t_*}^{(i)}(h), & \text{se } \tau(h) \geq t_* > \tau_m(\mathfrak{s}, h), \quad m_{t_*}^{(i)}(\mathfrak{s}) = m^{(i)}(l), \quad P_{t_*}^{(i)}(h) = P_{t_*}^{(j)}(h) > 0 \\ \mathfrak{s}^{(i)}(h), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

onde $\tau_m(\mathfrak{s}, h) = \max\{\tau(\mathfrak{s}^{(1)}, h), \tau(\mathfrak{s}^{(2)}, h)\}$.

A seguir mostraremos que $\pi_l^{(i)}(\mathfrak{s}^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)}) < \pi_l^{(i)}(s^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)})$, o que por sua vez contradiz o fato de $\mathfrak{s}$ ser um equilíbrio fracamente estacionário.

² Para pelo menos um jogador i vale $m^{(i)}(l) \leq 0$, pois $m^{(1)}(l) = -m^{(2)}(l)$.

Seja $s^{(j)} = \mathfrak{s}^{(j)}$. Se $\omega \in \Omega_{t_*}$, então:

$$\bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega)p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) \leq \frac{1}{2}p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) < \frac{3}{4}p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) = \bar{N}^{(i)}(s)(\omega)p^{(i)}(s)(\omega).$$

Se $\omega \in \Omega_{t_*}^c$, então $\bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega)p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) = \bar{N}^{(i)}(s)(\omega)p^{(i)}(s)(\omega)$.

Como Ω_{t_*} possui medida positiva, temos:

$$\pi_l^{(i)}(\mathfrak{s}^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)}) = \mathbb{E}\left(\bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s})p^{(i)}(\mathfrak{s})\right) < \mathbb{E}\left(\bar{N}^{(i)}(s)p^{(i)}(s)\right) = \pi_l^{(i)}(s^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)})$$

$$\begin{aligned} 5. \quad & m_1^{(i)}(\mathfrak{s}) > m^{(i)}(l) \xrightarrow{q.c.} \bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) > m^{(i)}(l), \\ & m_1^{(i)}(\mathfrak{s}) < m^{(i)}(l) \xrightarrow{q.c.} \bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) < m^{(i)}(l), \\ & |m^{(i)}(l)| < 1 \Rightarrow \text{Prob}\left(m_1^{(i)}(\mathfrak{s}) = m^{(i)}(l)\right) = 0, \\ & |m^{(i)}(l)| < 1 \Rightarrow \pi_l^{(i)}(\mathfrak{s}) = \text{Prob}\left(m_1^{(i)}(\mathfrak{s}) > m^{(i)}(l)\right) \mathcal{P}^{(i)}(l). \end{aligned}$$

Prova: A segunda afirmação, segue da primeira, levando em conta, levando em conta que $m_1^{(i)} = -m_1^{(j)}$ e $m^{(i)}(l) = -m^{(j)}(l)$. A seguir, provaremos primeira afirmação. Se $m^{(i)}(l) \geq 1$, não há nada a mostrar pois $|m_1^{(i)}(\mathfrak{s})| \leq 1$. Seja $m^{(i)}(l) < 1$, e suponha por contradição que o evento $\Omega_1 = \{m_1^{(i)}(\mathfrak{s}) > m^{(i)}(l) \text{ e } \bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) \leq m^{(i)}(l)\}$ tenha medida positiva. Segundo o item 4, temos $p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) = 0$ para quase todo $\omega \in \Omega_1$, e portanto $\bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega)p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) = 0$ para quase todo $\omega \in \Omega_1$. Neste caso, o jogador i pode fazer melhor adotando a seguinte estratégia:

$$s^{(i)}(h) = \begin{cases} s_*^{(i)}(h), & \text{se } \tau(h) \geq 1, \quad m_1^{(i)}(h) > m^{(i)}(l) \\ \mathfrak{s}^{(i)}(h), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

onde $s_*^{(i)}$ é a estratégia de monopólio definida em (A.4).

A seguir mostraremos que $\pi_l^{(i)}(\mathfrak{s}^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)}) < \pi_l^{(i)}(s^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)})$, o que por sua vez contradiz o fato de $\mathfrak{s}$ ser um equilíbrio fracamente estacionário.

