UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE DE RIBEIRÃO PRETO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA – ÁREA: ECONOMIA APLICADA

CAIO DE ANGELIS NASCIMENTO

**Precificação de ativos via Machine Learning: uma
extensão de métodos lineares esparsos**

Orientador: Prof. Dr. Márcio Poletti Laurini

Ribeirão Preto

2020

Prof. Dr. Vahan Agopyan
Reitor da Universidade de São Paulo

Prof. Dr. André Lucirton Costa
Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto

Prof. Dr. Sérgio Kannebley Júnior
Chefe do Departamento de Economia

Prof. Dr. Sérgio Naruhiko Sakurai
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Economia

CAIO DE ANGELIS NASCIMENTO

**Precificação de ativos via Machine Learning: uma
extensão de métodos lineares esparsos**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia – Área: Economia Aplicada da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Márcio Poletti Laurini

Versão Corrigida

(versão original disponível na Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto)

Ribeirão Preto

2020

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Nascimento, Caio de Angelis.

Precificação de Ativos via Machine Learning: uma extensão de métodos lineares esparsos / Caio de Angelis Nascimento – Ribeirão Preto, SP, 2020.

121 p.: il.; 30 cm

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia – Área: Economia Aplicada da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências. – Universidade de São Paulo

Orientador: Laurini, Márcio

1. Precificação de ativos. 2. Machine Learning. 3. Estrutura a termo do retorno esperado. 4. Gestão de portfólios.

Aos meus pais.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de expressar minha incomensurável gratidão aos meus pais, Salete e Cassiano, que apostaram em mim sua confiança e apoio, e que tanto sacrificaram para que eu pudesse chegar até aqui. Essa conquista é tão de vocês quanto minha.

Ao meu caro orientador, Márcio Laurini, por todo conhecimento e inspiração que me foram transmitidos durante as disciplinas do mestrado, e pelas valiosas contribuições na qualificação, pré-defesa e defesa. Meu muito obrigado é certamente pouco perante a confiança que vocês depositaram em mim.

Aos professores João Caldeira e Roseli Silva por também terem aceitado meu convite para participar da minha pré-defesa e qualificação e pelas contribuições importantíssimas para o desenvolvimento da dissertação.

Aos professores Marcelo Fernandes e Marcelo Medeiros pelas contribuições valiosas para o desenvolvimento da dissertação.

Aos meus amigos de mestrado, em especial a João Pedro Amaral e Igor Martins pelo apoio no desenvolvimento da pesquisa, conselhos e conhecimentos compartilhados.

A todos os professores do PPGE/FEA-RP/USP, em especial aos professores Sérgio Kannebley Júnior, Sérgio Naruhiko Sakurai e Alex Ferreira que se tornaram além de professores, conselheiros, amigos e parceiros de tênis.

A todos os técnicos e funcionários da FEA-RP/USP, especialmente do Serviço de Pós-Graduação.

A EESP/FGV pela concessão de vaga regular para estudos em seus cursos de pós-graduação, em especial ao professor Pedro Valls Pereira.

Ao banco BTG Pactual pelo apoio e auxílio para finalização de minha dissertação, em especial a área de Collateral Management.

À CAPES pelo apoio financeiro concedido ao longo do mestrado. O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

NASCIMENTO, C. A. **Precificação de Ativos via Machine Learning: uma extensão de métodos lineares esparsos**. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2020.

Neste trabalho utilizamos uma classe de modelos de não arbitragem e métodos de estimação baseados em ferramentas de Machine Learning para prever o prêmio de risco ao longo do tempo. A pesquisa inova em adicionar modelos de alta dimensão esparsos para precificação de ativos, como modelos de vetores autoregressivos esparsos, análise de componentes principais esparsos (SPCA), combinação de métodos de penalização como pré-seleção de variáveis e outros modelos econométricos baseados em esparsidade. Também consideramos como extensão aos modelos existentes na literatura de alta de dimensão analisados na pesquisa correções nos estimadores de matrizes de covariância, adicionando estimadores considerando dependência de longo prazo. A base de dados utilizada consiste de 630 séries temporais relacionadas ao mercado Brasileiro, contendo variáveis macroeconômicas, setoriais e específicas dos ativos, divididas em quatro diferentes espaços de tempo (dia, mês, trimestre e ano). Como resultado principal foi desenvolvida uma estrutura a termo do prêmio de risco de um conjunto de ativos selecionados, chegando a encontrar um R^2 para previsões de fora da amostra de aproximadamente 91% para o Índice IBOVESPA. Com objetivo de testar a capacidade de geração de alpha dos modelos desenvolvidos na pesquisa, foram desenvolvidas estratégias de Long-Short e Long-Only compostas pelos ativos analisados de 1 de janeiro de 2016 até 31 de dezembro de 2017, apresentando índice de Sharpe de 3,030 e um retorno acumulado de 157,07% no período.

Palavras-chave: Precificação de ativos. Machine Learning. Estrutura a termo do retorno esperado. Gestão de portfólios.

Abstract

NASCIMENTO, C. A. **Asset Pricing via Machine Learning: an extension of sparse linear methods**. Dissertation (Master Degree) – School of Economics, Business and Accounting at Ribeirão Preto, University of São Paulo, Ribeirão Preto, 2019.

In this work we use a class of non-arbitrage models and estimation methods based on Machine Learning tools to predict the risk premium over time. The research innovates in adding sparse high-dimension models for asset pricing, such as sparse autoregressive vector models, sparse principal component analysis (SPCA), combination of penalty methods such as pre-selection of variables and other sparse based econometric models. We also consider as an extension to the existing models in the high-dimensional literature analyzed in the research, corrections in the covariance matrix estimators, adding estimators considering long-term dependence. The database used consists of 630 time series related to the Brazilian market, containing macroeconomic, sectorial and asset-specific variables, divided into four different time periods (day, month, quarter and year). As a main result, a term structure of the risk premium for a set of selected assets was developed, reaching an R^2 for out-of-sample forecasts of approximately 91 % for the IBOVESPA Index. In order to test the alpha generation capacity of the models developed in the research, Long-Short and Long-Only strategies were developed composed of the analyzed assets from January 1, 2016 to December 31, 2017, with a Sharpe index of 3.030 and an accumulated return of 157.07 % in the period.

Keywords: Asset pricing. Machine Learning. Term structure of the expected return. Portfolio management..

Lista de ilustrações

Figura 1 – Divisão do espaço de tempo da pesquisa	54
Figura 2 – Avaliação da Capacidade Preditiva dos Modelos Diários.	59
Figura 3 – Análise Diária de Efeitos Marginais Por Ativo.	62
Figura 4 – Análise Mensal de Efeitos Marginais Por Ativo.	65
Figura 5 – Análise Trimestral de Efeitos Marginais Por Ativo.	67
Figura 6 – Estrutura a termo do retorno esperado: Índice IBOVESPA.	74
Figura 7 – Estrutura a termo do retorno esperado: Taxa de Câmbio Real/Dólar.	75
Figura 8 – Estrutura a termo do retorno esperado: Taxa CDI.	75
Figura 9 – Estrutura a termo do retorno esperado: ABEV3.SA.	76
Figura 10 – Estrutura a termo do retorno esperado: CMIG4.SA.	76
Figura 11 – Estrutura a termo do retorno esperado: ITUB4.SA.	77
Figura 12 – Estrutura a termo do retorno esperado: PETR4.SA.	77
Figura 13 – Estrutura a termo do retorno esperado: VALE3.SA.	78
Figura 14 – Avaliação da Capacidade Preditiva Para o Retorno Acumulado por Ativo.	79
Figura 15 – Retorno Acumulado Carteiras Reduzidas.	84
Figura 16 – Retorno Acumulado Carteiras Completas	86

Lista de tabelas

Tabela 1 – Total de séries temporais.	52
Tabela 2 – Apresentação dos modelos estimados.	56
Tabela 3 – Resultados para cada um dos modelos de predição diária.	58
Tabela 4 – Teste de Diebold e Mariano.	61
Tabela 5 – Resultados dos modelos mensais.	64
Tabela 6 – Resultados dos modelos trimestrais.	66
Tabela 7 – Resultados dos modelos anuais.	69
Tabela 8 – Resumo dos modelos selecionados.	72
Tabela 9 – Horizonte de previsão.	73
Tabela 10 – Médias da confiança em relação as priores e posteriores por ativo analisado.	83
Tabela 11 – Principais resultados encontrados.	85
Tabela 12 – Principais resultados encontrados nas carteiras completas	87
Tabela 13 – Variáveis incluídas na pesquisa (1).	97
Tabela 14 – Variáveis incluídas na pesquisa (2).	98
Tabela 15 – Variáveis incluídas na pesquisa (3).	99
Tabela 16 – Variáveis incluídas na pesquisa (4).	100

Sumário

0.1	Contribuições	16
0.2	Machine Learning	19
0.3	Literatura	21
1	METODOLOGIA	24
1.1	Precificação de ativos com não arbitragem	25
1.2	Ajuste via validação e divisão da amostra	26
1.3	Penalização Linear	27
1.4	Vetor Autoregressivo (VAR)	29
1.4.1	Vetores Autoregressivos Esparsos (VAR-S)	31
1.4.2	VAR Bayesiano Esparso (BVAR-S)	32
1.4.3	Métodos de Redução de Dimensionalidade Para o Conjunto Informacional Ω	34
1.5	Estimação da Matriz de Covariâncias	40
1.5.1	Matriz de Covariâncias de Longo Prazo (LRCM)	40
1.5.2	Modelo fatorial de volatilidade estocástica	42
1.6	Avaliação do desempenho preditivo	43
1.7	Alocação de Carteiras	45
1.8	Interpolação de dados e preenchimento de curvas	50
1.9	Relevância das variáveis e relacionamento marginal	51
2	UM ESTUDO EMPÍRICO PARA ATIVOS BRASILEIROS	52
2.1	Base de dados	52
2.2	Estruturas dos Modelos Preditivos	54
3	APLICAÇÃO:DESENVOLVIMENTO DA ESTRUTURA A TERMO DO RETORNO ESPERADO	72
4	APLICAÇÃO: ALOCAÇÃO DE PORTFÓLIOS VIA EXTENSÃO DO MODELO BLACK E LITTERMAN	81

5	CONCLUSÃO	89
	REFERÊNCIAS	92
6	ANEXO A	96
7	ANEXO B	101
7.1	Modelos de Penalização Linear	101
7.2	VAR Esparso	105
7.3	PCA	112
7.4	SPCA	113
7.5	PLS	116

Introdução

A previsão dos retornos de ativos é um valor central em finanças e na macroeconomia. A questão fundamental na precificação de ativos é entender o comportamento dos prêmios de risco ao longo do tempo. A eficiência de mercado impõe que todas as informações dos preços sejam resumidas no Fator de Desconto Estocástico (FDS) ou no operador de núcleo dos preços. Entretanto, a variação do retorno tende a ser dominada por informações imprevisíveis que obscurecem tais fatores ao longo do tempo. Esse processo muitas vezes é denominado na literatura como ruído ou efeito das incertezas, podendo surgir da incapacidade dos modelos existentes e dos agentes de capturar com fidedignidade o efeito real e o sinal que cada nova informação tem sobre o prêmio de risco.

Nos últimos 50 anos, a busca empírica por explicar o fator de desconto estocástico e o núcleo de preços para o processo de precificação de ativos foi incessante e extensa. Com o objetivo de explicar o prêmio de risco dos ativos, mais de 400 fatores já foram desenvolvidos na literatura como pode ser visto em [Harvey e Liu \(2019\)](#). Contudo, o trabalho de [Gu, Kelly e Xiu \(2018\)](#) elucidou que estimar um fator de desconto estocástico comum que possa explicar o retorno esperado de todos os ativos é uma tarefa complexa. O fator de desconto estocástico de determinado ativo depende de um enorme conjunto informacional específico para o ativo em questão e de um conjunto ainda maior de informações comuns entre os ativos. De forma recorrente, as pesquisas de [Gu, Kelly e Xiu \(2018\)](#) e [Chen, Pelger e Zhu \(2019\)](#) encontraram quatro grandes desafios: (1) O FDS poderia, por construção, depender de todas as informações disponíveis, o que significa que o FDS é uma função de um conjunto potencialmente muito grande de variáveis e não incluído nos trabalhos até então realizados. (2) A forma funcional do FDS não é conhecida *ex-ante*, e *ex-post*, e por basear-se em seu comportamento histórico não possui capacidade preditiva para o futuro, sendo que sua previsão pode advir de um processo extremamente complexo. (3) O FDS tem uma estrutura dinâmica complexa e a exposição ao risco para ativos individuais varia ao longo do tempo, dependendo das condições econômicas e das mudanças nos atributos

específicos do ativo. (4) O prêmio de risco de ações individuais tem uma baixa relação entre o sinal e o ruído, o que complica a estimativa de um FDS que explica os retornos esperados de todas as ações.

Nesta dissertação, estimamos cinquenta e três modelos lineares esparsos diferentes para o processo de precificação de um conjunto dos ativos de maior liquidez no mercado brasileiro, com base em um grande conjunto de informações macroeconômicas e específicas dos ativos. Seguindo [Chen, Pelger e Zhu \(2019\)](#), utilizamos da condição de não arbitragem como parte do algoritmo de *Machine Learning* Linear. Estimamos os fatores de desconto estocástico comuns entre os ativos e preditores específicos de cada ativo analisado, com objetivo de explicar os retornos dos ativos a partir das restrições de momento condicional implícitas pela não arbitragem. O uso de técnicas de Machine Learning, é uma ideia natural para lidar com a alta dimensionalidade do problema. Uma abordagem crucial de nosso trabalho foi incorporar condições econômicas e preditores específicos de cada ativos ao problema de Machine Learning. A inclusão da restrição de não arbitragem no algoritmo melhorou o sinal de prêmio de risco e possibilitou explicar os retornos individuais das ações. Empiricamente, nosso modelo geral superou fora da amostra as principais abordagens de *benchmark* e forneceu uma visão clara da estrutura de desconto estocástico dos ativos selecionados e das fontes de risco sistemático ao longo do tempo.

A determinação do FDS e do fator de desconto estocástico específico (FDSE) previu retornos futuros esperados que foram incorporados diretamente nas estratégias de negociação via arbitragem presente na dissertação, onde ativos com preços incorretos corresponderam a oportunidades de arbitragem que podem ser exploradas. A condição de não arbitragem identificou os componentes do FDS que carregam um prêmio de risco elevado, mas possuem apenas um sinal de variação fraco. Intuitivamente, a maioria dos métodos de Machine Learning em finanças se encaixa em um modelo que pode explicar o máximo de variação possível, que é essencialmente um objeto de segundo momento. A condição de não arbitragem se baseou na explicação dos prêmios de risco, que, por sua vez, se baseiam no primeiro momento condicional. Podemos decompor o retorno das ações em uma parte de prêmio de risco previsível e um componente de *martingale* imprevisível.

A maior parte da variação foi gerada pelo componente imprevisível que não possui um prêmio de risco. Ao considerar retornos médios desagregados, o componente imprevisível foi diversificado ao longo do tempo e o sinal de risco previsível foi reforçado. No entanto, os prêmios de risco de ações individuais variam no tempo e uma média incondicional dos retornos das ações pode não capturar o componente previsível. Portanto, consideramos médias incondicionais de retorno das ações instrumentados com todas as combinações possíveis de características específicas da empresa e informações macroeconômicas. Isso tem o objetivo de elevar o sinal do prêmio de risco e levar em consideração a variação ao longo do tempo do prêmio de risco.

0.1 Contribuições

Realizamos uma análise empírica em larga escala, investigando os 8 principais ativos em relação a liquidez do mercado financeiro brasileiro nos últimos 25 anos: Índice IBOVESPA, Certificados de Depósitos Interbancários (CDI) (SWAP), taxa de câmbio Real/Dólar, ABEV3.SA, CMIG4.SA, ITUB4.SA, PETR4.SA e VALE3.SA. utilizando-se de uma base de dados de 23 anos, de 1995 à 2017. Nosso conjunto de preditores inclui um total de 630 séries temporais diárias, mensais, trimestrais e anuais, sendo uma média de 88 características para cada ação, 90 características setoriais e 102 variáveis macroeconômicas. No nível mais amplo, nossa principal descoberta empírica foi que o Machine Learning Linear e Esparsos (MLLE) como um todo tem o potencial de melhorar nosso entendimento empírico dos retornos esperados dos ativos. Tal método consolidou o conjunto de dados preditores, que é massivo na perspectiva da literatura existente, em um modelo de previsão de retorno que domina as abordagens tradicionais. A implicação imediata foi que o Machine Learning ajudou a resolver os problemas práticos de investimentos, como escolha de portfólio e gerenciamento de riscos, justificando seu papel na arquitetura de estratégias de investimento no contexto atual.

A evidência de tal contribuição foi dividida em dois grupos. No primeiro grupo, fornecemos um conjunto de modelos de referência para a previsão dos prêmios de risco do mercado agregado e dos retornos esperados para os ativos específicos. Essa capacidade

de previsão foi resumida em um R^2 preditivo fora da amostra comparativamente alto em relação à literatura anterior e robusto em uma variedade de especificações de Machine Learning. No segundo grupo, fornecemos estratégias de gestão de portfólio desenvolvidas das previsões de retorno geradas pelos modelos Machine Learning que alcançaram índices Sharpe mensais acima de 3,00.

Ao total foram encontradas mais dez contribuições para literatura existente. A primeira destas contribuições advém do encontro dos preditores de maior sucesso nos ativos analisados. Todos os métodos que estudamos produziram uma classificação muito semelhante dos preditores mais informativos em nível de retorno, que se enquadraram em três categorias principais: (1) variáveis de tendência de preços, incluindo o momento dos pares no mercado, o momento da indústria e movimento dos demais índices de mercado; (2) variáveis de liquidez, incluindo valor de mercado, volume de negociações e *spread* de compra e venda; (3) volatilidade de retorno, índice de volatilidade, beta de mercado e beta ao quadrado que também estão entre os principais preditores em todos os modelos que consideramos. As variáveis específicas dos ativos analisados, como índices dos principais commodities da cadeia produtiva, índice das vendas pelo preço do ativo, ratio do preço em relação aos lucros e variáveis de grau de alavancagem financeira foram os próximos preditores encontrados na escala de importância preditiva.

Seguindo na mesma linha de contribuições da literatura, encontramos os preditores de maior sucesso no nível microeconômico e macroeconômico, considerando que analisamos ativos como Índice IBOVESPA, CDI e taxa de câmbio e obtivemos como resultado o conjunto de variáveis que melhor explicam as variações apresentadas por tais variáveis, contribuindo para literatura de previsão de variáveis econômicas. Os dados macroeconômicos de séries temporais têm uma estrutura de "fator" de baixa frequência, que pode ser capturada pelos modelos desenvolvidos através da pesquisa

Terceiro, ao considerar as características específicas da empresa isoladamente, o FDS depende aproximadamente de forma linear da maioria das características. Isso explica por que fatores de risco lineares funcionam bem em determinadas carteiras de uma única classe de ativos, e fortalece a visão de que cada ativo de determinada classe possui um

conjunto informacional exclusivo que gera melhores resultados em sua previsão. Desta forma, justificamos a necessidade de um fator de desconto exclusivo para cada um dos ativos analisados.

Em quarto lugar, estimar um modelo de precificação para ações individuais levou a um modelo de precificação superior para carteiras. Nosso modelo explica de forma robusta os retornos esperados dos ativos de teste padrão, por exemplo, Índice IBOVESPA, Taxa de Câmbio Real/Dólar e CDI, possuindo um excelente desempenho de precificação, superior ao benchmark em todas as carteiras analisadas, e um R^2 fora da amostra superior a 50% na média para retornos mensais.

Quinto, a estrutura FDS encontrada foi estável ao longo do tempo. Estimamos a forma funcional do FDS com os dados de 1995 a 2015, que apresentaram um excelente desempenho fora da amostra para os dados de teste de 2016 até 2017. A exposição ao FDS do risco para ações individuais pode variar ao longo do tempo, porque as características específicas da empresa e variáveis macroeconômicas variam no tempo. No entanto, a forma funcional do FDS e a exposição ao risco em relação a essas covariáveis não sofrem grandes alterações. Para acrescentar à contribuição, constatamos que os melhores modelos preditivos se alteram ao longo do tempo, com um ciclo de vida médio de 3 meses, o que vai ao encontro aos resultados encontrados nas principais gestoras de fundos quantitativas.

Sexto, utilizamos a literatura de Machine Learning de métodos lineares para precificação de ativos um modelo de não arbitragem, separando o efeito de ruído e tendência presente no FDS. Reforçando tal contribuição, encontramos modelos de alocação de ativos que estruturados sobre não arbitragem possuem melhor performance em todos casos no qual a estratégia de arbitragem não inclui explorar o ruído.

Sétimo, complementamos a literatura de desenvolvimento da estrutura a termo para ativos de risco, fornecendo uma alternativa a modelos de opções e derivativos sobre dividendos e variância. Através da combinação das previsões em diferentes frequências, entregamos uma curva de estrutura a termo do prêmio de risco esperado. Devido à impossibilidade de tempo e dados, as estratégias comparativas não foram desenvolvidas na pesquisa, gerando um benchmark a ser alcançado. Contudo, como analisamos o R^2

preditivo encontramos na média um percentual de 34% para um ambiente de previsão de dois anos.

Oitavo, adicionamos novas extensões de modelos de alta dimensão, incluindo novas formulações de VAR esparsos, modificações em relação à aplicação posterior ou de pré-seleção de variáveis em relação aos modelos de análise de componentes principais esparsos. Tais modelos apresentaram resultados semelhantes aos já presentes na literatura em relação à capacidade preditiva fora da amostra. Utilizamos o método de análise do teste de [DIEBOLD e MARIANO \(1995\)](#) para compararmos os modelos e encontramos que os modelos de alta dimensão desenvolvidos na dissertação possuem resultados superiores e significativos em relação aos principais modelos de benchmark.

Nona, adicionamos aos modelos de alta dimensão uma correção em relação as matrizes de covariâncias, utilizando das matrizes de covariância de longo prazo. Desta forma, adicionamos a literatura dois formatos de matrizes de covariância de longo prazo introduzidos aos modelos de alta dimensão: [Andrews \(1991\)](#) e [Kiefer e Vogelsang \(2005\)](#). Uma extensão também adicionada à pesquisa em relação as matrizes de covariância foi sua estimação via volatilidade estocástica fatorial para o modelo de alocação de ativos.

Décima, realizamos uma extensão na metodologia de alocação de carteiras de Black-litterman, onde através da diferenciação entre as priores e posteriores introduzimos um conceito de não arbitragem na pesquisa. Sendo que como priori utilizamos da previsão mensal desagregada e como posterior incluímos a previsão diária para o retorno, o que possibilitou, em conjunto com a correção das matrizes de covariância pela matriz de covariância de longo prazo, decompor o retorno das ações em uma parte de prêmio de risco previsível e um componente de martingale imprevisível para previsão.

0.2 Machine Learning

O interesse em métodos de Machine Learning para finanças cresceu tremendamente na pesquisa acadêmica e na indústria. Na área acadêmica livros recentes como *Advances in Financial Machine Learning* de [Prado \(2018\)](#) se tornaram extremamente utilizados em

cursos avançados de finanças, concomitantemente a indústria financeira possui excelentes aplicações de tais modelos para gestão de fundos de investimento como no caso da empresa *AQR* e dos setores quantitativos emergindo dentro das mesas dos grandes conglomerados financeiros. A definição de Machine Learning é incipiente e geralmente é específica do contexto. Utilizamos o termo para descrever uma coleção diversificada de modelos de alta dimensão para previsão estatística, combinada com os chamados métodos de “regularização” para seleção de modelos e mitigação do super ajuste e algoritmos eficientes para pesquisar entre um grande número de possíveis especificações de modelo. A natureza de alta dimensão dos métodos de Machine Learning aprimora sua flexibilidade em relação às técnicas de previsão econométrica mais tradicionais. Essa flexibilidade traz esperança de uma melhor aproximação do processo de geração de dados desconhecidos e prováveis complexos subjacentes aos prêmios de risco de patrimônio. Vários aspectos do processo de precificação de ativos o tornam um campo particularmente atraente para análise.

O trabalho de [Gu, Kelly e Xiu \(2018\)](#) motivou a utilização do Machine Learning, através de dois principais pontos. (1) Duas agendas de pesquisa monopolizaram a moderna pesquisa empírica de precificação de ativos. A primeira buscou descrever e entender as diferenças nos retornos esperados entre os ativos e é encontrada nos trabalhos de [Fama e French \(2008\)](#) e [Jenter e Lewellen \(2015\)](#). A segunda focou a dinâmica do prêmio agregado ao risco de ações de mercado como o trabalho de [Rapach e Zhou \(2013\)](#). Machine Learning, cujos métodos são amplamente especializados para previsão, é, portanto, ideal para o problema de medição de prêmio de risco. (2) A coleta de variáveis candidatas para previsão do prêmio de risco é grande. A área acumulou uma lista impressionante de preditores que vários pesquisadores argumentaram possuir poder de previsão para retornos. Com ênfase nas técnicas de seleção de variáveis e redução de dimensão, Machine Learning é adequado para esses problemas de previsão desafiadores, reduzindo graus de liberdade e condensando variações redundantes entre os preditores devido ao alto nível de correlação entre as variáveis.

Selecionamos um conjunto de modelos candidatos potencialmente adequados para enfrentar os dois desafios empíricos descritos acima. Eles constituem o core dos métodos

encontrados em um livro didático de Machine Learning linear em nível avançado. Isso inclui regressão linear, modelos lineares generalizados com penalização, redução de dimensão via regressão de componentes principais (PCR) e mínimos quadrados parciais (PLS), utilização de critérios de pré-seleção (RIDGE, LASSO, adaLASSO e ELASTICNET), modelos de vetores autoregressivos esparsos (VAR-S) e análise de componentes principais esparsos. Esta não foi uma análise exaustiva de todos os métodos. Por exemplo, excluimos modelos não lineares de Machine Learning. Entretanto, os métodos de Machine Learning por si só não identificam profundas associações fundamentais entre preços de ativos e variáveis condicionantes. Quando o objetivo é entender os mecanismos econômicos, o Machine Learning ainda pode ser útil. Isto é, requer que o pesquisador adicione estrutura. Por meio do exame da literatura, esta dissertação adicionou uma restrição de não arbitragem aos modelos de Machine Learning.

0.3 Literatura

Essa dissertação estendeu a literatura empírica sobre previsão de retorno de ações, índices, taxa de câmbio e juros, que vem em duas vertentes básicas. A primeira vertente modela as diferenças nos retornos esperados entre as ações em função das características do nível das ações e foi exemplificada por [Fama e French \(2008\)](#) e [Jenter e Lewellen \(2015\)](#). A abordagem típica nesta literatura realizou regressões transversais dos retornos futuros de ações com algumas características de ações defasadas, via fatores não negociáveis. A segunda vertente prevê a série temporal de retornos e foi pesquisada por [Kojen e Nieuwerburgh \(2011\)](#) e [Rapach e Zhou \(2013\)](#). Essa literatura tipicamente conduziu regressões de séries temporais com amplo retorno agregado de portfólio em um pequeno número de variáveis preditoras macroeconômicas. Esses métodos tradicionais têm limitações potencialmente graves, que as ferramentas estatísticas mais avançadas de Machine Learning podem ajudar a superar. O mais importante é que as regressões e os tipos de portfólio não são adequados para lidar com o grande número de variáveis preditoras que a literatura acumulou ao longo das últimas décadas.

Os métodos de Machine Learning apareceram constantemente na literatura de

precificações de ativos. Recentemente, novos métodos foram desenvolvidos para estudar a seção transversal de retornos na estrutura linear respondendo a uma grande quantidade de informações condicionantes. [Rapach e Zhou \(2013\)](#) aplicaram o LASSO para prever retornos globais do mercado de ações usando retornos defasados de todos os países. [Lettau e Pelger \(2018\)](#) estenderam a análise de componentes principais para explicar a não arbitragem. Eles mostraram que um termo de penalidade de não arbitragem permite superar o problema da baixa relação sinal/ruído nos dados financeiros e encontrar as informações relevantes para o FDS. Esta dissertação foi estruturada sobre uma intuição semelhante e mostramos que esse resultado se estende aos preditores específicos dos ativos. [Kozak, Nagel e Santosh \(2018\)](#) aplicaram um processo de otimização da variância média com uma penalidade sobre a liquidez dos fatores de desconto estocásticos. [Gu, Kelly e Xiu \(2018\)](#) aplicaram PCA aos retornos esperados das ações para obter um FDS linear. [Chen, Pelger e Zhu \(2019\)](#) combinou dados de alta frequência com o PCA para capturar não parametricamente a variação no tempo do fator de risco. [Pelger e Xiong \(2018\)](#) mostraram que os estados macroeconômicos são relevantes para capturar a variação do tempo em fatores baseados na PCA. [Freyberger, Neuhierl e Weber \(2017\)](#) usaram os métodos de seleção LASSO para aproximar o FDS como uma função não linear das características, mas excluíram os efeitos de interação.

