



AUTARQUIA ASSOCIADA À UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Análise de um amplificador klystron de múltiplas cavidades

ROBSON KELLER BUSQUIM E SILVA

Tese apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências na Área de Tecnologia Nuclear – Materiais.

**Orientador:
Dr. Cláudio Costa Motta**

**São Paulo
2010**



INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES

Autarquia associada à Universidade de São Paulo

ANÁLISE DE UM AMPLIFICADOR KLYSTRON DE MÚLTIPLAS CAVIDADES

ROBSON KELLER BUSQUIM E SILVA

Tese apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências na Área de Tecnologia Nuclear – Materiais.

Orientador:
Dr. Cláudio Costa Motta

São Paulo
2010

À Andréa, minha esposa, para quem uma tese é uma homenagem muito modesta para reconhecer a grandeza das suas virtudes de esposa e companheira nos momentos mais difíceis.

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho só foi possível com o auxílio de pessoas a quem expresso aqui os mais sinceros agradecimentos:

ao Dr. Cláudio Costa Motta, Capitão-de-Mar-e-Guerra (EN) da Marinha do Brasil, pela paciência, disposição e, especialmente, espírito científico para me orientar na produção de um trabalho de qualidade;

ao Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo, por suas instalações e oportunidade de desenvolvimento deste projeto;

aos integrantes da Coordenadoria de Estudos e Projetos Especiais, pela ajuda prestada durante a realização deste projeto;

aos oficiais do CTMSP, alguns pelas palavras de estímulo e outros pelas proveitosas discussões ao longo da realização deste trabalho;

ao Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, pelo apoio durante curso;

à minha esposa Andréa Hummel Santos Busquim, pelo estímulo e incansável compreensão;

aos meus pais, pelo apoio dado durante toda a minha vida;

à minha família, pela ajuda sempre presente; e

à todas as pessoas que, embora não estejam explicitamente apresentadas aqui, contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste projeto.

ANÁLISE DE UM AMPLIFICADOR KLYSTRON DE MÚLTIPLAS CAVIDADES

ROBSON KELLER BUSQUIM E SILVA

RESUMO

Neste trabalho investiga-se, inicialmente, o comportamento de um amplificador klystron de múltiplas cavidades segundo uma análise a pequenos sinais linear considerando o efeito de carga espacial para, na seqüência, apresentar uma análise do dispositivo utilizando um modelo não-linear a grandes sinais. Na primeira investigação apresenta-se, a partir da teoria dos modos normais, expressões que descrevem o balanço de potência complexo em uma cavidade excitada por um feixe de elétrons. Na seqüência, utiliza-se um modelo linearizado a pequenos sinais para desenvolver uma expressão para a densidade de corrente de convecção ao longo do tubo de deriva acoplado a múltiplas cavidades reentrantes, em função do campo elétrico produzido nos gaps de interação das cavidades. Estas expressões formam a base para a determinação do ganho de voltagem e de ganho de potência de um amplificador klystron de múltiplas cavidades, além da determinação de uma expressão para a largura de banda, sob a hipótese de cavidades idênticas e igualmente espaçadas. O código desenvolvido é validado utilizando-se os parâmetros de um amplificador klystron de 4 cavidades, com corrente d.c. de 525 mA, voltagem d.c. de 6 kV e frequência de 1,849 MHz, quando se obteve um ganho de 70 dB. Na análise a grandes sinais, o modelo matemático utiliza o formalismo lagrangiano para resolver a dinâmica das partículas, descritas conforme o modelo de discos com raio finito, em uma análise unidimensional, considerando os efeitos não-lineares devido aos campos de carga espacial. O código é validado usando os dados de um amplificador klystron comercial Varian. Dentre outros, os gráficos da velocidade e da densidade do feixe de elétrons, da corrente harmônica, do ganho por cavidade, da conversão AM/AM, da compressão de ganho e da energia do sistema são mostrados e discutidos. Além disso, apresentou-se também um método para a determinação da frequência de ressonância f_0 , para o fator de qualidade Q e para a razão (R/Q) em cavidades cilíndricas reentrantes, de relevância para o projeto de amplificadores klystron de múltiplas cavidades, utilizando a técnica do casamento de admitância do gap de interação entre a cavidade e o tubo de deriva. Um dos resultados mais significativos é o da corrente harmônica fundamental, que resultou 60% maior do que a corrente d.c. considerando um dispositivo com 4 cavidades.

ANALYSIS OF A KLYSTRON AMPLIFIER OF MULTIPLE CAVITIES

ROBSON KELLER BUSQUIM E SILVA

ABSTRACT

This work investigates, initially, a klystron amplifier with multiple cavities using a small signal analysis considering the space charge effects for, in sequence, provide an analysis of the device using a model for large signals. In the first investigation is presented, from the normal modes theory according to J. Slater, expressions that describe the complex balance of power in a cavity excited by an electron beam. Subsequently, it uses a linearized model for small signals to develop an expression for the convection current density along the drift tube coupled to multiple reentrant cavities, depending on the electric field produced in the interaction gaps of the cavities. These expressions form the basis for determining the voltage gain and power gain of an amplifier klystron to multiple cavities, and determination of an expression for the bandwidth, under the hypothesis of identical and equally spaced cavities. The developed code is validated using the parameters of a klystron amplifier, four cavities, with dc current 525 mA, dc voltage of 6 kV, and frequency of 1.849 GHz, when it obtained a gain of 70 dB. In the large signal analysis, the mathematical model uses the lagrangian formalism to solve the dynamics of particles, described as the model disk with finite radius in a one-dimensional analysis, considering the nonlinear effects due to space charge fields. The code is validated using data from a commercial Varian klystron amplifier of 1.848 GHz. Among others, the graphs of velocity and density of the electron beam, the harmonic current, the gain per cavity, the conversion AM/AM compression gain and energy of the system are shown and discussed. Moreover, it is presented a method for determining the resonant frequency f_0 , for the quality factor Q and the (R/Q) at reentrant cylindrical cavities, of relevance for the design of a klystron amplifier of multiple cavities, using the admittance matching technique in the gap of interaction between the cavity and drift tube. One of the more significant is the fundamental harmonic current, which resulted 60% higher than the dc current considering a device with four cavities.

SUMÁRIO

	Página
I. INTRODUÇÃO E OBJETIVO.....	1
1.1 Amplificador klystron – Definição, componentes e funcionamento.....	2
1.2 Revisão bibliográfica e originalidade do trabalho.....	5
1.3 Descrições Euleriana e Lagrangiana.....	8
1.4 Descrição do problema a ser resolvido e objetivo.....	11
II. ANÁLISE DO AMPLIFICADOR KLYSTRON DE MÚLTIPLAS CAVIDADES CONSIDERANDO O EFEITO DE CARGA ESPACIAL – ABORDAGEM A PEQUENOS SINAIS.....	16
2.1 Formulação de John Slater para o problema dos campos em uma cavidade ressonante.....	17
2.1.1 Formulação do problema.....	18
2.1.2 Oscilações livres em uma cavidade.....	21
2.1.3 Oscilações amortecidas em uma cavidade devido à condutividade finita das paredes	21
2.1.4 Efeito do acoplamento de uma cavidade a um guia de ondas.....	23
2.1.5 O efeito de um feixe de elétrons no interior da cavidade.....	27
2.1.6 Resumo da seção 2.1.....	29
2.2 Admitância eletrônica para “gaps” de interação em amplificadores klystrons com múltiplas cavidades – análise a pequenos sinais.....	29
2.2.1 Densidade de corrente de convecção de um feixe modulado em velocidade.....	30
2.2.2 Expressão para a densidade de corrente de convecção aplicada um amplificador klystron de múltiplas cavidades.....	35
2.2.3 A admitância eletrônica no n -ésimo gap de interação.....	37
2.2.4 Conclusão da seção 2.2.....	39
2.3 Cálculo do ganho de voltagem em amplificadores klystrons com múltiplas cavidades.....	39

2.3.1	Ganho de voltagem.....	39
2.3.2	Solução exata para o ganho de voltagem em um amplificador klystron de múltiplas cavidades com cavidades idênticas e igualmente espaçadas.....	42
2.3.3	Conclusão da seção 2.3.....	47
2.4	Ganho de potência e largura de banda em amplificadores klystrons com múltiplas cavidades.....	47
2.4.1	Ganho de potência.....	47
2.4.2	Largura de banda de um amplificador klystron de múltiplas cavidades com cavidades idênticas e igualmente espaçadas.....	51
2.4.3	Conclusão da seção 2.4.....	54
2.5	Conclusão do capítulo.....	54
III.	ANÁLISE A GRANDES SINAIS - MODELO UNIDIMENSIONAL.....	56
3.1	Descrições Euleriana e Lagrangiana.....	57
3.2	Representação (z_0, t)	60
3.2.1	Transformação de variáveis – Descrição euleriana para descrição lagrangiana.....	60
3.2.2	Relação de transformação.....	61
3.2.3	Equação da Continuidade.....	62
3.2.4	Equação do Momento linear.....	63
3.2.5	Sistema de Equações.....	63
3.3	Representação (z, t_0)	64
3.3.1	Transformação de variáveis – Descrição euleriana para descrição lagrangiana.....	64
3.3.2	Relação de transformação.....	65
3.3.3	Equação da Continuidade.....	66
3.3.4	Equação do Momento linear.....	67
3.3.5	Sistema de Equações.....	67
3.4	Dinâmica do sistema.....	68

3.5	Energia cinética e energia potencial.....	70
3.6	Simulação e resultados.....	71
3.6.1	Autodifusão.....	71
3.6.2	Modulação em velocidade	73
3.6.3	Corrente de convecção.....	76
3.6.4	Conversão AM/AM e compressão de ganho.....	82
3.6.5	Energia mecânica total.....	83
3.7	Conclusão do capítulo.....	84
IV.	METODOLOGIA PARA O PROJETO DE AMPLIFICADORES KLYSTRONS DE MÚLTIPLAS CAVIDADES – RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	86
4.1	Análise a pequenos sinais	86
4.2	Análise a grandes sinais	97
4.2.1	Força elétrica no gap de interação da cavidade.....	97
4.2.2	Sistema de equações.....	99
4.3	Largura de banda.....	107
4.4	Conclusão do capítulo.....	108
V.	CONCLUSÃO.....	110
	APÊNDICE A.....	113
	APÊNDICE B.....	122
	APÊNDICE C.....	159
	APÊNDICE D.....	169
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	182

LISTA DE FIGURAS

		Página
FIGURA 1.1	Componentes principais de um amplificador klystron.	3
FIGURA 1.2	Efeito do campo elétrico da cavidade cilíndrica reentrante sobre os elétrons do feixe.	4
FIGURA 2.1	Geometria generalizada de um amplificador klystron de N cavidades.	32
FIGURA 3.1	Fenômeno da ultrapassagem, onde para um valor de z , por exemplo, $z = 4,5 \text{ cm}$, em um determinado instante de tempo, existem 3 valores de velocidade.	58
FIGURA 3.2	Modelo de discos utilizado na descrição lagrangiana para representar o feixe de elétrons, rotulados pela posição z_0 correspondente ao instante $t = 0$.	60
FIGURA 3.3	Modelo de discos utilizado na descrição lagrangiana para representar o feixe de elétrons, rotulados pelo instante t_0 correspondente ao momento da passagem do disco pela cavidade de entrada.	64
FIGURA 3.4	Discos de cargas de raio a no interior de um tubo de deriva cilíndrico de raio b .	68
FIGURA 3.5	Espaço de fase (a) e densidade normalizada (b), mostrando o fenômeno da autodifusão dos elétrons nas extremidades do feixe para três instantes de tempo, desconsiderando a modulação em velocidade.	72
FIGURA 3.6	Trajetórias de alguns discos durante a simulação para investigar a dinâmica do feixe de elétrons sem modulação, onde é possível verificar o fenômeno da autodifusão dos discos nas extremidades do feixe.	73
FIGURA 3.7	Espaço de fase (a) e densidade dos discos normalizada (b), calculados no instante de tempo $t = 0.54 \text{ ns}$ e considerando um índice de modulação $\varepsilon_p = 0.2$.	75
FIGURA 3.8	Trajetórias de alguns discos, dentre os 81 discos que foram modulados, considerando o índice de modulação $\varepsilon_p = 0.25$. É possível observar a aproximação, o agrupamento e a ultrapassagem de discos.	75
FIGURA 3.9	Espaço de fase, considerando um índice de modulação $\varepsilon_p = 0.4$, mostrando a ultrapassagem de elétrons no instante de tempo $t = 1.4 \text{ ns}$.	76

FIGURA 3.10	Corrente do feixe de elétrons normalizada em função da posição z no instante de tempo $t = 1.4 \text{ ns}$, considerando um índice de modulação $\varepsilon_p = 0.4$.	77
FIGURA 3.11	Trajetórias de alguns discos, dentre os 81 discos que foram modulados, considerando o índice de modulação $\varepsilon_p = 0.25$, mostra-se como encontrar o valor do tempo de chegada do disco i , ou seja, $t_i = T(z, t_{0i})$, bem como o tempo de chegada $t_j = T(z, t_{0j})$ do disco j e $t_k = T(z, t_{0k})$ do disco k .	79
FIGURA 3.12	Evolução axial da corrente harmônica considerando quatro índices de modulação. Observa-se, no gráfico, que quanto maior o índice de modulação, maior é o máximo da corrente harmônica fundamental. Além disso, este valor máximo ocorre em posições mais próximas à cavidade de entrada.	80
FIGURA 3.13	Evolução axial da corrente harmônica considerando três cavidades. Considerou-se, para a cavidade de entrada, posicionada em $z = 0$, o índice de modulação $\varepsilon_p = 0,2$. Para a cavidade intermediária, posicionada em $z = 4,86 \text{ cm}$, considerou-se $\varepsilon_p = 0,1$. O nível máximo da corrente harmônica chegou a 0,36 da corrente dc do feixe e ocorreu em, aproximadamente, 6,34 cm. Uma cavidade de saída pode ser colocada nesta posição para extrair o sinal amplificado.	81
FIGURA 3.14	Evolução axial da corrente harmônica considerando quatro cavidades e três índices de modulação para a cavidade de entrada. As posições das cavidades intermediárias foram mantidas fixas: a primeira em 4,86 cm e a segunda em 7,44 cm. Para as três situações, ocorreu aumento da corrente harmônica fundamental.	82
FIGURA 3.15	Conversão AM/AM do modelo não-linear. A linha vertical representa -8 dB do nível de entrada e corresponde 3 dB de compressão de ganho.	83
FIGURA 3.16	Energia total do sistema (c), calculada através do somatório da energia cinética (a) e da energia potencial (b).	84
FIGURA 4.1	Comportamento da condutância e susceptância eletrônica em função do comprimento do gap de interação.	88
FIGURA 4.2	Efeito do Carregamento da cavidade devido ao feixe de elétrons. Observa-se que, ao considerar o efeito do carregamento do feixe, a amplitude diminui (devido à condutância g_n) e ocorre um deslocamento da frequência onde a amplitude é máxima, em relação à frequência f (devido à susceptância b_n).	91
FIGURA 4.3	Comportamento axial da trans-admitância.	92

FIGURA 4.4	Ganho de voltagem entre duas cavidades. Observa-se que, ao considerar o efeito do carregamento do feixe, a amplitude diminui (devido à condutância g_n) e ocorre um deslocamento da frequência onde a amplitude é máxima, em relação à frequência f (devido à susceptância b_n).	93
FIGURA 4.5	Ganho de voltagem de um amplificador klystron considerando de 2 a 4 cavidades. Observa-se que, ao considerar o efeito do carregamento do feixe, a amplitude diminui (devido à condutância g_n) e ocorre um deslocamento da frequência onde a amplitude é máxima, em relação à frequência f (devido à susceptância b_n).	94
FIGURA 4.6	Ganho de potência de um amplificador klystron considerando o perfil constante de campo elétrico axial (sem grade). Observa-se que, ao considerar o efeito do carregamento do feixe, a amplitude diminui (devido à condutância g_n) e ocorre um deslocamento da frequência onde a amplitude é máxima, em relação à frequência f (devido à susceptância b_n).	95
FIGURA 4.7	Comparação entre os ganhos de potência de um amplificador klystron considerando o perfil constante e o perfil hiperbólico de campo elétrico axial (sem grade).	96
FIGURA 4.8	Comparação entre os ganhos de potência de um amplificador klystron considerando o perfil constante e o perfil hiperbólico de campo elétrico axial (sem grade).	96
FIGURA 4.9	Distribuição do campo elétrico axial na coordenada do gap ($r=b$) e para alguns valores dentro do tubo de deriva. Observa-se que este campo é evanescente.	98
FIGURA 4.10	Distribuição da força elétrica $F_{cav}(a, z)$ considerando-se os parâmetros mostrados na TAB. 4.1. Observa-se que este campo é evanescente e que à medida que se aumenta o comprimento do gap, a força diminui.	99
FIGURA 4.11	Evolução axial da corrente harmônica considerando quatro valores de potência. Observa-se, no gráfico, que quanto maior é a potência de entrada, maior é a corrente harmônica fundamental.	102
FIGURA 4.12	Evolução da corrente harmônica do feixe de elétrons considerando a cavidade de entrada de um amplificador klystron em $z=0$, a segunda em $z=3,68$ e a terceira em $z=7,36$ cm. A cavidade de saída está posicionada em $z=11,04$ cm.	103

- FIGURA 4.13** Comparação entre a curva AM/AM para quatro situações distintas. A curva 1 é a curva experimental da klystron Varian 4K3SL, obtida da referência [29]. A curva 2 foi obtida utilizando o código AJDISK e as curvas 3 e 4 foram construídas utilizando o código a grandes sinais desenvolvido neste trabalho. A curva 4 foi obtida do código, mas utilizando um fator de correção para redução da amplitude do campo modulador. 105
- FIGURA 4.14** Comparação entre o ganho obtido para quatro situações distintas. A curva 1 é a curva experimental da klystron Varian 4K3SL, obtida da referência [29]. A curva 2 foi obtida utilizando o código AJDISK e as curvas 3 e 4 foram construídas utilizando o código a grandes sinais desenvolvido neste trabalho. A curva 4 foi obtida do código, mas utilizando um fator de correção para redução da amplitude do campo modulador. 106
- FIGURA 4.15** Variação da largura de banda. Observa-se que, à medida que se aumenta a largura de banda, o ganho diminui. 108

LISTA DE TABELAS

	Página
TABELA 1.1 Posição, tempo, velocidade e densidade na descrição euleriana (z,t) do fluido de elétrons e nas descrições lagrangiana (z_0,t) e (z,t_0) .	11
TABELA 1.2 Comparações entre o código desenvolvido por Aaron Jensen/Craig Wilsen [18] e a metodologia de cálculo desenvolvida neste trabalho.	14
TABELA 1.3 Comparações entre o código JPNDISK [31] e a metodologia de cálculo desenvolvida neste trabalho para a análise a grandes sinais.	14
TABELA 3.1 Posição, tempo, velocidade e densidade na descrição euleriana (z,t) do fluido de elétrons e nas descrições lagrangiana (z_0,t) e (z,t_0) .	59
TABELA 3.2 Quantidades utilizadas no código numérico.	71
TABELA 4.1 Parâmetros utilizados para análise do amplificador klystron Varian de 4 cavidades [29].	88
TABELA 4.2 Parâmetros determinados para a utilização nos cálculos do amplificador klystron.	89
TABELA 4.3 Parâmetros utilizados na construção dos gráficos.	89
TABELA 4.4 Condição de estabilidade (4.4) das cavidades utilizadas neste projeto e cujos parâmetros são mostrados na TAB. 4.3.	90
TABELA 4.5 Quantidades utilizadas no código numérico.	100
TABELA 4.6 Parâmetros utilizados na construção dos gráficos.	101
TABELA 4.7 Expressão da impedância e os fatores de qualidade a serem considerados em cada cavidade.	103
TABELA 4.8 Potências utilizadas na construção do gráfico da FIG. 4.13.	105
TABELA 4.9 Ganhos utilizados na construção do gráfico da FIG. 4.14..	106

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Raio do feixe de elétrons cilíndrico
$a_n(t)$	Variável dependente do tempo que multiplica $\hat{E}_n^S(\vec{r})$
$a_0(z')$	Coefficiente que multiplica a derivada de mais alta ordem de uma equação diferencial
\hat{a}_ρ	Versor na direção ρ
\hat{a}_z	Versor na direção z
\hat{a}_φ	Versor na direção φ
A_n	Amplitude de RF do n -ésimo gap
A	Coefficiente arbitrário
A	Área da seção transversal do feixe de elétrons
A_1, A_2	Coefficientes
A_k	Amplitude do campo elétrico do k -ésimo gap de interação
\vec{A}	Vetor arbitrário
AM	Modulação em amplitude (do inglês “Amplitude Modulation”)
b	Raio do tubo de deriva circular
b	Susceptância
$b_n(t)$	Variável dependente do tempo que multiplica $\vec{E}_n^{IR}(\vec{r})$
$b_{q,q}$	Susceptância associada à $\bar{y}_{q,q}$.
B	Coefficiente arbitrário
B	Intensidade da indução magnética
\vec{B}	Vetor indução magnética focalizador do feixe de elétrons
B_1, B_2	Coefficientes
B_z	Intensidade da indução magnética na direção z

B_ρ	Intensidade da indução magnética na direção ρ
c	Velocidade da luz
$c_n(t)$	Variável dependente do tempo que multiplica $\hat{H}_n^S(\vec{r})$
C	Constante arbitrária
C	Capacitor
d	Disco
d_n	Tamanho do n -ésimo gap de interação.
d_k	Comprimento físico do k -ésimo gap de interação
$d_{k,n}$	Distância entre centros do k -ésimo e o n -ésimo gaps de interação
dB	Decibéis
dz_0	Distância axial inicial entre os discos
D	Constante arbitrária
Det	Determinante
e	Número de Euler
$\vec{E}(\vec{r}, t)$	Vetor campo elétrico
$\{\hat{E}_n^S(\vec{r})\}$	Conjunto de funções solenoidais representativo do campo elétrico
$\{\vec{E}_n^{IR}(\vec{r})\}$	Conjunto de funções irrotacionais representativo do campo magnético
$\{\vec{E}_{\perp m}(\vec{r})\}$	Representante dos m modos transversais de propagação do campo elétrico em um guia
E_ρ	Componente do campo elétrico na direção ρ
E_z	Componente do campo elétrico na direção z
$E_g(z)$	Campo elétrico do j -ésimo gap de interação em V/m
$E_{sc}(z)$	Campo elétrico de carga espacial em V/m
E	Índice que indica formalismo euleriano
f^E	Função genérica no formalismo euleriano

f^L	Função genérica no formalismo lagrangiano
f_{mn}	Autofunção para o problema de valor de contorno
f_0	Frequência do sinal modulador
$f(z, t)$	Função genérica que representa $\rho(z, t)$, $u(z, t)$ ou $J(z, t)$.
$f(r, z, t)$	Função genérica nas variáveis r , z e t
$f_k(z)$	Função que descreve a distribuição espacial do campo elétrico no gap
$f(m)$	Função genérica na variável m
$f(r)$	Função genérica na variável r
F	Intensidade da força
F_e	Força elétrica
F_R	Força resultante sobre a partícula
F_z	Força do fluido por unidade de volume
F_z^E	Força elétrica com a indicação da natureza euleriana da força
F_{zi}	Força elétrica total sobre o i -ésimo disco
F_{ij}	Força elétrica entre o par de discos i e j
F_{zij}	Força elétrica axial entre o par de discos i e j
$F_{\rho ij}$	Força elétrica radial entre o par de discos i e j
g	Condutância
$g_{q,q}$	Condutância associada à $\bar{y}_{q,q}$.
$g(z)$	Função que representa o termo fonte da equação diferencial.
G_0	Condutância do feixe não modulado, I_0/V_0 , em Ω^{-1} .
g_e	Condutância eletrônica do m -ésimo gap
$g_{m,m}$	Condutância eletrônica do m -ésimo gap
g_{mn}	Projeção da função de Green em uma particular autofunção f_{mn}

$gr(z, z')$	Função de Green reduzida
G	Função de Green
G_0	Condutância do feixe de elétrons
$G_{0,1}$	Condutância do feixe de elétrons
$G(\vec{r}, \vec{r}')$	Núcleo resolvente da função de Green
$G(z, z')$	Núcleo resolvente da função de Green
$\vec{H}(\vec{r}, t)$	Vetor campo magnético
$\{\hat{H}_n^s(\vec{r})\}$	Conjunto de funções solenoidais representativo do campo magnético
$\{\vec{H}_{\perp m}(\vec{r})\}$	Representante dos m modos transversais de propagação do campo magnético em um guia
i	Indicação do disco i
i	Corrente de convecção
$i(z)$	Corrente de convecção do feixe na posição z , em ampères
i_m	Corrente associada aos vários modos do guia
i^L	Corrente de convecção lagrangiana
I_0	Corrente de convecção do feixe não modulado, em ampères
I_1	Corrente fundamental do feixe de elétrons
I^E	Corrente do feixe de elétrons no formalismo euleriano
I^L	Corrente do feixe de elétrons no formalismo lagrangiano
$I_n(z)$	Amplitude da n -ésima harmônica da corrente
Im	Parte imaginária do número complexo
I_{cn}^E	Coefficiente de Fourier da n -ésima harmônica da corrente que multiplica o cosseno
I_{sn}^E	Coefficiente de Fourier da n -ésima harmônica da corrente que multiplica o seno
I_0	Corrente d.c. do feixe de elétrons

$I_{0,j}$	Corrente d.c. do disco j
j	$\sqrt{-1}$ (unidade imaginária)
j	Indicação do disco j
J	Jacobiano da transformação
$J_{ac}(z)$	Densidade de corrente a.c.
$J_1(z)$	Densidade de corrente a.c.
J_m	Função de Bessel ordinária de primeiro tipo e ordem m
J_0	Função de Bessel ordinária de primeiro tipo com ordem $m = 0$
J_0	Densidade de corrente d.c.
J_1	Função de Bessel ordinária de primeiro tipo com ordem $m = 1$
$\vec{J}(\vec{r}, t)$	Vetor densidade de corrente
$\vec{J}(z, t)$	Densidade de corrente a.c. unidimensional do feixe de elétrons
$l_{k-1,k}$	Espaçamento dois gaps de interação consecutivos
L	Comprimento axial do feixe de elétrons.
L	Índice que indica formalismo euleriano.
L	Indutor
L	Operador
k, k'	Constantes
k_n	Constante
m	Número inteiro que representa a ordem da função de Bessel
m	Massa
m_0	Massa do fluido
m_d	Massa do disco
m_{dj}	Massa do disco j

m_e	Massa em repouso do elétron
m_p	Massa da partícula
M_n^-	Coefficiente de acoplamento da onda de carga espacial lenta no n -ésimo gap.
M_n^+	Coefficiente de acoplamento da onda de carga espacial rápida no n -ésimo gap.
n	Indicativo dos termos do somatório
n	Harmônica do sinal decomposto em série de Fourier
\hat{n}	Versor normal a uma superfície
N	Número de cavidade
N	Parâmetro de ganho interno
N_d	Número de discos
N_{dm}	Número de discos modulados
N_k	Razão entre a admitância total normalizada do k -ésimo gap $\bar{y}_{k,k}$ e a admitância normalizada do circuito para a situação onde $\Delta\omega_k = 0$
$N_{k,res}$	Valor de N_k na ressonância
$P_{e,n}$	Potência complexa associada ao n -ésimo modo
P_{erv}	Perveância
P_L	Potência dissipada na carga
P_n	Potência dissipada nas paredes da cavidade complexa associada ao n -ésimo modo
P_i	Potência do sinal de excitação da cavidade
P_t	Potência transmitida para a cavidade pelo guia 1
q	Carga elétrica
q_i	Carga elétrica do anel i
q_j	Carga elétrica do anel j
Q	Fator de qualidade do circuito

$Q_{e,n}$	Fator de qualidade eletrônico do n -ésimo modo
$Q_{ext,n}$	Fator de qualidade externo que representa, fisicamente, uma medida do grau de acoplamento do n -ésimo modo da cavidade com o guia de ondas de saída
$Q'_{ext,n}$	Fator de qualidade externo do guia de onda passivamente terminado
$Q_{L,n}$	Fator de qualidade carregado Q_L (excluindo-se o “beam loading”) da n -ésima cavidade.
Q_n	Fator de qualidade carregado Q_L descarregado da n -ésima cavidade.
\vec{r}	Vetor posição
$\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}'''$	Vetores posição
\vec{r}_i	Vetor posição do disco i
\vec{r}_j	Vetor posição do disco j
R	Resistor
R	Fator de redução de frequência de plasma
Re	Parte real de um número complexo
RF	Radiofrequência
RLC	Conjunto Resistor/Indutor/Capacitor
$R_{sh,n}$	Impedância shunt da cavidade n
$R(\rho)$	Parte da solução que é função de ρ , no método de separação de variáveis
S	Superfície com condições de contorno do tipo curto-circuito, ou seja, onde $\vec{E}_n^s(\vec{r})$ não possui componente tangencial.
S'	Superfície com condições de contorno do tipo circuito aberto, ou seja, onde $\vec{H}_n^s(\vec{r})$ não possui componente tangencial.
t	Tempo
t_0	Instante inicial
t_{0i}	Instante inicial do disco i
t_{0j}	Instante inicial do disco j
T	Função que define como varia a variável temporal t no formalismo lagrangiano
T	Energia cinética

u	Razão entre $\frac{g_e}{y}$
\vec{u}	Vetor velocidade
$u(z, t)$	Velocidade a.c. unidimensional do feixe de elétrons
u_1	Velocidade a.c. unidimensional do feixe de elétrons
\vec{u}_j	Vetor velocidade do disco j
u	Componente da velocidade na direção z
u^L	Velocidade lagrangiana
u_j	Velocidade do disco j
u_j^L	Velocidade do disco j no formalismo lagrangiano
u_o	Velocidade do feixe não modulado
u_{oj}	Velocidade inicial do disco j
u_i	Velocidade do disco i
U	Energia potencial eletrostática
v	Expressão $(1-u)\cos\theta_q - j\frac{w}{2}\frac{\text{sen}\theta_q}{\theta_q}$
\vec{v}	Vetor velocidade
\vec{v}_\perp	Componente da velocidade do anel perpendicular à direção axial
v_ρ	Componente da velocidade na direção ρ
v_φ	Componente da velocidade na direção φ
v_z	Componente da velocidade na direção z
v_{nm}	Coefficiente de voltagem associado ao n -ésimo modo da guia e ao m -ésimo modo da cavidade
V	Volume
V	Amplitude da voltagem
V_0	Potencial elétrico do feixe, em volts

V_{0k}	Voltagem associada do k -ésimo gap de interação
V_g	Voltagem associada aos gaps de interação
V_m	Voltagem associada ao m -ésimo modo do guia
V_n	Voltagem no gap de interação
V_1	Voltagem associada ao modo 1 do guia
V_2	Voltagem no plano S' do guia 2
x_{mn}	n -ésimo zero da função de Bessel ordinária de primeiro tipo e ordem m
x_{0n}	n -ésimo zero da função de Bessel ordinária de primeiro tipo e com ordem $m = 0$
z	Distância axial, em metros
z	Coordenada axial
z', z'', z'''	Coordenadas axiais (coordenadas cilíndricas)
z_0	Coordenada na direção z no instante inicial
z_{0i}	Coordenada na direção z do disco i no instante inicial
z_{0j}	Coordenada na direção z do disco j no instante inicial
z_{RF}	Posição axial z da cavidade de entrada de RF
z_i	Coordenada z do disco i
z_j	Coordenada z do disco j
$z_>$	Maior entre dois valores de z
$z_<$	Menor entre dois valores de z
Z	Função que define como varia a coordenada espacial z no formalismo lagrangiano
Z_{om}	Impedância característica do guia no m -ésimo modo propagando-se com a frequência angular ω_n
Z_{11}	$\frac{V_1}{i_1}$
Z_{n1}	Somatório de todas as impedâncias, exceto aquela associada à frequência próxima a frequência angular de um dos modos normais da cavidade
Z_1	Impedância de entrada da cavidade vista pelo guia 1

Z_2	Carga do guia 2
$Z(z)$	Parte da solução que é função de z , no método de separação de variáveis
y_1	Admitância de entrada da cavidade normalizada, olhando-se para o guia 1
y_n	Admitância do n -ésimo gap.
$y_{k,n}$	Transadmitância eletrônica normalizada.
$y_{n,n}$	Admitância eletrônica normalizada.
$Y_{e,n}$	Admitância eletrônica total, Ω^{-1} .
$\bar{y}_{q,q}$	Soma da admitância eletrônica $y_{q,q}$ e a admitância do circuito da cavidade normalizada.
w	$\frac{\bar{M}^2 \theta}{2\bar{y}}$
W_e	Energia elétrica média armazenada
$W_{e,n}$	Energia elétrica média armazenada no n -ésimo modo
Y_2	Admitância eletrônica do guia 2
α_1, α_2	Raízes da equação de diferença
β	Razão entre a velocidade u_0 e a velocidade da luz c
β_e	Constante de propagação de uma onda plana fictícia que se propaga ao longo do eixo de um amplificador klystron com velocidade de fase igual à velocidade d.c. do feixe de elétrons (m^{-1}).
β_q	Constante de propagação associada à frequência de plasma reduzida, em m^{-1} .
β_p	Constante de propagação associada à frequência de plasma, em m^{-1} .
β^-	Constante de propagação da onda de carga espacial lenta $\beta^- = \beta_e + \beta_q$, em m^{-1} .
β^+	Constante de propagação da onda de carga espacial rápida $\beta^+ = \beta_e - \beta_q$, em m^{-1} .
β_0^2	$\beta_q^2 - \beta_e^2$
γ	$j\beta_e$
δ	Profundidade do campo decorrente do efeito pelicular

$\delta_{n,m}$	Delta de Kronecker
δ	Delta de Dirac
δ_k^+	Fase do coeficiente de acoplamento para a onda lenta
δ_k^-	Fase do coeficiente de acoplamento para a onda rápida
$\Delta g(\beta)$	Operador diferença de Wessel-Berg
Δt	Passo de tempo
ε	Número Infinitesimal
ε_0	Permissividade elétrica do espaço livre
ε_p	Índice de modulação
η_m	Ganho de voltagem complexo
$\theta_{k,m}$	Ângulo de trânsito para elétrons entre os gaps k e m .
θ	Ângulo de trânsito para elétrons entre os gaps consecutivos
θ_q	Ângulo de trânsito de plasma reduzido.
$\theta_{k,n}^-$	Ângulo de trânsito associado ao produto $\beta^- d_{k,n}$
$\theta_{k,n}^+$	Ângulo de trânsito associado ao produto $\beta^+ d_{k,n}$
$\theta^-(\xi)$	Ângulo de trânsito associado ao produto $\beta^- \xi$
$\theta^+(\xi)$	Ângulo de trânsito dado pelo produto $\beta^+ \xi$
λ	Número real
μ_0	Permeabilidade magnética do espaço livre
ξ	Distância axial, em m .
ξ'	Variável
η_q	Ganho complexo da voltagem entre a primeira e a q-ésima cavidades.
π	Número pi
ρ	Coordenada radial (coordenadas cilíndricas)

ρ_j	Coordenada radial do anel j (coordenadas cilíndricas)
ρ', ρ'', ρ'''	Coordenadas radiais (coordenadas cilíndricas)
$\rho(\vec{r}, t)$	Densidade volumétrica de carga a.c
$\rho(z, t)$	Densidade volumétrica de carga a.c. unidimensional
$\rho_v(z, t)$	Densidade volumétrica de carga a.c. unidimensional
ρ_1	Densidade volumétrica de carga a.c. unidimensional
ρ_v	Densidade volumétrica de carga
ρ_v^L	Densidade volumétrica de carga na representação lagrangiana
ρ_{v0}	Densidade volumétrica de carga inicial (dc)
ρ_{v0}^L	Densidade volumétrica de carga inicial (dc) na representação lagrangiana
ρ_0	Densidade volumétrica de carga d.c.
σ	Condutividade elétrica das paredes da cavidade
φ_k	fase do campo elétrico do o k -ésimo gap de interação
φ	Coordenada azimutal (coordenadas cilíndricas)
$\varphi', \varphi'', \varphi'''$	Coordenadas azimutais (coordenadas cilíndricas)
Φ	Potencial eletrostático
$\Theta(\varphi)$	Parte da solução que é função de φ , no método de separação de variáveis
Ψ, Ψ_n	Funções escalares
ω	Frequência angular da onda de RF, em s^{-1} .
ω_n	Frequência angular do modo de ressonância da cavidade
ω_0	Frequência angular do sinal modulador
$\omega_{0,n}$	Frequência de ressonância da n-ésima cavidade, em s^{-1} .
ω'_n	Frequência de ressonância modificada por um termo de correção para incluir o efeito das perdas nas paredes cavidade
Ψ_n	Função escalar

Ω	Domínio
∇	Operador nabla
∞	Infinito

Capítulo I

INTRODUÇÃO E OBJETIVO

O amplificador klystron é um dispositivo eletrônico cuja finalidade é amplificar sinais eletromagnéticos em frequências na faixa de microondas em regime de alta potência. O seu desenvolvimento resultou do trabalho de vários pesquisadores, sendo que o primeiro foi D.A. Rozhansky, professor de Física no Instituto Politécnico de Leningrado, com seus estudos sobre modulação em velocidade, em 1932. Seguiu-se a ele o casal Oscar e Agnessa Heil, que publicou um clássico artigo sobre modulação em velocidade e agrupamento de elétrons, em 1935. Os russos consideram Rozhansky, juntamente com o casal Heil, os criadores do processo de modulação em velocidade. Ao mesmo tempo, W.W. Hansen, professor de Física na Universidade Stanford, desenvolveu a cavidade de microondas conhecida por “rumbatron”. A teoria associada àquele dispositivo foi essencial para que os irmãos Russell e Sigurd Varian, que trabalharam durante algum tempo no Departamento de Física da Universidade Stanford com o professor Hansen e, aparentemente sem conhecer o trabalho do casal Heil, criassem o amplificador klystron a partir dos estudos quantitativos sobre modulação em velocidade, em 1939.

A partir da Segunda Guerra Mundial, quando o radar começou a ser desenvolvido e se tornou equipamento de suma importância na área de defesa, iniciou-se uma corrida tecnológica da qual faz parte o desenvolvimento de dispositivos de amplificação de sinais na faixa de microondas. Juntamente com outros dispositivos de feixe eletrônicos, como as magnetrons e válvulas TWT (“Traveling Wave Tube”), os amplificadores klystron foram motivo de intensos estudos.

Atualmente, estes estudos ainda prosseguem em caráter de aprimoramento da eficiência do dispositivo e os amplificadores klystron são empregados em aplicações que demandam alta potência, mas requerem largura de banda limitada. Os empregos mais comuns são em aceleradores lineares, onde a klystron pode fornecer potência de pico elevada e alta eficiência (maior que 50 %) desejada na operação dos aceleradores. Outras aplicações são: aceleradores médicos, rádio-astronomia e comunicações por satélite. Eles também são usados em sistemas de radar, tanto para aplicações militares (sistema balístico de mísseis) e civis (serviço meteorológico).

Com relação à Marinha do Brasil (MB), a partir de meados de 1998 iniciou-se um projeto de pesquisa, nas instalações do Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo

(CTMSP), visando à obtenção do domínio da tecnologia para a construção de dispositivos ativos de microondas a feixe de elétrons, do tipo válvulas a ondas progressivas (TWT), para a operação na banda-x com potência média de saída superior a 320W. Tal desenvolvimento foi motivado quando a Marinha do Brasil adquiriu em 1997 quatro fragatas de origem inglesa, criando uma nova classe de fragatas denominada classe Greenhalgh. Essas fragatas são navios modernos e possuem elaborados sistemas radar que utilizam amplificadores de microondas com potência bastante elevada. Esses radares empregam, entre outros dispositivos para amplificação de microondas, a TWT. Como este dispositivo tem um tempo de utilização finito, surgiu o problema de reposição de peças. Devido ao elevadíssimo custo para a reposição deste componente e a demora para a entrega (em geral estes componentes são fabricados por encomenda no exterior) decidiu-se então iniciar um desenvolvimento no país visando à obtenção do completo domínio desta tecnologia. Com o tempo, o objetivo passou a englobar também o domínio da tecnologia de amplificadores klystron de múltiplas cavidades, não somente por se tratar de um modelo que encontra aplicação nos radares de potência da MB, mas também em aceleradores de partículas utilizando-se microondas.

Os amplificadores klystron são dispositivos capazes de fornecer potência média de microondas de dezenas a centenas de kilowatts. O custo de um amplificador klystron comercial varia de 50.000 a 250.000 dolares americanos, dependendo de suas características. Sua construção exige uma tecnologia elaborada e poucos países possuem tal capacidade. A eficiência de conversão de um amplificador klystron está entre 50% a 60%, sendo algumas vezes maior. Tem-se registro que o amplificador klystron com maior eficiência já construído atingiu 74% de conversão de potência. Desta forma, em vista de seu elevado custo e complexidade tecnológica, o desenvolvimento de um programa computacional capaz de analisar um amplificador klystron com boa exatidão é uma ferramenta muito importante.

1.1 Amplificador klystron – Definição, componentes e funcionamento

O amplificador klystron é, essencialmente, um dispositivo para converter uma forma de energia elétrica em outra forma. Em particular, geralmente deseja-se converter energia d.c. ou energia d.c. pulsada em energia a.c. em frequências na faixa de microondas. A amplificação, neste tipo de dispositivo, baseia-se no fenômeno da interação do feixe eletrônico de alta potência com um campo eletromagnético gerado por um circuito de microondas, acoplado adequadamente ao feixe.

Após a geração e fornecimento de energia cinética ao feixe eletrônico (energia d.c.) no conjunto catodo-anodo, o feixe percorre um tubo, denominado tubo ou região de deriva (esta denominação deve-se à ausência de campo elétrico externo) até atingir, na extremidade oposta, um coletor.

Para que se obtenha a interação de maneira conveniente do feixe eletrônico com o campo eletromagnético, utilizam-se, em geral, cavidades ressonantes. Especificamente, utilizam-se cavidades cilíndricas reentrantes, de forma que no centro das cavidades exista um pequeno orifício circular cujo diâmetro coincida com o diâmetro do tubo de deriva para permitir a travessia do feixe de elétrons.

A FIG. 1.1 mostra um esquema do amplificador klystron, de três cavidades, onde é possível visualizar seus componentes mais importantes: um canhão de elétrons para a geração do feixe de elétrons; um tubo de deriva com cavidades ressonantes onde o feixe de elétrons propaga-se interagindo com os campos das cavidades e sob a ação das forças de repulsão eletrostáticas dos elétrons do próprio feixe (forças de carga espacial); e um coletor, para dissipar a energia do feixe não convertida em microondas, na forma de calor.

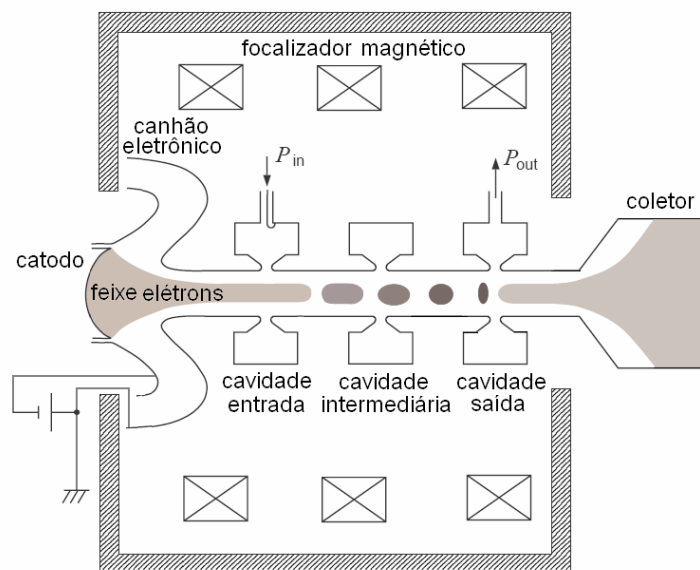


FIGURA 1.1 - Componentes principais de um amplificador klystron.

Embora na região de deriva o feixe eletrônico não sofra a ação de campos elétricos externos, ele está sujeito à ação das forças de repulsão eletrostáticas dos elétrons do próprio feixe. Estas forças de repulsão são denominadas forças de carga espacial e terão como consequência a dispersão radial do feixe. Via de regra, utiliza-se um campo magnético externo de maneira a contrabalançar esta força de repulsão devido à carga espacial. Com base no efeito da interação das ondas de carga espacial com o campo eletromagnético

adequadamente construído e conforme descrito a seguir, é que se pode explicar o funcionamento da amplificação de microondas nas klystrons.

A cavidade cilíndrica reentrante é projetada de maneira que o modo fundamental de oscilação apresente uma componente de campo elétrico paralelo à direção de propagação do feixe. Desta forma, o campo elétrico presente na cavidade, bombeado externamente por uma entrada coaxial, realizará trabalho sobre os elétrons do feixe. Isto terá os seguintes efeitos: os elétrons que encontram, ao entrarem na região de interação (denominado gap de interação), o campo elétrico no sentido ante paralelo à direção do feixe, serão acelerados e sairão da região com um acréscimo de velocidade; os elétrons que encontram, ao entrarem na região de interação, o campo no sentido paralelo, serão desacelerados e sairão da cavidade com um decréscimo de velocidade. Portanto, o feixe de elétrons, após sair da cavidade, será dividido em dois grupos de elétrons: os rápidos e os lentos. A FIG. 1.2 ilustra uma cavidade cilíndrica reentrante e o efeito do campo elétrico sobre o feixe eletrônico. Esse processo é chamado de modulação em velocidade.

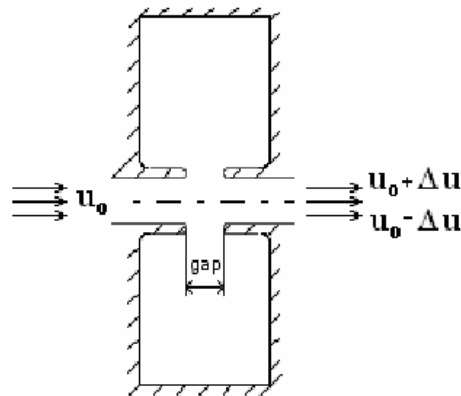


FIGURA 1.2 - Efeito do campo elétrico da cavidade cilíndrica reentrante sobre os elétrons do feixe.

Dois efeitos fundamentais para o funcionamento da klystron ocorrem devido ao processo da modulação em velocidade. Primeiramente, o feixe ao sair da cavidade terá sua velocidade modulada em função da frequência de oscilação do campo eletromagnético sustentado pela cavidade. O segundo efeito é a excitação das ondas de carga espacial que, tendo em vista que são ondas mecânicas longitudinais, elas se propagam associadas a movimentos de compressão e rarefação da densidade de elétrons. Na realidade, após o feixe sair da cavidade, em posições ao longo do tubo de deriva e em direção ao coletor, haverá regiões onde ocorrerá o agrupamento de elétrons. Este agrupamento é normalmente conhecido como “electron bunch”. Por outro lado, sabe-se que a intensidade do campo elétrico é

proporcional à densidade de carga espacial e, desta forma, haverá um aumento da intensidade do campo elétrico na região onde ocorre o bunch, em relação à situação do feixe não modulado. A posição do agrupamento de elétrons pode ser determinada com muita precisão se os parâmetros do feixe forem bem conhecidos. Colocando-se uma segunda cavidade cilíndrica reentrante na posição onde ocorrer o agrupamento, o campo elétrico decorrente do agrupamento induzirá correntes elétricas na superfície da cavidade, excitando os modos de oscilação da mesma (em uma linguagem de Engenharia de Microondas, a cavidade será acesa pelo “bunch”), podendo ser, então, a energia cinética a.c. do feixe modulado em velocidade extraída pela segunda cavidade. Portanto, este arranjo básico de um circuito a duas cavidades pode ser considerado o protótipo do amplificador klystron.

Na realidade, amplificadores klystron de potência empregam várias cavidades e, até mesmo, feixes múltiplos para aumentar a eficiência da conversão da energia cinética d.c. do feixe em energia eletromagnética na região de microondas, uma vez que o ganho aumenta aproximadamente 13 dB por cavidade usada. Na klystron de diversas cavidades, a primeira delas é usada para fornecer a modulação inicial em velocidade do feixe. A última cavidade na cadeia é usada como cavidade de saída e as cavidades intermediárias são usadas para aumentar a modulação e, com isso, a corrente a.c. no feixe.

1.2 Revisão bibliográfica e originalidade do trabalho

O entendimento do processo de modulação em velocidade é essencial no desenvolvimento deste trabalho, até mesmo porque ele está intrinsecamente relacionado com o desenvolvimento do amplificador klystron pelos irmãos R. H. e S. F. Varian [1], em 1939. O processo de modulação em velocidade foi desenvolvido em analogia ao conceito do movimento e ultrapassagem de carros em diferentes velocidades em uma auto-estrada.

Nordsieck (1953) [2] foi o primeiro a usar o formalismo lagrangiano para modelar feixe de elétrons. Em seu trabalho, ele desconsiderou os efeitos de carga espacial. Segundo Wöhlbier (2003) [3], muitos autores utilizaram o trabalho de Nordsieck para desenvolver modelos lagrangianos mais elaborados. Neste trabalho é utilizado o formalismo lagrangiano para o tratamento das não-linearidades do modelo considerando, diferente do trabalho de Nordsieck, os efeitos de carga espacial.

O modelamento de amplificadores klystrons envolve equações não-lineares, uma vez que envolve as equações da continuidade e do momentum, não-lineares por natureza. Portanto, trata-se de um problema que exige uma solução mais elaborada. Mas é possível

realizar uma análise utilizando um modelo linearizado de pequenos sinais [4][5]. Embora tal modelo seja muito limitado para descrever adequadamente o comportamento de um amplificador klystron de potência, ele é de alguma utilidade pois descreve a existência das ondas de carga espacial. Esta análise a pequenos sinais é suficiente para descrever o princípio de funcionamento de um amplificador klystron, mas não é o objetivo deste trabalho, cujo enfoque é a análise a grandes sinais ou não-linear [6]. Dois trabalhos recentes que utilizam este tipo de análise são comentados para mostrar alguns dos estudos atuais que estão sendo realizados e onde este trabalho está inserido.

Y.Y. Lau et al. (2000) [7] apresenta uma teoria geral sobre intermodulação em um amplificador klystron. Ele considera um movimento unidimensional (1D) descrevendo as forças de carga espacial a partir do instante em que ocorre a modulação em velocidade. A teoria apresentada reproduz os resultados de um amplificador klystron quando uma única frequência é utilizada como sinal modulador, sendo esta uma das hipóteses também utilizadas no presente trabalho. As outras hipóteses de ambos os trabalhos são: movimento unidimensional dos elétrons; movimento não-relativístico dos elétrons; feixe de elétrons frio (“cold”); e inexistência de movimento reverso (sentido contrário) dos elétrons. Outras duas hipóteses adicionais foram consideradas por Lau et al. (2000). Uma refere-se ao fator de redução de frequência de plasma que, por hipótese, é conhecido. Isso significa que aquele autor e seus colaboradores adotaram um modelo de plano de elétrons. Neste tipo de modelo, o campo elétrico depende do fator de redução de frequência de plasma. A frequência de plasma é calculada para uma situação com condições de contorno muitas vezes diferentes das situações práticas, onde o feixe pode ter seções retas finitas e estar dentro de uma estrutura fechada (metálica e cilíndrica, por exemplo) e, portanto, em uma configuração diferente da apresentada para o cálculo da frequência. Nesta situação, o valor da frequência de plasma calculado deve ser reduzido pela multiplicação por um fator conhecido por fator de redução de frequência de plasma. Além disso, no formalismo lagrangiano, o feixe de elétrons, na forma de um feixe cilíndrico sólido, é dividido em grupos de elétrons representativos do feixe. Tais grupos são denominados macropartículas que, no caso unidimensional, normalmente são chamados de discos porque, para cada coordenada espacial, deveria se considerar um plano (modelo de plano) mas, utilizando-se o fator de redução de frequência de plasma, pode-se representá-lo como se fosse um disco (modelo de disco). Lau et al. (2000) considerou, como segunda hipótese, que o feixe de elétrons está imerso em um fundo neutralizador de íons imóveis de tal forma que não existe campo elétrico d.c. neste estado não-perturbado. Portanto,

na ausência de perturbação, os elétrons apresentam a densidade de carga uniforme ρ_0 e se propagam com velocidade constante u_0 na direção z , significando que as forças de carga espacial são desprezadas até o momento da modulação em velocidade (perturbação).

Wöhlbier e John Booske (2005) descrevem o fenômeno da distorção não-linear em amplificadores klystrons utilizando um modelo euleriano “não-linear”[8]. Este modelo euleriano é comparado com um modelo lagrangiano que, novamente, utiliza o fator de redução de frequência de plasma. Os parâmetros apresentados em [8] foram utilizados como referência no presente trabalho.

Lau et al. (2000) também apresentou hipóteses relacionadas com as cavidades (circuito equivalente e fator de qualidade). A importância destas hipóteses remete ao fato de que a passagem do feixe de elétrons pelo gap de interação das cavidades altera as características elétricas destas e, portanto, é relevante estudar estas variações, conhecidas por carregamento da cavidade pelo feixe.

O carregamento pelo feixe representa as alterações provocadas pelo feixe de elétrons nas características elétricas da cavidade quando da passagem deste feixe pelo gap de interação da cavidade. O carregamento pelo feixe descreve, quantitativamente, a variação da condutância e da susceptância, que compõe a admitância da cavidade, como consequência da passagem do feixe de elétrons pelo gap de interação da cavidade. A análise do carregamento pelo feixe também é importante porque ele exerce uma forte influência na operação de dispositivos de microondas de potência. Por exemplo, uma grande motivação para o estudo do carregamento do feixe é a predição dos produtos de intermodulação (IM) em amplificadores klystron, que são efeitos de ordem superior que podem facilmente ser mascarados por erros e imprecisões do modelo. Erros podem se propagar e são amplificados de uma cavidade para a seguinte. Assim, informações precisas do fator de qualidade carregado da cavidade, que está associado ao carregamento pelo feixe, são necessárias para a predição confiável dos produtos de intermodulação. Contudo, o carregamento pelo feixe de cavidades do tipo existentes em amplificadores klystrons não é normalmente medido, uma vez que as cavidades moduladoras são tipicamente inacessíveis para análise.

Branch (1961) [9] apresentou um estudo sobre o tratamento geral do problema da energia transferida entre as ondas moduladas ou não-moduladas e as ondas eletromagnéticas estacionárias no gap de interação em cavidades cilíndricas com simetria azimutal. Ele descreveu a interação que ocorre entre o feixe e a cavidade ressonante em termos de uma análise de Fourier das ondas estacionárias no gap de interação.

Craig Wilsen (2002) [10], devido à importância do carregamento pelo feixe, apresentou um sistemático estudo do carregamento pelo feixe em uma cavidade do tipo existente em amplificadores klystron, sob várias condições, mantendo a geometria inalterada e utilizando o programa MAGIC 2D.

Kowalczyk (2004) [11] apresentou um estudo sobre os efeitos do campo magnético finito no carregamento do feixe. Em seguida, Kowalczyk (2005) [12] apresentou um estudo do carregamento pelo feixe considerando-se os efeitos de carga espacial e utilizando a técnica de casamento de admitâncias. Ele observou que é possível, a partir dos resultados obtidos e com as devidas considerações, obter os resultados de trabalhos anteriores como, por exemplo, os resultados do tratamento balístico proposto por Branch (1961).

O modelo a grandes sinais apresentado neste trabalho não utiliza o fator de redução de frequência de plasma. Diferente do modelo de plano, transformado em um modelo de disco com a utilização deste fator, neste trabalho utilizou-se um modelo de discos verdadeiro, onde as forças de carga espacial são calculadas levando-se em consideração o fato do feixe de elétrons apresentar seção transversal finita e estar no interior de uma estrutura fechada (metálica e cilíndrica). Utilizou-se o método da função de Green [13] para o cálculo destas forças. Mas a maior contribuição deste trabalho é o fato de se considerar o feixe de elétrons, antes da modulação em velocidade, em um estado perturbado, ou seja, considerar as forças de carga espacial agindo sobre os elétrons do feixe durante todo o tempo.

Antes de apresentar o modelo a grandes sinais, desenvolveu-se um estudo detalhado sobre as cavidades ressonantes, iniciando-se pela formulação do problema dos campos em uma cavidade ressonante segundo a teoria dos modos normais de J. Slater [14], o cálculo das admitâncias relacionadas com os gaps de interação das cavidades, a determinação do ganho de voltagem e, finalmente, o ganho de potência e largura de banda em amplificadores klystron com múltiplas cavidades, utilizando um modelo a pequenos sinais.

1.3 Descrições Euleriana e Lagrangiana

O comportamento eletrodinâmico de um feixe de elétrons em um amplificador klystron pode ser descrito, em um primeiro momento, utilizando-se o formalismo da dinâmica dos fluidos para um escoamento compressível, dependente do tempo, não viscoso e à temperatura constante. Existem duas descrições possíveis para a determinação da dinâmica de um fluido: a descrição euleriana e a lagrangiana. Na descrição euleriana, o problema físico consiste na determinação das variáveis de campo, em um dado instante de tempo e em uma

dada posição, tais como: os campos de velocidade e de densidade, e no caso de um fluido de elétrons, o campo elétrico devido às cargas espaciais. Já na descrição lagrangiana, a dinâmica do fluido é descrita utilizando-se o conceito de partícula do fluido, de tal forma que o comportamento do escoamento, ao longo do tempo, é obtido por meio da contribuição da trajetória de cada partícula de fluido. Na prática, é necessário distinguir cada partícula por meio de uma identificação inicial (rótulo). Por exemplo, supondo que a partícula tenha um valor pré-determinado z_0 no instante t_0 , o movimento do fluido fica completamente especificado se a variável dependente, representando a posição da partícula, for definida como uma função do tempo e do valor z_0 .

Considerando um escoamento unidimensional, onde comumente são utilizadas as variáveis independentes (z, t) , a solução do problema consiste na determinação do campo de velocidade $\vec{u}(z, t) = u(z, t)\hat{a}_z$ e campo de densidades $\rho_v(z, t)$. Estas grandezas se relacionam por meio das equações da continuidade e do momento linear

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_v + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_v u) = 0, \text{ e} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u \frac{\partial}{\partial z}u = \frac{F}{m_0}, \quad (1.2)$$

onde F e m_0 representam a força e a massa do fluido (massa específica) por unidade de volume. Uma análise do sistema de equações (1.1) e (1.2) permite inferir que o mesmo é não-linear e, adicionalmente, em uma descrição do tipo campo (euleriana) para cada par (z, t) , existe associado somente um valor de $\rho_v(z, t)$ e $u(z, t)$. Este fato limita a descrição euleriana para o fluido de elétrons no tratamento do fenômeno da ultrapassagem entre os elétrons do feixe onde, para um único par (z, t) , haveria pelo menos dois valores de velocidade.

Já na descrição lagrangiana, onde a trajetória de cada partícula do fluido é dada por $z = Z(z_0, t)$, ou melhor, a j -ésima partícula no fluido é descrita pela equação horária $z_j = Z(z_{0j}, t)$ e, desta forma, o problema da ultrapassagem entre elétrons pode ser completamente descrito. Adicionalmente, se as equações (1.1) e (1.2) forem transformadas segundo as relações

$$z = Z(z_0, t), \text{ e} \quad (1.3)$$

$$t = t, \quad (1.4)$$

é possível demonstrar que a equação da continuidade resulta em

$$\rho_v(z_0, t) = \frac{\rho_v(z_0, t=0)}{|J|}, \quad (1.5)$$

e a equação de movimento em

$$\frac{\partial}{\partial t} u(z_0, t) = \frac{F_R}{m_p}, \quad (1.6)$$

onde J denota o jacobiano da transformação $J = \partial Z(z_0, t) / \partial z_0$ e m_p e F_R são interpretados como a massa da partícula e a força resultante sobre essa. É de relevância observar que o problema da não-linearidade, também, foi removido.

A transformação (1.3) e (1.4) não é a única possível. Um outro par de transformações relevantes na análise da dinâmica de feixe de elétrons é

$$z = z, e \quad (1.7)$$

$$t = T(z, t_0). \quad (1.8)$$

A equação da continuidade de carga nesta representação tem a forma

$$i(z, t_0) = \frac{i(z=0, t_0)}{|J|}, \quad (1.9)$$

onde $i(z, t_0)$ é a corrente de convecção do feixe de elétrons e o determinante jacobiano, neste caso, é $J = \partial T(z, t_0) / \partial t_0$. A transformação (1.8) é uma relação fundamental para a determinação da corrente harmônica associada ao feixe de elétrons modulado, conforme será discutido no capítulo III.

Em geral, as grandezas em ambas as descrições se relacionam segundo as transformações. Seja uma grandeza que, no formalismo euleriano, é representada como $f^E(z, t)$, onde o índice “ E ” indica que se trata de coordenadas eulerianas, no formalismo lagrangiano esta mesma grandeza é representada como $f^L(z_0, t)$, onde o índice “ L ” indica que se trata de coordenadas lagrangianas. Utilizando-se (1.3), a relação entre as grandezas nas duas representações é

$$f^E(z, t) \Big|_{z=Z(z_0, t)} = f^L(z_0, t). \quad (1.10)$$

A TAB. 1.1 mostra, para uma análise unidimensional e partindo-se da descrição euleriana, como se transformam a posição z , o tempo t , a velocidade e a densidade em cada descrição lagrangiana.

TABELA 1.1 - Posição, tempo, velocidade e densidade na descrição euleriana (z, t) do fluido de elétrons e nas descrições lagrangiana (z_0, t) e (z, t_0) .

Descrição euleriana (z, t)	Descrição lagrangiana (z_0, t)	Descrição lagrangiana (z, t_0)
z	$z = Z(z_0, t)$	$z = z$
t	$t = t$	$t = T(z, t_0)$
$\vec{u}(z, t) = u(z, t)\hat{a}_z$	$\vec{u}(z_0, t) = u(z_0, t)\hat{a}_z$	$\vec{u}(z, t_0) = u(z, t_0)\hat{a}_z$
$\rho(z, t)$	$\rho(z_0, t)$	$i(z, t_0)$

1.4 Descrição do problema a ser resolvido e objetivo

Para descrever-se, adequadamente, um amplificador klystron de potência é necessário analisar o problema de muitas partículas carregadas. Isto somente é possível de ser resolvido com aproximações e via simulações computacionais, em virtude da complexidade da dinâmica dos elétrons. Esta complexidade advém do fato que os elétrons interagem entre si, devido à carga espacial, bem como com o campo magnético externo para manter o feixe focalizado e, ainda, com o campo do gap das cavidades de microondas, a fim de se obter a modulação do feixe e a amplificação de microondas. O método comumente empregado é denominado partícula na célula [15], que consiste basicamente em descrever o movimento das macropartículas ao invés de tratar o feixe como um fluido carregado. Cada macropartícula, inicialmente, ocupa uma célula no espaço de fase. À medida que cada macropartícula evolui no tempo devido à ação da força resultante, ela deixa a célula anterior passando para uma nova célula. No caso de feixe de elétrons, a força resultante sobre uma macropartícula em uma célula deve-se a todas as demais macropartículas que compõem o feixe. Portanto, tendo-se mp macropartículas, deve-se calcular $(mp - 1)$ resultantes sobre a macropartícula observada (ao total $mp(mp - 1)$ cálculos de resultantes). Por outro lado, a dinâmica de cada macropartícula, em um dado instante de tempo, depende da posição de todas as demais macropartículas localizadas no instante de tempo anterior. Este raciocínio leva a um problema autoconsistente e estratégias iterativas devem ser desenvolvidas.

Outro aspecto de grande relevância é o caráter não-linear do modelo [6], uma vez que envolve as equações da continuidade e do momentum, que são não-lineares. Essas equações podem ser linearizadas desde que se considerem condições de pequenos sinais [4][5], isto é, desde que se considere todas as quantidades a.c. perturbações em comparação com as quantidades d.c. (feixe não-modulado). Uma análise de pequenos sinais é suficiente para descrever o princípio de funcionamento de um amplificador klystron mas é incapaz de fornecer informações sobre a saturação do ganho e a eficiência de amplificadores klystron de

alta potência, como os utilizados em radares e aceleradores. Entretanto, esta análise proporciona o cálculo de potência e largura de banda em amplificadores klystron com múltiplas cavidades, tornando-se uma ferramenta importante no que tange ao projeto de klystron, em oposição a uma ferramenta criada para verificação do projeto, como é o caso de um código baseado em uma análise a grandes sinais.

Na análise não-linear, as amplitudes das variáveis a.c. tornam-se significativas quando comparadas com os correspondentes valores d.c. e, portanto, não podem ser desprezadas. Além disso, a análise não-linear possibilita o estudo do agrupamento (quando e onde ocorre o “electron bunching”), bem como a ultrapassagem (“overtaking”) dos elétrons do feixe.

Portanto, entende-se que, antes de se partir para o desenvolvimento de um modelo mais complexo, conforme descrito no primeiro parágrafo, é relevante apresentar os conceitos fundamentais por meio da construção de um modelo não-linear, unidimensional e utilizando um feixe não-relativista, o que pode ser implementado utilizando formalismo lagrangiano e teoria de modelo de disco. Pode-se então enunciar o objetivo deste doutorado:

Desenvolver um procedimento para o cálculo de potência e largura de banda em amplificadores klystron com múltiplas cavidades, utilizando uma análise a pequenos sinais, bem como desenvolver um modelo teórico e um código computacional capaz de servir de ferramenta para a análise do funcionamento de um amplificador klystron de potência, com boa exatidão, utilizando um modelo a grandes sinais. Tal modelo deverá descrever a dinâmica do feixe de elétrons, incluindo o efeito das cargas espaciais, os circuitos de microondas das cavidades ressonantes, possibilitando a obtenção do ganho e a compressão de ganho de amplificadores klystrons de múltiplas cavidades.

Este caderno está organizado da seguinte maneira: uma introdução, onde se descreve o amplificador klystron, se apresentam algumas aplicações, discutindo-se qualitativamente o amplificador klystron, se apresenta uma breve revisão bibliográfica, se descreve os dois formalismos envolvidos no desenvolvimento e enuncia-se o objetivo deste trabalho.

No capítulo II analisam-se o ganho e a largura de banda de um amplificador klystron utilizando um modelo a pequenos sinais. Inicialmente, desenvolve-se a formulação do problema dos campos em uma cavidade ressonante conforme os estudos de J. Slater [14]

que resultam em um conjunto de expressões para o cálculo das admitâncias dos circuitos das cavidades. Em seguida, utilizando uma análise a pequenos sinais, calcula-se a densidade de corrente de convecção do feixe de elétrons ao longo de um tubo de deriva possuindo N -gaps de interação ao longo de seu comprimento axial. Apresenta-se, também, devido à importância para a determinação do ganho de voltagem da klystron, uma expressão para a admitância eletrônica total. O cálculo do ganho de voltagem precede o cálculo do ganho de potência que, por sua vez, possibilita o cálculo da largura de banda de um amplificador de múltiplas cavidades, idênticas e igualmente espaçadas.

No capítulo III apresenta-se um modelo a grandes sinais unidimensional formado pelas equações da continuidade e do momento linear e pela força de carga espacial, devido à ação do campo elétrico, calculada utilizando o método da função de Green (apêndice D). Ao se considerar, neste capítulo, o modelo de disco, obtém-se, no final, a força elétrica exercida por um disco sobre outro disco. Devido à geometria cilíndrica, considera-se coordenadas cilíndricas e propagação na direção z . Além disso, considera-se também a hipótese de simetria azimutal, bem como o campo magnético focalizador suficientemente alto para garantir que o movimento dos elétrons seja somente na direção axial. O sistema não-linear, inicialmente em coordenadas eulerianas nas variáveis independentes (z, t) , foi utilizado no desenvolvimento de um sistema de equações no formalismo lagrangiano. Descrevendo as equações de acordo com este formalismo e utilizando a teoria de modelo de disco, chega-se a um sistema de equações diferenciais ordinárias em relação à variável z , o que viabiliza a utilização do método de Runge-Kutta [16] para calcular a evolução temporal das variáveis do sistema. O sistema, após a normalização, é integrado utilizando um código computacional desenvolvido em linguagem C/C++ [17] que permite obter, como resultado, a evolução temporal das variáveis do sistema. Os resultados, na forma de gráficos, de uma maneira geral, mostram a dinâmica do feixe de elétrons no tubo de deriva, possibilitando-se observar vários fenômenos típicos nos estudos de amplificadores klystrons.

