"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail bibfea@usp.br para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM "MODELAGEM
MATEMÁTICA EM FINANÇAS"

Otimização de Carteiras com Controle de Perda Máxima Através da Programação Estocástica

Michael Viriato Araujo

Orientadores: Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa

Prof. Dr. Joe A. Yoshino

SÃO PAULO

2003

Otimização de Carteiras com Controle de Perda Máxima Através da Programação Estocástica

Michael Viriato Araujo

Dissertação apresentada à
Faculdade de Economia,
Administração e Contabilidade e ao
Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo para
obtenção do Título de Mestre.

Orientadores: Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa

Prof. Dr. Joe A. Yoshino

SÃO PAULO

2003

Resumo

Os modelos de otimização de carteiras evoluíram desde o pioneiro trabalho de Markowitz (1952) de média-variância de um período a estruturas multi-período em tempo contínuo com restrições (Zhao e Ziemba (2000) e (2001)). Um dos grandes desafios a que se propõem os modelos de otimização de carteiras é incorporar ao máximo as restrições enfrentadas pelo investidor na decisão da alocação de recursos. Entretanto, a inclusão de restrições aos problemas de otimização torna sua resolução bastante difícil. Portanto, faz-se necessária a utilização de meios numéricos na busca do ótimo. O objetivo da presente dissertação é analisar e implementar no mercado de capitais brasileiro um modelo de otimização de carteiras multi-período com controle de perda máxima e custos de transação apresentado por Zhao e Ziemba (2001), utilizando o método de otimização estocástica em multi-estágios via decomposição apresentado por Birge (1985).

Abstract

Asset allocation models have been developed since the pioneer paper of Markowitz (1952), from mean-variance in one period to multiperiod structures in continuous time with restrictions (Zhao e Ziemba (2000) e (2001)). One of the greatest challenges of the investment optimization models is to incorporate more and more the restrictions faced by the investors on the decision process of resource's allocation. Nevertheless, the inclusion of restrictions into the optimization problems transform their resolution very hard. Therefore, to find the optimum, the use of numeric models have become necessary. The main reason of this work is to analyse and to implement, in the brazilian capital market, a multiperiod asset allocation model with control of maximum lost and transaction costs, introduced by Zhao e Ziemba(2001), using the multi-period estochastic decomposition method presented by Birge(1985).

Agradecimentos

A experiência adquirida ao longo do curso de Mestrado Profissionalizante - Modelagem Matemática em Finanças - foi engrandecedora para meu desenvolvimento profissional, tendo em vista o estudo de tecnologias que, certamente, trarão benefícios às atividades que desempenho.

Primeiramente, agradeço a todos os professores do curso, em especial, ao Joe Akira Yoshino pelas discussões que tivemos para definição do tema deste trabalho e ao Oswaldo Luiz do Valle Costa pelos ensinamentos, paciência e disponibilidade na orientação desta dissertação.

Não posso deixar de citar a relevante contribuição do Banco Itaú S.A. pela bolsa concedida para a conclusão deste mestrado. Sem dúvida, a liderança tecnológica que esta renomada instituição mantém se justifica pelo contínuo incentivo a seus funcionários na busca e utilização das últimas inovações tecnológicas para a prática de suas atividades. Ressalto as sugestões e direcionamentos propiciados pelo José Euclides M. Ferraz, Superintendente do Banco Itaú SA.

Por fim, o incentivo de minha família, Haroldo Euclides de Araújo, Alice Maria Viriato Araújo, Haroldo E. A. Júnior, Rodrigo V. Araújo e Jane Araújo Ferreira, foi fundamental para a conclusão deste trabalho.

Índice

Introdução	1
 1 Programação Linear e Decomposição de Benders	6
1.1 Programação Linear	6
1.2 Decomposição de Benders	10
 2 Algoritmo de Decomposição em Multi-Estágio	15
2.1 Abordagem em dois estágios	17
2.2 Resolução de problemas em multi-estágio	22
2.3 Aplicação do algoritmo de decomposição a um exemplo teórico	25

3 Modelo de Otimização Multi-Período com Limite de Perda Máxima e Custos de Transação	30
3.1 Modelagem do Problema de Otimização	32
3.2 Propriedades do Modelo	37
4 Implementação do Modelo de Otimização ao Mercado Brasileiro...	41
4.1 Fonte dos Dados e Ferramentas Utilizadas	42
4.2 Árvore de Cenários	44
4.3 Implementações	46
4.3.1 Implementação 1	49
4.3.2 Implementação 2	58
4.4 Resultados	72
Conclusão	74

A Código em Matlab do Algoritmo de Decomposição	77
B Resolução do Problema Exemplo do Capítulo 2	90
Bibliografia	108

Lista de Figuras

2.1	Árvore de Cenários 1	16
2.2	Árvore de Cenários 2	17
2.3	Árvore de cenários para os ativos IBOVESPA e Dólar	26
2.4	Resultado da alocação dos ativos na otimização multi-período (R\$)	29
4.5	Retornos Mensais dos Ativos de Risco	44
4.6	Resumo das Implementações	48
4.7	Árvore de Cenários para a Implementação 1	50
4.8	Alocações Resultantes da Otimização pelo Modelo de Zhao e Ziemba (2001) na Implementação 1	50

4.9	Resultados da Otimização pelo Modelo de Zhao e Ziemba (Implementação 1)	51
4.10	Retornos Esperados dos Ativos na Implementação 1	51
4.11	Matriz de Covariâncias dos Ativos na Implementação 1	51
4.12	Fronteira Eficiente - Média-Variância Período Simples (Implementação 1)	52
4.13	Resultados da Otimização pelo Modelo de Zhao e Ziemba e pelo de Markowitz (Implementação 1)	54
4.14	Rentabilidades Esperadas para os Ativos na Implementação 1	55
4.15	Resultados da Implementação dos Modelos de Markowitz e Zhao e Ziemba (Implementação 1)	56
4.16	Resultados da Implementação dos Modelos de Markowitz e Zhao e Ziemba (Implementação 1)	57
4.17	Árvore de Cenários para a Implementação 2	59
4.18	Alocações Resultantes da Otimização pelo Modelo de Zhao e Ziemba (2001) na Implementação 2	60

4.19	Resultados da Otimização pelo Modelo de Zhao e Ziemba (Implementação 2)	61
4.20	Matriz de Covariâncias dos Ativos na Implementação 2	61
4.21	Retornos Esperados dos Ativos para o Final do Período na Implementação 2	61
4.22	Rentabilidades dos Ativos de Risco no ano de 2002	62
4.23	Resultados pelos dois Modelos para o primeiro semestre (Implementação 2)	63
4.24	Árvore de Cenários para a Implementação 2 (segundo semestre)	64
4.25	Alocações pelo modelo de Zhao e Ziemba para o segundo semestre na Implementação 2	65
4.26	Matriz de Covariâncias dos Ativos para o Segundo Período na Implementação 2	65
4.27	Retornos Esperados dos Ativos para o Final do Período no Segundo Período na Implementação 2	65

4.28	Fronteira Eficiente - Média-Variância Período Simples (Implementação 2)	66
4.29	Resultados da Otimização pelo Modelo de Zhao e Ziemba e pelo de Markowitz (Implementação 1)	67
4.30	Retornos Esperados para a Implementação 2	69
4.31	Resultados dos Modelos de Zhao e Ziemba e Markowitz para a Implementação 2	70
4.32	Resultados dos Modelos de Zhao e Ziemba e Markowitz para a Implementação 2	71

Introdução

Como bem definido por Richard Bronson (1985) o estudo da alocação eficiente de recursos escassos se confunde como arte e ciência. A arte na habilidade de representar através de modelos matemáticos os conceitos de eficiência e escassez, se mistura à ciência de desenvolver métodos capazes de solucionar tais modelos. Dentro deste universo de estudo, definiu-se o enfoque da otimização de recursos financeiros a ser desenvolvido na presente dissertação.

O estudo científico de modelos para otimização de investimentos é relativamente recente, atingindo pouco mais de meio século se considerarmos como seu marco inicial o artigo de Harry Markowitz (1952) "Portfolio Selection", o qual lhe garantiu o Prêmio Nobel de Economia de 1990. Parece razoável imaginar que os investidores antes da publicação desse artigo já preferiam elevar sua riqueza, minimizando os riscos associados a qualquer potencial de ganho. Entretanto, foi Markowitz quem primeiro demonstrou como combinar os conceitos de retorno e risco.

Dois fatores podem ser considerados como de fundamental importância para a prosperidade que esta área de estudo tem alcançado. Como um dos fatores, pode-se citar o desenvolvimento e barateamento do processamento computacional como mola propulsora

para a criação e aprimoramento dos complexos modelos matemáticos que são utilizados como ferramentas na solução dos problemas. O outro e sem dúvida o mais importante foi a integração e o desenvolvimento do mercado financeiro mundial. A elevação do montante de recursos financeiros administrados bem como dos riscos envolvidos nesta atividade e das consequências que a má alocação dos investimentos pode trazer até mesmo para economias de nações, tem demandado o estudo e desenvolvimento de ferramentas para auxílio na melhor alocação de carteiras.

Apesar da recente história, o estudo da otimização de investimentos muito se desenvolveu. Características básicas do modelo inicial de média-variância de período simples foram aprimoradas e acrescentadas para melhor adaptação às reais condições enfrentadas, tais como: a extensão para multi-período, diferentes funções utilidade, inclusão de custos de transação e outras.

Uma das primeiras evoluções sofridas pelo modelo inicial de Markowitz(1952) e assumida posteriormente por este mesmo autor foi a alteração da análise em período simples para multi-período (Mossin (1968), Samuelson (1969), Merton (1969), Fama (1970), Hakansson (1971), Elton e Gruber (1974), Markowitz (1976), Li e Ng (1998)). De fato, os investidores não decidem a alocação de seus portfólios baseados em um único período, mas tem horizontes de investimentos diversos. Esta mudança de horizonte de decisão pode provocar profundas alterações na seleção de um portfólio, pois, levando em consideração que há mais períodos a frente para recuperar perdas momentâneas, em alguns problemas

de otimização, a alocação de uma carteira no curto prazo pode ser mais agressiva que no caso de decisões em um período.

O modelo de média variância tem sido criticado por diversos autores pelo fato de assumir que os investidores têm uma função utilidade quadrática (Elton e Gruber (1974), Gressi, Philippatos e Hayya(1976)). Embora a otimização de investimentos através de diferentes funções utilidade apresente diferentes ou iguais resultados, a escolha de qual é a melhor depende em grande parte daquele que detém os recursos e que características de função utilidade melhor se adequam às suas preferências.

Existem estudos que apontam para o fato de que os custos de transação alteram as decisões dos agentes (Dumas e Luciano (1991)). Nesta linha, a utilização dos modelos de otimização multi-período proporcionou uma melhor percepção do uso da variável custo de transação como parte do problema, tendo em vista que, sabendo a priori quais rebalanceamentos estariam planejados para serem realizados no futuro, a inserção deste custo nos modelos de otimização permite uma maior aproximação do investidor a seu real objetivo. Entretanto, a utilização desta variável já possuía adeptos (Goldsmith (1976)) mesmo nos modelos de otimização de um período.

Comportando todas as possíveis evoluções e alterações citadas quanto ao modelo inicial de média-variância de período simples, os autores Zhao e Ziemba propuseram um novo modelo de otimização para alocação de recursos financeiros em seu artigo "A Stochastic

Programming Model using an Endogenously Determined Worst Case Risk Measure for Dynamic Asset Allocation". A utilização de um modelo que leva em consideração um "nível de desastre" como medida de risco não é recente, possuindo como primeiro adepto um dos pioneiros na teoria de otimização que foi Roy (1952). A abordagem de Zhao e Ziemba (2001) baseia-se em um modelo multi-período de programação linear estocástica no qual o risco é baseado no cenário de perda máxima, que é determinado endogenamente junto com o balanceamento de retorno esperado versus risco, e sujeito a custos de transação.

Portanto, levando em consideração a abrangência e evolução do modelo proposto por Zhao e Ziemba (2001), escolheu-se como objetivo desta dissertação implementar e avaliar a aplicação do referido modelo ao mercado brasileiro. Para a implementação matemático-computacional deste modelo foi utilizado o algoritmo de decomposição de Benders (1962) estendido para casos multi-estágio por Birge (1985). A escolha deste algoritmo levou em consideração além da estrutura do problema, que favorece a aplicação do referido algoritmo, como também a sua recomendação em Cariño, Myers e Ziemba (1998) como o mais rápido algoritmo para solução de problemas de larga escala. A implementação do algoritmo foi realizada em Matlab e levou em consideração semelhante implementação realizada por Silva (2001).

No capítulo 1 abordar-se-á a teoria básica de programação linear necessária à aplicação do método de decomposição. Para isso será apresentada uma breve introdução de programação linear, abordando os principais conceitos que fundamentam o algoritmo

de Benders, passando em seguida a uma descrição do método de decomposição de Benders(1962).

Apresentar-se-á, no capítulo 2, o algoritmo de decomposição de Benders aplicado a problemas multi-estágio, descrevendo inicialmente a implementação deste método para problemas de dois estágios. Esta extensão para resolução de problemas de programação estocástica em dois estágios é atribuída a Slyke e Wets (1969) e é denominada de método L-Shaped. Posteriormente, apresentar-se-á a extensão deste algoritmo a problemas multi-estágio implementada por Birge (1985).

Finalmente, no capítulo 3 será estudado o modelo proposto por Zhao e Ziemba (2001), descrevendo-se suas características. Em seguida, no capítulo 4 implementar-se-á o modelo de Zhao e Ziemba (2001) ao mercado de capitais brasileiro, comparando-o ao modelo de Markowitz. Nesta implementação, utilizar-se-á como ativos o índice IBOVESPA, a taxa de câmbio Real/Dólar, o título brasileiro C-Bond, o índice de renda fixa de mercado calculado pela BM&F (IRF-M) e uma taxa de juros livre de risco assumida constante.

Capítulo 1

Programação Linear e Decomposição de Benders

O presente capítulo apresenta o embasamento teórico matemático para a resolução de problemas de otimização linear estocástica via decomposição de Benders. Inicia-se com uma breve revisão teórica dos principais conceitos de programação linear que fundamentam o método de resolução de problemas de programação linear ou mista via decomposição de Benders, passando em seguida a uma descrição deste algoritmo desenvolvido por Benders(1962).

1.1 Programação Linear

A Programação Linear pode ser considerada como a mais popular das técnicas de resolução de problemas de otimização. Um problema de programação linear é constituído por uma função objetivo linear, a qual se quer maximizar ou minimizar, sujeita a um conjunto de restrições lineares. Um problema deste tipo tem a seguinte estrutura geral:

$$\text{Minimizar : } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1.1)$$

sujeito a:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \\ , com \ x \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \leq \\ \geq \\ = \end{array} \left\{ \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{array} \right.$$

No qual, os valores a_{ij} , b_i e c_j , com $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, n$, são constantes que descrevem o problema 1.1. Enquanto que os valores de x_j são as variáveis as quais se deseja determinar de tal forma que a função objetivo $f(x_j)$, com $j = 1, 2, \dots, n$, seja máxima e todas as restrições sejam atendidas. As restrições em forma de inequação podem ser transformadas em igualdades com a inserção de Variáveis de Folga.

Simplificando o problema (1.1) podemos reescrevê-lo da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } \{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}, \quad (1.2)$$

onde A é uma matriz $m \times n$ com $\text{posto}(A) = m$, x e c são vetores $n \times 1$, e b é um vetor $m \times 1$. Definindo-se B como uma sub-matriz não singular de A , uma solução básica viável pode ser obtida, igualando a zero $n - m$ das componentes de x não associadas com as colunas de B e determinando-se uma solução não negativa para as componentes de x restantes. Esta solução básica x^* de (1.2) será ótima se respeitar a condição $c^T x^* \leq c^T x$ para todo x que satisfaz as restrições: $Ax = b$ e $x \geq 0$.

Um conjunto C em R^n é convexo se para quaisquer dois vetores pertencentes ao conjunto, o segmento de reta entre estes vetores também pertencer a C , ou seja dado quaisquer vetores x e y em C e qualquer número real λ , $0 < \lambda < 1$, o ponto $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. Este conjunto é dito limitado se existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| \leq \delta$ para todo $x \in C$. Caso contrário será considerado ilimitado.

Um ponto x é um ponto extremo de C se não é possível expressá-lo como uma combinação convexa de quaisquer dois outros vetores do conjunto, ou seja, não existem quaisquer dois pontos y e z em C e λ , $0 < \lambda < 1$, tais que $x = \lambda y + (1 - \lambda)z \in C$.

Um vetor $d \neq 0$ em R^n é definido como uma direção de um conjunto convexo C se para todo $x \in C$, então $x + \lambda d \in C$ para todo $\lambda \geq 0$. Este mesmo vetor d , com $\|d\| = 1$, será considerado como uma direção extrema do conjunto C se não existirem duas direções distintas d_1 e d_2 do conjunto C tais que $d = \lambda d_1 + \alpha d_2$, com $\lambda > 0$ e $\alpha > 0$.

Teorema 1.1 Teorema da Representação: Seja um conjunto não vazio e limitado: $K = \{x \in R^n, Ax = b, x \geq 0\}$. Então o conjunto de pontos extremos é não vazio e finito, e o conjunto de direções extremas é vazio. Se K fosse ilimitado, então o conjunto de direções extremas seria não vazio. Tomando $\{e_1, \dots, e_k\}$ como o conjunto de pontos extremos e $\{d_1, \dots, d_k\}$ como o conjunto de direções extremas de K , então $x \in K$ se e somente se:

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j e_j + \sum_{j=1}^i \alpha_j d_j, \quad (1.3)$$

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

$$\alpha_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, i.$$

Teorema 1.2 No problema (1.2), seja $\{e_1, \dots, e_k\}$ o conjunto de pontos extremos e $\{d_1, \dots, d_k\}$ como o conjunto de direções extremas de $K = \{x \in R^n, Ax = b, x \geq 0\}$. Se $c^T d_j < 0$ para algum $j = 1, \dots, i$, então o problema (1.2) tem solução ilimitada $(-\infty)$. Se $c^T d_j \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, i$, então o ponto ótimo do problema (1.2), sobre o conjunto K , é um ponto extremo de K .

Associado a todo problema de programação linear na variável $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ existe um outro problema de programação linear na variável $w^T = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ (onde m é o número de restrições do problema original) denominado como seu dual, de tal forma que com o problema original, também chamado de primal, determina-se completamente seu problema dual e vice-versa. Dessa forma, considerando o problema primal:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c^T x \\ & \text{sujeito a } Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

o seu problema dual equivalente seria:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } w^T b \\ & \text{sujeito a } w^T A \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

Teorema 1.3 Teorema da Dualidade: Considere dois problemas de programação linear, sendo um o primal e o outro o seu dual. Se um dos problemas tem uma solução ótima finita, então o outro também o terá e as funções objetivo de ambos serão iguais. Se um dos problemas tiver solução ilimitada, então o outro problema não possuirá solução.

1.2 Decomposição de Benders

Um dos principais conceitos utilizado na resolução do algoritmo de decomposição é o de Projeção. Como descrito em Geoffrin (1970), o problema:

$$\max_{x \in X; y \in Y} \{f(x, y) \quad \text{sujeito a } g(x, y) \leq 0\} \quad (1.4)$$

envolve a otimização sobre o espaço conjunto das variáveis x e y . Define-se, então, sua projeção sobre o espaço apenas da variável x como:

$$\max_{x \in X} \{ \max_{y \in Y} f(x, y) \quad \text{sujeito a } g(x, y) \leq 0 \} \quad (1.5)$$

Que pode ser escrito como:

$$\max_{x \in X \cap V} v(x) \quad (1.6)$$

onde

$$v(x) = \max_{y \in Y} \{f(x, y) \quad \text{sujeito a } g(x, y) \leq 0\} \quad (1.7)$$

e

$$V = \{x \mid g(x, y) \leq 0, \text{ para algum } y \in Y\} \quad (1.8)$$

Com esta ferramenta, pode-se resolver em dois estágios um problema envolvendo duas variáveis, incluindo mais uma restrição de viabilidade entre um estágio e outro.