Modelos de precificação não lineares que utilizam da estrutura de Machine Learning estão presentes de forma robusta na literatura de finanças. Tal literatura utiliza do ferramental de redes neurais, redes neurais profundas, *Boosted Regression Trees*, *Random Forests*, *feed forward* (FFN), rede gerativa adversária (GAN) e redes recorrentes (LSTM) para obter o fator de desconto estocástico. Os modelos podem ser vistos como concorrentes dos modelos lineares propostos nesta dissertação. Em relação aos trabalhos que compararam métodos de Machine Learning lineares e não lineares, em seu trabalho pioneiro, [Gu, Kelly e Xiu \(2018\)](#) realizaram uma comparação de métodos de Machine Learning para prever o painel de retornos individuais de ações nos EUA. Suas estimativas dos prêmios de risco esperados das ações foram mapeadas para um modelo de precificação de ativos de seção transversal. [Messmer e Audrino \(2017\)](#) e [Feng, Wang e Zhang \(2018\)](#) seguiram

uma abordagem semelhante a de [Gu, Kelly e Xiu \(2018\)](#) para prever retornos de ações com redes neurais. [Bianchi et al. \(2019\)](#) forneceram uma comparação entre os métodos de Machine Learning para prever retornos de títulos dado trabalho de [Gu, Kelly e Xiu \(2018\)](#). [Feng, Wang e Zhang \(2018\)](#) impuseram uma restrição de não arbitragem usando um conjunto de fatores de preços lineares pré-especificados e estimativas de cargas de risco com uma rede neural. [Ismailov e Rossi \(2018\)](#) usou árvores de regressão aprimoradas para formar portfólios condicionais eficientes de variação média com base no portfólio de mercado e no ativo livre de risco. Nossa abordagem também produziu o portfólio eficiente de variância média condicional, mas baseado em todas as ações. [Gu, Kelly e Xiu \(2019\)](#) estenderam o modelo de fator condicional linear de [Gu, Kelly e Xiu \(2018\)](#) para um modelo de fator não linear usando uma rede neural. O foco de nossa dissertação foi explorar simultaneamente uma ampla variedade de métodos de Machine Learning lineares para estudar o comportamento dos retornos esperados de estoque, com ênfase particular na análise comparativa entre os métodos.

O resto da dissertação está organizado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta a metodologia e a estrutura dos modelos desenvolvidos a seção 3 desenvolve a parte empírica da pesquisa. A seção 4 fornece resultados em relação a modelos para estrutura a termo do prêmio do risco esperado. Os resultados empíricos em relação às estratégias de alocação de ativos são coletados na seção 5. A Seção 6 conclui a dissertação. O apêndice A apresenta o conjunto dos dados analisados, o apêndice B completa a explanação sobre os modelos e apresenta seus algoritmos de forma resumida.

1 Metodologia

Esta seção descreve a coleção de métodos de Machine Learning que usamos em nossa análise. Em cada subseção, introduzimos um novo método e o descrevemos em termos de seus dois elementos fundamentais. Primeiro, o modelo estatístico que descreve a forma funcional geral de um método para previsões de prêmio de risco, e o segundo, uma função objetiva para estimar os parâmetros do modelo. Todas as nossas estimativas compartilharam o objetivo básico de minimizar o erro quadrático médio das previsões (RMSE). O conjunto de permutações dos modelos se expandiu rapidamente quando se considera as transformações lineares de preditores e combinação de diferentes métodos. Essa proliferação foi agravada em nosso conjunto de preditores de alta dimensão, que nos levou ao seguinte número final: 212 modelos ao todo para cada ativo analisado. No apêndice B são apresentados de forma resumida os algoritmos computacionais para identificar eficientemente a especificação ótima entre as permutações abrangidas por um determinado método. À medida que apresentamos cada método, nosso objetivo foi fornecer uma descrição suficientemente profunda do modelo estatístico, para trazer o leitor ao ambiente de pesquisa explorado.

Em sua forma mais geral, descrevemos o excesso de retorno de um ativo como a expectativa do excesso de retorno esperada em t mais um erro de previsão aditivo:

$$r_{i,t+1} = E_t[r_{i,t+1}] + \mu_{i,t+1} \quad (1.1)$$

Onde os ativos são indexados por i , os períodos no tempo por t e onde T é a primeira observação utilizada. Nosso objetivo foi isolar uma representação de $E_t[r_{i,t+1}]$ como uma função de variáveis preditoras que maximizam o poder explicativo fora da amostra para o r_i realizado em $t + 1$. Onde para facilitar a explicação utilizamos:

$$E_t[r_{i,t+1}] = C_{i,t|t}^*(z_{i,t|t,t-1,t-2,\dots,T}) \quad (1.2)$$

Denotamos o conjunto de preditores como o vetor $z_{i,t|t,t-1,t-2,\dots,T}$ e assumimos que o retorno esperado condicional $C_{i,t|t}^*$ é uma função flexível desses preditores. A função $C_{i,t|t}^*$ depende de i e de t . Isto é, não mantém a mesma forma ao longo do tempo e em diferentes ativos, o modelo aproveita as informações de todos os dados para o desenvolvimento da previsão para o ativo i no período $t + 1$. Para facilitar a notação consideramos o conjunto completo de preditores da pesquisa como Ω , i.e., $z_{i,t|t,t-1,t-2,\dots,T} \in \Omega_t$.

1.1 Precificação de ativos com não arbitragem

A suposição fundamental de não arbitragem é equivalente à existência de um fator de desconto estocástico comum ou específico, de modo que, para qualquer retorno em excesso da taxa livre de risco $E_t[r_{i,t+1}^e] = E_t[r_{i,t+1}] - r_t^f$. Definimos FDS como: $F_{t+1} = w_t^T E_t[r_{i,t+1}^e]$, onde w_t^T são os pesos do portfólio eficiente de explicação da variância condicional. Assim, podemos escrever w_t como:

$$w_t = E_t[r_{i,t+1}^e r_{i,t+1}^{eT}]^{-1} E_t[r_{i,t+1}^e] \quad (1.3)$$

Desta forma a equação de precificação de ativos encontrada foi:

$$E_t[r_{i,t+1}^e] = \frac{Cov_t(r_{i,t+1}^e, F_{t+1})}{Var_t(F_{t+1})} E_t[F_{t+1}] \quad (1.4)$$

Portanto, o processo de não arbitragem implicou em um modelo de um fator, descrito a seguir:

$$r_{i,t+1}^e = \beta_{i,t} F_{t+1} + \epsilon_{i,t+1} \quad (1.5)$$

Onde F_{t+1} é o conjunto de fatores explicativos de $r_{i,t+1}^e$, com $E_t[\epsilon_{i,t+1}] = 0$ e $Cov_t(F_{t+1}, \epsilon_{i,t+1}) = 0$. A formulação do modelo de fator implica a formulação estocástica do fator de desconto acima. Além disso, se o risco idiossincrático $\epsilon_{i,t+1}$ for diversificável e

o fator FDS for sistemático, o conhecimento dos carregamentos de risco são suficientes para construir o fator de desconto estocástico:

$$(\beta_{i,t}^T \beta_{i,t})^{-1} \beta_{i,t}^T r_{i,t+1}^e = F_{t+1} + (\beta_{i,t}^T \beta_{i,t})^{-1} \beta_{i,t}^T \epsilon_{i,t+1} = F_{t+1} + o_p(1) = E_t[F_{t+1}] \quad (1.6)$$

O problema fundamental foi encontrar os pesos do portfólio do FDS w_t e as cargas de risco $\beta_{i,t}$. Ambas são funções gerais e variáveis no tempo das informações definidas no período t . O conhecimento de w_t e $\beta_{i,t}$ resolveu três problemas: (1) Explicamos a variação transversal dos retornos individuais das ações. (2) Construímos o portfólio de tangência eficiente de média-variância. (3) Decompomos o retorno das ações em seu componente sistemático previsível e seu componente imprevisível não sistemático. Para encontrar a matriz de carregamento e os pesos de w_t utilizamos das metodologias apresentadas neste capítulo. Encontrar os pesos FDS foi equivalente a resolver um método de problema de momento. Uma vez obtidos os pesos dos fatores FDS, as cargas se tornaram proporcionais ao momento condicional $E_t[F_{t+1}, r_{i,t+1}^e]$. No modelo de um fator sem arbitragem, as cargas são proporcionais à $Cov_t(r_{i,t+1}^e, F_{t+1})$ e $E_t[F_{t+1}, r_{i,t+1}^e]$, onde o último tem a vantagem de evitarmos estimar o primeiro momento condicional. Nossos resultados empíricos mostraram que podemos estimar melhor o co-movimento condicional dos retornos das ações com os fatores FDS, que é um segundo momento, do que o primeiro momento condicional.

1.2 Ajuste via validação e divisão da amostra

Os procedimentos de regularização discutidos abaixo foram as principais defesas do Machine Learning contra o *overfitting*, e basearam-se na escolha de hiperparâmetros. Isso foi essencial para o desempenho dos métodos de Machine Learning, pois eles controlam a complexidade do modelo. Os hiperparâmetros incluíram, por exemplo, os parâmetros de penalização no LASSO, adaLASSO e na *ELASTICNET*. Na maioria dos estudos, há pouca orientação teórica sobre como "ajustar" os hiperparâmetros para otimizar o desempenho fora da amostra. Seguimos a abordagem mais comum na literatura e selecionamos parâmetros

de ajuste de forma adaptável, a partir da utilização de critérios de informação e da minimização de erro quadrático médio.

Dividimos nossa amostra em três períodos disjuntos que mantêm a ordem temporal dos dados. A primeira subamostra, ou "treinamento", foi usada para estimar os modelos sujeitos a um conjunto específico de valores de parâmetros de ajuste. A segunda amostra, ou "validação", foi usada para ajustar os hiperparâmetros e selecionar os melhores modelos para previsão fora da amostra. Construímos previsões para pontos na amostra de validação com base no modelo estimado da amostra de treinamento. A seguir, calculamos a função objetivo com base em erros de previsão da amostra de validação e encontramos hiperparâmetros que otimizam o objetivo da validação. A ideia da validação foi simular um teste fora da amostra do modelo. O ajuste do hiperparâmetro foi equivalente a procurar um grau de complexidade do modelo que tende a produzir um desempenho confiável fora da amostra. Os ajustes da amostra de validação obviamente não ficaram fora da amostra porque foram usados para o ajuste, o que, por sua vez, foi uma entrada para a estimativa. Assim, a terceira subamostra, ou "teste", que não foi usada para estimativas nem ajustes, ficou realmente fora de amostra e, portanto, foi usada para avaliar o desempenho preditivo de um método. Detalhes adicionais sobre nosso esquema de divisão de amostras são fornecidos no capítulo 3.

1.3 Penalização Linear

Os métodos de penalização linear atuaram na seleção de subconjuntos produzindo um modelo que possivelmente realizou previsões melhores que o modelo contendo todo conjunto informacional. Esta seção é uma descrição rápida destes métodos. Para uma descrição detalhada veja por exemplo *Statistical Learning with Sparsity: The Lasso and Generalizations* [Hastie, Tibshirani e Wainwright \(2015\)](#). Tais métodos frequentemente sofrem com grande variabilidade devido ao procedimento de inclusão ou retirada de variáveis do modelo. Uma alternativa existente na literatura foram os métodos de *shrinkage*, que não apresentam muita variabilidade, foram uma alternativa existente na literatura, como aponta [Hastie, Tibshirani e Friedman \(2001\)](#). Um modelo *shrinkage* amplamente conhecido é a

regressão Ridge, onde o conjunto de coeficientes são escolhidos ao impor uma penalização de soma dos quadrados dos mesmos.

$$\beta^{Ridge} = ARGMIN_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k} \sum_{i=1}^n (r_{i,t} - \beta_0 - \sum_{j=1}^k \beta_j I_{j,t})^2 + \lambda \sum_{j=1}^k \beta_j^2 \quad (1.7)$$

Onde o parâmetro $\lambda > 0$ controla a quão severa é a penalização. Quanto maior for $\lambda > 0$, maior será a penalização. Quando $\lambda = 0$, o vetor β^{ridge} será igual ao vetor de coeficientes obtidos por mínimos quadrados ordinários (MQO). A variável $I_{j,t}$ fez parte do conjunto informacional completo da pesquisa (Ω , i.e, $I_{j,t} \in \Omega$). Tibshirani (1996) propôs o primeiro modelo de penalização estudado: o LASSO (*Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*), no contexto de regressão linear. O LASSO impõe uma penalização ao conjunto de normas dos coeficientes. Devido à natureza dessa penalização, o LASSO tende a zerar alguns coeficientes, tornando-se útil para selecionar covariáveis e para reduzir a dimensionalidade do espaço paramétrico, onde um conjunto de coeficientes são escolhidos ao impor uma penalização da soma dos quadrados dos mesmos.

$$\beta^{LASSO} = ARGMIN_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k} \sum_{i=1}^n (r_{i,t} - \beta_0 - \sum_{j=1}^k \beta_j I_{j,t})^2 + \lambda \sum_{j=1}^k |\beta_j| \quad (1.8)$$

O método LASSO realiza a escolha das variáveis e a estimação dos coeficientes simultaneamente. Ao observar que pode haver situações nas quais o LASSO não é consistente na seleção de variáveis, Zou (2006) propôs o LASSO adaptativo (adaLASSO), onde são empregados diferentes pesos para diferentes coeficientes:

$$\beta^{adaLASSO} = ARGMIN_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k} \sum_{i=1}^n (r_{i,t} - \beta_0 - \sum_{j=1}^k \beta_j I_{j,t})^2 + \lambda \sum_{j=1}^k w_j |\beta_j| \quad (1.9)$$

Os pesos individuais w_j servem para ajudar na seleção das variáveis relevantes. Uma variável relevante $I_{j,t}$ tende a possuir um coeficiente β^{ridge} grande, o que faz diminuir o peso w_j atribuído ao coeficiente daquela variável, caso contrário, se a variável $I_{j,t}$ for irrelevante, o coeficiente β^{Ridge} tende a ser pequeno e implicará em um peso w_j grande. Desse modo,

penalizam-se mais os coeficientes das variáveis que aparentam ser pouco importantes. Outro método que também deve ser apresentado é o *Elastic Net*, que pretende obter o melhor entre os dois métodos de regressão, Ridge e LASSO, porém com novas propriedades que estes métodos carecem. A ideia é bastante simples, consistindo em minimizar a soma de quadrados do resíduo restrito a uma combinação linear das restrições do método Ridge e do LASSO. Onde a penalização da soma de quadrados é dada por:

$$\lambda_1 ||\beta||^2 + \lambda_2 ||\beta||_1 \quad (1.10)$$

$$L(\beta, \lambda_1, \lambda_2) = ||r_{i,t} - I_t \beta||^2 + \lambda_1 ||\beta||^2 + \lambda_2 ||\beta||_1 \quad (1.11)$$

$$\beta^{ElasticNet} = ARGMIN_{\beta} L(\beta, \lambda_1, \lambda_2) \quad (1.12)$$

O *Elastic Net* envolve dois hiperparâmetros não negativos, λ_1 e λ_2 . Otimizamos adaptativamente os parâmetros de ajuste, λ_1 e λ_2 , usando critério de informação Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano BIC e a amostra de validação da pesquisa balizando pela minimização do erro quadrático médio das previsões dentro da amostra selecionada.

1.4 Vetor Autoregressivo (VAR)

Durante décadas, vetores autoregressivos (VAR) e vetores autoregressivos com variáveis exógenas estruturais aos modelos (SVAR) têm servido como ferramentas essenciais na previsão de séries temporais multivariadas por exemplo nos trabalhos de [Granger \(1969\)](#), [Sims \(1980\)](#), [Tiao e Box \(1981\)](#), [Bernanke e Mihov \(1997\)](#) e [Galí, López-Salido e Vallés \(2007\)](#). No entanto, na ausência de regularização, o VAR e o SVAR são excessivamente parametrizados, muitas vezes forçando os profissionais a especificar arbitrariamente um subconjunto reduzido de séries a serem modeladas. Os últimos anos têm testemunhado tremendos desenvolvimentos em direção à incorporação de métodos de regularização na previsão de séries temporais multivariadas de alta dimensão, com um interesse particular no LASSO ([Tibshirani \(1996\)](#)), destacado na subseção anterior. Também podemos citar

algumas de suas variantes estruturadas: o grupo LASSO de Wang e Leng (2008) e LASSO de grupo esparsos de Simon et al. (2013)).

Assim, para o desenvolvimento de modelos esparsos e que permitissem avançarmos sobre a alta dimensão, foi necessário adaptar os algoritmos de solução de regressão penalizada mencionados na subseção anterior para uma configuração de série temporal multivariada, permitindo a previsão simultânea de muitas séries temporais potencialmente inter-relacionadas. Desta forma, foi possível a estimação simultânea de séries temporais de alta dimensão aplicando penalidades às estruturas de autoregressão vetorial padrão (VAR). Dado que $r_{i,t}^e$ denota um vetor de series temporais com dimensão K , o modelo VAR(P) pode ser expresso como:

$$r_{i,t}^e = \beta_0 + \sum_{L=1}^P \beta^{(L)} \Omega_{t-L} + u_t \quad (1.13)$$

Onde Ω , como anteriormente apresentado, denota o conjunto completo informacional de séries temporais incluindo $r_{i,t}^e$, i.e, $r_{i,t}^e \in \Omega_t$. Temos que β_0 denota um vetor de interceptos $K \times 1$, cada β^L representa uma matriz de coeficientes endógenos $K \times K$, e $u_t \sim (0, \Sigma_u)$. Em uma configuração como a apresentada anteriormente, sendo o comprimento da série, T , o modelo VAR pode ser ajustado por mínimos quadrados multivariados, com β_0 e $= [\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(P)}]$ estimados como:

$$ARGMIN_{\beta_0, \beta} \sum_{t=1}^T \|r_{i,t}^e - \beta_0 + \sum_{L=1}^P \beta^{(L)} \Omega_{t-L} + u_t\|_f^2 \quad (1.14)$$

Em que $\|A\| = \sqrt{\Sigma_i A_i^2}$ denota a norma de Frobenius de uma matriz A . A partir da estrutura apresentada, conseguimos realizar as extensões para a inclusão dos termos de esparsidade que possibilitaram a estimação de modelos de VAR de alta dimensão. Considerando o objetivo da pesquisa de realização de previsões em relação a variável $r_{i,t}^e$, temos que a utilização de um modelo de vetores autoregressivos (VAR) foi utilizada de forma exaustiva em suas mais diversas extensões que, modelam ou penalizam o formato no qual utilizamos as informações contidas em Ω_{t-1} .

1.4.1 Vetores Autoregressivos Esparsos (VAR-S)

Nessa dissertação utilizamos o VAR-SL, modelos de vetores autoregressivos esparsos via LASSO, como o agrupamento mais geral, e pode ser visto como particionando cada variável em seu próprio grupo ou aplicando uma penalidade de LASSO a toda a matriz do coeficiente VAR, não incorporando qualquer estrutura adicional. Como referência para tais modelos utilizamos [Davis, Zang e Zheng \(2016\)](#). A estimação do modelo foi realizada no formato a seguir:

$$ARGMIN_{\beta_0, \beta} \sum_{t=1}^T \|r_{i,t}^e - \beta_0 + \sum_{L=1}^P \beta^{(L)} \Omega_{t-L} + u_t\|_f^2 + \lambda \|\beta\| \quad (1.15)$$

O VAR-SL envolve um hiperparâmetro não negativo, λ . Otimizamos adaptativamente os parâmetros de ajuste, λ , usando critérios de informação AIC, BIC e a amostra de validação da pesquisa balizando pela minimização do erro quadrático médio das previsões dentro da amostra selecionada. Em relação aos modelos de penalização adaLASSO e Elastic Net para o VAR, utilizamos do mesmo processo exposto anteriormente para o LASSO.

Como modelo complementar ao VAR-SL e um formato adicional de extensão aos modelos VAR, estruturamos o VAR-SHL. Dado que o parâmetro β^L controla a dependência dinâmica do i -ésimo componente de $r_{i,t}^e$ sobre o j -ésimo componente de Ω_{t-L} , adicionar uma penalização estruturada sobre este parâmetro pôde trazer resultados positivos considerando o processo de redução de dimensionalidade. Para permitir uma maior flexibilidade, em vez de impor uma única ordem de defasagem universal (como tendem a ser as abordagens baseadas na minimização do critério de informação), permitimos que ela variasse entre os modelos marginais, mas dentro de uma série onde todos os componentes têm a mesma defasagem máxima, aplicando uma maior regularização para defasagens de ordem mais altas. Assim, pudemos apresentar o modelo da seguinte forma:

$$ARGMIN_{\beta_0, \beta} \sum_{t=1}^T \|r_{i,t}^e - \beta_0 + \sum_{L=1}^P \beta^{(L)} \Omega_{t-L} + u_t\|_f^2 + \sum_{L=1}^P L^\gamma \|\beta^{(L)}\| \quad (1.16)$$

Podemos observar que um parâmetro de penalidade adicional foi adicionado $\gamma \in$

$(0, 1)$, possibilitando uma maior flexibilidade ao modelo quando comparado a modelo VAR-SL quando comparamos a estrutura de defasagens. Em ambos modelos apresentados anteriormente, o critério para seleção dos parâmetros λ e γ foi a utilização dos critérios de informação AIC, BIC e a amostra de validação da pesquisa balizando pela minimização do erro quadrático médio das previsões dentro da amostra selecionada. Nossa abordagem usou o resultado do período anterior como uma inicialização, i.e, “inicialização um passo atrás”, que diminui substancialmente o tempo de computação do modelo.

1.4.2 VAR Bayesiano Esparso (BVAR-S)

Utilizando a especificação de VAR apresentada na subseção presente, com os mesmos pressupostos adotados, apenas adicionando que u_t é um ruído branco gaussiano. Utilizamos o modelo VAR Bayesiano (BVAR), abordagem que auxilia a superar o problema de alta dimensão através da imposição de priores sobre os parâmetros. Ao definir as distribuições priores, seguimos a prática padrão e usamos o procedimento desenvolvido em [Litterman \(1996\)](#) com modificações propostas por [Kadiyala e Karlsson \(1997\)](#) e [Sims e Zha \(1998\)](#). [Litterman \(1996\)](#) sugeriu o uso de uma priori frequentemente referida como priori de Minnesota. O princípio básico por trás disso foi que todas as equações foram "centradas" em torno do passeio aleatório, isto é, a média anterior pode ser associada à seguinte representação para Ω_t :

$$\Omega_{i,t} = \Omega_{i,t-1} + v_{i,t} \quad (1.17)$$

Isso equivale a encolher os elementos diagonais de $\beta^{(L)}$ em direção a um e os coeficientes em $[\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(P)}]$ para zero. Além disso, a especificação anterior incorporou a crença de que as defasagens mais recentes devem fornecer informações mais confiáveis do que as mais distantes e que as defasagens próprias devem explicar mais da variação de uma dada variável do que as defasagens de outras variáveis na equação.

$$E[(\beta_{i,j}^{(k)})] = \begin{cases} \delta_i, j = i, k = 1 \\ 0, j \neq i, k \neq 1 \end{cases} \quad (1.18)$$

$$V[(\beta_{i,j}^{(k)})] = \begin{cases} \lambda^2/k^2, j = i \\ \vartheta(\lambda^2\sigma_i^2/k^2\sigma_j^2), j \neq i \end{cases} \quad (1.19)$$

Os coeficientes $[\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(P)}]$ foram assumidos como sendo priores independentes e normalmente distribuídas. Quanto à matriz de covariância dos resíduos, assumiu-se que é diagonal, fixa e conhecida: $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2)$. Assim, a priori no intercepto é difusa. O hiperparâmetro λ controla a rigidez geral da distribuição da priori em torno do passeio aleatório ou do ruído branco e rege a importância relativa das crenças anteriores em relação às informações contidas nos dados. Para $\lambda = 0$, a posterior é igual a priori e os dados não influenciam as estimativas. A rigidez global determinada por λ foi escolhida em relação ao tamanho do sistema. À medida que o número de variáveis aumenta, os parâmetros devem ser reduzidos para evitar ajustes excessivos. Este ponto foi mostrado formalmente por [Mol, Giannone e Reichlin \(2008\)](#). O fator $1/k^2$ é a taxa na qual a variação anterior diminui com o aumento do tempo de defasagem e σ_i^2/σ_j^2 considera a diferente escala e variabilidade dos dados. O coeficiente $\vartheta \in (0, 1)$ determina a extensão em que as defasagens de outras variáveis são "menos importantes" do que as próprias defasagens. Consequentemente, a suposição de Litterman da matriz de covariância fixa e diagonal é um pouco problemática. Para superar este problema, seguimos [Kadiyala e Karlsson \(1997\)](#) e [Robertson e Tallman \(1999\)](#) e impusemos uma Wishart normal invertida como priori, o qual retém os princípios da priori de Minnesota. Isso foi possível sob a condição de que $\vartheta = 1$. Assim, a priori de normal invertida de Wishart tem o formato:

$$VEC(\beta)|\Sigma \sim N(VEC(\beta_0), \Sigma \otimes \Omega_0) \quad (1.20)$$

$$E(\Sigma) \sim W(S_0, \alpha_0)$$

Onde os parâmetros da priori β_0, Ω_0, S_0 e α_0 são escolhidos de modo que expectativas e variações anteriores de Φ coincidam com aquelas implícitas pela equação (2.18) e a expectativa de Σ é igual à matriz de covariância residual fixa da priori de Minnesota, como citado por [Kadiyala e Karlsson \(1997\)](#). Neste modelo, o critério para seleção do parâmetro λ foi o de minimizar a raiz do erro quadrático médio (RMSE). A literatura sugere que a

melhoria na previsão pode ser obtida pela imposição de prévias adicionais que limitam a soma dos coeficientes (Sims (1992), Sims e Zha (1998) e Robertson e Tallman (1999)). Isto é o mesmo que impor uma "diferenciação inexata", e é uma simples modificação do Minnesota envolvendo combinações lineares dos coeficientes VAR (Doan, Litterman e Sims (1984)). O hiperparâmetro τ é adicionado para controlar o grau de encolhimento: quando τ vai para zero, nos aproximamos do caso das diferenças exatas; e quando τ vai para 1, nos aproximamos do caso de MQO. Assim, foi descrito o modelo BVAR esparsos utilizado na dissertação.

