UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
FACULDADE DE MEDICINA DE RIBEIRÃO PRETO
INSTITUTO DE QUÍMICA DE SÃO CARLOS

GABRIEL LOPES DA ROCHA

**Aplicação da Teoria de Representação de Funções
Isotrópicas em Sólidos Hiperelásticos com Duas Direções
de Simetria Material**

São Carlos

2017

GABRIEL LOPES DA ROCHA

**Aplicação da Teoria de Representação de Funções
Isotrópicas em Sólidos Hiperelásticos com Duas
Direções de Simetria Material**

Versão Corrigida

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Interunidades em Bioengenharia – Escola de Engenharia de São Carlos/ Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto/ Instituto de Química de São Carlos da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em Ciências.

Área de Conhecimento: Bioengenharia.

Orientador: Prof. Adair Roberto Aguiar, PhD.

São Carlos

2017

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

R672a Rocha, Gabriel Lopes da
Aplicação da teoria de representação de funções isotrópicas em sólidos hiperelásticos com duas direções de simetria material / Gabriel Lopes da Rocha; orientador Adair Roberto Aguiar. São Carlos, 2017.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação Interunidades em Bioengenharia e Área de Concentração em Bioengenharia -- Escola de Engenharia de São Carlos; Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto; Instituto de Química de São Carlos, da Universidade de São Paulo, 2017.

1. Elasticidade não linear. 2. Funções isotrópicas. 3. Base de integridade mínima. 4. Compósito. 5. Tecido biológico. I. Título.

Programa de Pós-Graduação
Interunidades Bioengenharia
EESC / FMRP / IQSC

GABRIEL LOPES DA ROCHA

Título: "Aplicação da Teoria de Representação de Funções Isotrópicas em Sólidos Hiperelásticos com Duas Direções de Simetria Material"

TESE APRESENTADA AO PROGRAMA DE
PÓS - GRADUAÇÃO INTERUNIDADES EM
BIOENGENHARIA - EESC/FMRP/IQSC DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO PARA OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE DOUTOR EM CIÊNCIAS NA ÁREA DE
BIOENGENHARIA.

Data da defesa: 09/08/2017

Prof. Dr. Adair Roberto Aguiar (Orientador)	Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP
Assinatura: <i>Adair R. Aguiar</i>	Resultado: <i>Aprovado</i>

Prof. Dr. Waldeck Schützer	Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
Assinatura: <i>Waldeck Schützer</i>	Resultado: <i>Aprovado</i>

Dr. Edmar Borges Theóphilo Prado	Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP
Assinatura: <i>[Signature]</i>	Resultado: <i>Aprovado</i>

Prof. Dr. Paulo Mazzoncini de Azevedo Marques	Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto – FMRP/USP
Assinatura: <i>Paulo Mazzoncini</i>	Resultado: <i>Aprovado</i>

Prof. Dr. José Marcos Alves	Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP
Assinatura: <i>J. M. Alves</i>	Resultado: <i>Aprovado</i>

Homologado em: ____/____/____

Dedicatória

Dedico esta tese aos meus pais José Fernando e Armelinda, pelo amor, suporte e, principalmente, pelos ensinamentos que formaram os alicerces de minha história. Ao meu irmão Filipe, pelo apoio e incentivo desde o princípio deste projeto. À minha noiva, Narayana, por todo amor, afeto e compreensão ao longo do período de elaboração deste trabalho.

Agradecimento

Ao meu orientador Prof. Adair Roberto Aguiar, PhD, pela orientação, atenção, apoio, dedicação, paciência, e, principalmente, pela convivência e pelo exemplo de honestidade e competência durante a realização deste trabalho.

Aos meus amigos, sem os quais seria impossível realizar este trabalho.

Ao Programa de Pós-Graduação Interunidades em Bioengenharia, pela oportunidade de realizar o doutorado.

À Capes, pela concessão da bolsa de doutorado.

Resumo

ROCHA, G. L. **Aplicação da Teoria de Representação de Funções Isotrópicas em Sólidos Hiperelásticos com Duas Direções de Simetria Material**. 2017. 60p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação Interunidades Bioengenharia – EESC/FMRP/IQSC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

Aplicamos a teoria de representação de funções isotrópicas para determinar o número mínimo de invariantes independentes necessários para caracterizar completamente a densidade de energia de deformação de sólido hiperelástico com duas direções de simetria material. Expressamos a densidade de energia em termos de dezoito invariantes e extraímos um conjunto de dez invariantes para analisar dois casos de simetria material. No caso de direções ortogonais, recuperamos o resultado clássico de sete invariantes e oferecemos uma justificativa para a escolha dos invariantes encontrados na literatura. Se as direções não são ortogonais, descobrimos que o número mínimo também é sete e corrigimos um erro em fórmula encontrada na literatura. Uma densidade de energia deste tipo é usada para modelar, na escala macroscópica, materiais de engenharia, tais como compósitos reforçados com fibras, e tecidos biológicos, tais como ossos.

Palavras-Chave: Elasticidade não linear. Funções isotrópicas. Base de integridade mínima. Compósito. Tecido biológico.

Abstract

ROCHA, G. L. **Application of the Theory of Isotropic Function Representation in Hyperelastic Solids with Two Materials Symmetry Directions**. 2017. 60p. Thesis (Doctorate) – Programa de Pós-Graduação Interunidades Bioengenharia – EESC/FMRP,IQSC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

We determine the minimum number of independent invariants that are needed to characterize completely the strain energy density of a hyperelastic solid having two distinct material symmetry directions. We use a theory of representation of isotropic functions to express this energy density in terms of eighteen invariants and extract a set of ten invariants to analyze two cases of material symmetry. In the case of orthogonal directions, we recover the classical result of seven invariants and offer a justification for the choice of invariants found in the literature. If the directions are not orthogonal, we find that the minimum number is also seven and correct a mistake in a formula found in the literature. An energy density of this type is used to model, on the macroscopic scale, engineering materials, such as fiber-reinforced composites, and biological tissues, such as bones.

Keywords: Nonlinear elasticity. Isotropic functions. Minimum integrity base. Composite material. Biological tissue.

Lista de Figuras

Figura 1 - Compósitos elásticos reforçados com duas famílias de fibras.....	20
Figura 2 - Modelo da parede livre do ventrículo	20

SUMÁRIO

1. Introdução	19
2. Mecânica do Contínuo	23
2.1 Conceitos Matemáticos Preliminares	23
2.2 Movimento	28
2.3 Princípios de Conservação	32
2.4 Relações Constitutivas de Materiais Elásticos	34
3. Teoria de Representação de Funções Isotrópicas	39
3.1 Fundamentos da Teoria de Representação de Funções Isotrópicas	39
3.2 Revisão Bibliográfica	42
3.3 Representação de Funções Anisotrópicas	47
4. Aplicação da Teoria de Representação	51
4.1 Resultados Preliminares	52
4.2 Caso Geral de Vetores Arbitrários	55
5. Conclusões	61
Apêndice	63
Referências	67

1. Introdução

A teoria do contínuo descreve o comportamento físico dos materiais considerando-os como indefinidamente divisíveis, cujas partículas que os compõem possuem um volume infinitesimal e que na vizinhança de cada partícula existem inúmeras outras partículas.

A teoria de representação de funções isotrópicas desempenha um papel importante no desenvolvimento da teoria do contínuo, pois as relações constitutivas que determinam o comportamento físico dos materiais podem ser modeladas por funções escalares, vetoriais e tensoriais de variáveis escalares, vetoriais e tensoriais, invariantes sob o grupo de simetria do material formado por tensores ortogonais (PIPKIN; WINEMAN, 1963). Esta teoria tem por objetivo determinar um conjunto irredutível de funções escalares, denominadas invariantes, e um conjunto de vetores e tensores, denominados geradores, que expressem de forma única as funções escalar, vetorial e tensorial invariantes a um subconjunto do conjunto dos tensores ortogonais, como função dos invariantes, no caso das funções escalares, e combinação linear dos geradores, no caso das funções vetoriais e tensoriais. Uma função é isotrópica se é invariante em relação ao conjunto de todos os tensores ortogonais; caso contrário, é anisotrópica. Denominamos base de integridade escalar e tensorial o conjunto de invariantes e o conjunto de geradores, respectivamente.

Utilizando diferentes metodologias, Pennisi e Trovato (1987) e Zheng (1993) mostram que os invariantes de funções isotrópicas escalar e os geradores de funções isotrópicas vetorial, tensorial simétrica e tensorial antissimétrica de um número finito de tensores simétricos, tensores antissimétricos e vetores propostos por Boehler (1977) formam uma base de integridade escalar e tensorial. Há de se destacar também o trabalho de Liu (1982), no qual afirma-se que as bases de integridade escalar e tensorial de funções anisotrópicas escalares, vetoriais e tensoriais invariantes, isto é, funções invariantes em relação a um subconjunto dos tensores ortogonais, são expressas em termos das bases de integridade escalar e tensorial de funções isotrópicas.

Em seu trabalho sobre uma teoria constitutiva para compósitos hiperelásticos reforçados com fibras, Spencer (1984) argumenta que a densidade de energia de deformação ψ_e depende de sete invariantes quando as direções das famílias de fibras são ortogonais entre si e nove, caso contrário. Os sete invariantes têm sido utilizados para caracterizar a função densidade de energia de deformação de materiais elásticos ortotrópicos desde então. Para obter os nove

invariantes para o caso de fibras não-ortogonais, Spencer (1984) introduz um conjunto de dez invariantes juntamente com uma relação polinomial que lhe permite expressar um dos invariantes como uma função de valor único dos restantes.

A teoria constitutiva proposta por Spencer (1984) modela sólidos cuja microestrutura é formada por uma matriz homogênea com duas famílias de fibra, conforme ilustrado na Fig. 1. Nesta figura, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são versores que representam as direções de famílias de fibras, ou, eixos de simetria material do sólido, com θ sendo o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Essa função densidade de energia é utilizada na modelagem de materiais de engenharia, tais como compósitos reforçados com fibras, e tecidos biológicos, tais como os tecidos ósseo e muscular cardíaco.

Figura 1- Compósitos elásticos reforçados com duas famílias de fibras.

Por exemplo, Avazmohammadi et al. (2017) utilizam a forma geral da função densidade de energia proposta por Spencer (1984) para modelar a parede livre do ventrículo direito (*Right Ventricular Free Wall-RVFW*), conforme mostrado na foto à esquerda da Fig. 2. Uma representação esquemática do RVFW mostrado na foto é apresentada na figura à direita. Nesta figura, as linhas azuis e vermelhas representam, respectivamente, as fibras de colágeno e miocárdicas na parede livre do ventrículo direito, os versores $\mathbf{n}^c$ e $\mathbf{n}^m$ representam as orientações aproximadas destas fibras e θ^c e θ^m são os ângulos entre estes versores e o versor $\mathbf{e}_1'$ da base ortonormal $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$, respectivamente.

Neste trabalho, mostramos que:

- a relação polinomial apresentada por Spencer (1984) está incorreta. Deduzimos a expressão correta para expressar um dos dez invariantes como uma função de valor único dos restantes;

- o número de invariantes independentes da energia de deformação de compósitos elásticos reforçados com duas famílias de fibras com direções fixas é sete e não nove, como proposto por Spencer (1984), e nem seis, como afirmado por Shariff e Bustamante (2015).

Figura 2- Modelo da parede livre do ventrículo direito (Adaptado de Avazmohammadi et al. (2017)).

Com estes resultados, contribuímos para o modelamento de materiais na mecânica do contínuo. Este trabalho está organizado conforme descrito a seguir. No Capítulo 2, de forma sucinta, revisamos conceitos matemáticos necessários para o entendimento dos capítulos e seções posteriores, apresentamos as leis que regem a mecânica do contínuo e apresentamos a forma geral da relação constitutiva de um material elástico. No Capítulo 3, apresentamos conceitos fundamentais da teoria de representação de funções isotrópicas, apresentamos uma revisão bibliográfica do desenvolvimento dessa teoria e relacionamos as bases de integridade escalar e tensorial de funções isotrópicas com as de funções anisotrópicas. No Capítulo 4, determinamos o número mínimo de invariantes independentes necessários para caracterizar completamente a densidade de energia de deformação de um compósito reforçado por duas famílias de fibras, no caso em que as direções destas fibras não são perpendiculares. Finalmente, apresentamos as conclusões finais e as referências utilizadas nesse trabalho.

2. Mecânica do Contínuo

De acordo com a teoria do contínuo, corpos ocupam uma região no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, o espaço tridimensional real. A mecânica do contínuo, por sua vez, compreende o estudo das causas e dos efeitos do movimento em corpos contínuos.

O estudo da mecânica do contínuo pode ser dividido em duas partes. A primeira parte concerne às leis gerais que governam a mecânica, tais como as leis de conservação de massa, de conservação do momentum linear (caso geral da 2ª Lei de Newton) e de momentum angular. Matematicamente, essas leis possuem duas formas: a forma integral, utilizada para um volume finito e a forma diferencial, derivada da forma integral e utilizada para partículas do volume finito. A segunda parte do estudo concerne às relações constitutivas e os princípios que estas devem satisfazer para representar aspectos do comportamento físico que são particulares a cada material, ou, classe de materiais.

Neste capítulo, apresentamos sumariamente os fundamentos da mecânica do contínuo com o objetivo de descrever o comportamento mecânico de materiais elásticos. Para isso dividimos o capítulo em quatro Seções. Na Seção 2.1, são revisados conceitos da álgebra tensorial como vetores, produto escalar, produto vetorial, produto misto, tensores, produto diádico, etc. e conceitos da análise do $\mathbb{R}^3$ como conjunto aberto, fechado, compacto, conexo, funções escalares e vetoriais diferenciáveis e o teorema da divergência. Na Seção 2.2, apresentamos os elementos da cinemática dos corpos contínuos. Na Seção 2.3, apresentamos as leis de conservação da mecânica. Finalmente, na Seção em 2.4, apresentamos as relações constitutivas de matérias elásticos.

2.1 Conceitos Matemáticos Preliminares

Nesta seção, apresentamos os conceitos matemáticos de forma construtiva e sucinta, tendo como objetivo fornecer ao leitor a notação e os resultados necessários para a melhor compreensão das seções e dos capítulos posteriormente apresentados.

Designamos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{V}$ o conjunto de números reais, o conjunto das ternas ordenadas de número reais e o conjunto dos vetores no espaço tridimensional Euclidiano. Denominamos *escalar*, *ponto* e *vetor* os elementos de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathcal{V}$.

O vetor $\mathbf{u}$ é *unitário* se $\|\mathbf{u}\|=1$, sendo $\|\cdot\|$ a norma euclidiana de um vetor. Vetores unitários são chamados de *versores*. O *produto escalar* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é o escalar que satisfaz $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$, em que $\cos \theta_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$ é o cosseno do ângulo $\theta_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$ entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, com $0 \leq \theta_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \leq \pi$. Os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são *ortogonais* se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, e *ortonormais* se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são unitários e ortogonais. Denotamos $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ o *produto vetorial* dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ o vetor que satisfaz $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \mathbf{n}$, em que $\sin \theta_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$ é o seno do ângulo $\theta_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$ entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e $\mathbf{n}$ é o versor mutuamente ortogonal a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ que satisfaz $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \geq 0$. Se os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não são paralelos, o escalar $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ determina a *área do paralelogramo* de lados $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Se os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ não são coplanares, o valor absoluto do *produto misto* $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ é igual ao *volume do paralelepípedo* de lados $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Designamos Lin o conjunto das transformações lineares $\mathbf{T}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ que associa cada vetor $\mathbf{u}$ ao vetor $\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{u}$. Denominamos *tensor* os elementos de Lin . O *tensor transposto* $\mathbf{T}^T$ do tensor $\mathbf{T}$ é o único tensor que satisfaz $\mathbf{T}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{u}$, para todo vetor $\mathbf{u}$. O tensor $\mathbf{S}$ é *simétrico* se $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ e o tensor $\mathbf{W}$ é *antissimétrico* se $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$. Denotamos Sym o conjunto dos tensores simétricos e Skw o conjunto dos tensores antissimétricos. O tensor $\mathbf{T}$ é *invertível* se existir um tensor $\mathbf{T}^{-1}$, denominado *tensor inverso* de $\mathbf{T}$, tal que $\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{I}$, sendo $\mathbf{I}$ o *tensor identidade* que satisfaz a igualdade $\mathbf{I}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ para todo vetor $\mathbf{u}$. O tensor $\mathbf{Q}$ é *ortogonal* se $\mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ para todos os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ o que implica que $\mathbf{Q}$ é ortogonal se $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$. Denotamos Ort o conjunto dos tensores ortogonais.