Seja $s^{(j)} = \mathfrak{s}^{(j)}$. Se $\omega \in \Omega_1$, então temos, pelo Lema A.0.4, temos $\bar{N}^{(i)}(s)(\omega)p^{(i)}(s)(\omega) = \mathcal{P}^{(i)}(l)$. Por outro lado, como $\bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega)p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) = 0$ para quase todo $\omega \in \Omega_1$, segue que para quase todo $\omega \in \Omega_1$ temos:

$$\bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega)p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) = 0 < \mathcal{P}^{(i)}(l) = \bar{N}^{(i)}(s)(\omega)p^{(i)}(s)(\omega) \quad (\text{A.21})$$

Se $\omega \in \{m_1^{(i)}(\mathfrak{s}) > m^{(i)}(l)\} - \Omega_1$, então

$$\bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega)p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) \leq \mathcal{P}^{(i)}(l) = \bar{N}^{(i)}(s)(\omega)p^{(i)}(s)(\omega) \quad (\text{A.22})$$

Se $\omega \in \{m_1^{(i)}(\mathfrak{s}) \leq m^{(i)}(l)\}$, então

$$\bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega)p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) = \bar{N}^{(i)}(s)(\omega)p^{(i)}(s)(\omega) \quad (\text{A.23})$$

Como Ω_1 possui medida positiva, temos:

$$\pi_l^{(i)}(\mathbf{s}^{(i)}, \mathbf{s}^{(j)}) = \mathbb{E}\left(\bar{N}^{(i)}(\mathbf{s})p^{(i)}(\mathbf{s})\right) < \mathbb{E}\left(\bar{N}^{(i)}(s)p^{(i)}(s)\right) = \pi_l^{(i)}(s^{(i)}, \mathbf{s}^{(j)})$$

Explicações referentes a (A.21), (A.22) e (A.23). A desigualdade em (A.21) resulta de $m^{(i)}(l) < 1$ e das definições de $m^{(i)}(l)$ e $\mathcal{P}^{(i)}(l)$ (apresentadas em (4.22) e (4.23)). A desigualdade em (A.22) resulta do item 4 o qual garante que $\bar{N}^{(i)}(\mathbf{s})p^{(i)}(\mathbf{s}) \leq \mathcal{P}^{(i)}(l)$ quase certamente. A igualdade em (A.23) segue da definição de $s^{(i)}$ em (A.20).

Provaremos agora a terceira implicação ($|m^{(i)}(l)| < 1 \Rightarrow \text{Prob}(m_1^{(i)}(\mathbf{s}) = m^{(i)}(l)) = 0$). Inicialmente temos $m_1^{(i)}(\mathbf{s}) = I_{[-1,1]}(U)$, onde $U = \alpha_1^{(i)}(s) + \beta m_0^{(i)}$. Por outro lado, a função $I_{[-1,1]}$ possui a seguinte propriedade: se $|m| < 1$, então $I_{[-1,1]}(u) = m$ se e somente se $u = m$. Assim, como $|m^{(i)}(l)| < 1$, segue $\text{Prob}(m_1^{(i)}(\mathbf{s}) = m^{(i)}(l)) = \text{Prob}(I_{[-1,1]}(U) = m^{(i)}(l)) = \text{Prob}(U = m^{(i)}(l))$. Levando em conta que $m_0^{(i)}$ é distribuído uniformemente em $[-1, 1]$, temos que U é distribuído uniformemente no intervalo $[\alpha_1^{(i)}(s) - \beta, \alpha_1^{(i)}(s) + \beta]$, onde $\beta > 0$. Assim, $\text{Prob}(m_1^{(i)}(\mathbf{s}) = m^{(i)}(l)) = \text{Prob}(U = m^{(i)}(l)) = 0$.

A quarta implicação ($|m^{(i)}(l)| < 1 \Rightarrow \pi_l^{(i)}(\mathbf{s}) = \text{Prob}(m_1^{(i)}(\mathbf{s}) > m^{(i)}(l)) \mathcal{P}^{(i)}(l)$) resulta do item 4 (mais precisamente, da equação $\pi_l^{(i)}(\mathbf{s}) = \text{Prob}(\bar{m}^{(i)}(\mathbf{s}) > m^{(i)}(l)) \mathcal{P}^{(i)}(l)$) e das três primeiras afirmações de 5.