Teorema 1.4 Se o problema (1.4) é inviável ou ilimitado, o mesmo ocorre com o problema (1.6). Se (x_0, y_0) é ótimo em (1.4), então x_0 deve ser ótimo em (1.6). Se x_0 é ótimo em (1.6) e y_0 alcança o valor supremo de $f(x_0, y)$ sujeito a $y \in Y$ e $g(x, y) \leq 0$, então y_0 junto com x_0 é ótimo em (1.4).

Considere agora o seguinte problema geral de programação linear ou mista:

$$\begin{aligned} & \max c^T x + d^T y & (1.9) \\ \text{sujeito a:} & Ax + By = h \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

Utilizando o conceito de projeção sobre o problema (1.9), é possível reescrevê-lo como:

$$\begin{aligned} & \max c^T x + Q(x) & (1.10) \\ & x \in V. \end{aligned}$$

onde:

$$Q(x) = \max\{d^T y \mid By = h - Ax, y \geq 0\}, \quad (1.11)$$

$$V = \{x \mid x \geq 0, By = h - Ax, \text{ para algum } y \geq 0\}. \quad (1.12)$$

Pelo Teorema da Dualidade (Teorema 1.3) tem-se que o problema:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \max d^T y \\ \text{sujeito a: } & By = h - Ax, \ y \geq 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

equivale a:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \min u^T (h - Ax) \\ \text{sujeito a: } & u^T B = d^T \end{aligned} \quad (1.14)$$

Considerando que u^j são os pontos extremos de $\{u \mid u^T B = d^T\}$, com $j = 1, \dots, k$, e que d^j , com $j = 1, \dots, i$, representa as direções extremas da região de viabilidade de (1.14), então pelo Teorema da Dualidade, o problema (1.13) somente é viável se o problema (1.14) tem uma solução ótima finita, ou seja, se existe x que satisfaça a condição:

$$(d^j)^T (h - Ax) \geq 0, \quad j = 1, \dots, i \quad (1.15)$$

Dessa forma, pode-se reescrever o problema (1.10) como:

$$\begin{aligned} & \max_{x \geq 0} \left\{ c^T x + \min_{i=1, \dots, k} (u^i)^T (h - Ax) \right\} \\ \text{sujeito a: } & (d^j)^T (h - Ax) \geq 0, \quad j = 1, \dots, i. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Portanto, adicionando e definindo a variável θ como a maior cota inferior de $Q(x)$, reescreve-se (1.16) como:

$$\max_{x \geq 0} c^T x + \theta \quad (1.17)$$

sujeito a:

$$(d^j)^T(h - Ax) \geq 0, \quad j = 1, \dots, i, \quad (1.18)$$

$$\theta \leq (u^j)^T(h - Ax), \quad j = 1, \dots, k. \quad (1.19)$$

O método de decomposição de Benders baseia-se na aplicação dos conceitos de Dualidade, Projeção e do relaxamento das restrições (1.18) e (1.19) para a resolução de problemas como o (1.9). Dessa forma, aplicando-se os dois conceitos mencionados reescreve-se o problema (1.9) na forma do problema (1.17) com as restrições (1.18) a (1.19). Para evitar o cálculo antecipado dos vetores u e d , relaxam-se as restrições (1.18) e (1.19), adicionando-as a medida que forem necessárias de volta ao problema.

Passo 1: Resolve-se o problema (1.17), sem as restrições (1.18) e (1.19), caso estas restrições ainda não tenham sido acrescentadas pelo *Passo 2*, encontrando uma solução ótima $(\hat{x}, \hat{\theta})$; Se não se encontrar solução, então o problema (1.9) não possui solução;

Passo2: Para testar a viabilidade da solução $(\hat{x}, \hat{\theta})$, resolve-se o problema linear (1.14). Se o valor $Q(x)$ mínimo encontrado em (1.14) é menor ou igual a $\hat{\theta}$, então a solução $(\hat{x}, \hat{\theta})$ encontrada é ótima para (1.17) a (1.19) e $\hat{y}$, parte da solução ótima de (1.9), é obtido por $B\hat{y} = h - A\hat{x}$, terminando-se a otimização. Caso contrário, se o valor $Q(x)$ mínimo encontrado em (1.14) for maior que $\hat{\theta}$, então adiciona-se uma restrição do tipo (1.19) ao problema (1.17) com os valores encontrados em (1.14). Se o problema (1.14), com $\hat{x}$, não

possuir solução ótima finita, o que significa que $(\hat{d})^T(h - A\hat{x}) \leq 0$, então, com os valores encontrados (1.14) adiciona-se uma restrição do tipo (1.18) ao problema (1.17) e retorna-se ao *Passo 1*. Como o número de restrições do tipo (1.18) e (1.19) é finito, tem-se como resultado o teorema abaixo:

Teorema 1.5 O algoritmo de Benders converge para a solução ótima do problema (1.9) em um número finito de iterações.

Capítulo 2

Algoritmo de Decomposição em Multi-Estágio

Neste capítulo serão estudados os modelos de resolução de problemas de programação linear estocástica através do método de decomposição de Benders (1962). Inicialmente, será abordado o método apresentado por Slyke e Wets (1969) para solução de problemas de programação linear estocástica em dois estágios, denominado de método L-Shaped. Em seguida, será apresentada a versão estendida por Birge (1985) deste algoritmo de dois estágios para solucionar problemas de programação linear multi-estágio. Por fim, aplica-se este último algoritmo a um problema de programação linear multi-estágio simples para demonstrar sua forma de resolução.

Um problema de programação linear multi-estágio pode ser definido como um problema de programação linear estocástica multi-estágio quando o resultado relacionado com ao menos um dos dados do problema é aleatório. Dessa forma, em um problema genérico de programação linear estocástica multi-estágio, um agente, a partir de um ponto inicial $t = 1$, se depara com uma série de decisões $x_1, x_2, \dots, x_H$ dispostas em uma sequência de estágios futuros $t = 1, 2, \dots, H$, indicados na figura (2.1), onde $t = 1, 2, 3$. Estas decisões levarão em consideração uma gama de cenários futuros, representados por estados

aleatórios $w \in \{w^1, \dots, w^K\}$ que revelam o caminho da informação pelo tempo, definidos em um espaço de probabilidades (Ω, F, P) . Dessa forma, cada nó da árvore de cenários na figura (2.1) é representado pelo par (t, w^k) e descreve o ambiente de decisão de x .

Fig. 2.1. Árvore de Cenários 1

Nesta dissertação serão tratados os problemas de programação linear estocástica multi-estágio ditos recursivos, ou seja, aqueles nos quais uma decisão ou ação recursiva pode ser tomada depois que a incerteza, representada pelos estados aleatórios w , é desvendada. Assim, ações, chamadas de decisões do primeiro estágio, são tomadas e, em função das decisões do primeiro e ou de processos aleatórios ocorrerem, atitudes são tomadas chamadas de decisões de segundo estágio.

Tendo em vista que nesta dissertação trabalhar-se-á com árvores de cenários não re-combinantes, por construção, cada nó da árvore em si descreve o caminho da informação pelo tempo, pois cada nó terá como seu antecessor apenas um nó no estágio anterior. Portanto, é possível definir um nó pelo par (t, k) , onde $k \in \{1, \dots, K_t\}$ determina o estado em que se encontra o processo de decisão e a informação até o tempo t . No caso de haver am-

biguidade sobre a que tempo se refere o estado k , pode-se defini-lo como k_t . Assim, uma árvore de cenários binomial não recombinante é descrita como na figura (2.2).

Fig. 2.2. Árvore de Cenários 2

2.1 Abordagem em dois estágios

Antes de analisar a abordagem de solução de problemas de programação linear estocástica em multi-estágio implementada por Birge, é interessante estudar o método conhecido como L-Shaped para solução de problemas de programação linear estocástica em dois estágios apresentado por Slyke e Wets, pois o primeiro nada mais é do que uma extensão do modelo de dois estágios.

Em um problema de programação estocástica em dois estágios, uma decisão deve ser tomada no primeiro estágio antes de se saber a realização futura das variáveis aleatórias do

problema, embora se conheçam suas distribuições de probabilidade. No segundo estágio, o valor de tais variáveis aleatórias se torna conhecido e ações corretivas podem ser tomadas de forma recursiva.

Considere o problema de programao linear em dois estágios abaixo:

$$\underset{x,y}{\text{Minimizar}} : f(x,y) = c_1^T x + E_{\xi^k}((c_2)^T y) \quad (2.1)$$

sujeito a :

$$W_1 x = h_1,$$

$$W_2 y^k = h_2^k - T^k x, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$x \geq 0, \quad y^k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K,$$

onde c_1 é um vetor conhecido em $\Re^{n_1}$, h_1 é um vetor conhecido em $\Re^{m_1}$, W_2 é uma matriz conhecida $m \times n$ chamada matriz de recurso, para cada k , c_2^k é um vetor aleatório em $\Re^n$, h_2^k é um vetor aleatório em $\Re^m$ e T^k é uma matriz aleatória $m \times n$ denominada matriz de tecnologia. Juntando as variáveis com componentes estocásticas formamos o vetor aleatório $\xi^k = [c^k, h^k, T^k]$, definido no espaço de probabilidades (Ω, F, P) . Na presente dissertação as variáveis aleatórias são tratadas de forma discretizada, portanto, tendo um número finito K_t de valores diferentes, sendo descritas por suas distribuições de probabilidades com probabilidades associadas: $P(\xi^k) = P(\xi = \xi^k)$, sujeito a $\sum_{k=1}^{K_t} P(\xi^k) = 1$.

Realizando as manipulações descritas no capítulo 1, chega-se à seguinte forma para o problema (2.1):

$$\min_{x \in V} c_1^T x + \theta \quad (2.2)$$

sujeito a:

$$W_1x = h_1, \quad (2.3)$$

$$(\pi^j)^T(h_2^k - T^kx) \leq 0, \quad j = 1, \dots, r^k \quad (2.4)$$

$$\theta \geq \sum_k p^k (\pi^i)^T(h_2^k - T^kx), \quad i = 1, \dots, s^k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.5)$$

onde

$$V = \{x \mid x \geq 0, (\pi^i)^T W_2^k = (c_2^k)^T, \text{ para algum } y \geq 0\}.$$

Reescrevendo o problema acima na forma descrita em Birge e Louveaux (1997):

$$\min_{x \geq 0, \theta \in \mathbb{R}} (c_1)^T x + \theta \quad (2.6)$$

sujeito a:

$$W_1x = h_1$$

$$D_lx \geq d_l, \quad l = 1, \dots, r \quad (2.7)$$

$$E_lx + \theta \geq e_l, \quad l = 1, \dots, s \quad (2.8)$$

O método de solução L-Shaped de Slyke e Wets se resume em resolver o problema (2.6) acima, relaxando as restrições, e, a medida que for sendo necessário, acrescentam-se restrições do tipo (2.7) para definir regiões de viabilidade e restrições do tipo (2.8) para rea-

lizar cortes de otimalidade. Esta metodologia se utiliza da estrutura especial do problema para encontrar a solução. Abaixo descrevemos o algoritmo para solução destes problemas descrito em Birge e Louveaux (1997):

Passo 0: Fazer $r = s = i = 0$

Passo 1: Fazer $i = i + 1$. Resolver o problema linear (2.6). Considere o par (x^i, θ^i) como uma solução ótima. Se nenhuma restrição do tipo (2.8) está presente, então θ^i é fixado igual a $-\infty$ e  eliminado do problema.

Passo 2: Para $k = 1, \dots, K$, resolver o problema linear:

$$\min w^T = e^T v^+ + e^T v^- \quad (2.9)$$

sujeito a:

$$Wy + Iv^+ - Iv^- = h^k - T^k x^i, \quad (2.10)$$

$$y \geq 0, v^+ \geq 0, v^- \geq 0,$$

onde e^T é um vetor com dimensões apropriadas e todos os elementos iguais a um, até que se encontre para algum k , um valor ótimo de $w^T > 0$. Para este caso, denotando σ^i como os multiplicadores simplex associados ao problema, calcula-se:

$$D_{r+1} = \sigma^i T^k \quad (2.11)$$

e

$$d_{r+1} = \sigma^i h^k \quad (2.12)$$

para gerar uma restrição do tipo (2.7). Fazer $r = r + 1$ e voltar ao *Passo 1*, adicionando a restrição do tipo (2.7) calculada. Se, para todo k , $w^T = 0$, vá para o *Passo 3*.

Passo 3: Para $k = 1, \dots, K$, resolver o problema linear:

$$\min (c^k)^T y \quad (2.13)$$

sujeito a :

$$Wy = h^k - T^k x^i,$$

$$y \geq 0.$$

Denotando $\pi^{k,i}$ como os multiplicadores simplex associados ao problema acima. Calcule:

$$E_{s+1} = \sum_{k=1}^K p^k \cdot (\pi^{k,i})^T T^k \quad (2.14)$$

e

$$e_{s+1} = \sum_{k=1}^K p^k \cdot (\pi^{k,i})^T h^k \quad (2.15)$$

Definir $w^i = e_{s+1} - E_{s+1} x^i$. Se $\theta^i \geq w^i$, interrompa a rotina, pois x^i é a solução ótima. Do contrário, faça $s = s + 1$, adicione uma restrição do tipo (2.8) calculada neste *Passo 3* e retorne ao *Passo 1*.

2.2 Resolução de problemas em multi-estágio

A estrutura de um problema de programação linear estocástica multi-estágio, onde os estágios são descritos por $t = 1, \dots, H$ e os cenários por $k = 1, \dots, K_t$, pode ser descrita na forma:

$$\text{Minimizar : } z = c_1^T x_1 + E_{\xi_2} \left[\min_{x_2^k} (c_2^k)^T x_2^k + \dots + E_{\xi_H} \left[\min_{x_H^k} (c_H^k)^T x_H^k \right] \right] \quad (2.16)$$

sujeito a:

$$\left. \begin{array}{c} W_1 x_1 \\ T_2^k x_1 + W_2 x_2^k \\ \dots \\ T_{H-1}^k x_{H-1}^{a(k)} + W_H x_H^k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} h_1 \\ h_2^k \\ \dots \\ h_H^k \end{array} \right.$$

, com $x \geq 0$

onde $a(k_t)$ representa os descendentes do período t de um cenário k no período $t - 1$ e as outras variáveis são como descritas anteriormente.

Realizando as manipulações descritas no capítulo 1, chega-se à seguinte estrutura:

$$\min (c_t^k)^T x_t^k + \theta_t^k \quad (2.17)$$

sujeito a:

$$W_t x_t^k = h_t^k - T_{t-1}^k x_{t-1}^{a(k_t)} \quad (2.18)$$

$$D_t^{k,j} x_t^k \geq d_t^{k,j}, \quad j = 1, \dots, r_t^{k,j} \quad (2.19)$$

$$E_t^{k,j} x_t^k + \theta_t^k \geq e_t^{k,j}, \quad j = 1, \dots, s_t^{k,j} \quad (2.20)$$

$$x_t^k \geq 0 \quad (2.21)$$

O algoritmo implementado por Birge(1985) é descrito abaixo, conforme em Birge e Louveaux(1997):

Passo 0: Fazer $t = k = 1$, $r_t^k = s_t^k = 0$. Para todo t e k de (2.17) a (2.21), fazer $\theta_t^k = 0$ e setar a direção $DIR = FORE$. Ir para o *Passo 1*.

Passo 1: Resolver o problema corrente (t, k) .

Se este problema for inviável e $t=1$, então pare, pois o problema como um todo não possui solução. Entretanto, se $t > 1$, então faça $r_{t-1}^{a(k_t)} = r_{t-1}^{a(k_t)} + 1$. Encontre uma restrição de viabilidade do tipo (2.19) a partir da solução dual, $\pi_t^k, \rho_t^k \geq 0$, tais que $(\pi_t^k)^T W_t + (\rho_t^k)^T D_t^k \leq 0$ com $(\pi_t^k)^T (h_t^k - T_{t-1}^k x_{t-1}^{a(k_t)}) + (\rho_t^k)^T d_t^k > 0$, ou seja, procure-se direções extremas de $\{\pi_t^k \mid (\pi_t^k)^T W_t^k = (c_t^k)^T\}$, resolvendo os problemas (2.9) a (2.10) utilizado no *Passo 2* do problema de dois estágios. Estes multiplicadores simplex podem ser calculados da mesma forma descrita no *Passo 2* do problema de dois estágios. Fazer $D_{t-1}^{a(k_t), r_{t-1}^{a(k_t)}} = (\pi_t^k)^T T_{t-1}^k$ e $d_{t-1}^{a(k_t), r_{t-1}^{a(k_t)}} = (\pi_t^k)^T h_t^k + (\rho_t^k)^T d_t^k$. Fazer $t = t - 1$, $k = a(k_t)$ e retornar ao *Passo 1*.

Se o problema for viável, então armazene as soluções encontradas do problema primal x_t^k , θ_t^k e do problema dual dadas pelos multiplicadores π_t^k , ρ_t^k e σ_t^k relativos às restrições (2.18) a (2.20) respectivamente. Então:

Se $k < K_t$, faça $k = k + 1$ e retorne ao início do *Passo 1*.

Se $k = K_t$, se $DIR=FORE$ e $t < H$, faça $t = t + 1$ e retorne ao início do *Passo 1*. Se $t = H$, setar $DIR=BACK$ e siga ao *Passo 2*.

Passo 2: Para todos os cenários $j = 1, \dots, K_{t-1}$ em $t - 1$, calcular:

$$E_{t-1}^j = \sum_{k \in D_t(j)} \frac{p_t^k}{p_{t-1}^j} \cdot (\pi_t^k)^T T_{t-1}^k \quad (2.22)$$

e

$$e_{t-1}^j = \sum_{k \in D_t(j)} \frac{p_t^k}{p_{t-1}^j} \left[(\pi_t^k)^T h_t^k + \sum_{i=1}^{r^k} (\rho_t^{ki})^T d_t^{ki} + \sum_{i=1}^{s^k} (\sigma_t^{ki})^T e_t^{ki} \right] \quad (2.23)$$

Com estes dados, calcula-se a esperança condicional sobre todos os cenários em $D_t(j)$ como $\bar{\theta}_{t-1}^j = e_{t-1}^j - E_{t-1}^j x_{t-1}^j$. Se a restrição $\theta_{t-1}^j = 0$ aparecer no problema $(t - 1, j)$, então remova-a, faça $s_{t-1}^j = 1$, e adicione uma restrição do tipo (2.14) ao problema $(t - 1, j)$.

Se $\bar{\theta}_{t-1}^j > \theta_{t-1}^j$, então faça $s_{t-1}^j = s_{t-1}^j + 1$ e adicione uma restrição do tipo (2.20) ao problema $(t - 1, j)$. Se $t=2$ e nenhuma restrição do tipo (2.20) for adicionada ao problema

$(t = 1, j = k_1 = 1)$, então pare, pois a solução x_1^1 é ótima. Do contrário, faça $t = t - 1$ e $k = 1$. Se $t = 1$, faça $DIR=FORE$. Retorne ao *Passo 1*.

No Apêndice A é apresentado um código em Matlab que aplica o algoritmo de Birge descrito acima na resolução de problemas de programação linear estocástica em multi-estágio.

2.3 Aplicação do algoritmo de decomposição a um exemplo teórico

Este algoritmo pode ser utilizado para a resolução de uma vasta gama de problemas de programação linear estocástica. Encontram-se aplicações deste método em otimizações nas áreas de finanças (*Asset Liability Management*), de energia elétrica (expansão de capacidade), e produção dentre outras. Para ilustrar seu desenvolvimento, descreve-se abaixo um exemplo simples na área de finanças.

