GABRIEL LOPES DA ROCHA

**Estudo das propriedades de simetria de ossos
trabeculares**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Interunidades Bioengenharia - Escola de Engenharia de São Carlos / Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto / Instituto de Química de São Carlos da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre em Ciências.

Área de Concentração: Bioengenharia

Orientador: Prof. Adair Roberto Aguiar, PhD

VERSÃO CORRIGIDA

São Carlos
2012

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

R672e Rocha, Gabriel Lopes da
Estudo das propriedades da simetria de ossos
trabeculares / Gabriel Lopes da Rocha; orientador Adair
Roberto Aguiar. -- São Carlos, 2012.

Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação de
Interunidades em Bioengenharia e Área de Concentração em
Bioengenharia) -- Escola de Engenharia de São Carlos,
Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto; Instituto de
Química de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2012.

1. Estrutura óssea. 2. Osso trabecular. 3. Função
resposta mecânica. I. Título.

Programa de Pós-Graduação Interunidades em Bioengenharia
EESC / FMRP / IQSC

GABRIEL LOPES DA ROCHA

Título: "Estudo das propriedades da simetria de ossos trabeculares"

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO INTERUNIDADES BIOENGENHARIA EESC/FMRP/IQSC DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM CIÊNCIAS NA ÁREA DE BIOENGENHARIA.

Aprovado em: 30 / 11 / 12.

Prof. Dr. Adair Roberto Aguiar (Orientador)

Escola de Engenharia de São Carlos - USP

Resultado: Aprovado

Assinatura: Adair R. Aguiar

Prof. Dr. José Marcos Alves

Escola de Engenharia de São Carlos - USP

Resultado: Aprovado

Assinatura: J. M. Alves

Prof. Dr. Walter Savassi

Escola de Engenharia de São Carlos - USP

Resultado: Aprovado

Assinatura: Walter Savassi

Dedicatória

Dedico esta dissertação a meus pais José Fernando e Armelinda, pelo amor, incentivo, suporte e, principalmente, pelos ensinamentos que formaram os alicerces de minha história. A meu irmão, Felipe, pelo apoio e incentivo desde o princípio deste projeto. A minha namorada, Natalia, por todo apoio, amor, admiração e gratidão por sua compreensão e carinho ao longo do período de elaboração deste trabalho.

Agradecimento

À Deus, caminho da verdade, razão de tudo, senhor da minha vida e da minha história.

Ao meu orientador Prof. Adair Roberto Aguiar, PhD., pela orientação, atenção, apoio, dedicação, paciência, mas principalmente, pela convivência e pelo exemplo de honestidade e competência durante a realização deste trabalho.

Aos meus amigos, sem os quais seria impossível realizar este trabalho.

Ao Programa de Pós-Graduação Interunidades Bioengenharia, pela oportunidade de realizar o curso de mestrado.

À Capes, pela concessão da bolsa do mestrado.

Resumo

ROCHA, G. L. **Estudo das propriedades de simetria de ossos trabeculares**. 2012. 92p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação Interunidades Bioengenharia- EESC/FMRP/IQSC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

A osteoporose, doença caracterizada pela redução da massa óssea e deterioração da microestrutura óssea, atinge a população idosa e afeta centenas de milhões de pessoas em todo mundo. Por manifestar-se sem causar sintoma visível, o diagnóstico da doença ocorre, na maioria dos casos após lesão ou fratura do osso. Na tentativa de detectar os sinais iniciais da doença, utilizam-se diferentes métodos de avaliação da qualidade óssea baseados na medida da densidade e da arquitetura óssea. Atualmente existe um grande interesse em estabelecer uma correlação entre as medidas de qualidade óssea com as propriedades mecânicas de resistência do osso. Uma estratégia para caracterizar o comportamento mecânico do osso consiste em obter as propriedades da macroestrutura óssea a partir das propriedades da sua microestrutura. Cowin (1985) propõe um modelo mecânico para materiais porosos elástico-lineares supondo que a função resposta mecânica do meio poroso elástico sob deformações infinitesimais é uma função isotrópica do tensor deformação infinitesimal, da fração volumétrica e do tensor textura que caracteriza a simetria do arranjo geométrico do meio poroso. Ao obter uma relação entre as componentes do tensor de elasticidade, as componentes do tensor textura e a fração volumétrica do meio poroso, o autor observa que o tensor de elasticidade obtido não fornece todos os tipos possíveis de simetria do material poroso, restringindo-se apenas à ortotropia e seus casos particulares, tais como a isotropia e a isotropia transversal. O tensor de elasticidade obtido por Cowin (1985) não descreve o comportamento local do meio poroso, pois depende explicitamente das componentes do tensor textura, o qual representa uma medida não local. Esta dissertação tem por objetivo estudar e analisar o modelo proposto por Cowin (1985). Propõe-se neste trabalho uma formulação para a função resposta de materiais porosos elástico-lineares para deformações infinitesimais que descreva o comportamento local do meio poroso.

Palavra-Chave: estrutura óssea, osso trabecular, função resposta mecânica.

Abstract

ROCHA, G. L. **A Study of the Symmetry Properties of Trabecular Bone**. 2012. 92p. Dissertation (Master) – Programa de Pós-Graduação Interunidades Bioengenharia - EESC/FMRP/IQSC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

Osteoporosis, a disease characterized by the reduction of bone mass and deterioration of bone microstructure deterioration, affects the elderly population and hundreds of millions of people worldwide. As a silent disease, its diagnosis occurs, in most cases, after injury, or, bone fracture. In an attempt to detect early signs of the disease, different methods of diagnostic imaging to obtain measures of density and bone architecture are used. Currently, there is great interest in establishing a correlation between the measurements of bone quality with the mechanical properties of bone strength. One strategy to characterize the mechanical behavior of bones is to obtain the properties of its macrostructure from the properties of its microstructure. Cowin (1985) proposes a mechanical model for porous materials by assuming that the mechanical response function of the material under infinitesimal deformation is a function of the infinitesimal deformation tensor, the volume fraction, and the texture tensor that characterizes the symmetry of the geometrical arrangement of the porous medium. By obtaining a relationship between the components of the elasticity tensor, the components of the texture tensor and the volume fraction of the porous medium, the author notes that resulting the elasticity tensor does not yield all possible types of symmetry of the porous material, being restricted to orthotropy and its particular cases, such as the isotropic and transverse isotropy. The elasticity tensor obtained by Cowin (1985) does not describe the local behavior of porous media, and depends explicitly on the fabric tensor components, which represent a non local measure. This dissertation aims to study and analyze the model proposed by Cowin (1985). A formulation for the response function of linear elastic porous materials under infinitesimal deformation that describes the local behavior of the porous medium is also proposed.

Keywords: bone structure, trabecular bone, response function mechanics.

Lista de Figuras

FIGURA 2.1 – HIERARQUIA DO OSSO.....	15
FIGURA 2.2 – ESQUELETO HUMANO.....	15
FIGURA 2.3 – OSSO TRABECULAR E OSSO CORTICAL.....	17
FIGURA 2.4 – CONSTITUINTES DOS OSSOS CORTICAL E TRABECULAR.....	18
FIGURA 2.5 – CELULAS ÓSSEAS.....	19
FIGURA 2.6 – REMODELAGEM ÓSSEA	20
FIGURA 2.7 – CRESCIMENTO POPULACIONAL MUNDIAL.....	21
FIGURA 2.8 – CRESCIMENTO DA PROPORÇÃO DE IDOSOS	21
FIGURA 2.9 – PERDA DE MASSA ÓSSEA AO LONGO DOS ANOS.....	22
FIGURA 2.10 – PERDA DE MASSA ÓSSEA EM OSSO TRABECULAR.....	23
FIGURA 2.11 – INCIDÊNCIA DE FRATURAS EM HOMENS E MULHERES.....	24
FIGURA 3.1 – UNIÃO E INTERSECÇÃO DE DOIS CONJUNTOS.....	26
FIGURA 3.2 – OPERAÇÕES DE SOMA E PRODUTO POR ESCALAR DE VETORES DE $\mathbf{V}$	31
FIGURA 4.1 – ROTAÇÃO E ESTIRAMENTO DE UM CORPO.....	58
FIGURA 4.2 – PLANO S SECCIONANDO CORPO DEFORMADO.....	61
FIGURA 5.1 – IMAGEM 3D E SECÇÕES TRANSVERSAIS DE UMA AMOSTRA DE OSSO TRABECULAR OBTIDAS POR MICROTOMOGRÁFIA 3D.....	69
FIGURA 5.2 – MEDIÇÃO DE L (MIL) EM DUAS DIMENSÕES.....	69
FIGURA 5.3 – VARIAÇÃO DAS DIREÇÕES PREFERENCIAIS DAS TRABÉCULAS.....	70
FIGURA 5.4 – REPRESENTAÇÃO DO ELIPSÓIDE OBTIDO PELO MIL EM TRÊS DIMENSÕES	70

Sumário

1.	Introdução	11
1.1)	Motivação.....	11
1.2)	Objetivo	12
1.3)	Organização da Dissertação	13
2.	Morfologia Óssea	14
2.1)	Hierarquia do Osso	14
2.1.1)	Macroescala.....	15
2.1.2)	Mesoescala	17
2.1.3)	Microescala	17
2.1.4)	Submicroescala.....	18
2.1.5)	Nanoescala.....	19
2.1.6)	Subnanoescala	19
2.2)	Remodelagem Óssea	20
2.3)	Osteoporose.....	21
2.3.1)	Crescimento da População de Idosos	21
2.3.2)	Perda Óssea	22
2.3.3)	Dados Epidemiológicos da Osteoporose	23
3.	Fundamentos Matemáticos	25
3.1)	Elementos da Teoria dos Conjuntos.....	25
3.1.1)	Conjuntos, União e Intersecção.....	25
3.1.2)	Relação entre $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{V}$ e $\mathbf{M}_{3 \times 1}$	27
3.1.3)	Função	28
3.2)	Elementos da Álgebra Linear.....	30
3.2.1)	Espaço Vetorial	30
3.2.2)	Dimensão e Base	31

3.2.3)	Espaço Euclidiano	32
3.2.4)	Transformação Linear.....	34
3.3)	Elementos da Álgebra Tensorial	35
3.3.1)	Tensor	35
3.3.2)	Autovalor e Autovetor	38
3.3.3)	Tensor Rotação, Reflexão e Inversão	39
3.3.4)	Grupo de Simetria.....	40
3.4)	Representações de Funções Invariantes	41
3.4.1)	Função escalar invariante	41
3.4.2)	Representação de funções escalares invariantes.....	42
3.4.3)	Função tensorial simétrica invariante	44
3.4.4)	Representação de funções tensoriais simétricas	45
3.5)	Elementos da Análise Tensorial	48
3.5.1)	Diferencial e derivada em $\mathbb{R}$	48
3.5.2)	Diferencial e derivada em $\mathbb{R}^3$	49
3.6)	Revisão Bibliográfica.....	50
4.	Mecânica dos Sólidos Elásticos.....	55
4.1)	Deformação e Deslocamento	56
4.2)	Deformação Homogênea, Estiramento e Rotação.....	57
4.3)	Medidas de Deformação.....	59
4.4)	Conservação de Massa, Tensão e Equilíbrio Estático.....	60
4.5)	Mudança de Observador.....	62
4.6)	Elementos da Teoria de Elasticidade	62
4.6.1)	Princípio da Objetividade e Restrição da Função Resposta ao Estiramento	63
4.6.2)	Grupo de Simetria do Material Elástico	64
4.7)	Comportamento Mecânico de Material Elástico	65
4.8)	Elasticidade Linear Infinitesimal	66

5.	Apresentação de Resultados	68
5.1)	Observações Experimentais	68
5.2)	Modelo Mecânico Proposto por Cowin	71
5.3)	Modelo Proposto	75
5.3.1)	Material Elástico Linear Isotrópico.....	75
5.3.2)	Material Elástico Linear Transversalmente Isotrópico.....	76
5.3.3)	Material Elástico Linear Ortotrópico.....	77
5.4)	Desenvolvimento do Modelo Proposto por Cowin.	78
5.5)	Desenvolvimento do Modelo Proposto	80
5.5.1)	Modelo Isotrópico	80
5.5.2)	Modelo Transversalmente Isotrópico	81
5.5.3)	Modelo Ortotrópico	83
5.6)	Conclusão	85
	Referência Bibliográficas	86

1. Introdução

O osso é um órgão resistente e relativamente rígido composto por uma hierarquia de estruturas e componentes responsáveis por diversas funções essenciais ao organismo humano, das quais se destaca a função mecânica relacionada ao suporte e estabilidade do corpo. A osteoporose, doença que reduz e degrada a massa óssea afetando as propriedades mecânicas do osso, inicia-se por ossos com maior volume de porosidade como, por exemplo, os ossos trabeculares. Para desenvolver técnicas que possibilitem o diagnóstico precoce desta doença é necessário obter modelos que descrevam com precisão o comportamento mecânico do osso trabecular.

Divide-se este capítulo em três seções. Na Seção 1.1 apresenta-se a motivação, na Seção 1.2 apresenta-se o objetivo e na Seção 1.3 apresenta-se a organização desta dissertação.

1.1) Motivação

Com o crescimento progressivo da proporção de idosos na população mundial em virtude do aumento da longevidade e da diminuição da taxa de natalidade, as doenças relacionadas à velhice estão se tornando um problema de saúde mundial. A osteoporose é uma das doenças que atinge a população idosa e afeta centenas de milhões de pessoas em todo mundo. Manifestando-se sem causar sintoma visível, esta doença é caracterizada por reduzir a massa óssea e deteriorar a microestrutura, comprometendo a qualidade óssea e aumentando o risco de fraturas. O diagnóstico da osteoporose ocorre, na maioria dos casos, após lesão ou fratura do osso. A primeira manifestação clínica desta doença ocorre somente após a perda de 30% a 40% da massa óssea.

Diferentes técnicas de diagnóstico têm sido utilizadas na tentativa de detectar os sinais iniciais da osteoporose. As técnicas convencionais de diagnóstico por imagem são não invasivas e utilizam ondas mecânicas, magnéticas ou raios-X para obter medidas da densidade e da microarquitetura do osso. Atualmente existe um grande interesse em estabelecer uma correlação direta entre as medidas obtidas por estas técnicas com as propriedades mecânicas do osso. Uma estratégia para caracterizar o comportamento mecânico do osso consiste em obter as propriedades da macroestrutura a partir das propriedades da microestrutura.

Do ponto de vista da Mecânica, o osso trabecular seco pode ser modelado como um sólido poroso elástico-linear anisotrópico sob deformações infinitesimais. Pela Lei de Hooke

Generalizada, o tensor tensão de Cauchy relaciona-se linearmente com o tensor deformação infinitesimal por intermédio do tensor de elasticidade.

Ao considerar isotrópica a parte sólida de um meio poroso cuja anisotropia está associada somente à orientação do arranjo geométrico do meio, Cowin (1985) propõe um modelo para descrever o comportamento mecânico de sólidos porosos no regime elástico sob deformações infinitesimais admitindo que a função resposta mecânica do sólido poroso é uma função isotrópica do tensor deformação infinitesimal, da fração volumétrica e do tensor textura. Obtido mediante a técnica de medição da distância média (em inglês, *Mean Intercept Length - MIL*) entre as interfaces dos poros com a parte sólida do meio poroso, o tensor textura caracteriza as direções preferenciais da parte sólida do sólido poroso, as quais são utilizadas para determinar a simetria do arranjo geométrico da microestrutura. Ao obter uma relação entre as componentes do tensor de elasticidade, as componentes do tensor textura e a fração volumétrica do sólido poroso, o autor observa que o tensor de elasticidade obtido não fornece as oito simetrias possíveis dos materiais elásticos lineares anisotrópicos (VOIGT, 1910), restringindo-se apenas à ortotropia e seus casos particulares, tais como a isotropia e a isotropia transversal.

O tensor de elasticidade obtido por Cowin (1985) não descreve o comportamento local do sólido poroso, pois depende explicitamente das componentes do tensor textura, o qual representa uma medida não local.

1.2) Objetivo

Esta dissertação tem por objetivo estudar e analisar o modelo proposto por Cowin (1985) que descreve o comportamento mecânico de materiais elásticos lineares porosos sob deformações infinitesimais. Nesta investigação é proposta uma nova formulação para este modelo.

1.3) Organização da Dissertação

No Capítulo 2 apresenta-se uma revisão sobre morfologia e fisiologia óssea, caracterizando os constituintes e a microestrutura do osso trabecular. O capítulo é dividido em três seções e trata da hierarquia e constituintes do osso, remodelagem óssea e osteoporose.

No Capítulo 3 apresenta-se uma revisão de tópicos da matemática utilizados no desenvolvimento desta dissertação. O capítulo é dividido em seis seções e apresenta elementos da teoria dos conjuntos, elementos da álgebra linear, elementos da álgebra tensorial, elementos da teoria da representação de funções invariantes, elementos da análise tensorial e revisão bibliográfica sucinta sobre o desenvolvimento e a determinação das representações e dos geradores de funções escalares e tensoriais simétricas isotrópicas.

No Capítulo 4 apresenta-se uma revisão de tópicos da mecânica dos sólidos e da teoria da elasticidade. O capítulo é dividido em oito seções e trata da deformação de corpos contínuos, medidas de deformação, equilíbrio estático de materiais elásticos, determinação da função resposta mecânica de materiais elásticos isotrópicos, transversalmente isotrópicos e ortotrópicos e elasticidade linear infinitesimal.

No Capítulo 5 apresentam-se o modelo que descreve o comportamento mecânico de materiais porosos proposto por Cowin (1985) e um modelo para descrever o comportamento mecânico elástico-linear de materiais porosos isotrópicos, transversalmente isotrópicos e ortotrópicos.

2. Morfologia Óssea

Considerada a epidemia do século XXI, a osteoporose reduz a qualidade e a resistência mecânica do osso aumentando o risco de fraturas. Para obter modelos que descrevam com precisão o comportamento mecânico do osso, é necessário, primeiramente, compreendê-lo sob os aspectos morfológicos e fisiológicos.

Utilizam-se os termos estrutura para a descrição da forma geométrica do osso, o termo componente para descrever os elementos constituintes da estrutura óssea e o termo propriedade mecânica aos atributos que conferem rigidez ao osso.

Divide-se este capítulo em três seções. Na Seção 2.1 apresenta-se a hierarquia, a estrutura e as componentes do osso. Na Seção 2.2 apresenta-se o processo de remodelagem óssea. Na Seção 2.3 apresenta-se uma revisão epidemiológica sobre a osteoporose.

2.1) Hierarquia do Osso

Constituinte do *esqueleto humano*, o osso é um órgão com rigidez e resistente formado por tecidos metabolicamente ativos, sendo formado por uma hierarquia de estruturas complexas e componentes variadas que lhe confere diversas funções essenciais ao organismo humano, dentre as quais citam-se:

- *Função mecânica*: O osso proporciona proteção, suporte e estabilidade ao corpo humano;

- *Função bioquímica*: O osso regula e serve como reservatório de minerais essenciais ao organismo;

- *Função cinemática*: O osso é local de inserção dos músculos e atua na coordenação e amplificação das forças geradas nos movimentos.

Conforme ilustrado na Figura 2.1, Hamed e Jasiuk (2012) dividem a hierarquia da estrutura do osso em seis escalas diferentes, as quais estão descritas com maiores detalhes nas subseções 2.2.1 - 2.2.6.

Figura 2. 1 - Hierarquia do osso (HAMED; JASIUK, 2012).

2.1.1) Macroescala

O osso constitui o *esqueleto humano*. Figura 2.2 ilustra alguns ossos do esqueleto humano.

Figura 2. 2 - Esqueleto humano (AVANCINI & FAVARETTO, 1997).

Conforme o *tamanho* e *formato*, a *estrutura do osso* pode ser classificada na macroescala em quatro subcategorias:

- *Ossso longo*: possui comprimento maior que a largura e a espessura, consiste de um corpo denominado diáfise, contendo em seu interior o canal medular, e duas extremidades denominadas epífises. Exemplos de ossos longos: fêmur, úmero, rádio, ulna, tíbia, fíbula e falanges.

- *Ossso plano*: possui comprimento e largura equivalentes e maiores que a espessura. Exemplos de ossos planos: escápula e ílio.

- *Ossso curto*: possui comprimento, largura e espessura equivalentes. Exemplos de ossos curtos: carpo e tarso.

- *Ossso irregular*: apresenta uma morfologia que não possui correspondência em formas geométricas. Exemplo de osso irregular: vértebras.

O osso é formado pelas seguintes *componentes*:

- *Tecido ósseo*: constituído de três células ósseas (osteoblastos, osteoclastos e osteócitos) e matriz extracelular calcificada formada por fibras de colágeno e cristais de hidroxiapatita.

- *Medula óssea*: preenche a cavidade medular da diáfase e os espaços trabeculares das epífises de ossos longos. Ela pode ser do tipo amarela, formada de tecido adiposo, ou, do tipo vermelha, responsável pela produção de células sanguíneas (hemácias, leucócitos e plaquetas).

- *Periósteo*: dupla camada que envolve o osso. A camada exterior é vascularizada e inervada e a camada interior contém células osteogênicas que se diferenciam em células ósseas.

- *Endeósteo*: camada fina de tecido conjuntivo que reveste internamente o osso, composta por uma monocamada de células osteogênicas.

- *Cartilagem articular*: reveste as articulações e não apresenta vascularização, redes linfáticas e inervação.

Considera-se nesta dissertação que as propriedades mecânicas do osso são conferidas e provenientes do tecido ósseo.

2.1.2) Mesoescala

Conforme a *porosidade*, a estrutura do osso na mesoescala pode ser classificada em duas subcategorias:

- Osso cortical: localizado na parte externa dos ossos e na região da diáfise dos ossos longos, possui porosidade que varia entre 5% a 30%.
- Osso trabecular: localizado principalmente na parte interna da epífise de ossos longos e nas vértebras, possui porosidade que varia entre 30% a 90%.

Figura 2.3 apresenta o osso trabecular (*spongy bone*) e o osso cortical (*compact bone*)

na região da epífise proximal de um fêmur.

Figura 2. 3 - Osso trabecular e osso cortical (<http://www.gla.ac.uk/ibls/US/fab/public/docs/xbone1x.html>).

2.1.3) Microescala

Conforme a estrutura do osso na mesoescala, a estrutura do osso na microescala pode ser classificada em duas subcategorias:

- Ósteon: constituinte do osso cortical e formado por tecido ósseo caracterizado por possuir fibras de colágeno distribuídas na forma de camadas concêntricas paralelamente dispostas ao longo do eixo formado pelo *canal de Havers*, o qual acomoda vasos sanguíneos e nervos, e interliga-se com outros canais de Havers paralelos, com a cavidade medular e com a superfície externa do osso através de canais transversais denominados *canais de Volkmann* (ATHANASIOU et al., 2000).

- Trabécula: constituinte do osso trabecular e formado por tecido ósseo caracterizado por possuir fibras de colágeno distribuídas paralelamente à superfície. A trabécula é classificada em bastonete, ou, placa, conforme o seu formato.

Figura 2. 4 - Constituintes dos ossos cortical e trabecular (Adaptado de Sciense Photo Library Netterimages.com).

2.1.4) Submicroescala

O *tecido ósseo* é o principal componente constituinte do osso, sendo formado pela:

- *Matriz extracelular calcificada*: formada por duas componentes, uma orgânica e outra inorgânica. A componente orgânica constitui 35% da matriz extracelular e é formada, principalmente, por fibras de colágeno. A componente inorgânica constitui 65% da matriz extracelular e é formada, principalmente, por cristais de hidroxiapatita.

- *Células ósseas*: As células do tecido ósseo, mostrados na Figura 2.5, são de três tipos, conforme apresentado a seguir.

a) *Osteoclastos*: células multinucleadas responsáveis pela reabsorção de tecido ósseo mediante a secreção de ácido que dissolve localmente os cristais de hidroxiapatita da matriz orgânica.

b) *Osteoblastos*: células mononucleares responsáveis pela síntese e deposição de colágeno nos locais que foram reabsorvidos, processo denominado osteogênese.

c) *Osteócitos*: osteoblastos aprisionados no osteóide, matriz extracelular calcificada recém-sintetizada, responsáveis pela transmissão de sinais mecânicos em sinais bioquímicos e

pela regulação dos processos de reabsorção óssea e de osteogênese, comunicam-se entre si por intermédio de prolongamentos de seu citoplasma, denominados processos citoplasmáticos, envolvidos pelos canalículos.

Figura 2. 5 - Células Ósseas (Adaptado de Tim Arnett; The Bone Research Society, Science Photo).

2.1.5) Nanoescala

A fibra de *colágeno mineralizada* é a componente constituinte da estrutura óssea na nanoescala, sendo formada por:

- *Cristais de hidroxiapatita*: compostos por fosfato de cálcio cristalino $\text{Ca}_{10}(\text{PO}_4)_6(\text{OH})_2$, representa o depósito de 97 à 99% do cálcio e 80% do fósforo encontrado em todo o organismo. Esse mineral, muito pouco solúvel, se dissolve em ácido, pois tanto o PO_4^{3-} quanto o OH^- reagem com H^+ .

- *Moléculas de colágeno*: formam feixes de fibras brancas que se cruzam e se entrelaçam formando um único feixe.

2.1.6) Subnanoescala

As componentes constituintes da estrutura óssea na sub-nanoescala são:

- *Moléculas de colágeno*: têm como principal função manter a estrutura e a forma física do osso, assim como, garantir ao tecido ósseo a capacidade de resistir à fratura, compressão, tração, proporcionando à estrutura certa maleabilidade sem a perda de rigidez (KRUKOWSKI, 1995).

- *Cristais de hidroxiapatita*: responsáveis pela rigidez e resistência do osso à compressão (MARTIN; BURR; SHARKEY, 2004).

2.2) Remodelagem Óssea

Composta pelos processos de *osteogênese*, formação da matriz extracelular calcificada, e *reabsorção óssea*, processo de degradação da matriz extracelular calcificada, a *remodelagem óssea* contribui para o equilíbrio metabólico do cálcio e fósforo no organismo humano e na reparação de micro-danos que ocorrem regularmente na matriz extracelular calcificada.