6. $m^{(i)}(l) \leq -1 \Rightarrow \text{Prob}(\bar{m}^{(i)}(\mathbf{s}) = 1) = 1$,
 $m^{(i)}(l) \geq 1 \Rightarrow \text{Prob}(\bar{m}^{(i)}(\mathbf{s}) = 1) = 0$

Prova: Suponha por contradição que $m^{(i)}(l) \leq -1$ e $\text{Prob}(\bar{m}^{(i)}(\mathbf{s}) = 1) < 1$. Então, $\pi_l^{(i)}(\mathbf{s}) = \text{Prob}(\bar{m}^{(i)}(\mathbf{s}) = 1) \mathcal{P}^{(i)}(l) < \mathcal{P}^{(i)}(l)$, onde a igualdade acima ($=$) resulta do item 4, e a desigualdade ($<$) segue da hipótese $\text{Prob}(\bar{m}^{(i)}(\mathbf{s}) = 1) < 1$ e $\mathcal{P}^{(i)}(l) > 0$ (sendo que a desigualdade $\mathcal{P}^{(i)}(l) > 0$ resulta de $m^{(i)}(l) \leq -1$ mediante as definições de $m^{(i)}(l)$ e $\mathcal{P}^{(i)}(l)$ apresentadas em (4.22) e (4.23)). Mas neste caso, o jogador i poderia fazer melhor jogando $s_*^{(i)}$ definida em (A.4). Pois, devido ao Lema A.0.5, $\pi_l^{(j)}(s_*^{(i)}, \mathbf{s}^{(j)}) \geq I_{[0,1]}(\frac{1-m^{(i)}(l)}{2}) \mathcal{P}^{(i)}(l) = \mathcal{P}^{(i)}(l) > \pi_l^{(i)}(\mathbf{s})$. Mas a desigualdade anterior contraria a hipótese de que $\mathbf{s}$ é um equilíbrio fracamente estacionário.

A segunda implicação do item 6 segue da primeira, pois como $m^{(i)}(l) = -m^{(j)}(l)$ e $\bar{m}^{(i)}(\mathbf{s}) = -\bar{m}^{(j)}(\mathbf{s})$, temos que $m^{(i)}(l) \geq 1$ implica $m^{(j)}(l) \leq -1$. Assim, pela primeira implicação do item 6, $\text{Prob}(\bar{m}^{(j)}(\mathbf{s}) = 1) = 1$, e portanto $\text{Prob}(\bar{m}^{(i)}(\mathbf{s}) = 1) = 0$.

A seguir demonstraremos as equações (4.19), (4.20) e (4.21) da Proposição A.0.2.

Demonstração de (4.19). A equação (4.19) resulta diretamente do item 4.

Demonstração de (4.20). Suponha inicialmente $|m^{(i)}(l)| \geq 1$. Devido ao item 6, temos inicialmente duas implicações: 1) se $m^{(i)}(l) \leq -1$, então $\text{Prob}(\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = 1) = 1 = I_{[0,1]} \left(\frac{1-m^{(i)}(l)}{2} \right)$, 2) se $m^{(i)}(l) \geq 1$, então $\text{Prob}(\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = 1) = 0 = I_{[0,1]} \left(\frac{1-m^{(i)}(l)}{2} \right)$. Como $|m^{(i)}(l)| \geq 1$, segue $\text{Prob}(\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = 1) = I_{[0,1]} \left(\frac{1-m^{(i)}(l)}{2} \right)$.

Suponha agora $|m^{(i)}(l)| < 1$. Neste caso, $m^{(i)}(l) < 1$ e $m^{(j)}(l) < 1$, e portanto $\mathcal{P}^{(i)}(l) > 0$ e $\mathcal{P}^{(j)}(l) > 0$. Por outro lado, para cada $i = 1, 2$, deve valer: $\text{Prob}(\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = 1) \mathcal{P}^{(i)}(l) = \pi_l^{(i)}(\mathfrak{s}) \geq \pi_l^{(i)}(s_*^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)}) \geq I_{[0,1]} \left(\frac{1-m^{(i)}(l)}{2} \right) \mathcal{P}^{(i)}(l)$. Explicações: a segunda igualdade acima deve-se ao item 4; a primeira desigualdade segue da hipótese de que $\mathfrak{s}$ é um equilíbrio fracamente estacionário; e a última desigualdade resulta do Lema A.0.5. Como $\mathcal{P}^{(i)}(l) > 0$, segue $\text{Prob}(\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = 1) \geq I_{[0,1]} \left(\frac{1-m^{(i)}(l)}{2} \right)$, $i = 1, 2$.