Suponha um investidor com uma riqueza inicial de R\$100.000,00 que deseja encontrar a melhor forma de investir este patrimônio de forma a maximizar o valor terminal de seu portfólio ao final de dois anos, que é seu horizonte de investimentos. O aplicador pode escolher dentre três alternativas para alocar seus recursos: um ativo livre de risco, e dois ativos de risco (índice da Bolsa de Valores de São Paulo (IBOVESPA) e a taxa de câmbio Real/Dólar (Dólar)). Entretanto, dada a aversão ao risco deste investidor, ele não deseja

ver seu patrimônio, em qualquer momento, reduzido a um valor abaixo do valor inicial e tão pouco deseja investir, em qualquer período, mais do que 50% do valor de seu portfólio apenas no ativo IBOVESPA. Suponha que os ativos possuem taxas de retorno compostas continuamente e o ativo livre de risco possui rentabilidade constante em todos os períodos igual a 15%a.a.. Assume-se também a inexistência de custos de transação e a impossibilidade de se realizar venda a descoberto, ou seja, vender qualquer dos ativos sem possuí-lo. Para iniciar o processo de decisão, o investidor desenhou a árvore de cenários, exibida na figura (2.3), que demonstra sua expectativa de rentabilidade para cada ativo de risco:

Fig. 2.3. Árvore de cenários para os ativos IBOVESPA e Dólar

Esta é uma árvore de cenários binomial não recombinante onde todas as probabilidades de transição têm o mesmo valor de 1/2. Cada nó apresenta o vetor de estados $\xi_t^k = (RENTABILIDADE\_IBOVESPA_t^k, RENTABILIDADE\_DÓLAR_t^k)$

definindo a rentabilidade de cada ativo de risco no tempo t e cenário k . Dessa forma, se após o primeiro ano ($t = 2$) o cenário $k = 1$ ocorrer, então os recursos alocados no ativo Dólar terão rentabilidade negativa dada por $e^{(-0,10)}$ e aqueles alocados no IBOVESPA retorno de $e^{(-0,20)}$. Se, por outro lado, o cenário $k = 2$ ocorrer, as rentabilidades do Dólar e IBOVESPA serão, respectivamente: $e^{(-0,10)}$ e $e^{(0,40)}$.

Utilizando a seguinte notação:

- W_1 : riqueza inicial do investidor;
  - F_t^k : montante alocado no ativo livre de risco no tempo t e cenário k_t ;
  - I_t^k : montante alocado no ativo IBOVESPA no tempo t e cenário k_t ;
  - U_t^k : montante alocado no ativo Dólar no tempo t e cenário k_t ;
  - $Jret_t^k$: taxa de retorno composta continuamente no tempo t e cenário k do ativo
- $J \in \{F(\text{livre de risco}), I(\text{IBOVESPA}), U(\text{Dólar})\}$.

Então, o problema proposto pode ser traduzido no equivalente determinístico do problema de programação linear estocástico multi-estágio abaixo:

$$\min \left\{ \begin{array}{l} -0 \cdot F_1 - 0 \cdot I_1 - 0 \cdot U_1 + \sum_{k=1}^2 0,50(-0 \cdot F_2^k - 0 \cdot I_2^k - 0 \cdot U_2^k) + \\ \sum_{k=1}^4 0,25(-F_3^k - I_3^k - U_3^k) \end{array} \right\} \quad (2.24)$$

$$\text{sujeito a } F_1 + I_1 + U_1 = W_1$$

$$I_1 \leq W_1 \cdot 0.5$$

$$F_2^k + I_2^k + U_2^k = Fret_2^k F_1^{a(k_2)} + Iret_2^k I_1^{a(k_2)} + Uret_2^k U_1^{a(k_2)},$$

$$I_2^k \leq (Fret_2^k F_1^{a(k_2)} + Iret_2^k I_1^{a(k_2)} + Uret_2^k U_1^{a(k_2)}) \cdot 0.5,$$

$$-F_2^k - I_2^k - U_2^k \leq -W_1, \quad k = 1, 2$$

$$F_3^k + I_3^k + U_3^k = Fret_3^k F_2^{a(k_3)} + Iret_3^k I_2^{a(k_3)} + Uret_3^k U_2^{a(k_3)},$$

$$I_3^k \leq (Fret_3^k F_2^{a(k_3)} + Iret_3^k I_2^{a(k_3)} + Uret_3^k U_2^{a(k_3)}) \cdot 0.5,$$

$$-F_3^k - I_3^k - U_3^k \leq -W_1, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

$$F_t^{k_t}, I_t^{k_t}, U_t^{k_t} \geq 0; \quad k = 1, \dots, K_t; \quad t = 1, 2, 3;$$

O procedimento de resolução deste problema (2.24), passo a passo, utilizando o algoritmo apresentado por Birge, levou cerca de 2 segundos para ser realizado e está descrito no Apêndice B. Esta resolução foi realizada através do código em Matlab descrito no Apêndice A.

A solução ótima encontrada, com as alocações explícitas em Reais (R\$), está explícita na figura (2.4).

Fig. 2.4. Resultado da alocação dos ativos na otimização multi-período (R\$)

Capítulo 3

Modelo de Otimização Multi-Período com Limite de Perda Máxima e Custos de Transação

Zhao e Ziemba, em seu artigo "*A stochastic programming model using an endogenously determined worst case risk measure for dynamic asset allocation*", apresentaram um novo modelo para otimização dinâmica de investimentos, o qual utiliza a programação estocástica como ferramenta. O modelo sujeita-se a restrições de venda a descoberto, custos de transação e, utiliza como medida de risco, o controle de perda máxima, que é determinada endogenamente ao problema de otimização.

Como principal motivo para Zhao e Ziemba utilizarem uma nova função objetivo, em troca da usual média-variância, pode-se citar o fato de que vários investidores, tais como, entidades de previdência e seguradoras, não poderem suportar que o patrimônio de seus portfólios se situe abaixo de um limite crítico, sugerindo, assim, a utilização de uma ferramenta que controle esta perda máxima. Portanto, esta classe de aplicadores teria como função objetivo maximizar sua riqueza final de forma a que seu portfólio, no horizonte desejado (T), não seja menor que um determinado limite mínimo (K), em qualquer cenário.

3 Modelo de Otimização Multi-Período com Limite de Perda Máxima e Custos de Transação

Como uma forma de expandir as oportunidades de escolha do investidor, ampliou-se o modelo inicial, adicionando a possibilidade de selecionar o potencial máximo de perda sobre o objetivo mínimo (K) nos períodos intermediários até o horizonte de investimento (H). Assim, é possível impor a restrição de que o patrimônio do portfólio também deva ser maior que o objetivo mínimo (K) em qualquer período intermediário, além do período final, se assim desejar o aplicador.

Esta função objetivo se assemelha a otimizar um portfólio utilizando uma estratégia com opções. A compra de opções de venda sobre o portfólio se configura como uma forma de se proteger contra a possibilidade de perda maior que um máximo desejado. Entretanto, o mercado de opções tem liquidez apenas para períodos curtos, o que tornaria esta estratégia cara no longo prazo, pois seriam compradas uma série de opções cujos preços em diversos momentos poderiam estar sobrevalorizados. Além disso, não seria fácil encontrar, com as características desejadas, opções sobre todos os ativos da carteira, ou sobre todo o portfólio como um todo. Até mesmo a sintetização de uma opção sobre o portfólio pode ser de difícil execução, levando-se em consideração as características deste.

Outro ponto de destaque na estratégia com opções é a determinação do *strike*. Na estratégia de compra de opções, a escolha do *strike* (K) ocorre *ex ante*, não importando nesta escolha as possíveis trajetórias futuras dos ativos. Assumindo que a escolha do K interfere no resultado final, pois a elevação de K reduz o retorno esperado, é razoável incluir na função objetivo do investidor o K , e, portanto, selecionar o *strike* endogenamente

ao modelo de otimização, aumentando assim a região de possíveis escolhas de risco *versus* retorno dada a aversão ao risco de cada investidor.

3.1 Modelagem do Problema de Otimização

No modelo apresentado, assume-se que as oportunidades de investimento são constituídas por n ativos de risco e um ativo livre de risco. Utiliza-se a seguinte notação no desenvolvimento do modelo:

- W_0 : riqueza inicial do investidor;
- H : horizonte de investimento;
- ρ : taxa de retorno do ativo livre de risco composta continuamente e constante no horizonte de investimento;
- $r_t^{k,i}$: taxa de retorno do ativo de risco i no tempo t composta continuamente, com $i = 1, \dots, n$ e $t = 1, \dots, H$;
- α_t^k : Montante alocado no ativo livre de risco no tempo t e cenário k ;
- $x_t^{k,i}$: Montante alocado no ativo de risco i no tempo t e cenário k ;
- $A_t^{k,i}$: Montante adicional comprado do ativo i no tempo t e cenário k ;
- $D_t^{k,i}$: Montante adicional vendido do ativo i no tempo t e cenário k ; e
- $\tau_t^{k,i}$: custo de transação para compra ou venda do ativo i no tempo t , em percentual e cenário k .

A restrição inicial do problema é que o portfólio inicial satisfaça:

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^n x_0^i (1 + \tau_0^i) = W_0. \quad (3.1)$$

Satisfazendo a condição de autofinanciamento através dos períodos, para $t = 1, \dots, H$, as restrições para os ativos livres de risco e os ativos de risco são, respectivamente, descritas como:

$$\alpha_{t-1}^{a(k_t)} e^{\rho} - \alpha_t^k - \sum_{i=1}^n (1 + \tau_t^i) A_t^{k,i} + \sum_{i=1}^n (1 + \tau_t^i) D_t^{k,i} = 0. \quad (3.2)$$

$$x_{t-1}^{a(k_t),i} e^{r_t^{k,i}} - x_t^{k,i} + A_t^{k,i} - D_t^{k,i} = 0. \quad (3.3)$$

O valor terminal do portfólio pode ser dividido em duas partes: K e z_t^k , onde K é um valor objetivo mínimo, e z_t^k é o superávit sobre este objetivo no tempo t e cenário k . Portanto, K é um valor determinístico e z_t^k é uma variável aleatória. Dessa forma, o superávit z_t^k pode ser definido em qualquer período $t = 1, \dots, H$ como:

$$\alpha_{t-1}^{a(k_t)} e^{\rho} + \sum_{i=1}^n (1 - \tau_t^i) x_{t-1}^{a(k_t),i} e^{r_t^{k,i}} - z_t^k - K = 0. \quad (3.4)$$

Além destas restrições os autores sugerem a inclusão de restrições sobre o montante máximo possuído dos ativos de risco como uma forma de controlar a liquidez do portfólio. Definindo $m_t = (m_t^1, \dots, m_t^n)$ como um vetor que determina o limite superior alocado para todos os ativos i no tempo t como uma proporção sobre o portfólio total, monta-se a

restrição:

$$0 \leq x_t^k \leq m_t((x_t^k)^T \cdot 1 + \alpha_t^k). \quad (3.5)$$

Em substituição à variância, tendo em vista as críticas sobre esta medida de risco, o modelo proposto pelos autores apresenta uma função objetivo que utiliza uma medida de risco denominada por eles de prêmio sobre o cenário de perda máxima. A definição formal desta medida de risco como descrito por Zhao e Ziemba é:

Definição 3.1 Seja $Y > 0$ uma variável aleatória representando o valor terminal do portfólio. O valor de Y no cenário de perda máxima é: $Y^L = \sup\{K \in \mathbb{R}; P\{Y \geq K\} = 1\}$. O retorno do investidor é caracterizado pelo par (z_t^k, Y^L) , onde z_t^k é definido como o superávit no tempo t e cenário k e determinado pela restrição (3.4).

Para que a probabilidade de Y^L sempre exceder o cenário de perda máxima tenha valor igual a 1, deve-se assumir a existência de uma taxa livre de risco não estocástica.

Com esta medida de risco, pode-se montar a função objetivo do problema de otimização. Dessa forma, assume-se que a preferência dos investidores entre o cenário de perda máxima W^l e o superávit esperado sobre este cenário seja:

$$E(z_H) + \mu W^l, \quad (3.6)$$

onde μ representa o coeficiente de aversão ao risco do investidor. Dessa forma, quanto menor o valor de μ mais propensão o investidor tem a aplicar seus recursos em ativos de

risco. Ou, quanto maior o μ maior a alocação dos investidores no ativo livre de risco para garantir um limite mais vantajoso de perda máxima.

Portanto, o problema proposto pode ser formulado pelo seguinte modelo de programação linear estocástica multi-período:

$$\max_{\alpha_0, x_0 \geq 0, K} E \left[\mu K + \max_{\alpha_1, x_1 \geq 0} E \left[0 + \max_{\alpha_2, x_2 \geq 0} E \left[0 + \dots + \max_{\alpha_H, x_H, z_H \geq 0} E [z_H] \right] \right] \right] \quad (3.7)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \sum_{i=1}^n (1 + \tau_0^i) x_0^i &= W_0 \\ \alpha_0^{a(k_1)} e^\rho - \alpha_1^k - \sum_{i=1}^n (1 + \tau_1^i) A_1^{k,i} + \sum_{i=1}^n (1 + \tau_1^i) D_1^{k,i} &= 0 \\ x_0^{a(k_1),i} e^{r_1^{k,i}} - x_1^{k,i} + A_1^{k,i} - D_1^{k,i} &= 0 \\ \alpha_0^{a(k_1)} e^\rho + \sum_{i=1}^n (1 - \tau_1^i) x_0^{a(k_1),i} e^{r_1^{k,i}} - z_1^k - K &= 0 \\ \alpha_1^{a(k_2)} e^\rho - \alpha_2^k - \sum_{i=1}^n (1 + \tau_2^i) A_2^{k,i} + \sum_{i=1}^n (1 + \tau_2^i) D_2^{k,i} &= 0 \\ x_1^{a(k_2),i} e^{r_2^{k,i}} - x_2^{k,i} + A_2^{k,i} - D_2^{k,i} &= 0 \\ \alpha_1^{a(k_2)} e^\rho + \sum_{i=1}^n (1 - \tau_2^i) x_1^{a(k_2),i} e^{r_2^{k,i}} - z_2^k - K &= 0 \\ &\ddots \\ &\ddots \\ &\ddots \\ \alpha_{H-1}^{a(k_H)} e^\rho + \sum_{i=1}^n (1 - \tau_H^i) x_{H-1}^{a(k_H),i} e^{r_H^{k,i}} - z_H^k - K &= 0, \\ z_H^k \geq 0, \forall k = (1, \dots, K_H). \end{aligned}$$

Nesta formulação, procura-se maximizar $\mu K + E(z_H)$, onde o valor ótimo de K , que é determinado no primeiro período, depende da escolha do coeficiente de aversão ao

risco μ . As restrições de $t = 1, \dots, H - 2$ definem a estratégia de autofinanciamento. A última restrição determina que a riqueza final não pode ser menor que o valor de K já que o superávit z_H^k , o qual se maximiza no último período, não pode ser menor que zero neste período sobre qualquer cenário k . Por esta formulação, consegue-se visualizar a semelhança do modelo com as características de uma opção de venda europeia adquirida em $t = 0$, na qual o strike K é definido também neste ponto, mas com a vantagem de se levar em conta as possíveis trajetórias do portfólio.

Formulando o problema acima na forma recursiva, sobre a qual se aplica a metodologia de resolução do capítulo 2, tem-se:

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha_0, x_0 \geq 0, K} \mu K + Q_0(K, \alpha_0, x_0) \\ \text{sujeito a } & \alpha_0 + (x_0)^T(1 + \tau) = W_0 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} Q_t(K, \alpha_t, x_t, k_t) &= \max_{\alpha_{t+1}, x_{t+1} \geq 0, K} E(Q_{t+1}(K, \alpha_{t+1}, x_{t+1}, k_{t+1}) | F_t) \\ &\text{sujeito a (3.2) - (3.5)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Q_{H-1} &= \max_{z_H^k \geq 0, \forall k=(1, \dots, K_H)} E(z_H^k | F_{H-1}) \\ \alpha_{H-1}^{a(k_H)} e^\rho + \sum_{i=1}^n (1 - \tau_H^i) x_{H-1}^{a(k_H), i} e^{r_H^{k, i}} - z_H^k - K &= 0 \end{aligned}$$

3.2 Propriedades do Modelo

Agora será analisado como a riqueza inicial W_0 e o coeficiente de aversão ao risco μ influenciam a decisão ótima. Define-se a solução ótima como $(z(W_0, \mu); K(W_0, \mu))$ e a função objetivo ótima como $J(W_0, \mu)$, resultantes do portfólio maximizado $(\alpha_t(W_0, \mu); x_t(W_0, \mu))$. Como em Zhao e Ziemba (2001):

Proposição 3.1 Para um dado $\mu > 1$,

- (a) Na ausência de oportunidades de arbitragem, $K(W_0, \mu)$ é não negativo e tem limite superior definido por $\rho^T W_0$.
- (b) O valor de $K(W_0, \mu)$ cresce proporcionalmente com μ . Portanto, o valor de $E(z(W_0, \mu))$ decresce com μ .

Demonstração: (a) Assumir que para algum $\mu > 1$, $K(W_0, \mu) < 0$. Então, $(z(W_0, \mu); K(W_0, \mu))$ também é uma solução viável, resultante do mesmo portfólio ótimo, mas, como $\mu > 1$, logo $E(z(W_0, \mu) + K(W_0, \mu)) > E(z(W_0, \mu)) + \mu K(W_0, \mu)$. Portanto, $(z(W_0, \mu); K(W_0, \mu))$ não poderia ser um par ótimo com $K(W_0, \mu) < 0$, e $K(W_0, \mu) \geq 0$. Dada a presença de uma taxa livre de risco determinística e a ausência de arbitragem, deve-se ter: $K(W_0, \mu) \leq \rho^T W_0$.

(b) Seja (z_1, K_1) e (z_2, K_2) soluções ótimas para μ_1 e μ_2 , respectivamente. Por otimalidade, tem-se:

$$E(z_1) + \mu_2 K_1 \leq E(z_2) + \mu_2 K_1 \quad (3.8)$$

$$E(z_2) + \mu_1 K_2 \leq E(z_1) + \mu_1 K_1 \quad (3.9)$$

Combinando (3.8) e (3.9), encontra-se:

$$(\mu_2 - \mu_1)(K_2 - K_1) \geq 0 \quad (3.10)$$

Portanto, $K(W_0, \mu)$ cresce com μ e, conseqüentemente, $E(z(W_0, \mu))$ decresce com μ .

Proposição 3.2 O valor ótimo da função $J(W_0, \mu)$ cresce linearmente com W_0 e cresce de forma convexa com μ .

Demonstração: Para $\forall \lambda > 0$, se (α_t, x_t) representa a escolha ótima que suporta $(z(W_0, \mu), K(W_0, \mu))$, então $(\lambda \alpha_t, \lambda x_t)$ é a escolha ótima que suporta $(\lambda z(W_0, \mu), \lambda K(W_0, \mu))$, portanto, $J(\lambda W_0, \mu) \geq \lambda J(W_0, \mu)$. Como esta inequação também é verificada para qualquer (W_0, λ) , então $J(\lambda W_0, \mu) = \lambda J(W_0, \mu)$.

De (3.8) e (3.9), se $\mu_1 \leq \mu_2$, então:

$$J(W_0, \mu_1) \leq E(z_1) + \mu_2 K_1 \leq J(W_0, \mu_2) \quad (3.11)$$

o que prova que $J(W_0, \mu)$ cresce com μ .

Assumindo $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, é possível provar que:

$$J(W_0, \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2) \leq \lambda_1 J(W_0, \mu_1) + \lambda_2 J(W_0, \mu_2). \quad (3.12)$$

Para isso, seja a solução ótima para $\lambda_1 + \lambda_2$ dada pelo par (z^*, K^*) , então:

$$E(z_1) + \mu_1 K_1 \geq E(z^*) + \mu_1 K^*, \quad (3.13)$$

e

$$E(z_2) + \mu_2 K_2 \geq E(z^*) + \mu_2 K^*, \quad (3.14)$$

Combinando (3.13) e (3.14) é possível provar (3.12).