Os osteoclastos, mediante a dissolução da componente inorgânica da matriz óssea, degradam e reabsorvem osso gerando uma lacuna de reabsorção. Esta lacuna é preenchida pela ação dos osteoblastos que se dispõem ao longo da lacuna de reabsorção, sintetizando precursores do colágeno e repondo o osso reabsorvido, mantendo assim o equilíbrio de remodelação, conforme ilustrado na Figura 2.6.

Figura 2. 6 - Remodelagem Óssea (Adaptado de <http://www.roche.com/pages/facets/11/ostedefc.htm>).

2.3) Osteoporose

2.3.1) Crescimento da População de Idosos

Conforme projeções do relatório da Organização das Nações Unidas (UN, 2008), estima-se que a média mundial de filhos por mulher seja de 2,45 e que a população mundial tenha superado 7 bilhões de habitantes, dos quais 800 milhões possuem mais de 60 anos, valor que corresponde a 11,4% da população mundial. Segundo o relatório, estimativas apontam que em 2050 a média de filhos por mulher seja de 2,17 e que a população mundial supere os 9,3 bilhões de habitantes, dos quais 2 bilhões possuirão mais de 60 anos, valor que corresponderá a 21,6% da população mundial. Figura 2.7 apresenta comparação entre a estimativa da população mundial em bilhões de pessoas (barra vermelha) e a estimativa da população de pessoas com mais de 60 anos em bilhões de pessoas (barra azul) no período entre 2010 e 2050 e a Figura 2.8 apresenta o crescimento da proporção de idosos na população mundial no mesmo período.

Figura 2. 7 - Crescimento populacional mundial (UN, 2008).

Figura 2. 8 - Crescimento da proporção de idosos (UN, 2008).

Analisando ambas as figuras, 2.7 e 2.8, verifica-se que nos próximos 40 anos a proporção de idosos em relação à população mundial irá praticamente dobrar. Este processo de aumento da proporção de idosos na população mundial é denominado *envelhecimento populacional*. Com o envelhecimento populacional, as doenças relacionadas à velhice tendem a se tornar um problema de saúde mundial.

2.3.2) Perda Óssea

Conforme apresentado na Seção 2.2, o osso é um órgão de rigidez elevada, resistente e metabolicamente ativo, sendo constantemente renovado ao longo de toda vida por intermédio do processo de remodelagem óssea. Figura 2.9 apresenta a variação típica da massa óssea durante o tempo de vida de uma pessoa.

Figura 2.9 - Perda de massa óssea ao longo dos anos (Adaptado de COMPSTON, 1995).

Verifica-se da Figura 2.9 que a massa óssea, tanto para homens quanto para mulheres, aumenta gradualmente e alcança seu pico por volta dos 25 anos de idade, mantendo-se constante até aproximadamente os 40 anos, quando ocorre o início da perda gradual de massa óssea. O pico de massa óssea das mulheres é menor do que o pico de massa óssea dos homens, sendo que a taxa de perda óssea entre as mulheres é acentuada no período da menopausa. Durante o período da menopausa a mulher sofre redução das taxas de estrogênio, causando a intensificação do processo de absorção óssea e desequilibrando o remodelamento ósseo (PARFITT et al., 1983).

O osso trabecular é mais ativo quanto à remodelagem óssea do que o osso cortical. A deterioração da massa óssea inicia em ossos que apresentam maior volume de osso trabecular como as vértebras, o punho e o colo do fêmur, e apenas mais tarde inicia também em ossos que possuem maior volume de osso cortical como, por exemplo, no quadril e nas diáfises de

ossos longos. Figura 2.10 ilustra o efeito da redução do tecido ósseo (superior direito) e degradação (inferior direito) de uma trabécula.

Figura 2. 10 - Perda de massa óssea em osso trabecular (Adaptado de GUO; KIM, 2002).

Observa-se da Figura 2.10 que a perda de massa óssea pode ocasionar tanto o aumento da fragilidade da estrutura quanto à alteração da sua microarquitetura.

2.3.3) Dados Epidemiológicos da Osteoporose

Segundo a Organização Mundial da Saúde (OMS, 2010), a osteoporose é uma doença crônico-degenerativo-multifatorial caracterizada pela redução da massa óssea, degeneração da arquitetura do tecido ósseo e diminuição da velocidade do processo de consolidação de lesões ósseas. Esta doença intensifica o processo natural de deterioração da massa óssea, aumentando consideravelmente o risco de lesões e fraturas do osso, e é considerada a epidemia do século XXI (NIH CONSENSUS CONFERENCE, 2001), afetando principalmente idosos e mulheres no período de pós-menopausa. A osteoporose manifesta-se sem causar sintomas visíveis, evidenciando o fato de que seu diagnóstico ocorre, na maioria das vezes, após lesão ou fratura do osso.

Cooper (1999) estimou que mais de 200 milhões de pessoas em todo mundo tem osteoporose. Johnell e Kanis (2006) estimaram a ocorrência de cerca de 9 milhões de fraturas osteoporóticas em 2000, das quais 1,6 milhões no quadril, 1,7 milhões no antebraço e 1,4

milhões na coluna vertebral. Figura 2.11 apresenta a taxa de ocorrência de fraturas no antebraço, coluna vertebral e no quadril para homens e mulheres.

Figura 2. 11 - Incidência de fraturas em homens e mulheres (International Osteoporosis Foundation).

Dentre as fraturas associadas à osteoporose, considera-se que a fratura no quadril é uma das mais graves. A taxa de mortalidade relativa à fratura no quadril é avaliada entre 10% a 20%, enquanto que a taxa de morbidade relacionada a esta fratura é avaliada em 50% (RIGGS; MELTON, 1995; PAPAIOANNOU et al., 2006). A fratura do colo do fêmur apresenta uma taxa de mortalidade de 20% para as mulheres e 40 % para os homens (CUMMINGS; MELTON, 2002). Geralmente, a causa da morte não ocorre pela fratura em si, mas pelas complicações médicas relacionadas a esta, sendo que a morbidade e invalidez associada às fraturas é um dos aspectos mais agravantes da osteoporose (BROWNER; PRESSMAN; CUMMING, 1996).

Estimou-se que no ano de 2000 os custos diretos causados pelas fraturas osteoporóticas aos serviços de saúde na União Européia superaram € 32 bilhões. Previsões apontam, com base em projeções do crescimento populacional na Europa, que os gastos com a osteoporose cheguem a € 77 bilhões em 2050 (KANIS; JOHNELL, 2004). Em 2001 as despesas diretas associadas às fraturas osteoporóticas nos hospitais e asilos americanos foram de \$ 17 bilhões. Em 2004 o custo com hospitalização e tratamento de fratura osteoporótica do fêmur nos hospitais brasileiros foram estimados em R\$ 12 milhões (ARAUJO; OLIVEIRA; BRACO, 2005).

3. Fundamentos Matemáticos

Neste capítulo, expõe-se tópicos da matemática utilizados no desenvolvimento desta dissertação. O objetivo deste capítulo não é realizar um tratamento extensivo dos temas abordados, mas sim proporcionar um guia de consulta para a melhor compreensão dos resultados obtidos.

Divide-se este capítulo em seis Seções. Na Seção 3.1 apresentam-se elementos da teoria dos conjuntos. Na Seção 3.2 apresentam-se elementos da álgebra linear. Na Seção 3.3 apresentam-se elementos da álgebra tensorial. Na Seção 3.4 apresentam-se elementos da teoria da representação de funções invariantes. Na Seção 3.5 apresentam-se elementos da análise tensorial. Na Seção 3.6 apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre os a teoria da representação de funções invariantes.

3.1) Elementos da Teoria dos Conjuntos

3.1.1) Conjuntos, União e Intersecção.

Um *conjunto* é uma seleção de *elementos* distintos.

Um conjunto é completamente determinado pela lista de seus elementos ou por uma propriedade específica comum aos seus elementos. Por exemplo,

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{i}, \mathbf{o}, \mathbf{u}\} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \text{ é uma vogal do alfabeto latino}\}. \quad (3.1.1)$$

Se $\mathbf{x}$ é um elemento do conjunto $\mathbf{A}$ então $\mathbf{x}$ *pertence* ao conjunto $\mathbf{A}$ escrevendo-se $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$. Caso contrário $\mathbf{x}$ *não pertence* ao conjunto $\mathbf{A}$ e escreve-se $\mathbf{x} \notin \mathbf{A}$.

O conjunto $\mathbf{C}$ é um *subconjunto* do conjunto $\mathbf{A}$ se todo elemento do conjunto $\mathbf{C}$ pertence ao conjunto $\mathbf{A}$ escrevendo-se $\mathbf{C} \subset \mathbf{A}$.

Os conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são *iguais* se todo elemento do conjunto $\mathbf{A}$ pertence ao conjunto $\mathbf{B}$ e todo elemento do conjunto $\mathbf{B}$ pertence ao conjunto $\mathbf{A}$ escrevendo-se $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

A *união* dos conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem ao conjunto $\mathbf{A}$ *ou* pertencem ao conjunto $\mathbf{B}$ escrevendo-se $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$.

A *intersecção* dos conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem ao conjunto $\mathbf{A}$ *e* pertencem ao conjunto $\mathbf{B}$ escrevendo-se $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$.

O *conjunto vazio* $\emptyset$ não possui nenhum elemento.

Os conjuntos **A** e **B** são *disjuntos* se $A \cap B = \emptyset$.

A Figura (3.1) ilustra as relações de união e intersecção entre dois conjuntos.

Figura 3. 1 – União e Intersecção de dois conjuntos.

Exemplo 3.1.1: Conjuntos

a) *Conjunto dos números naturais:*

$$\mathbb{N} = \{x \mid x \text{ é um número natural}\}. \quad (3.1.2)$$

b) *Conjunto dos números reais:*

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ é um número real}\}. \quad (3.1.3)$$

c) *Conjunto das triplas de números reais:*

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}. \quad (3.1.4)$$

d) *Conjunto das ênuplas de número reais $\mathbb{R}^n$;*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}\}. \quad (3.1.5)$$

e) *Conjunto dos vetores;*

$$\mathbf{V} = \{\vec{u} \mid \vec{u} \text{ é um vetor}\}. \quad (3.1.6)$$

O comprimento do vetor $\vec{u}$ é um número real positivo representado por $\|\vec{u}\|$.

f) *Conjunto de ponto;*

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \text{ é um ponto}\}. \quad (3.1.7)$$

O *ponto* é uma noção elementar da geometria e refere-se a um objeto que não possui comprimento, área, volume ou qualquer outra dimensão, caracterizado apenas pela sua

posição no espaço geométrico. Neste trabalho, os pontos pertencentes a E serão utilizados para descrever a posição de objetos no espaço tridimensional.

g) *Conjunto das matrizes reais de dimensão $m \times n$;*

$$M_{m \times n} = \{[A] \mid [A] \text{ é uma matriz real de dimensão } m \text{ por } n\}. \quad (3.1.8)$$

Uma matriz real $[A]$ de dimensão m por n é representada por

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}. \quad (3.1.9)$$

O número real $A_{ij} \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, m \in \mathbb{N}$ e $j = 1, \dots, n \in \mathbb{N}$, é denominado *componente da matriz* $[A]$ que ocupa a i -ésima linha e a j -ésima coluna.

3.1.2) Relação entre $\mathbb{R}^3$, E , V e $M_{3 \times 1}$.

Os elementos dos conjuntos E e V relacionam-se por:

i) O vetor $\overrightarrow{XY}$ é a diferença entre os pontos Y e X ,

$$\overrightarrow{XY} = Y - X. \quad (3.1.10)$$

ii) A soma do ponto X e do vetor $\overrightarrow{XY}$ é o ponto Y ,

$$Y = X + \overrightarrow{XY}. \quad (3.1.11)$$

Seja $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ um sistema de coordenadas cartesianas tridimensional $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

com $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$, para $i, j = 1, 2, 3$, sendo δ_{ij} o delta de Kronecker que satisfaz

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (3.1.12)$$

O vetor posição do ponto $X \in E$ é o único vetor $\overrightarrow{OX} \in V$ tal que

$$X = O + \overrightarrow{OX} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3. \quad (3.1.13)$$

As matrizes $[X]$ e $[\overrightarrow{OX}]$ com

$$[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3.1.14)$$

e

$$[\overrightarrow{\mathbf{OX}}] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (3.1.15)$$

são denominadas respectivamente por *representação matricial das coordenadas do ponto X* e *representação matricial das componentes do vetor posição $\overrightarrow{\mathbf{OX}}$* .

3.1.3) Função

O conjunto

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{A} \text{ e } \mathbf{y} \in \mathbf{B}\} \quad (3.1.16)$$

é denominado *produto cartesiano* dos conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. O elemento $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ é denominado *par ordenado*.

Uma *relação* de $\mathbf{A}$ para $\mathbf{B}$ é um subconjunto $\mathcal{R} \subset \mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

O elemento $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{R}$ será denotado por $\mathbf{x} \mathcal{R} \mathbf{y}$. $\mathcal{R}$ é uma relação no conjunto $\mathbf{A}$ se $\mathcal{R}$ é uma relação de $\mathbf{A}$ para $\mathbf{A}$.

Seja $\mathcal{R}$ uma relação de $\mathbf{A}$ para $\mathbf{B}$. Os conjuntos

$$\mathbf{Dom}(\mathcal{R}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{A} \mid \mathbf{x} \mathcal{R} \mathbf{y} \text{ para algum } \mathbf{y} \in \mathbf{B}\} \quad (3.1.17)$$

e

$$\mathbf{Im}(\mathcal{R}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{B} \mid \mathbf{x} \mathcal{R} \mathbf{y} \text{ para algum } \mathbf{x} \in \mathbf{A}\} \quad (3.1.18)$$

são denominados *domínio* da relação $\mathcal{R}$ e *imagem* da relação $\mathcal{R}$, respectivamente.

Uma *função* de $\mathbf{A}$ para $\mathbf{B}$ é uma relação f que satisfaz as seguintes propriedades:

a) $\mathbf{Dom}(f) = \mathbf{A}$.

b) Se $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ e $f(\mathbf{x}) = \mathbf{z}$ então $\mathbf{y} = \mathbf{z}$.

Se f é uma função então denota-se $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in f$ por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ e $f \subset \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ por $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$.

Seja $f : A \rightarrow B$ uma função e $C \subset A$. O subconjunto

$$f(C) = \{f(x) \mid x \in C\} \quad (3.1.19)$$

é denominado *restrição da função f sobre o subconjunto C* .

Se $f : A \rightarrow B$ é uma função e $C = A$, segue de (3.1.18) e (3.1.19) que

$$f(A) = \text{Im}(f). \quad (3.1.20)$$

As funções $f : A \rightarrow B$ e $g : A \rightarrow B$ são *iguais* se, e somente se,

$$f(x) = g(x), \quad (3.1.21)$$

para todo $x \in A$. Neste caso denota-se $f = g$.

A função $f : A \rightarrow B$ é:

- a) *injetora* se $f(x) = f(y)$ então $x = y$;
- b) *sobrejetora* se $\text{Im}(f) = B$;
- c) *bijetora* se f é injetora e sobrejetora.

Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : f(A) \subset B \rightarrow C$ funções. A função $g \circ f : A \rightarrow C$ com

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (3.1.22)$$

para todo $x \in A$ é denominada *função composta* das funções f e g .

Exemplo 3.1.2: Função

- a) O *traço* é uma função $\text{tr} : M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada $A \in M_{n \times n}$ o número real

$$\text{tr } A = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}. \quad (3.1.23)$$

- b) O *determinante* é uma função $\det : M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa para cada $[A] \in M_{n \times n}$ o determinante da matriz $[A]$.

3.2) Elementos da Álgebra Linear

3.2.1) Espaço Vetorial

Um *espaço vetorial real* $\mathcal{V}$ é um conjunto formado por elementos, denominados *vetores*, que satisfazem as seguintes propriedades:

A. A cada par de vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b} \in \mathcal{V}$ é associado um único vetor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, denominado soma dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, tal que para todos os vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c} \in \mathcal{V}$, valem:

$$A.1) (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c});$$

$$A.2) \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a};$$

$$A.3) \text{ Existe um único vetor } \mathbf{0}, \text{ denominado } \textit{vetor zero}, \text{ tal que } \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a};$$

A.4) A cada $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ é associado um único vetor $-\mathbf{a}$, denominado *vetor oposto a* $\mathbf{a}$, tal que $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

B. A cada par α e $\mathbf{a}$, sendo α um número real denominado *escalar*, é associado um vetor $\alpha\mathbf{a}$, tal que para todos os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b} \in \mathcal{V}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valem:

$$B.1) (\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a});$$

$$B.2) \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b};$$

$$B.3) (\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a};$$

$$B.4) 1\mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

Exemplo 3.3.1: Espaços Vetoriais Reais.

a) *Espaço vetorial do conjunto dos números reais*: o conjunto $\mathbb{R}$ definido em (3.1.3) com as operações usuais de soma e produto por escalar é um espaço vetorial real.

b) *Espaço vetorial do conjunto das triplas de números reais*: o conjunto $\mathbb{R}^3$ definido em (3.1.4), com a operação de soma das coordenadas das triplas (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) dada por

$$x_i + y_i = z_i \tag{3.2.1}$$

e produto por escalar

$$\alpha x_i = w_i, \tag{3.2.2}$$

com $i=1,2,3$, é um espaço vetorial real.

c) *Espaço vetorial do espaço do $\mathbb{R}^n$* : similarmente o conjunto $\mathbb{R}^n$ definido em (3.1.5) com as operações de soma das coordenadas das ênuplas (3.1.5) e produto por escalar definidos como em (3.2.1) e (3.2.2) para $i=1,2,\dots,n$, é um espaço vetorial real.

d) *Espaço vetorial dos vetores da geometria euclidiana*: o conjunto V definido em (3.1.6) com a operação de soma e produto por escalar definidos conforme a ilustração na Figura 3.2 é um espaço vetorial real.

Figura 3.2 – Operações de soma e produto por escalar de vetores de V .

e) *Espaço vetorial das matrizes reais de dimensão $m \times n$* : o conjunto $M_{m \times n}$ definido em (3.1.8) com as operações usuais de soma e produto por escalar é um espaço vetorial real.

3.2.2) Dimensão e Base

O vetor $a \in V$ é uma *combinação linear* dos vetores $v_1, \dots, v_n \in V$ se

$$a = \alpha_1 v_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, \quad (3.2.3)$$

com $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $i=1, \dots, n$.

O conjunto de vetores $v_1, \dots, v_n \in V$ é *linearmente independente* se

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0. \quad (3.2.4)$$

Caso contrário, este conjunto de vetores é *linearmente dependente*.

O espaço vetorial real V possui *dimensão finita* igual a n , denotado por

$$\dim V = n, \quad (3.2.5)$$

se existe um conjunto de n vetores linearmente independentes em V tal que qualquer conjunto com $n+1$ vetores seja sempre linearmente dependente. Caso contrário, o espaço vetorial V possui *dimensão infinita*.

Seja $\mathcal{V}$ espaço vetorial, com $\dim \mathcal{V} = n$. Uma *base* em $\mathcal{V}$ é formada por qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes.

Seja $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ uma combinação linear dos vetores de $\mathbf{B}_{\mathcal{V}} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, conforme (3.2.3). Se o conjunto $\mathbf{B}_{\mathcal{V}}$ é uma base $\mathcal{V}$ então os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são denominados *coordenadas* do vetor $\mathbf{a}$ na base $\mathbf{B}_{\mathcal{V}}$.

A *representação em coordenadas* do vetor $\mathbf{a}$ na base $\mathbf{B}_{\mathcal{V}}$ é dada por

$$\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)_{\mathbf{B}_{\mathcal{V}}} \quad (3.2.6)$$

e a representação matricial de suas coordenadas dada por

$$[\mathbf{a}]_{\mathbf{B}_{\mathcal{V}}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}. \quad (3.2.7)$$

3.2.3) Espaço Euclidiano

Um espaço vetorial com *produto escalar* é um espaço vetorial $\mathcal{V}$ com uma operação $\cdot : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par de vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ um número real $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

- a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$;
- b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$;
- c) $(\alpha \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$;
- d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$.

Um espaço vetorial $\mathcal{V}$ de dimensão finita que possui produto escalar é denominado *Espaço Euclidiano*.

O *comprimento*, ou, *norma euclidiana* de um vetor $\mathbf{u}$ é definido por

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}. \quad (3.2.8)$$

O vetor $\mathbf{u}$ é denominado *unitário* se $\|\mathbf{u}\| = 1$.

O ângulo θ entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é obtido do

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}. \quad (3.2.9)$$

Os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são *ortogonais* se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Uma base de vetores $\mathbf{B}_V = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é *ortonormal* se todos os vetores desta base são unitários e mutuamente ortogonais entre si. Uma base de vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é ortonormal se e somente se satisfaz a relação

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (3.2.10)$$

para $i, j = 1, \dots, n$, sendo que δ_{ij} é o delta de Kronecker dado em (3.1.12).

Se $\mathcal{V}$ é um espaço euclidiano então as coordenadas $u_1, u_2, \dots, u_n$ do vetor $\mathbf{u}$ na base ortonormal $\mathbf{B}_V = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ são dadas por

$$u_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} \quad (3.2.11)$$

para $i=1, \dots, n$.

Exemplo 3.2.2: Espaços Euclidianos

a) *Espaço vetorial do conjunto das triplas de números reais*: a operação $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \cdot (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i, \quad (3.2.12)$$

é um produto escalar em $\mathbb{R}^3$.

c) *Espaço vetorial do Espaço do $\mathbb{R}^n$* : a operação $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \cdot (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i, \quad (3.2.13)$$

é um produto escalar em $\mathbb{R}^n$.

c) *Espaço vetorial dos vetores da geometria euclidiana*: a operação $\cdot : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta, \quad (3.2.14)$$

sendo $\|\vec{u}\|$ e $\|\vec{v}\|$ os comprimentos dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é um produto escalar em $\mathcal{V}$.

d) *Espaço vetorial das matrizes reais de dimensão $n \times n$* : a operação $\cdot : \mathbf{M}_{n \times n} \times \mathbf{M}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$[\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{B}] = \text{tr}([\mathbf{A}][\mathbf{B}]^T) \quad (3.2.15)$$

é um produto escalar em $\mathbf{M}_{n \times n}$.

3.2.4) Transformação Linear

Uma *transformação linear* $\mathbf{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ é uma *função* entre os espaços vetoriais $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ que associa quaisquer vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b} \in \mathcal{V}$ aos vetores $\mathbf{T}(\mathbf{a})$ e $\mathbf{T}(\mathbf{b}) \in \mathcal{W}$ tal que satisfaz:

- a) $\mathbf{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{T}(\mathbf{a}) + \mathbf{T}(\mathbf{b})$;
- b) $\mathbf{T}(\alpha \mathbf{a}) = \alpha \mathbf{T}(\mathbf{a})$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

O conjunto de todas as transformações lineares entre os espaços vetoriais $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ é denotado por $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ e o conjunto de todas as transformações lineares entre os espaços vetoriais $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}$ é denotado por $\mathcal{L}(\mathcal{V})$.

Os espaços vetoriais $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são *isomorfos* se existir uma transformação linear $\mathbf{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ que é bijetora.

Se $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são isomorfos assim como $\mathcal{W}$ e $\mathcal{K}$ são isomorfos, então $\mathcal{V}$ e $\mathcal{K}$ são isomorfos.

Observação 3.3.1: *Isomorfismo entre os espaços vetoriais $\mathcal{V}$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{M}_{n \times 1}$.*

Seja $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função entre o espaço vetorial $\mathcal{V}$ e o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ que associa o vetor $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ à sua representação em coordenadas, conforme (3.2.6), e $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{M}_{n \times 1}$ a função entre o espaço vetorial $\mathcal{V}$ e o espaço vetorial $\mathbf{M}_{n \times 1}$ que associa o vetor $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ a sua representação matricial, conforme (3.2.7), em uma base ortonormal $\mathbf{B}_{\mathcal{V}} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m\}$ em $\mathcal{V}$. Verifica-se que as funções f e g são tanto funções bijetoras quanto transformações lineares. Conclui-se assim que os espaços vetoriais $\mathcal{V}$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{M}_{n \times 1}$ são isomorfos. Em particular, os espaços vetoriais $\mathcal{V}$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbf{M}_{3 \times 1}$ são isomorfos.

3.3) Elementos da Álgebra Tensorial

3.3.1) Tensor

Um *tensor* é uma transformação linear pertencente a $\mathcal{L}(\mathcal{V})$. Assim um tensor $\mathbf{A}$ é uma transformação linear que associa a cada vetor $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ ao vetor

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{u}). \quad (3.3.1)$$

Se $\mathbf{A}$ é um tensor então se denota $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}$ ao invés de (3.3.1). Considera-se que a partir desta seção $\dim \mathcal{V} = 3$.

O conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ com a operação de soma

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.3.2)$$

e produto por escalar

$$(\alpha \mathbf{A})\mathbf{u} = \alpha \mathbf{A}\mathbf{u} \quad (3.3.3)$$

para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, é um espaço vetorial.

O vetor zero do espaço vetorial $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ é o *tensor nulo* $\mathbf{O}$ que satisfaz

$$\mathbf{O}\mathbf{u} = \mathbf{o}, \quad (3.3.4)$$

para todo vetor $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, sendo $\mathbf{o}$ o vetor zero do espaço vetorial $\mathcal{V}$.

O *tensor identidade* $\mathbf{I}$ é o único tensor que satisfaz

$$\mathbf{I}\mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad (3.3.5)$$

para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$.