Como $\sum_{i=1}^2 \text{Prob}(\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = 1) \leq 1$ e $\sum_{i=1}^2 I_{[0,1]} \left(\frac{1-m^{(i)}(l)}{2} \right) = 1$, vale também no caso $|m^{(i)}(l)| < 1$: $\text{Prob}(\bar{m}^{(i)}(\mathfrak{s}) = 1) = I_{[0,1]} \left(\frac{1-m^{(i)}(l)}{2} \right)$.

Demonstração de (4.21). Suponha por contradição que $P_1^{(1)}(\mathfrak{s}) > 0$ ou $P_1^{(2)}(\mathfrak{s}) > 0$. Neste caso, existe um i tal que uma das duas seguintes hipóteses (I ou II) são verdadeiras: I) $0 = P_1^{(j)}(\mathfrak{s}) < P_1^{(i)}(\mathfrak{s})$, II) $0 < P_1^{(j)}(\mathfrak{s}) \leq P_1^{(i)}(\mathfrak{s})$. Mostraremos que sob qualquer uma dessas hipóteses, o perfil $\mathfrak{s}$ não poderia ser um equilíbrio fracamente estacionário. Para tanto, adotaremos a seguinte notação: $s_* = (s_*^{(1)}, s_*^{(2)})$ e $s = (s_*^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)})$, onde $s_*^{(i)}$ é a estratégia de monopólio definida em (A.4).

Suponha inicialmente I) $0 = P_1^{(j)}(\mathfrak{s}) < P_1^{(i)}(\mathfrak{s})$. Neste caso, o jogador i poderia fazer melhor adotando $s_*^{(i)}$. Para ver isso, note o seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi_l(s_*^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)})}{\mathcal{P}^{(i)}(l)} &\stackrel{=}{=} \underset{1)}{Prob\left(m_1^{(i)}(s) > m^{(i)}(l)\right)} \\
&\stackrel{=}{=} \underset{2)}{Prob\left(I_{[-1,1]}(\alpha_1^{(i)}(s) + \beta m_0^{(i)}) > m^{(i)}(l)\right)} \\
&\stackrel{=}{=} \underset{3)}{Prob\left(\alpha_1^{(i)}(s) + \beta m_0^{(i)} > m^{(i)}(l)\right)} \\
&\stackrel{=}{=} \underset{4)}{Prob\left(m_0^{(i)} > \frac{m^{(i)}(l) - \alpha_1^{(i)}(s)}{\beta}\right)} \\
&\stackrel{=}{=} \underset{5)}{Prob\left(m_0^{(i)} > m^{(i)}(l)\right)} \\
&\underset{6)}{>} Prob\left(m_0^{(i)} > m^{(i)}(l) + \frac{\alpha_1^{(i)}(s) - \alpha_1^{(i)}(\mathfrak{s})}{\beta}\right) \tag{A.24} \\
&\stackrel{=}{=} \underset{7)}{Prob\left(m_0^{(i)} > \frac{m^{(i)}(l) - \alpha_1^{(i)}(s)}{\beta} + \frac{\alpha_1^{(i)}(s) - \alpha_1^{(i)}(\mathfrak{s})}{\beta}\right)} \\
&\stackrel{=}{=} \underset{8)}{Prob\left(\alpha_1^{(i)}(\mathfrak{s}) + \beta m_0^{(i)} > m^{(i)}(l)\right)} \\
&\stackrel{=}{=} \underset{9)}{Prob\left(I_{[-1,1]}(\alpha_1^{(i)}(\mathfrak{s}) + \beta m_0^{(i)}) > m^{(i)}(l)\right)} \\
&\stackrel{=}{=} \underset{10)}{Prob\left(m_1^{(i)}(\mathfrak{s}) > m^{(i)}(l)\right)} \\
&\stackrel{=}{=} \underset{11)}{\frac{\pi_l(\mathfrak{s}^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)})}{\mathcal{P}^{(i)}(l)}}
\end{aligned}$$

