UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE DE RIBEIRÃO PRETO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA – ÁREA: ECONOMIA APLICADA

IGOR FERREIRA BATISTA MARTINS

**Previsão de variáveis macroeconômicas pelo modelo de
fatores dinâmicos: uma abordagem por componentes
principais esparsas**

Orientador: Prof. Dr. Márcio Poletti Laurini

Ribeirão Preto

2020

Prof. Dr. Vahan Agopyan
Reitor da Universidade de São Paulo

Prof. Dr. André Lucirton Costa
Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto

Prof. Dr. Sérgio Kannebley Júnior
Chefe do Departamento de Economia

Prof. Dr. Sérgio Naruhiko Sakurai
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Economia

IGOR FERREIRA BATISTA MARTINS

**Previsão de variáveis macroeconômicas pelo modelo de
fatores dinâmicos: uma abordagem por componentes
principais esparsas**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia – Área: Economia Aplicada da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Poletti Laurini

Versão Corrigida

(versão original disponível na Faculdade de Economia, Administração e
Contabilidade de Ribeirão Preto)

Ribeirão Preto

2020

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Martins, Igor Ferreira Batista Martins.

Previsão de variáveis macroeconômicas pelo modelo de fatores dinâmicos: uma abordagem por componentes principais esparsas / Igor Ferreira Batista Martins – Ribeirão Preto, SP, 2020.

119 p.: il.; 30 cm

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia – Área: Economia Aplicada da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências. – Universidade de São Paulo

Orientador: Laurini, Márcio Poletti

1. Modelo de Fatores. 2. Previsão. 3. SPCA.

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Márcio Poletti Laurini, por todo o conhecimento transferido durante o mestrado e pela ótima orientação.

Aos membros da banca por terem aceitado o convite para participar.

Aos professores Sérgio Kannebley Júnior e Fernando Antônio de Barros Júnior pelos comentários nas etapas de qualificação e pré-defesa.

Aos participantes do XIX Encontro Brasileiro de Finanças, da 18ª ESTE - Escola de Séries Temporais e Econometria e do 41º Encontro Brasileiro de Econometria pelos comentários realizados.

Aos membros do CEPER e aos professores da FEA-RP que auxiliaram na minha formação.

À minha família pelo incentivo durante os meus estudos.

Ao CNPq pelo apoio financeiro ao longo do mestrado.

RESUMO

MARTINS, I. F. B. **Previsão de variáveis macroeconômicas pelo modelo de fatores dinâmicos: uma abordagem por componentes principais esparsas.** Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2020.

Modelos fatoriais são um dos principais métodos de previsão macroeconômicas. Tradicionalmente, esses modelos utilizam a matriz de covariância amostral em conjunto da análise de componentes principais. Nesse trabalho, nós analisamos o impacto da escolha do tipo de matriz de covariância e do método de extração dos fatores latentes para previsões macroeconômica decorrentes de modelos fatoriais. A existência de erros de medida nas séries temporais pode introduzir uma estrutura de dependência temporal sendo adequado substituir a matriz de covariância amostral por matrizes de longo prazo. Adicionalmente, a matriz de covariância amostral pode acumular erros de estimação devido ao número elevado de parâmetros a serem estimados. Ao usar um *hard-threshold*, podemos mitigar esse problema. Já o uso de componentes principais esparsas nos permite usar o *tradeoff* entre viés e variância para obter estimativas mais precisas em amostras finitas. A metodologia proposta é aplicada a base de dados macroeconômicos apresentada em Stock e Watson (2009). Os resultados obtidos fortalecem a evidência de que usar um subconjunto das séries temporais disponibilizadas para a extração dos fatores não leva, necessariamente, a um pior desempenho preditivo. Similarmente a Kristensen (2017), encontramos que as previsões obtidas por PCA e SPCA são próximas e, adicionalmente, mostramos que o *Model Confidence Set* não rejeita a hipótese de mesma habilidade preditiva em muitos casos. Por fim, expandimos a evidência apresentada em Smeekes e Wijler (2018) de que modelos que utilizam esparsidade podem levar a um melhor desempenho do que modelos fatoriais baseados na matriz de covariância amostral e PCA quando temos a presença de erros de especificação.

Palavras-chave: Modelo de Fatores. Previsão. SPCA.

ABSTRACT

MARTINS, I. F. B. **Macroeconomic forecasting with dynamic factor model: a sparse principal components approach**. Dissertation (Master Degree) – School of Economics, Business and Accounting at Ribeirão Preto, University of São Paulo, Ribeirão Preto, 2020.

Factor models are one of the main methods used in macroeconomic forecasting. Usually, these models use the sample covariance matrix in conjunction with principal component analysis. In this work, we analyze the impact of the choice of the covariance matrix class and the latent factor extraction method for macroeconomic forecasting based on factor models. The existence of measurement errors in the time series can introduce a time dependency structure, being appropriate to replace the sample covariance matrix with long-run covariance matrices. Additionally, the sample covariance matrix can accumulate estimation errors due to the high number of parameters to be estimated. By using a hard-threshold, we can mitigate this problem. The use of sparse principal components allows us to use the tradeoff between bias and variance to obtain more accurate estimates in finite samples. We apply the proposed methodology to the macroeconomic database presented in Stock e Watson (2009). The results obtained strengthen the evidence that using a subset of the dataset for factor extraction does not necessarily lead to worse predictive performance. Similarly to Kristensen (2017), we find that the forecasts based on PCA and SPCA are close and, in addition, we show that the Model Confidence Set does not reject the hypothesis of the equal predictive ability in many cases. Finally, we expand the evidence presented in Smeekes e Wijkstra (2018) that sparse models can lead to better performance than factor models based on the sample covariance matrix and PCA when there are specification errors.

Keywords: Factor Model. Forecast. SPCA.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 5.1 – Número de fatores sugeridos pelos critérios apresentados em Ahn e Horenstein (2013), Bai e Ng (2002) e Onatski (2010) quando modelamos a dependência entre a séries por meio da matriz de covariância amostral . . .	52
Figura 5.2 – Número de variáveis não nulas sugeridas pelos critérios de Kristensen (2017) e Wang, Li e Leng (2009) quando modelamos a dependência entre a séries por meio da matriz de covariância amostral	53
Figura 5.3 – Número de fatores sugeridos pelos critérios apresentados em Ahn e Horenstein (2013), Bai e Ng (2002) e Onatski (2010) quando modelamos a dependência entre a séries por meio da matriz de covariância de longo prazo proposta em Andrews (1991)	54
Figura 5.4 – Número de variáveis não nulas sugeridas pelos critérios de Kristensen (2017) e Wang, Li e Leng (2009) quando modelamos a dependência entre a séries por meio da LRCM proposta por Andrews (1991).	54
Figura 5.5 – Número de fatores sugeridos pelos critérios apresentado em Ahn e Horenstein (2013), Bai e Ng (2002) e Onatski (2010) quando modelamos a dependência entre a séries por meio da matriz de covariância de longo prazo proposta em Kiefer e Vogelsang (2002)	56
Figura 5.6 – Número de variáveis não nulas sugeridas pelos critérios de Kristensen (2017) e Wang, Li e Leng (2009) quando modelamos a dependência entre a séries por meio da matriz de covariância da classe <i>fixed b</i> proposta por Kiefer e Vogelsang (2002).	56
Figura 5.7 – Número de fatores sugeridos pelos critérios apresentados em Ahn e Horenstein (2013), Bai e Ng (2002) e Onatski (2010) quando modelamos a dependência entre a séries por meio da matriz de covariância após a aplicação de um limiar como proposto em Bickel, Levina <i>et al.</i> (2008).	57

Figura 5.8 – Número de variáveis não nulas sugeridas pelos critérios de Kristensen (2017) e Wang, Li e Leng (2009) quando modelamos a dependência entre a séries por meio da matriz de covariância após a aplicação de um limiar como proposto em Bickel, Levina <i>et al.</i> (2008).	58
Figura 5.9 – Número de fatores sugeridos pelos critérios apresentados em Ahn e Horenstein (2013), Bai e Ng (2002) e Onatski (2010) quando modelamos a dependência entre a séries por meio da matriz de covariância proposta em Ledoit e Wolf (2004)	59
Figura 5.10–Previsão do GDP251 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 1.	62
Figura 5.11–Previsão do GDP251 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 2.	63
Figura 5.12–Previsão do GDP251 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 3.	65
Figura 5.13–Previsão do GDP251 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 4.	67
Figura 5.14–Previsão do GDP251 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 5.	69
Figura 5.15–Previsão do IPS10 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 1.	71
Figura 5.16–Previsão do IPS10 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 2.	73
Figura 5.17–Previsão do IPS10 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 3.	75
Figura 5.18–Previsão do IPS10 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 4.	76
Figura 5.19–Previsão do IPS10 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 5.	78

Figura 5.20–Previsão do LHUR para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 1.	80
Figura 5.21–Previsão do LHUR para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 2.	82
Figura 5.22–Previsão do LHUR para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 3.	84
Figura 5.23–Previsão do LHUR para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 4.	85
Figura 5.24–Previsão do LHUR para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 5.	87
Figura 5.25–Previsão do CPIAUCSL para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 1.	89
Figura 5.26–Previsão do CPIAUCSL para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 2.	91
Figura 5.27–Previsão do CPIAUCSL para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 3.	92
Figura 5.28–Previsão do CPIAUCSL para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 4.	94
Figura 5.29–Previsão do CPIAUCSL para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 5.	96
Figura 5.30–Previsão do FSPCOM para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 1.	98
Figura 5.31–Previsão do FSPCOM para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 2.	100
Figura 5.32–Previsão do FSPCOM para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 3.	102
Figura 5.33–Previsão do FSPCOM para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 4.	103

Figura 5.34–Previsão do FSPCOM para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os
modelos do caso 5. 104

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Classificação das séries temporais contidas na base de dados apresentada em Stock e Watson (2009).	49
Tabela 5.2 – Número de séries temporais presentes em cada um dos grupos após a remoção das 35 séries realizadas em Stock e Watson (2009).	50
Tabela 5.3 – Descrição das séries a serem previstas e sua sigla correspondente.	51
Tabela 5.4 – Modelos usados para previsão quando consideramos que a dependência entre séries é modelada pela matriz de covariância amostral	52
Tabela 5.5 – Modelos usados para previsão quando consideramos que a dependência entre séries é modelada pela LRCM proposta por Andrews (1991).	55
Tabela 5.6 – Modelos usados para previsão quando consideramos que a dependência entre séries é modelada pela LRCM proposta por Kiefer e Vogelsang (2002).	55
Tabela 5.7 – Modelos usados para previsão quando consideramos que a dependência entre séries é modelada pela matriz de covariância após a aplicação de um <i>hard-threshold</i>	58
Tabela 5.8 – DFM estimados na aplicação empírica.	60
Tabela 5.9 – Modelos adaLASSO, LASSO e GDFM estimados na aplicação empírica.	60
Tabela 5.10–Modelo com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	61
Tabela 5.11–Resultados do MCS para GDP251 em cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	62
Tabela 5.12–Modelo com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	64

Tabela 5.13–MCS para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	64
Tabela 5.14–Modelo com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar	64
Tabela 5.15–MCS para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar	66
Tabela 5.16–Modelo para GDP251 com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, fixed-b, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA.	66
Tabela 5.17–MCS para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, fixed-b, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA.	68
Tabela 5.18–Modelo com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior.	68
Tabela 5.19–MCS para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior.	70
Tabela 5.20–Modelos para o IPS10 com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	72
Tabela 5.21–MCS para o IPS10 para cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	72

Tabela 5.22–Modelos para IPS10 com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	72
Tabela 5.23–MCS para IPS10 para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	74
Tabela 5.24–Modelo para IPS10 com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar	74
Tabela 5.25–MCS para IPS10 para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar	74
Tabela 5.26–Modelo para IPS10 com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, Fixed-B, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA.	77
Tabela 5.27–MCS para IPS10 para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, Fixed-B, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA.	77
Tabela 5.28–Modelo para IPS10 com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior. .	77
Tabela 5.29–MCS para IPS10 para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior.	79
Tabela 5.30–Modelos para LHUR com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	81

Tabela 5.31–MCS para LHUR para cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	81
Tabela 5.32–Modelos para LHUR com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	81
Tabela 5.33–MCS para LHUR para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	83
Tabela 5.34–Modelo para LHUR com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar	83
Tabela 5.35–MCS para LHUR para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar	83
Tabela 5.36–Modelo para LHUR com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, Fixed-B, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA.	86
Tabela 5.37–MCS para LHUR para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, Fixed-B, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA.	86
Tabela 5.38–Modelo para LHUR com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior. .	86
Tabela 5.39–MCS para LHUR para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior.	88

Tabela 5.40–Modelos para CPIAUCSL com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	90
Tabela 5.41–MCS para CPIAUCSL para cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	90
Tabela 5.42–Modelos para CPIAUCSL com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	90
Tabela 5.43–MCS para CPIAUCSL para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	93
Tabela 5.44–Modelo para CPIAUCSL com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar	93
Tabela 5.45–MCS para CPIAUCSL para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar	93
Tabela 5.46–Modelo para CPIAUCSL com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, Fixed-B, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA.	95
Tabela 5.47–MCS para CPIAUCSL para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, Fixed-B, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA. . .	95

Tabela 5.48–Modelo para CPIAUCSL com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior.	95
Tabela 5.49–MCS para CPIAUCSL para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior.	97
Tabela 5.50–Modelos para FSPCOM com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	99
Tabela 5.51–MCS para FSPCOM para cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	99
Tabela 5.52–Modelos para FSPCOM com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	99
Tabela 5.53–MCS para FSPCOM para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.	101
Tabela 5.54–Modelo para FSPCOM com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar	101
Tabela 5.55–MCS para FSPCOM para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar	101
Tabela 5.56–Modelo para FSPCOM com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, Fixed-B, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA.	105

Tabela 5.57–MCS para FSPCOM para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, Fixed-B, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA. . .	105
Tabela 5.58–Modelo para FSPCOM com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior. .	105
Tabela 5.59–MCS para FSPCOM para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior.	106
Tabela A.1 – MSFE para todos os modelos estimados na aplicação empírica para o GDP251115	
Tabela A.2 – MSFE para todos os modelos estimados na aplicação empírica para o IPS10	116
Tabela A.3 – MSFE para todos os modelos estimados na aplicação empírica para o LHUR117	
Tabela A.4 – MSFE para todos os modelos estimados na aplicação empírica para o CPI-AUCSL	118
Tabela A.5 – MSFE para todos os modelos estimados na aplicação empírica para o FSP-COM	119

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	25
1	MATRIZES DE COVARIÂNCIA	29
1.1	Matrizes de covariância de longo prazo	29
1.2	<i>Shrinkage</i> e a matriz de covariância	31
2	COMPONENTES PRINCIPAIS E ESPARSIDADE	35
2.1	Análise de componentes principais	35
2.2	Análise de componentes principais esparsas	35
3	MODELOS FATORIAIS	37
3.1	Modelo de fatores dinâmicos	37
3.2	Hipóteses de identificação	38
3.3	Estimação e previsão	38
3.4	Número de fatores latentes	39
3.5	Comparação de previsões	40
4	MODELOS CONCORRENTES	43
4.1	Regressões com penalização	43
4.1.1	Regressão Ridge	43
4.1.2	LASSO	44
4.1.3	<i>Elastic Net</i>	45
4.1.4	adaLASSO	46
4.2	Generalized Dynamic Factor Model	46
5	APLICAÇÃO EMPÍRICA	49
5.1	Base de dados	49
5.2	Estimação	50
5.2.1	Matriz de covariância amostral	51

5.2.2	LRCM de Andrews	53
5.2.3	LRCM de Kiefer e Vogelsang	55
5.2.4	CMET	57
5.2.5	Matriz de Ledoit e Wolf	58
5.3	Previsão	61
5.3.1	GDP 251	61
5.3.2	IPS 10	71
5.3.3	LHUR	80
5.3.4	CPIAUCSL	89
5.3.5	FSPCOM	98
6	CONCLUSÃO	107
	REFERÊNCIAS	109
	APÊNDICES	113
	APÊNDICE A – MSFE PARA CADA MODELO ESTIMADO	115
A.1	GDP251	115
A.2	IPS10	116
A.3	LHUR	117
A.4	CPIAUCSL	118
A.5	FSPCOM	119

INTRODUÇÃO

No decorrer da última década, a disponibilização de painéis de dados macroeconômicos com grande quantidade de série temporais tem se tornado cada vez mais comum. Diversos trabalhos consideram um grande número de potenciais preditores com o intuito de obter informações relevantes para melhorar previsões macro-financeiras. Por exemplo, Medeiros, Vasconcelos e Freitas (2016), usa um conjunto de 102 variáveis mensais para prever a inflação brasileira, enquanto Vieira, Fernandes e Chague (2017) usa cerca de 200 variáveis semanais para prever a curva da taxa de juros (*yield curve*) brasileira. Em muitos casos, o número de séries temporais usadas como possíveis preditores supera a quantidade de pontos no tempo. De acordo com Pourahmadi (2013), nessa situação, é dito que o problema a ser investigado possui alta dimensão.

