Jesulino Bispo Dos Santos

***SENSOR DE FRENTE DE ONDA
PARA USO OFTALMOLÓGICO***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação Interunidades em Bioengenharia - Escola de Engenharia de São Carlos, Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto e Instituto de Química de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Bioengenharia.

Orientador: Dr. Orivaldo Lopes Da Silva

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

São Carlos

2004

**Programa de Pós-Graduação Interunidades em Bioengenharia
EESC / FMRP / IQSC**

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
DO ALUNO JESULINO BISPO DOS SANTOS, APRESENTADA AO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO INTERUNIDADES EM BIOENGENHARIA
EESC / FMRP / IQSC – USP NO DIA 16 DE ABRIL DE 2004.

DR. ORIVALDO LOPES DA SILVA
Escola de Engenharia de São Carlos - USP

PROF. DR. JOSÉ CARLOS PEREIRA
Escola de Engenharia de São Carlos - USP

PROF. DR. JARBAS CAIADO DE CASTRO NETO
Instituto de Física de São Carlos - USP

Sumário

Agradecimentos

Resumo

Abstract

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1	Introdução	15
2	Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas	18
2.1	Introdução	18
2.2	Equações de Maxwell	19
2.3	Onda Eletromagnética	21
2.4	Função de Onda	22
3	Fundamentos de Óptica Geométrica	24
3.1	Introdução	24
3.2	Frente de Onda e Caminho Óptico	25
3.3	Bases da Óptica Geométrica	25
3.4	Reflexão e Refração	27
3.5	Ação de Um Dióptro Sobre a Frente de Onda	29
4	Teoria Geométrica das Aberrações	31

4.1	Introdução	31
4.2	Aberrações de Terceira Ordem	32
4.2.1	Aberração Esférica	35
4.2.2	Coma	36
4.2.3	Astigmatismo	37
4.2.4	Curvatura de Campo	38
4.2.5	Distorção	39
4.3	Polinômios de Zernike	40
4.4	Métodos de Obtenção das Aberrações	42
4.4.1	Interferômetro de Deslocamento Lateral	42
4.4.2	Interferômetro de Ponto Difrativo	44
4.4.3	Teste de Hartmann	46
4.4.4	Teste de Foucault	47
5	O Método de Hartmann	48
5.1	Introdução	48
5.2	Fundamentos Sobre o Sensor Hartmann-Shack	49
5.2.1	O Sensor Hartmann-Shack	49
5.2.2	Geração e Aquisição dos Dados	51
5.2.3	Resolução	52
5.2.4	Efeito da Magnificação	54
5.3	Reconstrução da Frente de Onda	55
5.3.1	O Método Zonal	55
5.3.2	O Método Modal	57
5.3.3	Propagação dos Erros	59
5.4	Convertendo Aberrações em Dados Optométricos	60
6	O Olho Humano	62

6.1	Introdução	62
6.2	Estrutura Biológica do Olho Humano	63
6.2.1	Córnea	64
6.2.2	Humor Aquoso	65
6.2.3	Cristalino	65
6.2.4	Humor Vítreo	65
6.2.5	Esclera	65
6.2.6	Retina	66
6.3	Estrutura Óptica do Olho Humano	68
6.3.1	Eixo Óptico e Eixo Visual	69
6.3.2	Campo Visual	70
6.3.3	Acuidade Visual	71
6.3.4	Adaptação e Sensibilidade	73
7	Materiais e Métodos	74
7.1	Introdução	74
7.2	O Analisador de Frente de Onda	75
7.3	Princípio de Funcionamento	77
7.4	O Sistema Óptico	78
7.5	O Software	81
7.5.1	Módulo de Controle e Aquisição de Dados	82
7.5.2	Módulo de Processamento da Imagem	83
7.5.3	Módulo de Cálculo das Aberrações	84
7.5.4	Módulo de Apresentação dos Resultados	85
8	Resultados	86
8.1	Introdução	86
8.2	Caracterização do Ruído do CCD	87

8.3	Caracterização do Protótipo de AFO	88
8.4	Testes Com Lentes Oftalmológicas	91
8.5	Testes Com Olho Artificial	102
9	Conclusões	105
	Referências	108

Agradecimentos

Com sua habitual ironia, John Kenneth Galbraith diz suspeitar que muitos autores expiam-se da sua má conduta social ou familiar dirigindo às pessoas ofendidas falsos elogios por meio da seção de agradecimentos das suas obras. Mesmo tendo a firme convicção de não pertencer a esta classe, devo agradecer a muitas pessoas que por dever profissional ou simples generosidade contribuíram para a execução deste trabalho. Agradeço as secretárias do departamento de Bioengenharia, Janete Ferreira R. Dos Santos e Melaine P. Fidelix, conhecedoras que são dos *Regulamentos da Universidade*, me guiaram e me protegeram das surpresas reservadas àqueles que os infringem. Aos meus companheiros de laboratório Alexandre Bianchi, Antonio C. Romão, Fátima M. M. Yasuoka, Francisco Scanavinno e Luis A. V. de Carvalho que me ajudaram a optar por uma das muitas possibilidades de desenvolvimento deste trabalho. Aos competentes funcionários da oficina mecânica do IFSC, aqui representados por Carlos N. Gonçalves e Leandro de Oliveira, que transformaram linhas mal desenhadas em componentes mecânicos de precisão. Aos professores Jarbas Caiado de Castro do IFSC e José Carlos Pereira da EESC por generosamente dispenderem tempo e energia para ler e avaliar uma versão prévia deste trabalho. Aos meus amigos e colaboradores Nicola Bloise e Tatiana F.P. Taveira que se desdobraram para transformar num dispositivo coerente e num programa de computador funcional, a imensa quantidade de rabiscos que produzi sob a ilusão de conterem as ‘melhores soluções’, mas que as vezes não passavam de simples rabiscos; ora desprovidos de qualquer apelo estético, ora desprovidos de qualquer sentido matemático. Ao meu orientador Dr. Orivaldo L. da Silva que pacientemente e com seus conhecimentos multidisciplinares esclareceu-me inúmeras dúvidas. Agradeço-o também pela generosidade e pelo empenho com que contribuiu para sucesso deste projeto.

Se no futuro alguma parte deste trabalho servir de base para novos desenvolvimentos ou para novas utilizações, atribuo e dedico este sucesso às pessoas aqui citadas.

Resumo

SANTOS, J. B. (2004). Sensor de Frente de Onda para Uso Oftalmológico. São Carlos, 2004. 109p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Este trabalho descreve os passos envolvidos no desenvolvimento de um protótipo de aberroscópio para uso oftalmológico. Este instrumento faz incidir no fundo do olho humano um feixe luminoso de baixa potência e amostra, por meio do método de *Hartmann*, as frentes de onda da luz espalhada. A partir dos dados coletados, a forma das frentes de onda são reconstituídas e as aberrações eventualmente existentes no olho são calculadas e representadas por intermédio dos polinômios de *Zernike*. Aqui são expostos os fundamentos deste método, algumas das suas propriedades e limitações. Também é mostrada a caracterização funcional do protótipo desenvolvido, testando-o com elementos ópticos de propriedades conhecidas.

Palavras-chave: Instrumentação Oftalmológica, Instrumentação Médica, Frente de Onda, Sensor de Fase, Sensor Hartmann-Shack, Aberroscópio, Óptica Aplicada, Engenharia Biomédica.

Abstract

SANTOS, J. B. (2004). Wavefront Sensor For Ophthalmological Use. São Carlos, 2004. 109p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

This work describes the steps involved in the aberroscope prototype development for ophthalmological use. This instrument injects inside the human eye a low power light beam and sample, by Hartmann method, the wavefronts produced by ocular fundus light scattering. From collected data, the wavefront shape is reconstructed and the eye aberrations that eventually existent are calculated and adjusted by *Zernike* polynomials. Are discussed the method foundations, some of properties and limitations. Also the functional characterization of the developed prototype is shown, by testing it with optical elements of known properties.

Keywords: Ophthalmological Instrumentation, Medical Instrumentation, Wavefront, Phase Sensor, Hartmann-Shack Sensor, Aberroscope, Applied Optics, Biomedical Engineering

Lista de Figuras

2.1	Propagação da Onda Eletromagnética	23
3.1	Reflexão e refração de um raio luminoso	27
3.2	Refração de uma frente de onda	28
3.3	Ação de um dioptro sobre uma frente de onda	29
4.1	Esquema simplificado de um sistema óptico	32
4.2	Parâmetros necessários para computar as aberrações	33
4.3	Coordenadas pupilares	33
4.4	Ação da aberração esférica sobre a frente de onda	35
4.5	Efeito da aberração esférica	35
4.6	Ação da coma sobre a frente de onda	36
4.7	Efeito da coma sobre um feixe luminoso	36
4.8	Ação do astigmatismo sobre a frente de onda	37
4.9	Planos focais de um sistema com astigmatismo	37
4.10	Efeito da curvatura de campo	38
4.11	Ação da curvatura de campo sobre a frente de onda	38
4.12	Efeito da distorção	39
4.13	Placa de vidro usada como interferômetro	42
4.14	Deslocamento produzido nos feixes refletidos	43
4.15	Franjas de interferência	43
4.16	Esquema do interferômetro de ponto difrativo	44
4.17	Princípio de funcionamento	45
4.18	Franjas de interferência	45

4.19	Esquema do teste de Hartmann	46
4.20	Esquema do teste de Foucault	47
5.1	Esquema do sensor Hartmann-Shack	49
5.2	Aberrações representada por uma inclinação na frente de onda	50
5.3	Amostragem da frente de onda plana	51
5.4	Amostragem da frente de onda deformada	51
5.5	Parâmetros para computar a resolução do sensor HS	52
5.6	Magnificação produzida por um sistema óptico	54
5.7	Configuração de Hudgin	55
5.8	Configuração de Southwell	55
5.9	Parâmetros para computar os erros diópticos	60
6.1	Esquema geral do olho	63
6.2	Esquema geral da córnea	64
6.3	Esquema geral da retina	66
6.4	Distribuição de cones e bastonetes	67
6.5	Medidas oculares médias	68
6.6	Eixos oculares	69
6.7	Campo visual médio	70
6.8	Carta de Snellen	71
6.9	Variação da acuidade visual por região da fóvea	72
6.10	Variação da resolução visual com o contraste da cena	72
6.11	Variação da acuidade visual com o brilho da cena e a abertura pupilar	72
6.12	Resposta espectral do olho	73
7.1	Esquema geral do protótipo de AFO	76
7.2	Princípio de funcionamento do protótipo de AFO	77
7.3	Imagem da pupila e reprodução da frente de onda	78