Os argumentos que justificam as Igualdades 1) a 5), a Desigualdade 6) e as Igualdades 7) a 11) de (A.24) serão apresentados a seguir:

1) Lema A.0.4 e $\mathcal{P}^{(i)}(l) > 0$, onde a desigualdade anterior segue de $|m^{(i)}(l)| < 1$,

2) Definição de $m_1^{(i)}(s)$,

3) $|m^{(i)}(l)| < 1$,

4) $\beta > 0$,

5) $\frac{m^{(i)}(l) - \alpha_1^{(i)}(s)}{\beta} = m^{(i)}(l)$, sendo que a igualdade anterior resulta da definição de $m^{(i)}(l)$ e de $\alpha_1^{(i)}(s) = l^{(i)} - l^{(j)}$, que por sua vez resulta da definição $\alpha_1^{(i)}(s)$ e de $P_1^{(1)}(s) = P_1^{(2)}(s) = 0$,

6) $|m^{(i)}(l)| < 1$ e $\frac{\alpha_1^{(i)}(s) - \alpha_1^{(i)}(\mathfrak{s})}{\beta} > 0$, sendo que a desigualdade anterior resulta de $\beta > 0$ e das definições de $\alpha_1^{(i)}(s)$ e $\alpha_1^{(i)}(\mathfrak{s})$, levando em conta que $P_1^{(j)}(\mathfrak{s}) = P_1^{(1)}(s) = P_1^{(2)}(s) = 0$ e $P_1^{(i)}(s) > 0$,

7) Vide 4),

8) $\beta > 0$,

9) $|m^{(i)}(l)| < 1$,

10) Definição de $m_1^{(i)}(\mathfrak{s})$,

11) $\pi_l(\mathfrak{s}^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)}) = \text{Prob}\left(m_1^{(i)}(\mathfrak{s}) > m^{(i)}(l)\right) \mathcal{P}^{(i)}(l)$ e $\mathcal{P}^{(i)}(l) > 0$, onde a igualdade anterior resulta dos itens (4?) e (5?) e de $|m^{(i)}(l)| < 1$, sendo que a desigualdade $\mathcal{P}^{(i)}(l) > 0$ resulta somente de $|m^{(i)}(l)| < 1$.

Suponha agora II) $0 < P^{(j)}(\mathfrak{s}) \leq P^{(i)}(\mathfrak{s})$. Neste caso, o jogador i poderia fazer melhor adotando a estratégia de monopólio $s_*^{(i)}$ definida em (A.4):

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi_l(s_*^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)})}{\mathcal{P}^{(i)}(l)} &\stackrel{12)}{=} \text{Prob}\left(m_0^{(i)} > \frac{m^{(i)}(l) - \alpha_1^{(i)}(s_*)}{\beta} - \frac{\alpha_1^{(i)}(s) - \alpha_1^{(i)}(s_*)}{\beta}\right) \\
 &\stackrel{13)}{=} \text{Prob}\left(m_0^{(i)} > m^{(i)}(l) - \frac{\alpha_1^{(i)}(s) - \alpha_1^{(i)}(s_*)}{\beta}\right) \\
 &\stackrel{14)}{>} \text{Prob}\left(m_0^{(i)} > m^{(i)}(l) + \frac{\alpha_1^{(i)}(s_*) - \alpha_1^{(i)}(\mathfrak{s})}{\beta}\right) \\
 &\stackrel{15)}{=} \text{Prob}\left(m_0^{(i)} > \frac{m^{(i)}(l) - \alpha_1^{(i)}(s_*)}{\beta} + \frac{\alpha_1^{(i)}(s_*) - \alpha_1^{(i)}(\mathfrak{s})}{\beta}\right) \\
 &\stackrel{16)}{=} \frac{\pi_l(\mathfrak{s}^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)})}{\mathcal{P}^{(i)}(l)}
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

Os argumentos que justificam as Igualdades 12) e 13), a Desigualdade 14) e as Igualdades 15) e 16) da Equação (A.25) são os seguintes:

12) Vide explicações das Igualdades 1) a 3) da Equação (A.24).