O *produto dos tensores* $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ é um tensor

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} \quad (3.3.6)$$

com

$$(\mathbf{AB})\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{u}). \quad (3.3.7)$$

O tensor $\mathbf{A}$ é *invertível* se existe o *tensor inverso* $\mathbf{A}^{-1}$ tal que

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (3.3.8)$$

O tensor transposto $\mathbf{A}^T$ do tensor $\mathbf{A}$ é o único tensor que satisfaz

$$\mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{v} \quad (3.3.9)$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

Segue de (3.3.9) que o tensor transposto satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T; \\ \text{b)} \quad & (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T; \\ \text{c)} \quad & (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

O produto tensorial $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b} \in \mathcal{V}$ é um tensor que associa a cada vetor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ o vetor $\mathbf{a}$ tal que

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}. \quad (3.3.11)$$

Segue de (3.3.11) que o produto tensorial satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}; \\ \text{b)} \quad & (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}; \\ \text{c)} \quad & \text{Se } \mathbf{B}_{\mathcal{V}} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \text{ é uma base ortonormal, então } \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Seja $\mathbf{B}_{\mathcal{V}} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ à base ortonormal de $\mathcal{V}$. A componente A_{ij} do tensor $\mathbf{A}$ em relação nesta base é dada por

$$A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{e}_j) \quad (3.3.12)$$

para $i, j=1, 2, 3$ e a coordenada v_i do vetor $\mathbf{v}$ em (3.3.1) é dada por

$$v_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} u_j = A_{i1} u_1 + A_{i2} u_2 + A_{i3} u_3 \quad (3.3.13)$$

Seja $\mathbf{B}_{\mathcal{V}} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ à base ortonormal de $\mathcal{V}$. O tensor $\mathbf{A}$ é formado pela soma dos produtos tensoriais dos vetores da base $\mathbf{B}_{\mathcal{V}}$ por

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{A}_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j &= \mathbf{A}_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{A}_{13} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \\
&\quad \mathbf{A}_{21} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{A}_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{A}_{23} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \\
&\quad \mathbf{A}_{31} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{A}_{32} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{A}_{33} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3.
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

e representado matricial nesta base por

$$[\mathbf{A}]_{\mathbf{B}_v} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix}, \tag{3.3.15}$$

com $\mathbf{A}_{ij}$ dado por (3.3.12).

O *traço* é uma função $\text{tr} : \mathcal{L}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\text{tr } \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \tag{3.3.16}$$

para todo vetor $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b} \in \mathcal{V}$.

De (3.3.14) e de (3.3.16) tem-se que

$$\text{tr } \mathbf{A} = \mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{22} + \mathbf{A}_{33} \tag{3.3.17}$$

A operação traço satisfaz as propriedades:

- a) $\text{tr } \mathbf{A}^T = \text{tr } \mathbf{A}$;
- b) $\text{tr } \mathbf{AB} = \text{tr } \mathbf{BA}$.

O *determinante* de um tensor $\mathbf{A}$ é igual ao determinante de sua representação matricial $[\mathbf{A}]_{\mathbf{B}_v}$, ou seja,

$$\det \mathbf{A} = \det [\mathbf{A}]_{\mathbf{B}_v}, \tag{3.3.18}$$

sendo que (3.3.18) não depende da base $\mathbf{B}_v = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

A representação matricial do tensor nulo $[\mathbf{O}]$ e do tensor identidade $[\mathbf{I}]$ em uma base qualquer de $\mathcal{V}$ são dadas, respectivamente, por

$$[\mathbf{O}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.19}$$

e

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.3.20)$$

Observe de (3.3.15) e (3.3.20) que as componentes do tensor $\mathbf{I}$ são dadas pelo delta de Kronecker definido em (3.1.12).

O tensor $\mathbf{A}$ é *simétrico* se

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T. \quad (3.3.21)$$

As componentes do tensor simétrico $\mathbf{A}$ relacionam-se por

$$A_{ij} = A_{ji} \quad (3.3.22)$$

para $i,j=1,2,3$. O conjunto dos tensores simétricos é denotado por $\mathbf{Sim}$.

O tensor $\mathbf{A}$ é *positivo definido* se para todo vetor $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ tem-se que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{u}) > 0. \quad (3.3.23)$$

O conjunto dos tensores positivos definidos é denotado por $\mathcal{L}(\mathcal{V})^+$.

O tensor $\mathbf{Q}$ é *ortogonal* se para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ tem-se que

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.3.24)$$

O conjunto dos tensores ortogonais é denotado por $\mathbf{Ort}$.

Duas condições necessárias e suficientes para que o tensor $\mathbf{Q}$ seja ortogonal é que

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1} \quad (3.3.25)$$

ou

$$\det[\mathbf{Q}] = \pm 1. \quad (3.3.26)$$

3.3.2) Autovalor e Autovetor

O escalar ω é um *autovalor* do tensor $\mathbf{A}$ se existe um vetor unitário $\mathbf{e}$, denominado autovetor de $\mathbf{A}$, tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{e} = \omega\mathbf{e}. \quad (3.3.27)$$

O espaço característico de $\mathbf{A}$ correspondente a ω é o conjunto de todos os vetores $\mathbf{v}$ que satisfazem a equação

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \omega\mathbf{v}. \quad (3.3.28)$$

O espectro de $\mathbf{A}$ é a lista

$$\pi_{\mathbf{A}} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad (3.3.29)$$

sendo $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \omega_3$ os autovalores de $\mathbf{A}$.

Seja $\mathbf{A}$ é um tensor simétrico então existe uma base ortonormal $\mathbf{B}_{\mathcal{V}} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, com $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ autovetores de $\mathbf{A}$ associado aos autovalores $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, tal que:

a) Se $\mathbf{A}$ possui os três autovalores mutuamente distintos então $\mathbf{A}$ admite a representação

$$\mathbf{A} = \omega_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad (3.3.30)$$

Neste caso o espaço característico é formado por três retas mutuamente ortogonais;

b) Se $\mathbf{A}$ possui exatamente dois autovalores distintos, ω_1 e ω_2 então $\mathbf{A}$ admite a representação

$$\mathbf{A} = \omega_1 \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \omega_2 (\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}). \quad (3.3.31)$$

Neste caso, o espaço característico é formado por uma reta gerada pelo vetor $\mathbf{e}$ e um plano perpendicular a este;

c) Se $\mathbf{A}$ possui todos os autovalores iguais então $\mathbf{A}$ admite a representação

$$\mathbf{A} = \omega_1 \mathbf{I}. \quad (3.3.32)$$

Neste caso o espaço característico é o próprio espaço $\mathcal{V}$.

3.3.3) Tensor Rotação, Reflexão e Inversão

Um tensor ortogonal $\mathbf{Q}$ é denominado *tensor rotação* se

$$\det[\mathbf{Q}] = 1. \quad (3.3.33)$$

O conjunto de todas as rotações é denotado por $\mathbf{Ort}^+$. A rotação $\mathbf{Q} \in \mathbf{Ort}^+$ aplicada em um vetor tem o efeito de mudar a direção do vetor fazendo com que este gire um ângulo θ em torno de um eixo de rotação especificado pelo tensor $\mathbf{Q}$ sem alterar o comprimento de um vetor.

Seja $\mathbf{B}_{\mathcal{V}} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ uma base ortonormal. A rotação θ sobre o eixo gerado pelo vetor $\mathbf{e}_1$ da base $\mathbf{B}_{\mathcal{V}}$ é determinada pelo tensor rotação $\mathbf{Q}_{(\mathbf{e}_1, \theta)}$ cuja representação matricial é dada por

$$[\mathbf{Q}_{(\mathbf{e}_1, \theta)}]_{\mathbf{B}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3.3.34)$$

Um tensor ortogonal $\mathbf{Q}$ é denominado *tensor reflexão* se

$$\det[\mathbf{Q}] = -1 \quad (3.3.35)$$

é denominado *reflexão*.

O conjunto de todas as reflexões é denotado por $\mathbf{Ort}^-$. A reflexão $\mathbf{Q} \in \mathbf{Ort}^-$ aplicada em um vetor tem o efeito de refletir este tensor em relação a um plano sem alterar o comprimento do vetor.

Seja $\mathbf{B}_V = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ uma base ortonormal. As reflexões sobre os planos $\mathbf{e}_1\mathbf{Oe}_2$, $\mathbf{e}_1\mathbf{Oe}_3$ e $\mathbf{e}_2\mathbf{Oe}_3$ são determinadas pelos tensores reflexão $\mathbf{Q}_{(\mathbf{e}_1\mathbf{Oe}_2)}$, $\mathbf{Q}_{(\mathbf{e}_1\mathbf{Oe}_3)}$ e $\mathbf{Q}_{(\mathbf{e}_2\mathbf{Oe}_3)}$ cujas representações matriciais são dadas por

$$[\mathbf{Q}_{(\mathbf{e}_1\mathbf{Oe}_2)}]_{\mathbf{B}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, [\mathbf{Q}_{(\mathbf{e}_1\mathbf{Oe}_3)}]_{\mathbf{B}_V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } [\mathbf{Q}_{(\mathbf{e}_2\mathbf{Oe}_3)}]_{\mathbf{B}_V} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.36)$$

Os tensores $\mathbf{A}$ e $\bar{\mathbf{A}}$ relacionam-se por uma rotação, ou, uma reflexão $\mathbf{Q}$ se

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T. \quad (3.3.37)$$

3.3.4) Grupo de Simetria

Diz-se que $\mathcal{G}$ é um *grupo de simetria* se e somente se $\mathcal{G} \subset \mathbf{Ort}$.

Apesar de existirem uma infinidade de grupos de simetrias, neste trabalho serão definidos apenas dois destes grupos.

O conjunto

$$\mathcal{T}_{(\mathbf{e}_1)} = \{\mathbf{Q}_{(\mathbf{e}_2\mathbf{Oe}_3)}, \mathbf{Q}_{(\mathbf{e}_1, \theta)} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \subset \mathbf{Ort} \quad (3.3.38)$$

é denominado *grupo de simetria dos tensores transversalmente isotrópicos* relativo ao eixo de rotação gerados pelo vetor $\mathbf{e}_1$ em uma base ortonormal $\mathbf{B}_V = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

O conjunto

$$\mathcal{O}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = \{\mathbf{I}, \mathbf{Q}_{(\mathbf{e}_1\mathbf{Oe}_2)}, \mathbf{Q}_{(\mathbf{e}_1\mathbf{Oe}_3)}, \mathbf{Q}_{(\mathbf{e}_2\mathbf{Oe}_3)}\} \subset \mathbf{Ort} \quad (3.3.39)$$

é denominado *grupo de simetria dos tensores ortotrópicos* relativo aos planos de simetria $\mathbf{e}_1\mathbf{Oe}_2$, $\mathbf{e}_1\mathbf{Oe}_3$ e $\mathbf{e}_2\mathbf{Oe}_3$ em uma base ortonormal $\mathbf{B}_V = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

3.4) Representações de Funções Invariantes

No apêndice deste trabalho é realizada uma revisão bibliográfica sobre o desenvolvimento e a determinação das representações e dos geradores de funções escalares e tensoriais simétricas isotrópicas.

3.4.1) Função escalar invariante

Seja

$$\mathbf{Sim}^N \times \mathbf{V}^P = \underbrace{\mathbf{Sim} \times \dots \times \mathbf{Sim}}_N \times \underbrace{\mathbf{V} \times \dots \times \mathbf{V}}_P, \quad (3.4.1)$$

o produto cartesiano de N -conjuntos de tensores simétricos $\mathbf{Sim}$ e P -conjuntos de vetores $\mathbf{V}$, sendo

$$(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N, \vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_P) \in \mathbf{Sim}^N \times \mathbf{V}^P \quad (3.4.2)$$

denotado por $(\mathbf{A}_i, \vec{\mathbf{v}}_m)$.

A função

$$\varphi: \mathbf{Sim}^N \times \mathbf{V}^P \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.4.3)$$

é uma *função escalar invariante sobre* $\mathcal{G} \subset \mathbf{Ort}$ se para $(\mathbf{A}_i, \vec{\mathbf{v}}_m) \in \mathbf{Sim}^N \times \mathbf{V}^P$ tem-se que

$$\varphi(\mathbf{Q}\mathbf{A}_i\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\vec{\mathbf{v}}_m) = \varphi(\mathbf{A}_i, \vec{\mathbf{v}}_m) \quad (3.4.4)$$

para todo $\mathbf{Q} \in \mathcal{G}$.

A função escalar $\varphi: \mathbf{Sim}^N \times \mathbf{V}^P \rightarrow \mathbb{R}$ invariante sobre $\mathcal{G} \subset \mathbf{Ort}$ é denominada:

a) *isotrópica* se $\mathcal{G} = \mathbf{Ort}$;

b) *transversalmente isotrópica* se existe uma base ortonormal $\mathbf{B}_v = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ tal que $\mathcal{G} = \mathcal{T}_{(\mathbf{e}_1)}$, sendo $\mathcal{T}_{(\mathbf{e}_1)}$ o conjunto de simetria dos tensores transversalmente isotrópicos definido em (3.3.38);

c) *ortotrópica* se existe uma base ortonormal $\mathbf{B}_v = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ tal que $\mathcal{G} = \mathcal{O}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$, sendo $\mathcal{O}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$ o conjunto de simetria dos tensores ortotrópicos definido em (3.3.39).

Exemplo 3.4.1: Funções escalares invariantes sobre $\mathcal{G} \subset \mathbf{Ort}$

a) A função $\varphi: \mathbf{Sim} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(\mathbf{A}) = \text{tr } \mathbf{A}^n, \quad (3.4.5)$$

para $n \in \mathbb{N}$ é uma função invariante sobre $\mathcal{G} \subset \mathbf{Ort}$.

b) A função $\varphi: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{v}, \quad (3.4.6)$$

é uma função invariante sobre $\mathcal{G} \subset \mathbf{Ort}$.

c) A função $\varphi: \mathbf{Sim} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(\mathbf{A}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \mathbf{A}^n \vec{v}, \quad (3.4.7)$$

é uma função invariante sobre $\mathcal{G} \subset \mathbf{Ort}$.

3.4.2) Representação de funções escalares invariantes

A função escalar $\varphi: \mathbf{Sim}^N \times \mathbf{V}^P \rightarrow \mathbb{R}$ invariante sobre $\mathcal{G} \subset \mathbf{Ort}$ possui uma *representação escalar isotrópica* se para $(\mathbf{A}_i, \vec{v}_m) \in \mathbf{Sim}^N \times \mathbf{V}^P$ tem-se que

$$\varphi(\mathbf{A}_i, \vec{v}_m) = \hat{\varphi}(I_1(\mathbf{A}_i, \vec{v}_m), \dots, I_R(\mathbf{A}_i, \vec{v}_m)), \quad (3.4.8)$$

sendo $I_1, \dots, I_R: \mathbf{Sim}^N \times \mathbf{V}^P \rightarrow \mathbb{R}$ funções escalares invariantes sobre $\mathcal{G} \subset \mathbf{Ort}$ e $\hat{\varphi}: \varphi_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função do conjunto dos geradores escalares $\varphi_{\mathcal{G}} = \{I_1, \dots, I_R\}$ da função escalar φ .

Seja $\varphi: \mathbf{Sim}^N \times \mathbf{V}^P \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar. De acordo com Zheng (1993), se φ é:

a) isotrópica então o conjunto gerador de φ é dado por

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{Ort}} = \{ & \text{tr} \mathbf{A}_i, \text{tr} \mathbf{A}_i^2, \text{tr} \mathbf{A}_i^3, \text{tr} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j, \text{tr} \mathbf{A}_i^2 \mathbf{A}_j, \text{tr} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^2, \text{tr} \mathbf{A}_i^2 \mathbf{A}_j^2, \\ & \text{tr} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \mathbf{A}_k, \vec{v}_m \cdot \vec{v}_m, \vec{v}_m \cdot \vec{v}_n, \vec{v}_m \cdot \mathbf{A}_i \vec{v}_m, \vec{v}_m \cdot \mathbf{A}_i^2 \vec{v}_m, \\ & \vec{v}_m \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \vec{v}_m, \vec{v}_m \cdot \mathbf{A}_i \vec{v}_n, \vec{v}_m \cdot \mathbf{A}_i^2 \vec{v}_n, \\ & \vec{v}_m \cdot (\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i) \vec{v}_n \mid i, j, k = 1, \dots, N \text{ e } n, m = 1, \dots, P \}; \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

b) transversalmente isotrópica então o conjunto gerador de φ é dado por

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathcal{T}_{(e_1)}} = \{ & \text{tr} \mathbf{A}_i, \text{tr} \mathbf{A}_i^2, \text{tr} \mathbf{A}_i^3, \text{tr} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j, \text{tr} \mathbf{A}_i^2 \mathbf{A}_j, \text{tr} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^2, \text{tr} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \mathbf{A}_k, \\
& \vec{v}_m \cdot \vec{v}_m, \vec{v}_m \cdot \vec{v}_n, \vec{v}_m \cdot \mathbf{A}_i \vec{v}_m, \vec{v}_m \cdot \mathbf{A}_i^2 \vec{v}_m, \\
& \vec{v}_m \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \vec{v}_m, \vec{v}_m \cdot \mathbf{A}_i \vec{v}_n, \vec{v}_m \cdot \mathbf{A}_i^2 \vec{v}_n, \\
& \vec{v}_m \cdot (\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i) \vec{v}_n, \vec{e}_1 \cdot \mathbf{A}_i \vec{e}_1, \vec{e}_1 \cdot \mathbf{A}_i^2 \vec{e}_1, \vec{e}_1 \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \vec{e}_1, \\
& \vec{e}_1 \cdot \vec{v}_m, \vec{e}_1 \cdot \mathbf{A}_i \vec{v}_m, \vec{e}_1 \cdot \mathbf{A}_i^2 \vec{v}_m, \vec{e}_1 \cdot (\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i) \vec{v}_m \\
& | i, j, k = 1, \dots, N \text{ e } n, m = 1, \dots, P \},
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

sendo $\vec{e}_1$, vetor da base ortonormal $\mathbf{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, o vetor que gera o eixo de rotação do conjunto $\mathcal{T}_{(e_1)}$ definido em (3.3.38);

c) ortotrópica então o conjunto gerador de φ é dado por

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathcal{O}_{(e_1, e_2, e_3)}} = \{ & \text{tr} \mathbf{A}_i, \text{tr} \mathbf{A}_i^2, \text{tr} \mathbf{A}_i^3, \text{tr} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j, \text{tr} \mathbf{A}_i^2 \mathbf{A}_j, \text{tr} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^2, \text{tr} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \mathbf{A}_k, \\
& \vec{v}_m \cdot \vec{v}_m, \vec{v}_m \cdot \vec{v}_n, \vec{v}_m \cdot \mathbf{A}_i \vec{v}_m, \vec{v}_m \cdot \mathbf{A}_i^2 \vec{v}_m, \vec{v}_m \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \vec{v}_m, \\
& \vec{v}_m \cdot \mathbf{A}_i \vec{v}_n, \vec{v}_m \cdot \mathbf{A}_i^2 \vec{v}_n, \vec{v}_m \cdot (\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i) \vec{v}_n, \vec{e}_1 \cdot \mathbf{A}_i \vec{e}_1, \\
& \vec{e}_1 \cdot \mathbf{A}_i^2 \vec{e}_1, \text{tr} \mathbf{M} \mathbf{A}_i, \text{tr} \mathbf{M} \mathbf{A}_i^2, \text{tr} \mathbf{M} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j, (\vec{e}_1 \cdot \vec{v}_m)^2, \\
& \vec{v}_m \cdot \mathbf{M} \vec{v}_m, \vec{v}_m \cdot \mathbf{M} \mathbf{A}_i \vec{v}_m, \\
& i, j, k = 1, \dots, N \text{ e } n, m = 1, \dots, P \},
\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

sendo $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ os vetores da base ortonormal $\mathbf{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ que geram os planos de reflexões $\mathbf{e}_1 \mathbf{O} \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 \mathbf{O} \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}_2 \mathbf{O} \mathbf{e}_3$ do conjunto $\mathcal{O}_{(e_1, e_2, e_3)}$ definido em (3.3.39), com $\mathbf{M} = \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3$.

Exemplo 3.4.2: Representação de funções escalares isotrópicas.

a) A função escalar $\varphi: \mathbf{Sim} \rightarrow \mathbb{R}$ isotrópica possui a representação

$$\varphi(\mathbf{A}) = \hat{\varphi}(\text{tr } \mathbf{A}, \text{tr } \mathbf{A}^2, \text{tr } \mathbf{A}^3). \tag{3.4.12}$$

b) A função escalar $\varphi: \mathbf{Sim} \times \mathbf{Sim} \rightarrow \mathbb{R}$ isotrópica possui a representação

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \hat{\varphi}(& \text{tr } \mathbf{A}, \text{tr } \mathbf{A}^2, \text{tr } \mathbf{A}^3, \text{tr } \mathbf{B}, \text{tr } \mathbf{B}^2, \text{tr } \mathbf{B}^3, \\
& \text{tr } \mathbf{A} \mathbf{B}, \text{tr } \mathbf{A}^2 \mathbf{B}, \text{tr } \mathbf{A} \mathbf{B}^2, \text{tr } \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2).
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

c) A função escalar $\varphi: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ isotrópica possui a representação

$$\varphi(\vec{v}) = \hat{\varphi}(\vec{v} \cdot \vec{v}). \tag{3.4.14}$$

d) A função escalar $\varphi: \mathbf{Sim} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ isotrópica possui a representação

$$\varphi(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{v}}) = \hat{\varphi}(\text{tr } \mathbf{A}, \text{tr } \mathbf{A}^2, \text{tr } \mathbf{A}^3, \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{A} \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{A}^2 \vec{\mathbf{v}}). \quad (3.4.15)$$

Exemplo 3.4.3: *Representação de funções escalares transversalmente isotrópicas.*

a) A função escalar $\varphi: \mathbf{Sim} \rightarrow \mathbb{R}$ transversalmente isotrópica possui a representação

$$\varphi(\mathbf{A}) = \hat{\varphi}(\text{tr } \mathbf{A}, \text{tr } \mathbf{A}^2, \text{tr } \mathbf{A}^3, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{A} \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{A}^2 \vec{\mathbf{e}}_1). \quad (3.4.16)$$

b) A função escalar $\varphi: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ transversalmente isotrópica possui a representação

$$\varphi(\vec{\mathbf{v}}) = \hat{\varphi}(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}). \quad (3.4.17)$$

c) A função escalar $\varphi: \mathbf{Sim} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ transversalmente isotrópica possui a representação

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{v}}) = \hat{\varphi}(\text{tr } \mathbf{A}, \text{tr } \mathbf{A}^2, \text{tr } \mathbf{A}^3, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{A} \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{A}^2 \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}, \\ \vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{A} \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{A}^2 \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{A} \vec{\mathbf{v}}). \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Exemplo 3.4.4: *Representação de funções escalares ortotrópicas.*

a) A função escalar $\varphi: \mathbf{Sim} \rightarrow \mathbb{R}$ ortotrópica possui a representação

$$\varphi(\mathbf{A}) = \hat{\varphi}(\text{tr } \mathbf{A}, \text{tr } \mathbf{A}^2, \text{tr } \mathbf{A}^3, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{A} \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{A}^2 \vec{\mathbf{e}}_1, \text{tr } \mathbf{M} \mathbf{A}, \text{tr } \mathbf{M} \mathbf{A}^2). \quad (3.4.19)$$

b) A função escalar $\varphi: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ ortotrópica possui a representação

$$\varphi(\vec{\mathbf{v}}) = \hat{\varphi}(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}, (\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}})^2, \vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{M} \vec{\mathbf{v}}). \quad (3.4.20)$$

c) A função escalar $\varphi: \mathbf{Sim} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ ortotrópica possui a representação

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{v}}) = \hat{\varphi}(\text{tr } \mathbf{A}, \text{tr } \mathbf{A}^2, \text{tr } \mathbf{A}^3, \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{A} \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{A}^2 \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{A} \vec{\mathbf{e}}_1, \\ \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{A}^2 \vec{\mathbf{e}}_1, \text{tr } \mathbf{M} \mathbf{A}, \text{tr } \mathbf{M} \mathbf{A}^2, (\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}})^2, \vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{M} \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{M} \mathbf{A} \vec{\mathbf{v}}). \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

3.4.3) Função tensorial simétrica invariante

A função

$$\mathbf{H}: \mathbf{Sim}^N \times \mathbf{V}^P \rightarrow \mathbf{Sim} \quad (3.4.22)$$

é uma função tensorial simétrica invariante sobre $\mathcal{G} \subset \mathbf{Ort}$ se para $(\mathbf{A}_i, \vec{\mathbf{v}}_m) \in \mathbf{Sim}^N \times \mathbf{V}^P$ tem-se que

$$\mathbf{H}(\mathbf{Q} \mathbf{A}_i \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \vec{\mathbf{v}}_m) = \mathbf{Q} \mathbf{H}(\mathbf{A}_i, \vec{\mathbf{v}}_m) \mathbf{Q}^T \quad (3.4.23)$$

para todo tensor $\mathbf{Q} \in \mathcal{G}$.

A função tensorial simétrica $\mathbf{H} : \mathbf{Sim}^N \times \mathbf{V}^P \rightarrow \mathbf{Sim}$ invariante sobre $\mathcal{G} \subset \mathbf{Ort}$ é denominada

a) *isotrópica* se $\mathcal{G} = \mathbf{Ort}$.

b) *transversalmente isotrópica* se existe uma base ortonormal $\mathbf{B}_v = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ tal que $\mathcal{G} = \mathcal{T}_{(\mathbf{e}_1)}$, sendo $\mathcal{T}_{(\mathbf{e}_1)}$ o conjunto de simetria dos tensores transversalmente isotrópicos, definido em (3.3.38).

c) *ortotrópica* se existe uma base ortonormal $\mathbf{B}_v = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ tal que $\mathcal{G} = \mathcal{O}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$, sendo $\mathcal{O}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$ o conjunto de simetria dos tensores ortotrópicos, definido em (3.3.39).

Exemplo 3.4.5: Funções tensoriais simétricas isotrópicas.

a) $\mathbf{H} : \mathbf{Sim} \rightarrow \mathbf{Sim}$ definida por

$$\mathbf{H}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n, \quad (3.4.24)$$

para $n \in \mathbb{N}$.

b) $\mathbf{H} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{Sim}$ definida por

$$\mathbf{H}(\vec{v}) = \vec{v} \otimes \vec{v}. \quad (3.4.25)$$

c) $\mathbf{H} : \mathbf{Sim} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{Sim}$ definida por

$$\mathbf{H}(\vec{v}) = \vec{v} \otimes \mathbf{A}^n \vec{v} + \mathbf{A}^n \vec{v} \otimes \vec{v}, \quad (3.4.26)$$

para $n \in \mathbb{N}$.