7.4	Esquema de óptico do AFO	79
7.5	Composição das magnificações ópticas do AFO	80
7.6	Espectro de emissão do SLD	80
7.7	Interface principal do programa	81
7.8	Pontos de entrada do módulo de controle e aquisição	82
7.9	Imagem de referência com malha de <i>ROIs</i>	83
7.10	Aplicação da máscara sobre uma imagem	84
7.11	Tela principal do programa	85
8.1	Ruído do CCD	87
8.2	Montagem para a caracterização do AFO	88
8.3	Flutuação na posição dos centróides	89
8.4	Valor médio dos centróides	90
8.5	Montagem para a caracterização das lentes oftalmológicas	91
8.6	Coeficientes de Zernike obtidos de L1	92
8.7	Representação da frente de onda $W(x,y)$ obtida de L1	93
8.8	Inclinação no eixo X em $W(x,y)$ obtida de L1	94
8.9	Inclinação no eixo Y em $W(x,y)$ obtida de L1	95
8.10	Astigmatismo a 45° em $W(x,y)$ obtida de L1	96
8.11	Desfocalização em $W(x,y)$ obtida de L1	97
8.12	Astigmatismo a 0° em $W(x,y)$ obtida de L1	98
8.13	Coma no eixo X em $W(x,y)$ obtida de L1	99
8.14	Coma no eixo Y em $W(x,y)$ obtida de L1	100
8.15	Aberração esférica em $W(x,y)$ obtida de L1	101
8.16	Montagem para testes com olho artificial	102
8.17	Mapa de aberrações do olho artificial	103
8.18	Mapa de aberrações sem a desfocalização	103

8.19	Mapa de aberrações sem desfocalização e astigmatismo	104
8.20	Coeficientes de Zernike	104

Lista de Tabelas

4.1	Aberrações de primeira e terceira ordem	34
4.2	Polinômios de Zernike	41
8.1	Características do AFO	90
8.2	Características das lentes oftalmológicas	92

1 *Introdução*

Nos últimos 100 anos, vários métodos para se obter as aberrações de terceira ordem presentes no olho humano foram desenvolvidos e implementados . A maioria desses métodos amostra a direção de propagação do raio de luz em diferentes posições da pupila ocular e a partir dessas inferem o formato da frente de onda, das quais é possível determinar as aberrações. Em diferentes épocas, autores como Smirnov [1] e Van Den Brink [2] criaram e desenvolveram um conjunto de técnicas para se obter as aberrações a partir do efeito prismático produzido pelo olho. Esta técnica não obteve sucesso na aplicação clínica por demandar grande quantidade de tempo na coleta de dados mas, ainda hoje é usada em laboratórios e instrumentos de pesquisa. Outras técnicas já padronizadas para teste de sistemas ópticos também foram usadas. Em especial o teste de Foucault e a interferometria. A despeito de ambos apresentarem grande precisão no teste de componentes ópticos clássicos, seu emprego clínico ainda não produz resultados confiáveis pois requerem um ambiente livre de vibrações mecânicas e ópticas. Outra classe de testes é aquela em que o resultado das aberrações pode ser inferido a partir do seu efeito sobre a geometria da imagem de um objeto conhecido. Tscherning [3] desenvolveu um instrumento que usa este princípio o qual foi posteriormente aperfeiçoado por Walsh, Howland e Charman [4]. O procedimento consiste em fotografar a imagem formada sobre a retina do paciente enquanto este observa um objeto com forma geométrica conhecida e as aberrações são então obtidas a partir das deformações encontradas na imagem. Este método foi o primeiro a apresentar resultados quantitativos.

A procura por métodos de obtenção das aberrações e melhoria da qualidade óptica das imagens se davam em várias frentes. Neste sentido, a Força Aérea Americana (USAF) solicitou, no final dos anos 60, ao Centro de Ciências Ópticas da Universidade do Arizona um estudo sobre a viabilidade de eliminar os efeitos da turbulência atmosférica nas imagens formadas por pequenos telescópios[5]. Nesta época a USAF estava interessada em construir sistemas de rastreamento óptico de satélites artificiais baseado em telescópios com espelhos entre 5 e 10 polegadas de diâmetro, suficientemente leves

e compactos para serem transportados e operados por um único soldado.

Na época, o Centro de Ciências Ópticas era dirigido pelo *Dr. Aden Mienel*, um astrônomo que conhecia o método empregado por *Hartmann* para determinar desvios na superfície de espelhos para telescópios. *Mienel* propôs a utilização deste método para se obter simultaneamente a imagem do satélite alvo e a função de transferência óptica da atmosfera, a qual seria empregada *a posteriori* para corrigir a referida imagem. A idéia de *Mienel* era colimar a luz que emergia do telescópio, dividi-la em duas partes, dirigir a primeira parte para uma câmera fotográfica e a segunda parte para um sensor formado por uma máscara de *Hartmann* e uma câmera *VIDICON*. A insuficiente quantidade de luz coletada pelo telescópio, a baixa sensibilidade da câmera *VIDICON* e a dispersão do feixe luminoso provocada pela máscara de *Hartmann* produziram imagens das quais não se podia deduzir a pretendida função de transferência óptica da atmosfera. O *Dr. Roland Shack* fazia parte da equipe que trabalhava neste projeto e propôs que a substituição da máscara de *Hartmann* por outra contendo microlentes, melhoraria o contraste da imagem formada. *Shack* procurou, na mesma universidade, o *Dr. Ben Platt* especialista em sistemas óticos para produzir esta nova máscara. Este novo sensor e os respectivos métodos de mensuração foram testados pela USAF no início dos anos 70 e depois, descomissionados.

Durante algum tempo *Platt e Shack* construíram algumas máscaras sob encomenda de astrônomos e instrumentadores ópticos interessados em aferir seus telescópios com este *novo teste de Hartmann*. Em 1984 *Ray Wilson*, cientista óptico responsável pelo *European Southern Observatories* (ESO), testou seus telescópios com um sensor cedido por *Platt e Shack* e neste mesmo ano escreveu um artigo no qual se referia a este como *Sensor Hartmann-Shack*.

Em meados dos anos 80 o *Dr. Josef Bille* da Universidade de Erlangen-Nurnberg usou pela primeira vez o *Sensor Hartmann-Shack* em instrumentação oftalmológica. Ele o utilizou inicialmente para medir o perfil da córnea humana e em seguida para melhorar a qualidade das imagens produzidas por um *Scanning Laser Ophthalmoscope*. Prosseguindo nesta linha de pesquisa *Junzhong Liang*, aluno de doutorado sob orientação de *Bille*, sistematizou o uso deste tipo de sensor para se obter as aberrações de terceira ordem no olho humano[6].

O propósito deste trabalho é desenvolver em caráter experimental um instrumento no qual o método de *Hartmann* seja utilizado para determinar pequenos valores de aberrações de primeira e de terceira ordem em elementos ópticos de interesse oftalmológico.

Neste intento partiremos dos princípios descritos por *Liang*, aos quais incorporaremos alguns dos novos avanços técnicos e metodológicos ocorridos desde aquela época. Não temos com este trabalho a pretensão de construir um instrumento plenamente operacional, mas apenas integrar e testar em um protótipo o conhecimento mínimo para tal.

2 Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas

2.1 Introdução

A partir do século XVII houve intenso debate acerca da natureza da luz e do seu comportamento. De um lado estavam os defensores da teoria corpuscular sugerida por Isaac Newton e do outro os defensores da teoria ondulatória sugerida por Cristian Huygens. Gradativamente esta "visão ondulatória" da luz foi tornando preponderante em virtude dos trabalhos bem sucedidos de Young, Fresnel, Hertz e principalmente pelo caráter generalizador da teoria eletromagnética de Maxwell. A despeito do sucesso da teoria ondulatória, novas descobertas mostraram que esta não era capaz de explicar alguns fenômenos que aparentemente possuíam natureza corpuscular¹. No começo do século XX o comportamento ondulatório e o comportamento corpuscular da luz foram unificados pela mecânica quântica sob a premissa de serem apenas aspectos diferentes de uma mesma entidade[7].

Neste capítulo abordaremos apenas o comportamento ondulatório da luz por meio da teoria eletromagnética de Maxwell. Não desejamos nesta abordagem dar um tratamento completo a respeito deste assunto mas apenas enfatizar os conceitos considerados necessários ao desenvolvimento do trabalho em pauta. A partir desses conceitos básicos mostraremos as equações de onda, a perpendicularidade entre os campos elétrico e magnético e também a transversalidade da onda eletromagnética.

---

¹O efeito fotoelétrico, por exemplo

2.2 Equações de Maxwell

Sob condições estáticas uma carga elétrica q tem dupla relação com o campo elétrico. Primeiro ela gera um campo elétrico $\vec{E}$ por todo espaço. Segundo, ela sofre uma força $\vec{F}$ se na região que ocupa já existe um campo elétrico $\vec{E}_0$ [8]. Este campo e esta força são proporcionais à carga elétrica e dados pelas seguintes equações

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} \quad (2.1)$$

$$\vec{F} = q\vec{E}_0 \quad (2.2)$$

onde r é o módulo do vetor que une q a um ponto qualquer do espaço e $\hat{r}$ é um versor nesta direção.

Como $\vec{E}$ pertence à classe dos campos conservativos e o seu fluxo através de uma superfície fechada é determinado pela lei de gauss, a integração de $\vec{E}$ ao longo de um percurso fechado e sobre esta superfície produz os seguintes resultados.

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (2.3)$$

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{q_i}{\epsilon} \quad (2.4)$$

onde $d\vec{s}$ é um elemento de superfície, q_i é a carga interna à superfície, $d\vec{l}$ é um elemento de deslocamento e ϵ é a permissividade elétrica do meio.