Nesse contexto, métodos tradicionais, como mínimos quadrados ordinários (*Ordinary Least Squares* - OLS) e vetores autoregressivos (*Vector Autoregressions* - VAR) são inadequados para realizar previsões. Tibshirani, Wainwright e Hastie (2015) mostra que a solução obtida por OLS não será única e cada uma das possíveis soluções levará a *overfit* quase-certamente. Já, por exemplo, Bańbura, Giannone e Reichlin (2008) argumenta que o VAR sofrerá com a maldição da dimensionalidade.

Uma alternativa ao uso de cada uma das séries individualmente, é representar o conjunto de potenciais preditores por um pequeno número de fatores latentes e componentes idiossincráticos, indicando comovimentos e características individuais, respectivamente. Essa representação sugere uma estrutura fatorial. Entre os modelos fatoriais, Stock e Watson (2009) indica o modelo de fatores dinâmicos (*Dynamic Factor Model* - DFM) como método padrão para previsões macroeconômicas.

Uma das hipóteses tradicionalmente usadas na estimação de modelos fatoriais, e.g. Stock e Watson (2002), é de que a matriz de covariância amostral modela adequadamente a dependência entre as séries macroeconômicas permitindo que os fatores latentes sejam extraídos de forma consistente.

No entanto, como argumentado em Fan e Liao (2019), dados ruidosos podem levar a violação dessa hipótese. Por exemplo, a presença de ruído pode distorcer os autovalores da matriz de covariância amostral dos dados. Adicionalmente, na presença de erros de medida, a primeira diferença pode introduzir componentes MA nas versões estacionárias das séries macroeconômicas. Como apresentado em Laurini e Ohashi (2015), nessas situações, o equivalente amostral da matriz de covariância pode não ser uma representação adequada da dependência entre séries.

Uma vez determinada a estrutura de dependência, podemos usar algum método estatístico para extrair os fatores latentes. Uma das formas mais populares é apresentada em

Stock e Watson (2002). Neste artigo, Stock e Watson usam análise de componentes principais (*Principal Component Analysis* - PCA) para recuperar os fatores latentes. A PCA é um método estatístico que permite que variáveis não ortogonais sejam representadas por um conjunto de variáveis sintéticas, construídas por meio de combinações lineares de todo o conjunto de dados, de modo a produzir componentes ortogonais entre si e que capturam a variabilidade dos dados de forma sequencial.

Apesar da popularidade da PCA para recuperar os fatores latentes, e.g. Bai e Ng (2002) e Stock e Watson (2009), artigos como Boivin e Ng (2006), Bai e Ng (2008) e Kim e Swanson (2014) questionam se é benéfico, em termos preditivos, usar a maior quantidade possível de séries macroeconômicas para a estimação dos fatores. A partir de simulação e dados reais, Boivin e Ng (2006) encontra que uma menor quantidade de variáveis não implica em pior desempenho preditivo. Bai e Ng (2008) usa a abordagem de *target predictors* para indicar que o uso de um subconjunto de série temporais pode levar a melhores previsões que o uso de todas as informações disponíveis. Já Kim e Swanson (2014) usa métodos de redução, como o *Elastic Net*, para realizar uma pré-seleção das variáveis que compõem os fatores e indica que esse método, em geral, leva a um menor erro quadrático médio de previsão (*Mean Squared Forecast Error* - MSFE) do que modelos puramente autoregressivos e modelos fatoriais sem a pré-seleção.

Uma outra forma de utilizar apenas um subconjunto dos dados disponíveis é por meio da análise componentes principais esparsas (*Sparse Principal Components Analysis* - SPCA). A SPCA, introduzida por Zou, Hastie e Tibshirani (2006), é uma alternativa a PCA. Ela utiliza um método de *shrinkage*, como o *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator* (LASSO) ou o *Elastic Net*, na construção das componentes principais, possibilitando que a matriz de carregamento seja esparsa, ou seja, que muitos dos seus elementos sejam zeros. Essa representação esparsa indica uma seleção das variáveis incluídas na construção dos fatores. Zou, Hastie e Tibshirani (2006) indica que é possível utilizar o *tradeoff* entre viés e variância para obter estimativas mais precisas, em amostras finitas, do que as alcançadas pela PCA. Portanto, é possível que ocorra ganhos preditivos no modelo.

Como destacado por Kristensen (2017), o método SPCA, com algumas exceções, tem sido pouco explorado para previsão de variáveis macroeconômicas. Kim e Swanson (2014) compara o uso do SPCA em relação ao PCA e PCA após pré-seleção por *Elastic Net*. Kristensen (2017) faz contribuições teóricas mostrando que o SPCA é capaz de estimar os fatores de forma consistente e discute um critério de informação para obtenção consistente do parâmetro de penalização. Porém, ambos modelam a dependência entre os dados apenas por meio da matriz de covariância amostral, não utilizam o DFM em suas aplicações empíricas e comparam as previsões feitas pelos modelos por meio do MSFE.

Nesse trabalho, analisamos os impactos da escolha da matriz de covariância e do método de extração dos fatores latentes para previsões macroeconômica decorrentes de

modelos fatoriais.

Consideramos matrizes de covariância de longo prazo (*Long-run covariance matrices* - LRCM), matrizes de covariância após a aplicação de um limiar (*Covariance matrices estimation by thresholding* - CMET) e baseadas na combinação convexa entre a matriz de covariância amostral e a matriz identidade. Adicionalmente, estimamos o DFM usando PCA e SPCA para extrair os fatores latentes.

Na aplicação empírica, é utilizada a tradicional base de variáveis macroeconômicas apresentada em Stock e Watson (2009). Essa base é utilizada em vários artigos como Groen e Kapetanios (2016), Aiolfi, Capistrán e Timmermann (2010) e Castle, Clements e Hendry (2013) e, após atualizações, em Stock e Watson (2012) e Koop (2013). Além da comparação do desempenho entre as diferentes especificações de DFM, consideramos métodos baseados em regressão com penalização, como o LASSO, e o modelo de fatores dinâmicos generalizado (*Generalized Dynamic Factor Model* - GDFM). Para comparar o desempenho preditivo dos modelos, usamos o MSFE e o *Model Confidence Set* (MCS).

Este trabalho está estruturado em 5 capítulos, além desta introdução, conclusão e apêndices. No Capítulo 1, apresenta-se uma revisão das diferentes matrizes de covariâncias usadas nesse trabalho. No Capítulo 2 são apresentados os métodos PCA e SPCA. No Capítulo 3, apresenta-se uma breve revisão de modelos fatoriais e de métodos para determinar o número de fatores em cada modelo. No Capítulo 4, apresentamos métodos de alta-dimensão alternativos a DFM. E, por fim, no Capítulo 5 fazemos uma aplicação empírica.

1 MATRIZES DE COVARIÂNCIA

Seja X um matriz $T \times n$ de dados em que T é o tamanho da amostra e n é o número de variáveis. Adicionalmente, considere que as colunas de X estão centradas na média. Uma das formas mais simples de medir a dependência entre variáveis é por meio da matriz de covariância amostral

$$S = \frac{X'X}{T} \quad (1.1)$$

De acordo com Laurini e Ohashi (2015), o uso da matriz de covariância amostral é válido quando os processos analisados são fracamente estacionários e independentes. Porém, S não é adequada para modelar a dependência entre séries na presença de alguma forma de dependência temporal causada pela presença de correlação serial ou por um processo contaminante. Adicionalmente, o seu desempenho pode ser ruim no contexto de alta dimensão. Como descrito em Fan, Liao e Liu (2016), se $n > T$, então S será singular. Além disso, S acumulará erros de estimação devido ao número elevado de parâmetros a serem estimados.

Ambas as situações podem ocorrer no contexto de séries macroeconômicas. Para o problema de dependência temporal, uma alternativa é o uso de LRCM. Para o problema de alta dimensão, consideramos CMET e regularizar a estrutura de autovalor-autovetor de S .

1.1 Matrizes de covariância de longo prazo

Considere uma série não estacionária C_t^o

$$C_t^o = C_t^v + u_t \quad (1.2)$$

em que C_t^o é o valor observado, C_t^v representa o valor verdadeiro de C no período t e u_t é um erro de medida.

Uma alternativa para combater a não estacionariedade de C_t^o é trabalhar com a sua primeira diferença

$$C_t^o - C_{t-1}^o = C_t^v - C_{t-1}^v + u_t - u_{t-1} \quad (1.3)$$

$$\Delta C_t^o = \Delta C_t^v + u_t - u_{t-1} \quad (1.4)$$

Porém, a Equação 1.4 indica que, caso exista um erro de medida associado a uma série não estacionária, a diferenciação introduzirá um componente MA(1). De acordo com

Laurini e Ohashi (2015), esse erro pode contaminar a estrutura de dependência das séries. Portanto, não seria adequado usar a matriz S para modelar a dependência entre séries. Uma alternativa é usar uma LRCM.

Assim como em Laurini e Ohashi (2015), a LRCM para um processo w_t fracamente estacionário e ergódico é definida como

$$V_{lr} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma(j) \quad (1.5)$$

em que $\gamma(j)$ representa a autocovariância de ordem j .

Apesar de ser possível calcular $\hat{\gamma}(j)$ para cada j , o equivalente amostral de $\hat{V}_{lr}$ requer o cálculo de infinitas autocovariâncias amostrais.

Uma das formas de contornar essa dificuldade é utilizar a estimação não paramétrica proposta por Andrews (1991). Essa abordagem baseia-se em estimar

$$V_{lr}^A = \sum_{j=-(n-1)}^{n-1} K\left(\frac{j}{b}\right) \gamma(j) \quad (1.6)$$

em que $K(\cdot)$ é uma função de *kernel* contínua, simétrica e tal que $K(0) = 1$. Para que seja garantida a consistência do estimador, é necessário que o tamanho da janela cresça a uma taxa menor do que o tamanho da amostra. Portanto, a regra de janela (*bandwidth*) b é determinada de modo que $b \rightarrow \infty$ a medida que $n \rightarrow \infty$.

Apesar da classe de estimadores propostos por Andrews (1991) serem consistentes, Müller (2007) mostra que eles não são robustos a erros de medida. A não robustez a erros de medidas motiva o uso de estimadores inconsistentes, mas que são robustos a contaminações, como os apresentados em Kiefer e Vogelsang (2002) e Kiefer e Vogelsang (2005). Em particular, Kiefer e Vogelsang (2002) sugere o uso de toda a amostra como regra de janela. Como o tamanho da janela não varia com a amostra, essa classe de estimadores, conhecida como *fixed b*, é claramente inconsistente.

Além de ser robusto a contaminações, o estimador proposto por Kiefer e Vogelsang (2002) possui um bom desempenho em amostras finitas.

Assim como mostrado em Laurini e Ohashi (2015), uma versão do estimador da classe *fixed b* é representada por

$$V_{lr}^{KV} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^T \hat{w}_i \left(1 - \frac{|i-j|}{T}\right) \hat{w}_j \quad (1.7)$$

em que $\hat{w}$ representa o processo w_t centrado na média e a função de *kernel* é do tipo Bartlett.

1.2 Shrinkage e a matriz de covariância

Além dos problemas relativos a dependência temporal, S pode não ser adequada para modelar a dependência entre séries pois acumulará erros de estimação devido ao número elevado de parâmetros a serem estimados. Como em Bickel, Levina *et al.* (2008), uma alternativa é substituir S pela CMET usando um *hard-threshold*.

Considere uma matriz M em que cada um de seus elementos são representados por m_{ij} . O operador de *hard-threshold* $H(\cdot)$ é tal que

$$H(M, s) = m_{ij} \mathbb{1}(|m_{ij}| \geq s) \quad (1.8)$$

em que $\mathbb{1}$ é a função indicadora e s é um limiar. No caso em que substituímos M por S , restringimos a aplicação do operador $H(\cdot)$ apenas aos elementos fora da diagonal principal. Assim como descrito em Bickel, Levina *et al.* (2008), o limiar s pode ser escolhido por meio de um processo de validação cruzada.

A partir da aplicação do operador $H(\cdot)$, podemos evitar a estimação das covariâncias com valor absoluto menor que um determinado limiar ao atribuir zero para essas entradas da matriz. Portanto, muitos elementos da matriz podem ser reduzidos a zero. Logo, o operador de *hard-threshold* é um método de *shrinkage* capaz de introduzir esparsidade na matriz de covariância.

Porém, além do acúmulo de erros de estimatórias, Pourahmadi (2013) indica que a alta dimensão pode levar a distorções na estrutura de autovalores - autovetores de S quando comparada a sua contra-parte amostral. Por exemplo, Ledoit e Wolf (2004) mostra que o maior autovalor de S tende a ser maior que sua contra-parte amostral, enquanto o menor autovalor de S tende a ser menor que sua contra-parte amostral.

Uma alternativa capaz de mitigar essa distorção é impor uma regularização nos autovalores como a sugerida no próprio artigo Ledoit e Wolf (2004). Abaixo será utilizada a mesma notação de Ledoit e Wolf (2004).

Note que S é um estimador não viesado para a matriz de covariância populacional Σ . Porém, S é instável quando $n \gg T$. Note também que a matriz identidade é extremamente estável, porém pode ser uma estimativa fortemente viesada de Σ .

Uma alternativa é considerar estimadores na forma

$$\Sigma^* = \alpha_1 I + \alpha_2 S \quad (1.9)$$

e escolher os coeficientes α_1 e α_2 de forma a minimizar uma função de perda. Note que toda a perda atribuída a I ocorre por conta do viés, já a perda relativa a S ocorre por conta da variância. Portanto, a escolha de α_1 e α_2 pode ser interpretada como um *tradeoff* entre viés e variância.

Como mostrado em Ledoit e Wolf (2004), para o caso em que função de perda é quadrática e a distância entre a matriz estimada e a populacional é dada pela norma de Frobenius, podemos encontrar os valores de α_1 e α_2 a partir de quatro escalares

$$\mu = \langle \Sigma, I \rangle \quad (1.10)$$

$$\alpha^2 = \|\Sigma - \mu I\|^2 \quad (1.11)$$

$$\beta^2 = E[\|S - \Sigma\|^2] \quad (1.12)$$

$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 = E[\|S - \mu I\|^2] \quad (1.13)$$

em I é a matriz identidade.

A solução da Equação 1.9 pode ser escrita como

$$\Sigma^* = \frac{\beta^2}{\delta^2} \mu I + \frac{\alpha^2}{\delta^2} S \quad (1.14)$$

Como analisado em Ledoit e Wolf (2004), note que

$$\mu = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \lambda_i = E \left[\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p l_i \right] \quad (1.15)$$

em que λ_i representa os autovalores de Σ e l_i representa os autovalores de S. Note também que

$$\frac{1}{p} E \left[\sum_{i=1}^p (l_i - \mu)^2 \right] = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (\lambda_i - \mu)^2 + E[\|S - \Sigma\|^2] \quad (1.16)$$

A Equação 1.16 indica que os autovalores amostrais são mais dispersos em torno de μ do que os verdadeiros autovalores e que essa dispersão é igual a $E[\|S - \Sigma\|^2]$. Portanto, a determinação de Σ^* também leva os autovalores a serem pressionados para valores mais centrais.