No capítulo IV apresentam-se, como aplicação do formalismo apresentado no capítulo II e capítulo III, as análises de alguns projetos. Inicialmente, realiza-se uma análise a pequenos sinais com os cálculos dos principais parâmetros do formalismo apresentado no capítulo II de maneira a possibilitar, no final, o cálculo do ganho de voltagem e, principalmente, do ganho de potência utilizando os parâmetros do amplificador klystron Varian 4K3SL [29]. Na sequência, realiza-se uma análise a grandes sinais considerando-se os mesmos parâmetros da análise a pequenos sinais em um formalismo para eliminar a

dependência do índice de modulação, mostrado no capítulo III, que viabiliza as simulações sem considerar os parâmetros das cavidades. Para isso, considera-se a força resultante, devido ao campo elétrico no interior do tubo de deriva, nas proximidades de um gap de interação da cavidade, calculada a partir do campo elétrico mostrado no apêndice B. A metodologia de cálculo do ganho de potência é validada por meio da comparação com o código mostrado na referência [18]. A comparação entre os dois códigos encontra-se na TAB. 1.2. A análise a grandes sinais, por sua vez, difere do código mostrado na referência [31] segundo a TAB. 1.3.

TABELA 1.2 – Comparações entre o código desenvolvido por Aaron Jensen/Craig Wilsen [18] e a metodologia de cálculo desenvolvida neste trabalho.

Parâmetro	MathCAD small-signal code [18]	Neste trabalho (Capítulo IV)
Coefficiente de acoplamento	Calculado considerando o campo elétrico conforme Warnecke e Guénard [34] e desconsiderando o efeito de carga espacial.	Calculado considerando-se 3 perfis de campo elétrico, bem como o efeito de carga espacial.
Condutância de carregamento do feixe	Calculado utilizando uma expressão que considera um gap com extremidade tipo faca e perfil hiperbólico de campo elétrico.	Calculado utilizando uma expressão que considera o efeito de carga espacial para 3 perfis de campo elétrico no gap, inclusive o hiperbólico.
Susceptância de carregamento do feixe	Desconsiderado.	Calculado utilizando uma expressão que considera o efeito de carga espacial para 3 perfis de campo elétrico no gap.
Fator de qualidade Q	Dado de entrada do programa	Calculado segundo método apresentado no apêndice B.
Razão R/Q	Dado de entrada do programa	Calculado segundo método apresentado no apêndice B.

TABELA 1.3 – Comparações entre o código JPNDISK [31] e a metodologia de cálculo desenvolvida neste trabalho para a análise a grandes sinais.

Parâmetro	JPNDISK [31]	Neste trabalho (Capítulo IV)
Coefficiente de acoplamento	Considerado	Calculado considerando-se o perfil de campo elétrico uniforme no gap de interação das cavidades, bem como o efeito de carga espacial.
Condutância de carregamento do feixe	Calculado utilizando uma expressão que considera um gap com extremidade tipo faca e perfil hiperbólico de campo elétrico.	Calculado utilizando uma expressão que considera o efeito de carga espacial para o perfil de campo elétrico uniforme no gap de interação das cavidades.

Susceptância de carregamento do feixe	Desconsiderado.	Calculado utilizando uma expressão que considera o efeito de carga espacial para o perfil de campo elétrico uniforme no gap de interação das cavidades.
Fator de qualidade Q	Considerado como o produto entre a razão R/Q e a condutância de carregamento do feixe.	Calculado segundo método apresentado no apêndice B .
Razão R/Q	Dado de entrada do programa	Calculado segundo método apresentado no apêndice B .
Campo elétrico modulador, no interior do tubo de deriva, nas proximidades de um gap de interação.	Considerado por meio de uma função Gaussiana desenvolvida por Wessel-Berg.	Calculado segundo método apresentado no apêndice B .
Efeitos relativísticos	Considerado	Desconsiderado

Finalmente, apresentam-se as conclusões desta tese de doutorado e sugestões de trabalhos futuros. Uma lista das principais referências bibliográficas pode ser encontrada no final deste trabalho.

Capítulo II

ANÁLISE DO AMPLIFICADOR KLYSTRON DE MÚLTIPLAS CAVIDADES CONSIDERANDO O EFEITO DE CARGA ESPACIAL – ABORDAGEM A PEQUENOS SINAIS

Neste capítulo apresenta-se e discute-se o formalismo analítico existente para o projeto de amplificadores klystrons de múltiplas cavidades. O formalismo apresentado é aquele onde, utilizando-se uma análise a pequenos sinais, isto é, uma análise linear, é possível considerar o efeito das cargas espaciais. Muito embora esta análise não seja capaz de descrever efeitos não lineares, tais como: saturação do amplificador e produtos de intermodulação, ela é de muita relevância ao possibilitar a obtenção de expressões que auxiliam o projetista de amplificador klystron na fase inicial do desenvolvimento. Ela também serve como balizamento durante a análise dos resultados do projeto utilizando uma análise a grandes sinais ou não linear.

Este capítulo inicia com a apresentação e discussão do formalismo desenvolvido por John Slater sobre o problema dos campos em uma cavidade ressonante, por meio de sua teoria dos modos normais. A partir da teoria de Slater é possível obter uma expressão que descreve o balanço de potência complexo em uma cavidade excitada por um feixe de elétrons, extremamente relevante para a formulação do problema de amplificadores klystrons de múltiplas cavidades.

Segue-se então a apresentação do fenômeno físico de interesse a ser analisado neste trabalho que é constituído por um feixe de elétrons com dimensão axial infinita e seção transversal circular, propagando-se no interior de um tubo de deriva, também de seção transversal circular. O feixe é confinado de maneira a movimentar-se somente ao longo do eixo z , devido à ação de um campo magnético axial muito grande. Além disto, o feixe de elétrons tem seus parâmetros dc especificados por meio de sua densidade volumétrica de carga ρ_0 , densidade de corrente J_0 e velocidade de feixe u_0 associada à voltagem do feixe V_0 . Considera-se a existência de múltiplas cavidades reentrantes acopladas ao tubo de deriva. Inicialmente, desenvolve-se uma expressão para a densidade de corrente de convecção associada à modulação em velocidade, em função do campo elétrico produzido nos gaps de interação das cavidades. Utiliza-se o resultado em uma análise do fluxo de potência complexa entre a n -ésima cavidade e o feixe de elétrons, chegando em uma expressão para a admitância eletrônica total normalizada, que pode ser dividida em duas parcelas. A primeira parcela

representa a trans-admitância eletrônica entre duas cavidades. A outra representa a admitância eletrônica da cavidade.

As expressões para a trans-admitância e a admitância eletrônica total, em conjunto com as expressões para a admitância do circuito das cavidades, formam a base para a determinação do ganho de voltagem do amplificador klystron de múltiplas cavidades, mostrado na seqüência, uma vez que permitem a obtenção de uma relação entre a amplitude A_N de RF do n -ésimo gap de interação e a amplitude A_1 da primeira cavidade.

O capítulo termina com o desenvolvimento da expressão para o cálculo do ganho de potência de amplificador klystron, seguido de uma expressão para a largura de banda, sob a hipótese de cavidades idênticas e igualmente espaçadas e, ao final da seção, desenvolve-se uma expressão para um parâmetro de fundamental importância que é o produto entre o ganho e a largura de banda.

Este capítulo está organizado como segue. Na seção 2.1 apresenta-se a formulação desenvolvida por John Slater para o problema dos campos eletromagnéticos em uma cavidade ressonante. Na seção 2.2, desenvolve-se uma expressão para a admitância eletrônica para os gaps de interação em amplificadores klystrons com múltiplas cavidades utilizando a análise a pequenos sinais. Na seção 2.3, apresenta-se o cálculo do ganho de voltagem e, na seção 2.4, o cálculo para o ganho de potência, largura de banda e o produto ganho-largura de banda. Finalmente, na seção 2.5, apresenta-se a conclusão deste capítulo.

2.1 Formulação de John Slater para o problema dos campos em uma cavidade ressonante

A solução para o problema dos campos em uma cavidade ressonante, com paredes com condutividade finita σ , acoplada a guias de onda e, adicionalmente, com cargas e correntes em seu interior, foi desenvolvida por J. Slater [14] por meio de sua teoria dos modos normais para cavidades ressonantes. A partir da teoria de Slater é possível obter uma expressão que descreva o balanço de potência complexo em uma cavidade excitada por um feixe de elétrons. Nesta seção apresenta-se o formalismo desenvolvido por Slater e, ao final, particulariza-se a expressão para o balanço de potência de maneira que esta seja conveniente para a utilização no problema de amplificadores klystrons de múltiplas cavidades.

2.1.1 Formulação do problema

Segue da análise vetorial que um campo vetorial pode ser construído a partir de dois outros campos, o primeiro com característica solenoidal e o outro irrotacional. Os conjuntos de funções solenoidais serão representadas por $\{\hat{E}_n^s(\vec{r})\}$ e $\{\hat{H}_n^s(\vec{r})\}$ e o conjunto de funções irrotacionais representado por $\{\hat{E}_n^{IR}(\vec{r})\}$. Admitindo-se que esses conjuntos formem uma base e utilizando o teorema da expansão, os campos elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e magnético $\vec{H}(\vec{r}, t)$, no interior de uma cavidade ressonante, podem ser escritos na forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_n a_n(t) \hat{E}_n^s(\vec{r}) + b_n(t) \hat{E}_n^{IR}(\vec{r}), \text{ e} \quad (2.1)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \sum_n c_n(t) \hat{H}_n^s(\vec{r}). \quad (2.2)$$

Por construção, $\nabla \cdot \hat{E}_n^s(\vec{r}) = 0$, $\nabla \times \hat{E}_n^{IR}(\vec{r}) = \vec{0}$ e $\nabla \cdot \hat{H}_n^s(\vec{r}) = 0$. Para a completa determinação dos campos, segundo o teorema de Helmholtz [19] deve-se também se especificar os seus rotacionais, que, por hipótese tem a forma

$$k_n \hat{E}_n^s(\vec{r}) = \nabla \times \hat{H}_n^s(\vec{r}) \text{ e } k_n \hat{H}_n^s(\vec{r}) = \nabla \times \hat{E}_n^s(\vec{r}), \quad (2.3)$$

onde k_n é uma constante. Para que os campos possam ser determinados de maneira única, deve-se ainda especificar as condições de contorno, que são:

$$\hat{n} \times \hat{H}_n^s(\vec{r}) = \vec{0} \text{ sobre a superfície } S', \text{ e} \quad (2.4)$$

$$\hat{n} \times \hat{E}_n^s(\vec{r}) = \vec{0} \text{ sobre a superfície } S, \quad (2.5)$$

isto é, $\vec{H}_n^s(\vec{r})$ não possui componente tangencial sobre S' e $\vec{E}_n^s(\vec{r})$ não possui componente tangencial sobre S de modo que S' mais S constituem a superfície total que envolve o volume V da cavidade. Aplicando-se o rotacional em (2.3), utilizando a identidade vetorial $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$ e observando o caráter solenoidal das funções $\vec{E}_n^s(\vec{r})$ e $\vec{H}_n^s(\vec{r})$, obtém-se que

$$\nabla^2 \left\{ \begin{array}{l} \hat{E}_n^s(\vec{r}) \\ \hat{H}_n^s(\vec{r}) \end{array} \right\} + k_n^2 \left\{ \begin{array}{l} \hat{E}_n^s(\vec{r}) \\ \hat{H}_n^s(\vec{r}) \end{array} \right\} = \vec{0}, \quad (2.6)$$

que é a equação de Helmholtz, cuja solução conduz ao problema de autovalores, onde, para cada diferente autovalor k_n , há um autovetor correspondente, sujeito às condições de contorno (2.4) e (2.5). Slater demonstrou que autovetores distintos são ortogonais e que a relação de ortogonalidade pode ser expressa como

$$\int_V \hat{E}_n^s(\vec{r}) \cdot \hat{E}_m^s(\vec{r}) d^3\vec{r} = \delta_{n,m}, \text{ e} \quad (2.7)$$

$$\int_V \hat{H}_n^s(\vec{r}) \cdot \hat{H}_m^s(\vec{r}) d^3\vec{r} = \delta_{n,m}. \quad (2.8)$$

onde $\delta_{n,m}$ é o símbolo de Kronecker. Considerando agora o conjunto das funções irrotacionais $\{\hat{E}_n^{IR}(\vec{r})\}$. Sendo estas irrotacionais pode-se escrever

$$k_n \hat{E}_n^{IR}(\vec{r}) = \nabla \Psi_n, \quad (2.9)$$

onde Ψ_n é uma função escalar. Admitindo-se que Ψ_n satisfaça uma equação do tipo Helmholtz,

$$\nabla^2 \Psi_n + k_n^2 \Psi_n = 0, \quad (2.10)$$

sob as seguintes condições de contorno

$$\Psi_n = 0 \text{ sobre } S \text{ e } S', \text{ e} \quad (2.11)$$

$$\hat{n} \times \hat{E}_n^{IR}(\vec{r}) = \vec{0} \text{ sobre } S \text{ e } S', \quad (2.12)$$

é possível mostrar que $\{\hat{E}_n^{IR}(\vec{r})\}$ e $\{\Psi_n\}$ satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade

$$\int_V \hat{E}_n^{IR}(\vec{r}) \cdot \hat{E}_m^{IR}(\vec{r}) d^3\vec{r} = \delta_{n,m}, \text{ e} \quad (2.13)$$

$$\int_V \Psi_n(\vec{r}) \Psi_m(\vec{r}) d^3\vec{r} = \delta_{n,m}. \quad (2.14)$$

Slater, após a construção deste conjunto de funções ortogonais, admitiu que este fosse também completo, de maneira a formar uma base. Nestas condições é possível aplicar o teorema da expansão, onde os coeficientes da expansão, somente funções do tempo, apresentados em (2.1), são determinados por

$$a_n(t) = \int_V \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \hat{E}_n^s(\vec{r}) d^3\vec{r}, \quad (2.15)$$

$$b_n(t) = \int_V \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \hat{E}_n^{IR}(\vec{r}) d^3\vec{r}, \text{ e} \quad (2.16)$$

$$c_n(t) = \int_V \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot \hat{H}_n^s(\vec{r}) d^3\vec{r}. \quad (2.17)$$

As demais grandezas, a densidade de corrente $\vec{J}(\vec{r}, t)$ e a densidade de carga $\rho(\vec{r}, t)$ podem ser escritas de acordo com a expansão:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_n \left\{ \left[\int_V \vec{J}(\vec{r}', t) \cdot \hat{E}_n^s(\vec{r}') d^3\vec{r}' \right] \hat{E}_n^s(\vec{r}) + \left[\int_V \vec{J}(\vec{r}', t) \cdot \hat{E}_n^{IR}(\vec{r}') d^3\vec{r}' \right] \hat{E}_n^{IR}(\vec{r}) \right\}, \text{ e} \quad (2.18)$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_n \left[\int_V \rho(\vec{r}', t) \Psi_n(\vec{r}') d^3\vec{r}' \right] \Psi_n(\vec{r}). \quad (2.19)$$

Considerando as expansões (2.1) e (2.2), com os coeficientes calculados segundo (2.15) - (2.17) e as propriedades de ortogonalidade (2.7) - (2.8), a lei de Faraday passa a ser escrita na forma

$$k_n a_n(t) + \mu_0 \frac{d}{dt} c_n(t) = - \int_S (\hat{n} \times \vec{E}) \cdot \hat{H}_n^s ds. \quad (2.20)$$

Utilizando um procedimento similar, a lei de Ampère-Maxwell, passa a ser escrita na forma

$$k_n c_n(t) - \varepsilon_0 \frac{d}{dt} a_n(t) = \int_V \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{E}_n^s d^3 \vec{r} - \int_{S'} (\hat{n} \times \vec{H}) \cdot \hat{E}_n^s ds, \text{ e} \quad (2.21)$$

$$- \varepsilon_0 \frac{d}{dt} b_n(t) = \int_V \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{E}_n^{IR} d^3 \vec{r}. \quad (2.22)$$

A lei de Gauss para o campo magnético é automaticamente satisfeita devido o seu caráter solenoidal. A lei de Gauss para o campo elétrico resulta em

$$- k_n \varepsilon_0 \int_V \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}_n^s d^3 \vec{r} = \int_V \rho(\vec{r}, t) \Psi_n d^3 \vec{r}. \quad (2.23)$$

As equações (2.20) e (2.21), combinadas e resolvidas para os coeficientes $a_n(t)$ e $c_n(t)$, resultam em

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + k_n^2 a_n(t) = - \mu_0 \frac{d}{dt} \left\{ \int_V \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{E}_n^s(\vec{r}) d^3 \vec{r} - \int_{S'} [\hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}, t)] \cdot \hat{E}_n^s(\vec{r}) ds \right\} - k_n \int_S (\hat{n} \times \vec{E}) \cdot \hat{H}_n^s(\vec{r}) ds, \text{ e} \quad (2.24)$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 c_n(t)}{dt^2} + k_n^2 c_n(t) = k_n \left\{ \int_V \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{E}_n^s(\vec{r}) d^3 \vec{r} - \int_{S'} [\hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}, t)] \cdot \hat{E}_n^s(\vec{r}) ds \right\} - \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S (\hat{n} \times \vec{E}) \cdot \hat{H}_n^s(\vec{r}) ds. \quad (2.25)$$

Estas duas equações formam a base para o tratamento do problema das cavidades ressonantes. No que segue construir-se-á uma expressão para o admitância de entrada do “gap” de uma cavidade excitada por um feixe de elétrons. Sob a hipótese adicional de soluções harmônicas $e^{j\omega t}$, esta expressão será construída segundo uma metodologia que aumentará, gradativamente, o grau de complexidade do problema. Inicialmente analisar-se-ão as oscilações amortecidas em uma cavidade ressonante devido à condutividade finita das paredes metálicas da cavidade. A seguir, admitir-se-á a cavidade com 02 portas, uma para a excitação da cavidade por uma fonte de alimentação externa e a outra terminada passivamente e, finalmente, o problema do carregamento da cavidade devido à presença do feixe de elétrons no interior da cavidade é discutido, para então se obter a expressão para a admitância eletrônica do gap.

2.1.2 Oscilações livres em uma cavidade

Neste caso, os lados direitos de (2.24) e (2.25), respectivamente, são iguais a zero, pois $\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{0}$, $\hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{0}$ e $\hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0}$. Admitindo um comportamento harmônico $e^{j\omega t}$, de tal forma que $a_n(t) = A_n e^{j\omega t}$, a solução para (2.24) pode escrita na forma

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega} \right) A_n e^{j\omega t} = 0, \text{ onde } \omega = \pm \omega_n = \frac{k_n}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (2.26)$$

Fisicamente, os ω_n são as frequências angulares dos modos de ressonância da cavidade e a solução geral do problema das oscilações livres é construída a partir de uma superposição dos diversos modos normais, cada um oscilando com uma amplitude arbitrária A_n em sua frequência de ressonância. Segundo (2.21) e utilizando (2.26), o coeficiente da expansão $c_n(t)$ pode ser escrito em termos do coeficiente $a_n(t)$ como

$$\frac{a_n(t)}{c_n(t)} = -j \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}. \quad (2.27)$$

O módulo desta razão corresponde à impedância do espaço livre. Adicionalmente, pode-se verificar que os coeficientes estão defasados em $\pi/2$ indicando que, se a energia armazenada no campo magnético é máxima, a energia armazenada no campo elétrico é mínima e vice-versa.

2.1.3 Oscilações amortecidas em uma cavidade devido à condutividade finita das paredes

Neste caso, o último termo do lado direito da expressão (2.24) é diferente de zero e a equação para o coeficiente da expansão $a_n(t)$ assume a seguinte forma

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + k_n^2 a_n(t) = -k_n \int_S (\hat{n} \times \vec{E}) \cdot \hat{H}_n^s(\vec{r}) ds. \quad (2.28)$$

Considerando agora desenvolvimento do lado direito, no caso de paredes condutoras com condutividade finita a integral de componente tangencial do campo elétrico se relaciona com a componente do campo magnético segundo a expressão.

$$\hat{n} \times \vec{E} = \mu_0 \omega (1 + j) \frac{\delta}{2} \vec{H}, \quad (2.29)$$

onde $\delta = \sqrt{2/\omega \sigma \mu_0}$ é a profundidade do campo decorrente do efeito pelicular e σ é a condutividade elétrica das paredes da cavidade. Utilizando (2.15) e (2.27), pode-se escrever (2.2) como

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \sum_n c_n(t) \hat{H}_n^s(\vec{r}) = j \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sum_n a_n(t) \hat{H}_n^s(\vec{r}) = j \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sum_n \hat{H}_n^s(\vec{r}) \int_V \hat{E} \cdot \hat{E}_n^s d^3r. \quad (2.30)$$

Substituindo (2.29) e (2.30) na integral do lado direito de (2.28) tem-se

$$-k_n \int_S (\hat{n} \times \vec{E}) \cdot \hat{H}_n^s(\vec{r}) ds = -j(1+j)k^2 \frac{\delta}{2} \sum_n a_n(t) \int_S \hat{H}_n^s(\vec{r}) \cdot \hat{H}_n^s(\vec{r}) ds. \quad (2.31)$$

Se as oscilações ocorrerem com uma frequência muito próxima à frequência de ressonância do n -ésimo modo pode-se admitir, em uma primeira aproximação, que a distribuição de campo será, aproximadamente, igual àquela no n -ésimo modo. Nestas condições, a expressão acima pode ser escrita na forma

$$-k_n \int_S (\hat{n} \times \vec{E}) \cdot \hat{H}_n^s(\vec{r}) ds = -k_n^2 j(1+j) \frac{\delta}{2} a_n(t) \int_S \hat{H}_n^s(\vec{r}) \cdot \hat{H}_n^s(\vec{r}) ds, \quad (2.32)$$

ou, ainda,

$$-k_n \int_S (\hat{n} \times \vec{E}) \cdot \hat{H}_n^s(\vec{r}) ds = -k_n^2 a_n(t) j(1+j) \frac{\delta}{2} \int_S |\hat{H}_n^s(\vec{r})|^2 ds. \quad (2.33)$$

Agrupando ao lado direito de (2.28) obtém-se

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + k_n^2 a_n(t) = -k_n^2 a_n(t) j(1+j) \frac{\delta}{2} \int_S |\hat{H}_n^s(\vec{r})|^2 ds, \quad (2.34)$$

ou

$$\left[j \left(\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega} \right) + (1+j) \frac{\delta}{2} \int_S |\hat{H}_n^s(\vec{r})|^2 ds \right] A_n e^{j\omega t} = 0. \quad (2.35)$$

Observando-se a expressão acima, percebe-se que as frequências de ressonância no caso de cavidades com perdas serão diferentes da situação sem perdas. Adicionalmente, em vista, da parte imaginária da frequência, deverá ocorrer um amortecimento das oscilações. Comparando-se (2.35) com a expressão equivalente para o circuito RLC paralelo, em regime permanente, a voltagem $V e^{j\omega t}$ através dos componentes satisfaz a equação

$$\left[j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) + \frac{1}{Q} \right] V e^{j\omega t} = 0, \quad (2.36)$$

onde $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ é a frequência de ressonância no caso de não haver amortecimento e $Q = \omega_0(L/R)$ é o fator de qualidade do circuito. Pode-se descrever o comportamento de uma cavidade de microondas em termos do fator de qualidade e da frequência de ressonância. Isto é de muita relevância em vista de um maior grau de facilidade para a determinação experimental destas grandezas, quando comparado a parâmetros concentrados tais como resistores, indutores e capacitores.

Uma situação de particular interesse é aquela onde se necessita determinar a frequência angular ω_0 quando ela é, aproximadamente, igual a uma das frequências de ressonância definidas segundo (2.26). Neste caso, pode-se escrever

$$\omega_0 = \omega_n + \Delta\omega_n, \quad (2.37)$$

onde $\Delta\omega_n$ é uma quantidade pequena. Substituindo-se (2.37) em (2.36) obtém-se a seguinte expressão, correta em primeira ordem da pequena quantidade $\Delta\omega_n$

$$j\left(\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega}\right) + \frac{1}{Q} - j2\frac{\Delta\omega_n}{\omega_n} = 0. \quad (2.38)$$

Comparando-se (2.35) com (2.38) chega-se na seguinte expressão para o fator de qualidade da cavidade

$$\frac{1}{Q} = \frac{\delta}{2} \int_s |\hat{H}_n^s(\vec{r})|^2 ds. \quad (2.39)$$

Adicionalmente, o desvio da frequência de ressonância, devido as perdas nas paredes, resulta

$$2\frac{\Delta\omega_n}{\omega_n} = -\frac{\delta}{2} \int_s |\vec{H}_n^s(\vec{r})|^2 ds = -\frac{1}{Q}, \quad (2.40)$$

que, resolvendo, determina a nova frequência de ressonância da cavidade

$$\omega_0 = \omega_n \left(1 - \frac{1}{2Q}\right). \quad (2.41)$$

2.1.4 Efeito do acoplamento de uma cavidade a um guia de ondas

Seja o efeito do acoplamento da cavidade a um gerador ou uma carga por meio de terminais que, por hipótese, podem ser um guia de ondas ou uma linha coaxial. Neste caso, o volume V onde as equações de Maxwell, na forma desenvolvida por Slater, deverão ser resolvidas, para a determinação das autofunções, inclui o volume da cavidade mais o volume associado à parte do guia de ondas até a superfície S' de modo a satisfazer (2.4). Nesta situação, o modo normal de ressonância é aquele sustentado pela cavidade quando o plano S' é um aberto, isto é, em S' tem-se um máximo de voltagem e um nulo de corrente. O problema a ser resolvido é aquele decorrente da substituição do aberto em S' por um outro valor de impedância e determinar qual será o efeito sobre as oscilações na cavidade. Sendo o valor da impedância conhecido, ter-se-á uma relação de proporcionalidade entre a voltagem e a corrente em S . O resultado será uma contribuição para o fator de qualidade da cavidade mais

um desvio da freqüência de ressonância. A solução do problema inicia-se com o desenvolvimento da segunda integral do lado direito de (2.24)

$$\int_{S'} [\hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}, t)] \cdot \hat{E}_n^s(\vec{r}) ds. \quad (2.42)$$

Considere-se, por hipótese, que a distribuição de $\vec{H}(\vec{r}, t)$ sobre a superfície S' é conhecida. Desta forma, pode-se calcular a integral (2.42) e, a partir de (2.24), determinar-se o campo elétrico em toda a região de interesse, e inclusive sobre a própria superfície S' . Determinado o campo elétrico, determina-se a voltagem em S' e, então, segundo a razão entre a voltagem e corrente em S' , determina-se a impedância no plano S' . Esta impedância é a impedância de entrada no sentido da cavidade.

Sejam, por hipótese, os conjuntos $\{\vec{E}_{\perp m}(\vec{r})\}$ e $\{\vec{H}_{\perp m}(\vec{r})\}$ representantes dos m modos transversais de propagação da guia de ondas. Admitindo que este conjunto forme um conjunto completo de funções, pode-se representar os campos $\hat{E}_n^s(\vec{r})$ e $\vec{H}(\vec{r}, t)$ como

$$\hat{E}_n^s(\vec{r}) = \sum_m \frac{v_{nm}}{Z_{0m}} \vec{E}_{\perp m}(\vec{r}), \quad (2.43)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \sum_m i_m(t) \vec{H}_{\perp m}(\vec{r}) = \sum_m \frac{i_m(t)}{Z_{0m}} \hat{a}_z \times \vec{E}_{\perp m}(\vec{r}), \quad (2.44)$$

onde Z_{0m} é a impedância característica do guia no m -ésimo modo propagando-se com a freqüência angular ω_n . O coeficiente $i_m(t)$ representa as correntes associadas aos vários modos do guia e \hat{a}_z é o vetor unitário normal apontando para a direção z . Com a representação acima, o produto vetorial em (2.42) pode ser desenvolvido

$$\hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \sum_m i_m(t) \hat{n} \times \vec{H}_{\perp m}(\vec{r}) = \sum_m \frac{i_m(t)}{Z_{0m}} \hat{n} \times \hat{a}_z \times \vec{E}_{\perp m}(\vec{r}) = \sum_m \frac{i_m(t)}{Z_{0m}} \vec{E}_{\perp m}(\vec{r}), \quad (2.45)$$

$$\int_{S'} [\hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}, t)] \cdot \hat{E}_n^s(\vec{r}) ds = \sum_m \sum_p \frac{v_{np}}{Z_{0p}} \frac{i_m(t)}{Z_{0m}} \int_{S'} \vec{E}_{\perp m}(\vec{r}) \cdot \vec{E}_{\perp p}(\vec{r}) ds = \sum_m \sum_p \frac{v_{np}}{Z_{0p}} \frac{i_m(t)}{Z_{0m}} Z_{0m}^2 \delta_{pm} = \sum_m v_{nm} i_m(t), \quad (2.46)$$

onde se utilizou a relação de ortogonalidade dos $\{\vec{E}_{\perp m}(\vec{r})\}$, que se escreve

$$\int_{S'} \vec{E}_{\perp m}(\vec{r}) \cdot \vec{E}_{\perp n}(\vec{r}) ds = Z_{0m}^2 \delta_{mn}. \quad (2.47)$$

Substituindo (2.46) em (2.24), escrito na forma

$$a_n = \sum_p \frac{v_{np} i_p / \epsilon_0 \omega_n}{j[(\omega/\omega_n) - (\omega_n/\omega)]}, \quad (2.48)$$

a voltagem V_m , associada ao m -ésimo modo do guia, pode ser representada na forma

$$V_m = \sum_p v_{mp} a_p = \sum_p \sum_n \frac{v_{nm} v_{np} / \epsilon_0 \omega_n}{j[(\omega/\omega_n) - (\omega_n/\omega)]} = \sum_p i_p Z_{mp}. \quad (2.49)$$

Esta expressão indica que existe uma relação linear entre as voltagens e correntes modais. Se o guia é excitado em uma frequência onde somente o modo fundamental pode se propagar, então a soma se reduz somente ao primeiro termo, e, desta forma, tem-se

$$\frac{V_1}{i_1} = Z_{11} = \sum_n \frac{v_{n1}^2 / \epsilon_0 \omega_n}{j[(\omega/\omega_n) - (\omega_n/\omega)]} \quad (2.50)$$

A equação (2.50) é a expressão para a impedância de entrada na cavidade, medida na posição S' do guia, vista em direção à cavidade, sob a hipótese, de somente o modo fundamental se propagar. Se a frequência de propagação é próxima à frequência angular de um dos modos normais da cavidade, então este será representativo em relação aos demais termos da somatória

$$Z_{11} = \frac{v_{n1}^2 / \epsilon_0 \omega_n}{j[(\omega/\omega_n) - (\omega_n/\omega)]} + Z_{n1}, \quad (2.51)$$

onde Z_{n1} representa a soma de todos os outros termos. Agora se o guia for terminado com uma impedância Z_1 e observando que $Z_{11} = -Z_1$ então, resolvendo para (2.50), tem-se

$$j \left(\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega} \right) + \frac{v_{n1}^2 / \epsilon_0 \omega_n}{Z_1 + Z_{n1}} = 0. \quad (2.52)$$

Comparando-se (2.52) com a expressão (2.38), pode-se escrever

$$\frac{1}{Q} - j2 \frac{\Delta \omega_n}{\omega_n} = \frac{v_{n1}^2 / \epsilon_0 \omega_n}{Z_1 + Z_{n1}} = \frac{1}{Q_{ext,n1}} \frac{Z_{01}}{Z_1 + Z_{n1}}, \quad (2.53)$$

onde

$$\frac{1}{Q_{ext,n1}} = \frac{v_{n1}^2}{\epsilon_0 \omega_n Z_{01}}. \quad (2.54)$$

A quantidade $Q_{ext,n1}$, denominada fator de qualidade externo, tem o seguinte significado físico. Ela representa, fisicamente, uma medida do grau de acoplamento do n -ésimo modo da cavidade com o guia de ondas de saída utilizando-se o modo fundamental do guia de ondas. Em termos do $Q_{ext,n1}$, a expressão para a impedância de entrada pode ser escrita como

$$z_1 = \frac{Z_{11}}{Z_{01}} = \frac{1/Q_{ext,n1}}{j[(\omega/\omega_n) - (\omega_n/\omega)]} + \frac{Z_{n1}}{Z_{01}}. \quad (2.55)$$

Para incluir o efeito das perdas nas paredes cavidade, na condição onde a frequência externa é próxima a frequência de ressonância do n -ésimo modo, o fator de qualidade deve ser modificado segundo

$$z_1 = \frac{Z_{11}}{Z_{01}} = \frac{1/Q_{ext,n1}}{j[(\omega/\omega'_n) - (\omega'_n/\omega)] + 1/Q_n} + \frac{Z_{n1}}{Z_{01}}, \quad (2.56)$$

onde ω'_n é a frequência de ressonância modificada por um termo de correção conforme (2.41). É importante observar que a impedância de entrada não é mais puramente reativa, mas apresenta uma componente resistiva e, na ressonância, torna-se puramente resistiva. O fator de qualidade resultante dos dois efeitos, acoplamento de saída e perdas nas paredes é denominado de fator de qualidade carregado, sendo representado por

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_n} + \frac{g}{Q_{ext,n1}}, \quad (2.57)$$

onde

$$g + jb = \frac{Z_{01}}{Z_1 + Z_{n1}}. \quad (2.58)$$

No caso de interesse deste trabalho, a cavidade de entrada é carregada adicionalmente utilizando-se uma outra entrada terminada com uma carga casada, a fim de aumentar o nível de carregamento e tornar a cavidade menos susceptível ao carregamento adicional devido ao feixe de elétrons (“beam loading”). No caso de um segundo acoplamento utilizando um outro guia, a integral de superfície (2.42) deve incluir a superfície S' do segundo acoplamento e mais uma soma em m para incluir os termos de cada modo de propagação.

Um caso de especial interesse é aquele onde a cavidade está sendo alimentada pelo primeiro guia e tem o segundo terminado com uma impedância passiva. Neste caso o efeito será a contribuição com o Q mais um desvio adicional na frequência de ressonância.

Admitindo-se que o modo fundamental do guia 1 está sendo utilizado para alimentar a cavidade e que o guia 2 está terminado por uma carga Z_2 , deseja-se determinar a impedância de entrada da cavidade olhando-se através do modo fundamental do guia 1, isto é, $V_1/i_1 = Z_1$. A voltagem V_2 , no plano S' do guia 2, pode ser representada, de maneira similar a (2.49), utilizando as autofunções da cavidade

$$V_2 = \sum_n v_{n2} a_n. \quad (2.59)$$

A expressão (2.52) é geral e também se aplica para o guia 1, que se escreve

$$\left[j \left(\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega} \right) + (1+j) \frac{\delta}{2} \int_S |\vec{H}_n^S(\vec{r})|^2 ds + \frac{v_{n2}^2 / \epsilon_0 \omega_n}{Z_2 + Z_{n2}} \right] a_n = \frac{1}{\epsilon_0 \omega_n} i_1 v_{n1}, \quad \text{e} \quad (2.60)$$

$$\left[j \left(\frac{\omega}{\omega'_n} - \frac{\omega'_n}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_n} + \frac{Y_2}{Q_{ext,n2}} \right] a_n = \frac{1}{\epsilon_0 \omega_n} i_1 v_{n1}. \quad (2.61)$$

O coeficiente da expansão de (2.59) tem a expressão

$$a_n = \frac{i_1 v_{n1} / \varepsilon_0 \omega_n}{j \left(\frac{\omega}{\omega'_n} - \frac{\omega'_n}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_n} + \frac{Y_2}{Q_{ext,n2}}}, \quad (2.62)$$

e a impedância de entrada da cavidade vista pelo guia 1 é escrita como

$$Z_1 = \frac{1/Q_{ext,n1}}{j \left(\frac{\omega}{\omega'_n} - \frac{\omega'_n}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_n} + \frac{1/Q_{ext,n2}}{Z_2 + Z_{n2}}} + Z_{n1}. \quad (2.63)$$

A equação (2.63) apresenta a impedância de entrada da cavidade pelo guia 1, em termos do modo fundamental do guia de saída.

2.1.5 O efeito de um feixe de elétrons no interior da cavidade

O efeito de um feixe de elétrons propagando-se no interior de uma cavidade pode ser calculado incluindo o primeiro termo de (2.24) na expressão do coeficiente a_n em (2.63), resultando em

$$a_n = \frac{i_1 v_{n1} / \varepsilon_0 \omega_n}{j \left(\frac{\omega}{\omega'_n} - \frac{\omega'_n}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_n} + \frac{Y_2}{Q_{ext,n2}} + \frac{1}{\varepsilon_0 \omega_n a_n} \int_V \vec{J} \cdot \hat{E}_n^s(\vec{r}) d^3 r}. \quad (2.64)$$

O termo contendo a corrente pode ser escrito de maneira diferente observando-se que a potência complexa absorvida pelo feixe é

$$P_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{E}(\vec{r}) d^3 r = \frac{1}{2} \sum_n a_n^* \int_V \vec{J} \cdot \hat{E}_n^s(\vec{r}) d^3 r = \sum_n P_{e,n}, \quad (2.65)$$

onde $P_{e,n}$ é a potência complexa associada ao n -ésimo modo. A energia elétrica média armazenada é expressa segundo

$$W_e = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \int_V \vec{E} \cdot \vec{E}^* d^3 r = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \sum_n \sum_m a_n a_m^* \int_V \hat{E}_n^s \hat{E}_m^{s*} d^3 r = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \sum_n a_n a_n^* = \sum_n W_{e,n}, \quad (2.66)$$

onde $W_{e,n}$ é a energia elétrica média armazenada no n -ésimo modo. O fator de qualidade eletrônico $Q_{e,n}$ do n -ésimo modo pode ser definido como

$$\frac{1}{Q_{e,n}} = \text{Re} \frac{P_{e,n}}{2 \omega_n W_{e,n}} = \text{Re} \frac{1}{\varepsilon_0 \omega_n a_n} \int_V \vec{J} \cdot \hat{E}_n^s(\vec{r}) d^3 r, \quad (2.67)$$

ou

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \omega_n a_n} \int_V \vec{J} \cdot \hat{E}_n^s(\vec{r}) d^3 r = \frac{1}{Q_{e,n}} + j \text{Im} \frac{1}{\varepsilon_0 \omega_n a_n} \int_V \vec{J} \cdot \hat{E}_n^s(\vec{r}) d^3 r. \quad (2.68)$$

Substituindo em (2.64), obtém-se

$$a_n = \frac{i_1 v_{n1} / \epsilon_0 \omega_n}{j \left(\frac{\omega}{\omega'_n} - \frac{\omega'_n}{\omega} + \text{Im} \frac{1}{\epsilon_0 \omega_n a_n} \int_V \vec{J} \cdot \hat{E}_n^S d^3 r \right) + \frac{1}{Q_n} + \frac{y_2}{Q_{ext,n2}} + \frac{1}{Q_{e,n}}}. \quad (2.69)$$

A impedância de entrada da cavidade normalizada y_1 , olhando-se do guia 1, em termos do fator de qualidade eletrônico, pode ser escrita como

$$y_1 = Q_{ext,n1} \left[j \left(\frac{\omega}{\omega'_n} - \frac{\omega'_n}{\omega} + \text{Im} \frac{\int_V \vec{J} \cdot \hat{E}_n^S d^3 r}{\epsilon_0 \omega_n a_n} \right) + \frac{1}{Q_n} + \frac{y_2}{Q_{ext,n2}} + \frac{1}{Q_{e,n}} \right], \quad (2.70)$$

ou

$$j \left(\frac{\omega}{\omega'_n} - \frac{\omega'_n}{\omega} + \text{Im} \frac{\int_V \vec{J} \cdot \hat{E}_n^S d^3 r}{\epsilon_0 \omega_n a_n} \right) + \frac{1}{Q_n} + \frac{1}{Q_{e,n}} + \frac{y_1}{Q_{ext,n1}} + \frac{y_2}{Q_{ext,n2}} = 0. \quad (2.71)$$

Esta equação expressa o balanço de potência complexo em uma cavidade excitada por um feixe de elétrons.

Na prática da engenharia de microondas, é mais interessante reescrever (2.70) em termos da impedância “shunt” da cavidade e da impedância eletrônica do feixe de elétrons. A admitância eletrônica do feixe é definida segundo a expressão

$$Y_{e,n} = \frac{2P_{e,n}}{V_n V_n^*}, \quad (2.72)$$

onde V_n é voltagem no gap de interação. A relação entre fator de qualidade eletrônico e a admitância eletrônica é

$$\left(\frac{1}{Q_{e,n}} + j \text{Im} \frac{\int_V \vec{J} \cdot \hat{E}_n^S d^3 r}{\epsilon_0 \omega_n a_n} \right) \frac{1}{Y_{e,n}} = \frac{1}{2} \frac{V_n V_n^*}{\omega_n W_n}. \quad (2.73)$$

Segue que a impedância “shunt” da cavidade é definida segundo

$$R_{sh,n} = \frac{1}{2} \frac{V_n V_n^*}{P_n}, \quad (2.74)$$

onde P_n é a potência dissipada nas paredes da cavidade. A razão $R_{sh,n}/Q_n$, parâmetro de fundamental importância, é escrita segundo

$$\frac{R_{sh,n}}{Q_n} = \frac{1}{2} \frac{V_n V_n^*}{\omega_n W_n} \quad (2.75)$$

Substituindo-se (2.75) em (2.73) chega-se na a seguinte relação

$$\frac{1}{Q_{e,n}} + j \text{Im} \frac{\int_V \vec{J} \cdot \hat{E}_n^S d^3 r}{\epsilon_0 \omega_n a_n} = \frac{R_{sh,n}}{Q_n} Y_{e,n}. \quad (2.76)$$

A impedância de entrada normalizada (2.70) pode ser escrita em termos da resistência “shunt” da cavidade na forma

$$y_1 = Q_{ext,n1} \left[j \left(\frac{\omega}{\omega'_n} - \frac{\omega'_n}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_n} + \frac{y_2}{Q_{ext,n2}} + \frac{R_{sh,n}}{Q_n} Y_{e,n} \right], \quad (2.77)$$

e o balanço de potência complexo na cavidade excitada por feixe de elétrons se escreve

$$j \left(\frac{\omega}{\omega'_n} - \frac{\omega'_n}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_n} + \frac{y_1}{Q_{ext,n1}} + \frac{y_2}{Q_{ext,n2}} + \frac{R_{sh,n}}{Q_n} Y_{e,n} = 0. \quad (2.78)$$

2.1.6. Resumo da seção 2.1

As seguintes expressões para o balanço complexo de potência para uma cavidade reentrante, para emprego em amplificadores klystrons, são de interesse para este trabalho:

- a) Cavidade excitada por um feixe de elétrons (caso das cavidades intermediárias de um amplificador klystron)

$$j \left(\frac{\omega}{\omega'_n} - \frac{\omega'_n}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_n} + \frac{R_{sh,n}}{Q_n} Y_{e,n} = 0. \quad (2.79)$$

- b) Cavidade excitada por um feixe de elétrons com acoplamento com guia terminada com carga passiva (caso da cavidade de saída de um amplificador klystron)

$$j \left(\frac{\omega}{\omega'_n} - \frac{\omega'_n}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_n} + \frac{y_2}{Q_{ext,n2}} + \frac{R_{sh,n}}{Q_n} Y_{e,n} = 0. \quad (2.80)$$

- c) Cavidade excitada por uma fonte externa por meio de um terminal de entrada (guia de ondas ou coaxial) com um feixe de elétrons e com carregamento adicional com carga passiva (caso da cavidade de entrada de um amplificador klystron)

$$j \left(\frac{\omega}{\omega'_n} - \frac{\omega'_n}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_n} + \frac{y_1}{Q_{ext,n1}} + \frac{y_2}{Q_{ext,n2}} + \frac{R_{sh,n}}{Q_n} Y_{e,n} = 0. \quad (2.81)$$

2.2 Admitância eletrônica para “gaps” de interação em amplificadores klystrons com múltiplas cavidades – análise a pequenos sinais

O fenômeno físico de interesse a ser analisado nesta seção é aquele constituído por um feixe de elétrons com dimensão axial infinita e seção transversal circular de raio a , propagando-se no interior de um tubo de deriva de seção transversal circular de raio b , com $b > a$. Além disto, o feixe de elétrons tem seus parâmetros dc especificados por meio de sua densidade volumétrica de carga, ρ_0 , densidade de corrente J_0 , e velocidade de feixe u_0 associada à voltagem do feixe V_0 . Considera-se a existência de múltiplas cavidades

reentrantes acopladas ao tubo de deriva. A primeira delas, denominada de cavidade de entrada, é usada para produzir a modulação em velocidade inicial do feixe. A última cavidade, denominada de cavidade de saída, é utilizada para a extração da energia de RF associada ao feixe modulado. As cavidades intermediárias são usadas para o aumento da modulação em velocidade do feixe e, com isto, a corrente ac associada do feixe de elétrons.

Especificamente, nesta seção, utilizando uma abordagem a pequenos sinais, isto é, uma análise linear, será obtida uma expressão para a densidade de corrente de convecção associada à modulação em velocidade, em função do campo elétrico produzido nos gaps de interação. Ao final da seção, serão, também, desenvolvidas expressões para a transadmitância entre gaps e a admitância eletrônica dos gaps. Estas expressões serão utilizadas nas seções seguintes para a construção da expressão para o ganho de voltagem do amplificador klystron.

2.2.1 Densidade de corrente de convecção de um feixe modulado em velocidade

No apêndice A, mostra-se, segundo o formalismo de Brillouin [37], que um feixe elétrons, adequadamente construído, é um meio físico capaz de sustentar um movimento ondulatório denominado de ondas de carga espacial. Estas ondas consistem de um movimento de compressão e rarefação da densidade de carga espacial, $\rho(z,t)$ e demais grandezas físicas associadas, tais como a velocidade $u(z,t)$ e a densidade de corrente de convecção $J(z,t)$. Naquele apêndice foi possível obter a relação de dispersão das ondas de carga espacial. Nesta seção, com o objetivo de remover a hipótese simplificadora de uma dependência com a coordenada axial do tipo $e^{-j\beta z}$ e descrever uma possível amplificação da densidade de corrente, devido à ação do campo elétrico nos “gaps” de interação, as grandezas representativas para a descrição do problema serão escritas, por hipótese, na forma

$$f(z,t) = f_0 + f_1(z)\text{Re}[e^{j\omega t}], \quad (2.82)$$

onde $f(z,t)$ representa $\rho(z,t)$, $u(z,t)$ ou $J(z,t)$. A primeira parte da solução do problema consiste em obter-se uma expressão para a densidade de corrente de convecção. Deve ser observado que em (2.82) foi retirado a dependência da coordenada radial. Isto foi realizado de maneira a permitir uma solução analítica para a corrente de convecção em função da coordenada axial. Para incluir o efeito da parede do tubo de deriva será utilizado o conceito do fator de redução de carga espacial R . Seja o sistema de equações Euler-Poisson em uma dimensão. Sob a hipótese (2.82), este sistema se reduz a

$$j\omega p_1 + \frac{dJ_1}{dz} = 0, \quad (2.83)$$

$$j\omega u_1 + u_0 \frac{du_1}{dz} = \frac{u_0^2}{2V_0} [E_g(z) + E_{sc}(z)], \text{ e} \quad (2.84)$$

$$\frac{dE_{sc}}{dz} = \frac{\rho - \rho_0}{\epsilon_0} = \frac{\rho_1}{\epsilon_0}, \quad (2.85)$$

onde $E_g(z)$ e $E_{sc}(z)$ são os campos nos gaps e de carga espacial, respectivamente. V_0 é a voltagem do feixe e u_0 é a velocidade dc do feixe correspondente a voltagem do feixe. A densidade de corrente de convecção, sob a hipótese de pequenos sinais, é

$$J_1(z) = \rho_0 u_1 + \rho_1 u_0. \quad (2.86)$$

Resolvendo o sistema (2.83)-(2.85), com a utilização de (2.86) para $J_1(z)$, obtém-se a seguinte equação diferencial ordinária linear de segunda ordem não-homogênea

$$\frac{d^2 J_1}{dz^2} + 2j\beta_e \frac{dJ_1}{dz} - \beta_e^2 J_1 = j\beta_e \frac{J_0}{2V_0} [E_g(z) + E_{sc}(z)], \quad (2.87)$$

onde $\beta_e = \omega/u_0$ é a constante de propagação axial de uma onda plana fictícia que propaga com uma velocidade de fase igual a velocidade dc do feixe de elétrons. Utilizando (2.83) e (2.85), é possível obter a seguinte relação entre o campo de carga espacial $E_{sc}(z)$ e a densidade de corrente de convecção $J_1(z)$

$$\frac{d}{dz} \left[E_{sc}(z) - \frac{j}{\omega \epsilon_0} J_1(z) \right] = 0, \quad (2.88)$$

que sob a condição de contorno $E_{sc}(z)=0$ se $J_1(z)=0$, segue

$$E_{sc}(z) = \frac{j}{\omega \epsilon_0} J_1(z). \quad (2.89)$$

Para se considerar o efeito da presença das paredes do tubo de deriva, inclui-se o fator de redução de carga espacial R , conforme discutido no apêndice A, de tal forma que (2.89) passa a ser escrita na forma

$$E_{sc}(z) = R^2 \frac{j}{\omega \epsilon_0} J_1(z). \quad (2.90)$$

Substituindo (2.90) em (2.88) chega-se à

$$\frac{d^2 J_1}{dz^2} + 2j\beta_e \frac{dJ_1}{dz} - (\beta_e^2 - \beta_q^2) J_1 = j\beta_e \frac{J_0}{2V_0} E_g(z), \quad (2.91)$$

onde, segundo (A.44), a constante de propagação de plasma reduzida β_q é escrita

$$\beta_q^2 = R^2 \frac{J_0}{2V_0 u_0 \epsilon_0} = R^2 \beta_p^2 = R^2 \beta_e^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (2.92)$$

A solução de (2.91) pode ser construída utilizando a técnica da função de Green [18][19], sob as condições de contorno para $J_1(z=0)=0$ e $dJ_1(z=0)/dz=0$. Considera-se, para isso, um amplificador klystron de N cavidades conforme a FIG. 2.1, onde é possível visualizar também o tubo de deriva e os gaps de interação. Deve ser observado que estes gaps não têm grades, o que significa que o campo elétrico $E_g(z')$ de cada cavidade pode variar axialmente sem restrições ao longo de z . Além disso, exceto pela simetria, estas regiões são bem gerais, com campos arbitrários.

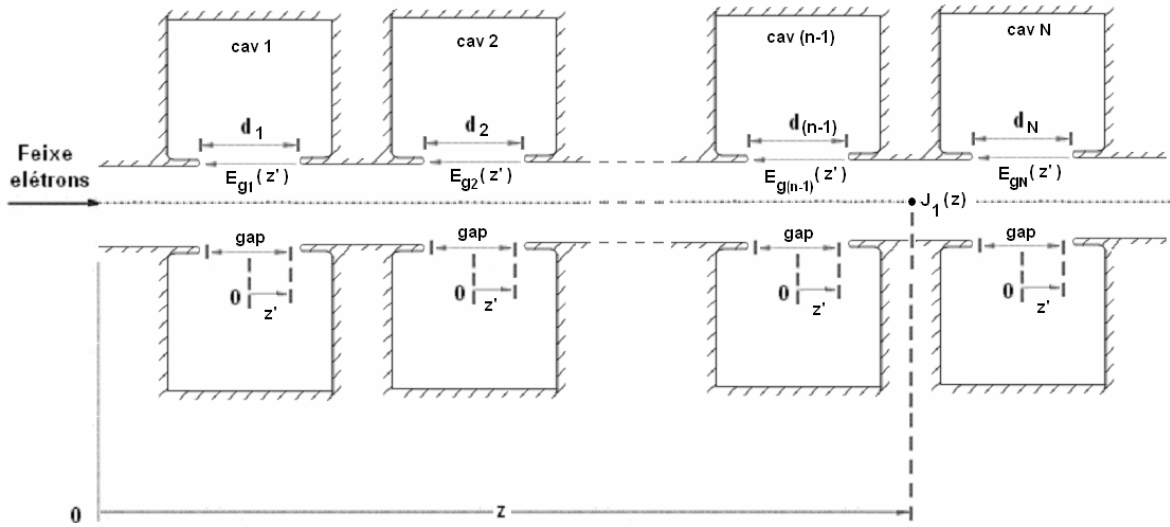


FIGURA 2.1. Geometria generalizada de um amplificador klystron de N cavidades reentrantes.

Deseja-se calcular a densidade de corrente na posição z devida à excitação $E_g(z')$ de uma cavidade que pode ser, por exemplo, a primeira cavidade. Considera-se, para resolver a equação diferencial não-homogênea (2.91), o operador

$$L = \left[\frac{d^2}{dz^2} + 2\gamma \frac{d}{dz} + \beta_0^2 \right], \quad (2.93)$$

onde, comparando-se com (2.91), tem-se

$$\gamma = j\beta_e, \quad e \quad (2.94)$$

$$\beta_0^2 = \beta_q^2 - \beta_e^2. \quad (2.95)$$

Considerando, também, o termo fonte como

$$g(z) = j \frac{1}{2} \frac{J_o \beta_e}{V_0} E_g(z), \quad (2.96)$$

pode-se escrever (2.91) como $LJ_1(z) = g(z)$, com as condições de contorno apresentadas anteriormente.

A técnica da função de Green consiste em resolver a seguinte equação não-homogênea

$$LG(z, z') = \delta(z - z'), \quad (2.97)$$

cuja solução $G(z, z')$ é denominada núcleo resolvente da função de Green. As condições de contorno são as mesmas da equação original, ou seja,

$$G(0, z') = 0, \text{ e} \quad (2.98)$$

$$\frac{dG(0, z')}{dz} = 0. \quad (2.99)$$

A solução da equação diferencial não-homogênea (2.91), utilizando a técnica da função de Green, é

$$J_1(z) = \int_0^{\infty} g(z')G(z, z')dz'. \quad (2.100)$$

A função delta de Dirac do lado direito de (2.97) faz com que a análise da equação diferencial fique dividida em duas partes: a primeira para $z = z'$, quando $\delta(z - z') = \infty$; e a segunda para os dois intervalos criados $0 \leq z < z'$ e $z' < z \leq \infty$, quando $\delta(z - z') = 0$. Portanto, passa-se a ter duas equações diferenciais homogêneas

$$LG_1(z, z') = 0, \text{ para } 0 \leq z < z'; \text{ e} \quad (2.101)$$

$$LG_2(z, z') = 0, \text{ para } z' < z \leq \infty. \quad (2.102)$$

Além disto, existem duas condições adicionais. Primeiramente, no ponto $z = z'$, a função $G(z, z')$ deve ser contínua e, portanto, as duas funções, $G_1(z, z')$ e $G_2(z, z')$, devem ser iguais. A outra relação de relevância é obtida integrando-se, no intervalo $z' - \varepsilon \leq z < z' + \varepsilon$, com ε muito pequeno ($\varepsilon \rightarrow 0$), os dois lados da equação (2.97). Portanto, as duas condições adicionais impostas são:

- Continuidade de $G(z, z')$ no ponto z' , qual seja

$$G_1(z', z') = G_2(z', z') ; \text{ e} \quad (2.103)$$

- Descontinuidade de primeira espécie de $dG(z, z')/dz$ no ponto z' , qual seja

$$\frac{dG_2(z', z')}{dz} - \frac{dG_1(z', z')}{dz} = \frac{1}{a_0(z')}. \quad (2.104)$$

Neste problema, $a_0(z') = 1$. Quando $z \neq z'$, ou seja, quando $\delta(z - z') = 0$, (2.97) torna-se homogênea

$$LG(z, z') = \left[\frac{d^2}{dz^2} + 2\gamma \frac{d}{dz} + \beta_0^2 \right] G(z, z') = 0. \quad (2.105)$$

Como $k_0^2 > \gamma^2$, é possível demonstrar que solução de $G(z, z')$, a partir das equações diferenciais (2.101) e (2.102), resulta

$$G(z, z') = \begin{cases} G_1(z, z') = e^{-\gamma z} [A_1 \cos(\beta_q z) + B_1 \text{sen}(\beta_q z)], & \text{para } z < z' \\ G_2(z, z') = e^{-\gamma z} [A_2 \cos(\beta_q z) + B_2 \text{sen}(\beta_q z)], & \text{para } z > z' \end{cases}, \quad (2.106)$$

onde as constantes são calculadas considerando as condições de contorno. Utilizando (2.98) e (2.99), obtém-se

$$A_1 = B_1 = 0. \quad (2.107)$$

Os valores de A_2 e B_2 são encontrados a partir das duas propriedades adicionais (2.103) e (2.104) e valem

$$A_2 = -\frac{\text{sen}(\beta_q z')}{\beta_q} e^{\gamma z'}, \quad (2.108)$$

$$B_2 = \frac{\cos(\beta_q z')}{\beta_q} e^{\gamma z'}. \quad (2.109)$$

Com isso, (2.106) resulta

$$G(z, z') = \begin{cases} G_1(z, z') = 0, & \text{para } z < z' \\ G_2(z, z') = e^{-\gamma(z-z')} \frac{\text{sen}[\beta_q(z-z')]}{\beta_q}, & \text{para } z > z' \end{cases}, \quad (2.110)$$

e a solução da equação diferencial não-homogênea, dada por (2.91), pode ser escrita como

$$J_1(z) = \int_0^{\infty} g(z') G(z, z') dz' = \int_0^z g(z') G(z, z') dz' + \int_z^{\infty} g(z') G(z, z') dz', \quad (2.111)$$

o que pode ser entendido como

$$J_1(z) = \begin{cases} \int_0^z g(z') G_2(z, z') dz', & \text{para } z > z' \\ \int_z^{\infty} g(z') G_1(z, z') dz', & \text{para } z < z' \end{cases}, \quad (2.112)$$

significando que, no primeiro termo, z' varia de 0 a z e, portanto, z é o máximo. No segundo termo, z' varia de z a ∞ e, portanto, z é o mínimo. Com isso, o segundo termo da solução (2.112) é nulo, pois $G_1(z, z') = 0$. Portanto, a solução da equação diferencial não-homogênea (2.91) é

$$J_1(z) = j \frac{1}{2} \frac{J_0}{V_0} \frac{\beta_c}{\beta_q} \int_0^z E_g(z') e^{-j\beta_c(z-z')} \text{sen}[\beta_q(z-z')] dz'. \quad (2.113)$$

A expressão (2.113) traduz o efeito sobre a densidade de corrente de convecção, na posição z , devido à ação do campo elétrico $E_g(z')$ presente em um gap de interação localizado na posição axial z' , com $z \geq z'$.

2.2.2 Expressão para a densidade de corrente de convecção aplicada um amplificador klystron de múltiplas cavidades

Seja um arranjo de um amplificador klystron de múltiplas cavidades de um total de N gaps de interação separados, não acoplados, montados em cascata, existindo entre eles regiões de deriva. Seja o k -ésimo gap de interação onde o campo de RF é expresso segundo

$$E_{gk}(z) = A_k V_0 f_k(z) = A_k e^{j\varphi_k} V_0 f_k(z), \quad (2.114)$$

onde $f_k(z)$ descreve a distribuição espacial do campo elétrico no gap, A_k e φ_k são a amplitude e fase do campo elétrico do gap e V_0 é a voltagem associada. A distribuição espacial do campo elétrico satisfaz a condição de normalização

$$\int_0^{d_k} f_k^2(z) dz = \frac{1}{d_k}, \quad (2.115)$$

onde d_k é o comprimento físico do k -ésimo gap de interação. A expressão para a densidade de corrente no n -ésimo gap de interação devido à interação do campo elétrico deste gap e também dos $(n-1)$ -ésimos gaps anteriores, com $n \leq N$, pode ser escrita, segundo (2.113), como

$$J_n(z) = j \frac{J_0}{2} \frac{\beta_e}{\beta_q} A_n e^{j\varphi_n} \left\{ \int_{d_{n1}}^z f_n(z') e^{-j\beta_e(z-z')} \text{sen}[\beta_q(z-z')] dz' + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{A_n} e^{j(\varphi_k - \varphi_n)} \int_{d_{k1}}^{d_{k2}} f_k(z') e^{-j\beta_e(z-z')} \text{sen}[\beta_q(z-z')] dz' \right\}. \quad (2.116)$$

Para representar (2.116) em uma forma mais conveniente para o projeto de amplificadores klystrons de múltiplas cavidades, realizar-se-á uma mudança de variável. Lembrando que d_{k2} e d_{k1} são as cotas das extremidades de saída e entrada do k -ésimo gap, o comprimento deste gap de interação é

$$d_k = d_{k2} - d_{k1}. \quad (2.117)$$

Seja a mudança de variável

$$\xi' = z' - \frac{d_{k2} + d_{k1}}{2}. \quad (2.118)$$

Com esta mudança de variável, a segunda integral em (2.116) se transforma, resultando em

$$\begin{aligned} \int_{d_{k1}}^{d_{k2}} f_k(z') e^{-j\beta_e(z-z')} \text{sen}[\beta_q(z-z')] dz' &= \frac{1}{2j} \left[e^{-j\beta^+ z} \int_{d_{k1}}^{d_{k2}} f_k(z') e^{j\beta^- z'} dz' - e^{-j\beta^+ z} \int_{d_{k1}}^{d_{k2}} f_k(z') e^{j\beta^+ z'} dz' \right] \\ &= \frac{1}{2j} \left[e^{-j\beta^+ (\xi + d_{k,n})} \int_{-d_k/2}^{d_k/2} f_k(\xi') e^{j\beta^- \xi'} d\xi' - e^{-j\beta^+ (\xi + d_{k,n})} \int_{-d_k/2}^{d_k/2} f_k(\xi') e^{j\beta^+ \xi'} d\xi' \right], \end{aligned} \quad (2.119)$$

onde utilizou-se as definições

$$\beta^+ = \beta_e + \beta_q, \text{ e} \quad (2.120)$$

$$\beta^- = \beta_e - \beta_q, \quad (2.121)$$

que representam as constantes de propagação das ondas de carga espacial lenta e rápida, respectivamente, e

$$d_{k,n} = \frac{d_{n2} + d_{n1}}{2} - \frac{d_{k2} + d_{k1}}{2}, \quad (2.122)$$

que representa a distância entre centros do k -ésimo e o n -ésimo gaps de interação. Aplicando o mesmo raciocínio na primeira integral em (2.116) e definindo as integrais, que representam a transformada de Fourier do campo elétrico do gap da cavidade, em relação as constante de propagação das ondas rápida e lentas,

$$M_k^- = |M_k^-| e^{j\delta_k^-} = \int_{-d_k/2}^{d_k/2} f_k(\xi') e^{j\beta^- \xi'} d\xi', \quad (2.123)$$

$$M_k^+ = |M_k^+| e^{j\delta_k^+} = \int_{-d_k/2}^{d_k/2} f_k(\xi') e^{j\beta^+ \xi'} d\xi', \quad (2.124)$$

a integral (2.116) se escreve

$$J_n(\xi) = -\frac{J_0}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} A_n e^{j\varphi_n} \left\{ \left[e^{-j\beta^- \xi} \int_{-d_n/2}^{\xi} f_n(\xi') e^{j\beta^- \xi'} d\xi' - e^{-j\beta^+ \xi} \int_{-d_n/2}^{\xi} f_n(\xi') e^{j\beta^+ \xi'} d\xi' \right] + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{A_n} e^{j(\varphi_k - \varphi_n)} \left[e^{-j\beta^- (\xi + d_{k,n})} M_k^- - e^{-j\beta^+ (\xi + d_{k,n})} M_k^+ \right] \right\}. \quad (2.125)$$

Adicionalmente, definindo-se os ângulos de trânsitos

$$\beta^- d_{k,n} = \theta_{k,n}^-, \quad (2.126)$$

$$\beta^+ d_{k,n} = \theta_{k,n}^+, \quad (2.127)$$

$$\beta^- \xi = \theta^-(\xi), \quad (2.128)$$

$$\beta^+ \xi = \theta^+(\xi), \quad (2.129)$$

a densidade de corrente pode ser condensada, resultando em

$$J_n(\xi) = -\frac{J_0}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} A_n e^{j\varphi_n} \left\{ \left[e^{-j\theta^-(\xi)} \int_{-d_n/2}^{\xi} f_n(\xi') e^{j\beta^- \xi'} d\xi' - e^{-j\theta^+(\xi)} \int_{-d_n/2}^{\xi} f_n(\xi') e^{j\beta^+ \xi'} d\xi' \right] + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{A_n} e^{j(\varphi_k - \varphi_n)} \left[e^{-j[\theta_{k,n}^- + \theta^-(\xi)]} M_k^- - e^{-j[\theta_{k,n}^+ + \theta^+(\xi)]} M_k^+ \right] \right\}. \quad (2.130)$$

Wessel-Berg [38] introduziu o seguinte operador, denominado de operador diferença,

$$\Delta g(\beta) = g(\beta^+) - g(\beta^-) = g(\beta_e + \beta_q) - g(\beta_e - \beta_q), \quad (2.131)$$

de maneira que (2.130), utilizando a notação (2.131), pode ser escrita na forma

$$J_n(\xi) = -\frac{J_0}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} A_n e^{j\varphi_n} \left\{ \Delta \left[e^{-j\theta(\xi)} \int_{-d_n/2}^{\xi} f_n(\xi') e^{j\beta \xi'} d\xi' \right] + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{A_n} e^{j(\varphi_k - \varphi_n)} \Delta \left[M_k e^{-j[\theta_{k,n} + \theta(\xi)]} \right] \right\}. \quad (2.132)$$

2.2.3 A admitância eletrônica no n -ésimo gap de interação

Uma vez determinada, a expressão para a distribuição de densidade de corrente de convecção no n -ésimo gap de interação, uma expressão para admitância eletrônica pode ser construída. Por definição, a expressão geral para admitância eletrônica normalizada é, segundo (2.72), dada

$$y_{e,n} = \frac{Y_{e,n}}{G_0} = \frac{2P_n}{V_n V_n^* G_0}, \quad (2.133)$$

onde o fluxo de potência complexa P_n entre a n -ésima cavidade e o feixe de elétrons é dado segundo a integral, (2.65),

$$P_n = \frac{1}{2} \int_{-d_n/2}^{d_n/2} J_n(\xi) E_n^*(\xi) d\xi. \quad (2.134)$$

Substituindo-se a expressão (2.114) para o campo elétrico da n -ésima cavidade e a expressão (2.130) para a densidade de corrente no n -ésimo gap de interação devido à ação dos $(n-1)$ gaps anteriores, a integração para o fluxo de potência complexa resulta em

$$P_n = -\frac{J_0}{8} \frac{\beta_c}{\beta_q} A_n e^{j\varphi_n} \int_{-d_n/2}^{d_n/2} \left\{ e^{-j\theta^-(\xi)} \int_{-d_n/2}^{\xi} f_n(\xi') e^{j\beta^-\xi'} d\xi' - e^{-j\theta^+(\xi)} \int_{-d_n/2}^{\xi} f_n(\xi') e^{j\beta^+\xi'} d\xi' \right\} \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{A_n} e^{j(\varphi_k - \varphi_n)} \left[e^{-j[\theta_{k,n}^+ + \theta^-(\xi)]} M_k^- - e^{-j[\theta_{k,n}^- + \theta^+(\xi)]} M_k^+ \right] A_n e^{-j\varphi_n} V_0 f_n(\xi) d\xi. \quad (2.135)$$

ou, ainda,

$$P_n = -\frac{J_0 V_0}{8} \frac{\beta_c}{\beta_q} |A_n|^2 \left\{ \int_{-d_n/2}^{d_n/2} f_n(\xi) e^{-j\theta^-(\xi)} d\xi \int_{-d_n/2}^{\xi} f_k(\xi') e^{j\beta^-\xi'} d\xi' - \int_{-d_n/2}^{d_n/2} f_n(\xi) e^{-j\theta^+(\xi)} d\xi \int_{-d_n/2}^{\xi} f_k(\xi') e^{j\beta^+\xi'} d\xi' \right\} \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{A_n} e^{j(\varphi_k - \varphi_n)} \left[\int_{-d_n/2}^{d_n/2} f_n(\xi) e^{-j\theta^-(\xi)} d\xi e^{-j\theta_{k,n}^-} M_k^- - \int_{-d_n/2}^{d_n/2} f_n(\xi) e^{-j\theta^+(\xi)} d\xi e^{-j\theta_{k,n}^+} M_k^+ \right]. \quad (2.136)$$

Observando que os coeficientes de acoplamento do k -ésimo gap podem ser escritos como

$$\int_{-d_k/2}^{d_k/2} f_k(\xi) e^{-j\beta^-\xi} d\xi = |M_k^-| e^{-j\theta_k^-} = (M_k^-)^*, \quad (2.137)$$

$$\int_{-d_k/2}^{d_k/2} f_k(\xi) e^{-j\beta^+\xi} d\xi = |M_k^+| e^{-j\theta_k^+} = (M_k^+)^*, \quad (2.138)$$

o fluxo de potência complexa (2.136) pode ser escrito como

$$P_n = -\frac{J_0 V_0}{8} \frac{\beta_e}{\beta_q} |A_n|^2 \left\{ \left[\int_{-d_n/2}^{d_n/2} f_n(\xi) e^{-j\theta^-(\xi)} d\xi \int_{-d_n/2}^{\xi} f_k(\xi') e^{j\beta^-\xi'} d\xi' - \int_{-d_n/2}^{d_n/2} f_n(\xi) e^{-j\theta^+(\xi)} d\xi \int_{-d_n/2}^{\xi} f_k(\xi') e^{j\beta^+\xi'} d\xi' \right] + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{A_n} e^{j(\varphi_k - \varphi_n)} \left[M_k^-(M_n^-)^* e^{-j\theta_{k,n}^-} - M_k^+(M_n^+)^* e^{-j\theta_{k,n}^+} \right] \right\} \quad (2.139)$$

Utilizando a notação do operador diferença de Wessel-Berg (2.131), a expressão acima se escreve, de forma mais compacta, como

$$P_n = -\frac{J_0 V_0}{8} \frac{\beta_e}{\beta_q} |A_n|^2 \left\{ \Delta \left[\int_{-d_n/2}^{d_n/2} f_n(\xi) e^{-j\theta(\xi)} d\xi \int_{-d_n/2}^{\xi} f_k(\xi') e^{j\beta\xi'} d\xi' \right] + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{A_n} e^{j(\varphi_k - \varphi_n)} \Delta \left[M_k (M_n)^* e^{-j\theta_{k,n}} \right] \right\}. \quad (2.140)$$

É possível um desenvolvimento adicional da integral dupla. Seja a primeira integral em (2.139)

$$I = \int_{-d_n/2}^{d_n/2} f_n(\xi) e^{-j\beta^-\xi} d\xi \int_{-d_n/2}^{\xi} f_k(\xi') e^{j\beta^-\xi'} d\xi'. \quad (2.141)$$

Integrando esta expressão por partes, pode-se escrever

$$I = \int_{-d_n/2}^{d_n/2} f_n(\xi) e^{-j\beta^-\xi} d\xi \int_{-d_n/2}^{d_n/2} f_k(\xi) e^{j\beta^-\xi} d\xi - \int_{-d_n/2}^{d_n/2} f_n(\xi) e^{j\beta^-\xi} d\xi \int_{-d_n/2}^{\xi} f_k(\xi') e^{-j\beta^-\xi'} d\xi', \quad (2.142)$$

ou, ainda,

$$I = \int_{-d_n/2}^{d_n/2} f_n(\xi) e^{-j\beta^-\xi} d\xi \int_{-d_n/2}^{d_n/2} f_k(\xi) e^{j\beta^-\xi} d\xi - I^*, \quad (2.143)$$

onde I^* representa o complexo conjugado de I . Desta forma, tem-se

$$\int_{-d_n/2}^{d_n/2} f_n(\xi) e^{-j\beta^-\xi} d\xi \int_{-d_n/2}^{d_n/2} f_k(\xi) e^{j\beta^-\xi} d\xi = I + I^* = 2 \operatorname{Re}[I] = M_k^-(M_k^-)^*. \quad (2.144)$$

Portanto,

$$I = \frac{1}{2} M_k^-(M_k^-)^* + j \int_{-d_n/2}^{d_n/2} \int_{-d_n/2}^{\xi} f_n(\xi) f_k(\xi') \operatorname{sen}[\beta^-(\xi - \xi')] d\xi d\xi'. \quad (2.145)$$

Substituindo este resultado em (2.140), obtém-se

$$P_n = -\frac{J_0}{8} \frac{\beta_e}{\beta_q} |A_n|^2 V_0^2 \left\{ \frac{1}{2} \Delta [M_n^- M_n^+] + j \Delta \left[\int_{-d_n/2}^{d_n/2} \int_{-d_n/2}^{\xi} f_n(\xi) f_n(\xi') \operatorname{sen}[\beta^-(\xi - \xi')] d\xi d\xi' \right] + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{A_n} e^{j(\varphi_k - \varphi_n)} \Delta [M_k^- M_n^* e^{-j\theta_{k,n}^-}] \right\}. \quad (2.146)$$

Finalmente, substituindo a expressão para o fluxo de potência complexa (2.146) na expressão para a admitância eletrônica, obtém-se

$$y_{e,n} = \frac{Y_{e,n}}{G_0} = -\frac{1}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left\{ \frac{1}{2} \Delta[M_n M_n^*] + j\Delta \left[\int_{-d_n/2}^{d_n/2} \int_{-d_n/2}^{\xi} f_n(\xi) f_n(\xi') \text{sen}[\beta(\xi - \xi')] d\xi d\xi' \right] + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{A_n} e^{j(\varphi_k - \varphi_n)} \Delta[M_k M_n^* e^{-j\theta_{k,n}}] \right\}. \quad (2.147)$$

Definindo-se a trans-admitância eletrônica normalizada $y_{k,n}$ e a admitância eletrônica normalizada $y_{n,n}$ segundo as expressões

$$y_{k,n} = -\frac{1}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} \Delta(M_k M_n^* e^{-j\theta_{k,n}}), \quad e \quad (2.148)$$

$$y_{n,n} = -\frac{1}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left\{ \frac{1}{2} \Delta(M_n M_n^*) + j\Delta \left[\int_{-d_n/2}^{d_n/2} \int_{-d_n/2}^{\xi} f_n(\xi) f_n(\xi') \text{sen}[\beta(\xi - \xi')] d\xi d\xi' \right] \right\}, \quad (2.149)$$

a admitância eletrônica total, do n -ésimo gap, pode ser escrita em uma forma mais concisa

$$y_{e,n} = \frac{Y_{e,n}}{G_0} = y_{n,n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{A_n} e^{j(\varphi_k - \varphi_n)} y_{k,n}. \quad (2.150)$$

2.2.4 Conclusão da seção 2.2

Nesta seção obteve-se uma expressão para a distribuição da densidade de corrente de convecção do feixe de elétrons em função do campo elétrico nos gaps de interação, ao longo de um tubo de deriva com N -gaps de interação. A expressão desenvolvida para a admitância eletrônica total normalizada $y_{e,n}$, em conjunto com as expressões (2.79)–(2.81) para a admitância do circuito das cavidades, formam a base para a determinação do ganho de voltagem do amplificador klystron de múltiplas cavidades, já que permitirão se obter uma relação entre os coeficientes de voltagem A_k/A_n .