Sob condições dinâmicas há o surgimento de um campo magnético² $\vec{B}$ que também possui dupla relação com $\vec{E}$. Primeiro um campo elétrico é gerado pela variação temporal de um campo magnético. Segundo, um campo magnético é gerado pela variação temporal de um campo elétrico. Essas relações são dadas por

$$\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{s} = \oint \vec{E} d\vec{l} \quad (2.5)$$

$$\int_S \frac{d\vec{H}}{dt} d\vec{s} = \oint \vec{H} d\vec{l} \quad (2.6)$$

onde $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ é a intensidade magnética, $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ é a densidade de fluxo elétrico e μ é a permeabilidade magnética do meio.

Outro resultado de interesse é obtido quando se leva em consideração que não existe o equivalente magnético para a carga elétrica. Deste modo $\vec{B}$ não converge nem diverge

---

² $\vec{B}$ é definido como Indução Magnética

de uma carga magnética elementar e a aplicação da lei de gauss em $\vec{B}$ produz

$$\oint \vec{B} \, d\vec{s} = 0 \quad (2.7)$$

Além das situações dinâmicas descritas, o movimento das cargas elétricas também exercem influência sobre os campos elétrico e magnético. Sabemos que a densidade de corrente elétrica $\vec{J}$ existente em algum ponto do espaço é proporcional ao campo elétrico neste ponto. Sabemos também que se uma corrente elétrica flui através de um circuito, este movimento das cargas elétricas produz nas vizinhanças deste circuito um campo magnético. As relações entre essas três entidades podem ser expressas pelas seguintes equações.

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \quad (2.8)$$

$$\int_S \vec{J} \, d\vec{s} = \oint \vec{H} \, d\vec{l} \quad (2.9)$$

onde γ é a condutividade do meio.

Quando coexistirem num mesmo lugar do espaço uma densidade de corrente $\vec{J}$ e um campo elétrico oscilante $\vec{E}$, é lícito supor que a equação 2.9 deve ser modificada para considerar a influência deste novo agente. Assim esta equação deve reescrita como segue

$$\oint \vec{H} \, d\vec{l} = \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) d\vec{s} \quad (2.10)$$

As equações 2.10, 2.7, 2.5 e 2.4 são conhecidas como equações de Maxwell e são normalmente representadas na forma vetorial como segue

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (2.11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.13)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.14)$$

onde ρ é a densidade de carga elétrica.

2.3 Onda Eletromagnética

As equações de Maxwell são representações matemáticas para observações experimentais mas, os resultados coerentes obtidos da sua correta aplicação fazem delas um dos princípios fundamentais da física assim como os princípios da conservação da energia e da conservação do momentum.[9] Uma das mais importantes conseqüências dessas equações é a obtenção de uma expressão matemática para dar forma e explicar a propagação da onda eletromagnética. Esta expressão pode ser obtida tomando-se inicialmente a derivada temporal da equação 2.11 e o rotacional da equação 2.13, respectivamente

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.15)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = - \left(\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (2.16)$$

substituindo 2.15 em 2.16 e lembrando que $\vec{B} = \mu \vec{H}$ obtemos.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu \left(\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (2.17)$$

Usando-se agora a identidade vetorial $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} (\nabla^2 \vec{E})$ e admitindo que a região não possua carga elétrica e não seja condutora a equação 2.17 se reduz a

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \left(\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) \quad (2.18)$$

Por um processo semelhante podemos obter uma expressão para o campo magnético

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu \left(\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \right) \quad (2.19)$$

essas são as equações de onda para o campo eletromagnético que se propagam no meio com velocidade dada por

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (2.20)$$

2.4 Função de Onda

Em um meio homogêneo, livre de cargas e de correntes elétricas no qual uma onda eletromagnética se propaga na direção de um vetor unitário $\hat{s}$, cada componente do campo eletromagnético E_x, E_y, E_z, H_x, H_y e H_z , que denotaremos conjuntamente por U , obedece à equação

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (2.21)$$

Uma solução de particular interesse para esta equação é aquela que envolve ondas harmônicas e é dada por

$$U(\vec{r}, t) = A e^{-i(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (2.22)$$

onde A é a amplitude, $\vec{k}$ é o vetor de onda e ω é a frequência angular. Para uma onda de frequência ν e comprimento de onda λ que se propaga na direção de $\hat{s}$.

$$\omega = 2\pi\nu \quad (2.23)$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{s} \quad (2.24)$$

Apesar de termos obtido uma solução para as equações de onda nada foi demonstrado sobre a orientação entre os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, e a orientação destes com o vetor de onda $\vec{k}$. Tomando-se a derivada em relação ao tempo e em relação às coordenadas espaciais da equação 2.22 temos[10]

$$\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = i\omega \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2.25)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E} \quad (2.26)$$

Observando-se as equações 2.25 e 2.26 concluímos que a aplicação dos operadores $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{\nabla}$ na função de onda produzem os seguintes valores

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega \quad (2.27)$$

$$\vec{\nabla} = -i\vec{k} \quad (2.28)$$

Substituindo esses valores nas equações 2.11, 2.12, 2.13 e 2.14 obtemos para uma região livre de cargas e de correntes elétricas

$$-i\vec{k} \times \vec{H} = -i\omega\epsilon\vec{E} \quad (2.29)$$

$$-i\vec{k} \cdot \frac{\vec{H}}{\mu} = 0 \quad (2.30)$$

$$-i\vec{k} \times \vec{E} = i\frac{\omega}{\mu}\vec{H} \quad (2.31)$$

$$-i\vec{k} \cdot \epsilon\vec{E} = 0 \quad (2.32)$$

O que demonstra que os vetores $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são ortogonais entre si e ambos são ortogonais à direção de propagação da onda eletromagnética dada pelo vetor $\vec{k}$. A figura abaixo ilustra este conceito.

Figura 2.1: Propagação da Onda Eletromagnética

3 Fundamentos de Óptica Geométrica

3.1 Introdução

Chamamos de luz uma pequena parte da radiação eletromagnética com frequências situadas entre $3,84 \times 10^{14}$ e $7,69 \times 10^{14}$ Hz que ao ser absorvida pelas células fotosensíveis do olho nos traz as sensações de claridade e de cor. Embora o processo de produção da luz seja fundamentalmente quântico podemos, em primeira aproximação, usar as equações de Maxwell para descrever o seu comportamento macroscópico e até mesmo reformulá-lo quando nos deparamos com determinada classe de problemas nos quais as dimensões envolvidas são muito maiores que o comprimento de onda da luz. Nesta classe de problemas, a abordagem ondulatória é substituída por outra que nos permite expressar as leis da óptica usando uma linguagem puramente geométrica sem prejuízo dos resultados a serem obtidos. A este ramo da óptica, que se caracteriza por não levar em consideração o comprimento de onda da luz, denominamos Óptica Geométrica .

Neste capítulo faremos uma curta porém rigorosa passagem do caráter ondulatório da óptica, descrito no capítulo anterior, para o seu caráter geométrico e introduziremos alguns conceitos importantes como caminho óptico, frente de onda e raio de luz.

3.2 Frente de Onda e Caminho Óptico

Ao longo da direção de propagação de uma onda luminosa, a magnitude do campo elétrico é dada pela equação 2.22. Nesta expressão o termo $\vec{k} \cdot \vec{r}$ é a diferença de fase entre um ponto considerado e a origem do sistema, e $(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t)$ é a fase instantânea que é admitida como nula em $t = 0$. Uma frente de onda é então definida como sendo uma superfície na qual todos os seus pontos tenham a mesma fase instantânea. Podemos então imaginar que a onda luminosa se propaga gerando frentes de onda que se afastam do seu ponto de origem e estão separadas entre si por uma distância equivalente a um comprimento de onda, λ .

Embora uma frente de onda se desloque com velocidade constante num meio isotrópico o tempo gasto para percorrer distâncias iguais em meios materiais de diferentes propriedades ópticas, depende do índice de refração de cada meio. Podemos então expressar este princípio introduzindo o conceito de *Caminho Óptico*[11] que é muito útil no estudo da geometria das frentes de onda.

De acordo com este novo conceito, podemos redefinir a frente de onda como sendo uma superfície na qual a perturbação eletromagnética de todos os seus pontos tenha percorrido o mesmo caminho óptico.

$$CO = \int_a^b n dl \quad (3.1)$$

onde n é o índice de refração do meio e dl é um elemento de arco ao longo do caminho percorrido pela frente de onda.

3.3 Bases da Óptica Geométrica

A expressão matemática para o campo eletromagnético dada pela equação 2.22 pode ser escrita como o produto entre uma função que depende da posição $\vec{r}$ e outra que depende apenas do tempo t . Deste modo a componente espacial de 2.22 pode ser escrita como segue

$$E_1(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.2)$$

$$H_1(\vec{r}) = \vec{H}_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.3)$$

obviamente as equações 3.2 e 3.3 devem obedecer às equações de Maxwell que numa região do espaço livre de cargas e de correntes têm a seguinte forma[12]

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_1 = -ik_0\epsilon\vec{E}_1 \quad (3.4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = ik_0\mu\vec{H}_1 \quad (3.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \epsilon\vec{E}_1 = 0 \quad (3.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mu\vec{H}_1 = 0 \quad (3.7)$$

onde $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ e λ_0 é o comprimento de onda no vácuo. Como o vetor de onda é dado por

$$\vec{k} = k_0\hat{s} \quad (3.8)$$

e o caminho óptico percorrido pela frente de onda em um meio material de índice de refração n é dado por

$$G(\vec{r}) = n\vec{r}\hat{s} \quad (3.9)$$

As equações 3.2 e 3.3 podem ser reescritas como

$$E_1(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-ik_0 G(\vec{r})} \quad (3.10)$$

$$H_1(\vec{r}) = \vec{H}_0 e^{-ik_0 G(\vec{r})} \quad (3.11)$$

Desejamos agora, saber qual a relação entre $G(\vec{r})$, $\vec{E}_0$ e $\vec{H}_0$ e como eles se comportam quando $\lambda \rightarrow 0$, ou seja; quando atingimos o limiar da óptica geométrica.