3.4.4) Representação de funções tensoriais simétricas

A função tensorial simétrica $\mathbf{H} : \mathbf{Sim}^N \times \mathbf{V}^P \rightarrow \mathbf{Sim}$ invariante sobre $\mathcal{G} \subset \mathbf{Ort}$ possui *representação tensorial simétrica* se para $(\mathbf{A}_i, \vec{v}_m) \in \mathbf{Sim}^N \times \mathbf{V}^P$ tem-se que

$$\mathbf{H}(\mathbf{A}_i, \vec{v}_m) = \varphi_1(\mathbf{A}_i, \vec{v}_m) \mathbf{H}_1(\mathbf{A}_i, \vec{v}_m) + \dots + \varphi_S(\mathbf{A}_i, \vec{v}_m) \mathbf{H}_S(\mathbf{A}_i, \vec{v}_m). \quad (3.4.27)$$

sendo $\varphi_1, \dots, \varphi_S : \mathbf{Sim}^N \times \mathbf{V}^P \rightarrow \mathbb{R}$ funções escalares invariantes sobre $\mathcal{G} \subset \mathbf{Ort}$ e $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_S : \mathbf{Sim}^N \times \mathbf{V}^P \rightarrow \mathbf{Sim}$ funções tensoriais simétricas invariantes sobre $\mathcal{G} \subset \mathbf{Ort}$. O

conjunto $\mathbf{H}_{\mathcal{G}} = \{\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_R\}$ é denominado *conjunto dos geradores tensoriais simétricos* da função tensorial simétrica $\mathbf{H}$ invariante sobre $\mathcal{G} \subset \mathbf{Ort}$.

Seja $\mathbf{H} : \mathbf{Sim}^N \times \mathbf{V}^P \rightarrow \mathbf{Sim}$ uma função tensorial simétrica. Segundo Zheng (1993), se $\mathbf{H}$ é:

a) isotrópica então o conjunto gerador de $\mathbf{H}$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\mathbf{Ort}} = \{ & \mathbf{I}, \mathbf{A}_i, \mathbf{A}_i^2, \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j + \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i, \mathbf{A}_i^2 \mathbf{A}_j + \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^2, \\ & \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^2 + \mathbf{A}_j^2 \mathbf{A}_i, \vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{v}}_m, \\ & \vec{\mathbf{v}}_m \otimes \mathbf{A}_i \vec{\mathbf{v}}_m + \mathbf{A}_i \vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{v}}_m, \\ & \vec{\mathbf{v}}_m \otimes \mathbf{A}_i^2 \vec{\mathbf{v}}_m + \mathbf{A}_i^2 \vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{v}}_m, \vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{v}}_n + \vec{\mathbf{v}}_n \otimes \vec{\mathbf{v}}_m, \\ & \mathbf{A}_i (\vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{v}}_n - \vec{\mathbf{v}}_n \otimes \vec{\mathbf{v}}_m) - (\vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{v}}_n - \vec{\mathbf{v}}_n \otimes \vec{\mathbf{v}}_m) \mathbf{A}_i \\ & | i, j, k = 1, \dots, N \text{ e } n, m = 1, \dots, P \}; \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

b) transversalmente isotrópica então o conjunto gerador de $\mathbf{H}$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\mathcal{T}_{(\mathbf{e}_1)}} = \{ & \mathbf{I}, \mathbf{A}_i, \mathbf{A}_i^2, \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j + \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i, \vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{v}}_m, \vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{v}}_n + \vec{\mathbf{v}}_n \otimes \vec{\mathbf{v}}_m, \\ & \vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \mathbf{A}_i \vec{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{A}_i \vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \mathbf{A}_i^2 \vec{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{A}_i^2 \vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1, \\ & \vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{v}}_m + \vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{e}}_1 | i, j, k = 1, \dots, N \text{ e } n, m = 1, \dots, P \}, \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

sendo $\vec{\mathbf{e}}_1$, vetor da base ortonormal $\mathbf{B} = \{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$, o vetor que gera o eixo de rotação do conjunto $\mathcal{T}_{(\mathbf{e}_1)}$ definido em (3.3.38);

c) ortotrópica, então o conjunto gerador de $\mathbf{H}$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\mathcal{O}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}} = \{ & \mathbf{I}, \mathbf{A}_i, \mathbf{A}_i^2, \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j + \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i, \vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{v}}_m, \vec{\mathbf{v}}_m \otimes \mathbf{A}_i \vec{\mathbf{v}}_m + \mathbf{A}_i \vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{v}}_m, \\ & \vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{v}}_n + \vec{\mathbf{v}}_n \otimes \vec{\mathbf{v}}_m, \mathbf{A}_i (\vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{v}}_n - \vec{\mathbf{v}}_n \otimes \vec{\mathbf{v}}_m) - (\vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{v}}_n - \vec{\mathbf{v}}_n \otimes \vec{\mathbf{v}}_m) \mathbf{A}_i \\ & \mathbf{M}, \vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1, \mathbf{M} \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{M}, \vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \mathbf{A}_i \vec{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{A}_i \vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1, \mathbf{M} \mathbf{A}_i \vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1, \\ & \vec{\mathbf{v}}_m \otimes \mathbf{M} \vec{\mathbf{v}}_m + \mathbf{M} \vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{v}}_m, (\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_m) (\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{v}}_m - \vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{e}}_1), \\ & \mathbf{M} (\vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{v}}_n - \vec{\mathbf{v}}_n \otimes \vec{\mathbf{v}}_m) - (\vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{v}}_n - \vec{\mathbf{v}}_n \otimes \vec{\mathbf{v}}_m) \mathbf{M}, \\ & (\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_m) (\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \mathbf{M} \vec{\mathbf{v}}_m - \mathbf{M} \vec{\mathbf{v}}_m \otimes \vec{\mathbf{e}}_1), | i, j, k = 1, \dots, N \text{ e } n, m = 1, \dots, P \}, \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

sendo $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3$ os vetores da base ortonormal $\mathbf{B} = \{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ que geram os planos de reflexões $\mathbf{e}_1 \mathbf{O} \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 \mathbf{O} \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}_2 \mathbf{O} \mathbf{e}_3$ do conjunto $\mathcal{O}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$ definido em (3.3.39), com $\mathbf{M} = \vec{\mathbf{e}}_2 \otimes \vec{\mathbf{e}}_2 - \vec{\mathbf{e}}_3 \otimes \vec{\mathbf{e}}_3$

Exemplo 3.4.6: Representações de Funções Tensoriais Simétricas Isotrópicas.

a) A função tensorial simétrica isotrópica $\mathbf{H} : \mathbf{Sim} \rightarrow \mathbf{Sim}$ possui a representação

$$\mathbf{H}(\mathbf{A}) = \varphi_1(\mathbf{A})\mathbf{I} + \varphi_2(\mathbf{A})\mathbf{A} + \varphi_3(\mathbf{A})\mathbf{A}^2. \quad (3.4.31)$$

b) A função tensorial simétrica isotrópica $\mathbf{H} : \mathbf{Sim} \times \mathbf{Sim} \rightarrow \mathbf{Sim}$ possui a representação

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = & \varphi_1(\mathbf{A}, \mathbf{B})\mathbf{I} + \varphi_2(\mathbf{A}, \mathbf{B})\mathbf{A} + \varphi_3(\mathbf{A}, \mathbf{B})\mathbf{A}^2 + \\ & \varphi_4(\mathbf{A}, \mathbf{B})\mathbf{B} + \varphi_5(\mathbf{A}, \mathbf{B})\mathbf{B}^2 + \varphi_6(\mathbf{A}, \mathbf{B})(\mathbf{AB} + \mathbf{BA}) + \\ & \varphi_7(\mathbf{A}, \mathbf{B})(\mathbf{A}^2\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}^2) + \varphi_8(\mathbf{A}, \mathbf{B})(\mathbf{A}\mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2\mathbf{A}). \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

c) A função tensorial simétrica isotrópica $\mathbf{H} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{Sim}$ possui a representação

$$\mathbf{H}(\vec{\mathbf{v}}) = \varphi_1(\vec{\mathbf{v}})\mathbf{I} + \varphi_2(\vec{\mathbf{v}})\vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{v}}. \quad (3.4.33)$$

d) A função tensorial simétrica isotrópica $\mathbf{H} : \mathbf{Sim} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{Sim}$ possui a representação

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{v}}) = & \varphi_1(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{v}})\mathbf{I} + \varphi_2(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{v}})\mathbf{A} + \varphi_3(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{v}})\mathbf{A}^2 + \varphi_4(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{v}})\vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{v}} + \\ & \varphi_5(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{v}})(\vec{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{A}\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{A}\vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{v}}) + \varphi_6(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{v}})(\vec{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{A}^2\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{A}^2\vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{v}}). \end{aligned} \quad (3.4.34)$$

Exemplo 3.4.7: Representações de Funções Tensoriais Simétricas Transversalmente Isotrópicas.

a) A função tensorial simétrica transversalmente isotrópica $\mathbf{H} : \mathbf{Sim} \rightarrow \mathbf{Sim}$ possui a representação

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{A}) = & \varphi_1(\mathbf{A})\mathbf{I} + \varphi_2(\mathbf{A})\mathbf{A} + \varphi_3(\mathbf{A})\mathbf{A}^2 + \varphi_4(\mathbf{A})\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}} + \\ & \varphi_5(\mathbf{A})(\vec{\mathbf{e}} \otimes \mathbf{A}\vec{\mathbf{e}} + \mathbf{A}\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}}) + \varphi_6(\mathbf{A})(\vec{\mathbf{e}} \otimes \mathbf{A}^2\vec{\mathbf{e}} + \mathbf{A}^2\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}}). \end{aligned} \quad (3.4.35)$$

b) A função tensorial simétrica transversalmente isotrópica $\mathbf{H} : \mathbf{Sim} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{Sim}$ possui a representação

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{v}}) = & \varphi_1(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{v}})\mathbf{I} + \varphi_2(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{v}})\mathbf{A} + \varphi_3(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{v}})\mathbf{A}^2 + \varphi_4(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{v}})\vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{v}} + \varphi_5(\vec{\mathbf{v}})\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}} \\ & \varphi_6(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{v}})(\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \mathbf{A}_i\vec{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{A}_i\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1) + \varphi_7(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{v}})(\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \mathbf{A}_i^2\vec{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{A}_i^2\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1) + \\ & \varphi_8(\mathbf{A})\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}} + \varphi_9(\vec{\mathbf{v}})(\vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{e}} + \vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{v}}). \end{aligned} \quad (3.4.36)$$

Exemplo 3.4.8: Representações de Funções Tensoriais Simétricas Ortotrópicas.

A função tensorial simétrica ortotrópica $\mathbf{H} : \mathbf{Sim} \rightarrow \mathbf{Sim}$ possui a representação

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{A}) = & \varphi_1(\mathbf{A})\mathbf{I} + \varphi_2(\mathbf{A})\mathbf{A} + \varphi_3(\mathbf{A})\mathbf{A}^2 + \varphi_4(\mathbf{A})\mathbf{M} + \\ & \varphi_5(\mathbf{A})\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1 + \varphi_6(\mathbf{A})(\mathbf{MA} + \mathbf{AM}) + \\ & \varphi_7(\mathbf{A})(\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \mathbf{A}\vec{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{A}\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1) + \varphi_8(\mathbf{A})\mathbf{MA}_i\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1. \end{aligned} \quad (3.4.37)$$

3.5) Elementos da Análise Tensorial

3.5.1) Diferencial e derivada em $\mathbb{R}$

Seja $\Omega = (a, b)$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $f: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\mathbf{dx} \in \mathbf{d}\Omega \subset \Omega$ um acréscimo de modo que para $\mathbf{x} \in \Omega$ tem-se que $\mathbf{x} + \mathbf{dx} \in \Omega$.

A função f é diferenciável em $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}$ se existe o limite

$$\lim_{|\mathbf{dx}| \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \mathbf{dx}) - f(\mathbf{x}) - df(\mathbf{x}, \mathbf{dx})}{|\mathbf{dx}|} = 0 \quad (3.5.1)$$

onde $df: \Omega \times \mathbf{d}\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função linear na variável $\mathbf{dx}$, isto é,

$$df(\mathbf{x}, \alpha_1 \mathbf{dx}_1 + \alpha_2 \mathbf{dx}_2) = \alpha_1 df(\mathbf{x}, \mathbf{dx}_1) + \alpha_2 df(\mathbf{x}, \mathbf{dx}_2), \quad (3.5.2)$$

$\forall \mathbf{dx}_1, \mathbf{dx}_2 \in \mathbf{d}\Omega$ e $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. A função df é denominada *diferencial* da função f de $\mathbf{x}$ em $\mathbf{dx}$.

A função $f': \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f'(\mathbf{x})\mathbf{dx} = df(\mathbf{x}, \mathbf{dx}), \quad \forall \mathbf{dx} \in \mathbf{d}\Omega, \quad (3.5.3)$$

é denominada *derivada* da função f em $\mathbf{x}$.

Verifica-se de (3.5.3) que

$$f'(\mathbf{x}) = df(\mathbf{x}, 1) \quad (3.5.4)$$

Exemplo. Seja a função

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2. \quad (3.5.5)$$

A diferença entre $f(\mathbf{x} + \mathbf{dx})$ e $f(\mathbf{x})$ é dado por

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{dx}) - f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} + \mathbf{dx})^2 - (\mathbf{x})^2 = 2\mathbf{x}\mathbf{dx} + \mathbf{dx}^2. \quad (3.5.6)$$

Tem-se de (3.5.5), (3.5.6) e (3.5.1) que f é diferenciável e

$$df(\mathbf{x}, \mathbf{dx}) = 2\mathbf{x}\mathbf{dx}. \quad (3.5.7)$$

Assim, de (3.5.4) conclui-se que a derivada de f é

$$f'(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}. \quad (3.5.8)$$

3.5.2) Diferencial e derivada em $\mathbb{R}^3$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ uma região regular e compacta em $\mathbb{R}^3$, $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{\xi} \in V$ uma direção de modo que $\mathbf{x} + \alpha \vec{\xi} \in \Omega$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

A função f é diferenciável em $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ na direção $\vec{\xi}$ se existe o limite

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f'(\mathbf{x} + \alpha \vec{\xi}) - f(\mathbf{x})}{|\alpha|} = Df(\mathbf{x})[\vec{\xi}] \quad (3.5.9)$$

A função $Df(\mathbf{x})[\vec{\xi}]$ é denominada *derivada* de f em $\mathbf{x}$ na direção $\vec{\xi}$. Se $\vec{\xi}$ é um vetor unitário que determina um eixo de um sistema de coordenada cartesiano então $Df(\mathbf{x})[\vec{\xi}]$ é denominado *derivada parcial* de f em $\mathbf{x}$ com respeito a $\vec{\xi}$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto em $\mathbb{R}^3$, $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função contínua e $\overline{\mathbf{dx}} \in \mathbf{d}\Omega \subset V$ um vetor de modo que para um $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ tem-se que $\mathbf{x} + \overline{\mathbf{dx}} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$.

A função f é diferenciável em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se existe o limite

$$\lim_{\|\overline{\mathbf{dx}}\| \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \overline{\mathbf{dx}}) - f(\mathbf{x}) - df(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{dx}})}{\|\overline{\mathbf{dx}}\|} = 0 \quad (3.5.10)$$

onde $df: \Omega \times \mathbf{d}\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função linear na variável $\overline{\mathbf{dx}}$, isto é,

$$df(\mathbf{x}, \alpha_1 \overline{\mathbf{dx}}_1 + \alpha_2 \overline{\mathbf{dx}}_2) = \alpha_1 df(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{dx}}_1) + \alpha_2 df(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{dx}}_2) \quad (3.5.11)$$

$\forall \overline{\mathbf{dx}}_1, \overline{\mathbf{dx}}_2 \in \mathbf{d}\Omega \subset V$ e $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

A função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um *mapeamento suave* se f é uma função bijetora, contínua, diferenciável, cujas derivadas parciais também sejam contínuas.

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um mapeamento suave em $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$. Sejam $\mathbf{x} = (x, y, z)$ e $f(\mathbf{x}) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$ as coordenadas de $\mathbf{x}$ e $f(\mathbf{x})$ em um sistema de coordenadas cartesiano, respectivamente. A função tensorial $\nabla f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ é denominada gradiente da função f , cuja representação matricial é a *matriz jacobiana*

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (3.5.12)$$

3.6) Revisão Bibliográfica

As representações e os conjuntos de geradores de funções escalares e tensoriais simétricas invariantes sobre um grupo de simetria serão utilizados neste trabalho para, por exemplo, expressar explicitamente a função resposta mecânica de materiais elásticos isotrópicos, transversalmente isotrópicos e ortotrópicos (Seção 4.7), obter uma relação entre as componentes do tensor de elasticidade, as componentes do tensor textura e a fração volumétrica para materiais porosos (Seção 5.3) e obter uma relação entre o tensor elasticidade e a fração volumétrica para materiais porosos com simetria isotrópica (Seção 5.3.1), transversalmente isotrópica (Seção 5.3.2) e ortotrópica (Seção 5.3.3). O objetivo desta seção é apresentar uma revisão bibliográfica sobre o desenvolvimento e a determinação das representações e dos geradores de funções escalares e tensoriais simétricas isotrópicas.

A teoria das representações é um ramo da álgebra que estabelece uma relação entre a teoria de grupos e a álgebra tensorial. Esta relação é obtida associando, por uma função, os elementos de um grupo qualquer aos elementos do grupo dos tensores, de modo que os elementos do dado grupo possam ser representados como tensores. As representações e geradores de funções escalares (3.4.2) e tensoriais simétricos (3.4.4) invariantes sobre um grupo de simetria são elementos da teoria dos invariantes, ramo da teoria das representações, que estuda o grupo de tensores que, aplicados em funções, ou, transformações lineares do espaço vetorial, não alteram suas imagens, deixando as funções, ou, transformações lineares invariantes pelos elementos deste grupo de tensores.

Obter o conjunto dos geradores de funções invariantes sobre certos grupos de simetrias é fundamental para a determinar e prever o comportamento mecânico dos materiais. Como será visto na Seção 4.6, a restrição de que a função resposta mecânica de materiais elásticos não dependa da posição do observador (Seção 4.6.1) e seja invariante sobre o grupo de simetria do material (Seção 4.6.2), tem por consequência o fato desta função ser uma função tensorial simétrica invariante sobre um grupo de simetria (Seção 3.4). Na Seção 4.6 é mostrado que este grupo de simetria é o próprio grupo de simetria do material.

Apesar de nos últimos 70 anos muitos pesquisadores utilizarem de diversas metodologias para obter os conjuntos geradores para funções escalares e tensoriais simétricas invariantes sobre um grupo de simetria, não existe ainda uma demonstração matemática formal que assegure que os geradores destas funções sejam únicos e suficientes para representação destas funções, haja visto que ao longo de todos estes anos foram propostos diversos conjuntos geradores diferentes.

Voigt (1910) desenvolve um dos trabalhos mais relevantes sobre a simetria dos materiais, investigando e classificando as possíveis simetrias dos materiais. Voigt (1910) conclui que podem existir somente oito simetrias possíveis para os materiais elásticos, e que cada uma destas simetrias pode ser associada a um grupo de simetria dos tensores ortogonais.

A primeira tentativa de obter a representação de uma função escalar isotrópica (Seção 3.4.1) e de uma função tensorial simétrica isotrópica (Seção 3.4.3) dependendo de um tensor simétrico surge com os trabalhos de Reiner (1945) e Rivlin (1948), os quais concluem que a resposta mecânica de fluidos isotrópicos homogêneos depende somente da parte simétrica do gradiente de velocidade do fluido, $\mathbf{D}$, e que, para este caso, o tensor tensão de Cauchy $\mathbf{T}$ é uma função tensorial simétrica isotrópica da forma

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}'(\mathbf{D}), \quad (3.6.1)$$

onde

$$\mathbf{F}'(\mathbf{D}) = \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 \mathbf{D} + \varphi_2 \mathbf{D}^2, \quad (3.6.2)$$

e φ_0, φ_1 e φ_2 são funções escalares isotrópicas dos invariantes

$$\text{tr} \mathbf{D}, \text{tr} \mathbf{D}^2 \text{ e } \text{tr} \mathbf{D}^3. \quad (3.6.3)$$

Truesdell (1953) mostra que a função resposta mecânica de sólidos homogêneos, elásticos e isotrópicos depende somente do tensor de Cauchy Green à esquerda $\mathbf{C}$ e que, neste caso, o tensor tensão de $\mathbf{T}$ é uma função tensorial simétrica isotrópica da forma

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}'(\mathbf{C}), \quad (3.6.4)$$

onde

$$\mathbf{F}'(\mathbf{C}) = \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 \mathbf{C} + \varphi_2 \mathbf{C}^2, \quad (3.6.5)$$

e φ_0, φ_1 e φ_2 são funções escalares isotrópicas dos invariantes

$$\text{tr} \mathbf{C}, \text{tr} \mathbf{C}^2 \text{ e } \text{tr} \mathbf{C}^3. \quad (3.6.6)$$

Verifica-se que (3.6.2) e (3.6.5) são da forma (3.4.31) e que as funções escalares nestas expressões são da forma (3.4.12)

A primeira tentativa de obter a representação de uma função escalar isotrópica e uma função tensorial simétrica isotrópica dependendo de dois tensores simétricos surge com o trabalho de Rivlin e Ericksen (1955). Utilizando resultados da álgebra linear, os autores verificam quais seriam as condições para que um tensor simétrico fosse expresso como uma combinação linear de um polinômio gerado por dois outros tensores simétricos. Aplicando os resultados obtidos, concluem que se a resposta mecânica do material dependesse de dois tensores simétricos como, por exemplo, o tensor de Cauchy Green à esquerda $\mathbf{C}$ e a parte

simétrica do gradiente de velocidade $\mathbf{D}$ então, sob certas condições relativas aos autovalores de $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$, o tensor tensão $\mathbf{T}$ é uma função tensorial simétrica isotrópica da forma

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^i(\mathbf{C}, \mathbf{D}), \quad (3.6.7)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^i(\mathbf{C}, \mathbf{D}) = & \varphi_1 \mathbf{I} + \varphi_2 \mathbf{C} + \varphi_3 \mathbf{C}^2 + \varphi_4 \mathbf{D} + \varphi_5 \mathbf{D}^2 + \varphi_6 (\mathbf{CD} + \mathbf{DC}) + \\ & \varphi_7 (\mathbf{C}^2 \mathbf{D} + \mathbf{DC}^2) + \varphi_8 (\mathbf{CD}^2 + \mathbf{D}^2 \mathbf{C}), \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

e $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ são funções isotrópicas dos invariantes

$$\text{tr} \mathbf{C}, \text{tr} \mathbf{C}^2, \text{tr} \mathbf{C}^3, \text{tr} \mathbf{D}, \text{tr} \mathbf{D}^2, \text{tr} \mathbf{D}^3, \text{tr} \mathbf{CD}, \text{tr} \mathbf{C}^2 \mathbf{D}, \text{tr} \mathbf{CD}^2, \text{tr} \mathbf{C}^2 \mathbf{D}^2. \quad (3.6.9)$$

Utilizando o teorema de Cayley-Hamilton, Rivlin e Ericksen (1955, b) mostram que é possível excluir as condições relativas aos autovalores de $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ em (3.6.8), obtendo uma nova representação de (3.6.7) dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^i(\mathbf{C}, \mathbf{D}) = & \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 \mathbf{C} + \varphi_2 \mathbf{C}^2 + \varphi_1 \mathbf{D} + \varphi_2 \mathbf{D}^2 + \varphi_4 (\mathbf{CD} + \mathbf{DC}) + \\ & \varphi_5 (\mathbf{C}^2 \mathbf{D} + \mathbf{DC}^2) + \varphi_5 (\mathbf{CD}^2 + \mathbf{D}^2 \mathbf{C}) + \varphi_6 (\mathbf{C}^2 \mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2 \mathbf{C}^2), \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

onde $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ são funções isotrópicas dos invariantes (3.6.9).

Spencer e Rivlin (1958) propuseram o conjunto gerador de funções polinomiais tensoriais simétricas e funções polinomiais escalares que dependiam de um número arbitrário de tensores simétricos. Neste trabalho este conjunto de geradores foi explicitado para os casos em que as funções dependiam de até cinco tensores simétricos.

Spencer e Rivlin (1959) mostram que as representações para funções escalares isotrópicas que dependam de até cinco tensores simétricos, obtidas no trabalho anterior Spencer e Rivlin (1958), eram redundantes, ou seja, alguns dos elementos pertencentes a um destes conjuntos de geradores poderiam ser escritos como uma combinação linear dos demais elementos do conjunto. Assim, utilizando a mesma metodologia empregada em seu trabalho anterior, Spencer e Rivlin (1959) propuseram um novo conjunto de geradores de funções isotrópicas escalares.

Smith (1960) demonstra que o conjunto proposto por Rivlin e Spencer (1959) não continha elementos redundantes, tornando-se um conjunto mínimo.

Spencer e Rivlin (1962) utilizaram os resultados do trabalho de Rivlin e Spencer (1959) para propor o conjunto gerador de funções escalares invariantes sobre o grupo das rotações que dependiam de um número arbitrário de tensores e de vetores. Spencer e Rivlin (1964) verificaram que o conjunto de geradores propostos em seu trabalho anterior, Spencer e Rivlin (1962), não eram mínimos, propondo assim um novo conjunto de geradores para funções

escalares invariantes sobre o grupo das rotações que dependem de um número arbitrário de tensores e de vetores.

Smith (1965), utilizando a mesma metodologia de Spencer e Rivlin (1964), obteve as representações de funções isotrópicas de valor escalar que dependem de um número arbitrário de tensores e de vetores.

Noll (1970), utilizando um novo procedimento, propõe um novo conjunto de geradores de funções escalares e vetoriais isotrópicas que depende de um número arbitrário de vetores e tensores simétricos. Este conjunto possui menos elementos do que o proposto por Smith (1965).

Wang (1969, partes I e II), utilizando conceitos matemáticos, tais como relações de equivalência, partição de conjuntos e espaços característicos, para propor um conjunto de geradores de funções isotrópicas escalares, vetoriais, tensoriais simétricas e tensoriais anti-simétricas de um número arbitrário de vetores, tensores simétricos e tensores anti-simétricos,

Smith (1970), exibindo um contra-exemplo, argumenta que os conjuntos geradores propostos por Wang (1969) não estavam completos e que a metodologia apresentada estava incorreta.