2.3 Cálculo do ganho de voltagem em amplificadores klystrons com múltiplas cavidades

Nesta seção apresenta-se o desenvolvimento para a expressão para o ganho de voltagem do amplificador klystron de múltiplas cavidades a partir das expressões para a admitância do circuito das cavidades, desenvolvida da seção 2.1, em conjunto com as expressões para a trans-admitância e a admitância eletrônica total desenvolvidas na seção 2.2.

2.3.1. Ganho de voltagem

Seja um amplificador klystron de N cavidades que, por hipótese, estão desacopladas na ausência do feixe de elétrons. Esta hipótese é justificada no apêndice B, onde se calcula o campo elétrico gerado nas proximidades do gap de interação. A primeira cavidade é denominada cavidade de entrada, sendo excitada por uma fonte de externa de RF . A última

cavidade, denominada de cavidade de saída, é a cavidade por onde o sinal amplificado é extraído. As cavidades intermediárias são excitadas pela corrente de RF do próprio feixe de elétrons. Utilizando o formalismo apresentado nas seções 2.1 e 2.2, que considera, utilizando uma análise a pequenos sinais, o efeito da carga espacial, será construído um sistema de N equações algébricas relacionando as A_N amplitudes de RF para os N gaps de interação, onde cada equação do sistema descreve o balanço de potência em cada cavidade. Este sistema é resolvido a fim de se obter uma expressão para o ganho de voltagem (razão A_N/A_1) do amplificador klystron de múltiplas cavidades.

Na seção 2.1 obteve-se uma expressão para a admitância do circuito das cavidades (2.79) e, na seção 2.2, obteve-se uma expressão para a admitância eletrônica total no n -ésimo gap (2.150). Reescrevendo essas expressões, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} j\left(\frac{\omega}{\omega_N} - \frac{\omega_N}{\omega}\right) + \frac{1}{Q_{L,N}} + \left(\frac{R_{sh}}{Q}\right)_n Y_{e,N} = 0 \\ \frac{Y_{e,N}}{G_0} = y_{N,N} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{A_k}{A_N} e^{j(\varphi_k - \varphi_N)} y_{k,N} \end{cases} \quad (2.151)$$

Resolvendo este sistema para a admitância eletrônica do N -ésimo gap, pode-se escrever

$$A_N \left[y_{N,N} + \left(\frac{Q}{R_{sh}}\right)_N \frac{1}{G_0 Q_{L,N}} \left(1 + j2Q_{L,N} \frac{\Delta\omega_N}{\omega_N}\right) \right] + \sum_{k=1}^{N-1} A_k e^{j(\varphi_k - \varphi_N)} y_{k,N} = 0, \quad (2.152)$$

onde o parâmetro de sintonia em frequência é definido segundo

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_N} - \frac{\omega_N}{\omega} \right) \cong \frac{\omega - \omega_N}{\omega_N} = \frac{\Delta\omega_N}{\omega_N}. \quad (2.153)$$

Em (2.151), o fator de qualidade da cavidade carregado, $Q_{L,N}$, inclui todos os tipos de carregamento da cavidade, exceto o carregamento devido aos efeitos do feixe de elétrons.

É possível escrever um sistema com $(m-1)$ equações lineares da forma de (2.152), começando com $k = 2$, tendo em vista que a primeira cavidade é excitada externamente. Considerando que a amplitude A_1 do campo de RF no primeiro gap é conhecida e diferente de zero, (2.152) pode ser escrita na forma,

$$\frac{A_m}{A_1} e^{j\varphi_m} \left[y_{m,m} + \left(\frac{Q}{R_{sh}}\right)_m \frac{1}{G_0 Q_{L,m}} \left(1 + j2Q_{L,m} \frac{\Delta\omega_m}{\omega_m}\right) \right] + \sum_{k=2}^{m-1} \frac{A_k}{A_1} e^{j\varphi_k} y_{k,m} = -y_{1,m}, \text{ com } m=2, 3, 4, \dots, N. \quad (2.154)$$

Definindo-se o ganho de voltagem complexo η_m entre a primeira e a m -ésima cavidade segundo

$$\eta_m = \frac{A_m}{A_1} e^{j\varphi_m}, \quad (2.155)$$

além da soma da admitância eletrônica do gap $y_{m,m}$, com a admitância do circuito da cavidade segundo

$$\bar{y}_{m,m} = y_{m,m} + \left(\frac{Q}{R_{sh}} \right)_m \frac{1}{G_0 Q_{L,m}} \left(1 + j2Q_{L,m} \frac{\Delta\omega_m}{\omega_m} \right), \quad (2.156)$$

obtém-se uma expressão geral para (2.154), que pode ser escrita na forma geral

$$\bar{y}_{m,m} \eta_m + \sum_{k=2}^{m-1} y_{k,m} \eta_k = -y_{1,m}. \quad (2.157)$$

Explicitamente, (2.157) conduz no sistema de equações, escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_{2,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_{2,3} & \bar{y}_{3,3} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{2,4} & y_{3,4} & \bar{y}_{4,4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{2,N} & y_{3,N} & y_{4,N} & \cdots & \bar{y}_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ \vdots \\ \eta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_{1,2} \\ -y_{1,3} \\ -y_{1,4} \\ \vdots \\ -y_{1,N} \end{bmatrix} \quad (2.158)$$

Analisando o sistema de equações algébricas (2.158) pode-se inferir que a condição para η_m ser finito é que o determinante do sistema seja não nulo, isto é:

$$\text{Det} = \bar{y}_{2,2} \bar{y}_{3,3} \bar{y}_{4,4} \cdots \bar{y}_{N,N} \neq 0, \quad (2.159)$$

o que implica, em vista de $\bar{y}_{m,m}$ ser uma grandeza complexa, que $\text{Re}[\bar{y}_{m,m}] \neq 0$ ou $\text{Im}[\bar{y}_{m,m}] \neq 0$. Esta condição tem um significado físico muito importante. Observando que $\bar{y}_{m,m}$ é a soma das admitâncias eletrônica e do circuito da k -ésima cavidade, a condição de $\bar{y}_{m,m} = 0$ traduz o início das auto-oscilações nesta cavidade, já que na análise de pequenos sinais não é possível descrever o efeito de saturação. A partir da análise da condição $\text{Re}[\bar{y}_{m,m}] \neq 0$ pode-se estabelecer um critério para a operação estável de um amplificador klystron de múltiplas cavidades

$$\text{Re}[\bar{y}_{m,m}] = \bar{g}_{m,m} = -\frac{1}{8} \frac{\beta_c}{\beta_q} \Delta(M_m M_m^*) + \left(\frac{Q}{R_{sh}} \right)_m \frac{1}{G_0 Q_{L,m}} > 0, \text{ para } m = 2, 3, 4, \dots, N, \quad (2.160)$$

que assegura que o “beam loading” negativo não será suficientemente elevado para produzir oscilações em qualquer uma das cavidades do arranjo em cascata. A solução do sistema (2.158) conduz à expressão geral para o ganho em voltagem de um arranjo de N cavidades em cascata

$$\eta_N = \frac{A_N}{A_1} e^{j\varphi_N} = \sum_{k_1=2}^N \sum_{k_2=k_1+1}^N \cdots \sum_{k_{N-2}=k_{N-3}+1}^N \left(-\frac{y_{1,k_1}}{\bar{y}_{k_1,k_1}} \right) \left(-\frac{y_{k_1,k_2}}{\bar{y}_{k_2,k_2}} \right) \cdots \left(-\frac{y_{k_{N-2},N}}{\bar{y}_{N,N}} \right) \quad (2.161)$$

Utilizando (2.161), as expressões para o ganho de voltagem de um amplificador klystron com 2, 3 e 4 cavidades são escritas, respectivamente, na forma

$$(02 \text{ cavidades}) \quad \eta_2 = \frac{A_2}{A_1} e^{j\varphi_2} = -\frac{y_{1,2}}{\bar{y}_{2,2}}, \quad (2.162)$$

$$(03 \text{ cavidades}) \quad \eta_3 = \frac{A_3}{A_1} e^{j\varphi_3} = -\frac{y_{1,3}}{\bar{y}_{3,3}} + \frac{y_{1,2}}{\bar{y}_{2,2}} \frac{y_{2,3}}{\bar{y}_{3,3}}, \text{ e} \quad (2.163)$$

$$(04 \text{ cavidades}) \quad \eta_4 = \frac{A_4}{A_1} e^{j\varphi_4} = -\frac{y_{1,4}}{\bar{y}_{4,4}} + \frac{y_{1,2}}{\bar{y}_{2,2}} \frac{y_{2,4}}{\bar{y}_{4,4}} + \frac{y_{1,3}}{\bar{y}_{3,3}} \frac{y_{3,4}}{\bar{y}_{4,4}} - \frac{y_{1,2}}{\bar{y}_{2,2}} \frac{y_{2,3}}{\bar{y}_{3,3}} \frac{y_{3,4}}{\bar{y}_{4,4}}. \quad (2.164)$$

Quando o ganho por estágio é grande comparado ao número de cavidades, é possível demonstrar que todos os termos em (2.161) são pequenos comparados com o termo que apresenta o maior número de termos. Esta condição, que é encontrada na maioria das aplicações práticas, conduz a uma simplificação na expressão do ganho para um arranjo de N cavidades, tal que

$$\eta_N = \left(-\frac{y_{1,2}}{\bar{y}_{2,2}} \right) \left(-\frac{y_{2,3}}{\bar{y}_{3,3}} \right) \dots \left(-\frac{y_{N-1,N}}{\bar{y}_{N,N}} \right) = \prod_{k=2}^N \left(-\frac{y_{k-1,k}}{\bar{y}_{k,k}} \right) \quad (2.165)$$

2.3.2. Solução exata para o ganho de voltagem em um amplificador klystron de múltiplas cavidades com cavidades idênticas e igualmente espaçadas

É possível obter-se uma expressão exata para o ganho de voltagem, sob a hipótese de cavidades idênticas e igualmente espaçadas. Esta expressão é de relevância, pois permite desenvolver um sentimento físico sobre o ganho do amplificador em condições particulares.

Observando a expressão da trans-admitância entre dois gaps de interação consecutivos, que segundo (2.148), tem a forma

$$y_{k-1,k} = -\frac{1}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} \Delta(M_{k-1} M_k^* e^{-j\theta_{k-1,k}}) = -\frac{1}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left[M_{k-1}^+ (M_k^+)^* e^{-j\theta_{k-1,k}^-} - M_{k-1}^- (M_k^-)^* e^{-j\theta_{k-1,k}^+} \right], \quad (2.166)$$

e, observando que os coeficientes de acoplamento para as ondas lenta e rápida são escritos como $M_k^- = |M_k^-| e^{j\delta_k^-}$ e $M_k^+ = |M_k^+| e^{j\delta_k^+}$, respectivamente, a expressão (2.166) pode ser escrita

$$y_{k-1,k} = -\frac{1}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left[|M_{k-1}^+| |M_k^+| e^{-j(\theta_{k-1,k}^- - \delta_{k-1}^- + \delta_k^+)} - |M_{k-1}^-| |M_k^-| e^{-j(\theta_{k-1,k}^+ - \delta_{k-1}^+ + \delta_k^-)} \right]. \quad (2.167)$$

Seja o módulo ao quadrado da trans-admitância $|y_{k-1,k}|$ dado por

$$|y_{k-1,k}|^2 = \frac{1}{16} \left(\frac{\beta_e}{\beta_q} \right)^2 \left[|M_{k-1}^+|^2 |M_k^+|^2 + |M_{k-1}^-|^2 |M_k^-|^2 - 2 |M_{k-1}^+| |M_k^+| |M_{k-1}^-| |M_k^-| \cos(2\beta_q l_{k-1,k} + \delta_{k-1}^- - \delta_{k-1}^+ + \delta_k^- - \delta_k^+) \right]. \quad (2.168)$$

A partir da equação (2.168) pode-se depreender que a trans-admitância $y_{k-1,k}$ é função periódica do espaçamento $l_{k-1,k}$, com período igual a meio comprimento de onda de plasma reduzido. Os pontos de máximos da trans-admitância ocorrem para os seguintes valores do argumento

$$2\beta_q l_{k-1,k} = \frac{\pi}{2} + n\pi - (\delta_{k-1}^- - \delta_{k-1}^+ - \delta_k^- + \delta_k^+), \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.169)$$

Se os campos nos gaps são simétricos, então $(\delta_{k-1}^- - \delta_{k-1}^+ - \delta_k^- + \delta_k^+) = 0$. Portanto, se os campos nos gaps são simétricos e se o espaçamento entre cavidades é ótimo, isto é, caso o espaçamento seja tal que o módulo da trans-admitância $|y_{k-1,k}|$ é máximo, então o argumento de (2.168) vale

$$2\beta_q l_{k-1,k} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.170)$$

Neste caso, a trans-admitância resulta em

$$|y_{k-1,k}|_{\max} = \frac{1}{4} \left(\frac{\beta_e}{\beta_q} \right) \left[|M_{k-1}^-| |M_k^-| + |M_{k-1}^+| |M_k^+| \right]. \quad (2.171)$$

Por outro lado, os pontos de mínimo e o mínimo valor da trans-admitância, respectivamente, valem

$$2\beta_q l_{k-1,k} = n\pi, \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots, \text{ e} \quad (2.172)$$

$$|y_{k-1,k}|_{\min} = \frac{1}{4} \left(\frac{\beta_e}{\beta_q} \right) \left[|M_{k-1}^-| |M_k^-| - |M_{k-1}^+| |M_k^+| \right]. \quad (2.173)$$

É importante observar que, se o ganho por estágio é elevado, a expressão (2.165) para o ganho é válida e o espaçamento ótimo também maximiza o ganho.

Sendo os gaps de interação idênticos no arranjo das cavidades do amplificador klystron, a trans-admitância associada a qualquer par de gaps, diga-se o k -ésimo e o m -ésimo onde $k < m$ é escrita, segundo (2.167) observando que os ângulos de trânsito $\theta_{k,m}^- = \beta^- l_{k,m} = (\beta_e - \beta_q) l_{k,m}$ e $\theta_{k,m}^+ = \beta^+ l_{k,m} = (\beta_e + \beta_q) l_{k,m}$, é escrita como

$$y_{k,m} = -\frac{1}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} e^{-j\beta_e l_{k,m}} \left[|M^+|^2 e^{-j\beta_q l_{k,m}} - |M^-|^2 e^{j\beta_q l_{k,m}} \right]. \quad (2.174)$$

A condutância eletrônica do m -ésimo gap, parte real de (2.174), vale

$$g_{m,m} = g_{e,m} = -\frac{1}{8} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left[|M^+|^2 - |M^-|^2 \right], \quad (2.175)$$

e o coeficiente de acoplamento médio é dado por

$$\bar{M} = \frac{1}{2} \left[|M^+|^2 + |M^-|^2 \right]. \quad (2.176)$$

A expressão (2.174) pode ser desenvolvida utilizando a relação $e^{\pm jx} = \cos x \pm j \operatorname{sen} x$ e as expressões (2.175) e (2.176) para a condutância eletrônica e coeficiente de acoplamento médio, resultando em

$$y_{k,m} = e^{-j\theta_{k,m}} \left[j \frac{|M|^2 \theta_{k,m}}{2} \frac{\operatorname{sen} \left(\theta_{k,m} \frac{\beta_q}{\beta_e} \right)}{\theta_{k,m} \frac{\beta_q}{\beta_e}} + 2g_e \cos \left(\theta_{k,m} \frac{\beta_q}{\beta_e} \right) \right], \quad (2.177)$$

onde $\theta_{k,m} = \beta_e l_{k,m}$ é o ângulo de trânsito para elétrons entre os gaps k e m . Seja, agora, substituir o índice da soma por três valores da seguinte maneira

$$m = N \quad \bar{y}_{n,n} \eta_N + \sum_{k=2}^{N-1} y_{k,N} \eta_k = -y_{1,N}, \quad (2.178)$$

$$m = N-1 \quad \bar{y}_{n,n} \eta_{N-1} + \sum_{k=2}^{N-2} y_{k,N-1} \eta_k = -y_{1,N-1}, \quad \mathbf{e} \quad (2.179)$$

$$m = N+1 \quad \bar{y}_{n,n} \eta_{N+1} + \sum_{k=2}^N y_{k,N+1} \eta_k = -y_{1,N+1}. \quad (2.180)$$

Definindo, entre gaps de interação consecutivos, o ângulo de trânsito para elétrons e o ângulo de trânsito de plasma reduzido, respectivamente, segundo

$$\theta = \theta_{k-1,k} = \beta_e l_{k-1,k}, \quad \mathbf{e} \quad (2.181)$$

$$\theta_q = \theta \frac{\beta_q}{\beta_e} = \beta_q l_{k-1,k}, \quad (2.182)$$

e multiplicando (2.178) pela unidade, (2.179) por $-e^{-j\theta}/2 \cos \theta_q$ e (2.180) por $-e^{j\theta}/2 \cos \theta_q$, utilizando (2.177) e somando as três equações, obtém-se

$$\eta_{N+1} - 2e^{-j\theta} v \eta_N + e^{-j2\theta} (1-2u) \eta_{N-1} = 0, \quad (2.183)$$

onde

$$w = \frac{\bar{M}^2 \theta}{2\bar{y}}, \quad (2.184)$$

$$u = \frac{g_e}{\bar{y}}, \quad \mathbf{e} \quad (2.185)$$

$$v = (1-u) \cos \theta_q - j \frac{w \operatorname{sen} \theta_q}{2 \theta_q}. \quad (2.186)$$

Chega-se no resultado (2.183) observando-se que, após a multiplicação indicada, o agrupamento dos termos em que $k=1$ [lado direito de (2.178)–(2.180)] ou dos termos que multiplicam os ganhos η_m , com $m \neq N, N-1, N+1$, é da forma

$$-y_{m,N} + \frac{e^{-j\theta}}{2\cos\theta_q} y_{m,N-1} + \frac{e^{j\theta}}{2\cos\theta_q} y_{m,N+1}, \quad (2.187)$$

ou, ainda,

$$\frac{-(e^{j\theta} + e^{-j\theta})y_{m,N} + e^{-j\theta} y_{m,N-1} + e^{j\theta} y_{m,N+1}}{2\cos\theta_q}. \quad (2.188)$$

Utilizando-se (2.174) para calcular as trans admitâncias de (2.188) e, após as multiplicações pelas exponenciais, verifica-se que (2.188) se anula. Com isso, a expressão que permanece do somatório (2.178)–(2.180) é

$$-\frac{e^{j\theta}}{2\cos\theta_q} \bar{y} \eta_{N+1} + \left(\bar{y} - \frac{e^{j\theta}}{2\cos\theta_q} y_{N,N+1} \right) n_N + \left(y_{N-1,N} - \frac{e^{-j\theta}}{2\cos\theta_q} \bar{y} - \frac{e^{j\theta}}{2\cos\theta_q} y_{N-1,N+1} \right) n_{N-1} = 0, \quad (2.189)$$

ou, ainda,

$$\eta_{N+1} + \left(-\frac{2\cos\theta_q}{e^{j\theta}} + \frac{y_{N,N+1}}{\bar{y}} \right) \eta_N + \left(-\frac{2\cos\theta_q}{e^{j\theta}} \frac{y_{N-1,N}}{\bar{y}} + e^{-j2\theta} + \frac{y_{N-1,N+1}}{\bar{y}} \right) \eta_{N-1} = 0. \quad (2.190)$$

A expressão que multiplica η_N em (2.190), utilizando (2.177) e (2.184)–(2.186), resulta em

$$-2e^{-j\theta} v. \quad (2.191)$$

A expressão que multiplica η_{N-1} , utilizando-se (2.174) para calcular as trans-admitâncias e após as multiplicações pelas exponenciais, pode ser escrita como

$$e^{-j2\theta} - \frac{e^{-j2\theta}}{\bar{y}} \frac{1}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left[|M^+|^2 - |M^-|^2 \right], \quad (2.192)$$

que, utilizando (2.175) e (2.185), torna-se

$$e^{-j2\theta} (1-2u), \quad (2.193)$$

correspondente ao termo que multiplica η_{N-1} em (2.183).

A solução geral para a equação de diferença (2.183) é

$$\eta_N = e^{-j\theta(N-1)} (A\alpha_1^{N-2} + B\alpha_2^{N-2}). \quad (2.194)$$

Os valores para α_1 e α_2 são obtidos substituindo-se (2.194) em (2.183), resultando

$$\alpha_1 = v + j \left[1 - 2u - v^2 \right]^{1/2}, \text{ e} \quad (2.195)$$

$$\alpha_2 = v - j \left[1 - 2u - v^2 \right]^{1/2}. \quad (2.196)$$

Os coeficientes A e B são determinados pelas condições iniciais. Neste caso, é o ganho dos dois primeiros estágios que, utilizando (2.162) e (2.163), além de (2.177), são escritos segundo a forma

$$\eta_2 = -\frac{y_{1,2}}{\bar{y}_{2,2}} = -e^{j\theta} \left(jw \frac{\text{sen}\theta_q}{\theta_q} + 2u \cos\theta_q \right), \text{ e} \quad (2.197)$$

$$\eta_3 = -\frac{y_{1,3}}{\bar{y}_{3,3}} + \frac{y_{1,2}}{\bar{y}_{2,2}} \frac{y_{2,3}}{\bar{y}_{3,3}} = -e^{-j2\theta} \left[w^2 \frac{\text{sen}^2\theta_q}{\theta_q^2} + j2w(1-2u) \frac{\text{sen}2\theta_q}{2\theta_q} - 4u^2 \cos^2\theta_q + 2u \cos 2\theta_q \right]. \quad (2.198)$$

A substituição de (2.197) e (2.198) em (2.194) resulta em um sistema de equações lineares com duas equações para as constantes A e B que, resolvido, resulta em

$$A = -\frac{\alpha_2 \eta_2 - \eta_3 e^{j\theta}}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{j\theta}, \quad (2.199)$$

$$B = \frac{\alpha_1 \eta_2 - \eta_3 e^{j\theta}}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{j\theta}, \quad (2.200)$$

onde, de acordo com (2.195) e (2.196), tem-se

$$\alpha_1 - \alpha_2 = j2(1-2u-v^2)^{1/2}. \quad (2.201)$$

No caso de maior interesse para um amplificador klystron de múltiplas cavidades, que é obter ganho de voltagem elevado por estágio, w (2.184) é grande comparado com u (2.185). Nestas condições, tem-se

$$\alpha_1 \cong 0, \quad (2.202)$$

$$\alpha_2 \cong 2 \cos\theta_q - jw \frac{\text{sen}\theta_q}{\theta_q}, \quad (2.203)$$

$$A \cong 0, \text{ e} \quad (2.204)$$

$$B = -jw \frac{\text{sen}\theta_q}{\theta_q}. \quad (2.205)$$

Com estas simplificações, o ganho de um arranjo com N -gaps de interação tem a forma

$$\eta_N \cong -jw \frac{\text{sen}\theta_q}{\theta_q} e^{-j\theta(N-1)} \left(2 \cos\theta_q - jw \frac{\text{sen}\theta_q}{\theta_q} \right)^{N-2}. \quad (2.206)$$

Consistente com a hipótese de ganho elevado por estágio, $\theta_q \cong \pi/2$, o que faz com que (2.206) se reduza, adicionalmente, a

$$\eta_N \cong \left(-jw \frac{\text{sen}\theta_q}{\theta_q} e^{-j\theta} \right)^{N-1}. \quad (2.207)$$

2.3.3 Conclusão da seção 2.3

Na primeira parte desta seção construiu-se uma expressão geral para o ganho de voltagem do amplificador klystron de múltiplas cavidades utilizando-se expressões calculadas nas seções anteriores e, na seqüência, particularizou-se esta expressão para o ganho de voltagem do amplificador klystron de múltiplas cavidades com cavidades idênticas e igualmente espaçadas.

2.4 Ganho de potência e largura de banda em amplificadores klystrons com múltiplas cavidades

Nesta seção apresenta-se o desenvolvimento da expressão para o cálculo do ganho de potencia de amplificador klystron. A seguir, desenvolve-se uma expressão para a largura de banda sob a hipótese de cavidades idênticas e igualmente espaçadas e, ao final da seção desenvolve-se uma expressão para um parâmetro de fundamental importância que é o produto entre o ganho e a largura de banda.

2.4.1 Ganho de potência

A fim de calcular o ganho em potência de um amplificador klystron de múltiplas cavidades é necessário considerar, em detalhes, os acoplamentos de entrada e saída do amplificador. Com este objetivo a cavidade de entrada será conectada a um gerador externo por meio de um guia de ondas. Pode-se utilizar um segundo guia passivamente terminado em uma carga casada, de modo a produzir um carregamento adicional na cavidade de entrada de maneira a torná-la menos dependente do guia de entrada. A admitância de entrada y_1 da cavidade pode ser escrita na forma (2.77) como

$$y_1 = Q_{ext,1} \left[j2 \frac{\Delta\omega}{\omega_1} + \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q'_{ext,1}} + \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_1 G_0 y_{e,1} \right], \quad (2.208)$$

onde o fator de qualidade do guia de onda de entrada é representado por $Q_{ext,1}$ e aquele do guia de onda passivamente terminado é $Q'_{ext,1}$. Observe que sob a hipótese do guia passivamente terminado, $y_2 = 1$. O produto entre a condutância do feixe G_0 e a admitância eletrônica normalizada $y_{e,1}$ é igual admitância eletrônica do feixe de elétrons $Y_{e,1}$. O carregamento total da cavidade, exceto pelo carregamento do feixe é,

$$\frac{1}{Q_{L,1}} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_{ext,1}} + \frac{1}{Q'_{ext,1}}. \quad (2.209)$$

Substituindo a expressão (2.156) para a admitância eletrônica

$$\bar{y}_{1,1} = y_{e,1} + \left(\frac{Q}{R_{sh}} \right)_1 \frac{1}{G_0 Q_{L,1}} \left(1 + j2Q_{L,1} \frac{\Delta\omega_1}{\omega_1} \right), \quad (2.210)$$

obtem-se uma expressão para admitância de entrada normalizada em termos $\bar{y}_{1,1}$

$$y_1 = Q_{ext,1} \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_1 G_0 \bar{y}_{1,1} - 1. \quad (2.211)$$

A admitância normalizada de entrada depende do grau de acoplamento da cavidade com o guia de entrada, dos parâmetros da cavidade e do feixe de elétrons. Seja P_i a potência do sinal de excitação da cavidade. Se P_t denotar a potência transmitida para a cavidade pelo guia 1, e considerando possíveis reflexões no acoplamento de entrada, P_t e P_i , se relacionam, segundo a teoria básica de circuitos de microondas, segundo

$$P_t = \frac{4y_1}{(1+y_1)(1+y_1^*)} P_i. \quad (2.212)$$

Substituindo (2.211) em (2.212), obtém-se

$$P_t = \frac{\bar{y}_{1,1} - \frac{Q_1}{R_{sh,1}} \frac{1}{G_{0,1} Q_{ext,1}}}{\frac{R_{sh,1}}{Q_1} G_{0,1} Q_{ext,1} \bar{y}_{1,1} \bar{y}_{1,1}^*} 4P_i. \quad (2.213)$$

A potência transmitida P_t pode ser relacionada com a voltagem V_1 de RF do gap de entrada, utilizando-se da admitância total do gap $\bar{y}_{1,1}$. Tendo em vista que a potência transmitida é dissipada em uma admitância equivalente formada pela admitância $\bar{y}_{1,1}$ subtraída da admitância do acoplamento a partir do guia de entrada, segue relação

$$P_t = \frac{1}{2} V_1^2 G_0 \left[\bar{y}_{1,1} - \left(\frac{Q}{R_{sh}} \right)_1 \frac{1}{G_0 Q_{ext,1}} \right] = \frac{1}{2} A_1^2 V_0^2 G_0 \left(\bar{y}_{1,1} - \frac{Q_1}{R_{sh,1}} \frac{1}{G_{0,1} Q_{ext,1}} \right). \quad (2.214)$$

Em termos da potência incidente, tem-se que

$$P_t = \frac{1}{8} A_1^2 V_0^2 G_0^2 \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_1 Q_{ext,1} \bar{y}_{1,1} \bar{y}_{1,1}^*. \quad (2.215)$$

É interessante observar que a frequência de ressonância é aquela definida como a frequência onde a admitância total $\bar{y}_{1,1}$, ao invés da admitância do circuito, torna-se puramente real, isto é,

$$\bar{y}_{1,1} \Big|_{\text{resson}} = \bar{g}_{e,1}, \quad (2.216)$$

onde $\bar{g}_{e,1}$ é a condutância eletrônica. Diferenciando (2.214) em relação ao $Q_{ext,1}$,

$$\left(\frac{Q_{L,1}}{Q_{ext,1}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_1 G_0 Q_{L,1} \bar{g}_{e,1} = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_1 G_0 Q_{L,1} g_{e,1} \right]. \quad (2.217)$$

Se a condição (2.217) é satisfeita então $y_1 = 1$, e, conseqüentemente, $P_r = P_i$. Nestas condições não haverá reflexão no acoplamento de entrada. Neste caso o acoplamento é denominado de acoplamento ótimo. Se o carregamento devido ao feixe de elétrons é nulo, o acoplamento ótimo corresponde a $Q_{ext,1} = 2Q_{L,1}$. Tal situação é denominada de acoplamento crítico. Pode ser observado segundo (2.214) que a máxima transferência de potência não ocorre na condição de acoplamento crítico se existir carregamento devido à presença do feixe de elétrons. Se o carregamento devido ao feixe for positivo será necessário um acoplamento mais forte $Q_{ext,1} < 2Q_{L,1}$, e se, o carregamento devido ao feixe for negativo o acoplamento deverá ser mais fraco, isto é, $Q_{ext,1} > 2Q_{L,1}$. Sob a hipótese de acoplamento ótimo, (2.214) se escreve

$$P_i = \frac{1}{4} A_1^2 V_0^2 G_0^2 \frac{\bar{y}_{1,1} \bar{y}_{1,1}^*}{\bar{g}_{e,1}}. \quad (2.218)$$

Na ressonância esta equação simplifica para

$$P_i = \frac{1}{4} A_1^2 V_0^2 G_0 \bar{g}_{e,1}. \quad (2.219)$$

Para o cálculo da potência de saída do amplificador klystron, por hipótese, admitir-se-á que o guia de onda de saída está terminado com uma carga casada. A potência dissipada na carga pode ser escrita na forma,

$$P_L = \frac{1}{2} V_N^2 \left(\frac{Q}{R_{sh}} \right)_N \frac{1}{Q_{ext,N}} = \frac{1}{2} A_N^2 V_0^2 \left(\frac{Q}{R_{sh}} \right)_N \frac{1}{Q_{ext,N}}. \quad (2.220)$$

O ganho de potência, P_L/P_i , é calculado segundo as expressões (2.220) e (2.215), resultando

$$\frac{P_L}{P_i} = 4 |\eta_N|^2 \frac{1}{Q_{ext,N} \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_N} \frac{1}{Q_{ext,1} \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_1} \frac{1}{G_0^2} \frac{1}{\bar{y}_{1,1} \bar{y}_{1,1}^*}. \quad (2.221)$$

Sob a hipótese de acoplamento ótimo na cavidade de entrada, a expressão do ganho se escreve

$$\frac{P_L}{P_i} = 4 |\eta_N|^2 \frac{1}{Q_{ext,N} \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_N} \frac{1}{G_0} \frac{\bar{g}_{e,1}}{\bar{y}_{1,1} \bar{y}_{1,1}^*}, \quad (2.222)$$

onde a expressão geral para o ganho de voltagem η_N é dada segundo (2.161).

Em geral amplificadores klystrons são construídos com poucas cavidades e ganho elevado por estágio. Desta forma, a expressão (2.165) para o ganho pode ser empregada sem erro significativo. Neste ponto é conveniente definir a grandeza adimensional N_k como a razão entre a admitância total normalizada do k -ésimo gap $\bar{y}_{k,k}$ e a admitância normalizada do circuito para a situação onde $\Delta\omega_k = 0$

$$N_k = \frac{\bar{y}_{k,k}}{y_{\text{circuito}}} = \frac{R_{sh,k}}{Q_k} G_{0,k} Q_{L,k} \bar{y}_{k,k} = 1 + j2Q_{L,k} \frac{\Delta\omega_k}{\omega_k} + \frac{R_{sh,k}}{Q_k} G_{0,k} Q_{L,k} y_{k,k}. \quad (2.223)$$

Na ressonância ($\text{Im} \bar{y}_{k,k} = 0$) esta equação torna-se

$$N_{k,res} = \frac{R_{sh,k}}{Q_k} G_{0,k} Q_{L,k} \bar{g}_{k,k} = 1 + \frac{R_{sh,k}}{Q_k} G_{0,k} Q_{L,k} g_{k,k}. \quad (2.224)$$

A grandeza $N_{k,res}$ é uma grandeza sempre positiva e o seu menor valor é zero, que fisicamente corresponde ao início das oscilações auto sustentadas na cavidade. Outra propriedade de N_k é que ela difere da unidade, para um dado conjunto de parâmetros de cavidade, proporcionalmente ao carregamento devido ao feixe de elétrons $\bar{g}_{k,k}$. Portanto, dependendo se carregamento devido ao feixe for negativo ou positivo, $N_{k,res}$ será maior ou menor que a unidade. Substituindo (2.224) na expressão para o ganho de voltagem (2.165), pode-se escrever

$$\eta_N = \prod_{k=2}^N \frac{R_{sh,k}}{Q_k} G_{0,k} Q_{L,k} \left(-\frac{y_{k-1,k}}{N_k} \right). \quad (2.225)$$

Com (2.223) e (2.224), a expressão para o ganho de potência se escreve

$$\frac{P_L}{P_i} = 2|\eta_N|^2 \frac{R_{sh,1}}{Q_1} \frac{Q_N}{R_{sh,N}} \frac{Q_{L,1}}{Q_{ext,N}} \frac{N_{1,res}}{N_1 N_1^*}. \quad (2.226)$$

Substituindo a expressão para o ganho de voltagem (2.225), tem-se

$$\frac{P_L}{P_i} = 2 \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_1 \frac{Q_N}{R_{sh,N}} \frac{Q_{L,1}}{Q_{ext,N}} \frac{N_{1,res}}{N_1 N_1^*} \prod_{k=2}^N \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_k^2 G_0^2 Q_{L,k}^2 \left(\frac{y_{k-1,k} y_{k-1,k}^*}{N_k N_k^*} \right). \quad (2.227)$$

A expressão (2.227) representa o ganho de potência com acoplamento de entrada otimizado, mas com o acoplamento de saída arbitrário. O acoplamento de saída pode ser ajustado para maximizar o ganho da ressonância. A condição de acoplamento ótimo é obtida por diferenciação de (2.220) em relação ao $Q_{ext,N}$ resultando em

$$\left(\frac{Q_{L,N}}{Q_{ext,N}} \right)_{\text{ótimo}} = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_N G_0 Q_{L,N} g_{N,N} \right] = \frac{1}{2} N_{N,res}, \quad (2.228)$$

que é idêntica com a condição de acoplamento ótimo entre o guia de onda e a cavidade de entrada (2.217). Com a hipótese de $Q_{ext,N}$ ajustado para ganho ótimo, (2.227) se escreve

$$\frac{P_L}{P_i} = \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_1 \frac{Q_{L,1}}{Q_{ext,N} \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_N} \frac{N_{1,res} N_{N,res}}{N_1 N_1^*} \prod_{k=2}^N \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_k^2 G_0^2 Q_{L,k}^2 \left(\frac{y_{k-1,k} y_{k-1,k}^*}{N_k N_k^*} \right). \quad (2.229)$$

No caso particular onde as cavidades são idênticas e igualmente espaçadas, (2.229) se escreve, omitindo-se os índices, na forma

$$\frac{P_L}{P_i} = \left| \frac{N_{res}}{N} \right|^2 \left(\frac{R_{sh}}{Q} G_0 Q_L \left| \frac{y_{k-1,k}}{N} \right| \right)^{2(N-1)}, \quad (2.230)$$

onde $y_{k-1,k}$ é a trans admitância entre duas cavidades consecutivas. O ganho na ressonância é dado pela expressão

$$\frac{P_L}{P_i} = \left(\frac{R_{sh}}{Q} G_0 Q_L \left| \frac{y_{k-1,k}}{N_{res}} \right| \right)^{2(N-1)}. \quad (2.231)$$

Particularizando a expressão (2.162) para a trans-admitância normalizada (2.171) e condutância eletrônica normalizada (2.175), (2.224) se escreve

$$N_{k,res} = 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_k G_0 Q_{L,k} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left(|M_k^+|^2 - |M_k^-|^2 \right). \quad (2.232)$$

Substituindo (2.231), o ganho de voltagem pode ser escrito na forma

$$\eta(k-1,k) = \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_k G_0 Q_{L,k} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left(|M_{k-1}^+| |M_k^+| + |M_{k-1}^-| |M_k^-| \right)}{1 - \frac{1}{8} \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_k G_0 Q_{L,k} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left(|M_k^+|^2 - |M_k^-|^2 \right)}. \quad (2.233)$$

Considerando, como caso particular, um arranjo onde todas as cavidades são idênticas, o ganho de voltagem em cada estágio do amplificador será o mesmo dos demais e representado por $\eta(k-1,k)$. Omitindo-se os índices, obtém-se

$$\eta(k-1,k) = \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right) G_0 Q_L \frac{\beta_e}{\beta_q} \left(|M^+|^2 + |M^-|^2 \right)}{1 - \frac{1}{8} \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right) G_0 Q_L \frac{\beta_e}{\beta_q} \left(|M^+|^2 - |M^-|^2 \right)}. \quad (2.234)$$

2.4.2. Largura de banda de um amplificador klystron de múltiplas cavidades com cavidades idênticas e igualmente espaçadas

A largura de banda pode ser calculada com base na expressão (2.230), sob a hipótese de cavidades sintonizadas em sincronismo. A quantidade que varia rapidamente com a frequência é o parâmetro de ganho interno N . Desse modo, o ganho do amplificador é proporcional ao produto

$$\frac{P_L}{P_i} \approx \left(\frac{1}{NN^*} \right)^N. \quad (2.235)$$

Mas N_k , dado segundo (2.223), com os índices omitidos e observando que a admitância eletrônica é dada por $y_e = g_e + jb_e$, se escreve

$$N = \left(1 + \frac{R_{sh}}{Q} G_0 Q_L g_e \right) + j \left(2Q_L \frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{R_{sh}}{Q} G_0 Q_L b_e \right). \quad (2.236)$$

Desta forma, o produto NN^* resulta em

$$NN^* = \left(1 + \frac{R_{sh}}{Q} G_0 Q_L g_e \right)^2 + 4Q_L^2 \left(\frac{\Delta\omega}{2\omega} + \frac{R_{sh}}{2Q} G_0 b_e \right)^2. \quad (2.237)$$

Na ressonância, que por definição ocorre quando a parte imaginária de N se anula, o parâmetro de sintonia em frequência tem um valor $\Delta\omega'/\omega$ ligeiramente diferente de zero

$$\frac{\Delta\omega'}{\omega} = -\frac{1}{2} \frac{R_{sh}}{Q} G_0 b_{e,res}. \quad (2.238)$$

Na ressonância, N é dado segundo a expressão

$$N_{res} = 1 + \frac{R_{sh}}{Q} G_0 Q_L b_{e,res}. \quad (2.239)$$

Seja agora considerar a possibilidade da admitância eletrônica $y_e = g_e + jb_e$ ser uma função que varia lentamente com a frequência. Considerando que, na ressonância, a admitância eletrônica possa ser escrita conforme (2.236), tem-se

$$NN^* = N_{res}^2 \left\{ \left[1 + \frac{R_{sh}}{Q} G_0 \frac{Q_L}{N_{res}} (g_e - g_{e,res}) \right]^2 + 4 \left(\frac{Q_L}{N_{res}} \right)^2 \left[\frac{\Delta\omega}{\omega} - \frac{\Delta\omega'}{\omega} + \frac{R_{sh}}{2Q} G_0 (b_e - b_{e,res}) \right]^2 \right\}. \quad (2.240)$$

Tendo em vista que $y_e = g_e + jb_e$, por hipótese, é uma função que varia lentamente com a frequência, o mínimo valor de N ocorre muito próximo à frequência de ressonância. Portanto,

$$(NN^*)_{\min} \cong N_{res}^2. \quad (2.241)$$

Observando (2.234), a largura de banda entre os pontos de meia potência pode ser determinada a partir da condição

$$\frac{P_L}{P_i} \approx \left(\frac{N_{res}^2}{NN^*} \right)^N = \frac{1}{2}. \quad (2.242)$$

Substituindo-se a condição acima em (2.239) obtém-se a seguinte equação algébrica

$$\left[\frac{\Delta\omega}{\omega} - \frac{\Delta\omega'}{\omega} + \frac{R_{sh}}{2Q} G_0 (b_e - b_{e,res}) \right]^2 = \frac{N_{res}^2}{4Q_L^2} \left\{ 2^{1/N} - \left[1 + \frac{R_{sh}}{Q} G_0 \frac{Q_L}{N_{res}} (g_e - g_{e,res}) \right]^2 \right\}, \quad (2.243)$$

que resolvida produz duas soluções e, a diferença entre elas, é a largura de banda relativa

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} = -\frac{R_{sh}}{2Q} G_0 (b_{e,1} - b_{e,2}) + \frac{N_{res}}{2Q_L} \left\{ 2^{1/N} - \left[1 + \frac{R_{sh}}{Q} G_0 \frac{Q_L}{N_{res}} (g_{e,1} - g_{e,res}) \right]^2 \right\}^{1/2} + \frac{N_{res}}{2Q_L} \left\{ 2^{1/N} - \left[1 + \frac{R_{sh}}{Q} G_0 \frac{Q_L}{N_{res}} (g_{e,2} - g_{e,res}) \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (2.244)$$

onde $y_{e,1} = g_{e,1} + jb_{e,1}$ e $y_{e,2} = g_{e,2} + jb_{e,2}$ são as admitâncias eletrônicas para as frequências associadas aos pontos de meia potência.

Na maioria dos casos de interesse, a admitância eletrônica é, substancialmente, independente da frequência, e (2.244) pode ser simplificada utilizando-se uma expansão em $(g_e - g_{e, res})$ e, então, truncando esta expansão no primeiro termo. Procedendo desta forma, o resultado obtido é

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} \cong \left(\frac{\log 2}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{N_{res}}{Q_L} - \frac{R_{sh}}{2Q} G_0 \left[(b_{e,1} - b_{e,2}) + \left(\frac{N}{\log 2} \right)^{\frac{1}{2}} (g_{e,1} - g_{e,2}) \right], \quad (2.245)$$

onde se utilizou a aproximação $2^{1/N} = 1 + \log 2/N$. Uma vez mais, se a admitância eletrônica é independente da frequência, (2.244) pode ser escrita na forma

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} \cong \left(\frac{\log 2}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{N_{res}}{Q_L}. \quad (2.246)$$

Substituindo (2.231) obtém-se a seguinte expressão para a largura de banda

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} \cong \frac{1}{Q_L} \left(\frac{\log 2}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right) G_0 Q_L \frac{\beta_e}{\beta_q} (|M^+|^2 - |M^-|^2) \right]. \quad (2.247)$$

A expressão (2.247) é válida para qualquer perfil de campo de RF no gap de interação de cavidades idênticas no arranjo do amplificador. É de relevância observar que o ganho e a largura de banda do amplificador foram expressos em termos dos coeficientes de acoplamentos dos gaps das cavidades.

Analisando (2.247) podem-se observar importantes propriedades dos amplificadores klystrons de múltiplas cavidades. A largura de banda é, grosseiramente, inversamente proporcional ao produto do fator de qualidade carregado das cavidades e a raiz quadrada do número de cavidades. É diretamente proporcional ao parâmetro interno de ganho N_{res} . O efeito do carregamento do feixe sobre o ganho e a largura de banda pode ser avaliado segundo as expressões (2.231) e (2.246), respectivamente. Quando o carregamento é negativo, $N_{res} < 1$ ocorre um aumento do ganho por estágio do amplificador por um fator de $1/N_{res}^2$. Por outro lado, o aumento no ganho está em contra ponto com a largura de banda que é reduzida por um fator de N_{res} .

Um parâmetro de relevância de um amplificador klystron é o produto ganho-largura de banda. Utilizando as expressões (2.231) e (2.246) pode se escrever

$$\frac{P_L}{P_i} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cong \left(\frac{\log 2}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{N_{res}}{Q_L} \left(\frac{R_{sh}}{Q} G_0 Q_L \left| \frac{y_{k-1,k}}{N_{res}} \right| \right)^{2(N-1)}. \quad (2.248)$$

A partir de (2.248) pode-se observar o importante papel do parâmetro da cavidade (R_{sh}/Q) quando um dos requisitos de projeto for elevado produto ganho-largura de banda,

além disto, como o parâmetro (R_{sh}/Q) é independente das perdas da cavidade, sendo função da forma geométrica da cavidade e da frequência, é utilizado como figura de mérito.

2.4.3 Conclusão da seção 2.4

Nesta seção desenvolveu-se uma expressão para o ganho de potência de amplificadores klystrons com múltiplas cavidades, e, posteriormente, uma expressão para o cálculo da largura de banda teórica para o caso particular de cavidades reentrantes idênticas e igualmente espaçadas. Finalmente, construiu-se uma expressão para o produto ganho-largura de banda tendo-se em vista a grande relevância deste parâmetro.

2.5 Conclusão do capítulo

Neste capítulo foi apresentada uma análise a pequenos sinais do amplificador klystron de múltiplas cavidades considerando o efeito de carga espacial. Inicialmente, discutiu-se o problema dos campos eletromagnéticos em uma cavidade ressonante utilizando a teoria dos modos normais de J. Slater. Resultou-se, desse formalismo, expressões que descrevem o balanço de potência complexo em uma cavidade excitada por um feixe de elétrons, detalhadas para 3 casos de interesse nos estudos de amplificadores klystrons: cavidade excitada por um feixe de elétrons (caso das cavidades intermediárias de um amplificador klystron), cavidade excitada por um feixe de elétrons com acoplamento com guia terminada com carga passiva (caso da cavidade de saída de um amplificador klystron) e cavidade excitada por uma fonte externa por meio de um terminal de entrada (guia de ondas ou coaxial) com um feixe de elétrons e com carregamento adicional com carga passiva (caso da cavidade de entrada de um amplificador klystron). Na seqüência, a partir do fenômeno físico constituído por um feixe de elétrons com dimensão axial infinita e seção transversal circular, propagando-se no interior de um tubo de deriva, também de seção transversal circular e onde estão acopladas múltiplas cavidades reentrantes, desenvolveu-se uma expressão para a densidade de corrente de convecção associada à modulação em velocidade, em função do campo elétrico produzido nos gaps de interação das cavidades. Utilizando este resultado em uma análise do fluxo de potência complexa entre a n -ésima cavidade e o feixe de elétrons, chegou-se em uma expressão para a admitância eletrônica total normalizada, dividida em 2 parcelas: uma que representa a trans-admitância eletrônica e a outra que representa a admitância eletrônica da cavidade. Estas expressões, em conjunto com as expressões para a admitância do circuito das cavidades, formaram a base para a determinação

do ganho de voltagem do amplificador klystron de múltiplas cavidades, uma vez que permitiram a obtenção de uma relação entre a amplitude A_N de RF do n -ésimo gap de interação e a amplitude A_1 da primeira cavidade. Finalmente, apresentou-se o desenvolvimento da expressão para o cálculo do ganho de potência de um amplificador klystron, seguido de uma expressão para a largura de banda, sob a hipótese de cavidades idênticas e igualmente espaçadas. O produto entre o ganho e a largura de banda, mostrado no final, constitui um parâmetro de fundamental importância nos projetos de amplificadores klystron. Esta análise é um auxílio para o projetista de klystron, na fase inicial do desenvolvimento do projeto, e além de servir como balizamento durante a análise dos resultados do projeto utilizando uma análise a grandes sinais (não-linear).

Capítulo III

ANÁLISE A GRANDES SINAIS - MODELO UNIDIMENSIONAL

Neste capítulo apresenta-se um modelo teórico desenvolvido para descrever o comportamento de um amplificador klystron por meio de uma análise não-linear unidimensional que, apesar de simples, pois considera a equação de movimento em sua forma não-relativista e despreza as forças magnéticas induzidas, possibilita descrever de maneira quantitativa as várias características do dispositivo na configuração de múltiplas cavidades. Além disso, o modelo apresentado neste capítulo não utiliza o fator de redução de frequência de plasma. Diferente do modelo de plano, transformado em um modelo de disco com a utilização deste fator, neste capítulo utiliza-se um modelo de discos verdadeiro, onde as forças de carga espacial são calculadas levando-se em consideração o fato do feixe de elétrons apresentar seção transversal finita e estar no interior de uma estrutura fechada (metálica e cilíndrica). Mas a maior contribuição deste trabalho, é o fato de se considerar o feixe de elétrons, antes da modulação em velocidade, em um estado perturbado, ou seja, considerar as forças de carga espacial agindo sobre os elétrons do feixe durante todo o tempo, não utilizando a hipótese de fundo neutralizador de íons positivos. Adicionalmente, a conservação da energia total do sistema, por meio do cálculo da energia cinética e da energia potencial eletrostática, foi monitorada durante toda a evolução temporal do sistema.

Este capítulo está organizado como segue. Na seção 3.1, as descrições euleriana e lagrangiana são apresentadas e comparadas. Para a descrição lagrangiana do fluido duas representações na descrição lagrangiana são utilizadas: (z_0, t) e (z, t_0) . Na seção 3.2, utiliza-se a representação (z_0, t) ao tratar o modelo considerando-se, inicialmente, uma transformação das variáveis independentes do problema, passando das coordenadas (z, t) para as coordenadas (z_0, t) , após considerar a variável independente z , na descrição euleriana, como uma variável dependente na descrição lagrangiana tal que $z = Z(z_0, t)$. Na seção 3.3 utiliza-se a representação (z, t_0) , que trata o modelo considerando-se, inicialmente, uma transformação das variáveis independentes do problema, passando das coordenadas (z, t) para as coordenadas (z, t_0) , após considerar a variável independente t , no formalismo euleriano, como uma variável dependente no formalismo lagrangiano tal que $t = T(z, t_0)$.

Na seção 3.4 descreve-se a dinâmica do sistema, enunciando as hipóteses consideradas pelo modelo. Tendo em vista que, neste capítulo, considera-se uma análise não

relativista e, portanto, o campo magnético induzido pode ser desprezado em comparação ao campo elétrico induzido, a força de carga espacial resultante é devida somente à ação deste campo. O cálculo desta força, utilizando o método da função de Green, é apresentado no apêndice D. É de relevância observar que o resultado do apêndice D permite calcular a força de carga espacial resultante sobre um disco, que envolve a soma das contribuições de todos os demais discos que representam o feixe de elétrons (princípio da superposição).

A energia cinética e a energia potencial são calculadas por meio das expressões apresentadas em (3.5). Os resultados da análise são apresentados em (3.6), incluindo a dinâmica do feixe de elétrons, o fenômeno da autodifusão, a modulação em velocidade, o efeito das cargas espaciais, o agrupamento e ultrapassagem dos elétrons, a corrente de convecção, a análise da corrente harmônica, a conversão AM/AM, a compressão de ganho e a conservação de energia. Finalmente, na seção 3.7, conclui-se o capítulo.

3.1 Descrições Euleriana e Lagrangiana

O comportamento eletrodinâmico de um feixe de elétrons em um amplificador klystron pode ser descrito, em um primeiro momento, utilizando-se o formalismo da dinâmica dos fluidos para um escoamento compressível, dependente do tempo, não viscoso e à temperatura constante. Existem duas descrições possíveis para a determinação da dinâmica de um fluido: a descrição euleriana e a lagrangiana. Na descrição euleriana, a solução do problema físico consiste na determinação das variáveis de campo, em um dado instante de tempo e em uma dada posição, tais como os campos de velocidade e de densidade e, no caso de um fluido de elétrons, o campo elétrico devido às cargas espaciais. Já na descrição lagrangiana, a dinâmica do fluido é descrita utilizando-se o conceito de partícula do fluido, de tal forma que o comportamento do escoamento, ao longo do tempo, é obtido por meio da contribuição da trajetória de cada partícula do fluido. Na prática, é necessário distinguir cada partícula por meio de uma identificação inicial (rótulo). Por exemplo, admitindo-se que a partícula tenha um valor pré-determinado z_0 no instante t_0 , o movimento do fluido fica completamente especificado se a variável dependente, representando a posição da partícula, for definida como uma função do tempo e do valor z_0 , isto é, a solução é encontrar a função $Z(z_0, t)$.

Considerando um escoamento unidimensional, onde comumente são utilizadas as variáveis independentes (z, t) , a solução do problema consiste na determinação do campo de

velocidade $\vec{u}(z,t) = u(z,t)\hat{a}_z$ e campo de densidades $\rho_v(z,t)$. Estas grandezas se relacionam por meio das equações da continuidade e do momento linear

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_v u)}{\partial z} = 0, \text{ e} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{F_z}{m_0}. \quad (3.2)$$

onde F_z e m_0 representam a força e a massa do fluido (massa específica) por unidade de volume, respectivamente. Além disso, faz-se necessário incluir a expressão para a força que, neste caso, trata-se de uma força elétrica que atua sobre uma distribuição de carga representada por uma densidade volumétrica de carga $\rho_v(\vec{r})$, devida ao campo elétrico de carga espacial, sendo dada por

$$F_z(\vec{r}) = \iiint_V E_z(\vec{r}') \rho_v(\vec{r}') d\vec{r}'. \quad (3.3)$$

O campo elétrico é calculado a partir da solução da equação de Poisson, ou seja, a partir de

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_v(\vec{r}). \quad (3.4)$$

O campo elétrico, correspondente ao potencial eletrostático calculado por (3.4), é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \Phi(\vec{r}). \quad (3.5)$$

Uma análise do sistema de equações (3.1) e (3.2) permite inferir que o mesmo é não-linear e, adicionalmente, em uma descrição do tipo campo (euleriana) para cada par (z,t) , existe associado somente um único valor de $\rho_v(z,t)$ e $u(z,t)$. Este fato limita a descrição euleriana, para o fluido de elétrons, no tratamento do fenômeno da ultrapassagem entre os elétrons do feixe onde, para um único par (z,t) , haverá pelo menos dois valores de velocidade, conforme pode ser visualizado no gráfico da FIG. 3.1.

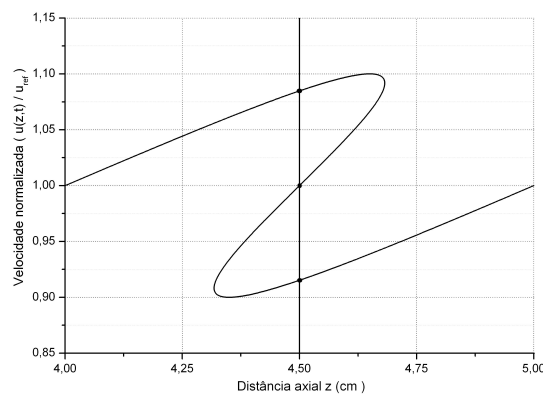


FIGURA 3.1 – Fenômeno da ultrapassagem, onde para um valor de z , por exemplo, $z = 4,5 \text{ cm}$, em um determinado instante de tempo, existem 3 valores de velocidade.

Já na descrição lagrangiana, onde a trajetória de cada partícula do fluido é especificada por $z = Z(z_0, t)$, ou melhor, a j -ésima partícula no fluido é descrita pela equação horária $z_j = Z(z_{0j}, t)$ e, desta forma, o problema da ultrapassagem entre elétrons pode ser completamente descrito. Conforme mencionado anteriormente, é necessário distinguir cada partícula por meio de uma identificação inicial (rótulo). Por exemplo, neste caso, z_{0j} é a identificação inicial (rótulo) da partícula j .

Na dinâmica dos fluidos, dependendo do problema, pode-se utilizar uma ou outra descrição. Uma função que, na descrição euleriana, é definida como $f^E(z, t)$, onde o índice “ E ” indica que se trata de coordenadas eulerianas, na descrição lagrangiana passa a ser definida como $f^L(z_0, t)$, onde o índice “ L ” indica que se trata de coordenadas lagrangianas. Utilizando-se a descrição lagrangiana onde $z = Z(z_0, t)$, a relação entre as duas descrições é

$$f^E(z, t) \Big|_{z=Z(z_0, t)} = f^L(z_0, t). \quad (3.6)$$

Existem outras transformações possíveis. Por exemplo, considerando a variável independente t , na descrição euleriana, como uma variável dependente no formalismo lagrangiano tal que $t = T(z, t_0)$, tem-se

$$f^E(z, t) \Big|_{t=T(z, t_0)} = f^L(z, t_0). \quad (3.7)$$

A TAB. 3.1 mostra, para uma análise unidimensional, como se transformam a posição z , o tempo t , a velocidade u e a densidade ρ_v em cada descrição, adotando-se z_0 como variável independente (identificação inicial) na descrição lagrangiana $Z(z_0, t)$. Além disso, mostra-se também como se transformam estas mesmas variáveis adotando-se t_0 como variável independente (identificação inicial) na descrição lagrangiana $T(z, t_0)$.

TABELA 3.1 – Posição, tempo, velocidade e densidade na descrição euleriana (z, t) do fluido de elétrons e nas descrições lagrangiana (z_0, t) e (z, t_0) .

Descrição euleriana (z, t)	Descrição lagrangiana (z_0, t)	Descrição lagrangiana (z, t_0)
z	$z = Z(z_0, t)$	$z = z$
t	$t = t$	$t = T(z, t_0)$
$\vec{u}(z, t) = u(z, t)\hat{a}_z$	$\vec{u}(z_0, t) = u(z_0, t)\hat{a}_z$	$\vec{u}(z, t_0) = u(z, t_0)\hat{a}_z$
$\rho_v(z, t)$	$\rho_v(z_0, t)$	$i(z, t_0)$

Na descrição lagrangiana, o feixe de elétrons, na forma de um feixe cilíndrico sólido, é dividido em grupos de elétrons representativos do feixe. Tais grupos são denominados macropartículas que, no caso unidimensional, normalmente são chamados de discos. A partir da identificação inicial de cada disco, é possível segui-lo ao longo da região de deriva, após a modulação. Essa característica faz com que a descrição seja adequada para se estudar o movimento dos discos e, principalmente, o agrupamento e ultrapassagem de elétrons.

Esta análise envolve as duas representações lagrangianas mostradas na TAB. 3.1. A evolução temporal das variáveis (posição e velocidade) é calculada utilizando-se a descrição (z_0, t) mas, para o cálculo da corrente harmônica, mostra-se indispensável a utilização da descrição (z, t_0) . Da análise harmônica depende o estudo das múltiplas cavidades, a conversão AM/AM e a compressão de ganho da klystron. Portanto, as duas descrições são importantes e serão descritas nas próximas seções.

3.2 Representação (z_0, t)

3.2.1 Transformação de variáveis – Descrição euleriana para descrição lagrangiana

Na representação lagrangiana (z_0, t) os discos, representando o feixe de elétrons, são identificados na região de interação em termos da posição z_0 , correspondente ao instante $t = 0$. A FIG. 3.2 ilustra o modelo de discos conforme a representação (z_0, t) . Define-se z_0 na seção 3.2.2 e, a partir desta identificação inicial de cada disco, é possível segui-lo ao longo da região de deriva, durante a simulação.

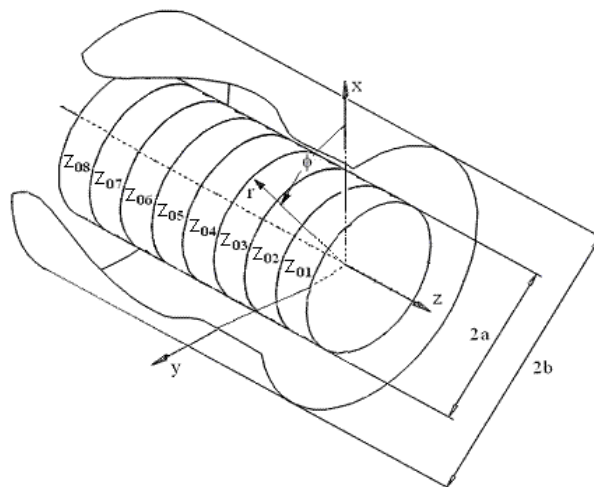


FIGURA 3.2 – Modelo de discos utilizado na descrição lagrangiana para representar o feixe de elétrons, rotulados pela posição z_0 correspondente ao instante $t = 0$.