Tomando-se o rotacional e a divergência das equações 3.10 e 3.11 e substituindo-as em 3.4, 3.5, 3.6 e 3.7 obtemos

$$\vec{\nabla} G \times \vec{H}_0 = \epsilon\vec{E}_0 \quad (3.12)$$

$$\vec{\nabla} G \times \vec{E}_0 = \mu\vec{H}_0 \quad (3.13)$$

$$\vec{\nabla} G \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (3.14)$$

$$\vec{\nabla} G \cdot \vec{H}_0 = 0 \quad (3.15)$$

o que demonstra que mesmo no domínio da óptica geométrica a frente de onda tem direção de propagação perpendicular aos campos elétrico e magnético.

3.4 Reflexão e Refração

A direção de propagação de uma onda luminosa pode ser alterada quando esta entra em contato com uma interface que separa dois meios opticamente distintos. A construção de Huygens para a propagação da onda luminosa mostra que a luz se propaga ao longo de linhas retas perpendiculares à frente de onda as quais denominamos raios de luz, embora essas linhas não tenham existência concreta e também não estejam associadas a possíveis trajetórias percorridas por partículas de luz quando trazemos à baila o seu caráter corpuscular. A lei de propagação linear se aplica somente a meios opticamente homogêneos nos quais uma onda esférica gerada por uma fonte puntiforme se propaga omnidirecionalmente com velocidade constante.

Consideremos uma superfície plana que separa dois meios homogêneos de índices de refração diferentes sobre a qual incide uma frente de onda como mostra a figura 3.1.

Figura 3.1: Reflexão e refração de um raio luminoso

Após a reflexão, a frente de onda se propaga no sentido oposto e com a mesma velocidade com que chegou à interface, formando com a normal a esta um ângulo igual ao ângulo de incidência e após a refração a onda sofre um desvio na sua direção de

propagação.

Seja uma onda plana que incide sobre uma superfície que separa dois meios materiais de índices de refração n_1 e n_2 e cuja direção de propagação forma um ângulo θ_1 com a normal à esta superfície. Tomando os pontos 1 e 2 sobre esta onda e acompanhando sua propagação podemos ver que 1 chega à superfície no ponto A no mesmo instante em que 2 está sobre o ponto B . Decorrido um intervalo de tempo Δt o ponto 2 chega ao ponto C sobre a superfície percorrendo a distância $\overline{BC}$ com velocidade v_1 . No mesmo intervalo de tempo o ponto 1 se propaga de A até D com velocidade v_2 .

Figura 3.2: Refração de uma frente de onda

Da figura 3.2 vê-se que

$$\overline{BC} = \overline{AC} \sin \theta_1 \quad (3.16)$$

$$\overline{AD} = \overline{AC} \sin \theta_2 \quad (3.17)$$

mas $\overline{BC} = v_1 \Delta t$ e $\overline{AD} = v_2 \Delta t$. Substituindo os valores de $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ nas equações 3.16 e 3.17 e eliminando $\overline{AC}$ entre as duas equações chega-se à equação de *Snell* dada por

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (3.18)$$

Onde usamos a relação $v_i = \frac{c}{n_i}$ na qual c é a velocidade da luz no vácuo e n_i é o índice de refração do meio i .

3.5 Ação de Um Dióptro Sobre a Frente de Onda

O conhecimento da lei de *Snell* nos permite representar as frentes de onda tanto por uma superfície propagante quanto por sua direção de propagação: o raio luminoso.

Um raio de luz gerado por uma fonte puntiforme A , distante S_1 de uma superfície esférica de raio R a qual separa dois meios com índices de refração n_1 e n_2 , atinge esta superfície a uma altura Y formando com a normal a esta superfície um ângulo θ_1 . A parte refratada deste raio penetra no meio com ângulo θ_2 em relação à normal e cruza o eixo óptico no ponto C , como mostra a figura 3.3 observando os triângulos ABD e

Figura 3.3: Ação de um dióptro sobre uma frente de onda

BCD obtemos as seguintes relações

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad (3.19)$$

$$\theta_2 = \beta - \gamma \quad (3.20)$$

Para pequenos valores de α e consequentemente de θ_1 podemos fazer as seguintes aproximações: $\alpha \approx \frac{Y}{S_1}$, $\gamma \approx \frac{Y}{S_2}$ e $\beta \approx \frac{Y}{R}$. substituindo-as em 3.19 e 3.20 obtemos

$$\theta_1 = Y \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{R} \right) \quad (3.21)$$

$$\theta_2 = -Y \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{R} \right) \quad (3.22)$$

Se retornarmos agora à equação 3.18 e observarmos que $\sin\theta_1$ e $\sin\theta_2$ podem ser

aproximados pelo primeiro termo da sua respectiva expansão na série

$$\text{sen}(\theta_j) = \theta_j - \frac{\theta_j^3}{3!} + \frac{\theta_j^5}{5!} - \frac{\theta_j^7}{7!} + \dots \quad (3.23)$$

a lei de *Snell* pode ser escrita como segue

$$n_1\theta_1 = n_2\theta_2 \quad (3.24)$$

o que resulta, após a substituição de 3.21 e 3.22 em 3.24, na denominada equação paraxial da óptica

$$\frac{n_1}{S_1} + \frac{n_2}{S_2} = \frac{1}{R}(n_1 - n_2) \quad (3.25)$$

4 *Teoria Geométrica das Aberrações*

4.1 Introdução

A direção de propagação de uma onda refratada obtida pela formulação paraxial é válida apenas em regiões nas quais o ângulo entre esta e o eixo do sistema óptico é suficientemente pequeno. O aumento deste ângulo ou a inclusão, na equação 3.24, de mais termos da série dada pela equação 3.23 altera o valor do ângulo de refração e também do caminho óptico percorrido pela frente de onda. Ao conjunto das alterações produzidas pela inclusão do termo $\frac{\theta^3}{3!}$ dá-se o nome de aberrações de terceira ordem ou aberrações de *Seidel* em homenagem ao matemático *Ludwig Von Seidel* que as estudou e as classificou.[13]

Como deveríamos esperar essas aberrações também afetam a visão humana mas, seus efeitos não são tão importantes quanto aqueles produzidos pelas ametropias clássicas. Dentre as aberrações monocromáticas algumas afetam a qualidade da imagem enquanto outras alteram a sua forma. A aberração esférica, a coma e o astigmatismo fazem parte do primeiro tipo enquanto que a curvatura de campo e a distorção fazem parte do segundo.

Neste capítulo trataremos das aberrações em sistemas ópticos centrados, das suas representações e de algumas formas de mensurá-las.

4.2 Aberrações de Terceira Ordem

Seja um ponto P_1 situado na altura h_1 sobre o plano objeto de um sistema óptico, aqui representado pelas suas pupilas de entrada e de saída PE e PS como mostra a figura 4.1.

Figura 4.1: Esquema simplificado de um sistema óptico

A fração da frente de onda esférica gerada em P_1 se propaga na direção do sistema óptico no qual penetra através de PE . Ao emergir por meio de PS a frente de onda converge na direção do ponto P_2 situado na altura h_2 sobre o plano imagem, separado de PS pela distância R . Em sistemas ópticos ideais esta frente de onda tem a forma de uma esfera propagante de raio R e todos os seus pontos convergem exatamente sobre o ponto P_2 . A esta frente de onda dá-se o nome de esfera de referência. Quando a frente de onda que emerge do sistema óptico for afetada por algum tipo de aberração, os pontos situados sobre a sua superfície sofrem pequenos deslocamentos de fase, atrasando-os ou adiantando-os em relação aos seus similares situados na esfera de referência. Por convenção, a diferença entre as duas frentes de onda são medidas na pupila de saída e denotada por W , como mostra a figura 4.2.

Figura 4.2: Parâmetros necessários para computar as aberrações

Usualmente W é representada por meia da série de potências.

$$W(\eta, \rho, \theta) = \sum_{i,j,k} C_{ijk} \eta^i \rho^j \cos^k \theta \quad (4.1)$$

onde $\eta = \frac{h_1}{h_2}$, C_{ijk} é o peso de cada termo da série e ρ e θ são as coordenadas normalizadas da pupila de saída como mostra a figura 4.3

Figura 4.3: Coordenadas pupilares

Dentre todos os termos possíveis para a série de $W(\eta, \rho, \theta)$ as condições de contorno do problema limita-os àqueles que são exclusivamente potências pares ou potências ímpares de η^2 , ρ^2 e $\eta\rho \cos \theta$. [14] Desta forma

$$\begin{aligned}
 W(\eta, \rho, \theta) = & \begin{array}{llll}
 C_{000} & +C_{020}\rho^2 & +C_{040}\rho^4 & +\dots \\
 C_{111}\eta\rho \cos \theta & +C_{131}\eta\rho^3 \cos \theta & +C_{151}\eta\rho^5 \cos \theta & +\dots \\
 C_{220}\eta^2\rho^2 & +C_{222}\eta^2\rho^2 \cos^2 \theta & +C_{242}\eta^2\rho^4 \cos^2 \theta & +\dots \\
 C_{311}\eta^3\rho \cos \theta & +C_{331}\eta^3\rho^3 \cos \theta & +C_{333}\eta^3\rho^3 \cos 3\theta & +\dots
 \end{array} \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Definindo a ordem dos polinômios por $n = (i + j) - 1$, vê-se que os termos de primeira ordem representam as coordenadas do ponto focal e os termos de terceira ordem representam as aberrações de Seidel. Esses termos e seus significados estão na tabela 4.1.