O *produto diádico* $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é um tensor que satisfaz $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{a} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{u}$ para todo vetor $\mathbf{a}$. O *tensor transposto* $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^T$ do tensor $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ satisfaz $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^T = \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$. O *Sistema de Coordenadas Cartesianas* (S.C.C.) $\{\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ tem *orientação positiva* se $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = 1$ e *orientação negativa* se $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = -1$, sendo $\mathbf{o}$ o ponto de *origem* do sistema e $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ vetores unitários mutualmente ortogonais. O vetor $\mathbf{u}$, o tensor $\mathbf{T}$, o tensor simétrico $\mathbf{S}$ e o tensor antissimétrico $\mathbf{W}$ são expressos no S.C.C.

$$\{\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \quad \text{por} \quad \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{T} = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j), \quad \mathbf{S} = \sum_{i,j=1}^3 S_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad \text{e}$$

$$\mathbf{W} = \sum_{i,j=1}^3 W_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j), \quad \text{sendo} \quad u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i, \quad T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_j, \quad S_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S} \mathbf{e}_j \quad \text{com} \quad S_{ij} = S_{ji} \quad \text{e}$$

$W_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{W} \mathbf{e}_j$ com $W_{ij} = -W_{ji}$, para $i, j = 1, 2, 3$, as componentes de $\mathbf{u}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{S}$ e $\mathbf{W}$ com relação a $\{\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

A partir do exposto acima, observamos que, em geral, o vetor $\mathbf{u}$ possui até *três* componentes independentes u_i , o tensor $\mathbf{T}$ possui até *nove* componentes independentes T_{ij} , o tensor $\mathbf{S}$ possui até *seis* componentes independentes S_{ij} e o tensor antissimétrico $\mathbf{W}$ possui até *três* componentes independentes W_{ij} , com $i, j = 1, 2, 3$. Geralmente, um vetor possui o mesmo número de componentes independentes de um tensor antissimétrico, sugerindo assim que existe uma relação entre vetores e tensores antissimétricos.

Seja $\{\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ um S.C.C. positivo. Para qualquer tensor $\mathbf{T}$ e vetor $\mathbf{u}$, definimos o vetor $\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{T}] = \sum_{i,j,k=1}^3 e_{ijk} T_{jk} \mathbf{e}_i$ e o tensor antissimétrico $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u} = \sum_{i,j,k=1}^3 e_{ijk} u_k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, em que e_{ijk} é o símbolo de permutação, o qual satisfaz $e_{ijk} = 1$ se $ijk \in \{123, 231, 312\}$, $e_{ijk} = -1$ se $ijk \in \{321, 213, 132\}$, $e_{ijk} = 0$ nos demais casos, com $i, j, k = 1, 2, 3$. Podemos verificar que $\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}] = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ para todos os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Denominamos $\mathbf{v}$ *vetor axial* do tensor antissimétrico $\mathbf{W}$ se $\mathbf{W}\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ para todo vetor $\mathbf{u}$. Podemos verificar a seguinte relação biunívoca entre vetores e tensores antissimétricos: se $\mathbf{v}$ é o *vetor axial* do tensor antissimétrico $\mathbf{W}$ então $\mathbf{W} = \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{v}$ e $\mathbf{v} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{W}]$.

Seja $\{\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ um S.C.C. positivo, designamos $\text{tr } \mathbf{T} = \sum_{i,j=1}^3 T_{ii}$ e $\det \mathbf{T} = \frac{(\mathbf{T}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{T}\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3}$ o *traço* e o *determinante* do tensor $\mathbf{T}$, respectivamente. Os escalares $\text{tr } \mathbf{T}$ e $\det \mathbf{T}$ não dependem da escolha de $\{\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Além disso, se $d\mathbf{v}$ é o volume do paralelepípedo de lados $\mathbf{T}\mathbf{e}_1$, $\mathbf{T}\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{T}\mathbf{e}_3$ e dV o volume do paralelepípedo de lados $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$, então $\det \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{v}}{dV}$.

O tensor $\mathbf{T}$ *preserva a orientação do sistema de coordenadas* $\{\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ se $\det \mathbf{T} > 0$. O conjunto de tensores que preservam a orientação é denotado por Lin^+ . Utilizando as definições

apresentadas, podemos verificar que se $\mathbf{Q} \in \text{Ort}$ então $\det \mathbf{Q} = \pm 1$. O tensor ortogonal $\mathbf{Q}$ é denominado *rotação* se $\det \mathbf{Q} = 1$ e *reflexão* se $\det \mathbf{Q} = -1$. Denotamos Ort^+ o conjunto das rotações e Ort^- o conjunto das reflexões, sendo que $\text{Ort} = \text{Ort}^+ \cup \text{Ort}^-$ e $\text{Ort}^+ \cap \text{Ort}^- = \emptyset$.

O tensor $\mathbf{F}$ é *positivo definido* se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}\mathbf{u} \geq 0$, para todo vetor $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}\mathbf{u} = 0$ implica que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Se $\mathbf{F}$ é um tensor tal que $\det \mathbf{F} > 0$, então o *Teorema da Decomposição Polar* assegura que existem tensores simétricos positivos definidos $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ e uma rotação $\mathbf{R}$ tal que o tensor $\mathbf{F}$ é decomposto de maneira única por $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$.

O *autovalor* λ do tensor $\mathbf{T}$ associado ao *autovetor* unitário $\mathbf{u}$ é um escalar, ou, número complexo que satisfaz $\mathbf{T}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. O tensor $\mathbf{T}$ possui até três autovalores distintos λ_1 , λ_2 e λ_3 que são raízes do *polinômio característico* $\lambda^3 - I_1(\mathbf{T})\lambda^2 + I_2(\mathbf{T})\lambda - I_3(\mathbf{T}) = 0$, em que $I_1(\mathbf{T}) = \text{tr } \mathbf{T}$, $I_2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}[(\text{tr } \mathbf{T})^2 - \text{tr } \mathbf{T}^2]$ e $I_3(\mathbf{T}) = \det \mathbf{T}$ são os *invariantes principais* do tensor $\mathbf{T}$. Pelo Teorema Espectral se $\mathbf{S}$ é um tensor simétrico, seus autovalores são reais.

O Teorema de Cayley-Hamilton assegura que todo tensor $\mathbf{T}$ satisfaz sua própria equação característica, isto é, $\mathbf{T}^3 - I_1(\mathbf{T})\mathbf{T}^2 + I_2(\mathbf{T})\mathbf{T} - I_3(\mathbf{T})\mathbf{I} = \mathbf{O}$, com $\mathbf{I}$ o tensor identidade e $\mathbf{O}$ o tensor nulo que satisfaz $\mathbf{O}\mathbf{u} = \mathbf{0}$, sendo $\mathbf{0}$ o *vetor nulo* tal que $\|\mathbf{0}\| = 0$. Do teorema de Cayley-Hamilton, obtemos a relação $\det \mathbf{T} = \frac{1}{3}\{\text{tr } \mathbf{T}^3 + \frac{1}{2}[(\text{tr } \mathbf{T})^2 - 3\text{tr } \mathbf{T}^2]\text{tr } \mathbf{T}\}$.

Seja $\mathbf{x}_0$ um ponto e $\varepsilon > 0$ um escalar. Denotamos $B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}$ a *bola aberta* de raio ε e centro em $\mathbf{x}_0$. Se $B \subset \mathbb{R}^3$, então há apenas três possibilidades mutuamente excludentes: $\mathbf{x}_0$ é *ponto interior* de B , isto é, existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \subset B$; $\mathbf{x}_0$ é *ponto exterior* de B , isto é, existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^3 - B$, sendo $\mathbb{R}^3 - B$ o *conjunto complementar* de B ; $\mathbf{x}_0$ é *ponto da fronteira* de B , isto é, para todo ε existe pontos em $B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ que são interiores e pontos que são exteriores a B . Designamos $\text{Int}(B)$, $\text{Ext}(B)$ e $\text{Fr}(B)$ o conjunto dos pontos interiores, exteriores e da fronteira de B .

O conjunto B é *aberto* se $B = \text{Int}(B)$ e *fechado* se $B = \text{Int}(B) \cup \text{Fr}(B)$. O conjunto B é *limitado* se existir $\mathbf{x}_0 \in B$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $B \subset B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$; caso contrário, é *ilimitado*. O conjunto B é *compacto* se é limitado e fechado. O conjunto B é *desconexo* se existirem dois

subconjuntos abertos não vazios $X, Y \subset B$ tais que $X \cup Y = B$ e $X \cap Y = \emptyset$; caso contrário, B é conexo.

Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, limitado e conexo e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, a função escalar $\varphi: B \times I \rightarrow \mathbb{R}$ e a função vetorial $\mathbf{v}: B \times I \rightarrow \mathcal{V}$ são:

a) contínuas em $(\mathbf{x}_0, t_0) \in B \times I$ se

$$\lim_{(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}_0, t_0)} \varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}_0, t_0) \text{ e } \lim_{(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}_0, t_0)} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0);$$

b) diferenciáveis de primeira ordem em relação a t em $(\mathbf{x}_0, t_0) \in B \times I$ se existirem os limites

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{x}_0, t_0 + h) - \varphi(\mathbf{x}_0, t_0)}{h} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_0, t_0)}{\partial t}$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0 + h) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0)}{h} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0)}{\partial t};$$

c) diferenciáveis de primeira ordem em relação a $\mathbf{x}$ em $(\mathbf{x}_0, t_0) \in B \times I$ se existirem transformações lineares $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}: B \times I \rightarrow \mathcal{V}$ e $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}: B \times I \rightarrow \text{Lin}$ tais que

$$\varphi(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}, t_0) = \varphi(\mathbf{x}_0, t_0) + \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_0, t_0)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{h} + o(\mathbf{h})$$

e

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}, t_0) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0) + \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{h} + o(\mathbf{h}),$$

sendo $o: B \rightarrow \mathbb{R}$ e $o: B \rightarrow B$ funções escalar e vetorial que satisfazem

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}} \frac{|o(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}} \frac{\|o(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \text{ e } |\cdot| \text{ o módulo de um escalar. Quando existem, } \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_0, t_0)}{\partial \mathbf{x}} \text{ e}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0)}{\partial \mathbf{x}} \text{ são chamados } \textit{vetor gradiente} \text{ e } \textit{tensor gradiente} \text{ de } \varphi \text{ e } \mathbf{v} \text{ em } (\mathbf{x}_0, t_0).$$

As funções escalar φ e vetorial $\mathbf{v}$ são *de classe* C_n se são diferenciáveis em relação a $\mathbf{x}$ e t em todo ponto $(\mathbf{x}_0, t_0) \in B \times I$ até a ordem n e suas derivadas parciais são contínuas.

Seja $\mathbf{v}$ uma função vetorial de classe C_2 . Denotamos o escalar $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0) = \operatorname{tr} \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0)}{\partial \mathbf{x}}$

o *divergente* da função vetorial $\mathbf{v}$ no ponto $(\mathbf{x}_0, t_0) \in B \times I$. Seja $\mathbf{T}: B \times I \rightarrow \operatorname{Lin}$ uma função tensorial então $\operatorname{div} \mathbf{T}$ é a única função vetorial que satisfaz $(\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} = \operatorname{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{a})$ para todo vetor $\mathbf{a}$.

Teorema de Stokes. Seja R um subconjunto compacto de $B \times I$ com fronteira denotada por ∂R ; funções $\varphi: R \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{v}: R \rightarrow \mathcal{V}$ e $\mathbf{T}: R \rightarrow \operatorname{Lin}$ escalar, vetorial e tensorial de classe C_1 ; $\mathbf{n}: \partial R \rightarrow \mathcal{V}$ a função vetorial que associa a cada $(\mathbf{x}, t) \in \partial R$ o vetor unitário $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ perpendicular à superfície ∂R no ponto $(\mathbf{x}, t)$ que aponte para o exterior de R ; então

$$\int_{\partial R} \varphi \mathbf{n} da = \int_R \nabla \varphi dv, \quad \int_{\partial R} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da = \int_R \operatorname{div} \mathbf{v} dv \quad \text{e} \quad \int_{\partial R} \mathbf{T} \mathbf{n} da = \int_R \operatorname{div} \mathbf{T} dv.$$

2.2 Movimento

Um *corpo* é um conjunto compacto e conexo contido em $\mathbb{R}^3$. Durante um movimento, uma *configuração* é uma região ocupada pelo corpo em um instante. Denotamos por $\mathcal{B}$ a *configuração de referência*, também chamada aqui de *configuração indeformada*, a região ocupada pelo corpo durante o movimento ao qual a geometria e o estado físico do corpo são conhecidos e denominamos *pontos materiais* os pontos pertencentes a $\mathcal{B}$. Designamos *configuração deformada* toda configuração posterior ao instante da configuração de referência e *ponto espacial* todo ponto pertencente a uma configuração deformada. As grandezas físicas apresentadas neste trabalho estão definidas no sistema internacional de unidades.

O *movimento* χ de $\mathcal{B}$ é uma função $\chi: \mathcal{B} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bijetora e suave, para cada instante $t \in I = [0, T[\subset \mathbb{R}$ fixo, que associa cada ponto material $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ ao ponto espacial $\mathbf{x}$ tal que

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \tag{2.1}$$

com $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$.

O movimento χ satisfaz o *princípio da preservação da orientação*, de acordo com o qual transformações que preservam a orientação de um sistema de coordenadas são fisicamente factíveis se

$$J = J(\mathbf{X}, t) = \det \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} > 0, \quad (2.2)$$

com $\frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}}$ sendo o tensor gradiente de χ em $(\mathbf{X}, t)$. Seja dv e dV o volume das bolas abertas $B(\mathbf{x}, \varepsilon_1)$ e $B(\mathbf{X}, \varepsilon_2)$ quando ε é um escalar infinitesimal; então $dv = J dV$.

Denotamos por

$$\mathcal{B}_t = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t), \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}\} \quad (2.3)$$

a configuração deformada de $\mathcal{B}$ no instante $t \in I$ e

$$\mathcal{C}(\mathcal{B}, \chi) = \{\mathcal{B}_t \mid t \in I\} \quad (2.4)$$

o conjunto de todas as configurações de $\mathcal{B}$ durante o movimento χ , com $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$.

A função *deslocamento* $\mathbf{u} : \mathcal{B} \times I \rightarrow \mathcal{V}$ definida por

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \chi(\mathbf{X}, t) - \chi(\mathbf{X}, 0), \quad (2.5)$$

fornece o deslocamento do ponto material $\mathbf{X}$ para o ponto espacial $\mathbf{x}$, com unidade em metros. Designamos por

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.6)$$

a taxa de deslocamento do ponto material $\mathbf{X}$ no instante t , denominada *velocidade material*, com unidade em metros por segundo, e

$$\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.7)$$

a taxa de velocidade material do ponto material $\mathbf{X}$ no instante t , denominada *aceleração material*, com unidade em metros por segundo ao quadrado. De (2.5) e (2.6) verificamos que

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.8)$$

isto é, a velocidade material $\dot{\mathbf{u}}$ é igual à derivada de primeira ordem do movimento χ em relação a t . A partir de (2.7) e (2.8), verificamos que

$$\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2 \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

isto é, a aceleração material $\ddot{\mathbf{u}}$ é igual a derivada de segunda ordem do movimento χ em relação a t .

Como o movimento χ é bijetor para t fixo, podemos definir a função *inversa do movimento* $\chi^{-1} : \mathcal{C}(\mathcal{B}, \chi) \times I \rightarrow \mathcal{B}$ no instante t , que satisfaz

$$\chi^{-1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{X}, \quad (2.10)$$

sendo $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$. Utilizando a função inversa χ^{-1} , definimos a *velocidade espacial*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t), \quad (2.11)$$

com unidade em metros por segundo e a *aceleração espacial*

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \ddot{\mathbf{u}}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t), \quad (2.12)$$

com unidade em metros por segundo ao quadrado. Se $\rho_R : \mathcal{B} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ e $\rho : \mathcal{C}(\mathcal{B}, \chi) \times I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções escalares tais que $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_R(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t)$ e se P e $P_t = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t), \forall \mathbf{X} \in P\}$ são subconjuntos de $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_t$, então

$$\int_{P_t} \rho(\mathbf{x}, t) dv = \int_P \rho_R(\mathbf{X}, t) J dV. \quad (2.13)$$

Diferenciando os dois lados da equação (2.13) em relação a t , obtemos a expressão

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{P_t} \rho(\mathbf{x}, t) dv \right) = \int_{P_t} \left(\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) dv, \quad (2.14)$$

sendo este o principal resultado do *Teorema de Transporte de Reynolds*.