3.2.2 Relação de transformação

Partindo-se das equações expressas em termos de z e t , o primeiro passo para se seguir um disco na descrição lagrangiana segundo o esquema (z_0, t) é realizar uma transformação de coordenadas, de tal forma que as variáveis independentes (z, t) possam ser escritas, na forma implícita, como um novo conjunto de variáveis independentes z_0 e t tais que

$$\begin{cases} z = Z(z_0, t) \\ t = t \end{cases} . \quad (3.8)$$

A transformação (3.8) é acompanhada pela seguinte definição, ou condição inicial,

$$Z(z_0, t=0) = z_0 . \quad (3.9)$$

Além disso, a derivada $\partial Z(z_0, t)/\partial t$ é definida, por hipótese, como

$$\frac{\partial Z(z_0, t)}{\partial t} = u^L(z_0, t) . \quad (3.10)$$

As equações (3.1) e (3.2) envolvem derivadas parciais e, portanto, deve-se estabelecer, a partir de (3.8), as seguintes regras de transformação

$$\begin{cases} \frac{\partial \cdot}{\partial z_0} = \frac{\partial Z}{\partial z_0} \frac{\partial \cdot}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial z_0} \frac{\partial \cdot}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial z_0} \frac{\partial \cdot}{\partial z} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial t} \frac{\partial \cdot}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial t} \frac{\partial \cdot}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial t} \frac{\partial \cdot}{\partial z} + \frac{\partial \cdot}{\partial t} \end{cases} . \quad (3.11)$$

Observa-se que a derivada parcial $\partial t/\partial z_0$ da primeira equação de (3.11) é nula porque t , nesta análise, é uma variável independente em ambas as descrições. Utilizando-se notação matricial pode-se escrever (3.11) como

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial t} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial z} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial t} \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

onde $J = \partial Z/\partial z_0$ é o jacobiano de transformação, definido pelo determinante da matriz de (3.12). Deve ser observado que J é uma incógnita nesta transformação de coordenadas. Tendo em vista que $Z(z_0, t)$ é uma equação horária, o jacobiano da transformação é uma grandeza que traduz a distância relativa entre dois discos adjacentes. Considerando-se que no instante inicial a distância entre discos é dz_0 , conforme (3.9), o jacobiano é unitário. À medida que o sistema evolui, se dois discos adjacentes se aproximam, a distância relativa torna-se menor que a distância inicial e o jacobiano resulta menor que um ($J < 1$). Caso dois

discos adjacentes se afastem, a distância relativa torna-se maior que a distância inicial e o jacobiano resulta maior que um ($J > 1$).

A transformação inversa pode ser escrita como

$$\begin{cases} \frac{\partial \cdot}{\partial z} = \frac{1}{J} \frac{\partial \cdot}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial t} = \frac{\partial \cdot}{\partial t} - \frac{u^L}{J} \frac{\partial \cdot}{\partial z_0} \end{cases} \quad (3.13)$$

Utilizando estas regras é possível escrever (3.1) e (3.2), na descrição lagrangiana, segundo as variáveis (z_0, t) .

3.2.3 Equação da Continuidade

A equação da continuidade, dada por (3.1) na descrição euleriana, utilizando as regras de transformação (3.13) passa a ser descrita, na descrição lagrangiana segundo as variáveis (z_0, t) , como

$$\frac{\partial \rho_v^L}{\partial t} + \frac{\rho_v^L}{J} \frac{\partial u^L}{\partial z_0} = 0. \quad (3.14)$$

Por outro lado, derivando-se (3.10) em relação a z_0 obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right) = \frac{\partial u^L}{\partial z_0}. \quad (3.15)$$

Como a ordem em que se deriva parcialmente uma função não afeta o resultado, pode-se escrever

$$\frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Z}{\partial z_0} \right) = \frac{\partial J}{\partial t}. \quad (3.16)$$

Portanto, igualando-se (3.15) e (3.16), tem-se

$$\frac{\partial u^L}{\partial z_0} = \frac{\partial J}{\partial t}. \quad (3.17)$$

Com isso, a equação (3.14) pode ser escrita como

$$\frac{\partial \rho_v^L}{\partial t} + \frac{\rho_v^L}{J} \frac{\partial J}{\partial t} = 0. \quad (3.18)$$

ou,

$$J \frac{\partial \rho_v^L}{\partial t} + \rho_v^L \frac{\partial J}{\partial t} = 0. \quad (3.19)$$

Portanto,

$$\frac{\partial(J\rho_v^L)}{\partial t} = 0. \quad (3.20)$$

A conclusão importante deste resultado é que

$$J\rho_v^L = k, \quad (3.21)$$

onde k não depende de t e pode ser determinada substituindo-se, em (3.21), o valor de $J = \partial Z(z_0, 0)/\partial z_0 = \partial z_0/\partial z_0$ e $\rho_v^L(z_0, 0)$. Portanto, tem-se

$$\left(\frac{\partial z_0}{\partial z_0}\right)\rho_v^L(z_0, 0) = k. \quad (3.22)$$

Como $\partial z_0/\partial z_0 = 1$ e $\rho_v^L(z_0, 0) = \rho_{v0}^L$, pode-se concluir que

$$k = \rho_{v0}^L. \quad (3.23)$$

Substituindo o valor de k em (3.21) chega-se a

$$J\rho_v^L = \left|\frac{\partial Z}{\partial z_0}\right|\rho_v^L = \rho_{v0}^L. \quad (3.24)$$

Esta é a equação da continuidade em coordenadas lagrangianas na representação (z_0, t) .

3.2.4 Equação do momento linear

A equação do momento linear também deve ser transformada segundo (3.13). Considerando-se a equação do momento linear dado por (3.2), escrita segundo o formalismo euleriano, devem-se aplicar primeiramente as regras de transformação ao lado esquerdo de tal equação obtendo-se, na descrição lagrangiana segundo as variáveis (z_0, t) , a equação

$$\frac{\partial u^L(z_0, t)}{\partial t} = \frac{F_z^E}{m_d}. \quad (3.25)$$

Tendo em vista que a força é de carga espacial, esta deve ser calculada para cada posição do domínio e, portanto, envolve o somatório das contribuições de todos os discos exceto aquele que, porventura, esteja na posição onde se está calculando o campo. Portanto, trata-se de uma incógnita de natureza euleriana e não se aplicam as regras de transformação apresentadas em (3.13). O desenvolvimento da expressão da força de carga espacial está no apêndice D.

3.2.5 Sistema de Equações

É possível montar, finalmente, um sistema a partir das equações (3.3), (3.10) e (3.25), resultando

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z(z_0, t)}{\partial t} = u^L(z_0, t) \\ \frac{\partial u^L(z_0, t)}{\partial t} = \frac{F_z^E(\vec{r})}{m_d} \\ F_z^E(\vec{r}) = \iiint_V E_z(\vec{r}') \rho_v(\vec{r}') d\vec{r}' \end{array} \right. , \quad (3.26)$$

onde campo elétrico $E_z(\vec{r})$ é calculado a partir de (3.5) e corresponde ao potencial eletrostático calculado por (3.4).

O modelo de disco, ao rotular cada disco pela sua posição inicial, permite considerar z_0 como um parâmetro de cada disco, ou seja, escrevê-lo como z_{0j} , onde j indica o disco. Portanto, a consequência imediata da utilização do modelo de disco é que as derivadas parciais tornam-se ordinárias.

As equações (3.26) compõem o sistema de equações que, por meio do método Runge Kutta de quarta ordem, possibilitará a descrição da evolução temporal das grandezas do sistema.

3.3 Representação (z, t_0)

3.3.1 Transformação de variáveis - Descrição euleriana para descrição lagrangiana

Na representação lagrangiana (z, t_0) os discos, representando o feixe de elétrons, são lançados na região de interação, convenientemente identificados, em termos do instante t_0 em que eles passaram pela cavidade de entrada. A FIG. 3.3 ilustra o modelo de discos desta representação.

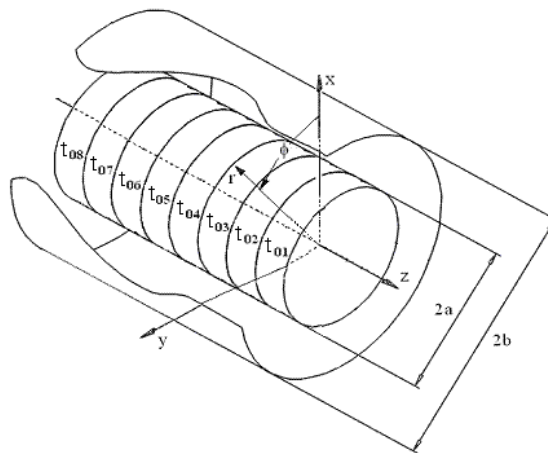


FIGURA 3.3 – Modelo de discos utilizado na descrição lagrangiana para representar o feixe de elétrons, rotulados pelo instante t_0 correspondente ao momento da passagem do disco pela cavidade de entrada.

Define-se t_0 na seção 3.3.2 e, a partir desta identificação inicial de cada disco, é possível segui-lo ao longo da região de deriva.

3.3.2 Relação de transformação

Partindo-se das equações (3.1) e (3.2), expressas em termos de z e t , o primeiro passo para se seguir um disco na descrição lagrangiana, segundo a representação (z, t_0) , é realizar uma transformação de coordenadas, de tal forma que as variáveis independentes (z, t) possam ser escritas, na forma implícita, como um novo conjunto de variáveis independentes z e t_0 tais que

$$\begin{cases} z = z \\ t = T(z, t_0) \end{cases} \quad (3.27)$$

A transformação (3.27) é acompanhada pela seguinte definição

$$T(0, t_0) = t_0. \quad (3.28)$$

Além disso, a derivada $\partial T(z, t_0)/\partial z$ é definida, por hipótese, como

$$\frac{\partial T(z, t_0)}{\partial z} = \frac{1}{u^L(z, t_0)}. \quad (3.29)$$

As equações (3.1) e (3.2) envolvem derivadas parciais e, portanto, deve-se estabelecer, a partir de (3.27), as seguintes regras de transformação

$$\begin{cases} \frac{\partial \cdot}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial \cdot}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \cdot}{\partial t} = \frac{\partial \cdot}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \cdot}{\partial t} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial t_0} = \frac{\partial z}{\partial t_0} \frac{\partial \cdot}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial t_0} \frac{\partial \cdot}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t_0} \frac{\partial \cdot}{\partial t} \end{cases} \quad (3.30)$$

Observa-se que a derivada parcial $\partial z/\partial t_0$ da segunda equação de (3.30) é nula porque z , nesta análise, é uma variável independente em ambos os formalismos. Utilizando-se notação matricial pode-se escrever (3.30) como

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial z} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial t_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial T}{\partial z} \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial z} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial t} \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

onde $J = \partial T/\partial t_0$ é o jacobiano de transformação, definido pelo determinante da matriz de (3.31). Deve ser observado que J é uma incógnita nesta transformação de coordenadas.

A transformação inversa pode ser escrita como

$$\begin{cases} \frac{\partial \cdot}{\partial z} = \frac{\partial \cdot}{\partial z} - \frac{1}{Ju^L} \frac{\partial \cdot}{\partial t_0} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial t} = \frac{1}{J} \frac{\partial \cdot}{\partial t_0} \end{cases} \quad (3.32)$$

Utilizando estas regras é possível escrever (3.1) e (3.2), na descrição lagrangiana, segundo as variáveis (z, t_0) .

3.3.3 Equação da Continuidade

A equação da continuidade, dada por (3.1) na descrição euleriana, utilizando as regras de transformação (3.32) passa a ser descrita, na descrição lagrangiana segundo as variáveis (z, t_0) , como

$$J \frac{\partial(\rho_v^L u^L)}{\partial z} - \frac{\rho_v^L}{Ju^L} \frac{\partial u^L}{\partial t_0} = 0. \quad (3.33)$$

Por outro lado, derivando-se (3.29) em relação a t_0 , obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t_0} \left(\frac{1}{u^L} \right) = -\frac{1}{(u^L)^2} \frac{\partial u^L}{\partial t_0}, \quad (3.34)$$

ou, ainda,

$$\frac{\partial u^L}{\partial t_0} = -\left(u^L\right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial t_0} \right). \quad (3.35)$$

A substituição de (3.35) em (3.33) resulta

$$J \frac{\partial(\rho_v^L u^L)}{\partial z} + \rho_v^L u^L \frac{\partial J}{\partial z} = 0. \quad (3.36)$$

ou,

$$\frac{\partial(J \rho_v^L u^L)}{\partial z} = 0. \quad (3.37)$$

A conclusão importante deste resultado é que

$$J \rho_v^L u^L = k', \quad (3.38)$$

onde k' não depende de z e pode ser determinada substituindo-se, em (3.38), o valor de $J = \partial T(0, t_0) / \partial t_0 = \partial t_0 / \partial t_0$, $\rho_v^L(0, t_0)$ e $u^L(0, t_0)$. Portanto, tem-se

$$\left(\frac{\partial t_0}{\partial t_0} \right) \rho_v^L(0, t_0) u^L(0, t_0) = k', \quad (3.39)$$

Como $\partial t_0 / \partial t_0 = 1$, $\rho_v^L(0, t_0) = \rho_{v0}^L(t_0)$ e $u^L(0, t_0) = u_0^L(t_0)$, pode-se concluir que

$$k' = \rho_{v_0}^L(t_0)u_0^L(t_0). \quad (3.40)$$

Substituindo o valor de k' em (3.38) chega-se a

$$J \rho_v^L u^L = \left| \frac{\partial T}{\partial t_0} \right| \rho_{v_0}^L u_0^L = \rho_{v_0}^L(t_0)u_0^L(t_0). \quad (3.41)$$

A equação (3.41) pode ser expressa em termos da corrente inicial do feixe, resultando

$$\left| \frac{\partial T}{\partial t_0} \right| \rho_v^L u^L = \left| \frac{\partial T}{\partial t_0} \right| I^L(z, t_0) = I_0(t_0). \quad (3.42)$$

Esta é a equação da continuidade em coordenadas lagrangianas na representação (z, t_0) .

3.3.4 Equação do Momento linear

A equação do momento linear também deve ser transformada segundo (3.32). Considerando-se a equação do momento linear dado por (3.2), escrita segundo a descrição euleriana, devem-se aplicar primeiramente as regras de transformação ao lado esquerdo de tal equação obtendo-se, na descrição lagrangiana segundo as variáveis (z_0, t) , a equação

$$\frac{\partial u^L}{\partial z} = \frac{1}{u^L} \frac{F_z^E}{m_d}. \quad (3.43)$$

A mesma observação feita para o campo elétrico em 3.2.4 é válida nesta representação e, portanto, como se trata de uma incógnita de natureza euleriana, não se aplicam as regras de transformação (3.32).

3.3.5 Sistema de equações

É possível montar, finalmente, um sistema a partir das equações (3.29) e (3.43), além da força elétrica axial conforme (3.3), resultando

$$\begin{cases} \frac{\partial T(z, t_0)}{\partial z} = \frac{1}{u^L(z, t_0)} \\ \frac{\partial u^L(z, t_0)}{\partial z} = \frac{1}{u^L(z, t_0)} \frac{F_z^E(\vec{r})}{m_d}, \\ F_z^E(\vec{r}) = \iiint_V E_z(\vec{r}') \rho_v(\vec{r}') d\vec{r}' \end{cases} \quad (3.44)$$

onde campo elétrico $E_z(\vec{r})$ é calculado a partir de (3.5) e corresponde ao potencial eletrostático calculado por (3.4). Observa-se que a variável t_0 é, ainda, uma variável contínua. O modelo de disco, ao rotular cada disco pela sua posição inicial, permite considerar t_0 como um parâmetro de cada disco, ou seja, escrevê-lo como t_{0j} , onde j indica o disco. Portanto, a

conseqüência imediata da utilização do modelo de disco é que as derivadas parciais tornam-se ordinárias.

3.4 Dinâmica do sistema

O problema físico de interesse é constituído por um feixe de elétrons com dimensão axial finita L , com seção transversal circular de raio a , propagando-se no interior de um tubo de deriva de seção circular de raio b de dimensão axial muito grande. A razão de preenchimento típica é $b = 2a$. Nesta análise, em vista do problema de muitos corpos interagentes, o feixe de elétrons é dividido em discos, os quais são posicionados na região de interação convenientemente identificados em termos da posição z_0 no instante $t = 0$. A FIG. 3.4 ilustra o modelo de discos.

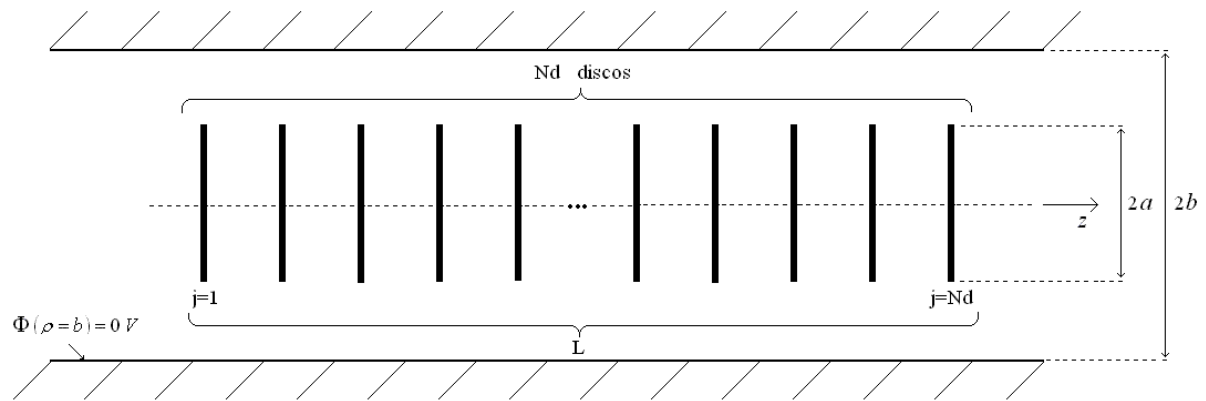


FIGURA 3.4 – Discos de carga de raio a no interior de um tubo de deriva cilíndrico de raio b .

Uma vez que o feixe de elétrons é formado por um conjunto de discos, conforme mostrado na FIG. 3.4., o potencial elétrico, o campo elétrico e a força elétrica entre os discos poderão ser determinados e a dinâmica de cada disco é obtida por meio da integração da equação do movimento sob efeito do campo de carga espacial (descrição lagrangiana). A seguir relacionam-se as hipóteses consideradas no modelo:

i) O feixe de elétron é focalizado por um campo magnético axial externo, estático e com intensidade suficientemente alta para garantir que o movimento dos elétrons do feixe seja somente na direção axial;

ii) A velocidade dc do feixe de elétrons é pequena quando comparada à velocidade da luz. Nestas condições, o potencial retardado criado pelo movimento dos discos carregados pode ser considerado igual àquele sem movimento. Nesta situação, o campo magnético

induzido pode ser desprezado. Com isso, a força de carga espacial resultante é devida somente à ação do campo elétrico;

iii) O feixe de elétrons é descrito pelo movimento de discos carregados de raio a , com espessura desprezível, propagando-se no interior no tubo de deriva, conforme pode ser visualizado na FIG. 3.4. O feixe tem um comprimento axial finito L . No instante de tempo inicial ($t = 0$), cada disco i é rotulado por sua posição inicial z_{0i} . O sinal modulador de RF é aplicado em um instante de tempo $t > 0$, em uma posição z_{RF} onde é colocada a cavidade de entrada;

iv) Os efeitos das cargas espaciais são calculados considerando-se a força elétrica sobre cada disco devido a contribuição de todos os outros discos presentes na região de interação;

v) A dinâmica de cada disco no instante t é calculada considerando-se a distribuição espacial de todos os outros discos no instante de tempo $t - \Delta t$, onde Δt é o passo de tempo usado na integração. Esta abordagem é conhecida por “leap frog”; e

vi) A carga elétrica em cada disco é considerada uniformemente distribuída e rígida.

Considerando o modelo de disco, a dinâmica do feixe de elétrons pode ser descrita a partir da dinâmica de cada disco e para isso, a segunda Lei de Newton para cada disco deve ser empregada e, portanto, a velocidade $u_i(z_{0i}, t)$ e a posição axial $z_i(z_{0i}, t)$, para todos os instantes de tempo t , precisam ser determinadas. De acordo com a segunda Lei de Newton, a velocidade u_i e a posição axial z_i são soluções do sistema de equações diferenciais de primeira ordem formado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_i(z_{0i}, t)}{dt} = \frac{1}{m_d} F_{zi}(z_{0i}, t) \\ \frac{dz_i(z_{0i}, t)}{dt} = u_i(z_{0i}, t) \end{array} \right. , \quad (3.45)$$

onde m_d é a massa do disco e $F_{zi}(z_{0i}, t)$ é a força elétrica total sobre o i -ésimo disco, na posição $z_i(z_{0i}, t)$, devida a todos os outros discos, no instante de tempo t , nas posições axiais $z_j(z_{0j}, t)$. É interessante observar que o sistema (3.45) é exatamente o sistema formado por (3.26) onde, ao se considerar a evolução de cada disco individualmente, na verdade está se considerando a posição z_0 como um parâmetro de cada disco, o que significa que a derivada deixa de ser parcial, tornando-se ordinária. Além disso, a força resultante sobre i -ésimo disco pode ser escrita como

$$F_{z_i} = \sum_{j=1, i \neq j}^{N_d} F_{ij} \left[\left[z_i(t, t_{0i}) - z_j(t, t_{0j}) \right] \right], \quad (3.46)$$

onde o termo entre colchetes indica que a força elétrica é função das posições relativas entre cada par de discos.

No apêndice D mostra-se como se calcular a força entre dois discos de carga para o problema em questão. Utilizando-se o resultado obtido, é possível calcular a força de carga espacial resultante sobre um disco por meio da soma das contribuições de todos os demais discos (princípio da superposição), dada por

$$F_j^E(z_j, z_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_d} \left\{ \frac{2q^2}{\pi a^2 \epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_1\left(x_{0n} \frac{a}{b}\right)}{x_{0n} J_1(x_{0n})} \right]^2 e^{-\frac{\rho_{0n}}{b} |z_j - z_i|} \left(\frac{z_j - z_i}{|z_j - z_i|} \right) \right\}. \quad (3.47)$$

3.5 Energia cinética e Energia Potencial

Durante a integração de (3.45) sob a ação da força (3.47), é de relevância a verificação da conservação da energia mecânica do sistema.

A energia cinética do sistema é calculada, para um determinado instante de tempo, pelo somatório das energias cinéticas de cada disco, ou seja,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_d} m_{dj} u_j^2. \quad (3.48)$$

Por outro lado, a energia potencial eletrostática U de um sistema de cargas [26], descrito por uma distribuição geral $\rho_v dV$, é expressa por

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_v \Phi(\vec{r}) dV. \quad (3.49)$$

Portanto, a energia potencial do sistema de discos que representa o feixe de elétrons pode ser calculada substituindo-se a densidade volumétrica de carga $\rho_v(\vec{r})$, dada por (D.52) e o potencial elétrico, dado por (D.58), em (3.49), resultando

$$U = \frac{q^2}{\pi a^2 \epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_1\left(x_{0n} \frac{a}{b}\right)}{x_{0n} J_1(x_{0n})} \right]^2 \frac{e^{-\frac{x_{0n}}{b} |z - z_j|}}{\frac{x_{0n}}{b}}. \quad (3.50)$$

A energia mecânica total do sistema, para cada instante de tempo, é calculada somando-se a energia cinética, dada por (3.48), com a energia potencial, dada por (3.50).

3.6 Simulação e resultados

Neste capítulo, a dinâmica do feixe de elétrons foi descrita por meio da evolução temporal do sistema (feixe de elétrons) no espaço de fase, ou seja, um gráfico da velocidade da partícula em função da posição, considerando o tempo como um parâmetro. Antes, porém, procurou-se investigar a dinâmica do feixe de elétrons sem modulação.

Observa-se que, em nenhum momento desta análise, foi considerada a hipótese simplificadora da existência de um fundo de íons imóveis neutralizadores dos efeitos das cargas espaciais, significando uma abordagem diferente daquela apresentada por Lau et al. [7] quando foi considerado o feixe de elétrons imerso em um fundo neutralizador de íons imóveis de tal forma que não existia campo elétrico dc neste estado não-perturbado. Portanto, na ausência de perturbação, os elétrons apresentavam a densidade de carga uniforme ρ_{v0} e se propagam com velocidade constante u_0 na direção z , significando que as forças de carga espacial foram desprezadas até o momento da modulação em velocidade (perturbação). Portanto, considera-se o feixe de elétrons, antes da modulação em velocidade, em um estado perturbado, ou seja, consideram-se as forças de carga espacial agindo sobre os elétrons do feixe durante todo o tempo.

3.6.1 Autodifusão

As seguintes hipóteses foram consideradas no estudo da dinâmica do feixe de elétrons sem modulação: no instante inicial, todos os discos tinham a mesma distância axial dz_0 e estavam em movimento dentro do tubo de deriva com uma velocidade inicial $\vec{u}_j(z_{0j,t=0}) = u_0 \hat{a}_z$, onde j indica o disco, \hat{a}_z é o versor na direção z e u_0 é a velocidade DC do feixe de elétrons; e o comprimento total inicial do feixe é $L = N_d dz_0$. Os discos, no instante inicial, foram posicionados igualmente espaçados, a fim de satisfazer a hipótese da densidade inicial uniforme. Por outro lado, utilizando (3.24), pode-se demonstrar que, para densidade uniforme, o jacobiano deve ser unitário ($J = 1$) e, portanto, as distâncias relativas entre discos adjacentes devem ser iguais. A TAB.3.2 apresenta as quantidades utilizadas na simulação.

TABELA 3.2 – Quantidades utilizadas no código numérico.

Quantidade	Símbolo	Valor
Velocidade dc do feixe, m/s	u_0	$4,59 \times 10^7$
Densidade de carga dc do feixe, C/m^3	ρ_{v0}	$6,78 \times 10^{-3}$

Corrente dc do feixe, A	I_0	0,6
Tensão dc do feixe, kV	V_0	6,0
Frequência do sinal modulador, GHz	f_0	1,848
Distância inicial entre discos, cm	dz_0	$3,1 \times 10^{-2}$
Passo de tempo utilizado na integração, ps	Δt	1,35
Raio do feixe de elétrons, mm	a	$7,83 \times 10^{-1}$
Raio do tubo de deriva, mm	b	$15,66 \times 10^{-1}$
Número de discos	N_d	641
Número de discos modulados	N_{dm}	81

Com o início da simulação, à medida que o tempo evolui e devido à ação das forças de carga espacial, o comprimento do feixe aumenta e as velocidades dos discos das extremidades do feixe mudam: em uma extremidade a velocidade aumenta e em outra a velocidade diminui, como pode ser visto no gráfico da FIG. 3.5(a). Este fenômeno é conhecido por autodifusão do feixe de elétrons e resulta na diminuição da densidade nas extremidades do feixe, conforme é mostrado no gráfico da FIG. 3.5(b). A autodifusão determina uma janela temporal que corresponde ao intervalo de tempo até quando o conjunto de discos pode ser considerado um feixe de elétrons, ou seja, a porção horizontal do feixe mostrada no gráfico da FIG 3.5(b), onde a densidade é uniforme.

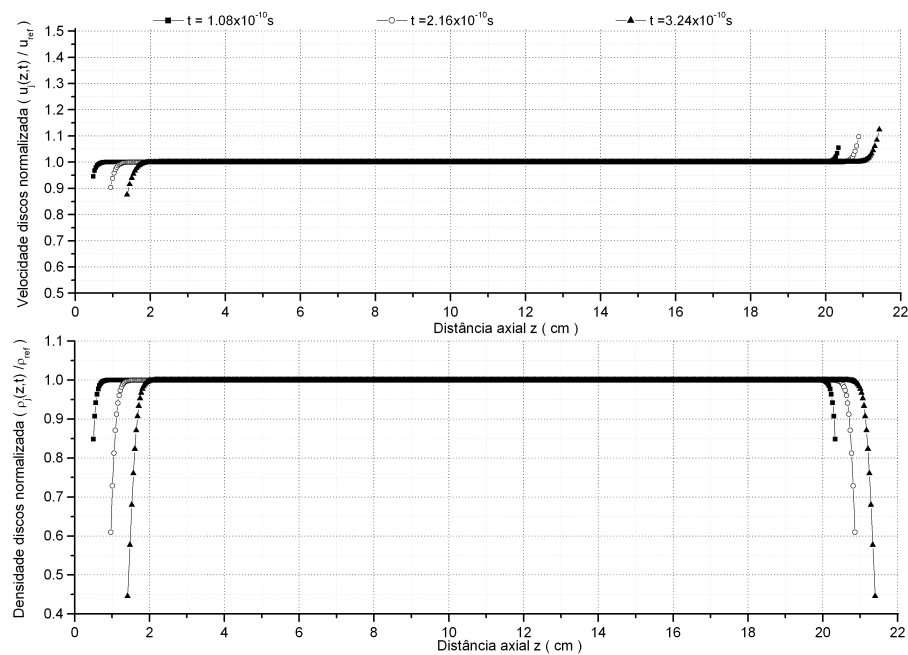


FIGURA 3.5 – Espaço de fase (a) e densidade normalizada (b), ilustrando o fenômeno da autodifusão dos elétrons nas extremidades do feixe para três instantes de tempo, desconsiderando a modulação em velocidade.

Na FIG. 3.6 são apresentadas as trajetórias de alguns discos durante a simulação para investigar a dinâmica do feixe de elétrons sem modulação. Neste gráfico também é possível verificar o fenômeno da autodifusão ao observar que os discos mais próximos das extremidades estão se afastando, ou seja, a distância relativa entre duas trajetórias adjacentes está aumentando.

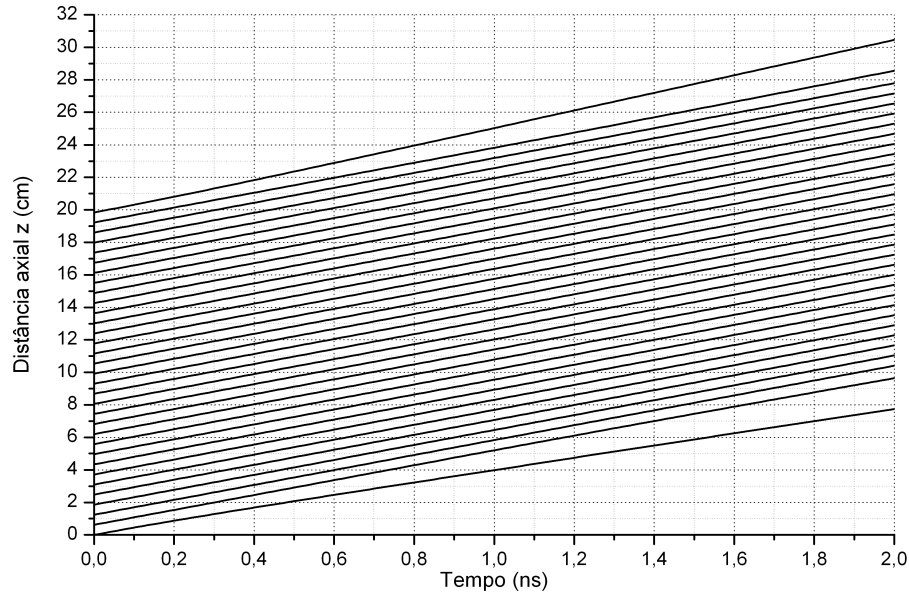


FIGURA 3.6 – Trajetórias de alguns discos durante a simulação para investigar a dinâmica do feixe de elétrons sem modulação, onde é possível verificar o fenômeno da autodifusão dos discos nas extremidades do feixe.

3.6.2 Modulação em velocidade

A etapa seguinte da simulação envolveu o processo de modulação em velocidade, que pode ser incluída no modelo utilizando a seguinte expressão para a velocidade no instante da modulação

$$u_i(z_{0i}, t_0 + idt) = u_0 \left\{ 1 - \frac{\mathcal{E}_p}{2} \sin[\omega_0(t_0 + idt)] \right\}, \quad (3.51)$$

onde $\omega_0 = 2\pi f_0$ é a frequência angular do campo modulador de *RF* na cavidade de entrada e \mathcal{E}_p é considerado um índice de modulação. Considera-se a cavidade de entrada na posição z_{RF} e inicia-se a simulação no instante em que ela é “ligada”. Neste caso, há um processo de modulação na velocidade, ou seja, quando os discos passam através desta cavidade, o campo elétrico impõe uma modulação senoidal no movimento axial destes discos. Alguns discos têm um aumento de velocidade porque eles encontram o campo elétrico no sentido contrário em relação a seus sentidos da propagação e, como consequência, são acelerados. Por outro lado,

os discos que encontram o campo elétrico no mesmo sentido são retardados e têm uma diminuição de velocidade. Conseqüentemente, após a modulação da velocidade, há dois grupos: os discos lentos e os discos rápidos.

A cavidade fica “ligada” durante um período de RF e, neste intervalo, 81 discos passam pela cavidade e são modulados, ou seja, suas velocidades $\vec{u}_j(z_{0j}, t)$ mudam de acordo com (3.51). Esta situação é mostrada na FIG. 3.7(a) para o instante $0,54 \text{ ns}$. Devido aos efeitos da carga espacial, os dois picos da velocidade mostrado na FIG. 3.7(a) têm amplitudes diferentes. Além disso, o perfil senoidal também resulta um pouco deformado devido às forças de carga espacial.

Na FIG. 3.7(b) é mostrada a densidade, calculada usando (3.24). No tubo de deriva, como o grupo de discos rápidos é modulado por último, alguns discos deste grupo alcançam alguns discos do grupo lento. Como conseqüência, a densidade aumenta, conforme pode ser visto na FIG. 3.7(b), até a formação de um agrupamento muito estreito (“electron bunch”). Além disso, é interessante comparar a velocidade das partículas e o comportamento da densidade. O máximo e o mínimo das velocidades mostradas na FIG. 3.7(a) correspondem aos mínimos da densidade da partícula mostrados na FIG. 3.7(b). Isso acontece porque os discos com velocidades próximas à máxima tendem a se aproximar dos discos à sua frente, com velocidades menores, contribuindo para o aumento da densidade. Ao mesmo tempo, estes discos rápidos tendem a se afastar dos discos que estão antes deles e com velocidades menores e, com um aumento nas distâncias relativas, a densidade diminui. No caso dos discos com as menores velocidades ocorre exatamente o oposto: os discos da frente se afastam por terem velocidades maiores do que as deles e, com um aumento nas distâncias relativas, a densidade diminui. Os discos que estão atrás, também mais rápidos, tendem a se aproximar, aumentando a densidade.

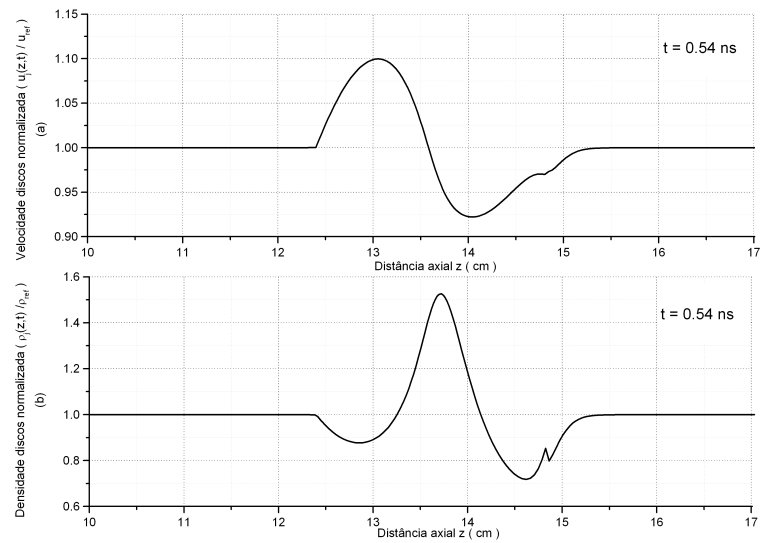


FIGURA 3.7 – Espaço de fase (a) e densidade dos discos normalizada (b), calculados no instante de tempo $t = 0.54 \text{ ns}$ e considerando um índice de modulação $\varepsilon_p = 0.2$.

Na FIG. 3.8 são apresentadas as trajetórias de alguns discos, dentre os 81 discos que foram modulados quando passaram pela cavidade de entrada. Os discos mais rápidos estão, em $t = 0$, na parte inferior do gráfico. À medida que o tempo evolui, é possível observar que as trajetórias de alguns discos mais rápidos se aproximam das trajetórias dos discos mais lentos, até a formação do agrupamento (área mais escura do gráfico). Além disso, pode-se observar também que existem ultrapassagens entre discos. Considerou-se o índice de modulação $\varepsilon_p = 0,25$ para que fosse possível verificar claramente a aproximação, o agrupamento, a ultrapassagem de discos e o, posterior, afastamento.

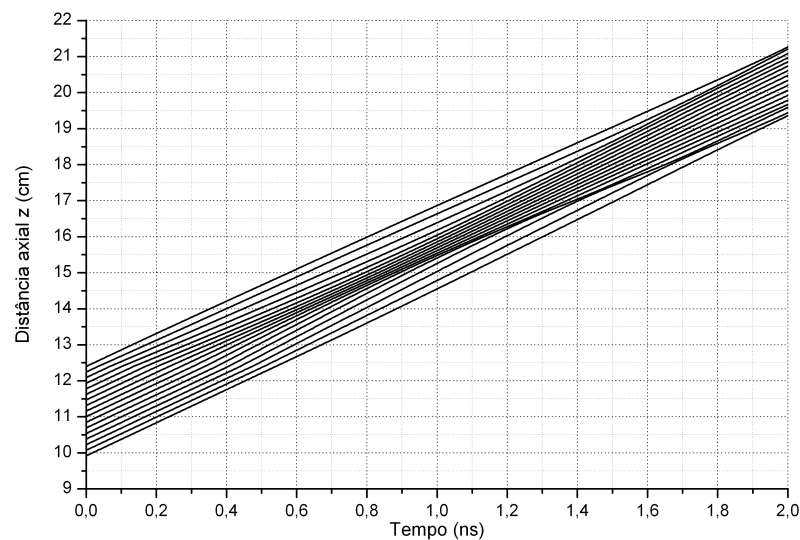


FIGURA 3.8 – Trajetórias de alguns discos, dentre os 81 discos que foram modulados, considerando o índice de modulação $\varepsilon_p = 0,25$. É possível observar a aproximação, o agrupamento, a ultrapassagem e o afastamento de discos.

Utilizando um índice de modulação $\varepsilon_p = 0,4$, é possível observar no gráfico do espaço de fase da FIG. 3.9, além da ocorrência do agrupamento (“electron bunch”), como consequência da aproximação dos discos, a ocorrência da ultrapassagem de elétrons (“electron overtaking”) em algumas posições no instante $1,4 \text{ ns}$. Nestes pontos há o aparecimento de múltiplos valores de velocidade para uma mesma posição. Esta é uma das mais importantes características que ratifica a utilização da descrição lagrangiana ao invés da descrição euleriana porque, nesta descrição, o surgimento deste fenômeno leva a instabilidade numérica, tornando os resultados, a partir do agrupamento e ultrapassagem de elétrons, menos confiáveis.

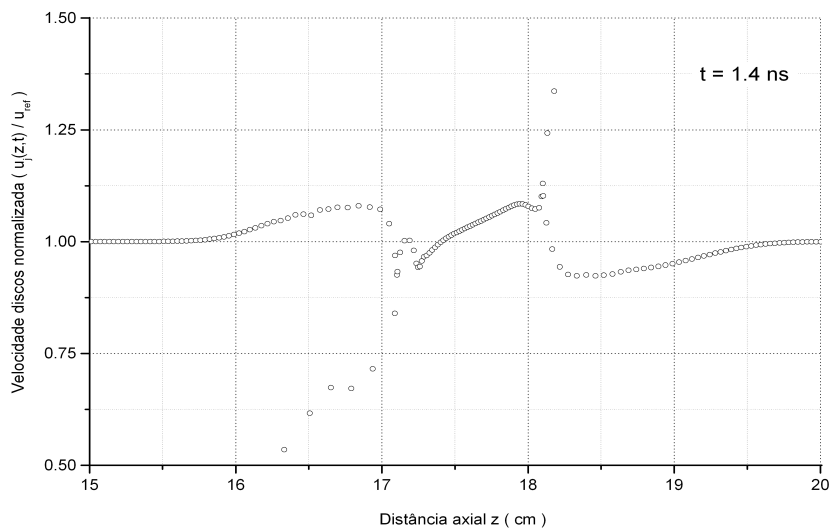


FIGURA 3.9 – Espaço de fase, considerando um índice de modulação $\varepsilon_p = 0,4$, mostrando a ultrapassagem de elétrons no instante de tempo $t = 1,4 \text{ ns}$.

3.6.3 Corrente de convecção

A corrente de convecção do feixe de elétrons pode ser calculada a partir da definição de corrente, sendo expressa segundo

$$I^L(z_0, t) = \rho_v^L(z_0, t) u^L(z_0, t) A, \quad (3.52)$$

onde A é a área da seção transversal do feixe de elétrons, sendo a densidade e velocidade lagrangianas dadas por (3.24) e (3.25), respectivamente. Na FIG. 3.10 é mostrado o perfil da corrente de convecção do feixe de elétrons normalizada, calculada a partir de (3.52). Os picos da corrente estão associados às posições onde estão ocorrendo o agrupamento e ultrapassagem de elétrons, conforme o gráfico da FIG. 3.9.

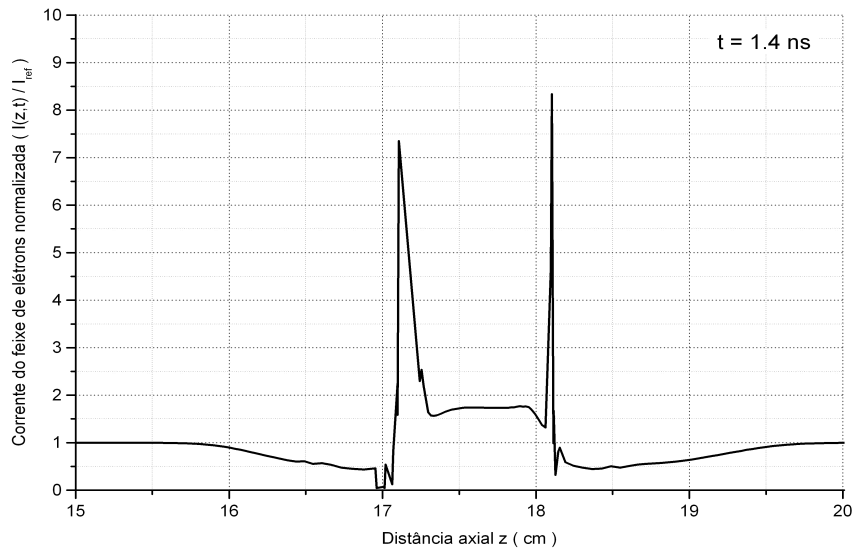


FIGURA 3.10 – Corrente do feixe de elétrons normalizada em função da posição z no instante de tempo $t = 1.4 \text{ ns}$, considerando um índice de modulação $\varepsilon_p = 0.4$.

A análise harmônica da corrente associada ao feixe de elétrons é uma ferramenta relevante no estudo de amplificadores klystron. Sabe-se que o processo de modulação em velocidade leva aos fenômenos de compressão e rarefação do feixe de elétrons. Estes fenômenos estão associados ao agrupamento do feixe de elétrons (“electron bunching”), ou seja, com o aumento da densidade que, por sua vez, tem um aumento da corrente de convecção associada a ela. Partindo-se do fato que a modulação é periódica, é possível considerar a corrente também periódica em t com período $2\pi/\omega_0$ e escrevê-la em série de Fourier na forma trigonométrica [27][28] como

$$I^E(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[I_{cn}^E(z) \cos(n\omega_0 t) + I_{sn}^E(z) \sin(n\omega_0 t) \right], \quad (3.53)$$

onde os coeficientes $I_{cn}^E(z)$ e $I_{sn}^E(z)$ são calculados da seguinte forma

$$I_{cn}^E(z) = \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} I^E(z, t) \cos(n\omega_0 t) dt, \text{ e} \quad (3.54)$$

$$I_{sn}^E(z) = \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} I^E(z, t) \sin(n\omega_0 t) dt. \quad (3.55)$$

Para a integração das equações (3.54) e (3.55) se faz necessário uma interpretação mais cuidadosa do significado delas. Como ponto de partida deve-se observar que o resultado da integração é uma função de z . Em outras palavras, o valor de z deve ser especificado, além do valor da corrente associada a essa posição. Em relação a variável t , a interpretação é que trata-se do tempo gasto para o j -ésimo disco, modulado no instante de tempo inicial t_{0j} ,

alcançar a posição z . Em outras palavras, o tempo deve ser entendido como função da posição, isto é, $t = T(z, t_0)$ e, desta forma, as integrais (3.54) e (3.55) denotam a contribuição da corrente de convecção associada a cada disco que, modulada no instante de tempo t_{0j} , chegará na posição z , no tempo de chegada $t_j = T(z, t_{0j})$. Portanto, deve-se conhecer previamente o tempo de chegada $t_j = T(z, t_{0j})$ de cada disco a fim de calcular as integrais.

Por outro lado, a solução do problema da dinâmica dos discos envolve a solução do sistema onde o tempo é variável independente, isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_i(z_{0i}, t)}{dt} = \frac{1}{m_d} F_{zi}(z_{0i}, t) \\ \frac{dz_i(z_{0i}, t)}{dt} = u_i(z_{0i}, t) \end{array} \right. , \quad (3.56)$$

apresentado originalmente em (3.26) e, depois de se considerar o modelo de disco, em (3.45). A transformação deste sistema para $t = T(z, t_0)$ consiste em um problema formidável tendo em vista o cálculo da força. Uma maneira de sobrepular esta dificuldade é, a partir da solução deste sistema, isto é, do conhecimento de $z = Z(z_0, t)$ invertê-la com o objetivo de obter $t = T(z, t_0)$. Na prática, obtém-se o tempo de chegada utilizando-se o gráfico da trajetória dos discos (solução do sistema), conforme mostrado na FIG. 3.11 onde, para um dado valor de z no gráfico, por exemplo, $z = 13 \text{ cm}$, mostra-se como encontrar o valor do tempo de chegada do disco i , ou seja, $t_i = T(z, t_{0i})$, bem como o tempo de chegada $t_j = T(z, t_{0j})$ do disco j e $t_k = T(z, t_{0k})$ do disco k .

Assim procedendo, pode-se substituir (3.27) em (3.54), obtendo-se

$$I_{cn}^E(z) = \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} I^E(z, t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} I^L(z, t_0) \cos[n\omega_0 T(z, t_0)] |J| dt_0, \quad (3.57)$$

onde $J = \partial T(z, t_0) / \partial t_0$ é o jacobiano da transformação. Utilizando a equação da continuidade de carga na representação $t = T(z, t_0)$, dada por (3.42), obtém-se

$$I_{cn}^E(z) = \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} I(t_0) \cos[n\omega_0 T(z, t_0)] dt_0. \quad (3.58)$$

Um raciocínio semelhante pode ser realizado para $I_{sn}^E(z)$, dado por (3.55), obtendo-se

$$I_{sn}^E(z) = \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} I(t_0) \text{sen}[n\omega_0 T(z, t_0)] dt_0. \quad (3.59)$$

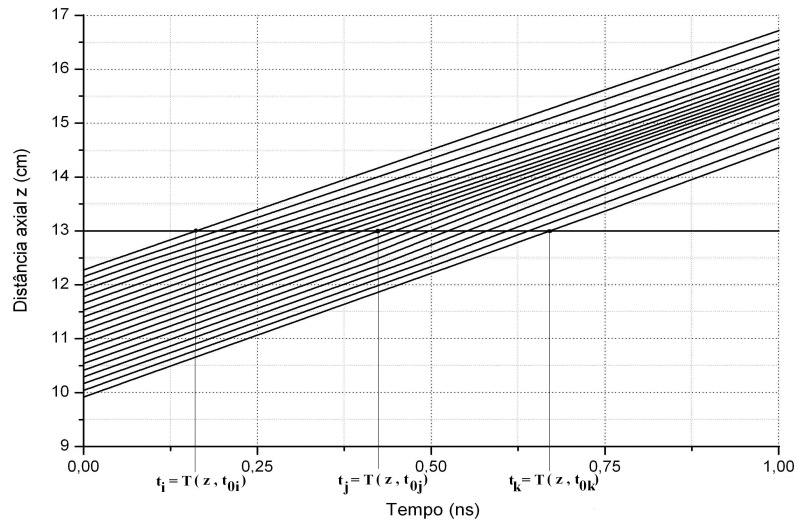


FIGURA 3.11 – Trajetórias de alguns discos, dentre os 81 discos que foram modulados, considerando o índice de modulação $\varepsilon_p = 0.25$, mostra-se como encontrar o valor do tempo de chegada do disco i , ou seja, $t_i = T(z, t_{0i})$, bem como o tempo de chegada $t_j = T(z, t_{0j})$ do disco j e $t_k = T(z, t_{0k})$ do disco k .

Para a integração numérica, as integrais de (3.58) e (3.59) podem ser escritas como

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} I_0(t_0) \cos[n\omega_0 T(z, t_0)] dt_0 = \frac{2\pi/\omega_0}{N_{dm}} \sum_{j=1}^{N_{dm}} I_{0j}(t_{0j}) \cos[n\omega_0 T_j(z, t_{0j})], \quad (3.60)$$

e

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} I_0(t_0) \text{sen}[n\omega_0 T(z, t_0)] dt_0 = \frac{2\pi/\omega_0}{N_{dm}} \sum_{j=1}^{N_{dm}} I_{0j}(t_{0j}) \text{sen}[n\omega_0 T_j(z, t_{0j})], \quad (3.61)$$

Com isso, as equações (3.54) e (3.55) resultam

$$\begin{cases} I_{cn}^E(z) = \frac{2}{N_{dm}} \sum_{j=1}^{N_{dm}} I_{0j}(t_{0j}) \cos[n\omega_0 T_j(z, t_{0j})] \\ I_{sn}^E(z) = \frac{2}{N_{dm}} \sum_{j=1}^{N_{dm}} I_{0j}(t_{0j}) \text{sen}[n\omega_0 T_j(z, t_{0j})] \end{cases}, \quad (3.62)$$

A partir de (3.62) é possível calcular a amplitude de cada harmônica que compõe a corrente. Inicialmente, calcula-se o valor de cada coeficiente de Fourier (3.62) e, em seguida, calcula-se a amplitude de cada harmônica utilizando a expressão

$$I_n(z) = \sqrt{[I_{cn}^E(z)]^2 + [I_{sn}^E(z)]^2}. \quad (3.63)$$

Na FIG. 3.12 são mostradas as envoltórias da corrente harmônica fundamental utilizando as quantidades apresentadas na TAB. 3.2 e para quatro índices de modulação distintos. Observa-se, no gráfico, que quanto maior o índice de modulação, maior é o máximo da corrente harmônica fundamental. Além disto, este valor máximo ocorre em posições mais próximas à cavidade de entrada. Por exemplo, considerando-se o índice de modulação 0,1, o

nível máximo é aproximadamente 0,2 da corrente DC do feixe e ocorre em, aproximadamente, 4,8 cm. Considerando-se $\varepsilon_p = 0,3$, o nível máximo é aproximadamente 0,45 da corrente dc do feixe e ocorre em aproximadamente 3,8 cm.

A posição onde ocorre o máximo da corrente é uma informação relevante pois, nesta posição pode-se colocar uma cavidade de saída a fim de se extrair o máximo sinal de *RF* amplificado.

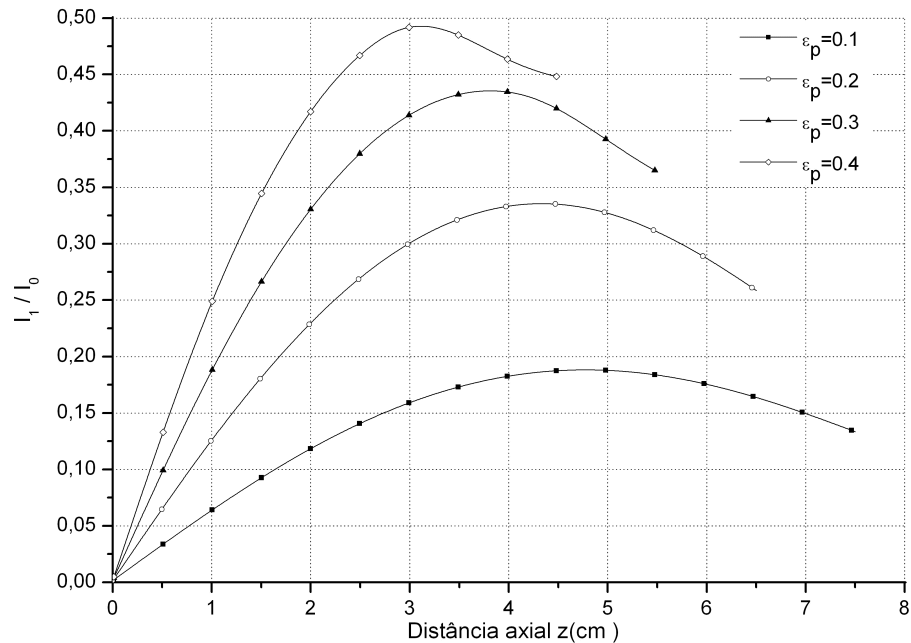


FIGURA 3.12 – Evolução axial da corrente harmônica considerando quatro índices de modulação. Observa-se, no gráfico, que quanto maior o índice de modulação, maior é o máximo da corrente harmônica fundamental. Além disso, este valor máximo ocorre em posições mais próximas à cavidade de entrada.

No caso de se colocar uma cavidade intermediária com o objetivo de remodular o feixe de elétrons, verificou-se que ela não deve ser colocada na posição onde ocorre o máximo de corrente mas em uma posição após este ponto de máximo. Na posição onde ocorre o agrupamento de elétrons há muitos discos juntos e remodular os discos nesta posição não surtiu o efeito desejado. Para obter o efeito desejado, é necessário esperar que ocorram as ultrapassagens, ou seja, a situação em que um disco mais rápido superou um mais lento à sua frente e, nesta situação, remodular os discos com o intuito de diminuir a velocidade dos discos mais rápidos, que estão à frente, e aumentar a velocidade dos discos mais lentos, que estão atrás, possibilitando que estes alcancem os da frente com a formação de um novo agrupamento. Na FIG. 3.13 é apresentado o gráfico da envoltória da corrente harmônica fundamental utilizando as quantidades apresentadas na TAB. 3.2 e para o índice de

modulação $\varepsilon_p = 0,2$. Considerando-se este índice, o nível máximo é aproximadamente 0,33 da corrente d.c. do feixe e ocorre em, aproximadamente, 4,33 cm. A cavidade intermediária foi posicionada em 4,86 cm e com índice de modulação $\varepsilon_p = 0,1$. Com isso, o nível máximo chegou a 0,36 da corrente d.c. do feixe e ocorreu em, aproximadamente, 6,34 cm. Uma cavidade de saída pode ser colocada nesta posição axial a fim de se extrair este sinal de *RF* amplificado.

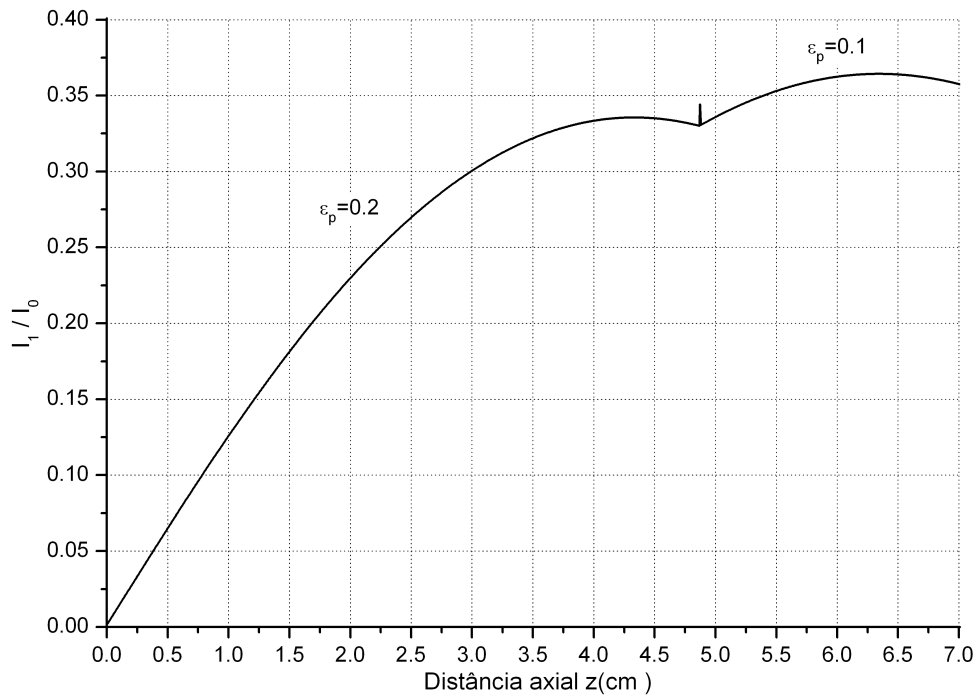


FIGURA 3.13 – Evolução axial da corrente harmônica considerando três cavidades. Considerou-se, para a cavidade de entrada, posicionada em $z = 0$, o índice de modulação $\varepsilon_p = 0,2$. Para a cavidade intermediária, posicionada em $z = 4,86$ cm, considerou-se $\varepsilon_p = 0,1$. O nível máximo da corrente harmônica chegou a 0,36 da corrente dc do feixe e ocorreu em, aproximadamente, 6,34 cm. Uma cavidade de saída pode ser colocada nesta posição para extrair o sinal amplificado.

Utilizando um raciocínio semelhante, foi possível posicionar uma segunda cavidade intermediária de forma a aumentar o ganho da corrente harmônica fundamental, conforme pode ser visto na FIG. 3.14. Como o nível máximo ocorreu em, aproximadamente, 6,34 cm, posicionou-se esta segunda cavidade intermediária, com índice de modulação $\varepsilon_p = 0,1$, em 7,44 cm aproximadamente, de maneira que obteve-se um nível máximo de aproximadamente 0,40 da corrente d.c. do feixe. Este máximo ocorreu em 9,78 cm, aproximadamente. Colocando uma cavidade de saída nesta posição tem-se um amplificador klystron de quatro cavidades.

Na FIG. 3.14 são mostradas, também, os resultados obtidos com a variação do índice de modulação da cavidade de entrada, mantendo-se as cavidades intermediárias nas posições determinadas para se obter o máximo da corrente harmônica fundamental utilizando as quantidades apresentadas na TAB. 3.2 e a cavidade de entrada com índice de modulação $\varepsilon_p = 0,2$. Verificou-se que para as outras duas situações ($\varepsilon_p = 0,1$ e $\varepsilon_p = 0,15$), há o aumento da corrente harmônica fundamental, indicando que as cavidades intermediárias foram posicionadas de maneira satisfatória para estes três índices de modulação.

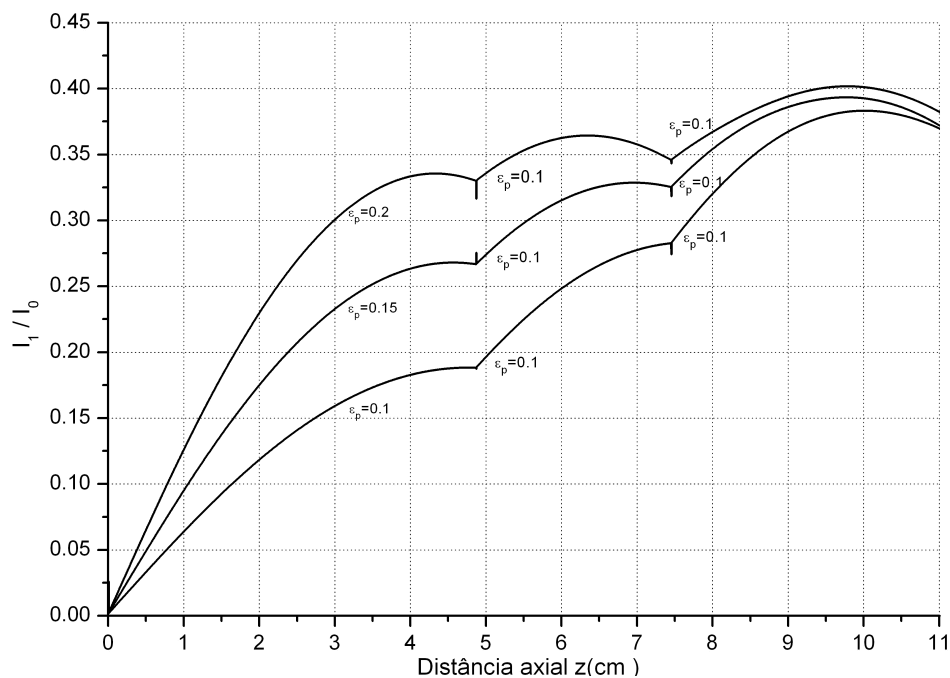


FIGURA 3.14 – Evolução axial da corrente harmônica considerando quatro cavidades e três índices de modulação para a cavidade de entrada. As posições das cavidades intermediárias foram mantidas fixas: a primeira em 4,86 cm e a segunda em 7,44 cm. Para as três situações, ocorreu aumento da corrente harmônica fundamental.

3.6.4 Conversão AM/AM e compressão de ganho

Assim como em todos os amplificadores, as curvas de conversão AM/AM e de compressão de ganho são gráficos que apresentam características muito úteis. No caso da conversão AM/AM, como os detalhes do acoplamento entre as cavidades de entrada e saída não são conhecidas, não há uma escolha clara sobre qual parâmetro utilizar para definir os níveis de *RF* da entrada e da saída do amplificador klystron. Uma escolha aceitável é usar, para o nível de entrada, a medida em decibéis da amplitude $20\log(\varepsilon_p)$ e, para a saída, a medida em decibéis da amplitude da corrente harmônica $20\log\left[I_1/(I_0 \times 10^{-3})\right]$ [8].

No gráfico da FIG. 3.15 é apresentada a curva da conversão AM/AM, onde o eixo das abscissas representa a medida em decibéis da amplitude $20\log(\varepsilon_p)$ e o eixo das ordenadas representa a medida em decibéis da amplitude da corrente harmônica $20\log\left[I_1/(I_0 \times 10^{-3})\right]$.

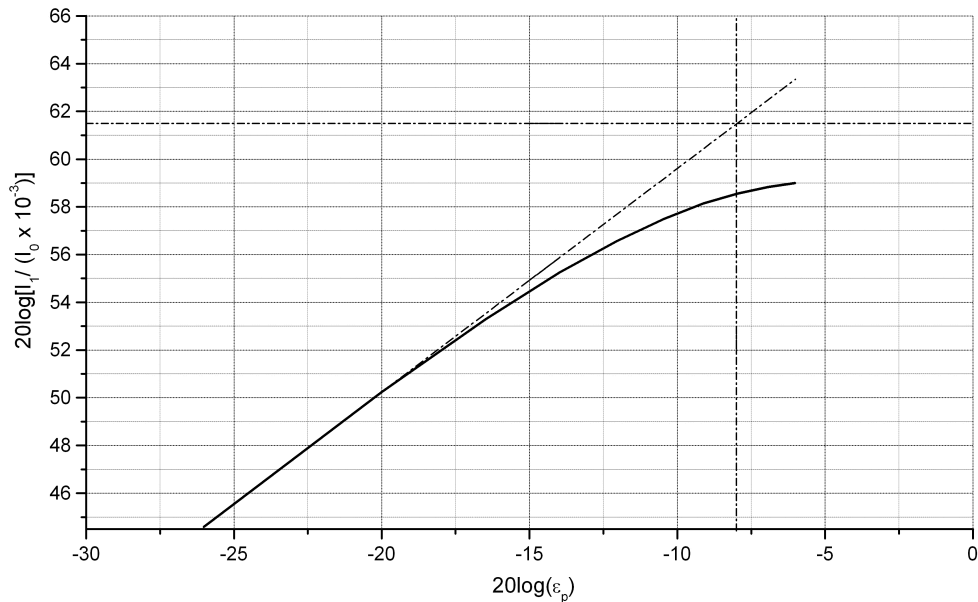


FIGURA 3.15 – Conversão AM/AM do modelo não-linear. A linha vertical representa -8 dB do nível de entrada e corresponde 3 dB de compressão de ganho.

Pode-se observar que a linha vertical representa -8 dB de nível de entrada e corresponde a, aproximadamente, 3 dB de compressão de ganho. A saturação no ganho apresentada no gráfico está relacionada com os efeitos não-lineares que ficam mais pronunciados à medida que se aumenta o índice de modulação.

3.6.5 Energia mecânica total

Na FIG. 3.16(a) é apresentada a energia potencial do sistema, calculada usando (3.50). A energia cinética, calculada usando (3.48), é mostrada na FIG. 3.16(b). Finalmente, a energia mecânica total do sistema, calculada pela soma da energia cinética com a energia potencial, é apresentada no gráfico da FIG. 3.16(c).

Observa-se que a energia total do sistema não se conserva no período de tempo correspondente à modulação de velocidade do feixe de elétrons. Como os primeiros discos modulados são desacelerados, a energia cinética apresenta um decréscimo até o momento que outros discos são acelerados, conforme mostrado na FIG. 3.7(a). Depois de um determinado

tempo, na região onde ocorre o agrupamento de elétrons, a energia potencial aumenta devido a maior aproximação dos discos, como pode ser visto na FIG. 3.16(a). Depois da ultrapassagem, a energia potencial diminui porque os discos se afastam, conforme pode ser visualizado na FIG. 3.16(a). Ao mesmo tempo, suas velocidades tendem a aumentar devido às forças de carga espacial, conforme pode ser visualizado no gráfico da FIG. 3.16(b).

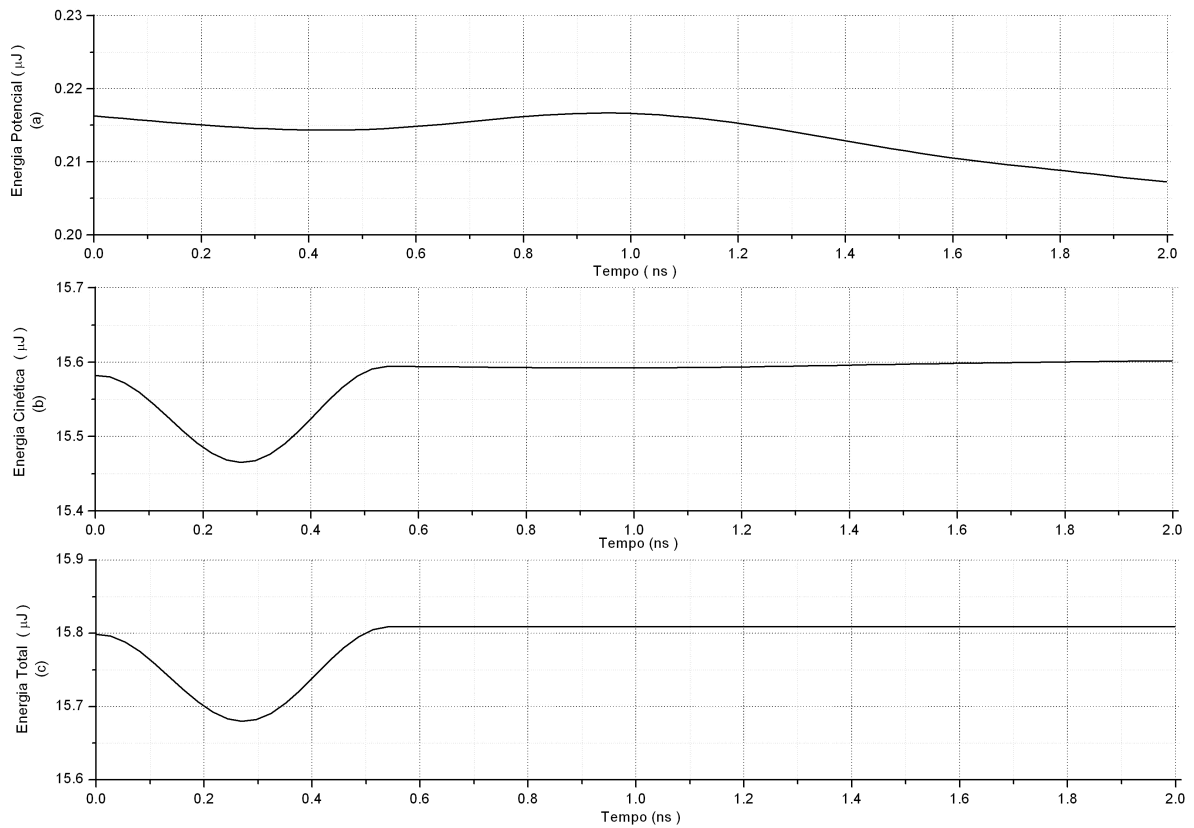


FIGURA 3.16 – Energia total do sistema (c), calculada por meio de do somatório da energia cinética (a) e da energia potencial (b).