Ordem	Termo da Série	Aberração
1	$C_{111}\eta\rho \cos \theta$	Deslocamento lateral
1	$C_{020}\rho^2$	Desfocalização
3	$C_{040}\rho^4$	Esférica
3	$C_{220}\eta^2\rho^2$	Curvatura de Campo
3	$C_{222}\eta^2\rho^2 \cos^2 \theta$	Astigmatismo
3	$C_{131}\eta\rho^3 \cos \theta$	Coma
3	$C_{311}\eta^3\rho \cos \theta$	Distorção

Tabela 4.1: Aberrações de primeira e terceira ordem

4.2.1 Aberração Esférica

A presença de aberração esférica provoca na frente de onda um efeito similar à variação da distância focal do sistema óptico em função do raio de abertura da pupila de saída. Esta aberração faz com que as partes da frente de onda que passam próximas à borda da pupila de saída cruzem o eixo óptico numa posição diferente daquela que é interceptada pelas partes da frente de onda que passam próximas ao centro da pupila de saída como mostra a figuras 4.4 e 4.5.

Figura 4.4: Ação da aberração esférica sobre a frente de onda

Figura 4.5: Efeito da aberração esférica

4.2.2 Coma

Coma é uma aberração que afeta apenas as frentes de onda geradas fora do eixo óptico e não apresenta simetria em relação a este. Esta aberração é similar àquela que seria produzida por um hipotético sistema óptico cuja magnificação da imagem formada dependesse do raio da pupila de saída. As figuras 4.6, 4.7 ilustram o efeito provocado pela presença de coma. Nessas pode-se notar que frentes de ondas que cruzam a pupila de saída em regiões localizadas a diferentes distâncias do eixo óptico são focalizadas em pontos diferentes sobre o plano imagem produzindo a característica imagem em forma de cometa.

Figura 4.6: Ação da coma sobre a frente de onda

Figura 4.7: Efeito da coma sobre um feixe luminoso

4.2.3 Astigmatismo

O astigmatismo é outra aberração que acomete frentes de onda geradas fora do eixo óptico e a sua presença deforma a frente de onda fazendo com que esta apresente curvaturas diferentes nos planos sagital e meridional. Isto é equivalente ao sistema óptico apresentar distâncias focais diferentes em cada um desses planos. As figuras 4.8 e 4.9 ilustram os efeitos desta aberração.

Figura 4.8: Ação do astigmatismo sobre a frente de onda

Figura 4.9: Planos focais de um sistema com astigmatismo

4.2.4 Curvatura de Campo

A presença dessa aberração faz com que frentes de onda geradas em diferentes posições de campo η sejam focalizadas sobre uma superfície que não coincide com o plano imagem(figura 4.10 e figura 4.11). Esta aberração está intimamente ligada ao astigmatismo e as ações efetuadas para corrigi-lo ajudam a reduzi-la também.

Figura 4.10: Efeito da curvatura de campo

Figura 4.11: Ação da curvatura de campo sobre a frente de onda

4.2.5 Distorção

A presença dessa aberração faz com que frentes de onda geradas em diferentes posições de campo η sejam focalizadas sobre o plano imagem com diferentes magnificações. Neste caso a imagem formada tem sua geometria deformada em relação à geometria do objeto figura 4.12(a) em duas formas distintas: a distorção em almofada (figura 4.12(b)) e a distorção em barril (figura 4.12(c)).

Figura 4.12: Efeito da distorção

4.3 Polinômios de Zernike

Os polinômios de zernike foram elaborados para ser um conjunto de funções ortogonais dentro de um círculo unitário e que as formas de cada um dos seus termos fossem semelhantes àquelas das aberrações observadas em testes ópticos.[15] Além dessas propriedades, esses polinômios - diferentemente da série de potências apresentada no item anterior - não dependem da variável de campo η . Portanto a expansão de W nos polinômios de zernike envolve apenas as coordenadas ρ e θ da pupila de saída. Eles podem ser obtidos a partir das duas propriedades seguintes:

1. São ortogonais no interior de um círculo de raio unitário

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} Z_n^m Z_{n'}^{m'*} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{n+1} \delta_{nn'} \delta_{mm'}$$

2. São invariantes sob rotação

Os polinômios podem ser descritos como o produto de duas funções. Uma que depende somente de ρ e outra que depende de θ e as aberrações são dadas por

$$Z_i(\rho, \theta) = \begin{cases} R_n^m(\rho) & \text{se } m = 0 \\ R_n^m(\rho) \cos(m\theta) & \text{se } m \geq 0 \\ R_n^m(\rho) \sin(m\theta) & \text{se } m \leq 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$W(\rho, \theta) = \sum_{i=0} C_i Z_i(\rho, \theta) \quad (4.4)$$

tais que seus índices m e n devem ser inteiros com $n > 0$ e ter a mesma paridade. Os termos radiais dos polinômios de zernike podem ser obtidos pela seguinte fórmula de recorrência

$$R_n^m(\rho) = \sum_{j=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^j (n-j)!}{j! [(n+m)/2 - j]! [(n-m)/2 - j]!} \rho^{n-2j} \quad (4.5)$$

Na tabela 4.2 estão listados os polinômios de zernike¹ até a quinta ordem; tanto na sua representação polar quanto na representação retangular.

---

¹Segundo a ordem adotada por Malacara

	n	m	$Z(\rho, \theta)$	$Z(x, y)$
Z_1	0	0	1	1
Z_2	1	0	$\rho \operatorname{sen} \theta$	x
Z_3	1	1	$\rho \cos \theta$	y
Z_4	2	0	$\rho^2 \operatorname{sen}(2\theta)$	$2xy$
Z_5	2	1	$2\rho^2 - 1$	$2x^2 + 2y^2 - 1$
Z_6	2	2	$\rho^2 \cos(2\theta)$	$y^2 - x^2$
Z_7	3	0	$\rho^3 \operatorname{sen}(3\theta)$	$3xy^2 - x^3$
Z_8	3	1	$(3\rho^3 - 2\rho) \operatorname{sen} \theta$	$3x^3 + 3xy^2 - 2x$
Z_9	3	2	$(3\rho^3 - 2\rho) \cos \theta$	$3y^3 + 3yx^2 - 2y$
Z_{10}	3	3	$\rho^3 \cos(3\theta)$	$y^3 - 3x^2y$
Z_{11}	4	0	$\rho^4 \operatorname{sen}(4\theta)$	$4y^3x - 4x^3y$
Z_{12}	4	1	$4\rho^4 - 3\rho^2) \operatorname{sen}(2\theta)$	$8x^3y + 8y^3x - 6xy$
Z_{13}	4	2	$6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$	$6(x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 2x^2y^2) + 1$
Z_{14}	4	3	$4\rho^4 - 3\rho^2) \cos(2\theta)$	$4y^4 + 4x^4 + 3x^2 - 3y^2$
Z_{15}	4	4	$\rho^4 \cos(4\theta)$	$y^4 - 6x^2y^2 + x^4$
Z_{16}	5	0	$\rho^5 \operatorname{sen}(5\theta)$	$5xy^4 - 10x^3y^2 + x^5$
Z_{17}	5	1	$(5\rho^5 - 4\rho^3) \operatorname{sen}(3\theta)$	$-12xy^2 + 4x^3 + 15xy^4 + 10x^3y^2 + x^5$
Z_{18}	5	2	$(10\rho^5 - 4\rho^3 + 3\rho) \operatorname{sen}(\theta)$	$3x - 12xy^2 - 12x^3 + 10xy^4 + 20x^3y^2 + 10x^5$
Z_{19}	5	3	$(10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho) \cos(\theta)$	$3y - 12y^3 - 12x^2y + 10y^5 + 20x^2y^3 + 10x^4y$
Z_{20}	5	4	$(5\rho^5 - 4\rho^3) \cos(3\theta)$	$-4y^3 + 12x^2y + 5y^5 - 10x^2y^3 - 15x^4y$
Z_{21}	5	5	$\rho^5 \cos(5\theta)$	$y^5 - 10x^2y^3 + 5x^4y$

Tabela 4.2: Polinômios de Zernike

4.4 Métodos de Obtenção das Aberrações

Os fotosensores atuais ainda não são capazes de detectar variações de fase em ondas luminosas e se desejarmos medir esta importante propriedade, devemos fazer uso de algum tipo de transdutor e das suas respectivas técnicas de coleta e análise de dados. Neste tópico serão abordados, brevemente, quatro desses instrumentos e as respectivas técnicas de medida.

4.4.1 Interferômetro de Deslocamento Lateral

Esta modalidade de interferometria consiste em dividir uma frente de onda em duas partes de igual intensidade e obter o padrão de interferência recombinação-as com um pequeno deslocamento lateral.[16]

O mais simples interferômetro deste tipo pode ser construído com uma placa de vidro com faces paralelas, opticamente polidas, colocada inclinada em relação à direção de propagação do feixe de radiação como mostra a figura 4.13.

Figura 4.13: Placa de vidro usada como interferômetro

Neste dispositivo a parte da frente de onda refletida pela primeira superfície da placa de vidro é deslocada de um certo valor daquela refletida pela segunda superfície (figura 4.14). Na região de sobreposição a diferença de caminho óptico - $\Delta W = n\lambda$ - gerada pelo deslocamento lateral produz as franjas de interferência (figura 4.15).

Figura 4.14: Deslocamento produzido nos feixes refletidos

Figura 4.15: Franjas de interferência

4.4.2 Interferômetro de Ponto Difrativo

Este interferômetro é feito de um substrato transparente ao comprimento de onda a ser utilizado sobre o qual é depositada uma camada semi-refletora. Em algum ponto do substrato remove-se a camada semi-refletora deixando-se transparente uma pequena região circular com diâmetro de aproximadamente $20\mu m$ como mostra a figura 4.16. A camada semi-refletora funciona como filtro de intensidade e o furo circular funciona como elemento difrator. O princípio de operação deste interferômetro está ilustrado

Figura 4.16: Esquema do interferômetro de ponto difrativo

na figura 4.17. A frente de onda com aberrações é focalizada sobre numa região que engloba o elemento difrator.[17] A maior parte da frente de onda passa pela região semi-refletora e uma pequena parte passa pelo elemento difrator que produz uma nova frente de onda esférica e sem aberrações. As franjas de interferência são formadas pela superposição entre essas duas frentes de onda. Conforme mostra a figura 4.18.

Para produzir interferogramas de boa qualidade as duas frentes de onda devem ter aproximadamente a mesma amplitude. Isto pode ser controlado pela correta escolha das dimensões do elemento difrator e da transmissividade da camada semi-refletora.