O tensor

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \triangleq \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.15)$$

é denominado tensor *gradiente de deformação*. Sendo $\det \mathbf{F} > 0$ pela restrição (2.2), temos do Teorema da Decomposição Polar que $\mathbf{F}$ pode ser decomposto de maneira única por

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (2.16)$$

com $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ tensores simétricos positivos definidos e $\mathbf{R}$ uma rotação. Os tensores $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ são conhecidos como tensores *à esquerda* e *à direita da decomposição polar do gradiente de deformação*. De (2.16) temos que $\mathbf{V}$ e $\mathbf{U}$ relacionam-se por

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T. \quad (2.17)$$

Em aplicações é mais conveniente utilizarmos os *tensores deformação de Cauchy-Green à esquerda*,

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad (2.18)$$

e *à direita*,

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \quad (2.19)$$

que são tensores simétricos positivos definidos pelo Teorema da Decomposição Polar e seus autovalores são reais pelo Teorema Espectral. De (2.16), (2.18) e (2.19) temos que $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ relacionam-se por

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}\mathbf{C}\mathbf{R}^T. \quad (2.20)$$

O tensor $\mathbf{C}$ é expresso em termos do tensor *gradiente de deslocamento*

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.21)$$

por

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T\mathbf{H}, \quad (2.22)$$

sendo $\mathbf{I}$ o tensor identidade.

O tensor

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \dot{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.23)$$

é denominado *taxa do gradiente de deformação*. O tensor $\dot{\mathbf{F}}$ relaciona-se com o tensor *gradiente de velocidade espacial*

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}, \quad (2.24)$$

por meio de

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}\mathbf{F}. \quad (2.25)$$

Como consequência de (2.24) temos que

$$\text{tr } \mathbf{L} = \text{tr } \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.26)$$

De $\mathbf{L}$ definimos o *tensor de Rivlin-Ericksen* de ordem n ,

$$\mathbf{A}_n = (d/dt)\mathbf{A}_{n-1} + \mathbf{A}_{n-1}\mathbf{L} + \mathbf{L}^T\mathbf{A}_{n-1}, \quad (2.27)$$

para $n > 1$ em que $n \in \mathbb{N}$ e

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{L} + \mathbf{L}^T = 2\mathbf{D}, \quad (2.28)$$

sendo $\mathbf{D}$ a *parte simétrica* do tensor *gradiente de velocidade* $\mathbf{L}$.

2.3 Princípios de Conservação

A *lei de conservação de massa*, conhecida como *primeira lei de Lavoisier*, assegura que em quaisquer processos físicos, ou, químicos fechados não se cria nem se elimina matéria de um corpo; a matéria é apenas transformada de uma forma para outra forma. A lei de conservação de massa é satisfeita na *forma integral* se

$$m(P) = m(P_t), \quad (2.29)$$

para todo $P \subset \mathcal{B}$, sendo $P_t = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t), \forall \mathbf{X} \in P\}$, $m(P) = \int_P \rho_R dV$ a *massa* do corpo

na região $P \subset \mathcal{B}$, com unidade em quilograma; $\rho_R : P \rightarrow \mathbb{R}$ a *densidade de massa* do

material, definida em $\mathcal{B}$ e com unidade em quilograma por metro cúbico; $m(P_t) = \int_{P_t} \rho dv$ a *massa* do corpo na região P_t , com unidade em quilograma; $\rho: \mathcal{C}(\mathcal{B}, \chi) \times I \rightarrow \mathbb{R}$ a função suave *densidade de massa do material*, definida em $\mathcal{B}_t$ e com unidade em quilograma por metro cúbico. Notamos que o lado esquerdo da equação (2.29) é independente de t . Derivando a equação (2.30) em relação a t e utilizando o teorema de transporte de Reynolds na forma (2.14), obtemos que

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{P_t} \rho dv \right) = \int_{P_t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv = 0, \quad (2.30)$$

para todo P_t . Como a equação (2.30) é válida para todo P_t , então a lei de conservação de massa é satisfeita na *forma diferencial*, ou, *local* se

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.31)$$

Utilizando a (2.13), podemos mostrar de (2.31) que $\rho_R = J\rho$.

As *leis de conservação de momentum linear e angular* asseguram que para qualquer $P_t \subset \mathcal{B}_t$ a taxa de momentum linear e a taxa de momentum angular são iguais à força total e ao momento total em P_t , respectivamente. Assim, as leis de conservação de momentum linear e angular são satisfeitas na *forma integral* se

$$\mathbf{f}(P_t) = \frac{d\hat{\mathbf{l}}(P_t)}{dt} \text{ e } \mathbf{m}(P_t) = \frac{d\hat{\mathbf{a}}(P_t)}{dt}, \quad (2.32)$$

para todo $P_t \subset \mathcal{B}_t$, sendo $\hat{\mathbf{l}}(P_t) = \int_{P_t} \rho \mathbf{v} dv$ o *momentum linear* em P_t , com unidade em

quilograma metro por segundo; $\hat{\mathbf{a}}(P_t) = \int_{P_t} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dv$ o *momentum angular* em P_t , com

unidade em quilograma metro por segundo; $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{o}$ com $\mathbf{o}$ a origem de um

sistema referencial em P_t ; $\mathbf{f}(P_t) = \int_{\partial P_t} \mathbf{t} da + \int_{P_t} \mathbf{b} dv$ a *força total* em $P_t \subset \mathcal{B}_t$, com unidade em

Newton; $\mathbf{m}(P_t) = \int_{\partial P_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t} da + \int_{P_t} \mathbf{r} \times \mathbf{b} dv$ o *momento total* em $P_t \subset \mathcal{B}_t$, com unidade em

Newton; $\int_{\partial P_t} \mathbf{t} da$ a *força de contato* total exercida em ∂P_t , com unidade em Newton;

$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ o *vetor tensão de Cauchy*, com unidade em Newton por metro quadrado;

$\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ o vetor unitário ortogonal a superfície que contenha $\mathbf{x}$; $\int_{P_t} \mathbf{b} dv$ a *força de corpo*

total exercida pelo meio externo em P_t , com unidade em Newton; e $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ o *vetor densidade de força de corpo*, com unidade em Newton por metro cúbico.

O *teorema de Cauchy* assegura que a condição necessária e suficiente para que as leis da conservação de momentum linear e angular sejam satisfeitas no corpo deformado $\mathcal{B}_t$ é que, para cada ponto espacial $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$, exista um tensor $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$, denominado *tensor tensão de Cauchy*, tal que

a) $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n}$,

b) a lei de conservação de momentum angular é satisfeita se e somente se $\mathbf{T}$ é simétrico,

c) a lei de conservação de momentum linear é satisfeita se e somente se $\mathbf{T}$ satisfaz a equação diferencial

$$\text{div } \mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}. \quad (2.33)$$

2.4 Relações Constitutivas de Materiais Elásticos

Na forma local, as leis de conservação de massa (2.31) e de momento linear e angular (2.33), são gerais e valem para qualquer tipo de material, e juntas determinam um sistema linear com quatro equações, uma equação obtida de (2.31) e três equações obtidas de (2.33), e dez variáveis, três variáveis obtidas que são as componentes do gradiente de deslocamento (2.21), seis variáveis que são as componentes do tensor tensão de Cauchy e uma variável ρ de (2.31). No entanto, no caso geral este sistema de equações é mal-posto, isto é, indeterminado, pois o número de variáveis é maior do que o número de equações.

Neste trabalho consideramos sólidos elásticos, para os quais a tensão de Cauchy em (2.34) relaciona-se com o gradiente de deformação $\mathbf{F}$ em (2.15) por meio da relação constitutiva

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}_e(\mathbf{X}, \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)). \quad (2.34)$$

em que $\mathbf{x}$ é dado por (2.1) para todo $(\mathbf{X}, t) \in \mathcal{B} \times I$ e a função tensorial simétrica $\mathbf{T}_e : \mathcal{B} \times \text{Lin}^+ \rightarrow \text{Sym}$ é a *resposta mecânica* de um sólido elástico. Aqui, o sólido elástico é homogêneo, de modo que $\mathbf{T}_e$ não depende explicitamente de $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ em (2.34).

Observe de (2.34) juntamente com (2.5) e (2.15) que as seis componentes de tensão estão relacionadas a três componentes de deslocamento. Ao substituir estas componentes de tensão na equação vetorial de movimento (2.33), obtemos um sistema de três equações escalares de movimento par um sistema de três incógnitas de deslocamento. Este sistema é, portanto, determinado.

Consideremos ainda que o sólido é hiperelástico de modo que a resposta mecânica (2.34) é obtida de uma função *densidade de energia de deformação* $\psi_e : \text{Lin}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ que é suave, por meio de

$$\mathbf{T}_e(\mathbf{F}) = \frac{\partial \psi_e(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}, \quad (2.35)$$

para todo $\mathbf{F} \in \text{Lin}^+$.

Se χ e χ^* são movimentos de $\mathcal{B}$ que se relacionam por *mudança de observador*, isto é, $\mathbf{x}_t^* \triangleq \mathbf{y}_t + \mathbf{Q}_t(\mathbf{x}_t - \mathbf{o})$, para todo ponto material $\mathbf{X}$ e instante t , com $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ e $\mathbf{x}_t^* = \chi^*(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{Q}_t \in \text{Ort}^+$ e $\mathbf{y}_t \triangleq \mathbf{o}^* - \mathbf{o}$, sendo $\mathbf{o}$ e $\mathbf{o}^*$ o ponto de origem de sistemas referenciais em $\mathcal{B}_t$ e $\mathcal{B}_t^*$, respectivamente, então os gradientes de deformação $\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}^*$ relacionam-se por $\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F}$ e os tensores de tensão Cauchy $\mathbf{T}^*(\mathbf{x}_t^*)$ e $\mathbf{T}(\mathbf{x}_t)$ relacionam-se por $\mathbf{T}^*(\mathbf{x}_t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(\mathbf{x}_t)\mathbf{Q}(t)^T$.

Temos que $\mathbf{T}_e$ e ψ_e satisfazem o *princípio da indiferença de mudança de observador* se

$$\mathbf{Q}\mathbf{T}_e(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T = \mathbf{T}_e(\mathbf{Q}\mathbf{F}) \text{ e } \psi_e(\mathbf{F}) = \psi_e(\mathbf{Q}\mathbf{F}), \quad (2.36)$$

para toda rotação $\mathbf{Q} \in \text{Ort}^+$. Substituindo $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$ em (2.36), com $\mathbf{R}$ dado em (2.16), temos que

$$\mathbf{T}_e(\mathbf{F}) = \mathbf{R}\mathbf{T}_e(\mathbf{U})\mathbf{R}^T \text{ e } \psi_e(\mathbf{F}) = \psi_e(\mathbf{U}), \quad (2.37)$$

isto é, a resposta mecânica elástica $\mathbf{T}_e$ e a densidade de energia de deformação ψ_e podem ser expressas somente em termos de $\mathbf{U}$. Utilizando a relação entre o tensor $\mathbf{U}$ e $\mathbf{C}$ dada em (2.19), definimos as funções tensorial simétrica e escalar por, respectivamente,

$$\hat{\mathbf{T}}_e(\mathbf{C}) = \mathbf{T}_e(\mathbf{U}) \text{ e } \hat{\psi}_e(\mathbf{C}) = \psi_e(\mathbf{U}). \quad (2.38)$$

De (2.36), (2.37) e (2.38) temos que as funções constitutivas $\hat{\mathbf{T}}_e$ e $\hat{\psi}_e$ relacionam-se com $\mathbf{T}_e$ e ψ_e por

$$\mathbf{T}_e(\mathbf{F}) = \mathbf{R}\hat{\mathbf{T}}_e(\mathbf{C})\mathbf{R}^T \text{ e } \psi_e(\mathbf{F}) = \hat{\psi}_e(\mathbf{C}). \quad (2.39)$$

Uma *transformação de simetria* é uma rotação $\mathbf{Q}$ que satisfaz

$$\mathbf{T}_e(\mathbf{FQ}) = \mathbf{T}_e(\mathbf{F}) \text{ e } \psi_e(\mathbf{FQ}) = \psi_e(\mathbf{F}). \quad (2.40)$$

O conjunto $\mathcal{G} \subset \text{Ort}^+$ de todas as transformações de simetria é denominado *grupo de simetria*. Um material é *isotrópico* se $\mathcal{G} = \text{Ort}^+$; caso contrário, é *anisotrópico*. Seja $\bar{\mathbf{e}}_1$, $\bar{\mathbf{e}}_2$ e $\bar{\mathbf{e}}_3$ três versores mutuamente ortogonais com $(\bar{\mathbf{e}}_1 \times \bar{\mathbf{e}}_2) \cdot \bar{\mathbf{e}}_3 = 1$. Empregamos a notação $\mathbf{R}_\tau$ qualquer rotação em torno do eixo $\tau = \bar{\mathbf{e}}_1$; $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ e $\mathbf{R}_3$ a reflexão nos planos perpendiculares a $\bar{\mathbf{e}}_1$, $\bar{\mathbf{e}}_2$ e $\bar{\mathbf{e}}_3$. Um material é *transversalmente isotrópico* se $\mathcal{G} = \{\mathbf{R}_\tau, \mathbf{R}_2\}$ e *ortotrópico* se $\mathcal{G} = \{\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, -\mathbf{I}\}$.

De (2.36), (2.37), (2.39) e (2.40) temos que as funções constitutivas $\mathbf{T}_e, \psi_e, \hat{\mathbf{T}}_e$ e $\hat{\psi}_e$ satisfazem

$$\mathbf{Q}\mathbf{T}_e(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T = \mathbf{T}_e(\mathbf{QFQ}^T) \text{ e } \psi_e(\mathbf{QFQ}^T) = \psi_e(\mathbf{F}) \quad (2.41)$$

e

$$\mathbf{Q}\hat{\mathbf{T}}_e(\mathbf{C})\mathbf{Q}^T = \hat{\mathbf{T}}_e(\mathbf{QCQ}^T) \text{ e } \hat{\psi}_e(\mathbf{QCQ}^T) = \hat{\psi}_e(\mathbf{C}) \quad (2.42)$$

para toda rotação $\mathbf{Q} \in \mathcal{G}$. Dizemos que as funções escalares ψ_e e $\hat{\psi}_e$ e tensoriais simétricas $\mathbf{T}_e$ e $\hat{\mathbf{T}}_e$ são *invariantes* em relação ao grupo de simetria $\mathcal{G}$ se satisfazem (2.41) e (2.42).

Assim, concluímos de (2.34), (2.35) e (2.39) que as funções constitutivas $\hat{\psi}_e$ e $\hat{\mathbf{T}}_e$ de um sólido elástico relacionam-se com o tensor tensão de Cauchy $\mathbf{T}$ por meio de

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{T}}_e(\mathbf{C})\mathbf{R}^T = \mathbf{R}\frac{\partial\hat{\psi}_e(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{F}}\mathbf{R}^T = 2\mathbf{R}\frac{\partial\hat{\psi}_e(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}}\mathbf{R}^T \quad (2.43)$$

com $\hat{\psi}_e$ e $\hat{\mathbf{T}}_e$ sendo invariante e invariante de forma, respectivamente, em relação ao grupo de simetria $\mathcal{G} \subset \text{Ort}^+$.

3. Teoria de Representação de Funções Isotrópicas

A teoria de representação de funções isotrópicas desempenha um papel importante no desenvolvimento da teoria do contínuo. As relações constitutivas que determinam o comportamento físico dos materiais podem ser modeladas por funções escalares, vetoriais e tensoriais de variáveis escalares, vetoriais e tensoriais invariantes sob os respectivos grupos de simetria. De acordo com (2.42), a densidade de energia de deformação $\hat{\psi}_e$ e a resposta mecânica $\hat{\mathbf{T}}_e$ de um sólido elástico são funções do tensor deformação de Cauchy-Green à direita $\mathbf{C}$ e são invariantes em relação ao grupo de simetria do material. Além disso, a teoria de representação de funções isotrópicas pode ser aplicada em outras áreas da teoria do contínuo, como na termodinâmica do contínuo, em que a energia interna, o fluxo de calor e a entropia podem ser expressos, por exemplo, em termos dos tensores de Cauchy-Green, dados por (2.18) e (2.19), dos tensores de Rivlin-Ericksen, dados por (2.27) e (2.28), e de gradientes de temperatura. A energia interna, a entropia e o fluxo de calor são funções escalares e vetorial, respectivamente, invariantes sob os respectivos grupos de simetria.