3.7 Conclusão do capítulo

Neste capítulo foi apresentado um modelo a grandes sinais unidimensional composto pelas equações da continuidade e do momento linear e pela força de carga espacial, devido à ação do campo elétrico, calculada utilizando o método da função de Green (apêndice D). Ao se considerar, neste capítulo, o modelo de disco, obtém-se, no final, a força elétrica exercida por um disco sobre outro disco. Devido à geometria cilíndrica, considerou-se coordenadas cilíndricas e propagação na direção z . Além disso, considerou-se também a hipótese de simetria azimutal, bem como o campo magnético focalizador suficientemente alto para garantir que o movimento dos elétrons do feixe fosse somente na direção axial. O sistema não-linear, inicialmente em coordenadas eulerianas nas variáveis independentes (z, t) ,

foi utilizado no desenvolvimento de um sistema de equações no formalismo lagrangiano. Os resultados, na forma de gráficos, de uma maneira geral, mostraram a dinâmica do feixe de elétrons no tubo de deriva, possibilitando-se observar vários fenômenos típicos nos estudos de amplificadores klystrons, tais como: o fenômeno da autodifusão, a modulação em velocidade, o efeito das cargas espaciais, o agrupamento e ultrapassagem dos elétrons, a corrente de convecção, a análise da corrente harmônica, a conversão AM/AM, a compressão de ganho e a conservação de energia.

No código numérico, validado usando os dados de um amplificador klystron comercial Varian de 1,848 GHz, considerou-se os efeitos da carga espacial agindo sobre os elétrons do feixe desde o início da simulação. Estes efeitos não foram considerados nos trabalhos de referência, o que demonstra ser algo novo nos estudos de feixes de elétrons. As consequências da consideração das forças de carga espacial puderam ser comprovadas nos resultados encontrados. Por exemplo, quando se considera o efeito de carga espacial, constatou-se a importância de se fazer a análise da dinâmica do feixe de elétrons sem modulação pois, ao se considerar o feixe de elétrons finito, apareceu o fenômeno da autodifusão. Ela determina uma janela temporal que corresponde ao intervalo de tempo até quando o conjunto de discos pode ser considerado um feixe de elétrons, ou seja, a porção do feixe com densidade uniforme.

A força elétrica, calculada utilizando o método da função de Green, dispensou a dependência do modelo em relação ao fator de redução de frequência de plasma (apêndice A). Este fator deve ser conhecido antes do início da simulação. Durante o fenômeno de agrupamento de elétrons, o aparecimento de múltiplos valores de velocidade para uma mesma posição axial ratifica a utilização do formalismo lagrangiano ao invés do formalismo euleriano. As simulações, usando este formalismo, apresentam instabilidades numéricas nos resultados a partir do agrupamento de elétrons devido aos múltiplos valores de velocidade.

A análise da corrente harmônica mostrou-se essencial para identificar o valor máximo da corrente fundamental em relação à corrente dc do feixe de elétrons e, além disso, a posição onde o máximo ocorre, fundamental para o posicionamento de múltiplas cavidades.

Capítulo IV

METODOLOGIA PARA O PROJETO DE AMPLIFICADORES KLYSTRONS DE MÚLTIPLAS CAVIDADES – RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo apresentam-se, como aplicação do formalismo apresentado no capítulo II, as análises de alguns projetos. Tendo em vista que, para o projeto de amplificadores klystrons de múltiplas cavidades, não existe uma expressão geral que permita obter a solução para um projeto ótimo, ou seja, um determinado conjunto de cavidades, características do feixe de elétrons e produto do ganho-largura de banda, apresentar-se-á uma seqüência de passos para possibilitar obter-se uma solução de compromisso preliminar para o problema. Experiência prévia do projetista de klystrons e o emprego de expressões empíricas e aproximadas são fundamentais para um bom projeto.

Este capítulo está organizado como segue. Na seção 4.1, realiza-se uma análise a pequenos sinais onde são calculados os principais parâmetros do formalismo apresentado no capítulo II de maneira a possibilitar, no final da seção, o cálculo do ganho de voltagem e, principalmente, do ganho de potência utilizando os parâmetros do amplificador klystron Varian 4K3SL [29]. Na seção 4.2, acrescenta-se a análise a grandes sinais a fim de se estudar o comportamento não-linear do projeto, considerando-se um formalismo para eliminar a dependência do índice de modulação, mostrado no capítulo III, que foi utilizado para viabilizar as simulações sem considerar os parâmetros das cavidades. Para isso, considerou-se a força moduladora, devido ao campo elétrico no interior do tubo de deriva, nas proximidades de um gap de interação da cavidade, calculada a partir do campo elétrico mostrado no apêndice B. Na seção 4.3, apresenta-se um formalismo para se estudar a largura de banda. Na seção 4.4, conclui-se o capítulo.

4.1 Análise a pequenos sinais

Os parâmetros iniciais de projeto consistem na frequência central de operação ω_0 e o ganho mínimo necessário do amplificador. De posse do conhecimento da frequência central de operação é possível determinar as dimensões físicas das cavidades reentrantes que oscilarão na frequência central. No apêndice B apresenta-se uma metodologia para a determinação das dimensões físicas da cavidade que sustentarão a oscilação na frequência central de operação. A hipótese fundamental do método é que a admitância do gap deve ser a mesma independente da maneira que esta é calculada, isto é, se são utilizados os campos da

cavidade reentrante ou os campos que se propagam do tubo de deriva de seção circular, com a hipótese, que no gap o campo elétrico apresenta uma distribuição conhecida. Neste trabalho são admitidos, sobre o gap, dois perfis de campo elétrico axial:

- constante, dado por

$$e_z(b, z) = E_0 \text{ para } |z| \leq \frac{d}{2}, \text{ e} \quad (4.1)$$

- hiperbólico, dado por

$$e_z(b, z) = E_0 \cosh(qz), \text{ para } |z| < d/2, \quad (4.2)$$

onde q é uma constante.

Contudo, o conjunto de parâmetros geométricos, altura da cavidade L , raio interno b , raio externo r_c e largura do gap d , que permitem a cavidade oscilar na frequência ω_0 , não são parâmetros únicos, isto é, não existe somente um conjunto de parâmetros L , b , r_c e d , que sustentarão as oscilações na frequência ω_0 . Uma vez determinado o conjunto de parâmetros geométricos, estes devem atender ao requisito de elevada seletividade, portanto o valor de Q_k deve ser elevado. A seguir determina-se a razão $(R_{sh}/Q)_k$ da cavidade, que é seu fator de mérito, bem como a impedância do gap de interação $Z_{in}(\omega)$.

A corrente I_0 , a voltagem V_0 e o diâmetro $2a$ do feixe de elétrons são parâmetros que devem ser conhecidos a priori e, em geral, com base em experiência prévia. Uma estimativa inicial é a eficiência de conversão, ou seja, de no mínimo 50% do produto I_0V_0 que se converte em potência de RF. A corrente ou densidade de corrente do feixe é obtida a partir da disponibilidade da densidade de corrente emitida pelo catodo termiônico. Outro parâmetro de fundamental importância é a perveância do canhão de elétrons, definida segundo

$$Perv = \frac{I_0}{V_0^{3/2}} \quad (4.3)$$

Em geral, utilizam-se perveâncias da ordem de 1 μ Perv. Além disso, deve-se especificar o fator de preenchimento, isto é, a razão entre o raio do feixe de elétrons a e raio do tubo de deriva b . Na prática esta razão é da ordem de 0,5 a 0,7. De posse do conhecimento do raio do tubo de deriva, da razão de preenchimento e da corrente e voltagem do feixe, utilizando-se (A.45) determina-se o fator de redução de frequência de plasma R utilizando a equação de dispersão. A partir da solução determinam-se as constantes de propagação para as ondas rápida $\beta_e - \beta_q$ e lenta $\beta_e + \beta_q$. A seguir calculam-se os coeficientes de acoplamento, conforme

mostrado no apêndice C. O próximo passo é calcular a admitância eletrônica do feixe $y_{n,n} = g_n + jb_e$, o que também é mostrado no apêndice C.

A FIG. 4.1 mostra a dependência da admitância eletrônica do gap sob a hipótese de campo constante (modelo com grade). Os valores utilizados para a determinação da condutância e susceptância eletrônica do gap de interação estão ilustrados nas TAB. 4.1 e TAB. 4.2.

TABELA 4.1 – Parâmetros utilizados para análise do amplificador klystron Varian de 4 cavidades [29].

Quantidade	Símbolo	Valor
Corrente dc do feixe, <i>A</i>	I_0	0,525
Voltagem dc do feixe, <i>kV</i>	V_0	6,0
Frequência do sinal modulador, <i>GHz</i>	f_0	1,849
Raio do feixe de elétrons, <i>cm</i>	a	0,257
Raio do tubo de deriva, <i>cm</i>	b	0,340
1° gap, <i>cm</i>	d_1	0,292
2° gap, <i>cm</i>	d_2	0,318
3° gap, <i>cm</i>	d_3	0,318
4° gap, <i>cm</i>	d_4	0,318

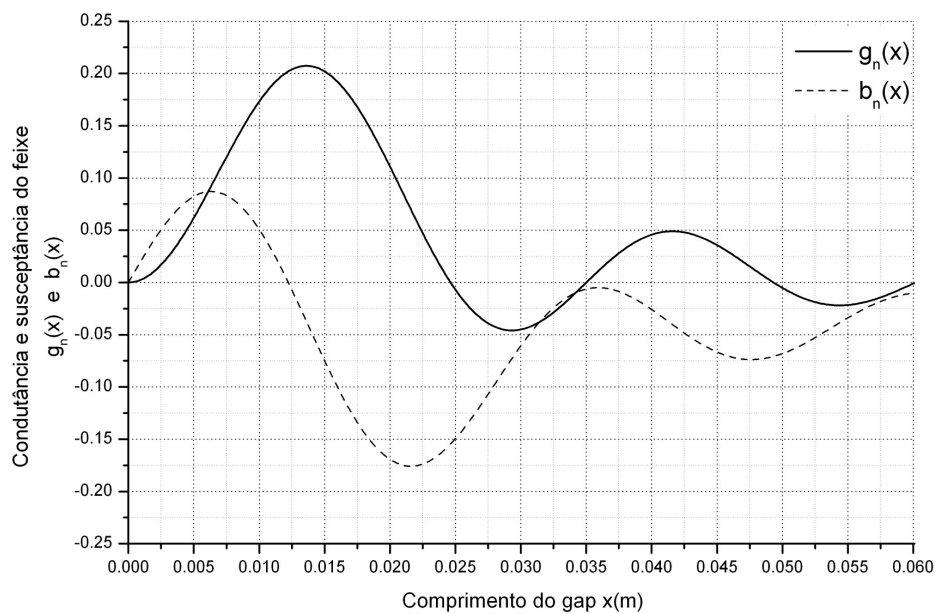


FIGURA 4.1 – Comportamento da condutância e susceptância eletrônica em função do comprimento do gap de interação.

TABELA 4.2 – Parâmetros determinados para a utilização nos cálculos do amplificador klystron.

Quantidade	Símbolo	Valor
Perveância (μPerv), μPerv	$Perv$	1,13
Constante de propagação do feixe, rad / m	β_e	257,24
Fator de redução da frequência de plasma	R	0,33
Constante de propagação reduzida, rad / m	β_q	23,96

Conhecida a condutância do feixe no gap e as características da cavidade, deve-se verificar o problema da estabilidade de operação descrita em (2.160), para cada cavidade do amplificador, dada por

$$-\frac{1}{8} \frac{\beta_e}{\beta_q} \Delta(M_n M_n^*) + \frac{1}{(R/Q)_n} \frac{V_0}{I_0} \frac{1}{Q_{L,n}} > 0. \quad (4.4)$$

A TAB 4.3 mostra parâmetros utilizados no cálculo do critério de estabilidade, bem como nos gráficos deste capítulo.

TABELA 4.3 – Parâmetros utilizados na construção dos gráficos.

Parâmetro	Unidade	Cavidades			
		1°	2°	3°	4°
f_n	GHz	1,849	1,849	1,849	1,849
G_0	Ω^{-1}	$8,75 \times 10^{-5}$	$8,75 \times 10^{-5}$	$8,75 \times 10^{-5}$	$8,75 \times 10^{-5}$
R/Q (método apêndice B)	Ω	151,66	149,64	149,64	149,64
Q_0 (método apêndice B)		11520	11570	11570	11570
Q_b		719,52	713,62	713,62	713,62
Q_e		175	10^5	10^5	57,12
Q_L		172,38	11570	11570	56,84
Q_T		139,06	672,16	672,16	52,65

A condição de estabilidade, para os parâmetros utilizados, foi atendida por todas as cavidades, conforme pode ser visto na TAB. 4.4.

TABELA 4.4 – Condição de estabilidade (4.4) das cavidades utilizadas neste projeto e cujos parâmetros são mostrados na TAB. 4.3.

	Critério de estabilidade (4.4)
Cavidade de entrada	0,544
1° cavidade	0,116
2° cavidade	0,116
Cavidade de saída	1,464

Se a condição de estabilidade não for atendida pode surgir a instabilidade do tipo monotron. O projeto deve ser revisto de maneira que (4.4) seja satisfeita. Com a condição (4.4) atendida, a admitância total do n -ésimo gap é escrita, segundo (2.156), na forma

$$\bar{y}_{n,n} = \frac{1}{(R/Q)_n G_0} \left\{ G_0 (R/Q)_n g_n + j G_0 (R/Q)_n b_n + \left[\frac{1}{Q_{L,n}} + j \left(\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega} \right) \right] \right\}, \text{ ou} \quad (4.5)$$

$$\bar{y}_{n,n} = \frac{1}{(R/Q)_n G_0} \left\{ \left[G_0 (R/Q)_n g_n + \frac{1}{Q_{L,n}} \right] + j \left[G_0 (R/Q)_n b_n + \left(\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega} \right) \right] \right\}. \quad (4.6)$$

A expressão para a admitância total do n -ésimo gap mostra o efeito do feixe de elétrons no carregamento da cavidade. A condutância negativa contribuirá para a redução do fator de qualidade. Outro fenômeno de muita relevância é a de-sintonia da cavidade.

A FIG. 4.2 mostra o comportamento da admitância total do 1° e 2° gaps, cujos parâmetros são mostrados na TAB.4.1 e TAB. 4.2. Além delas, consideram-se também os parâmetros da TAB. 4.3 para calcular a admitância como, por exemplo, do 2° gap, dada por

$$\bar{y}_{2,2} = \frac{1}{(R/Q)_2 G_0} \left\{ \left[G_0 (R/Q)_2 g_2 + \frac{1}{Q_{L,2}} \right] + j \left[G_0 (R/Q)_2 b_2 + \left(\frac{\omega}{\omega_2} - \frac{\omega_2}{\omega} \right) \right] \right\}. \quad (4.7)$$

O fator de qualidade externo da primeira cavidade foi considerado $Q_{e,1} = 175$. O fator de qualidade $Q_{e,N}$, da última cavidade, foi calculado utilizando-se a expressão empírica [18] dada por

$$Q_{e,N} = \frac{1}{(R/Q)_N G_0 \bar{M}_N^2 I_{RF}}, \quad (4.8)$$

onde

$$\bar{M} = \frac{1}{2} \left[|M^+|^2 + |M^-|^2 \right], \text{ e} \quad (4.9)$$

$$I_{RF} = 1.8. \quad (4.10)$$

Observa-se que, ao considerar o efeito do carregamento do feixe, a amplitude diminui (devido à condutância g_n) e ocorre um desvio da frequência onde a amplitude é máxima, em relação à frequência f (devido à susceptância b_n).

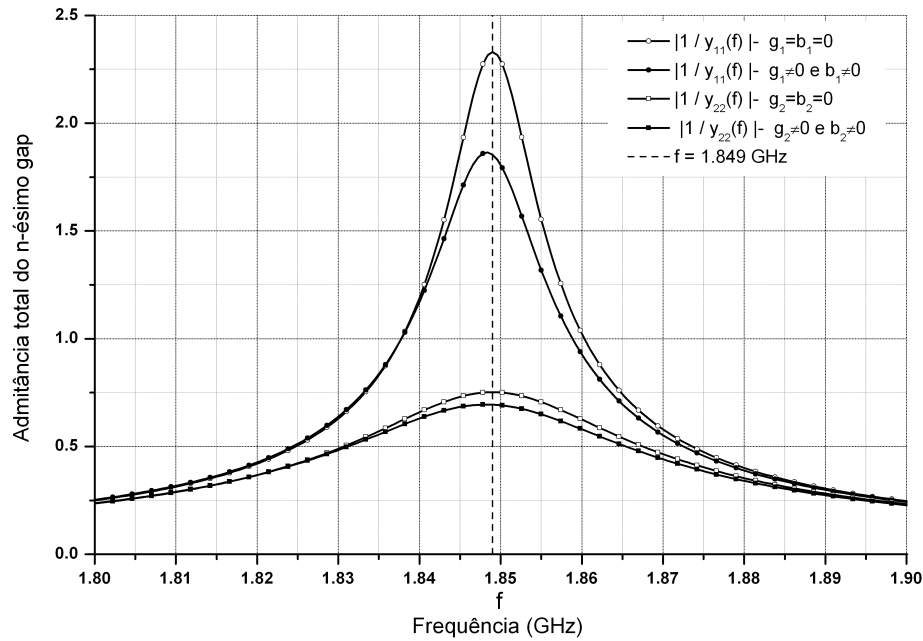


FIGURA 4.2 – Efeito do Carregamento da cavidade devido ao feixe de elétrons. Observa-se que, ao considerar o efeito do carregamento do feixe, a amplitude diminui (devido à condutância g_n) e ocorre um desvio da frequência onde a amplitude é máxima, em relação à frequência f (devido à susceptância b_n).

A determinação da trans-admitância pode ser avaliada utilizando (2.168), cujo módulo entre as cavidades k e n , com $k < n$, se escreve

$$|y_{k,n}(z)| = \frac{1}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left[|M_k^+|^2 |M_n^+|^2 + |M_k^-|^2 |M_n^-|^2 - 2 |M_k^+| |M_n^+| |M_k^-| |M_n^-| \cos(2\beta_q z + \delta_1^- - \delta_1^+ - \delta_2^- + \delta_2^+) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.11)$$

A FIG. 4.3 ilustra a trans-admitância entre os dois primeiros gaps e cujos parâmetros são mostrados na TAB.4.1. Neste caso, tem-se

$$|y_{1,2}(z)| = \frac{1}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left[|M_1^+|^2 |M_2^+|^2 + |M_1^-|^2 |M_2^-|^2 - 2 |M_1^+| |M_2^+| |M_1^-| |M_2^-| \cos(2\beta_q z + \delta_1^- - \delta_1^+ - \delta_2^- + \delta_2^+) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.12)$$

Observa-se no gráfico que a trans-admitância tem um comportamento periódico.

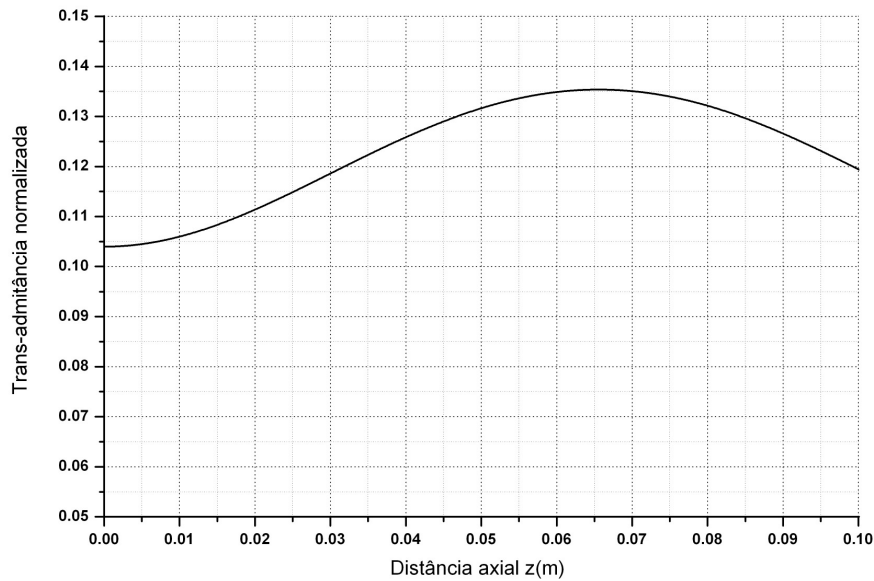


FIGURA 4.3 – Comportamento axial da trans-admitância.

O ganho de voltagem entre dois gaps consecutivos é obtido, segundo (2.162), por

$$|\eta_m| = \left| \frac{y_{n-1,n}}{\bar{y}_{n,n}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left[|M_{n-1}^+|^2 |M_n^+|^2 + |M_{n-1}^-|^2 |M_n^-|^2 - 2 |M_{n-1}^+| |M_n^+| |M_{n-1}^-| |M_n^-| \cos(2\beta_q z + \delta_1^- - \delta_1^+ - \delta_2^- + \delta_2^+) \right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{(R/Q)_n G_0} \left\{ \left[G_0 (R/Q)_n g_n + \frac{1}{Q_{L,n}} \right] + j \left[G_0 (R/Q)_n b_n + \left(\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega} \right) \right] \right\}} \right|. \quad (4.13)$$

Na FIG. 4.4 ilustra-se a curva do ganho de voltagem de um amplificador klystron de duas cavidades em função da distância entre dois gaps de interação. Neste caso, tem-se

$$|\eta_2| = \left| \frac{y_{1,2}}{\bar{y}_{2,2}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left[|M_1^+|^2 |M_2^+|^2 + |M_1^-|^2 |M_2^-|^2 - 2 |M_1^+| |M_2^+| |M_1^-| |M_2^-| \cos(2\beta_q z + \delta_1^- - \delta_1^+ - \delta_2^- + \delta_2^+) \right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{(R/Q)_2 G_0} \left\{ \left[G_0 (R/Q)_2 g_2 + \frac{1}{Q_{L,2}} \right] + j \left[G_0 (R/Q)_2 b_2 + \left(\frac{\omega}{\omega_2} - \frac{\omega_2}{\omega} \right) \right] \right\}} \right|. \quad (4.14)$$

Observa-se novamente que, ao considerar o efeito do carregamento do feixe, a amplitude diminui devido à condutância g_n e ocorre um desvio da frequência devido à susceptância b_n .

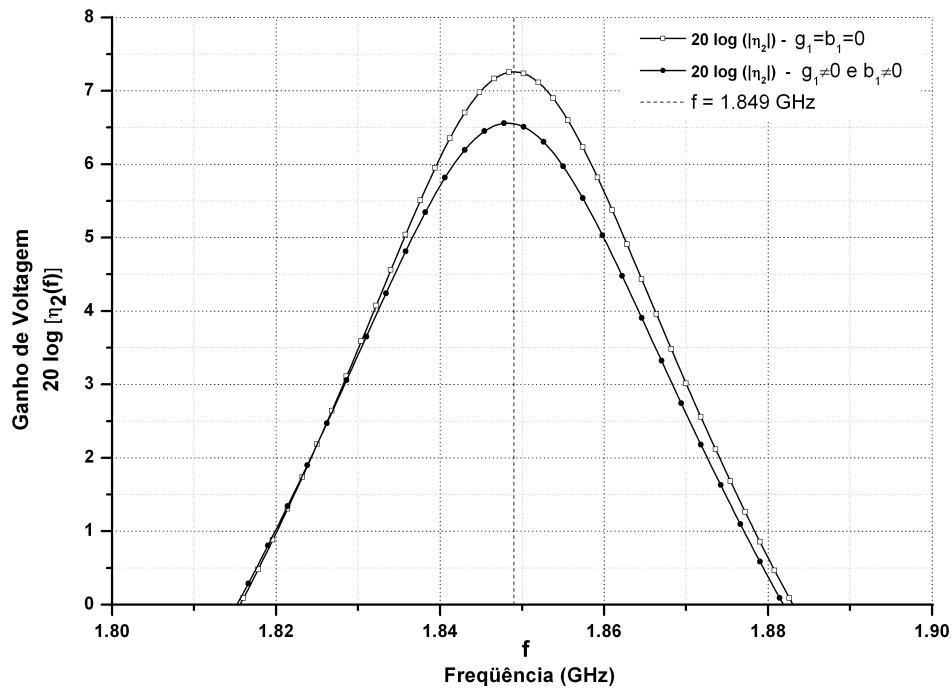


FIGURA 4.4 – Ganho de voltagem entre duas cavidades. Observa-se que, ao considerar o efeito do carregamento do feixe, a amplitude diminui (devido à condutância g_n) e ocorre um desvio da frequência onde a amplitude é máxima, em relação à frequência f (devido à susceptância b_n).

Seja agora considerar um arranjo com 3 cavidades em cascata. Neste caso, a expressão para o ganho é dada pela expressão (2.163), ou seja,

$$|\eta_3| = \left| -\frac{y_{1,3}}{\bar{y}_{3,3}} + \frac{y_{1,2}}{\bar{y}_{2,2}} \frac{y_{2,3}}{\bar{y}_{3,3}} \right|, \quad (4.15)$$

onde, além de (4.47) e (4.48), tem-se

$$y_{1,3} = \frac{1}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left[|M_1^+|^2 |M_3^+|^2 + |M_1^-|^2 |M_3^-|^2 - 2 |M_1^+| |M_3^+| |M_1^-| |M_3^-| \cos(2\beta_q z + \delta_1^- - \delta_1^+ - \delta_3^- + \delta_3^+) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.16)$$

$$y_{2,3} = \frac{1}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left[|M_2^+|^2 |M_3^+|^2 + |M_2^-|^2 |M_3^-|^2 - 2 |M_2^+| |M_3^+| |M_2^-| |M_3^-| \cos(2\beta_q z + \delta_2^- - \delta_2^+ - \delta_3^- + \delta_3^+) \right]^{\frac{1}{2}}, e \quad (4.17)$$

$$\bar{y}_{3,3} = \frac{1}{(R/Q)_3 G_0} \left\{ \left[G_0 (R/Q)_3 g_n + \frac{1}{Q_{L,n}} \right] + j \left[G_0 (R/Q)_3 b_n + \left(\frac{\omega}{\omega_3} - \frac{\omega_3}{\omega} \right) \right] \right\}. \quad (4.18)$$

No caso de um arranjo com 4 cavidades em cascata, a expressão para o ganho é dada pela expressão (2.164), ou seja,

$$|\eta_4| = \left| -\frac{y_{1,4}}{\bar{y}_{4,4}} + \frac{y_{1,2}}{\bar{y}_{2,2}} \frac{y_{2,4}}{\bar{y}_{4,4}} + \frac{y_{1,3}}{\bar{y}_{3,3}} \frac{y_{3,4}}{\bar{y}_{4,4}} - \frac{y_{1,2}}{\bar{y}_{2,2}} \frac{y_{2,3}}{\bar{y}_{3,3}} \frac{y_{3,4}}{\bar{y}_{4,4}} \right|. \quad (4.19)$$

Na FIG. 4.5 ilustra-se a curva do ganho de voltagem de um amplificador klystron considerando, inicialmente, duas cavidades e verificando a variação do ganho quando se acrescenta a terceira e, depois, a quarta cavidade. Observa-se novamente o efeito do carregamento do feixe.

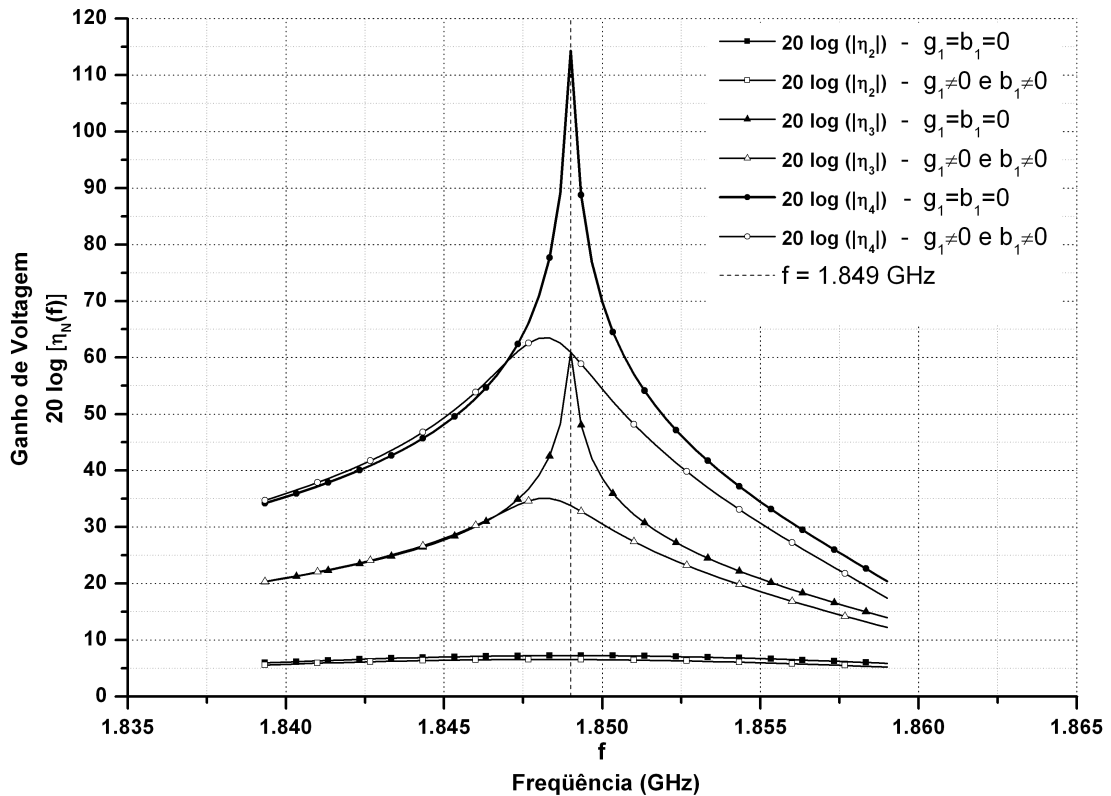


FIGURA 4.5 – Ganho de voltagem de um amplificador klystron considerando de 2 a 4 cavidades. Observa-se que, ao considerar o efeito do carregamento do feixe, a amplitude diminui (devido à condutância g_n) e ocorre um desvio da frequência onde a amplitude é máxima, em relação à frequência f (devido à susceptância b_n).

O ganho de potência P_i/P_i , sob a hipótese de acoplamento ótimo na cavidade de entrada, é calculado segundo a expressão (2.221), qual seja

$$G_P = 4|\eta_N|^2 \frac{1}{Q_{ext,N} \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_N} \frac{1}{Q_{ext,1} \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right)_1} \frac{1}{G_0^2} \frac{1}{\bar{y}_{1,1} \bar{y}_{1,1}^*}. \quad (4.20)$$

onde a expressão geral para o ganho de voltagem η_N é dada segundo (2.161).

Na FIG. 4.6 ilustra-se, utilizando os parâmetros mostrados na TAB. 4.3 e considerando o perfil constante de campo elétrico axial (sem grade), a curva do ganho de

potência de um amplificador klystron considerando, inicialmente, duas cavidades e verificando a variação do ganho quando se acrescenta a terceira e, depois, a quarta cavidade. Observa-se que, análogo ao que acontece com o ganho de voltagem, ao considerar o efeito do carregamento do feixe, a amplitude diminui (devido à condutância g_n) e ocorre um desvio da frequência onde a amplitude é máxima, em relação à frequência f (devido à susceptância b_n).

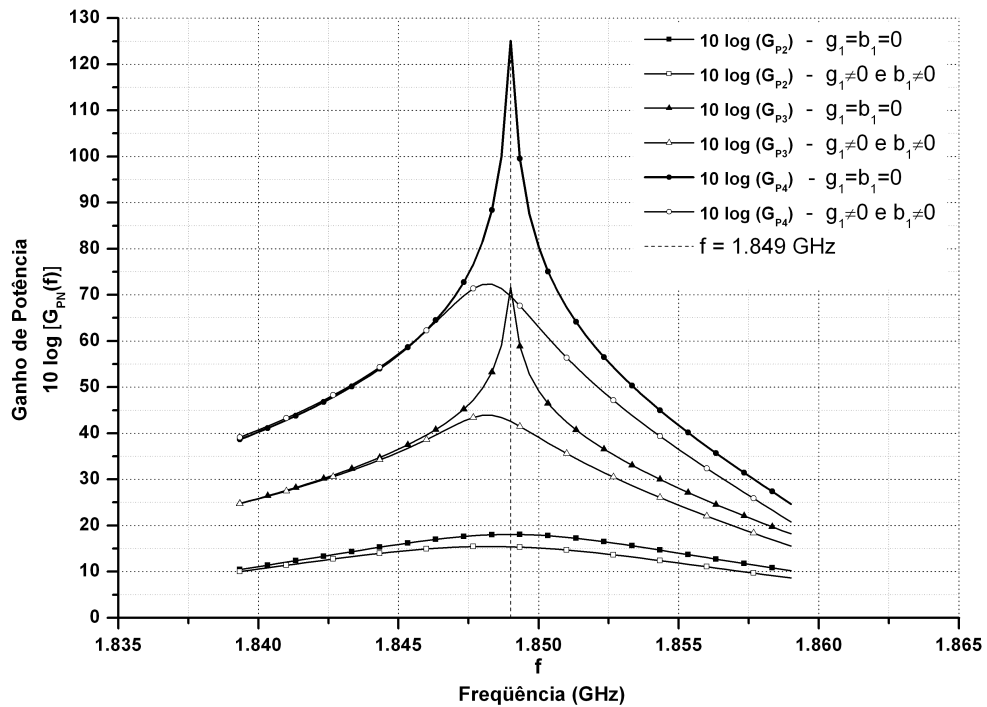


FIGURA 4.6 – Ganho de potência de um amplificador klystron considerando o perfil constante de campo elétrico axial (sem grade). Observa-se que, análogo ao que acontece com o ganho de voltagem, ao considerar o efeito do carregamento do feixe, a amplitude diminui (devido à condutância g_n) e ocorre um desvio da frequência onde a amplitude é máxima, em relação à frequência f (devido à susceptância b_n).

Na FIG. 4.7 comparam-se, utilizando os parâmetros mostrados na TAB. 4.3, os ganhos de potência para o perfil constante e o perfil hiperbólico de campo elétrico axial (modelo sem grade).

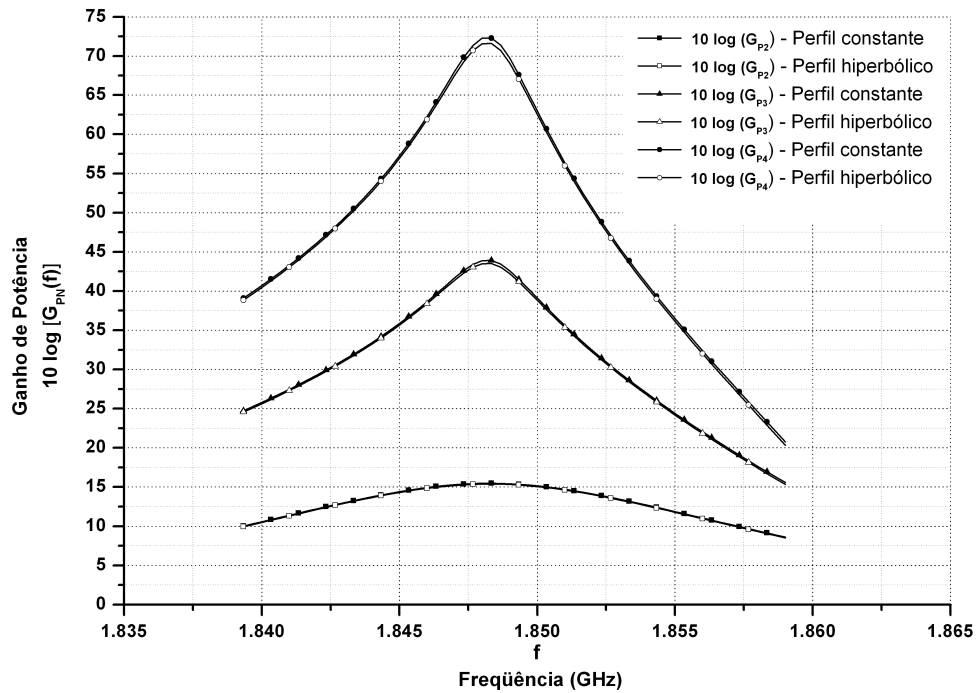


FIGURA 4.7 – Comparação entre os ganhos de potência de um amplificador klystron considerando o perfil constante e o perfil hiperbólico de campo elétrico axial (modelo sem grade).

Na FIG. 4.8 comparam-se os ganhos de potência para o perfil hiperbólico de campo elétrico axial (sem grade) calculado pelo código desenvolvido por Aaron Jensen/Craig Wilsen [18], que considera impedância e transcondutância, e pelo código proposto neste trabalho, que considera admitância e transadmitância. O desvio da curva é resultado da consideração da susceptância nos cálculos apresentados neste trabalho.

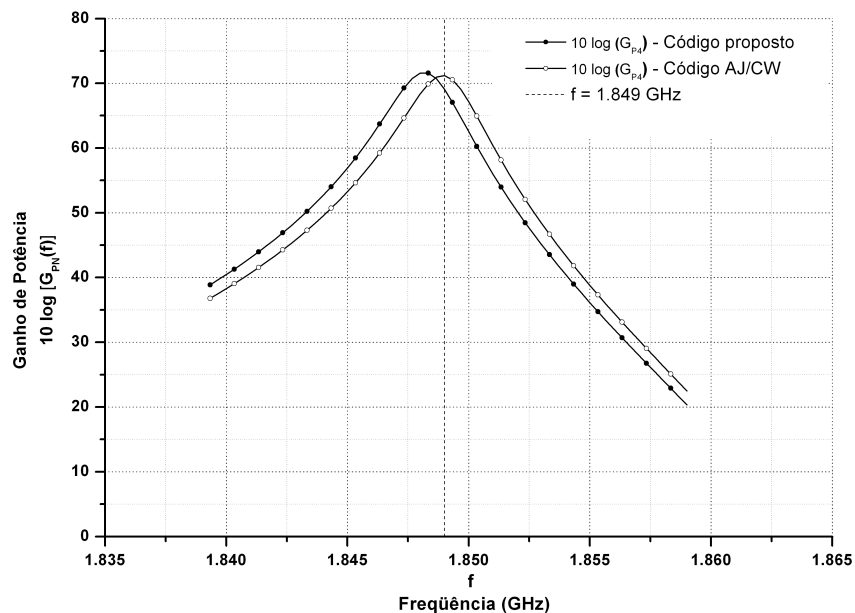


FIGURA 4.8 – Comparação entre os ganhos de potência de um amplificador klystron considerando o código proposto e o código desenvolvido por Aaron Jensen/Craig Wilsen [18].

Nesta seção realizou-se uma análise a pequenos sinais baseada nos cálculos dos principais parâmetros do formalismo apresentado no capítulo II. No final, apresentou-se o cálculo do ganho de voltagem e, principalmente, do ganho de potência utilizando os parâmetros do amplificador klystron Varian 4K3SL [29].

4.2. Análise a grandes sinais

Nesta seção discute-se os resultados obtidos quando se considera os efeitos não-lineares e ocorre saturação do dispositivo. Inicialmente, considerando-se o feixe de elétrons, conforme o modelo de discos, propagando-se no interior do tubo de deriva após ser modulado em uma cavidade com gap de interação com dimensões finitas (cavidade de entrada) por meio de um campo elétrico conforme apresentado no apêndice B (B.71). Em seguida, consideram-se mais duas cavidades intermediárias (primeira e segunda) e a cavidade de saída, de maneira a avaliar o código desenvolvido com os parâmetros de um amplificador klystron Varian 4K3SL de 4 cavidades [29].

Com relação ao modelo, as equações da continuidade e momento linear são as mesmas do problema considerando a modulação pontual (capítulo III). Neste capítulo, entretanto, a força elétrica F_z^E , devida ao campo elétrico na direção axial z (direção de propagação do feixe), incluirá a força elétrica F_{cav}^E , devida ao campo elétrico no interior do tubo de deriva, nas proximidades de um gap de interação, bem como a força elétrica F_{sc}^E , devida ao campo elétrico de carga espacial, ou seja,

$$F_z^E = F_{cav}^E + F_{sc}^E. \quad (4.21)$$

Portanto, antes de apresentar os resultados, faz-se necessário mostrar como incluir a força elétrica F_{cav}^E ao modelo de maneira a incluir os efeitos de um gap finito.

4.2.1 Força elétrica no gap de interação da cavidade

Seja a expressão para o campo elétrico no interior do tubo de deriva, nas proximidades de um gap de interação, dada por (B.71)

$$e_{cav}(r, z) = \frac{E_0 d}{\pi} \left[\int_0^{k_0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \frac{J_0(pr)}{J_0(pb)} \cos(\beta z) d\beta + \int_{k_0}^{+\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \frac{I_0(hr)}{I_0(hb)} \cos(\beta z) d\beta \right], \quad (4.22)$$

cuja variação em relação à coordenada radial pode ser vista na FIG. 4.9. Verifica-se que o campo elétrico é constante ao longo do gap de interação ($r = b$) e, principalmente, que se trata de um campo evanescente.

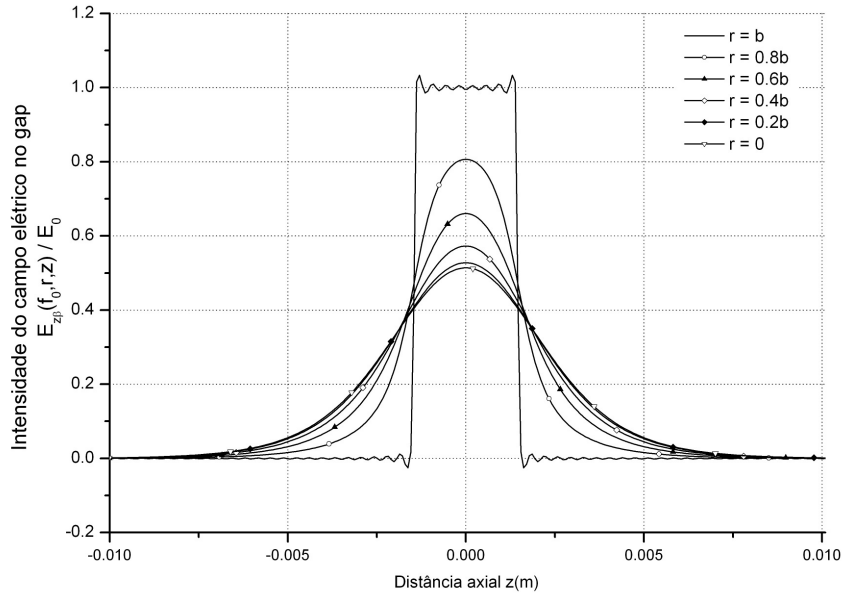


FIGURA 4.9. – Distribuição do campo elétrico axial na coordenada do gap ($r = b$) e para alguns valores dentro do tubo de deriva. Observa-se que este campo é evanescente.

Um disco de carga de raio a , com distribuição de carga uniforme e rígida ρ_0 , no instante de tempo t , localizado na posição z , nas proximidades do gap de interação, sofrerá a ação do campo elétrico e_{cav} , que resultará em uma força elétrica da forma

$$F_{cav}^E(a, z) = \frac{2q_d}{a^2} \int_0^a r e_{cav} dr = \frac{2q_d}{a^2} \frac{E_0 d}{\pi} \left[\int_0^{k_0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right) \int_0^a r J_0(pr) dr}{\left(\frac{\beta d}{2}\right) J_0(pb)} \cos(\beta z) d\beta + \int_{k_0}^{+\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right) \int_0^a r I_0(hr) dr}{\left(\frac{\beta d}{2}\right) I_0(hb)} \cos(\beta z) d\beta \right], \quad (4.23)$$

onde $p = \sqrt{k_0^2 - \beta^2}$ e $h = \sqrt{\beta^2 - k_0^2}$. Além disso, q_d é a carga do disco ao se utilizar, na solução do problema, o modelo de discos. Utilizando os seguintes resultados

$$\int_0^a r J_0(pr) dr = \frac{a}{p} J_1(pa), \text{ e} \quad (4.24)$$

$$\int_0^a r I_0(hr) dr = \frac{a}{h} I_1(ha), \quad (4.25)$$

a força sobre o j -ésimo disco pode ser escrita como

$$F_{cav}^E(a, z) = \frac{2q_d E_0 d}{a \pi} \left[\int_0^{k_0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \frac{J_1(pa)}{pJ_0(pb)} \cos(\beta z) d\beta + \int_{k_0}^{+\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \frac{I_1(ha)}{hI_0(hb)} \cos(\beta z) d\beta \right]. \quad (4.26)$$

Na FIG. 4.10 ilustra-se o perfil da força elétrica $F_{cav}^E(a, z)$ considerando-se os parâmetros mostrados na TAB. 4.1, comparando-se os dois valores de comprimento de gap de interação. Observa-se que este campo é evanescente e que à medida que se aumenta o comprimento do gap, o valor máximo da força diminui.

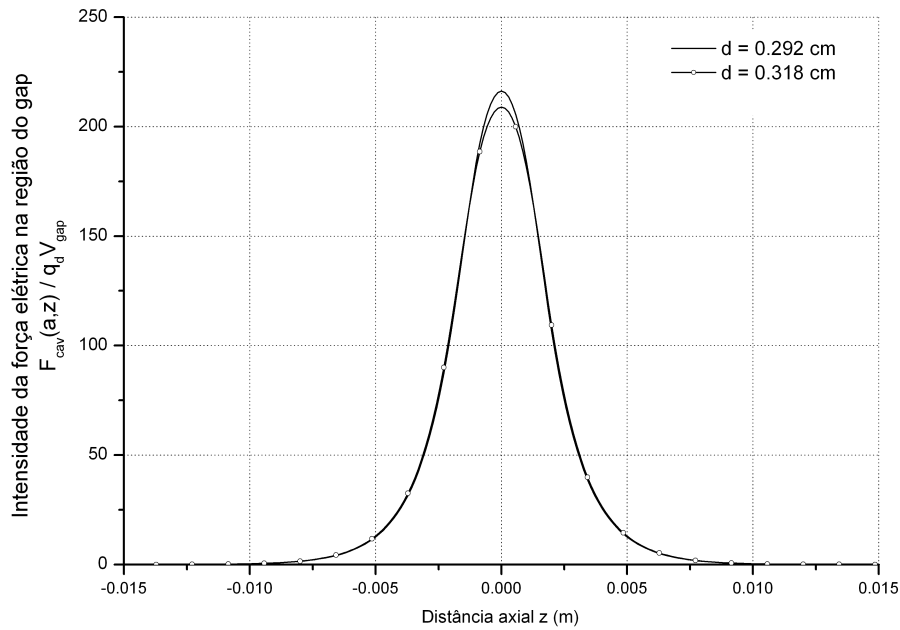


FIGURA 4.10. – Distribuição da força elétrica $F_{cav}^E(a, z)$ considerando-se os parâmetros mostrados na TAB. 4.1. Observa-se que este campo é evanescente e que à medida que se aumenta o comprimento do gap, o valor máximo da força diminui.

A expressão final para a força moduladora, dependente do tempo, pode ser escrita, em regime senoidal, na forma

$$F_{cav}^E(a, z, t) = F_{cav}^E(a, z) \text{sen}(2\pi f_0 t + \varphi_0). \quad (4.27)$$

No caso de campo elétrico constante ao longo do gap de interação tem-se $V_{gap} = E_0 d$.

4.2.2 Sistema de equações

A força elétrica de carga espacial, F_{sc}^E , é calculada para a posição do j -ésimo disco e compreende o somatório da interação entre o j -ésimo disco e todos os discos do domínio, exceto aquele que, porventura, esteja na mesma posição do j -ésimo disco, ou seja,

$$F_{sc}^E = F_j^E(z_j, z_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_d} \left\{ \frac{2q^2}{\pi \alpha^2 \epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_1\left(x_{0n} \frac{a}{b}\right)}{x_{0n} J_1(x_{0n})} \right]^2 e^{-\frac{x_{0n}}{b} |z_j - z_i|} \left(\frac{z_j - z_i}{|z_j - z_i|} \right) \right\}, \quad (4.28)$$

conforme desenvolvimento mostrado no apêndice D. É possível montar, finalmente, o sistema para a descrição da dinâmica do j -ésimo disco

$$\begin{cases} \frac{dZ_j(z_{0j}, t)}{dt} = u_j^L(z_{0j}, t) \\ \frac{du_j^L(z_{0j}, t)}{dt} = \frac{F_z^E}{m_d} = \frac{F_{cav}^E(z_{0j}, t) + F_j^E(z_{0j}, z_i)}{m_d} \\ F_{cav}^E(z_{0j}, t) = \frac{q_d}{\pi a} \frac{E_0 d}{\pi} \left[\int_0^{k_0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \frac{J_1(pa)}{J_0(pb)} \cos(\beta z_{0j}) d\beta + \int_{k_0}^{+\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \frac{I_1(ha)}{I_0(hb)} \cos(\beta z_{0j}) d\beta \right] \sin(\omega t + \varphi_0) \\ F_j^E(z_j, z_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_d} \left\{ \frac{2q^2}{\pi \alpha^2 \epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_1\left(x_{0n} \frac{a}{b}\right)}{x_{0n} J_1(x_{0n})} \right]^2 e^{-\frac{x_{0n}}{b} |z_j - z_i|} \left(\frac{z_j - z_i}{|z_j - z_i|} \right) \right\} \end{cases} \quad (4.29)$$

A corrente harmônica $I_n(z)$ (3.63) e a conversão AM/AM, na forma de gráficos, são obtidos utilizando o sistema de equações do modelo (4.29) e os parâmetros mostrados na TAB. 4.5.

TABELA 4.5 – Quantidades utilizadas no código numérico.

Quantidade	Símbolo	Valor
Velocidade dc do feixe, m/s	u_0	$4,59 \times 10^7$
Densidade de carga dc do feixe, C/m^3	ρ_0	$6,78 \times 10^{-3}$
Corrente dc do feixe, A	I_0	0,525
Tensão dc do feixe, kV	V_0	6,0
Frequência do sinal modulador, GHz	f_0	1,849
Posição da cavidade de entrada, cm	z_{cav}	0
Comprimento da região de interação, cm	d	0,292
Raio do feixe de elétrons, cm	a	0,257
Raio do tubo de deriva, cm	b	0,34
Número de discos por período	N_d	51

Observa-se que, nas simulações, considera-se

$$F_{cav} = \begin{cases} \frac{q_d E_0 d}{\pi a \pi} \left[\int_0^{k_0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \frac{J_1(pa)}{J_0(pb)} \cos(\beta z_j) d\beta + \int_{k_0}^{+\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \frac{I_1(ha)}{I_0(hb)} \cos(\beta z_j) d\beta \right] \sin(\omega t + \varphi_0), \left(z_{cav} - \frac{d_e}{2} \right) \leq z \leq \left(z_{cav} + \frac{d_e}{2} \right), \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}, \quad (4.30)$$

onde d_e é a distância efetiva em que a força, relacionada com o campo elétrico evanescente conforme a FIG. 4.10, cai praticamente a zero. Nesta análise, como os detalhes do acoplamento entre as cavidades de entrada e saída são conhecidas, utilizou-se a potência de entrada para se calcular a voltagem V_1 do gap de entrada, que deve substituir $E_0 d$ na expressão (4.71). Conforme (2.215), V_1 vale

$$V_1^2 = \frac{8P_{in}}{\left(\frac{R_{sh}}{Q}\right)_1 Q_{ext,1} G_0^2 \bar{Y}_{1,1} \bar{Y}_{1,1}^*}, \quad (4.31)$$

onde P_{in} é potência do gerador. Na FIG. 4.11 são mostradas as envoltórias da corrente harmônica fundamental utilizando as quantidades apresentadas na TAB. 4.6 e para quatro valores de potência do gerador.

TABELA 4.6 – Parâmetros utilizados na construção dos gráficos.

Parâmetro	Unidade	Cavidades			
		1°	2°	3°	4°
f_n	GHz	1,849	1,849	1,849	1,849
G_0	Ω^{-1}	$8,75 \times 10^{-5}$	$8,75 \times 10^{-5}$	$8,75 \times 10^{-5}$	$8,75 \times 10^{-5}$
R/Q	Ω	100	90	80	65
Q_0		2000	2000	2000	18000
Q_b		1091,34	1186,5	1334,82	1642,85
Q_e		160	10^4	10^4	34
Q_L		148,15	1666,67	1666,67	33,94
Q_T		130,44	693,10	741,20	33,25

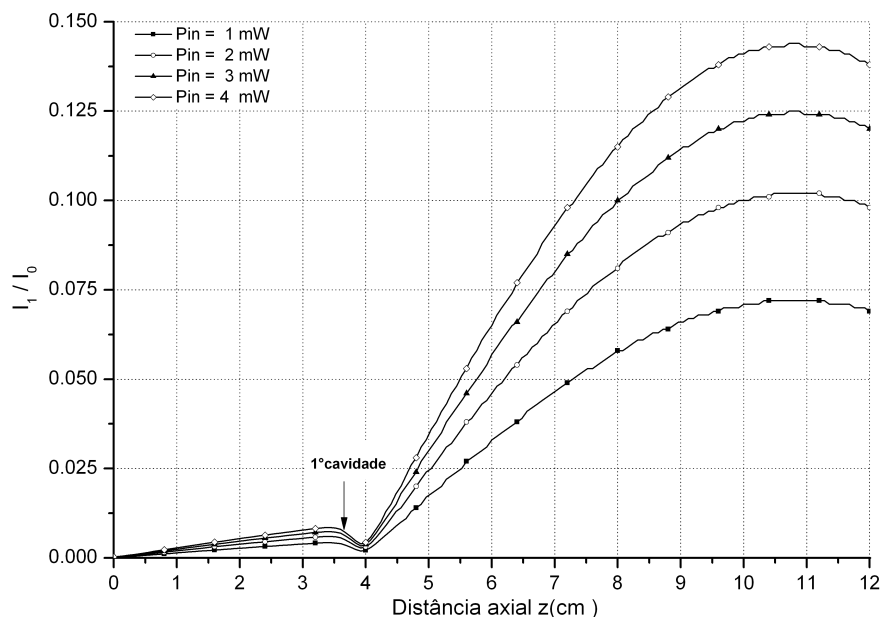


FIGURA 4.11 – Evolução axial da corrente harmônica considerando quatro valores de potência. Observa-se, no gráfico, que quanto maior é a potência de entrada, maior é a corrente harmônica fundamental.

Observa-se, no gráfico, que quanto maior a potência do gerador, maior é o máximo da corrente harmônica fundamental. Considera-se, neste gráfico, além da cavidade de entrada, uma cavidade posicionada em 3,68 *cm*.

Um fenômeno de grande relevância é a excitação das cavidades intermediárias e da cavidade de saída pela corrente harmônica, decorrente da modulação do feixe de elétrons pela cavidade de entrada. Para a determinação das voltagens dos demais gaps de interação foi observado o seguinte esquema iterativo, isto é, um algoritmo para a determinação da voltagem dos gaps das demais cavidades. Após o feixe de elétrons ser modulado pelo campo do gap da cavidade de entrada, à medida que o feixe se propaga, ocorre um aumento na corrente harmônica $I_1(z)$. Se em uma dada posição axial for colocada uma cavidade reentrante cuja a impedância do gap é $Z_1(\omega)$, a voltagem induzida pela corrente harmônica será dada pelo produto $V_1(\omega) = Z_1(\omega)I_1(z)$. As demais voltagens nas cavidades seguintes ainda serão nulas. À medida que a corrente harmônica atinge essas cavidades, esta induzirá as respectivas voltagens. Assim, na segunda cavidade a voltagem induzida será igual ao produto da impedância $Z_2(\omega)$ vezes a corrente harmônica devido a modulação do gap de entrada mais a modulação adicional devido ao gap seguinte. Este procedimento iterativo é repetido até que a convergência entre as voltagens dos gaps seja atingida. Em geral, dez iterações são suficientes para que a diferença entre as voltagens dos gaps não se modifique dentro de 1%. A expressão

da impedância e os fatores de qualidade a serem considerados em cada cavidade são mostrados na TAB. 4.7.

TABELA 4.7 – Expressão da impedância e os fatores de qualidade a serem considerados em cada cavidade.

	Expressão
Impedância do gap	$Z_{in}(\omega) = \frac{(R/Q)}{\frac{1}{Q_T} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$
Cavidade de entrada	$\frac{1}{Q_T} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_b} + \frac{1}{Q_{ext,1}}$
1° cavidade	$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_b}$
2° cavidade	$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_b}$
Cavidade de saída	$\frac{1}{Q_T} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_b} + \frac{1}{Q_{ext,N}}$

Uma vez estabelecido o procedimento iterativo, o passo seguinte é validar o código utilizando os valores do amplificador klystron Varian 4K3SL, utilizado como referência. O gráfico da FIG. 4.12 mostra as posições das cavidades intermediárias, posicionadas em 3,68 cm e 7,36 cm, respectivamente. A cavidade de saída está posicionada em 11,04 cm.

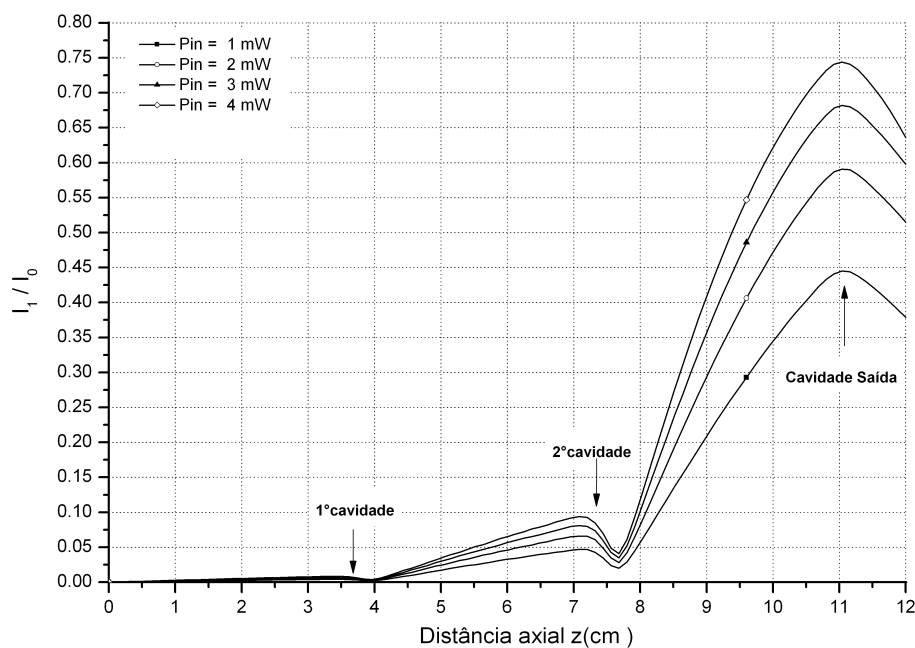


FIGURA 4.12 - Evolução da corrente harmônica do feixe de elétrons considerando a cavidade de entrada de um amplificador klystron em $z = 0$, a segunda em $z = 3,68$ e a terceira em $z = 7,36$ cm. A cavidade de saída está posicionada em $z = 11,04$ cm.

Para o cálculo da potência de saída do amplificador klystron, por hipótese, admite-se que o guia de onda de saída está terminado com uma carga casada. A potência dissipada na carga pode ser escrita por (2.220), reproduzida aqui

$$P_L = \frac{1}{2} V_N^2 \left(\frac{Q}{R_{sh}} \right)_N \frac{1}{Q_{ext,N}} = \frac{1}{2} A_N^2 V_0^2 \left(\frac{Q}{R_{sh}} \right)_N \frac{1}{Q_{ext,N}}. \quad (4.32)$$

No gráfico da FIG. 4.13 estão ilustradas as curvas de conversão AM/AM, isto é, a curva de potência de saída da klystron em função da potência de entrada para quatro situações distintas. A curva 1 é a curva experimental da klystron Varian 4K3SL, obtida da referência [29]. A curva 2 foi obtida utilizando o código AJDISK e as curvas 3 e 4 foram construídas utilizando o código a grandes sinais desenvolvido neste trabalho. A curva 4 foi obtida do código, mas utilizando um fator de correção para redução da amplitude do campo modulador. Para que fosse possível obter resultados próximos aos resultados experimentais, o AJDISK foi inicialmente utilizado a fim de gerar um novo conjunto de parâmetros das cavidades (R/Q , Q_0 e Q_{ext}). Embora estes valores, exceto pelo Q_{ext} , são corretamente obtidos segundo a metodologia descrita no apêndice B, eles se mostraram superestimar tanto o ganho como a potência de saída. Sob o ponto de vista experimental, as cavidades são construídas em aço inoxidável sendo uma fina camada de cobre depositada eletroquimicamente sobre a superfície da cavidade para controle da resistência superficial. Desta forma, como não se dispunha destes valores, eles foram ajustados. Os valores utilizados estão na TAB. 4.6. Após obter-se boa concordância geral entre o código AJDISK, conforme TAB. 4.8, os mesmos valores foram utilizados no código desenvolvido. Quando isto foi feito, o ganho e a potência de saída foram novamente superestimados, ocorrendo a saturação de maneira antecipada. A hipótese levantada para explicar este fenômeno foi a utilização do perfil do campo modulador que acreditou superestimar devido ao perfil do tipo faca da cavidade reentrante. Para corroborar tal hipótese o valor máximo foi multiplicado por um fator de 0,8 de maneira a reduzir o ganho. A curva 4 mostra o comportamento do amplificador klystron decorrente desta redução. O comportamento geral foi muito bom, inclusive a saturação ocorrendo além do valor previsto pelo AJDISK e mais próximo do valor experimental, como pode ser visto na curva de ganho da FIG. 4.14. Posteriormente, foi realizada uma simulação utilizando o código CST [33], para verificar a razão de redução e obteve-se um fator de 0,76, muito próximo de 0,8.

TABELA 4.8 – Potências utilizadas na construção do gráfico da FIG. 4.13.

P_{in} (mW)	P_{MEDIDO} (W)	P_{AJDISK} (W)	$1,0 P_{TRABALHO}$ (W)	$0,8 P_{TRABALHO}$ (W)
0,01	0,25	0,35	1,184	0,33
0,03	1	1,06	3,5	0,99
0,1	3	3,5	11,8	3,3
0,3	8	10,6	34,7	9,85
1	25	34	108,6	32
3	80	97	272	91,7
10	200	254	376	254
17	250	338,7	108,6	363
30		256	90	414

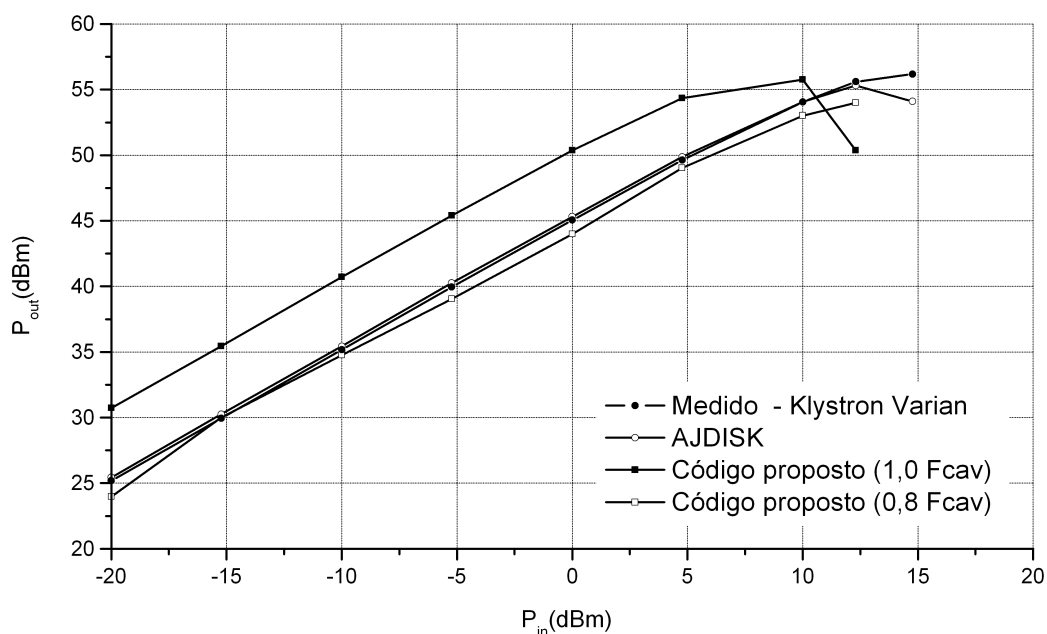


FIGURA 4.13 – Comparação entre a curva AM/AM para quatro situações distintas. A curva 1 é a curva experimental da klystron Varian 4K3SL, obtida da referência [29]. A curva 2 foi obtida utilizando o código AJDISK e as curvas 3 e 4 foram construídas utilizando o código a grandes sinais desenvolvido neste trabalho. A curva 4 foi obtida do código, mas utilizando um fator de correção para redução da amplitude do campo modulador.

TABELA 4.9 – Ganhos utilizados na construção do gráfico da FIG. 4.14.

P_{in} (dBm)	G_{MEDIDO} (dB)	G_{AJDISK} (dB)	$1,0 G_{TRABALHO}$ (dB)	$0,8 G_{TRABALHO}$ (dB)
-20	45,19	45,44	50,73	43,98
-15,23	45,19	45,48	50,67	45,23
-10	45,19	45,44	50,72	44,77
-5,23	45,16	45,48	50,63	44,26
0	45,05	45,31	50,36	43,98
4,77	44,85	45,09	49,57	44,26
10	44,05	44,05	45,75	43,01
12,30	43,30	42,99	38,05	41,67
14,77	41,40	39,31		

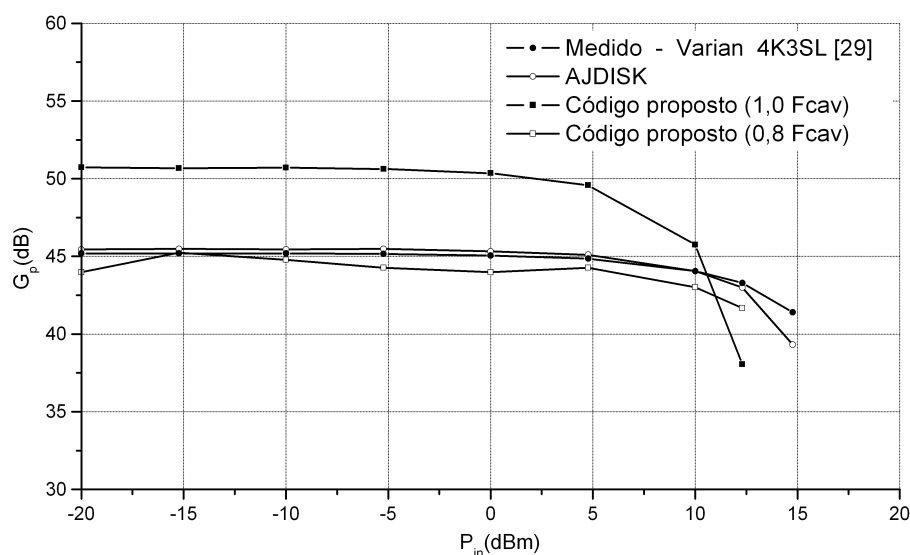


FIGURA 4.14 – Comparação entre o ganho obtido para quatro situações distintas. A curva 1 é a curva experimental da klystron Varian 4K3SL, obtida da referência [29]. A curva 2 foi obtida utilizando o código AJDISK e as curvas 3 e 4 foram construídas utilizando o código a grandes sinais desenvolvido neste trabalho. A curva 4 foi obtida do código, mas utilizando um fator de correção para redução da amplitude do campo modulador.

A saturação no ganho apresentada no gráfico está relacionada com os efeitos não-lineares que ficam mais pronunciados à medida que se aumenta a potência de entrada (gerador).

Nesta seção realizou-se uma análise a grandes sinais que, diferente do capítulo III, considerou-se um gap finito nas simulações. Além disso, considerou-se a força moduladora, devido ao campo elétrico no interior do tubo de deriva, nas proximidades de um gap de interação da cavidade, calculada a partir do campo elétrico mostrado no apêndice B. Estas

modificações no código foram validadas utilizando-se os parâmetros do amplificador klystron Varian 4K3SL [29] e comparando-se com o código AJDISK[18]. Verificou-se que, ao utilizar os parâmetros da análise a pequenos sinais, corretamente obtidos segundo a metodologia descrita no apêndice B, eles se mostraram superestimar tanto o ganho como a potência de saída. Para resolver este problema, o AJDISK foi inicialmente utilizado a fim de gerar um novo conjunto de parâmetros das cavidades. Após obter-se boa concordância geral entre o código AJDISK e a curva experimental da klystron Varian 4K3SL, os mesmo valores foram utilizados no código desenvolvido. Quando isto foi feito, o ganho e a potência de saída foram novamente superestimados, ocorrendo a saturação de maneira antecipada. A hipótese levantada para explicar este fenômeno foi a utilização do perfil do campo modulador que acreditou superestimar devido ao perfil do tipo faca da cavidade reentrante. Corroborou-se tal hipótese multiplicando-se o campo modulador por um fator de 0,8, obtendo-se um resultado satisfatório.