No entanto, as Equações 1.14 e 1.16 requerem o conhecimento da verdadeira matriz de covariância Σ , e essa matriz não é observada. Porém, assintoticamente, existe um estimador consistente para μ , α^2 , β^2 e δ^2 . Portanto, também existe, assintoticamente, um estimador para Σ^* .

Ledoit e Wolf (2004) apresenta o estimador autêntico sobre *general asymptotics*. Dessa forma, é permitido que o número de variáveis n cresça de acordo com T , sendo indicado como n_T , mas de forma que $\frac{n_T}{T} \leq K_1$, em que K_1 é uma constante que independe de T . Assim como em Ledoit e Wolf (2004), o subscrito T será acrescentado a notação dessa seção para indicar que o resultados são válidos assintoticamente.

Sejam m_T e d_T tais que

$$m_T = \langle S_T, I_T \rangle \quad (1.17)$$

$$d_T^2 = \|S_T - m_T I_T\|^2 \quad (1.18)$$

m_T e d_T são estimadores consistente para μ_T e δ_T .

Considere que

$$b_T^2 = \min(d_T^2, \bar{b}_T^2) \quad (1.19)$$

$$\bar{b}_T^2 = \frac{1}{T^2} \sum_{k=1}^T \|X_k X_k' - S_T\|^2 \quad (1.20)$$

em que X_k , se refere a k-ésima linha da matriz de dados X . b_T^2 é um estimador consistente para β_T^2 . Por fim, defina a_T^2 como

$$a_T^2 = d_T^2 + b_T^2 \quad (1.21)$$

a_T^2 é um estimador consistente para α_T^2 .

Uma que vez temos estimadores consistentes para os escalares μ_T , α_T^2 , β_T^2 e δ_T^2 , temos um estimador consistente para Σ^* dado por

$$\hat{\Sigma}^* = \frac{b_T^2}{d_T^2} m_T I_T + \frac{a_T^2}{d_T^2} S_T \quad (1.22)$$

Note que esse estimador não depende da verdadeira matriz de covariância Σ . Portanto, é um estimador genuíno que pode ser utilizado nas aplicações empíricas.

2 COMPONENTES PRINCIPAIS E ESPARSIDADE

2.1 Análise de componentes principais

Como descrito em Jolliffe (1986), a PCA é um método estatístico capaz de transformar um conjunto de variáveis interrelacionadas em um novo conjunto de variáveis sintéticas não correlacionadas chamadas de componentes principais.

Como notado por Jolliffe (1986), a PCA pode ser utilizada para obter uma grande redução de dimensionalidade. Segundo Johnson, Wichern *et al.* (2002), é necessário considerar todas as componentes principais para recuperar a estrutura de variância - covariância presente nos dados originais. Porém, as componentes principais capturam a variabilidade de forma sequencial. Portanto, ao permitir que uma pequena parte da variação presente no sistema original seja descartada, é possível obter uma grande redução na dimensão do problema.

Similarmente a Zou, Hastie e Tibshirani (2006), considere a matriz de dados X . A decomposição em valores singulares de X é tal que

$$X = UDV' \quad (2.1)$$

em que U e V são matrizes ortogonais e D é uma matriz diagonal contendo os valores singulares. $Z = UD$ são as componentes principais e as colunas de V são os carregamentos (*loadings*) correspondentes a cada uma das componentes principais.

Alternativamente, como apresentado em Jolliffe (1986), podemos obter Z e V por meio de uma decomposição autovalor-autovetor da matriz de covariância. Defina $\Gamma_x = E(X'X)$. Como Γ_x é uma matriz de covariância, simétrica e positiva definida, ela pode ser decomposta em

$$\Gamma_x = PDP' \quad (2.2)$$

A matriz P contém os autovetores de Γ_x nas suas colunas. D é uma matriz diagonal, contendo os autovalores de Γ_x , ordenada de forma que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$. O produto das matrizes X e P determina as componentes principais, enquanto P' é a matriz de carregamento das componentes principais.

2.2 Análise de componentes principais esparsas

De acordo com Zou, Hastie e Tibshirani (2006), PCA possui duas vantagens. Ela captura a variabilidade dos dados de forma sequencial e as componentes principais não são correlacionadas entre si. No entanto, eles argumentam que a PCA possui a desvantagem de

ser uma combinação linear de todas as variáveis na base de dados. Zou, Hastie e Tibshirani (2006) introduz a SPCA para mitigar essa desvantagem. A SPCA é similar a PCA, mas permite que a matriz de carregamento seja esparsa.

Inicialmente, Zou, Hastie e Tibshirani (2006) conecta PCA a um problema de regressão. Dado que cada componente principal é uma combinação linear de todas as variáveis da base de dados, os carregamentos das componentes principais podem ser recuperados ao regredir cada componente principal em todas as variáveis da base de dados. Ao considerar uma regressão com penalidade, como o LASSO, ao invés de de uma regressão linear, é possível obter uma matriz de carregamento esparsa.

Zou, Hastie e Tibshirani (2006) propõe um algoritmo para a SPCA baseado nos seguintes passos

1. Escolha r componentes principais e faça com que $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r]$ seja igual a $V[:, 1:r]$. Inicialmente, considere que $B = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r]$ seja igual a A .
2. Resolva o problema do LASSO ou (Elastic Net) para cada $j = 1, 2, \dots, r$ obtendo novos valores β_j .
3. Calcule a SVD de $X'XB$ obtendo novas matrizes U , D e V . Atualize A de modo que $A = UV'$.
4. Repita os passos 2 e 3 até convergência.
5. Padronização: $\hat{V}_j = \frac{\beta_j}{\|\beta_j\|}$ para cada $j = 1, 2, \dots, r$.

Na segunda etapa do algoritmo da SPCA, é necessário estimar uma regressão com penalidade. Os resultados dessas regressões dependem da escolha de um parâmetro de penalização. Wang, Li e Leng (2009) sugere generalizar o critério de informação Bayesiano (*Bayesian information criterion* - BIC) para uma forma mais geral adequada a determinação desse parâmetro. Defina

$$IC_m = \arg \min_m \ln V + m \times \frac{\ln(nT)}{nT} \times C_n \quad (2.3)$$

$V(\cdot)$ é a variância residual média e $\frac{\ln nT}{nT} C_n$ é uma função de penalização com $C_n > 0$. Note que no caso dos modelos fatoriais V depende dos fatores $\hat{F}$ e da matriz de carregamento $\hat{\Lambda}$, enquanto m indica o número de entradas que não são zero na matriz de carregamento.

De acordo com Wang, Li e Leng (2009), $C_n = \ln \ln(nT)$ leva a bons resultados em amostras finitas. Enquanto Kristensen (2017) sugere o uso de $C_n = 1$. Nós consideramos ambos os critérios na nossa aplicação empírica.

3 MODELOS FATORIAIS

Modelos fatoriais têm se destacado na literatura de previsão quando consideramos grandes bases de dados. De acordo com Eklund e Kapetanios (2008), tais modelos são caracterizados por

$$Y_t = \lambda(L)f_t + e_t \quad (3.1)$$

Y_t é um vetor de variáveis observadas, f_t é um vetor com q fatores latentes, $\lambda(L)$ é uma matriz de defasagens polinomiais e e_t é um componente idiossincrático que pode ser serialmente correlacionado.

3.1 Modelo de fatores dinâmicos

Como discutido em Stock e Watson (2009), o DFM é um dos modelos mais importantes para realizar previsões macroeconômicas. Esse modelo pode ser representado em sua forma estática ou dinâmica.

A forma dinâmica é representada pelo seguinte conjunto de equações

$$Y_t = \lambda(L)f_t + e_t$$

$$f_t = \psi(L)f_{t-1} + \eta_t \quad (3.2)$$

$$e_{it} = \delta_i(L)e_{it-1} + v_{it} \quad (3.3)$$

$\psi(L)$ e $\delta(L)$ são matrizes de defasagem polinomiais. η_t e v_{it} são componentes idiossincráticos. Assuma que as inovações nos fatores não são correlacionadas com os componentes idiossincráticos.

A forma dinâmica representa a dependência de Y_t em relação aos fatores (possivelmente defasados) de forma explícita. Uma representação é apresentada na versão estática do DFM sendo caracterizada por

$$Y_t = \Lambda F_t + e_t \quad (3.4)$$

$$F_t = \Phi(L)F_{t-1} + G\eta_t \quad (3.5)$$

$$G = [I_q \ 0]' \quad (3.6)$$

Essa representação considera que existem r fatores estáticos F_t ao invés de q fatores dinâmicos. Note que se $r = q$, então $G = I$. A Equação 3.4 indica que F_t possui apenas um efeito contemporâneo em Y_t , diferentemente da Equação 3.1.

De acordo com Stock e Watson (2016), o DFM em suas formas dinâmicas e estáticas são equivalentes. É possível alterar entre essas representações por meio das seguintes equações

$$\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \quad (3.7)$$

$$F_t = (f'_t, f'_{t-1}, \dots, f'_{t-p})' \quad (3.8)$$

Tanto na versão estática quanto na dinâmica, podemos identificar uma componente comum, $\chi_t = \lambda(L)f_t = \Lambda F_t$, representando comovimentos e uma componente idiossincrática, e_t , capaz de capturar características individuais.

3.2 Hipóteses de identificação

Nessa seção temos uma breve revisão das principais hipóteses apresentadas em Stock e Watson (2002). Uma alternativa é o conjunto de hipóteses usadas em Fan, Wang e Zhong (2019). Considere as seguintes hipóteses:

$$H_1: \frac{\Lambda' \Lambda}{n} \rightarrow I_r$$

$$H_2: E(F_t F_t') = \Gamma_F \text{ em que } \Gamma_F \text{ é diagonal com } \sigma_{ii} > \sigma_{jj} > 0 \text{ for } i < j.$$

$$H_3: T^{-1} \sum_t F_t F_t' \rightarrow \Gamma_F$$

$$H_4: E\left(\frac{e'_{it} e_{it+u}}{n}\right) = \gamma_{n,t} \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_t \sum_{u=-\infty}^{\infty} |\gamma_{n,t}| < \infty$$

$$H_5: E(e_{it} e_{jt}) = \tau_{ij,t} \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_t n^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\tau_{ij,t}| < \infty$$

H_1 , H_2 e H_3 são usadas para identificar os fatores. Ao considerar que $\frac{\Lambda' \Lambda}{n}$ converge para uma matriz positiva definida, exclui-se a possibilidade de que algum fator tenha carregamento igual a zero para alguma variável no painel de dados. Como $\Lambda F_t = \Lambda R R^{-1} F_t$, H_1 é usada para limitar R a uma matriz ortonormal. H_2 restringe R a uma matriz diagonal com elementos ± 1 . H_4 permite que exista correlação serial no processo e_{it} . H_5 possibilita que exista correlação na *cross-section*.

3.3 Estimação e previsão

Visto que os fatores são variáveis latentes, é necessário usar algum método estatístico para extrai-los. Nesse trabalho, consideramos métodos como PCA e SPCA. Assim como em Stock e Watson (2002), considere o seguinte problema de mínimos quadrados não lineares

$$V(\tilde{F}, \tilde{\Lambda}) = (nT)^{-1} \sum_i \sum_t (y_{it} - \tilde{\Lambda}_i \tilde{F}_t) \quad (3.9)$$

escrito e função de fatores e carregamentos hipotéticos, $\tilde{F}$ e $\tilde{\Lambda}$, respectivamente. Seja $\hat{F}$ e $\hat{\Lambda}$ os valores que minimizem a Equação 3.9.

Ao concentrar em $\hat{F}$, minimizar a Equação 3.9 é equivalente a

$$\max \text{tr}[\tilde{\Lambda}' Y' Y \tilde{\Lambda}] \text{ s. a. } \frac{\tilde{\Lambda}' \tilde{\Lambda}}{n} = I_r \quad (3.10)$$

Note que o problema representado na Equação 3.10 é o mesmo que o de componentes principais. Portanto, podemos resolvê-lo ao fazer que $\hat{F}$ seja igual aos autovetores de $X'X$, de modo que $F = \frac{X'\hat{\Lambda}}{n}$. Adicionalmente, $\hat{\Lambda}$ é estimado por meio dos autovalores de $X'X$. Note que podemos obter a mesma solução considerando a decomposição em valores singulares (SVD).

De acordo com Stock e Watson (2002), PCA fornece uma forma consistente de estimar os fatores latentes. Porém, pode ter um desempenho ruim em amostras finitas. Portanto, também consideraremos a extração por SPCA.

Após recuperar os fatores e a matriz de carregamento, precisamos estimar os demais parâmetros. Uma das formas mais simples de estimá-los é apresentada em Giannone, Reichlin e Sala (2004) e Forni *et al.* (2009). Ambos usam PCA para estimar os fatores e a matriz de carregamento e estimam os demais parâmetros via VAR.

Após a estimação, o DFM pode ser usado para realizar previsões das variáveis desejadas iterativamente, como discutido em Clements e Hendry (1998).

3.4 Número de fatores latentes

Tanto a PCA quanto SPCA permitem recuperar os fatores latentes. Porém, é necessário determinar o número de fatores que desejamos extrair. De acordo com Fan, Wang e Zhong (2019), podemos determinar a quantidade de fatores ao analisar os autovalores da matriz de covariância amostral ou versões robustas dessa matriz.

Ahn e Horenstein (2013) propõe um estimador para escolher o número de fatores dado por

$$\hat{r}^{AH} = \arg\max_{i \leq r.\max} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \quad (3.11)$$

para um determinado número máximo de fatores determinados a priori $r.\max$, $\hat{r}^{AH}$ é o número estimado de fatores baseado na razão de autovalores consecutivos, λ_i e λ_{i+1} , da matriz de covariância dos dados.

Onatski (2010) introduz uma alternativa baseada na diferença entre autovalores con-

secutivos. Para um número máximo de fatores $r.\max$ e para $\delta > 0$ defina

$$\hat{r}^O = \max\{i \leq r.\max : (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \geq \delta\} \quad (3.12)$$

como o número de fatores estimados pelo critério de Onatski. Em aplicações práticas, o valor de δ é calibrado por meio de um procedimento descrito em Onatski (2010).

Bai e Ng (2002) propõe um terceiro procedimento para determinar o número de fatores latentes. Defina

$$IC = \ln(V(r, \hat{F})) + r \left(\frac{n+T}{nT} \right) \ln \left(\frac{nT}{n+T} \right) \quad (3.13)$$

$V(r, \hat{F})$ é a variância residual média quando o modelo é estimado com r fatores, e $\left(\frac{n+T}{nT} \right) \ln \left(\frac{nT}{n+T} \right)$ é uma função de penalização que depende tanto de n quanto de T . De acordo com Bai e Ng (2002), o número de fatores estimados é o valor r que minimiza IC .

3.5 Comparação de previsões

Na literatura de previsões macroeconômicas, os modelos costumam ser avaliados por uma métrica de erro. Uma das métricas mais populares é o MSFE. Apesar de fornecer informações sobre a qualidade das previsões, o MSFE não indica claramente se diferentes modelos produzem previsões significativamente diferentes.

Uma alternativa capaz de contornar essa limitação é o MCS introduzido por Hansen, Lunde e Nason (2011). O algoritmo do MCS testa sequencialmente a hipótese nula de mesma habilidade preditiva (*equal predictive ability* - EPA) entre modelos, e baseado em uma regra de eliminação, determina os modelos com os melhores desempenhos preditivos.

Tal procedimento permite construir um conjunto que contenha os melhores modelos, em termos preditivos, dado uma determinada função de perda e um nível de confiança. Assim como notado por Bernardi e Catania (2018), o procedimento começa determinando o diferencial de perda entre um número M de modelos em duas formas diferentes

$$d_{ij,t} = l_{i,t} - l_{j,t} \quad (3.14)$$

$$d_{i,t} = \frac{1}{M-1} \sum_j d_{ij,t} \quad (3.15)$$

$l_{i,t}$ e $l_{j,t}$ são as perdas associadas aos modelos i e j no período t . Duas das funções de perda mais populares são a perda quadrática e a perda absoluta. A primeira calcula a distância entre grandezas elevando a diferença entre elas ao quadrado, já a segunda considera o módulo

dessa diferença. Portanto, o MCS consegue se beneficiar das informações usadas para o cálculo de métricas como o MSE.