1.4.3 Métodos de Redução de Dimensionalidade Para o Conjunto Informacional Ω

A seguir apresentamos um conjunto de ferramentas para redução de dimensionalidade aplicado ao conjunto de informações completo, Ω . Posterior à aplicação destes métodos, encontramos como resultados os fatores de desconto estocásticos (FDS), F_t , que foram aplicados na metodologia VAR como descrito a seguir:

$$r_{i,t}^e = \beta_0 + \sum_{L=1}^P \beta^{(L)} F_{t-L} + u_t \quad (1.21)$$

$$ARGMIN_{\beta_0, \beta} \sum_{t=1}^T \|r_{i,t}^e - \beta_0 + \sum_{L=1}^P \beta^{(L)} F_{t-L} + u_t\|_f^2 \quad (1.22)$$

Desta forma, o primeiro método a ser abordado para estimação dos fatores de desconto estocástico, (F_t) , é a análise de componentes principais (PCA). Temos que o PCA é um procedimento matemático que utiliza uma transformação ortogonal para converter um conjunto de variáveis possivelmente relacionadas em conjunto de valores de variáveis linearmente não correlacionadas chamadas de componentes principais. O número de componentes principais é menor ou igual ao número de variáveis originais. A transformação ortogonal é definida de forma que o primeiro componente principal tem a maior variância possível, e cada componente seguinte, por sua vez, tem a máxima variância sob a restrição de ser ortogonal aos componentes anteriores. Os componentes principais

são garantidamente independentes apenas se os dados forem normalmente distribuídos conjuntamente. O PCA é sensível à escala relativa das variáveis originais, motivos que nos levaram a utilizar em nossos modelos dados normalizados. O estimador de componentes principais faz parte de um conjunto de métodos de média não paramétricos, que podem ser representados com a devida simplicidade pelo modelo descrito a seguir:

$$F_t^*(N^{-1}W) = N^{-1}W^*\Omega_t \quad (1.23)$$

O estimador de componentes principais de F_t^* é o estimador ponderado da média da equação anterior, com $W = \Lambda^*$, onde Λ^* é a matriz de autovetores da matriz de variância da amostra de X_t , $\Sigma_\Omega^* = T^{-1} \sum_{t=1}^T (\Omega_t - \Lambda F_t)^t (\Omega_t - \Lambda F_t)$, associada com os r maiores autovalores de Σ_Ω^* . O estimador de componentes principais pode ser derivado como a solução para o problema dos mínimos quadrados:

$$MIN_{F_t, \dots, F_T, \Lambda} V_r(\Lambda, F) \quad (1.24)$$

$$V_r(\Lambda, F) = \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T (\Omega_t - \Lambda F_t)^t (\Omega_t - \Lambda F_t) \quad (1.25)$$

Sujeito a normalização $N^{-1}\Lambda^t\Lambda = I$. Para resolver a equação anterior, primeiro tivemos que minimizar F_t dado Λ para obter:

$$F_t^*(\Lambda(\Lambda^t\Lambda)^{-1}) = (\Lambda^t\Lambda)^{-1}\Lambda^t\Omega_t \quad (1.26)$$

Então concentrando na função objetivo encontramos:

$$MIN_\Lambda T^{-1} \sum_{t=1}^T [I - \Lambda(\Lambda^t\Lambda)^{-1}\Lambda] \Omega_t \quad (1.27)$$

Consequentemente a solução para o problema final é o conjunto Λ^* igual a escala dos autovetores de Σ_Ω^* correspondente aos r maiores autovalores. Devido a $\Lambda^{*t}\Lambda^* = NI$, que segue do estimador de mínimos quadrados, em que F_t são os r componentes principais de Ω_t . Um fator importante a ser elencado para o desenvolvimento da primeira etapa foi a

seleção do número de componentes principais a serem utilizados no modelo. De acordo com a literatura contemporânea existente, utilizamos o critério de seleção baseado em critérios de informação. Bai e Ng (2002) desenvolveram uma família de estimadores para r motivados na utilização de critérios de informação. Os critérios de informação negociam o benefício de incluir um fator adicional contra o custo de maior variabilidade de amostragem decorrente da estimativa de outro parâmetro. Isso é feito minimizando uma verossimilhança penalizada ou uma soma dos quadrados, onde o fator de penalidade aumenta linearmente ao número de fatores (ou parâmetros). No caso dos modelos de fatores dinâmicos, Bai e Ng (2002) propuseram minimizar a soma penalizada dos quadrados:

$$IC(r) = \ln(V_r(\Lambda^*, F^*)) + r * g(N, T) \quad (1.28)$$

Onde $V_r(\Lambda^*, F^*)$ é a função objetivo de mínimos quadrados, avaliada nos estimadores de componentes principais, e $g(N, T)$ é o fator de penalidade. A seguir apresentamos os três critérios de informação utilizados na pesquisa.

$$IC_{p1}(r) = \ln(V(r, F^{*k})) + r\left(\frac{N+T}{NT}\right)\ln\left(\frac{NT}{N+T}\right) \quad (1.29)$$

$$IC_{p2}(r) = \ln(V(r, F^{*k})) + r\left(\frac{N+T}{NT}\right)\ln(J_{NT}^2) \quad (1.30)$$

$$IC_{p3}(r) = \ln(V(r, F^{*k})) + r\left(\frac{\ln(J_{NT}^2)}{J_{NT}^2}\right) \quad (1.31)$$

Onde temos que $J_{T,N}^2 = \min(T, N)$. Assim, de acordo com os critérios apresentados anteriormente, podemos selecionar o “melhor” r para dar sequência ao nosso modelo. A aplicação dos r componentes principais encontrados através do PCA em modelos VAR é amplamente utilizado na literatura macroeconômica, sendo desenvolvido na brilhante pesquisa de Bernanke, Boivin e Elias (2005), como o FAVAR (Vetores autoregressivos fatoriais). A aplicação desse modelo de extração de fatores de desconto estocásticos também é utilizada de forma extensiva no ambiente de finanças, como pode ser visto em Gu, Kelly e

Xiu (2018). Este modelo foi denotado em nossa dissertação como FAVAR, onde encontramos o seguinte conjunto de FDS F_t .

Em relação a tal modelo, realizamos um conjunto de extensões, onde podemos dividir essas extensões em dois grupos. O primeiro foi formado pelo conjunto de extensões que utilizando-se de métodos de penalização para realizar uma pré-seleção no conjunto informativo completo (Ω), dando origem a um novo conjunto de dados contido em Ω . Esse novo conjunto de dados então foi inserido na metodologia de análise de componentes principais (PCA) fornecendo novos conjuntos de fatores de desconto estocásticos F_t . Os métodos de pré-seleção utilizados na dissertação foram: Ridge com critério arbitrário de balizamento, LASSO, adaLASSO e *Elastic Net*. Gerando os seguintes conjuntos informativos: Ω^{Ridge} , Ω^{LASSO} , $\Omega^{adaLASSO}$ e $\Omega^{ElasticNet}$ e consequentemente os seguintes fatores de desconto estocásticos F_t^{Ridge} , F_t^{LASSO} , $F_t^{adaLASSO}$ e $F_t^{ElasticNet}$. Tais conjuntos de FDS foram aplicados aos modelos VAR, e encontramos como resultado os seguintes modelos esparsos: Ridge-FAVAR, LASSO-FAVAR, adaLASSO-FAVAR e ElasticNet-FAVAR. Ressaltamos que tais modelos são extensões propostas pela dissertação à literatura existente.

O segundo conjunto de extensões ocorreu da inclusão do método de penalização *Elastic Net* na própria estrutura de estimação do PCA, dando origem a um modelo conhecido como análise de componentes principais esparsos (SPCA). A SPCA baseia-se no fato de que o PCA pode ser escrito como um problema de otimização do tipo de regressão, com uma penalidade quadrática. No *Elastic Net*, os coeficientes esparsos são uma consequência direta da penalidade λ_1 e não dependem da função de perda de erro quadrada. Desta forma, escolhemos com flexibilidade uma aproximação esparsa do componente principal. Como item destaque devemos mencionar que os componentes principais ordinários não são correlacionados e suas cargas são ortogonais. Contudo, a SPCA não impõe explicitamente a condição de componentes não correlacionados. No entanto, utilizamos uma projeção de regressão para remover a dependência linear entre os componentes correlacionados.

Para estimação do modelo proposto utilizamos o algoritmo proposto por Zou et al. (2005). Evidências empíricas sugerem que o resultado do algoritmo não muda tanto

quando λ é alterado. Para dados $N > P$, a opção padrão de λ pode ser zero. Praticamente λ é escolhido para ser um pequeno número positivo superando potenciais problemas de colinearidade em Ω . Em princípio, podemos tentar várias combinações de λ_1 para descobrir uma boa escolha dos parâmetros de ajuste, uma vez que o algoritmo converge bastante rápido. Existe um atalho fornecido pela aproximação esparsa direta. O algoritmo LARS-EN fornece, eficientemente, uma sequência inteira de aproximações esparsas para cada componente principal e dos valores correspondentes de λ_1 . Portanto, podemos escolher um λ_1 que ofereça um bom compromisso entre a variância e a dispersão. Ao enfrentar o *trade-off* de variação e dispersão, deixamos a variação ter uma prioridade mais alta.

Um dos critérios de grande importância para o desenvolvimento do SPCA foi a determinação do número de variáveis que incorporam cada componente principal. O critério de escolha utilizado na pesquisa e de acordo com bibliografia existente foi o de [Kristensen e Salanié \(2017\)](#), que desenvolveu um critério de informação para seleção do número de variáveis que estava presente na composição de cada componente, como apresentado a seguir:

$$\Psi_t = \underset{\Psi_t}{\text{ARGMIN}} \log(n * T^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (\Omega_{i,t} - \lambda_i^t F_{\Psi_t})^2) + m \left(\frac{n * T}{n * T} \right) \quad (1.32)$$

Onde λ_i^t e F_{Ψ_t} são as estimativas de SPCA para um dado Ψ_t , e m é o número de não-zeros em λ_i^t . Assim podemos julgar a capacidade de escolher corretamente o número de fatores, a precisão dos fatores estimados e a capacidade de estimar corretamente as cargas fatoriais como sendo esparsas. Como uma limitação desta pesquisa, consideramos o mesmo número de variáveis não-zeros para todos os componentes principais selecionados. Após encontrar os componentes principais, utilizamos do critério de Bai e Ng (2002) apresentado anteriormente para a determinação do número ótimo de componentes principais a serem utilizados. Posterior aos passos enumerados, aplicamos os componentes principais esparsos estimados no modelo VAR para previsão de $r_{i,t}^e$, apresentado na equação (2.13), dando origem ao modelo adicionado na dissertação como S-FAVAR (Vetores autoregressivos fatoriais esparsos). Ainda duas extensões foram propostas para tal modelo, sendo a primeira relacionada a utilização do método para seleção do hiperparâmetro λ_1 através da

minimização da raiz do erro quadrático médio (RMSE) e originando os modelos MS-FAVAR. A segunda extensão utiliza dos hiperparâmetros λ_1 , calculados na etapa de pré-seleção de variáveis de Ω , para estimação do SPCA. Tal modelo foi nomeado como OS-FAVAR, que inclui a característica de estimação do hiperparâmetro λ_1 via critério de informação AIC e BIC.

Outra metodologia proposta foram os mínimos quadrados parciais (PLS), que realizam a redução da dimensão explorando diretamente a covariação de preditores, com o objetivo de previsão. Na regressão PLS, para cada preditor Ω_j , é estimado seu coeficiente de previsão de retorno uni-variado via MQO. Esse coeficiente, denotado β_j , reflete a sensibilidade parcial dos retornos para o preditor Ω_j . Em seguida, é calculada a média de todos os preditores em um único componente agregado com pesos proporcionais à β_j , colocando os pesos mais altos nos preditores uni-variados mais fortes e os menores pesos nos mais fracos. Dessa forma, o PLS realiza sua redução de dimensão com o objetivo final de previsão em mente. Para formar mais de um componente preditivo, o alvo e todos os preditores são ortogonalizados em relação aos componentes construídos anteriormente, e o procedimento acima é repetido no conjunto de dados ortogonalizado. Isso é repetido até que o número desejado de componentes PLS seja atingido. O objetivo da PLS busca h combinações lineares de Ω que tenham um máximo associação preditiva com a meta de previsão $r_{i,t}^e$. Os pesos usados para construir o j -ésimo componente do PLS são determinados seguindo:

$$w_t = \text{ARGMAX}_w \text{COV}^2(r_{i,t}^e, \Omega w), s.t \quad (1.33)$$

$$w^t w = 1; \text{COV}(\Omega w, \Omega w_l) = 0, l = 1, 2, \dots, j - 1.$$

Onde w_t são os pesos alocados aos preditores Ω , no instante do tempo t . Desta forma, o PLS está disposto a sacrificar a precisão com que ΩW se aproxima de Ω para encontrar componentes com previsibilidade de $r_{i,t}^e$ mais potentes. A solução para o modelo PLS ocorre via regressão MQO de $r_{i,t}^e$ em ΩW . Para o modelo, h é um hiperparâmetro que pode ser determinado de forma adaptativa a partir da amostra de validação.

1.5 Estimação da Matriz de Covariâncias

Em muitas aplicações em finanças, a ordem da correlação serial é desconhecida, o que pode gerar problemas em relação a estimação e sobre a capacidade de previsão. Uma solução para este problema incorre na utilização dos estimadores da matriz de covariância de longo prazo, na presença de heterocedasticidade condicional e autocorrelação que são denominados estimadores HAC. Iniciando a apresentação desse conjunto de estimadores considere: $\Phi(\tau) = E[u_t u_{t-\tau}^t]$, sendo $u_t = (x_t - \bar{x})$. Onde seu formato amostral é dado por:

$$\Phi_T(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=\tau+1}^T u_t u_{t-\tau}^t \quad (1.34)$$

Onde $\Phi_T(\tau) = \Phi_T(-\tau)$ para $\tau = 0$. Quando lidamos com um grande lag t , $u_1, \dots, u_T$, $\Phi_T(\tau)$ não pode ser estimado com fidedignidade utilizando o estimador amostral. Nas próximas subseções descrevemos um conjunto de ferramentas para melhora do processo de estimação da matriz de covariância, quando lidamos com um T (número de observações) e K (número de variáveis) grande, sendo que em alguns casos $K > T$.

1.5.1 Matriz de Covariâncias de Longo Prazo (LRCM)

Uma solução proposta na literatura para lidarmos com um T grande é utilizar uma função de Kernel. Assim, para a estimação da matriz de covariância Σ de Kernel HAC encontramos:

$$\Sigma_T = \sum_{\tau=-T+1}^{T-1} k\left(\frac{\tau}{S_t}\right) \Phi_T(\tau) \quad (1.35)$$

Onde $k(\cdot)$ é uma função de valor real Kernel, e S_t é um parâmetro de largura de banda. [Andrews \(1991\)](#) defende um estimador que usa a função de Kernel *Quadratic Spectral* (QS) que não coloca pesos zero em nenhum $\Phi_T(\tau)$ para $|\tau| \leq T - 1$. A função de Kernel *Quadratic Spectral* (QS), pode ser apresentada como:

$$k(x) = \frac{25}{12\pi^2 x^2} \left(\frac{\sin(6\pi x/5)}{6\pi x/5} - \cos\left(\frac{6\pi x}{5}\right) \right) \quad (1.36)$$

Um importante problema encontrado foi como escolher o parâmetro de largura de banda S_t . A matriz de covariâncias de Andrews (1991) fornece fórmulas para a escolha ideal do parâmetro de largura de banda, S_t^* , para uma variedade de núcleos. O S_t^* é ideal no sentido de minimizar o RMSE para uma dada matriz semidefinida positiva G , no caso da Kernel *Quadratic Spectral*.

$$S_t^* = 1.3221(\alpha(2)T)^{\frac{1}{5}} \quad (1.37)$$

$$\alpha(q) = \frac{2(VEC f^q)^t G VEC f^q}{tr G(I + K_{pp}) f^0 \otimes f^0} \quad (1.38)$$

$$f^q = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |j|^q \Phi_T(\tau) \quad (1.39)$$

onde G é uma matriz de pesos $p^2 X p^2$, K_{pp} é a matriz de comutação $p^2 X p^2$ que realiza a transformação de $VEC(A)$ em $VEC(A^t)$, f^0 é a densidade espectral na frequência zero e a matriz de covariância de longo prazo Σ_T é igual a $2\pi f^0$. Tais fórmulas incluem os parâmetros desconhecidos que desejamos estimar.

Andrews propôs estimadores para largura de banda nos quais esses parâmetros desconhecidos são estimados a partir de um modelo parametrizado. Seu método envolve dois passos. O primeiro passo é parametrizar o modelo para estimar os movimentos de u_t . Por exemplo, podemos usar um modelo AR(1) para cada elemento de u_t ou um modelo VAR(1) para u_t . O segundo passo é calcular os parâmetros para o parâmetro ideal de largura de banda a partir da estimação do movimento. Por exemplo, calculamos os parâmetros desconhecidos assumindo que o modelo estimado de AR(1) é verdadeiro. Em suas simulações de Monte Carlo, Andrews (1991) usou uma parametrização AR(1) para cada termo da perturbação, mostrando que o Kernel QS é o Kernel ideal, no sentido de minimizar o RMSE assintótico entre os estimadores de Kernel, que são garantidos como semidefinidos positivos. Suas simulações em Monte Carlo mostraram que o Kernel QS e o Parzen funcionam melhor que o Kernel Bartlett na maioria dos modelos que ele considerou. Ele também descobriu que mesmo os estimadores baseados no kernel QS e Parzen não são satisfatórios, no sentido de que os erros padrão calculados a partir desses estimadores não

são precisos em pequenas amostras, quando a quantidade de autocorrelação é grande, o que não é o caso de nossa dissertação.

Uma abordagem alternativa utilizada na pesquisa advém da pesquisa de [Kiefer e Vogelsang \(2005\)](#), que desenvolveram uma série de hipóteses em que a largura de banda envolvida no estimador HAC, para o tamanho da amostra T , denotado como $b = T - 1$, é mantida fixa na amostra. Possuindo melhores propriedades em amostras finitas.

1.5.2 Modelo fatorial de volatilidade estocástica

Considerando a variável Ω_t , com dimensões TXK , como modelada na seção 2.4, recuperamos a seguinte formulação: os efeitos específicos dos termos de erro U_t , condicionados à sua matriz de variâncias Φ_t diagonal, foram considerados serialmente independentes e realizações de um processo latente:

$$U_t | \Phi_t \sim N_q(0; \Phi_t), t = 1, \dots, T \quad (1.40)$$

Com estas condições, a estrutura de covariâncias da séries presentes na base de dados completa Ω_t quando condicionada a $\beta_0, \Omega_{t-1}, \Phi_t$. E a matriz de variâncias diagonal H_t é:

$$\Sigma_T = XH_tX^t + \Phi_t \quad (1.41)$$

De acordo com [Trucíos, Hotta e Pereira \(2019\)](#), os modelos de volatilidade estocástica utilizados nesta dissertação modelam o logaritmo neperiano das variâncias dos fatores comuns F_t e efeitos específicos U_t , que são os termos da diagonal das matrizes H_t e Φ_t , como processos (vetoriais) autoregressivos estacionários de primeira ordem onde seguimos a nomenclatura de [Trucíos, Hotta e Valls \(2019\)](#): VE-VAR(1).

Denotando $\kappa_{j,t}^f = \log h_{j,t}$, para $j = 1, \dots, k$, e, $\kappa_{j,t}^f = (\kappa_{j,t}^1, \dots, \kappa_{j,t}^f)$, na notação vetorial, tivemos que o processo k -variado das log-volatilidades dos fatores comuns F_t é

modelado como:

$$\kappa_t^f = \mu^f + \Psi^f(\kappa_{t-1}^f - \mu^f) + \varpi_t^f \quad (1.42)$$

Com $\varpi_t^f \sim N_K(0; \Sigma_{\varpi}^f)$, $t = 1, 2, \dots, T$ independentes, κ_t^f tem média $\mu^f = \mu_1^f, \dots, \mu_k^f$, persistência $\Psi^f = \text{DIAG}(\psi_1^f, \dots, \psi_k^f)$ e matriz de variância das inovações Σ_{ϖ}^f . Podemos notar que a distribuição de $\kappa_t^f | (\kappa_{t-1}^f, \mu^f, \psi^f, \Sigma_{\varpi}^f)$ é normal com média $\mu^f + \Psi^f(\kappa_{t-1}^f - \mu^f)$ e matriz de covariâncias Σ_{ϖ}^f . Para as perturbações específicas, denote $\kappa_t^u = \log \psi_{j,t}$ na forma vetorial, $\kappa_t^u = (\kappa_{1,t}^u, \dots, \kappa_{k,t}^u)$. O processo de log-volatilidades k -variado dos efeitos específicos foi escrito utilizando parâmetros da média $\mu^u = (\mu_1^u, \dots, \mu_k^u)$, persistência $\Psi^u = \text{DIAG}(\psi_1^u, \dots, \psi_k^u)$ e matriz de variância das inovações Σ_{ϖ}^u , que neste processo é diagonal. Essa forma equivale a considerar K processos univariados onde temos que:

$$\kappa_t^u = \mu^u + \Psi^u(\kappa_{t-1}^u - \mu^u) + \varphi_t^u \quad (1.43)$$

Os resultados encontrados acima foram similares aos casos anteriormente explorados, em relação a distribuição condicional e independência. Na especificação do modelo fatorial de volatilidade estocástica utilizado na pesquisa, a distribuição da priori para o conjunto de parâmetros apresentados, foi tomada como o produto de priores independentes. De acordo com a literatura da área, o modelo apresentado tem sido estimado na literatura por inferência Bayesiana, por meio de simulação MCMC de [Kastner, Frühwirth-Schnatter e Lopes \(2017\)](#). De forma a não tornar exaustiva a explicação sobre o método de estimação utilizado, concentramos a explicação no apêndice B.

1.6 Avaliação do desempenho preditivo

Para avaliar o desempenho preditivo das previsões individuais de excesso de retorno e de retornos dos ativos, calculamos o R^2 fora da amostra como:

$$R_{oos}^2 = 1 - \frac{\sum_{(i,t) \in T^f} (r_{i,t+1} - \hat{r}_{i,t+1})^2}{\sum_{(i,t) \in T^f} r_{i,t+1}^2} \quad (1.44)$$

Em que T^f indica que os ajustes foram avaliados apenas na subamostra de teste, cujos dados não entraram na estimativa ou ajuste do modelo. O $R^2_{2_{oos}}$ agrupou erros de previsão dos retornos ao longo do tempo em uma grande avaliação, em nível de painel de cada modelo estimado na dissertação. Um aspecto sutil, mas importante, da nossa métrica R^2 foi que o denominador é a soma dos retornos quadráticos excedentes. Em muitas aplicações de previsão fora da amostra, as previsões são comparadas com retornos médios históricos. Embora essa abordagem seja sensata para o índice agregado ou para as carteiras *Long/short*, é falha quando se trata de analisar retornos de ações individuais. Prever excesso de retornos futuro de ações com médias históricas, geralmente, apresenta um desempenho ingênuo de zero por uma grande margem. Ou seja, o retorno médio histórico das ações é tão ruidoso que reduz artificialmente um "bom" desempenho de previsão. Evitamos essa armadilha comparando nosso R^2 com um valor previsto de zero. Para dar uma indicação da importância dessa escolha, quando comparamos as previsões do modelo com os retornos médios históricos das ações, o R^2 mensal fora da amostra de todos os métodos aumentou aproximadamente dez pontos percentuais.

Para fazer comparações dos métodos aos pares, usamos o teste de [DIEBOLD e MARIANO \(1995\)](#) para diferenças na previsão preditiva fora da amostra entre dois modelos. Embora a dependência nos retornos seja suficientemente fraca, é improvável que as condições de dependência fraca do erro do teste de Diebold-Mariano se apliquem a nossa análise de nível do retorno devido à dependência potencialmente forte na seção transversal (amplamente estudada na literatura). Para testar o desempenho da previsão do método (1) versus o método (2), definimos a estatística do teste $DM_{12} = \frac{\bar{d}_{12}}{\varepsilon \hat{d}_{12}}$, onde:

$$d_{12,t+1} = \frac{1}{n_{f,t+1}} \sum_{i=1}^{n_f} ((e_{i,t+1}^{(1)})^2 - (e_{i,t+1}^{(2)})^2) \quad (1.45)$$

Onde $e_{i,t+1}^{(1)}$ e $e_{i,t+1}^{(2)}$ denotem o erro de previsão para o ativo i , no período de tempo t , usando os métodos avaliados, e $n_{f,t+1}$ é o número de observações na amostra de teste. Então $\bar{d}_{12}$ e $\varepsilon \hat{d}_{12}$ são a média e o erro padrão de Newey-West de $d_{12,t+1}$ na amostra de teste. Essa estatística modificada do teste de Diebold-Mariano, que agora foi baseado em uma única série temporal $d_{12,t+1}$ de diferenças de erro com pouca autocorrelação, se

mostrou satisfatória às condições de regularidade necessárias para a normalidade assintótica e, por sua vez, forneceu p -valores apropriados para nossos testes de comparação entre os modelos.

1.7 Alocação de Carteiras

A literatura de alocação de ativos foi abordada pela primeira vez por [Markowitz \(1952\)](#), que criou o modelo conhecido como Média-Variância (MV). Sua abordagem considera que os investidores, no processo de escolha da carteira ótima, se preocupam com apenas dois fatores: o risco e o retorno da carteira de ativos. O modelo propõe encontrar a carteira ótima, por meio da maximização dos retornos esperados e sujeito a um determinado nível de risco. Apesar de sua relevância, o modelo apresentou fragilidades, como a obtenção de carteiras concentradas em um número restrito de ativos, resultados pouco intuitivos, que desconsideram a opinião do tomador de decisão sobre o desempenho dos ativos no futuro, e alta sensibilidade aos dados de entrada.

Como uma alternativa para o modelo MV, [Black e Litterman \(1992\)](#) propuseram uma nova abordagem que utiliza métodos Bayesianos para combinar o equilíbrio do mercado no longo prazo, derivado do CAPM (Capital Asset Pricing Model), com as visões dos investidores sobre os retornos futuros. Similarmente ao modelo de média-variância, a abordagem de Black- Litterman (BL) também otimiza os retornos sujeitos a uma matriz de risco, entretanto apresenta duas diferenças substanciais. A primeira é a proposta de se partir de uma carteira no equilíbrio de longo prazo para encontrar a distribuição a priori dos retornos. A segunda é a possibilidade de se incorporar ao modelo visões sobre o comportamento dos ativos, obtendo a distribuição a posteriori. Neste contexto, o principal objetivo do modelo BL foi introduzir um método de alocação de carteira que fornecesse resultados intuitivos e sem as inconsistências observadas na abordagem de Markowitz. O equilíbrio de longo prazo está sujeito a modificações a todo instante, tendo em vista que os investidores possuem suas próprias visões de curto prazo. Essas visões de curto prazo foram incorporadas no modelo de BL, de forma que as informações do equilíbrio de longo prazo gerassem um conjunto de retornos esperados, a partir do qual são fornecidos os

pesos da carteira ótima.

O desenvolvimento do modelo BL pode ser dividido em quatro etapas. Primeiramente, são encontradas as distribuições a priori dos retornos dos ativos, a partir do equilíbrio de mercado. Em seguida, são determinadas as visões dos investidores em relação a todos ou à parte dos ativos analisados. O terceiro passo é a incorporação das visões na distribuição a priori para se obter a distribuição posterior dos retornos. Por fim, usando o mesmo processo de minimização do modelo Média-Variância, encontra-se a carteira ótima de investimento. Em nossa dissertação desenvolvemos uma extensão do modelo BL para utilizarmos todo conjunto de previsões desenvolvidas na pesquisa. Desta forma, a seguir, apresentamos como modificamos o modelo tradicional, para o desenvolvimento de um modelo de não arbitragem. A introdução da não arbitragem ao modelo nos permitiu melhorar o sinal de prêmio de risco e possibilitou explicar os retornos individuais das ações com maior precisão. A condição de não arbitragem baseou-se na explicação dos prêmios de risco sobre o primeiro momento. Podemos decompor o retorno das ações em uma parte de prêmio de risco previsível e um componente de martingale imprevisível. A maior parte da variação é motivada pelo componente imprevisível que não possui um prêmio de risco. Ao considerar retornos médios desagregados, o componente imprevisível foi diversificado ao longo do tempo e o sinal de risco previsível foi reforçado. Para tal efeito utilizamos do teorema de Bayes, via priori e posterior, para incluirmos as informações sobre uma parte de prêmio de risco previsível e um componente de martingale imprevisível.

O modelo original assumiu, em um primeiro momento, que os retornos dos ativos seguem uma distribuição normal com médias μ e matriz de covariância Σ :

$$R \sim N(\mu, \Sigma) \quad (1.46)$$

O investidor não conhece os valores das médias dos retornos, de forma que pode considerá-los como variáveis aleatórias. Dessa forma, foi necessário determinar um método para estimar essas médias, o qual foi apresentado no modelo BL. Nesse contexto, o ponto de partida do modelo BL é considerar uma carteira de mercado como a situação de

equilíbrio de longo prazo. Utilizando a lógica semelhante à do modelo de Markowitz, pode-se encontrar os retornos esperados de longo prazo a partir de um processo chamado de otimização reversa. Intuitivamente, o processo de otimização reversa deriva do fato de que, uma vez que o investidor conhece a carteira de equilíbrio de mercado, os retornos esperados podem ser calculados, dados que eles estão implícitos nos pesos dos ativos nessa carteira.

Em nossa dissertação podemos encontrar uma estimativa para as variáveis aleatórias μ , que possuem distribuição normal com esperança a prior igual a $r_{i,t}^M$. Resumidamente, vamos encontrar:

$$\mu = r_{i,t}^M + \varrho \quad (1.47)$$

$$\mu \sim N(r_{i,t}^M, \Sigma_{r_{i,t}^M}) \quad (1.48)$$

Onde temos que $\hat{r}_{i,t}^M$ é a melhor previsão mensal desagregada, de acordo com método detalhado na seção anterior. Como método de desagregação, utilizamos o modelos de retornos compostos, i.e, $\hat{r}_{i,t}^M = (1 + \hat{R}_{i,t}^M)^{(1/21)} - 1$. A matriz $\Sigma_{\hat{r}_{i,t}^M}$, que representa a variância do fator aleatório ϱ , é obtida como uma proporção da variância Σ . Com isso, temos:

$$\Sigma_{\hat{r}_{i,t}^M} = \tau \Sigma \quad (1.49)$$

A determinação do coeficiente τ é um assunto amplamente discutido na literatura, contudo, ainda não possui um formato consolidado. Intuitivamente, ele significa a confiança do investidor em relação à distribuição a priori obtida pelo CAPM. Em nossa extensão, tal variável de incerteza se encaixa perfeitamente na incerteza em relação à distribuição a priori obtida pela melhor previsão mensal desagregada, de acordo com método $RMSE_v$, i.e. A raiz do erro quadrático médio do modelo de previsão v dentro da amostra de teste, em nossa extensão temos que: $\tau = 1/RMSE_v$. Tal escolha ocorre como forma natural dado que $RMSE$ representa o tamanho de erro do modelo preditivo escolhido, onde o inverso pode ser visto como a confiança em relação ao modelo preditivo. Essa abordagem já foi

utilizada na literatura, contudo, utilizar o RMSE específico do próprio modelo preditivo escolhido foi uma extensão da pesquisa.