13) $\frac{m^{(i)}(l) - \alpha_1^{(i)}(s_*)}{\beta} = m^{(i)}(l)$, sendo que a igualdade anterior resulta da definição de $m^{(i)}(l)$ e de $\alpha_1^{(i)}(s_*) = l^{(i)} - l^{(j)}$. A desigualdade anterior resulta da definição $\alpha_1^{(i)}(s_*)$ e de $P_1^{(1)}(s_*) = P_1^{(2)}(s_*) = 0$, onde $s_* = (s_*^{(1)}, s_*^{(1)})$, sendo $s_*^{(i)}$ a estratégia de monopólio definida em (A.4).

14) $\alpha_1^{(i)}(s) > \alpha_1^{(i)}(s_*) \geq \alpha_1^{(i)}(\mathfrak{s})$ e $|m^{(i)}(l)| < 1$, sendo que as três primeiras desigualdades ($\alpha_1^{(i)}(s) > \alpha_1^{(i)}(s_*) \geq \alpha_1^{(i)}(\mathfrak{s})$) seguem de $P_1^{(i)}(s) < P_1^{(j)}(s)$, $P_1^{(i)}(s_*) = P_1^{(j)}(s_*)$ e $P_1^{(i)}(\mathfrak{s}) \geq P_1^{(j)}(\mathfrak{s})$.

15) Vide explicações da Igualdade 13) da Equação (A.25).

16) Vide explicações das Igualdades 8) a 11) da Equação (A.24).

Q.E.D.

Demonstração da Proposição 4.3.5. Suponha por contradição que, para algum i , o evento $\{p^{(i)}(\mathfrak{s}) < p^{(j)}(\mathfrak{s})\}$ ocorra com probabilidade positiva. Neste caso, existe t_* suficientemente grande tal que o seguinte evento possui probabilidade positiva: $\Omega_{t_*} = \{t_* > \max\{\tau^{(1)}(\mathfrak{s}), \tau^{(2)}(\mathfrak{s})\}, P_{t_*}^{(i)}(\mathfrak{s}) < P_{t_*}^{(j)}(\mathfrak{s})\}$. Neste caso, o jogador i poderia fazer melhor adotando a seguinte estratégia fracamente estacionária:

$$s^{(i)}(h) = \begin{cases} \frac{P_{t_*}^{(i)}(h) + P_{t_*}^{(j)}(h)}{2}, & \text{se } \tau(h) \geq t_* > \tau_m(\mathfrak{s}, h), \quad P_{t_*}^{(i)}(h) < P_{t_*}^{(j)}(h) \\ \mathfrak{s}^{(i)}(h), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

onde $\tau_m(\mathfrak{s}, h) = \max\{\tau^{(1)}(\mathfrak{s}, h), \tau^{(2)}(\mathfrak{s}, h)\}$

Seja $s^{(j)} = \mathfrak{s}^{(j)}$, isto é, $s = (s^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)})$. Então, pela definição de $s^{(i)}$, segue que $p^{(i)}(s)(\omega) = \frac{P_{t_*}^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) + P_{t_*}^{(j)}(\mathfrak{s})(\omega)}{2} < P_{t_*}^{(j)}(\mathfrak{s})(\omega) = p^{(j)}(s)(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega_{t_*}$. Pelo Lema A.0.7, segue $\bar{N}^{(i)}(s)(\omega) = 1$, $\forall \omega \in \Omega_{t_*}$. Portanto

$$\forall \omega \in \Omega_{t_*} : \bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega)p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) \leq p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) < p^{(i)}(s)(\omega) = \bar{N}^{(i)}(s)(\omega)p^{(i)}(s)(\omega)$$

Explicações. A primeira desigualdade acima segue de: $\bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s}) \leq 1$. A segunda desigualdade resulta de: $p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) = P_{t_*}^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) < \frac{P_{t_*}^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) + P_{t_*}^{(j)}(\mathfrak{s})(\omega)}{2} = p^{(i)}(s)(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega_{t_*}$.

Pela definição de $s^{(i)}$, temos $\forall \omega \in \Omega_{t_*}^c : \bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega)p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) = \bar{N}^{(i)}(s)(\omega)p^{(i)}(s)(\omega)$. Como Ω_{t_*} possui medida positiva segue:

$$\pi_l^{(i)}(\mathfrak{s}^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)}) = \mathbb{E}\left(\bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s})p^{(i)}(\mathfrak{s})\right) < \mathbb{E}\left(\bar{N}^{(i)}(s)p^{(i)}(s)\right) = \pi_l^{(i)}(s^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)})$$

A equação contradiz o fato de $\mathfrak{s}$ ser um equilíbrio fracamente estacionário. Portanto, necessariamente $p^{(1)}(\mathfrak{s}) = p^{(2)}(\mathfrak{s})$ com probabilidade 1.