Portanto, para uma riqueza inicial qualquer W_0 , se $(x_0, \dots, x_{T-1}, z_H, K)$ é uma solução ótima para o problema (3.7), então $\lambda(W_0, x_0, \dots, x_{T-1}, z_H, K)$ também será uma solução ótima para o mesmo problema com a riqueza inicial igual a λW_0 . O que resulta na proposição a seguir.

Proposição 3.3 O valor da riqueza inicial não interfere na escolha ótima para o primeiro período, como proporção da riqueza inicial.

Capítulo 4

Implementação do Modelo de Otimização ao Mercado Brasileiro

O algoritmo de Benders estendido para a abordagem multi-período se configura como uma das ferramentas mais indicadas na resolução do modelo de otimização elaborado por Zhao e Ziemba (2001), tanto pela facilidade em se visualizar e estruturar o problema, como na velocidade em casos de problemas de grande escala, como comprovado por Cariño, Myers e Ziemba (1998).

Com o intuito de testar a funcionalidade do algoritmo de decomposição de Benders, bem como verificar a performance do modelo de otimização multi-período de Zhao e Ziemba, aplicou-se o algoritmo de decomposição na resolução do modelo de Zhao e Ziemba para um conjunto de ativos do mercado de capitais brasileiro. Na implementação do modelo descrito, utilizou-se os seguintes instrumentos financeiros: a taxa de câmbio Reais/ Dólar, o Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (IBOVESPA), o título brasileiro C-Bond, expresso em dólares, o Índice de Renda Fixa do Mercado (IRFM) e uma taxa livre de risco constante.

Para verificação da eficácia e do ganho de se realizar a otimização pelo modelo multi-período de Zhao e Ziemba, realizar-se-á comparações com o modelo de média-variância de período simples de Markowitz.

4.1 Fonte dos Dados e Ferramentas Utilizadas

Os dados utilizados nesta dissertação foram coletados nos bancos de dados da ECONOMÁTICA e da BM&F. Para a realização dos testes foram utilizados os pacotes computacionais MATLAB, no qual se implementou o algoritmo de decomposição em anexo no Apêndice A e se realizou as otimizações pelo modelo de Markowitz, e EXCEL, no qual se trabalhou os dados e alguns gráficos. Para a realização dos testes aqui descritos foram utilizados os seguintes ativos de risco:

- IBOVESPA - Índice da Bolsa de Valores de São Paulo: Utilizou-se este índice, representando o mercado acionário brasileiro, por ser este o mais importante indicador do desempenho médio das cotações do mercado de ações do Brasil. Este índice representa o valor atual, em moeda corrente, de uma carteira teórica de ações formada em 02/01/1968, com a inexistência de ajustes (exceção à divisões por múltiplos de 10) e investimentos adicionais, mas com o reinvestimento dos proventos proporcionados pelas empresas que constituem o índice;
- C-Bond: O C-Bond é o mais negociado dos sete tipos de bônus emitido pela União em 15/04/94 resultante de uma reestruturação da dívida pública externa brasileira

junto a credores privados estrangeiros por um acordo denominado Plano Brady.

Escolheu-se este título como representante do risco país e, para isso, ele foi utilizado nos testes expresso em dólar;

- IRF-M: Este índice representa uma carteira formada por todos os títulos públicos federais prefixados em poder do público. Portanto, escolheu-se este índice como representante do mercado de juros prefixado brasileiro, embora em certos momentos esta aproximação esteja distante da realidade. O índice tem uma história recente, sendo criado em dezembro de 2000 com o valor de R\$ 1.000,00;
- Taxa de Câmbio Real/ Dólar: Indicando os ativos cambiais, escolheu-se a taxa de câmbio Real/ Dólar por ser a mais representativa.

O período histórico dos dados utilizados foi restringido pela recente história do índice IRF-M. Apesar deste índice ter sido criado em dezembro de 2000, há cotações dele anteriores a esta data que foram calculadas utilizando-se a metodologia de cálculo do mesmo. Portanto, o período histórico de dados das rentabilidades dos ativos de risco utilizado foi de março de 2000 a dezembro de 2002, que é pequeno e reflete o problema que se enfrenta no Brasil ao se trabalhar com dados históricos. Na figura (4.5), apresenta-se um gráfico com as rentabilidades mensais destes ativos de risco no período descrito.

Fig. 4.5. Retornos Mensais dos Ativos de Risco

4.2 Árvore de Cenários

Embora o objetivo desta dissertação não seja o estudo de modelos para criação de cenários, a escolha da árvore de cenários é de extrema importância no processo de otimização de um portfólio de investimentos, pois nela constam as expectativas de retornos dos ativos, bem como os possíveis caminhos das realizações futuras destes.

Apesar de existir uma série de estudos sobre formas de construção de cenários, desconhece-se uma metodologia da melhor forma de construí-los. Quanto a sua forma de construção, basicamente, pode-se dividir em dois os enfoques utilizados na modelagem de retornos: um que se baseia apenas nas observações passadas dos ativos, que é denominado por Ziemba como "expectativas ajustadas"; e outro que se utiliza de modelos macro-

econômicos, utilizando como entrada as expectativas dos agentes, e que pode ser chamado de "modelo de expectativas racionais". Neste trabalho, tendo em vista a maior facilidade de construção e, principalmente, a isenção quanto ao fornecimento de expectativas para os retornos dos ativos, adotou-se o primeiro enfoque.

A construção da árvore com as expectativas de retornos dos ativos teve como base a utilização do método de *bootstrap* sobre a série de retornos históricos dos mesmos. O método de *bootstrap* é utilizado como uma ferramenta para se construir séries de dados, a partir de uma série pré-existente, de forma a manter as características da série original. Portanto, com a série mensal histórica dos ativos no período de março de 2000 a dezembro de 2002, realizou-se sorteios aleatórios dos elementos da série de forma a montar as árvores de cenários utilizadas nos testes. Como uma forma de suavizar as variações dos retornos, trabalhou-se com períodos semestrais. Dessa forma, seis sorteios aleatórios do conjunto de retornos mensais, agrupados de forma a somar um semestre, foram necessários para se montar cada cenário (nó) da árvore.

Da mesma forma que no capítulo 2, construiu-se árvores de cenários binomiais não recombinantes onde todas as probabilidades de transição têm o mesmo valor de $1/2$. Cada nó da árvore apresenta o vetor de estados $\xi_t^k \in (RENT\_IBOVESPA_t^k, RENT\_DÓLAR_t^k, RENT\_IRFM_t^k, RENT\_CBOND_t^k)$, definindo a rentabilidade de cada ativo de risco do período $t - 1$ ao tempo t e no cenário k . Para o ativo livre de risco, adotou-se uma rentabilidade constante para todos os cenários, mas diferente em cada implementação.

4.3 Implementações

O objetivo nas implementações aqui realizadas será otimizar um portfólio de ativos, com valor inicial de R\$ 100,00, formado por um ativo livre de risco e quatro ativos de risco: a taxa de câmbio (Reais/ Dólar), o Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (IBOVESPA), o título brasileiro C-Bond, expresso em dólares, e o Índice de Renda Fixa de Mercado (IRFM).

O horizonte de investimento adotado foi de um ano, podendo haver uma realocação na metade deste período, resultando, assim, em um problema de 3 estágios. Portanto, a árvore de cenários é formada por três períodos e um total de sete cenários, conforme a figura (4.7).

Na otimização pelo modelo multi-período de Zhao e Ziemba, apresentado no capítulo 3, intencionou-se maximizar a função objetivo: $\mu K + E(z_3)$, onde $E(z_3)$ é a esperança do superávit no final do período, o qual é determinado pelo resultado da riqueza final do portfólio menos o valor escolhido como pior cenário (K), que é determinado no primeiro período, tendo em vista a aversão ao risco do aplicador representada pelo coeficiente μ .

Para se evitar problemas de liquidez dos portfólios escolhidos, restringiu-se a alocação nos ativos de risco ao valor máximo de 90% do portfólio em qualquer tempo. Adotou-se também a restrição de incidência de custos de transação nas operações com os ativos de

risco, sendo este custo estimado em 0,2%. Os custos de transação agem de forma a evitar que os investidores comprem e vendam indiscriminadamente quando os retornos destas transações sejam menores que os custos incidentes. Também não se permitiu a venda a descoberto dos ativos.

A equação (4.1) descreve o equivalente determinístico para a otimização pelo modelo de Zhao e Ziemba. Para a resolução desta, utilizou-se a metodologia de otimização estocástica multi-período por decomposição descrito no capítulo 2, usando como ferramenta o código em Matlab transcrito no Apêndice A.

Para finalizar, comparou-se os resultados das carteiras selecionadas pela otimização em multi-período com os das carteiras resultantes da otimização pelo modelo de Média-Variância de período simples. Para o cálculo do modelo de Média-Variância de Markowitz, considerou-se como expectativa de retorno dos ativos, a média dos retornos encontrados no último período ($t = 3$) das árvores de cenários modeladas, e como variância dos ativos, a variância da série histórica de retornos dos ativos.

A figura (4.6) resume, respectivamente, as duas implementações comparativas dos dois modelos aqui realizadas.

$$\max_{\alpha, x, z_3^k \geq 0, \forall k=(1,2,3,4), K} \left[\mu K + \sum_{k=1}^2 0,5 \cdot 0 + \sum_{k=1}^4 0,25 \cdot z_3^k \right] \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}
& \text{sujeito a } \alpha_1 + (x_1)^T(1, 002) = 100 \\
& \alpha_1 e^{0,08} - \alpha_2^1 - \sum_{i=1}^4 (1, 002) B_2^{1,i} + \sum_{i=1}^4 (1, 002) S_2^{1,i} = 0 \\
& \quad x_1^i e^{r_2^{1,i}} - x_2^{1,i} + B_2^{1,i} - S_2^{1,i} = 0 \\
& \alpha_1 e^{0,08} + \sum_{i=1}^4 (1, 002) x_1^i e^{r_2^{1,i}} - z_2^1 - K = 0 \\
& \alpha_1 e^{0,08} - \alpha_2^2 - \sum_{i=1}^4 (1, 002) B_2^{2,i} + \sum_{i=1}^4 (1, 002) S_2^{2,i} = 0 \\
& \quad x_1^i e^{r_2^{2,i}} - x_2^{2,i} + B_2^{2,i} - S_2^{2,i} = 0 \\
& \alpha_1 e^{0,08} + \sum_{i=1}^4 (1, 002) x_1^i e^{r_2^{2,i}} - z_2^2 - K = 0 \\
& \alpha_2^1 e^{0,08} + \sum_{i=1}^4 (1, 002) x_2^{1,i} e^{r_3^{1,i}} - z_3^1 - K = 0 \\
& \alpha_2^1 e^{0,08} + \sum_{i=1}^4 (1, 002) x_2^{1,i} e^{r_3^{2,i}} - z_3^2 - K = 0 \\
& \alpha_2^2 e^{0,08} + \sum_{i=1}^4 (1, 002) x_2^{2,i} e^{r_3^{3,i}} - z_3^3 - K = 0 \\
& \alpha_2^2 e^{0,08} + \sum_{i=1}^4 (1, 002) x_2^{2,i} e^{r_3^{4,i}} - z_3^4 - K = 0
\end{aligned}$$

Implementação 1 / Modelos	Zhao e Ziemba	Média-Variância
multi-período	sim	não
possibilidade de realocação	sim	não
Restrições:		
custos de transação	sim	não
possib. venda a descoberto	não	não
limite de participação dos ativos de risco	sim	sim
superávit (z)	$\geq 0 / t=H$	-
Implementação 2 / Modelos	Zhao e Ziemba	Média-Variância
multi-período	sim	não
possibilidade de realocação	sim	sim
Restrições:		
custos de transação	apenas no processo de otimização	não
possib. venda a descoberto	não	não
limite de participação dos ativos de risco	sim	sim
superávit (z)	$\geq 0 / t=H$	-

Fig. 4.6. Resumo das Implementações

4.3.1 Implementação 1

Nesta primeira implementação, realizou-se a otimização do portfólio pelos dois modelos tendo como horizonte de investimentos o ano de 2003.

Para a construção da árvore de cenários, utilizou-se o método de *bootstrap* sobre toda a série de dados históricos possuída, iniciando-se a otimização com as cotações de fechamento do último dia do ano de 2002. Na figura(4.7), observa-se os retornos semestrais e os preços esperados para os ativos de risco, obtidos por um *bootstrap* da série original (março de 2000 a dezembro de 2002), escolhido aleatoriamente. Considerou-se como taxa livre de risco (LR) o equivalente a uma rentabilidade composta continuamente de 17,35% ao ano. O custo de transação aplicado a todas as operações com os ativos de risco foi de 0,2%.

Realizando-se a otimização pelo modelo de Zhao e Ziemba, através do algoritmo de decomposição, encontrou-se, para diferentes valores do coeficiente de aversão ao risco (μ), como resultado, as alocações expressas em Reais (R\$) apresentadas na figura (4.8). Os coeficientes de aversão ao risco, exibidos na figura (4.8), apresentam todas as alocações ótimas resultantes desta otimização. As carteiras ótimas produzidas pela escolha dos coeficientes μ não exibidos foram iguais àquelas produzidas pelo coeficiente imediatamente anterior.

Fig. 4.7. Árvore de Cenários para a Implementação 1

Fig. 4.8. Alocações Resultantes da Otimização pelo Modelo de Zhao e Ziemba (2001) na Implementação 1

Os resultados encontrados para o cenário de perda máxima (K) e para a média dos superávits no último período ($t = 3$) sobre os cenários $k = (1, \dots, 4)$ é apresentado na figura (4.9). Observa-se que os resultados estão de acordo com as propriedades descritas no capítulo 3, ou seja, que o K tende a crescer e o superávit a decrescer com μ .

Coef. de Aversão ao Risco (μ)	1,10	1,20	1,40
Perda Máxima (K)	95,75	116,78	117,35
Média Superávit Final ($E[z]$)	36,17	11,28	10,53

Fig. 4.9. Resultados da Otimização pelo Modelo de Zhao e Ziemba (Implementação 1)

Com a série de retornos históricos dos ativos, construiu-se a matriz de covariâncias dos ativos que é apresentada na Figura (4.11). Assumiu-se que o retorno esperado dos ativos de risco resulte da média dos retornos dos ativos do início do período até o final ($t = 3$) da árvore indicada na figura (4.7). A figura (4.10) exhibe estes retornos esperados.

	Dólar	IBOVESPA	C-Bond	IRFM	LR
Retorno Esperado	7,01%	32,22%	17,94%	19,40%	17,35%

Fig. 4.10. Retornos Esperados dos Ativos na Implementação 1

	Dólar	IBOVESPA	C-Bond	IRFM	LR
Dólar	5,76%	-5,46%	-6,19%	-0,06%	0,00%
IBOVESPA	-5,46%	10,99%	7,41%	-0,03%	0,00%
C-Bond	-6,19%	7,41%	8,04%	0,05%	0,00%
IRFM	-0,06%	-0,03%	0,05%	0,05%	0,00%
LR	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Fig. 4.11. Matriz de Covariâncias dos Ativos na Implementação 1

De posse da matriz de covariâncias dos ativos e de seus retornos esperados, realizou-se a otimização pelo modelo de Média-Variância de um período. Estabeleceu-se para esta otimização as restrições de não permissão de venda a descoberto de ativos e limitação máxima de 90% da carteira para alocação em ativos de risco. Vale ressaltar, a não aplicação, neste modelo, da restrição de incidência de custos de transação. Com os resultados desta otimização, construiu-se a fronteira eficiente apresentada na figura (4.12).

Fig. 4.12. Fronteira Eficiente - Média-Variância Período Simples (Implementação 1)

Com o risco (desvio padrão) de cada alocação inicial encontrada pelo modelo de Zhao e Ziemba, para todos os coeficientes de aversão ao risco, procurou-se na fronteira eficiente da figura (4.12) uma carteira com mesmo risco (desvio padrão), a qual será utilizada para

comparar os dois modelos. Assumiu-se ainda, que as alocações encontradas por Markowitz devem permanecer constantes até o fim do período não havendo, portanto, realocações como se permitiu no modelo de Zhao e Ziemba.

Os resultados finais da otimização pelo modelo de Zhao e Ziemba, apresentados na figura (4.13), foram apurados, realizando as alocações exibidas na figura (4.8), utilizando como retorno dos ativos aqueles apresentados na figura (4.7) e calculando a média dos retornos esperados alcançados por cada uma destas alocações até $t = 3$, para cada coeficiente de aversão ao risco exibido. Estes resultados estão representados pela rentabilidade média alcançada por cada carteira no período e pelo risco (desvio padrão) de sua respectiva alocação inicial.

Já para o modelo de Markowitz, calculou-se, através das covariâncias históricas dos ativos e do retorno esperado apresentado na figura (4.10), uma fronteira eficiente (figura (4.12)) onde se buscou carteiras com o desvio padrão equivalente ao de cada alocação inicial encontrada pelo modelo de Zhao e Ziemba. Estas carteiras provenientes da otimização pelo modelo de Média-Variância foram mantidas inalteradas até o final do período de investimento ($t = 3$), utilizando como retorno esperado médio de seus ativos aquele exibido na figura (4.10). Assim, os resultados esperados para cada uma destas carteiras junto com seus respectivos riscos são apresentados na figura (4.13).

Portanto, pela figura (4.13) o modelo de Zhao e Ziemba proporcionou portfólios com retornos esperados mais elevados que os apresentados pelo modelo de Markowitz com risco inicial equivalente.

Coef. de Aversão ao Risco (μ)		1,10	1,20	1,40
Modelo de Zhao e Ziemba	E[Rent. Final do Portifólio]	31,92%	28,06%	27,88%
	Risco (Desvio Padrão)	29,82%	5,57%	4,96%
	Índice de Sharpe	0,49	1,92	2,13
Modelo de Markowitz	E[Rent. Final do Portifólio]	30,73%	21,31%	21,02%
	Risco (Desvio Padrão)	29,82%	5,57%	4,96%
	Índice de Sharpe	0,45	0,71	0,74
Diferença de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)		1,18%	6,75%	6,86%

Fig. 4.13. Resultados da Otimização pelo Modelo de Zhao e Ziemba e pelo de Markowitz (Implementação 1)

Para verificar a validade do modelo, mais nove implementações, seguindo o mesmo procedimento, foram efetuadas. Abaixo na figura (4.14), segue a tabela com as rentabilidades esperadas encontradas para as árvores de cenários modeladas. O Teste 1 equivale à implementação descrita anteriormente.

As figuras (4.15) e (4.16) contêm as tabelas com os resultados obtidos pelos dois modelos (Zhao e Ziemba e Markowitz) para os dez testes realizados seguindo a implementação 1. Na última linha da tabela na figura (4.16) é apresentada a média dos ganhos adicionais do modelo de Zhao e Ziemba sobre o de Markowitz obtidos nos dez testes para cada coeficiente de aversão ao risco (μ).

Observa-se que o modelo de otimização de Zhao e Ziemba superou o modelo de Markowitz em praticamente todos os resultados encontrados. Mostrou-se, portanto, que os

Teste 1	Dólar	IBOVESPA	C-Bond	IRFM	LR
Retorno Esperado	7,01%	32,22%	17,94%	19,40%	17,35%
Teste 2					
Retorno Esperado	32,47%	-32,63%	-16,51%	21,00%	17,35%
Teste 3					
Retorno Esperado	45,06%	-25,78%	-7,10%	16,70%	17,35%
Teste 4					
Retorno Esperado	-8,43%	20,26%	24,47%	21,99%	17,35%
Teste 5					
Retorno Esperado	41,71%	-11,98%	-1,76%	19,21%	17,35%
Teste 6					
Retorno Esperado	7,03%	19,83%	43,13%	18,81%	17,35%
Teste 7					
Retorno Esperado	1,83%	8,28%	30,22%	19,17%	17,35%
Teste 8					
Retorno Esperado	8,84%	9,06%	27,70%	19,91%	17,35%
Teste 9					
Retorno Esperado	1,17%	14,34%	28,49%	18,32%	17,35%
Teste 10					
Retorno Esperado	21,96%	-16,93%	15,09%	19,04%	17,35%

Fig. 4.14. Rentabilidades Esperadas para os Ativos na Implementação 1

portfólios encontrados pelo modelo de Zhao e Ziemba possuem uma relação retorno *versus* risco melhor que os produzidos pelo modelo de Média-Variância de período simples.