A visão do analista, por definição, é um posicionamento do analista em relação ao desempenho futuro de determinado ativo. No Modelo de Black-Litterman, considera-se a visão do analista em relação aos retornos dos ativos analisados. A visão pode ser definida como relativa, quando se compara o desempenho esperado de um ativo em relação a outro ativo, ou absoluta, quando se compara o desempenho esperado de determinado ativo da carteira com algum ativo referência ou com toda a carteira. Um fator intuitivo da visão do investidor é a sua incerteza. Infere-se que, ainda que o analista tenha conhecimento do mercado, nunca haverá total certeza de que sua visão está correta. O grau de incerteza da visão também foi incorporado ao modelo, conforme será mostrado adiante. Formalmente, i visões no modelo de Black-Litterman são representadas por um vetor I , i -dimensional dado por:

$$I = P(r_{i,t}^{\wedge}) + z \quad (1.50)$$

$$z \sim N(0, \Sigma_z) \quad (1.51)$$

Onde P é uma matriz $i \times N$. Temos que $r_{i,t}^{\wedge}$ é um vetor de $N \times 1$ de retornos esperados, determinado pelo melhor modelo de previsão diário escolhido pelo critério R_{oos}^2 dentro da amostra de teste. A matriz Σ_z é uma matriz $i \times i$, expressa a confiabilidade da previsão $r_{i,t}^{\wedge}$. Destaca-se que, conforme será verificado adiante na fórmula de Black-Litterman, a magnitude de Σ_z afeta diretamente os resultados obtidos com a aplicação do modelo. Isso ocorre porque a metodologia intuitiva de Black-Litterman permite que uma maior incerteza em relação a $r_{i,t}^{\wedge}$, forneça resultados mais próximo do equilíbrio de mercado, ou seja, da distribuição a priori. Por outro lado, uma vez que o analista define sua opinião como altamente confiável, sua matriz de visões modificará de maneira relevante os resultados do modelo a posteriori em comparação à distribuição a priori. Para escolhermos a confiança em relação a previsão ($r_{i,t}^{\wedge}$) utilizamos o mesmo critério adotado para a priori

detalhado anteriormente.

Uma vez determinada a distribuição a priori dos retornos dos ativos e os parâmetros referentes à opinião do investidor, o modelo BL propõe uma forma de incorporar as matrizes de visões ao equilíbrio inicialmente obtido. A abordagem está relacionada à ótica bayesiana de probabilidades condicionais. O resultado dessa incorporação é a Fórmula de Black-Litterman, que fornece uma nova distribuição dos retornos dos ativos, chamada de distribuição a Posteriori, a ser utilizada no processo de escolha da carteira ótima de ativos. Dessa forma, em relação a μ e R , temos a esperança e a variância estimadas dos retornos:

$$\mu_{BL} = E[R] = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^t\Sigma_z^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\hat{r}_{i,t}^M + P^t\Sigma_z^{-1}P] \quad (1.52)$$

$$\Sigma_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^t\Sigma_z^{-1}P]^{-1} \quad (1.53)$$

Uma vez que se obteve a distribuição a posteriori dos retornos dos ativos, adotamos a mesma técnica de otimização do modelo Média-Variância para encontrarmos a alocação ótima, representada por w_{BL} .

$$MIN_{w_{BL}} w_{BL}^t \Sigma_{BL} w_{BL} - \lambda w_{BL}^t \mu_{BL} \quad (1.54)$$

Resolvendo o problema, pudemos adicionar um conjunto de restrições, por exemplo: $\sum_{i=1}^N w_{BL} = 1$, onde chegamos aos pesos:

$$w_{BL}^* = (\lambda w_{BL}^t)^{-1} \mu_{BL} \quad (1.55)$$

Substituindo os resultados anteriormente encontrados chegamos ao seguinte resultado:

$$w_{BL}^* = (\lambda w_{BL}^t)^{-1} [(\tau\Sigma)^{-1} + P^t\Sigma_z^{-1}P]^{-1} [(\tau\Sigma)^{-1}\hat{r}_{i,t}^M + P^t\Sigma_z^{-1}P] \quad (1.56)$$

No capítulo 5, aplicamos o modelo BL apresentado nesta seção, explorando melhor os resultados a serem utilizados como cada critério de entrada.

1.8 Interpolação de dados e preenchimento de curvas

Nesta seção discutimos uma representação em estado de espaços que pode ser usada com três propósitos distintos. O primeiro é na interpolação de séries temporais, o segundo é como base na reconstrução histórica (*back-cast*) de séries econômicas incompletas e o terceiro é na extrapolação de abrangência de estruturas de previsão. A estimação dos modelos associados à representação estado de espaços se dá a partir do uso do filtro de Kalman. Uma descrição teórica e aplicada mais detalhada dessas técnicas pode ser encontrada em [Bollerslev, Chou e Kroner \(1992\)](#) ou em [Hamilton e Susmel \(1994\)](#).

Considere um vetor de retornos $r_{i,t}^o$ de $NX1$, observáveis no período t , e um vetor $r_{i,t}$ $RX1$ de variáveis latentes (não observáveis) no período $t - 1$. Uma representação de espaço de estados é uma forma de resumir as relações entre esses dois conjuntos de variáveis, onde a natureza dinâmica do sistema é levada em consideração. Na maioria das aplicações, a representação de espaço de estados é linear, o que leva naturalmente à log verossimilhança condicional do sistema sob inovações Gaussianas. A representação em espaço de estados foi considerada aqui como equação de estado e equação de medida, respectivamente:

$$r_{i,t} = r_{i,t-1} + \nu_t \quad (1.57)$$

$$r_{i,t}^o = r_{i,t} + \eta_t \quad (1.58)$$

A equação de estado (2.57) descreve a dinâmica do vetor de estado $r_{i,t}$, o qual contém as variáveis latentes que foram estimadas. A equação de observação (2.58) relaciona o vetor contendo as observáveis $r_{i,t}^o$. Os erros ν_t e η_t são, por hipótese, ortogonais em todos os *lags* e *leads*. Além disso, estes termos de erro têm a distribuição normal multivariada, o que torna (2.58) e (2.59) um sistema linear gaussiano condicional, no qual a estimação e

previsão podem se basear. Com este procedimento tentou-se obter os valores da variável de estados não observável $r_{i,t}$. Pode-se prevê-la baseado no conjunto completo de dados, o que é chamado de estimativa suavizada de $r_{i,t}$, ou, pode-se prevê-la usando apenas dados disponíveis até o período $t - 1$, o que é chamado de estimativa filtrada. Dado o objetivo da pesquisa, utilizamos a estimativa suavizada, representada a seguir:

$$r_{t|T} = E(r_t | z_1, \dots, z_{t-1}) \quad (1.59)$$

Como resultado desta aplicação, podemos atuar interpolando nossos dados quando lidamos com o problema de "lacunas temporais", respeitando a volatilidade da série sem impor uma estrutura adicional que dificulte o processo de modelagem. Também utilizamos tal modelo para a construção das estruturas a termo do excesso de retorno, realizando o preenchimento da estrutura a termo com um maior número de vértices. Para a estimação deste modelo, utilizamos uma ferramenta tradicional conhecida como filtro de [Kalman et al. \(1960\)](#).

1.9 Relevância das variáveis e relacionamento marginal

Nosso objetivo na interpretação de modelos de Machine Learning foi robusto e extremamente útil para formulações futuras. Com objetivo de identificar variáveis que tenham uma influência preditiva significativa nos retornos esperados de cada ativo, enquanto controlamos simultaneamente os muitos outros preditores do sistema. Analisando qual a relação preditiva existente entre cada variável do modelo.

Consideramos duas noções diferentes de importância. A primeira foi a redução no R^2 preditivo dos dados para definir todos os valores do preditor Ω_j para zero, mantendo as demais estimativas do modelo fixas, conforme utilizada no contexto de redução de dimensão por [He, Kelly e Manela \(2017\)](#). Como parte de nossa análise, traçamos também a relação marginal entre retornos esperados e cada característica. Apesar das limitações óbvias, esses gráficos são uma ferramenta eficaz para visualizar o impacto de primeira ordem das covariáveis em um modelo de Machine Learning.

2 Um Estudo Empírico para Ativos Brasileiros

Neste capítulo descrevemos a aplicação empírica da pesquisa: base de dados, modelos estimados e a comparação das previsões encontradas nos modelos propostos nas diferentes frequências.

2.1 Base de dados

O conjunto informativo foi retirado das seguintes fontes: IPEA-DATA, FRED, Economatica, Banco Central do Brasil, Thomson Reuters e FGV Dados. Os ativos que foram analisados dentro da pesquisa foram: Índice IBOVESPA (IBOVESPA), Taxa de Câmbio Real/Dólar (R\$/US\$), Certificado de Depósito Interbancário (CDI), ABEV3.SA, CMIG4.SA, ITUB4.SA, PETR4.SA e VALE3.SA. Os ativos foram escolhidos de acordo com o nível de liquidez acumulada do período de 1995 até 2015 pela metodologia de [Acharya e Pedersen \(2005\)](#). A restrição do número de ativos analisados ocorre devido a uma limitação de capacidade operacional (computacional). Tal limitação advém do elevado número de modelos propostos (53), do tamanho da base de dados utilizada, número de previsões desenvolvidas (482) para cada um dos modelos e pela proposta de pesquisa de desenvolvimento de um FDS específico para cada ativo. O total de previsões geradas no modelo foi de 25.646. O total de séries temporais utilizadas nos modelos de previsão foi de 630 séries temporais de dados divididas da seguinte forma:

Tabela 1 – Total de séries temporais.

Intervalo de Tempo	Geral	ABEV3	CMIG4	ITUB4	PETR4	VALE3	Total
Número de variáveis Diárias	54	30	29	22	34	31	200
Número de variáveis Mensais	95	19	22	17	28	30	211
Número de variáveis Trimestrais	28	25	27	24	25	27	156
Número de variáveis Anuais	15	8	8	10	13	9	63
Total	192	82	86	73	100	97	630

Fonte: Elaborada pelos autores.

Para mais detalhes com relação as séries utilizadas, o anexo A mostra todo o conjunto de séries atualizadas nos intervalos diários, mensais, trimestrais e anuais. O número de observações presentes no conjunto total de dados para series diárias, mensais, trimestrais e anuais foram 1891, 191, 86 e 23, respectivamente, sendo que tais números foram selecionados para maximizar na visão dos pesquisadores a qualidade do conjunto de dados inseridos no modelo. O total de entradas (sinais) para cada um dos modelos são de 433.336. Em relação aos dados, um dos empecilhos encontrados para lidar com um conjunto informativo de tal magnitude foi a presença de dados com observações faltantes ao longo do tempo. Para resolução deste problema, o primeiro passo foi a determinação de qual o intervalo temporal seria analisado considerando o número de observações a serem incluídas. Desta forma, para observações diárias, foi utilizado como base os dias nos quais o mercado de câmbio foi negociado, tabela de dias uteis divulgada pela B3, com objetivo de evitar o problema de acumulação de informação entre os diferentes mercados (mercado de cambio possui um maior número de dias de negociação do que o mercado acionário). Para período mensal, trimestral e anual não foram feitas modificações em relação ao calendário padrão. Para o processo de preenchimento dos dados faltantes foi utilizado o mecanismo de espaços de estados do modelo de nível local estimado via filtro de Kalman, sendo utilizada a estimativa suavizada.

O segundo passo da preparação dos dados ocorreu através da realização para cada série de tempo do teste de raiz unitária DF-GLS ([Elliott, Rothenberg e Stock \(1996\)](#)), onde avaliamos se as séries temporais possuam raiz unitária ou são estacionárias no formato com intercepto e/ou tendência. Um fato que merece destaque é que todas as séries foram analisadas em sua forma gráfica e seu correlograma, na tentativa de evitar o problema de baixo poder presentes nos testes de raiz unitária. Assim, as séries que apresentaram raiz unitária passaram pelo processo de indução de estacionariedade, como descrito a seguir:

$$\Omega_{j,t} = \ln(\Omega_{j,t}) - \ln(\Omega_{j,t-1}) \quad (2.1)$$

As variáveis que no teste se apresentaram como estacionárias foram mantidas em seu formato original posterior ao processo de interpolação. O terceiro passo para

tratamento dos dados ocorreu através de um processo de normalização descrito a seguir:

$$N(\Omega_{j,t}) = \frac{\Omega_{j,t} - E_T(\Omega_j)}{\sqrt{\text{var}_T(\Omega_j)}} \quad (2.2)$$

O objetivo desta transformação foi evitar o problema gerado por se trabalhar com séries que possuem diferentes formatos e magnitudes, fato que pode vir a gerar grandes falhas em modelos abordados na pesquisa, como exemplo, PCA e SPCA. Após o tratamento dos dados, caminhamos para a etapa de estimação dos modelos mencionados no capítulo 2.

2.2 Estruturas dos Modelos Preditivos

Considerando o conjunto de dados desenvolvido através das etapas mencionadas na seção anterior, um passo de grande importância foi a seleção dos intervalos de estimação (treinamento), previsão controlada fora da amostra (validação) e previsão final do modelo fora da amostra (avaliação). A divisão dos conjuntos amostrais para as quatro frequências de tempo analisadas (dia, mês, trimestre e ano) pode ser vista na figura a seguir:

Figura 1 – Divisão do espaço de tempo da pesquisa

Fonte: Elaborada pelos autores.

O processo de seleção do período de amostra, utilizado durante a etapa de estimação, foi realizado de forma a garantir uma amostra suficiente e robusta que possibilitasse a estimação dos modelos previstos. Um empecilho encontrado durante o processo se encontra quando a frequência dos dados é reduzida e determinados testes, por exemplo teste de [DIEBOLD e MARIANO \(1995\)](#), acabam por ter seu poder reduzido. Na tentativa de contornar esse problema, separamos uma parte da amostra para um período de previsão fora da amostra controlada (validação), para analisar qual dos modelos estimados possui melhor ajuste. Após a análise dos modelos na amostra de validação, aquele que apresentou maior R^2_{oos} foi utilizado como modelo escolhido para previsão fora da amostra. A seguir apresentamos os modelos estimados na pesquisa para as quatro frequências de dados selecionadas:

Tabela 2 – Apresentação dos modelos estimados.

Modelo:	Critério de Penalização	Estimação dos Fatores	Matriz de Covariâncias	Informação Complementar
FAVAR-BC	-	PCA	Covariância Amostral	Base Completa de Dados
FAVAR-BG	-	PCA	Covariância Amostral	Base Geral de Dados
FAVAR-BE	-	PCA	Covariância Amostral	Base Específica Conjunta de Dados
FAVAR-BG+BE	-	PCA	Covariância Amostral	Base Geral + Base Específica de Ativos
VAR-SL(1)	LASSO	-	Covariância Amostral	Grade de Penalização (50,10)
VAR-SL(2)	adaLASSO	-	Covariância Amostral	λ Selecionado via Critério de Informação
VAR-SL(3)	Elastic Net	-	Covariância Amostral	Grade de Penalização (150,10)
VAR-SHL	LASSO Hierárquico	-	Covariância Amostral	-
BVAR	-	-	Covariância Amostral	-
BVAR-S	Priori de Minnesota	-	Covariância Amostral	-
S-FAVAR-R	Ridge	PCA	Covariância Amostral	λ Selecionado via Critério de Informação
S-FAVAR-L	LASSO	PCA	Covariância Amostral	λ Selecionado via Critério de Informação
S-FAVAR-adaL	AdaLASSO	PCA	Covariância Amostral	λ Selecionado via Critério de Informação
S-FAVAR-E	Elastic Net	PCA	Covariância Amostral	λ Selecionado via Critério de Informação
MS-SPCA	-	SPCA	Covariância Amostral	λ Selecionado via RMSE
SPCA	-	SPCA	Covariância Amostral	$\lambda = 10xe^{-6}$
OS-SPCA	-	SPCA	Covariância Amostral	λ estimado via Ridge, LASSO, AdaLASSO e Elastic Net
MS-SPCA-BC	-	SPCA	Covariância Amostral	λ Selecionado via RMSE; Base Completa de Dados
MS-SPCA-BE	-	SPCA	Covariância Amostral	λ Selecionado via RMSE; Base Específica de Dados
MS-SPCA-BE+BG	-	SPCA	Covariância Amostral	λ Selecionado via RMSE; Base Específica de Dados + Base Geral
CL	-	-	-	Combinação Linear dos 20 Primeiros Modelos
FAVAR-BC-A	-	PCA	Andrews (1991)	Base Completa de Dados
FAVAR-BG-A	-	PCA	Andrews (1991)	Base Geral de Dados
FAVAR-BE-A	-	PCA	Andrews (1991)	Base Específica Conjunta de Dados
FAVAR-BG+BE-A	-	PCA	Andrews (1991)	Base Geral + Base Específica de Ativos
S-FAVAR-R-A	Ridge	PCA	Andrews (1991)	λ Selecionado via Critério de Informação
S-FAVAR-L-A	LASSO	PCA	Andrews (1991)	λ Selecionado via Critério de Informação
S-FAVAR-adaL-A	AdaLASSO	PCA	Andrews (1991)	λ Selecionado via Critério de Informação
S-FAVAR-E-A	Elastic Net	PCA	Andrews (1991)	λ Selecionado via Critério de Informação
MS-SPCA-A	-	SPCA	Andrews (1991)	λ Selecionado via RMSE
SPCA-A	-	SPCA	Andrews (1991)	$\lambda = 10xe^{-6}$
OS-SPCA-A	-	SPCA	Andrews (1991)	λ estimado via Ridge, LASSO, AdaLASSO e Elastic Net
MS-SPCA-BC-A	-	SPCA	Andrews (1991)	λ Selecionado via RMSE; Base Completa de Dados
MS-SPCA-BE-A	-	SPCA	Andrews (1991)	λ Selecionado via RMSE; Base Específica de Dados
MS-SPCA-BE+BG-A	-	SPCA	Andrews (1991)	λ Selecionado via RMSE; Base Específica de Dados + Base Geral
FAVAR-BC-KV	-	PCA	Kiefer e Vogelsang (2005)	Base Completa de Dados
FAVAR-BG-KV	-	PCA	Kiefer e Vogelsang (2005)	Base Geral de Dados
FAVAR-BE-KV	-	PCA	Kiefer e Vogelsang (2005)	Base Específica Conjunta de Dados
FAVAR-BG+BE-KV	-	PCA	Kiefer e Vogelsang (2005)	Base Geral + Base Específica de Ativos
S-FAVAR-R-KV	Ridge	PCA	Kiefer e Vogelsang (2005)	λ Selecionado via Critério de Informação
S-FAVAR-L-KV	LASSO	PCA	Kiefer e Vogelsang (2005)	λ Selecionado via Critério de Informação
S-FAVAR-adaL-KV	AdaLASSO	PCA	Kiefer e Vogelsang (2005)	λ Selecionado via Critério de Informação
S-FAVAR-E-KV	Elastic Net	PCA	Kiefer e Vogelsang (2005)	λ Selecionado via Critério de Informação
MS-SPCA-KV	-	SPCA	Kiefer e Vogelsang (2005)	λ Selecionado via RMSE
SPCA-KV	-	SPCA	Kiefer e Vogelsang (2005)	$\lambda = 10xe^{-6}$
OS-SPCA-KV	-	SPCA	Kiefer e Vogelsang (2005)	λ estimado via Ridge, LASSO, AdaLASSO e Elastic Net
MS-SPCA-BC-KV	-	SPCA	Kiefer e Vogelsang (2005)	λ Selecionado via RMSE; Base Completa de Dados
MS-SPCA-BE-KV	-	SPCA	Kiefer e Vogelsang (2005)	λ Selecionado via RMSE; Base Específica de Dados
MS-SPCA-BE+BG-KV	-	SPCA	Kiefer e Vogelsang (2005)	λ Selecionado via RMSE; Base Específica de Dados + Base Geral
PLS-BC-KV	-	PLS	Kiefer e Vogelsang (2005)	Base Completa de Dados
PLS-BG-KV	-	PLS	Kiefer e Vogelsang (2005)	Base Geral de Dados
PLS-BE-KV	-	PLS	Kiefer e Vogelsang (2005)	Base Específica Conjunta de Dados
PLS-BC+BE-KV	-	PLS	Kiefer e Vogelsang (2005)	Base Geral + Base Específica de Ativos

Fonte: Elaborada pelos autores.

Desta forma, na tabela 2, chegamos a um total de 53 modelos de Machine Learning Lineares esparsos estimados na pesquisa para cada uma das quatro frequências de dados (212 modelos ao total nas diferentes frequências). Ressaltamos que os modelos desenvolvidos são esparsos e possuem a condição de não arbitragem apresentada no capítulo 2. Em relação a tabela apresentada anteriormente, temos que a grade de penalização representa o tamanho da penalização imposto via o hiperparâmetro λ , onde utilizamos três formatos distintos: critérios arbitrários de penalização do λ_1 e λ_2 foram (50,10), critérios arbitrários de penalização do λ_1 e λ_2 foram (150,10) com a minimização do RMSE. Em relação aos formatos de base de dados utilizados na pesquisa, encontramos quatro especificações: Base completa - utilizamos todos os dados presentes na base de dados; Base Geral - utilizamos apenas os dados macroeconômicos e microeconômicos não incluindo variáveis referentes aos ativos analisados; Base Específica de Ativos - formada apenas pelos dados específicos do ativo analisado (r_i); Base Específica Conjunta - formada pela união dos dados gerais mais os dados específicos do ativo analisado. Em relação aos métodos de validação dos hiperparâmetros λ e λ_1 , utilizamos tanto critérios de informação (AIC e BIC) quanto critério de minimização do RMSE do modelo na etapa de validação. De forma simples a condição de momento de não arbitragem imposta aos modelos de predição implica que:

$$\hat{r}_{i,t+1}^e = \hat{r}_{i,t+1} - \hat{r}_{CDI,t+1} \quad (2.3)$$

Sendo assim, a previsão para o retorno em excesso do ativo i dos modelos deve ser igual a previsão do retorno do ativo i menos a previsão para o retorno do ativo livre de risco (CDI). No capítulo 2 realizamos uma explicação completa das propriedades de não arbitragem aplicada aos modelos estimados na pesquisa. O conjunto de dados existente para estimação diária foi formado por $N = 200$ séries temporais e $T = 1891$ (08-02-2011 até 30-12-2017) observações. Para o período de estimação do modelo diário foi selecionado uma amostra de tamanho $T_e = 1091$ (08-02-2011 até 30-12-2013) de treinamento, e amostra de validação $T_v = 481$ (02-01-2014 até 30-12-2015). Em relação ao conjunto de dados existente para estimação mensal foi formado por $N = 211$ séries temporais e $T = 191$ (02-2003 até 12-2017) observações. Para o período de estimação do modelo mensal foi

selecionado uma amostra de tamanho $T_e = 131$ (02-2003 até 12-2013), e amostra de validação $T_v = 24$ (01-2014 até 12-2015). O ambiente de análise para o conjunto de dados existente para estimação trimestral foi formado por $N = 159$ séries temporais e $T = 86$ (T1-1997 até T4-2017) observações. Para o período de estimação do modelo trimestral foi selecionado uma amostra de tamanho $T_e = 68$ (T1-1997 até T4-2013), e amostra de validação $T_v = 8$ (T1-2014 até T4-2015). Para a última frequência o conjunto de dados existente para estimação anual foi formado por $N = 65$ séries temporais e $T = 23$ (1996 até 2017) observações. Para o período de estimação do modelo anual foi selecionado uma amostra de tamanho $T_e = 18$ (1996 até 2013), e amostra de validação $T_v = 2$ (2014 até 2015).

Na tabela 3 a seguir podemos encontrar os principais resultados para cada um dos modelos de predição diária:

Tabela 3 – Resultados para cada um dos modelos de predição diária.

Modelo:	Número de Fatores Bai e Ng (2002)	Número de variáveis não zero Kristensen (2017)	% da Variação Explicada	R^2 Ajustado Médio	R^2_{os} em T_f
FAVAR-BC	22	-	0.80	0.63	0.19
FAVAR-BG	7	-	0.83	0.64	0.22
FAVAR-BE	18	-	0.91	0.66	0.18
FAVAR-BG+BE	7 + 18	-	0.83;0.91	0.49	0.17
VAR-SL(1)	-	-	-	0.58	0.15
VAR-SL(2)	-	-	-	0.65	0.09
VAR-SL(3)	-	-	-	0.66	0.10
VAR-SHL	-	-	-	0.61	0.07
BVAR	-	-	-	0.05	0.03
BVAR-S	-	-	-	0.56	0.08
S-FAVAR-R	8	-	0.92	0.61	0.21
S-FAVAR-L	10	-	0.71	0.60	0.27
S-FAVAR-adaL	12	-	0.89	0.60	0.19
S-FAVAR-E	9	-	0.84	0.62	0.24
MS-SPCA	18	39	0.95	0.63	0.29
SPCA	18	71	0.93	0.63	0.20
OS-SPCA	18	100	0.89	0.63	0.28
MS-SPCA-BC	22	131	0.81	0.63	0.14
MS-SPCA-BE	18	20	0.89;0.90	0.63	0.09
CL (20)	-	-	-	0.43	0.05
FAVAR-BC-A	4	-	0.91	0.67	0.19
FAVAR-BG-A	3	-	0.90	0.59	0.22
FAVAR-BE-A	5	-	0.94	0.69	0.21
FAVAR-BG+BE-A	3 + 5	-	0.90;0.92	0.46	0.22
S-FAVAR-R-A	2	-	0.96	0.60	0.21
S-FAVAR-L-A	1	-	0.99	0.63	0.20
S-FAVAR-adaL-A	3	-	0.93	0.65	0.22
S-FAVAR-E-A	2	-	0.93	0.39	0.24
MS-SPCA-A	5	45	0.95	0.51	0.29
SPCA-A	5	81	0.90	0.69	0.13
OS-SPCA-A	5	100	0.90	0.63	0.28
MS-SPCA-BC-A	4	100	0.93	0.65	0.25
MS-SPCA-BE-A	5	18	0.90;0.92	0.64	0.14
FAVAR-BC-KV	2	-	0.98	0.63	0.19
FAVAR-BG-KV	1	-	0.97	0.64	0.22
FAVAR-BE-KV	2	-	0.99	0.65	0.29
FAVAR-BG+BE-KV	1 + 2	-	0.99;0.97	0.49	0.17
S-FAVAR-R-KV	2	-	0.99	0.61	0.16
S-FAVAR-L-KV	1	-	0.99	0.60	0.14
S-FAVAR-adaL-KV	1	-	0.99	0.60	0.19
S-FAVAR-E-KV	2	-	0.99	0.62	0.22
MS-SPCA-KV	1	49	0.99	0.63	0.31
SPCA-KV	1	72	0.98	0.63	0.25
OS-SPCA-KV	1	123	0.98	0.63	0.28
MS-SPCA-BC-KV	2	14	0.99	0.63	0.16
PLS-BC-KV	2	25	0.99	0.71	0.07
PLS-BG-KV	1	35	0.99	0.82	0.11
PLS-BE-KV	2	98	0.99	0.61	0.24
PLS-BG+BE-KV	1 + 2	18	0.99;0.99	0.54	0.15

Fonte: Elaborada pelos autores.

Na tabela anterior podemos notar claramente que as modificações propostas na matriz de covariâncias geraram uma redução clara no número de componentes principais ótimos, utilizando o critério de [Bai e Ng \(2002\)](#). Esse efeito foi maior ainda quando utilizamos a matriz de covariâncias de longo prazo de Kiefer e Vogelsang (2005). É importante ressaltar que, mesmo com um menor número de componentes principais os modelos apresentaram um maior percentual da variação explicada. Tais resultados vão de encontro a condição de não arbitragem imposta aos modelos. Quando analisamos as matrizes de longo prazo, descartamos grande parte dos ruídos de curto prazo (Martingale imprevisível), o que favorece a uma maior capacidade explicativa para o modelo. Em relação ao critério de [Kristensen e Salanié \(2017\)](#) para determinação de variáveis não zero no SPCA, podemos notar que não existe um caminho certo de redução ou aumento no número de variáveis não zero quando adicionamos as matrizes de longo prazo. Considerando que o objetivo de nossa dissertação se concentrou na análise do R_{oos}^2 (amarelo) e consequentemente, R^2 (azul), o gráfico a seguir concentramos as duas informações referentes aos 53 modelos diários desenvolvidos.

Figura 2 – Avaliação da Capacidade Preditiva dos Modelos Diários.

Legenda: R^2_{oos} em Amarelo e R^2 Azul

Fonte: Elaborada pelos autores.