Em resposta ao trabalho de Smith (1970), Wang (1970, partes I e II) utiliza uma metodologia similar ao do seu trabalho anterior para propor um novo conjunto de geradores de funções isotrópicas escalares, vetoriais, tensoriais simétricas e tensoriais anti-simétricas de um número arbitrário de vetores, tensores simétricos e tensores anti-simétricos. Wang (1970) afirma que, apesar do contra exemplo de Smith (1970) para seu trabalho anterior, Wang (1969), Smith (1970) não apontou o erro na metodologia e não demonstrou como se obtém os conjuntos geradores.

Smith (1971), em resposta ao trabalho de Wang (1970), desenvolve uma metodologia baseada na utilizada por Rivlin e Ericksen (1955) e propõe, novamente, um novo conjunto gerador isotrópico de funções isotrópicas escalares de um número arbitrário de vetores, tensores simétricos e tensores anti-simétricos.

Wang (1971), em resposta ao artigo de Smith (1971), corrige os erros apontados para funções escalares isotrópicas e critica o trabalho de Smith (1971) ressaltando o fato de que não é demonstrada a minimalidade do conjunto de geradores propostos.

Boehler (1977) mostra em seu trabalho que os conjuntos propostos por Wang (1970) e por Smith (1971) são equivalentes entre si e possuem o menor número possível de invariantes.

Liu (1982) estabelece uma relação entre o conjunto de geradores de funções isotrópicas escalares, vetoriais, tensoriais simétricas propostos por Wang (1970) e Smith (1971) e os conjuntos de geradores de funções escalares, vetoriais, tensoriais simétricas transversalmente isotrópicas, ortotrópicas e de algumas classes de simetria dos cristais.

Pennise e Trovato (1987) mostram que existe redundâncias no conjunto de geradores apresentados por Boehler (1977). Ao eliminar as redundâncias, apresenta um novo conjunto de geradores. Korsgarrrd (1990) mostra que é possível reduzir ainda mais os conjuntos geradores propostos por Pennise e Trovato (1987).

Zheng (1993, a) propõe um novo procedimento baseado no trabalho de Smith (1971) para obter o conjunto de geradores de funções isotrópicas escalares, vetoriais, tensoriais simétricas e tensoriais anti-simétricas de um número arbitrário de vetores, tensores simétricos e tensores anti-simétricos

Zheng (1993), utiliza o procedimento de seu trabalho anterior Zheng, (1993, a), para propor a representação de funções isotrópicas, transversalmente isotrópicas e ortotrópicas de um número arbitrário de vetores, tensores simétricos e tensores anti-simétricos. Até o presente momento, este é o último trabalho publicado sobre este assunto, sendo o trabalho que será utilizado nesta dissertação para descrever os conjuntos de geradores, como apresentado na seção 3.4.

4. Mecânica dos Sólidos Elásticos

Os primeiros trabalhos em Mecânica dos Sólidos surgiram das experiências dos italianos Leonardo da Vinci (1452-1519) e Galileu Galilei (1564-1642) cujo objetivo era obter as propriedades de resistência de materiais, (FONSECA, 2002). Um dos grandes avanços nesta área foi a descoberta do inglês Robert Hooke (1635-1703) que, observando o comportamento mecânico de uma mola, notou a existência de uma proporcionalidade entre as forças aplicadas e as deformações elásticas produzidas por estas. Esta relação é conhecida atualmente como Lei de Hooke. Nos séculos 18 e 19 bases desta teoria foram estabelecidas por matemáticos e físicos como Leonhard Paul Euler (1707-1783), família Bernoulli, Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Marie-Sophie Germain (1776-1831), Claude Louis Marie Henri Navie (1785-1836), Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886).

Nesta seção apresentam-se os conceitos da Mecânica dos Sólidos e da Teoria da Elasticidade Finita utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Divide-se este capítulo em oito seções. Na Seção 4.1 apresentam-se os conceitos de deformação e deslocamento de corpos no espaço tridimensional. Na Seção 4.2 apresentam-se os conceitos de deformação homogênea, estiramento e rotação, os quais serão empregados na seção 4.3. Na Seção 4.3 apresentam-se conceitos de medidas de deformação. Na Seção 4.4 apresentam-se os conceitos de conservação de massa, tensão e equilíbrio estático, os quais, juntamente com os conceitos de medidas de deformação da Seção 4.3, serão utilizados na descrição do comportamento mecânico de materiais elásticos. Na Seção 4.5 apresenta-se o conceito de mudança de observador. Na Seção 4.6 apresenta-se elementos da teoria da elasticidade. Na Seção 4.7 apresenta-se o conceito de comportamento mecânico de materiais elásticos. Na Seção 4.8 apresenta-se elementos de elasticidade linear infinitesimal.

4.1) Deformação e Deslocamento

Um *corpo* $\mathcal{B}$ é uma região regular e compacta de $\mathbb{R}^3$ ao qual é associada uma função $\rho_0 : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^+$, denominada *função densidade de massa*, que relaciona cada *ponto material* $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ à sua *densidade de massa* $\rho_0(\mathbf{X})$ (AGUIAR, 1989).

Em um sistema de coordenadas cartesianas tridimensional $\{\mathbf{O}, \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ as coordenadas (X_1, X_2, X_3) do ponto material $\mathbf{X}$ são dadas por

$$X_i = \mathbf{X} \vec{\mathbf{e}}_i, \quad (4.1.1)$$

com

$$\mathbf{X} = X_1 \vec{\mathbf{e}}_1 + X_2 \vec{\mathbf{e}}_2 + X_3 \vec{\mathbf{e}}_3. \quad (4.1.2)$$

A *deformação* do corpo $\mathcal{B}$ é um mapeamento suave

$$\mathbf{y} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{y}(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}^3 \quad (4.1.3)$$

que associa cada ponto material $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ ao *ponto espacial*

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{X}) \in \mathbf{y}(\mathcal{B}) \quad (4.1.4)$$

com a restrição de que $J = \det \nabla \mathbf{y} > 0$.

O *deslocamento* do corpo $\mathcal{B}$ associado à deformação $\mathbf{y}$ é um mapeamento suave

$$\mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{y}(\mathcal{B}), \quad (4.1.5)$$

tal que

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{y}(\mathbf{X}) - \mathbf{X}. \quad (4.1.6)$$

O deslocamento $\mathbf{u}$ é constante se

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}(\mathbf{Y}) = \mathbf{u} \quad (4.1.7)$$

para quaisquer pontos materiais $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

Se $\mathbf{u}$ é um deslocamento constante então a deformação $\mathbf{y}$ é uma *translação* e pode ser representada por

$$\mathbf{y}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}(\mathbf{X}) + \mathbf{X}. \quad (4.1.8)$$

4.2) Deformação Homogênea, Estiramento e Rotação

O tensor

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \nabla \mathbf{y}(\mathbf{X}) \quad (4.2.1)$$

é denominado *gradiente de deformação* da deformação $\mathbf{y}$ no ponto material $\mathbf{X}$. O gradiente de deformação pertence ao conjunto dos tensores positivos definidos $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)^+$. Conforme (3.3.14), em um sistema de coordenadas cartesianas tridimensional $\{\mathbf{O}, \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ o tensor $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ admite a representação

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \sum_{i,j=1}^3 F_{ij}(\mathbf{X}) \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{e}}_j, \quad (4.2.2)$$

com $F_{ij}(\mathbf{X})$ dada por

$$F_{ij}(\mathbf{X}) = \frac{\partial y_i(\mathbf{X})}{\partial X_j}, \quad (4.2.3)$$

para $i,j=1,2,3$.

Seja $\mathbf{u}$ um deslocamento associado à deformação $\mathbf{y}$, conforme (4.1.6). O tensor $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X})$ dado por

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) - \mathbf{I} \quad (4.2.4)$$

é denominado *gradiente de deslocamento* do deslocamento $\mathbf{u}$ no ponto material $\mathbf{X}$, sendo que $\mathbf{I}$ é o tensor identidade.

A deformação $\mathbf{y}$ é *homogênea* se

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{Z}) = \mathbf{F} \quad (4.2.5)$$

para quaisquer pontos materiais $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Z}$ do corpo $\mathcal{B}$. Se $\mathbf{y}$ é uma deformação homogênea então em um sistema de coordenadas cartesianas a componente $F_{ij}(\mathbf{X})$ do gradiente de deformação $\mathbf{F}$ é *constante*, ou seja, possui o mesmo valor para qualquer ponto material $\mathbf{X}$. Uma deformação homogênea satisfaz a relação

$$\mathbf{y}(\mathbf{X}) = \mathbf{y}(\mathbf{Z}) + \mathbf{F}(\mathbf{X} - \mathbf{Z}) \quad (4.2.6)$$

para qualquer $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Z}$ pertencente ao corpo $\mathcal{B}$.

Se $\mathbf{Z}$ é um ponto material e $\mathbf{F}$ um tensor pertencente ao conjunto dos tensores positivos definidos $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)^+$ então existe uma única deformação homogênea $\mathbf{y}$, com $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{y}$, tal que o ponto material $\mathbf{Z}$ seja *fixo* com respeito à deformação $\mathbf{y}$, isto é,

$$\mathbf{y}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}. \quad (4.2.7)$$

Se $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ são deformações homogêneas então a função composta $\mathbf{y} \circ \mathbf{z}$, definida em (3.1.22), é uma deformação homogênea e vale a expressão

$$\nabla(\mathbf{y} \circ \mathbf{z}) = (\nabla \mathbf{y})(\nabla \mathbf{z}). \quad (4.2.8)$$

Uma *rotação* em relação a um ponto material fixo $\mathbf{Z}$ é uma deformação homogênea $\mathbf{r} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{r}(\mathcal{B})$ expressa por

$$\mathbf{r}(\mathbf{X}) = \mathbf{Z} + \mathbf{R}(\mathbf{X} - \mathbf{Z}), \quad (4.2.9)$$

..

sendo $\mathbf{R} = \nabla \mathbf{r}$ um *tensor rotação*, definido por meio de (3.3.33).

Um *estiramento* sobre o ponto material fixo $\mathbf{Z}$ é uma deformação homogênea $\mathbf{s} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{s}(\mathcal{B})$ expressa por

$$\mathbf{s}(\mathbf{X}) = \mathbf{Z} + \mathbf{U}(\mathbf{X} - \mathbf{Z}), \quad (4.2.10)$$

sendo $\mathbf{U} = \nabla \mathbf{s}$ um tensor simétrico e positivo definido. Figura 4.1 (a) ilustra o caso de uma rotação $\mathbf{r}$ e a Figura Fig. 4.1 (b) o de um estiramentos $\mathbf{s}$.

A deformação homogênea $\mathbf{y}$ com o ponto fixo $\mathbf{Z}$ admite a decomposição única

$$\mathbf{y} = \mathbf{r} \circ \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 \circ \mathbf{r}, \quad (4.2.11)$$

sendo $\mathbf{r}$ uma rotação e $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$ estiramentos sobre $\mathbf{Z}$.

Figura 4.1 –Rotação e estiramento de um corpo

Se $\mathbf{y}$ é uma deformação homogênea então de (4.2.8)-(4.2.11) tem-se que

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (4.2.12)$$

com $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{y}$, $\mathbf{R} = \nabla \mathbf{r}$, $\mathbf{U} = \nabla \mathbf{s}_1$ e $\mathbf{V} = \nabla \mathbf{s}_2$. Os tensores $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ são denominados *tensor estiramento à direita* e *tensor de estiramento à esquerda*, respectivamente.

Toda deformação homogênea pode ser decomposta em um estiramento seguido de uma rotação, ou, uma rotação seguida de um estiramento, conforme (4.2.11) e (4.2.12).

4.3) Medidas de Deformação

Na vizinhança do ponto material $\mathbf{X}$ a deformação $\mathbf{y}$ comporta-se como uma deformação homogênea. De (4.2.12) tem-se que

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{R}(\mathbf{X})\mathbf{U}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(\mathbf{X})\mathbf{R}(\mathbf{X}). \quad (4.3.1)$$

O tensor $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ é uma medida local de rotação dos pontos próximos de $\mathbf{X}$ enquanto que $\mathbf{U}(\mathbf{X})$ e $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ são medidas locais de estiramento dos pontos próximos ao ponto $\mathbf{X}$ com

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}} \quad \text{e} \quad \mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F} \mathbf{F}^T}. \quad (4.3.2)$$

A obtenção dos tensores $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ a partir do tensor $\mathbf{F}$ envolve o cálculo das raízes quadradas dos tensores $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ e $\mathbf{F} \mathbf{F}^T$. Esse cálculo oferece certa dificuldade computacional e, por esta razão, introduzem-se os tensores

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T, \quad (4.3.3)$$

denominados *tensor de Cauchy-Green à direita* e *tensor de Cauchy-Green à esquerda*, respectivamente.

Observa-se de (4.3.3) que quando a *deformação não apresenta estiramento*, ou seja, $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{I}$, tem-se que

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} = \mathbf{I}. \quad (4.3.4)$$

O *tensor deformação de Green-Saint-Venant*, definido por

$$\mathbf{E} = 1/2 (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (4.3.5)$$

é uma medida de deformação que é igual ao tensor nulo quando a deformação não apresenta estiramento, ou seja, $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{I}$ implica em $\mathbf{E} = \mathbf{O}$, sendo $\mathbf{O}$ o tensor nulo.

Verifica-se de (4.2.4), (4.3.3) e (4.3.5) que os tensores $\mathbf{C}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{E}$ são expressos em relação ao gradiente de deslocamento $\nabla \mathbf{u}$ por

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}^T \quad \text{e} \\ \mathbf{E} &= 1/2 (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - 1/2 \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

O tensor

$$\mathbf{E} = 1/2 (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (4.3.7)$$

é denominado *tensor deformação infinitesimal* e é uma medida de deformação utilizada nos casos em que a deformação do corpo é muito pequena.

4.4) Conservação de Massa, Tensão e Equilíbrio Estático

Seja $\mathbf{y}$ uma deformação, $\mathcal{P}$ uma parte de $\mathcal{B}$, $\rho_0(\mathbf{X})$ a densidade de massa do ponto material $\mathbf{X} \in \mathcal{P}$ e $\rho(\mathbf{x})$ a densidade de massa dos pontos espaciais $\mathbf{x} \in \mathbf{y}(\mathcal{P})$.

O *princípio de conservação de massa* estabelece que a massa do corpo $\mathcal{B}$ não se altera durante a deformação, ou seja,

$$\int_{\mathcal{P}} \rho_0 dV_0 = \int_{\mathbf{y}(\mathcal{P})} \rho dV, \quad (4.4.1)$$

para qualquer parte $\mathcal{P}$ de $\mathcal{B}$.

Utilizando-se mudança de variável de integração em (4.4.1) e o teorema da localização (GURTIN, 1981) obtém-se que

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{X})J \quad (4.4.2)$$

com $J = \det \mathbf{F}$.

As interações mecânicas entre as partes de um corpo deformado, ou, entre este corpo e o ambiente são descritas por meio de *forças*. Consideram-se três tipos de forças:

- i) Forças de contato entre duas partes de um corpo;
- ii) Forças externas sobre a superfície do corpo pelo ambiente;
- iii) Força exercida sobre os pontos interiores do corpo pelo ambiente.

As forças de contato i) e ii) são também chamadas forças de superfície, pois são transmitidas mediante uma superfície de contato.

Seja $\mathbf{x}$ um ponto espacial no interior do corpo deformado $\mathbf{y}(\mathcal{B})$ e seja $\mathbf{S}$ um plano contendo $\mathbf{x}$ e que divide o corpo deformado $\mathbf{y}(\mathcal{B})$ nas partes $\mathbf{y}(\mathcal{B}_1)$ e $\mathbf{y}(\mathcal{B}_2)$, conforme ilustrado na Figura 4.2. Na superfície que pertence a $\mathbf{y}(\mathcal{B}_1)$ atuam forças de contato internas que correspondem à interação mecânica da parte $\mathbf{y}(\mathcal{B}_2)$ sobre a parte $\mathbf{y}(\mathcal{B}_1)$. Seja $\mathbf{n}$ o vetor normal unitário a uma superfície de área $\Delta \mathbf{S}$ contendo $\mathbf{x}$ e seja $\Delta \mathbf{F}$ a resultante no ponto $\mathbf{x}$ da força de contato atuando sobre esta superfície.

Figura 4. 2 –Plano S seccionando corpo deformado.

O vetor tensão $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ no ponto espacial $\mathbf{x}$ é definido por

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \lim_{\Delta \mathbf{S} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}}{\Delta \mathbf{S}}, \quad (4.4.3)$$

sendo $\mathbf{f}$ o vetor força resultante aplicado na área $\Delta \mathbf{S}$ cujo vetor normal é $\mathbf{n}$.

A *força de corpo*, medida por unidade de volume, é um mapeamento suave $\mathbf{b}: y(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que associa cada ponto espacial $\mathbf{x}$ ao vetor força de corpo $\mathbf{b}(\mathbf{x})$.

Um corpo está em *equilíbrio estático* se

$$\int_{\partial y(\mathcal{P})} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS + \int_{y(\mathcal{P})} \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV = 0 \quad (4.4.4)$$

$$\int_{\partial y(\mathcal{P})} \mathbf{r} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS + \int_{y(\mathcal{P})} \mathbf{r} \times \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV = 0 \quad (4.4.5)$$

para qualquer parte $\mathcal{P}$ do corpo $\mathcal{B}$.

Segundo o *teorema de Cauchy*, se $\mathcal{B}$ é um corpo que está em equilíbrio estático então para cada ponto espacial $\mathbf{x}$ existe um tensor simétrico $\mathbf{T}$, denominado *tensor tensão de Cauchy*, que satisfaz as relações

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{n}, \quad (4.4.6)$$

com

$$\text{div } \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}, \quad (4.4.7)$$

onde $\mathbf{n}$ o vetor normal unitário à superfície de área $\Delta \mathbf{S}$ sobre a qual atua o vetor tensão $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$, sendo $\mathbf{o}$ o vetor nulo.

Define-se o *primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff* por

$$\mathbf{P} = \mathcal{J} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} \quad (4.4.8)$$

e o *segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff* por

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \mathcal{J} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}. \quad (4.4.9)$$

4.5) Mudança de Observador

Dois *observadores* geralmente vêem a deformação de um corpo de modos diferentes.

Seja $\{\mathbf{O}, \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ um referencial e $\mathbf{f} : \mathbf{y}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma *deformação rígida* definida por

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{q} + \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{O}), \quad (4.5.1)$$

sendo $\mathbf{Q} \in \text{Ort}^+$ um tensor rotação e $\mathbf{q}$ um ponto fixo.

As deformações $\mathbf{y}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ relacionam-se por mudança de observador se

$$\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{X}) = (\mathbf{f} \circ \mathbf{y})(\mathbf{X}). \quad (4.5.2)$$

Os gradientes de deformação correspondentes estão relacionados por

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}\mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (4.5.3)$$

com

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \partial \mathbf{y}(\mathbf{X}) / \partial \mathbf{X} \text{ e } \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{X}) = \partial \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{X}) / \partial \mathbf{X}, \quad (4.5.4)$$

e os vetores tensão por

$$\hat{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{Q}\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}), \quad (4.5.5)$$

com $\mathbf{n}$ e $\hat{\mathbf{n}}$ relacionados por

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{Q}\mathbf{n}. \quad (4.5.6)$$

De (4.5.5) e (4.4.6) verifica-se que os tensores tensão de Cauchy relacionam-se por

$$\hat{\mathbf{T}}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{Q}\mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{Q}^T. \quad (4.5.7)$$

4.6) Elementos da Teoria de Elasticidade

A *função resposta de um material elástico* é um mapeamento suave

$$\mathcal{F} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{B} \rightarrow \text{Sim} \quad (4.6.1)$$

que associa o gradiente de deformação $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ e o ponto material $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ ao tensor tensão de Cauchy $\mathbf{T}(\mathbf{x}) \in \text{Sim}$ por meio de

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}). \quad (4.6.2)$$

Quando conveniente, escreve-se

$$\mathbf{T} = \mathcal{F}(\mathbf{F}) \quad (4.6.3)$$

em vez de (4.6.2).

Um material elástico é *homogêneo* se os valores da função densidade de massa $\rho(\mathbf{X})$ e da função resposta do material elástico $\mathcal{F}(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X})$ independem da escolha do ponto material $\mathbf{X}$. Define-se a tensão residual $\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{I}(\mathbf{X}), \mathbf{X})$ como a tensão existente sobre o ponto material $\mathbf{X}$ antes deste ser deformado por uma deformação $\mathbf{y}$.

4.6.1) Princípio da Objetividade e Restrição da Função Resposta ao Estiramento

O *princípio da objetividade* determina que a função resposta deva ser independente da mudança de observador. De (4.6.3), (4.5.7), (4.5.3) e (4.5.2) verifica-se que a função resposta de um material é independente do observador se satisfaz

$$\mathcal{F}(\mathbf{QF}) = \mathbf{Q}\mathcal{F}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T \quad (4.6.4)$$

para qualquer $\mathbf{Q} \in \mathbf{Ort}$.

Se o princípio da objetividade é satisfeito então a função resposta de um material elástico é determinada somente pelo tensor de estiramento $\mathbf{U}$. De fato, utilizando $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$ em (4.6.4), com $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$, tem-se que

$$\mathcal{F}(\mathbf{QF}) = \mathcal{F}(\mathbf{U}) \text{ e } \mathbf{Q}\mathcal{F}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T = \mathbf{R}^T \mathcal{F}(\mathbf{F})\mathbf{R}. \quad (4.6.5)$$

Portanto,

$$\mathbf{T} = \mathcal{F}(\mathbf{F}) = \mathbf{R}\mathcal{F}(\mathbf{U})\mathbf{R}^T, \quad \mathbf{F} = \mathbf{RU}, \quad (4.6.6)$$

e a função resposta $\mathcal{F}$ é completamente determinada pelo tensor de estiramento $\mathbf{U}$. Uma vez que $\mathbf{R} = \mathbf{FU}^{-1}$, pois $\det \mathbf{F} = \det \mathbf{U} > 0$, segue de (4.6.6) que $\mathcal{F}(\mathbf{F}) = \mathbf{FU}^{-1}\mathcal{F}(\mathbf{U})\mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}^T$. Utilizando (4.3.3), esta expressão pode ser escrita da forma

$$\mathbf{T} = \mathcal{F}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}\hat{\mathcal{F}}(\mathbf{C})\mathbf{F}^T, \quad (4.6.7)$$

com $\hat{\mathcal{F}}(\mathbf{C}) = (\mathbf{C}^{1/2})^{-1}\mathcal{F}(\mathbf{C}^{1/2})(\mathbf{U}^{1/2})^{-1}$, ou, na forma

$$\mathbf{T} = \mathcal{F}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{E})\mathbf{F}^T, \quad (4.6.8)$$

com $\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{E})$ obtido de $\hat{\mathcal{F}}(\mathbf{C})$ utilizando (4.3.5).

4.6.2) Grupo de Simetria do Material Elástico

Uma *transformação de simetria* sobre o ponto material elástico $\mathbf{X}$ é uma rotação, ou, reflexão $\mathbf{Q} \in \mathbf{Ort}$ que satisfaz

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}) = \mathcal{F}(\mathbf{FQ}) \quad (4.6.9)$$

para $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \nabla \mathbf{y}(\mathbf{X})$. O conjunto $\mathcal{G}_X \subset \mathbf{Ort}$ formado por todas as transformações de simetria no ponto material $\mathbf{X}$ é denominado *grupo de simetria do ponto material* $\mathbf{X}$. O conjunto $\mathcal{G}_X$ recebe a denominação grupo de simetria pois $\mathcal{G}_X \subset \mathbf{Ort}$ (ver Seção 3.3.4).

Se o material elástico é homogêneo então o grupo de simetria $\mathbf{Q} \in \mathcal{G}_X$ independe da escolha do ponto material $\mathbf{X}$ e podemos escrever $\mathcal{G} = \mathcal{G}_X$.

De (4.6.4) e (4.6.9) determina-se que a condição necessária e suficiente para que a função resposta do material elástico satisfaça o princípio da objetividade é que

$$\mathcal{F}(\mathbf{QFQ}^T) = \mathbf{Q}\mathcal{F}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T \quad (4.6.10)$$

para todo $\mathbf{Q} \in \mathcal{G}_X$, com $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \nabla \mathbf{y}(\mathbf{X})$. Assim, a função resposta de um material elástico $\mathcal{F}$ é uma função tensorial simétrica invariante sobre $\mathcal{G}_X \subset \mathbf{Ort}$, conforme definido na Seção 3.4.3. Verifica-se que as funções respostas (4.6.7) e (4.6.8) também são funções tensoriais simétricas invariantes sobre $\mathcal{G}_X \subset \mathbf{Ort}$, ou seja,

$$\mathbf{Q}\hat{\mathcal{F}}(\mathbf{C})\mathbf{Q}^T = \hat{\mathcal{F}}(\mathbf{QCQ}^T) \quad (4.6.11)$$

e

$$\mathbf{Q}\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{E})\mathbf{Q}^T = \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{QEQ}^T) \quad (4.6.12)$$

para todo $\mathbf{Q} \in \mathcal{G}_X$.

Um material elástico em $\mathbf{X}$ é:

- a) *isotrópico* se e somente se $\mathcal{G}_X = \mathbf{Ort}$;
- b) *transversalmente isotrópico* se e somente se existe um sistema referencial $\{\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ tal que $\mathcal{G}_X = \mathcal{T}_{(\mathbf{e}_1)}$, sendo $\mathcal{T}_{(\mathbf{e}_1)}$ o conjunto definido em (3.3.38).
- c) *ortotrópico* se e somente se existe um sistema referencial $\{\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ tal que $\mathcal{G}_X = \mathcal{O}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$, sendo $\mathcal{O}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$ o conjunto em (3.3.39).

A definição acima estabelece uma relação biunívoca entre as simetrias dos materiais elásticos e o grupo de simétricas do conjunto dos ortogonais apresentado na seção 3.3.4.