Suponha por contradição que o evento $\{p^{(1)}(\mathfrak{s}) = p^{(2)}(\mathfrak{s}) > 0\}$ ocorra com probabilidade positiva. Neste caso, existe um jogador i e um tempo t_* suficientemente grande tal que o seguinte evento possui probabilidade positiva: $\Omega_{t_*} = \{t_* > \max\{\tau^{(1)}(\mathfrak{s}), \tau^{(2)}(\mathfrak{s})\}, P_{t_*}^{(1)}(\mathfrak{s}) = P_{t_*}^{(2)}(\mathfrak{s}) > 0, m_{t_*}^{(i)} < 0\}$.

Neste caso, o jogador i poderia fazer melhor adotando a seguinte estratégia fracamente estacionária:

$$s^{(i)}(h) = \begin{cases} \frac{3}{4}P_{t_*}^{(i)}(h), & \text{se } \tau(h) \geq t_* > \tau_m(\mathfrak{s}, h), \quad P_{t_*}^{(1)}(h) = P_{t_*}^{(2)}(h) > 0, \quad m_{t_*}^{(i)}(h) < 0 \\ \mathfrak{s}^{(i)}(h), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

A seguir mostraremos que $\pi_l^{(i)}(\mathfrak{s}^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)}) < \pi_l^{(i)}(s^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)})$, o que por sua vez contradiz o fato de $\mathfrak{s}$ ser um equilíbrio fracamente estacionário.

Seja $s^{(j)} = \mathfrak{s}^{(j)}$. Se $\omega \in \Omega_{t_*}$, então:

$$\bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega)p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) \leq \frac{1}{2}p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) < \frac{3}{4}p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) = \bar{N}^{(i)}(s)(\omega)p^{(i)}(s)(\omega).$$

Se $\omega \in \Omega_{t_*}^c$, então $\bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega)p^{(i)}(\mathfrak{s})(\omega) = \bar{N}^{(i)}(s)(\omega)p^{(i)}(s)(\omega)$.

Como Ω_{t_*} possui medida positiva, temos:

$$\pi_l^{(i)}(\mathfrak{s}^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)}) = \mathbb{E}\left(\bar{N}^{(i)}(\mathfrak{s})p^{(i)}(\mathfrak{s})\right) < \mathbb{E}\left(\bar{N}^{(i)}(s)p^{(i)}(s)\right) = \pi_l^{(i)}(s^{(i)}, \mathfrak{s}^{(j)})$$

Q.E.D.

O seguinte lema será útil para calcularmos os equilíbrios de localização no caso em que $0 \leq v < J$.

Lema A.0.8. *Seja $0 \leq v < J$ e $0 \leq l^{(i)} \leq 1 - l^{(j)} \leq 1$. Então*

$$I_{[0,1]}\left(\frac{1 - m^{(i)}(l)}{2}\right) = \frac{1 - m^{(i)}(l)}{2}$$

onde $m^{(i)}(l) = \frac{v(1-l^{(i)}-l^{(j)})}{J-v(1-l^{(i)}-l^{(j)})}(l^{(j)} - l^{(i)})$.

Demonstração do A.0.8. É suficiente mostrar que $-1 \leq m^{(i)}(l) \leq 1$. No caso em que $v = 0$, temos $m^{(i)}(l) = 0$, e as duas desigualdades são evidentes. Vamos assumir $v > 0$, denotar $a = J/v > 0$ e mostrar que $-1 \leq \frac{(1-l^{(i)}-l^{(j)})}{a-(1-l^{(i)}-l^{(j)})}(l^{(j)} - l^{(i)}) < 1$.

Notemos inicialmente que $f(l^{(i)}) = \frac{1}{a-(1-l^{(i)}-l^{(j)})}$ é estritamente decrescente e positiva para $l^{(i)} \in [0, (1 - l^{(j)})]$. Além disso, o gráfico de $g(l^{(i)}) = (1 - l^{(i)} - l^{(j)})(l^{(j)} - l^{(i)})$ é uma parábola voltada para cima que possui duas raízes, isto é, se $g(l^{(i)}) = 0$, então ou $l^{(i)} = l^{(j)}$ ou $l^{(i)} = 1 - l^{(j)}$. Seja $l_*^{(i)} = \min\{l^{(j)}, 1 - l^{(j)}\}$. Provaremos inicialmente que $0 \leq m^{(i)}(l) = h(l^{(i)}) = f(l^{(i)})g(l^{(i)}) \leq 1$ para $l^{(i)} \in [0, l_*^{(i)}]$.