		Coef. de Aversão ao Risco (μ)	1,1	1,2	1,4	1,5	1,7	1,9	2,1	3,9	10,8
Teste 1	Modelo de Zhao e Ziemba	E[Rent. Final do Portifólio]	31,92%	28,06%	27,88%	27,88%	27,88%	27,88%	27,88%	27,88%	27,88%
		Risco (Desvio Padrão)	29,82%	5,57%	4,96%	4,96%	4,96%	4,96%	4,96%	4,96%	4,96%
		Índice de Sharpe	0,49	1,92	2,13	2,13	2,13	2,13	2,13	2,13	2,13
	Modelo de Markowitz	E[Rent. Final do Portifólio]	30,73%	21,31%	21,02%	21,02%	21,02%	21,02%	21,02%	21,02%	21,02%
		Risco (Desvio Padrão)	29,82%	5,57%	4,96%	4,96%	4,96%	4,96%	4,96%	4,96%	4,96%
Teste 2	Modelo de Zhao e Ziemba	E[Rent. Final do Portifólio]	38,60%	38,60%	38,60%	38,60%	38,60%	38,60%	35,06%	35,06%	35,06%
		Risco (Desvio Padrão)	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%
		Índice de Sharpe	10,58	10,58	10,58	10,58	10,58	10,58	8,82	8,82	8,82
	Modelo de Markowitz	E[Rent. Final do Portifólio]	19,41%	19,41%	19,41%	19,41%	19,41%	19,41%	19,41%	19,41%	19,41%
		Risco (Desvio Padrão)	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%
Teste 3	Modelo de Zhao e Ziemba	E[Rent. Final do Portifólio]	44,67%	44,67%	44,67%	44,67%	44,67%	44,67%	44,67%	44,67%	44,67%
		Risco (Desvio Padrão)	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%
		Índice de Sharpe	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27
	Modelo de Markowitz	E[Rent. Final do Portifólio]	42,29%	42,29%	42,29%	42,29%	42,29%	42,29%	42,29%	42,29%	42,29%
		Risco (Desvio Padrão)	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%
Teste 4	Modelo de Zhao e Ziemba	E[Rent. Final do Portifólio]	26,78%	26,78%	26,78%	23,20%	23,20%	23,20%	23,20%	23,20%	23,20%
		Risco (Desvio Padrão)	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%
		Índice de Sharpe	4,69	4,69	4,69	2,91	2,91	2,91	2,91	2,91	2,91
	Modelo de Markowitz	E[Rent. Final do Portifólio]	21,53%	21,53%	21,53%	21,53%	21,53%	21,53%	21,53%	21,53%	21,53%
		Risco (Desvio Padrão)	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%	2,01%
Teste 5	Modelo de Zhao e Ziemba	E[Rent. Final do Portifólio]	53,24%	53,24%	53,24%	53,24%	53,24%	53,24%	53,24%	53,24%	53,24%
		Risco (Desvio Padrão)	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%
		Índice de Sharpe	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66
	Modelo de Markowitz	E[Rent. Final do Portifólio]	39,27%	39,27%	39,27%	39,27%	39,27%	39,27%	39,27%	39,27%	39,27%
		Risco (Desvio Padrão)	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%

Fig. 4.15. Resultados da Implementação dos Modelos de Markowitz e Zhao e Ziemba (Implementação 1)

		Coef. de Aversão ao Risco (μ)	1,1	1,2	1,4	1,5	1,7	1,9	2,1	3,9	10,8
Teste 6	Modelo de Zhao e Ziemba	E[Rent. Final do Portifólio]	48,87%	45,38%	45,38%	45,38%	45,38%	45,38%	45,38%	45,38%	45,38%
		Risco (Desvio Padrão)	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%
		Índice de Sharpe	1,24	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10
	Modelo de Markowitz	E[Rent. Final do Portifólio]	40,55%	40,55%	40,55%	40,55%	40,55%	40,55%	40,55%	40,55%	40,55%
Risco (Desvio Padrão)		25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	
Índice de Sharpe		0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	
Diferença de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)			8,33%	4,83%	4,83%	4,83%	4,83%	4,83%	4,83%	4,83%	4,83%
Teste 7	Modelo de Zhao e Ziemba	E[Rent. Final do Portifólio]	47,98%	47,98%	47,98%	47,98%	47,98%	40,13%	40,13%	40,13%	40,13%
		Risco (Desvio Padrão)	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	10,05%	10,05%	10,05%	10,05%
		Índice de Sharpe	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	2,27	2,27	2,27	2,27
	Modelo de Markowitz	E[Rent. Final do Portifólio]	28,93%	28,93%	28,93%	28,93%	28,93%	22,84%	22,84%	22,84%	22,84%
Risco (Desvio Padrão)		25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	10,05%	10,05%	10,05%	10,05%	
Índice de Sharpe		1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	2,27	2,27	2,27	2,27	
Diferença de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)			19,05%	19,05%	19,05%	19,05%	19,05%	17,29%	17,29%	17,29%	17,29%
Teste 8	Modelo de Zhao e Ziemba	E[Rent. Final do Portifólio]	26,57%	26,57%	26,57%	26,17%	26,04%	26,04%	26,04%	26,04%	26,04%
		Risco (Desvio Padrão)	25,52%	25,52%	25,52%	19,99%	18,63%	18,63%	18,63%	18,63%	18,63%
		Índice de Sharpe	0,36	0,36	0,36	0,44	0,47	0,47	0,47	0,47	0,47
	Modelo de Markowitz	E[Rent. Final do Portifólio]	26,66%	26,66%	26,66%	25,14%	24,74%	24,74%	24,74%	24,74%	24,74%
Risco (Desvio Padrão)		25,52%	25,52%	25,52%	19,99%	18,63%	18,63%	18,63%	18,63%	18,63%	
Índice de Sharpe		0,36	0,36	0,36	0,39	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	
Diferença de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)			-0,10%	-0,10%	-0,10%	1,03%	1,30%	1,30%	1,30%	1,30%	1,30%
Teste 9	Modelo de Zhao e Ziemba	E[Rent. Final do Portifólio]	37,49%	37,49%	37,49%	37,49%	37,49%	37,49%	37,49%	37,49%	37,49%
		Risco (Desvio Padrão)	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%
		Índice de Sharpe	0,79	0,79	0,79	0,79	0,79	0,79	0,79	0,79	0,79
	Modelo de Markowitz	E[Rent. Final do Portifólio]	27,38%	27,38%	27,38%	27,38%	27,38%	27,38%	27,38%	27,38%	27,38%
Risco (Desvio Padrão)		25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	25,52%	
Índice de Sharpe		0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	
Diferença de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)			10,11%	10,11%	10,11%	10,11%	10,11%	10,11%	10,11%	10,11%	10,11%
Teste 10	Modelo de Zhao e Ziemba	E[Rent. Final do Portifólio]	45,16%	45,16%	45,16%	45,16%	45,16%	45,16%	45,16%	45,16%	45,16%
		Risco (Desvio Padrão)	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%
		Índice de Sharpe	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29
	Modelo de Markowitz	E[Rent. Final do Portifólio]	21,50%	21,50%	21,50%	21,50%	21,50%	21,50%	21,50%	21,50%	21,50%
Risco (Desvio Padrão)		21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	21,59%	
Índice de Sharpe		0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	
Diferença de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)			23,67%	23,67%	23,67%	23,67%	23,67%	23,67%	23,67%	23,67%	23,67%
Diferença Média de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)			10,30%	10,51%	10,52%	10,28%	10,30%	10,13%	9,77%	9,77%	9,77%

Fig. 4.16. Resultados da Implementação dos Modelos de Markowitz e Zhao e Ziemba (Implementação 1)

4.3.2 Implementação 2

Seguindo a sugestão dos autores Zhao e Ziemba (2001) de explorar uma forma de testar a performance dos dois modelos Zhao e Ziemba e Markowitz com dados reais para os retornos dos ativos, realizou-se a implementação aqui descrita. Assim, as otimizações pelos dois modelos foram realizadas visando, como horizonte de investimento, o ano de 2002. Portanto, verificar-se-ão as rentabilidades que as carteiras de investimentos formadas pelos ativos em estudo poderiam ter obtido através dos dois modelos, tendo em vista os cenários modelados pelo método de *bootstrap*.

Utilizou-se como taxa livre de risco uma rentabilidade equivalente a da taxa Selic vigente no final de dezembro de 2001, 19,0% ao ano, assumindo que ela permaneceu fixa por todo o ano de 2002. O custo de transação, com valor de 0,2%, aplicado a todas as operações com os ativos de risco, foi utilizado apenas no modelo de Zhao e Ziemba e somente no processo de escolha das carteiras ótimas deste modelo, não o considerando no cálculo das rentabilidades.

No processo de modelagem da árvore de cenários, o método de *bootstrap* foi aplicado ao período de março de 2000 a dezembro de 2001. Assim, selecionando aleatoriamente um cenário obtido pelo *bootstrap*, construiu-se a árvore de cenários da figura (4.17). As cotações iniciais para os ativos de risco estão representadas pelas cotações de fechamento do ano de 2001.

Fig. 4.17. Árvore de Cenários para a Implementação 2

Como na implementação 1, realizou-se a otimização pelo modelo de Zhao e Ziemba, encontrando-se, para diferentes valores do coeficiente de aversão ao risco (μ), as alocações expressas em Reais apresentadas na figura (4.18). Como já explicado anteriormente na implementação 1, as carteiras escolhidas para os outros coeficientes de aversão não mostrados na figura (4.18) se apresentam iguais as produzidas pelo coeficiente imediatamente anterior que se encontra na mesma figura.

Fig. 4.18. Alocações Resultantes da Otimização pelo Modelo de Zhao e Ziemba (2001) na Implementação 2

Se fossem realizadas as alocações da figura (4.18) com os retornos projetados pela árvore de cenários da figura (4.17), os resultados encontrados para o cenário de perda máxima (K) e para a média dos superávits no último período ($t = 3$) sobre os cenários $k = (1, \dots, 4)$ seriam os apresentados na figura (4.19) para as alocações resultantes dos diferentes coeficientes de aversão ao risco.

Coef. de Aversão ao Risco (μ)	1,10	1,30	3,20
Perda Máxima (K)	115,92	118,13	119,01
Média Superávit Final ($E[z]$)	6,74	3,96	1,22

Fig. 4.19. Resultados da Otimização pelo Modelo de Zhao e Ziemba (Implementação 2)

Considerando a série de retornos históricos dos ativos de março de 2000 a dezembro de 2001, construiu-se a matriz de covariâncias dos ativos que é apresentada na Figura (4.20). Da mesma forma que na implementação 1, assumiu-se que o retorno esperado dos ativos de risco resulte da média dos retornos dos ativos do início do período até o final ($t = 3$) da árvore indicada na figura (4.17). A figura (4.21) exhibe estes retornos esperados.

	Dólar	IBOVESPA	C-Bond	IRFM	LR
Dólar	1,74%	-2,43%	-1,16%	-0,10%	0,00%
IBOVESPA	-2,43%	10,20%	3,59%	-0,02%	0,00%
C-Bond	-1,16%	3,59%	1,66%	0,05%	0,00%
IRFM	-0,10%	-0,02%	0,05%	0,04%	0,00%
LR	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Fig. 4.20. Matriz de Covariâncias dos Ativos na Implementação 2

	Dólar	IBOVESPA	C-Bond	IRFM	LR
Retorno Esperado	16,24%	-5,69%	6,51%	16,35%	19,00%

Fig. 4.21. Retornos Esperados dos Ativos para o Final do Período na Implementação 2

O resultado da otimização pelo modelo de Média-Variância, utilizando os dados acima, sugere alocar todos os recursos somente no ativo livre de risco, ou seja, a fronteira eficiente resultante desta otimização, e não apresentada aqui dada sua simplicidade, foi uma linha horizontal partindo da rentabilidade de 19,0% ao ano. Estabeleceu-se para esta otimização as restrições de não permissão de venda a descoberto de ativos e limitação

máxima de 90% da carteira para alocação em ativos de risco. Vale ressaltar, a não aplicação neste modelo, da restrição de incidência de custos de transação.

Para obter a rentabilidade real que as carteiras produzidas pelos dois modelos teriam alcançado no primeiro semestre do ano de 2002, aplica-se a rentabilidade real dos ativos em $t = 2$, indicada na figura (4.22), às alocações iniciais geradas pelos dois modelos. Portanto, atribuindo estes retornos às alocações iniciais encontradas pelos dois modelos obter-se-ia o retorno para cada modelo no primeiro semestre, apresentado na figura (4.23).

Observa-se que a otimização pelo modelo de Zhao e Ziemba apresentou melhores retornos para todos os coeficientes de aversão ao risco, comparativamente ao modelo de Markowitz.

Ativo	Preço		Ativo	Preço	Rent.		Ativo	Preço	Rent.
IBOVESPA	13.577		IBOVESPA	11.139	-19,8%		IBOVESPA	11.268	1,2%
Dólar	2,32		Dólar	2,84	20,4%		Dólar	3,53	21,7%
C-Bond	77,00		C-Bond	63,63	-19,1%		C-Bond	65,88	3,5%
IRFM	1.180,50		IRFM	1.293,66	9,2%		IRFM	1.412,97	8,8%
t=1			t=2				t=3		

Fig. 4.22. Rentabilidades dos Ativos de Risco no ano de 2002

A partir do ponto ($t = 2$), realizou-se novamente o mesmo procedimento acima para os dois modelos, com o intuito de encontrar o portfólio ótimo que seria formado para o segundo semestre de 2002. A partir deste, juntamente com os retornos obtidos para os portfólios ótimos no primeiro semestre (figura (4.23)), encontrar a rentabilidade no final

Coef. de Aversão ao Risco (μ)		1,10	1,30	3,20
Modelo de Zhao e Ziemba	Rentabilidade do Portifólio	21,23%	14,06%	11,22%
	Risco (Desvio Padrão)	11,85%	4,86%	2,08%
	Índice de Sharpe	0,19	(1,02)	(3,75)
Modelo de Markowitz	Rentabilidade do Portifólio	9,09%	9,09%	9,09%
	Risco (Desvio Padrão)	0,00%	0,00%	0,00%
	Índice de Sharpe	0,0	0,0	0,0
Diferença de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)		12,14%	4,97%	2,13%

Fig. 4.23. Resultados pelos dois Modelos para o primeiro semestre (Implementação 2)

do ano de 2002 para as otimizações com realocações pelos dois modelos. Portanto, realiza-se uma nova modelagem de cenário através do método de *bootstrap* da série histórica de março de 2000 a junho de 2002, encontrando-se a árvore de cenários da figura (4.24). Vale observar que os preços iniciais dos ativos nesta árvore são os de fechamento do primeiro semestre de 2002. Realizando-se a otimização pelo modelo de Zhao e Ziemba para os mesmos coeficientes de aversão ao risco do primeiro semestre, foram obtidas as alocações iniciais expressas em Reais para o segundo semestre, apresentadas na figura(4.25).

Fig. 4.24. Árvore de Cenários para a Implementação 2 (segundo semestre)

Ativo	$\mu = 1,1$	$\mu = 1,3$	$\mu = 3,2$
IBOVESPA	108,89	102,45	18,28
Dólar	-	-	81,61
C-Bond	-	-	-
IRFM	-	-	-
LR	12,12	11,41	11,12

$t=1$

Fig. 4.25. Alocações pelo modelo de Zhao e Ziemba para o segundo semestre na Implementação 2

Da mesma forma que se realizou a realocação no modelo de Zhao e Ziemba, realizou-se também uma nova otimização pelo modelo de Média-Variância. Para isso, os primeiros seis meses de 2002 foram acrescentados à base histórica e se calculou a nova matriz de covariâncias, apresentada na figura (4.26). Como retorno esperado dos ativos de risco para esta realocação, considerou-se a média dos retornos esperados até $t = 3$ da figura (4.24), indicados na figura(4.27). Com estes dados, obteve-se, através do modelo de Média-Variância, uma nova fronteira eficiente, apresentada na figura (4.28).

	Dólar	IBOVESPA	C-Bond	IRFM	LR
Dólar	2,09%	-2,72%	-1,86%	-0,08%	0,00%
IBOVESPA	-2,72%	9,46%	4,02%	-0,03%	0,00%
C-Bond	-1,86%	4,02%	2,81%	0,03%	0,00%
IRFM	-0,08%	-0,03%	0,03%	0,03%	0,00%
LR	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Fig. 4.26. Matriz de Covariâncias dos Ativos para o Segundo Período na Implementação 2

	Dólar	IBOVESPA	C-Bond	IRFM	LR
Retorno Esperado	21,12%	-3,54%	3,66%	19,65%	19,00%

Fig. 4.27. Retornos Esperados dos Ativos para o Final do Período no Segundo Período na Implementação 2

Fig. 4.28. Fronteira Eficiente - Média-Variância Período Simples (Implementação 2)

Como na implementação 1, capturou-se nesta fronteira eficiente carteiras que tivessem o mesmo desvio padrão das alocações iniciais do segundo semestre encontradas pelo modelo de Zhao e Ziemba. Aplicou-se sobre as carteiras encontradas pelos dois modelos as rentabilidades reais que os ativos tiveram em $t = 3$, apresentadas na figura (4.22).

Nesta implementação, diferentemente da implementação 1, os custos de transação para o modelo de Zhao e Ziemba foram utilizados apenas no processo de escolha da carteira, mas não no cálculo da rentabilidade, para, melhor comparar com as rentabilidades encontradas pelo modelo de Markowitz. Acumulando os ganhos que as carteiras tiveram no primeiro período com os do segundo período, encontrou-se os resultados apresentados na figura (4.29).

Coef. de Aversão ao Risco (μ)		1,10	1,30	3,20
Modelo de Zhao e Ziemba	Rentabilidade do Portifólio	23,60%	16,29%	32,24%
Modelo de Markowitz	Rentabilidade do Portifólio	33,86%	33,86%	28,96%
Diferença de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)		-10,26%	-17,57%	3,29%

Fig. 4.29. Resultados da Otimização pelo Modelo de Zhao e Ziemba e pelo de Markowitz (Implementação 1)

Na implementação 2 o modelo de Zhao e Ziemba não foi tão bem sucedido quanto na implementação 1. Acredita-se que este resultado pode ser atribuído ao método utilizado para se modelar a árvore de cenários.

Para constatar a performance dos dois modelos neste tipo de implementação, realizou-se mais nove testes seguindo os mesmos procedimentos usados na implementação 2.

Como observado na implementação 2, cada teste possui duas expectativas de retornos, uma expectativa para cada período da otimização, as quais são apresentadas na figura (4.30). Os resultados finais da implementação dos dois modelos para estes dez testes se encontram nas figuras (4.31) e (4.32).

Apesar de em alguns testes o modelo de Zhao e Ziemba ter performado pior que o de Markowitz, a média da diferença entre os dois modelos para todos os testes, exibida na última linha da figura (4.32), continua indicando a superioridade do modelo de Zhao e Ziemba sobre o de Markowitz.