4.7) Comportamento Mecânico de Material Elástico

A lista de equações que determinam o comportamento mecânico de um sólido elástico em equilíbrio estático é dada por

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbf{R}\mathcal{F}(\mathbf{U})\mathbf{R}^T, \\ \text{div } \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \\ J = \rho/\rho_0, \end{cases} \quad (4.7.1)$$

com

$$\mathbf{Q}\mathcal{F}(\mathbf{U})\mathbf{Q}^T = \mathcal{F}(\mathbf{Q}\mathbf{U}\mathbf{Q}^T) \quad (4.7.2)$$

para todo $\mathbf{Q} \in \mathcal{G}_{\mathbf{X}}$.

Assumindo que o material é isotrópico no ponto material $\mathbf{X}$, tem-se da Seção 4.6 e de (4.7.2) que a função resposta $\tilde{\mathcal{F}}$ é uma função tensorial simétrica e isotrópica que depende do tensor simétrico $\mathbf{E}$, cuja representação é da forma (3.4.31) e é dada por

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{E}) = \alpha_1(\mathbf{E})\mathbf{I} + \alpha_2(\mathbf{E})\mathbf{E} + \alpha_3(\mathbf{E})\mathbf{E}^2, \quad (4.7.3)$$

sendo que as funções escalares isotrópicas α_1 , α_2 e α_3 são funções dos invariantes

$$\text{tr } \mathbf{E}, \text{tr } \mathbf{E}^2, \text{tr } \mathbf{E}^3. \quad (4.7.4)$$

Assumindo que o material é transversalmente isotrópico no ponto material $\mathbf{X}$, tem-se da Seção 4.6 e de (4.7.2) que a função resposta $\tilde{\mathcal{F}}$ é uma função tensorial simétrica e transversalmente isotrópica que depende do tensor simétrico $\mathbf{E}$, cuja representação é da forma (3.4.35) e é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{E}) = & \alpha_1\mathbf{I} + \alpha_2\mathbf{E} + \alpha_3\mathbf{E}^2 + \alpha_4\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1 + \alpha_5(\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \mathbf{E}\vec{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{E}\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1) + \\ & \alpha_6(\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \mathbf{E}^2\vec{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{E}^2\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1), \end{aligned} \quad (4.7.5)$$

sendo que as funções escalares transversalmente isotrópicas α_1 a α_6 são funções dos escalares

$$\text{tr } \mathbf{E}, \text{tr } \mathbf{E}^2, \text{tr } \mathbf{E}^3, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{E}\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{E}^2\vec{\mathbf{e}}_1, \quad (4.7.6)$$

sendo $\vec{\mathbf{e}}_1$, vetor da base ortonormal $\mathbf{B} = \{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$, o vetor que gera o eixo de rotação do grupo de simétrica $\mathcal{G}_{\mathbf{X}} = \mathcal{T}_{(\mathbf{e}_1)}$, com $\mathcal{T}_{(\mathbf{e}_1)}$ definido em (3.3.38).

Assumindo que o material é ortotrópico no ponto material $\mathbf{X}$, tem-se de (4.7.2) que a função resposta $\tilde{\mathcal{F}}$ é uma função tensorial simétrica ortotrópica que depende do tensor simétrico $\mathbf{E}$, cuja representação é da forma (3.4.37) e é dada por

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{E}) = & \alpha_1 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{E} + \alpha_3 \mathbf{E}^2 + \alpha_4 \mathbf{M} + \alpha_5 \vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1 + \alpha_6 (\mathbf{M}\mathbf{E} + \mathbf{E}\mathbf{M}) + \\ & \alpha_7 (\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \mathbf{E}\vec{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{E}\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1) + \alpha_8 \mathbf{M}\mathbf{E}_1 \vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1,\end{aligned}\quad (4.7.7)$$

sendo que as funções escalares ortotrópicas α_1 a α_8 são funções dos escalares

$$\text{tr } \mathbf{E}, \text{tr } \mathbf{E}^2, \text{tr } \mathbf{E}^3, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{E}\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{E}^2 \vec{\mathbf{e}}_1, \text{tr } \mathbf{M}\mathbf{E}, \text{tr } \mathbf{M}\mathbf{E}^2 \quad (4.7.8)$$

sendo $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3$ os vetores da base ortonormal $\mathbf{B} = \{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ que geram os planos de reflexões $\mathbf{e}_1 \mathbf{O} \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 \mathbf{O} \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}_2 \mathbf{O} \mathbf{e}_3$ do grupo de simétrica $\mathcal{G}_X = \mathcal{O}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$, com $\mathcal{O}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$ definido em (3.3.39) e definido por $\mathbf{M} = \vec{\mathbf{e}}_2 \otimes \vec{\mathbf{e}}_2 - \vec{\mathbf{e}}_3 \otimes \vec{\mathbf{e}}_3$.

4.8) Elasticidade Linear Infinitesimal

No caso de deformação infinitesimal, a relação entre tensão e deformação (4.6.3) é aproximada pela *Lei de Hooke Generalizada*

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}\mathbf{E}, \quad (4.8.1)$$

onde $\mathbf{E}$ é o tensor deformação infinitesimal dado por (4.3.7) e $\mathbf{C}$ é um tensor de quarta ordem denominado *tensor de elasticidade infinitesimal*, o qual possui 21 componentes C_{ijkl} independentes que satisfazem as condições de simetria

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}. \quad (4.8.2)$$

Em um sistema de coordenadas cartesianas retangulares, pode-se escrever (4.8.1) na forma

$$\mathbf{T}_{ij} = C_{ijkl} \mathbf{E}_{km}, \quad (4.8.3)$$

ou, na forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{T}_{11} \\ \mathbf{T}_{22} \\ \mathbf{T}_{33} \\ \mathbf{T}_{13} \\ \mathbf{T}_{23} \\ \mathbf{T}_{12} \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1113} & C_{1123} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2213} & C_{2223} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3313} & C_{3323} & C_{3312} \\ & & & C_{1313} & C_{1323} & C_{1312} \\ & & & & C_{2323} & C_{2312} \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix}}^{\hat{\mathbf{C}}} \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_{11} \\ \mathbf{E}_{22} \\ \mathbf{E}_{33} \\ 2\mathbf{E}_{13} \\ 2\mathbf{E}_{23} \\ 2\mathbf{E}_{12} \end{Bmatrix}. \quad (4.8.4)$$

A relação constitutiva (4.8.8) é utilizada na investigação de pequenos deslocamentos em materiais elástico-lineares.

No caso em que o material elástico é isotrópico, o tensor de elasticidade admite a representação matricial

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (4.8.5)$$

onde λ e μ são os coeficientes de Lamé. Um material isotrópico apresenta apenas duas constantes independentes.

No caso em que o material é transversalmente isotrópico, o tensor de elasticidade admite a representação matricial

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1122} & C_{2222} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix}. \quad (4.8.6)$$

Um material transversalmente isotrópico apresenta 5 coeficientes independentes, com $C_{2222} = C_{2233} + 2C_{2323}$.

No caso em que o material elástico é ortotrópico o tensor de elasticidade admite a representação matricial

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix}. \quad (4.8.7)$$

Um material ortotrópico apresenta 9 coeficientes independentes.

5. Apresentação de Resultados

Neste Capítulo apresenta-se e desenvolve-se a formulação da função resposta de materiais elásticos porosos sob deformações infinitesimais proposta por Cowin (1985). Com base nesta formulação propõe-se uma nova formulação para a função resposta de materiais porosos elásticos isotrópicos, transversalmente isotrópicos e ortotrópicos para deformações infinitesimais.

Este Capítulo é dividido em seis subseções. Apresenta-se na Seção 5.1 observações experimentais sobre o comportamento mecânico do osso trabecular. Apresenta-se na Seção 5.2 o modelo de Cowin que descreve o comportamento mecânico de materiais elástico lineares porosos. Apresenta-se na Seção 5.3 modelos sugeridos nesta investigação para descrever o comportamento mecânico de materiais elástico lineares porosos isotrópicos, transversalmente isotrópicos, ou, ortotrópicos. Apresenta-se na Seção 5.4 a dedução do modelo descrito na Seção 5.2. Apresenta-se na Seção 5.5 a dedução do modelo descrito na Seção 5.3. Apresenta-se na Seção 5.6 a conclusão deste trabalho.

5.1) Observações Experimentais

A densidade do osso trabecular tem sido relacionada à sua resistência e rigidez (CURREY, 1969; CARTER; HAYES, 1977; GOLDSTEIN et al., 1983; RICE et al., 1988; CIARELLI et al., 1991). Apesar das medidas de densidade fornecerem estimativas razoáveis das propriedades mecânicas, elas não explicam certas variações observadas nestas propriedades, nem dão conta das organizações microestruturais, sendo, portanto, medidas escalares incompletas para a caracterização das propriedades mecânicas. Goldstein et al. (1983) apresentam um exemplo que ilustra bem este fato. Duas amostras ósseas com frações de volume (Volume de Tecido Ósseo/Volume Total) 18% e 19%, respectivamente, apresentaram propriedades mecânicas que variaram mais de 30%, dependendo da direção analisada.

Apesar de aparente distribuição aleatória, as trabéculas tendem a se orientar ao longo da direção da tensão principal em adaptação ao carregamento externo (RODRIGUES, 2003; GOULET et al., 1994). Além disso, medições estereológicas do osso trabecular indicam que a microestrutura do meio poroso possui um arranjo geométrico bem definido. A orientação das trabéculas ósseas em uma amostra de osso trabecular varia de acordo com a direção adotada na análise da amostra, conforme ilustrado na Fig. 5.1. Observa-se desta figura que no plano zy

há uma orientação preferencial das trabéculas e que nos planos xy e zx não há orientação preferencial.

Figura 5. 1—Imagem 3D e Seções transversais de uma amostra de osso trabecular obtidas por microtomografia 3D (GOULET et al., 1994).

Whitehouse e Dyson (1974) mediram a distância média L (*Mean Intercept Length - MIL*) entre as interfaces do tecido ósseo com a medula óssea sobre secções planas e polidas do osso. As medições foram realizadas ao longo de uma linha reta inclinada de um ângulo θ em relação a um referencial inercial, conforme ilustra a Figura 5.2.

Figura 5. 2 - Medição de L (MIL) em duas dimensões (ODGAARD, 1997).

Ao construir diagramas polares com os pontos (θ, L) , Whitehouse (1974) constatou que estes pontos podem ser interpolados de forma precisa pela equação de uma elipse, dada por

$$\frac{1}{L^2(\theta)} = M_{11} \cos^2 \theta + M_{22} \sin^2 \theta + 2M_{12} \sin \theta \cos \theta, \quad (5.1.1)$$

onde M_{11} , M_{22} e M_{12} são constantes reais e os índices 1 e 2 referem-se aos eixos coordenados x_1 e x_2 , respectivamente, definidos sobre o plano da secção. Feldkamp et al. (1989) utilizam a técnica MIL em três amostras de osso trabecular, a fim de obter as elipses que determinam as orientações das trabéculas, Figura 5.3.

Figura 5. 3– Variação das direções preferências das trabéculas (FELDKAMP et al., 1989).

Em três dimensões, Harrigan e Mann (1984) apresentam uma técnica experimental que permite inferir a distância média L em uma direção arbitrária de uma amostra de osso trabecular. A técnica consiste em obter elipses sobre três planos mutuamente ortogonais da amostra, as quais são as projeções ortogonais de um elipsóide sobre estes planos. A equação do elipsóide é dada por

$$\frac{1}{L^2(\theta)} = \vec{n} \cdot \mathbf{M} \vec{n}, \quad (5.1.2)$$

em que $\mathbf{M}$ é um tensor de segunda ordem, simétrico, positivo definido, e $\vec{n}$ é um versor que define a direção sobre a qual mede-se o valor de L . O tensor $\mathbf{M}$ associa o arranjo geométrico das trabéculas a um elipsóide. Os autovetores de $\mathbf{M}$ fornecem as direções principais do elipsóide, as quais estão associadas às orientações preferenciais das trabéculas. A Figura 5.4 ilustra a relação entre as direções preferenciais das trabéculas de uma amostra em três dimensões, a simetria associada à amostra e o elipsóide obtido pelo método MIL.

Figura 5. 4- Representação do elipsóide obtido pelo MIL em três dimensões (Adaptado de Goldstein et al., 1993).

Observa-se na metade inferior da Figura 5.4 que o elipsóide se parece com uma esfera, indicando que os três autovalores do tensor $\mathbf{M}$ possuem valores próximos entre si. Neste

caso, associa-se à amostra a simetria isotrópica. No caso do elipsóide mostrado na metade superior da Figura 5.4, o elipsóide se parece com um esferóide, indicando que o tensor $\mathbf{M}$ possui um autovalor distinto e dois autovalores próximos. Neste caso, associa-se a amostra a simetria transversalmente isotrópica. No entanto, se o elipsóide parecer um elipsóide escaleno, então indicará que o tensor $\mathbf{M}$ possuirá três autovalores relativamente distantes entre si. Neste caso, associa-se à amostra a simetria ortotrópica.

Assim o método MIL caracteriza a orientação das trabéculas de uma amostra, associando esta orientação um elipsóide representado pelo tensor $\mathbf{M}$. Os autovalores de $\mathbf{M}$ estão associados às simetrias do material, podendo ser estas isotrópica, transversalmente isotrópica, ou, ortotrópica.

Os autovalores do tensor $\mathbf{M}$ podem ser determinados experimentalmente utilizando técnicas de microtomografia 3D por raios-X. Silva (2009), a partir das projeções 2D de amostras ósseas trabeculares do fêmur bovino em diferentes posições. A partir destas projeções é possível obter a reconstrução 3D do objeto. Utilizando o programa *CT-Analyser*, que possibilita uma análise bi e tridimensional de regiões reconstruídas das amostras, Silva (2009) obteve vários parâmetros da estrutura das amostras de osso trabecular bovino, tais como a fração de volume ósseo ν , superfície óssea, espessura trabecular, número trabecular, conectividade, índice do modelo estrutural, fator padrão de trabécula, grau de anisotropia e os autovalores do tensor $\mathbf{M}$. Os autovalores do tensor $\mathbf{M}$ obtidos mostram uma tendência à isotropia transversal da estrutura trabecular bovina fêmural.

O tensor $\mathbf{M}$ e a fração de volume ósseo ν podem ser utilizados como medidas da arquitetura e de densidade óssea, respectivamente, para caracterizar a função resposta do osso trabecular. Cowin (1985) propõe um modelo mecânico para a função resposta de um meio poroso, tal como o osso trabecular, utilizando a fração volumétrica ν , uma medida de deformação e o tensor $\mathbf{M}$. Este modelo é apresentado na próxima Seção.

5.2) Modelo Mecânico Proposto por Cowin

Do ponto de vista da Mecânica, o osso trabecular é um material poroso e pode ser modelado como um sólido elástico. A Lei de Hooke Generalizada (4.8.1) estabelece uma relação linear entre o tensor tensão $\mathbf{T}$ e a deformação infinitesimal $\mathbf{E}$ por meio do tensor de elasticidade infinitesimal $\mathbf{C}$ que satisfaz a condição de simetria (4.8.2). Assumindo que a matriz do meio elástico poroso é isotrópica e que a anisotropia deste meio é devida somente

ao arranjo geométrico da microestrutura, Cowin (1985) propõe que a função resposta mecânica de uma amostra de material elástico poroso seja dada por

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{F}}(\nu, \mathbf{E}, \mathbf{H}) \quad (5.2.1)$$

onde $\hat{\mathbf{F}}$ é uma função tensorial simétrica isotrópica que satisfaz

$$\mathbf{Q}\hat{\mathbf{F}}(\nu, \mathbf{E}, \mathbf{H})\mathbf{Q}^T = \hat{\mathbf{F}}(\nu, \mathbf{QEQ}^T, \mathbf{QH}\mathbf{Q}^T) \quad (5.2.2)$$

para todo $\mathbf{Q} \in \mathbf{Ort}$, ν é a fração volumétrica da amostra do meio poroso, $\mathbf{E}$ é o tensor deformação infinitesimal, $\mathbf{H} = \mathbf{M}^{-1/2}$ é o tensor textura, sendo $\mathbf{M}$ o tensor de segunda ordem, simétrico, positivo definido que associa o arranjo geométrico do meio poroso de uma amostra a um elipsóide cujos autovetores de $\mathbf{M}$ fornecem as direções principais do elipsóide e, portanto, as orientações preferenciais dos poros. A função resposta mecânica do material elástico poroso é uma função tensorial simétrica isotrópica que depende de dois tensores simétricos e conforme (3.4.32) admite a representação

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \hat{\mathbf{F}}(\nu, \mathbf{E}, \mathbf{H}) = & f_1 \mathbf{I} + f_2 \mathbf{H} + f_3 \mathbf{H}^2 + f_4 \mathbf{E} + f_5 \mathbf{E}^2 + f_6 (\mathbf{HE} + \mathbf{EH}) + \\ & f_7 (\mathbf{H}^2 \mathbf{E} + \mathbf{EH}^2) + f_8 (\mathbf{HE}^2 + \mathbf{E}^2 \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

onde f_1 a f_8 são funções isotrópicas dos escalares

$$\nu, \text{tr} \mathbf{H}, \text{tr} \mathbf{H}^2, \text{tr} \mathbf{H}^3, \text{tr} \mathbf{E}, \text{tr} \mathbf{E}^2, \text{tr} \mathbf{E}^3, \text{tr} \mathbf{HE}, \text{tr} \mathbf{H}^2 \mathbf{E}, \text{tr} \mathbf{HE}^2, \text{tr} \mathbf{H}^2 \mathbf{E}^2. \quad (5.2.4)$$

Supondo que a função resposta mecânica do material poroso (5.2.1) é linear e que não haja tensão residual, $\hat{\mathbf{F}}(\nu, \mathbf{E}, \mathbf{H}) = \mathbf{O}$ quando $\mathbf{E} = \mathbf{O}$, mostra-se na Seção (5.4), que as componentes do tensor de elasticidade infinitesimal $\mathbf{C}$ relacionam-se com as componentes do tensor $\mathbf{H}$ por meio de

$$\begin{aligned} C_{ijkm} = & (a_1 \delta_{km} + a_2 \mathbf{H}_{km} + a_3 \mathbf{H}_{kl} \mathbf{H}_{lm}) \delta_{ij} + (a_2 \delta_{km} + b_1 \mathbf{H}_{km} + b_2 \mathbf{H}_{kl} \mathbf{H}_{lm}) \mathbf{H}_{ij} + \\ & (a_3 \delta_{km} + b_2 \mathbf{H}_{km} + b_3 \mathbf{H}_{kl} \mathbf{H}_{lm}) \mathbf{H}_{iq} \mathbf{H}_{qj} + c_1 (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{jk} \delta_{im}) + \\ & c_2 (\mathbf{H}_{ik} \delta_{jm} + \mathbf{H}_{mi} \delta_{jk} + \mathbf{H}_{mj} \delta_{ik} + \mathbf{H}_{jk} \delta_{im}) + c_3 (\mathbf{H}_{iq} \mathbf{H}_{qk} \delta_{jm} + \mathbf{H}_{mr} \mathbf{H}_{ri} \delta_{jk} + \\ & \mathbf{H}_{mr} \mathbf{H}_{rj} \delta_{ik} + \mathbf{H}_{jq} \mathbf{H}_{qk} \delta_{im}), \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

onde $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ e c_3 são funções escalares isotrópicas que dependem de

$$\nu, \text{tr} \mathbf{H}, \text{tr} \mathbf{H}^2 \text{ e } \text{tr} \mathbf{H}^3. \quad (5.2.6)$$

Cowin (1985) observa que o tensor de elasticidade (5.2.5) não é capaz de representar os oito tipos possíveis de simetria do material elástico, restringindo-se apenas à ortotropia e seus casos particulares, tais como a isotropia e isotropia transversal.

Seja um sistema referencial $\{\mathbf{O}, \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ formado pelos autovetores $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3$ do tensor simétrico $\mathbf{H}$, os quais estão associados aos autovalores, H_1, H_2, H_3 , respectivamente, com $H_1 \geq H_2 \geq H_3 > 0$. A representação matricial do tensor $\mathbf{H}$ nesse sistema referencial é

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3 \end{bmatrix}. \quad (5.2.7)$$

Como visto na Seção anterior se o tensor $\mathbf{H}$ possui três autovalores iguais, $H_1 = H_2 = H_3$, associa-se à amostra a simetria isotrópica. De fato, verifica-se substituindo as componentes do tensor $\mathbf{H}$ de (5.2.7) com $H_1 = H_2 = H_3$ em (5.2.5) que o tensor de elasticidade infinitesimal $\mathbf{C}$ caracteriza a simetria de um material isotrópico com dois coeficientes independentes, sendo a representação matricial correspondente dada por (4.8.5), onde as constantes de Lamé λ e μ são dadas por

$$\begin{aligned} \lambda &= a_1 + 2a_2 H_1 + (2a_3 + b_1) H_1^2 + 2b_2 H_1^3 + 2b_3 H_1^4, \\ \mu &= c_1 + 2c_2 H_1 + 2c_3 H_1^2, \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

respectivamente, onde lembramos do exposto acima que $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ e c_3 são funções escalares isotrópicas que dependem de (5.2.6).

Como visto na Seção anterior, se o tensor $\mathbf{H}$ possui dois autovetores iguais, $H_2 = H_3$, associa-se à amostra a simetria transversalmente isotrópica. De fato, verifica-se substituindo as componentes do tensor $\mathbf{H}$ de (5.2.7) com $H_1 \neq H_2 = H_3$ em (5.2.5) que o tensor de elasticidade infinitesimal $\mathbf{C}$ caracteriza a simetria de um material transversalmente isotrópico, com cinco coeficientes independentes, sendo a representação matricial correspondente dada por (4.8.6), onde as constantes elásticas não nulas são dadas por

$$\begin{aligned}
C_{1111} &= a_1 + 2c_1 + 2(a_2 + 2c_2)\mathbf{H}_1 + (2a_3 + b_1 + 4c_3)\mathbf{H}_1^2 + 2b_2\mathbf{H}_1^3 + b_3\mathbf{H}_1^4, \\
C_{2222} &= a_1 + 2c_1 + 2(a_2 + 2c_2)\mathbf{H}_2 + (2a_3 + b_1 + 4c_3)\mathbf{H}_2^2 + 2b_2\mathbf{H}_2^3 + b_3\mathbf{H}_2^4, \\
C_{1122} &= a_1 + a_2(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) + a_3(\mathbf{H}_1^2 + \mathbf{H}_2^2) + b_1\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 + b_2(\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2^2 + \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1^2) \\
&\quad + b_3\mathbf{H}_1^2\mathbf{H}_2^2, \\
C_{2233} &= a_1 + 2a_2\mathbf{H}_2 + (2a_3 + b_1)\mathbf{H}_2^2 + 2b_2\mathbf{H}_2^3 + b_3\mathbf{H}_2^4, \\
C_{1212} &= c_1 + c_2(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) + c_3(\mathbf{H}_1^2 + \mathbf{H}_2^2), \\
C_{2323} &= c_1 + 2c_2\mathbf{H}_2 + 2c_3\mathbf{H}_2^2,
\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

sendo que $C_{2222} \neq C_{1122} \neq C_{1212}$ e $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ e c_3 são funções escalares isotrópicas que dependem de (5.2.6).

Como visto na Seção anterior, se o tensor $\mathbf{H}$ possui três autovetores mutuamente distintos, $\mathbf{H}_1 \neq \mathbf{H}_2 \neq \mathbf{H}_3$, associa-se à amostra a simetria ortotrópica. De fato, verifica-se substituindo as componentes do tensor $\mathbf{H}$ de (5.2.7) com $\mathbf{H}_1 \neq \mathbf{H}_2 \neq \mathbf{H}_3$ em (5.2.5) que o tensor de elasticidade infinitesimal $\mathbf{C}$ caracteriza a simetria de um material ortotrópico, com nove coeficientes independentes, sendo a representação matricial correspondente dada por (4.8.7), onde as constantes elásticas não nulas são dadas por

$$\begin{aligned}
C_{1111} &= a_1 + 2c_1 + 2(a_2 + 2c_2)\mathbf{H}_1 + (2a_3 + b_1 + 4c_3)\mathbf{H}_1^2 + 2b_2\mathbf{H}_1^3 + b_3\mathbf{H}_1^4, \\
C_{2222} &= a_1 + 2c_1 + 2(a_2 + 2c_2)\mathbf{H}_2 + (2a_3 + b_1 + 4c_3)\mathbf{H}_2^2 + 2b_2\mathbf{H}_2^3 + b_3\mathbf{H}_2^4, \\
C_{3333} &= a_1 + 2c_1 + 2(a_2 + 2c_2)\mathbf{H}_3 + (2a_3 + b_1 + 4c_3)\mathbf{H}_3^2 + 2b_2\mathbf{H}_3^3 + b_3\mathbf{H}_3^4, \\
C_{1133} &= a_1 + a_2(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_3) + a_3(\mathbf{H}_1^2 + \mathbf{H}_3^2) + b_1\mathbf{H}_1\mathbf{H}_3 + b_2(\mathbf{H}_1\mathbf{H}_3^2 + \mathbf{H}_3\mathbf{H}_1^2) + \\
&\quad b_3\mathbf{H}_1^2\mathbf{H}_3^2, \\
C_{2233} &= a_1 + a_2(\mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3) + a_3(\mathbf{H}_2^2 + \mathbf{H}_3^2) + b_1\mathbf{H}_2\mathbf{H}_3 + b_2(\mathbf{H}_2\mathbf{H}_3^2 + \mathbf{H}_3\mathbf{H}_2^2) + \\
&\quad b_3\mathbf{H}_2^2\mathbf{H}_3^2, \\
C_{1122} &= a_1 + a_2(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) + a_3(\mathbf{H}_1^2 + \mathbf{H}_2^2) + b_1\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 + b_2(\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2^2 + \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1^2) + \\
&\quad b_3\mathbf{H}_1^2\mathbf{H}_2^2, \\
C_{1313} &= c_1 + c_2(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_3) + c_3(\mathbf{H}_1^2 + \mathbf{H}_3^2), \\
C_{2323} &= c_1 + c_2(\mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3) + c_3(\mathbf{H}_2^2 + \mathbf{H}_3^2), \\
C_{1212} &= c_1 + c_2(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) + c_3(\mathbf{H}_1^2 + \mathbf{H}_2^2),
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

sendo que, novamente, $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ e c_3 são funções escalares isotrópicas que dependem de (5.2.6).