Este capítulo é dividido em três seções. Na Seção 3.1 apresentamos os conceitos fundamentais da teoria de representação de funções isotrópicas. Na Seção 3.2 apresentamos uma revisão bibliográfica do desenvolvimento dessa teoria até a última proposta de base de integridade escalar e tensorial de funções isotrópicas. Na Seção 3.3 relacionamos as bases de integridade escalar e tensorial de funções isotrópicas com as de funções anisotrópicas.

3.1 Fundamentos da Teoria de Representação de Funções Isotrópicas

Denominamos as funções polinomiais $\varphi: \text{Sym}^N \times \text{Skw}^M \times \mathcal{V}^P \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{f}: \text{Sym}^N \times \text{Skw}^M \times \mathcal{V}^P \rightarrow \mathcal{V}$, $\mathbf{H}: \text{Sym}^N \times \text{Skw}^M \times \mathcal{V}^P \rightarrow \text{Sym}$ e $\mathbf{Z}: \text{Sym}^N \times \text{Skw}^M \times \mathcal{V}^P \rightarrow \text{Skw}$ de *escalar*, *vetorial*, *tensorial simétrica* e *tensorial antissimétrica* das variáveis de N tensores simétricos $\mathbf{A}_i$, de M tensores antissimétricos $\mathbf{W}_p$ e de P vetores $\mathbf{v}_m$, em que $i = 1, \dots, N$, $p = 1, \dots, M$ e $m = 1, \dots, P$.

Seja ρ uma função polinomial escalar, vetorial, tensorial simétrica ou tensorial antissimétrica de N tensores simétricos $\mathbf{A}_i$, de M tensores antissimétricos $\mathbf{W}_p$ e de P vetores $\mathbf{v}_m$. Denotamos $\rho(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N, \mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_M, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_P)$ por $\rho(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_m, \mathbf{v}_p)$, com $i = 1, \dots, N$, $p = 1, \dots, M$ e $m = 1, \dots, P$.

A função escalar φ é invariante e as funções $\mathbf{f}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{Z}$ são *invariantes de forma* relativo a $g \subset Ort$, se

$$\varphi(\mathbf{Q}\mathbf{A}_i\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{W}_p\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{v}_m) = \varphi(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{Q}\mathbf{A}_i\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{W}_p\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{v}_m) = \mathbf{Q}\mathbf{f}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{Q}\mathbf{A}_i\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{W}_p\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{v}_m) = \mathbf{Q}\mathbf{H}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m)\mathbf{Q}^T, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{Q}\mathbf{A}_i\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{W}_p\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{v}_m) = \mathbf{Q}\mathbf{Z}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m)\mathbf{Q}^T, \quad (3.4)$$

para todo $\mathbf{Q} \in g$. As funções φ , $\mathbf{f}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{Z}$ são *isotrópicas* se satisfazem (3.1)-(3.4) para $g = Ort$; caso contrário, são *anisotrópicas*. Isto é, ser isotrópico é ser invariante por mudança de base ortonormal em $\mathcal{V}$.

As funções φ , $\mathbf{f}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{Z}$ fornecem relações constitutivas de um material isotrópico, ou, anisotrópico e satisfazem o princípio da indiferença de mudança de observador se e somente se φ , $\mathbf{f}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{Z}$ satisfazem (3.1)-(3.4) para todo $\mathbf{Q} \in g = Ort^+$, ou, para todo $\mathbf{Q} \in g \subset Ort^+$, respectivamente.

Do exposto acima, notamos que existe diferença entre funções isotrópicas e anisotrópicas, isto é, funções que são invariantes e invariantes de forma em relação a $g \subseteq Ort$, e funções que fornecem relações constitutivas de materiais isotrópicos e anisotrópicos, isto é, funções que são invariantes e invariantes de forma em relação a $g \subseteq Ort^+$.

Para funções φ , $\mathbf{f}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{Z}$ isotrópicas e para qualquer número finito de N tensores simétricos, de M tensores antissimétricos e de P vetores, Zheng (1994) apresenta o *teorema da existência* de funções escalares isotrópicas $I_A : Sym^N \times Skw^M \times \mathcal{V}^P \rightarrow \mathbb{R}$, vetoriais isotrópicas $\mathbf{f}_B : Sym^N \times Skw^M \times \mathcal{V}^P \rightarrow \mathcal{V}$, tensoriais simétricas isotrópicas

$\mathbf{H}_C : Sym^N \times Skw^M \times \mathcal{V}^P \rightarrow \mathcal{V}$, e tensoriais antissimétricas isotrópicas $\mathbf{Z}_D : Sym^N \times Skw^M \times \mathcal{V}^P \rightarrow Skw$, com $A=1,...,a$, $B=1,...,b$, $C=1,...,c$ e $D=1,...,d$, com $a,b,c,d \in \mathbb{N}$, tais que φ , $\mathbf{f}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{Z}$ satisfazem (3.1)-(3.4) para todo $\mathbf{Q} \in g$ se e somente se

$$\varphi(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m) = \tilde{\varphi}(I_1, ..., I_a), \quad (3.5)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m) = \alpha_1 \mathbf{f}_1 + ... + \alpha_b \mathbf{f}_b, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m) = \beta_1 \mathbf{H}_1 + ... + \beta_c \mathbf{H}_c, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m) = \phi_1 \mathbf{Z}_1 + ... + \phi_d \mathbf{Z}_d, \quad (3.8)$$

em que $i=1,...,N$, $p=1,...,M$ e $m=1,...,P$ e $\alpha_1,...,\alpha_b$, $\beta_1,...,\beta_c$ e $\phi_1,...,\phi_d$ são funções escalares isotrópicas de $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{W}_p$ e $\mathbf{v}_m$. As funções $I_1,...,I_a$ são denominadas *invariantes* de φ , a função escalar $\tilde{\varphi}$ é denominada *representação* de φ , as funções $\mathbf{f}_1,...,\mathbf{f}_b$, $\mathbf{H}_1,...,\mathbf{H}_c$ e $\mathbf{Z}_1,...,\mathbf{Z}_d$ são denominadas *geradoras* de $\mathbf{f}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{Z}$ e as expressões $\alpha_1 \mathbf{f}_1 + ... + \alpha_b \mathbf{f}_b$, $\beta_1 \mathbf{H}_1 + ... + \beta_c \mathbf{H}_c$ e $\phi_1 \mathbf{Z}_1 + ... + \phi_d \mathbf{Z}_d$ são denominadas *representações* de $\mathbf{f}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{Z}$, respectivamente.

Segundo Zheng (1994), um conjunto de invariantes é *irredutível* se nenhum elemento deste conjunto pode ser expresso polinomialmente em termos dos demais; caso contrário, é *reduzível*. Similarmente, um conjunto de geradores é *irredutível* se nenhum elemento deste conjunto pode ser expresso como combinação linear dos demais; caso contrário, é *reduzível*. A representação de φ , $\mathbf{f}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{Z}$ em (3.5), (3.6), (3.7), ou, (3.8) é *completa* se qualquer função isotrópica escalar, vetorial, tensorial simétrica, ou, tensorial antissimétrica de $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{W}_p$ e $\mathbf{v}_m$ pode ser expressa da forma (3.5), (3.6), (3.7), ou, (3.8), respectivamente, em que $i=1,...,N$, $p=1,...,M$ e $m=1,...,P$; caso contrário, é *incompleta*. Se a representação de φ , $\mathbf{f}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{Z}$ em (3.5), (3.6), (3.7), ou, (3.8) é *completa*, então o conjunto formado por $I_1,...,I_a$, $\mathbf{f}_1,...,\mathbf{f}_b$, $\mathbf{H}_1,...,\mathbf{H}_c$, ou $\mathbf{H}_1,...,\mathbf{H}_c$, é denominado *base de integridade*. Segundo Spencer (1971), a base de integridade é *mínima* se contém o menor número de elementos. Os invariantes de uma base de integridade são *dependentes* se existir uma relação não polinomial, denominada *syzygy*, entre os elementos do conjunto; caso contrário, são *independentes*.

3.2 Revisão Bibliográfica

Doravante, denominamos *base de integridade escalar* a base de integridade de funções escalares e base de integridade tensorial as base de integridade de funções vetoriais, tensorial simétricas e tensorial antissimétricas. As bases de integridade escalar e tensorial mínima das funções isotrópicas escalar φ , vetorial $\mathbf{f}$, tensorial simétrica, $\mathbf{H}$ e tensorial antissimétrica $\mathbf{Z}$ de qualquer número finito de N tensores simétricos, M tensores antissimétricos e P vetores são propostas por Boehler (1977), Smith (1971) e Wang (1969a, b, 1970a, b). Apresentamos a seguir uma breve descrição dos principais resultados encontrados na literatura.

Wang (1969a, b) é o primeiro a propor uma base de integridade escalar e tensorial mínima de funções isotrópicas escalar, vetorial, tensorial simétrica e tensorial antissimétrica de um número finito número finito de tensores simétricos, tensores antissimétricos e vetores. Estabelecendo uma partição no domínio em classes de equivalência, Wang (1969a, b) determina as condições necessárias, em cada classe de equivalência determinada por até duas variáveis distintas do domínio, para que as funções sejam isotrópicas. As bases de integridade escalar e tensorial obtidas por Wang (1969a, b) são formadas por invariantes, ou, geradores que dependem de até duas variáveis distintas do domínio.

Exibindo três contraexemplos, Smith (1970) mostra que as bases de integridade escalar, vetorial e tensorial simétrica propostas por Wang (1969a, b) não geravam representações completas. Em um dos contraexemplos, Smith (1970) mostra que funções isotrópicas escalares de três tensores simétricos não podem ser descritas em termos de invariantes formados pelos traços de até dois tensores simétricos distintos, sendo necessário adicionar a esta base de integridade escalar um invariante formado pelo traço da composição dos três tensores simétricos.

Em resposta ao trabalho de Smith (1970), Wang (1970a, b) reconhece que há um erro em seu trabalho anterior, o qual consiste em afirmar que as bases de integridade escalar e tensorial são formadas por invariantes, ou, geradores que dependem de até duas variáveis distintas do domínio. O autor então relaciona vetores, tensores antissimétricos e tensores simétricos, pertencentes ao domínio das funções, com retas, retas orientadas e um conjunto de até três retas perpendiculares para mostrar que as bases de integridade escalar e tensorial devem ser formadas por invariantes, ou, geradores que dependem de até quatro variáveis distintas do domínio (e não de duas variáveis distintas como havia analisado em seu trabalho anterior). Assim, o autor

analisa as condições necessárias, nas classes de equivalência formadas por até quatro variáveis distintas do domínio, para as funções serem isotrópicas. Wang (1970a, b) inclui alguns invariantes e geradores nas bases de integridade escalar e tensoriais obtidas em seu trabalho anterior, Wang (1969a,b) e propõe uma nova base de integridade escalar e tensorial mínima de funções isotrópicas escalar, vetorial, tensorial simétrica e tensorial antissimétrica de um número finito de vetores, tensores simétricos e tensores antissimétricos. Wang (1970b) observa que Smith (1970) não aponta o erro na metodologia do seu trabalho anterior, Wang (1969a, b), e não propõe uma nova base de integridade mínima.

Com base na metodologia utilizada no trabalho de Rivlin e Ericksen (1955a), Smith (1971) mostra que a base de integridade escalar proposta por Wang (1970a, b) não é mínima, isto é, é possível reduzir o número de termos. Excluindo e substituindo alguns invariantes da base de integridade escalar proposta por Wang (1970a, b) por outros invariantes que são propostos neste trabalho, Smith propõe uma nova base de integridade escalar. Smith (1971) analisa somente as bases de integridade escalares, não alterando, assim, os resultados já obtidos para as bases de integridade tensoriais mínimas das funções vetoriais, tensoriais simétrica e antissimétrica propostas por Wang (1970a, b).

Em resposta a Smith (1971), Wang (1971) admite que é possível excluir alguns dos invariantes propostos em seu trabalho, Wang (1970a, b). No entanto, Wang (1971) critica o trabalho de Smith (1971), ressaltando que, apesar da base de integridade possuir menos invariantes do que a proposta em seu trabalho anterior, (WANG, 1970a,b), Smith (1971) não demonstra que o conjunto de invariantes por ele proposto é mínimo.

Boehler (1977) mostra que alguns invariantes da base de integridade apresentada por Smith (1971) e Wang (1970a, b) podem ser excluídos e propõe uma nova base de integridade escalar. Esta base de integridade é considerada mínima, conforme demonstrado por Pennisi e Trovato (1987) e Zheng (1993) utilizando diferentes metodologias.

A base de integridade escalar da função escalar φ e as bases de integridade tensorial das funções vetorial $\mathbf{f}$, tensorial simétrica $\mathbf{H}$ e tensorial antissimétrica $\mathbf{Z}$ de um número finito de N tensores simétricos $\mathbf{A}_i$, de M tensores antissimétricos $\mathbf{W}_p$ e de P vetores $\mathbf{v}_m$, com $i = 1, \dots, N$, $p = 1, \dots, M$ e $m = 1, \dots, P$ propostas por Boehler (1977) e apresentada em Zheng, (1993) são dadas por