		Dólar	IBOVESPA	C-Bond	IRFM	LR
Teste 1	Retorno Esperado 1	16,24%	-5,69%	6,51%	16,35%	19,00%
	Retorno Esperado 2	21,12%	-3,54%	3,66%	19,65%	19,00%
Teste 2	Retorno Esperado 1	7,33%	38,18%	15,97%	19,10%	19,00%
	Retorno Esperado 2	20,27%	8,60%	12,38%	20,67%	19,00%
Teste 3	Retorno Esperado 1	28,92%	-19,46%	0,23%	17,35%	19,00%
	Retorno Esperado 2	28,61%	-34,30%	-15,97%	15,63%	19,00%
Teste 4	Retorno Esperado 1	5,00%	-5,51%	8,36%	17,93%	19,00%
	Retorno Esperado 2	14,00%	24,51%	10,87%	18,89%	19,00%
Teste 5	Retorno Esperado 1	8,31%	34,81%	14,53%	17,95%	19,00%
	Retorno Esperado 2	16,19%	-8,13%	0,71%	21,28%	19,00%
Teste 6	Retorno Esperado 1	15,13%	4,93%	3,84%	17,85%	19,00%
	Retorno Esperado 2	20,26%	28,43%	20,42%	17,93%	19,00%
Teste 7	Retorno Esperado 1	1,08%	-12,73%	0,02%	20,12%	19,00%
	Retorno Esperado 2	3,00%	16,07%	17,99%	15,23%	19,00%
Teste 8	Retorno Esperado 1	4,84%	6,00%	4,24%	19,74%	19,00%
	Retorno Esperado 2	6,49%	-12,52%	6,99%	21,31%	19,00%
Teste 9	Retorno Esperado 1	7,78%	39,37%	19,75%	17,19%	19,00%
	Retorno Esperado 2	-6,46%	22,17%	21,68%	20,84%	19,00%
Teste 10	Retorno Esperado 1	34,86%	-26,80%	-4,47%	17,51%	19,00%
	Retorno Esperado 2	27,30%	-26,89%	-5,82%	21,05%	19,00%

Fig. 4.30. Retornos Esperados para a Implementação 2

		Coef. de Aversão ao Risco (μ)	1,10	1,30	1,40	1,70	1,90	3,20	3,60	4,20	4,60	5,30
Teste 1	Modelo de Zhao e Ziemba	Rentabilidade do Portifólio	23,60%	16,29%	16,29%	32,24%	32,24%	32,24%	32,24%	32,24%	32,24%	32,24%
	Modelo de Markowitz	Rentabilidade do Portifólio	33,86%	33,86%	33,86%	28,96%	28,96%	28,96%	28,96%	28,96%	28,96%	28,96%
	Diferença de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)		-10,26%	-17,57%	-17,57%	3,29%	3,29%	3,29%	3,29%	3,29%	3,29%	3,29%
Teste 2	Modelo de Zhao e Ziemba	Rentabilidade do Portifólio	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	18,33%	18,33%	18,33%
	Modelo de Markowitz	Rentabilidade do Portifólio	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	17,10%	17,10%	17,10%
	Diferença de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)		0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,24%	1,24%	1,24%
Teste 3	Modelo de Zhao e Ziemba	Rentabilidade do Portifólio	48,75%	48,75%	48,75%	48,75%	48,75%	48,75%	48,75%	48,75%	48,75%	33,86%
	Modelo de Markowitz	Rentabilidade do Portifólio	21,94%	21,94%	21,94%	21,94%	21,94%	21,94%	21,94%	21,94%	21,94%	33,86%
	Diferença de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)		26,82%	26,82%	26,82%	26,82%	26,82%	26,82%	26,82%	26,82%	26,82%	0,00%
Teste 4	Modelo de Zhao e Ziemba	Rentabilidade do Portifólio	11,22%	11,22%	11,22%	11,22%	11,22%	11,22%	11,22%	11,22%	11,22%	11,22%
	Modelo de Markowitz	Rentabilidade do Portifólio	11,22%	11,22%	11,22%	11,22%	11,22%	11,22%	11,22%	11,22%	11,22%	11,22%
	Diferença de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)		0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Teste 5	Modelo de Zhao e Ziemba	Rentabilidade do Portifólio	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%
	Modelo de Markowitz	Rentabilidade do Portifólio	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%	-7,45%
	Diferença de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)		0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Fig. 4.31. Resultados dos Modelos de Zhao e Ziemba e Markowitz para a Implementação 2

Coef. de Aversão ao Risco (μ)		1,10	1,30	1,40	1,70	1,90	3,20	3,60	4,20	4,60	5,30
Teste 6	Modelo de Zhao e Ziemba	Rentabilidade do Portifólio	11,68%	21,74%	21,74%	21,74%	21,74%	21,74%	21,74%	21,74%	21,74%
	Modelo de Markowitz	Rentabilidade do Portifólio	19,01%	19,01%	19,01%	19,01%	19,01%	19,01%	19,01%	19,01%	19,01%
	Diferença de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)		-7,33%	2,74%	2,74%	2,74%	2,74%	2,74%	2,74%	2,74%	2,74%
Teste 7	Modelo de Zhao e Ziemba	Rentabilidade do Portifólio	11,68%	11,68%	11,68%	11,68%	11,68%	11,68%	11,68%	11,22%	11,22%
	Modelo de Markowitz	Rentabilidade do Portifólio	14,02%	14,02%	14,02%	14,02%	14,02%	14,02%	14,02%	13,55%	13,55%
	Diferença de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)		-2,34%	-2,34%	-2,34%	-2,34%	-2,34%	-2,34%	-2,34%	-2,33%	-2,33%
Teste 8	Modelo de Zhao e Ziemba	Rentabilidade do Portifólio	19,62%	19,62%	19,62%	19,62%	19,62%	19,62%	19,62%	19,62%	19,62%
	Modelo de Markowitz	Rentabilidade do Portifólio	19,62%	19,62%	19,62%	19,62%	19,62%	19,62%	19,62%	19,62%	19,62%
	Diferença de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)		0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Teste 9	Modelo de Zhao e Ziemba	Rentabilidade do Portifólio	-11,78%	-11,78%	-11,78%	-11,78%	-11,78%	11,75%	11,75%	11,75%	11,75%
	Modelo de Markowitz	Rentabilidade do Portifólio	-7,46%	-7,46%	-7,46%	-7,46%	-7,46%	10,80%	10,80%	10,80%	10,80%
	Diferença de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)		-4,32%	-4,32%	-4,32%	-4,32%	-4,32%	0,95%	0,95%	0,95%	0,95%
Teste 10	Modelo de Zhao e Ziemba	Rentabilidade do Portifólio	48,76%	48,76%	48,76%	48,76%	48,76%	48,76%	48,76%	48,76%	48,76%
	Modelo de Markowitz	Rentabilidade do Portifólio	48,76%	48,76%	48,76%	48,76%	48,76%	48,76%	48,76%	48,76%	48,76%
	Diferença de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)		0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Diferença Média de Rentabilidades (Z. Z. - Markowitz)			0,26%	0,53%	0,53%	2,62%	2,62%	3,14%	3,27%	3,27%	0,59%

Fig. 4.32. Resultados dos Modelos de Zhao e Ziemba e Markowitz para a Implementação 2

4.4 Resultados

Os resultados encontrados para a comparação entre o modelo de Zhao e Ziemba e o modelo de Markowitz na implementação 1 sugerem a superioridade do primeiro como uma melhor forma de otimização, pois conseguiu gerar carteiras com melhores relações de retorno *versus* risco que os encontrados pelo modelo de Markowitz. Esta superioridade se deve em parte ao benefício que se tem quando se leva em conta o caminho dos ativos no tempo, ou seja, quando se realiza uma otimização em multi-período, na qual é possível capturar variações que os ativos possam ter entre o ponto de partida e o horizonte de investimento.

Um ponto negativo observado para o modelo de Zhao e Ziemba, comparativamente ao de Markowitz, é que o primeiro não conseguiu gerar uma diversidade grande de carteiras, ou seja, para uma determinada modelagem, o número de alocações diferentes com a variação do coeficiente de aversão ao risco não chegou a ser maior que quatro carteiras. Em parte, o número limitado de carteiras se deve à estrutura escolhida para a árvore de cenários, que foi uma árvore binomial, ou seja, com poucos cenários. Em testes com árvores constituídas por um número maior de cenários, obteve-se uma maior diversidade de carteiras.

No caso da implementação 2 não se verificou a mesma superioridade do modelo de Zhao e Ziemba, embora na média final dos dez testes o primeiro modelo tenha ainda superado o modelo de Markowitz para todos os coeficientes de aversão ao risco. Uma justificativa que pode ser atribuída à esta piora de performance do modelo de Zhao e Ziemba

é a forma de modelagem utilizada para os cenários de retornos futuros dos ativos, pois este modelo é altamente dependente do caminho que os ativos percorrem até o horizonte de investimento. Se a árvore de cenários modelada não for capaz de antecipar com certa precisão os movimentos dos ativos, o modelo irá "otimizar" erros. Entretanto, não faz parte deste trabalho a determinação da melhor metodologia para modelar cenários aplicados aos problemas de otimização estocástica multi-período, ficando este estudo como sugestão para um futuro trabalho.

Nos testes aqui implementados, não ficou evidente o benefício da escolha do método de resolução de problemas de programação estocástica multi-estágio por decomposição, com respeito à velocidade de execução. Entretanto, este benefício já foi testado e demonstrado por Cariño, Myers e Ziemba (1998). Estes autores confirmam a superioridade da velocidade do método de decomposição de Benders quando aplicado a problemas de larga escala. Contudo, a flexibilidade e facilidade em se trabalhar com estruturas multi-período que o método de decomposição proporciona, motiva sua utilização até mesmo para pequenas estruturas de cenários como as aqui implementadas.

Conclusão

A presente dissertação objetivou analisar e implementar no mercado de capitais brasileiro o modelo de otimização de carteiras multi-período com controle de perda máxima e custos de transação, apresentado por Zhao e Ziemba (2001). Esta dissertação utilizou como ferramenta o método de otimização estocástica em multi-estágio via decomposição, apresentado por Birge (1985).

O método de otimização estocástica em multi-estágio apresentado por Birge (1985) resulta de uma extensão do método de decomposição de Benders (1962) estendido para o caso multi-período. Esta metodologia de resolução de problemas por decomposição de Benders é indicada na resolução de problemas de larga escala dada sua velocidade de resolução como demonstrado em Cariño, Myers e Ziemba (1998). A utilização deste algoritmo se adequa perfeitamente à resolução do modelo de Zhao e Ziemba apresentado, tendo em vista sua estrutura e a flexibilidade de trabalhar com árvores de cenários que o método de decomposição proporciona.

A abordagem de Zhao e Ziemba (2001) se resume em um modelo multi-período de programação linear estocástica no qual o risco é baseado no cenário de perda máxima, que é determinado endogenamente junto com o balanceamento de retorno esperado *versus* risco, e sujeito a custos de transação. Este modelo se diferencia do tradicional modelo

de Markowitz, principalmente, quanto a análise em multi-período e com respeito as característica da ferramenta de risco utilizada.

Nos testes comparativos entre os modelos de Zhao e Ziemba e de Markowitz, constatou-se que os resultados da implementação do modelo de Zhao e Ziemba a um conjunto de ativos brasileiros superou os encontrados pelo modelo de Média-Variância de período simples de Markowitz, pois apresentou melhores expectativas de retornos que carteiras encontradas por este último modelo com mesmo risco (desvio padrão), como observado na implementação 1. Esta superioridade reflete o benefício que a abordagem multi-período de Zhao e Ziemba tem de capturar os movimentos esperados dos ativos e assim obter uma maior rentabilidade.

Na implementação 2, com realocações para os dois modelos e atribuição da rentabilidade efetiva de 2002 dos ativos aos portfólios encontrados por ambos os modelos, a performance do modelo de Zhao e Ziemba foi, na média geral de todos os testes, melhor que a performance do modelo de Markowitz para todos os coeficientes de aversão ao risco. Embora, em alguns testes ter obtido retorno pior que o modelo de Markowitz. Contudo, esta piora de performance do modelo de Zhao e Ziemba sobre o de Markowitz pode ser atribuída à forma escolhida para modelagem da árvore de cenários, a qual pode não ter sido capaz de antecipar os movimentos dos ativos de forma satisfatória. Acredita-se que uma modelagem de cenários que leve em consideração o caminho recente dos ativos e as ex-

pectativas dos agentes quanto aos retornos futuros dos ativos possa ser superior a forma escolhida. Sugere-se, portanto, como direção de pesquisa futura uma maior investigação das metodologias de modelagem de árvore de cenários a serem aplicadas ao modelo multi-período, tendo em vista que esta é uma das principais variáveis de entrada para o modelo, podendo comprometer seu desempenho.

Certamente, o estudo do processo de otimização de investimentos tende a caminhar para a pesquisa de modelos de otimização estocástica multi-período. O trabalho descrito por Zhao e Ziemba (2001) apresenta-se como um modelo que se adequa às necessidades dos administradores de recursos, pois incorpora várias das restrições que estes enfrentam no processo de otimização de portfólios.

Apêndice A

Código em Matlab do Algoritmo de Decomposição

Com a finalidade de implementar o algoritmo apresentado por Birge e demonstrado na seção anterior, descreve-se abaixo um código elaborado em Matlab. A elaboração deste código tomou como base uma rotina descrita em Silva(2001). Este código é composto por seis funções:

Optimizer.m

Solve.m

OptCuts.m

GetD.m

GetE.m

PutM.m

A função *Optimizer.m* é a função central do sistema, pois controla o andamento da solução do problema através dos *Passos* apresentados no Capítulo 2, chamando as rotinas respectivas para cada procedimento e decidindo sobre a finalização da rotina caso o problema como um todo não tenha solução. A função *Solve.m* resolve os problemas de programação linear que lhes são apresentados e, caso estes não tenham solução viável, ap-

resenta uma região de viabilidade como descrito no *Passo 1* do algoritmo no capítulo 3. A função Optcuts.m realiza os cortes de otimalidade do *Passo 2* e decide sobre o encerramento do problema no caso de encontrar a solução. As funções GetD.m e GetE.m capturam os dados para construção das restrições de viabilidade do tipo (2.13) e das restrições de otimalidade do tipo (2.14) respectivamente. A função Putm.m armazena em duas matrizes diferentes os dados para construção dos dois tipos de restrições (2.13) e (2.14) para cada problema (t, k) .

Além destas funções principais a rotina necessita das variáveis utilizadas como entrada para a resolução dos problemas (t, k) apresentados no exemplo e da forma abordada no capítulo 3. Portanto, faz-se necessário o desenvolvimento de mais oito funções auxiliares:

c.m

Weq.m

W.m

Teq.m

T.m

heq.m

h.m

tree_str.m

Estas funções auxiliares definem as variáveis de entrada para cada problema (t, k) . A diferença nas funções que possuem a extensão *eq* como a função *Weq.m* das que não possuem, *W.m*, é que as primeiras definem as restrições de igualdade e as últimas definem as restrições em forma de inequação. Assim *c.m* determina os vetores de custo, *Weq.m* e *W.m* as matrizes de recurso, *Teq.m* e *T.m* as matrizes de tecnologia, e *heq.m* e *h.m* os vetores de demanda. A função *tree_str.m* define a estrutura da árvore de cenários.

Abaixo segue o código em Matlab desenvolvido e comentado para as funções principais e um exemplo (problema exemplo (2.18)) para as funções auxiliares:

```
function Optimizer
%Optimizer
%Rotina principal doCodigo para resolucao de problemas de programacao linear estocastica
%multi-periodo via decomposicao de Benders
tree_str; % Chama a funcao que atribui a estrutura da arvore
%Inicializar Variaveis
global w1 w2 weq1 weq2 Md Me r s x th pi pieq rho sigma t k DIR i soluc zero desire stp dem bac;
i=1;
t=1;
k=1;
Md=[];
Me=[];
[weq1,weq2]=size(Weq(t,k));
r=zeros(1,N);
s=zeros(1,N);
x=zeros(weq2,N);
th=zeros(1,N);
pi=[];
rho=[];
sigma=[];
stop=0;
DIR=1;
soluc=1;
zero=10^(-10);
stp=1;
```

```

desire='n';
bac(1,1:2)=0;
%*****
%*****
%Main Algoritm
%*****
%*****
dem=input('Do you wish to see iterations? y/n [n]:','s');
if dem=='y'
desire=input('Do you wish to follow the procedure step by step? y/n [n]:','s');
end
t1=cputime; % Setar relógio para contar tempo do algoritmo
while stop==0
if dem=='y'
fprintf(' t=%d.\n',t);
end
while k<=K(t) & stop==0 % Enquanto nao chegar ao ultimo cenario e condicao de parada, realize:
[w1,w2]=size(W(t,k));
[weq1,weq2]=size(Weq(t,k));
if t>1 xt_1=x(:,n(t-1),a(n(t,k))); else xt_1=zeros(weq2,1); end %Atribui a xt_1 os valores de X do periodo
anterior
[xsol,thh,piieq,pii,rho,sigma,feasible]=Solve(t,k,xt_1); %Chama a funcao para resolver problema de prog. lin-
ear
%if DIR==0 input(' > ');end
if ~feasible %Se nao encontrou solucao para o problema (t,k):
if t==1
stop=1; %Se esta no primeiro periodo entao nao ha solucao para o problema
disp(' ** PROBLEM IS INFEASIBLE **');
else
%Constroi a restricao de factibilidade "D x >= d"
D=[piieq*Teq(t,k)+pii*T(t,k)];
[Dtk,dtk]=getD(Md,r,t,k);
if isempty(dtk) dtk=0; end
d=piieq*heq(t,k)+pii*h(t,k)+rho*(-dtk);
if dem=='y'
disp('_____');
disp(' * INFEASIBLE *');
disp('Feasibility Cut:');
disp('D=');disp(D);
disp('d=');disp(d);
disp('_____');
end
[Md,r]=putM([-D -d],Md,r,t-1,a(n(t,k))); %Armazena a restricao de factibilidade na matriz Md
k=a(n(t,k)); %Retorna ao estagio antecessor

```

```

t=t-1; %Retorna ao periodo anterior
bac(1,1)=1;
bac(1,2)=ba(n(t,k));
end
end
if feasible %Se encontrou solucao para o problema(t,k), armazena os resultados e passa para o prox. estagio
x(:,n(t,k))=xsol;
th(n(t,k))=thh;
pieq(n(t,k),1:weq1)=[piieq];
pi(n(t,k),1:w1)=[pii];
rho(n(t,k),1:r(n(t,k)))=rhoo;
sigma(n(t,k),1:s(n(t,k)))=sigmaa;
if bac(1,1)==1
t=t+1;
k=bac(1,2);
bac(1,1)=0;
else
k=k+1;
end
end
end %while k<=K(t) & stop==0
if (stop==0 & DIR==1 & t<L) %Se ainda nao chegou ao periodo final vai para o prox. periodo
t=t+1;
if t==L testT=1; end
k=1;
else if t==L %Se chegou ao fim setar direcao para voltar, realizando cortes de otimalidade
DIR=0;
i=i+1;
end
if DIR==0
if t>1
[Me,s,stop]=OptCuts(t-1); %Chama a funcao que calcula os cortes de otimalidade "E x + th >= e"
t=t-1;
k=1;
else
DIR=1; %Se t=1, iniciar novamente a otimizacao com as novas restricoes de otimalidade
t=t+1;
k=1;
i=i+1;
end
end
end
end %while stop==0
t2=cputime; %Seta o tempo final do algoritmo

```

```

if feasible %Apresenta a solucao do problema
X=[x(:,1);th(1)];
Xd=zeros(size(X));
Xd(find(abs(X)>zero))=X(find(abs(X)>zero));
fprintf('\n\n=====\\n');
fprintf('\n solucao:');
for j=1:weq2, fprintf(' %g',Xd(j,1)); end; fprintf('.\n\n');
fprintf(' theta: %g.\n\n',th(:,1));
fprintf(' objetivo: z=%g.\n\n',[c(1,1)' 0]*X+th(:,1));
fprintf(' iteracoes = %d.\n',i);
fprintf(' tempo gasto = %gs.\n',t2-t1);
fprintf('\n=====\\n\n');
x
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Optimizer Subfunctions %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%*****
%Subfunction Solve
%*****
function [xsol,thh,piieq,pii,rhoo,sigmaa,feasible]=Solve(t,k,xt_1)
% Esta funcao resolve problema de programacao linear no formato:
% minimizar f = cx
% sujeito a: A x <= b
% Aeq x = beq
% lb < x < ub
% utiliza-se a funcao linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
tree_str;
global r s Md Me w1 w2 weq1 weq2 zero DIR i soluc desire stp dem bac;
[Dtk,dtk]=getD(Md,r,t,k); %Busca os valores de "D" e "d" para o devido prob.
[Etk,etk]=getE(Me,s,t,k); %Busca os valores de "E" e "e" para o devido prob.
rtk=r(n(t,k));
stk=s(n(t,k));
if(stk==0)
stk=1; %Enquanto nao existe restricao para Theta
Etk=zeros(1,weq2); %monta-se uma restricao theta >= 0
etk=0;
end
%Montar as matrizes para resolver prob. de prog. linear no formato da funcao linprog()
%if rtk>0 rtk=1; end
Aeqsol=[[Weq(t,k)] [zeros(weq1,1)]];
Asol=[[[W(t,k);Dtk;Etk] [zeros(w1+rtk,1);-ones(stk,1)]]];
beqsol=heq(t,k)-Teq(t,k)*xt_1;