Assim como em Bernardi e Catania (2018), o MCS usa duas estatísticas, $T_{R,M}$ e $T_{max,M}$, para testar a hipótese nula de EPA entre os modelos.

$$T_{R,M} = \max |t_{ij}| \quad (3.16)$$

$$T_{max,M} = \max t_i \quad (3.17)$$

em que t_{ij} e t_i são definidos como

$$t_{ij} = \frac{\bar{d}_{ij}}{\sqrt{\hat{var}(\bar{d}_{ij})}} \quad (3.18)$$

$$t_i = \frac{\bar{d}_i}{\sqrt{\hat{var}(\bar{d}_i)}} \quad (3.19)$$

$\bar{d}_{ij}$ e $\bar{d}_i$ são as versões amostrais das Equações 3.14 e 3.15. $\hat{var}(\bar{d}_{ij})$ e $\hat{var}(\bar{d}_i)$ são estimados usando *bootstrap*.

Se H_0 não é rejeitado, o algoritmo do MCS é interrompido e todos os M modelos pertencem ao conjunto de modelos com mesma habilidade preditiva. Caso contrário, o algoritmo usa uma regra de eliminação como

$$e_{max,M} = \operatorname{argmax} \frac{\bar{d}_i}{\hat{var}(\bar{d}_i)} \quad (3.20)$$

para eliminar o modelo com o pior desempenho. Após a eliminação, o procedimento reinicia com M-1 modelos e é repetido até que reste apenas 1 modelo ou até que não seja possível rejeitar H_0 .

4 MODELOS CONCORRENTES

Além do DFM, muitos outros métodos podem ser usados para realizar previsões no contexto de alta dimensão. Porém, é necessário limitar o número de modelos preditivos para comparação. Nesse trabalho, além do DFM, consideramos regressões com penalização e o GDFM. Tais modelos são justificados destacam-se na literatura como mostrado, por exemplo, em Medeiros, Vasconcelos e Freitas (2016), Smeekes e Wijler (2018), Forni *et al.* (2005) e Barigozzi e Hallin (2020).

Medeiros, Vasconcelos e Freitas (2016) analisa o desempenho preditivo de métodos de alta dimensão como o LASSO, *adaLASSO*, *Elastic Net*, *bagging* e *target factors* em relação ao AR(4). Os autores encontram que os métodos de alta dimensão produzem RMSE menores que o *benchmark* para a maioria das variáveis macroeconômicas previstas. Os autores ressaltam que a melhora na previsão é menos conclusiva para o método *target factors*.

Adicionalmente, Smeekes e Wijler (2018) apresenta evidências de que modelos de regressão com penalidade são mais robusto a erros de especificações do que modelos fatoriais.

Já Forni *et al.* (2005) e Barigozzi e Hallin (2020) argumentam que o GDFM é mais flexível que o DFM sendo capaz de capturar toda a dinâmica da estrutura de covariância dos dados. Adicionalmente, Forni *et al.* (2005) comenta que uma das vantagens do GDFM é o fato dele atribuir peso as variáveis de acordo com a razão sinal-ruído estimada.

Portanto, é razoável compararmos o desempenho preditivo entre as regressões com penalização, GDFM e DFM.

4.1 Regressões com penalização

4.1.1 Regressão Ridge

A regressão Ridge é um método de seleção de variáveis proposto por Hoerl e Kennard (1970). Esse método baseia-se no OLS, porém penaliza os coeficientes da regressão.

De acordo com Friedman, Hastie e Tibshirani (2001), os coeficientes estimados pela regressão Ridge são dados por

$$\hat{\beta}^{Ridge} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j)^2 + \kappa \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \right\} \quad (4.1)$$

em que Y representa a variável de interesse, X indica a matriz de possíveis preditores e $\hat{\beta}^{Ridge}$ é a matriz de coeficientes obtidos pela regressão Ridge.

A Representação 4.1 indica que a regressão Ridge minimiza a soma do quadrado dos resíduos sujeito a uma penalização da norma ℓ_2 , dada por $\sum_{j=1}^p \beta_j^2$, e com um parâmetro κ que controla a magnitude da penalidade. Note que se $\kappa = 0$, $\hat{\beta}^{Ridge} = \hat{\beta}^{OLS}$.

Friedman, Hastie e Tibshirani (2001) indica que a regressão Ridge pode ser escrita na forma de um problema de minimização.

$$\hat{\beta}^{Ridge} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j)^2 \text{ s. a. } \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \leq t \quad (4.2)$$

A Representação 4.2 torna explícita a restrição no tamanho dos coeficientes.

Caso duas variáveis sejam altamente correlacionadas, a imposição da penalização na regressão leva a seleção de uma dessas variáveis para ser incorporada ao modelo, como descrito em Friedman, Hastie e Tibshirani (2001).

4.1.2 LASSO

O LASSO é um método de *shrinkage* proposto por Tibshirani (1996) como uma alternativa a regressão Ridge. Assim como a Ridge, o LASSO penaliza os coeficientes da regressão linear. No entanto, os métodos diferem no tipo de penalização. Enquanto o Ridge penaliza pela norma ℓ_2 , a penalização do LASSO é baseada na norma ℓ_1 .

Os coeficientes obtidos pelo LASSO são representados por

$$\hat{\beta}^{LASSO} = \arg \min_{\beta} \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j)^2 + \kappa \sum_{j=1}^p |\beta_j| \right\} \quad (4.3)$$

em que Y representa a variável de interesse, X indica a matriz de possíveis preditores e $\hat{\beta}^{LASSO}$ é a matriz de coeficientes obtidos pelo LASSO.

Similarmente a regressão Ridge, o LASSO pode ser obtido por meio de um problema de minimização:

$$\hat{\beta}^{LASSO} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j)^2 \text{ s. a. } \sum_{j=1}^p |\beta_j| \leq t \quad (4.4)$$

Assim como na Equação 4.2, essa representação torna explícita a restrição imposta aos coeficientes do modelo. Note que se κ é igual a zero, A Equação 4.3 é reduzida a solução de mínimos quadrados. Já no caso em que κ tende ao infinito, todos os coeficientes são reduzidos a zero.

Para valores suficientemente grandes, o LASSO é capaz de produzir soluções esparsas e realizar seleção de variáveis. Devido a esparsidade, esse método produz soluções mais

parcimoniosas do que as obtidas por métodos tradicionais como o de mínimos quadrados ordinários. Além disso, Tibshirani, Wainwright e Hastie (2015) indica que ao usar o LASSO é possível beneficiar-se do *tradeoff* entre viés e variância para obter estimativas mais precisas em amostras finitas.

A determinação do parâmetro de penalização é um dos aspectos críticos na estimação do LASSO. Tipicamente, esse parâmetro é determinado por validação cruzada ou por algum critério de informação.

No caso de séries temporais, a aplicação de validação cruzada pode ser problemática devido a dependência temporal. Adicionalmente, critérios de informação tem a vantagem de que é necessário estimar a trajetória de regularização uma única vez.

4.1.3 Elastic Net

Zou e Hastie (2005) indica três limitações do LASSO

1. Se o número de potenciais preditores, representado por p , é maior que o número de observações, representado por n , o LASSO é capaz de selecionar no máximo n preditores.
2. Se um grupo de variáveis possui uma correlação par a par muito alta, o LASSO tende a selecionar apenas uma dessas variáveis.
3. No caso $n > p$, se os preditores possuem correlação alta, a regressão Ridge, geralmente, possui um melhor desempenho preditivo do que o LASSO.

Para mitigar essas limitações, Zou e Hastie (2005) propõe uma regressão com penalidade, nomeada *Elastic Net*, capaz de combinar as penalizações da regressão Ridge e do LASSO.

De acordo com Zou e Hastie (2005), os coeficientes obtidos pelo *Naive Elastic Net* são representados por

$$\hat{\beta}^{EN} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j)^2 + \kappa_1 \sum_{j=1}^p |\beta_j| + \kappa_2 \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \right\} \quad (4.5)$$

Zou e Hastie (2005) mostra que se considerarmos $\alpha = \frac{\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}$, o coeficiente obtido pelo *Naive Elastic Net* pode ser representado por

$$\hat{\beta}^{EN} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j)^2 \text{ s. a. } (1 - \alpha) \sum_{j=1}^p |\beta_j| + \alpha \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \leq t \quad (4.6)$$

No caso em $\alpha = 1$, o problema é reduzido ao caso da regressão Ridge. Se $\alpha = 0$, temos o problema é simplificado para o caso do LASSO.

Assim como a regressão Ridge e o LASSO, o *Elastic Net* pode ser usado para obter previsões mais precisas por meio do *tradeoff* entre viés e variância.

4.1.4 *adaLASSO*

De acordo com Zou, Hastie e Tibshirani (2006) e reforçado por Medeiros, Vasconcelos e Freitas (2016), o LASSO não possui a propriedade do oráculo e tem seu desempenho prejudicado quando número de variáveis cresce. Como o intuito de combater essas desvantagens, Zou, Hastie e Tibshirani (2006) introduz o *adaLASSO*.

Os coeficientes obtidos pelo *adaLASSO* são representados por

$$\hat{\beta}^{adaLASSO} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j)^2 + \kappa \sum_{j=1}^p w_j |\beta_j| \right\} \quad (4.7)$$

em que $w_j = |\hat{\beta}_j^*|^{-1}$ com β_j^* estimado previamente. Como indicado por Medeiros, Vasconcelos e Freitas (2016), β_j^* pode ser estimado usando, por exemplo, LASSO ou Elastic Net. A partir dessa modificação, o *adaLASSO* obtém a propriedade do oráculo.

4.2 Generalized Dynamic Factor Model

De acordo com Forni e Lippi (2011), o GDFM é baseado na seguinte decomposição

$$y_{it} = \chi_{it} + \xi_{it} = b_{i1}(L)u_{1t} + \dots + b_{iq}(L)u_{qt} + \xi_{it} \text{ com } i \in N, t \in Z \quad (4.8)$$

em que ξ_{it} é a componente idiossincrática, χ_{it} a componente comum, b_{if} com $f = 1, \dots, q$ são os filtros e u_t é um vetor q -dimensional de ruídos branco ortonormais que representam os choques comuns. Forni e Lippi (2011) destaca duas hipóteses do modelo:

H1) u_t é ortogonal a ξ_{it-k} para todo $i \in N$ e $k \in Z$.

H2) As covariâncias cruzadas entre os ξ s é fraca.

Forni e Lippi (2011) indica que a segunda hipótese é muito mais fraca que exigir que ξ s tenham covariância cruzada igual a 0 e, por esse motivo, chama o modelo de GDFM.

Como discutido em Forni *et al.* (2000), o GDFM pode ser estimado pelo método de componentes principais dinâmicas introduzido por Brillinger (1981). No entanto, essa estimação não é adequada para o contexto de previsões.

Porém, Forni *et al.* (2005) apresenta um procedimento adequado para previsões baseado em Forni *et al.* (2000).

Forni *et al.* (2005) indica que é possível aproximar o espaço dos fatores por meio de combinações lineares dos dados observados. Tal aproximação é possível porque se a dimensão da *cross-section* tende a infinito, a componente idiossincrática tende a 0 devido a H2).

A previsão da componente comum é obtida ao projetarmos os valores futuros de χ no espaço gerado pelo fatores como na Equação 3.2 de Forni *et al.* (2005). Já a componente idiossincrática pode ser modelada usando técnicas univariadas.

Note ainda que é necessário determinar o número de choques comuns no modelo. Para isso, podemos usar o procedimento apresentado em Hallin, Liska *et al.* (2007). Nesse procedimento o número de choques comuns é determinado por um critério de informação baseado no número de autovalores divergentes da matriz de densidade espectral.

5 APLICAÇÃO EMPÍRICA

5.1 Base de dados

Nesse trabalho será utilizada a base de variáveis macroeconômicas apresentada em Stock e Watson (2009). Essa é uma base de dados conhecida na literatura sendo utilizada em Groen e Kapetanios (2016), Aiolfi, Capistrán e Timmermann (2010) e Castle, Clements e Hendry (2013) e, após atualizações, em Stock e Watson (2012) e Koop (2013).

Tal base de dados consiste, originalmente, em 144 séries temporais representando variáveis macroeconômicas medidas trimestralmente para a economia americana de 1959:1 até 2006:4. Similarmente a Stock e Watson (2012), essas variáveis podem ser classificadas em 13 grupos, como apresentado na tabela abaixo.

Grupo	Descrição	Número de Séries
1	Componentes do PIB	16
2	Produção industrial	14
3	Emprego	20
4	Taxa de desemprego	7
5	Habitação	6
6	Inventário	6
7	Preços	37
8	Salários	6
9	Taxa de juros	13
10	Moeda	8
11	Taxa de câmbio	5
12	Mercado de ações	5
13	Expectativas	1

Tabela 5.1 – Classificação das séries temporais contidas na base de dados apresentada em Stock e Watson (2009).

Como discutido em Stock e Watson (2009), as realizações de 1959:1 e 1959:2 são usadas no cálculo da primeira e segunda diferença para obter estacionariedade nas séries. A primeira diferença em log é usada para variáveis em quantidades reais, a primeira diferença é usada para taxas de juros nominais e a segunda diferença em log é usada para as séries de preço. Após esse tratamento, ficam disponíveis os dados de 1959:3 até 2006:4, totalizando $T = 190$ realizações no tempo.

Além disso, Stock e Watson (2009) remove 35 séries por representarem medidas consideradas muito agregadas pelos autores. Essas séries temporais podem ser reconstruídas com as informações presentes nas 109 variáveis restantes e não fornecem novas informações para a construção dos fatores. Por exemplo, a variável de número de empregados total (CES002) é

removida, porém ela pode ser reconstruída a partir do número de empregados em cada um dos setores. Uma descrição detalhada das séries originalmente disponibilizadas, bem como o tipo de transformação usada para obter estacionariedade e um indicador se a série foi usada na construção dos fatores é disponibilizado em Stock e Watson (2009).

A Tabela 5.2 mostra a quantidade de séries temporais presentes em cada grupo após a remoção das 35 séries.

Grupo	Descrição	Número de Séries
1	Componentes do PIB	10
2	Produção industrial	9
3	Emprego	16
4	Taxa de desemprego	7
5	Habitação	4
6	Inventário	6
7	Preços	24
8	Salários	5
9	Taxa de juros	9
10	Moeda	8
11	Taxa de câmbio	5
12	Mercado de ações	5
13	Expectativas	1

Tabela 5.2 – Número de séries temporais presentes em cada um dos grupos após a remoção das 35 séries realizadas em Stock e Watson (2009).

As últimas 20 realizações de cada série temporal são removidas para serem usadas na avaliação das previsões. Em sequencia, as séries são padronizadas.

5.2 Estimação

Nesse trabalho, consideramos a extração dos fatores do DFM por PCA e por SPCA. Em cada um dos casos é necessário determinar a matriz que modelará a dependência entre as séries e o número de fatores que serão incluídos na análise. Nessa aplicação empírica, consideraremos que existem no máximo 7 fatores latentes. Adicionalmente, no caso do SPCA, é necessário determinar a penalização, ou o número de variáveis não nulas, usadas para recuperar os fatores. Após isso, podemos recuperar os fatores latentes e, em sequência, determinar os demais parâmetros do DFM por meio do VAR. Para estimar esses modelos, consideramos uma janela móvel contendo 170 observações.

Após a estimação do DFM, o modelo pode ser usado para realizar previsões. Nessa aplicação empírica desejamos prever as versões estacionárias das séries do PIB real (GDP251), índice de produção industrial (IPS10), taxa de desemprego para as pessoas acima de 16 anos

(LHUR), índice de preços do consumidor (CPIAUCSL) e índice S&P 500 (FSPCOM) como descrito na Tabela 5.3.