$$\begin{aligned}
I_1^i &= \text{tr } \mathbf{A}_i, \quad I_2^i = \text{tr } \mathbf{A}_i^2, \quad I_3^i = \text{tr } \mathbf{A}_i^3, \quad I_4^{i,j} = \text{tr } \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j, \quad I_5^{i,j} = \text{tr } \mathbf{A}_i^2 \mathbf{A}_j, \quad I_6^{i,j} = \text{tr } \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^2, \\
I_7^{i,j} &= \text{tr } \mathbf{A}_i^2 \mathbf{A}_j^2, \quad I_8^{i,j,k} = \text{tr } \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \mathbf{A}_k, \quad I_9^p = \text{tr } \mathbf{W}_p^2, \quad I_{10}^{i,p} = \text{tr } \mathbf{A}_i \mathbf{W}_p^2, \quad I_{11}^{i,p} = \text{tr } \mathbf{A}_i^2 \mathbf{W}_p^2, \\
I_{12}^{i,p} &= \text{tr } \mathbf{A}_i^2 \mathbf{W}_p^2 \mathbf{A}_i \mathbf{W}_p^2, \quad I_{13}^{i,j,p} = \text{tr } \mathbf{W}_p \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j, \quad I_{14}^{i,j,p} = \text{tr } \mathbf{W}_p \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^2, \quad I_{15}^{i,j,p} = \text{tr } \mathbf{W}_p \mathbf{A}_i^2 \mathbf{A}_j, \\
I_{16}^{i,j,p} &= \text{tr } \mathbf{A}_i^2 \mathbf{W}_p^2 \mathbf{A}_j \mathbf{W}_p^2, \quad I_{17}^{p,q} = \text{tr } \mathbf{W}_p \mathbf{W}_q, \quad I_{18}^{i,p,q} = \text{tr } \mathbf{A}_i \mathbf{W}_p \mathbf{W}_q, \quad I_{19}^{i,p,q} = \text{tr } \mathbf{A}_i \mathbf{W}_p \mathbf{W}_q^2, \\
I_{20}^{i,p,q} &= \text{tr } \mathbf{A}_i \mathbf{W}_p^2 \mathbf{W}_q, \quad I_{21}^{p,q,r} = \text{tr } \mathbf{W}_p \mathbf{W}_q^2 \mathbf{W}_r, \quad I_{22}^m = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{v}_m, \quad I_{23}^{i,m} = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{v}_m, \\
I_{24}^{i,m} &= \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{A}_i^2 \mathbf{v}_m, \quad I_{25}^{i,j,m} = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \mathbf{v}_m, \quad I_{26}^{p,m} = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{W}_p^2 \mathbf{v}_m, \quad I_{27}^{i,p,m} = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{W}_p \mathbf{v}_m, \\
I_{28}^{i,p,m} &= \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{W}_p \mathbf{A}_i \mathbf{W}_p^2 \mathbf{v}_m, \quad I_{29}^{i,p,m} = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{A}_i^2 \mathbf{W}_p \mathbf{v}_m, \quad I_{30}^{p,q,m} = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{W}_p \mathbf{W}_q \mathbf{v}_m, \\
I_{31}^{p,q,m} &= \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{W}_p \mathbf{W}_q^2 \mathbf{v}_m, \quad I_{32}^{p,q,m} = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{W}_p^2 \mathbf{W}_q^2 \mathbf{v}_m, \quad I_{33}^{m,n} = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{v}_n, \quad I_{34}^{i,m,n} = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{v}_n, \\
I_{35}^{i,m,n} &= \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{A}_i^2 \mathbf{v}_n, \quad I_{36}^{i,j,m,n} = \mathbf{v}_m \cdot (\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i) \mathbf{v}_n, \quad I_{37}^{p,m,n} = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{W}_p \mathbf{v}_n, \\
I_{38}^{p,m,n} &= \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{W}_p^2 \mathbf{v}_n, \quad I_{39}^{i,p,m,n} = \mathbf{v}_m \cdot (\mathbf{A}_i \mathbf{W}_p - \mathbf{W}_p \mathbf{A}_i) \mathbf{v}_n, \quad I_{40}^{p,q,m,n} = \mathbf{v}_m \cdot (\mathbf{W}_p \mathbf{W}_q - \mathbf{W}_q \mathbf{W}_p) \mathbf{v}_n,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1^m &= \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{f}_2^{i,m} = \mathbf{A}_i \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{f}_3^{i,m} = \mathbf{A}_i^2 \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{f}_4^{i,j,m} = (\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i) \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{f}_5^{p,m} = \mathbf{W}_p \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{f}_6^{p,m} = \mathbf{W}_p^2 \mathbf{v}_m, \\
\mathbf{f}_7^{i,p,m} &= (\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i) \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{f}_8^{p,q,m} = (\mathbf{W}_p \mathbf{W}_q - \mathbf{W}_q \mathbf{W}_p) \mathbf{v}_m,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_1 &= \mathbf{I}, \quad \mathbf{H}_2^i = \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{H}_3^i = \mathbf{A}_i^2, \quad \mathbf{H}_4^{i,j} = \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j + \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{H}_5^{i,j} = \mathbf{A}_i^2 \mathbf{A}_j + \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^2, \quad \mathbf{H}_6^{i,j} = \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^2 + \mathbf{A}_j^2 \mathbf{A}_i, \\
\mathbf{H}_7^p &= \mathbf{W}_p^2, \quad \mathbf{H}_8^{i,p} = \mathbf{A}_i \mathbf{W}_p - \mathbf{W}_p \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{H}_9^{i,p} = \mathbf{W}_p \mathbf{A}_i \mathbf{W}_p, \quad \mathbf{H}_{10}^{i,p} = \mathbf{W}_p \mathbf{A}_i \mathbf{W}_p^2 - \mathbf{W}_p^2 \mathbf{A}_i \mathbf{W}_p, \\
\mathbf{H}_{11}^{i,p} &= \mathbf{A}_i^2 \mathbf{W}_p - \mathbf{W}_p \mathbf{A}_i^2, \quad \mathbf{H}_{12}^{p,q} = \mathbf{W}_p \mathbf{W}_q - \mathbf{W}_q \mathbf{W}_p, \quad \mathbf{H}_{13}^{p,q} = \mathbf{W}_p \mathbf{W}_q^2 - \mathbf{W}_q^2 \mathbf{W}_p, \\
\mathbf{H}_{14}^{p,q} &= \mathbf{W}_p^2 \mathbf{W}_q - \mathbf{W}_q \mathbf{W}_p^2, \quad \mathbf{H}_{15}^m = \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{H}_{16}^{i,m} = \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{A}_i \mathbf{v}_m + \mathbf{A}_i \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_m, \\
\mathbf{H}_{17}^{i,m} &= \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{A}_i^2 \mathbf{v}_m + \mathbf{A}_i^2 \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{H}_{18}^{p,m} = \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{W}_p \mathbf{v}_m + \mathbf{W}_p \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{H}_{19}^{p,m} = \mathbf{W}_p \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{W}_p \mathbf{v}_m, \\
\mathbf{H}_{20}^{p,m} &= \mathbf{W}_p \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{W}_p^2 \mathbf{v}_m + \mathbf{W}_p^2 \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{W}_p \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{H}_{21}^{m,n} = \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_m, \\
\mathbf{H}_{22}^{i,m,n} &= \mathbf{A}_i (\mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_m) - (\mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_m) \mathbf{A}_i, \\
\mathbf{H}_{23}^{p,m,n} &= \mathbf{W}_p (\mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_m) + (\mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_m) \mathbf{W}_p,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_1^{i,j} &= \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{Z}_2^{i,j} = \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^2 - \mathbf{A}_j^2 \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{Z}_3^{i,j} = \mathbf{A}_i^2 \mathbf{A}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^2, \quad \mathbf{Z}_4^{i,j,k} = \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \mathbf{A}_k^2 - \mathbf{A}_k^2 \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i, \\
\mathbf{Z}_5^{i,j,k} &= \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^2 - \mathbf{A}_j^2 \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j, \quad \mathbf{Z}_6^{i,j,k} = \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \mathbf{A}_k + \mathbf{A}_j \mathbf{A}_k \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_k \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j - \mathbf{A}_k \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i \mathbf{A}_k - \\
&\mathbf{A}_i \mathbf{A}_k \mathbf{A}_j, \quad \mathbf{Z}_7^p = \mathbf{W}_p, \quad \mathbf{Z}_8^{i,p} = \mathbf{A}_i \mathbf{W}_p + \mathbf{W}_p \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{Z}_9^{i,p} = \mathbf{A}_i \mathbf{W}_p^2 + \mathbf{W}_p^2 \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{Z}_{10}^{p,q} = \mathbf{W}_p \mathbf{W}_q + \mathbf{W}_q \mathbf{W}_p, \\
\mathbf{Z}_{11}^{i,m} &= \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{A}_i \mathbf{v}_m - \mathbf{A}_i \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{Z}_{12}^{i,m} = \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{A}_i^2 \mathbf{v}_m - \mathbf{A}_i^2 \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{Z}_{13}^{i,m} = \mathbf{A}_i \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{A}_i^2 \mathbf{v}_m - \\
&\mathbf{A}_i^2 \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{A}_i \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{Z}_{14}^{i,j,m} = \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_m + \mathbf{A}_j \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_m \mathbf{A}_i + \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_m \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j - \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_m \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i - \\
&\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_m - \mathbf{A}_i \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_m \mathbf{A}_j, \quad \mathbf{Z}_{15}^{p,m} = \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{W}_p \mathbf{v}_m - \mathbf{W}_p \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{Z}_{16}^{p,m} = \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{W}_p^2 \mathbf{v}_m - \\
&\mathbf{W}_p^2 \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{W}_p \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{Z}_{17}^{p,m} = \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{W}_p^2 \mathbf{v}_m - \mathbf{W}_p^2 \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{W}_p \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{Z}_{18}^{m,n} = \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_m, \\
\mathbf{Z}_{19}^{i,m,n} &= \mathbf{A}_i (\mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_m) + (\mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_m) \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{Z}_{20}^{p,m,n} = \mathbf{W}_p \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_m - \\
&(\mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_m) \mathbf{W}_p,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

em que $i, j, k = 1, \dots, N$, $p, q = 1, \dots, M$ e $m, n = 1, \dots, P$, com $i < j < k$, $p < q$ e $m < n$.

A determinação da base de integridade escalar e tensorial de casos particulares de funções escalar, vetorial, tensorial simétrica e tensorial antissimétrica podem ser encontrados na literatura antes da publicação dos resultados gerais de Boehler (1977), Smith (1971) e Wang (1970a, b). Por exemplo, Truesdell e Noll (1965) determinam a representação de uma função escalar isotrópica de P vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_P$ a qual é dada por

$$\varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_P) = \tilde{\varphi}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_P, \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_P, \dots, \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_P, \dots, \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{v}_P). \quad (3.13)$$

O conjunto (3.13) constitui uma base de integridade mínima de funções isotrópicas escalares de P vetores. Este resultado está baseado na demonstração de (3.13) para $P = 3$ por Cauchy (1850). Notamos que a representação $\tilde{\varphi}$ em (3.13) pode ser expressa concisamente utilizando a notação $\tilde{\varphi}(I_{22}^m, I_{33}^{m,n})$, sendo I_{22}^m e $I_{33}^{m,n}$ apresentados em (3.9) com $m, n = 1, \dots, P$.

Na mesma época do resultado de Cauchy (1850), Hamilton (1853) e Cayley (1858), apresentam um dos teoremas mais importantes da teoria de representação de funções isotrópicas, conhecido como Teorema de Cayley-Hamilton. Hamilton (1853) provou que toda rotação satisfaz a sua própria equação característica e Cayley (1858) generalizou este resultado mostrando que qualquer tensor satisfaz a sua própria equação característica. Utilizando o teorema de Cayley-Hamilton, é possível mostrar que a representação de funções escalar e tensorial simétrica que dependem de um tensor simétrico $\mathbf{A}_1$ são dadas por (GURTIN, 1981)

$$\varphi(\mathbf{A}_1) = \tilde{\varphi}(\text{tr } \mathbf{A}_1, \text{tr } \mathbf{A}_1^2, \text{tr } \mathbf{A}_1^3) \quad (3.14)$$

e

$$\mathbf{H}(\mathbf{A}_1) = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{A}_1 + \beta_2 \mathbf{A}_1^2, \quad (3.15)$$

respectivamente, em que β_j , $j = 1, 2, 3$, são funções escalares isotrópicas da forma (3.14). O conjunto dos invariantes em (3.14) e o conjunto dos geradores em (3.15) constituem uma base de integridade escalar e tensorial mínima de funções isotrópicas escalar e tensorial simétrica de um tensor simétrico, respectivamente. Notamos que a representação $\tilde{\varphi}$ em (3.14) e a representação de $\mathbf{H}$ em (3.15) podem ser expressas concisamente utilizando as notações

$\tilde{\varphi}(I_j^1)$, $j = 1, 2, 3$, e $\mathbf{H}_1 + \sum_{j=2}^3 \beta_j \mathbf{H}_j^1$, com I_1^1, I_2^1, I_3^1 e $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_1^1, \mathbf{H}_2^1$ definidos em (3.9) e (3.11),

para $i = 1$.

Posteriormente, Rivlin e Ericksen (1955a, b) determinam as representações completas de funções escalar e tensorial simétrica de dois tensores simétricos $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$, as quais são dadas por

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \tilde{\varphi}(\text{tr}\mathbf{A}_1, \text{tr}\mathbf{A}_1^2, \text{tr}\mathbf{A}_1^3, \text{tr}\mathbf{A}_2, \text{tr}\mathbf{A}_2^2, \text{tr}\mathbf{A}_2^3, \\ \text{tr}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2, \text{tr}\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2, \text{tr}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^2, \text{tr}\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2^2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{A}_1 + \beta_2 \mathbf{A}_1^2 + \beta_3 \mathbf{A}_2 + \beta_4 \mathbf{A}_2^2 + \beta_5 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \\ \beta_6 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^2) + \beta_7 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1), \end{aligned} \quad (3.17)$$

respectivamente, em que β_j , $j = 1, \dots, 10$, é uma função escalar isotrópica da forma (3.16). O conjunto dos invariantes em (3.16) e o conjunto dos geradores em (3.17) constituem uma base de integridade escalar e tensorial mínima de funções isotrópicas escalar e tensorial simétrica de dois tensores simétricos, respectivamente. Notamos que a representação $\tilde{\varphi}$ em (3.16) pode ser expressa concisamente por $\tilde{\varphi}(I_j^1, I_j^2, I_k^{1,2})$, $j = 1, 2, 3$ e $k = 4, \dots, 7$, com $I_1^1, I_2^1, I_3^1, I_1^2, I_2^2, I_3^2, I_4^{1,2}, I_5^{1,2}, I_6^{1,2}, I_7^{1,2}$ definidos em (3.9).

Noll (1970) determina as bases de integridade escalar e vetorial de um tensor simétrico $\mathbf{A}$ e um vetor $\mathbf{v}$, as quais são dadas por

$$\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{v}) = \tilde{\varphi}(\text{tr}\mathbf{A}, \text{tr}\mathbf{A}^2, \text{tr}\mathbf{A}^3, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^2\mathbf{v},) \quad (3.18)$$

e

$$\mathbf{f}(\mathbf{A}, \mathbf{v}) = \beta_1 \mathbf{v} + \beta_2 \mathbf{A}\mathbf{v} + \beta_3 \mathbf{A}^2\mathbf{v} \quad (3.19)$$

em que β_j , $j = 1, \dots, 3$, é uma função escalar isotrópica da forma (3.18). O conjunto dos invariantes em (3.18) e o conjunto dos geradores em (3.19) constituem uma base de integridade escalar e vetorial mínima de funções isotrópicas escalar e vetoriais de um tensor simétrico e um vetor, respectivamente.

Desse modo, os resultados apresentados até o momento concernem a determinação de bases de integridade de funções isotrópicas. Apresentamos a seguir um resultado relacionado às bases de integridade de funções anisotrópicas.

3.3 Representação de Funções Anisotrópicas

Liu (1982) mostra que as bases de integridade escalar e tensorial de funções anisotrópicas são expressas em termos das bases de integridade escalar e tensorial de funções isotrópicas. Para isso, adicionam-se às bases de integridade de funções isotrópicas tensores estruturais que representam o grupo de simetria ao qual a função anisotrópica é invariante. Assim, $\rho(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m)$ é uma função escalar, vetorial, tensorial simétrica, ou, tensorial antissimétrica invariante sob $g \subset Ort$ se, e somente se, existe uma função isotrópica escalar, vetorial, tensorial simétrica, ou, tensorial antissimétrica $\rho_{iso}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m, \mathbf{S}_\gamma)$ tal que

$$\rho(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m) = \rho_{iso}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m, \mathbf{S}_\gamma), \quad (3.20)$$

com $\mathbf{S}_\gamma = \mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_A$, sendo $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_A$ vetores e tensores denominados *tensores estruturais*, que caracterizam o grupo de simetria $g \subset Ort$. Todos os tensores estruturais dos 32 grupos espaciais cristalográficos, dos 5 grupos transversalmente isotrópicos e dos 3 grupos ortotrópicos são apresentados em Zheng e Spencer (1993).

Considerando as funções φ , $\mathbf{f}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{Z}$ apresentadas em (3.1)-(3.4), definimos as funções $\hat{\varphi}$, $\hat{\mathbf{f}}$, $\hat{\mathbf{H}}$ e $\hat{\mathbf{Z}}$ tal que $\hat{\varphi}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \hat{\mathbf{W}}_m) = \varphi(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m)$, $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \hat{\mathbf{W}}_m) = \mathbf{f}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m)$, $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \hat{\mathbf{W}}_m) = \mathbf{H}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m)$ e $\hat{\mathbf{Z}}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \hat{\mathbf{W}}_m) = \mathbf{Z}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m)$ sendo $\mathbf{v}_m$ o vetor axial do tensor antissimétrico $\hat{\mathbf{W}}_m$ que lembramos da seção 2.1 satisfaz $\hat{\mathbf{W}}_m = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{v}_m$ e $\mathbf{v}_m = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{W}_m]$. Segundo Liu (1982), as funções φ , $\mathbf{f}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{Z}$ são *hemitrópicas*, isto é, invariantes em relação a $g = Ort^+$ se e somente se $\hat{\varphi}$, $\hat{\mathbf{f}}$, $\hat{\mathbf{H}}$ e $\hat{\mathbf{Z}}$ são funções isotrópicas.

Relembramos da Seção 2.4 e da Seção 3.1 que um material é isotrópico se sua relação constitutiva é invariante em relação ao grupo de simetria $g = Ort^+$. Assim, os invariantes e geradores de φ , $\mathbf{f}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{Z}$ determinam a base de integridade escalar e tensorial das relações constitutivas de materiais isotrópicos.