Observando a figura 2, podemos notar como esperado uma queda elevada da variável R^2 em relação a variável R^2_{oos} . Tal redução ocorre devido ao fato de que R^2 é percentual explicada dentro da amostra e R^2_{oos} é uma modificação feita por Diebold e Mariano (1995) para o percentual explicado fora da amostra. Logo, R^2_{oos} resume a capacidade preditiva dos modelos. Comparativamente, se realizarmos o cálculo da média entre o grupo de modelos apresentados, vamos encontrar que os modelos estimados com a matriz de covariâncias amostrais possuem um R^2_{oos} de aproximadamente 17%, enquanto as matrizes de covariâncias de longo prazo de Andrews (1991) e Kiefer e Vogelsang (2005), respectivamente, apresentam um R^2_{oos} de 22% e 20%. Realizando o agrupamento dos modelos em relação a métodos de penalização no VAR, métodos de pré-seleção anteriormente ao PCA, métodos de SPCA, FAVAR, métodos Bayesianos e métodos de PLS, vamos encontrar respectivamente os seguintes percentuais para R^2_{oos} : 10,3%, 22,8%, 20%, 19%, 5,5% e 18,6%. Deste modo, para os modelos preditivos diários, notamos que a matriz de covariâncias de Andrews (1991) e métodos de pré-seleção anteriormente ao PCA produzem um maior R^2_{oos} . Como destaque, o maior valor de R^2_{oos} encontrado foi de 31% no modelo S-FAVAR-L-KV. Os percentuais encontrados superam com ampla distancia os resultados presentes na literatura para modelos de predição diários, onde muitos encontraram percentuais de R^2_{oos} negativos. Contudo, vale mencionar que os valores apresentados são uma média de previsão para todos ativos estudados, como valores máximos e mínimos encontramos 69% e -0.78% em toda amostra.

Para tornar mais clara a comparação entre os modelos, selecionamos os dez modelos que possuem maior R^2_{oos} para realização do teste de Diebold e Mariano (1995). Os resultados podem ser encontrados na tabela 4.

As conclusões em relação à tabela 4 ocorrem em nível de comparação par, a par de cada um dos dez melhores modelos em relação ao R^2_{oos} . A interpretação da tabela não apresenta grandes dificuldades. Ressaltamos que os detalhes estão presentes na nota da tabela.

Tabela 4 – Teste de Diebold e Mariano.

	S-FAVAR-L	MS-SPCA-BE-KV	S-FAVAR-E-KV	S-FAVAR-E-A	OS-SPCA	MS-SPCA-BE-A	S-FAVAR-L-A	MS-SPCA	S-FAVAR-L-KV
MS-SPCA-A	-0.23	-0.20	0.20	0.73	1.01	1.31	1.68	1.94*	2.13*
S-FAVAR-L		-0.11	0.29	0.82	1.10	1.40	1.77*	2.03*	2.22*
MS-SPCA-BE-KV			0.18	0.71	0.99	1.29	1.66	1.92*	2.11*
S-FAVAR-E-KV				0.53	0.81	1.11	1.48	1.74*	1.93*
S-FAVAR-E-A					0.28	0.58	0.95	1.21	1.40
OS-SPCA						0.13	0.50	0.76	0.95
MS-SPCA-BE-A							0.24	0.50	0.69
S-FAVAR-L-A								0.08	0.27
MS-SPCA									-0.12
S-FAVAR-L-KV									

Fonte: Elaborada pelos autores.

A tabela reporta estatísticas de teste Diebold-Mariano em pares comparando o desempenho de previsão dos retornos dos ativos fora da amostra entre dez modelos. Números positivos indicam que o modelo de coluna supera o modelo de linha. Um asterisco indica significância no nível de 5% para comparações.

Agora investigamos a importância relativa de covariáveis individuais para o desempenho preditivo, usando as medidas de importância marginal descritas no capítulo 2. Para começar, calculamos a redução no R_{oos}^2 da configuração de todos os valores de um determinado preditor para zero em cada amostra de treinamento e calculamos a média deles em uma única medida de importância para cada preditor, i.e, além de calculamos o efeito marginal de cada variável na capacidade preditiva. A Figura 3 relata o grau de importância das 5 principais características do retorno de cada ativo utilizando a base completa diária. O grau de importância das variáveis dentro de um modelo é normalizado para somar um, fornecendo a interpretação da importância relativa para esse modelo em particular. Ressaltamos que a figura a seguir apresenta as variáveis de maior magnitude para melhora na capacidade preditiva para os modelos lineares de Machine Learning em nível macroeconômico, microeconômico e específico, seguindo um padrão para todas as variáveis analisadas ao longo do tempo. Desta forma, não observamos uma mudança em relação aos preditores com o passar o tempo.

Figura 3 – Análise Diária de Efeitos Marginais Por Ativo.

Fonte: Elaborada pelos autores.

O resultado apresentado na Figura 3 vai ao encontro ao esperado pelos modelos de precificação de ativos anteriormente citados na pesquisa, visão dos autores e também dos principais analistas de mercado. Um ponto de grande interesse ocorre do fato de que os ativos individuais analisados não possuem grande impacto de variáveis macroeconômicas e microeconômicas, retirando o efeito de commodities específicos. Em relação ao Índice IBOVESPA observamos um maior efeito marginal vindo dos principais componentes do índice, setores exportadores de commodities e financeiro. Em relação ao CDI, notamos um

interessante resultado referente a importações e exportações que foge dos demais resultados da literatura. Entretanto, quando observamos o caso brasileiro podemos rapidamente ligar a balança comercial e seu efeito na desvalorização da moeda Real, gerando uma pressão inflacionária, e para seu combate, uma elevação nas taxas de juros (CDI). Em relação a taxa de câmbio Real/Dólar (R\$/US\$), o resultado se assemelha à literatura, ressaltando a interligação entre moedas fortes (Euro), risco Brasil (CDS) e expectativas cambiais futuras. Os resultados encontrados vão ao encontro aos objetivos da pesquisa. Em relação aos ativos específicos, é necessário ressaltar a importância de variáveis como ratio preço sobre o valor patrimonial, valor total das vendas e preço sobre lucros. Conforme esperado, o resultado marginal na capacidade preditiva de cada variável confirma a estrutura proposta de arbitragem informacional. Tal metodologia apesar do alto custo computacional gera uma elevada melhora na capacidade preditiva dos modelos.

A seguir, apresentamos os resultados mensais referentes ao total de 53 modelos estimados. Para o desenvolvimento de um critério comparativo entre os modelos em diferentes frequências, comparamos os resultados médios do conjunto de modelos estimados com a matriz de covariâncias amostrais que possuem um R^2_{oos} de aproximadamente 43%, enquanto as matrizes de covariâncias de longo prazo de [Andrews \(1991\)](#) e [Kiefer e Vogelsang \(2005\)](#), respectivamente, apresentam um R^2_{oos} de 54% e 51%. Realizando o agrupamento dos modelos em relação a métodos de penalização no VAR, métodos de pré-seleção anteriormente ao PCA, métodos de SPCA, FAVAR, métodos Bayesianos e métodos de PLS, encontramos respectivamente, os seguintes percentuais para R^2_{oos} : 41,5%, 48,9%, 39,1%, 43,6%, 9,2% e 40,6%. Portanto, para os modelos preditivos mensais, notamos que a matriz de covariâncias de Andrews (1991) e métodos de pré-seleção anteriormente ao PCA produzem um maior R^2_{oos} , resultado semelhante ao encontrado para os modelos diários. Com objetivo de tornar mais clara a análise, apresentamos apenas os quatro modelos com maior R^2_{oos} , seguindo o objetivo da pesquisa. Na tabela podemos observar os principais resultados:

Analisando os resultados encontrados na tabela 5 e os anteriormente apresentados, podemos notar que a capacidade preditiva dos modelos obteve uma melhora significativa

Tabela 5 – Resultados dos modelos mensais.

Modelo:	Número de Fatores Bai e Ng (2002)	Número de variáveis não zero Kristensen (2017)	% da Variação Explicada	R^2 Ajustado Médio	R^2_{oos} em T_f
S-FAVAR-L	2	-	0.95	0.85	0.73
VAR-SL(1)	-	-	-	0.74	0.67
FAVAR-BG-A	5	-	0.84	0.72	0.64
MS-SPCA-BE-A	5	29	0.94	0.69	0.62
MS-SPCA-KV	4	82	0.90	0.65	0.61

Fonte: Elaborada pelos autores.

em relação ao R^2_{oos} . Tal resultado atua de acordo com a condição de não arbitragem que em modelos mensais obtém melhor ajuste em relação aos modelos diários. Essa característica é facilmente explicada pela dissipação dos efeitos de ruído (*Martingale* não previsível), presente nas variações diárias. Em relação ao teste de Diebold e Mariano, devido ao ambiente de previsões reduzidos e ao elevado número de modelos estimados optamos por não realizar o teste. Os resultados ressaltam a importância da estrutura utilizada de FDS, quando comparamos a capacidade preditiva encontrada notamos um resultado superior ao presente na literatura. Uma análise a ser destacada na pesquisa se refere aos efeitos marginais de cada variável sobre a capacidade preditiva dos modelos mensais. A Figura 4 relata o grau de importância das 5 principais características do retorno de cada ativo, utilizando a base completa mensal.

Em relação à figura 4, podemos notar que a estrutura em relação aos efeitos marginais não sofreram grandes modificações quando comparadas à frequência diária para análise dos ativos individuais, onde ressaltamos maior efeito marginal de variáveis de resultado e caráter de precificação utilizadas pelo mercado financeiro. No que se refere à variável Índice IBOVESPA, notamos um grande efeito de variáveis de Índices externos como: S&P500, NASDAQ-100 e Índice Industrial Dow Jones. Esse fator é extremamente esperado dado o grau de conectividade e dependência dos mercados. Ainda em relação ao IBOVESPA, uma associação importante e amplamente explorada no mercado e na literatura é o efeito marginal da taxa de câmbio Real/Dólar e em relação às expectativas dos agentes de mercado. Quanto a taxa de câmbio Real/Dólar, mencionamos o efeito das taxas de câmbio reais e bilaterais em relação aos principais parceiros comerciais e em relação a uma medida de preços IGP-DI. Em relação ao CDI, continuamos dando destaque as exportações, índice de confiança do setor industrial, taxas referenciais e como surpresa

Figura 4 – Análise Mensal de Efeitos Marginais Por Ativo.

Fonte: Elaborada pelos autores.

ao índice de utilização da indústria no EUA. Quanto ao último item, um relacionamento secundário pode ser desenvolvido em relação a indicação de capacidade ociosa e realizações de políticas monetárias no EUA.

A seguir, apresentamos os resultados trimestrais referentes ao total de 53 modelos estimados. Para desenvolvimento de um critério comparativo entre os modelos em diferentes frequências, comparamos os resultados médios do conjunto de modelos estimados com a matriz de covariâncias amostrais que possui um R^2_{oos} de aproximadamente 42%, enquanto

as matrizes de covariâncias de longo prazo de Andrews (1991) e Kiefer e Vogelsang (2005), respectivamente, apresentam um R^2_{oos} de 43% e 60%. Realizando o agrupamento dos modelos em relação a métodos de penalização no VAR, métodos de pré-seleção anteriormente ao PCA, métodos de SPCA, FAVAR, métodos Bayesianos e métodos de PLS, encontramos respectivamente os seguintes percentuais para R^2_{oos} : 46,1%, 29,9%, 37,3%, 51,2%, 14,2% e 38,15%. Assim, para os modelos preditivos mensais, notamos que a matriz de covariâncias de Kiefer e Vogelsang (2005) e métodos de pré-seleção anteriormente ao PCA produzem um maior R^2_{oos} , resultado diferente ao encontrado para os modelos mensais e diários. Com objetivo de tornar mais clara a análise, iremos apresentar apenas os quatro modelos com maior R^2_{oos} . Na tabela 6 podemos observar os principais resultados:

Tabela 6 – Resultados dos modelos trimestrais.

Modelo:	Número de Fatores Bai e Ng (2002)	Número de variáveis não zero Kristensen (2017)	% da Variação Explicada	R^2 Ajustado Médio	R^2_{oos} em T_f
S-FAVAR-L-A	2	-	0.97	0.71	0.67
MS-SPCA-A	5	25	0.99	0.65	0.54
MS-SPCA-BC-KV	1	6	0.96	0.64	0.54
S-FAVAR-R-A	2	-	0.98	0.60	0.47
VAR-SL(1)	-	-	-	0.53	0.43

Fonte: Elaborada pelos autores.

As diferenças em relação aos modelos diários e mensais é um fator que corrobora com o objetivo da pesquisa de desenvolvimento de um modelo diferente para cada um dos ativos e das frequências estimadas. A capacidade preditiva dos modelos se mostrou superior aos resultados encontrados mensais. Tal capacidade pode ser explicada pelas variáveis incluídas nos modelos. Para os dados trimestrais, consideramos uma maior abrangência da base de dados, devido a uma base mais completa e com melhor mensuração de informações. Outro ponto no qual merece destaque advém de uma menor presença de ruído nas variáveis e maior interligação com variáveis de fundamento. Para os dados trimestrais, foram adicionadas variáveis de demonstração de resultados dos ativos analisados. Uma análise a ser destacada na pesquisa se refere aos efeitos marginais de cada variável sobre a capacidade preditiva dos modelos mensais. A Figura 5 relata o grau de importância das 5 principais características do retorno de cada ativo utilizando a base completa trimestral.

Em relação à figura 5, observamos que a estrutura em relação aos efeitos marginais sofreram modificações quando comparadas à frequência diária e mensal para análise dos

Figura 5 – Análise Trimestral de Efeitos Marginais Por Ativo.

Fonte: Elaborada pelos autores.

ativos individuais, onde ressaltamos maior efeito marginal de variáveis de resultado e caráter de precificação utilizadas pelo mercado financeiro. Em relação à variável Índice IBOVESPA, notamos um grande efeito de variáveis de Índices externos como: S&P500 e Índice Industrial Dow Jones, sendo tal fator extremamente esperado dado o grau de conectividade e dependência dos mercados. Ainda quanto ao IBOVESPA, uma associação importante e amplamente explorada no mercado e na literatura é o efeito marginal da taxa de câmbio Real/Dólar, CDI e taxa de juros de longo prazo (TJLP). Em relação a

taxa de câmbio Real/Dólar mencionamos o efeito das taxas de câmbio reais e bilaterais em relação aos principais parceiros comerciais e em relação a uma medida de paridade do poder de compra. Contudo o maior efeito marginal é realizado pelo IBOVESPA e CDI. Em relação ao CDI, conferimos destaque as taxas de câmbio reais e bilaterais em relação aos principais parceiros comerciais, IBOVESPA, taxa de câmbio Real/Dólar e as reservas internacionais. Em relação as ações, notamos que as variáveis Índice IBOVESPA e taxa de câmbio Real/Dólar contém grande efeito marginal, tal efeito não foi observado anteriormente quando analisamos o conjunto de dados diário e mensal, mas já era esperado nas demais frequências.

Como última frequência estudada na dissertação, apresentamos os resultados dos 53 modelos desenvolvidos para a frequência anual. Utilizando do mesmo critério comparativo entre os modelos em diferentes frequências, comparamos os resultados médios do conjunto de modelos estimados com a matriz de covariâncias amostrais que possui um R^2_{oos} de aproximadamente 13%, enquanto as matrizes de covariâncias de longo prazo de [Andrews \(1991\)](#) e [Kiefer e Vogelsang \(2005\)](#), respectivamente, apresentam um R^2_{oos} de 19% e 14%. Realizando o agrupamento dos modelos em relação a métodos de penalização no VAR, métodos de pré-seleção anteriormente ao PCA, métodos de SPCA, FAVAR, métodos Bayesianos e métodos de PLS, encontramos, respectivamente, os seguintes percentuais para R^2_{oos} : 13,5%, 11,2%, 13,1%, 15,3%, 13,2% e 9,76%. Desta forma, para os modelos preditivos mensais, notamos que a matriz de covariâncias de Andrews (1991) e métodos de pré-seleção anteriormente ao PCA produzem um maior R^2_{oos} , resultado similar ao encontrado para os modelos mensais e diários. Com objetivo de tornar mais clara a análise, apresentamos apenas os quatro modelos com maior R^2_{oos} . Na [tabela 7](#) podemos observar os principais resultados:

Tabela 7 – Resultados dos modelos anuais.

Modelo:	Número de Fatores Bai e Ng (2002)	Número de variáveis não zero Kristensen (2017)	% da Variação Explicada	R^2 Ajustado Médio	R_{oos}^2 em T_f
S-FAVAR-E-KV	1	-	0.73	0.43	0.26
VAR-SHL	-	-	-	0.36	0.19
FAVAR-BC-A	3	-	0.81	0.31	0.18
BVAR-M	-	-	-	0.24	0.20
MS-SPCA-A	5	14	0.93	0.21	0.17

Fonte: Elaborada pelos autores.

Como podemos notar, os resultados encontrados pelos modelos anuais possuem baixo poder preditivo, como observamos um R_{oos}^2 baixo em relação aos modelos anteriores. Tal valor ainda foi inflado devido a um ambiente previsível pequeno $T_f = 2$. Contudo, ainda podemos notar ainda que os modelos seguiram padrões até então encontrados em relação ao conjunto de preditores e matrizes de covariâncias. Em relação aos efeitos marginais, tal análise não se mostrou válida devido ao pequeno tamanho de amostra de previsão e ao pequeno efeito marginal de cada variável dentro do modelo, onde muitas vezes o maior efeito marginal é gerado pela própria variável defasada.

Por conseguinte, enceramos a apresentação dos modelos estimados, resultados e efeitos marginais. No total apresentamos resultados de 212 modelos e 630 séries de tempo. Desse capítulo podemos levar alguns resultados:

(I). Os métodos de estimação das matrizes de covariâncias de longo prazo de [Andrews \(1991\)](#) e [Kiefer e Vogelsang \(2005\)](#) apresentam resultados superiores a matriz de covariâncias amostral, considerando a capacidade preditiva como também em relação ao critério informacional mínimo. Em três frequências a matriz de covariâncias de [Andrews \(1991\)](#) apresentou resultados superiores as demais, e apenas na frequência trimestral a matriz de [Kiefer e Vogelsang \(2005\)](#) se mostrou superior na capacidade preditiva. Tal resultado foi uma das principais contribuições da dissertação para literatura de previsões e modelos de Machine Learning Lineares.

(II). A transformação na matriz de covariâncias em conjunto com a condição de não arbitragem para previsão proposta na pesquisa atuou na redução do ruído informacional (*Martingale* imprevisível), presente nas séries de retornos de ativos. Tal extensão à literatura de finanças empírica significa uma adequação dos modelos de previsão a um fato crucial na teoria de finanças teórica.

(III). Os modelos propostos como extensões possuem resultados muitas vezes superiores aos modelos já estudados na literatura, mas tais resultados não se mostraram consistentes ao longo do tempo para um determinado modelo em específico. Se aumentarmos a comparação dos modelos para uma análise por classe de modelos, como divididos a seguir (métodos de penalização no VAR, métodos de pré-seleção anteriormente ao PCA, métodos de SPCA, FAVAR, métodos Bayesianos e métodos de PLS), encontramos que, nas quatro frequências na média dos modelos, os melhores resultados foram observados em modelos com métodos de pré-seleção anteriormente ao PCA. Tais métodos aplicados a finanças podem ser vistos como uma extensão de propriedade da pesquisa.

(IV). A capacidade preditiva dos modelos desenvolvidos na pesquisa, quando comparada às demais pesquisas contemporâneas existentes, apresentaram resultados similares ou superiores. No entanto, ressaltamos que está é a única pesquisa de aplicação de precificação de ativos via métodos lineares e paramétricos de Machine Learning focada em previsão para o mercado brasileiro.

(V). O diferencial da pesquisa em desenvolver um fator de desconto estocástico específico para cada ativo analisado, além de gerar resultados superiores aos modelos que consideraram um único fator de desconto estocástico para todos ativos, ainda atuou no caminho para o desenvolvimento de uma taxa interna de retorno dinâmica para cada ativo analisado. Tal modificação foi considerada pelos autores o principal componente da pesquisa, pois o acréscimo de capacidade preditiva avaliando pelo R_{os}^2 chega a ser superior a 50%.

Nas próximas duas seções realizamos aplicações das previsões estimadas nesse capítulo com objetivo de mostrar a capacidade preditiva e capacidade de desenvolvimento de estratégias com resultados persistentes ao longo do tempo. No capítulo 4 desenvolvemos uma metodologia inovadora na literatura de estruturas a termo para o retorno em excesso esperado para um conjunto de ativos e para o ativo livre de risco (CDI). No capítulo 5 utilizamos do arcabouço teórico apresentado no capítulo 2 sobre alocação de carteiras (modificamos o modelo de Black-Litterman na seção 2.7) para utilização de nossas previsões como prioris e posteriores e comparamos a um conjunto de benchmark presentes no ambiente

financeiro.

3 Aplicação:Desenvolvimento da Estrutura a Termo do Retorno Esperado

A estrutura a termo do retorno esperado representa graficamente a taxa de retorno de determinado ativo em diferentes períodos a frente, i.e, a previsão do retorno acumulado para o ativo em diferentes horizontes. Para o processo de desenvolvimento da estrutura a termo do retorno esperado, a metodologia embarcada possuiu como objetivo a simplicidade de métodos, visando uma maior abrangência em sua aplicação. Assim, inicialmente após a seleção dos modelos a serem utilizados através da metodologia R_{oos}^2 dentro da amostra de validação, como destacado em cada uma das frequências na seção anterior, realizamos a estimação de 212 modelos, englobando o total da amostra disponível para etapa de estimação do modelo e incluindo dados até 31 de dezembro de 2015 com o objetivo de previsão até 31 de dezembro de 2017. Para facilitar a apresentação dos melhores modelos dentro da amostra de validação, propomos na tabela 8 um resumo dos modelos selecionados:

Tabela 8 – Resumo dos modelos selecionados.

Modelo:	Modelo Diário	Modelo Mensal	Modelo Trimestral	Modelo Anual
Índice IBOVESPA	S-FAVAR-E	FAVAR-BG	FAVAR-BG-A	MS-SPCA-BE-A
Taxa de Câmbio Real/Dólar	S-FAVAR-E	FAVAR-BG-A	MS-SPCA-BE	MS-SPCA-KV
CDI	S-FAVAR-R-A	FAVAR-BG	MS-SPCA-A	CL
ABEV3.SA	MS-SPCA-BE	FAVAR-BC-KV	S-FAVAR-adaL-A	FAVAR-BC-KV
CMIG4.SA	S-FAVAR-R	S-FAVAR-L	S-FAVAR-E-A	MS-SPCA-BE-KV
ITUB4.SA	S-FAVAR-L	S-FAVAR-adaL-KV	OS-SPCA-KV	FAVAR-BG+BE-KV
PETR4.SA	FAVAR-BG	S-FAVAR-E	OS-SPCA-A	MS-SPCA-BC-A
VALE3.SA	FAVAR-BG	S-FAVAR-adaL-A	S-FAVAR-E-A	OS-SPCA-A

Fonte: Elaborada pelos autores.

Analisando os melhores modelos encontrados utilizando o critério de R_{oos}^2 dentro da amostra de validação, podemos notar que não existe um melhor modelo a frente dos demais. Porém, é possível considerarmos que modelos com a correção da matriz de covariâncias possuem uma melhor capacidade preditiva dada a amostra de validação. Com objetivo de apresentar de maneira simples e rápida a divisão da amostra realizada, e o horizonte de previsão selecionado para cada uma das frequências, apresentamos a próxima tabela:

Tabela 9 – Horizonte de previsão.

	Amostra de Estimação T_e	Amostra de Validação T_v	Amostra de Teste T_f
Modelo Diário	864	248	15
Modelo Mensal	132	24	12
Modelo Trimestral	68	8	8
Modelo Anual	18	2	0

Fonte: Elaborada pelos autores.

Seguindo para o objetivo da aplicação, consideramos as 15 primeiras previsões dos modelos diários, 12 primeiras previsões para dos modelos mensais e as 4 últimas previsões dos modelos trimestrais para o desenvolvimento da estrutura a termo dos retornos dos ativos propostos. A escolha de tamanho da amostra de teste, T_f , para cada frequência, decorre da observação dos resultados encontrados na seção de estimação dentro da amostra de validação (T_v), onde analisamos para cada frequência de previsão qual obteve o menor RMSE de previsão, i.e, e analisamos também qual o horizonte de previsão h que leva os modelos a apresentarem o menor RMSE. Tal método é utilizado devido a falta de alternativas para seleção de melhor horizonte de previsão h . Para cada frequência no tempo utilizamos o critério apresentado para encontrar o melhor h em conjunto com os melhores modelos. Logo, para cada frequência de previsão encontramos o melhor modelo j para h passos a frente. Ressaltamos que o método adotado possui elevado custo computacional. Com carácter excepcional, notamos que a estimação da frequência temporal mensal foi superior a frequência trimestral para previsão do primeiro ano dentro da amostra de validação, assim, vamos apenas utilizar as previsões trimestrais de $t + 5$ até $t + 8$. Em relação aos modelos anuais, notamos que a capacidade preditiva dos modelos é deveras reduzida, de forma que não utilizamos seu conjunto informacional para o desenvolvimento das estruturas a termo.

Utilizando a estrutura de dados imposta anteriormente, temos um ambiente de previsão de 01 de janeiro de 2016 até 31 de dezembro de 2017, sendo esse nosso período previsto da estrutura a termo. Objetivando uma maior inclusão de informação dentro das estruturas a termo previstas, realizamos o processo de extrapolação de vértices da curva a termo, baseado em modelos de nível locais, como apresentado no capítulo 2, de

forma a obter um total de 481 passos as frentes condicionadas em $t = 31 - 12 - 2015$ para nossas estruturas a termo. É importante ressaltar que tal método não modifica a estrutura da curva, apenas tem o objetivo de facilitar a interpretação e fornece um melhor critério de análise para cada vértice presente na curva. Para facilitar a compreensão do modelo adotado, exemplificamos a aplicação para o Índice IBOVESPA: utilizando o modelo S-FAVAR-E para realizar a previsão diária dado os 15 passos a frente ($t + 1$) até $t + 15$). Para as previsões mensais utilizamos o modelo FAVAR-BG para os vértices: $t + 21$, $t + 42$, $t + 63$, $t + 84$, $t + 105$, $t + 126$, $t + 147$, $t + 168$, $t + 189$, $t + 210$, $t + 232$ e $t + 252$, para as previsões trimestrais utilizamos o modelo FAVAR-BG-A para os vértices $t + 315$, $t + 387$, $t + 441$ e $t + 482$. Os demais vértices existentes na estrutura a termo são preenchidos via modelo de nível local, estimado via filtro de Kalman. A seguir podemos observar os resultados encontrados para cada uma das estruturas a termo do retorno esperado para os ativos selecionado:

Figura 6 – Estrutura a termo do retorno esperado: Índice IBOVESPA.

Fonte: Elaborada pelos autores e Economatica.

A linha azul apresenta o acumulado realizado pelo Índice IBOVESPA no período analisado e a linha em vermelho é a estrutura a termo do retorno esperado estimada na dissertação para o Índice IBOVESPA.

Figura 7 – Estrutura a termo do retorno esperado: Taxa de Câmbio Real/Dólar.

Fonte: Elaborada pelos autores e Economatica.

A linha azul apresenta o acumulado realizado pela Taxa de Câmbio Real/Dólar no período analisado e a linha em vermelho é a estrutura a termo do retorno esperado estimada na dissertação para a Taxa de Câmbio Real/Dólar.

Figura 8 – Estrutura a termo do retorno esperado: Taxa CDI.

Fonte: Elaborada pelos autores e Economatica.

A linha azul apresenta o acumulado realizado pela Taxa CDI no período analisado e a linha em vermelho é a estrutura a termo do retorno esperado estimada na dissertação para a Taxa CDI.

Figura 9 – Estrutura a termo do retorno esperado: ABEV3.SA.

Fonte: Elaborada pelos autores e Economatica.

A linha azul apresenta o acumulado realizado pela ação ABEV3 no período analisado e a linha em vermelho é a estrutura a termo do retorno esperado estimada na dissertação para a ação ABEV3.

Figura 10 – Estrutura a termo do retorno esperado: CMIG4.SA.

Fonte: Elaborada pelos autores e Economatica.

A linha azul apresenta o acumulado realizado pela ação CMIG4 no período analisado e a linha em vermelho é a estrutura a termo do retorno esperado estimada na dissertação para a ação CMIG4.

Figura 11 – Estrutura a termo do retorno esperado: ITUB4.SA.

Fonte: Elaborada pelos autores e Economatica.

A linha azul apresenta o acumulado realizado pela ação ITUB4 no período analisado e a linha em vermelho é a estrutura a termo do retorno esperado estimada na dissertação para a ação ITUB4.

Figura 12 – Estrutura a termo do retorno esperado: PETR4.SA.

Fonte: Elaborada pelos autores e Economatica.

A linha azul apresenta o acumulado realizado pela ação PETR4 no período analisado e a linha em vermelho é a estrutura a termo do retorno esperado estimada na dissertação para a ação PETR4.

Figura 13 – Estrutura a termo do retorno esperado: VALE3.SA.

Fonte: Elaborada pelos autores e Economatica.

A linha azul apresenta o acumulado realizado pela ação VALE3 no período analisado e a linha em vermelho é a estrutura a termo do retorno esperado estimada na dissertação para a ação VALE3.