5.3) Modelo Proposto

Seja, novamente, $\{\mathbf{O}, \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ um sistema referencial formado pelos autovetores $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3$ do tensor simétrico $\mathbf{H}$, os quais estão associados os autovalores, $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3$, respectivamente, com $\mathbf{H}_1 \geq \mathbf{H}_2 \geq \mathbf{H}_3 > 0$. A representação matricial de $\mathbf{H}$ é dada por (5.2.7).

5.3.1) Material Elástico Linear Isotrópico

Se o tensor $\mathbf{H}$ possuir três autovalores iguais $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_3$ então, como visto na Seção 5.1, associa-se à amostra a simetria isotrópica. Admite-se então que a função resposta mecânica do material poroso, nesta amostra, é dada por

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^i(\nu, \mathbf{E}), \quad (5.3.1)$$

sendo $\mathbf{F}^i$ uma função tensorial simétrica isotrópica que satisfaz

$$\mathbf{Q}\mathbf{F}^i(\nu, \mathbf{E})\mathbf{Q}^T = \mathbf{F}^i(\nu, \mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{Q}^T) \quad (5.3.2)$$

para todo tensor ortogonal $\mathbf{Q} \in \mathbf{Ort}$. A função resposta mecânica do material poroso é uma função tensorial simétrica isotrópica que depende de um tensor simétrico $\mathbf{E}$, conforme (3.4.31), admite a representação

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^i(\nu, \mathbf{E}) = f_1 \mathbf{I} + f_2 \mathbf{E} + f_3 \mathbf{E}^2, \quad (5.3.3)$$

onde f_1, f_2 e f_3 são funções escalares isotrópicas de

$$\nu, \text{tr}\mathbf{E}, \text{tr}\mathbf{E}^2, \text{tr}\mathbf{E}^3. \quad (5.3.4)$$

Supondo que a resposta mecânica da amostra do material poroso (5.3.1) está no regime linear e que não haja tensão residual, mostra-se na Seção (5.6.1) que as componentes do tensor de elasticidade infinitesimal são dadas por

$$\mathbf{C}_{ijkl} = a_1 \delta_{km} \delta_{ij} + 2c_1 \delta_{ik} \delta_{jm}, \quad (5.3.5)$$

onde a_1 e c_1 são funções somente da fração volumétrica ν , e a representação matricial correspondente é dada por (4.8.5), onde as constantes de Lamé λ e μ são dadas por

$$\begin{aligned} \lambda &= a_1, \\ \mu &= c_1, \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Respectivamente.

5.3.2) Material Elástico Linear Transversalmente Isotrópico

Se o tensor $\mathbf{H}$ possuir dois autovalores iguais $H_2 = H_3$ então, como visto na Seção 5.1, associa-se à amostra a simetria transversalmente isotrópica. Admite-se então que a função resposta mecânica, desta amostra, é dada por

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}''(\nu, \mathbf{E}), \quad (5.3.7)$$

sendo $\mathbf{F}''$ uma função tensorial simétrica transversalmente isotrópica que satisfaz

$$\mathbf{Q}\mathbf{F}''(\nu, \mathbf{E})\mathbf{Q}^T = \mathbf{F}''(\nu, \mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{Q}^T) \quad (5.3.8)$$

para todo tensor ortogonal $\mathbf{Q} \in \mathcal{T}_{(\mathbf{e}_1)}$, onde $\mathcal{T}_{(\mathbf{e}_1)}$ é conjunto de simetria dos tensores transversalmente isotrópicos definido em (3.3.38). A função resposta mecânica do material poroso é uma função tensorial simétrica transversalmente isotrópica que depende de um tensor simétricos e conforme (3.4.35) admite a representação

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \mathbf{F}''(\nu, \mathbf{E}) = & f_1 \mathbf{I} + f_2 \mathbf{E} + f_3 \mathbf{E}^2 + f_4 \vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1 + f_5 (\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \mathbf{E} \vec{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{E} \vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1) + \\ & f_6 (\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \mathbf{E}^2 \vec{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{E}^2 \vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_1) \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

onde f_1 a f_6 são funções escalares transversalmente isotrópicas de

$$\nu, \text{tr } \mathbf{E}, \text{tr } \mathbf{E}^2, \text{tr } \mathbf{E}^3, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{E} \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{E}^2 \vec{\mathbf{e}}_1, \quad (5.3.10)$$

sendo $\vec{\mathbf{e}}_1$, vetor da base ortonormal $\mathbf{B} = \{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ formado pelos autovetores $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3$ do tensor simétrico $\mathbf{H}$, o vetor que gera o eixo de rotação do conjunto $\mathcal{T}_{(\mathbf{e}_1)}$ definido em (3.3.38).

Supondo que a resposta mecânica do material poroso (5.3.7) está no regime linear e que não haja tensão residual, mostra-se na Seção (5.6.2) que as componentes do tensor de elasticidade infinitesimal são dadas por

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = & (a_1 \delta_{km} + a_2 \delta_{lk} \delta_{lm}) \delta_{ij} + c_1 (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{jk} \delta_{im}) + \\ & (b_1 \delta_{km} + b_2 \delta_{lk} \delta_{lm}) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + 2c_2 (2\delta_{lk} \delta_{lm} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \\ & \delta_{lk} \delta_{2m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)_{ij} + \delta_{lk} \delta_{3m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3)_{ij} + \delta_{lk} \delta_{2m} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \\ & \delta_{lk} \delta_{3m} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij}) \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

onde a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 e c_2 funções somente da fração volumétrica ν , a representação matricial correspondente dada por (4.8.6), onde as constantes elásticas não nulas são dadas por

$$\begin{aligned} C_{1111} &= a_1 + a_2 + 2c_1 + b_1 + b_2 + 4c_2, \\ C_{2222} &= a_1 + 2c_1, \\ C_{2233} &= a_1, \\ C_{1122} &= a_1 + b_1, \\ C_{2323} &= c_1, \\ C_{1212} &= c_1 + 2c_2, \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

sendo que $C_{2222} = C_{2233} + 2C_{2323}$.

5.3.3) Material Elástico Linear Ortotrópico

Se o tensor $\mathbf{H}$ possuir três autovalores distintos, como visto na Seção 5.1, associa-se à amostra a simetria ortotrópica. Admite-se então que a função resposta mecânica do material poroso, nesta amostra, é dada por

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^o(\nu, \mathbf{E}) \quad (5.3.13)$$

sendo $\mathbf{F}^o$ é uma função tensorial simétrica transversalmente isotrópica que satisfaz

$$\mathbf{Q}\mathbf{F}^o(\nu, \mathbf{E})\mathbf{Q}^T = \mathbf{F}^o(\nu, \mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{Q}^T) \quad (5.3.14)$$

para todo tensor ortogonal $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$, onde $\mathcal{O}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$ é conjunto de simetria dos tensores ortotrópicos definido em (3.3.39). A função resposta mecânica do material poroso é uma função tensorial simétrica ortotrópica que depende de um tensor simétrico e conforme (3.4.37), admite a representação

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \mathbf{F}^o(\nu, \mathbf{E}) &= f_1 \mathbf{I} + f_2 \mathbf{E} + f_3 \mathbf{E}^2 + f_4 \mathbf{M} + f_5 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + f_6 (\mathbf{M}\mathbf{E} + \mathbf{E}\mathbf{M}) + \\ &f_7 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}\mathbf{e}_1 + \mathbf{E}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + f_8 \mathbf{M}\mathbf{E}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

onde f_1 a f_8 são funções escalares ortotrópicas de

$$\nu, \text{tr } \mathbf{E}, \text{tr } \mathbf{E}^2, \text{tr } \mathbf{E}^3, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}^2 \mathbf{e}_1, \text{tr } \mathbf{M}\mathbf{E}, \text{tr } \mathbf{M}\mathbf{E}^2, \quad (5.3.16)$$

sendo $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, vetores da base ortonormal $\mathbf{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ formado pelos autovetores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ do tensor simétrico $\mathbf{H}$, vetores que geram os planos de reflexões $\mathbf{e}_1\mathbf{Oe}_2$, $\mathbf{e}_1\mathbf{Oe}_3$ e $\mathbf{e}_2\mathbf{Oe}_3$ do conjunto $\mathcal{O}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$ definido em (3.3.39), com $\mathbf{M} = \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3$.

Supondo que a resposta mecânica do material poroso (5.3.13) está no regime linear, e que não haja tensão residual, mostra-se na Seção (5.6.3) que as componentes do tensor de elasticidade infinitesimal são dadas por

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = & (a_1 \delta_{km} + a_3 \mathbf{M}_{km}) \delta_{ij} + c_1 (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{jk} \delta_{im}) + (a_3 \delta_{km} + b_2 \mathbf{M}_{km}) \mathbf{M}_{ij} + \\ & (d_3 \delta_{lk} \delta_{lm}) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + 2c_2 (\mathbf{M}_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \mathbf{M}_{kj}) + \\ & 2c_3 (2\delta_{lk} \delta_{lm} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \delta_{lk} \delta_{2m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)_{ij} + \delta_{lk} \delta_{3m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3)_{ij} + \\ & \delta_{lk} \delta_{2m} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \delta_{lk} \delta_{3m} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

onde $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ e c_3 , sendo a representação matricial correspondente dada por (4.8.7), onde as constantes elásticas não nulas são dadas por

$$\begin{aligned} C_{1111} &= a_1 + 2c_1 + d_3 + 4c_3, \\ C_{2222} &= a_1 + 2a_3 + 2c_1 + b_2 + 4c_2, \\ C_{3333} &= a_1 - 2a_3 + 2c_1 - a_3 + b_2 - 4c_2, \\ C_{1133} &= a_1 - a_3, \\ C_{2233} &= a_1 - b_2, \\ C_{1122} &= a_1 + a_3, \\ C_{1313} &= c_1 + 2c_3, \\ C_{2323} &= c_1 + 2c_2, \\ C_{1212} &= c_1. \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

5.4) Desenvolvimento do Modelo Proposto por Cowin.

Admite-se que a função resposta mecânica (5.2.1) é uma função tensorial simétrica isotrópica de dois tensores simétricos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ cuja representação é da forma (3.4.32). Linearizando (3.4.31) com respeito à $\mathbf{E}$ e considerando tensão residual nula, ou seja, $\hat{\mathbf{F}}(\nu, \mathbf{E}, \mathbf{H}) = \mathbf{O}$ para $\mathbf{E} = \mathbf{O}$, tem-se de (5.2.3) com restrição de linearidade que

$$\mathbf{T} = \hat{f}_1 \mathbf{I} + \hat{f}_2 \mathbf{H} + \hat{f}_3 \mathbf{H}^2 + \hat{f}_4 \mathbf{E} + \hat{f}_6 (\mathbf{H}\mathbf{E} + \mathbf{E}\mathbf{H}) + \hat{f}_7 (\mathbf{H}^2 \mathbf{E} + \mathbf{E}\mathbf{H}^2) \quad (5.4.1)$$

onde $\hat{f}_1, \hat{f}_2$ e $\hat{f}_3$ são funções escalares isotrópicas de

$$\nu, \text{tr}\mathbf{H}, \text{tr}\mathbf{H}^2, \text{tr}\mathbf{H}^3, \text{tr}\mathbf{E}, \text{tr}\mathbf{H}\mathbf{E}, \text{tr}\mathbf{H}^2 \mathbf{E}, \quad (5.4.2)$$

e $\hat{f}_4$, $\hat{f}_6$ e $\hat{f}_7$ são funções escalares isotrópicas de (5.2.6). Para que

$$\hat{\mathbf{F}}(\nu, \mathbf{E}, \mathbf{H}) = \hat{f}_1 \mathbf{I} + \hat{f}_2 \mathbf{H} + \hat{f}_3 \mathbf{H}^2 + \hat{f}_4 \mathbf{E} + \hat{f}_6 (\mathbf{H}\mathbf{E} + \mathbf{E}\mathbf{H}) + \hat{f}_7 (\mathbf{H}^2 \mathbf{E} + \mathbf{E}\mathbf{H}^2) \quad (5.4.3)$$

seja nulo quando $\mathbf{E}$ for nulo é necessário que as funções escalares isotrópicas $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$ e $\hat{f}_3$ sejam da forma

$$\begin{cases} \hat{f}_1 = a_1 \text{tr} \mathbf{E} + a_2 \text{tr} \mathbf{H}\mathbf{E} + a_3 \text{tr} \mathbf{H}^2 \mathbf{E}, \\ \hat{f}_2 = d_1 \text{tr} \mathbf{E} + b_1 \text{tr} \mathbf{H}\mathbf{E} + b_2 \text{tr} \mathbf{H}^2 \mathbf{E}, \\ \hat{f}_3 = d_2 \text{tr} \mathbf{E} + d_3 \text{tr} \mathbf{H}\mathbf{E} + b_3 \text{tr} \mathbf{H}^2 \mathbf{E}, \end{cases} \quad (5.4.4)$$

onde $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, d_1, d_2, d_3$ são funções isotrópicas escalares de (5.2.6). Substituindo (5.5.4) em (5.5.1), tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & (a_1 \text{tr} \mathbf{E} + a_2 \text{tr} \mathbf{H}\mathbf{E} + a_3 \text{tr} \mathbf{H}^2 \mathbf{E}) \mathbf{I} + (d_1 \text{tr} \mathbf{E} + b_1 \text{tr} \mathbf{H}\mathbf{E} + b_2 \text{tr} \mathbf{H}^2 \mathbf{E}) \mathbf{H} + \\ & (d_2 \text{tr} \mathbf{E} + d_3 \text{tr} \mathbf{H}\mathbf{E} + b_3 \text{tr} \mathbf{H}^2 \mathbf{E}) \mathbf{H}^2 + 2c_1 \mathbf{E} + 2c_2 (\mathbf{H}\mathbf{E} + \mathbf{E}\mathbf{H}) + \\ & 2c_3 (\mathbf{H}^2 \mathbf{E} + \mathbf{E}\mathbf{H}^2), \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

com $\hat{f}_4 = 2c_1$, $\hat{f}_6 = 2c_2$ e $\hat{f}_7 = 2c_3$. Da propriedade de simetria $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$, $\mathbf{H}\mathbf{E} = \mathbf{E}^T \mathbf{H}^T$ e $\mathbf{E}\mathbf{H} = \mathbf{H}^T \mathbf{E}^T$, tem-se que a expressão (5.4.5) é equivalente à

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & (a_1 \text{tr} \mathbf{E} + a_2 \text{tr} \mathbf{H}\mathbf{E} + a_3 \text{tr} \mathbf{H}^2 \mathbf{E}) \mathbf{I} + (d_1 \text{tr} \mathbf{E} + b_1 \text{tr} \mathbf{H}\mathbf{E} + b_2 \text{tr} \mathbf{H}^2 \mathbf{E}) \mathbf{H} + \\ & (d_2 \text{tr} \mathbf{E} + d_3 \text{tr} \mathbf{H}\mathbf{E} + b_3 \text{tr} \mathbf{H}^2 \mathbf{E}) \mathbf{H}^2 + c_1 (\mathbf{E} + \mathbf{E}^T) + \\ & c_2 (\mathbf{H}\mathbf{E} + \mathbf{E}^T \mathbf{H}^T + \mathbf{E}\mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{E}^T) + \\ & c_3 (\mathbf{H}^2 \mathbf{E} + \mathbf{E}^T (\mathbf{H}^T)^2 + \mathbf{E}\mathbf{H}^2 + (\mathbf{H}^T)^2 \mathbf{E}^T). \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Em termos das componentes dos tensores envolvidos, a expressão (5.4.6) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} T_{ij} = & (a_1 E_{kk} + a_2 H_{km} E_{mk} + a_3 H_{kl} H_{lm} E_{mk}) \delta_{ij} + \\ & (d_1 E_{kk} + b_1 H_{km} E_{mk} + b_2 H_{kl} H_{lm} E_{mk}) H_{ij} + \\ & (d_2 E_{kk} + d_3 H_{km} E_{mk} + b_3 H_{kl} H_{lm} E_{mk}) H_{iq} H_{qj} + \\ & c_1 (E_{ij} + E_{ji}) + 2c_2 (H_{ik} E_{kj} + E_{jm} H_{mi} + E_{im} H_{mj} + H_{jk} E_{ki}) + \\ & 2c_3 (H_{iq} H_{qk} E_{kj} + E_{jm} H_{mr} H_{ri} + E_{im} H_{mr} H_{rj} + H_{jq} H_{qk} E_{ki}). \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

Utilizando o delta de Kronecker δ_{ij} , tem-se que (5.4.7) pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned}
T_{ij} = & (a_1 \mathbf{E}_{km} \delta_{km} + a_2 \mathbf{H}_{km} \mathbf{E}_{mk} + a_3 \mathbf{H}_{kl} \mathbf{H}_{lm} \mathbf{E}_{mk}) \delta_{ij} + \\
& (d_1 \mathbf{E}_{km} \delta_{km} + b_1 \mathbf{H}_{km} \mathbf{E}_{mk} + b_2 \mathbf{H}_{kl} \mathbf{H}_{lm} \mathbf{E}_{mk}) \mathbf{H}_{ij} + \\
& (d_2 \mathbf{E}_{km} \delta_{km} + d_3 \mathbf{H}_{km} \mathbf{E}_{mk} + b_3 \mathbf{H}_{kl} \mathbf{H}_{lm} \mathbf{E}_{mk}) \mathbf{H}_{iq} \mathbf{H}_{qj} + \\
& c_1 (\mathbf{E}_{km} \delta_{ik} \delta_{jm} + \mathbf{E}_{km} \delta_{jk} \delta_{im}) + c_2 (\mathbf{H}_{ik} \mathbf{E}_{km} \delta_{jm} + \mathbf{E}_{km} \mathbf{H}_{mi} \delta_{jk} + \\
& \mathbf{E}_{km} \mathbf{H}_{mj} \delta_{ik} + \mathbf{H}_{jk} \mathbf{E}_{km} \delta_{im}) + c_3 (\mathbf{H}_{iq} \mathbf{H}_{qk} \mathbf{E}_{km} \delta_{jm} + \\
& \mathbf{E}_{km} \mathbf{H}_{mr} \mathbf{H}_{ri} \delta_{jk} + \mathbf{E}_{km} \mathbf{H}_{mr} \mathbf{H}_{rj} \delta_{ik} + \mathbf{H}_{jq} \mathbf{H}_{qk} \mathbf{E}_{km} \delta_{im}).
\end{aligned} \tag{5.4.8}$$

Isolando o termo $\mathbf{E}_{km}$ em (5.4.8), obtém-se

$$\begin{aligned}
T_{ij} = & [(a_1 \delta_{km} + a_2 \mathbf{H}_{km} + a_3 \mathbf{H}_{kl} \mathbf{H}_{lm}) \delta_{ij} + (d_1 \delta_{km} + b_1 \mathbf{H}_{km} + b_2 \mathbf{H}_{kl} \mathbf{H}_{lm}) \mathbf{H}_{ij} + \\
& (d_2 \delta_{km} + d_3 \mathbf{H}_{km} + b_3 \mathbf{H}_{kl} \mathbf{H}_{lm}) \mathbf{H}_{iq} \mathbf{H}_{qj} + c_1 (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{jk} \delta_{im}) + \\
& c_2 (\mathbf{H}_{ik} \delta_{jm} + \mathbf{H}_{mi} \delta_{jk} + \mathbf{H}_{mj} \delta_{ik} + \mathbf{H}_{jk} \delta_{im}) + c_3 (\mathbf{H}_{iq} \mathbf{H}_{qk} \delta_{jm} + \mathbf{H}_{mr} \mathbf{H}_{ri} \delta_{jk} + \\
& \mathbf{H}_{mr} \mathbf{H}_{rj} \delta_{ik} + \mathbf{H}_{jq} \mathbf{H}_{qk} \delta_{im})] \mathbf{E}_{km}.
\end{aligned} \tag{5.4.9}$$

De (5.4.9) e (4.8.1), conclui-se que

$$\begin{aligned}
C_{ijkm} = & (a_1 \delta_{km} + a_2 \mathbf{H}_{km} + a_3 \mathbf{H}_{kl} \mathbf{H}_{lm}) \delta_{ij} + (d_1 \delta_{km} + b_1 \mathbf{H}_{km} + b_2 \mathbf{H}_{kl} \mathbf{H}_{lm}) \mathbf{H}_{ij} + \\
& (d_2 \delta_{km} + d_3 \mathbf{H}_{km} + b_3 \mathbf{H}_{kl} \mathbf{H}_{lm}) \mathbf{H}_{iq} \mathbf{H}_{qj} + c_1 (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{jk} \delta_{im}) + \\
& c_2 (\mathbf{H}_{ik} \delta_{jm} + \mathbf{H}_{mi} \delta_{jk} + \mathbf{H}_{mj} \delta_{ik} + \mathbf{H}_{jk} \delta_{im}) + c_3 (\mathbf{H}_{iq} \mathbf{H}_{qk} \delta_{jm} + \mathbf{H}_{mr} \mathbf{H}_{ri} \delta_{jk} + \\
& \mathbf{H}_{mr} \mathbf{H}_{rj} \delta_{ik} + \mathbf{H}_{jq} \mathbf{H}_{qk} \delta_{im}).
\end{aligned} \tag{5.4.10}$$

Para que (5.4.10) satisfaça as condições de simetria (4.8.2) do tensor de elasticidade, é necessário que

$$d_1 = a_2, \quad d_2 = a_3 \quad \text{e} \quad d_3 = b_2. \tag{5.4.11}$$

Substituindo (5.4.11) em (5.4.10), obtém-se (5.3.11)

5.5) Desenvolvimento do Modelo Proposto

5.5.1) Modelo Isotrópico

Admite-se que a função resposta mecânica (5.3.1) é uma função tensorial simétrica isotrópica de um tensor simétrico cuja representação é da forma (3.4.31) Linearizando (5.3.3) com respeito a $\mathbf{E}$ e considerando tensão residual nula, ou seja, $\mathbf{F}'(\nu, \mathbf{E}) = \mathbf{O}$ para $\mathbf{E} = \mathbf{O}$, tem-se que

$$\mathbf{T} = \hat{f}_1 \mathbf{I} + \hat{f}_2 \mathbf{E}, \tag{5.5.1}$$

onde $\hat{f}_1$ é uma função escalar isotrópica de

$$\nu, \text{tr} \mathbf{E}, \quad (5.5.2)$$

e $\hat{f}_2$ é uma função somente da fração volumétrica ν . Para que $\mathbf{F}^i$ seja nulo quando $\mathbf{E}$ for nulo, a função escalar isotrópicas $\hat{f}_1$ deve ser da forma

$$\hat{f}_1 = a_1 \text{tr} \mathbf{E}, \quad (5.5.3)$$

onde a_1 é uma função somente da fração volumétrica ν . Substituindo (5.5.3) em (5.5.2), tem-se

$$\mathbf{T} = (a_1 \text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2c_1 \mathbf{E} \quad (5.5.4)$$

com $\hat{f}_2 = 2c_1$.

Em termos das componentes dos tensores envolvidos, a expressão (5.5.4) pode ser reescrita na forma

$$T_{ij} = a_1 E_{kk} \delta_{ij} + c_1 (E_{ij} + E_{ji}) \quad (5.5.5)$$

Utilizando o delta de Kronecker δ_{ij} , tem-se de (5.5.5) que

$$T_{ij} = [a_1 \delta_{km} \delta_{ij} + c_1 (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{jk} \delta_{im})] E_{km} \quad (5.5.6)$$

Comparando (5.5.6) e (4.8.5) conclui-se que o tensor de elasticidade infinitesimal é dado por (5.3.5).

5.5.2) Modelo Transversalmente Isotrópico

Admite-se que a função resposta mecânica (5.3.7) é uma função tensorial simétrica transversalmente isotrópica de um tensor simétrico cuja representação é da forma (3.4.35). Linearizando (5.3.9) com respeito a $\mathbf{E}$ e considerando tensão residual nula, ou seja, $\mathbf{F}^i(\nu, \mathbf{E}) = \mathbf{O}$ para $\mathbf{E} = \mathbf{O}$, tem-se que

$$\mathbf{T} = \hat{f}_1 \mathbf{I} + \hat{f}_2 \mathbf{E} + \hat{f}_4 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \hat{f}_5 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E} \mathbf{e}_1 + \mathbf{E} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1), \quad (5.5.7)$$

sendo $\hat{f}_1$ e $\hat{f}_4$ funções escalares transversalmente isotrópicas de

$$\nu, \text{tr} \mathbf{E}, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_1, \quad (5.5.8)$$

onde $\hat{f}_2$ e $\hat{f}_5$ são funções somente da fração volumétrica ν , uma vez que $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$. Para que $\mathbf{F}^{ii}$ seja nulo quando $\mathbf{E}$ for nulo, a função escalares transversamente isotrópicas f_1 e f_4 deve ser da forma

$$\begin{aligned}\hat{f}_1 &= a_1 \text{tr} \mathbf{E} + a_2 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_1), \\ \hat{f}_4 &= b_1 \text{tr} \mathbf{E} + b_2 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_1),\end{aligned}\tag{5.5.9}$$

onde, a_1 , a_2 , b_1 e b_2 são funções da fração volumétrica ν . Substituindo (5.5.9) em (5.5.7) tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= (a_1 \text{tr} \mathbf{E} + a_2 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_1)) \mathbf{I} + 2c_1 \mathbf{E} + (b_1 \text{tr} \mathbf{E} + b_2 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_1)) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \\ &\quad 2c_2 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E} \mathbf{e}_1 + \mathbf{E} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\end{aligned}\tag{5.5.10}$$

com $\hat{f}_2 = 2c_1$ e $\hat{f}_5 = 2c_2$. Da propriedade de simetria $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$ e

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E} \mathbf{e}_1 + \mathbf{E} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 &= 2\mathbf{E}_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{E}_{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{E}_{13} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \\ &\quad \mathbf{E}_{12} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{E}_{13} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1,\end{aligned}\tag{5.5.11}$$

tem-se que a expressão (5.5.10) pode ser reescrita da forma

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= (a_1 \text{tr} \mathbf{E} + a_2 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_1)) \mathbf{I} + c_1 (\mathbf{E} + \mathbf{E}^T) + (b_1 \text{tr} \mathbf{E} + b_2 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_1)) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \\ &\quad c_2 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E} \mathbf{e}_1 + \mathbf{E} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1).\end{aligned}\tag{5.5.12}$$

Em termos das componentes dos tensores envolvidos, a expressão (5.5.12) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}T_{ij} &= (a_1 \mathbf{E}_{kk} + a_2 \mathbf{E}_{11}) \delta_{ij} + c_1 (\mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}) + (b_1 \mathbf{E}_{kk} + b_2 \mathbf{E}_{11}) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \\ &\quad 2c_2 (2\mathbf{E}_{11} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \mathbf{E}_{12} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)_{ij} + \mathbf{E}_{13} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3)_{ij} + \mathbf{E}_{12} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \\ &\quad \mathbf{E}_{13} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij})\end{aligned}\tag{5.5.13}$$

Utilizando o delta de Kronecker δ_{ij} e isolando o termo $\mathbf{E}_{km}$, tem-se de (5.5.13) que

$$\begin{aligned}T_{ij} &= [(a_1 \delta_{km} + a_2 \delta_{ik} \delta_{1m}) \delta_{ij} + c_1 (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{jk} \delta_{im}) + \\ &\quad (b_1 \delta_{km} + b_2 \delta_{1k} \delta_{1m}) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + 2c_2 (2\delta_{1k} \delta_{1m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \\ &\quad \delta_{1k} \delta_{2m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)_{ij} + \delta_{1k} \delta_{3m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3)_{ij} + \delta_{1k} \delta_{2m} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \\ &\quad \delta_{1k} \delta_{3m} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij})] \mathbf{E}_{km}\end{aligned}\tag{5.5.14}$$

Comparando (5.5.14) e (4.8.6) conclui-se que o tensor de elasticidade infinitesimal é dado por (5.3.11).