Zheng (1993) apresenta a base de integridade escalar da função escalar hemitrópica φ e as bases de integridade tensorial das funções vetorial $\mathbf{f}$, tensorial simétrica $\mathbf{H}$ e tensorial

antissimétrica $\mathbf{Z}$ de um número finito de N tensores simétricos $\mathbf{A}_i$, de M tensores antissimétricos $\mathbf{W}_p$ e de P vetores $\mathbf{v}_m$, com $i=1,...,N$, $p=1,...,M$ e $m=1,...,P$ relativo a $g = Ort^+$, os quais são dadas por

$$\begin{aligned}
& I_1^i, \dots, I_{24}^{i,m}, I_{27}^{i,p,m}, I_{33}^{m,n}, I_{34}^{m,n}, I_{37}^{m,n}, \\
& I_1^{i,m*} = \text{tr} \mathbf{A}_i^2 \hat{\mathbf{W}}_m^2 \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{W}}_m, I_2^{i,j,m*} = \text{tr} \hat{\mathbf{W}}_m \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j, I_3^{i,j,m*} = \text{tr} \hat{\mathbf{W}}_m \mathbf{A}_i^2 \mathbf{A}_j, \\
& I_4^{i,j,m*} = \text{tr} \hat{\mathbf{W}}_m \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^2, I_5^{i,j,m*} = \text{tr} \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{W}}_m^2 \mathbf{A}_j \hat{\mathbf{W}}_m, I_6^{p,m*} = \text{tr} \mathbf{W}_p \hat{\mathbf{W}}_m, \\
& I_7^{i,p,m*} = \text{tr} \mathbf{A}_i \mathbf{W}_p \hat{\mathbf{W}}_m, I_8^{i,p,m*} = \text{tr} \mathbf{A}_i \mathbf{W}_p^2 \hat{\mathbf{W}}_m, I_9^{i,m*,n*} = \text{tr} \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{W}}_m \hat{\mathbf{W}}_n^2, \\
& I_{10}^{i,m*,n*} = \text{tr} \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{W}}_m^2 \hat{\mathbf{W}}_n, I_{11}^{p,q,m*} = \text{tr} \mathbf{W}_p \mathbf{W}_q \hat{\mathbf{W}}_m, I_{12}^{m*,n*,l*} = \text{tr} \hat{\mathbf{W}}_m \hat{\mathbf{W}}_n \hat{\mathbf{W}}_l,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{f}_1^m, \mathbf{f}_2^{i,m}, \mathbf{f}_3^{i,m}, \mathbf{f}_5^{p,m}, \\
& \mathbf{f}_1^{i,j,m*} = \varepsilon[\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j], \mathbf{f}_2^{i,j,m*} = \varepsilon[\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^2], \mathbf{f}_3^{i,j,m*} = \varepsilon[\mathbf{A}_i^2 \mathbf{A}_j], \mathbf{f}_4^{i,j,m*} = \varepsilon[\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^2], \\
& \mathbf{f}_5^{i,j,m*} = \varepsilon[\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^2], \mathbf{f}_6^{i,j,m*} = \varepsilon[\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \mathbf{A}_k + \mathbf{A}_j \mathbf{A}_k \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_k \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j], \\
& \mathbf{f}_7^{p,m*} = \varepsilon[\mathbf{W}_p], \mathbf{f}_8^{i,p,m*} = \varepsilon[\mathbf{A}_i \mathbf{W}_p], \mathbf{f}_9^{i,p,m*} = \varepsilon[\mathbf{A}_i \mathbf{W}_p^2], \mathbf{f}_{10}^{p,q} = \varepsilon[\mathbf{W}_p \mathbf{W}_q], \\
& \mathbf{f}_{11}^{i,m} = \mathbf{v}_m \times \mathbf{A}_i \mathbf{v}_m, \mathbf{f}_{12}^{m,n} = \mathbf{v}_m \times \mathbf{v}_n,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_{16}^{i,m}, \mathbf{H}_{18}^{p,m}, \mathbf{H}_{21}^{m,n}, \mathbf{H}_1^{i,m*} = \mathbf{A}_i \varepsilon \mathbf{v}_m - \varepsilon \mathbf{v}_m \mathbf{A}_i, \\
& \mathbf{H}_2^{i,m*} = \mathbf{A}_i^2 \varepsilon \mathbf{v}_m - \varepsilon \mathbf{v}_m \mathbf{A}_i^2, \mathbf{H}_3^{i,m*} = \mathbf{v}_m \otimes (\mathbf{v}_m \times \mathbf{A}_i \mathbf{v}_m) + (\mathbf{v}_m \times \mathbf{A}_i \mathbf{v}_m) \otimes \mathbf{v}_m, \\
& \mathbf{H}_4^{p,m*} = \mathbf{W}_p \varepsilon \mathbf{v}_m - \varepsilon \mathbf{v}_m \mathbf{W}_p, \mathbf{H}_5^{p,m*} = \mathbf{W}_p^2 \varepsilon \mathbf{v}_m - \varepsilon \mathbf{v}_m \mathbf{W}_p^2, \\
& \mathbf{H}_6^{m*,n*,p*} = (\mathbf{v}_m \times \mathbf{v}_n) \otimes \mathbf{v}_m + \mathbf{v}_m \otimes (\mathbf{v}_m \times \mathbf{v}_n), \\
& \mathbf{H}_7^{m*,n*,p*} = (\mathbf{v}_m \times \mathbf{v}_n) \otimes \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_n \otimes (\mathbf{v}_m \times \mathbf{v}_n),
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{Z}_1^{i,j}, \dots, \mathbf{Z}_{11}^{i,m}, \mathbf{Z}_{17}^{m,n}, \\
& \mathbf{Z}_1^{i,m*} = \varepsilon \mathbf{v}_m, \mathbf{Z}_2^{i,m*} = \mathbf{A}_i \varepsilon \mathbf{v}_m + \varepsilon \mathbf{v}_m \mathbf{A}_i, \\
& \mathbf{Z}_3^{p,m*} = \mathbf{W}_p \varepsilon \mathbf{v}_m - \varepsilon \mathbf{v}_m \mathbf{W}_p,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

em que o termo m^* designa o resultado da substituição do vetor axial $\mathbf{v}_m$ pelo tensor antissimétrico $\hat{\mathbf{W}}_m$ nas bases de integridade escalar das funções isotrópicas $\hat{\phi}$, $\hat{\mathbf{f}}$, $\hat{\mathbf{H}}$ e $\hat{\mathbf{Z}}$, com

$$\begin{aligned}
& \hat{\phi}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \hat{\mathbf{W}}_m) = \phi(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m), \quad \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \hat{\mathbf{W}}_m) = \mathbf{f}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m), \\
& \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \hat{\mathbf{W}}_m) = \mathbf{H}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m) \text{ e } \hat{\mathbf{Z}}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \hat{\mathbf{W}}_m) = \mathbf{Z}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m).
\end{aligned}$$

Os invariantes em (3.20) são utilizados no próximo capítulo para a determinação do número mínimo de invariantes da densidade de energia de deformação de um compósito elástico reforçados com fibras.

4. Aplicação da Teoria de Representação

Em seu trabalho sobre uma teoria constitutiva para compósitos reforçados com fibras, Spencer (1984) argumenta que o número de invariantes necessários para caracterizar completamente a densidade de energia de deformação de um compósito elástico não linear contendo duas famílias de fibras é sete quando as direções das famílias de fibras são ortogonais entre si e nove, caso contrário. Os sete invariantes são utilizados na caracterização da densidade de energia de deformação de um material elástico ortotrópico. Esses invariantes não são independentes. Shariff (2013) mostra que eles satisfazem um syzygy, que é uma relação entre os invariantes que não fornece uma função de valor único para qualquer invariante em termos dos demais invariantes. Devido à existência dessa relação, o autor argumenta que esse número deve ser seis. Rubin (2016) define um conjunto de sete invariantes, equivalente ao conjunto de sete invariantes utilizado por Spencer (1984), e mostra que todos os sete invariantes são, de fato, necessários para caracterizar completamente a função de energia de deformação.

Para obter os nove invariantes para o caso de fibras não ortogonais, Spencer (1984) introduz um conjunto de dez invariantes juntamente com uma relação polinomial que lhe permite expressar um dos invariantes como uma função de valor único dos restantes. Alternativamente, mostramos que uma maneira direta de obter os nove invariantes é utilizar uma representação geral da função de energia de deformação em termos de três tensores simétricos, como apresentado em Zheng (1993), e considerar que dois desses tensores são produtos diádicos de vetores paralelos às direções de simetria. Comentamos ambas as abordagens na Seção 4.1. Shariff e Bustamante (2015) mostram que os nove invariantes satisfazem duas equações que relacionam os nove invariantes e argumentam que o número de invariantes independentes é seis quando o ângulo entre as duas direções das famílias é conhecido e sete, caso contrário. No entanto, as duas equações apresentadas por Shariff e Bustamante (2015) são syzygys entre os nove invariantes e, portanto, não permitem expressar dois dos nove invariantes como uma função de valor único dos restantes. Independentemente do trabalho de Shariff e Bustamante (2015) mostramos na Seção 4.2 que o número mínimo de invariantes independentes no caso de direções não ortogonais é sete quando o ângulo entre as duas direções das famílias é conhecido.

Este capítulo está dividido em duas seções. Na Seção 4.1, discutimos os resultados clássicos apresentados por Spencer (1984), juntamente com a abordagem alternativa baseada

no trabalho de Zheng (1993). Na Seção 4.2, usamos novamente os resultados de Zheng (1993) para a representação da densidade de energia de deformação; desta vez, no entanto, em termos de um tensor simétrico e dois vetores, em vez dos três tensores mencionados acima. Além disso, seguimos Spencer (1984) e usamos o argumento de que o comportamento do compósito não deve depender do sentido dos vetores que geram as direções de simetria. Em seguida, descobrimos que dois dos nove invariantes no caso de direções não ortogonais podem ser expressos em termos dos demais invariantes. No caso de direções ortogonais, utilizamos essa abordagem constitutiva para obter o conjunto de sete invariantes originalmente definidos por Rubin (2016). Resultados deste capítulo estão publicados em Aguiar e Rocha (2017).

4.1 Resultados Preliminares

Consideremos um composto reforçado com fibras em que o material da matriz é reforçado por duas famílias de fibras dispostas em direções não paralelas. Seguindo Spencer (1984), consideramos que, na escala macroscópica, o compósito é compressível e hiperelástico, possuindo uma densidade de energia de deformação ψ_e dada por

$$\psi_e = \psi(\mathbf{C}, \mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (4.1)$$

em que $\mathbf{C}$ é o tensor deformação de Cauchy-Green à direita, dado por (2.19), e $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são versores de $\mathbb{R}^3$ paralelos às direções das fibras. A função ψ é hemitrópica, isto é, ψ satisfaz

$$\psi(\mathbf{C}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \psi(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{a}, \mathbf{Q}\mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Ort}^+, \quad (4.2)$$

lembrando da Seção 2.1 que Ort^+ é o conjunto de todas as rotações. A função ψ é também invariante dos sentidos das fibras, isto é, ψ satisfaz

$$\psi(\mathbf{C}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \psi(\mathbf{C}, -\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \psi(\mathbf{C}, \mathbf{a}, -\mathbf{b}) = \psi(\mathbf{C}, -\mathbf{a}, -\mathbf{b}). \quad (4.3)$$

Uma vez que ψ não depende do sentido dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, Spencer (1984) argumenta que ψ deve ser uma função par de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, e, portanto, a expressão (4.1) pode ser reescrita como

$$\psi_e = \bar{\psi}(\mathbf{C}, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2), \quad (4.4)$$

em que

$$\mathbf{V}_1 \triangleq \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}, \quad \mathbf{V}_2 \triangleq \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}, \quad (4.5)$$

e lembramos da Seção 2.1 que $\otimes$ é o produto diádico em $\mathbb{R}^3$. Neste caso, $\bar{\psi}$ é uma função isotrópica dos três tensores simétricos $\mathbf{C}, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$, o que significa que

$$\bar{\psi}(\mathbf{C}, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = \bar{\psi}(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{V}_1\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{V}_2\mathbf{Q}^T), \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Ort}, \quad (4.6)$$

sendo Ort o conjunto de todos os tensores ortogonais, com $\text{Ort} \supset \text{Ort}^+$. Spencer (1984) afirma então que $\bar{\psi}$ deve ser uma função dos dez invariantes

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathbf{C}, \quad \text{tr } \mathbf{C}^2, \quad \text{tr } \mathbf{C}^3, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{C}\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{C}^2\mathbf{a}, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{C}\mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{C}^2\mathbf{b}, \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2, \\ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{C}\mathbf{b}), \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{C}^2\mathbf{b}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

os quais satisfazem a relação polinomial

$$\begin{aligned} (1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2) \left((\text{tr } \mathbf{C})^2 - \text{tr } \mathbf{C}^2 \right) / 2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{C}\mathbf{b})\text{tr } \mathbf{C} - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{C}^2\mathbf{b}) - \\ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{C}\mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{C}\mathbf{b})\text{tr } \mathbf{C} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{C}\mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{C}\mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{C}\mathbf{b})^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{C}^2\mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{C}^2\mathbf{b} = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

A relação (4.8) pode ser usada para reduzir o número de invariantes em (4.7) a nove, resolvendo, por exemplo, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{C}^2\mathbf{b})$ em termos dos outros invariantes.

A expressão (4.8) é a expressão (33) em Spencer (1984) em uma notação diferente e com uma correção, que consiste em dividir o termo $(\text{tr } \mathbf{e})^2 - \text{tr } \mathbf{e}^2$ por 2 em (33). Para ver que (33) em Spencer (1984) está incorreto, considere que $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é o conjunto de autovetores de $\mathbf{C}$ e que, em relação a este conjunto,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{b} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right). \quad (4.9)$$

Substituindo as expressões em (4.9) nos invariantes de (4.7), encontramos que $\text{tr } \mathbf{C} = 6$, $\text{tr } \mathbf{C}^2 = 14$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{C}\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{C}^2\mathbf{a} = 1$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{C}\mathbf{b} = 3/2$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{C}^2\mathbf{b} = 5/2$, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{C}\mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{C}^2\mathbf{b}) = 1/2$. Substituindo esses valores no lado esquerdo de (4.8) e os valores correspondentes em (33) de Spencer (1984), obtemos 0 e $11/2$, respectivamente. Na Seção 3 mostramos as etapas que levam à expressão correta em (4.8).

Spencer (1984) refere-se a uma tabela de invariantes apresentada em um trabalho anterior, Spencer (1971), a fim de encontrar os dez invariantes mencionados acima e, em seguida, utiliza a relação polinomial para reduzir esse número para nove. Deduzimos uma maneira alternativa de obter os nove invariantes, sem o auxílio da relação polinomial, a qual consiste em, primeiro, utilizar uma representação geral da densidade de energia de deformação em termos de três tensores simétricos e, em seguida, considerar que dois desses tensores são $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ definidos em (4.5). Assim, segue de Zheng (1993) o resultado que $\bar{\psi}$ em (4.4) satisfaz a condição de isotropia (4.6) se e somente se $\bar{\psi}$ pode ser expresso em termos dos vinte e dois invariantes

$$\begin{aligned} K_1 &= \text{tr} \mathbf{C}, \quad K_2 = \text{tr} \mathbf{C}^2, \quad K_3 = \text{tr} \mathbf{C}^3, \quad K_4 = \text{tr} \mathbf{U}_1, \quad K_5 = \text{tr} \mathbf{U}_1^2, \quad K_6 = \text{tr} \mathbf{U}_1^3, \\ K_7 &= \text{tr} \mathbf{U}_2, \quad K_8 = \text{tr} \mathbf{U}_2^2, \quad K_9 = \text{tr} \mathbf{U}_2^3, \quad K_{10} = \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{U}_1), \quad K_{11} = \text{tr}(\mathbf{C}^2 \mathbf{U}_1), \\ K_{12} &= \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{U}_1^2), \quad K_{13} = \text{tr}(\mathbf{C}^2 \mathbf{U}_1^2), \quad K_{14} = \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{U}_2), \quad K_{15} = \text{tr}(\mathbf{C}^2 \mathbf{U}_2), \\ K_{16} &= \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{U}_2^2), \quad K_{17} = \text{tr}(\mathbf{C}^2 \mathbf{U}_2^2), \quad K_{18} = \text{tr}(\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2), \quad K_{19} = \text{tr}(\mathbf{U}_1^2 \mathbf{U}_2), \\ K_{20} &= \text{tr}(\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2^2), \quad K_{21} = \text{tr}(\mathbf{U}_1^2 \mathbf{U}_2^2), \quad K_{22} = \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2), \end{aligned} \quad (4.10)$$

em que $\mathbf{U}_1$ e $\mathbf{U}_2$ são tensores simétricos arbitrários.

Tomando $\mathbf{U}_1 = \mathbf{V}_1$ e $\mathbf{U}_2 = \mathbf{V}_2$ e lembrando do exposto acima que os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são unitários, temos de (4.10) que

$$\begin{aligned} K_4 &= K_5 = K_6 = K_7 = K_8 = K_9 = 1, \quad K_{10} = K_{12} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{C} \mathbf{a}, \\ K_{11} &= K_{13} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{C}^2 \mathbf{a}, \quad K_{14} = K_{16} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{C} \mathbf{b}, \quad K_{15} = K_{17} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{C}^2 \mathbf{b}, \\ K_{18} &= K_{19} = K_{20} = K_{21} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2, \quad K_{22} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{C} \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Os três primeiros invariantes de (4.10) juntamente com os invariantes em (4.11) fornecem os primeiros nove invariantes em (4.7).