Por outro lado, a amplitude da frente de onda esférica depende da quantidade de luz focalizada sobre o elemento difrator que por sua vez depende da quantidade de aberrações na frente de onda incidente. Alguns autores aconselham usar camadas semi-refletoras com transmissividade entre 0,005 e 0,05 e o elemento difrativo com as mesmas dimensões do disco de *Airy* produzido por uma onda sem aberrações.

Figura 4.17: Princípio de funcionamento

Figura 4.18: Franjas de interferência

4.4.3 Teste de Hartmann

Este teste consiste em interceptar uma frente de onda com um anteparo opaco sobre o qual existem diversas perfurações convenientemente espaçadas que funcionam como elementos de amostragem. Este anteparo é colocado diante de um elemento fotosensor como um filme ou câmera CCD e o seu princípio de funcionamento baseia-se na premissa de que as coordenadas de cada mancha luminosa produzida por cada elemento de amostragem sobre o fotosensor é proporcional à direção de propagação da frente de onda,[18] como mostra a figura 4.19. Supondo que o feixe luminoso incidente seja colimado e perpendicular ao anteparo, a imagem registrada pelo fotosensor será uma matriz de pontos luminosos com espaçamento e regularidade semelhante à do anteparo. Se o feixe for convergente, divergente ou tiver uma forma arbitrária haverá modificações na disposição desses pontos luminosos a partir das quais será possível deduzir algumas propriedades do feixe que os produziram.

Figura 4.19: Esquema do teste de Hartmann

4.4.4 Teste de Foucault

O teste de *Foucault* é o mais simples e o mais difundido método geométrico para a detecção de aberrações ópticas. Consiste em focalizar a frente de onda num ponto do espaço e varrer a região próxima a este ponto com um objeto opaco na tentativa de bloquear as partes da frente de onda mais afetadas por aberrações. A figura 4.20 exemplifica o método. Nela podemos ver que uma frente de onda perfeita ao ser testada por este método produz sobre um anteparo uma figura regularmente iluminada enquanto que uma frente de onda com aberrações tem algumas das suas partes bloqueadas e produz uma distribuição luminosa não uniforme sobre o anteparo[19].

Figura 4.20: Esquema do teste de Foucault

5 *O Método de Hartmann*

5.1 Introdução

O método de *Hartmann* é baseado nos princípios da óptica geométrica a qual associa cada ponto de uma frente de onda a um raio luminoso que se propaga perpendicularmente a ela. Segundo esta concepção, um feixe colimado é aquele formado por frentes de ondas planas e qualquer vergência neste feixe pode ser notada tanto pela alteração no perfil da frente de onda quanto na direção de propagação do raio luminoso.

O conceito básico por trás do teste de *Hartmann* e de seus derivados é que o formato de uma frente de onda pode ser completamente reconstruído desde que se conheça a direção de propagação de alguns pontos localizados sobre ela. Este conceito é fundamentado na premissa de que os pontos de uma frente de onda com aberrações se propagam em direções diferentes daquelas seguidas por seus similares que fazem parte de uma frente de onda ideal.

Neste capítulo abordaremos este método enfocando os equipamentos, os métodos de aquisição dos dados e de reconstrução da frente de onda.

5.2 Fundamentos Sobre o Sensor Hartmann-Shack

5.2.1 O Sensor Hartmann-Shack

O sensor é composto por um arranjo bidimensional de microlentes (lente HS) e uma câmera CCD (CCD) separada da lente HS pela distância focal da microlente como mostra a figura 5.1.

Figura 5.1: Esquema do sensor Hartmann-Shack

Os elementos da lente HS podem ser distribuídos em qualquer geometria sendo que as mais comuns são a retangular, a circular e a hexagonal. Também não é necessário que esta seja formada por microelementos refrativos. Em algumas situações uma máscara opaca com regiões transparentes distribuídas ao longo da sua superfície pode ser usada neste tipo de sensor. Essas são denominadas *Máscaras de Hartmann*.

Cada microlente amostra um trecho da frente de onda e a focaliza em diferentes posições sobre o CCD. Se as microlentes forem suficientemente pequenas, o trecho amostrado por cada uma delas pode ser considerado um segmento de onda plana; e o efeito das aberrações pode ser aproximado por uma pequena alteração na direção de propagação deste segmento como mostra a figura 5.2.

Figura 5.2: Aberrações representada por uma inclinação na frente de onda

Desta forma, a relação entre o deslocamento na posição do ponto luminoso e as aberrações é dada por

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = \frac{\Delta x}{f} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = \frac{\Delta y}{f} \quad (5.2)$$

Nestas equações e ao longo deste trabalho as aberrações na frente de onda $W(x, y)$, é definida como a diferença de caminho óptico (DCO) entre uma frente de onda tomada como referência e uma outra na qual se quer examinar as aberrações. $W(x, y)$ é definida em todos os pontos da região analisada e deve ser medida na direção do raio de curvatura da frente de onda de referência.

5.2.2 Geração e Aquisição dos Dados

Medir uma frente de onda com o sensor HS envolve vários passos. Primeiro o sensor é calibrado passando-se por ele uma frente de onda plana obtida por meio de um colimador ou de uma fonte pequena localizada muito distante do sensor. A imagem dos pontos regularmente espaçados formada sobre o CCD é adquirida e armazenada para ser usada como referência (figura 5.3). Repete-se este passo para amostrar a frente de onda deformada $\Phi(x, y)$. Neste caso a diferença na inclinação na direção de propagação da frente de onda faz com que os pontos se desloquem no plano do CCD (figura 5.4).

Figura 5.3: Amostragem da frente de onda plana

Figura 5.4: Amostragem da frente de onda deformada

Comparando-se as coordenadas dos pontos luminosos formados na imagem de referência com a dos seus homólogos na imagem da frente de onda deformada obtém-se pequenos deslocamentos Δx e Δy que estão relacionados com $W(x, y)$ pelas equações 5.1 e 5.2.

5.2.3 Resolução

Seja um sensor Hartmann-Shack (HS) formado por uma matriz $N \times N$ de microlentes com distância focal f e abertura d sobre o qual incide uma onda plana cuja direção de propagação tem inclinação θ com o eixo óptico do sensor. Figura 5.5.

Figura 5.5: Parâmetros para computar a resolução do sensor HS

Para não haver ambigüidade na identificação de cada ponto luminoso, limita-se a região de interesse (ROI) na imagem sobre a qual cada um deles deve ser encontrado. Esta região deve ter área e coordenadas iguais a da microlente que a produziu. O efeito imediato desta restrição é a limitação da máxima inclinação da frente de onda que pode ser medida pelo sensor HS. Esta inclinação é igualmente aplicável às direções x e y e é dada por

$$\theta_{max} = \frac{d}{2f} \quad (5.3)$$

desta forma, a maior diferença de fase que pode ser medida por este sensor é dada pela relação[20]

$$W_{max} = Nd\theta_{max} \quad (5.4)$$

A resolução de um sensor HS está relacionada com o mínimo deslocamento detectável do ponto luminoso sobre o CCD. Seja o CCD composto por elementos fotosensores (pixels) quadrados de aresta p . O menor deslocamento detectável é aquele que altera em pelo menos um pixel a posição do ponto luminoso. Assim sendo, a menor variação

angular detectável pelo sensor é dada por

$$\theta_{min} = \frac{p}{f} \quad (5.5)$$

Como o ponto luminoso tem a extensão de alguns pixels, o seu centróide é usado como ponto de referência para se medir este deslocamento e o valor de θ_{min} pode ser melhorado calculando-se a média das coordenadas dos centróides obtidos em diversas imagens. Este processo de melhoria é limitado pelo ruído térmico do CCD e pela difração das microlentes a aproximadamente 1/100 do valor obtido pela equação 5.5 a qual pode ser reescrita como

$$\theta_{min} = \frac{p}{100f} \quad (5.6)$$

e a mínima variação na frente de onda que pode ser medida por cada microlente deste sensor HS é dada por

$$W_{min} = d\theta_{min} \quad (5.7)$$

Ao longo de um sensor com NxN microlentes o erro cometido na determinação da frente de onda é obtido estatisticamente e dado por

$$\Delta W = \sqrt{N}d\theta_{min} \quad (5.8)$$

5.2.4 Efeito da Magnificação

Frentes de onda cuja direção de propagação forma ângulos maiores que θ_{max} podem ser medidas desde que sofram magnificação. Seja P_0 um ponto luminoso distante S_0 de uma lente fina L como mostra a figura 5.6

Figura 5.6: Magnificação produzida por um sistema óptico

As partes das frentes de onda originadas em P_0 que incidem sobre L são focalizadas no ponto imagem P_1 . Se a magnificação for definida por

$$M = -\frac{S_1}{S_0} \quad (5.9)$$

Vê-se por semelhança de triângulos que

$$\theta_1 = \frac{\theta_0}{M} \quad (5.10)$$

Portanto se um sistema óptico apropriado for colocado diante de um sensor HS

$$\theta_{max} = \frac{Md}{2f} \quad (5.11)$$

$$\theta_{min} = \frac{Mp}{100f} \quad (5.12)$$

5.3 Reconstrução da Frente de Onda

Diversos métodos de reconstrução de uma frente de onda foram propostos. De modo geral, esses métodos podem ser classificados em *Zonais*: nos quais o perfil de $W(x, y)$ é obtido pela integração numérica dos dados obtidos ao longo da abertura estudada; e os métodos *Modais*: nos quais visamos uma superfície analítica que melhor representa $W(x, y)$ na referida abertura.