5.5.3) Modelo Ortotrópico

Admite-se que a função resposta mecânica (5.3.13) é uma função tensorial simétrica ortotrópica de um tensor simétrico cuja representação é da forma (3.4.37). Linearizando (5.3.15) com respeito a $\mathbf{E}$ e considerando tensão residual nula, ou seja, $\mathbf{F}^o(\nu, \mathbf{E}) = \mathbf{O}$ para $\mathbf{E} = \mathbf{O}$, tem-se que

$$\mathbf{T} = \hat{f}_1 \mathbf{I} + \hat{f}_2 \mathbf{E} + \hat{f}_4 \mathbf{M} + \hat{f}_5 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \hat{f}_6 (\mathbf{ME} + \mathbf{EM}) + \hat{f}_7 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{EE}_1 + \mathbf{EE}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + \hat{f}_8 \mathbf{MEe}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (5.5.15)$$

com $\hat{f}_1$, $\hat{f}_4$, $\hat{f}_5$ são funções escalares ortotrópicas de

$$\nu, \text{tr } \mathbf{E}, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{EE}_1, \text{tr } \mathbf{ME} \quad (5.5.16)$$

e $\hat{f}_2$, $\hat{f}_6$, $\hat{f}_7$ e $\hat{f}_8$ são funções escalares somente da fração volumétrica ν . Para que $\mathbf{F}^o$ seja nulo quando $\mathbf{E}$ for nulo, as funções escalares ortotrópicas $\hat{f}_1$, $\hat{f}_4$ e $\hat{f}_5$ devem ser da forma

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 &= a_1 \text{tr } \mathbf{E} + a_2 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{EE}_1) + a_3 (\text{tr } \mathbf{ME}), \\ \hat{f}_4 &= d_1 \text{tr } \mathbf{E} + b_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{EE}_1) + b_2 (\text{tr } \mathbf{ME}), \\ \hat{f}_5 &= d_2 \text{tr } \mathbf{E} + d_3 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{EE}_1) + b_3 (\text{tr } \mathbf{ME}), \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

onde, a_1 , a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , b_3 , d_1 , d_2 e d_3 são funções da fração volumétrica ν . Substituindo (5.5.17) em (5.5.15) tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= (a_1 \text{tr } \mathbf{E} + a_2 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{EE}_1) + a_3 (\text{tr } \mathbf{ME})) \mathbf{I} + 2c_1 \mathbf{E} + \\ &\quad (d_1 \text{tr } \mathbf{E} + b_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{EE}_1) + b_2 (\text{tr } \mathbf{ME})) \mathbf{M} + \\ &\quad (d_2 \text{tr } \mathbf{E} + d_3 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{EE}_1) + b_3 (\text{tr } \mathbf{ME})) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \\ &\quad 2c_2 (\mathbf{ME} + \mathbf{EM}) + 2c_3 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{EE}_1 + \mathbf{EE}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + 2c_4 \mathbf{MEe}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

com $\hat{f}_2 = 2c_1$ e $\hat{f}_5 = 2c_2$. Considerando a propriedade de simetria $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$, tem-se que,

$$\begin{aligned} \mathbf{MEe}_1 \otimes \mathbf{e}_1 &= 2\mathbf{M}_{1k} \mathbf{E}_{k1} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{M}_{1k} \mathbf{E}_{k2} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{M}_{1k} \mathbf{E}_{k3} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + \\ &\quad \mathbf{M}_{1k} \mathbf{E}_{k1} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{M}_{1k} \mathbf{E}_{k2} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{M}_{1k} \mathbf{E}_{k3} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (5.5.19)$$

substituindo (5.5.19) em (5.5.18) e reescrevendo a expressão resultante, em termos das componentes dos tensores envolvidos, obtêm-se que

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} = & (a_1 \mathbf{E}_{kk} + a_2 \mathbf{E}_{11} + a_3 \mathbf{M}_{km} \mathbf{E}_{mk}) \delta_{ij} + \\
& c_1 (\mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}) + \\
& (d_1 \mathbf{E}_{kk} + b_1 \mathbf{E}_{11} + b_2 \mathbf{M}_{km} \mathbf{E}_{mk}) \mathbf{M}_{ij} + \\
& (d_2 \mathbf{E}_{kk} + d_3 \mathbf{E}_{11} + b_3 \mathbf{M}_{km} \mathbf{E}_{mk}) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \\
& 2c_2 (\mathbf{M}_{ik} \mathbf{E}_{kj} + \mathbf{E}_{ik} \mathbf{M}_{kj}) + \\
& 2c_3 (2\mathbf{E}_{11} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \mathbf{E}_{12} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)_{ij} + \\
& \mathbf{E}_{13} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3)_{ij} + \mathbf{E}_{12} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \mathbf{E}_{13} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij}) + \\
& 2c_4 (2\mathbf{M}_{1k} \mathbf{E}_{k1} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \mathbf{M}_{1k} \mathbf{E}_{k2} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \\
& \mathbf{M}_{1k} \mathbf{E}_{k3} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \mathbf{M}_{1k} \mathbf{E}_{k2} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)_{ij} + \\
& \mathbf{M}_{1k} \mathbf{E}_{k3} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)_{ij}).
\end{aligned} \tag{5.6.20}$$

Utilizando o delta de Kronecker δ_{ij} e isolando o termo $\mathbf{E}_{km}$ tem-se de (5.5.20) que

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} = & [(a_1 \delta_{km} + a_2 \delta_{1k} \delta_{1m} + a_3 \mathbf{M}_{km}) \delta_{ij} + c_1 (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{jk} \delta_{im}) + \\
& (d_1 \delta_{km} + b_1 \delta_{1k} \delta_{1m} + b_2 \mathbf{M}_{km}) \mathbf{M}_{ij} + (d_2 \delta_{km} + d_3 \delta_{1k} \delta_{1m} + b_3 \mathbf{M}_{km}) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \\
& 2c_2 (\mathbf{M}_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \mathbf{M}_{kj}) + \\
& 2c_3 (2\delta_{1k} \delta_{1m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \delta_{1k} \delta_{2m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)_{ij} + \delta_{1k} \delta_{3m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3)_{ij} + \\
& \delta_{1k} \delta_{2m} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \delta_{1k} \delta_{3m} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij}) + \\
& 2c_4 (2\mathbf{M}_{1k} \delta_{1m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \mathbf{M}_{1k} \delta_{2m} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \mathbf{M}_{1k} \delta_{3m} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \\
& \mathbf{M}_{1k} \delta_{2m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)_{ij} + \mathbf{M}_{1k} \delta_{3m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3)_{ij})] \mathbf{E}_{km}.
\end{aligned} \tag{5.5.21}$$

Comparando (5.5.21) a (4.8.7) conclui-se que

$$\begin{aligned}
C_{ijkm} = & (a_1 \delta_{km} + a_2 \delta_{1k} \delta_{1m} + a_3 \mathbf{M}_{km}) \delta_{ij} + c_1 (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{jk} \delta_{im}) + \\
& (d_1 \delta_{km} + b_1 \delta_{1k} \delta_{1m} + b_2 \mathbf{M}_{km}) \mathbf{M}_{ij} + (d_2 \delta_{km} + d_3 \delta_{1k} \delta_{1m} + b_3 \mathbf{M}_{km}) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \\
& 2c_2 (\mathbf{M}_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \mathbf{M}_{kj}) + \\
& 2c_3 (2\delta_{1k} \delta_{1m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \delta_{1k} \delta_{2m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)_{ij} + \delta_{1k} \delta_{3m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3)_{ij} + \\
& \delta_{1k} \delta_{2m} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \delta_{1k} \delta_{3m} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij}) + \\
& 2c_4 (2\mathbf{M}_{1k} \delta_{1m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \mathbf{M}_{1k} \delta_{2m} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \mathbf{M}_{1k} \delta_{3m} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1)_{ij} + \\
& \mathbf{M}_{1k} \delta_{2m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)_{ij} + \mathbf{M}_{1k} \delta_{3m} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3)_{ij}).
\end{aligned} \tag{5.5.22}$$

Para que (5.6.22) satisfaça a condição de simetria do tensor de elasticidade (4.8.2) é necessário que

$$a_2 = 0, \quad b_1 = 0, \quad d_2 = 0, \quad b_3 = 0, \quad c_4 = 0, \quad d_1 = a_3, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = a_3 \tag{5.5.23}$$

conforme (5.3.17).

Substituindo (5.5.23) em (5.5.22), obtém-se (5.3.17).

5.6) Conclusão

As componentes (5.2.8), (5.2.9), e (5.2.10) do tensor de elasticidade proposto por Cowin que descrevem o comportamento mecânico do meio poroso em uma amostra com simetria isotrópica, transversalmente isotrópica, e ortotrópica, respectivamente, dependem da fração volumétrica, das componentes do tensor $\mathbf{H}$ e dos escalares $\text{tr } \mathbf{H}$, $\text{tr } \mathbf{H}^2$ e $\text{tr } \mathbf{H}^3$, sendo $\mathbf{H}$ o tensor que caracteriza a simetria do arranjo geométrico do meio poroso. O tensor $\mathbf{H}$ não é uma medida local, pois é obtido pelo cálculo de média. Sendo assim, as componentes elásticas (5.2.8), (5.2.9), e (5.2.10) do tensor de elasticidade que descrevem o comportamento mecânico do meio poroso em uma amostra com simetria isotrópica, transversalmente isotrópica, e ortotrópica, respectivamente, não descrevem o comportamento local do meio poroso em uma amostra.

As componentes do tensor de elasticidade sugeridos neste trabalho que descrevem o comportamento do meio poroso em uma amostra com simetria isotrópica, (5.3.6), transversalmente isotrópica, (5.3.11), e ortotrópica (5.3.18), dependem somente da fração volumétrica. Além disso, as componentes dos tensores de elasticidades (5.3.5), (5.3.11) e (5.3.18) possuem menos variáveis a serem determinadas se comparada às componentes dos tensores de elasticidade (5.2.8), (5.2.9) e (5.2.10), respectivamente, propostos por Cowin (1985).

Referência Bibliográficas¹

AGUIAR, A. R. **Simulação numérica do fenômeno da estrição em um material elástico**. Dissertação, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontífice Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1989.

ARAUJO D. V.; OLIVEIRA J. H.; BRACCO O. L. Custo da fratura osteoporótica de fêmur no Sistema Suplementar de Saúde Brasileiro. **Arquivos Brasileiros de Endocrinologia & Metabologia**, v. 49, p. 897, 2005.

ATHANASIOU, K. A.; ZHU, C. F.; LANCTOR, D. R.; AGRAWAL, G.M.WANG, X. **Tissue Engineering**. Mary nn Liebert, Inc, 2000.

AVANCINI, E. B.; FAVARETTO, J. A. **Biologia: uma abordagem evolutiva e ecológica**. São Paulo: Moderna, 1997.

BOEHLER J. P. On irreducible representations for isotropic scalar functions. **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, v. 57, p. 323-327, 1977.

BROWNER W. S.; PRESSMAN A. R.; NEVITT M. C.; CUMMINGS S. R.; Mortality following fractures in older women. The study of osteoporotic fractures. **Archives of internal medicine**, v.156, p.1521-1525, 1996.

CARTER D. R.; HAYES, W. C. The compressive behavior of bone as a two-phase porous structure. **Journal of Bone and Joint Surgery**, v. 59, p. 954 – 962, 1977.

CIARELLI M. J.; GOLDSTEIN S. A.; KUHN J. L.; CODY, D. D.; BROWN, M. B. Evaluation of orthogonal mechanical properties and density of human trabecular bone from the major metaphyseal regions with materials testing and computed tomography. **Journal of Orthopaedic Research**, v. 9, p. 674 – 682, 1991.

COMPSTON, J. E. Alimentary Pharmacology Therapeutics. **Blackwell Science Ltd.**, p. 237–250, 1995.

COOPER C. Epidemiology of osteoporosis. **Osteoporosis International**, v. 9 p. 2–8, 1999.

COWIN S. C. The relationship between the elasticity tensor and the fabric tensor. **Mechanics of Materials**, v.4, p. 137-47, 1985.

¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

- COWIN, S. C. Microstructural continuum models for granular materials, in: COWIN, S. C. M. S. eds., *Continuum Mechanical and Statistical Approaches in the Mechanics of Granular Materials*, Gakujutsu Bunken Fukyu-Kai, Tokyo, 162, (1978).
- CUMMINGS, S. R.; MELTON, L. J. Epidemiology and outcomes of osteoporotic fracture. **Lancet**, v. 359, p. 1761-1767, 2002.
- CURREY, J. D. The mechanical consequences of variation in the mineral content of bone. **Journal of Biomechanics**, v. 2, p. 1 – 11, 1969.
- FELDKAMP L. A., GODSTEIN, S. A., PARFITT, A. M., JESION, G., KLEEREKOPER, M.. The direct examination of three-dimensional bone architecture in vitro by computed tomography. **Journal of Bone and Mineral Research**, p. 3 – 11, 1989.
- FONSECA, J. S. O. Mecânica dos Sólidos para Engenharia Mecânica. **Apostila**, 2002. Disponível em: <http://www-gmap.mecanica.ufrgs.br/html/sumulas/mec077/mecsol.pdf>.
- FRANCIS, R. M.; SUTCLIFFE, A. M.; SCANE, A. C. Pathogenesis of osteoporosis. In: STEVENSON, J.C.; LINDSAY, R. **Osteoporosis**. Chapman & Hall Medical, 1998.
- FRITTON S. P.; KENNETH J. M.; RUBIN C. T. Quantifying the strain history of bone: spatial uniformity and self-similarity of low-magnitude strains. **Journal Biomechanical**. v. 33, p. 317-25, 2000.
- GOLDSTEIN, S. A.; WILSON, D. L.; SONSTEGARD, D. A.; MATTHEWS, L. S. The Mechanical properties of human trabecular bone as a function of metaphyseal location. **Journal of Biomechanics**, v. 16, p. 959 – 969, 1983.
- GOULET R. W.; GOLDSTEIN S. A.; CIABELLI M. J.; KUHN J. L.; BROWN M. B.; FELDKAMP L. A. The relationship between the structural and orthogonal compressive properties of trabecular bone, **Journal of Biomechanics**, v. 27, p. 375-389, 1994.
- GUO X. E.; KIM C. H. Mechanical consequence of trabecular bone loss and its treatment: a three-dimensional model simulation. **Bone**, v. 30, p. 404-11, 2002.
- GURTIN, M.E. (1981), **An introduction to continuum mechanics**. Academic Press, 1981.
- HAMED, E.; JASIUK, I. Elastic modeling of bone at nanostructural level, **Materials Science and Engineering**, v. 73, p. 7-49, 2012.
- JOHNELL O.; KANIS J. A. An estimate of the worldwide prevalence, mortality and disability associated with hip fracture. **Osteoporosis International**. v.15, p. 897-902, 2004.

- JOHNELL, O.; KANIS J. A. An estimate of the worldwide prevalence and disability associated with osteoporotic fractures. **Osteoporosis International**, v. 17, p. 1726-1733, 2006.
- JUNQUEIRA, L. C. U.; CARNEIRO, J. **Histologia Básica**. Guanabara Koogan, v. 10, 2004.
- KANIS J.A., JOHNELL O. Requirements for DXA for the management of osteoporosis in Europe. **Osteoporosis International**. v.16, p.229-238, 2004.
- KLOTZBUECHER C.M.; ROSS P.D.; LANDSMAN P.B. Patients with prior fractures have an increased risk of future fractures: a summary of the literature and statistical synthesis. **Journal of Bone and Mineral Research**. v. 15, p. 721-739, 2000.
- KRUKOWSKI, M. Hard and soft connective tissue growth and repair in response to charged surfaces. In: DAVIES, J.E.; SHELTON, R.M. **The bone - Biomaterial interface**. Toronto, University of Toronto Press, p. 275-284, 1995.
- KORSGAARD, J. On the representations of two-dimensional isotropic functions. **International Journal of Engineering Science**, v. 28, p. 653-662, 1990.
- LEWIECKI, E. M; BORGES, J. L. C. Bone density testing in clinical practice. **Arquivos Brasileiros de Endocrinologia & Metabologia**. v. 50, p. 586-595, 2006.
- LIAN, J. B. STEIN, G. S. Osteoblast Biology. In: MARCUS, R; FELDMAN, D.; KELSEY, J. **Journal of Osteoporosis**. San Diego: Academic Press. p. 23-59, 1996.
- LIU, I. S. On representations of anisotropic invariants. **International Journal of Engineering Science**, v. 20, p. 1099-1109, 1982.
- MARTIN, B. R.; BURR, D. B.; SHARKEY, N. A. **Skeletal Tissue Mechanics**. Springer, New York, 1998.
- MARTIN, T. J.; DEMPSTER, D. W. Bone structure and Cellular Activity. In: STEVENSON, J. C.; LINDSAY, R. **Osteoporosis**. Chapman & Hall Medical, p. 1-28, 1998.
- MELTON L. J.; GABRIEL S. E.; CROWSON C. S.; TOSTESON A. N. A.; JOHNELL O.; KANIS J. A. Cost-equivalence of different osteoporotic fractures (Brief record). **Osteoporosis International**. v.14(15), p. 383-388, 2003.
- MOTA, N. L.; CASTRO JÚNIOR, A. F.; CASTRO, B. K.; SILVEIRA NETO, L. L.; AARESTRUP, B. J. V. (2003). Embriologia e histofisiologia do tecido ósseo: revisão de literatura e bases histofisiológicas das principais doenças ósseas metabólicas. **Boletim do Centro de Biologia da Reprodução**. v. 27, p. 27-32, 2008.

NIH. Consensus Development Panel on Osteoporosis Prevention, Diagnosis and Therapy. Osteoporosis prevention, diagnosis and therapy. **The Journal of the American Medical Association**. v. 285, p.785-795, 2001.

NOLL W. Representation of certain isotropic tensor functions. **Archiv der Mathematik**, p. 87-90, 1970.

ODGAARD, A. Three-dimensional methods for quantification of cancellous bone. **Bone**, v. 20, p. 315-328, 1997.

PAPAIIOANNOU A.; KENNEDY C. C.; IOANNIDIS G.; BROWN J. P.; PATHAK A.; HANLEY D. A.; JOSSE R. J.; SEBALDT R.; OLSZYNSKI W. P.; TENENHOUSE A.; MURRAY T. M.; PETRIE A.; GOLDSMITH C. H.; ADACHI J. D.; Determinants of Health-Related Quality of Life in Women with Vertebral Fractures. **Osteoporosis International**, p.355-363, 2006.

PARFITT, A. M.; C. H. MATTHEWS; A. R. VILLANUEVA; M. KLEEREKOPER, B. FRAME; RAO, D. S. Relationships between surface, volume, and thickness of iliac trabecular bone in aging and in osteoporosis. Implications for the microanatomic and cellular mechanisms of bone loss. **Journal. of Clinical Investigaion**. v. 72, p. 1396–1409, 1983.

PENNISI S., TROVATO M. 1987 On the irreducibility of Professor G. F. Smith's representations for isotropic functions. **International Journal of Engineering Science**, v. 25, p. 1059-1065, 1987.

REINER, M. A mathematical theory of dilatancy. **American Journal of Matehmatics**, v. 67, p. 350 – 362, 1945.

RICE, J. C.; COWIN, S. C.; BOWMAN, J. A. On the dependence of elasticity and strength of cancellous bone on apparent density. **Journal of Biomechanics**, v. 21, p. 155 – 168, 1988.

RIGGS B. L; MELTON L. J. 3rd. The worldwide problem of osteoporosis: insights afforded by epidemiology. **Bone**. p. 505-511, 1995.

RIVLIN, R. S. Large elastic deformations of isotropic materials. IV. Futher Developments of the General Theory. **Philosophical Transactions of the Royal Society**, p. 379-397, 1948.

RIVLIN, R.S. Further remarks on stress-deformation relations for isotropic materials. **Journal of Rational Mechanics and Analysis**, v. 4, p. 681-702, 1955 (b).

RIVLIN, R. S.; ERICKSEN J. L. Stress-deformation relations for isotropic materials. **Journal of Rational Mechanics and Analysis**, v. 4, p. 323-425, 1955.

RODRIGUES, M. E. S, Análise do risco de fratura óssea por ultrasonometria e ensaio mecânico de compressão. **Dissertação Mestrado**. Escola de Engenharia de São Carlos/Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto/ Instituto de Química de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2003.

ROBLING, A. G., CASTILLO, A. B., TURNER C. H. Biomechanical and Molecular regulation of bone remodeling. **Annual Review Biomedical Engineering**. v. 8, p. 455-498, 2006.

RUBIN C. T., LANYON L.E. Regulation of bone formation by applied dynamic loads. **The Journal of Bone & Joint Surgery**. v. 66, p. 271-280, 1984.

SILVA, A. M. H., **Análise morfométrica 2D e 3D de amostras de osso trabecular utilizando microtomografia tridimensional por raio-X**, 2009. Dissertação (Mestrado em Ciências com Ênfase em Bioengenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos/ Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto / Instituto de Química de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

SMITH G. F. On the minimality of integrity bases for symmetric 3×3 matrices. **Archives for Rational Mechanics and Analysis**, Anal, v. 5, p. 382-389, 1960.

SMITH G. F. On isotropic integrity bases. **Archives for Rational Mechanics and Analysis**, v. 1, p. 282-292, 1965.

SMITH G. F. On a fundamental error in two papers of C.-C. Wang “On representations for isotropic functions, parts I and II”. **Archives for Rational Mechanics and Analysis**, v. 3, p. 161-165, 1965.

SMITH G. F. On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors. **International Journal of Engineering Science**, p. 899-916, 1971.

SPENCER A. J. M., RIVLIN R. S., Theory of matrix polynomials and its application to the mechanics of isotropic continua, **Archives for Rational Mechanics and Analysis**, v. 2, p. 309-336, 1958.

SPENCER A. J. M., RIVLIN R. S., Further Results in theory of matrix polynomials and its Application to the Mechanics of Isotropic Continua, **Archives for Rational Mechanics and Analysis**, p. 314-330, 1959.

SPENCER A.; RIVLIN J. M. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors, Part 1. **Archives for Rational Mechanics and Analysis**, v. 9, p. 45-63 ,1962.

SPENCER, A. J. M., Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors, Part 2. **Archives for Rational Mechanics and Analysis**. 18, v. 1, 51-82, 1964.

TRUEDELLE, C. The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics. **Journal of Rational Mechanics and Analysis**, p. 593-616, 1953.

TRUEDELLE, C.; NOLL, W. (1965), **The non-linear field theories of mechanics**. Berlin, Springer-Verlag, 2003.

UNITED NATIONS (UN). (2008), **World Population Prospects: The 2008 Revision** Population Database, Department of Economic and Social Affairs, 2008

VOIGT, W. **Lehrbuch der Krystallophysik**. Teubner, Leipzig. 1910.

YOU L, COWIN S. C., SCHAFFLER M. B., WEINBAUM S. A model for strain amplification in the actin cytoskeleton of osteocytes due to fluid drag on pericellular matrix. **Journal Biomechanical**. v. 34, p. 1375-86, 2001.

WALDIR, L. R.; ANTONIO, C. A. S.; DENIS, X. B.; FELIX, C. R. Um Sistema Computacional Baseado no Processamento de Imagens Tomográficas para Estudo da Estrutura Trabecular. **VII Workshop de Informática Médica – WIM**. p. 156-165, 2007.

WANG C. –C. On representations for isotropic functions, part I. **Archives for Rational Mechanics and Analysis**, p. 250-268, 1969.

WANG C. –C. On representations for isotropic functions, part II. **Archives for Rational Mechanics and Analysis**, 4, p. 268-287, 1969.

WANG C. –C. A new representation theorem for isotropic functions: An answer to Professor G. F. Smith's criticism of my papers on representations for isotropic functions. **Archives for Rational Mechanics and Analysis**, p. 250–268, 1970.

WANG C. –C. Corregedum. **Archives for Rational Mechanics and Analysis**, p. 392–395, 1971.

WHITEHOUSE, W. J. The Quantitative Morphology of Anisotropic Trabecular Bone. **Journal of Microscopy**, v. 101, p. 153-168, 1974.

ZHENG Q.-S. On the representations for isotropic vector-valued, symmetric tensor-valued and skew-symmetric tensor-valued function. **International Journal of Engineering Science**, v. 31, p. 1013-1024, 1993 (a).

ZHENG Q.-S. On transversely isotropic, orthotropic and relative isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors. Part I. Two dimensional orthotropic and relative isotropic functions and three dimensional relative isotropic functions. **International Journal of Engineering Science**, v. 31, p. 1399-1409, 1993.