Sigla	Descrição
GDP251	PIB Real
IPS10	Índice de produção industrial
LHUR	Taxa de desemprego para pessoas acima de 16 anos
CPIAUCSL	Índice de preços ao consumidor
FSPCOM	Índice S&P 500

Tabela 5.3 – Descrição das séries a serem previstas e sua sigla correspondente.

Neste trabalho, consideramos previsões para os próximos 1, 2, 4, 6 e 8 trimestres. Esses horizontes de previsão foram escolhidos de modo a capturar comportamentos de curto e médio prazo para as variáveis de interesse. Por fim, avaliamos o desempenho das previsões por meio do MSFE e pelo MCS.

Inicialmente, separamos os modelos de acordo com a matriz usada para modelar a dependência entre as séries. Após apresentar os modelos sugeridos em cada um dos casos, consideramos alguns casos de interesse para realizar as previsões. Por fim, comparamos o desempenho preditivo entre os modelos fatoriais e em relação aos modelos baseados em regressões com penalizações e ao *generalized dynamic factor model*.

5.2.1 Matriz de covariância amostral

Inicialmente, consideramos que a dependência entre as séries é modelada pelo equivalente amostral da matriz de covariância. A partir da matriz de covariância amostral, calculamos em cada janela os critérios de Ahn e Horenstein (2013), Onatski (2010) e Bai e Ng (2002). Os resultados encontrados são sumarizados pela Figura 5.1.

Os critérios de Ahn e Horenstein e de Onatski sugerem um único fator latente. Já o critério de Bai e Ng, assim como observado em Stock e Watson (2009), aumenta de 3 para 4 fatores latentes ao longo das janelas. Ao invés de impor que existe o mesmo número de fatores em todos os períodos, permitiremos que o DFM seja estimado com um número diferente de fatores para janelas distintas.

Note que é necessário estimar os fatores e matriz de carregamento para a utilização do critério de Bai e Ng. Logo, o método de extração dos fatores poderá alterar o desempenho do modelo. Bai e Ng (2002) consideram que esse critério de informação possui um bom desempenho em amostras finitas para o caso da extração dos fatores por PCA. Portanto, esse critério será utilizado apenas para avaliar o DFM com fatores extraídos por PCA.

Adicionalmente, usamos os critérios propostos por Kristensen (2017) e Wang, Li e Leng (2009) para determinar o número de variáveis não nulas no SPCA para cada janela. Os

Figura 5.1 – Número de fatores sugeridos pelos critérios apresentados em Ahn e Horenstein (2013), Bai e Ng (2002) e Onatski (2010) quando modelamos a dependência entre a séries por meio da matriz de covariância amostral

resultados desses critérios são apresentados na Figura 5.2.

Esse resultado mostra que o critério de penalização proposto por Wang, Li e Leng leva a uma penalização mais severa que a baseada no critério de Kristensen.

Adicionalmente, consideramos o caso em que ocorre um penalização intermediária as propostas pelos dois critérios anteriores. Consideramos o caso em que 61 variáveis são usadas na construção dos fatores em todas as janelas. Tal valor corresponde a média das medianas propostas pelos critérios de Kristensen e Wang e seus coautores. A partir desses critérios são propostos os modelos apresentados na Tabela 5.4.

ID do Modelo	Método de extração	Nº de fatores	Penalização
M01PC	PCA	1F	-
M02PC	PCA	BaiNg	-
M01SPC	SPCA	1F	Kristensen
M02SPC	SPCA	1F	Wang
M03SPC	SPCA	1F	Fixa(61)

Tabela 5.4 – Modelos usados para previsão quando consideramos que a dependência entre séries é modelada pela matriz de covariância amostral

Figura 5.2 – Número de variáveis não nulas sugeridas pelos critérios de Kristensen (2017) e Wang, Li e Leng (2009) quando modelamos a dependência entre as séries por meio da matriz de covariância amostral

5.2.2 LRCM de Andrews

Como discutido na Seção 1.1, o uso da matriz de covariância amostral pode ser inadequado para a aplicação empírica. Portanto, consideraremos o uso da LRCM proposta como a classe proposta por Andrews (1991). Tal matriz pode ser calculada no R por meio do pacote *sandwich* introduzido por Zeileis (2004).

Ao substituir a matriz de covariância amostral pela LCRM, é necessário recalcularmos o número de fatores latentes por meio dos critérios de Ahn e Horenstein, Bai e Ng e Onatski. Os resultados desses novos cálculos são apresentados na Figura 5.3

Ao considerar a LRCM de Andrews, todos os critérios apontam, para a maioria das janelas, a existência de um único fator. Portanto, consideramos que existe apenas 1 fator latente.

Novamente, usamos os critérios propostos por Kristensen (2017) e Wang, Li e Leng (2009) para determinar o número de variáveis não nulas no SPCA. Os resultados desses critérios são apresentados na Figura 5.4.

Note que as penalizações para o caso em que consideramos a LRCM é mais severa que no caso em que usamos a covariância amostral.

Similarmente ao caso anterior, consideramos também o caso em que a extração é realizada por SPCA e com um número fixo de variáveis na composição dos fatores. Nesse caso,

Figura 5.3 – Número de fatores sugeridos pelos critérios apresentados em Ahn e Horenstein (2013), Bai e Ng (2002) e Onatski (2010) quando modelamos a dependência entre a séries por meio da matriz de covariância de longo prazo proposta em Andrews (1991)

Figura 5.4 – Número de variáveis não nulas sugeridas pelos critérios de Kristensen (2017) e Wang, Li e Leng (2009) quando modelamos a dependência entre a séries por meio da LRCM proposta por Andrews (1991).

consideramos 32 variáveis na composição de cada fator. Baseado nesses critérios, estimamos os modelos apresentados na Tabela 5.5.

ID do Modelo	Método de extração	Nº de fatores	Penalização
M03PC	PCA	1F	-
M04SPC	SPCA	1F	Kristensen
M05SPC	SPCA	1F	Wang
M06SPC	SPCA	1F	Fixa(32)

Tabela 5.5 – Modelos usados para previsão quando consideramos que a dependência entre séries é modelada pela LRCM proposta por Andrews (1991).

5.2.3 LRCM de Kiefer e Vogelsang

Devido a problema de robustez à erros de medidas na LRCM de Andrews (1991), apontado por Müller (2007), analisaremos o efeito de substituir a matriz de covariância amostral pela LRCM de Kiefer e Vogelsang (2002).

Após a substituição devemos calcular, novamente, os critérios de Ahn e Horenstein, Bain e Ng, e Onatski para determinar o número de fatores latente na aplicação. Esse valores são apresentados na Figura 5.5. Adicionalmente, devemos recalcular a penalização do método SPCA. Também consideramos o caso em que os fatores são constituídos por 41 variáveis em todas as janelas. As penalidades sugeridas são apresentadas na Tabela 5.6.

Como mostrado na Figura 5.5, os critérios de Ahn e Horenstein e de Onatski sugerem um único fator em todos os casos, diferentemente de quando é usada a LRCM de Andrews (1991).

Esses critério sugerem a estimação de quatro modelos, conforme apresentado na Tabela 5.6.

ID do Modelo	Método de extração	Nº de fatores	Penalização
M04PC	PCA	1F	-
M05PC	PCA	4F	-
M07SPC	SPCA	1F	Kristensen
M08SPC	SPCA	1F	Wang
M09SPC	SPCA	1F	Fixa(41)

Tabela 5.6 – Modelos usados para previsão quando consideramos que a dependência entre séries é modelada pela LRCM proposta por Kiefer e Vogelsang (2002).

Figura 5.5 – Número de fatores sugeridos pelos critérios apresentado em Ahn e Horenstein (2013), Bai e Ng (2002) e Onatski (2010) quando modelamos a dependência entre a séries por meio da matriz de covariância de longo prazo proposta em Kiefer e Vogelsang (2002)

Figura 5.6 – Número de variáveis não nulas sugeridas pelos critérios de Kristensen (2017) e Wang, Li e Leng (2009) quando modelamos a dependência entre a séries por meio da matriz de covariância da classe *fixed b* proposta por Kiefer e Vogelsang (2002).

5.2.4 CMET

Além dos problemas causados pela possibilidade de dependência temporal, é possível que o acúmulo erros de estimação prejudique o desempenho do modelo. Portanto, consideramos a estimação da matriz de covariância com a aplicação de um *hard-threshold*. Tanto a matriz como a determinação do limiar podem ser calculados no *software* R por meio do pacote *FinCovRegularization*.

Dado que a estrutura de dependência das séries foi alterada, precisamos recalcular o número de fatores latentes e a penalização do SPCA. Os resultados desses cálculos são apresentados nas Figuras 5.7 e 5.8, respectivamente.

Figura 5.7 – Número de fatores sugeridos pelos critérios apresentados em Ahn e Horenstein (2013), Bai e Ng (2002) e Onatski (2010) quando modelamos a dependência entre as séries por meio da matriz de covariância após a aplicação de um limiar como proposto em Bickel, Levina *et al.* (2008).

Apesar da alteração para a nova matriz, os critérios de Ahn e Horenstein e Onatski continuam indicando a presença de um único fator latente. Já o critério de Bai e Ng oscila de 2 a 4 fatores. Já a penalização usada no SPCA é próxima a obtida quando modelamos a dependência entre as séries pela matriz de covariância amostral. Esse critérios motivam a estimação dos modelos apresentados na Tabela 5.7.

Figura 5.8 – Número de variáveis não nulas sugeridas pelos critérios de Kristensen (2017) e Wang, Li e Leng (2009) quando modelamos a dependência entre a séries por meio da matriz de covariância após a aplicação de um limiar como proposto em Bickel, Levina *et al.* (2008).

ID do Modelo	Método de extração	Nº de fatores	Penalização
M06PC	PCA	1F	-
M07PC	PCA	BaiNg	-
M10SPC	SPCA	1F	Kristensen
M11SPC	SPCA	1F	Wang
M12SPC	SPCA	1F	Fixa(98)

Tabela 5.7 – Modelos usados para previsão quando consideramos que a dependência entre séries é modelada pela matriz de covariância após a aplicação de um *hard-threshold*.

5.2.5 Matriz de Ledoit e Wolf

Porém, além do acúmulo de erros de estimações, a alta dimensão pode levar a distorções na estrutura de autovalores - autovetores da matriz de covariância amostral. Uma alternativa é impor uma regularização aos autovalores como em Ledoit e Wolf (2004).

Note ainda que a matriz de covariância proposta por Ledoit e Wolf (2004) impõe uma regularização dos autovalores, mas não altera os autovetores da matriz de covariância amostral. Portanto, é possível que o número de fatores sugeridos pelos critérios de Ahn e Horenstein e Onatski sejam alterado. Logo, recalculamos os critérios após substituir a matriz de covariância amostral. Os resultados desses novos cálculos são apresentados na Figura 5.9.

Nota-se que os critérios sugerem exatamente o mesmo número de fatores do que

Figura 5.9 – Número de fatores sugeridos pelos critérios apresentados em Ahn e Horenstein (2013), Bai e Ng (2002) e Onatski (2010) quando modelamos a dependência entre a séries por meio da matriz de covariância proposta em Ledoit e Wolf (2004)

quando consideramos a matriz de covariância amostral. Portanto, não é necessário estimar novos modelos para esse caso.

A partir das matrizes e métodos de extração apresentados anteriormente, estimamos os modelos fatoriais apresentados na Tabela 5.8.

Após a determinação da matriz de covariância, o número de fatores latentes e o número de variáveis diferente de zero, é possível usar PCA e SPCA para extrair os fatores latentes e, em sequência, os demais parâmetros do DFM podem ser estimados via VAR.

Adicionalmente, são estimados 4 modelos adicionais baseados em regressão com penalização e GDFM como mostrado na Tabela 5.9.

Note que o número de choques comuns no GDFM é dada por Hallin, Liska *et al.* (2007) e o algoritmo usado para o cálculo do número de choques comuns, estimação do GDFM e previsão foi obtido na página pessoal de Matteo Barigozzi.¹ Já as previsões feitas pelos modelos de regressão com penalização foram obtidas por meio da função `ic.glmnet`.²

¹Veja <http://www.barigozzi.eu/Codes.html>

²Veja <https://github.com/gabrielrvsc/HDeconometrics>

ID do Modelo	Matriz de covariância	Método de extração	Nº fatores	Penalização
M01PC	Amostral	PCA	1F	-
M02PC	Amostral	PCA	BaiNg	-
M03PC	Andrews	PCA	1F	-
M04PC	Fixed b	PCA	1F	-
M05PC	Fixed b	PCA	4F	-
M06PC	Hard Threshold	PCA	1F	-
M07PC	Hard Threshold	PCA	BaiNg	-
M01SPC	Amostral	SPCA	1F	Kristensen
M02SPC	Amostral	SPCA	1F	Wang
M03SPC	Amostral	SPCA	1F	Fixa(61)
M04SPC	Andrews	SPCA	1F	Kristensen
M05SPC	Andrews	SPCA	1F	Wang
M06SPC	Andrews	SPCA	1F	Fixa(32)
M07SPC	Fixed b	SPCA	1F	Kristensen
M08SPC	Fixed b	SPCA	1F	Wang
M09SPC	Fixed b	SPCA	1F	Fixa(41)
M10SPC	Hard Threshold	SPCA	1F	Kristensen
M11SPC	Hard Threshold	SPCA	1F	Wang
M12SPC	Hard Threshold	SPCA	1F	Fixa(98)

Tabela 5.8 – DFM estimados na aplicação empírica.

ID do Modelo	Método	Penalização
M01CONC	adaLASSO	AIC
M02CONC	LASSO	AIC
M03CONC	LASSO	BIC
M04CONC	GDFM	-

Tabela 5.9 – Modelos adaLASSO, LASSO e GDFM estimados na aplicação empírica.

5.3 Previsão

Após a estimação, cada um dos modelos é usado para gerar previsões para os próximos 1, 2, 4, 6 e 8 trimestres para cada uma das variáveis de interesse.

5.3.1 GDP 251

Considere, inicialmente, apenas os modelos baseados na matriz de covariância amostral estimados por PCA ou pelo SPCA com número fixo de variáveis na construção dos fatores. Nessa situação as previsões para 1,2,4 e 8 trimestres a frente são apresentadas na Figura 5.10.

Após realizar as previsões, desejamos verificar o desempenho de cada um dos modelos. Para isso usamos o MSFE e o MCS. A Tabela 5.10 indica os modelos que apresentam o menor MSFE em cada horizonte. No apêndice temos uma tabela indicando o MSFE de cada modelo para cada série analisada em todos os horizontes de tempo.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
GDP251	M02PC	M01PC	M03SPC	M02PC	M01PC

Tabela 5.10 – Modelo com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

Como apresentado na Tabela 5.10, o uso do SPCA leva ao menor valor de MSFE em pelo menos um horizonte de previsão. Esse resultado indica que a introdução de um método que realize alguma forma de seleção, como o SPCA, pode levar a um menor erro de previsão para variáveis macroeconômicas como discutido em Boivin e Ng (2006).

Adicionalmente, assim como discutido em Kristensen (2017), verifica-se que SPCA e PCA levam a valores próximos nas previsões fortalecendo a visão de que o SPCA é uma alternativa razoável ao PCA como método de extração.

Para verificar se os modelos possuem EPA, utilizamos o algoritmo do MCS. Consideramos a matriz de perda quadrática, a estatística TR, um nível de significância de $\alpha = 0.2$ e 5000 replicações por *bootstrap*. Os resultados desse procedimento são apresentados na Tabela 5.11. A cor preta indica que o modelo está presente no conjunto de habilidade preditiva superior. Usaremos essa mesma especificação e forma de apresentação nos demais modelos.

Note que quase todos os modelos analisados nessa primeira situação fazem parte do MCS. Novamente, esse resultado fortalece a visão de Kristensen (2017) de que o SPCA produz previsões competitivas quando comparado ao PCA.

No segundo caso, adicionamos os modelos com matriz de covariância de Andrews e Fixed-b. Tais modelos levam as previsões apresentadas na Figura 5.11.

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do GDP251

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do GDP251

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do GDP251

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do GDP251

Figura 5.10 – Previsão do GDP251 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 1.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03SPC					

Tabela 5.11 – Resultados do MCS para GDP251 em cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do GDP251

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do GDP251

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do GDP251

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do GDP251

Figura 5.11 – Previsão do GDP251 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 2.