```

```

bsol=[h(t,k)-T(t,k)*xt_1;dtk;etk];
csol=[c(t,k);1];
lbsol=zeros(weq2-1,1);-18;-Inf];
ubsol=[];
if dem=='y'
if(soluc==1)
disp('_____');
if DIR==1 direc='FORE'; else direc='BACK'; end
fprintf('%d) [%d %d] %s \n',i,t,k,direc);
disp('_____');
end
end
if t==1 options = optimset('MaxIter',1e3); else options = optimset('MaxIter',1e3); end
%resolver problema de programacao linear
[Xtk,fsol,exitflag,output,lambda]=linprog(csol,Asol,bsol,Aeqsol,beqsol,lbsol,ubsol,[],options);
if exitflag>0 %Se o exitflag for maior que zero entao existe uma solucao para o problema
feasible=1; %Ha solucao para o prob. de prog. linear
xsol=Xtk(1:weq2,1); %Solucao do problema
if stp==1 thh=0;
else
thh=Xtk(weq2+1,1); %Solucao para theta
end
pii eq=-[lambda.eqlin]'; %Multiplicador simplex associado as equacoes de igualdade
pii=-[lambda.ineqlin(1:w1,1)]'; %Multiplicador simplex associado as inequacoes iniciais
rhoo=lambda.ineqlin(w1+1:w1+rtk,1)'; %Multiplicador simplex associado as inequacoes -Dx<=-d
sigmaa=lambda.ineqlin(w1+rtk+1:w1+rtk+s(n(t,k)),1)'; %Multiplicador simplex associado as inequacoes -Ex-
Th<=-e
%Apresenta resultados
if dem=='y'
disp('_____');
fprintf('theta >=%g\n',-etk+Etk*xsol);
disp('c=');disp(csol);
disp('x th ='); disp([xsol' thh]);
disp('A b=');disp([Aeqsol;Asol],[beqsol;bsol]);
disp('pi='); disp([pii eq pii]);
disp('rhoo='); disp(rho);
disp('sigmaa='); disp(sigmaa);
fprintf('\nObj= %.8f\n',fsol);
disp('_____');
end
else
feasible=0; %Nao ha solucao para o problema de programacao linear original
[linhsol,colsol]=size([Aeqsol;Asol]);
cv=zeros(weq2+1,1);ones(2*linhsol,1));

```

```

Avint=[Aeqsol;Asol] eye(linhsol) -eye(linhsol)];
Aeqv=Avint(1:weq1,:);
Av=Avint(weq1+1:weq1+w1+rtk+stk,:);
lbv=[lbsol;zeros(2*linhsol,1)];
ubv=[];
[Xtk,fv,exitflag,output,lambd]=linprog(cv,Av,bsol,Aeqv,beqsol,lbv,ubv);
piieq=-[lambd.eqlin]';
pii=-[lambd.ineqlin(1:w1,1)]';
rhoo=lambd.ineqlin(w1+1:w1+rtk,1)';
sigmaa=0;
xsol=[];
thh=[];
if isempty(rhoo) rhoo=0; end
end
if desire=='y' input('> '); end
%*****
%Subfunction OptCuts
%*****
function [Me,sn,stop]=OptCuts(t_1)
tree_str;
global w1 w2 weq1 weq2 pi pieq t r Md Me rho sigma s x th i stp dem;
added=0;
stop=0;
stp=stp+1;
%Processo para montar a restricao de otimalidade no formato "E x + theta >= e"
for j=1:K(t_1)
E=zeros(1,weq2);
e=0;
for k=(find(a(n(t_1+1,1):n(t_1+1,K(t_1+1)))==j))
E=E+p(n(t,k))/p(n(t_1,j))*([pieq(n(t,k),1:weq1) pi(n(t,k),1:w1)]*[Teq(t,k);T(t,k)]);
end
for k=(find(a(n(t_1+1,1):n(t_1+1,K(t_1+1)))==j))
e=e+p(n(t,k))/p(n(t_1,j))*([pieq(n(t,k),1:weq1) pi(n(t,k),1:w1)]*[heq(t,k);h(t,k)]);
if r(n(t,k))>0
[Dtk,dtk]=getD(Md,r,t,k);
e=e+p(n(t,k))/p(n(t_1,j))*rho(n(t,k),1:r(n(t,k)))*(-dtk);
end
if s(n(t,k))>0
[Etk,etk]=getE(Me,s,t,k);
e=e+p(n(t,k))/p(n(t_1,j))*sigma(n(t,k),1:s(n(t,k)))*(-etk);
end
end
Q=e-E*x(:,n(t_1,j));
if dem=='y'

```

```

disp('Optimality Cuts:');
disp('E=');disp(E);
disp('e=');disp(e);
teta=th(1,n(t_1,j));
x(:,n(t_1,j));
if t==2
fprintf(' (%d) Q-th = %g - %g = %g\n',i,Q,th(1,n(t_1,j)),Q-th(1,n(t_1,j)));
end
end
if abs(th(1,n(t_1,j)))<10^(-7)
[Me,s]=putM([-E -e],Me,s,t_1,j);
added=added+1;
else if Q-th(1,n(t_1,j))>10^(-6)
[Me,s]=putM([-E -e],Me,s,t_1,j);
added=added+1;
end
end
end
sn=s;
if (t==(2) & added==0) stop=1; end %determina a parada da otimizacao e que a solucao foi encontrada
%*****
%Subfunction GetD
%*****
function [Mout,Bout]=getD(Mx,ind,t,k)
tree_str;
global w1 w2 weq1 weq2
if isempty(ind)
Mtk=[];
Mout=Mtk;
Bout=Mtk;
else
inicio=sum(ind(1:n(t,k)-1))+1;
fim=sum(ind(1:n(t,k)));
if (inicio<=fim)
Mtk=Mx(inicio:fim,1:w2+1);
[m1,m2]=size(Mtk);
Mout=Mtk(1:m1,1:w2);
Bout=Mtk(1:m1,w2+1);
else
Mtk=[];
[m1,m2]=size(Mtk);
Mout=Mtk;
Bout=Mtk;
end
end

```

```

end
%*****
%Subfunction GetE
%*****
function [Mout,Bout]=getE(Mx,ind,t,k)
tree_str;
global w1 w2 weq1 weq2
if isempty(ind)
    Mtk=[];
    Mout=Mtk;
    Bout=Mtk;
else
    inicio=sum(ind(1:n(t,k)-1))+1;
    fim=sum(ind(1:n(t,k)));
    if (inicio<=fim)
        Mtk=Mx(inicio:fim,1:w2+1);
        [m1,m2]=size(Mtk);
        Mout=Mtk(1:m1,1:w2);
        Bout=Mtk(1:m1,m2);
    else
        Mtk=[];
        [m1,m2]=size(Mtk);
        Mout=Mtk;
        Bout=Mtk;
    end
end
end
%*****
%Subfunction PutM
%*****
function [Mx,nind]=putM(new,Mx,ind,t,k)
tree_str
global w1 w2 weq1 weq2
new=[new zeros(1,max(w2)+1-length(new))];
fim=sum(ind(1:n(t,k)));
Mx=[Mx(1:fim,:); new; Mx(fim+1:sum(ind),:);
nind=ind;
nind(1,n(t,k))=nind(1,n(t,k))+1;
%*****
%Subfunction c
%*****
function[c]=c(t,k)
if t==3 c=[-1;-1;-1];
else
    c=[0;0;0];

```



```

end
%*****
%Subfunction W
%*****
function[W]=W(t,k)
if t==1
W=[0 1 0];
else
W=[0 1 0;-1 -1 -1];
end
%*****
%Subfunction Weq
%*****
function[Weq]=Weq(t,k)
Weq=[1 1 1];
%*****
%Subfunction h
%*****
function[h]=h(t,k)
if t==1
h=[50000];
else
h=[0;-100000];
end
%*****
%Subfunction heq
%*****
function[heq]=heq(t,k)
if t==1 heq=[100000];
else
heq=[0];
end
%*****
%Subfunction T
%*****
function[T]=T(t,k)
GT=[1 2 4 8];
ibov=[0 -0.30 0.40 -0.30 -0.10 -0.30 0.60];
dol=[0 -0.10 -0.10 0.11 0.25 0.15 -0.20];
f=[0 0.15 0.15 0.15 0.15 0.15 0.15];
ribov=exp(ibov(GT(t)+k-1));
rdol=exp(dol(GT(t)+k-1));
rf=exp(f(GT(t)+k-1));
if t==1

```

```

T=[-0.5*rf -0.5*ribov -0.5*rdol];
else
T=[-0.5*rf -0.5*ribov -0.5*rdol;0 0 0];
end
%*****

%Subfunction Teq
%*****

function[Teq]=Teq(t,k)
GT=[1 2 4 8];
ibov=[0 -0.30 0.40 -0.30 -0.10 -0.30 0.60];
dol=[0 -0.10 -0.10 0.11 0.25 0.15 -0.20];
f=[0 0.15 0.15 0.15 0.15 0.15 0.15];
ribov=exp(ibov(GT(t)+k-1));
rdol=exp(dol(GT(t)+k-1));
rf=exp(f(GT(t)+k-1));
if t==1 Teq=[0 0 0];
else
Teq=[-rf -ribov -rdol];
end
%*****

%Subfunction tree_str
%*****

Str=[1 2 2];
dt=[0 1 1];
L=length(Str);
K=[1];
for z=2:L
K=[K Str(z)*K(z-1)];
end
n(1,1)=1;
for z=2:L
for j=1:K(z)
n(z,j)=n(z-1,K(z-1))+j;
end
end
a(1)=0;
for z=2:L
for j=1:K(z)
a(n(z,j))=ceil(j/Str(z));
end
end
ba(1)=1;
for z=2:L-1
for j=1:K(z)

```

```
ba(n(z,j))=(K(z+1)/K(z))*(j-1)+1;  
end  
end  
N=n(L,K(L));  
p=[];  
for z=1:L  
p(n(z,1):n(z,K(z)))=ones(1,K(z))/K(z);  
end
```

Apêndice B

Resolução do Problema Exemplo do Capítulo 2

Segue abaixo o procedimento, passo a passo, de resolução do problema exemplo do capítulo 2, através do código descrito no Apêndice A:

Inicia-se no *Passo 0*, setando as variáveis: $t = k = 1$, $\langle i \rangle = 1$ (iterações), $DIR = FORE$, adicionando a restrição $\theta_t^k = 0$ e seguindo para o *Passo 1*:

$\langle 1 \rangle$. [$t = 1$, $k = 1$] $DIR = FORE$. Tem-se o sub-problema (1, 1):

$$\min .0 + \theta_1$$

sujeito a:

$$F_1 + I_1 + U_1 = W_1 = 100.000,00$$

$$I_1 \leq 50.000,00$$

$$F_1, I_1, U_1 \geq 0$$

$$\theta_1 = 0$$

cuja solução é: $[F_1 \ I_1 \ U_1] = [30.354,00 \ 39.292,00 \ 30.354,00]$. Outras variáveis são zero.

$\langle 1 \rangle. [t = 2, k = 1] \text{ DIR} = \text{FORE}$. Tem-se o sub-problema (2, 1):

$$\min .0 + \theta_2^1$$

sujeito a:

$$F_2^1 + I_2^1 + U_2^1 = 94.901,32$$

$$I_2^1 \leq 47.450,66$$

$$-F_2^1 - I_2^1 - U_2^1 \leq -100.000,00$$

$$F_2^1, I_2^1, U_2^1 \geq 0$$

$$\theta_2^1 = 0$$

O sub-problema (2, 1) é inviável, tendo em vista a escolha de alocação em (1, 1). Calcula-se então uma região de viabilidade para este problema e, com os multiplicadores simplex associados, calcula-se e aplica-se a restrição do tipo (2.19) ao nó antecessor (1, 1). Encontramos: $D_1^1 = (\pi_2^1)^T T_2^1 = [1, 16 \ 0,74 \ 0,90]$ e $d_1^1 = (\pi_2^1)^T h_2^1 = 100.000,00$.

$\langle 1 \rangle. [t = 1, k = 1] \text{ DIR} = \text{FORE}$. Tem-se o sub-problema (1, 1):

$$\min .0 + \theta_1$$

sujeito a:

$$F_1 + I_1 + U_1 = W_1 = 100.000,00$$

$$I_1 \leq 50.000,00$$

$$-1,16F_1 - 0,74I_1 - 0,90U_1 \leq -100.000,00$$

$$F_1, I_1, U_1 \geq 0$$

$$\theta_1 = 0$$

cuja solução é: $[F_1 \ I_1 \ U_1] = [55.856,17 \ 25.090,05 \ 19.053,78]$. Outras variáveis são zero.

$\langle 1 \rangle. [t = 2, k = 1] \text{ } DIR = FORE$. Tem-se o sub-problema $(2, 1)$:

$$\min .0 + \theta_2^1$$

sujeito a:

$$F_2^1 + I_2^1 + U_2^1 = 100.723,35$$

$$I_2^1 \leq 50.361,67$$

$$-F_2^1 - I_2^1 - U_2^1 \leq -100.000,00$$

$$F_2^1, I_2^1, U_2^1 \geq 0$$

$$\theta_2^1 = 0$$

cuja solução é: $[F_2^1 \ I_2^1 \ U_2^1] = [30.545, 39 \ 39.632, 57 \ 30.545, 39]$. Outras variáveis são zero.

$\langle 1 \rangle. [t = 2, k = 2]$ *DIR = FORE*. Tem-se o sub-problema (2, 2):

$$\min . 0 + \theta_2^2$$

sujeito a:

$$F_2^2 + I_2^2 + U_2^2 = 119.566, 14$$

$$I_2^2 \leq 59.783, 07$$

$$-F_2^2 - I_2^2 - U_2^2 \leq -100.000, 00$$

$$F_2^2, I_2^2, U_2^2 \geq 0$$

$$\theta_2^2 = 0$$

cuja solução é: $[F_2^2 \ I_2^2 \ U_2^2] = [36.308, 11 \ 46.949, 91 \ 36.308, 11]$. Outras variáveis são zero.

$\langle 1 \rangle. [t = 3, k = 1]$ *DIR = FORE*. Tem-se o sub-problema (3, 1):

$$\min . -F_3 - I_3 - U_3 + \theta_3^1$$

sujeito a:

$$F_3^1 + I_3^1 + U_3^1 = 98.946,36$$

$$I_3^1 \leq 49.473,18$$

$$-F_3^1 - I_3^1 - U_3^1 \leq -100.000,00$$

$$F_3^1, I_3^1, U_3^1 \geq 0$$

$$\theta_3^1 = 0$$

O sub-problema (3, 1) é inviável com a escolha de alocação em (2, 1). Calcula-se então uma região de viabilidade para este problema e, com os multiplicadores simplex associados, calcula-se e aplica-se a restrição do tipo (2.19) ao nó antecessor (2, 1). Encontramos:

$$D_2^1 = (\pi_3^1)^T T_3^1 = [1, 16 \quad 0, 74 \quad 1, 12] \text{ e } d_2^1 = (\pi_3^1)^T h_3^1 = 100.000,00.$$

$\langle 1 \rangle. [t = 2, k = 1] \text{ DIR} = \text{FORE}$. Tem-se o sub-problema (2, 1):

$$\min .0 + \theta_2^1$$

sujeito a:

$$F_2^1 + I_2^1 + U_2^1 = 100.723,35$$

$$I_2^1 \leq 50.361,67$$

$$-F_2^1 - I_2^1 - U_2^1 \leq -100.000,00$$

$$-1,16F_2^1 - 0,74I_2^1 - 1,12U_2^1 \leq -100.000,00$$

$$F_2^1, I_2^1, U_2^1 \geq 0$$

$$\theta_2^1 = 0$$

cuja solução é: $[F_2^1 \quad I_2^1 \quad U_2^1] = [34.670,53 \quad 33.910,06 \quad 32.142,76]$. Outras variáveis são zero.

$\langle 1 \rangle. [t = 3, k = 1]$ *DIR = FORE*. Tem-se o sub-problema (3, 1):

$$\min . - F_3 - I_3 - U_3 + \theta_3^1$$

sujeito a:

$$F_3^1 + I_3^1 + U_3^1 = 101.282,86$$

$$I_3^1 \leq 50.641,43$$

$$-F_3^1 - I_3^1 - U_3^1 \leq -100.000,00$$

$$F_3^1, I_3^1, U_3^1 \geq 0$$

$$\theta_3^1 = 0$$

cuja solução é: $[F_3^1 \quad I_3^1 \quad U_3^1] = [30.714,99 \quad 39.852,88 \quad 30.714,99]$, solução dual representada pelo multiplicador simplex $(\pi_3^1)^T = [-1,00 \quad 0,00 \quad 0,00]$.

$\langle 1 \rangle. [t = 3, k = 2] \text{ DIR} = \text{FORE}$. Tem-se o sub-problema $(3, 2)$:

$$\min . - F_3 - I_3 - U_3 + \theta_3^2$$

sujeito a:

$$F_3^2 + I_3^2 + U_3^2 = 112.236,62$$

$$I_3^2 \leq 56.118,31$$

$$-F_3^2 - I_3^2 - U_3^2 \leq -100.000,00$$

$$F_3^2, I_3^2, U_3^2 \geq 0$$

$$\theta_3^2 = 0$$

cuja solução é: $[F_3^2 \ I_3^2 \ U_3^2] = [34.064,66 \ 44.107,31 \ 34.064,66]$, solução dual representada pelo multiplicador simplex $(\pi_3^2)^T = [-1,00 \ 0,00 \ 0,00]$.

$\langle 1 \rangle. [t = 3, k = 3] \text{ DIR} = \text{FORE}$. Tem-se o sub-problema $(3, 3)$:

$$\min . - F_3 - I_3 - U_3 + \theta_3^3$$

sujeito a:

$$F_3^3 + I_3^3 + U_3^3 = 119.149,37$$

$$I_3^3 \leq 59.574,68$$

$$-F_3^3 - I_3^3 - U_3^3 \leq -100.000,00$$

$$F_3^3, I_3^3, U_3^3 \geq 0$$

$$\theta_3^3 = 0$$

cuja solução é: $[F_3^3 \ I_3^3 \ U_3^3] = [36.180,54 \ 46.788,29 \ 36.180,54]$, solução dual representada pelo multiplicador simplex $(\pi_3^3)^T = [-1,00 \ 0,00 \ 0,00]$.

$\langle 1 \rangle. [t = 3, k = 4] \text{ } DIR = FORE$. Tem-se o sub-problema (3, 4):

$$\min . - F_3 - I_3 - U_3 + \theta_3^4$$

sujeito a:

$$F_3^4 + I_3^4 + U_3^4 = 157.458,90$$

$$I_3^4 \leq 78.729,45$$

$$-F_3^4 - I_3^4 - U_3^4 \leq -100.000,00$$

$$F_3^4, I_3^4, U_3^4 \geq 0$$

$$\theta_3^4 = 0$$

cuja solução é: $[F_3^4 \ I_3^4 \ U_3^4] = [47.909,00 \ 61.640,89 \ 47.909,00]$, solução dual representada pelo multiplicador simplex $(\pi_3^4)^T = [-1,00 \ 0,00 \ 0,00]$.