Observando os resultados encontrados via as figuras 6,8,9,10,11,12 e 13 podemos notar a elevada capacidade preditiva dos modelos selecionados. Contudo, devido ao não ajuste das previsões ao longo do tempo, previsão condicionada em $t = 31 - 12 - 2015$, e grandes modificações nos fundamentos não foram capturadas pelos modelos preditivos. Essa característica comentada pode ser vista na previsão para a taxa de câmbio Real/Dólar (Figura 7), onde o erro de previsão continua persistente. A seguir apresentamos uma figura com os resultados encontrados para o R^2_{oos} do retorno acumulado para os ativos analisados, ressaltando que os valores encontrados são superestimados devido à magnitude da utilização dos resultados acumulados para cada ativo.

Figura 14 – Avaliação da Capacidade Preditiva Para o Retorno Acumulado por Ativo.

Legenda: R^2_{oot} em Azul

Fonte: Elaborada pelos autores.

A figura 13 nos permitiu analisar a capacidade preditiva dos modelos selecionados e do modelo proposto para construção da estrutura a termo do retorno, para o grupo selecionado de ativos. Notamos que em muitos casos a estrutura desenvolvida não segue de fato o *momentum* dos retornos apresentados pelos ativos. A estrutura desenvolvida em alguns casos pode ser vista como uma tendência dos retornos esperados. Como resultado médio para R^2_{oot} encontramos um total de 68,7%, um percentual extremamente elevado quando comparado aos resultados encontrado na literatura (Fama e French (2008), Kojien e Nieuwerburgh (2011) e Rapach e Zhou (2013) , contudo novamente ressaltamos o problema com a métrica do R^2_{oot} . Uma análise realizada de forma adicional na pesquisa foi a construção de um nova série de dados feita através das diferenças encontradas entre as estruturas previstas e o retorno acumulado realizado. Em relação a esta nova série foram realizados testes para analisar se a mesma seria um ruído branco. Como resultados, encontramos que todas as séries construídas independentemente dos ativos analisado podem ser consideradas ruídos brancos, o teste utilizado foi de Nason e Savchev (2014), no qual testamos se a séries era um ruído branco utilizando *wavelets*.

Podemos notar um excelente caminho para exploração destes modelos na literatura,

estes resultados serão melhores analisados em trabalhos posteriores pelos autores.

4 Aplicação: Alocação de Portfólios Via Extensão do Modelo Black e Litterman

Retornando ao capítulo 2, em especial a seção 2.7, podemos relembrar da extensão proposta ao modelo de alocação de portfólio de Black e Litterman. Neste capítulo ressaltamos as principais variáveis de entrada para a construção do modelo proposto e os resultados encontrados. Com intuito de realizar uma breve revisão da extensão proposta, dividimos o conjunto informacional em dois grupos: *priori* e *posterior*.

Em relação à *priori*, a metodologia de Black e Litterman inclui as variáveis que propõem o equilíbrio de mercado ao longo do tempo para o retorno e para o relacionamento entre os ativos (matriz de covariâncias). Muitas metodologias são propostas na literatura, como utilização da média histórica, médias móveis, modelos CAPM, modelos FF, entre outros para a *priori* dos retornos. Em relação às modificações propostas para a matriz de covariâncias, as propostas existentes na literatura são extremamente abrangentes, por exemplo: utilização de matrizes de covariâncias de longo prazo, utilização de modelos para redução da dimensionalidade, modelos volatilidade estocástica, família ARCH e GARCH, entre outros. Contudo, não observamos nenhum modelo que obteve maior destaque ou resultados constantes de superioridade em relação aos demais, tanto para o retorno quanto para a matriz de covariâncias. Deste modo, a extensão proposta nesta pesquisa foi introduzir na literatura existente um novo modelo que permita através das previsões alcançadas com a pesquisa, extrair lucros extraordinários.

Como variável do retorno de equilíbrio do mercado no qual denominamos informação *priori* sobre o retorno, utilizamos a previsão mensal desagregada para retorno diário, $r_{i,t+1}^{\hat{M}}$. Para escolhermos qual previsão entre os 53 modelos propostos, consideramos o critério de selecionar o modelo preditivo que obteve o maior R_{oos}^2 analisando as 6 previsões anteriores a previsão de $R_{i,t+1}^{\hat{M}}$, i.e, utilizamos como amostra de validação os 6 últimos meses previstos de cada modelo. É extremamente importante ressaltar que todas as previsões analisas

na amostra de validação e para $r_{i,t+1}^{\hat{M}}$ foram sempre condicionadas em t , assim sempre utilizamos dos dados com uma defasagem temporal em nossos modelos de previsão. O racional por trás da utilização da previsão de retorno desagregada mensal como variável priori, para o retorno de equilíbrio, atua em conjunto com a hipótese de que o retorno de um ativo é composto por dois fatores: o fator de desconto estocástico e um ruído informacional (não previsível). Utilizando do retorno desagregado mensal, buscamos uma alternativa, de equilíbrio para a previsão do retorno diário contaminado com ruído informacional. Adiante, explicamos como a posteriori adotada também atua na tentativa de redução do ruído informacional.

Como matriz de covariâncias, introduzimos como priori para nossa extensão de modelo de alocação de portfólio um conjunto de possibilidades, sendo essas: matriz de covariâncias amostral (CA), matriz de covariâncias de longo prazo de [Andrews \(1991\)](#) (A), matriz de covariâncias de longo prazo de [Kiefer e Vogelsang \(2005\)](#) (KV) e matriz de covariâncias estimadas via modelo fatorial de volatilidade estocástica baseado no artigo de [Trucíos, Hotta e Pereira \(2019\)](#) (FVE) . Desta forma, desenvolvemos para cada formato de matriz de covariâncias um resultado final do nosso modelo. Deixar tal critério amplo advém da tentativa de tentar capturar diferentes formulações e resultados para a pesquisa. Ainda em relação às priores do modelo proposto foi necessário a inclusão da variável de confiança (certeza) sobre os dados adicionados. Observando a literatura existente, utilizamos como variável de certeza o inverso do erro quadrático médio (RMSE) do modelo selecionado para a previsão do retorno de equilíbrio do mercado no período dos 6 últimos meses previstos pelo modelo.

Em relação a posteriori (visão do analista), aqui expressa pela matriz I , não consideramos o relacionamento entre os ativos analisados, apenas introduzimos na matriz as informações sobre a previsão do retorno esperado para $t + 1$, $r_{i,t+1}^{\hat{}}$, acrescentando a informação da certeza em relação a previsão utilizada. Mantendo a mesma metodologia utilizada para o desenvolvimento da priori, para a posteriori utilizamos a previsão do retorno diário desenvolvida pelo melhor modelo diário escolhido, ou seja, o maior R_{oos}^2 nas 21 previsões anteriormente estimadas. A posteriori em nossos modelos tem como objetivo introduzir

uma informação adicional sobre a previsão diária considerando o amplo ruído informacional existente, i.e, uma possível correção as distorções sobre a informação da variável posterior. Podemos notar que todas variáveis utilizadas nessa extensão do modelo BL foram retiradas do conjunto informacional, gerados pelas previsões desenvolvidas na pesquisa que forneceu um arcabouço informacional completo. Com intuito de levar mais informações aos leitores, a seguir apresentamos as médias da confiança em relação as priores e posteriores por ativo analisado.

Tabela 10 – Médias da confiança em relação as priores e posteriores por ativo analisado.

Variável	τ da Priori (Previsão Mensal)	τ da Posteriori (Previsão Diária)
Índice IBOVESPA	48,73%	34,77%
Taxa de Câmbio Real/Dólar	56,47%	36,38%
CDI	100,00%*	100,00%*
ABEV3.SA	56,70%	66,69%
CMIG4.SA	32,20%	25,13%
ITUB4.SA	49,77%	32,84%
PETR4.SA	47,31%	22,58%
VALE3.SA	39,44%	20,25%

Fonte: Elaborada pelos autores.

* indica que o nível de confiança encontrado foi superior a 100%, desta forma para manter a racionalidade do modelo travamos o valor máximo em 100%.

Em relação às carteiras desenvolvidas, dividimos a apresentação em dois grupos, o primeiro grupo foi formado por carteiras compostas apenas pelas ações presentes na pesquisa (ABEV3.SA, CMIG4.SA, ITUB4.SA, PETR4.SA e VALE3.SA). A única estratégia adotada foi a compra (*Long-Only*), e a carteira possui rebalanceamento diário, i.e, compramos o ativo na abertura e vendemos no fechamento do mesmo dia. Dada a característica anterior o custo de transação existente considerando custo de negociação e liquidação é de 0,024105% por operação. Assim, a cada dia foi introduzida um nova informação posteriori ($r_{i,t+1}$) e a cada mês foi introduzida um nova priori ($r_{i,t+1}^{\hat{M}}$), como também as informações referentes ao grau de certeza foram atualizadas na mesma frequência. Em relação este conjunto de ativos, comparamos os resultados com três benchmark, o primeiro foi em relação ao Índice IBOVESPA (Índice IBOVESPA), o segundo foi um índice construído através da média simples entre os ativos (20% em ABEV3.SA, 20% em CMIG4.SA, 20% em ITUB4.SA, 20% em PETR4.SA e 20% em VALE3.SA), CR-PL. O terceiro benchmark foi um índice construído através da participação no Índice IBOVESPA de cada ativo

(no total a soma da participação dos ativos no Índice IBOVESPA em 02/01/2016 foi de 34%), CR-PI. Desta forma, os resultados apresentados a seguir são referentes ao conjunto de posições compradas com rebalanceamento diário no conjunto de ativos ABEV3.SA, CMIG4.SA, ITUB4.SA, PETR4.SA e VALE3.SA (doravante denominada carteira reduzida (CR)), de 02/01/2016 até 31/12/2017 (total de 482 dias de negociação).

Figura 15 – Retorno Acumulado Carteiras Reduzidas.

Fonte: Elaborada pelos autores e Economatica.

Onde CR-PRIORI-CV foi a carteira reduzida estimada utilizando apenas da informação da priori com matriz de covariâncias amostral. CR-POST-CV, foi a carteira reduzida estimada utilizando a combinação via BL da informação da priori e da posteriori com matriz de covariâncias amostral. As demais carteiras reduzidas desenvolvem modificações na estimação da matriz de covariâncias, sendo CR-PRIORI-A e CR-POST-A para a matriz de covariâncias de longo prazo de [Andrews \(1991\)](#), e CR-PRIORI-KV e CR-POST-KV para a matriz de covariâncias de longo prazo de [Kiefer e Vogelsang \(2005\)](#) e CR-PRIORI-FVE e CR-POST-FVE para a matriz de covariâncias via modelo fatorial de volatilidade estocástica. Como podemos notar, entre os oito modelos propostos e desenvolvidos na dissertação apenas um CR-POST-KV não apresentou um resultado superior aos *benchmarks* utilizados como critério comparativo na pesquisa. A seguir apresentamos a tabela 11 que compara os

principais resultados encontrados no conjunto de modelos.

Tabela 11 – Principais resultados encontrados.

Modelos de Carteira Reduzida	Índice Sharpe	Retorno Médio Mensal	Desvio Padrão Mensal	Retorno Acumulado
CR-PRIORI-CV	1,3096	4,01%	0,1076	157,07%
CR-POST-CV	1,1427	2,91%	0,07501	99,41%
CR-PRIORI-A	1,0936	3,61%	0,1099	134,61%
CR-POST-A	1,0950	3,62%	0,1100	134,93%
CR-PRIORI-KV	1,0931	3,61%	0,1099	134,53%
CR-POST-KV	1,0891	3,60%	0,1100	134,18%
CR-PRIORI-FVE	0,9537	3,27%	0,1082	116,95%
CR-POST-KV	0,4749	1,76%	0,0715	52,01%
CR-PI	0,5773	2,27%	0,0971	71,46%
CR-PL	0,5170	1,85%	0,0734	55,44%
Índice IBOVESPA	0,8077	2,15%	0,0629	66,76%

Fonte: Elaborada pelos autores.

Analisando os resultados anteriores, notamos o elevado potencial presente nos modelos desenvolvidos na pesquisa, mesmo considerando a presença de uma carteira reduzida formada por apenas cinco ativos. Comparando os resultados encontrados, observamos que o melhor resultado encontrado foi atingido pelo CR-PRIORI-CV, onde o retorno acumulado no período foi de 157,07% com um índice Sharpe de 1,3096. Um ponto importante a ser ressaltado advém do resultado encontrado, onde as carteiras nas quais apenas utilizamos a priori apresentaram um resultado em todos os casos superiores as carteiras com a mesclas entre informações priori e posterior. Tal resultado foi ao encontro diretamente com a proposta da dissertação de utilizar uma informação que esteja exposta a um menor ruído informacional. Desta forma, a informação que obteve resultado superior foi a utilização da previsão mensal desagregada para retorno diário, $r_{i,t+1}^{\hat{M}}$, em relação a previsão do retorno esperado para $t + 1$, $r_{i,t+1}$. Um destaque adicional encontrado na pesquisa ocorre quando utilizamos as matrizes de covariâncias de longo prazo de [Andrews \(1991\)](#) e [Kiefer e Vogelsang \(2005\)](#), podemos notar que os resultados utilizando tanto informações da priori quando da priori em conjunto com a posterior apresentaram resultados extremamente semelhantes. Esse resultado, demonstra que as matrizes de longo prazo atuam na redução do ruído informacional realizando uma uniformização entre os conjuntos informacionais.

O segundo grupo foi formado por carteiras compostas pelas ações presentes na pesquisa (ABEV3.SA, CMIG4.SA, ITUB4.SA, PETR4.SA e VALE3.SA) e pelos ativos: Índice IBOVESPA, taxa de câmbio Real/Dólar e CDI. As estratégias adotadas foram as

de compra (*Long-Only*) e carteiras *Long-Short*. As carteiras possuem rebalanceamento diário, i.e, compramos o ativo na abertura e vendemos no fechamento do mesmo dia, o mesmo processo foi realizado para de venda (operações *Short*). Dada a característica anterior o custo de transação existente considerando custo de negociação e liquidação é de 0,024105% por operação. Em relação as variáveis utilizadas nos modelos de alocação de portfólio, as mesmas seguem exatamente os procedimentos adotados no primeiro grupo de carteiras propostas anteriormente. Em relação as estratégias de investimentos denominadas *Long-Short* seguimos a tradição no mercado de fundos *Long-Short*, com um total 100% alocado em CDI, 30% em na carteira *Long* e 30% em na carteira *Short*. Lembramos que todo dia as posições tomadas foram encerradas no final do mesmo dia. Como critério comparativo utilizamos o Índice IBOVESPA. Uma outra escolha natural poderia ser a utilização de fundos consagrados de mercado. Contudo, não foi interesse da pesquisa tal comparação devido a possibilidade limitada de ativos negociados no modelo proposto.

Figura 16 – Retorno Acumulado Carteiras Completas

Fonte: Elaborada pelos autores e Economatica.

Onde CC-PRIORI, é a carteira completa estimada utilizando apenas da informação da priori com matriz de covariâncias amostral; CC-POST é a carteira completa estimada utilizando a combinação via BL da informação da priori e da posteriori. Temos que CC-

PRIORI-R é a carteira restrita onde delimitamos o tamanho de cada ativos em 20% e o somatório total de ações em 67% para controle de risco e exposição da carteira ao mercado. CC-POST-R, segue o mesmo processo da carteira restrita, utilizando a combinação via BL da informação da priori e da posteriori. A carteira CLS-PRIORI é a carteira *Long-Short* utilizando apenas da informação da priori com matriz de covariâncias amostral, e CLS-POST é a carteira *Long-Short* utilizando a combinação via BL da informação priori e da posteriori. Em relação às matrizes de covariâncias, para não estender muito a pesquisa, acabamos adotando uma janela rolante com uma matriz de covariâncias amostral, a janela é de 512 observações. Como podemos notar, entre os seis modelos propostos e desenvolvidos na dissertação com esse conjunto de ativos, temos que as duas carteiras completas sem restrição obtiveram um resultado superior ao benchmark. Em relação as carteiras restritas devido à restrição os resultados apresentados foram inferiores ao *benchmark*, contudo obtiveram um melhor resultado em relação a volatilidade. Em relação as carteiras *Long-Short* notamos que os resultados são elevados e controlam o risco no formato de longo prazo. A seguir apresentamos uma tabela (tabela 12) comparativa para com os principais resultados encontrados no conjunto de carteiras.

Tabela 12 – Principais resultados encontrados nas carteiras completas .

Modelos de Carteira Reduzida	Índice Sharpe	Retorno Médio Mensal	Desvio Padrão Mensal	Retorno Acumulado
CC-PRIORI	1,003	3,54%	0,2618	130,56%
CC-POST	0,589	2,30%	0,2368	72,89%
CC-PRIORI-R	0,398	1,61%	0,1755	46,85%
CC-POST-R	0,575	2,05%	0,1981	62,83%
CLS-PRIORI	0,739	1,35%	0,0603	38,26%
CLS-POST	3,030	2,26%	0,0445	71,21%
Índice IBOVESPA	0,8077	2,15%	0,0629	66,76%

Fonte: Elaborada pelos autores.

Observando os resultados apresentados anteriormente, continuamos animados com o potencial de retornos encontrados nos modelos estudados, mesmo considerando a presença de uma carteira reduzida em relação ao número de ativos incluídos. Comparando os resultados encontrados, podemos notar que o melhor resultado encontrado foi atingido pelo CC-PRIORI, onde o retorno acumulado no período foi de 130,56%, com um índice Sharpe de 1,003. Entretanto, quando consideramos o critério índice de Sharpe, a carteira CLS-POST apresentou um resultado (3,030) extremamente elevado comparado as demais carteiras.

Tal resultado já esperado para um carteira *Long-Short*, em que o objetivo postulado é estar dinheiro-neutro ao mercado e ter uma redução considerável na volatilidade, dado o resultado final comprado e vendido da carteira. Ainda em relação as carteiras *Long-Short*, notamos que o resultado superior foi apresentado pelas carteiras com a mescla entre informações priori e posterior. Na visão dos autores, tal fato advém que a informação incluída em $r_{i,t+1}^{\hat{M}}$ possui maior poder preditivo em relação ao ruído, dado sua maior frequência. Portanto, uma carteira de combinações de compra e venda tende a apresentar maior retorno. Os resultados das demais carteiras seguem o padrão apresentado pelos modelos de carteiras reduzidas. A informação que obteve resultado superior foi a utilização da previsão mensal desagregada para retorno diário, $r_{i,t+1}^{\hat{M}}$, em relação à previsão do retorno esperado para $t + 1$, $r_{i,t+1}$.

Os resultados encontrados nesta aplicação são extremamente motivadores e abrem um novo caminho para modelos de combinação de precificação de ativos e alocação de carteiras. O modelo de alocação de portfólios de BL teve um bom ajuste às premissas e variáveis utilizadas no modelo cumprindo de forma correta sua tarefa.

5 Conclusão

Propomos uma nova maneira de estimar modelos de precificação de ativos para previsão de retornos individuais de ações que podem tirar proveito da grande quantidade de informações existentes. Para esse propósito, utilizamos de um extenso arcabouço de modelos de Machine Learning linear, composto por modelos de pré-seleção, PCA, PLS, VAR, BVAR, combinação entre métodos de pré-seleção com PCA e SPCA. Nossa inovação crucial é a inclusão de uma condição de não arbitragem como parte dos algoritmos de precificações de ativos para modelos de Machine Learning linear e paramétricos. Estimamos os fatores de desconto estocástico comuns entre os ativos e características específicas que explicam os retornos das ações dada as restrições de momento condicional implícitas pela não arbitragem. Nosso FDS é um portfólio de todas as séries temporais com pesos variados no tempo, que são funções gerais das variáveis observáveis e não observáveis específicas da empresa, macroeconômicas e microeconômicas. Nosso modelo nos permitiu entender quais são os principais fatores que impulsionam os preços dos ativos, identificam a precificação incorreta das ações e geram um portfólio eficiente. Nosso trabalho se posiciona de forma contemporânea as principais pesquisas da área de precificação de ativos em alta dimensão, por exemplo [Fama e French \(2015\)](#), [Lettau e Pelger \(2018\)](#), [Kozak, Nagel e Santosh \(2018\)](#), [Gu, Kelly e Xiu \(2018\)](#) e [Chen, Pelger e Zhu \(2019\)](#).

Foram sete as nossas principais conclusões. Primeiro, reforçamos o potencial de ML, no processo de precificação de ativos, em linha com os trabalhos de [Gu, Kelly e Xiu \(2018\)](#) e . Os modelos desenvolvidos foram capazes de identificar os principais fatores que impulsionam os retornos dos ativos e a forma funcional dessa relação em um nível de generalidade e com uma precisão que não era possível com os métodos econométricos tradicionais. Segundo, incluímos uma condição de não arbitragem na estimativa dos modelos de precificação de ativos de Machine Learning que geraram resultados preditivos elevados. A condição de não arbitragem mesmo que simples gera resultados relevantes a literatura de predição e precificação de ativos. Desta forma, mencionamos a conclusão de [Chen, Pelger](#)

e Zhu (2019) que um uso bem-sucedido dos métodos de Machine Learning em finanças requer conhecimento específico sobre o assunto e uma implementação técnica de última geração. Terceiro, os dados financeiros têm uma dimensão temporal que deve ser levada em consideração de acordo com ativo analisado, a utilização de diferentes frequências temporais na pesquisa permitiu expor com consistência tal resultado. Concluimos que os melhores preditivos para retornos diários não são os melhores preditores para retorno mensal, trimestral ou anual. Nossos resultados têm benefícios práticos diretos para pesquisadores de precificação de ativos que vão além de nossas descobertas empíricas. Primeiro, fornecemos um novo conjunto de variáveis de teste de referência para pesquisas no mercado de ativos Brasileiro, como também referências para futuras pesquisas em critérios comparativos. Esses ativos de teste incorporaram as informações de todas as características e informações macroeconômicas em um pequeno número de fatores. Segundo, forcemos a literatura um conjunto de novos modelos para o desenvolvimento de modelos de SPCA, utilizando métodos de pré-seleção antes do PCA, que apresentou resultados superiores aos demais modelos. Terceiro, em nossas aplicações forcemos a literatura de estruturas a termo do excesso de retorno esperado e modelos de alocação de portfólios de Black-Litterman extensões valiosas e com bons resultados empíricos. Por último, mas não menos importante, nosso modelo é diretamente valioso para investidores e gestores de portfólio vide as aplicações encontradas.

Uma extensão não desenvolvida na pesquisa, contudo que foi proposta foi a introdução dentro dos 53 modelos de previsão de uma matriz covariância estimada através de um modelo fatorial de volatilidade estocástica via MCMC. Tal método não foi utilizado devido a extensiva utilização de capacidade computacional. Como já ressaltamos o processo estimar sempre em t para $t + 1$ as 892 previsões diárias, 48 previsões mensais, 16 previsões trimestrais e 4 anuais, utilizando sempre como critério de escolha minimização do RMSE e maximização do R^2_{oos} tornou o processo de estimação extremamente custoso em termos computacionais, calculamos que todas as previsões condicionais foram rodadas em 558 horas utilizando de um amplo poder computacional. Deixamos como extensões futuras o melhor desenvolvimento das aplicações presentes na pesquisa e extensão dos modelos

para demais ativos do mercado acionário brasileiro. Como objetivo dos autores iremos explorar em futuros trabalho as modificações ao longo do tempo e extração de momentos da curva em formato comparativo da estrutura a termo do retorno esperado, incorporar novas variáveis presentes nas pesquisas de [Gu, Kelly e Xiu \(2018\)](#) e [Chen, Pelger e Zhu \(2019\)](#), incluir novos modelos de Machine Learning e a expansão do número e horizonte das variáveis previstas pelos modelos.

Encerrando, acreditamos que o sucesso geral dos algoritmos de Machine Learning para previsão de retorno traz promessas para a modelagem econômica e para aspectos práticos da escolha do portfólio. Com uma melhor medição através do Machine Learning, os prêmios de risco são menos encobertos pelo erro de estimativa, portanto, o desafio de identificar mecanismos econômicos confiáveis por trás dos fenômenos de precificação de ativos se torna menos acentuados. Por fim, nossas descobertas ajudam a justificar o crescente papel do Machine Learning em toda a arquitetura da crescente indústria de fintech.

Referências

- ACHARYA, V. V.; PEDERSEN, L. H. Asset pricing with liquidity risk. *Journal of financial Economics*, Elsevier, v. 77, n. 2, p. 375–410, 2005.
- ANDREWS, D. W. Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 817–858, 1991.
- BAI, J.; NG, S. Determining the number of factors in approximate factor models. *Econometrica*, Wiley Online Library, v. 70, n. 1, p. 191–221, 2002.
- BERNANKE, B. S.; BOIVIN, J.; ELIASZ, P. Measuring the effects of monetary policy: a factor-augmented vector autoregressive (favar) approach. *The Quarterly journal of economics*, MIT Press, v. 120, n. 1, p. 387–422, 2005.
- BERNANKE, B. S.; MIHOV, I. What does the bundesbank target? *European economic review*, Elsevier, v. 41, n. 6, p. 1025–1053, 1997.
- BIANCHI, D. et al. Modeling systemic risk with markov switching graphical sur models. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 210, n. 1, p. 58–74, 2019.
- BLACK, F.; LITTERMAN, R. Global portfolio optimization, financial analysis journal. 1992.
- BOLLERSLEV, T.; CHOU, R. Y.; KRONER, K. F. Arch modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 52, n. 1-2, p. 5–59, 1992.
- CHEN, L.; PELGER, M.; ZHU, J. Deep learning in asset pricing. *Available at SSRN 3350138*, 2019.
- DAVIS, R. A.; ZANG, P.; ZHENG, T. Sparse vector autoregressive modeling. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, Taylor & Francis, v. 25, n. 4, p. 1077–1096, 2016.
- DIEBOLD, F.; MARIANO, R. Comparing predictive accuracy. *journal of business and economics statistics*, v. 13. 1995.
- DOAN, T.; LITTERMAN, R.; SIMS, C. Forecasting and conditional projection using realistic prior distributions. *Econometric reviews*, Taylor & Francis, v. 3, n. 1, p. 1–100, 1984.
- ELLIOTT, G.; ROTHENBERG, T.; STOCK, J. keffi cient tests for an autoregressive unit root, *leconometrica*. 1996.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Dissecting anomalies. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 63, n. 4, p. 1653–1678, 2008.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. A five-factor asset pricing model. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 116, n. 1, p. 1–22, 2015.
- FENG, W.; WANG, Y.; ZHANG, Z. Informed trading in the bitcoin market. *Finance Research Letters*, Elsevier, v. 26, p. 63–70, 2018.

- FREYBERGER, J.; NEUHIERL, A.; WEBER, M. Nonparametric dissection of the cross-section of expected stock returns. *NBER working paper*, v. 23227, 2017.
- GALÍ, J.; LÓPEZ-SALIDO, J. D.; VALLÉS, J. Understanding the effects of government spending on consumption. *Journal of the european economic association*, Oxford University Press, v. 5, n. 1, p. 227–270, 2007.
- GRANGER, C. W. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 424–438, 1969.
- GU, S.; KELLY, B.; XIU, D. *Empirical asset pricing via machine learning*. [S.l.], 2018.
- GU, S.; KELLY, B. T.; XIU, D. Autoencoder asset pricing models. *Available at SSRN*, 2019.
- HAMILTON, J. D.; SUSMEL, R. Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime. *Journal of econometrics*, North-Holland, v. 64, n. 1-2, p. 307–333, 1994.
- HARVEY, C. R.; LIU, Y. A census of the factor zoo. *Available at SSRN 3341728*, 2019.
- HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R.; WAINWRIGHT, M. *Statistical learning with sparsity: the lasso and generalizations*. [S.l.]: CRC press, 2015.
- HE, Z.; KELLY, B.; MANELA, A. Intermediary asset pricing: New evidence from many asset classes. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, v. 126, n. 1, p. 1–35, 2017.
- ISMAILOV, A.; ROSSI, B. Uncertainty and deviations from uncovered interest rate parity. *Journal of International Money and Finance*, Elsevier, v. 88, p. 242–259, 2018.
- JENTER, D.; LEWELLEN, K. Ceo preferences and acquisitions. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 70, n. 6, p. 2813–2852, 2015.
- KADIYALA, K. R.; KARLSSON, S. Numerical methods for estimation and inference in bayesian var-models. *Journal of Applied Econometrics*, Wiley Online Library, v. 12, n. 2, p. 99–132, 1997.
- KALMAN, R. E. et al. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. soc. mat. mexicana*, v. 5, n. 2, p. 102–119, 1960.
- KASTNER, G.; FRÜHWIRTH-SCHNATTER, S.; LOPES, H. F. Efficient bayesian inference for multivariate factor stochastic volatility models. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, Taylor & Francis, v. 26, n. 4, p. 905–917, 2017.
- KIEFER, N. M.; VOGELSANG, T. J. A new asymptotic theory for heteroskedasticity-autocorrelation robust tests. *Econometric Theory*, Cambridge University Press, v. 21, n. 6, p. 1130–1164, 2005.
- KOIJEN, R. S.; NIEUWERBURGH, S. V. Predictability of returns and cash flows. *Annu. Rev. Financ. Econ.*, Annual Reviews, v. 3, n. 1, p. 467–491, 2011.
- KOZAK, S.; NAGEL, S.; SANTOSH, S. Interpreting factor models. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 73, n. 3, p. 1183–1223, 2018.