Como $l_*^{(i)}$ é a primeira raiz de $g(l^{(i)})$, temos que $g(l^{(i)})$ é estritamente decrescente e positiva para $l^{(i)} \in [0, l_*^{(i)}]$. Consequentemente $h(l^{(i)}) = f(l^{(i)})g(l^{(i)})$ também é estritamente decrescente e positiva para $l^{(i)} \in [0, l_*^{(i)}]$. Assim $0 \leq m^{(i)}(l) = h(l^{(i)}) \leq h(0) = f(0)g(0) = \frac{(1-l^{(j)})}{a-(1-l^{(j)})}l^{(j)}$ para $l^{(i)} \in [0, l_*^{(i)}]$. Provaremos a seguir que $\frac{(1-l^{(j)})l^{(j)}}{a-(1-l^{(j)})} \leq 1$ para $l^{(j)} \in [0, 1]$. Como $a > 1$, temos $(1 - l^{(j)})l^{(j)} + (1 - l^{(j)}) = (1 - l^{(j)})(l^{(j)} + 1) \leq 1 < a$. Assim, $(1 - l^{(j)})l^{(j)} < a - (1 - l^{(j)})$, e portanto $\frac{(1-l^{(j)})l^{(j)}}{a-(1-l^{(j)})} \leq 1$.

Agora mostraremos que $-1 \leq h(l^{(i)}) = f(l^{(i)})g(l^{(i)}) \leq 0$ para $l^{(i)} \in (l_*^{(i)}, 1 - l^{(j)}]$. Caso $l_*^{(i)} = 1 - l^{(j)}$, não há nada a mostrar. Caso $l_*^{(i)} = l^{(j)} < 1 - l^{(j)}$, basta mostrar que $0 \leq f(l^{(i)})(-g(l^{(i)})) \leq 1$ para $l^{(i)} \in (l^{(j)}, 1 - l^{(j)}]$. A primeira desigualdade segue da positividade de $f(l^{(i)})$ e da negatividade da parábola $g(l^{(i)})$ para valores de $l^{(i)}$ localizados entre as raízes $l^{(j)}$ e $1 - l^{(j)}$. Provaremos a segunda desigualdade ($f(l^{(i)})(-g(l^{(i)})) \leq 1$). Notemos

inicialmente que o gráfico de $W(l^{(i)}) = (1 - l^{(j)} - l^{(i)})(1 - l^{(j)} + l^{(i)})$ é uma parábola voltada para baixo que possui duas raízes $-(1 - l^{(j)})$ e $1 - l^{(j)}$, onde $1 - l^{(j)} > 0$. Consequentemente, $W(l^{(i)}) \leq W(l^{(j)})$ para $l^{(i)} \in (l^{(j)}, 1 - l^{(j)}]$. Portanto, $(1 - l^{(j)} - l^{(i)})(1 - l^{(j)} + l^{(i)}) \leq (1 - l^{(j)} - l^{(j)})(1 - l^{(j)} + l^{(j)}) = (1 - 2l^{(j)}) \leq a$ para $l^{(i)} \in (l^{(j)}, 1 - l^{(j)}]$, onde a última desigualdade segue do fato de que $l^{(j)} \in [0, 1]$ e $a > 1$. Ou seja, $(1 - l^{(j)} - l^{(i)}) - (1 - l^{(j)} - l^{(i)})(l^{(j)} - l^{(i)}) \leq a$, o que é equivalente a $-(1 - l^{(j)} - l^{(i)})(l^{(j)} - l^{(i)}) \leq a - (1 - l^{(j)} - l^{(i)})$ que por sua vez implica $f(l^{(i)})(-g(l^{(i)})) = \frac{-(1 - l^{(j)} - l^{(i)})(l^{(j)} - l^{(i)})}{a - (1 - l^{(j)} - l^{(i)})} \leq 1$. QED.