Para verificar o desempenho preditivo desse conjunto de modelos, apresentamos os modelos com menor MSFE na Tabela 5.12 e os resultados do MCS na Tabela 5.13.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
GDP251	M02PC	M01PC	M03SPC	M02PC	M01PC

Tabela 5.12 – Modelo com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M03SPC					
M06SPC					
M09SPC					

Tabela 5.13 – MCS para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

Apesar das potenciais vantagens de usar uma LRCM, os modelos com menor MSFE são os mesmos do caso anterior. No entanto, especialmente no curto prazo, o MCS não diferencia entre as habilidade preditivas dos modelos, mas a medida que o horizonte de previsão aumenta, os modelos baseados em componentes principais se destacam em relação a versão com componentes principais esparsas. Por exemplo, para 8 trimestres a frente, O MCS não rejeita que os modelos M01PC e M05PC possuam a mesma habilidade preditiva.

Mas, além da dependência temporal, a matriz e covariância amostral pode acumular erros de estimações. Portanto, incluímos a possibilidade de usarmos CMET em que o limiar é dado por um *hard-threshold*. Ao incluir essa possibilidade, temos as previsões apresentadas na Figura 5.12.

Devido a inclusão desses novos modelos, devemos reanalisar o MSFE e MCS. Os novos resultados são apresentados nas Tabelas 5.14 e 5.15.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
GDP251	M07PC	M01PC	M12SPC	M07PC	M01PC

Tabela 5.14 – Modelo com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do GDP251

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do GDP251

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do GDP251

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do GDP251

Figura 5.12 – Previsão do GDP251 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 3.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M06PC					
M07PC					
M03SPC					
M06SPC					
M09SPC					
M12SPC					

Tabela 5.15 – MCS para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar

Temos que a classe de CMET leva ao menor MSFE para os casos de previsões 1,4 e 6 trimestres a frente. Tal alteração dos modelos com menor MSFE pode indicar que o acúmulo de erros de estimação na matriz de covariância amostral afeta a sua habilidade de fornecer bons preditores, no entanto o MCS não é capaz de rejeitar a hipótese de EPA entre a maior parte dos modelos. Especialmente no curto prazo, o MCS ainda considera que os modelos possuem a mesma habilidade preditiva, apesar de que para horizontes mais longos, o algoritmo já é capaz de excluir parte dos modelos propostos.

Até o momento, consideramos que os fatores são construídos por um mesmo número de variáveis. No entanto, podemos considerar a possibilidade de que esse número se altere. Nesta situação, temos a inclusão de novos modelos levando as previsões apresentadas na Figura 5.13.

Com essa nova possibilidade reavaliamos o MSFE e o MCS. Os novos resultados são apresentados nas Tabelas 5.18 e 5.19.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
GDP251	M07PC	M01PC	M11SPC	M07PC	M01PC

Tabela 5.16 – Modelo para GDP251 com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, fixed-b, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA.

Essa alteração leva alteração do modelo com menor MSFE para 4 trimestres a frente, porém, os modelos com menor MSFE para os demais horizontes são mantidos.

Com essa nova versão, agora temos modelos baseados em SPCA presentes no conjunto de habilidade preditiva superior para horizontes maiores. Por exemplo, M01SPC e M02SPC

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do GDP251

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do GDP251

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do GDP251

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do GDP251

Figura 5.13 – Previsão do GDP251 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 4.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M06PC					
M07PC					
M01SPC					
M02SPC					
M03SPC					
M04SPC					
M05SPC					
M06SPC					
M07SPC					
M08SPC					
M09SPC					
M10SPC					
M11SPC					
M12SPC					

Tabela 5.17 – MCS para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, fixed-b, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA.

fazem parte do conjunto de habilidade preditiva superior para previsões feitas 8 trimestres a frente para GDP251.

Por fim, consideramos os modelos concorrentes baseados em regressões com penalização e GDFM. Nesse caso, as previsões são apresentadas na Figura 5.14.

Similarmente aos casos anteriores, os modelos com menor MSFE e os resultados do MCS são apresentados nas Tabelas 5.18 e 5.19.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
GDP251	M07PC	M04CONC	M11SPC	M04CONC	M03CONC

Tabela 5.18 – Modelo com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior.

Os resultados indicam o bom desempenho do GDFM. Esse modelo apresenta o menor MSFE para 2 e 6 trimestres a frente. Apesar do melhor desempenho em termos de MSFE, o algoritmo do MCS não é capaz de rejeitar a hipótese de EPA para grande parte dos modelos, apenas considerando que alguns dos modelos baseados em regressões penalizadas e o GDFM fazem parte do conjunto de habilidade preditiva superior.

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do GDP251

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do GDP251

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do GDP251

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do GDP251

Figura 5.14 – Previsão do GDP251 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 5.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M06PC					
M07PC					
M01SPC					
M02SPC					
M03SPC					
M04SPC					
M05SPC					
M06SPC					
M07SPC					
M08SPC					
M09SPC					
M10SPC					
M11SPC					
M12SPC					
M01CONC					
M02CONC					
M03CONC					
M04CONC					

Tabela 5.19 – MCS para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior.

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do IPS10

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do IPS10

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do IPS10

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do IPS10

Figura 5.15 – Previsão do IPS10 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 1.

5.3.2 IPS 10

Similarmente a análise feita para o GDP251, considere, inicialmente, apenas os modelos baseados na matriz de covariância amostral estimados por PCA ou pelo SPCA com número fixo de variáveis na construção dos fatores. As previsões obtidas para o IPS10 nessa situação são apresentadas na Figura 5.15.

Os modelos com menor MSFE para cada horizonte de previsão são apresentados na Tabela 5.20 enquanto os resultados do MCS são apresentados na Tabela 5.21.

Apesar de valores distintos para MSFE, o MCS não rejeita a hipótese nula de EPA

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
IPS10	M02PC	M01PC	M01PC	M03SPC	M02PC

Tabela 5.20 – Modelos para o IPS10 com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03SPC					

Tabela 5.21 – MCS para o IPS10 para cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

para a maior parte dos modelos. Novamente, consideramos a possibilidade de alterar a matriz de covariância para versões de LRCM com o intuito de mitigar os efeitos de possíveis dependências temporais. Os resultados das previsões nesse novo contexto são dadas pela Figura 5.16.

Ao avaliarmos os efeitos da inclusão desses modelos, constatamos que os modelos com os menores MSFE são os mesmo do caso anterior, porém os métodos que usam LRCM também constituem parte do conjunto de habilidade preditiva superior construído pelo algoritmo do MCS como indicado nas Tabelas 5.22 e 5.23.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
IPS10	M02PC	M01PC	M01PC	M03SPC	M02PC

Tabela 5.22 – Modelos para IPS10 com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

Assim como no caso do GDP251, consideramos também a possibilidade de usarmos matrizes de covariância após a utilização de um limiar. As previsões desse caso são apresentadas na Figura 5.17.

Para avaliarmos o impacto dessa possibilidades, construímos as Tabelas 5.24 e 5.25.

Nesse contexto, verificamos que a utilização de CMET leva aos modelos com menor MSFE para 3 horizontes de previsão sendo que em dois desses casos a CMET é combinada com a extração por SPCA.

Tal resultado, indica que a CMET, assim como no caso do GDP251 é uma alternativa razoável para modelar a dependência entre séries temporais macroeconômicas uma vez que é capaz de mitigar erros de estimação na matriz de covariância amostral. Ao combina-la com

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do IPS10

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do IPS10

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do IPS10

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do IPS10

Figura 5.16 – Previsão do IPS10 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 2.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M03SPC					
M06SPC					
M09SPC					

Tabela 5.23 – MCS para IPS10 para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
IPS10	M07PC	M01PC	M12SPC	M03SPC	M07SPC

Tabela 5.24 – Modelo para IPS10 com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M06PC					
M07PC					
M03SPC					
M06SPC					
M09SPC					
M12SPC					

Tabela 5.25 – MCS para IPS10 para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do IPS10

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do IPS10

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do IPS10

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do IPS10

Figura 5.17 – Previsão do IPS10 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 3.

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do IPS10

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do IPS10

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do IPS10

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do IPS10

Figura 5.18 – Previsão do IPS10 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 4.

o SPCA, é possível removermos variáveis ruidosas que também poderiam influenciar nas previsões. Note também que a combinação de CMET e SPC, por meio do modelo M12SPC, aparece no conjunto dos modelos com capacidade preditiva superior para previsões em todos os horizontes de tempos.

Consideramos a possibilidade de que o número de variáveis usadas na construção do fator se altere. Essa possibilidade leva as previsões apresentadas na Figura 5.18.

Essa mudança, como indicado pela Tabela 5.26, leva a alteração dos modelos com menor MSFE para FH1 e FH6. Mas, assim como anteriormente, o MCS tem dificuldade em rejeitar H_0 de EPA para grande parte dos modelos como indicado na Tabela 5.27.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
IPS10	M07PC	M05SPC	M12SPC	M02SPC	M07PC

Tabela 5.26 – Modelo para IPS10 com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, Fixed-B, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M06PC					
M07PC					
M01SPC					
M02SPC					
M03SPC					
M04SPC					
M05SPC					
M06SPC					
M07SPC					
M08SPC					
M09SPC					
M10SPC					
M11SPC					
M12SPC					

Tabela 5.27 – MCS para IPS10 para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, Fixed-B, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA.

Por fim, consideramos as previsões dos modelos baseados em regressões penalizadas e GDFM conforme apresentado na Figura 5.19.

Assim como no caso do GDP251, podemos observar o bom desempenho do GDFM. Tal modelo apresenta o menor MSFE para previsões 1 e 2 trimestres a frente como indicado na Tabela 5.28. Adicionalmente, podemos verificar que modelos baseado em regressões com penalidade, como o M03CONC, estão presente no MCS como representado na Tabela 5.29.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
IPS10	M04CONC	M04CONC	M12SPC	M02SPC	M07PC

Tabela 5.28 – Modelo para IPS10 com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior.

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do IPS10

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do IPS10

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do IPS10

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do IPS10

Figura 5.19 – Previsão do IPS10 para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 5.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M06PC					
M07PC					
M01SPC					
M02SPC					
M03SPC					
M04SPC					
M05SPC					
M06SPC					
M07SPC					
M08SPC					
M09SPC					
M10SPC					
M11SPC					
M12SPC					
M01CONC					
M02CONC					
M03CONC					
M04CONC					

Tabela 5.29 – MCS para IPS10 para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior.

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do LHUR

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do LHUR

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do LHUR

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do LHUR

Figura 5.20 – Previsão do LHUR para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 1.

5.3.3 LHUR

Assim como para GDP251 e IPS10, considere os modelos baseados na matriz de covariância amostral estimados por PCA ou pelo SPCA com número fixo de variáveis na construção dos fatores. As previsões obtidas para o IPS10 nessa situação são apresentadas na Figura 5.20. Os demais modelos serão tratados no decorrer dessa sub-sessão.

Ao avaliarmos o MSFE e os resultados do MCS, por meio das Tabelas 5.30 e 5.31, temos que o modelo M02PC é o único pertencente ao conjunto de modelos com habilidade preditiva superior para FH1 e FH8. Tal situação é diferente do que ocorria com GDP251 e IPS10, em

que em todos os horizontes de previsão para esse caso contemplavam múltiplos modelos no MCS.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
LHUR	M02PC	M02PC	M02PC	M02PC	M02PC

Tabela 5.30 – Modelos para LHUR com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03SPC					

Tabela 5.31 – MCS para LHUR para cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

Assim como para as variáveis macroeconômicas analisadas anteriormente, consideramos a substituição da matriz de covariância amostral pelas matrizes de longo prazo propostas por Andrews (1991) e Kiefer e Vogelsang (2002).

Apesar de M02PC ainda ser o modelo com menor MSFE para a maior parte dos horizontes de previsão, de acordo com a Tabela 5.32, o modelo M05PC baseado na LRCM do tipo fixed-b apresenta o menor MSFE para previsões 8 trimestre a frente e, como indicado na Tabela 5.33, está presente no MCS em 4 dos 5 horizontes de previsão.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
LHUR	M02PC	M02PC	M02PC	M02PC	M05PC

Tabela 5.32 – Modelos para LHUR com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

Adicionalmente, consideramos a possibilidade de CMET. As previsões decorrentes dessa inclusão são apresentadas na Figura 5.22 .

Como apresentado na Tabela 5.34, matrizes estimadas após a aplicação de um *hard-threshold* apresentam um bom desempenho em termos de MSFE. Conforme representado na Tabela 5.35, o modelo M07PC, que usa uma CMET, está no MCS para todos os horizontes de previsão. Nota-se também a presença do modelo M12SPC no MCS. Tal modelo combina CMET com SPC e reforça o bom desempenho dessa combinação assim como foi observado para IPS10.

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do LHUR

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do LHUR

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do LHUR

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do LHUR

Figura 5.21 – Previsão do LHUR para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 2.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M03SPC					
M06SPC					
M09SPC					

Tabela 5.33 – MCS para LHUR para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
LHUR	M07PC	M07PC	M07PC	M02PC	M05PC

Tabela 5.34 – Modelo para LHUR com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M06PC					
M07PC					
M03SPC					
M06SPC					
M09SPC					
M12SPC					

Tabela 5.35 – MCS para LHUR para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do LHUR

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do LHUR

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do LHUR

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do LHUR

Figura 5.22 – Previsão do LHUR para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 3.

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do LHUR

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do LHUR

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do LHUR

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do LHUR

Figura 5.23 – Previsão do LHUR para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 4.

Ao flexibilizarmos o número de variáveis que constituem os fatores, temos as previsões apresentadas na Figura 5.23.

A Tabela 5.34 indica que essa flexibilização não altera os modelos com menor MSFE em cada horizonte de previsão. Porém, a Tabela 5.35 indica que alguns dos modelos obtidos por essa flexibilização, como o M01SPC e M02SPC, estão presente no MCS em múltiplos horizontes preditivos.

Assim como para GDP251 e IPS10, consideramos também as previsões realizadas pelos modelos de regressão com penalidade e pelo GDFM com o número de choques comuns estimado pelo critério apresentado em Hallin, Liska *et al.* (2007). Tais previsões são

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
LHUR	M07PC	M07PC	M07PC	M02PC	M05PC

Tabela 5.36 – Modelo para LHUR com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, Fixed-B, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M06PC					
M07PC					
M01SPC					
M02SPC					
M03SPC					
M04SPC					
M05SPC					
M06SPC					
M07SPC					
M08SPC					
M09SPC					
M10SPC					
M11SPC					
M12SPC					

Tabela 5.37 – MCS para LHUR para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, Fixed-B, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA.

representadas pela Figura 5.24.

De acordo com a Tabela 5.38, diferentemente do caso para GDP251 e IPS10, o GDFM não possui o menor MSFE para nenhum dos horizontes analisados. Mas, este modelo esta presente no MCS para 4 dos 5 horizontes de previsão considerados. Ao analisarmos a Tabela 5.39, nota-se que para LHUR, apenas dois modelos, M02PC e M07PC, estão presentes no MCS para previsões relativas ao próximo trimestre. Tal situação é contrasta com os resultados obtidos para GDP251 e IPS10 em que muitos modelos estavam presentes para horizontes curtos e um quantidade menor em horizontes mais longos.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
LHUR	M07PC	M07PC	M07PC	M02PC	M05PC

Tabela 5.38 – Modelo para LHUR com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior.

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do LHUR

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do LHUR

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do LHUR

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do LHUR

Figura 5.24 – Previsão do LHUR para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 5.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M06PC					
M07PC					
M01SPC					
M02SPC					
M03SPC					
M04SPC					
M05SPC					
M06SPC					
M07SPC					
M08SPC					
M09SPC					
M10SPC					
M11SPC					
M12SPC					
M01CONC					
M02CONC					
M03CONC					
M04CONC					

Tabela 5.39 – MCS para LHUR para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior.

Figura 5.25 – Previsão do CPIAUCSL para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 1.