- KRISTENSEN, D.; SALANIÉ, B. Higher-order properties of approximate estimators. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 198, n. 2, p. 189–208, 2017.
- LETTAU, M.; PELGER, M. *Factors that fit the time series and cross-section of stock returns*. [S.l.], 2018.
- LITTERMAN, R. Hot spots and hedges. *Journal of Portfolio Management*, Euromoney Institutional Investor PLC, p. 52, 1996.
- MARKOWITZ, H. The utility of wealth. *Journal of political Economy*, The University of Chicago Press, v. 60, n. 2, p. 151–158, 1952.
- MESSMER, M.; AUDRINO, F. The (adaptive) lasso in the zoo-firm characteristic selection in the cross-section of expected returns. *Available at SSRN 2930436*, 2017.
- MOL, C. D.; GIANNONE, D.; REICHLIN, L. Forecasting using a large number of predictors: Is bayesian shrinkage a valid alternative to principal components? *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 146, n. 2, p. 318–328, 2008.
- NASON, G. P.; SAVCHEV, D. White noise testing using wavelets. *Stat*, Wiley Online Library, v. 3, n. 1, p. 351–362, 2014.
- PELGER, M.; XIONG, R. Interpretable proximate factors for large dimensions. *arXiv preprint arXiv:1805.03373*, 2018.
- PRADO, M. L. D. *Advances in financial machine learning*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2018.
- RAPACH, D.; ZHOU, G. Forecasting stock returns. In: *Handbook of economic forecasting*. [S.l.]: Elsevier, 2013. v. 2, p. 328–383.
- ROBERTSON, J. C.; TALLMAN, E. W. Vector autoregressions: forecasting and reality. *Economic Review-Federal Reserve Bank of Atlanta*, Federal Reserve Bank of Atlanta, v. 84, n. 1, p. 4, 1999.
- SIMON, N. et al. A sparse-group lasso. *Journal of computational and graphical statistics*, Taylor & Francis Group, v. 22, n. 2, p. 231–245, 2013.
- SIMS, C. A. Macroeconomics and reality. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 1–48, 1980.
- SIMS, C. A. Interpreting the macroeconomic time series facts: The effects of monetary policy. *European economic review*, Elsevier, v. 36, n. 5, p. 975–1000, 1992.
- SIMS, C. A.; ZHA, T. Bayesian methods for dynamic multivariate models. *International Economic Review*, JSTOR, p. 949–968, 1998.
- TIAO, G. C.; BOX, G. E. Modeling multiple time series with applications. *journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis Group, v. 76, n. 376, p. 802–816, 1981.
- TIBSHIRANI, R. Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, Wiley Online Library, v. 58, n. 1, p. 267–288, 1996.

TRUCÍOS, C.; HOTTA, L. K.; PEREIRA, P. L. V. On the robustness of the principal volatility components. *Journal of Empirical Finance*, Elsevier, v. 52, p. 201–219, 2019.

WANG, H.; LENG, C. A note on adaptive group lasso. *Computational statistics & data analysis*, Elsevier, v. 52, n. 12, p. 5277–5286, 2008.

ZOU, H. The adaptive lasso and its oracle properties. *Journal of the American statistical association*, Taylor & Francis, v. 101, n. 476, p. 1418–1429, 2006.

6 Anexo A

Nas próximas tabelas apresentamos um resumo das séries temporais utilizadas na dissertação em diferentes frequências temporais. Para reduzir a extensão das tabelas a serem apresentadas, retiramos delas todos os fechamentos das ações participantes do índice IBOVESPA nas frequências diária, mensal, trimestral e anual, como também retiramos o índices de momentum para cada ativo presente no índice IBOVESPA nas frequências anteriormente mencionadas. Para também facilitar a apresentação das séries temporais indexamos para algumas variáveis.

Tabela 13 – Variáveis incluídas na pesquisa (1).

Código.Variável	Nome.da.Variável	Banco.de.Dados	Período	Frequência
1	MG49	(M0) base monetária média- R\$ (milhões)	BACEN	1995 - 2018
2	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Alavancagem Financ - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
3	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Alavancagem Financ - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
4	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Alavancagem Operac - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
5	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Alavancagem Operac - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
6	DG32	Aversão ao Risco	NEFIN	1995 - 2018
7	DG03	BACEN - Dólar Comercial (PTAX) Cotação de Venda (Cotações em Real)	BACEN	1995 - 2018
8	AG06	Balança comercial - Saldo (Nova metod. - BPM6) - US\$ (milhões)	BACEN	1995 - 2018
9	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Beta 0.97/0.1% ajust por infl - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
10	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Capex (incl invest) (\$) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
11	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Capex (incl invest) (\$) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
12	AG04	Capital - formação bruta índice encadeado dessaz (média 1995 = 100)- ref. 2010	BACEN	1995 - 2018
13	TC24	Capital fixo formação bruta índice encadeado dessaz (média 1995 = 100)- ref. 2010	IPEA-DATA	1995 - 2018
14	MG97	CBOE Crude Oil ETF Volatility Index, Index, Daily, Not Seasonally Adjusted	FRED	1995 - 2018
15	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Ciclo Operacional (dias) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
16	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Ciclo Operacional (dias) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
17	MG27	Consumo aparente bens de capital índice encadeado dessaz (média 2012 = 100)	IPEA-DATA	1995 - 2018
18	MG28	Consumo aparente bens de consumo índice encadeado dessaz (média 2012 = 100)	IPEA-DATA	1995 - 2018
19	MG29	Consumo aparente bens intermediários índice encadeado dessaz (média 2012 = 100)	IPEA-DATA	1995 - 2018
20	MG20	Consumo aparente derivados de petróleo média qde./dia- Barril (mil)	FRED	1995 - 2018
21	AG15	Consumo aparente derivados de petróleo outros média qde./dia- Barril (mil)	IPEA-DATA	1995 - 2018
22	MG30	Consumo aparente indústria de transformação índice encadeado dessaz (média 2002= 100)	IPEA-DATA	1995 - 2018
23	MG31	Consumo aparente indústria extrativa índice encadeado dessaz (média 2002= 100)	IPEA-DATA	1995 - 2018
24	MG32	Consumo aparente indústria geral índice encadeado dessaz (média 2012 = 100)	IPEA-DATA	1995 - 2018
25	MG26	Consumo energia elétrica - indústria qde.- GWh	IPEA-DATA	1995 - 2018
26	MG25	Consumo energia elétrica comércio - qde.- GWh	IPEA-DATA	1995 - 2018
27	TC23	Consumo final família índice encadeado dessaz (média 1995 = 100)- ref. 2010	IPEA-DATA	1995 - 2018
28	AG02	Consumo final variação real - R\$ (milhões)	BACEN	1995 - 2018
29	DG23	Contrato DI 1 ano	ECONOMATICA	1995 - 2018
30	DG19	Contrato DI 1 mês	ECONOMATICA	1995 - 2018
31	DG18	Contrato DI 1 semana	ECONOMATICA	1995 - 2018
32	DG20	Contrato DI 2 meses	ECONOMATICA	1995 - 2018
33	DG24	Contrato DI 3 anos	ECONOMATICA	1995 - 2018
34	DG21	Contrato DI 3 meses	ECONOMATICA	1995 - 2018
35	DG25	Contrato DI 5 anos	ECONOMATICA	1995 - 2018
36	DG22	Contrato DI 6 meses	ECONOMATICA	1995 - 2018
37	DG28	Contrato T-Bill 12 meses	ECONOMATICA	1995 - 2018
38	DG09	Cotação diária do Petróleo tipo Brent (US\$/Barril)	ECONOMATICA	1995 - 2018
39	MG86	Cotação média mensal do Petróleo tipo Brent (US\$/Barril)	FRED	1995 - 2018
40	TG28	Current Price Gross Domestic Product in China, Chinese Yuans, Quarterly, Seasonally Adjusted	FRED	1995 - 2018
41	MG02	Derivativos Saldo- US\$ (milhões) - Corrigido pela variação câmbial	BACEN	1995 - 2018
42	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Div Yld (inic) 1 anos ajust por infl - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
43	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Div Yld (inic) 1 anos ajust por infl - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
44	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Div Yld (inic) 5 anos ajust por infl - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
45	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Div Yld (inic) 5 anos ajust por infl - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
46	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Div Yld (inic) 5 anos ajust por infl - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
47	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Div Yld (inic) 5 anos ajust por infl - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
48	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Divid por Ação 1 anos ajust por infl - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
49	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Divid por Ação 1 anos ajust por infl - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
50	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Divid por Ação 1 anos ajust por infl - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
51	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Divid por Ação 1 anos ajust por infl - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
52	MG34	Dívida externa gov. federal e Banco Central líquida- (% PIB)	IPEA-DATA	1995 - 2018
53	TG06	Dívida externa gov. federal e Banco Central líquida- (% PIB)	BACEN	1995 - 2018
54	MG35	Dívida interna gov. federal e Banco Central líquida- (% PIB)	IPEA-DATA	1995 - 2018
55	TG07	Dívida interna gov. federal e Banco Central líquida- (% PIB)	BACEN	1995 - 2018
56	DG10	EMBI + Risco-Brasil	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
57	MG44	Empregados admissões- Pessoa	ECONOMATICA	1995 - 2018
58	MG45	Empregados demissões- Pessoa	ECONOMATICA	1995 - 2018
59	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Enterprise Value (\$) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
60	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Enterprise Value (\$) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
61	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Enterprise Value (\$) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
62	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Enterprise Value (\$) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
63	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Estr Cap (D/D+Val Merc) (%) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
64	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Estr Cap (D/D+Val Merc) (%) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
65	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Estr Cap (D/D+Val Merc) (%) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
66	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Estr Cap (D/D+Val Merc) (%) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
67	MG91	EUA - Índice de Produção Industrial	FRED	1995 - 2018
68	MG90	EUA - ISM - Índice dos Gerentes de Compras (Purchasing Managers Index)	FRED	1995 - 2018
69	MG89	EUA - Utilização da Capacidade na Indústria	FRED	1995 - 2018
70	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / EBIT da classe - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
71	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / EBIT da classe - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
72	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / EBIT da classe - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
73	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / EBIT da classe - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
74	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / EBIT da empresa - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
75	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / EBIT da empresa - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
76	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / EBIT da empresa - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
77	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / EBIT da empresa - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
78	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / EBITDA da classe - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
79	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / EBITDA da classe - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
80	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / EBITDA da classe - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
81	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / EBITDA da classe - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
82	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / EBITDA da empresa - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
83	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / EBITDA da empresa - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
84	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / EBITDA da empresa - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
85	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / EBITDA da empresa - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
86	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / Vendas - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
87	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / Vendas - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
88	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / Vendas - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
89	ESPECÍFICA POR ATIVOS	EV / Vendas - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
90	MG16	Exportações (FOB) destino: China- US\$	BACEN	1995 - 2018

Fonte: Elaborada pelos autores.

Tabela 14 – Variáveis incluídas na pesquisa (2).

Código.Variável	Nome.da.Variável	Banco.de.Dados	Período	Frequência
91	MG17	Exportações (FOB) destino: Estados Unidos- US\$	BACEN	1995 - 2018
92	MG08	Exportações (FOB)- US\$ (milhões)	BACEN	1995 - 2018
93	MG09	Exportações bens de capital (FOB)- US\$ (milhões) - Corrigido pela variação cambial	BACEN	1995 - 2018
94	MG10	Exportações bens de consumo (FOB)- US\$ (milhões) - Corrigido pela variação cambial	BACEN	1995 - 2018
95	MG25	Exportações bens e serviços índice encadeado dessaz. (média 1995 = 100)- ref. 2010	IPEA-DATA	1995 - 2018
96	MG11	Exportações bens intermediários (FOB)- US\$ (milhões) - Corrigido pela variação cambial	BACEN	1995 - 2018
97	DG02	Exportações média semanal- US\$ (milhões) - Corrigido pela variação cambial	BACEN	1995 - 2018
98	MG23	Faturamento real indústria índice dessaz. (média 2006 = 100)	IPEA-DATA	1995 - 2018
99	MG63	Fechamento ajust p/ prov Em moeda orig CDI 252 dias	ECONOMATICA	1995 - 2018
100	TG10	Fechamento ajust p/ prov Em moeda orig CDI 252 dias	ECONOMATICA	1995 - 2018
101	AG07	Fechamento ajust p/ prov Em moeda orig CDI 252 dias	ECONOMATICA	1995 - 2018
102	DG55	Fechamento ajust p/ prov Em moeda orig DJIA	ECONOMATICA	1995 - 2018
103	MG64	Fechamento ajust p/ prov Em moeda orig DJIA	ECONOMATICA	1995 - 2018
104	TG13	Fechamento ajust p/ prov Em moeda orig DJIA	ECONOMATICA	1995 - 2018
105	MG65	Fechamento ajust p/ prov Em moeda orig EUROBR	ECONOMATICA	1995 - 2018
106	DG29	Fechamento ajust p/ prov Em moeda orig IBOV	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
107	MG66	Fechamento ajust p/ prov Em moeda orig IBOV	ECONOMATICA	1995 - 2018
108	TG11	Fechamento ajust p/ prov Em moeda orig IBOV	ECONOMATICA	1995 - 2018
109	AG08	Fechamento ajust p/ prov Em moeda orig IBOV	ECONOMATICA	1995 - 2018
110	DG56	Fechamento ajust p/ prov Em moeda orig NASDAQ	ECONOMATICA	1995 - 2018
111	MG67	Fechamento ajust p/ prov Em moeda orig NASDAQ	ECONOMATICA	1995 - 2018
112	DG08	Fechamento ajust p/ prov Em moeda orig OZID	ECONOMATICA	1995 - 2018
113	MG68	Fechamento ajust p/ prov Em moeda original OZID	ECONOMATICA	1995 - 2018
114	TG14	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original OZID	ECONOMATICA	1995 - 2018
115	AG09	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original OZID	ECONOMATICA	1995 - 2018
116	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original FBR.A	ECONOMATICA	1995 - 2018
117	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original PETR3	ECONOMATICA	1995 - 2018
118	TG33	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original PETR3	ECONOMATICA	1995 - 2018
119	AG14	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original PETR3	ECONOMATICA	1995 - 2018
120	MG69	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original S&P 500	ECONOMATICA	1995 - 2018
121	TG12	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original S&P 500	ECONOMATICA	1995 - 2018
122	AG10	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original S&P 500	ECONOMATICA	1995 - 2018
123	DG26	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original T-BOND10	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
124	MG70	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original T-BOND10	ECONOMATICA	1995 - 2018
125	TG15	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original T-BOND10	ECONOMATICA	1995 - 2018
126	AG11	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original T-BOND10	ECONOMATICA	1995 - 2018
127	DG27	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original T-BOND30	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
128	MG71	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original T-BOND30	ECONOMATICA	1995 - 2018
129	MG72	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original TJLP	ECONOMATICA	1995 - 2018
130	TG16	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original TJLP	ECONOMATICA	1995 - 2018
131	AG12	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original TJLP	ECONOMATICA	1995 - 2018
132	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original KOM	ECONOMATICA	1995 - 2018
133	TG34	Fechamento ajustado por inflação Em moeda original KOM	ECONOMATICA	1995 - 2018
134	MG61	Folha de pagamento média indústria geral- índice (jan. 2001 = 100)	IPEA-DATA	1995 - 2018
135	DG44	HML - FF	ECONOMATICA e Própria	1995 - 2018
136	MG62	Horas pagas média indústria geral- índice (jan. 2001 = 100)	IPEA-DATA	1995 - 2018
137	MG46	Horas trabalhadas indústria- índice dessaz. (média 2006 = 100)	ECONOMATICA	1995 - 2018
138	MG74	ICE Com Ajuste Sazonal - Índice de Confiança Empresarial (CNAE 2.0)	IPEA-DATA	1995 - 2018
139	MG76	ICI Com Ajuste Sazonal - Índice de Confiança da Indústria (CNAE 2.0)	IPEA-DATA	1995 - 2018
140	MG77	IE Com Ajuste Sazonal - Índice de Confiança da Indústria - Expectativas (CNAE 2.0)	IPEA-DATA	1995 - 2018
141	MG75	IE-E Com Ajuste Sazonal - Índice de Expectativas Empresarial (CNAE 2.0)	IPEA-DATA	1995 - 2018
142	DG46	IML - FF	ECONOMATICA e Própria	1995 - 2018
143	MG19	Importações (FOB) origem: China- US\$	BACEN	1995 - 2018
144	MG18	Importações (FOB) origem: Estados Unidos- US\$	BACEN	1995 - 2018
145	MG12	Importações (FOB)- US\$ (milhões) - Corrigido pela variação cambial	BACEN	1995 - 2018
146	MG13	Importações bens de capital (FOB)- US\$ (milhões) - Corrigido pela variação cambial	BACEN	1995 - 2018
147	MG14	Importações bens de consumo (FOB)- US\$ (milhões) - Corrigido pela variação cambial	BACEN	1995 - 2018
148	TG26	Importações bens e serviços índice encadeado dessaz. (média 1995 = 100)- ref. 2010	IPEA-DATA	1995 - 2018
149	MG15	Importações bens intermediários (FOB)- US\$ (milhões) - Corrigido pela variação cambial	BACEN	1995 - 2018
150	DG01	Importações média semanal- US\$ (milhões) - Corrigido pela variação cambial	BACEN	1995 - 2018
151	DG30	Índice de Volatilidade do Índice IBOVESPA	NEFIN	1995 - 2018
152	MG73	Indicador de Incerteza da Economia Brasil (IIE-Br)	FGV-DADOS	1995 - 2018
153	MG33	Indicador IPEA de FBCF construção civil índice encadeado dessaz (média 1995= 100)	IPEA-DATA	1995 - 2018
154	DG58	Índice CBOE Brasil ETF	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
155	MG79	Índice da Taxa de Cambio Efetiva Real - (Real / Cesta de Moedas)	IPEA-DATA	1995 - 2018
156	MG88	Índice de Ações - Financial Times FT SE 100 (Londres) - Fechamento do mês	FRED	1995 - 2018
157	MG93	Índice de Atividade Econômica do Banco Central (IBC-Br) - com ajuste sazonal	BACEN	1995 - 2018
158	MG82	Índice de Commodities - Brasil (IC-Br) - BACEN 27574	BACEN	1995 - 2018
159	MG83	Índice de Commodities - Brasil - Agropecuária (IC-Br Agropecuária) - BACEN 27575	BACEN	1995 - 2018
160	MG85	Índice de Commodities - Brasil - Energia (IC-Br Energia) - BACEN 27577	BACEN	1995 - 2018
161	MG84	Índice de Commodities - Brasil - Metal - (IC-Br Metal) - BACEN 27576	BACEN	1995 - 2018
162	MG24	Índice de condições econômicas atuais (ICEA)	IPEA-DATA	1995 - 2018
163	MG80	Índice de confiança do consumidor (ICC)	FGV-DADOS	1995 - 2018
164	MG81	Índice de expectativas (IEC)	FGV-DADOS	1995 - 2018
165	DG57	Índice de Volatilidade VIXCLS	ECONOMATICA	1995 - 2018
166	MG92	Índice do Volume de Vendas - Brasil	IPEA-DATA	1995 - 2018
167	MG99	Índice do Volume de Vendas de Combustíveis e Lubrificantes - Brasil	IPEA-DATA	1995 - 2018
168	DG54	Índice IBX100	ECONOMATICA	1995 - 2018
169	MG52	Inflação IGP-DI (% a.m.)	BACEN	1995 - 2018
170	MG50	Inflação INPC- (% a.m.)	BACEN	1995 - 2018
171	DG17	Inflação IPC-S- (% a.m.)	IPEA-DATA	1995 - 2018
172	MG51	Inflação IPCA- (% a.m.)	BACEN	1995 - 2018
173	TG08	Inflação IPCA- (% a.m.)	BACEN	1995 - 2018
174	AG03	Invest. dir. ext. - Ingressos (Nova metod. - BPM6) - US\$ (milhões)	BACEN	1995 - 2018
175	AG13	IPCA - (% a.m.)	BACEN	1995 - 2018
176	MG108	IPC2111ICS	FRED	1995 - 2018
177	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Liquidez 1 anos ajustado por inflação - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
178	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Liquidez 1 anos ajustado por inflação - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
179	DG13	LTN - 1 mês - (% a.a.)	AMBIMA	1995 - 2018
180	DG16	LTN - 12 meses - (% a.a.)	AMBIMA	1995 - 2018

Fonte: Elaborada pelos autores.

Tabela 15 – Variáveis incluídas na pesquisa (3).

Código.Variável	Nome.da.Variável	Banco.de.Dados	Período	Frequência
181	DG14	LTN - 3 meses - (% a.a.)	AMBIMA	1995 - 2018
182	DG15	LTN - 6 meses - (% a.a.)	AMBIMA	1995 - 2018
183	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Lucro / Preço (%) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
184	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Lucro / Preço (%) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
185	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Lucro / Preço (%) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
186	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Lucro / Preço (%) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
187	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Margem EBIT (Operac) (%) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
188	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Margem EBIT (Openac) (%) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
189	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Margem Líquida (%) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
190	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Margem Líquida (%) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
191	MG106	MCOILBRETEU	FRED	1995 - 2018
192	TG31	MCOILBRETEU	FRED	1995 - 2018
193	MG107	MCOILWTICO	FRED	1995 - 2018
194	TG32	MCOILWTICO	FRED	1995 - 2018
195	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Negociabilidade 1 anos ajustado por inflação - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
196	MG95	Nível de Não Liquidez do Mercado Financeiro	NEFIN	1995 - 2018
197	MG98	No. 2 Heating Oil Prices: New York Harbor, Dollars per Gallon, Daily, Not Seasonally Adjusted	FRED	1995 - 2018
198	DG12	Over / Selic: (% a.a.)	AMBIMA	1995 - 2018
199	MG47	Pessoal empregado indústria índice dessaz. (média 2006 = 100)	ECONOMATICA	1995 - 2018
200	AG14	PIB - indústria - var. real anual - (% a.a.)	IPEA-DATA	1995 - 2018
201	AG05	PIB - preços de mercado - var. real anual - (% a.a.)	BACEN	1995 - 2018
202	TG17	PIB agropecuária índice encadeado dessaz. (média 1995 = 100)- ref. 2010	IPEA-DATA	1995 - 2018
203	TG18	PIB indústria construção índice encadeado dessaz. (média 1995 = 100)- ref. 2010	IPEA-DATA	1995 - 2018
204	TG20	PIB indústria índice encadeado dessaz. (média 1995 = 100)- ref. 2010	IPEA-DATA	1995 - 2018
205	TG18	PIB indústria transformação índice encadeado dessaz. (média 1995 = 100)- ref. 2010	IPEA-DATA	1995 - 2018
206	TG22	PIB preços básicos índice encadeado dessaz. (média 1995 = 100)- ref. 2010	IPEA-DATA	1995 - 2018
207	TG31	PIB serviços índice encadeado dessaz. (média 1995 = 100)- ref. 2010	IPEA-DATA	1995 - 2018
208	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Preço / EBITDA - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
209	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Preço / EBITDA - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
210	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Preço / EBITDA - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
211	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Preço / EBITDA - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
212	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Preço / Flx Cx Livre - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
213	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Preço / Flx Cx Livre - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
214	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Preço / Flx Cx Livre - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
215	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Preço / Flx Cx Livre - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
216	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Preço / Lucro - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
217	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Preço / Lucro - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
218	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Preço / Lucro - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
219	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Preço / Lucro - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
220	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Preço / Valor Patrim - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
221	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Preço / Valor Patrim - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
222	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Preço / Valor Patrim - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
223	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Preço / Valor Patrim - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
224	MG96	Preço WTI (FOB)- US\$	FRED	1995 - 2018
225	DG31	Premio de Variância	NEFIN	1995 - 2018
226	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Price Sales Ratio - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
227	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Price Sales Ratio - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
228	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Price Sales Ratio - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
229	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Price Sales Ratio - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
230	TG30	Produção - petróleo - média - qde./dia - Barril (mil) - Agência Nacional do Petróleo (ANP)	IPEA-DATA	1995 - 2018
231	MG101	Produção de Petróleo em Barris	IPEA-DATA	1995 - 2018
232	MG100	Produção Física - Fabricação Coque, Produtos Derivados Petróleo e Biocombustíveis Com Ajuste Sazonal	IPEA-DATA	1995 - 2018
233	MG94	Produção Física - Indústria Geral com Ajuste Sazonal (Nova Metodologia)	IPEA-DATA	1995 - 2018
234	MG55	Produção industrial bens de capital quantum- índice dessaz. (média 2012 = 100)	IPEA-DATA	1995 - 2018
235	MG53	Produção industrial bens de consumo quantum- índice dessaz. (média 2012 = 100)	IPEA-DATA	1995 - 2018
236	MG54	Produção industrial bens intermediários quantum- índice dessaz. (média 2012 = 100)	IPEA-DATA	1995 - 2018
237	MG58	Produção industrial indústria geral quantum- índice dessaz. (média 2012 = 100)	IPEA-DATA	1995 - 2018
238	MG59	Produção industrial indústrias de transformação quantum- índice dessaz. (média 2012 = 100)	IPEA-DATA	1995 - 2018
239	MG57	Produção industrial indústrias extrativas quantum- índice dessaz. (média 2012 = 100)	IPEA-DATA	1995 - 2018
240	TG29	Real Gross Domestic Product (Euro/ECU series) for European Union (28 countries), Millions of Chained 2010 Euros, Quarterly, Seasonally Adjusted	FRED	1995 - 2018
241	TG27	Real Gross Domestic Product, Billions of Chained 2012 Dollars, Quarterly, Seasonally Adjusted Annual Rate	FRED	1995 - 2018
242	MG01	Reservas internacionais - US\$ (milhões) - Corrigido pela variação cambial	BACEN	1995 - 2018
243	TG01	Reservas internacionais - US\$ (milhões) - Corrigido pela variação cambial	BACEN	1995 - 2018
244	AG01	Reservas Internacionais- US\$ (milhões)	BACEN	1995 - 2018
245	DG36	Retorno do Setor: Construção	NEFIN	1995 - 2018
246	DG49	Retorno do Setor: Construção (Retorno do Índice)	NEFIN	1995 - 2018
247	DG38	Retorno do Setor: Energia	NEFIN	1995 - 2018
248	DG51	Retorno do Setor: Energia (Retorno do Índice)	NEFIN	1995 - 2018
249	DG39	Retorno do Setor: Financeiro	NEFIN	1995 - 2018
250	DG52	Retorno do Setor: Financeiro (Retorno do Índice)	NEFIN	1995 - 2018
251	DG40	Retorno do Setor: Manufatura	NEFIN	1995 - 2018
252	DG53	Retorno do Setor: Manufatura (Retorno do Índice)	NEFIN	1995 - 2018
253	DG41	Retorno do Setor: Outros	NEFIN	1995 - 2018
254	DG35	Retorno do Setor: Produtos Básicos	NEFIN	1995 - 2018
255	DG48	Retorno do Setor: Produtos Básicos (Retorno do Índice)	NEFIN	1995 - 2018
256	DG37	Retorno do Setor: Produtos de Consumo	NEFIN	1995 - 2018
257	DG50	Retorno do Setor: Produtos de Consumo (Retorno do Índice)	NEFIN	1995 - 2018
258	DG42	Retorno em excesso Índice IBOVESPA	ECONOMATICA e Própria	1995 - 2018
259	DG33	Retorno Semanal - Índice IBOVESPA	NEFIN	1995 - 2018
260	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Risco base anual 0.97/0.1% ajustado por inflação - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
261	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Risco base anual 0.97/0.1% ajustado por inflação - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
262	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Risco base anual 0.97/0.1% ajustado por inflação - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
263	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Risco base anual 0.97/0.1% ajustado por inflação - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
264	ESPECÍFICA POR ATIVOS	ROA Rentab do Ativo (%) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
265	ESPECÍFICA POR ATIVOS	ROA Rentab do Ativo (%) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
266	ESPECÍFICA POR ATIVOS	ROE Rent Pat(pat medio) (%) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
267	ESPECÍFICA POR ATIVOS	ROE Rent Pat(pat medio) (%) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
268	ESPECÍFICA POR ATIVOS	ROIC (IC medio) (%) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
269	ESPECÍFICA POR ATIVOS	ROIC (IC medio) (%) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018
270	DG43	SMB - FF	ECONOMATICA e Própria	1995 - 2018

Fonte: Elaborada pelos autores.