4.3 Largura de banda

A análise da largura de banda do amplificador klystron pode ser realizada reescrevendo a expressão do ganho de potência no plano complexo, onde a parte real pode ser representada por σ e a parte imaginária por $j\omega$ [18]. Neste caso, o ganho será representado em termos de zeros e pólos. Considera-se, portanto, uma nova variável $p = \sigma + js$, onde s é normalizada em relação a ω_0 e deslocada de acordo com as relações

$$js = j \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \text{ e} \quad (4.33)$$

$$\frac{\omega + \omega_0}{\omega} \approx 2. \quad (4.34)$$

Utilizando a representação da impedância da cavidade (B. 124), ao invés da admitância, pode-se escrever, conforme as relações acima, que

$$Z_n(p) = \frac{(R/Q)_n}{2} \frac{1}{(p - p_n)}, \quad (4.35)$$

$$p_n = -\frac{1}{2Q_n} + js_n, \text{ e} \quad (4.36)$$

$$s_n = \frac{\omega_n - \omega_0}{\omega_0}. \quad (4.37)$$

Assim, o ganho de potência, a partir da expressão(4.20) e considerando de 2 a 4 cavidades, se escreve

$$(02 \text{ cavidades}) \quad G_{p_2}(p) = \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{R_{sh}}{Q}\right)_1 \left(\frac{R_{sh}}{Q}\right)_2}{Q_{ext,1} Q_{ext,2}} \left| \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} \right|^2, \quad (4.38)$$

$$(03 \text{ cavidades}) \quad G_{p_3}(p) = \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{R_{sh}}{Q}\right)_1 \left(\frac{R_{sh}}{Q}\right)_3}{Q_{ext,1} Q_{ext,3}} \left| \frac{(p-z_1)}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)} \right|^2, \quad e \quad (4.39)$$

$$(04 \text{ cavidades}) \quad G_{p_4}(p) = \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{R_{sh}}{Q}\right)_1 \left(\frac{R_{sh}}{Q}\right)_4}{Q_{ext,1} Q_{ext,4}} \left| \frac{(p-z_1)(p-z_2)}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)} \right|^2. \quad (4.40)$$

Como exemplo, considera-se a expressão do ganho para 4 cavidades (4.40) para construir o gráfico da FIG. 4.15. Observa-se que, à medida que se aumenta a largura de banda, o ganho diminui.

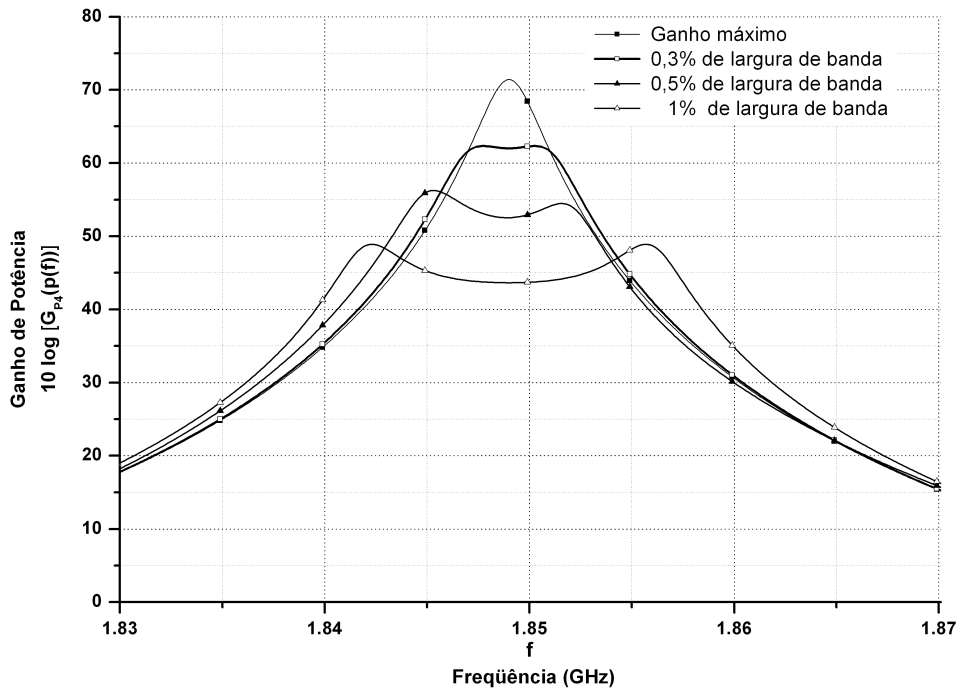


FIGURA 4.15 – Variação da largura de banda. Observa-se que, à medida que se aumenta a largura de banda, o ganho diminui.

4.4 Conclusão do capítulo

Neste capítulo apresentaram-se, como aplicação do formalismo do capítulo II, as análises de alguns projetos. Tendo em vista que, para o projeto de amplificadores klystrons de múltiplas cavidades, não existe uma expressão geral que permita obter a solução para um projeto ótimo, apresentou-se uma seqüência de passos para possibilitar obter-se uma solução de compromisso

preliminar para o problema. Inicialmente, realizou-se uma análise a pequenos sinais com os cálculos dos principais parâmetros apresentado no capítulo II de modo a possibilitar, no final da seção, o cálculo do ganho de voltagem e, principalmente, do ganho de potência utilizando os parâmetros do amplificador klystron Varian 4K3SL [29]. Na seqüência, realizou-se uma análise a grandes sinais em um formalismo para eliminar a dependência do índice de modulação, mostrado no capítulo III, a fim de viabilizar as simulações sem considerar os parâmetros das cavidades. Para isso, considerou-se a força resultante, devido ao campo elétrico no interior do tubo de deriva, nas proximidades de um gap de interação da cavidade, calculada a partir do campo elétrico mostrado no apêndice B. Estas modificações no código foram validadas utilizando-se os parâmetros do amplificador klystron Varian 4K3SL [29] e comparando-se com o código AJDISK[18]. Verificou-se que, ao utilizar os parâmetros da análise a pequenos sinais, corretamente obtidos segundo a metodologia descrita no apêndice B, eles se mostraram superestimar tanto o ganho como a potência de saída. Para resolver este problema, o AJDISK foi inicialmente utilizado a fim de gerar um novo conjunto de parâmetros das cavidades. Após obter-se boa concordância geral entre o código AJDISK e a curva experimental da klystron Varian 4K3SL, os mesmo valores foram utilizados no código desenvolvido. Quando isto foi feito, o ganho e a potência de saída foram novamente superestimados, ocorrendo a saturação de maneira antecipada. A hipótese levantada para explicar este fenômeno foi a utilização do perfil do campo modulador que acreditou superestimar devido ao perfil do tipo faca da cavidade reentrante. Corroborou-se tal hipótese multiplicando-se o campo modulador por um fator de 0,8, obtendo-se um resultado satisfatório. Finalmente, apresentou-se uma análise da largura de banda do amplificador klystron.

Capítulo V

CONCLUSÃO

Os resultados obtidos utilizando um código numérico para analisar os amplificadores klystrons de múltiplas cavidades usando grandes sinais foram apresentados neste trabalho. No capítulo II foi apresentada uma análise a pequenos sinais do amplificador klystron de múltiplas cavidades considerando o efeito de carga espacial. Inicialmente, descreveu-se o problema dos campos eletromagnéticos em uma cavidade ressonante utilizando a teoria dos modos normais segundo J. Slater. Resultou-se, desse formalismo, expressões que descrevem o balanço de potência complexo em uma cavidade excitada por um feixe de elétrons, detalhadas para três casos de interesse nos estudos de amplificadores klystrons: cavidade excitada por um feixe de elétrons (caso das cavidades intermediárias de um amplificador klystron), cavidade excitada por um feixe de elétrons com acoplamento com guia terminada com carga passiva (caso da cavidade de saída de um amplificador klystron) e cavidade excitada por uma fonte externa por meio de um terminal de entrada (guia de ondas ou coaxial) com um feixe de elétrons e com carregamento adicional com carga passiva (caso da cavidade de entrada de um amplificador klystron). Na seqüência, a partir do fenômeno físico constituído por um feixe de elétrons com dimensão axial infinita e seção transversal circular, propagando-se no interior de um tubo de deriva, também de seção transversal circular e onde estão acopladas múltiplas cavidades reentrantes, desenvolveu-se uma expressão para a densidade de corrente de convecção associada à modulação em velocidade, em função do campo elétrico produzido nos gaps de interação das cavidades. Utilizando este resultado em uma análise do fluxo de potência complexa entre a n -ésima cavidade e o feixe de elétrons, chegou-se em uma expressão para a admitância eletrônica total normalizada, dividida em duas parcelas: uma representa a trans-admitância eletrônica e a outra a admitância eletrônica da cavidade. Estas expressões, em conjunto com as expressões para a admitância do circuito das cavidades, formaram a base para a determinação do ganho de voltagem do amplificador klystron de múltiplas cavidades, uma vez que permitiram a obtenção de uma relação entre a amplitude A_N de RF do n -ésimo gap de interação e a amplitude A_1 da primeira cavidade. Finalmente, desenvolveu-se a expressão para o cálculo do ganho de potência de um amplificador klystron, seguido de uma expressão para a largura de banda, sob a hipótese de cavidades idênticas e igualmente espaçadas. O produto entre o ganho e a largura de banda, mostrado no final, constitui um parâmetro de fundamental importância nos projetos de amplificadores klystron. Com isso, apresentou-se uma análise que auxilia o projetista de klystron na fase inicial do desenvolvimento do projeto e que também serve como balizamento durante a análise dos resultados do projeto utilizando uma análise a grandes sinais (não linear). No capítulo III foi apresentado um modelo a grandes sinais unidimensional composto pelas equações da continuidade e do momento linear e pela força de carga espacial, devido à ação do campo elétrico, calculada utilizando o método da função de

Green. Ao se considerar, naquele capítulo, o modelo de disco, obteve-se, no final, a força elétrica exercida por um disco sobre outro disco. Devido à geometria cilíndrica, considerou-se coordenadas cilíndricas e propagação na direção z . Além disso, considerou-se também a hipótese de simetria azimutal, bem como o campo magnético focalizador suficientemente alto para garantir que o movimento dos elétrons do feixe fosse somente na direção axial. O sistema não-linear, inicialmente em coordenadas eulerianas nas variáveis independentes (z, t) , foi utilizado no desenvolvimento de um sistema de equações no formalismo lagrangiano. Os resultados, na forma de gráficos, de uma maneira geral, mostraram a dinâmica do feixe de elétrons no tubo de deriva, possibilitando-se observar vários fenômenos típicos nos estudos de amplificadores klystrons. No código, validado usando os dados de um amplificador klystron comercial Varian de 1,848 GHz, considerou-se os efeitos da carga espacial agindo sobre os elétrons do feixe desde o início da simulação. Estes efeitos não foram considerados nos trabalhos de referência, o que demonstra ser algo novo nos estudos de feixes de elétrons. As conseqüências da consideração das forças de carga espacial puderam ser comprovadas nos resultados encontrados. Por exemplo, quando se considera o efeito de carga espacial, constatou-se a importância de se fazer a análise da dinâmica do feixe de elétrons sem modulação pois, ao se considerar o feixe de elétrons finito, apareceu o fenômeno da autodifusão. Ela determina uma janela temporal que corresponde ao intervalo de tempo até quando o conjunto de discos pode ser considerado um feixe de elétrons, ou seja, a porção do feixe com densidade uniforme. A força elétrica, calculada utilizando o método da função de Green, retirou a dependência do modelo em relação ao fator de redução de frequência de plasma. Este fator deve ser conhecido antes do início da simulação. Durante o fenômeno de agrupamento de elétrons, o aparecimento de múltiplos valores de velocidade para uma mesma posição axial ratifica a utilização do formalismo lagrangiano ao invés do formalismo euleriano. As simulações, usando este formalismo, apresentam instabilidades numéricas nos resultados a partir do agrupamento de elétrons devido aos múltiplos valores de velocidade. A análise da corrente harmônica mostrou-se essencial para identificar o valor máximo da corrente fundamental em relação à corrente dc do feixe de elétrons e, além disso, a posição onde o máximo ocorre, fundamental para o posicionamento de novas cavidades. No capítulo IV foram apresentadas, como aplicação do formalismo do capítulo II, a análise de um projeto. Tendo em vista que, para o projeto de amplificadores klystrons de múltiplas cavidades, não existe uma expressão geral que permita obter a solução para um projeto ótimo, apresentou-se uma seqüência de passos para possibilitar obter-se uma solução de compromisso preliminar

para o problema. Inicialmente, realizou-se uma análise a pequenos sinais com os cálculos dos principais parâmetros apresentado no capítulo II de modo a possibilitar, no final da seção, o cálculo do ganho de voltagem e, principalmente, do ganho de potência utilizando os parâmetros do amplificador klystron Varian 4K3SL [29]. Na seqüência, realizou-se uma análise a grandes em um formalismo para eliminar a dependência do índice de modulação, mostrado no capítulo III, que foi utilizado para viabilizar as simulações sem considerar os parâmetros das cavidades. Para isso, considerou-se a força moduladora, devido ao campo elétrico no interior do tubo de deriva, nas proximidades de um gap de interação da cavidade, calculada a partir do campo elétrico mostrado no apêndice B. Estas implementações no código foram validadas utilizando-se os parâmetros do amplificador klystron Varian 4K3SL [29] e comparando-se com o código AJDISK[18]. Verificou-se que, ao utilizar os parâmetros da análise a pequenos sinais, corretamente obtidos segundo a metodologia descrita no apêndice B, eles se mostraram superestimar tanto o ganho como a potência de saída. Para resolver este problema, o AJDISK foi inicialmente utilizado a fim de gerar um novo conjunto de parâmetros das cavidades. Após obter-se boa concordância geral entre o código AJDISK e a curva experimental da klystron Varian 4K3SL, os mesmo valores foram utilizados no código desenvolvido. Quando isto foi feito, o ganho e a potência de saída foram novamente superestimados, ocorrendo a saturação de maneira antecipada. A hipótese levantada para explicar este fenômeno foi a utilização do perfil do campo modulador que acreditou superestimar devido ao perfil do tipo faca da cavidade reentrante. Corroborou-se tal hipótese multiplicando-se o campo modulador por um fator de 0,8, obtendo-se um resultado satisfatório. Finalmente, apresentou-se uma análise da largura de banda do amplificador klystron.

Seguem-se algumas sugestões de trabalhos futuros a fim de aumentar a complexidade do modelo, possibilitando descrições mais gerais do comportamento do amplificador klystron:

- Análise considerando o perfil do campo magnético externo finito;
- Análise considerando um modelo 2,5-dimensional, que representa uma generalização do modelo de disco. Tal modelo permitirá a descrição do movimento de rotação do anel em torno de seu próprio eixo axial, além de um movimento axial. Ele descreverá a repulsão axial no feixe de elétrons devido as forças de cargas espacial; e
- Análise considerando os efeitos relativísticos.

APÊNDICE A - Ondas de carga espacial em feixes de elétrons magneticamente confinados

Neste apêndice descreve-se o princípio físico básico para o funcionamento dos amplificadores klystron por meio de uma análise quantitativa de pequenos sinais. O fenômeno físico de interesse é constituído por um feixe de elétrons com dimensão axial infinita e seção transversal circular, propagando-se no interior de um tubo de deriva de dimensão axial também infinita. O problema é, a partir do fenômeno físico apresentado, calcular as ondas de carga espacial (análise AC) sustentadas pelo feixe de elétrons. Além disso, um resultado relevante desta análise é a determinação de uma expressão para o cálculo do fator de redução de carga espacial.

A.1 Equações do modelo linearizado a pequenos sinais

Seja um feixe de elétrons de raio a , mono-energético com velocidade u_0 , com densidade volumétrica de carga ρ_0 , e densidade de corrente de convecção $J_0 = \rho_0 u_0$, propagando-se no interior de um tubo de deriva de raio b , com $b > a$, de paredes condutoras perfeitas e comprimento axial infinito. O feixe é confinado a propagar-se ao longo do eixo z no sentido positivo, com raio constante a devido à ação de um campo magnético axial com intensidade muito grande. O objetivo deste apêndice é encontrar as soluções harmônicas do tipo onda progressiva decorrentes de pequenas perturbações em torno dos valores DC do feixe, u_0 , ρ_0 e J_0 , cuja constante de propagação axial, representada por $\beta = \beta(\omega)$, a ser determinada, e, conseqüentemente, a relação de dispersão (gráfico de Brillouin). O comportamento do feixe de elétrons será descrito por meio das grandezas $u(z,t)$, $\rho(z,t)$, e $J(z,t)$. Para isto, admitir-se-á uma dependência com a coordenada axial da forma $e^{-j\beta z}$, de forma que o valor instantâneo de uma grandeza, $f(r, z, t)$ é obtido pela relação

$$f(r, z, t) = \text{Re} \left[f(r) e^{j(\omega t - \beta z)} \right] \quad (\text{A.1})$$

A geometria do problema está ilustrada da FIG. A.1.

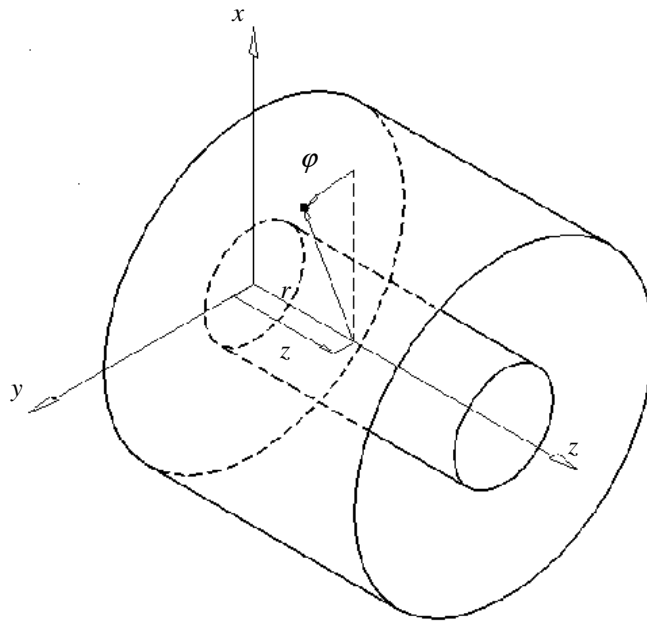


FIGURA A.1 - Geometria utilizada para a descrição do problema da propagação de ondas de cargas espacial em feixe de elétrons magneticamente confinados em coordenadas cilíndricas.

No caso do feixe de elétrons de raio a , confinado a propagar-se ao longo do eixo do z , a densidade de corrente de convecção é expressa segundo

$$\vec{J}(z,t) = \begin{cases} \rho(z,t)u(z,t)\hat{a}_z, & r \leq a \\ \vec{0} & , \quad a < r \leq b \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Tendo em vista que o problema envolve fontes, a solução para as equações de Maxwell poderá ser obtida, de maneira mais direta, utilizando os potenciais eletromagnéticos auxiliares. Seja o potencial vetor magnético $\vec{A}(r,t)$ e o potencial escalar elétrico $\Phi(r,t)$ que satisfazem à equação de onda não homogênea

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}, \text{ e} \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (\text{A.4})$$

onde utilizou-se o gauge de Lorentz

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (\text{A.5})$$

para a obtenção de (A.3) e (A.4) a partir das equações de Maxwell. Uma vez determinados $\vec{A}(r,t)$ e $\Phi(r,t)$, os campos elétrico e magnético são obtidos segundo as relações:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \text{ e} \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (\text{A.7})$$

Sob a hipótese (A.1) e considerando que o problema apresenta simetria azimutal, a equação para a componente axial do potencial vetor magnético, $\vec{A} = A_z(r) e^{j(\omega t - \beta z)} \hat{a}_z$, resulta

$$\frac{d^2 A_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_z}{dr} + (k_0^2 - \beta^2) A_z = -\mu_0 J. \quad (\text{A.8})$$

A hipótese (A.1) implica que o gauge de Lorentz (A.5), como

$$\Phi(r) = \beta \frac{c^2}{\omega} A_z(r). \quad (\text{A.9})$$

As componentes axial e radial do campo elétrico, obtidas segundo (A.6), bem como a componente azimutal do campo magnético, segundo (A.7), se escrevem

$$E_z = j\beta^2 \frac{c^2}{\omega} A_z - j\omega A_z = jc^2 \frac{\beta^2 - k_0^2}{\omega} A_z, \quad (\text{A.10})$$

$$E_r = -j \frac{c^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = -\beta \frac{c^2}{\omega} \frac{\partial A_z}{\partial r}, \text{ e} \quad (\text{A.11})$$

$$H_\phi = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial r}. \quad (\text{A.12})$$

Tendo em vista que o problema envolve a propagação em duas regiões, o potencial vetor magnético deverá satisfazer as seguintes equações

$$\frac{d^2 A_{z1}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_{z1}}{dr} + (k_0^2 - \beta^2) A_{z1} = -\mu_0 J_z, \quad r \leq a \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{d^2 A_{z2}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_{z2}}{dr} + (k_0^2 - \beta^2) A_{z2} = 0, \quad a \leq r \leq b. \quad (\text{A.14})$$

Deve ser observado que (A.13) é não-homogênea. Contudo, é possível torná-la homogênea utilizando as equações de Euler para um fluido compressível, não viscoso, tendo o campo elétrico de carga espacial como força resultante sobre o elemento de volume. Desta forma, a equação de movimento se escreve

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\eta \vec{E}, \quad (\text{A.15})$$

onde $\eta = e/m_e$ é a razão carga/massa do elétron. A equação (A.15), sob a hipótese de pequenos sinais e movimento somente na direção axial, resulta

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial z} = -\eta E_z. \quad (\text{A.16})$$

Com a hipótese adicional (A.1), (A.16) resulta em

$$u = j \frac{\eta}{u_0 (\beta_e - \beta)} E_z. \quad (\text{A.17})$$

O parâmetro $\beta_e = \omega/u_0$ pode ser interpretado como a constante de propagação de uma onda fictícia que se propaga com a mesma velocidade que a velocidade de propagação DC do feixe de elétrons. A outra equação de Euler, a equação da continuidade, se escreve

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0, \quad (\text{A.18})$$

e, seguindo o mesmo raciocínio, obtém-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial z} = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$\rho = \frac{\beta}{\omega} J, \quad (\text{A.20})$$

lembrando que a densidade de corrente de convecção, sob a hipótese de pequenos sinais, se escreve na forma $J = \rho_0 u_z + \rho u_0$. Substituindo as expressões para a densidade volumétrica de cargas (A.20) e a velocidade (A.17), na expressão para a densidade de corrente de convecção, chega-se a

$$J = j \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\beta_e^2 \epsilon_0}{(\beta_e - \beta)^2} E_z, \quad (\text{A.21})$$

onde $\omega_p^2 = \eta \rho_0 / \epsilon_0$ é a frequência de plasma para os elétrons. Utilizando (A.10) e (A.21) obtém-se, finalmente, um relação entre a densidade de corrente de convecção e o potencial vetor magnético

$$\mu_0 J = \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \beta_e^2 \frac{k_0^2 - \beta^2}{(\beta_e - \beta)^2} A_z. \quad (\text{A.22})$$

Portanto, o potencial vetor magnético é solução do seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias homogêneas

$$\frac{d^2 A_{z1}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_{z1}}{dr} + p^2 A_{z1} = 0, \quad r \leq a \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{d^2 A_{z2}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_{z2}}{dr} - h^2 A_{z2} = 0, \quad a \leq r \leq b \quad (\text{A.24})$$

onde os autovalores são expressos segundo

$$p^2 = h^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \frac{\beta_e^2}{(\beta_e - \beta)^2} \right], \text{ e} \quad (\text{A.25})$$

$$h^2 = k_0^2 - \beta^2, \quad (\text{A.26})$$

onde h e p são as constantes de propagação radial para as regiões $a \leq r \leq b$ e $r \leq a$, respectivamente. As soluções gerais para (A.23) e (A.24) são, em vista de soluções finitas na origem, do tipo

$$A_{z1}(r) = AJ_0(pr), \quad r \leq a \quad (\text{A.27})$$

$$A_{z2}(r) = BI_0(hr) + CK_0(hr), \quad a \leq r \leq b \quad (\text{A.28})$$

onde $J_0(pr)$ é a função de Bessel ordinária de ordem zero e $I_0(hr)$ e $K_0(hr)$ são as funções de Bessel modificadas de ordem zero do primeiro e segundo tipos, respectivamente. As constantes de integração são representadas por A , B , e C . A partir das soluções (A.27) e (A.28), as componentes dos campos elétrico e magnético, utilizando-se (A.10), (A.11) e (A.12), se escrevem

$$E_{z1} = -jc^2 \frac{h^2}{\omega} AJ_0(pr), \quad (\text{A.29})$$

$$E_{z2} = -jc^2 \frac{h^2}{\omega} [BI_0(hr) + CK_0(hr)], \quad (\text{A.30})$$

$$E_{r1} = \beta \frac{c^2}{\omega} ApJ_1(pr), \quad (\text{A.31})$$

$$E_{r2} = -\beta \frac{c^2}{\omega} h [BI_1(hr) - CK_1(hr)], \quad (\text{A.32})$$

$$H_{\phi1} = \frac{1}{\mu_0} ApJ_1(pr), \text{ e} \quad (\text{A.33})$$

$$H_{\phi2} = -\frac{1}{\mu_0} h [BI_1(hr) - CK_1(hr)]. \quad (\text{A.34})$$

Os coeficientes A , B , e C são determinados utilizando-se as condições de contorno a serem satisfeitas pela componente axial do campo elétrico e pela componente azimutal do campo magnético. Para $r = b$, a componente axial do campo elétrico é nula implicando, segundo (A.30), que

$$C = -B \frac{I_0(hb)}{K_0(hb)}. \quad (\text{A.35})$$

Para $r = a$, a continuidade da componente azimutal do campo magnético, segundo (A.33) e (A.34), e da componente axial do campo elétrico, segundo (A.29) e (A.30), implicam, respectivamente, em

$$-ApJ_1(pa) = hBI_1(ha) - hCK_1(ha), \text{ e} \quad (\text{A.36})$$

$$AJ_0(pa) = BI_0(ha) + CK_0(ha). \quad (\text{A.37})$$

A equação de dispersão é obtida observando-se que o sistema formado por (A.35), (A.36) e (A.37) é homogêneo. O desenvolvimento do determinante desse sistema resulta, em vista de soluções não-triviais, em

$$pa \frac{J_1(pa)}{J_0(pa)} = ha \frac{K_0(hb)I_1(ha) + K_1(ha)I_0(hb)}{K_0(ha)I_0(hb) - K_0(hb)I_0(ha)} \quad (\text{A.38})$$

A equação transcendental (A.38) deve ser resolvida em conjunto com (A.25) e (A.26).

A.2 Análise da solução

É instrutivo analisar alguns casos mais simples do problema do feixe. Se, por exemplo, o feixe que se propaga na direção z for, também, ilimitado radialmente, então não haverá dependência dos campos com as coordenadas transversais à direção de propagação e, sob a hipótese (A.1), o problema de autovalor se reduz, segundo (A.23) e (A.25), a

$$(k_0^2 - \beta^2) \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \frac{\beta_e^2}{(\beta_e - \beta)^2} \right] = 0 \quad (\text{A.39})$$

A solução de (A.39) resulta em 4 raízes. As duas primeiras, $\beta = \pm k_0$, correspondem a ondas que se propagam com velocidade de fase igual à velocidade da luz. As outras duas resultam nas ondas de carga espacial, com constantes de propagação iguais a

$$\beta = \beta_e \left(1 \pm \frac{\omega_p}{\omega} \right) = \beta_e \pm \beta_p \quad (\text{A.40})$$

Analisando (A.40) pode-se inferir que as ondas de carga espacial são ondas que se propagam com velocidade de fase um pouco acima que a velocidade DC do feixe, com constante de propagação $\beta_e - \beta_p$, denominada de onda rápida, e um pouco abaixo da velocidade DC do feixe, com constante de propagação $\beta_e + \beta_p$, denominada de onda lenta.

Retornando ao caso do feixe que se propaga no interior de um tubo de deriva, o autovalor p será diferente de zero e determinado pela solução de (A.38). Uma vez

determinado e sabendo-se que as ondas de carga espacial se propagam com velocidade de fase um pouco acima e um pouco abaixo da velocidade DC do feixe, pode-se escrever que

$$\beta = \beta_e (1 + \delta), \quad (\text{A.41})$$

onde δ é pequeno comparado à unidade. Sabendo-se que as soluções procuradas são soluções de ondas lentas, $\beta \approx \beta_e \gg k_0$, (A.25) se reduz a

$$p^2 = -\beta_e^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \frac{1}{\delta^2} \right], \quad (\text{A.42})$$

que, resolvendo para δ , obtém-se

$$\delta = \frac{\pm (\omega_p / \omega) \beta_e}{(\beta_e^2 + p^2)^{1/2}}. \quad (\text{A.43})$$

Substituindo esta expressão em (A.41) obtém-se a constante de propagação

$$\beta = \beta_e \left[1 \pm \frac{\omega_p}{\omega} \left(1 + \frac{p^2}{\beta_e^2} \right)^{-1/2} \right]. \quad (\text{A.44})$$

A frequência de plasma é modificada por uma grandeza denominada fator de redução da frequência de plasma R , dado por

$$R = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{\beta_e} \right)^2}}. \quad (\text{A.45})$$

Substituindo-se (A.45) em (A.44) obtém-se

$$\beta = \beta_e \left(1 \pm R \frac{\omega_p}{\omega} \right) = \beta_e \pm R \beta_p = \beta_e \pm \beta_q. \quad (\text{A.46})$$

Portanto, o efeito do tubo de deriva implica, além da dependência radial dos campos, também em uma modificação nas constantes de propagação das ondas de carga espacial rápida e lenta por uma grandeza denominada fator de redução da frequência de plasma. A solução de (A.38) é apresentada na FIG. A.2 e o gráfico de R , para algumas razões de preenchimento (a/b), é apresentado na FIG. A.3.

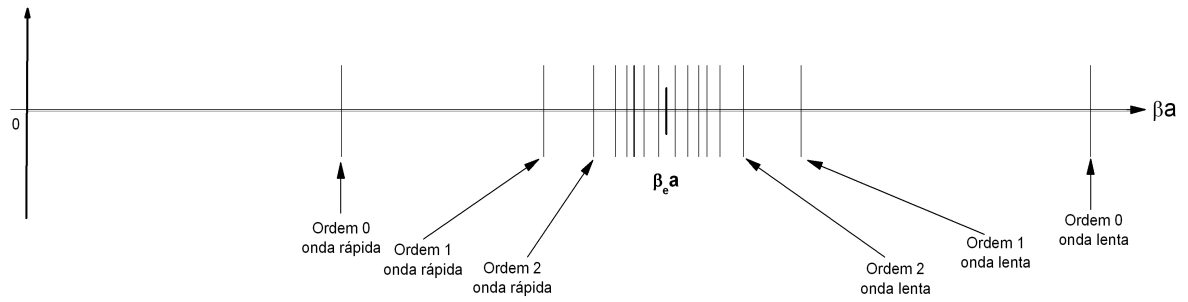


FIGURA A.2 - Representação esquemática dos zeros da relação de dispersão para a situação em que $b/a = 2$.

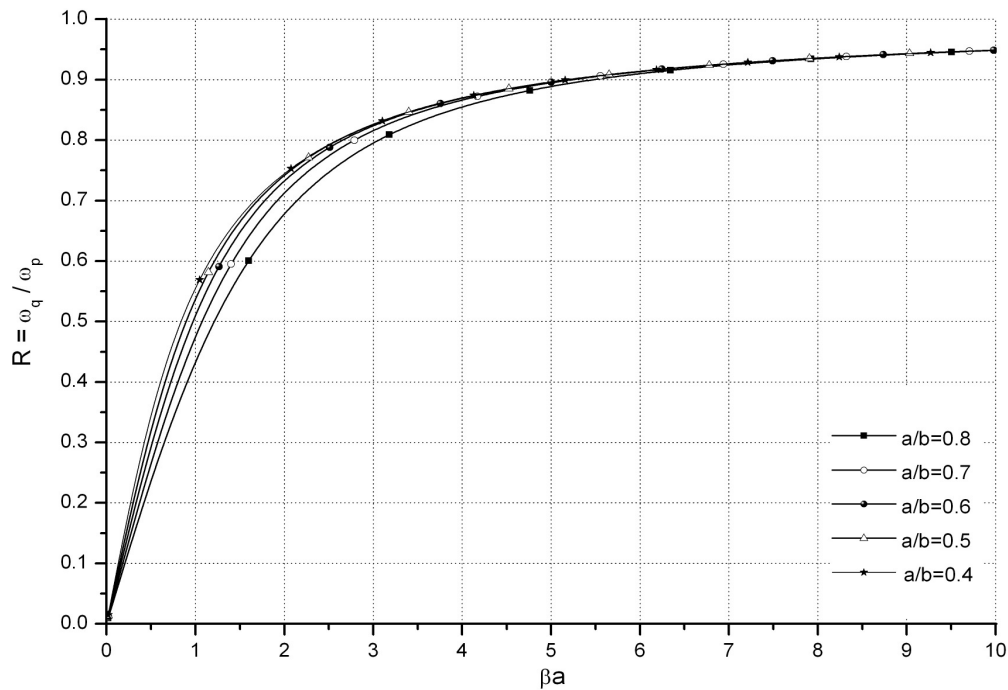


FIGURA A.3 - Fator de redução de frequência de plasma para 5 relações entre o raio do tubo de deriva (b) e o raio do feixe de elétrons (a).

As expressões finais para os campos podem ser escritas em termos somente da constante de integração A , resultando em

$$E_{z2} = j \frac{c^2 p h}{\omega} A J_1(pa) \left[\frac{I_0(hr) K_0(hb) - I_0(hb) K_0(hr)}{I_1(ha) K_0(hb) + I_0(hb) K_1(ha)} \right], \quad (\text{A.47})$$

$$E_{r2} = \frac{\beta c^2 p}{\omega} A J_1(pa) \left[\frac{I_1(hr) K_0(hb) + I_0(hb) K_1(hr)}{I_1(ha) K_0(hb) + I_0(hb) K_1(ha)} \right], e \quad (\text{A.48})$$

$$H_{\phi 2} = \frac{p}{\mu_0} A J_1(pa) \left[\frac{I_1(hr) K_0(hb) + I_0(hb) K_1(hr)}{I_1(ha) K_0(hb) + I_0(hb) K_1(ha)} \right]. \quad (\text{A.49})$$

A.3 Conclusão do Apêndice A

Neste apêndice descreveu-se o princípio físico básico para o funcionamento dos amplificadores klystron por meio de uma análise quantitativa de pequenos sinais. Inicialmente, calculou-se as ondas de carga espacial (análise AC) sustentadas por um feixe de elétrons cilíndrico de seção reta circular de raio a , confinado por um vetor indução magnética externo com intensidade suficientemente alta para garantir que o movimento dos elétrons do feixe seja somente na direção axial e propagando-se no interior de uma guia de onda circular de raio b . Em seguida, demonstrou-se que o fato do feixe de elétrons ter seções retas finitas e estar dentro de uma estrutura fechada (tubo de deriva) e, portanto, em uma configuração diferente daquela utilizada para o cálculo da frequência de plasma, o valor desta frequência deve ser reduzido pela multiplicação por um fator de redução de frequência de plasma R , definindo a frequência de plasma efetiva ω_q ($\omega_q = R \omega_p$). Esta frequência é importante porque é possível demonstrar que o agrupamento de elétrons (“bunching”) ocorre em posições relacionadas com λ_q , que é o comprimento de onda relativo à frequência angular efetiva de plasma (ω_q).

APÊNDICE B – Determinação do fator de qualidade Q e da razão (R/Q) em cavidades cilíndricas reentrantes

Neste apêndice descreve-se um método para a determinação da frequência de ressonância f_0 , para o fator de qualidade Q e para a razão (R/Q) em cavidades cilíndricas reentrantes, de relevância para o projeto de amplificadores klystron de múltiplas cavidades, utilizando a técnica do casamento de admitância do gap de interação entre a cavidade e o tubo de deriva.

A técnica de casamento de admitância, para este problema, consiste em obter-se uma solução para os campos eletromagnéticos sustentados pela cavidade em termos das autofunções axiais e do coeficiente da expansão da solução em termos do valor do campo elétrico no gap que, por hipótese, é considerado constante com valor E_0 para fins de desenvolvimento da técnica. Nas últimas seções são apresentados os cálculos considerando o campo elétrico com perfil hiperbólico. Já o tubo de deriva é considerado um guia de onda de seção circular e comprimento axial infinito. Desta forma, a solução deve ser escrita em termos da transformada de Fourier dos campos axiais. De maneira similar ao problema da cavidade, o coeficiente da expansão é obtido a partir da hipótese do conhecimento prévio do campo elétrico no gap. Representam-se os campos eletromagnéticos por meio de dois índices: 1, para os campos sustentados pela cavidade; e 2, para os campos que se propagam no tubo de deriva.

De posse do conhecimento da solução dos campos para ambas as regiões e tendo em vista que a admitância do gap deve ser a mesma, independente da representação dos campos, obtém-se uma equação de dispersão que permite a solução do problema. Obtida a solução para a relação de dispersão e, utilizando as expressões para os campos da cavidade, calcula-se o fator de qualidade Q , sob a hipótese de pequenas perdas, e a razão (R/Q) , para um dado conjunto de parâmetros da cavidade: comprimento L , altura (raio r_c), raio do tubo de deriva (b) e comprimento do gap de interação (d).

Este apêndice está organizado como segue. Inicialmente, desenvolve-se o problema dos campos na cavidade e obtém-se uma expressão para a admitância do gap, Y_c . A seguir, obtém-se uma nova expressão para a mesma admitância utilizando-se a solução dos campos para o problema do guia, Y_d . Sob a condição de $Y_c + Y_d = 0$, obtém-se a relação de dispersão para o problema. A solução gráfica da equação de dispersão possibilita o cálculo das frequências sustentadas pela cavidade ressonante, que satisfazem o perfil de campo

elétrico, admitido por hipótese constante com valor E_0 . Na seqüência, apresenta-se a expressão para o cálculo do fator de qualidade Q , em seguida, a razão (R/Q) . Finalmente, apresentam-se os resultados considerando um perfil de campo elétrico hiperbólico no gap de interação.

B.1 Campos sustentados por uma cavidade cilíndrica reentrante

Na FIG. B1 ilustra-se o problema da cavidade cilíndrica reentrante. As condições de contorno para este problema são:

- a componente axial do campo elétrico, $e_{1z}(r, z)$, deve assumir os seguintes valores nas superfícies do contorno:

$$e_{1z} = 0, \text{ em } r = r_c \text{ e } |z| < L/2, \quad (\text{B.1})$$

$$e_{1z} = 0, \text{ em } r = b \text{ e } -L/2 \leq z < -d/2 \text{ e } d/2 \leq z < L/2, \text{ e} \quad (\text{B.2})$$

$$e_{1z} = E_0, \text{ em } r = b \text{ e } |z| < d/2. \quad (\text{B.3})$$

- a componente radial do campo elétrico, $e_r(r, z)$, deve satisfazer a condição:

$$e_{1r} = 0, \text{ em } b \leq r < r_c \text{ e } |z| = L/2. \quad (\text{B.4})$$

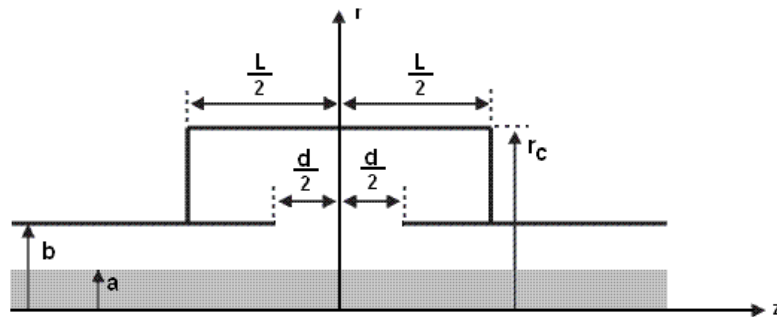


FIGURA B.1 – Geometria da cavidade cilíndrica de um amplificador klystron.

Na região da cavidade, admitindo-se solução harmônica $e^{j\omega t}$, a componente do campo elétrico axial $e_z(r, z)$ satisfaz a equação de Helmholtz dada por

$$\frac{\partial^2 e_{1z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial e_{1z}}{\partial r} + \frac{\partial^2 e_{1z}}{\partial z^2} + k_0^2 e_{1z} = 0, \quad (\text{B.5})$$

onde $k_0 = \omega/c$ é o número de onda. Aplicando-se o método de separação de variáveis, com $e_{1z}(r, z) = R(r)Z(z)$, em (B.5), pode-se escrever

$$\frac{1}{R(r)} \left[\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{R(r)} \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} \right] + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k_0^2 = 0, \quad (\text{B.6})$$

Em vista das condições de contorno (B.4), a função $Z(z)$ deve satisfazer a seguinte equação diferencial

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -\lambda^2, \quad (\text{B.7})$$

onde λ é uma constante de separação, de modo que a dependência da componente axial do campo elétrico em relação a variável z , seja expressa, para o caso em que $\lambda > 0$, segundo

$$Z(z) = B \cos \left[\frac{n\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right], \text{ com } n = 1, 2, \dots, \quad (\text{B.8})$$

onde B é uma constante a ser determinada, e os autovalores são especificados segundo,

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (\text{B.9})$$

Consistente com o método de separação de variáveis, a solução para $R(r)$ satisfaz a equação radial

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{R(r)} \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} - k^2 R(r) = 0, \quad (\text{B.10})$$

com $k^2 = k_n^2 = \lambda_n^2 - k_0^2$ e que conduz, ao satisfazer a condição de contorno (B.1), à solução

$$R(r) = A \left[I_0(k_n r) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n r) \right], \quad (\text{B.11})$$

onde A é a segunda constante a ser determinada, e I_0 e K_0 são as funções de Bessel modificadas, de ordem zero, do primeiro e segundo tipos, respectivamente. Utilizando o teorema da expansão, a solução para o problema da cavidade pode ser escrito, a partir de (B.8) e (B.11), como

$$e_{1z}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[I_0(k_n r) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n r) \right] \cos \left[\frac{n\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right], \quad (\text{B.12})$$

A determinação do coeficiente A_n é obtida considerando a condição de contorno (B.3) e aplicando as propriedades de ortogonalidade da série de Fourier trigonométrica

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos \left[\frac{p\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right] \cos \left[\frac{q\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right] dz = \begin{cases} L, & \text{para } p = q = 0 \\ \frac{L}{2}, & \text{para } p = q \geq 1, \\ 0, & \text{para } p \neq q \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

em (B.12). Desta forma, multiplicando ambos os lados de (B.12) por $\cos \left[\frac{m\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right] dz$ e

integrando em toda a extensão da axial da cavidade, tem-se

$$E_0 \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \cos \left[\frac{m\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right] dz = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b) \right] \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos \left[\frac{n\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right] \cos \left[\frac{m\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right] dz, \quad (\text{B.14})$$

Utilizando (B.13), o lado direito da expressão acima, resulta em

$$E_0 \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \cos \left[\frac{m\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right] dz = A_m \left[I_0(k_n r) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n r) \right] \frac{L}{2}, \quad (\text{B.15})$$

e integrando-se o lado esquerdo de (B.15), tem-se

$$A_n = E_0 \left(\frac{2d}{L} \right) \frac{\cos(n\pi/2)}{\left[I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b) \right]} \frac{\text{sen} \left(\frac{n\pi d}{2L} \right)}{\left(\frac{n\pi d}{2L} \right)}, \quad (\text{B.16})$$

observando que se utilizou o resultado:

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \cos \left[\frac{n\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right] dz = \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right). \quad (\text{B.17})$$

Com isso, a solução passa a envolver somente valores pares de n . Desta forma (B.12) se escreve

$$e_{1z}(r, z) = E_0 \left(\frac{2d}{L} \right) \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\text{sen} \left(\frac{n\pi d}{2L} \right)}{\left(\frac{n\pi d}{2L} \right)} \left[\frac{I_0(k_n r) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n r)}{I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b)} \right] \cos \left[\frac{n\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right] \quad (\text{B.18})$$

com

$$k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 - k_0^2. \quad (\text{B.19})$$

Em adição as soluções $\lambda > 0$ deve-se, também, desenvolver uma solução para $\lambda = 0$, em vista da condição de contorno que especifica do campo elétrico sobre o gap. Neste caso, pode-se escrever, a partir de (B.5), as seguintes equações

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + k_0^2 R(r) = 0, \text{ e} \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0. \quad (\text{B.21})$$

Considerando as mesmas condições de contorno radiais encontra-se, para $R(r)$, a solução

$$R(r) = A_0 [J_0(k_0 r) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 r)]. \quad (\text{B.22})$$

onde J_0 e N_0 são as funções de Bessel ordinárias, de ordem zero, do primeira e segundo tipo, respectivamente. As condições de contorno que devem ser satisfeitas por $Z(z)$ também são as mesmas dadas por (B.4). Ao satisfazê-las, obtém-se

$$Z(z) = C_0, \quad (\text{B.23})$$

onde C_0 é uma constante. Desta forma, a solução para o problema da cavidade, com $\lambda = 0$ pode ser escrita, a partir de (B.24) e (B.25), como

$$e_{1z0}(r, z) = A_0 C_0 R(r). \quad (\text{B.24})$$

A determinação do coeficiente $A_0 C_0$ é obtida considerando as condições (B.2) e (B.3) e aplicando as propriedades de ortogonalidade da série de Fourier trigonométrica dadas por (B.13). Após os cálculos, $A_0 C_0$ passa a valer

$$A_0 C_0 = \frac{d}{L} \frac{E_0}{J_0(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 b)}. \quad (\text{B.25})$$

Portanto, a solução de $e_{z0}(r, z)$ resulta

$$e_{1z0} = E_0 \frac{d}{L} \left[\frac{J_0(k_0 r) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 r)}{J_0(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 b)} \right] \quad (\text{B.26})$$

Com isso, o campo elétrico axial, sustentado pela cavidade cilíndrica reentrante, mostrada na FIG. B.1, em função da frequência angular $\omega = 2\pi f$, é dado por

$$e_{1z}(r, z) = E_0 \frac{d}{L} \left\{ \frac{J_0(k_0 r) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 r)}{J_0(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 b)} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)} \left[\frac{I_0(k_n r) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n r)}{I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b)} \right] \cos\left[\frac{n\pi}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right] \right\}. \quad (\text{B.27})$$

Na FIG. B.2 ilustra-se o perfil do campo elétrico axial ao longo da abscissa do gap, onde $r = b$. Os parâmetros encontram-se na TAB. B.1 e utilizou-se a frequência (TAB. B.3) determinada pelo método que será mostrado na seqüência.

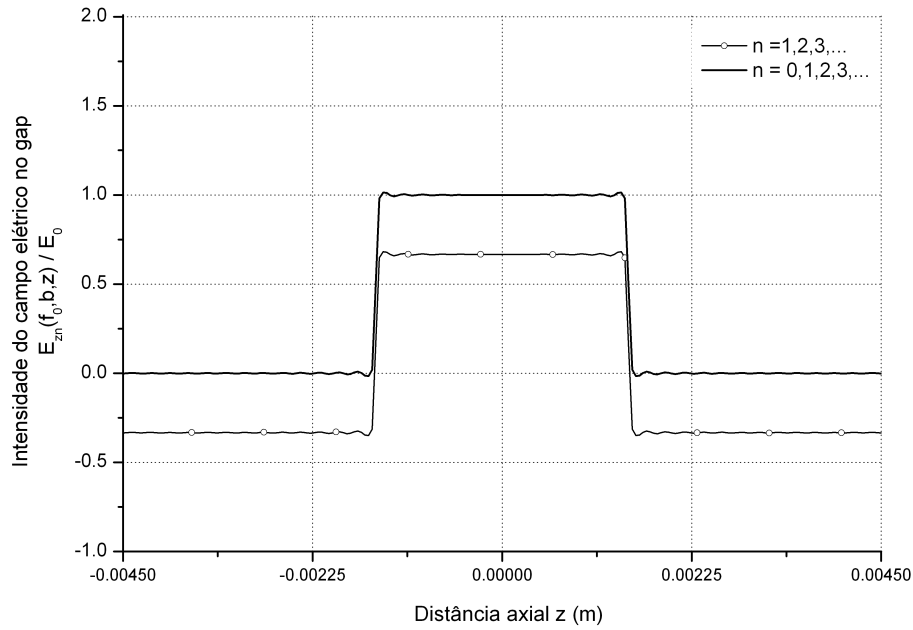


FIGURA B.2. – Distribuição do campo elétrico axial na coordenada do gap que, por hipótese, é constante com valor E_0 . O campo elétrico é calculado a partir da cavidade e, neste caso, depende do autovalor $n\pi/L$. Observa-se a contribuição do termo $n = 0$.

A partir campo elétrico axial é possível calcular a componente radial do campo elétrico no interior da cavidade cilíndrica reentrante pois, segundo a Lei de Gauss para o campo elétrico, em coordenadas cilíndricas e sob a hipótese de simetria azimutal, segue que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r e_{1r}) + \frac{\partial e_{1z}}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.28})$$

ou

$$\frac{\partial e_{1r}}{\partial r} + \frac{e_{1r}}{r} = -\frac{\partial e_{1z}}{\partial z}. \quad (\text{B.29})$$

Substituindo a expressão para a componente axial do campo elétrico, dada por (B.27), e calculando a derivada, tem-se

$$\frac{\partial e_{1z}}{\partial z} = E_0 \left(\frac{2d}{L} \right) \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+2}{2}} \left(\frac{n\pi}{L} \right) \frac{\text{sen} \left(\frac{n\pi d}{2L} \right)}{\left(\frac{n\pi d}{2L} \right)} \left[\frac{I_0(k_n r) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_1(k_n r)}{I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b)} \right] \text{sen} \left[\frac{n\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right]. \quad (\text{B.30})$$

Portanto, a expressão para o campo e_{1r} é obtida integrando-se a equação diferencial

$$\frac{\partial e_{1r}}{\partial r} + \frac{e_{1r}}{r} = E_0 \left(\frac{2d}{L} \right) \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n\pi}{L} \right) \frac{\text{sen} \left(\frac{n\pi d}{2L} \right)}{\left(\frac{n\pi d}{2L} \right)} \left[\frac{I_0(k_n r) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_1(k_n r)}{I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b)} \right] \text{sen} \left[\frac{n\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right]. \quad (\text{B.31})$$

A solução de (B.31) pode ser construída observando que a solução da equação homogênea é da forma $e_{1r} = -1/r$ e, portanto, a solução procurada pode ser obtida segundo a integral

$$e_{1r}(r, z) = \frac{1}{r} C(z) \int_{\Omega} \left[I_0(k_n r') K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n r') \right] r' dr', \quad (\text{B.32})$$

onde

$$C(z) = E_0 \left(\frac{2d}{L} \right) \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n\pi}{L} \right) \frac{\text{sen} \left(\frac{n\pi d}{2L} \right)}{\left(\frac{n\pi d}{2L} \right)} \left[\frac{1}{I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b)} \right] \text{sen} \left[\frac{n\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right]. \quad (\text{B.33})$$

A integração pode ser conduzida observando-se que

$$e_{1r}(r, z) = \frac{1}{r} C(z) \left[K_0(k_n r_c) \int_r I_0(k_n r') r' dr' - I_0(k_n r_c) \int_r K_0(k_n r') r' dr' \right], \quad (\text{B.34})$$

onde os resultados das integrais são

$$\int_r I_0(k_n r') r' dr' = \frac{r}{k_n} I_1(k_n r), \quad \text{e} \quad (\text{B.35})$$

$$\int_r K_0(k_n r') r' dr' = -\frac{r}{k_n} K_1(k_n r), \quad (\text{B.36})$$

o que possibilita escrever o campo elétrico na forma

$$e_{1r}(r, z) = \frac{1}{k_n} C(z) \left[I_1(k_n r) K_0(k_n r_c) + I_0(k_n r_c) K_1(k_n r) \right]. \quad (\text{B.37})$$

Finalmente, substituindo (B.33) em (B.37) obtém-se

$$e_{1r}(r, z) = E_0 \left(\frac{2d}{L} \right) \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{k_n} \left(\frac{n\pi}{L} \right) \frac{\text{sen} \left(\frac{n\pi d}{2L} \right)}{\left(\frac{n\pi d}{2L} \right)} \left[\frac{I_1(k_n r) K_0(k_n r_c) + I_0(k_n r_c) K_1(k_n r)}{I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b)} \right] \text{sen} \left[\frac{n\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right]. \quad (\text{B.38})$$

Na FIG. B.3 ilustra-se o perfil do campo elétrico radial ao longo da abscissa do gap, onde $r = b$. Os parâmetros encontram-se na TAB. B.1 e utilizou-se a frequência (TAB. B.3) determinada pelo método que será mostrado na seqüência.

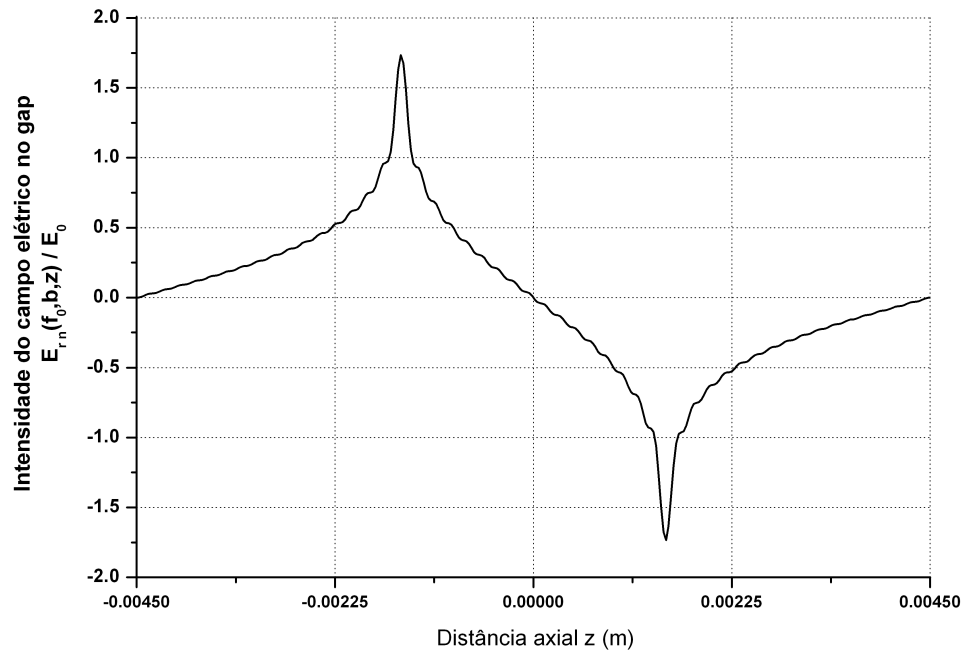


FIGURA B.3. – Distribuição do campo elétrico radial na coordenada do gap ($r = b$).

Tendo em vista que para a determinação da admitância do gap é necessário conhecer o campo magnético azimutal $h_{1\varphi n}(r, z)$, segue o seu desenvolvimento. Segundo a Lei de Faraday, é possível escrever que

$$\frac{\partial e_{1r}}{\partial z} - \frac{\partial e_{1z}}{\partial r} = -j\omega\mu_0 h_{1\varphi}, \quad (\text{B.39})$$

ou

$$h_{1\varphi} = \frac{j}{\omega\mu_0} \left(\frac{\partial e_{1r}}{\partial z} - \frac{\partial e_{1z}}{\partial r} \right). \quad (\text{B.40})$$

Utilizando (B.27) e (B.38) para o cálculo das derivadas que aparecem em (B.40), obtém-se

$$\frac{\partial e_{1z}}{\partial r} = E_0 \frac{d}{L} \left\{ -k_0 \frac{J_1(k_0 r) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_1(k_0 r)}{J_0(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 b)} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)} \left[k_n \frac{I_1(k_n r) K_0(k_n r_c) + I_0(k_n r_c) K_1(k_n r)}{I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b)} \right] \cos\left[\frac{n\pi}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right] \right\}, \text{ e } (\text{B.41})$$

$$\frac{\partial e_{1r}}{\partial z} = E_0 \left(\frac{2d}{L}\right) \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{k_n} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)} \left[\frac{I_1(k_n r) K_0(k_n r_c) + I_0(k_n r_c) K_1(k_n r)}{I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b)} \right] \cos\left[\frac{n\pi}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right]. \quad (\text{B.42})$$

Somando-se estas derivadas chega-se a

$$\left(\frac{\partial e_{1r}}{\partial z} - \frac{\partial e_{1z}}{\partial r}\right) = E_0 \frac{d}{L} \left\{ k_0 \frac{J_1(k_0 r) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_1(k_0 r)}{J_0(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 b)} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)} \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - k_n^2 \right] \left[\frac{I_1(k_n r) K_0(k_n r_c) + I_0(k_n r_c) K_1(k_n r)}{I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b)} \right] \cos\left[\frac{n\pi}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right] \right\}. \quad (\text{B.43})$$

Utilizando (B.19) escrita como

$$k_0^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - k_n^2, \quad (\text{B.44})$$

chega-se, finalmente, na expressão do campo magnético azimutal

$$h_{\varphi}(r, z) = jE_0 \frac{d}{L} \left\{ \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{J_1(k_0 r) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_1(k_0 r)}{J_0(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 b)} + \right. \\ \left. + 2\alpha\epsilon_0 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \text{sen}\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)}{k_n \left(\frac{n\pi d}{2L}\right)} \left[\frac{I_1(k_n r) K_0(k_n r_c) + I_0(k_n r_c) K_1(k_n r)}{I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b)} \right] \cos\left[\frac{n\pi}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right] \right\}. \quad (\text{B.45})$$

Na FIG. B.4 ilustra-se o perfil do campo elétrico axial ao longo da abscissa do gap, onde $r = b$. Os parâmetros encontram-se na TAB. B.1 e utilizou-se a frequência (TAB. B.3) determinada pelo método que será mostrado na seqüência.

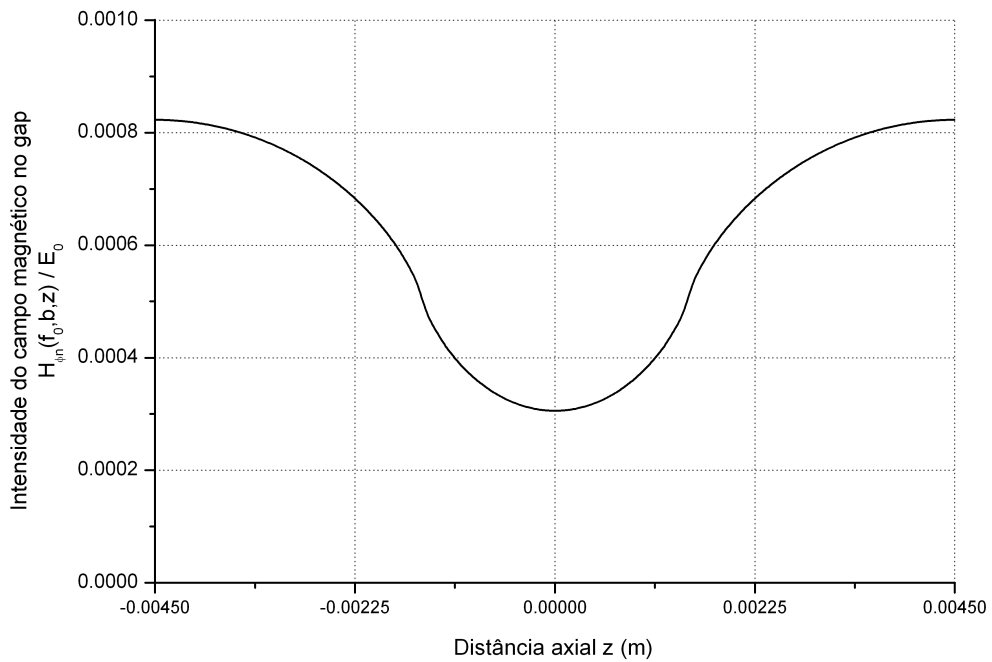


FIGURA B.4. – Distribuição do campo magnético azimutal na coordenada do gap ($r = b$).

O próximo passo é calcular esta frequência por meio da técnica de casamento de admitâncias.

B.2 Admitância Y_c da cavidade ressonante calculada a partir da cavidade

A admitância está relacionada com a potência do campo eletromagnético no interior da cavidade que, por sua vez, segundo o Teorema de Poynting, é calculada pelo fluxo do vetor obtido pelo produto vetorial $\vec{e} \times \vec{h}$ (vetor de Poynting). Partindo-se, portanto, do vetor de Poynting, é possível expressar a admitância por [14]

$$Y = \frac{1}{V^2} \int_A [\vec{e}^*(r, z) \times \vec{h}(r, z)] \cdot d\vec{A}, \quad (\text{B.46})$$

onde V é a voltagem no gap que, neste caso, vale $E_0 d$. Utilizando as expressões (B.27) e (B.45) e a propriedade de ortogonalidade das autofunções do problema, (B.13), os termos cruzados da dupla somatória se anulam, e a expressão (B.46) resulta em

$$Y_c(f) = -\frac{2\pi b}{E_0^2 d^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e_{1z}(b, z) h_\phi(b, z) dz = -j \frac{2\pi b}{L} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{J_1(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_1(k_0 b)}{J_0(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 b)} \\ - j \frac{4\pi b}{L} \omega \epsilon_0 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{k_n} \left(\frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)} \right)^2 \left[\frac{I_1(k_n b) K_0(k_n r_c) + I_0(k_n r_c) K_1(k_n b)}{I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b)} \right] \quad (\text{B.47})$$

A expressão (B.47) representa a admitância calculada a partir da cavidade. Para utilizar a técnica de casamento de admitâncias, falta calcular a admitância do gap a partir do tubo de deriva, o que será desenvolvido na próxima seção.

B.3 Admitância Y_d da cavidade ressonante calculada a partir do tubo de deriva

Quanto à admitância Y_d , admitindo-se o tubo de deriva com comprimento axial infinito, deve-se considerar integrais de Fourier ao invés do raciocínio discreto apresentado anteriormente para a admitância Y_c . Desta forma, a componente do campo elétrico $e_{2z}(r, z)$ pode ser escrita em termos de integrais de Fourier, resultando

$$e_{2z}(r, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_{2z}(r, \beta) e^{-j\beta z} d\beta, \quad (\text{B.48})$$

$$e_{2z}(r, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e_{2z}(r, z) e^{j\beta z} dz. \quad (\text{B.49})$$

Considerando que a solução para o campo elétrico $e_{2z}(r, z)$ é (B.48), ela deve satisfazer a equação de Helmholtz para o guia infinito. Portanto, substituindo (B.48) na equação de Helmholtz, obtém-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\beta z} \left[\frac{\partial^2 e_{2z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial e_{2z}}{\partial r} + (k_0^2 - \beta^2) e_{2z} \right] d\beta = 0, \quad (\text{B.50})$$

ou, ainda,

$$\frac{\partial^2 e_{2z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial e_{2z}}{\partial r} + (k_0^2 - \beta^2) e_{2z} = 0. \quad (\text{B.51})$$

Devido aos limites de integração de (B.50), deve-se considerar duas situações: $k_0^2 > \beta^2$ (I1) e $k_0^2 < \beta^2$ (I2), conforme pode ser visto na FIG. B.5.

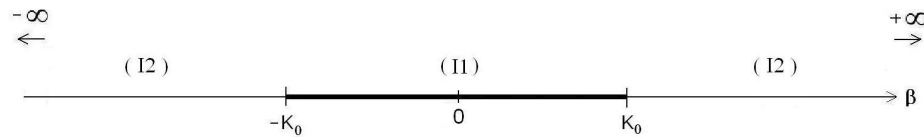


FIGURA B.5. Intervalos de integração considerados na solução do problema do campo elétrico axial no interior de um tubo de deriva com axial infinito.

Com isso, pode-se escrever (B.48) como

$$e_{2z}(r, z) = \int_{-\infty}^{-k_0} e_{22z}(r, \beta) e^{-j\beta z} d\beta + \int_{-k_0}^{+k_0} e_{21z}(r, \beta) e^{-j\beta z} d\beta + \int_{+k_0}^{+\infty} e_{22z}(r, \beta) e^{-j\beta z} d\beta. \quad (\text{B.52})$$

Se $k_0^2 > \beta^2$ e, definindo $p^2 = k_0^2 - \beta^2$, então $p = \sqrt{k_0^2 - \beta^2}$. Neste caso, pode-se escrever (B.51) como

$$\frac{\partial^2 e_{21z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial e_{21z}}{\partial r} + p^2 e_{21z} = 0, \quad (\text{B.53})$$

tratando-se de uma equação de Bessel ordinária que implica, tendo em vista que para $r = 0$ (eixo) deve-se ter valores finitos de campo, em soluções que podem escritas como

$$e_{21z}(r, \beta) = A_1(\beta) \frac{J_0(pr)}{J_0(pb)}, \quad (\text{B.54})$$

onde também considera-se que, para $r = b$, o campo deve ser independente da coordenada radial. Se $k_0^2 < \beta^2$ e, definindo $-h^2 = k_0^2 - \beta^2$, então $h = j\sqrt{k_0^2 - \beta^2}$. Neste caso, pode-se escrever (B.51) como

$$\frac{\partial^2 e_{22z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial e_{22z}}{\partial r} - h^2 e_{22z} = 0, \quad (\text{B.55})$$

tratando-se de uma equação de Bessel modificada que implica, tendo em vista novamente que para $r=0$ (eixo) deve-se ter valores finitos de campo, em soluções que podem escritas como

$$e_{22z}(r, \beta) = A_2(\beta) \frac{I_0(hr)}{I_0(hb)}. \quad (\text{B.56})$$

onde também considera-se que, para $r=b$, o campo deve ser independente da coordenada radial. Substituindo estes resultados em (B.52), tem-se

$$e_{2z}(r, z) = \int_{-\infty}^{-k_0} A_2(\beta) \frac{I_0(hr)}{I_0(hb)} e^{-j\beta z} d\beta + \int_{-k_0}^{+k_0} A_1(\beta) \frac{J_0(pr)}{J_0(pb)} e^{-j\beta z} d\beta + \int_{+k_0}^{+\infty} A_2(\beta) \frac{I_0(hr)}{I_0(hb)} e^{-j\beta z} d\beta. \quad (\text{B.57})$$

Considerando que o campo elétrico deve satisfazer as condições de contorno

$$e_{2z} = 0, \text{ em } r=b \text{ e } |z| \geq d/2, \text{ e} \quad (\text{B.58})$$

$$e_{2z} = E_0, \text{ em } r=b \text{ e } |z| < d/2, \quad (\text{B.59})$$

pode-se calcular os coeficientes A_1 e A_2 considerando o comportamento de $e_{2z}(r, z)$ para $r=b$. Nesta posição radial, o campo elétrico (B.57) pode ser escrito como

$$e_{2z}(b, z) = \int_{-\infty}^{-k_0} A_2(\beta) e^{-j\beta z} d\beta + \int_{-k_0}^{+k_0} A_1(\beta) e^{-j\beta z} d\beta + \int_{+k_0}^{+\infty} A_2(\beta) e^{-j\beta z} d\beta. \quad (\text{B.60})$$

Considerando a hipótese adicional $A_1(\beta) = A_2(\beta) = A(\beta)$, pode-se escrever (B.60) como

$$e_{2z}(b, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\beta) e^{-j\beta z} d\beta, \quad (\text{B.61})$$

o que possibilita, após multiplicar-se ambos os lados de (B.61) por $(e^{j\beta'z}/2\pi) dz$ e integrar-se no intervalo $\pm\infty$, a aplicação da propriedade de ortogonalidade da transformada de Fourier, dada por

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\beta-\beta')z} dz = \delta(\beta-\beta'), \quad (\text{B.62})$$

obtendo-se

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e_{2z}(b, z) e^{j\beta'z} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\beta) e^{j(\beta-\beta')z} d\beta dz = \int_{-\infty}^{\infty} A(\beta) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\beta(z-z')} dz \right] d\beta. \quad (\text{B.63})$$

Integrando-se o lado esquerdo considerando (B.58) e (B.59) e, além disso, utilizando (B.62) no lado direito da expressão acima, chega-se a

$$\frac{E_0 d}{2\pi} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta' d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta' d}{2}\right)} = \int_{-\infty}^{\infty} A(\beta) \delta(\beta-\beta') d\beta = A(\beta'). \quad (\text{B.64})$$

Observando que nesta equação β' é variável muda, chega-se ao valor de $A(\beta)$, dado por

$$A(\beta) = \frac{E_0 d}{2\pi} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)}. \quad (\text{B.65})$$

Com isso, escreve-se (B.54) como

$$e_{21z}(r, \beta) = \frac{E_0 d}{2\pi} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \frac{J_0(pr)}{J_0(pb)}, \quad (\text{B.66})$$

e (B.56) como

$$e_{22z}(r, \beta) = \frac{E_0 d}{2\pi} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \frac{I_0(hr)}{I_0(hb)}. \quad (\text{B.67})$$

Substituindo estes resultados em (B.48), obtém-se

$$e_{21z}(r, z) = \frac{E_0 d}{2\pi} \int_{-k_0}^{k_0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \frac{J_0(pr)}{J_0(pb)} e^{-j\beta z} d\beta, \quad (\text{B.68})$$

$$e_{22z}(r, z) = \frac{E_0 d}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{-k_0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \frac{I_0(hr)}{I_0(hb)} e^{-j\beta z} d\beta + \int_{k_0}^{+\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \frac{I_0(hr)}{I_0(hb)} e^{-j\beta z} d\beta \right\}. \quad (\text{B.69})$$

Portanto, o campo elétrico $e_{2z}(r, z)$, dado por (B.52), resulta

$$e_{2z}(r, z) = \frac{E_0 d}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{-k_0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \frac{I_0(hr)}{I_0(hb)} e^{-j\beta z} d\beta + \int_{-k_0}^{k_0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \frac{J_0(pr)}{J_0(pb)} e^{-j\beta z} d\beta + \int_{k_0}^{+\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \frac{I_0(hr)}{I_0(hb)} e^{-j\beta z} d\beta \right], \quad (\text{B.70})$$

ou, observando que o integrando tem paridade par, o que possibilita a utilização da propriedade da transformada de Fourier do co-seno, pode-se escrever

$$e_{2z}(r, z) = \frac{E_0 d}{\pi} \left[\int_0^{k_0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \frac{J_0(pr)}{J_0(pb)} \cos(\beta z) d\beta + \int_{k_0}^{+\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \frac{I_0(hr)}{I_0(hb)} \cos(\beta z) d\beta \right]. \quad (\text{B.71})$$

Na FIG. B.6 ilustra-se o perfil do campo elétrico axial ao longo da abscissa do gap, onde $r = b$. Os parâmetros encontram-se na TAB. B.1 e utilizou-se a frequência (TAB. B.3) determinada pela técnica do casamento de admitância.