5.3.4 CPIAUCSL

Similarmente as variáveis analisadas anteriormente, começamos considerando apenas os modelos baseados na matriz de covariância amostral estimados por PCA ou pelo SPCA com número fixo de variáveis na construção dos fatores.

Variáveis relacionadas a nível de preço/inflação são, tipicamente, consideradas como difíceis de serem previstas e, ao observar as previsões feitas na Figura 5.25 verificamos essa dificuldade.

Os modelos com menor MSFE são apresentados na Tabela 5.40. Note que o modelo

M03SPC é classificado apresenta o menor MSFE para a maior parte dos horizontes de previsão. Mas, o MCS, apresentado na Tabela 5.41, não consegue diferenciar os modelos em quase nenhum caso. O único modelo que é excluído do MCS é M02PC para FH1. Lembre-se que o MCS apenas testa sequencialmente se os modelos possuem EPA, mas não informa se tais previsões são de fato próximas ao realizado.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
CPIAUCSL	M03SPC	M01PC	M03SPC	M03SPC	M01PC

Tabela 5.40 – Modelos para CPIAUCSL com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03SPC					

Tabela 5.41 – MCS para CPIAUCSL para cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

Buscando melhorar as previsões obtidas anteriormente, consideramos o caso em que a dependência entre as séries é modelada por LRCMs. Tais previsões são apresentadas na Figura 5.26.

A Tabela 5.42 indica que 2 modelos que usam matrizes do tipo fixed-b apresentam o menor MSFE entre os modelos analisados. No entanto, os resultados do MCS presentes na Tabela 5.43 indicam que quase todos os modelos possuem habilidade preditivas similares para previsões com horizonte de pelos menos dois trimestres.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
CPIAUCSL	M03SPC	M01PC	M03SPC	M05PC	M04PC

Tabela 5.42 – Modelos para CPIAUCSL com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

Assim como para as demais variáveis analisadas, outra possibilidade é considerar CMET. Tais previsões são apresentadas na Figura 5.27.

Apesar dessas novas possibilidades, a Tabela 5.44 indica que para 4 horizontes de previsão, os modelos com menor MSFE são os mesmo analisados anteriormente. A única mudança ocorre para FH4, nessa situação o modelo M12SPC substitui M03SPC.

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do CPIAUCSL

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do CPIAUCSL

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do CPIAUCSL

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do CPIAUCSL

Figura 5.26 – Previsão do CPIAUCSL para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 2.

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do CPIAUCSL

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do CPIAUCSL

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do CPIAUCSL

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do CPIAUCSL

Figura 5.27 – Previsão do CPIAUCSL para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 3.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M03SPC					
M06SPC					
M09SPC					

Tabela 5.43 – MCS para CPIAUCSL para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

Novamente, o MCS consegue rejeitar a hipótese de EPA para poucos casos, especialmente para horizontes de previsão mais distantes, como observado na Tabela 5.45.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
CPIAUCSL	M03SPC	M01PC	M12SPC	M05PC	M04PC

Tabela 5.44 – Modelo para CPIAUCSL com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M06PC					
M07PC					
M03SPC					
M06SPC					
M09SPC					
M12SPC					

Tabela 5.45 – MCS para CPIAUCSL para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar

Buscando uma melhora preditiva, consideramos o caso em que os fatores podem ser constituídos por um número distinto de variáveis em cada janela. As previsões nessa situação são representadas pela Figura 5.28

Nesse caso temos a alteração do modelo com menor MSFE para os três horizontes de previsão mais curtos. Agora os modelos com menor MSFE para os próximos 1,2 e 4 trimestres são M02SPC, M01SPC e M10SPC conforme apresentado na Tabela 5.46. O MCS não consegue

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do CPIAUCSL

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do CPIAUCSL

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do CPIAUCSL

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do CPIAUCSL

Figura 5.28 – Previsão do CPIAUCSL para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 4.

rejeitar a hipótese nula de EPA para nenhum dos modelos quando consideramos previsões para 8 trimestres à frente como indica a Tabela 5.47.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
CPIAUCSL	M02SPC	M01SPC	M10SPC	M05PC	M04PC

Tabela 5.46 – Modelo para CPIAUCSL com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, Fixed-B, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M06PC					
M07PC					
M01SPC					
M02SPC					
M03SPC					
M04SPC					
M05SPC					
M06SPC					
M07SPC					
M08SPC					
M09SPC					
M10SPC					
M11SPC					
M12SPC					

Tabela 5.47 – MCS para CPIAUCSL para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, Fixed-B, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA.

Adicionarmos as previsões dos modelos baseados em regressões com penalização, Figura 5.29, verificamos uma alteração no modelos com menor MSFE para 4 horizontes de previsão. Tais alterações são apresentadas na Tabela 5.46.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
CPIAUCSL	M04CONC	M04CONC	M02CONC	M05PC	M03CONC

Tabela 5.48 – Modelo para CPIAUCSL com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior.

Assim como no caso do IPS10, o GDFM apresenta um bom desempenho preditivo, em termo de MSFE, quando comparado aos demais modelos. Note também que modelos

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do CPIAUCSL

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do CPIAUCSL

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do CPIAUCSL

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do CPIAUCSL

Figura 5.29 – Previsão do CPIAUCSL para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 5.

baseado no LASSO também possuem um melhor desempenho, em termos de MSFE, do que a maior parte dos modelos fatoriais.

No entanto, como indicado na Tabela 5.49, o MCS não consegue rejeitar H_0 para quase nenhum modelo, principalmente para horizontes de previsão maiores. Adicionalmente, a dificuldade em prever variáveis relacionadas ao nível de preço fica clara na Figura 5.29.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M06PC					
M07PC					
M01SPC					
M02SPC					
M03SPC					
M04SPC					
M05SPC					
M06SPC					
M07SPC					
M08SPC					
M09SPC					
M10SPC					
M11SPC					
M12SPC					
M01CONC					
M02CONC					
M03CONC					
M04CONC					

Tabela 5.49 – MCS para CPIAUCSL para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior.

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do FSPCOM

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do FSPCOM

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do FSPCOM

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do FSPCOM

Figura 5.30 – Previsão do FSPCOM para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 1.

5.3.5 FSPCOM

Assim como variáveis relacionadas a inflação, variáveis ligadas a índices do mercado acionário são consideradas muito difíceis de serem previstas pela literatura.

Começamos a análise das previsões de FSPCOMP considerando os modelos baseados na matriz de covariância amostral estimados por PCA ou pelo SPCA com número fixo de variáveis na construção dos fatores apresentados anteriormente. As previsões obtidas por esses modelos são apresentadas na Figura 5.30.

Os modelos com menor MSFE e os resultados do MCS são apresentados nas Tabelas

5.50 e 5.51, respectivamente.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
FSPCOM	M03SPC	M03SPC	M03SPC	M01PC	M01PC

Tabela 5.50 – Modelos para FSPCOM com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03SPC					

Tabela 5.51 – MCS para FSPCOM para cada horizonte de previsão quando consideramos apenas os modelos que usam a matriz de covariância amostral e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

Para FH1 e FH2, os modelos apresentam um desempenho razoável. Porém, a medida que o horizonte de previsão aumenta, os erros tornam-se maiores.

Novamente consideramos modelos que modela a dependência entre as séries por meio de LRCM. As previsões obtidas nessas situações são apresentadas na Figura 5.31.

Como apresentado na Tabela 5.52, M05PC e M09SPC são os modelos com menor MSFE para previsões realizadas para os próximos 6 e 8 trimestres, respectivamente.

Os resultados do MCS, representados na Tabela 5.53, indicam que uma dificuldade em distinguir entre a habilidade preditiva dos modelos para FH2, FH4 e FH8, porém seleciona uma pequena quantidade de modelos para os demais trimestres.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
FSPCOM	M03SPC	M03SPC	M03PC	M05PC	M09SPC

Tabela 5.52 – Modelos para FSPCOM com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

Consideramos também a alteração da matriz de covariância amostral por CMET. Tal alteração leva as previsões representadas nas Figuras 5.32.

Note que CMET levam aos melhores modelos, em termos de MSFE, para alguns horizontes. Por exemplo, M07PC e M09SPC são os modelos com menor MSFE para FH4 e FH8 como indicado na Tabela 5.54. A dificuldade do MCS em rejeitar H_0 para modelos em horizontes de previsão maiores é similar aos reportados no caso do CPIAUCSL como apresentado na Tabela 5.55.

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do FSPCOM

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do FSPCOM

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do FSPCOM

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do FSPCOM

Figura 5.31 – Previsão do FSPCOM para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 2.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M03SPC					
M06SPC					
M09SPC					

Tabela 5.53 – MCS para FSPCOM para cada horizonte de previsão quando adicionamos a possibilidade de modelar as séries pelas matrizes de Andrews e Fixed-b e o método de extração é PCA ou SPCA com número fixo de variáveis não nulas.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
FSPCOM	M06PC	M03SPC	M07PC	M05PC	M09SPC

Tabela 5.54 – Modelo para FSPCOM com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M06PC					
M07PC					
M03SPC					
M06SPC					
M09SPC					
M12SPC					

Tabela 5.55 – MCS para FSPCOM para cada horizonte de previsão quando adicionamos ao caso anterior a possibilidade de modelar as séries por matrizes de covariância após a aplicação de um limiar

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do FSPCOM

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do FSPCOM

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do FSPCOM

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do FSPCOM

Figura 5.32 – Previsão do FSPCOM para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 3.

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do FSPCOM

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do FSPCOM

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do FSPCOM

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do FSPCOM

Figura 5.33 – Previsão do FSPCOM para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 4.

Ao permitir que o número de variáveis usadas na construção dos fatores se altere, obtivemos as previsões apresentadas na Figura 5.33.

Como apresentado na Tabela 5.56, essa alteração leva a novos modelos com o menor MSFE para FH1 e FH8. Conforme indicado na Tabela 5.57, apesar na alteração em FH8, o MCS não é capaz de rejeitar a hipótese de EPA para nenhum dos modelos nesse horizonte de previsão.

Por fim, consideramos as previsões realizadas pelos modelos baseados em adaLASSO, LASSO e GDFM. Tais previsões são representadas pela Figura 5.34.

(a) Previsão para 1 trimestre a frente do FSPCOM

(b) Previsão para 2 trimestres a frente do FSPCOM

(c) Previsão para 4 trimestres a frente do FSPCOM

(d) Previsão para 8 trimestres a frente do FSPCOM

Figura 5.34 – Previsão do FSPCOM para os próximos 1,2,4 e 8 trimestres considerando os modelos do caso 5.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
FSPCOM	M02SPC	M03SPC	M07PC	M05PC	M08SPC

Tabela 5.56 – Modelo para FSPCOM com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, Fixed-B, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M06PC					
M07PC					
M01SPC					
M02SPC					
M03SPC					
M04SPC					
M05SPC					
M06SPC					
M07SPC					
M08SPC					
M09SPC					
M10SPC					
M11SPC					
M12SPC					

Tabela 5.57 – MCS para FSPCOM para cada horizonte de previsão quando consideramos as matrizes de covariância amostral, Andrews, Fixed-B, matriz após a aplicação de um limiar e o método de extração pode ser PCA ou SPCA.

No entanto, como apresentado na Tabela 5.58, em nenhum horizonte de previsão eles apresentam o menor MSFE. Porém, como indicado na Tabela 5.59, esses modelos estão presente no MCS em diversos horizontes de previsão.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
FSPCOM	M02SPC	M03SPC	M07PC	M05PC	M08SPC

Tabela 5.58 – Modelo para FSPCOM com o menor MSFE para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior.

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC					
M02PC					
M03PC					
M04PC					
M05PC					
M06PC					
M07PC					
M01SPC					
M02SPC					
M03SPC					
M04SPC					
M05SPC					
M06SPC					
M07SPC					
M08SPC					
M09SPC					
M10SPC					
M11SPC					
M12SPC					
M01CONC					
M02CONC					
M03CONC					
M04CONC					

Tabela 5.59 – MCS para FSPCOM para cada horizonte de previsão quando consideramos todos os modelos apresentados na seção anterior.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, é analisado o impacto preditivo da escolha da matriz de covariância e do método de extração dos fatores latentes em modelos fatoriais.

Tradicionalmente, modelos fatoriais utilizam a matriz de covariância amostral. Nessa situação. A estimação dos fatores usando SPCA leva, em alguns casos, a previsões com menor MSFE do que quando utiliza-se PCA. Esses resultados fortalecem a ideia que a diminuição do número de séries temporais usadas não levam necessariamente a um pior desempenho preditivo assim como concluído por outros autores como, por exemplo, Boivin e Ng (2006). No entanto, na maioria dos casos, o MCS não é capaz de rejeitar a hipótese de mesma habilidade preditiva entre os modelos baseados na matriz de covariância amostral e com fatores construídos por PCA ou SPCA contribuindo com evidência de Kristensen (2017) de que os resultados preditivos obtidos por esse métodos são próximos.

Ao considerar que as séries macroeconômicas podem ser mensuradas com um erro de medida, a diferenciação pode introduzir uma estrutura de dependência temporal. A presença de dependência temporal indica que a matriz de covariância amostral deve ser substituída por uma LRCM.

Uma alteração do conjunto de modelos selecionados pelo MCS quando substituímos a matriz de covariância amostral pela LRCM pode indicar que, na presença de dependência temporal, a seleção de variáveis leva a uma maior robustez a contaminação na matriz de covariância a processos MA. Porém, ao mitigar a dependência temporal pelo uso das matrizes de longo-prazo, modelos que não selecionam as variáveis apresentam um melhor desempenho. A PCA considera que as variáveis são mensuradas sem erro de medida, ao utilizar uma LRCM, essa dependência ao erro de medida é mitigado.

Além da dependência temporal, no contexto de alta dimensão, a matriz de covariância amostral pode acumular erros de estimação devido ao número elevado de parâmetros a serem estimados. Ao usar um *hard-threshold*, podemos mitigar esse problema. Por exemplo, para a previsão do ISP10 e LHUR, a CMET apresenta um bom desempenho.

Esses resultados expandem a evidência apresentada em Smeekes e Wijler (2018) de que modelos que utilizam esparsidade possuem melhor desempenho do que modelos fatoriais baseados na matriz de covariância amostral e PCA quando temos a presença de erros de especificação.

Adicionalmente, consideramos modelos de regressão com penalização, como o LASSO e adaLASSO, e o GDFM. Ambos os métodos estão presentes no conjunto de habilidade preditiva superior para diversas variáveis em múltiplos horizontes de previsão. Em especial, o GDFM apresenta bom desempenho na previsão do IPS10 em horizontes curtos e para o

GDP251 em múltiplos horizontes.

REFERÊNCIAS

- AHN, S. C.; HORENSTEIN, A. R. Eigenvalue ratio test for the number of factors. *Econometrica*, Wiley Online Library, v. 81, n. 3, p. 1203–1227, 2013.
- AIOLFI, M.; CAPISTRÁN, C.; TIMMERMANN, A. Forecast combinations. *CREATES Research Paper*, n. 2010-21, 2010.
- ANDREWS, D. Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariant matrix estimation. *Econometrica*, v. 59, n. 3, p. 817–858, 1991.
- BAI, J.; NG, S. Determining the number of factors in approximate factor models. *Econometrica*, Wiley Online Library, v. 70, n. 1, p. 191–221, 2002.
- _____. Forecasting economic time series using targeted predictors. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 146, n. 2, p. 304–317, 2008.
- BAÑBURA, M.; GIANNONE, D.; REICHLIN, L. *Large Bayesian VARs*. [S.l.], 2008.
- BARIGOZZI, M.; HALLIN, M. Generalized dynamic factor models and volatilities: Consistency, rates, and prediction intervals. *Journal of Econometrics*, Elsevier, 2020.
- BERNARDI, M.; CATANIA, L. The model confidence set package for r. *International Journal of Computational Economics and Econometrics*, v. 8, n. 2, p. 144–158, 2018.
- BICKEL, P. J.; LEVINA, E. *et al.* Covariance regularization by thresholding. *The Annals of Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 36, n. 6, p. 2577–2604, 2008.
- BOIVIN, J.; NG, S. Are more data always better for factor analysis? *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 132, n. 1, p. 169–194, 2006.
- BRILLINGER, D. R. *Time series: data analysis and theory*. [S.l.]: Siam, 1981. v. 36.
- CASTLE, J. L.; CLEMENTS, M. P.; HENDRY, D. F. Forecasting by factors, by variables, by both or neither? *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 177, n. 2, p. 305–319, 2013.
- CLEMENTS, M.; HENDRY, D. *Forecasting economic time series*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1998.
- EKLUND, J.; KAPETANIOS, G. A review of forecasting techniques for large data sets. *National Institute Economic Review*, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 203, n. 1, p. 109–115, 2008.
- FAN, J.; LIAO, Y. Learning latent factors from diversified projections and its applications to over-estimated and weak factors. *Available at SSRN 3446097*, 2019.
- FAN, J.; LIAO, Y.; LIU, H. An overview of the estimation of large covariance and precision matrices. *The Econometrics Journal*, Wiley Online Library, v. 19, n. 1, p. C1–C32, 2016.
- FAN, J.; WANG, W.; ZHONG, Y. Robust covariance estimation for approximate factor models. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 208, n. 1, p. 5–22, 2019.