Finalizando o *Passo 1* com, pois $t = 3$ e $k = 4$, fazer $DIR = BACK$ e seguir para o *Passo 2*:

Realizam-se os cortes de otimalidade, calculando e inserindo restrições do tipo (2.20) aos sub-problemas:

$$\langle 2 \rangle \quad E_2^1 = \left(\frac{0,25}{0,5} \right) (\pi_3^1 T_3^1 + \pi_3^2 T_3^2) = (1,16 \quad 0,82 \quad 1,20)$$

$$e_2^1 = \left(\frac{0,25}{0,5} \right) (\pi_3^1 h_3^1 + \pi_3^2 h_3^2) = 0,00$$

$$E_2^2 = \left(\frac{0,25}{0,5} \right) (\pi_3^3 T_3^3 + \pi_3^4 T_3^4) = (1,16 \quad 1,28 \quad 0,99)$$

$$e_2^2 = \left(\frac{0,25}{0,5} \right) (\pi_3^3 h_3^3 + \pi_3^4 h_3^4) = 0,00$$

$\langle 2 \rangle. [t = 2, k = 1] \text{ } DIR = BACK. \text{ Tem-se o sub-problema } (2, 1):$

$$\min .0 + \theta_2^1$$

sujeito a:

$$F_2^1 + I_2^1 + U_2^1 = 100.723,35$$

$$I_2^1 \leq 50.361,67$$

$$-F_2^1 - I_2^1 - U_2^1 \leq -100.000,00$$

$$-1,16F_2^1 - 0,74I_2^1 - 1,12U_2^1 \leq -100.000,00$$

$$-1,16F_2^1 - 0,82I_2^1 - 1,20U_2^1 - \theta_2^1 \leq 0,00$$

$$F_2^1, I_2^1, U_2^1 \geq 0$$

cuja solução é: $[F_2^1 \ I_2^1 \ U_2^1] = [0,0 \ 0,0 \ 100.723,35]$, $\theta_2^1 = -120.883,30$,
 $(\pi_2^1)^T = [-1,20 \ 0,0 \ 0,0]$, $\sigma_2^1 = 1$.

$\langle 2 \rangle$. $[t = 2, k = 2]$ *DIR = BACK*. Tem-se o sub-problema $(2, 2)$:

$$\min .0 + \theta_2^2$$

sujeito a:

$$F_2^2 + I_2^2 + U_2^2 = 119.566,14$$

$$I_2^2 \leq 59.783,07$$

$$-F_2^2 - I_2^2 - U_2^2 \leq -100.000,00$$

$$-1,16F_2^2 - 1,28I_2^2 - 0,99U_2^2 - \theta_2^2 \leq 0$$

$$F_2^2, I_2^2, U_2^2 \geq 0$$

$$\theta_2^2 = 0$$

cuja solução é: $[F_2^2 \ I_2^2 \ U_2^2] = [59.783,07 \ 59.783,07 \ 0,00]$. $\theta_2^2 = -146.068,14$,
 $(\pi_2^2)^T = [-1,16 \ -0,12 \ 0,0]$, $\sigma_2^2 = 1$.

$$\langle 2 \rangle \quad E_1^1 = (0, 5) (\pi_2^1 T_2^1 + \pi_2^2 T_2^2) = (1, 41 \quad 1, 36 \quad 1, 10)$$

$$e_1^1 = (0, 5) (\pi_2^1 h_2^1 + \pi_2^2 h_2^2) + (0, 5) (\sigma_2^1 e_2^1 + \sigma_2^2 e_2^2) = 0, 00$$

Tendo em vista que $DIR = BACK$ e $t = 2$ este é um ponto de teste de parada do algoritmo. Calcula-se $\bar{\theta}_1 = e_1^1 - E_1^1 x_1 = -133.838, 83$. Como esta ainda é a primeira volta, ou seja o valor de θ_1 ainda é zero então necessariamente se adiciona uma restrição do tipo (2.20) ao sub-problema $(1, 1)$, então adiciona-se a restrição do tipo (2.20), seta-se $DIR = FORE$ e retorna-se ao *Passo 1*:

$\langle 3 \rangle . [t = 1, k = 1] \quad DIR = FORE$. Tem-se o sub-problema $(1, 1)$:

$$\min .0 + \theta_1$$

sujeito a:

$$F_1 + I_1 + U_1 = W_1 = 100.000, 00$$

$$I_1 \leq 50.000, 00$$

$$-1, 16F_1 - 0, 74I_1 - 0, 90U_1 \leq -100.000, 00$$

$$-1, 42F_1 - 1, 36I_1 - 1, 10U_1 - \theta_1 \leq 0, 00$$

$$F_1, I_1, U_1 \geq 0$$

cuja solução é: $[F_1 \ I_1 \ U_1] = [100.000,00 \ 0,0 \ 0,0]$. $\theta_1 = -140.686,69$,
 $(\pi_1)^T = [-1,41 \ 0,0]$, $\sigma_1 = 1$.

$\langle 3 \rangle . [t = 2, k = 1] \text{ } DIR = FORE$. Tem-se o sub-problema $(2, 1)$:

$$\min .0 + \theta_2^1$$

sujeito a:

$$F_2^1 + I_2^1 + U_2^1 = 116.183,42$$

$$I_2^1 \leq 58.091,71$$

$$-F_2^1 - I_2^1 - U_2^1 \leq -100.000,00$$

$$-1,16F_2^1 - 0,74I_2^1 - 1,12U_2^1 \leq -100.000,00$$

$$-1,16F_2^1 - 0,82I_2^1 - 1,20U_2^1 - \theta_2^1 \leq 0,00$$

$$F_2^1, I_2^1, U_2^1 \geq 0$$

cuja solução é: $[F_2^1 \ I_2^1 \ U_2^1] = [0,0 \ 0,0 \ 116.183,42]$, $\theta_2^1 = -139.437,74$,
 $(\pi_2^1)^T = [-1,20 \ 0,0 \ 0,0]$, $\sigma_2^1 = 1$.

$\langle 3 \rangle . [t = 2, k = 2] \text{ } DIR = FORE$. Tem-se o sub-problema $(2, 2)$:

$$\min .0 + \theta_2^2$$

sujeito a:

$$F_2^2 + I_2^2 + U_2^2 = 116.183,42$$

$$I_2^2 \leq 58.091,71$$

$$-F_2^2 - I_2^2 - U_2^2 \leq -100.000,00$$

$$-1,16F_2^2 - 1,28I_2^2 - 0,99U_2^2 - \theta_2^2 \leq 0$$

$$F_2^2, I_2^2, U_2^2 \geq 0$$

$$\theta_2^2 = 0$$

cuja solução é: $[F_2^2 \ I_2^2 \ U_2^2] = [58.091,71 \ 58.091,71 \ 0,00] \cdot \theta_2^2 = -141.935,64$,
 $(\pi_2^2)^T = [-1,16 \ -0,12 \ 0,0], \sigma_2^2 = 1$.

$\langle 3 \rangle \cdot [t = 3, k = 1] \text{ DIR} = \text{FORE}$. Tem-se o sub-problema $(3, 1)$:

$$\min . - F_3 - I_3 - U_3 + \theta_3^1$$

sujeito a:

$$F_3^1 + I_3^1 + U_3^1 = 129.693,01$$

$$I_3^1 \leq 64.846,50$$

$$-F_3^1 - I_3^1 - U_3^1 \leq -100.000,00$$

$$F_3^1, I_3^1, U_3^1 \geq 0$$

$$\theta_3^1 = 0$$

cuja solução é: $[F_3^1 \ I_3^1 \ U_3^1] = [39.408,09 \ 50.876,83 \ 39.408,09]$, solução dual representada pelo multiplicador simplex $(\pi_3^1)^T = [-1,00 \ 0,00 \ 0,00]$.

$\langle 3 \rangle. [t = 3, k = 2] \text{ DIR} = \text{FORE}$. Tem-se o sub-problema $(3, 2)$:

$$\min . - F_3 - I_3 - U_3 + \theta_3^2$$

sujeito a:

$$F_3^2 + I_3^2 + U_3^2 = 149.182,47$$

$$I_3^2 \leq 74.591,23$$

$$-F_3^2 - I_3^2 - U_3^2 \leq -100.000,00$$

$$F_3^2, I_3^2, U_3^2 \geq 0$$

$$\theta_3^2 = 0$$

cuja solução é: $[F_3^2 \ I_3^2 \ U_3^2] = [45.374,88 \ 58.432,71 \ 45.374,88]$, solução dual representada pelo multiplicador simplex $(\pi_3^2)^T = [-1,00 \ 0,00 \ 0,00]$.

$\langle 3 \rangle. [t = 3, k = 3] \text{ DIR} = \text{FORE}$. Tem-se o sub-problema $(3, 3)$:

$$\min . - F_3 - I_3 - U_3 + \theta_3^3$$

sujeito a:

$$F_3^3 + I_3^3 + U_3^3 = 110.528,34$$

$$I_3^3 \leq 55.264,17$$

$$-F_3^3 - I_3^3 - U_3^3 \leq -100.000,00$$

$$F_3^3, I_3^3, U_3^3 \geq 0$$

$$\theta_3^3 = 0$$

cuja solução é: $[F_3^3 \ I_3^3 \ U_3^3] = [33.541,81 \ 43.444,73 \ 33.541,81]$, solução dual representada pelo multiplicador simplex $(\pi_3^3)^T = [-1,00 \ 0,00 \ 0,00]$.

$\langle 3 \rangle, [t = 3, k = 4] \text{ DIR} = \text{FORE}$. Tem-se o sub-problema (3,4):

$$\min . - F_3 - I_3 - U_3 + \theta_3^4$$

sujeito a:

$$F_3^4 + I_3^4 + U_3^4 = 173.342,94$$

$$I_3^4 \leq 86.671,47$$

$$-F_3^4 - I_3^4 - U_3^4 \leq -100.000,00$$

$$F_3^4, I_3^4, U_3^4 \geq 0$$

$$\theta_3^4 = 0$$

cuja solução é: $[F_3^4 \quad I_3^4 \quad U_3^4] = [52.772, 82 \quad 67.797, 30 \quad 52.772, 82]$, solução dual representada pelo multiplicador simplex $(\pi_3^4)^T = [-1, 00 \quad 0, 00 \quad 0, 00]$.

Finalizando o *Passo 1* com, pois $t = 3$ e $k = 4$, fazer $DIR = BACK$ e seguir para o *Passo 2*:

Realizam-se os cortes de otimalidade, calculando e inserindo restrições do tipo (2.14) aos sub-problemas:

$$(4) \quad E_2^1 = \left(\frac{0,25}{0,5} \right) (\pi_3^1 T_3^1 + \pi_3^2 T_3^2) = (1, 16 \quad 0, 82 \quad 1, 20)$$

$$e_2^1 = \left(\frac{0,25}{0,5} \right) (\pi_3^1 h_3^1 + \pi_3^2 h_3^2) = 0, 00$$

$$E_2^2 = \left(\frac{0,25}{0,5} \right) (\pi_3^3 T_3^3 + \pi_3^4 T_3^4) = (1, 16 \quad 1, 28 \quad 0, 99)$$

$$e_2^2 = \left(\frac{0,25}{0,5} \right) (\pi_3^3 h_3^3 + \pi_3^4 h_3^4) = 0, 00$$

Tendo em vista que θ_{t-1}^j não é mais igual a zero. Testa-se a necessidade de se acrescentar restrições do tipo (2.20) no estágio $a(k_t)$ verificando se o valor de $\bar{\theta}_{t-1}^j = e_{t-1}^j - E_{t-1}^j x_{t-1}^{a(k_t)}$. Se este valor for maior que θ_{t-1}^j encontrado através da otimização no passo anterior, então adiciona-se mais uma restrição do tipo (2.20) ao nó $a(k_t)$.

$$|\bar{\theta}_2^1| = |\theta_2^1| = 139.437, 74$$

$$|\bar{\theta}_2^2| = |\theta_2^2| = 141.935,64$$

$\langle 4 \rangle. [t = 2, k = 1]$ *DIR = BACK*. Tem-se o sub-problema (2, 1):

$$\min .0 + \theta_2^1$$

sujeito a:

$$F_2^1 + I_2^1 + U_2^1 = 116.183,42$$

$$I_2^1 \leq 58.091,71$$

$$-F_2^1 - I_2^1 - U_2^1 \leq -100.000,00$$

$$-1,16F_2^1 - 0,74I_2^1 - 1,12U_2^1 \leq -100.000,00$$

$$-1,16F_2^1 - 0,82I_2^1 - 1,20U_2^1 - \theta_2^1 \leq 0,00$$

$$F_2^1, I_2^1, U_2^1 \geq 0$$

cuja solução é: $[F_2^1 \ I_2^1 \ U_2^1] = [0,0 \ 0,0 \ 116.183,42]$, $\theta_2^1 = -139.437,74$,
 $(\pi_2^1)^T = [-1,20 \ 0,0 \ 0,0]$, $(\sigma_2^1)^T = 1,00$

$\langle 4 \rangle. [t = 2, k = 2]$ *DIR = BACK*. Tem-se o sub-problema (2, 2):

$$\min .0 + \theta_2^2$$

sujeito a:

$$F_2^2 + I_2^2 + U_2^2 = 116.183,42$$

$$I_2^2 \leq 58.091,71$$

$$-F_2^2 - I_2^2 - U_2^2 \leq -100.000,00$$

$$-1,16F_2^2 - 1,28I_2^2 - 0,99U_2^2 - \theta_2^2 \leq 0$$

$$F_2^2, I_2^2, U_2^2 \geq 0$$

$$\theta_2^2 = 0$$

cuja solução é: $[F_2^2 \ I_2^2 \ U_2^2] = [58.091,71 \ 58.091,71 \ 0,00] \cdot \theta_2^2 = -141.935,64$,
 $(\pi_2^2)^T = [-1,16 \ -0,12 \ 0,0], \sigma_2^2 = 1$.

$$\langle 4 \rangle \quad E_1^1 = (0,5) (\pi_2^1 T_2^1 + \pi_2^2 T_2^2) = (1,41 \ 1,36 \ 1,10)$$

$$e_1^1 = (0,5) (\pi_2^1 h_2^1 + \pi_2^2 h_2^2) + (0,5) (\sigma_2^1 e_2^1 + \sigma_2^2 e_2^2) = 0,00$$

Tendo em vista que $DIR = BACK$ e $t = 2$ este é um ponto de teste de parada do algoritmo. Calcula-se $\bar{\theta}_1 = e_1^1 - E_1^1 = -140.686,69$. Tendo em vista que $\bar{\theta}_1 = \theta_1$, logo não é necessária a inserção de mais uma restrição do tipo (2.14) no estado $t = 1$. Logo, esta é uma decisão de parada da rotina, pois encontrou-se a solução ótima.

Bibliografia

- Arditti, F. D. e H. Levy (1975): "Portfolio Efficiency Analysis in Three Moments: The Multi-Period Case", *Journal of Finance*, 30, 797-809.
- Benders, J. F. (1962): "Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems", *Numerische Mathematik*, 4, 238-252.
- Birge, J. R. (1985): "Decomposition and Partitioning Methods for Multi-Stage Stochastic Linear Programming", *Operations Research*, 33, 989-1007.
- Birge, J. R. e Louveaux, F. (1997): "Introduction to Stochastic Programming", *Springer Series in Operations Research*, Springer-Verlag.
- Bronson, R. (1985): "Pesquisa Operacional", McGraw-Hill do Brasil.
- Bueno, M. A. S. (2002): "Modelos de Média-Variância de Período Simples e Multi-Períodos na Análise de Carteiras de Investimento", *Dissertação de Mestrado*, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- Chen, A. H. Y., F. C. Jen e S. Zions (1971): "The Optimal Portfolio Revision Policy", *Journal of Business*, 44, 52-61.
- Costa, O. L. V. e A. C. Paiva (2002): "Robust Portfolio Selection Using Linear-Matrix Inequalities", *Journal of Economic Dynamic & Control*, 26, 889-909.
- Cariño, D.R., Myers, D. H. e Ziemba, W. T. (1998): "Concepts, Technical Issues, and Uses of the Russell-Yassuda Kasai Financial Planning Model", *Operations Research*, 46, 450-462.
- Dumas, B. e Luciano E. (1991): "An Exact Solution to a Dynamic Portfolio Choice Problem under Transaction Costs", *Journal of Finance*, 46, 577-595.
- Elton, E. J. e M.J. Gruber (1974): "On the Optimality of some Multiperiod Portfolio Selection Criteria", *Journal of Business*, Junho 1974, 231-243.
- Elton, E. J. e M.J. Gruber (1974): "The Multi-Period Consumption Investment Problem and Single Period Analysis", *Oxford Economics Papers*, Set. 1974, 289-301.

- Elton, E. J., M.J.Gruber e M. W. Padberg (1976): "Simple Criteria for Optimal Potfolio Selection", *Journal of Finance*, 31, 1341-1357.
- Elton, E. J. e M.J.Gruber (1971): "Dinamic Programming Applications in Finance", *Journal of Finance*, 26, 473-506.
- Fama, E. F. (1970): "Multi-Period Consumption-Investment Decisions", *American Economic Review*, 60, 163-174.
- Geoffrin, A. M. (1970): "Elements of Large Scale Mathematical Programing", *Management Science*, 16, 652-691.
- Goldsmith, D. (1976): "Transactions Costs and the Theory of Portfolio Selection", *Journal of Finance*, XXXI, 1127-1139.
- Gressis, N., G. C. Philppatos e J. Hayya (1976): "Multi-Period Portfolio Analysis and the Inefficiency of the Market Portfolio", *Journal of Finance*, 31, 1115-1126.
- Hakansson, N.H. (1971): "Multi-period Mean-Variance Analysis: Toward a General Theory of Portfolio Choice", *Journal of Finance*, 26, 857-884.
- Hakansson, N.H. (1971): "On Optimal Myopic Portfolio Policies, With and Without Serial Correlation of Yields", *Journal of Business*, 44, 324-334.
- Lee, S. L. e A. J. Lerro (1973): "Optimizing the Selection for Mutual Funds" *Journal of Finance*, 28, 1087-1101.
- Li, D. e W. L. Ng (2000): "Optimal Dynamic Portfolio Selection: Multi-Period Mean-Variance Formulation", *Mathematical Finance*, 10, 387-406
- Markowitz, H. M. (1952): "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, 7, 77-91.
- Markowitz, H. M. (1959): "Portfolio Selection Efficient Diversification of Investment", Nova York: John Wiley & Sons.
- Markowitz, H. M. (1976): "Investment for the Long Run: New Evidence for an Old Rule", *Journal of Finance*, 31, 1273-1286.
- Markowitz, H. M. (1987): "Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets", Oxford, U.K.: Basil Blackwell.
- Markowitz, H. M. (1999): "The Early History of Portfolio Theory: 1600-1960", *Financial Analysts Journal*, 20, 5-16.

- Merton, R. (1969): "Lifetime portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous Time Case", *Review of Economics and Statistics*, 51, 247-257.
- Mossin, J. (1968): "Optimal Multi-Period Portfolio Policies", *Journal of Business*, 41, 215-229.
- Roy, A. D. (1952): "Safety First and Holding of Assets", *Econometrica*, 20, 431-449.
- Schneller, M. I. (1975): "Mean-Variance Portfolio Composition when Investors' Revision Horizon is Very Long", *Journal of Finance*, 30, 1293-1300.
- Silva, L. C. (2001): "Alocação Ótima de Ativos e Derivativos Em Fundos de Pensão Via Programação Estocástica", Tese de Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2001
- Zhao, Y. e W. T. Ziemba (2000): "A Dynamic Asset Allocation Model with Downside Risk Control", *Journal of Risk*, 3, 1-23.
- Zhao, Y. e W. T. Ziemba (2001): "A Stochastic Programming Model Using an Endogenously determined Worst Case Risk Measure for Dynamic Asset Allocation", *Mathematical Programming*, 89, 293-309.
- Slyke, V. e Wets, R. (1969): "L-Shaped Linear Programs With Applications to Optimal Control and Stochastic Programming", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 17, 638-663.