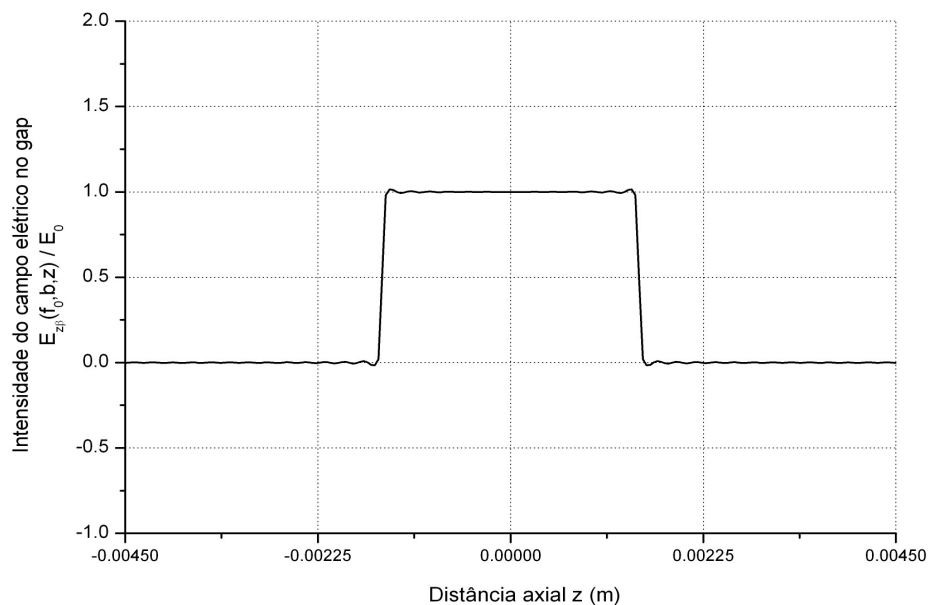


FIGURA B.6. – Distribuição do campo elétrico axial na coordenada do gap. O campo elétrico é calculado a partir do tubo de deriva e, neste caso, depende da constante de propagação axial β .

É interessante também comparar os dois perfis do campo elétrico axial ao longo da abscissa do gap, onde $r = b$, conforme as expressões (B.27) e (B.71). O resultado é mostrado na FIG. 7.

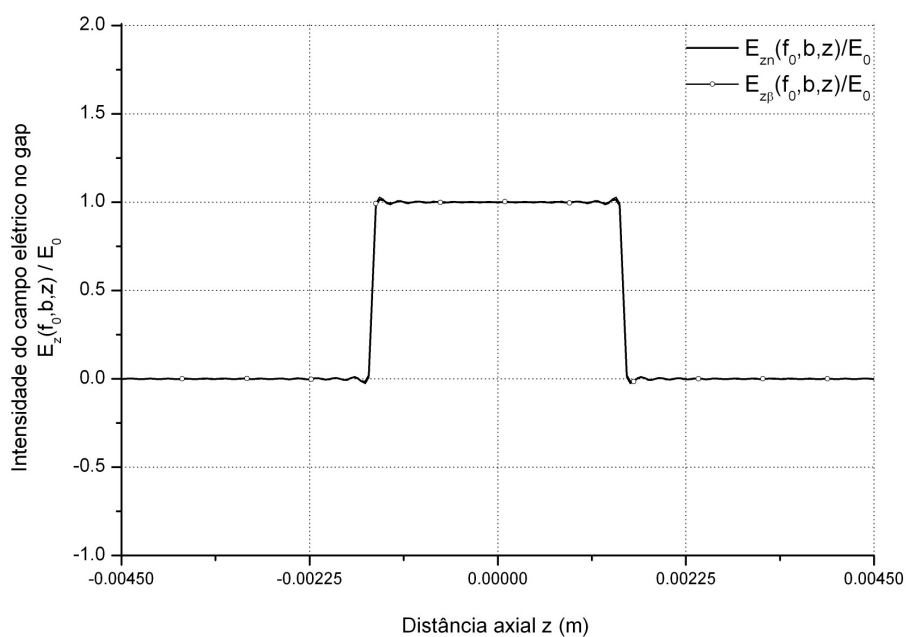


FIGURA B.7 – Comparação entre a intensidade do campo elétrico no gap calculado a partir da cavidade e calculado a partir do tubo de deriva.

Outro resultado de muita relevância é mostrar como varia o campo elétrico axial dentro do tubo de deriva em relação à coordenada radial, conforme pode ser visto na FIG. 8. Verifica-se que se trata de uma campo evanescente.

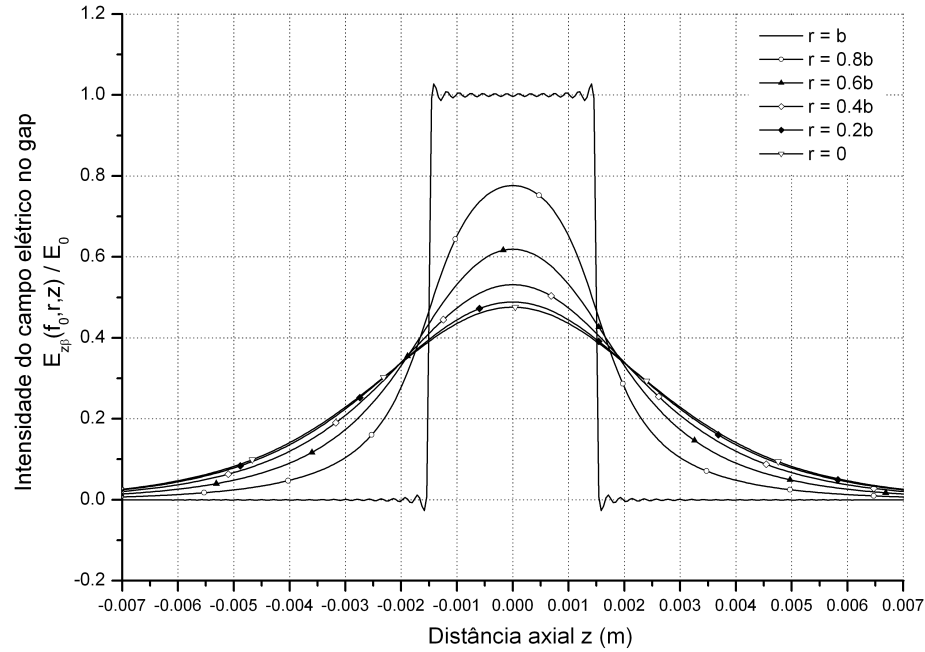


FIGURA B.8. – Distribuição do campo elétrico axial na coordenada do gap ($r = b$) e para alguns valores dentro do tubo de deriva. Observa-se que este campo é evanescente.

Para o cálculo da admitância, segundo a fórmula de Slater [14], deve-se conhecer, também, o campo magnético azimutal. Inicialmente, deseja-se expressar $h_{2\varphi}(r, \beta)$ a partir do campo elétrico axial $e_{2z}(r, \beta)$. Para isso, resolve-se o sistema de equações formado pela lei de Faraday, conforme (B.39), e a Lei de Ampère-Maxwell, ou seja,

$$\frac{\partial e_{2r}(r, z)}{\partial z} - \frac{\partial e_{2z}(r, z)}{\partial r} = -j\omega\mu_0 h_{2\varphi}(r, z), \text{ e} \quad (\text{B.72})$$

$$\frac{\partial h_{2\varphi}(r, z)}{\partial z} = -j\omega\epsilon_0 e_{2r}(r, z). \quad (\text{B.73})$$

Tomando a transformada de Fourier em ambas as equações, obtém-se

$$-j\beta e_{2r}(r, \beta) - \frac{\partial e_{2z}(r, \beta)}{\partial r} = -j\omega\mu_0 h_{2\varphi}(r, \beta), \text{ e} \quad (\text{B.74})$$

$$\beta h_{2\varphi}(r, \beta) = \omega\epsilon_0 e_{2r}(r, \beta). \quad (\text{B.75})$$

Resolvendo para $h_{2\varphi}(r, \beta)$, tem-se

$$h_{2\varphi}(r, \beta) = j \frac{\omega \varepsilon_0}{(\beta^2 - k_0^2)} \frac{\partial e_{2z}(r, \beta)}{\partial r}. \quad (\text{B.76})$$

Desenvolvendo a expressão de Slater, para a admitância, e representando o campo magnético [$h_{21\varphi}(r, \beta)$ e $h_{22\varphi}(r, \beta)$], em termos de sua transformada de Fourier, obtém-se

$$Y_d(f) = \frac{2\pi b}{E_0^2 d^2} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e_{2z}^*(b, z) h_{2\varphi}(b, z) dz = \frac{2\pi b}{E_0^2 d^2} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e_{2z}^*(b, z) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_{2\varphi}(b, \beta) e^{-j\beta z} d\beta \right] dz \quad (\text{B.77})$$

Substituindo (B.76) em (B.77), trocando a ordem de integração e multiplicando e dividindo o integrando por $e_{2z}(r, \beta)$, tem-se

$$\begin{aligned} Y_d(f) &= \frac{2\pi b}{E_0^2 d^2} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e_{2z}^*(b, z) \left[\int_{-\infty}^{\infty} j \frac{\omega \varepsilon_0}{(\beta^2 - k_0^2)} \frac{\partial e_{2z}(b, \beta)}{\partial r} e^{-j\beta z} d\beta \right] dz = \\ &= j \frac{\omega \varepsilon_0 b}{E_0^2 d^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\beta^2 - k_0^2)} \left[\frac{\partial e_{2z}(b, \beta)}{\partial r} \frac{1}{e_{2z}(b, \beta)} \right] d\beta 2\pi \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e_{2z}^*(b, z) e_{2z}(b, \beta) e^{-j\beta z} dz \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

ou, ainda,

$$Y_d(f) = j \frac{\omega \varepsilon_0 b}{E_0^2 d^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\beta^2 - k_0^2)} \left[\frac{\partial e_{2z}(b, \beta)}{\partial r} \frac{1}{e_{2z}(b, \beta)} \right] d\beta \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e_{2z}^*(b, z) e^{-j\beta z} dz \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e_{2z}(b, z) e^{j\beta z} dz. \quad (\text{B.79})$$

A integração ao longo do gap resulta em

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e_{2z}^*(b, z) e^{-j\beta z} dz = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e_{2z}(b, z) e^{j\beta z} dz = E_0 d \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)}. \quad (\text{B.80})$$

Substituindo (B.80) na expressão para a admitância do gap, obtém-se

$$Y_d(f) = j \omega \varepsilon_0 b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\beta^2 - k_0^2)} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \right]^2 \left[\frac{\partial e_{2z}(b, \beta)}{\partial r} \frac{1}{e_{2z}(b, \beta)} \right] d\beta. \quad (\text{B.81})$$

Utilizando (B.67) para a região onde $k_0^2 < \beta^2$ e (B.68) para a região onde $k_0^2 > \beta^2$, pode-se escrever (B.81) como

$$Y_d(f) = j\omega\epsilon_0 b \left\{ \int_{-\infty}^{-k_0} \frac{1}{h} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \right]^2 \left[\frac{I_1(hb)}{I_0(hb)} \right] d\beta + \int_{-k_0}^{+k_0} \frac{1}{p} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \right]^2 \left[\frac{J_1(pb)}{J_0(pb)} \right] d\beta + \int_{-k_0}^{+\infty} \frac{1}{h} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \right]^2 \left[\frac{I_1(hb)}{I_0(hb)} \right] d\beta \right\}, \quad (\text{B.82})$$

onde utilizou-se o fato que $p^2 = -h^2$. Observando que o integrando tem paridade par, o que possibilita a utilização da propriedade da transformada de Fourier do co-seno, pode-se escrever

$$Y_d(f) = j2\omega\epsilon_0 b \left\{ \int_0^{k_0} \frac{1}{p} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \right]^2 \left[\frac{J_1(pb)}{J_0(pb)} \right] d\beta + \int_{k_0}^{+\infty} \frac{1}{h} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \right]^2 \left[\frac{I_1(hb)}{I_0(hb)} \right] d\beta \right\}. \quad (\text{B.83})$$

Esta expressão foi desenvolvida por Thomas Antonsen. Com isso, calculou-se a admitância Y_d a partir do tubo de deriva, como se um observador estivesse olhando do tubo de deriva para a cavidade cilíndrica.

B.4 Frequências sustentadas por uma cavidade ressonante reentrante acoplada a um guia de ondas

As frequências sustentadas pela cavidade ressonante, que satisfazem o perfil de campo elétrico admitido pela hipótese (B.3), são calculadas por meio da técnica de casamento de admitâncias [12][32]. Após os cálculos das admitâncias mostrados nas seções anteriores, deve-se relacioná-las por meio da relação de dispersão para a cavidade e tubo, dada por

$$Y_c + Y_d = 0, \quad (\text{B.84})$$

ou, ainda, substituindo (B.47) e (B.83)

$$\begin{aligned} & -j \frac{2\pi b}{L} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left\{ \frac{J_1(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_1(k_0 b)}{J_0(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 b)} - 2k_0 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{k_n} \left(\frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)} \right)^2 \left[\frac{I_1(k_n b) K_0(k_n r_c) + I_0(k_n r_c) K_1(k_n b)}{I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b)} \right] \right\} + \\ & + j2\omega\epsilon_0 b \left\{ \int_0^{k_0} \frac{1}{p} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \right]^2 \left[\frac{J_1(pb)}{J_0(pb)} \right] d\beta + \int_{k_0}^{+\infty} \frac{1}{h} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d}{2}\right)} \right]^2 \left[\frac{I_1(hb)}{I_0(hb)} \right] d\beta \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.85})$$

A TAB. B.1 apresenta os parâmetros que, substituídos na equação de dispersão (B.85), possibilitam a construção do gráfico apresentado na FIG. B.9.

TABELA B.1: Parâmetros utilizados na solução da equação de dispersão (B.85) [12].

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
L	Comprimento da cavidade cilíndrica	9	mm
r_c	Raio da cavidade cilíndrica	19,5	mm
B	Raio do tubo de deriva	4	mm
d	Comprimento do gap de interação	3	mm
E_0	Campo elétrico normalizado no gap de interação	1	

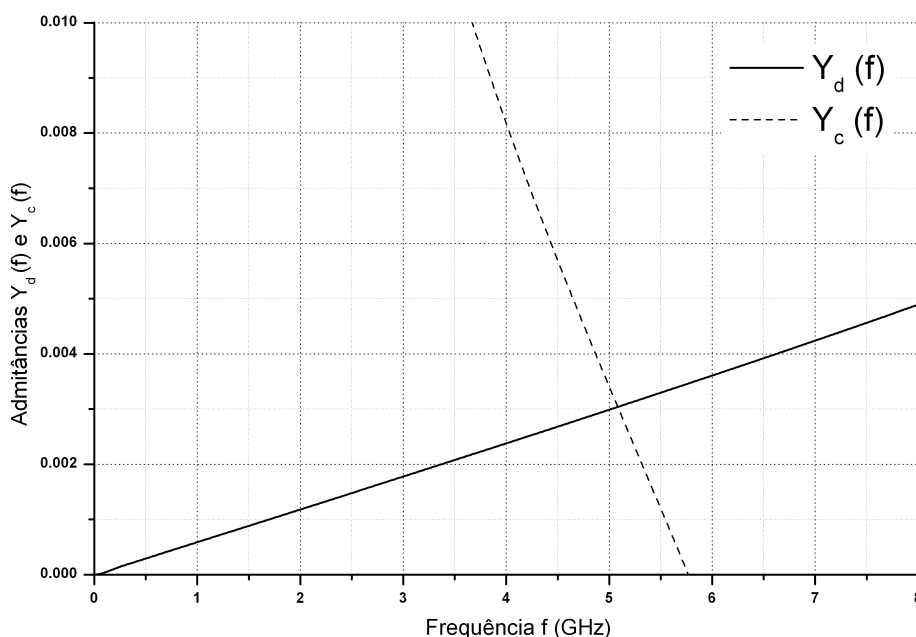


FIGURA B.9 – Solução da equação de dispersão (B.85), para a primeira frequência sustentada pela cavidade ressonante que satisfaz o perfil de campo elétrico considerado, por hipótese, na seção B.1.

A solução gráfica da equação de dispersão (B.85) possibilita calcular as frequências sustentadas pela cavidade ressonante que satisfazem o perfil de campo elétrico admitido por hipótese. A primeira frequência calculada foi 5,083 GHz. Com a determinação da frequência, os campos elétrico e magnético sustentados pela cavidade da FIG. B.1 podem ser calculados, a menos do valor de E_0 .

Com o objetivo de enriquecer o trabalho, apresenta-se na TAB. B.2 os parâmetros e as frequências calculadas pelo método descrito neste apêndice para 4 cavidades de um amplificador klystron de 150 MW [30][31].

TABELA B.2 – Parâmetros e as frequências calculadas por (B.85) para 4 cavidades de uma klystron de 150 MW [30][31].

Parâmetro	Unidade	Cavidades			
		1°	2°	3°	4°
L_n	cm	3,30	2,29	3,30	4,16
R_{cn}	cm	3,40	3,60	3,40	3,35
b_n	cm	1,88	1,88	1,88	1,88
d_n	cm	1,57	1,04	1,58	1,57
F	GHz	2,860	2,865	2,870	2,940
f_n (método)	GHz	2,803	2,858	2,810	2,469

B.5 Fator de qualidade de uma cavidade ressonante descarregada

O fator de qualidade Q [4][23] é um importante parâmetro que especifica a seletividade de frequência e o desempenho, de um modo geral, de um circuito ressonante. Uma definição bem generalizada de Q , aplicável a todos os sistemas ressonantes, é a que o descreve como sendo o produto da frequência angular ω pela razão entre a energia média no tempo armazenada no sistema W e a perda de energia nos sistema P_L , por segundo. Portanto, pode-se expressar Q por

$$Q = \frac{\omega W}{P_L}, \quad (\text{B.86})$$

As energias elétrica (W_e) e magnética (W_m) são armazenadas no volume da cavidade. Elas são calculadas, respectivamente, por

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{4} \int_V \vec{e} \cdot \vec{e}^* d^3r, \quad (\text{B.87})$$

$$W_m = \frac{\mu_0}{4} \int_V \vec{h} \cdot \vec{h}^* d^3r. \quad (\text{B.88})$$

Na ressonância, as energias médias armazenadas nos campos elétrico e magnético são iguais. A energia média armazenada é dada por

$$W = W_e + W_m = 2W_e = 2W_m. \quad (\text{B.89})$$

As paredes, por terem condutividade finita, dissipam energia, apresentando, assim, uma resistência efetiva. As perdas causadas pela condutividade finita das paredes da cavidade devem ser calculadas para se determinar o Q da cavidade mas, para pequenas perdas, as correntes superficiais são, essencialmente, aquelas associadas às soluções de campos do caso sem perdas. Portanto, a densidade de corrente superficial é dada por $\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{h}$, onde \hat{n} é o

vetor unitário normal à superfície e dirigido para dentro da cavidade, e a perda de potência nas paredes é dada por

$$P_L = \frac{R_s}{2} \int_{\text{paredes}} \vec{J}_s \cdot \vec{J}_s^* dA = \frac{R_s}{2} \int_{\text{paredes}} |\vec{h}_t|^2 dA, \quad (\text{B.90})$$

onde

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta_s}, \quad (\text{B.91})$$

é a parte resistiva da impedância superficial apresentada pela parede condutora, tendo uma condutividade σ e para a qual a profundidade de penetração é

$$\delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}. \quad (\text{B.92})$$

Além disso, o produto escalar envolvendo a densidade de corrente superficial, ao se considerar pequenas perdas, quando $n \cdot \vec{h} = 0$, resulta

$$\vec{J}_s \cdot \vec{J}_s^* = (\hat{n} \times \vec{h}) \cdot (\hat{n} \times \vec{h}^*) = \hat{n} \cdot \vec{h} \times (\hat{n} \times \vec{h}^*) = \hat{n} \cdot \left[(\vec{h} \cdot \vec{h}^*) \hat{n} - (\vec{h} \cdot \hat{n}) \vec{h}^* \right] = \vec{h} \cdot \vec{h}^*, \quad (\text{B.93})$$

e como h_φ é a única componente não nula do campo magnético e é sempre tangencial às paredes, pode-se escrever, para qualquer parede, que $\vec{J} \cdot \vec{J}_s^* = |\vec{h}_t|^2$, onde \vec{h}_t é o campo magnético tangencial na superfície das paredes da cavidade.

Para a cavidade ressonante da FIG. B.1, pode-se calcular a energia W pela expressão

$$W = 2W_m = \frac{\mu_0}{2} \int_V \vec{h} \cdot \vec{h}^* dV = \frac{\mu_0}{2} \int_b^r \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} |h_\varphi|^2 r dr d\varphi dz. \quad (\text{B.94})$$

Considerando-se a expressão (B.45) para o campo magnético azimutal da cavidade escrito na forma

$$h_{1\varphi}(r, z) = jA_0 f_0(r, r_c) + j \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} A_n g_n(r, r_c) \cos \left[\frac{n\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right], \quad (\text{B.95})$$

onde as funções radiais $f(r, r_c)$ e $g(r, r)$ são definidas segundo

$$f_0(r, r_c) = J_1(k_0 r) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_1(k_0 r), \quad (\text{B.96})$$

$$g_n(r, r) = I_1(k_n r) K_0(k_n r_c) + I_0(k_n r_c) K_1(k_n r), \quad (\text{B.97})$$

e os coeficientes A_0 e A_n segundo

$$A_0 = E_0 \frac{d}{L} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{J_0(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 b)}, \text{ e} \quad (\text{B.98})$$

$$A_n = E_0 \frac{2\omega\epsilon_0 d}{L} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)}{k_n \left[I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b) \right]} \frac{1}{\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)}. \quad (\text{B.99})$$

O módulo ao quadrado $|h_\varphi|^2$ se desenvolve em

$$\begin{aligned} |h_\varphi(r, z)|^2 = & A_0^2 f_0^2(r, r_c) + 2A_0 f_0(r, r_c) \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} A_n g_n(r, r_c) \cos\left[\frac{n\pi}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right] + \\ & + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} A_n A_m g_n(r, r_c) g_m(r, r_c) \cos\left[\frac{n\pi}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right] \cos\left[\frac{m\pi}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (\text{B.100})$$

Seja a integral de volume calculada no volume da cavidade (B.94)

$$\int_V |h_\varphi(r, z)|^2 d^3\vec{r} = \int_b^{r_c} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |h_\varphi(r, z)|^2 r dr d\varphi dz = 2\pi \int_b^{r_c} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |h_\varphi(r, z)|^2 r dr dz. \quad (\text{B.101})$$

Substituindo o módulo ao quadrado do campo magnético azimutal, (B.100), e observando que integral na variável z , devido à propriedade de ortogonalidade (B.13), obtém-se os seguintes resultados

$$\int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} A_0^2 f_0^2(r, r_c) dz = LA_0^2 f_0^2(r, r_c), \quad (\text{B.102})$$

$$\int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} A_n g_n(r, r_c) \cos\left[\frac{n\pi}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right] dz = 0, \text{ e} \quad (\text{B.103})$$

$$\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} A_n A_m g_n(r, r_c) g_m(r, r_c) \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos\left[\frac{n\pi}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right] \cos\left[\frac{m\pi}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right] dz = \frac{L}{2} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} A_n^2 g_n^2(r, r_c). \quad (\text{B.104})$$

Substituindo-se os resultados acima na integral radial de (B.101) obtém-se, adicionalmente,

$$\int_V |h_\varphi(r, z)|^2 d^3\vec{r} = 2\pi LA_0^2 \int_b^{r_c} f_0^2(r, r_c) r dr + \pi L \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} A_n^2 \int_b^{r_c} g_n^2(r, r_c) r dr, \quad (\text{B.105})$$

onde

$$\int_b^{r_c} f_0^2(r, r_c) r dr = N_0^2(k_0 r_c) \int_b^{r_c} J_1^2(k_0 r) r dr - 2J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 r_c) \int_b^{r_c} J_1(k_0 r) N_1(k_0 r) r dr + J_0^2(k_0 r_c) \int_b^{r_c} N_1^2(k_0 r) r dr, \quad \text{e} \quad (\text{B.106})$$

$$\int_b^{r_c} g_n^2(r, r_c) r dr = K_0^2(k_n r_c) \int_b^{r_c} I_1^2(k_n r) r dr + 2I_0(k_n r_c) K_0(k_n r_c) \int_b^{r_c} I_1(k_n r) K_1(k_n r) r dr + I_0^2(k_n r_c) \int_b^{r_c} K_1^2(k_n r) r dr. \quad (\text{B.107})$$

Portanto, a energia armazenada no volume da cavidade, na frequência de ressonância, é expressa segundo

$$W = 2W_m = \frac{\mu_0}{2} \int_V |h_{1\varphi}(r, z)|^2 d^3\vec{r} = \frac{\pi L \mu_0}{2} \left[2A_0^2 \int_b^{r_c} f_0^2(r, r_c) r dr + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} A_n^2 \int_b^{r_c} g_n^2(r, r_c) r dr \right]. \quad (\text{B.108})$$

A perda P_L , nas paredes da cavidade, pode ser calculada pela expressão, (B.90), aqui reproduzida,

$$P_L = \frac{R_m}{2} \int_S |h_{1\varphi}(r, z)|^2 ds. \quad (\text{B.109})$$

Sejam as integrais de superfície calculadas nas paredes da cavidade representadas por

$$\int_S |h_{1\varphi}(r, z)|^2 ds = I_1 + I_2 + I_3, \quad (\text{B.110})$$

onde

$$I_1 = 2\pi r_c \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |h_{1\varphi}(r_c, z)|^2 dz. \quad (\text{B.111})$$

$$I_2 = 4\pi \int_b^{r_c} |h_{1\varphi}(r_c, z = L/2)|^2 r dr, \text{ e} \quad (\text{B.112})$$

$$I_3 = 4\pi r_c \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |h_{1\varphi}(b, z)|^2 dz. \quad (\text{B.113})$$

A integral I_1 é desenvolvida tendo em vista a propriedade de ortogonalidade das funções axiais, resultando

$$I_1 = 2\pi r_c \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |h_{1\varphi}(r_c, z)|^2 dz = 2\pi r_c \left[A_0^2 f_0^2(r_c, r_c) L + \frac{L}{2} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} A_n^2 g_n^2(r_c, r_c) \right]. \quad (\text{B.114})$$

Desenvolvendo a integral I_2 , pode-se escrever

$$I_2 = 4\pi \int_b^{r_c} |h_{1\varphi}(r, z = L/2)|^2 r dr = 4\pi [I_{21} + I_{22} + I_{23}], \quad (\text{B.115})$$

onde

$$I_{21} = A_0^2 \int_b^{r_c} f_0^2(r, r_c) r dr. \quad (\text{B.116})$$

$$I_{22} = 2A_0 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} A_n \int_b^{r_c} f_0(r, r_c) g_n(r, r_c) r dr, \text{ e} \quad (\text{B.117})$$

$$I_{23} = \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} A_n A_m \int_b^{r_c} g_n(r, r_c) g_m(r, r_c) r dr. \quad (\text{B.118})$$

Ao desenvolver a integral I_3 , encontra-se

$$I_3 = 4\pi_c \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{L}{2}} |h_{1\phi}(b, z)|^2 dz = 4\pi_c \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} A_n A_m g_n(b, r_c) g_m(b, r_c) \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos\left[\frac{n\pi}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right] \cos\left[\frac{m\pi}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right] dz. \quad (\text{B.119})$$

Neste caso deve-se considerar duas situações. Se $n \neq m$, tem-se

$$\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos\left[\frac{n\pi}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right] \cos\left[\frac{m\pi}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right] dz = \frac{L}{2\pi} \left\{ \frac{\text{sen}\left[(n+m)(1-d/L)\pi/2\right]}{(n+m)} + \frac{\text{sen}\left[(n-m)(1-d/L)\pi/2\right]}{(n-m)} \right\}. \quad (\text{B.120})$$

Caso $n = m$, obtém-se

$$\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos^2\left[\frac{n\pi}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right] dz = \frac{L}{2\pi} \left\{ \frac{\text{sen}\left[n(1-d/L)\pi\right]}{2n} + (1-d/L)\frac{\pi}{2} \right\}. \quad (\text{B.121})$$

Com isso, ficam determinadas as expressões que possibilitam o cálculo da perda P_L , nas paredes da cavidade. Utilizando-a, juntamente com a expressão da energia W (B.108), obtém-se, finalmente, o fator de qualidade Q conforme (B.86).

B.6 Razão (R/Q) equivalente de uma cavidade ressonante descarregada

Uma cavidade ressonante pode ser representada por um circuito ressonante equivalente de parâmetros concentrados, como o mostrado na FIG. B.10, onde os parâmetros RLC estão em paralelo. Os cálculos destes parâmetros possibilitam o cálculo da impedância de entrada do circuito. Dentre eles, um parâmetro de grande relevância nos estudos de cavidades ressonantes é a razão entre a resistência efetiva R da cavidade, dada por [4][23]

$$R = \frac{\left[\int_{\text{gap}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \right]^2}{2P_L}, \quad (\text{B.122})$$

e o fator de qualidade Q , dado por (B.86). Combinando as duas equações, tem-se

$$\frac{R}{Q} = \frac{\left[\int_{\text{gap}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \right]^2}{2\omega W}. \quad (\text{B.123})$$

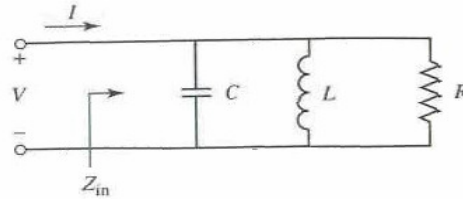


FIGURA B.10 – Circuito ressonante de parâmetros concentrados.

A partir do conhecimento dos três parâmetros de cavidade: a frequência de ressonância ω_0 ; o fator de qualidade Q ; e a razão entre a resistência “shunt” e fator de qualidade R/Q , pode-se escrever uma expressão para a impedância do gap $Z_m(\omega)$ utilizando o modelo de circuito concentrado da FIG. B.10, de forma que o comportamento elétrico da cavidade fique completamente determinado. A impedância $Z_m(\omega)$ pode ser expressa como

$$Z_m(\omega) = \frac{(R/Q)}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}. \quad (\text{B.124})$$

Como exemplo, considerando a cavidade ressonante da FIG. B.1 e os parâmetros da TAB. B.1, é possível calcular os parâmetros apresentados na TAB. B.3.

TABELA B.3: Parâmetros calculados para a cavidade ressonante da FIG. B.1 de acordo com a TAB. B.1. considerando que a cavidade foi construída de cobre OFHC.

Parâmetro	Descrição	Equação	Valor	Unidade
f	Frequência	(B.85)	5,083	GHz
δ_s	Profundidade de penetração	(B.92)	$9,26 \times 10^{-7}$	m
R_s	Impedância superficial da parede condutora	(B.91)	$1,9 \times 10^{-2}$	Ω
Q	Fator de qualidade descarregado	(B.86)	6838	
R	resistência “shunt”	(B.122)	535	k Ω
R/Q	Razão entre a resistência “shunt” e o fator de qualidade	(B.123)	78,18	Ω

Outro resultado de relevância utiliza os dados da TAB. B.2 para calcular os fatores de qualidade das 4 cavidades e os compara com os resultados obtidos pelo software CST [33], conforme mostrado na TAB. B.3.

TABELA B.4 – Comparação dos valores de frequência e fatores de qualidade Q_0 calculados pelo método apresentado neste apêndice e o programa CST [33].

Cavidade n°	CST			Neste trabalho		
	f_n (GHz)	Q_0	R/Q (Ω)	f_n (GHz)	Q_0	R/Q (Ω)
1	2,825	11369	63	2,803	11170	67,56
2	2,778	10386	47,5	2,858	10120	51,66

3	2,831	11360	63,1	2,810	11170	67,70
4	2,356	11992	76	2,469	11380	72,60

B.7 Campos sustentados por uma cavidade cilíndrica reentrante na condição de campo elétrico do gap variando segundo uma função hiperbólica

A condição de campo elétrico uniforme e igual a E_0 no gap de interação, conforme (B.3), é a hipótese mais simples a se fazer no tratamento deste problema de campo sustentado por uma cavidade cilíndrica reentrante. Uma hipótese mais precisa para o problema ilustrado na FIG. B.1 é considerar este campo elétrico variando segundo uma função hiperbólica. Com isso, a hipótese (B.3) deve ser substituída por

$$e_{1z} = E_0 \cosh(qz), \text{ em } r = b \text{ e } |z| < d/2, \quad (\text{B.125})$$

onde q é uma constante.

O desenvolvimento para o cálculo dos campos é análogo ao apresentado na seção B.1, atentando-se para a mudança na condição de contorno (B.125). Esta alteração influencia o cálculo do coeficiente A_n da expressão do campo elétrico dado por (B.12). Neste caso, este coeficiente é obtido considerando a condição de contorno (B.125) e aplicando as propriedades de ortogonalidade da série de Fourier trigonométrica (B.13) em (B.12). Assim procedendo, obtém-se

$$A_n = E_0 \left(\frac{4}{L} \right) \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right) \cosh\left(\frac{qd}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi d}{2L}\right) + q \operatorname{senh}\left(\frac{qd}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi d}{2L}\right) \right]}{\left[I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b) \right] \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + q^2 \right]}, \quad (\text{B.126})$$

observando que se utilizou o resultado

$$\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \cosh(qz) \cos\left[\frac{n\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right] dz = 2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \frac{\left[\left(\frac{n\pi}{L} \right) \cosh\left(\frac{qd}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi d}{2L}\right) + q \operatorname{senh}\left(\frac{qd}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi d}{2L}\right) \right]}{\left[\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + q^2 \right]}, \quad (\text{B.127})$$

Com isso, a solução passa a envolver somente valores pares de n . Desta forma, o campo elétrico axial, para $\lambda > 0$, se escreve

$$e_z(r,z) = E_0 \left(\frac{4}{L}\right) \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right) \cosh\left(\frac{qd}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi d}{2L}\right) + q \operatorname{senh}\left(\frac{qd}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi d}{2L}\right) \right]}{\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + q^2 \right]} \left[\frac{I_0(k_n r) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n r)}{I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b)} \right] \cos\left[\frac{n\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right], \quad (\text{B.128})$$

com k_n dado por (B.19).

Assim como na seção B.1, em adição às soluções $\lambda > 0$ deve-se, também, desenvolver uma solução para $\lambda = 0$, em vista da condição de contorno que especifica o campo elétrico sobre o gap (B.125). Seguindo-se um raciocínio análogo ao feito na seção B.1 chega-se, no lugar de $A_0 C_0$ dado por (B.25), à seguinte expressão

$$A_0 C_0 = \frac{E_0 d \operatorname{senh}(qd/2)}{L (qd/2)} \frac{1}{J_0(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 b)}. \quad (\text{B.129})$$

Portanto, a solução de $e_{z0}(r, z)$, anteriormente dado por (B.26), resulta

$$e_{z0} = \frac{E_0 d \operatorname{senh}(qd/2)}{L (qd/2)} \left[\frac{J_0(k_0 r) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 r)}{J_0(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 b)} \right]. \quad (\text{B.130})$$

Com isso, fica determinado o campo elétrico axial, sustentado pela cavidade cilíndrica reentrante, mostrada na FIG. B.1, satisfazendo as condições de contorno (B.1), (B.2), (B.4) e (B.125), em função da frequência angular $\omega = 2\pi f$. Ele é dado pela combinação linear de (B.128) e (B.130), ou seja,

$$e_z(r,z) = E_0 \frac{d}{L} \left\{ \frac{\operatorname{senh}(qd/2)}{(qd/2)} \frac{J_0(k_0 r) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 r)}{J_0(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 b)} + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right) \cosh\left(\frac{qd}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi d}{2L}\right) + q \operatorname{senh}\left(\frac{qd}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi d}{2L}\right) \right]}{\frac{d}{2} \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + q^2 \right]} \left[\frac{I_0(k_n r) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n r)}{I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b)} \right] \cos\left[\frac{n\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right] \right\}, \quad (\text{B.131})$$

Na FIG. B.11 ilustra-se o perfil do campo elétrico axial ao longo da abscissa do gap, onde $r = b$. Os parâmetros encontram-se na TAB. B.1 e utilizou-se a frequência (TAB. B.6) determinada pela técnica do casamento de admitância mostrada.

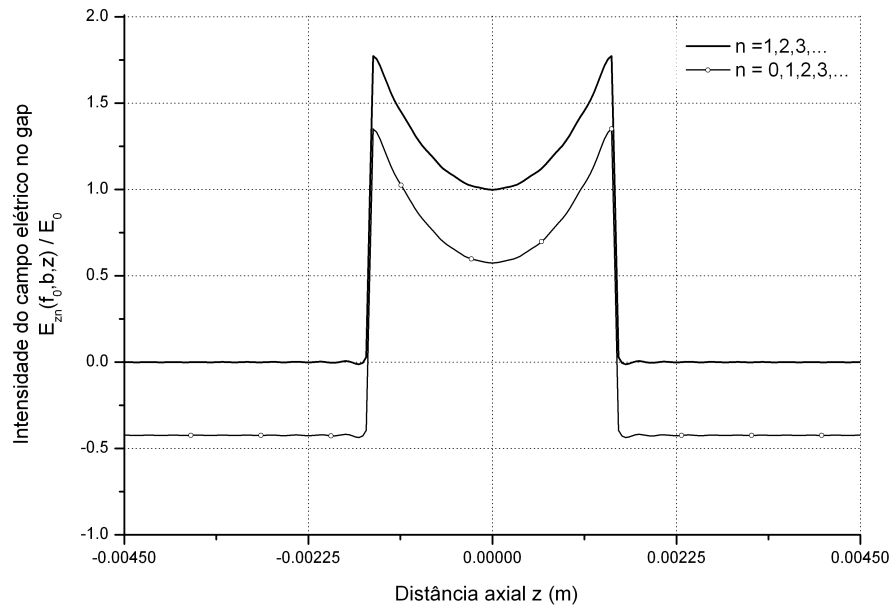


FIGURA B.11 – Distribuição do campo elétrico axial na coordenada do gap que, por hipótese, tem um perfil hiperbólico. O campo elétrico é calculado a partir da cavidade e, neste caso, depende do autovalor $n\pi/L$. Observa-se a contribuição do termo $n = 0$.

A partir campo elétrico axial é possível calcular, novamente, a componente radial do campo elétrico no interior da cavidade cilíndrica reentrante segundo a Lei de Gauss para o campo elétrico, em coordenadas cilíndricas e sob a hipótese de simetria azimutal (B.29). Após os cálculos, realizados na mesma seqüência desenvolvida na seção B.1 mas utilizando (B.131), o campo elétrico radial resulta

$$e_r(r, z) = E_0 \left(\frac{2d}{L} \right) \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n\pi}{L} \right)}{k_n} \frac{\left[\left(\frac{n\pi}{L} \right) \cosh\left(\frac{qd}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi d}{2L}\right) + q \operatorname{sen}h\left(\frac{qd}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi d}{2L}\right) \right]}{\frac{d}{2} \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + q^2 \right]} \left[\frac{I_1(k_n r) K_0(k_n r_c) + I_0(k_n r_c) K_1(k_n r)}{I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b)} \right] \operatorname{sen} \left[\frac{n\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right]. \quad (\text{B.132})$$

Na FIG. B.12 ilustra-se o perfil do campo elétrico axial ao longo da abscissa do gap, onde $r = b$. Os parâmetros encontram-se na TAB. B.1 e utilizou-se a frequência (TAB. B.6) determinada pela técnica do casamento de admitância mostrada neste apêndice.

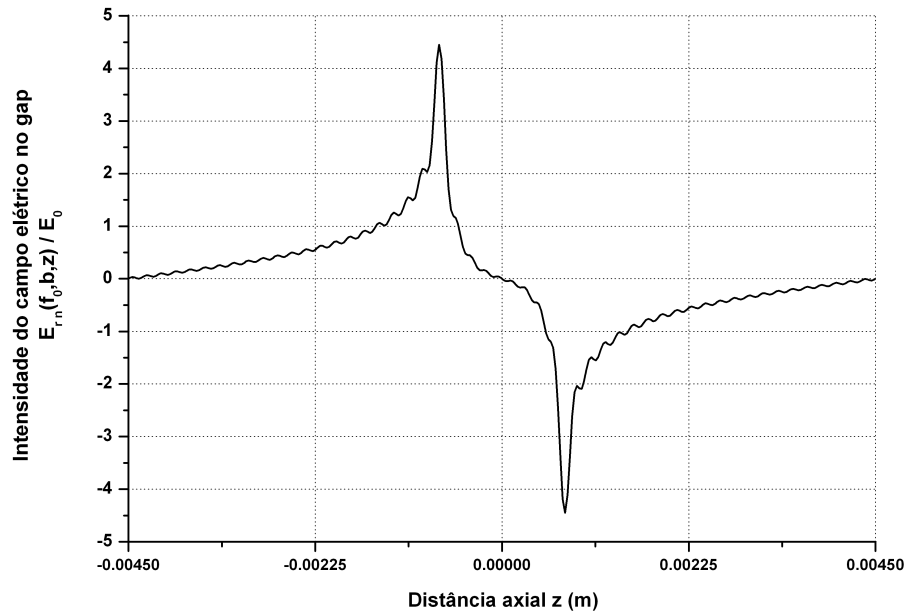


FIGURA B.12. – Distribuição do campo elétrico radial na coordenada do gap ($r = b$).

O campo magnético azimutal $h_{1\phi n}(r, z)$ também é calculado segundo o desenvolvimento mostrado na seção B.1, considerando-se a Lei de Faraday conforme (B.40) e os campos elétricos dados por (B.131) e (B.132). Após os cálculos, obtém-se

$$\begin{aligned}
 h_{1\phi}(r, z) = & jE_0 \frac{d}{L} \left\{ \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\sinh(qd/2)}{(qd/2)} \frac{J_1(k_0 r) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_1(k_0 r)}{J_0(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 b)} + \right. \\
 & \left. + 2\omega \epsilon_0 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{k_n} \frac{\left[\left(\frac{n\pi}{L} \right) \cosh\left(\frac{qd}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi d}{2L}\right) + q \operatorname{senh}\left(\frac{qd}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi d}{2L}\right) \right]}{\frac{d}{2} \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + q^2 \right]} \frac{\left[I_1(k_n r) K_0(k_n r_c) + I_0(k_n r_c) K_1(k_n r) \right]}{\left[I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b) \right]} \cos\left[\frac{n\pi}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{B.133}$$

Na FIG. B.13 ilustra-se o perfil do campo magnético azimutal ao longo da abscissa do gap, onde $r = b$. Os parâmetros encontram-se na TAB. B.1 e utilizou-se a frequência (TAB.B.6) determinada pela técnica do casamento de admitância mostrada.

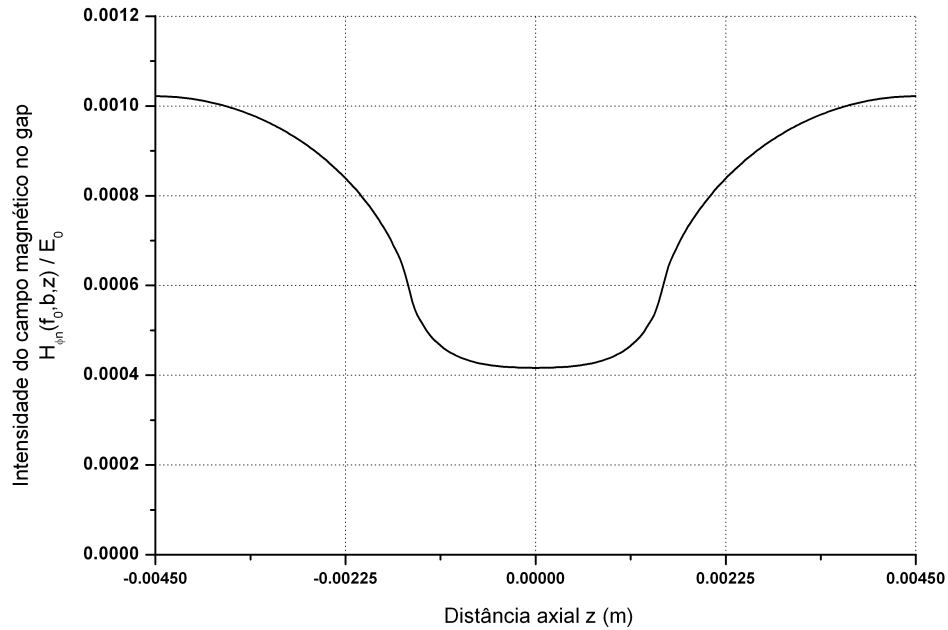


FIGURA B.13 – Distribuição do campo magnético azimutal na coordenada do gap ($r = b$).

O próximo passo é calcular a frequência por meio da técnica de casamento de admitâncias.

B.8 Admitância Y_c da cavidade ressonante calculada a partir da cavidade na condição de campo elétrico do gap com perfil hiperbólico

A admitância $Y_c(f)$ é calculada a partir da expressão geral dada por (B. 46), onde a voltagem no gap V , neste caso, vale

$$V = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e_{1z}(b, z) dz = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} E_0 \cosh(qz) dz = \frac{2E_0 \sinh(qd/2)}{q} = E_0 d \frac{\sinh(qd/2)}{(qd/2)}. \quad (\text{B.134})$$

Utilizando as expressões (B.131) e (B.1331) e a propriedade de ortogonalidade das autofunções do problema, (B.13), os termos cruzados da dupla somatória novamente se anulam, e a expressão (B.46) resulta em

$$\begin{aligned}
Y_c(f) = & \frac{2\pi b}{\left[\frac{E_0 d \sinh(qd/2)}{(qd/2)} \right]^2} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e_{1z}^*(b,z) h_\varphi(b,z) dz = -j \frac{2\pi b}{L} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{J_1(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_1(k_0 b)}{J_0(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 b)} \\
& -j \frac{4\pi b}{L} \frac{\omega \epsilon_0}{\left[\frac{\sinh(qd/2)}{(qd/2)} \right]^2} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k_n} \left[\frac{\left(\frac{n\pi}{L} \right) \cosh\left(\frac{qd}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi d}{2L}\right) + q \operatorname{senh}\left(\frac{qd}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)}{\frac{d}{2} \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + q^2 \right]} \right]^2 \left[\frac{I_1(k_n b) K_0(k_n r_c) + I_0(k_n r_c) K_1(k_n b)}{I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b)} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{B.135}$$

A expressão (B.135) representa a admitância calculada a partir da cavidade, para uma intensidade do campo elétrico no gap conforme a FIG. B.11. Para utilizar a técnica de casamento de admitâncias, falta calcular a admitância do gap a partir do tubo de deriva, o que será desenvolvido na próxima seção, seguindo os mesmos passos da seção B.3.

B.9 Admitância Y_d da cavidade ressonante calculada a partir do tubo de deriva na condição de campo elétrico do gap com perfil hiperbólico

Quanto à admitância Y_d , o desenvolvimento para o cálculo dos campos é análogo ao apresentado na seção B.3, atentando-se para a mudança na condição de contorno (B.125). Nesta seção, esta mudança influencia o cálculo do coeficiente $A(\beta)$ da solução (B.61), uma vez que o campo elétrico $e_{2z}(r, \beta)$ deve satisfazer, agora, as condições de contorno

$$e_{2z} = 0, \text{ em } r = b \text{ e } |z| \geq d/2, \text{ e} \tag{B.136}$$

$$e_{2z} = E_0 \cosh(qz), \text{ em } r = b \text{ e } |z| < d/2. \tag{B.137}$$

A condição para $r=0$ (eixo) permanece a mesma (valor finito de campo), bem como a condição adicional $A_1(\beta) = A_2(\beta) = A(\beta)$. Portanto, utilizando o mesmo desenvolvimento apresentado na seção B.3 chega-se ao valor de A , dado por

$$A = \frac{E_0 d}{2\pi} \left[\frac{\beta \cosh\left(q \frac{d}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\beta \frac{d}{2}\right) + q \operatorname{senh}\left(q \frac{d}{2}\right) \cos\left(\beta \frac{d}{2}\right)}{\frac{d}{2} (\beta^2 + q^2)} \right]. \tag{B.138}$$

Com isso, escreve-se (B.54) como

$$e_{21z}(r, \beta) = \frac{E_0 d}{2\pi} \left[\frac{\beta \cosh\left(q \frac{d}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\beta \frac{d}{2}\right) + q \operatorname{senh}\left(q \frac{d}{2}\right) \cos\left(\beta \frac{d}{2}\right)}{\frac{d}{2} (\beta^2 + q^2)} \right] \frac{J_0(pr)}{J_0(pb)}, \tag{B.139}$$

e (B.56) como

$$e_{22z}(r, \beta) = \frac{E_0 d}{2\pi} \left[\frac{\beta \cosh\left(q \frac{d}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\beta \frac{d}{2}\right) + q \operatorname{senh}\left(q \frac{d}{2}\right) \cos\left(\beta \frac{d}{2}\right)}{\frac{d}{2}(\beta^2 + q^2)} \right] \frac{I_0(hr)}{I_0(hb)}. \quad (\text{B.140})$$

Substituindo estes resultados em (B.52), observando que o integrando tem paridade par, o que possibilita novamente a utilização da propriedade da transformada de Fourier do co-seno, pode-se escrever

$$e_{2z}(r, z) = \frac{E_0 d}{\pi} \left\{ \int_0^{k_0} \left[\frac{\beta \cosh\left(q \frac{d}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\beta \frac{d}{2}\right) + q \operatorname{senh}\left(q \frac{d}{2}\right) \cos\left(\beta \frac{d}{2}\right)}{\frac{d}{2}(\beta^2 + q^2)} \right] \frac{J_0(pr)}{J_0(pb)} \cos(\beta z) d\beta + \right. \\ \left. + \int_{k_0}^{+\infty} \left[\frac{\beta \cosh\left(q \frac{d}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\beta \frac{d}{2}\right) + q \operatorname{senh}\left(q \frac{d}{2}\right) \cos\left(\beta \frac{d}{2}\right)}{\frac{d}{2}(\beta^2 + q^2)} \right] \frac{I_0(hr)}{I_0(hb)} \cos(\beta z) d\beta \right\}. \quad (\text{B.141})$$

Na FIG. B.14 ilustra-se o perfil do campo elétrico axial ao longo da abscissa do gap, onde $r=b$ e $p=820$. Os parâmetros encontram-se na TAB. B.1 e utilizou-se a frequência (TAB.B.6) determinada pela técnica do casamento de admitância mostrada neste apêndice.

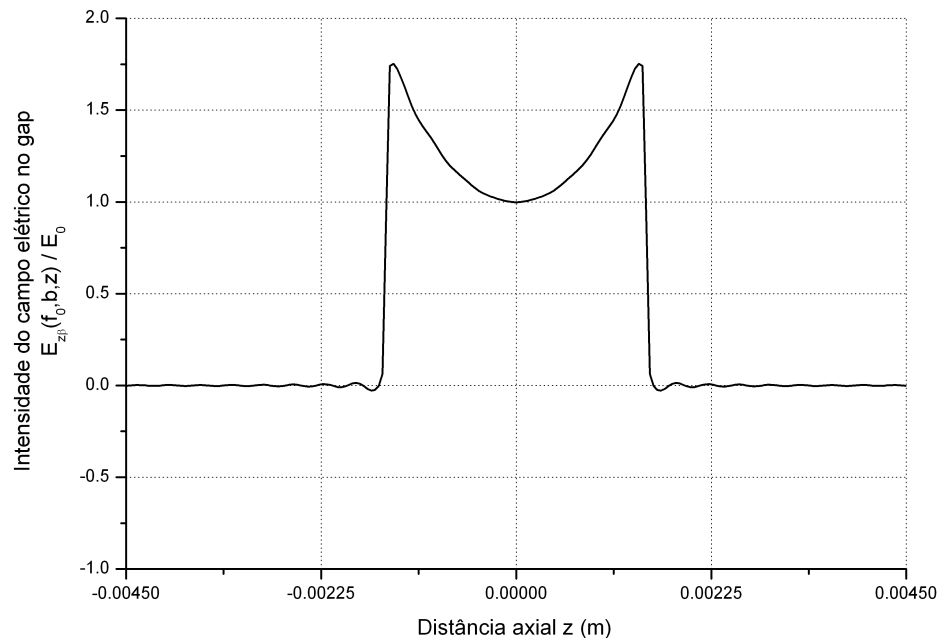


FIGURA B.14 – Distribuição do campo elétrico axial na coordenada do gap. O campo elétrico é calculado a partir do tubo de deriva e, neste caso, depende da constante de propagação axial β .

É interessante também comparar os dois perfis do campo elétrico axial ao longo da abscissa do gap, onde $r = b$, conforme as expressões (B.131) e (B.141). O resultado é mostrado na FIG. B.15.

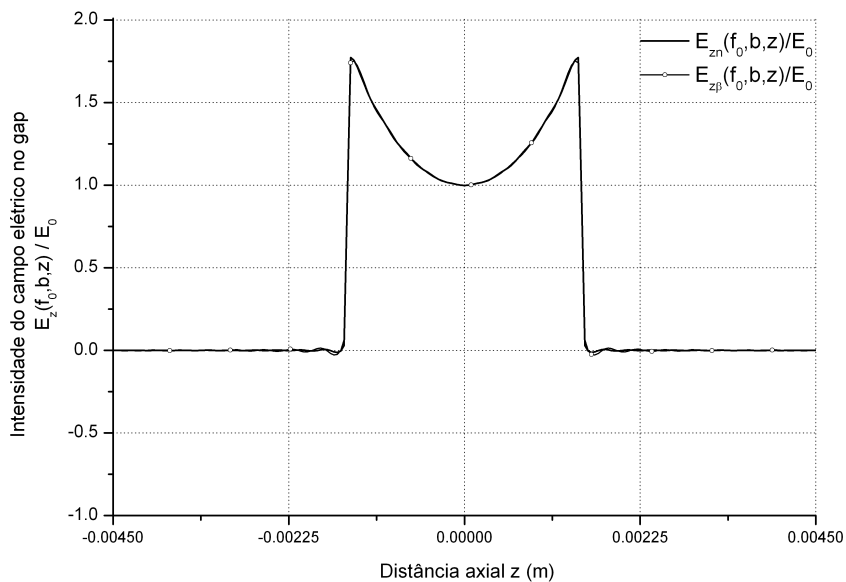


FIGURA B.15 – Comparação entre a intensidade do campo elétrico no gap calculado a partir da cavidade, onde verificou-se a dependência do autovalor $n\pi/L$, e calculado a partir do tubo de deriva, dependente da constante de propagação axial β .

Outro resultado de muita relevância é mostrar como varia o campo elétrico axial dentro do tubo de deriva em relação à coordenada radial, conforme pode ser visto na FIG. B.16.

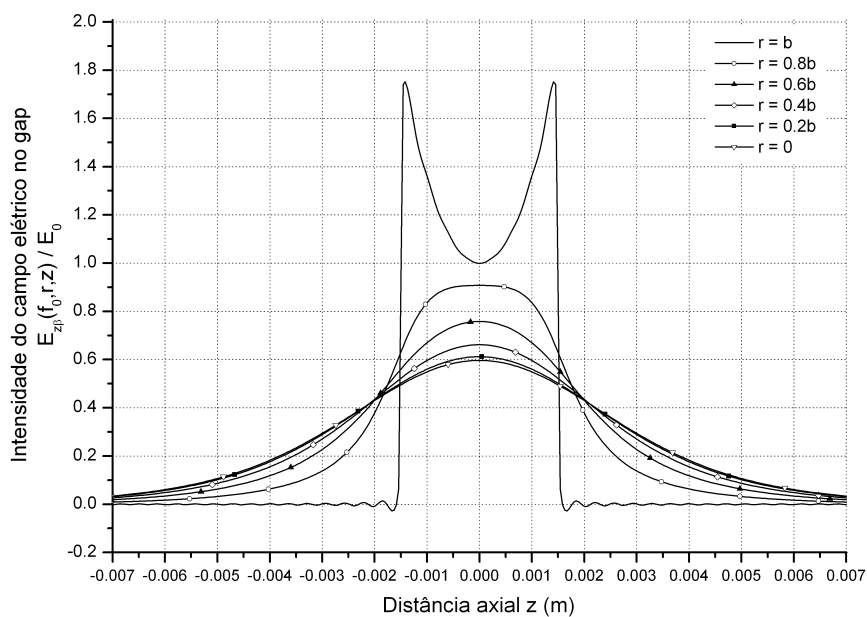


FIGURA B.16. – Distribuição do campo elétrico axial na coordenada do gap ($r = b$) e para alguns valores dentro do tubo de deriva. Observa-se que este campo é evanescente.

O desenvolvimento para se obter a expressão (B.80) é o mesmo apresentado na seção B.3 mas, neste caso, considera-se a voltagem V , no gap, conforme (B.134). Com isso, obtém-se

$$Y_d(f) = j \frac{\omega \epsilon_0 b}{\left[E_0 d \frac{\sinh(qd/2)}{(qd/2)} \right]^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial e_{2z}(b, \beta)}{\partial r} \frac{1}{e_{2z}(b, \beta)} \right] d\beta \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e_{2z}^*(b, z) e^{-j\beta z} dz \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e_{2z}(b, z) e^{j\beta z} dz. \quad (\text{B.142})$$

O cálculo das integrais ao longo do gap resulta

$$\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e_{2z}^*(b, z) e^{-j\beta z} dz = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e_{2z}(b, z) e^{j\beta z} dz = E_0 d \left[\frac{\beta \cosh\left(q \frac{d}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\beta \frac{d}{2}\right) + q \operatorname{senh}\left(q \frac{d}{2}\right) \cos\left(\beta \frac{d}{2}\right)}{\frac{d}{2}(\beta^2 + q^2)} \right]. \quad (\text{B.143})$$

Substituindo (B.143) na expressão para a admitância $Y_d(f)$ e utilizando (B.139) para a região onde $k_0^2 < \beta^2$ e (B.140) para a região onde $k_0^2 > \beta^2$, pode-se escrever (B.143) como

$$Y_d(f) = j \frac{2\omega \epsilon_0 b}{\left[\frac{\operatorname{senh}(pd/2)}{(pd/2)} \right]^2} \left\{ \int_0^{k_0} \frac{1}{p} \left[\frac{\beta \cosh\left(q \frac{d}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\beta \frac{d}{2}\right) + q \operatorname{senh}\left(q \frac{d}{2}\right) \cos\left(\beta \frac{d}{2}\right)}{\frac{d}{2}(\beta^2 + q^2)} \right]^2 \frac{J_1(pr)}{J_0(pb)} d\beta + \right. \\ \left. + \int_{k_0}^{\infty} \frac{1}{h} \left[\frac{\beta \cosh\left(q \frac{d}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\beta \frac{d}{2}\right) + q \operatorname{senh}\left(q \frac{d}{2}\right) \cos\left(\beta \frac{d}{2}\right)}{\frac{d}{2}(\beta^2 + q^2)} \right]^2 \frac{I_1(hr)}{I_0(hb)} d\beta \right\}, \quad (\text{B.144})$$

onde considerou-se, como o integrando tem paridade par, a propriedade da transformada de Fourier do co-seno. Com isso, calculou-se a admitância Y_d a partir do tubo de deriva, para uma intensidade do campo elétrico no gap conforme a FIG. B.11 e como se um observador estivesse olhando do tubo de deriva para a cavidade cilíndrica.

B.10 Freqüências sustentadas por uma cavidade ressonante reentrante acoplada a um guia de ondas na condição de campo elétrico do gap com perfil hiperbólico

As freqüências sustentadas pela cavidade ressonante, que satisfazem o perfil de campo elétrico admitido pela hipótese (B.125), são calculadas pela técnica de casamento de admitâncias, por meio da relação de dispersão para a cavidade e tubo, dada por (B.84). Ao substituir (B.135) e (B.144), encontra-se

$$\begin{aligned}
& -j \frac{2\pi b}{L} \sqrt{\varepsilon_0} \frac{J_1(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_1(k_0 b)}{J_0(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 b)} \\
& -j \frac{4\pi b}{L} \frac{\alpha \varepsilon_0}{\left[\frac{\sinh(qd/2)}{(qd/2)} \right]^2} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k_n} \left(\frac{n\pi}{L} \cosh\left(\frac{qd}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi d}{2L}\right) + q \sinh\left(\frac{qd}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi d}{2L}\right) \right)^2 \right. \\
& \left. \left[\frac{I_1(k_n b) K_0(k_n r_c) + I_0(k_n r_c) K_1(k_n b)}{I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b)} \right] \right\} \\
& + j \frac{2\alpha \varepsilon_0 b}{\left[\frac{\sinh(qd/2)}{(qd/2)} \right]^2} \left\{ \int_0^{k_0} \frac{1}{p} \left[\frac{\beta \cosh\left(\frac{d}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta d}{2}\right) + q \sinh\left(\frac{d}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\frac{d}{2}(\beta^2 + q^2)} \right]^2 \frac{J_1(pb)}{J_0(pb)} d\beta + \right. \\
& \left. + \int_{k_0}^{\infty} \frac{1}{h} \left[\frac{\beta \cosh\left(\frac{d}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta d}{2}\right) + q \sinh\left(\frac{d}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta d}{2}\right)}{\frac{d}{2}(\beta^2 + q^2)} \right]^2 \frac{I_1(hb)}{I_0(hb)} d\beta \right\} = 0
\end{aligned} \quad (B.145)$$

Substituindo os valores TAB. B.1 na equação de dispersão (B.145) é possível construir o gráfico apresentado na FIG. B.17.

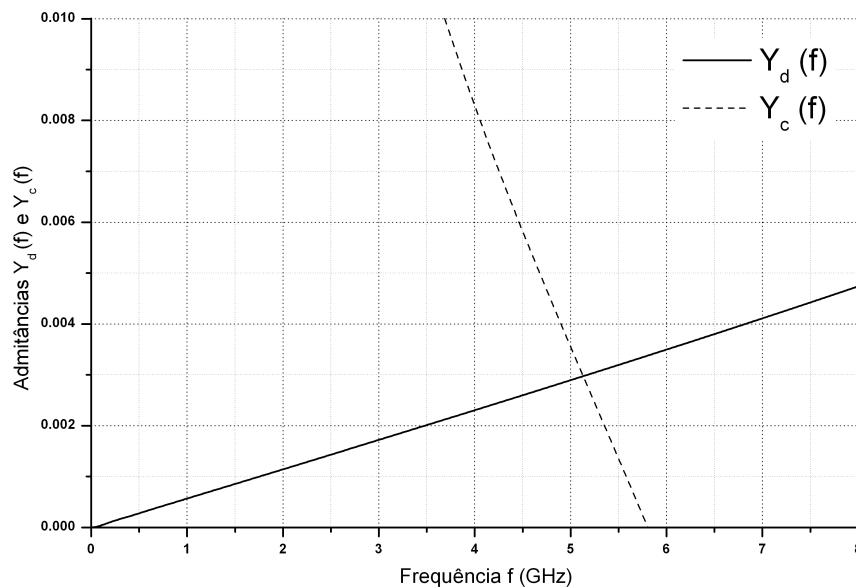


FIGURA B.17 – Solução da equação de dispersão (B.145), para a primeira frequência sustentada pela cavidade ressonante que satisfaz o perfil de campo elétrico conforme a FIG. B.11.

A solução gráfica da equação de dispersão (B.145) possibilita, como já mencionado, calcular as frequências sustentadas pela cavidade ressonante que satisfazem o perfil de campo elétrico admitido por hipótese que, neste caso, é dado pela FIG. B.11. A primeira frequência calculada foi 5,131 GHz. Com a determinação da frequência, os campos

elétricos (B.131) e (B.132) e magnético (B.133), sustentados pela cavidade da FIG. B.1 e sob a hipótese de perfil hiperbólico (B.137), podem ser calculados a menos do valor de E_0 .

Com o objetivo de enriquecer novamente o trabalho, apresenta-se na TAB. B.5 os parâmetros e as frequências calculadas pelo método descrito neste apêndice para 4 cavidades de um amplificador klystron de 150 MW [30][31].

TABELA B.5 – Parâmetros e as frequências calculadas por (B.143) para 4 cavidades de uma klystron de 150 MW [30][31].

Parâmetro	Unidade	Cavidades			
		1°	2°	3°	4°
L_n	cm	3,30	2,29	3,30	4,16
R_{cn}	cm	3,40	3,60	3,40	3,35
b_n	cm	1,88	1,88	1,88	1,88
d_n	cm	1,57	1,04	1,58	1,57
F	GHz	2,860	2,865	2,870	2,940
f_n (método)	GHz	2,604	2,820	2,606	2,319

B.11 Fator de qualidade Q e razão (R/Q) equivalente de uma cavidade ressonante descarregada na condição de campo elétrico do gap com perfil hiperbólico

O cálculo do fator de qualidade Q segue os mesmos passos mostrados na seção B.5. O campo magnético, utilizado tanto para o cálculo da energia W (B.94) quanto para a perda P_L (B.109), nas paredes da cavidade, pode ser expresso por (B.95) mas, nesta seção, os coeficientes A_0 e A_n são definidos segundo

$$A_0 = \frac{E_0 d \sinh(qd/2)}{L (qd/2)} \frac{1}{J_0(k_0 b) N_0(k_0 r_c) - J_0(k_0 r_c) N_0(k_0 b)}, \text{ e} \quad (\text{B.146})$$

$$A_n = E_0 \left(\frac{4}{L} \right) \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right) \cosh\left(\frac{qd}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi d}{2L}\right) + q \operatorname{senh}\left(\frac{qd}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi d}{2L}\right) \right]}{\left[I_0(k_n b) K_0(k_n r_c) - I_0(k_n r_c) K_0(k_n b) \right] \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + q^2 \right]} \quad (\text{B.147})$$

Utiliza-se, para o cálculo da razão (R/Q) , as mesmas expressões apresentadas na seção B.6, ou seja, a resistência “shunt” R da cavidade dada por (B.122) e (R/Q) dada por (B.123).