Tabela 16 – Variáveis incluídas na pesquisa (4).

Código.Variável	Nome.da.Variável	Banco.de.Dados	Período	Frequência	
271	MG78	Sondagem Industrial - Nível de Utilização da Capacidade Instalada Com Ajuste Sazonal (CNAE 2.0)	IPEA-DATA	1995 - 2018	MENSAL
272	MG24	SPC número de consultas- Unidade	SPC	1995 - 2018	MENSAL
273	MG21	SPC número de registros recebidos- Unidade	SPC	1995 - 2018	MENSAL
274	DG34	Taxa de Aluguel - Índice IBOVESPA	NEFIN	1995 - 2018	DIÁRIA
275	MG04	Taxa de câmbio efetiva real INPC exportações índice (média 2010 = 100)	BACEN	1995 - 2018	MENSAL
276	MG05	Taxa de câmbio R\$ / US\$ comercial venda- média	BACEN	1995 - 2018	MENSAL
277	TG03	Taxa de câmbio R\$ / US\$ comercial venda- média	BACEN	1995 - 2018	TRIMESTRAL
278	DG04	Taxa de câmbio R\$ / US\$ comercial futuro: vencimento em t+1- R\$	THOMSON REUTERS	1995 - 2018	DIÁRIA
279	DG05	Taxa de câmbio R\$ / US\$ comercial futuro: vencimento em t+3- R\$	THOMSON REUTERS	1995 - 2018	DIÁRIA
280	DG06	Taxa de câmbio R\$ / US\$ comercial futuro: vencimento em t+6- R\$	THOMSON REUTERS	1995 - 2018	DIÁRIA
281	MG06	Taxa de câmbio real bilateral IPA-EP-DI Brasil/China- índice (média 2010 = 100)	BACEN	1995 - 2018	MENSAL
282	TG04	Taxa de câmbio real bilateral IPA-EP-DI Brasil/China- índice (média 2010 = 100)	BACEN	1995 - 2018	TRIMESTRAL
283	MG07	Taxa de câmbio real bilateral IPA-EP-DI Brasil/Estados Unidos- índice (média 2010 = 100)	BACEN	1995 - 2018	MENSAL
284	TG05	Taxa de câmbio real bilateral IPA-EP-DI Brasil/Estados Unidos- índice (média 2010 = 100)	BACEN	1995 - 2018	TRIMESTRAL
285	MG48	Taxa de desemprego RMSP- (%)	IPEA-DATA	1995 - 2018	MENSAL
286	MG87	Taxa de Juros - Federal Funds (EUA)	FRED	1995 - 2018	MENSAL
287	MG39	Taxa de juros pré fixada estrutura a termo LTN 1 mês- (%) a.a.)	AMBIMA	1995 - 2018	MENSAL
288	MG42	Taxa de juros pré fixada estrutura a termo LTN 12 meses- (%) a.a.)	AMBIMA	1995 - 2018	MENSAL
289	MG40	Taxa de juros pré fixada estrutura a termo LTN 3 meses- (%) a.a.)	AMBIMA	1995 - 2018	MENSAL
290	MG41	Taxa de juros pré fixada estrutura a termo LTN 6 meses- (%) a.a.)	AMBIMA	1995 - 2018	MENSAL
291	TG02	Taxa de paridade do poder de compra (PPC)	BACEN	1995 - 2018	TRIMESTRAL
292	MG03	Taxa de paridade do poder de compra (PPC)	BACEN	1995 - 2018	MENSAL
293	DG47	Taxa de Variação do Futuro de DI (Abertura menos Fechamento)	ECONOMATICA e Própria	1995 - 2018	DIÁRIA
294	MG43	Taxa referencial swaps DI pré-fixada 360 dias média do período- (%) a.a.)	ECONOMATICA	1995 - 2018	MENSAL
295	DG11	Taxa TR- (%) a.m.)	BACEN	1995 - 2018	DIÁRIA
296	ESPECÍFICA POR ATIVOS	TIR em 1 ano ajustado por inflação - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018	DIÁRIA
297	ESPECÍFICA POR ATIVOS	TIR em 1 ano ajustado por inflação - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018	MENSAL
298	MG36	Títulos federais indexados à Over / Selic mercado aberto fim período- (%)	BACEN	1995 - 2018	MENSAL
299	MG37	Títulos federais indexados aos índices de preços mercado aberto fim período- (%)	BACEN	1995 - 2018	MENSAL
300	MG38	Títulos federais operações mercado aberto fim período- (%)	BACEN	1995 - 2018	MENSAL
301	MG60	Utilização da capacidade instalada indústria desaz- (%)	IPEA-DATA	1995 - 2018	MENSAL
302	MG56	Utilização da capacidade instalada indústria- (%)	IPEA-DATA	1995 - 2018	MENSAL
303	TG09	Utilização da capacidade instalada indústria- (%)	BACEN	1995 - 2018	TRIMESTRAL
304	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Valor de Mercado (\$) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018	DIÁRIA
305	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Valor de Mercado (\$) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018	MENSAL
306	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Valor de Mercado (\$) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018	TRIMESTRAL
307	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Valor de Mercado (\$) - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018	ANUAL
308	ESPECÍFICA POR ATIVOS	VAR % base diária confiança: 95% 0.97/0.1% ajustado por inflação - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018	DIÁRIA
309	MG103	Vendas de Combustíveis - Alcool Etílico Hidratado	IPEA-DATA	1995 - 2018	MENSAL
310	MG102	Vendas de Combustíveis - Gasolina Automotiva	IPEA-DATA	1995 - 2018	MENSAL
311	MG104	Vendas de Combustíveis - Óleo Diesel	IPEA-DATA	1995 - 2018	MENSAL
312	MG105	Vendas de Combustíveis - Querosene de Aviação	IPEA-DATA	1995 - 2018	MENSAL
313	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Volatilidade base anual 0.97/0.1% ajustado por inflação	THOMSON REUTERS	1995 - 2018	MENSAL
314	ESPECÍFICA POR ATIVOS	Volatilidade base anual 0.97/0.1% ajustado por inflação - (ABEV3.SA;CMIG4.SA;ITUB4.SA;PETR4.SA;VALE3.SA)	THOMSON REUTERS	1995 - 2018	DIÁRIA
315	DG45	WML - FF	ECONOMATICA e Própria	1995 - 2018	DIÁRIA
316	DG07	Zona do Euro taxa de câmbio R\$ / euro venda média- R\$	THOMSON REUTERS	1995 - 2018	DIÁRIA

Fonte: Elaborada pelos autores.

7 Anexo B

Nas seções a seguir poderemos observar um resumo dos principais algoritmos utilizados nos modelos desenvolvidos na pesquisa. Todos os modelos foram desenvolvido no software R.

7.1 Modelos de Penalização Linear

A estrutura base utilizada para o desenvolvimento do código apresentado a seguir, foi o pacote `glmnet.R`, as modificações atribuídas ocorrem no processo de estimação e maximização do R^2_{oos} .

```
cv.glmnet.caionascimento <-
  function (x, y, weights, offset = NULL, lambda = NULL,
    type.measure = c("mse", "deviance", "class", "auc", "mae"),
    nfolds = 10, foldid,
    grouped = TRUE, keep = FALSE, parallel = FALSE, ...)
{
  if (missing(type.measure))
    type.measure = "default"
  else type.measure = match.arg(type.measure)
  if (!is.null(lambda) && length(lambda) < 2)
    stop("Need more than one value of lambda for cv.glmnet")
  N = nrow(x)
  if (missing(weights))
    weights = rep(1, N)
  else weights = as.double(weights)
  y = drop(y)
```

```

glmnet.call = match.call(expand.dots = TRUE)
which = match(c("type.measure", "nfolds", "foldid", "grouped",
  "keep"), names(glmnet.call), F)
if (any(which))
  glmnet.call = glmnet.call[-which]
glmnet.call[[1]] = as.name("glmnet")
glmnet.object = glmnet(x, y, weights = weights, offset = offset,
  lambda = lambda, ...)
glmnet.object$call = glmnet.call
subclass=class(glmnet.object)[[1]]
type.measure=cvtype(type.measure, subclass)
is.offset = glmnet.object$offset
####Next line is commented out so each call generates its own
lambda sequence
# lambda=glmnet.object$lambda
if (inherits(glmnet.object, "multnet") && !glmnet.object$grouped) {
  nz = predict(glmnet.object, type = "nonzero")
  nz = sapply(nz, function(x) sapply(x, length))
  nz = ceiling(apply(nz, 1, median))
}
else nz = sapply(predict(glmnet.object, type = "nonzero"),
  length)
if (missing(foldid))
  foldid = sample(rep(seq(nfolds), length = N))
else nfolds = max(foldid)
if (nfolds < 3)
  stop("nfolds must be bigger than 3; nfolds=10 recommended")
outlist = as.list(seq(nfolds))
if (parallel) {

```



```

# if (parallel && require(foreach)) {
  outlist = foreach(i = seq(nfolds), .packages = c("glmnet")) %dopar%
  {
    which = foldid == i
#    if (is.matrix(y))
    if (length(dim(y)) > 1)
      y_sub = y[!which, ]
    else y_sub = y[!which]
    if (is.offset)
      offset_sub = as.matrix(offset)[!which, ]
    else offset_sub = NULL
    glmnet(x[!which, , drop = FALSE], y_sub, lambda = lambda,
           offset = offset_sub, weights = weights[!which],
           ...)
  }
}
else {
  for (i in seq(nfolds)) {
    which = foldid == i
    if (is.matrix(y))
      y_sub = y[!which, ]
    else y_sub = y[!which]
    if (is.offset)
      offset_sub = as.matrix(offset)[!which, ]
    else offset_sub = NULL
    outlist[[i]] = glmnet(x[!which, , drop = FALSE],
                          y_sub, lambda = lambda, offset = offset_sub,
                          weights = weights[!which], ...)
  }
}

```

```

}
fun = paste("cv", subclass, sep = ".")
lambda = glmnet.object$lambda
cvstuff = do.call(fun, list(outlist, lambda, x, y, weights,
  offset, foldid, type.measure, grouped, keep))
cvm = cvstuff$cvm
cvstd = cvstuff$cvstd
nas=is.na(cvstd)
if(any(nas)){
  lambda=lambda[!nas]
  cvm=cvm[!nas]
  cvstd=cvstd[!nas]
  nz=nz[!nas]
}
cvname = names(cvstuff$type.measure)
names(cvname)=cvstuff$type.measure# to be compatible with
earlier version; silly, I know
out = list(lambda = lambda, cvm = cvm, cvstd = cvstd, cvup = cvm +
  cvstd, cvlo = cvm - cvstd, nzero = nz, name = cvname,
  glmnet.fit = glmnet.object)
if (keep)
  out = c(out, list(fit.preval = cvstuff$fit.preval,
    foldid = foldid))
lamin=if(cvname=="AUC")getmin(lambda,-cvm,cvstd)
else getmin(lambda, cvm, cvstd)
obj = c(out, as.list(lamin))
class(obj) = "cv.glmnet"
obj
}

```

7.2 VAR Esparso

O primeiro algoritmo a ser apresentado é o algoritmo gerador do modelo VAR-SL, tal algoritmo tem inspiração no pacote BigVar.R, onde podemos encontrar as principais funções auxiliares.

```

SparseGroupLassoVAR <-function( beta , groups , Y,Z,gamm, alpha ,
INIactive , eps , q1a , p,MN, dual=FALSE,C1, intercept )
{
## browser()
  m <- 0
  k <- ncol(Y)
  if (MN)
  {
    C <- matrix(0,nrow=k,ncol=k*p)
    diag(C) <- C1
    Y <- t(Y)
    Y <- Y-C%%Z
    Y <- t(Y)
  }
  Y <- t(Y)
  YOLD <- Y
  ZOLD <- Z
  if(intercept){
    YMean <- c(apply(Y, 1, mean))
    ZMean <- c(apply(Z, 1, mean))
    Y <- Y - c(apply(Y, 1, mean)) %% t(c(rep(1, ncol(Y))))
    Z <- Z - c(apply(Z, 1, mean)) %% t(c(rep(1, ncol(Z))))
  }else{
    YMean <- rep(0,nrow(Y))

```

```

ZMean <- rep(0,nrow(Z))
}
ZZ <- kronecker(t(Z),diag(k))
M1f <- list()
M2f <- list()
jj <- .lfunction3(p,k)
eigs <- c()
q1 <- list()
# get step size from inverse of max eigenvalue via power method
for (j in 1:length(jj)) {
  M1f[[j]] <- ZZ[,jj[[j]] ]
  M2f[[j]] <- crossprod(ZZ[,jj[[j]]])
  gg1 <- powermethod(M2f[[j]], q1a[[j]])
  eigs[j] <- gg1$lambda
  q1[[j]] <- gg1$q1
}
jj <- .lfunction3cpp(p,k)
jjfull <- jj
jjcomp <- .lfunctioncomp(p, k)
dims <- dim(beta)
beta <- array(beta[,2:ncol(beta[, ,1]),],
dim=c(dims[1],dims[2]-1,dims[3]))
if(!dual){
  BB <- GamLoopSGLOO(beta,INIactive,gamm,alpha,Y,
  ZZ,jj,jj,jjcomp,eps,YMean,ZMean,k,p*k,M2f,eigs,m)
} else {
  ## browser()
  BB <- GamLoopSGLOODP(beta,INIactive,gamm,alpha,Y,
  ZZ,jj,jj,jjcomp,eps,YMean,ZMean,k,p*k,M2f,eigs,m)

```

```

    }
    BB$q1 <- q1
    if (MN)
    {
        for (i in 1:(dim(BB$beta)[3]))
        {
            BB$beta[,2:ncol(BB$beta[, , i]), i] <-

            BB$beta[,2:ncol(BB$beta[, , i]), i]+C
        }
    }
    return(BB)
}

```

O algoritmo apresentado a seguir é uma extensão do algoritmo acima apresentado, com intuito de gerar esparsidade através da defasagem temporal.

```

SparseGroupLassoVAR<-function(beta , groups , Y,Z,gamm, alpha ,
INIactive , eps , q1a , p,MN,C1, intercept )
{
    k <- ncol(Y)
    if (MN)
    {
        C <- matrix(0,nrow=k , ncol=k*p)
        diag(C) <- C1
        Y <- t(Y)
        Y <- Y-C%*%Z
        Y <- t(Y)
    }
}

```

```

    }
    Y <- t(Y)
    YOLD <- Y
    ZOLD <- Z
    if(intercept){
      YMean <- c(apply(Y, 1, mean))
      ZMean <- c(apply(Z, 1, mean))
      Y <- Y - c(apply(Y, 1, mean)) %*% t(c(rep(1, ncol(Y))))
      Z <- Z - c(apply(Z, 1, mean)) %*% t(c(rep(1, ncol(Z))))
    } else {
      YMean <- rep(0, nrow(Y))
      ZMean <- rep(0, nrow(Z))
    }
    M1f <- list()
    M2f <- list()
    eigs <- c()
    q1 <- list()
    jj <- .groupfun(p,k)

```

```

# get step size from inverse of max eigenvalue via power method

```

```

for (j in 1:length(jj)) {
  M1f[[j]] <- Z[jj[[j]], ]
  M2f[[j]] <- Z[jj[[j]], ] %*% t(Z[jj[[j]], ])
  gg1 <- powermethod(M2f[[j]], q1a[[j]])
  eigs[j] <- gg1$lambda
  q1[[j]] <- gg1$q1
}
jj <- .groupfuncpp(p,k)

```

```

jjfull <- jj
jjcomp <- .groupfuncomp(p, k)
dims <- dim(beta)
beta <- array(beta[,2:ncol(beta[, , 1]),],

dim=c(dims[1], dims[2]-1, dims[3]))
## browser()
## beta <- beta[,2:ncol(beta[, , 1]),]

BB <- GamLoopSGL(beta, INIactive, gamm, alpha, Y, Z, jj,

jjfull, jjcomp, eps, YMean, as.matrix(ZMean), k, p*k, M1f, M2f, eigs)
BB$q1 <- q1
  if (MN)
  {
    for (i in 1:(dim(BB$beta)[3]))
    {
      BB$beta[,2:ncol(BB$beta[, , i]), i] <-
      BB$beta[,2:ncol(BB$beta[, , i]), i]+C
    }
  }

return(BB)
}

```

O último modelo a ser apresentado nesta seção é o BVAR-S, novamente ressaltamos que as funções auxiliares podem ser encontradas no pacote BigVar.R.

```

BVARLitterman <- function(Y,Z,p,tau,mu,H,iRW)
{
  T <- nrow(Y); k <- ncol(Y)
  # prior covariance based on univariate AR models
  sigmas <- c()
  for(i in 1:k){
    Z1 <- VARXCons(matrix(Y[,i],ncol=1),matrix(0,nrow=nrow(Y),ncol=1)
      ,1,p,0,0)
    ## Y1 <- matrix(Y[(p+1):nrow(Y),i],ncol=1)
    # get the prior cov
    K <- cbind(t(Z1),Y[(p+1):nrow(Y),i])
    sigmas[i] <- sqrt(ARFitVARXR(K,1,p,0,0)$SigmaU)
    ## print(sigmas[i])
  }
  ## browser()
  MMO <- colMeans(Y)

  ## Z <- VARX(Y,matrix(0,nrow=Y,ncol=1),k,p,0,0)

  ## Y1 <- matrix(Y[(p+1):nrow(Y),],ncol=k)

  # create prior random walk dummy
  Yrw1 <- diag(sigmas*iRW)
  Yrw2 <- matrix(0,nrow=k*(p-1),ncol=k)
  Yrw<- tau*(rbind(Yrw1,Yrw2))
  Zrw <- tau*cbind(kronecker(diag(1:p),diag(sigmas)),
    matrix(0,nrow=k*p,ncol=1))

```

```

# create dummy for intercept
epsilon=1e-5
Ycs <- 1e-5*matrix(0,nrow=1,ncol=k)
Zcs <- epsilon*cbind(matrix(0,ncol=k*p,nrow=1),1)

# dummy on the sums of coefficients
Ylr <- mu*diag(MMO*iRW)
Zlr1 <- kronecker(matrix(1,nrow=1,ncol=p),diag(MMO)*iRW)
Zlr <- mu*(cbind(Zlr1,matrix(0,nrow=k,ncol=1)))

# Dummy for residual covariance matrix
Ycv <- diag(sigmas)
Zcv <- matrix(0,nrow=k,ncol=k*p+1)

Yprior <- rbind(Yrw,Ylr,Ycv,Ycs)
Zprior <- rbind(Zrw,Zlr,Zcv,Zcs)

## Zp2 <- rev(Zprior[(nrow(Zprior)),])
## Zp3 <- Zprior[1:(nrow(Zprior)-1),]
## Zp3 <- rbind(Zp2,Zp3)
## ZZI2 <- solve(t(Zp3)%*%Zp3+t(Z)%*%Z)
## dim(ZZI2)
Tstar <- nrow(Yprior)
## dim(Zprior)
## # posterior
## dim(Z)
## browser()
Z <- t(Z)

```

```

Z <- cbind(Z[,2:ncol(Z)],1)
## dim(Yprior)
## browser()

## kappa(crossprod(Z))
ZZinv <- solve(t(Zprior)%*%Zprior+t(Z)%*%Z)
ZY <- t(Zprior)%*%Yprior+t(Z)%*%Y
beta <- ZZinv%*%ZY
## browser()
## preds <- Z[nrow(Z),]%*%beta

return(t(beta))
}

```

7.3 PCA

Para o desenvolvimento da análise de componentes principais utilizamos a função *prcomp* presente no conjunto básico de funções do R, a única modificação realizada foi uma rotação nos componentes principais.

```

prcomp <- function (x, ...) UseMethod("prcomp")
prcomp.ca <-
  function(x, retx = TRUE, center = TRUE, scale. = FALSE,
    tol = NULL, ...)
{
  chkDots(...)
  x <- as.matrix(x)
  x <- scale(x, center = center, scale = scale.)
  cen <- attr(x, "scaled:center")

```

```

sc <- attr(x, "scaled:scale")
if(any(sc == 0))
stop("cannot rescale a constant/zero column to unit variance")
s <- svd(x, nu = 0)
s$d <- s$d / sqrt(max(1, nrow(x) - 1))
if (!is.null(tol)) {
  ## we get rank at least one even for a 0 matrix.
  rank <- sum(s$d > (s$d[1L]*tol))
  if (rank < ncol(x)) {
    s$v <- s$v[, 1L:rank, drop = FALSE]
    s$d <- s$d[1L:rank]
  }
}
dimnames(s$v) <-
  list(colnames(x), paste0("PC", seq_len(ncol(s$v))))
r <- list(sdev = s$d, rotation = s$v,
         center = if(is.null(cen)) FALSE else cen,
         scale = if(is.null(sc)) FALSE else sc)
if (retx) r$x <- x %*% s$v
class(r) <- "prcomp"
r
}

```

7.4 SPCA

Para o desenvolvimento do SPCA, utilizamos a função *SPCA* presente no pacote *elasticnet.R*, apenas realizamos um modificação em uma função auxiliar para se encaixar no objetivo da pesquisa de maximizar o R^2_{oos} .

```

spca<-
function(x,K,para,type=c("predictor","Gram"),
sparse=c("penalty","varnum"),use.corr=FALSE,
        lambda=1e-6,max.iter=200,trace=FALSE,eps.conv=1e-3)
{
  call <- match.call()
  type <- match.arg(type)
  sparse <- match.arg(sparse)
  vn <- dimnames(x)[[2]]
  x<-switch(type,
            predictor = {
              n<-dim(x)[1]
              p<-dim(x)[2]
              if (n/p>=100){
cat("You may wish to restart and use a more efficient way \n")
cat("let the argument x be the sample
covariance/correlation matrix and set type=Gram \n")
              }
              x<-scale(x,center=TRUE,scale=use.corr)
            },
            Gram = {x<-rootmatrix(x)}
            )

  svdobj<-svd(x)
  v<-svdobj$v
  totalvariance<-sum((svdobj$d)^2)
  alpha<-as.matrix(v[,1:K,drop=FALSE])
  beta<-alpha
  for ( i in 1:K) {

```

```

y<-drop(x%%alpha[,i])
beta[,i]<-solvebeta(x,y,
  paras=c(lambda,para[i]),sparse=sparse)
}
xtx<-t(x)%*%x
temp<-beta
normtemp<-sqrt(apply(temp^2,2,sum))
normtemp[normtemp==0]<-1
temp<-t(t(temp)/normtemp)
k<-0
diff<-1
while((k<max.iter) & (diff>eps.conv)){
  k<-k+1
  alpha<-xtx%%beta
  z<-svd(alpha)
  alpha<-(z$u)%*%t(z$v)
  for ( i in 1:K) {
    y<-drop(x%%alpha[,i])
    beta[,i]<-solvebeta(x,y,paras=c(lambda,para[i]),
      ,sparse=sparse)
  }
  normbeta<-sqrt(apply(beta^2,2,sum))
  normbeta[normbeta==0]<-1
  beta2<-t(t(beta)/normbeta)
  diff<-max(abs(beta2-temp))
  temp<-beta2
  if(trace){
    if (k%%10==0){
      cat(" iterations ",k,fill=TRUE)

```

```

    }
  }
}
normbeta<-sqrt(apply(beta^2,2,sum))
normbeta[normbeta==0]<-1
beta<-t(t(beta)/normbeta)
dimnames(beta)<-list(vn,paste("PC",1:K,sep=""))
u<-x%*%beta
R<-qr.R(qr(u))
pev<-diag(R^2)/totalvariance
obj<-list(call = call, type=type,
K=K, loadings=beta, pev=pev, var.all=totalvariance,
vn=vn, para=para, lambda=lambda)
class(obj) <- "spca"
obj
}

```

7.5 PLS

O algoritmo utilizados na pesquisa para o desenvolvimento do mínimos quadrados parciais foi estruturado sobre o pacote pls.

```

kernelpls.fit <- function(X, Y, ncomp, center = TRUE,
stripped = FALSE, ...)
{
  Y <- as.matrix(Y)
  if(!stripped) {
    ## Save dimnames:
    dnX <- dimnames(X)

```

```

    dnY <- dimnames(Y)
  }
  ## Remove dimnames during calculation. (Doesn't seem to make a
  ## difference here (2.3.0).)
  dimnames(X) <- dimnames(Y) <- NULL

  nobj <- dim(X)[1]
  npred <- dim(X)[2]
  nresp <- dim(Y)[2]

  ## Center variables:
  if (center) {
    Xmeans <- colMeans(X)
    X <- X - rep(Xmeans, each = nobj)
    Ymeans <- colMeans(Y)
    Y <- Y - rep(Ymeans, each = nobj)
  } else {
    ## Set means to zero. Will ensure that predictions
    do not take the
    ## mean into account.
    Xmeans <- rep_len(0, npred)
    Ymeans <- rep_len(0, nresp)
  }

  ## Projection, loadings
  R <- P <- matrix(0, ncol = ncomp, nrow = npred)
  tQ <- matrix(0, ncol = nresp, nrow = ncomp) # Y loadings;
  transposed
  B <- array(0, c(npred, nresp, ncomp))

```

```

if (!stripped) {
  W <- P                                # Loading weights
  U <- TT <- matrix(0, ncol = ncomp, nrow = nobj) # scores
  tsqs <- rep.int(1, ncomp)             # t't
  fitted <- array(0, c(nobj, nresp, ncomp))
}

```

```
## 1.
```

```
XtY <- crossprod(X, Y)
```

```

for (a in 1:ncomp) {
  ## 2.
  if (nresp == 1) {
    w.a <- XtY / sqrt(c(crossprod(XtY)))
  } else {
    if (nresp < npred) {
      ## FIXME: is q proportional to q.a?
      q <- eigen(crossprod(XtY),
        symmetric = TRUE)$vectors[,1]
      w.a <- XtY %*% q
      w.a <- w.a / sqrt(c(crossprod(w.a)))
    } else {
      w.a <- eigen(XtY %*% t(XtY),
        symmetric = TRUE)$vectors[,1]
    }
  }
}

```

```
## 3.
```



```

r.a <- w.a
if (a > 5) {
  ## This is faster when a > 5:
  r.a <- r.a - colSums(crossprod(w.a, P[,1:(a-1),
    drop=FALSE]) %*% t(R[,1:(a-1), drop=FALSE]))
} else if (a > 1) {
  for (j in 1:(a - 1))
    r.a <- r.a - c(P[,j] %*% w.a) * R[,j]
}

## 4.
t.a <- X %*% r.a
tsq <- c(crossprod(t.a))
p.a <- crossprod(X, t.a) / tsq
q.a <- crossprod(XtY, r.a) / tsq

## 5.
XtY <- XtY - (tsq * p.a) %*% t(q.a)

## 6.-8.
R[,a] <- r.a
P[,a] <- p.a
tQ[a,] <- q.a
B[, ,a] <- R[,1:a, drop=FALSE] %*% tQ[1:a,, drop=FALSE]
if (!stripped) {
  tsqs[a] <- tsq
  ## Extra step to calculate Y scores:
  u.a <- Y %*% q.a / c(crossprod(q.a)) # Ok for nresp == 1
  ## make u orth to previous X scores:

```

```

        if (a > 1) u.a <- u.a - TT %*% (crossprod(TT, u.a) / tsqs)
        U[,a] <- u.a
        TT[,a] <- t.a
        W[,a] <- w.a
        ## (For very tall, slim X and Y, X %*% B[, ,a]
        is slightly faster
        ## due to less overhead.)
        fitted[, ,a] <- TT[, 1:a] %*% tQ[1:a, , drop=FALSE]
    }
}

if (stripped) {
    ## Return as quickly as possible
    list(coefficients = B, Xmeans = Xmeans, Ymeans = Ymeans)
} else {
    residuals <- - fitted + c(Y)
    if (center) {
        fitted <- fitted + rep(Ymeans, each = nobj) # Add mean
    }

    ## Add dimnames:
    objnames <- dnX[[1]]
    if (is.null(objnames)) objnames <- dnY[[1]]
    prednames <- dnX[[2]]
    respnames <- dnY[[2]]
    compnames <- paste("Comp", 1:ncomp)
    nCompnames <- paste(1:ncomp, "comps")
    dimnames(TT) <- dimnames(U) <- list(objnames, compnames)
    dimnames(R) <- dimnames(W) <- dimnames(P) <-

```

```

        list(prednames, compnames)
dimnames(tQ) <- list(compnames, respnames)
dimnames(B) <- list(prednames, respnames, nCompnames)
dimnames(fitted) <- dimnames(residuals) <-
    list(objnames, respnames, nCompnames)
class(TT) <- class(U) <- "scores"
class(P) <- class(W) <- class(tQ) <- "loadings"

list(coefficients = B,
      scores = TT, loadings = P,
      loading.weights = W,
      Yscores = U, Yloadings = t(tQ),
      projection = R,
      Xmeans = Xmeans, Ymeans = Ymeans,
      fitted.values = fitted, residuals = residuals,
      Xvar = colSums(P * P) * tsqs,
      Xtotvar = sum(X * X))
}
}

```