- FORNI, M.; GIANNONE, D.; LIPPI, M.; REICHLIN, L. Opening the black box: Structural factor models with large cross sections. *Econometric Theory*, Cambridge University Press, v. 25, n. 5, p. 1319–1347, 2009.
- FORNI, M.; HALLIN, M.; LIPPI, M.; REICHLIN, L. The generalized dynamic-factor model: Identification and estimation. *Review of Economics and statistics*, MIT Press, v. 82, n. 4, p. 540–554, 2000.
- _____. The generalized dynamic factor model: one-sided estimation and forecasting. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 100, n. 471, p. 830–840, 2005.
- FORNI, M.; LIPPI, M. The general dynamic factor model: One-sided representation results. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 163, n. 1, p. 23–28, 2011.
- FRIEDMAN, J.; HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R. *The elements of statistical learning*. [S.l.]: Springer series in statistics New York, 2001. v. 1.
- GIANNONE, D.; REICHLIN, L.; SALA, L. Monetary policy in real time. *NBER macroeconomics annual*, MIT Press, v. 19, p. 161–200, 2004.
- GROEN, J. J.; KAPETANIOS, G. Revisiting useful approaches to data-rich macroeconomic forecasting. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 100, p. 221–239, 2016.
- HALLIN, M.; LISKA, R. *et al.* The generalized dynamic factor model: determining the number of factors. *Journal of the American Statistical Association*, v. 102, n. 478, p. 603–617, 2007.
- HANSEN, P. R.; LUNDE, A.; NASON, J. M. The model confidence set. *Econometrica*, Wiley Online Library, v. 79, n. 2, p. 453–497, 2011.
- HOERL, A. E.; KENNARD, R. W. Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics*, Taylor & Francis Group, v. 12, n. 1, p. 55–67, 1970.
- JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. *et al.* *Applied multivariate statistical analysis*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002. v. 5.
- JOLLIFFE, I. *Principal Component Analysis*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1986.
- KIEFER, N. M.; VOGELSANG, T. J. Heteroskedasticity-autocorrelation robust standard errors using the bartlett kernel without truncation. *Econometrica*, Wiley Online Library, v. 70, n. 5, p. 2093–2095, 2002.
- _____. A new asymptotic theory for heteroskedasticity-autocorrelation robust tests. *Econometric Theory*, Cambridge University Press, v. 21, n. 6, p. 1130–1164, 2005.
- KIM, H. H.; SWANSON, N. R. Forecasting financial and macroeconomic variables using data reduction methods: New empirical evidence. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 178, p. 352–367, 2014.
- KOOP, G. M. Forecasting with medium and large Bayesian VARs. *Journal of Applied Econometrics*, Wiley Online Library, v. 28, n. 2, p. 177–203, 2013.
- KRISTENSEN, J. T. Diffusion indexes with sparse loadings. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 35, n. 3, p. 434–451, 2017.

- LAURINI, M. P.; OHASHI, A. A noisy principal component analysis for forward rate curves. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 246, n. 1, p. 140–153, 2015.
- LEDOIT, O.; WOLF, M. A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. *Journal of multivariate analysis*, Elsevier, v. 88, n. 2, p. 365–411, 2004.
- MEDEIROS, M. C.; VASCONCELOS, G.; FREITAS, E. Forecasting Brazilian inflation with high-dimensional models. *Brazilian Review of Econometrics*, v. 36, n. 2, p. 223–254, 2016.
- MÜLLER, U. K. A theory of robust long-run variance estimation. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 141, n. 2, p. 1331–1352, 2007.
- ONATSKI, A. Determining the number of factors from empirical distribution of eigenvalues. *The Review of Economics and Statistics*, MIT Press, v. 92, n. 4, p. 1004–1016, 2010.
- POURAHMADI, M. *High-dimensional covariance estimation: with high-dimensional data*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. v. 882.
- SMEEKES, S.; WIJLER, E. Macroeconomic forecasting using penalized regression methods. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 34, n. 3, p. 408–430, 2018.
- STOCK, J. H.; WATSON, M. Forecasting in dynamic factor models subject to structural instability. *The Methodology and Practice of Econometrics. A Festschrift in Honour of David F Hendry*, Oxford University Press Oxford, v. 173, p. 205, 2009.
- STOCK, J. H.; WATSON, M. W. Forecasting using principal components from a large number of predictors. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 97, n. 460, p. 1167–1179, 2002.
- _____. Generalized shrinkage methods for forecasting using many predictors. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 30, n. 4, p. 481–493, 2012.
- _____. Factor models and structural vector autoregressions in macroeconomics. In: *Handbook of Macroeconomics*. [S.l.]: Elsevier, 2016. v. 2, p. 415–526.
- TIBSHIRANI, R. Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, JSTOR, p. 267–288, 1996.
- TIBSHIRANI, R.; WAINWRIGHT, M.; HASTIE, T. *Statistical learning with sparsity: the lasso and generalizations*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2015.
- VIEIRA, F.; FERNANDES, M.; CHAGUE, F. Forecasting the Brazilian yield curve using forward-looking variables. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 33, n. 1, p. 121–131, 2017.
- WANG, H.; LI, B.; LENG, C. Shrinkage tuning parameter selection with a diverging number of parameters. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, Wiley Online Library, v. 71, n. 3, p. 671–683, 2009.
- ZEILEIS, A. Econometric computing with hc and hac covariance matrix estimators. Institut für Statistik und Mathematik, WU Vienna University of Economics and ... , 2004.
- ZOU, H.; HASTIE, T. Regularization and variable selection via the elastic net. *Journal of the royal statistical society: series B (statistical methodology)*, Wiley Online Library, v. 67, n. 2, p. 301–320, 2005.

ZOU, H.; HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R. Sparse principal component analysis. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, Taylor & Francis, v. 15, n. 2, p. 265–286, 2006.

APÊNDICES

APÊNDICE A – MSFE PARA CADA MODELO ESTIMADO

A.1 GDP251

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC	0.3454	0.2376	0.1915	0.1801	0.0772
M02PC	0.1696	0.3178	0.2861	0.1517	0.0831
M03PC	0.3725	0.4370	0.3406	0.3578	0.1414
M04PC	0.3558	0.3485	0.2785	0.2833	0.1070
M05PC	0.4125	0.4001	0.3792	0.1963	0.0911
M06PC	0.3456	0.2393	0.1908	0.1804	0.0774
M07PC	0.1622	0.3137	0.2916	0.1486	0.0868
M01SPC	0.3455	0.2376	0.1915	0.1801	0.0772
M02SPC	0.3505	0.2593	0.1925	0.1852	0.0780
M03SPC	0.3403	0.2412	0.1905	0.1814	0.0777
M04SPC	0.3446	0.4260	0.3783	0.3889	0.1625
M05SPC	0.2907	0.3797	0.3787	0.3736	0.1699
M06SPC	0.3358	0.4222	0.4073	0.4034	0.1773
M07SPC	0.3528	0.3492	0.2843	0.2908	0.1116
M08SPC	0.3171	0.3718	0.3448	0.3479	0.1465
M09SPC	0.3538	0.3531	0.2968	0.3017	0.1184
M10SPC	0.3457	0.2392	0.1903	0.1803	0.0774
M11SPC	0.3466	0.2391	0.1892	0.1816	0.0776
M12SPC	0.3459	0.2389	0.1899	0.1805	0.0775
M01CONC	0.3486	0.4325	0.7376	0.5861	0.6096
M02CONC	0.3461	0.3742	1.2048	1.0530	1.2347
M03CONC	0.2440	0.2485	0.2068	0.1503	0.0745
M04CONC	0.1953	0.2154	0.2586	0.1486	0.0834

Tabela A.1 – MSFE para todos os modelos estimados na aplicação empírica para o GDP251

A.2 IPS10

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC	0.2423	0.2262	0.0826	0.0820	0.0831
M02PC	0.1439	0.2335	0.2060	0.1546	0.0797
M03PC	0.2738	0.2989	0.2147	0.2133	0.1917
M04PC	0.2567	0.2757	0.1337	0.1372	0.1427
M05PC	0.2444	0.2665	0.1499	0.1468	0.0922
M06PC	0.2425	0.2267	0.0828	0.0816	0.0831
M07PC	0.1388	0.2297	0.1965	0.1552	0.0785
M01SPC	0.2422	0.2262	0.0826	0.0820	0.0831
M02SPC	0.2500	0.2429	0.0885	0.0800	0.0827
M03SPC	0.2428	0.2270	0.0828	0.0808	0.0832
M04SPC	0.2688	0.3042	0.2165	0.2095	0.2480
M05SPC	0.2085	0.2173	0.1977	0.2360	0.2566
M06SPC	0.2544	0.2917	0.2235	0.2357	0.2613
M07SPC	0.2558	0.2749	0.1366	0.1422	0.1482
M08SPC	0.2280	0.2574	0.1655	0.1830	0.1998
M09SPC	0.2585	0.2810	0.1423	0.1519	0.1564
M10SPC	0.2431	0.2274	0.0825	0.0814	0.0831
M11SPC	0.2464	0.2284	0.0826	0.0814	0.0831
M12SPC	0.2436	0.2276	0.0824	0.0814	0.0830
M01CONC	0.3831	0.2784	2.9777	1.6082	1.3842
M02CONC	0.7629	0.3737	4.5558	2.4931	2.1348
M03CONC	0.1744	0.1819	0.2104	0.1218	0.1194
M04CONC	0.1281	0.1320	0.1714	0.1496	0.0911

Tabela A.2 – MSFE para todos os modelos estimados na aplicação empírica para o IPS10

A.3 LHUR

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC	0.2598	0.2983	0.2501	0.2450	0.2859
M02PC	0.1148	0.1328	0.2172	0.2233	0.2159
M03PC	0.3525	0.4846	0.5171	0.5460	0.5867
M04PC	0.3385	0.4173	0.4034	0.4220	0.4800
M05PC	0.2416	0.3239	0.3068	0.2576	0.2108
M06PC	0.2603	0.2984	0.2505	0.2450	0.2864
M07PC	0.1130	0.1326	0.2046	0.2242	0.2157
M01SPC	0.2597	0.2982	0.2501	0.2449	0.2859
M02SPC	0.2586	0.3143	0.2584	0.2447	0.2916
M03SPC	0.2593	0.2974	0.2509	0.2451	0.2867
M04SPC	0.3448	0.4713	0.5487	0.5695	0.6054
M05SPC	0.3091	0.4105	0.5213	0.5825	0.5713
M06SPC	0.3384	0.4728	0.5659	0.6156	0.6338
M07SPC	0.3407	0.4218	0.4110	0.4333	0.4962
M08SPC	0.3243	0.4203	0.4731	0.5209	0.5933
M09SPC	0.3437	0.4307	0.4247	0.4546	0.5186
M10SPC	0.2609	0.2985	0.2502	0.2449	0.2865
M11SPC	0.2611	0.3011	0.2503	0.2449	0.2868
M12SPC	0.2609	0.2992	0.2500	0.2448	0.2865
M01CONC	0.9921	0.3700	0.6107	6.2351	0.2924
M02CONC	0.8312	0.4238	0.6266	8.0102	0.4289
M03CONC	0.1955	0.1692	0.2599	0.2494	0.2773
M04CONC	0.3471	0.3611	0.2691	0.2236	0.3141

Tabela A.3 – MSFE para todos os modelos estimados na aplicação empírica para o LHUR

A.4 CPIAUCSL

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC	1.0779	1.1744	1.2536	1.4697	1.8380
M02PC	1.3620	1.2095	1.3222	1.5080	1.8398
M03PC	1.3099	1.2183	1.3244	1.5458	1.8306
M04PC	1.2669	1.2472	1.2921	1.4872	1.8209
M05PC	1.2847	1.2119	1.3650	1.4234	1.9122
M06PC	1.0745	1.1752	1.2527	1.4692	1.8378
M07PC	1.1478	1.2533	1.3525	1.4939	1.8397
M01SPC	1.0779	1.1744	1.2536	1.4697	1.8381
M02SPC	1.0620	1.1864	1.2590	1.4688	1.8394
M03SPC	1.0731	1.1767	1.2532	1.4687	1.8384
M04SPC	1.2847	1.2073	1.3486	1.5300	1.8921
M05SPC	1.2065	1.1970	1.3749	1.5505	1.9223
M06SPC	1.2834	1.2172	1.3665	1.5452	1.8959
M07SPC	1.2478	1.2448	1.2904	1.4897	1.8229
M08SPC	1.1537	1.2439	1.3228	1.5065	1.8278
M09SPC	1.2430	1.2496	1.2949	1.4924	1.8275
M10SPC	1.0737	1.1760	1.2523	1.4688	1.8378
M11SPC	1.0781	1.1756	1.2529	1.4694	1.8381
M12SPC	1.0741	1.1761	1.2523	1.4688	1.8378
M01CONC	1.4749	1.3007	0.9693	5.6704	1.8098
M02CONC	1.8633	1.3822	0.9320	6.5534	2.1865
M03CONC	1.1735	1.1538	1.2301	1.6907	1.7400
M04CONC	0.9364	1.1203	1.2344	1.5326	1.8214

Tabela A.4 – MSFE para todos os modelos estimados na aplicação empírica para o CPIAUCSL

A.5 FSPCOM

	FH1	FH2	FH4	FH6	FH8
M01PC	1.2079	1.3744	0.4327	0.3709	0.2926
M02PC	1.5258	1.6784	0.4507	0.3788	0.3070
M03PC	1.3133	1.5370	0.4245	0.2962	0.2736
M04PC	1.2970	1.5345	0.4280	0.3022	0.2706
M05PC	1.4651	1.7284	0.6112	0.2753	0.3284
M06PC	1.2077	1.3742	0.4328	0.3710	0.2927
M07PC	1.4685	1.6302	0.4107	0.3754	0.3117
M01SPC	1.2079	1.3744	0.4327	0.3709	0.2926
M02SPC	1.2068	1.3738	0.4328	0.3710	0.2926
M03SPC	1.2077	1.3735	0.4326	0.3713	0.2927
M04SPC	1.3126	1.5353	0.4253	0.2950	0.2727
M05SPC	1.2901	1.5127	0.4168	0.2978	0.2798
M06SPC	1.3275	1.5558	0.4254	0.2808	0.2760
M07SPC	1.3004	1.5378	0.4276	0.2996	0.2696
M08SPC	1.2697	1.4963	0.4210	0.3064	0.2694
M09SPC	1.3040	1.5435	0.4267	0.2954	0.2697
M10SPC	1.2078	1.3741	0.4328	0.3710	0.2927
M11SPC	1.2079	1.3745	0.4329	0.3710	0.2926
M12SPC	1.2078	1.3742	0.4328	0.3710	0.2927
M01CONC	1.8050	2.0523	1.6043	0.7502	2.8594
M02CONC	1.7626	2.1713	1.8292	0.4439	3.1552
M03CONC	1.3373	1.5551	0.4303	0.3706	0.2932
M04CONC	1.2072	1.4226	0.4568	0.3266	0.2742

Tabela A.5 – MSFE para todos os modelos estimados na aplicação empírica para o FSPCOM