5.3.1 O Método Zonal

Neste método, o trecho amostrado da frente de onda é dividido em um número finito de regiões retangulares por uma grade de pontos regularmente espaçados sobre os quais desejamos determinar o valor de $W(x, y)$. [21]

A localização dos pontos da grade não coincidem necessariamente com aquela onde os valores de $\frac{\partial W(x, y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial W(x, y)}{\partial y}$ foram amostrados, como se pode ver nas figuras 5.7 e 5.8. Esta peculiaridade se manifesta tanto por influência da geometria da grade quanto pela localização dos pontos onde $\frac{\partial W(x, y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial W(x, y)}{\partial y}$ foram amostrados mas é o fator preponderante na escolha do método zonal apropriado. Para ilustrar esses conceitos

Figura 5.7: Configuração de Hudgin

Figura 5.8: Configuração de Southwell

usaremos as configurações adotadas por *Hudgin* e por *Southwell* e os seus respectivos métodos de cálculo. Na configuração de *Hudgin* (figura 5.7) $\frac{\partial W(x, y)}{\partial x}$ é amostrado entre dois pontos consecutivos da grade situados ao longo do eixo x e $\frac{\partial W(x, y)}{\partial y}$ e ao longo do

eixo y . Desta configuração vemos que

$$S_{i,j}^x = \frac{W_{i+1,j} - W_{i,j}}{a} \quad (5.13)$$

$$S_{i,j}^y = \frac{W_{i,j+1} - W_{i,j}}{a} \quad (5.14)$$

onde $S_{i,j}^x$, $S_{i,j}^y$ e $W_{i,j}$ são respectivamente $\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial W(x,y)}{\partial y}$ e $W(x,y)$ no ponto (i,j) .

Desta forma a fase $W(x,y)$ em um ponto qualquer da grade depende do ponto precedente e obedece às equações lineares

$$W_{i+1,j} = W_{i,j} + S_{i,j}^x a \quad (5.15)$$

$$W_{i,j+1} = W_{i,j} + S_{i,j}^y a \quad (5.16)$$

Na configuração adotada por *Southwell* $\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial W(x,y)}{\partial y}$ são amostrados nas vizinhanças dos pontos da grade permitindo assim que se tenha duas medidas por intervalo e que o valor da inclinação da frente de onda em ambas as direções sejam dadas pelo valor médio.

$$\frac{S_{i+1,j}^x + S_{i,j}^x}{2} = \frac{W_{i+1,j} - W_{i,j}}{a} \quad (5.17)$$

$$\frac{S_{i,j+1}^y + S_{i,j}^y}{2} = \frac{W_{i,j+1} - W_{i,j}}{a} \quad (5.18)$$

o que nos leva a equações de $W(x,y)$ da seguinte forma

$$W_{i+1,j} = W_{i,j} + \frac{S_{i+1,j}^x + S_{i,j}^x}{2} a \quad (5.19)$$

$$W_{i,j+1} = W_{i,j} + \frac{S_{i,j+1}^y + S_{i,j}^y}{2} a \quad (5.20)$$

5.3.2 O Método Modal

Ao invés de operar diretamente sobre os dados para obter $W(x, y)$, podemos aproximá-la por uma série de potências cujos elementos são os polinômios de zernike $Z(x, y)$, como segue.

$$W(x, y) = \sum_k a_k Z_k(x, y) \quad (5.21)$$

Com a adoção deste método; o problema se resume em encontrar os valores de a_k que melhor ajustam ao perfil de $W(x, y)$. [22]

Sejam $P(x, y)_i$ e $Q(x, y)_i$ dados por pelas derivadas parciais abaixo

$$P(x, y)_i = \frac{\partial W(x, y)_i}{\partial x} \quad (5.22)$$

$$Q(x, y)_i = \frac{\partial W(x, y)_i}{\partial y} \quad (5.23)$$

Onde $(x, y)_i$ são as coordenadas do i -ésimo ponto sobre a imagem formada pela frente de onda deformada. Com os valores de $P(x, y)_i$ e $Q(x, y)_i$ pode-se criar um vetor de diferenciais $\vec{P}$ tal que

$$\vec{P} = [P(x, y)_1, P(x, y)_2, \dots, P(x, y)_K, Q(x, y)_1, Q(x, y)_2, \dots, Q(x, y)_L]^T \quad (5.24)$$

Diferenciando 5.21 em relação a x e em relação a y obtemos

$$\frac{\partial W(x, y)_i}{\partial x} = \sum_k a_k \frac{\partial Z_k(x, y)_i}{\partial x} \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial W(x, y)_i}{\partial y} = \sum_k a_k \frac{\partial Z_k(x, y)_i}{\partial y} \quad (5.26)$$

Por substituição de 5.25 e 5.26 nas equações 5.22 e 5.23 vemos que

$$P(x, y)_i - \sum_k a_k \frac{\partial Z_k(x, y)_i}{\partial x} = 0 \quad (5.27)$$

$$Q(x, y)_i - \sum_k a_k \frac{\partial Z_k(x, y)_i}{\partial y} = 0 \quad (5.28)$$

Agora podemos usar o método dos mínimos quadrados para obter os valores de a_k que melhor aproximam $W(x, y)$. Esses valores podem ser reunidos em um vetor $\vec{A}$ dado pela expressão matricial

$$\vec{A} = (D D^T)^{-1} D \vec{P} \quad (5.29)$$

onde D é a matriz de diferenciais dos polinômios $Z_k(x, y)$ dada por.

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial Z_1(x, y)_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial Z_1(x, y)_K}{\partial x} & \frac{\partial Z_1(x, y)_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial Z_1(x, y)_L}{\partial y} \\ \frac{\partial Z_2(x, y)_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial Z_2(x, y)_K}{\partial x} & \frac{\partial Z_2(x, y)_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial Z_2(x, y)_L}{\partial y} \\ \frac{\partial Z_3(x, y)_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial Z_3(x, y)_K}{\partial x} & \frac{\partial Z_3(x, y)_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial Z_3(x, y)_L}{\partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Z_i(x, y)_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial Z_i(x, y)_K}{\partial x} & \frac{\partial Z_i(x, y)_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial Z_i(x, y)_L}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

5.3.3 Propagação dos Erros

A precisão com que os centróides são calculados e o algoritmo utilizado são as principais fontes de erros que afetam o processo de reconstrução da frente de onda.

Seja $W(x_i, y_i)$ o valor da frente de onda calculado no i -ésimo ponto da grande de referência. Na presença de erros este valor pode ser escrito como

$$W(x_i, y_i) = W_0(x_i, y_i) + \Delta\omega_i \quad (5.31)$$

onde $W_0(x_i, y_i)$ é o valor estimado e $\Delta\omega_i$ é o erro.

O valor de $\Delta\omega_i$ depende do erro α_i nos coeficiente de zernike que por sua vez depende do erro σ_i oriundos das coordenadas dos centróides. Usando a equação 5.21 e a ortogonalidade dos polinômios de Zernike podemos escrever $\Delta\omega_i$ e a sua média quadrática como segue

$$\Delta\omega_i = \sum_k \alpha_k Z_k(x, y) \quad (5.32)$$

$$(\Delta\omega_i)^2 = \frac{1}{N} \sum_i^N \langle (\Delta\omega_i)^2 \rangle \equiv \sum_k^N \langle \alpha_k^2 \rangle \quad (5.33)$$

Da equação 5.29 podemos deduzir que se C_A for um vetor contendo os erros α_i e C_P for um vetor contendo os erros σ_i então

$$C_A = (D D^T)^{-1} D C_P \quad (5.34)$$

logo cada elemento de C_A pode ser escrito como

$$\alpha_i = \sum_j (D D^T)^{-1} D \sigma_j \quad (5.35)$$

que combinado com a equação 5.33 nos dá a relação entre o erro na determinação do centróide e o erro médio quadrático na frente de onda.

$$(\Delta\omega_i)^2 = \sum_i \sum_j \sum_k [(D D^T)^{-1} D]_{ij} [(D D^T)^{-1} D]_{ki} \langle \sigma_j \sigma_k \rangle \quad (5.36)$$

5.4 Convertendo Aberrações em Dados Optométricos

Os termos rotulados por Z_5 , Z_4 , e Z_6 na tabela 4.2 referem-se à componente esférica e às componentes cilíndricas em 45° e 0° da frente de onda, quando representamos $W(x, y)$ por polinômios de zernike. Evidentemente, esses termos estão relacionados com as ametropias oculares clássicas¹ e a elas podem ser convertidos. Diversos métodos têm sido utilizados nesta conversão, desde os que se utilizam da geometria diferencial[23] até aqueles que usam apenas de argumentos geométricos convencionais[24].

A figura 5.9 mostra que podemos associar a cada componente de zernike da frente de onda um raio de curvatura médio dado por

$$R = \frac{w^2 + y^2}{2w} \quad (5.37)$$

onde w é a deformação produzida por aquele termo do polinômio.

Figura 5.9: Parâmetros para computar os erros diópticos

Assim sendo, os raios de curvatura associados aos três polinômios descritos são dados por

$$R_E = \frac{w_5^2 + y^2}{2w_5} \quad (5.38)$$

$$R_{45} = \frac{w_4^2 + y^2}{2w_w} \quad (5.39)$$

---

¹a miopia, a hipermetropia e o astigmatismo.

$$R_0 = \frac{w_6^2 + y^2}{2w_6} \quad (5.40)$$

onde $w_k = -a_k y$, a_k é o coeficiente de zernike correspondente e R_E , R_{45} , R_0 são os raios de curvatura associados à esfera, ao cilindro posicionado a 45° e ao cilindro posicionado a 0° , respectivamente. Se R_k estiver expresso em metros, os valores do astigmatismo e da miopia ou hipermetropia são respectivamente dados por

$$\Phi_C = -2\sqrt{\frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{R_{45}^2}} \quad (5.41)$$

$$\Phi_E = \frac{1}{R_E} \quad (5.42)$$

Conhecidos esses valores, podemos calcular o poder dióptrico total da lente e o ângulo do astigmatismo resultante, os quais podem ser expresso como segue

$$\Phi_T = \Phi_E + \frac{\Phi_C}{2} \quad (5.43)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{R_0}{R_{45}}\right) \quad (5.44)$$

6 O Olho Humano

6.1 Introdução

As informações que temos sobre o que nos cerca e a nossa percepção dos objetos e eventos visuais no nosso meio, não dependem apenas do estado desses objetos e eventos. Eles também dependem da natureza das imagens formadas pelos nossos olhos e da sua interpretação. Este processo, denominado visão, possui uma complexa sequência de eventos que une o estímulo que o desencadeia à sua real percepção. No meio desta cadeia encontra-se um versátil instrumento óptico capaz de formar imagens, controlar o fluxo de luz que chega à retina e movimentar-se de modo a ficar apontado para o objeto de interesse. O olho humano é um sistema óptico cujas características variam de indivíduo para indivíduo e também variam por efeito dos mais diversos fatores; sejam eles físicos, biológicos ou psicológicos. Neste capítulo faremos uma breve descrição do olho humano enfatizando, a título de simplificação, somente algumas das suas propriedades ópticas e biológicas.