Claramente, a classe de materiais modelada por $\bar{\psi}$ em (4.4) é uma subclasse de materiais modelada por ψ em (4.1).

Em aplicações de engenharia, as direções de simetria são normalmente conhecidas, o que significa que o produto interno $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ é conhecido, reduzindo o número de invariantes independentes em (4.7) a oito; um fato notado por Shariff (2013). Na próxima seção mostramos que esse número pode ser reduzido a sete.

4.2 Caso Geral de Vetores Arbitrários

Lembramos da Seção 4.1 que seguimos Spencer (1984), ao utilizar o argumento de que ψ é invariante do sentido da fibra, e escrevemos ψ_e na forma dada por (4.4), em que, $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ são dados por (4.5a, b), respectivamente. Nesta seção, voltamos ao caso geral de ψ_e sendo dado por (4.1), em que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são vetores arbitrários. Utilizamos então os resultados de Zheng (1993) e o argumento acima para introduzir um conjunto de dez invariantes que é equivalente ao conjunto formado pelos dez invariantes em (4.7). Aqui, conjuntos equivalentes significam que membros de um conjunto podem ser expressos como polinômios dos membros do outro conjunto e vice-versa. Utilizando este novo conjunto, mostramos que o número de invariantes é sete no caso de versores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ linearmente independentes e não necessariamente ortogonais entre si.

Para vetores arbitrários $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, Zheng (1993) mostra que a função ψ em (4.1) satisfaz a condição (4.2) se e somente se existe uma função escalar $\tilde{\psi}$ tal que

$$\psi(\mathbf{C}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \tilde{\psi}(I_1, \dots, I_{15}), \quad (4.12)$$

em que

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr } \mathbf{C}, & I_2 &= \text{tr } \mathbf{C}^2, & I_3 &= \text{tr } \mathbf{C}^3, & I_4 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, & I_5 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{C} \mathbf{a}, & I_6 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{C}^2 \mathbf{a}, \\ I_7 &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}, & I_8 &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{C} \mathbf{b}, & I_9 &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{C}^2 \mathbf{b}, & I_{10} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, & I_{11} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{C} \mathbf{b}, \\ I_{12} &= \text{tr } \mathbf{C}^2 \mathbf{W}^2 \mathbf{C} \mathbf{W}, & I_{13} &= \text{tr } \mathbf{C}^2 \mathbf{Z}^2 \mathbf{C} \mathbf{Z}, & I_{14} &= \text{tr } \mathbf{C} \mathbf{W}^2 \mathbf{Z}, & I_{15} &= \text{tr } \mathbf{C} \mathbf{W} \mathbf{Z}^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Em (4.13), $\mathbf{W}$ e $\mathbf{Z}$ são tensores antissimétricos definidos por, respectivamente, $\mathbf{W}\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{v}$ e $\mathbf{Z}\mathbf{v} = \mathbf{b} \times \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, o que significa que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são vetores axiais de $\mathbf{W}$ e $\mathbf{Z}$, respectivamente. O conjunto $\{I_1, \dots, I_{15}\}$ caracteriza completamente a densidade de energia de deformação ψ e nenhum dos escalares neste conjunto pode ser expresso como um polinômio dos demais escalares.

Claramente, ψ , dado por (4.12), não satisfaz todas as condições em (4.3), uma vez que

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{C}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \tilde{\psi}(I_1, \dots, I_{15}) \neq \psi(\mathbf{C}, -\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \tilde{\psi}(I_1, \dots, I_9, -I_{10}, -I_{11}, -I_{12}, I_{13}, I_{14}, -I_{15}), \\ \psi(\mathbf{C}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \tilde{\psi}(I_1, \dots, I_{15}) \neq \psi(\mathbf{C}, \mathbf{a}, -\mathbf{b}) = \tilde{\psi}(I_1, \dots, I_9, -I_{10}, -I_{11}, I_{12}, -I_{13}, -I_{14}, I_{15}), \\ \psi(\mathbf{C}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \tilde{\psi}(I_1, \dots, I_{15}) \neq \psi(\mathbf{C}, -\mathbf{a}, -\mathbf{b}) = \tilde{\psi}(I_1, \dots, I_9, I_{10}, I_{11}, -I_{12}, -I_{13}, -I_{14}, -I_{15}). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Apresentamos a seguir um novo conjunto de invariantes que satisfazem o argumento de Spencer, segundo o qual ψ é invariante do sentido da fibra, e mostramos que podemos extrair um subconjunto de sete invariantes independentes. Para isso, definimos os nove invariantes

$$\begin{aligned} J_{10} &\triangleq I_{10}^2, & J_{11} &\triangleq I_{10}I_{11}, & J_{12} &\triangleq I_{11}^2, & J_{13} &\triangleq I_{12}^2, & J_{14} &\triangleq I_{13}^2, \\ J_{15} &\triangleq I_{14}^2, & J_{16} &\triangleq I_{15}^2, & J_{17} &\triangleq I_{12}I_{15}, & J_{18} &\triangleq I_{13}I_{14}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

em que $I_{10}, \dots, I_{15}$ são dados em (4.13). Observe de (4.13) e (4.15) que os nove invariantes $J_{10}, \dots, J_{18}$ foram obtidos de todas as combinações possíveis de produtos de pares de invariantes no conjunto $\{I_{10}, \dots, I_{15}\}$ que não mudam de sinal quando $\mathbf{a}$, ou, $\mathbf{b}$, ou, ambos mudam de sinal. Segue do exposto acima que $\psi(\mathbf{C}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \hat{\psi}(I_1, I_2, \dots, I_9, J_{10}, \dots, J_{18})$ satisfaz tanto (4.2) e (4.3) e que a classe de materiais modelada por $\hat{\psi}$ é uma subclasse de materiais modelado pelo $\tilde{\psi}$ a qual aparece em (4.12). Abaixo, selecionamos um subconjunto de dez invariantes do conjunto de dezoito invariantes, dado por $\{I_1, I_2, \dots, I_9, J_{10}, \dots, J_{18}\}$, e usamos esse subconjunto para construir uma base de integridade contendo sete invariantes.

Por conveniência, substituímos I_1 , I_2 e I_3 em (4.13) pelos invariantes equivalentes

$$J_1 = I_1, \quad J_2 = (I_1^2 - I_2)/2, \quad J_3 = (I_3 + (I_1^2 - 3I_2)I_1/2)/3. \quad (4.16)$$

Sem perda de generalidade, sejam $\mathbf{a} = \{1, 0, 0\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, 0\}$, em que $b_1^2 + b_2^2 = 1$ e $b_2 \neq 0$, as representações dos vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, respectivamente, em relação a uma base ortonormal apropriada em $\mathbb{R}^3$. As representações dos tensores $\mathbf{C}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}$ são dadas por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Substituindo as representações de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{C}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}$ nas expressões de J_1, J_2, J_3 em (4.16), $I_4, \dots, I_9$ em (4.13) e $J_{10}, \dots, J_{18}$ em (4.15) juntamente com (4.13), obtemos $I_4 = I_7 = 1$ e

$$\begin{aligned}
J_1 &= C_{11} + C_{22} + C_{33}, & J_2 &= -C_{12}^2 - C_{13}^2 - C_{23}^2 + C_{11}C_{22} + C_{11}C_{33} + C_{22}C_{33}, \\
J_3 &= -C_{13}^2C_{22} - C_{11}C_{23}^2 - C_{12}^2C_{33} + C_{11}C_{22}C_{33} + 2C_{12}C_{13}C_{23}, \\
I_5 &= C_{11}, & I_6 &= C_{11}^2 + C_{12}^2 + C_{13}^2, & I_8 &= C_{11}b_1^2 + 2C_{12}b_1b_2 + C_{22}b_2^2, \\
I_9 &= b_1^2(C_{11}^2 + C_{12}^2 + C_{13}^2) + 2b_1b_2(C_{11}C_{12} + C_{12}C_{22} + C_{13}C_{23}) + b_2^2(C_{12}^2 + C_{22}^2 + C_{23}^2), \\
J_{10} &= b_1^2, & J_{11} &= b_1(C_{11}b_1 + C_{12}b_2), & J_{12} &= b_1^2C_{11}^2 + 2C_{11}C_{12}b_1b_2 + b_2^2C_{12}^2, \\
J_{13} &= 2C_{12}C_{13}C_{23}(-C_{12}^2C_{22} + C_{22}C_{13}^2 + C_{12}^2C_{33} - C_{13}^2C_{33}) + C_{12}^2C_{13}^2C_{22}^2 + C_{12}^4C_{23}^2 - \\
& 2C_{12}^2C_{13}^2C_{23}^2 + C_{13}^4C_{23}^2 - 2C_{12}^2C_{13}^2C_{22}C_{33} + C_{12}^2C_{13}^2C_{33}^2, & J_{14} &= \dots, \\
J_{15} &= b_2^2C_{13}^2, & J_{16} &= b_2^2(b_1^2C_{13}^2 + 2b_1b_2C_{13}C_{23} + b_2^2C_{23}^2), \\
J_{17} &= C_{12}b_1b_2(C_{13}^2C_{22} - C_{13}^2C_{33}) + C_{13}C_{23}b_1b_2(-C_{12}^2 + C_{13}^2) + b_2^2C_{12}C_{13}C_{23}(C_{22} - C_{33}) - \\
& b_2^2(C_{12}^2C_{23}^2 + C_{13}^2C_{23}^2), \\
J_{18} &= b_2^2(C_{12}b_1b_2(C_{11}C_{13}^2 - 2C_{13}^2C_{22} + C_{13}^2C_{33}) + b_2^2(C_{13}^2(C_{12}^2 - C_{23}^2) + C_{12}C_{13}C_{23}(C_{33} - C_{11})) - \\
& C_{13}C_{23}b_1b_2(C_{11}^2 + C_{12}^2 - 2C_{13}^2 + C_{23}^2 + C_{11}C_{22} + C_{11}C_{33} - C_{22}C_{33})) + \\
& b_1^2b_2^2(C_{13}^2(C_{12}^2 - C_{13}^2 + C_{22}^2 - C_{11}C_{22} + C_{11}C_{33} - C_{22}C_{33} + 2C_{23}^2) + C_{12}C_{13}C_{23}(2C_{11} - C_{22} - C_{33})) \\
& + b_1^2(C_{12}b_1b_2(C_{13}^2C_{22} - C_{13}^2C_{33}) - C_{13}C_{23}b_1b_2(C_{12}^2 + C_{13}^2)),
\end{aligned} \tag{4.18}$$

em que a expressão de J_{14} foi omitida devido ao seu tamanho e ao fato de que ela não será utilizada abaixo. Observe de (4.18) que os dezesseis invariantes $J_1, J_2, J_3, I_5, I_6, I_8, I_9, J_{10}, \dots, J_{18}$ são polinômios dos dez termos $C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{12}^2, C_{13}^2, C_{12}^2, C_{23}^2, C_{12}C_{13}C_{23}, b_1^2, C_{12}b_1b_2, C_{13}C_{23}b_1b_2$, lembrando que $b_2^2 = 1 - b_1^2$. Os dez termos podem ser escritos como funções de valor único de dez invariantes no conjunto dos dezesseis invariantes. Por exemplo, ao escolher o conjunto $\{J_1, J_2, J_3, I_5, I_6, I_8, I_9, J_{10}, J_{11}, J_{15}\}$, descobrimos que

$$\begin{aligned}
b_1^2 &= J_{10}, & C_{11} &= I_5, & b_1b_2C_{12} &= J_{11} - I_5J_{10}, & C_{22} &= (I_8 + I_5J_{10} - 2J_{11})/(1 - J_{10}), \\
C_{33} &= J_1 - (I_8 + I_5 - 2J_{11})/(1 - J_{10}), & C_{13}^2 &= J_{15}/(1 - J_{10}), & C_{12}^2 &= I_6 - I_5^2 - J_{15}/(1 - J_{10}), \\
C_{23}^2 &= -(4J_{11}^2 + J_{10}^2J_2 + J_{10}^2I_6 - 2J_{10}J_2 + J_{10}I_5^2 - 2J_{10}I_6 + J_2 + I_6 + I_5(J_{10} + 1)I_8 + I_8^2 + \\
& J_1(J_{10} - 1)(-2J_{11} + I_5 + I_8) - 2J_{11}(J_{10}I_5 + I_5 + 2I_8))/(J_{10} - 1)^2, \\
C_{12}C_{13}C_{23} &= (J_{10}^2J_3 + J_{10}J_{15}I_5 - J_{10}^2J_2I_5 - J_{10}^2I_5I_6 - 2J_{10}J_3 + J_{15}I_5 + 2J_{10}J_2I_5 - J_{10}I_5^3 + \\
& 3J_{10}I_5I_6 + J_3 - J_2I_5 + I_5^3 - 2I_5I_6 + J_1(J_{10} - 1)(J_{15} + I_6(J_{10} - 1)) - \\
& 2J_{11}(2J_{15} + (I_5^2 - I_6)(-J_{10} + 1)) + (2J_{15} + (I_5^2 - I_6)(-J_{10} + 1))I_8)/(2(J_{10} - 1)^2), \\
b_1b_2C_{13}C_{23} &= (J_{10}^2(J_2 + I_6) - J_{10}(J_{15} + 2J_{11}I_5 + 2J_2 - I_5^2 + I_6 - I_5I_8 - J_1(-2J_{11} + I_5 + I_8) + \\
& I_9) + (4J_{11}^2 + 2J_{11}(J_1 - 2I_5 - I_8) + (J_{15} + J_2 - (J_1 - I_5)(I_5 + I_8) + I_9)))/(2(1 - J_{10})).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

É possível mostrar que o conjunto $\{J_1, J_2, J_3, I_5, I_6, I_8, I_9, J_{10}, J_{11}, J_{15}\}$ é equivalente ao conjunto formado em (4.7).

Se as famílias de fibras são ortogonais entre si, $b_1 = J_{10} = 0$, $b_2 = 1$, e segue de $b_1 b_2 C_{12}$ em (4.19) que $J_{11} = 0$ e de $b_1 b_2 C_{13} C_{23}$ que

$$J_{15} = -(J_2 - (J_1 - I_5)(I_5 + I_8) + I_9), \quad (4.20)$$

Assim, obtemos o conjunto de sete invariantes dado por $\{J_1, J_2, J_3, I_5, I_6, I_8, I_9\}$, que é equivalente ao conjunto dos primeiros sete invariantes em (4.7).

Observe de (4.19) que a identidade $(C_{12} C_{13} C_{23})^2 = C_{12}^2 C_{13}^2 C_{23}^2$ fornece um syzygy entre os invariantes do conjunto $\{J_1, J_2, J_3, I_5, I_6, I_8, I_9\}$. Shariff (2013) utiliza esta relação para argumentar que o número de invariantes pode ser reduzido de sete para seis. Rubin (2016), por outro lado, introduz um conjunto de sete invariantes e, escrevendo esses invariantes em termos das componentes de $\mathbf{C}$ na base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}\}$, afirma que tal redução não é possível. Rubin (2016) não justifica a introdução desses invariantes.

Utilizando as expressões em (4.6) de Rubin (2016) e examinando as expressões em (4.18), vemos prontamente que os seis primeiros invariantes em (4.5) de Rubin (2016) são $I_5, I_8, J_1 - I_5 - I_8, J_{12}, J_{15}, J_{16}$, respectivamente, e que o sétimo invariante é obtido da expressão para J_3 em (4.18). Em vista destas observações e utilizando (4.5), de Rubin (2016), vemos também que os conjuntos $\{J_1, J_3, I_5, I_8, J_{12}, J_{15}, J_{16}\}$ e $\{J_1, J_2, J_3, I_5, I_6, I_8, I_9\}$ são equivalentes.