Como exemplo, considerando novamente a cavidade ressonante da FIG. B.1 e os parâmetros da TAB. B.1, é possível calcular os parâmetros apresentados na TAB. B.6.

TABELA B.6: Parâmetros calculados para a cavidade ressonante da FIG. B.1 de acordo com a TAB. B.1 considerando que a cavidade foi construída de cobre OFHC.

Parâmetro	Descrição	Equação	Valor	Unidade
f	Frequência	(B.145)	5,131	GHz
δ_s	Profundidade de penetração	(B.92)	$9,22 \times 10^{-7}$	m
R_s	Impedância superficial da parede condutora	(B.91)	$1,9 \times 10^{-2}$	Ω
Q	Fator de qualidade descarregado	(B.86)	6841	
R	Resistência “shunt”	(B.122)	536	k Ω
R/Q	Razão entre a resistência “shunt” e o fator de qualidade	(B.123)	78,32	Ω

Finalmente, compara-se novamente os resultados obtidos pelo software CST [33] e os resultados obtidos pelo método apresentado, conforme mostrado na TAB. B.7.

TABELA B.7 – Comparação dos valores de frequência e fatores de qualidade Q_0 calculados pelo método apresentado neste apêndice e o programa CST [33].

Cavidade n°	CST			Neste trabalho		
	f_n (GHz)	Q_0	$R/Q(\Omega)$	f_n (GHz)	Q_0	$R/Q(\Omega)$
1	2,825	11369	63	2,604	11170	63,19
2	2,778	10386	47,5	2,820	10100	51,04
3	2,831	11360	63,1	2,606	11180	63,24
4	2,356	11992	76	2,319	11430	68,70

B.12 Conclusão do Apêndice B

Neste apêndice descreveu-se um método para a determinação da frequência de ressonância, para o cálculo do fator de qualidade Q e para a razão (R/Q) em cavidades cilíndricas reentrantes, utilizando a técnica do casamento de admitância do gap de interação entre a cavidade e o tubo de deriva. Por meio da técnica de casamento de admitância, calculou-se os campos eletromagnéticos sustentados pela cavidade em termos das autofunções axiais e do coeficiente da expansão da solução em termos do valor do campo elétrico no gap que, por hipótese, considerou-se, inicialmente, constante com valor E_0 . Já o tubo de deriva foi considerado um guia de onda de seção circular e comprimento axial infinito e desenvolveu-se a solução em termos da transformada de Fourier dos campos axiais. Verificou-se que o campo elétrico axial é evanescente e, portanto, o guia comporta-se, na verdade, como um tubo de deriva. De posse do conhecimento da solução dos campos para

ambas as regiões e, tendo em vista que a admitância do gap deve ser a mesma, independente da representação dos campos, obteve-se uma equação de dispersão que permitiu o cálculo das frequências sustentadas pela cavidade. Considerando somente a frequência fundamental e as expressões para os campos da cavidade, calculou-se o Q , sob a hipótese de pequenas perdas, e o (R/Q) , para o dado conjunto de parâmetros da cavidade. Mas o principal objetivo é, utilizando estes parâmetros, calcular a impedância $Z_{in}(\omega)$ do gap de interação, de forma que o comportamento elétrico da cavidade reentrante fique completamente determinado. Na seqüência, foram apresentados alguns exemplos de cálculos para validar o método. Finalmente, foram mostrados as expressões e os resultados considerando um perfil hiperbólico de campo elétrico no gap de interação da cavidade.

APÊNDICE C – Cálculo do coeficiente de acoplamento e do carregamento pelo feixe

Neste apêndice apresentam-se os cálculos do coeficiente de acoplamento M e do carregamento pelo feixe para, na maioria dos cálculos, três perfis de campo elétrico. Ambos os parâmetros são de relevância na condução da análise do projeto desenvolvido no capítulo IV.

Este apêndice está organizado como segue. Inicialmente, utilizando as expressões desenvolvidas no capítulo II, calculam-se os fatores de acoplamento, comparando-os com outros fatores de acoplamento conhecidos na literatura. A seguir, mostram-se os cálculos da condutância e da susceptância, tratando-se da parte real e imaginária do carregamento pelo feixe, respectivamente. Por último, segue a conclusão do apêndice.

C.1 Coeficientes de acoplamento

As expressões para se calcular os fatores de acoplamento foram desenvolvidas no capítulo II. Elas estão relacionadas, respectivamente, com a constante de propagação da onda rápida (2.123) e com a constante de propagação de onda lenta (2.124), sendo reproduzidas aqui

$$M_k^- = |M_k^-| e^{j\delta_k^-} = \int_{-d_k/2}^{d_k/2} f_k(\xi') e^{j\beta^- \xi'} d\xi', \quad e \quad (C.1)$$

$$M_k^+ = |M_k^+| e^{j\delta_k^+} = \int_{-d_k/2}^{d_k/2} f_k(\xi') e^{j\beta^+ \xi'} d\xi', \quad (C.2)$$

Admite-se sobre o gap de interação da cavidade, da mesma maneira que no capítulo IV, dois perfis de campo elétrico axial:

- constante, dado por

$$e_z(b, z) = E_0 \quad \text{para } |z| \leq \frac{d}{2}, \quad e \quad (C.3)$$

- hiperbólico, dado por

$$e_z(b, z) = E_0 \cosh(qz), \quad \text{para } |z| < d/2, \quad (C.4)$$

onde q é uma constante. Deseja-se calcular os valores dos coeficientes para a cavidade k , utilizando a condição de normalização (2.115), e sob as hipóteses:

- **a)** campo constante (C.3) no gap considerado com grade:

$$M_k^-(\beta) = \int_{-d_k/2}^{d_k/2} f_k(z) e^{j\beta^- z} dz = \int_{-d_k/2}^{d_k/2} f_k(z) e^{j(\beta_e - \beta_q)z} dz = \frac{\text{sen}\left[\left(\beta_e - \beta_q\right)\frac{d_k}{2}\right]}{\left(\beta_e - \beta_q\right)\frac{d_k}{2}}, \text{ e} \quad (\text{C.5})$$

$$M_k^+(\beta) = \int_{-d_k/2}^{d_k/2} f_k(z) e^{j\beta^+ z} dz = \int_{-d_k/2}^{d_k/2} f_k(z) e^{j(\beta_e + \beta_q)z} dz = \frac{\text{sen}\left[\left(\beta_e + \beta_q\right)\frac{d_k}{2}\right]}{\left(\beta_e + \beta_q\right)\frac{d_k}{2}}. \quad (\text{C.6})$$

- **b)** campo constante (C.3) no gap considerado sem grade:

Como a função $f_k(z)$ é par para gap simétrico, conforme pode ser visto na FIG.

B.8 do apêndice B, pode-se escrever, com relação ao coeficiente da onda rápida, que

$$M_k^-(r, \beta) = \int_{-d_{ke}/2}^{d_{ke}/2} f_k(r, z) e^{j\beta^- z} dz = \int_0^{d_{ke}/2} f_k(r, z) \cos(\beta^- z) dz, \quad (\text{C.7})$$

onde considera-se d_{ke} ao invés de d_k , com $d_{ke} > d_k$, uma vez que o campo elétrico axial $e_z(r, z)$, dado por (B.71), é evanescente, conforme pode ser visto na FIG. B.8 (apêndice B).

Considerando a função $f_k(z)$ relacionada com (B.71), tem-se

$$M_k^-(r, \beta) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{d_{ke}/2} \left(\int_0^{k_0} A_\beta^{(b)} \frac{J_0(pr)}{J_0(pb)} \cos(\beta z) d\beta \right) \cos(\beta^- z) dz + \int_0^{d_{ke}/2} \left(\int_{k_0}^{+\infty} A_\beta^{(b)} \frac{I_0(hr)}{I_0(hb)} \cos(\beta z) d\beta \right) \cos(\beta^- z) dz \right] \quad (\text{C.8})$$

ou

$$M_k^-(r, \beta) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{k_0} A_\beta^{(b)} \frac{J_0(pr)}{J_0(pb)} d\beta \int_0^{d_{ke}/2} \cos(\beta z) \cos(\beta^- z) dz + \int_{k_0}^{+\infty} A_\beta^{(b)} \frac{I_0(hr)}{I_0(hb)} d\beta \int_0^{d_{ke}/2} \cos(\beta z) \cos(\beta^- z) dz \right] \quad (\text{C.9})$$

onde

$$A_\beta^{(b)} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta d_k}{2}\right)}{\left(\frac{\beta d_k}{2}\right)}, \quad (\text{C.10})$$

$$p = \sqrt{k_0^2 - \beta^2}, \text{ e} \quad (\text{C.11})$$

$$h = \sqrt{\beta^2 - k_0^2}. \quad (\text{C.12})$$

Como o campo elétrico axial $e_z(r, z)$ é evanescente, pode-se estender ao limite de integração da integral em z até ∞ em (C.9), sem o comprometimento do resultado final, o que possibilita utilizar a propriedade de ortogonalidade da transformada de Fourier, dada por

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\beta-\beta')z} dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\beta z) \cos(\beta' z) dz = \delta(\beta - \beta'). \quad (\text{C.13})$$

Assim, (C.9) se escreve

$$M_k^-(r, \beta) = \int_0^{k_0} A_\beta^{(b)} \frac{J_0(pr)}{J_0(pb)} \delta(\beta^- - \beta) d\beta + \int_{k_0}^{+\infty} A_\beta^{(b)} \frac{I_0(hr)}{I_0(hb)} \delta(\beta^- - \beta) d\beta. \quad (\text{C.14})$$

Considerando, por hipótese, que as soluções são ondas com constante de propagação de fase β com valor próximo à constante de propagação β_e , tem-se que $\beta^2 \gg k_0^2$. Isso significa que se trata de um problema envolvendo ondas lentas e, neste caso, a parcela a ser considerada em (C.14) corresponde à segunda integral. Com isso, o coeficiente M_k^- resulta

$$M_k^-(r, \beta) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta^- d_k}{2}\right) I_0(h^- r)}{\left(\frac{\beta^- d_k}{2}\right) I_0(h^- b)} = \frac{\text{sen}\left[\left(\beta_e - \beta_q\right) \frac{d_k}{2}\right] I_0(h^- r)}{\left(\beta_e - \beta_q\right) \frac{d_k}{2} I_0(h^- b)}, \quad (\text{C.15})$$

onde

$$h^- = \sqrt{\beta^{+2} - k_0^2} = \sqrt{(\beta_e - \beta_q)^2 - k_0^2}. \quad (\text{C.16})$$

Um raciocínio semelhante pode ser realizado para M_k^+ , obtendo-se

$$M_k^+(r, \beta) = \frac{\text{sen}\left[\left(\beta_e + \beta_q\right) \frac{d_k}{2}\right] I_0(h^+ r)}{\left(\beta_e + \beta_q\right) \frac{d_k}{2} I_0(h^+ b)}, \quad (\text{C.17})$$

onde

$$h^+ = \sqrt{\beta^{-2} - k_0^2} = \sqrt{(\beta_e + \beta_q)^2 - k_0^2}. \quad (\text{C.18})$$

- c) campo hiperbólico (C.4) no gap considerado sem grade:

Como a função $f_k(z)$ é par (gap simétrico), conforme pode ser visto na FIG. B.16 do apêndice B, pode-se escrever, com relação ao coeficiente da onda rápida, da mesma forma que (C.7). Considerando a função $f_k(z)$, relacionada ao campo elétrico $e_z(r, z)$ dado por (B.141), tem-se

$$M_k^-(r, \beta) = \frac{1}{\pi \text{senh}(qd_k/2)} \left[\int_0^{k_0} A_\beta^{(c)} \frac{J_0(pr)}{J_0(pb)} d\beta \int_0^{dke/2} \cos(\beta z) \cos(\beta^- z) dz + \int_{k_0}^{+\infty} A_\beta^{(c)} \frac{I_0(hr)}{I_0(hb)} d\beta \int_0^{dke/2} \cos(\beta z) \cos(\beta^- z) dz \right], \quad (\text{C.19})$$

onde

$$A_{\beta}^{(c)} = \frac{\beta \cosh\left(q \frac{d_k}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\beta \frac{d_k}{2}\right) + q \operatorname{senh}\left(q \frac{d_k}{2}\right) \cos\left(\beta \frac{d_k}{2}\right)}{(\beta^2 + q^2)}, \quad (\text{C.20})$$

onde a voltagem no gap V , neste caso, vale

$$V = \int_{-\frac{d_k}{2}}^{\frac{d_k}{2}} e_{1z}(b, z) dz = \int_{-\frac{d_k}{2}}^{\frac{d_k}{2}} E_0 \cosh(qz) dz = \frac{2E_0 \operatorname{senh}(qd_k/2)}{q} = E_0 d \frac{\operatorname{senh}(qd_k/2)}{(qd_k/2)}. \quad (\text{C.21})$$

Como o campo elétrico axial $e_z(r, z)$, dado por (B.141), é evanescente, pode-se novamente estender ao limite de integração da integral em z até ∞ em (C.19), sem comprometimento da solução, o que possibilita utilizar a propriedade de ortogonalidade da transformada de Fourier, dada por (C.13). Além disso, considerando a hipótese de ondas lentas, o coeficiente M_k^- resulta

$$M_k^-(r, \beta) = \frac{q}{\operatorname{senh}(qd_k/2)} \frac{\beta^- \cosh\left(p \frac{d_k}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\beta^- \frac{d_k}{2}\right) + q \operatorname{senh}\left(q \frac{d_k}{2}\right) \cos\left(\beta^- \frac{d_k}{2}\right)}{(\beta^{-2} + q^2)} \frac{I_0(h^- r)}{I_0(h^- b)}, \quad (\text{C.22})$$

ou

$$M_k^-(r, \beta) = \frac{q}{\operatorname{senh}(qd_k/2)} \frac{(\beta_e - \beta_q) \cosh\left(q \frac{d_k}{2}\right) \operatorname{sen}\left[(\beta_e - \beta_q) \frac{d_k}{2}\right] + q \operatorname{senh}\left(q \frac{d_k}{2}\right) \cos\left[(\beta_e - \beta_q) \frac{d_k}{2}\right]}{\left[(\beta_e - \beta_q)^2 + q^2\right]} \frac{I_0(h^- r)}{I_0(h^- b)}, \quad (\text{C.23})$$

onde h^- é dado por (C.16). Um raciocínio semelhante pode ser realizado para M_k^+ , obtendo-se

$$M_k^+(r, \beta) = \frac{q}{\operatorname{senh}(qd_k/2)} \frac{(\beta_e + \beta_q) \cosh\left(q \frac{d_k}{2}\right) \operatorname{sen}\left[(\beta_e + \beta_q) \frac{d_k}{2}\right] + q \operatorname{senh}\left(q \frac{d_k}{2}\right) \cos\left[(\beta_e + \beta_q) \frac{d_k}{2}\right]}{\left[(\beta_e + \beta_q)^2 + q^2\right]} \frac{I_0(h^+ r)}{I_0(h^+ b)}, \quad (\text{C.24})$$

onde h^+ é dado por (C.18).

Na FIG. C.1 compara-se os coeficientes de acoplamento médios, calculados segundo (2.176), para o campo constante (C.3) e com perfil hiperbólico (C.4) no gap de interação. Os valores utilizados nos cálculos encontram-se nas TAB. C.1 e TAB. C.2.

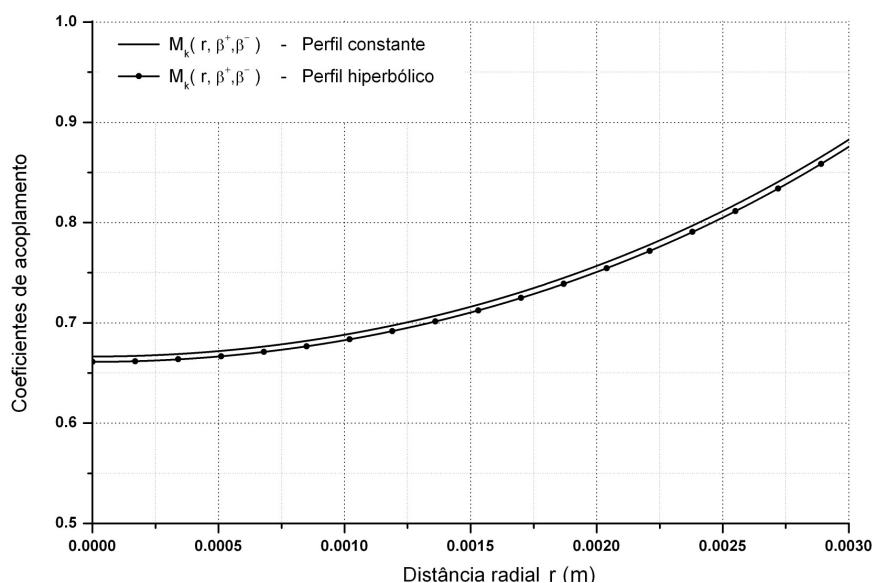


FIGURA C.1 – Comparação entre os coeficientes de acoplamento para o campo constante (C.3) e para o perfil hiperbólico (C.4) no gap de interação.

TABELA C.1 – Parâmetros utilizados para análise do amplificador klystron Varian de 4 cavidades [29].

Quantidade	Símbolo	Valor
Corrente dc do feixe, A	I_0	0,525
Voltagem dc do feixe, kV	V_0	6,0
Frequência do sinal modulador, GHz	f_0	1,849
Raio do feixe de elétrons, cm	a	0,257
Raio do tubo de deriva, cm	b	0,340
1° gap, cm	d_1	0,292
2° gap, cm	d_2	0,318
3° gap, cm	d_3	0,318
4° gap, cm	d_4	0,318

TABELA C.2 – Parâmetros determinados para a utilização nos cálculos do amplificador klystron.

Quantidade	Símbolo	Valor
Perveância ($\mu Perv$), $\mu Perv$	$Perv$	1,13
Constante de propagação do feixe, rad / m	β_e	257,24
Fator de redução da frequência de plasma	R	0,33
Constante de propagação reduzida, rad / m	β_q	23,96

Na FIG. C.2 ilustra-se os coeficientes de acoplamento calculados para o campo elétrico axial com perfil hiperbólico (C.4) no gap de interação, bem como o coeficiente de acoplamento calculado segundo a equação (11) da referência [35], dado por (C.25), e o coeficiente de acoplamento segundo a equação (3.57) apresentada na referência [18], dado por (C.26).

$$M_k(r, \beta_e) = J_0(k_0 b) \frac{q}{\sinh(qd_k/2)} \frac{\beta_e \cosh\left(q \frac{d_k}{2}\right) \operatorname{sen}\left[\beta_e \frac{d_k}{2}\right] + q \operatorname{senh}\left(q \frac{d_k}{2}\right) \cos\left[\beta_e \frac{d_k}{2}\right]}{[\beta_e^2 + q^2]} \frac{I_0(h_e r)}{I_0(h_e b)}. \quad (\text{C.25})$$

$$M_k(r, \beta_e) = J_0\left(\frac{\beta_e d}{2}\right) \frac{I_0(h_e r)}{I_0(h_e b)}, \quad (\text{C.26})$$

onde

$$h_e = \sqrt{\beta_e^2 - k_0^2}. \quad (\text{C.27})$$

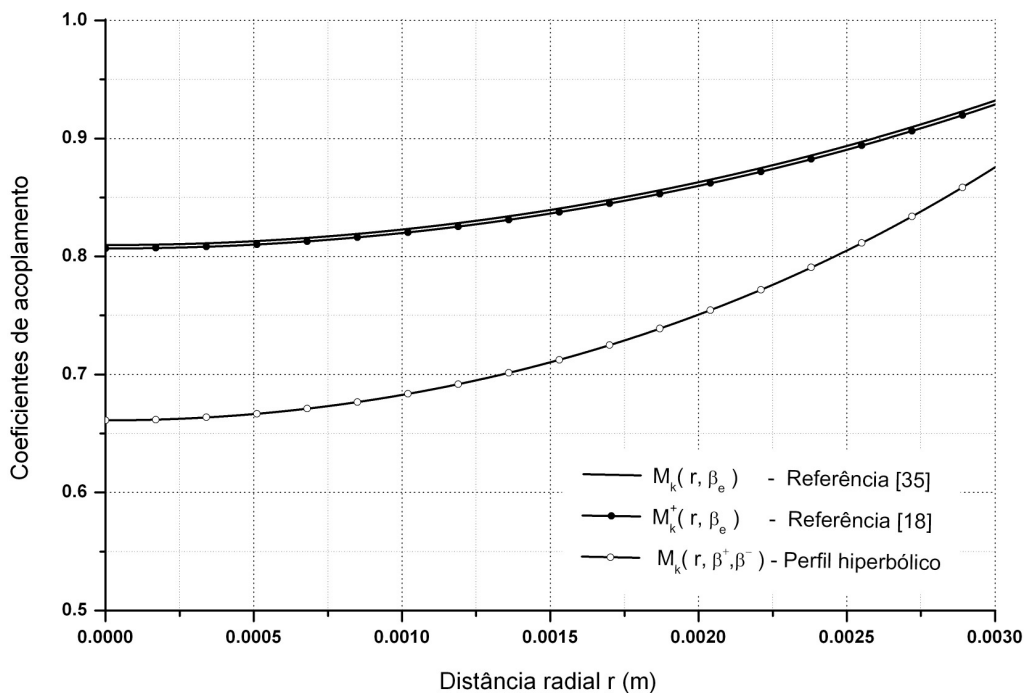


FIGURA C.2 – Coeficientes de acoplamento calculados para o campo elétrico axial com perfil hiperbólico (C.4) no gap de interação, bem como o coeficiente de acoplamento calculado segundo a equação (11) da referência [35], dado por (C.25), e o coeficiente de acoplamento apresentado na referência [18], dado por (2.27).

Como o coeficiente de acoplamento varia com a coordenada radial, é apropriado calcular-se a média de $M(r, \beta)$ para a seção transversal de um feixe de elétrons de raio a .

Considerando, por exemplo, $M(r, \beta) = A_\beta \frac{I_0(hr)}{I_0(hb)}$, onde A_β pode ser $A_\beta^{(b)}$ (C.10) ou $A_\beta^{(c)}$ (C.20), a média \bar{M} pode ser obtida calculando-se, primeiro, $M^2(a, \beta)$ pela expressão

$$M^2(a, \beta) = \frac{2\pi \int_0^a M^2(r, \beta) r dr}{\pi a^2} = J_0^2\left(\frac{\beta_e d}{2}\right) \frac{2}{a^2 I_0^2(hb)} \int_0^a r I_0^2(hr) dr. \quad (C.28)$$

Com isso, $M(a, \beta)$ vale

$$M(a, \beta) = A_\beta \frac{\sqrt{[I_0^2(ha) - I_1^2(ha)]}}{I_0(hb)}, \quad (C.29)$$

onde utilizou-se a seguinte relação

$$\int_0^a r I_0^2(hr) dr = \frac{a^2}{2} [I_0^2(ha) - I_1^2(ha)]. \quad (C.30)$$

A partir de (C.29), pode-se definir a média \bar{M} por

$$\bar{M} = \frac{\sqrt{[I_0^2(ha) - I_1^2(ha)]}}{I_0(hb)}. \quad (C.31)$$

O coeficiente de acoplamento $M(a, \beta)$ é, portanto, dado por

$$M(a, \beta) = A_\beta \bar{M} = A_\beta \frac{\sqrt{[I_0^2(ha) - I_1^2(ha)]}}{I_0(hb)}. \quad (C.32)$$

Os coeficientes de acoplamento, calculados neste apêndice, são utilizados na análise do capítulo IV, inclusive a média de $M(r, \beta)$ para a seção transversal de um feixe de elétrons de raio a .

C.2 - Carregamento pelo feixe

As expressões para se calcular a admitância eletrônica do feixe $y_{e,n} = g_{e,n} + jb_{e,n}$ foram desenvolvidas no capítulo II. No cálculo da condutância g_n utiliza-se (2.149), reproduzido aqui

$$g_n = -\frac{1}{8} \frac{\beta_e}{\beta_q} \Delta(M_n M_n^*), \quad (C.33)$$

onde Δ é o operador diferença de Wessel-Berg (2.131). Observa-se que a condutância depende do coeficiente de acoplamento e, como foram utilizados três hipóteses para o cálculo de M_k , obteve-se também três valores para a condutância:

- **a)** campo constante (C.3) no gap de interação considerado com grade - M_n^- e M_n^+ dados por (C.5) e (C.6), respectivamente:

$$g_n = -\frac{1}{8} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left(\left| \frac{\text{sen}(\beta_e + \beta_q) \frac{d_n}{2}}{(\beta_e + \beta_q) \frac{d_n}{2}} \right|^2 - \left| \frac{\text{sen}(\beta_e - \beta_q) \frac{d_n}{2}}{(\beta_e - \beta_q) \frac{d_n}{2}} \right|^2 \right). \quad (\text{C.34})$$

- **b)** campo constante (C.3) no gap considerado sem grade - M_n^- e M_n^+ dados por (C.15) e (C.17), respectivamente:

$$g_n = -\frac{1}{8} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left(\left| \frac{\text{sen} \left[(\beta_e + \beta_q) \frac{d_n}{2} \right] I_0(h^+ r)}{\left[(\beta_e + \beta_q) \frac{d_n}{2} \right] I_0(h^+ b)} \right|^2 - \left| \frac{\text{sen} \left[(\beta_e - \beta_q) \frac{d_n}{2} \right] I_0(h^- r)}{\left[(\beta_e - \beta_q) \frac{d_n}{2} \right] I_0(h^- b)} \right|^2 \right). \quad (\text{C.35})$$

- **c)** campo hiperbólico (C.4) no gap considerado sem grade - M_n^- e M_n^+ dados por (C.23) e (C.24), respectivamente:

$$g_n = -\frac{1}{8} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left[\frac{q}{\text{sen}(q d_n / 2)} \right]^2 \left(\left| A_\beta^{(c)} \frac{I_0(h^+ r)}{I_0(h^+ b)} \right|^2 - \left| A_\beta^{(c)} \frac{I_0(h^- r)}{I_0(h^- b)} \right|^2 \right). \quad (\text{C.36})$$

Para a determinação da susceptância eletrônica b_n deve-se resolver a integral dupla da expressão (2.149), qual seja

$$b_n = -\frac{1}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left(\int_{-d_n/2}^{d_n/2} \int_{-d_n/2}^{\xi} f_n(\xi) f_n(\xi') \left\{ \text{sen}[(\beta_e + \beta_q)(\xi' - \xi)] - \text{sen}[(\beta_e - \beta_q)(\xi' - \xi)] \right\} d\xi d\xi' \right), \quad (\text{C.37})$$

considerando as funções de forma de acordo com o campo elétrico no gap. Neste trabalho, calculou-se b_n somente para ao caso de campo constante (C.3) no gap de interação considerado com grade, obtendo-se

$$b_n = -\frac{1}{4} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left\{ \frac{1}{(\beta_e + \beta_q) d_n} \left[\frac{\text{sen}(\beta_e + \beta_q) d_n}{(\beta_e + \beta_q) d_n} - 1 \right] - \frac{1}{(\beta_e - \beta_q) d_n} \left[\frac{\text{sen}(\beta_e - \beta_q) d_n}{(\beta_e - \beta_q) d_n} - 1 \right] \right\}. \quad (\text{C.38})$$

Utilizando a expressão (C.34) para a condutância e (C.38) para a susceptância, é possível construir o gráfico da FIG. C.3.

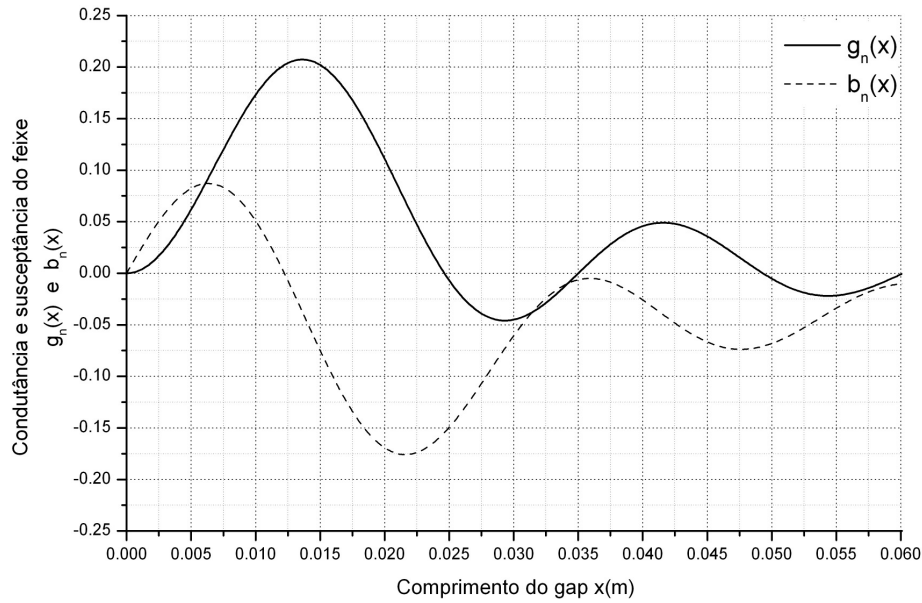


FIGURA C.3 – Comportamento da condutância e susceptância eletrônicas em função do comprimento do gap de interação.

Nos cálculos do capítulo IV utiliza-se a média de $M(r, \beta)$ para a seção transversal de um feixe de elétrons de raio a . Por exemplo, no caso de g_n dado por (C.35), a condutância resulta

$$g_n(a, \beta) = -\frac{1}{8} \frac{\beta_e}{\beta_q} \left(\left| \frac{\text{sen} \left[(\beta_e + \beta_q) \frac{d_n}{2} \right]}{\left[(\beta_e + \beta_q) \frac{d_n}{2} \right]} \bar{M}^+ \right|^2 - \left| \frac{\text{sen} \left[(\beta_e - \beta_q) \frac{d_n}{2} \right]}{\left[(\beta_e - \beta_q) \frac{d_n}{2} \right]} \bar{M}^- \right|^2 \right), \quad (\text{C.39})$$

onde

$$\bar{M}^+ = \frac{\sqrt{\left[I_0^2(h^+a) - I_1^2(h^+a) \right]}}{I_0(h^+b)}, \text{ e} \quad (\text{C.40})$$

$$\bar{M}^- = \frac{\sqrt{\left[I_0^2(h^-a) - I_1^2(h^-a) \right]}}{I_0(h^-b)}. \quad (\text{C.41})$$

Com isso, foram apresentados as expressões da condutância g_n para os três perfis de campo elétrico considerados neste apêndice, bem como a expressão da susceptância b_n para o caso de campo constante (C.3) no gap de interação com grade.

C.3 Conclusão do Apêndice C

Neste apêndice apresentaram-se os cálculos do coeficiente de acoplamento M e da condutância g_n para três perfis de campo elétrico: campo constante no gap considerado com grade, campo constante no gap considerado sem grade, e campo hiperbólico no gap considerado sem grade. No caso da susceptância b_n , apresentou-se uma expressão para o caso de campo constante no gap de interação com grade. Estes parâmetros são de relevância na condução da análise do projeto desenvolvido capítulo IV.

APÊNDICE D – Força elétrica de carga espacial em feixes de elétrons magneticamente confinados

Neste apêndice descreve-se o cálculo da força elétrica de carga espacial entre dois discos de carga que compõem o modelo de disco utilizado para representar o problema físico de interesse constituído por um feixe de elétrons, magneticamente confinado e com dimensão axial infinita, além de seção transversal circular de raio a , propagando-se no interior de um tubo de deriva de seção circular de raio b de dimensão axial muito grande. Observa-se que, como se trata de uma análise não relativista, o campo magnético pode ser desprezado em comparação ao campo elétrico. Por isso, a força de carga espacial resultante é devida somente à ação do campo elétrico.

O feixe de elétrons é representado pelo modelo de disco e deseja-se calcular a força elétrica entre dois discos satisfazendo as condições de contorno do problema. Porém, antes de se calcular a força elétrica deve-se calcular o campo elétrico produzido por um disco de carga que, devido ao fato deste ser dado pelo gradiente do potencial escalar, inicia-se o cálculo pelo potencial eletrostático produzido por um disco de carga, a partir da solução equação de Poisson e utilizando a técnica da Função de Green.

Este apêndice está organizado como segue. Inicialmente, justifica-se a utilização da equação de Poisson para a solução do problema no caso não-relativista. Em seguida, a solução da equação de Poisson é desenvolvida utilizando-se a técnica da expansão da função de Green em termos das autofunções para o problema de um cilindro infinitamente longo e perfeitamente condutor de raio b . Esta técnica é muito utilizada para abordar problemas que envolvem tanto distribuições da carga quanto valores de potencial em determinados contornos (isto é, para obter soluções de equação de Poisson). A função de Green é uma ferramenta matemática importante ao representar a solução de uma equação diferencial parcial para o caso particular de uma carga pontual unitária (fonte) em uma posição \vec{r} (campo fonte), que pode ser em qualquer lugar no interior do domínio. Em seguida, como a solução do método da função Green satisfaz a equação de Poisson, é possível calcular o potencial eletrostático em qualquer ponto no interior do domínio devido, neste caso, a um disco da carga. Como o campo elétrico pode ser expresso como o gradiente (negativo) do potencial escalar, calcula-se a força elétrica experimentada por um disco de carga devido a presença de outro disco dentro do domínio e apresenta-se o resultado através de um gráfico. Por fim, utilizando-se este

resultado, é possível calcular a força de carga espacial resultante sobre um disco por meio da soma das contribuições de todos os discos do domínio (princípio da superposição).

D.1 Força elétrica em coordenadas cilíndricas

Mostrou-se no capítulo 3 que, considerando o modelo de disco, a dinâmica do feixe de elétrons pode ser descrita a partir da dinâmica de cada disco e para isso, a segunda Lei de Newton para cada disco deve ser empregada. Isso significa que força elétrica resultante sobre cada disco deve ser determinada (3.46). Para isto, parte-se do cálculo da força entre dois discos de raio a no interior de um tubo de deriva cilíndrico de raio b , conforme mostrado na FIG. D.1.

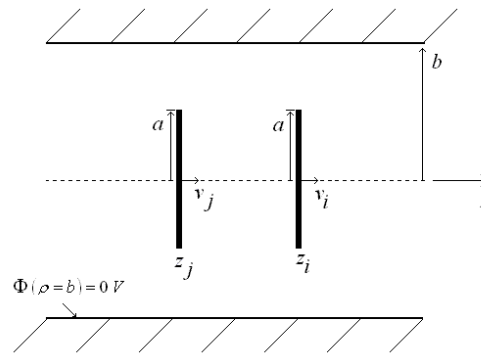


FIGURA D.1 – Discos de carga cilíndrico de raio a no interior de uma guia de onda circular de raio b .

O potencial escalar, no sistema de referência que se move com as partículas do feixe, satisfaz à equação de Poisson

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_v(\vec{r}), \quad (\text{D.1})$$

sujeita as condições de contorno

$$\begin{cases} \Phi(\rho=b)=0 \\ \Phi(z=\pm\infty)=0 \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

A justificativa para se utilizar a equação de Poisson, ao invés de resolver a equação de onda não homogênea para o potencial escalar elétrico, baseia-se no fato que o campo de uma carga em movimento uniforme é transportado convectivamente por essa carga [24][25]. Isso significa que um observador estacionário no tempo $t+dt$ verá o mesmo campo que existiu no tempo t em uma posição deslocada dele por $-u_0 \hat{a}_z dt$, onde u_0 é a velocidade da carga, implicando que as derivadas temporal e espacial em z não são independentes. Este fato pode ser expresso matematicamente por

$$\frac{\partial}{\partial t} = -u_0 \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{D.3})$$

Considerando a equação de onda não-homogênea para potencial elétrico escalar dada por

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}, \quad (\text{D.4})$$

que, em coordenadas cilíndricas e sob a hipótese (D.3), se escreve na forma

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \left(1 - \frac{u_0^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}, \quad (\text{D.5})$$

A equação (D.5) pode ser, ainda, transformada mediante uma mudança nas variáveis independentes da forma

$$\begin{cases} \rho' = \rho \\ \varphi' = \varphi \\ z' = z / \sqrt{1 - (u_0/c)^2} \end{cases}. \quad (\text{D.6})$$

Considerando (D.6), as derivadas parciais em (D.5) se transformam segundo as regras

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho'} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho'} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi'} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi'} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \text{ e} \quad (\text{D.8})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z'} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z'} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}. \quad (\text{D.9})$$

Utilizando as regras (D.7)-(D.9) para o cálculo da segunda derivada e, substituindo estes resultados em (D.5), obtém-se uma equação da forma da equação de Poisson dada por

$$\nabla'^2 \Phi(\rho', z' \sqrt{1 - \beta_e^2}) = -\frac{\rho_v(\rho', z' \sqrt{1 - \beta_e^2})}{\epsilon_0}. \quad (\text{D.10})$$

onde $\beta_e \equiv u_0/c$ que, no caso de $u_0 \ll c$, torna-se exatamente a equação de Poisson para um campo puramente eletrostático. Portanto, embora este trabalho envolva o problema de elétrons em movimento e a solução envolva o cálculo de potenciais retardados, no caso não-relativístico é possível resolvê-lo utilizando a equação de Poisson (D.1).

D.2 Função de Green para o potencial eletrostático em coordenadas cilíndricas

Uma solução da equação de Poisson pode ser obtida, a partir do Teorema de Green, com o auxílio de uma função $G(\vec{r}, \vec{r}')$ por meio de da integral

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho_v(\vec{r}') d\vec{r}'. \quad (\text{D.11})$$

onde $G(\vec{r}, \vec{r}')$ é uma função de Green que satisfaz a equação

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (\text{D.12})$$

onde o laplaciano ∇^2 é dado por

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (\text{D.13})$$

em coordenadas cilíndricas. Além disso, utilizando este tipo de coordenadas, (D.12) pode ser escrita como

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z'), \quad (\text{D.14})$$

sujeita às condições de contorno homogêneas. Conforme a teoria da equação de Sturm-Liouville, na qual este problema se enquadra, a solução pode ser obtida com uso das autofunções e autovalores do problema homogêneo correspondente que, neste caso, resulta na equação de Laplace que, em coordenadas cilíndricas, é da forma

$$\nabla^2 \Psi(\rho, \varphi, z) = 0, \quad (\text{D.15})$$

e pode ser resolvida por separação de variáveis, ou seja, considerando

$$\Psi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Theta(\varphi)Z(z). \quad (\text{D.16})$$

Substituindo (D.16) em (D.15) e resolvendo para as condições de contorno (D.2) obtém-se as seguintes equações

$$\frac{d^2 \Theta(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Theta(\varphi) = 0, \quad (\text{D.17})$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - \lambda^2 Z(z) = 0, \text{ e} \quad (\text{D.18})$$

$$\rho^2 \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} + (\lambda^2 \rho^2 - m^2) R(\rho) = 0. \quad (\text{D.19})$$

De acordo com a condição periódica em φ , m deve ser um número inteiro.

Pode-se demonstrar que a autofunção de (D.17) é da forma

$$\Theta_m(\varphi) = e^{jm\varphi}, \quad (\text{D.20})$$

como também é possível demonstrar que a autofunção da equação de Bessel ordinária (D.19) é da forma

$$R_m(\rho) = J_m(\lambda\rho), \quad (\text{D.21})$$

tratando-se de uma função de Bessel ordinária de primeiro tipo e ordem m . Ao satisfazer a condição de contorno para $\rho = b$ obtém-se

$$\lambda = \frac{x_{mn}}{b}, \quad (\text{D.22})$$

onde x_{mn} são seus zeros, com $n = 1, 2, 3, \dots$

Utilizando estas autofunções, a função de Green $G(\vec{r}, \vec{r}')$, segundo o teorema da expansão, pode ser representada como

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn}(z, \rho', \phi', z') J_m\left(\frac{x_{mn}}{b} \rho\right) e^{im\phi}, \quad (\text{D.23})$$

onde $g_{mn}(z, \rho', \phi', z')$ é a incógnita a ser calculada para que $G(\vec{r}, \vec{r}')$ seja efetivamente a solução de (D.14). Neste sentido, deseja-se calcular o laplaciano (D.13) da função (D.23), ou seja,

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn}(z, \rho', \phi', z') J_m\left(\frac{x_{mn}}{b} \rho\right) e^{im\phi} \right]. \quad (\text{D.24})$$

Resolvendo (D.24) obtém-se

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d^2 J_m\left(\frac{x_{mn}}{b} \rho\right)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dJ_m\left(\frac{x_{mn}}{b} \rho\right)}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} J_m\left(\frac{x_{mn}}{b} \rho\right) + J_m\left(\frac{x_{mn}}{b} \rho\right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] g_{mn}(z, \rho', \phi', z') e^{im\phi}. \quad (\text{D.25})$$

Como $J_m\left(\frac{x_{mn}}{b} \rho\right)$ é solução de (D.19), pode-se escrever que

$$\frac{d^2 J_m\left(\frac{x_{mn}}{b} \rho\right)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dJ_m\left(\frac{x_{mn}}{b} \rho\right)}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} J_m\left(\frac{x_{mn}}{b} \rho\right) = -\left(\frac{x_{mn}}{b}\right)^2 J_m\left(\frac{x_{mn}}{b} \rho\right), \quad (\text{D.26})$$

e, portanto, (D.25) resulta

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\frac{x_{mn}}{b}\right)^2 \right] g_{mn}(z, \rho', \phi', z') J_m\left(\frac{x_{mn}}{b} \rho\right) e^{im\phi}. \quad (\text{D.27})$$

Por outro lado, é possível demonstrar que uma função delta de Dirac, em função da coordenada ρ , pode ser expandida em uma série das autofunções da equação de Bessel ordinária de primeiro tipo e ordem m , resultando

$$\frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{b^2 J_{m+1}^2(x_{mn})} J_m\left(\frac{x_{mn}}{b} \rho'\right) J_m\left(\frac{x_{mn}}{b} \rho\right), \quad \forall m. \quad (\text{D.28})$$

Além disso, é possível demonstrar que uma função Delta de Dirac, em função da coordenada φ , pode ser expandida em uma série das autofunções da equação diferencial (D.17), resultando

$$\delta(\varphi - \varphi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm\varphi'} e^{jm\varphi}, \quad \forall m. \quad (\text{D.29})$$

Substituindo-se (D.27)-(D.29) em (D.14) obtém-se

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \left(\frac{x_{mn}}{b} \right)^2 \right] g_{nm}(z, \rho', \varphi', z') = -\frac{1}{b^2 J_{m+1}^2(x_{mn}) \pi} J_m \left(\frac{x_{mn}}{b} \rho' \right) e^{-jm\varphi'} \delta(z - z'), \quad (\text{D.30})$$

ou,

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \left(\frac{x_{mn}}{b} \right)^2 \right] gr(z, z') = -\delta(z - z'), \quad (\text{D.31})$$

onde considerou-se

$$gr(z, z') = \left[\frac{b^2 J_{m+1}^2(x_{mn}) \pi}{J_m \left(\frac{x_{mn}}{b} \rho' \right) e^{-jm\varphi'}} \right] g_{nm}(z, \rho', \varphi', z'), \quad (\text{D.32})$$

que é denominada função de Green reduzida.

Quando $z \neq z'$, ou seja, quando $\delta(z - z') = 0$, a equação (D.31) torna-se homogênea

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \left(\frac{x_{mn}}{b} \right)^2 \right] gr(z, z') = 0, \quad (\text{D.33})$$

com duas soluções dadas por

$$\begin{cases} gr_1(z, z') = Ae^{\frac{x_{mn}}{b}z} + Be^{-\frac{x_{mn}}{b}z}, & z < z' \\ gr_2(z, z') = Ce^{\frac{x_{mn}}{b}z} + De^{-\frac{x_{mn}}{b}z}, & z > z' \end{cases}. \quad (\text{D.34})$$

No caso de $z \rightarrow -\infty$, para que se tenha solução finita, deve-se ter $B = 0$ em (D.34). Além disso, no caso de $z \rightarrow \infty$, para que se tenha solução finita, deve-se ter também $C = 0$. Com isso, as soluções resultam

$$\begin{cases} gr_1(z, z') = Ae^{\frac{x_{mn}}{b}z}, & z < z' \\ gr_2(z, z') = De^{-\frac{x_{mn}}{b}z}, & z > z' \end{cases}. \quad (\text{D.35})$$

Encontram-se os valores de A e D utilizando as duas propriedades associadas ao método da Função de Green. No ponto $z = z'$ as duas funções devem ser iguais (primeira propriedade), ou seja,

$$gr(z' + \varepsilon, z') = gr(z' - \varepsilon, z') \Rightarrow gr_2(z', z') = gr_1(z', z'). \quad (D.36)$$

onde ε é muito pequeno ($\varepsilon \rightarrow 0$). Substituindo (D.35) em (D.36) obtém-se

$$De^{-\frac{x_{mn}z'}{b}} = Ae^{\frac{x_{mn}z'}{b}}. \quad (D.37)$$

Portanto,

$$D = A \frac{e^{\frac{x_{mn}z'}{b}}}{e^{-\frac{x_{mn}z'}{b}}} = Ae^{2\frac{x_{mn}z'}{b}}. \quad (D.38)$$

Além disso, existe uma descontinuidade de $\frac{d}{dz} gr(z, z')$ no ponto z' (segunda propriedade),

dada por

$$\frac{d}{dz} [gr(z, z')] \Big|_{z=z'+\varepsilon} - \frac{d}{dz} [gr(z, z')] \Big|_{z=z'-\varepsilon} = -1, \quad (D.39)$$

ou seja,

$$\frac{d}{dz} [gr_2(z', z')] - \frac{d}{dz} [gr_1(z', z')] = -1. \quad (D.40)$$

Realizando os cálculos e substituindo o valor de D em função de A (D.38), chega-se ao valor de A , ou seja,

$$A = \frac{b}{2x_{mn}} e^{-\frac{x_{mn}z'}{b}}. \quad (D.41)$$

Substituindo (D.41) em (D.38) chega-se ao valor de D , ou seja,

$$D = \frac{b}{2x_{mn}} e^{\frac{x_{mn}z'}{b}}. \quad (D.42)$$

Portanto, (D.35) resulta

$$\begin{cases} gr_1(z, z') = \frac{b}{2x_{mn}} e^{-\frac{x_{mn}z'}{b}} e^{\frac{x_{mn}z}{b}}, & z < z' \\ gr_2(z, z') = \frac{b}{2x_{mn}} e^{\frac{x_{mn}z'}{b}} e^{-\frac{x_{mn}z}{b}}, & z > z' \end{cases}. \quad (D.43)$$

Este resultado pode ser expresso como

$$gr(z, z') = \frac{b}{2x_{mn}} e^{-\frac{x_{mn}(z, -z_<)}{b}}. \quad (D.44)$$

onde $z > (z <)$ é o maior (menor) valor entre z e z' . Substituindo, agora, (D.44) em (D.32) obtém-se

$$g_{mm}(z, \rho', \phi', z') = \frac{1}{2\pi b x_{mm} J_{m+1}^2(x_{mm})} J_m\left(\frac{x_{mm}}{b} \rho'\right) e^{-jm\phi'} e^{\frac{x_{mm}}{b}(z_>-z_<)}. \quad (D.45)$$

Substituindo (D.34) em (D.23) chega-se a

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi b x_{mn} J_{m+1}^2(x_{mn})} J_m\left(\frac{x_{mn}}{b} \rho'\right) J_m\left(\frac{x_{mn}}{b} \rho\right) e^{jm(\phi-\phi')} e^{\frac{x_{mn}}{b}(z_>-z_<)}. \quad (D.46)$$

Considerando-se, agora, o fato que uma função $f(m)$ pode ser escrita como

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = \sum_{m=-\infty}^{-1} f(m) + f(m=0) + \sum_{m=1}^{\infty} f(m) = f(0) + \sum_{m=1}^{\infty} f(-m) + \sum_{m=1}^{\infty} f(m), \quad (D.47)$$

bem como as seguintes relações

$$J_{-m}(k\rho) = (-1)^m J_m(k\rho), \quad (D.48)$$

$$J_{-m}(k\rho) = (-1)^m J_m(k\rho), \text{ e} \quad (D.49)$$

$$\delta_{m0} = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq 0 \\ 1, & \text{para } m = 0 \end{cases}, \quad (D.50)$$

a função de Green (D.46) pode ser, finalmente, escrita como

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2-\delta_{m0})}{2\pi b x_{mn} J_{m+1}^2(x_{mn})} J_m\left(\frac{x_{mn}}{b} \rho'\right) J_m\left(\frac{x_{mn}}{b} \rho\right) \cos[m(\phi-\phi')] e^{\frac{x_{mn}}{b}(z_>-z_<)} \right]. \quad (D.51)$$

D.3 Potencial eletrostático produzido por um disco utilizando a função de Green

O potencial eletrostático de um disco de raio a e carga q , com distribuição uniforme e rígida em sua superfície, no interior de uma guia de onda circular de raio b , pode ser calculado integrando (D.11) utilizando a função de Green (D.51) e considerando a densidade volumétrica de carga $\rho_v(\vec{r})$ dada por

$$\rho_v(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{q}{\pi a^2} \delta(z - z_j), & \rho \leq a \\ 0 & , a < \rho \leq b \end{cases}, \quad (D.52)$$

Substituindo-se (D.52) em (D.11) tem-se

$$\Phi(\vec{r}, \vec{r}_j) = \frac{q}{\pi a^2 \epsilon_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{r}, \vec{r}'') \delta(z'' - z_j) \rho'' d\rho'' d\phi'' dz'', \quad (D.53)$$

onde $G(\vec{r}, \vec{r}'')$ é dado por (D.51). A análise da integral em ϕ culmina em um importante resultado: somente para $m=0$ existe solução não nula. A integral em ϕ , portanto, vale

$$\int_0^{2\pi} d\varphi'' = 2\pi. \quad (\text{D.54})$$

A integral em ρ , considerando $m=0$, resulta

$$\int_0^a J_0\left(\frac{x_{0n}}{b}\rho''\right)\rho'' d\rho'' = \frac{ab}{x_{0n}} J_1\left(\frac{x_{0n}}{b}a\right). \quad (\text{D.55})$$

Por último, deve-se ser calcular a integral em z , que resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{x_{0n}}{b}|z-z_j|} \right] \delta(z'' - z_j) dz'' = e^{-\frac{x_{0n}}{b}|z-z_j|}. \quad (\text{D.56})$$

Além destes resultados, tem-se que

$$2 - \delta_{m0} = 1. \quad (\text{D.57})$$

O potencial, após substituir (D.54)-(D.57) em (D.53), resulta

$$\Phi(\vec{r}, \vec{r}_j) = \frac{q}{\pi a \epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_1\left(x_{0n} \frac{a}{b}\right) J_0\left(x_{0n} \frac{\rho}{b}\right)}{[x_{0n} J_1(x_{0n})]^2} e^{-\frac{x_{0n}}{b}|z-z_j|} \right]. \quad (\text{D.58})$$

D.4 Campo elétrico utilizando o potencial eletrostático calculado pela função de Green

O campo elétrico produzido pelo potencial eletrostático dado por (D.58) pode ser calculado por meio de da equação

$$\vec{E}(\vec{r}, \vec{r}_j) = -\nabla\Phi(\vec{r}, \vec{r}_j), \quad (\text{D.59})$$

onde o gradiente do potencial escalar, $\nabla\Phi(\vec{r}, \vec{r}_j)$, é dado por

$$\nabla\Phi(\vec{r}, \vec{r}_j) = \left(\frac{\partial\Phi(\vec{r}, \vec{r}_j)}{\partial\rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi(\vec{r}, \vec{r}_j)}{\partial\varphi}, \frac{\partial\Phi(\vec{r}, \vec{r}_j)}{\partial z} \right), \quad (\text{D.60})$$

em coordenadas cilíndricas. Portanto, as componentes do campo elétrico são

$$\begin{cases} E_\rho(\vec{r}, \vec{r}_j) = -\frac{\partial\Phi(\vec{r}, \vec{r}_j)}{\partial\rho} \\ E_\varphi(\vec{r}, \vec{r}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi(\vec{r}, \vec{r}_j)}{\partial\varphi} \\ E_z(\vec{r}, \vec{r}_j) = -\frac{\partial\Phi(\vec{r}, \vec{r}_j)}{\partial z} \end{cases}. \quad (\text{D.61})$$

A primeira conclusão importante é

$$E_\varphi(\vec{r}, \vec{r}_j) = 0, \quad (\text{D.62})$$

uma vez que o potencial $\Phi(\vec{r}, \vec{r}_j)$, dado por (D.58), não depende da variável φ . O campo elétrico na direção radial, após a derivação, resulta

$$E_\rho(\vec{r}, \vec{r}_j) = \frac{q}{\pi ab \epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_1\left(x_{0n} \frac{\rho}{b}\right) J_1\left(x_{0n} \frac{a}{b}\right)}{x_{0n} J_1^2(x_{0n})} e^{-\frac{x_{0n}}{b} |z-z_j|} \right]. \quad (\text{D.63})$$

O campo elétrico na direção axial, após a derivação, é dado por

$$E_z(\vec{r}, \vec{r}_j) = \frac{q}{\pi ab \epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_0\left(x_{0n} \frac{\rho}{b}\right) J_1\left(x_{0n} \frac{a}{b}\right)}{x_{0n} J_1^2(x_{0n})} e^{-\frac{x_{0n}}{b} |z-z_j|} \left(\frac{z-z_j}{|z-z_j|} \right) \right], \quad (\text{D.64})$$

onde o termo $(z-z_j)/|z-z_j|$ foi inserido em (D.64) para considerar a posição do ponto campo em relação ao disco. Se o ponto campo estiver à direita do disco, o campo elétrico axial aponta para o sentido positivo de z e, se o ponto campo estiver à esquerda do disco, o campo elétrico axial aponta para o sentido negativo de z .

D.5 Força elétrica exercida por um disco sobre outro disco

A força elétrica exercida por um disco de raio a e carga q sobre outro disco de mesmo raio e mesma carga, com distribuição uniforme e rígida em sua superfície, ambos com os eixos coincidentes com o eixo dos z , conforme mostrado na FIG. D.1, é dada por

$$\vec{F}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \iiint_V \vec{E}(\vec{r}''', \vec{r}_j) \rho_v(\vec{r}''') d\vec{r}''' , \quad (\text{D.65})$$

Considerando a densidade volumétrica de carga $\rho_v(\vec{r})$ dada por (D.52) e a integração sobre todo o volume do disco, (D.65) resulta

$$\vec{F}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \frac{q}{\pi a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}''', \vec{r}_j) \delta(z''' - z_i) \rho''' d\rho''' d\varphi''' dz''' , \quad (\text{D.66})$$

Ressalta-se que, como o campo elétrico é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = E_\rho(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \hat{a}_\rho + E_z(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \hat{a}_z, \quad (\text{D.67})$$

a força elétrica será da forma

$$\vec{F}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = F_\rho(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \hat{a}_\rho + F_z(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \hat{a}_z, \quad (\text{D.68})$$

Com relação à força elétrica radial, como o versor \hat{a}_ρ varia com a fase φ da seguinte forma

$$\hat{a}_\rho = \cos \varphi \hat{a}_x + \sin \varphi \hat{a}_y, \quad (\text{D.69})$$

torna-se interessante escrever a componente radial do campo elétrico como

$$E_\rho(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \hat{a}_\rho = E_\rho(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \cos \varphi \hat{a}_x + E_\rho(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \sin \varphi \hat{a}_y, \quad (\text{D.70})$$

Com isso, o cálculo da força elétrica radial pode ser realizado considerando-se (D.63) e (D.70) em (D.66). Conclui-se, após o desenvolvimento, que esta componente da força é nula, ou seja,

$$F_\rho(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = 0. \quad (\text{D.71})$$

Com relação à força elétrica axial, substituindo-se (D.64) em (D.66) obtém-se

$$F_z(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \frac{q^2}{\pi^2 a^3 b \epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{J_1\left(x_{0n} \frac{a}{b}\right) J_0\left(\frac{x_{0n}}{b} \rho'''\right)}{x_{0n} J_1^2(x_{0n})} e^{-\frac{x_{0n}}{b} |z'' - z_j|} \left(\frac{z''' - z_j}{|z''' - z_j|} \right) \right] \delta(z''' - z_i) \rho''' d\rho''' d\varphi''' dz'''. \quad (\text{D.72})$$

Os resultados das integrais presentes em (D.72) são os mesmos apresentados em (D.54) - (D.56). Após a substituição destes resultados, a força elétrica axial resulta

$$F_z(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \frac{2q^2}{\pi a^2 \epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{J_1\left(x_{0n} \frac{a}{b}\right)}{x_{0n} J_1(x_{0n})} \right]^2 e^{-\frac{x_{0n}}{b} |z_i - z_j|} \left(\frac{z_i - z_j}{|z_i - z_j|} \right) \right\}. \quad (\text{D.73})$$

A expressão (D.73) é a força elétrica sobre um disco de carga devido a outro disco, ambos de raio a e carga elétrica q , no interior de um tubo de deriva de raio b . A FIG. D.2 mostra a intensidade desta força para $b/a=2$ e como função da distância axial normalizada $\left| (z_i - z_j)/a \right|$.

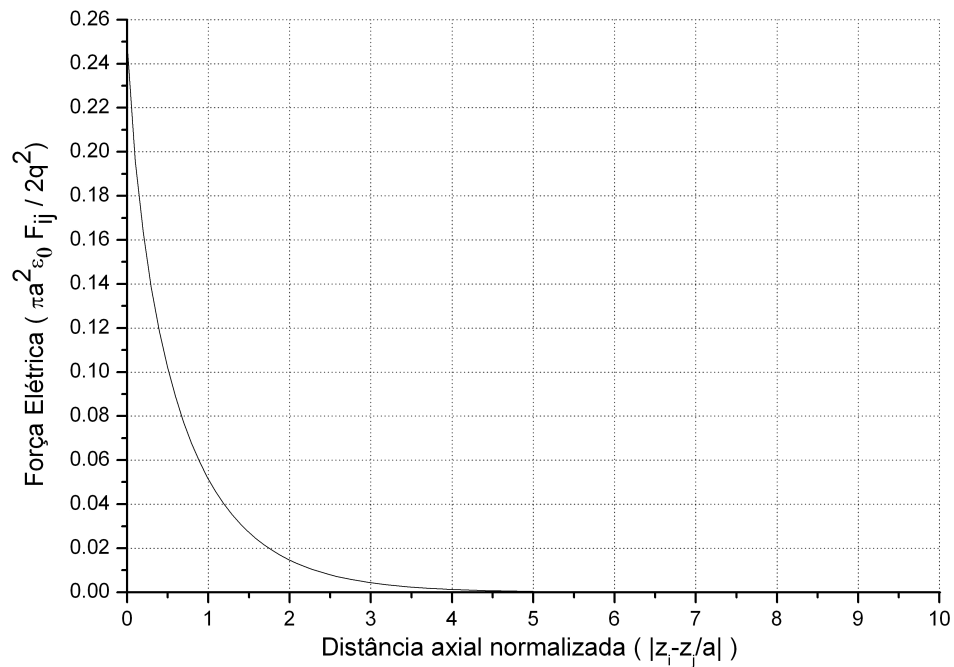


FIGURA D.2 – Gráfico da intensidade força elétrica (D.73) para $b/a=2$ e como função da distância normalizada $\left| (z_i - z_j)/a \right|$.

É de relevância observar que a força elétrica, dada por (D.73), é uma força de curto alcance porque, para distâncias normalizadas superiores a $5a$, a força cai praticamente à zero. Este fato é de muita importância tendo em vista que na descrição da dinâmica do feixe de elétrons, como boa aproximação, não é necessário considerar a contribuição de todos os discos que constituem o feixe no cálculo da força resultante sobre um determinado disco, mas somente aqueles que estão no alcance da ordem de $5a$.

Outro fato de relevância é que, para distâncias muito pequenas entre dois discos, a força tende para um valor finito, não divergindo como ocorre entre duas partículas puntiformes. Pode-se prever, a partir deste resultado, ou seja, do valor finito da força entre dois discos muito próximos, que é possível a ultrapassagem entre eles.

D.6 Conclusão do Apêndice D

Neste apêndice descreveu-se a seqüência de cálculos que resultam na força elétrica de carga espacial entre dois discos de carga representativos do feixe de elétrons de acordo com o modelo de discos. Iniciou-se o desenvolvimento pelo cálculo pelo potencial eletrostático produzido por um disco de carga, a partir da solução equação de Poisson e utilizando a técnica da Função de Green. Em seguida, como o campo elétrico produzido por um disco de carga é dado pelo gradiente do potencial escalar, calcularam-se as componentes deste campo para, finalmente, apresentar a expressão da força elétrica exercida por um disco de carga sobre outro disco que, devido ao problema físico de interesse ser conforme a FIG. D.1, é somente axial. Inicialmente, justificou-se a utilização da equação de Poisson para a solução do problema no caso não-relativista. Em seguida, a solução da equação de Poisson foi calculada utilizando-se a técnica da expansão da função de Green em termos das autofunções para o problema de um cilindro infinitamente longo e perfeitamente condutor de raio b . Em seguida, como a solução do método da função Green satisfaz a equação de Poisson, foi possível calcular o potencial eletrostático em qualquer ponto no interior do domínio devido, neste caso, a um disco da carga. Como o campo elétrico é função do gradiente (negativo) do potencial escalar, calculou-se a força elétrica experimentada por um disco de carga devido à presença de outro disco dentro do domínio. O resultado, na forma de gráfico, permitiu concluir que tal força é de curto alcance e, além disso, que para distâncias muito pequenas entre dois discos, a força tende para um valor finito, tornando possível a ultrapassagem entre eles. É de relevância observar que este resultado permite calcular a força de carga espacial

resultante sobre um disco, que envolve a soma das contribuições de todos os discos do domínio (princípio da superposição).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] VARIAN, R.H.; VARIAN, S.F. A high frequency oscillator and amplifier. *Journal of Applied Physics*, v. 10, p. 321-237, 1939.
- [2] NORDSIEK, A. Theory of the large signal behavior of traveling-wave amplifiers. *Proc. IRE*, v. 41, p. 630-637, 1953.
- [3] WÖHLBIER, J.G. *Nonlinear distortion and suppression in traveling wave tubes: insights and methods*. 2003. Dissertation (Doctor of Philosophy) – University of Wisconsin-Madson, USA.
- [4] COLLIN, R.E. *Fundations for Microwave Engineering*. 2. ed. New York, N.Y.: McGraw-Hill, 1992. cap. 9.
- [5] BASU, B.N. *Electromagnetic theory and applications in beam-wave electronics*. Singapore: Word Scientific, 1996.
- [6] ROWE, J.E. *Nonlinear Electron-wave Interaction Phenomena*. New York, N.Y.: Academic, 1965.
- [7] LAU, Y.Y.; CHERNIN, D.P.; WILSEN, C.; GILGENBACH, R.M. Theory of intermodulation in a klystron. *IEEE Trans. On Plasma Science*, v. 28, n. 3, 2000.
- [8] WÖHLBIER, J.G.; BOOSKE, J.H. Nonlinear space charge wave theory of distortion in a klystron. *IEEE Transactions on Electron Devices*, v. 52, n. 5, May 2005.
- [9] BRANCH Jr., G.M. Electron beam coupling in interaction gaps of cylindrical symmetry. *IRE Transactions on Electron Devices*, v. 8, pp. 193-207, May 1961.
- [10] WILSEN, C.B.; LUGINSLAND, J.W.; LAU, Y.Y.; ANTHONSEN T.M.; CHERNIN, D.P.; TCHOU, P. M.; KEYSER, M. W.; GILGENBACH, R.M.; LUDEKING, L. D. A simulation study of beam loading on a cavity. *IEEE Transactions on Plasma Science*, v. 30, n. 3, June 2002.
- [11] KOWALCZYK, R.; LAU, Y.Y.; GILGENBACH, R.M. Effects of a finite magnetic field on the beam loading of a cavity. *IEEE Transactions on Electron Devices*, v. 51, n. 9, September 2004.
- [12] KOWALCZYK, R.; LAU, Y.Y.; ANTHONSEN T.M.; LUGINSLAND, J.W.; CHERNIN, D.P.; WILSEN, C.B.; TANG, W.; GILGENBACH, R.M. AC space charge effects on beam loading of a cavity. *IEEE Transactions on Electron Devices*, v. 52, n. 9, September 2005.
- [13] JACKSON, J.D. *Classical Electrodynamics*. 2. ed. New York, N.Y: John Wiley & Sons, 1975.

- [14] SLATER, J.C. *Microwave Electronics*. New York, N.Y.: Dover Publications, 1950.
- [15] BIRDSALL, C.K.; LANGDON, A.B. *Plasma Physics via Computer Simulation*. New York, N.Y.: Adam Hilger, 1991.
- [16] BOYCE, W. E.; DI PRIMA, R. C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 2. ed. New Jersey, N.J.: John Wiley & Sons, 1992.
- [17] PRESS, W.H.; TEUKOLSKY, S.A.; VETTERLING, W.T.; FLANNERY, B.P. *Numerical Recipes in C++: The Art of Scientific Computing*. 2. ed. New York, N.Y.: Cambridge University, 2002.
- [18] BARKER, R. J.; BOOSKE; J. H.; LUHMANN Jr., N. C.; NUSINOVICH, G. S. *Modern Microwave and Millimeter-wave Power Electronics*. 2. ed. New Jersey, N.J.: John Wiley & Sons, 2005.
- [19] ARFKEN, G.B. *Mathematical Methods for Physicists*. 4. ed. San Diego, CA: Academic Press, 1995.
- [20] BRAGA, C.L.R. *Notas de Física Matemática*. 1. ed. São Paulo, S.P.: Editora Livraria da Física, 2006.
- [21] BUTKOV, E. *Mathematical Physics*. San Diego, CA: Addison-Wesley Publishing Company, 1968.
- [22] McLACHLAN, N.W. *Bessel Functions for Engineers*. 2. ed. London: Oxford University, 1941.
- [23] POZAR, D.M. *Microwave Engineering*. 2. ed. San Diego, CA: Addison-Wesley Publishing Company, 1993.
- [24] PANOFSKY, W.K.H. *Classical Electricity and Magnetism*. 2. ed. New York, N.Y.: Addison-Wesley, 1956.
- [25] FRENKEL, J. *Princípios de eletrodinâmica clássica*. São Paulo, S.P.: EDUSP, 1996.
- [26] REITZ, J.R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R.W. *Foundations of Electromagnetic Theory*. 4. ed. New York, N.Y.: Addison Wesley, 1993.
- [27] SPIEGEL, M.R. *Schaum's outline of theory and problems of Fourier Analysis*. New York, NY: McGraw-Hill, 1974.
- [28] FIGUEIREDO, D.G. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. 4. ed. Rio de Janeiro, R.J.: IMPA, 2003.
- [29] WILSEN, C. B. *Theory of intermodulation in high microwave amplifiers*. 2001. Dissertation (Doctor of Philosophy) – University of Michigan, USA.

- [30] LEE, T.G.; KONRAD, G.T.; OKAZAKI, Y.; WATANABE, M.; YONEZAWA, H. The design and performance of a 150-MW klystron at S band. *IEEE Transactions on Plasma Science*, v. 13, n. 6, December 1985.
- [31] YONEZAWA, H.; OKAZAKI, Y. *A one-dimensional disk model simulation for klystron design*. SLAC technical note SLAC-TN-84-5: 1984.
- [32] ZHANG, K., LI, D. *Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics*. 2. ed. Leipzig, Germany: Springer, 2008.
- [33] CST, COMPUTER SIMULATION TECHNOLOGY. *CST STUDIO SUITE™ 2008 getting started*. 2008.
- [34] WARNECKE, R.; GUÉNARD P. *Les tubes électroniques – A commande par modulation de vitesse*. Paris, França: Cauthier-Villars, 1951.
- [35] ONEDERA, T.; HOASHI, T. Generalized representation of beam coupling coefficient in ungridded reentrant cavity. *IEEE Transactions on Electron Devices*, v. 45, n. 8, August 1998.
- [36] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I.A. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. New York, USA: Dover Publications, 1972.