Se, no entanto, as fibras não são ortogonais entre si, supomos que b_1, b_2 são conhecidos e utilizamos $b_1 b_2 C_{12}$ em (4.19) para obter

$$C_{12} = (J_{11} - I_5 J_{10}) / (b_1 b_2), \quad (4.22)$$

lembrando de (4.18) que $J_{10} = b_1^2$. A substituição de C_{12} , dada por (4.22), na expressão de C_{12}^2 em (4.19) fornece

$$J_{15} = -\frac{J_{11}^2}{J_{10}} + 2J_{11}I_5 - I_5^2 + I_6 - J_{10}I_6. \quad (4.23)$$

Utilizando (4.23) juntamente com as expressões $b_1 b_2 C_{13} C_{23}$ e $C_{12} C_{13} C_{23}$ em (4.19), resolvemos para J_3 e obtemos

$$J_3 = (J_{11}^3 + J_1 J_{10} (-J_{11}^2 - J_{10} I_5 I_8 + J_{11} (I_5 + I_8)) + J_{10} J_{11} ((-1 + J_{10}) J_2 - I_6 - I_5 I_8 - I_9) + J_{10}^2 (I_6 I_8 + I_5 I_9)) / J_{10}^2 (-1 + J_{10}). \quad (4.24)$$

Assim, aqui também, obtemos um conjunto de sete invariantes, mas agora dado por $\{J_1, J_2, I_5, I_6, I_8, I_9, J_{11}\}$, para caracterizar a densidade de energia de deformação de um material elástico anisotrópico com duas direções de simetria não ortogonais. Este resultado é inédito. De fato, Shariff (2013) afirma que, para $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ fixos a função densidade de energia de deformação é geralmente escrita em termos de J_3 e dos invariantes no conjunto $\{J_1, J_2, I_5, I_6, I_8, I_9, J_{11}\}$, totalizando oito invariantes.

Para obter o décimo invariante, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{C}^2 \mathbf{b})$, na lista de Spencer, dada em (4.7), escrevemos este invariante em termos de, primeiramente, $C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{12}^2, C_{13}^2, C_{12}^2, C_{23}^2, C_{12} C_{13} C_{23}$ e b_1^2 , e em seguida, de $\{J_1, J_2, J_3, I_5, I_6, I_8, I_9\}$ utilizando (4.19) e os resultados acima. A relação (4.8) segue após utilizarmos as definições de $J_1, J_2, I_5, I_6, I_8, I_9$ em (4.13) e de J_{11} em (4.15). Conforme observado no parágrafo após (4.8), esta expressão é a expressão (33) em Spencer (1984) em uma notação diferente e com uma correção, que consiste em dividir o termo $(\text{tr } \mathbf{e})^2 - \text{tr } \mathbf{e}^2$ por 2 em (33).

5. Conclusões

Shariff e Bustamante (2015) apresentam dois syzygys entre os oito invariantes da densidade de energia de deformação ψ de um material elástico anisotrópico com duas direções de simetria não paralelas conhecidas. Estas relações não permitem expressar dois dos oito invariantes como funções de valor único dos restantes. Independentemente, usamos os resultados de Zheng (1993) juntamente com o argumento de Spencer que ψ é invariante do sentido da fibra para propor um conjunto de dezoito invariantes. Em seguida, extraímos um subconjunto de dez invariantes, que é equivalente ao conjunto formado pelos primeiros dez invariantes em (4.7). Usando esse subconjunto, mostramos que o número mínimo de invariantes necessários para representar ψ é sete no caso de versores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ não paralelos conhecidos, independentemente de serem, ou, não ortogonais entre si. Este resultado é inédito. Ademais, corrigimos um erro na fórmula (33) de Spencer (1984) e encontramos uma justificativa para a introdução dos invariantes definidos em Rubin (2016) em termos do conjunto de invariantes $\{J_1, J_3, I_5, I_8, J_{12}, J_{15}, J_{16}\}$. Os resultados deste trabalho são importantes na modelagem de materiais de engenharia, como compósitos reforçados com fibras, e tecidos biológicos, como ossos.

Apêndice

Este apêndice trata sobre as relações obtidas a partir de (4.19) e suas correspondências com dois syzygys encontrados por Shariff e Bustamante (2015), que também aparecem em Shariff (2016).

Considerando J_{10} não nulo e diferente de 1 e utilizando (4.23) e (4.24), substituímos as expressões de C_{13}^2 , C_{23}^2 e $b_1 b_2 C_{13} C_{23}$, dadas em (4.19), na expressão $A_1 \triangleq (b_1 b_2)^2 C_{13}^2 C_{23}^2 - (b_1 b_2 C_{13} C_{23})^2$ e obtemos

$$\begin{aligned} A_1 \triangleq & (4(J_{11}^2 - 2J_{10}J_{11}I_5 + J_{10}(I_5^2 + (-1 + J_{10})I_6)))(4J_{11}^2 + J_2 + I_6 + \\ & J_{10}((-2 + J_{10})J_2 + I_5^2 + (-2 + J_{10})I_6) - J_1(-1 + J_{10})(2J_{11} - I_5 - I_8) + \\ & (1 + J_{10})I_5I_8 + I_8^2 - 2J_{11}(I_5 + J_{10}I_5 + 2I_8)) - (((-1 + 5J_{10})J_{11}^2 - \\ & J_1(-1 + J_{10})J_{10}(2J_{11} - I_5 - I_8) - 2J_{10}J_{11}(I_5 + 2J_{10}I_5 + I_8) + \\ & J_{10}((-1 + J_{10})^2J_2 + I_6 + 2J_{10}^2I_6 + I_5I_8 + \\ & J_{10}(-3I_6 + I_5(2I_5 + I_8) - I_9) + I_9))^2 / J_{10}^2) / (4(-1 + J_{10})^2). \end{aligned} \quad (A.1)$$

Similarmente, substituímos as expressões de C_{12}^2 , C_{13}^2 , C_{23}^2 , e $C_{12}C_{13}C_{23}$, dadas em (4.19), na expressão $A_2 \triangleq (C_{12}C_{13}C_{23})^2 - C_{12}^2C_{13}^2C_{23}^2$ e obtemos

$$\begin{aligned} A_2 = & (J_{11} - J_{10}I_5)^2((-1 + 9J_{10})J_{11}^4 - 4J_{10}J_{11}^3(I_5 + I_8) + \\ & J_1^2(-1 + J_{10})J_{10}^2(-2J_{11} + I_5 + I_8)^2 + 2J_{10}J_{11}^2((-1 + J_{10})(-1 + 3J_{10})J_2 - \\ & (-1 + 5J_{10})(I_6 + I_5I_8 + I_9)) + 4J_{10}^2J_{11}(I_5^2I_8 - (-1 + J_{10})J_2(I_5 + I_8) + \\ & I_8(I_6 + 2J_{10}I_6 + I_9) + I_5(I_6 + I_8^2 + I_9 + 2J_{10}I_9)) + J_{10}^2((-1 + J_{10})^3J_2^2 + \\ & (-1 + J_{10})I_6^2 + (-1 + J_{10})I_5^2I_8^2 - 2I_5(I_8 + J_{10}(2I_5 + I_8))I_9 + (-1 + J_{10})I_9^2 - \\ & 2(-1 + J_{10})J_2((-1 + J_{10})I_6 - (1 + J_{10})I_5I_8 + (-1 + J_{10})I_9) - \\ & 2I_6(I_8(I_5 + J_{10}I_5 + 2J_{10}I_8) + I_9 + J_{10}(-3 + 2J_{10})I_9)) - \\ & 2J_1J_{10}(2J_{11} - I_5 - I_8)((-1 + 3J_{10})J_{11}^2 - 2J_{10}J_{11}(I_5 + I_8) + J_{10}((-1 + J_{10})^2J_2 + \\ & I_6 + I_5I_8 + I_9 - J_{10}(I_6 - I_5I_8 + I_9)))) / (4(-1 + J_{10})^3J_{10}^4). \end{aligned} \quad (A.2)$$

Os termos A_1 e A_2 relacionam-se pela expressão $(J_{11} - J_{10}I_5)^2 A_1 = -J_{10}^2(-1 + J_{10})^2 A_2$ e, portanto, fornecem um único syzygy entre os invariantes $J_1, J_2, I_5, I_6, I_8, I_9$ e J_{11} .

Por outro lado, Shariff e Bustamante (2015) obtiveram três relações, dadas pelas suas expressões (30), (34) e (39), entre os invariantes do conjunto (3) deste trabalho. Esses invariantes correspondem aos invariantes listados em (4.7). Shariff e Bustamante (2015) afirmam que essas três relações podem ser usadas para reduzir o número de invariantes do conjunto (3) de dez para sete, ou, de nove para seis se I_9 for conhecido. Mostramos abaixo que essas três relações só fornecem dois invariantes independentes. O terceiro invariante é precisamente J_3 dado por (4.24)

a) A expressão (30) em Shariff e Bustamante (2015) corresponde à expressão (4.8), de modo que podemos expressar $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{C}^2 \mathbf{b})$ em termos dos outros invariantes.

b) A relação (34) em Shariff e Bustamante (2015) não está correta. O lado direito deve ser multiplicado por $(1 - I_9)^2 I_9^2$ na notação utilizada por estes autores. Passando o lado direito correto para o lado esquerdo da relação (34) em Shariff e Bustamante (2015) e denotando B_1 o lado esquerdo resultante, obtemos que $B_1 = A_1 R_1$, sendo A_1 dado em (A.1) e R_1 um polinômio dos invariantes $J_1, J_2, I_5, I_6, I_8, I_9$ e J_{11} que, em geral, não é nulo. Isso significa que A_1 e B_1 fornecem o mesmo syzygy.

c) Passando o lado direito da expressão (39) em Shariff e Bustamante (2015) para o lado esquerdo e denotando por B_2 o lado esquerdo resultante, obtemos que $B_2 = 4A_2$, sendo A_2 dado em (A.2). Assim, determinamos que B_1 e B_2 se relacionam pela expressão

$$-4(J_{11} - J_{10}I_5)^2 B_1 / (J_{10}^2(-1 + J_{10})^2) = B_2 R_1, \quad (\text{A.3})$$

sendo R_1 o polinômio mencionado no item b) acima. Por definição, ambos os lados de (A.3) devem ser zero. Uma vez que, em geral, $J_{11} - J_{10}I_5$ e R_1 não são nulos, temos que um invariante que satisfaça a expressão $B_1 = 0$ também deve satisfazer a expressão $B_2 = 0$ e vice-versa. Portanto, B_1 e B_2 determinam somente um invariante independente, desde que J_3 seja conhecido de (4.23).

Concluimos das observações acima que precisamos de um conjunto de sete invariantes, dados por $\{J_1, J_2, I_5, I_6, I_8, I_9, J_{11}\}$, para caracterizar a função de energia de deformação de um material elástico anisotrópico com duas direções de simetria não ortogonais. Similarmente ao

caso das direções ortogonais, esses invariantes satisfazem apenas um syzygy, dada por $A_1 = 0$ ou $A_2 = 0$. Lembramos do exposto acima que Shariff e Bustamante (2015) afirmam a existência de dois syzygys, dados por $B_1 = 0$ and $B_2 = 0$.

Referências

- AGUIAR, A. R.; ROCHA, G. L. On The Number of invariants in the strain energy density of an anisotropic nonlinear elastic material with two material symmetry directions. **Journal of Elasticity**. Switzerland, 2017. Doi:10.1007/s10659-017-9642-5.
- AVAZMOHAMMADI, R.; HILL, M. R.; SIMON, M. A; ZHANG, W.; SACKS, M. A novel constitutive model for passive right ventricular myocardium: evidence for myofiber-collagen fiber mechanical coupling, **Biomechanics and Modeling in Mechanobiology**, v. 16, p. 561-581, 2017.
- BOEHLER, J. P. On Irreducible representations for isotropic scalar functions. **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, Weinheim, v.57, p.323-327, 1977.
- CAUCHY, A. L. Mémoire sur les systèmes isotropes de points matériels. **Mémoires de l'Académie (royale) des sciences de l'Institut (imperial) de France**, Paris, v.22, p.615-654, 1850.
- CAYLEY, A. A Memoir on the theory of matrices. **Philosophical Transactions of Royal Society of London**, London, v.148, p.17–37, 1858.
- GURTIN, M. E. **An Introduction to continuum mechanics**. San Diego: Academic Press, 1981.
- HAMILTON, W. R. **Lectures of quaternions**. Cambridge: Macmillan, 1853.
- LIU, I. S. On Representations of anisotropic invariants. **International Journal of Engineering Science**, Philadelphia, v.20, p.1099-1109, 1982.
- NOLL, W. Representation of certain isotropic tensor functions. **Archiv der Mathematik**, Basel, v.21, p.87–90, 1970.
- PENNISI, S.; TROVATO, M. On The Irreducibility of professor G. F. Smith's representations for isotropic functions. **International Journal of Engineering Science**, Philadelphia, v.25, p.1059-1065, 1987.
- PIPKIN, A. C.; WINEMAN, A. S. Material symmetry restrictions on non-polynomial constitutive equations. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Heidelberg, v.12, p.420-426, 1963.
- RIVLIN, R. S.; ERICKSEN, J. L. Stress-deformation relations for isotropic materials. **Journal of Rational Mechanics and Analysis**, Bloomington, v.4, p.323–425, 1955a.
- _____. Further remarks on stress-deformation relations for isotropic materials. **Journal of Rational Mechanics and Analysis**, Bloomington, v.4, p.681–702, 1955b.
- RUBIN, M. B. Seven invariants are needed to characterize general orthotropic elastic materials: a comment on [Shariff, J. Elast., **110**: 237–241 (2013)]. **Journal of Elasticity**, Dordrecht, v.123, p.253-254, 2016.

SHARIFF, M. Nonlinear orthotropic elasticity: only six invariants are independent. **Journal of Elasticity**, Dordrecht, v.110, p.237-241, 2013.

SHARIFF, M.;BUSTAMANTE, R. On the independence of strain invariants of two preferred direction nonlinear elasticity. **International Journal of Engineering Science**, v.97, p.18-25, 2015.

SHARIFF, M. The number of independent invariants of an n-preferred direction anisotropic solid. **Mathematics and Mechanics of Solids**, p.1–8, 2016.

SMITH G. F. On A Fundamental error in two papers of C.-C. Wang “on representations for isotropic functions, parts I and II”. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Heidelberg, v.3, p.161–165, 1970.

_____. On Isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors. **International Journal of Engineering Science**, Philadelphia, v.9, p.899-916, 1971.

SPENCER, A.J.M. Part III - Theory of Invariants. In: _____. (Ed.) **Continuum physics I (Part III)**. New York. Academic Press. 1971. p.239–353.

_____. Constitutive theory for strongly anisotropic solids. In: _____. (Ed.). **Continuum theory of the mechanics of fiber reinforced composites**. Austria: Springer-Verlag, 1984. p.1–32. (CISM International Centre for Mechanical Sciences, v.282).

TRUESDELL, C.; NOLL, W. **The Non-linear field theories of mechanics**. Berlin: Springer-Verlag, 1965.

WANG, C. C. On Representations for isotropic functions, part I. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Heidelberg, v.4, p.250–268, 1969a.

_____. On Representations for isotropic functions, part II. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Heidelberg, v.4, p.268-287, 1969b.

_____. A New representation theorem for isotropic functions, part I: an answer to professor G. F. Smith's criticism of my papers on representations for isotropic functions Part 1. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Heidelberg, v.36, p.166–197, 1970a.

_____. A New representation theorem for isotropic functions, part II: an answer to professor G. F. Smith's criticism of my papers on representations for isotropic functions Part 2. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Heidelberg, v.36, p.198–223, 1970b.

_____. Corrigendum to my recent papers on: representations for isotropic functions **Archive of Rational Mechanics and Analysis**, Heidelberg, v. 43, p. 392–395, 1971.

ZHENG, Q. S. On The Representations for isotropic vector-valued, symmetric tensor-valued and skew-symmetric tensor-valued function. **International Journal of Engineering Science**, Philadelphia, v.31, p.1013-1024, 1993.

ZHENG Q. S. Theory of representations for tensor functions-A unified invariant approach to constitutive equations. **International Journal of Engineering Science**, Philadelphia , v.47, p.545-587, 1994.

ZHENG, Q. S.; SPENCER, A. J. M. Tensors which characterize anisotropies. **International Journal of Engineering Science**, Philadelphia , v.31, p.679-693, 1993.

ZHENG Q.-S. On the representations for isotropic vector-valued, symmetric tensor-valued and skew-symmetric tensor-valued function. **International Journal of Engineering Science**, 31, 1013-1024, 1993.

ZHENG Q.-S; SPENCER, A.J.M. Tensors which characterize anisotropies. **International Journal of Engineering Science**, 31, 679-693, 1993.

ZHENG Q.-S. Theory of representations for tensor functions-A unified invariant approach to constitutive equations, **International Journal of Engineering Science**, 47(11), 545-587, 1994.