6.2 Estrutura Biológica do Olho Humano

O olho é um complexo órgão sensorial que se desenvolveu a partir de primitivas células fotossensíveis existentes na superfície dos invertebrados[25]. Em grandes linhas o olho humano - esquematizado na figura 6.1 - pode ser descrito como uma esfera com aproximadamente 12 mm de raio mantida nesta forma por uma forte membrana flexível. Internamente a esta camada protetora o olho contém um conjunto de elementos que regula e focaliza o fluxo luminoso sobre uma camada de células fotossensíveis. Esses elementos são a íris, o cristalino e a retina. Sendo que a íris e o cristalino dividem o olho em dois compartimentos: a câmara anterior preenchida pelo humor aquoso e a câmara posterior preenchida pelo humor vítreo.

Figura 6.1: Esquema geral do olho

6.2.1 Córnea

A córnea recobre aproximadamente a sexta parte do globo ocular, tem espessura que varia entre $400\ \mu m$ e $700\ \mu m$, sendo mais espessa na periferia que no vértice e é composta por várias camadas distintas como mostra a figura 6.2.[26]

1. *Epitélio*: Tem espessura entre $39\ \mu m$ e $45\ \mu m$, protege a córnea contra grandes moléculas, contra a água e as substâncias tóxicas. É formada por aproximadamente seis camadas de células sendo que apenas as células da camada mais interna têm capacidade de se dividir. Desta forma a recomposição do epitélio se dá pelo movimento das células entre as camadas.
2. *Membrana de Bowman*: É formada principalmente por fibrilas de colágeno e tem espessura entre $8\ \mu m$ e $14\ \mu m$.
3. *Estroma*: É o tecido mais espesso ($500\ \mu m$) e corresponde a 90% da córnea. Constitui-se de aproximadamente 200 camadas de fibras de colágeno e de células elásticas como os ceratócitos. Em 1969 Hart e Farrel demonstraram a partir de um modelo teórico que a transparência da córnea se deve à regularidade na disposição dessas fibras de colágeno.
4. *Membrana de Decemet*: É uma fina, porém forte, camada de fibras de colágeno e forma uma barreira que protege a córnea contra infecções e ferimentos
5. *Endotélio*: É formado por uma camada de células hexagonais com espessura média de $6\ \mu m$ e tem importante papel na regulação das trocas entre o humor aquoso e a córnea.

Figura 6.2: Esquema geral da córnea

6.2.2 Humor Aquoso

O humor aquoso é um líquido transparente contendo sais e proteínas que preenche a câmara anterior do olho. Das proteínas presentes 1/3 são globulinas e 2/3 são albuminas. O humor aquoso é produzido no corpo ciliar e absorvido por uma rede de trabéculas para o canal de *Schelmm*. [27]

6.2.3 Cristalino

O cristalino é formado por um conjunto de tecidos transparente, não vascularizados e de diferentes índices de refração contidos dentro de uma cápsula elástica. Esta cápsula desempenha importante papel no processo de acomodação pois é ligada indiretamente ao músculo ciliar. A contração ou expansão deste músculo altera o perfil do cristalino que por sua vez altera o seu poder refrativo. Em adultos o poder refrativo do cristalino varia entre 19 D para a mínima acomodação e 30 D para a máxima acomodação.

6.2.4 Humor Vítreo

O humor vítreo é um gel transparente que preenche a câmara posterior do olho e é formado principalmente por água (de 98% a 99,7%), sais e proteínas solúveis. Possui também proteínas fibrosas, principalmente colágeno, que são responsáveis por sua estrutura.

6.2.5 Esclera

A esclera é um tecido fibroso de coloração branca com espessura variando entre 0,3 mm - nos tendões dos músculos extrínsecos - e 1,5 mm no pólo posterior. É constituída basicamente por fibras de colágeno e é pobre em vasos sanguíneos e terminações nervosas.

6.2.6 Retina

A retina é uma membrana transparente permeada por vasos sanguíneos e ramificações nervosas cuja função é converter o sinal luminoso em impulso nervoso para o cérebro. Possui espessura que varia de $50\ \mu m$ - na fóvea - a $600\ \mu m$ na região próxima à papila e para fins didáticos pode ser dividida em 10 camadas tendo cada uma delas funções ópticas e biológicas distintas (figura 6.3). São elas:

1. Epitélio pigmentado
2. Camada de fotorreceptores
3. Membranas limitadoras externa
4. Membranas limitadoras interna
5. Camada nuclear externa
6. Camada nuclear interna
7. Camada Plexiforme externa
8. Camada Plexiforme Interna
9. Camada de células ganglionares
10. Camada de fibras nervosas.

Figura 6.3: Esquema geral da retina

A luz que chega à retina sensibiliza a camada de fotorreceptores que é composta por dois tipos de células. Os bastonetes; dos quais existem cerca de 100 milhões distribuídos

pela retina com diferentes densidades, sendo que a máxima concentração ocorre numa região afastada aproximadamente 20° do centro da fóvea (figura 6.4). E os cones que também estão distribuídos por toda retina mas, sua maior concentração ocorre na fóvea. Esta região tem diâmetro aproximado de $1,5\text{ mm}$ e compreende aproximadamente 5° do campo visual.

Figura 6.4: Distribuição de cones e bastonetes

6.3 Estrutura Óptica do Olho Humano

Embora varie de um indivíduo para outro, o olho humano desacomodado possui poder dióptrico médio de 60 D sendo que destes; 43 D provém da córnea. O cristalino contribui com um poder dióptrico que dependendo do seu estado de acomodação varia, em média, entre 17 D e 30 D , e que ao ser combinado com o poder dióptrico da córnea, dá ao olho capacidade para focalizar objetos situados a distâncias que vão de 25 cm ao infinito. Além dos citados, outro elemento ocular que exerce grande influência no desempenho óptico do olho é a íris pois, seus movimentos de expansão e contração permitem alterar a profundidade de foco, controlar a quantidade de luz que entra no olho e fazer com que sua abertura relativa varie entre $f/2.5$ e $f/17$.

O valor exato do poder dióptrico do olho é difícil de ser medido *in vivo* portanto esses valores são inferidos de dados experimentais como índices de refração, espessuras, raios de curvatura e dispersão dos elementos oculares. Com dados deste tipo ou apenas com argumentos teóricos diversos autores construíram modelos oculares (figura 6.5) de onde é possível obter outros parâmetros sobre a óptica do olho e a visão.

Figura 6.5: Medidas oculares médias

6.3.1 Eixo Óptico e Eixo Visual

Em sistemas ópticos convencionais o centro de curvatura de cada superfície refratora está localizado sobre o eixo óptico. Como olho não é um sistema óptico centrado, não possui *a priori* um eixo óptico verdadeiro e este conceito só pode ser aplicado se o redefinirmos como sendo o eixo que cruza , com o menor erro possível, os centros das esferas que melhor representam as superfícies oculares.

Se um raio luminoso chega ao olho percorrendo um caminho paralelo ao eixo óptico, não passará pela fóvea ao ser refratado. Logo, também deve existir um eixo ocular posicionado de tal modo que se um feixe luminoso incidir sobre a pupila ocular paralelamente a ele, será focalizado sobre a fóvea.¹ Este eixo é denominado *eixo visual* e forma com o eixo óptico do olho um ângulo de aproximadamente 5° como mostra a figura 6.6

Figura 6.6: Eixos oculares

¹Numa definição mais rigorosa este eixo além de passar pela fóvea também passa pelo ponto nodal do olho

6.3.2 Campo Visual

No plano horizontal o campo visual tem aproximadamente 165° sendo que 105° são relativos ao lado temporal e 60° relativos ao lado nasal, valores estes que variam entre indivíduos pois depende da distância entre as pupilas, da extensão da retina e da obstrução provocada pelo nariz (figura 6.7). No plano vertical o campo visual apresenta ângulo médio de 140° e assim como na direção horizontal apresenta uma região onde os campos do olho esquerdo e direito se sobrepõem. Nesta região de campo binocular a sensibilidade, a acuidade e a capacidade estereoscópica da visão são potencializadas.

Figura 6.7: Campo visual médio

6.3.3 Acuidade Visual

Existem várias formas de se estimar a acuidade visual. A mais simples delas consiste em calcular o poder de resolução espacial do olho[28]. Supondo que a região de interesse seja a fóvea e sabendo que nesta região o espaçamento médio entre as células fotossensíveis é de $2.5 \mu m$ concluímos que o poder de resolução é de 200 ciclos/mm . A este valor devemos aplicar um fator de correção que representa os efeitos da difração, das aberrações oculares, da degradação proveniente da flutuação na densidade espacial das células fotossensíveis e do desalinhamento entre estas e a imagem formada. Atualmente, o valor aceito para este fator é 0.55 o que reduz a resolução espacial do olho para 110 ciclos/mm tornando-o capaz de identificar frequências espaciais de $7,5 \text{ ciclos/mm}$ em um objeto colocado a 250 mm de distância. Uma forma prática de se medir a acuidade visual é através da carta de *Snellen*[29] (figura 6.8) . Esta carta contém letras dimensionadas de maneira que exista uma relação angular fixa (5 : 1) entre o tamanho da letra e a espessura da sua linha quando observada a distância apropriada.

Figura 6.8: Carta de Snellen

Segundo este método, um indivíduo tem acuidade visual normal ou 1 (ou 20/20 no jargão médico) quando situado a 6 metros de distância da carta de *Snellen* for capaz de identificar corretamente uma letra cujo corpo perfaça ângulo equivalente a 5 minutos de arco.

A acuidade visual depende de muitos fatores tais como o brilho e o contraste dos componentes da cena observada e também da posição sobre a retina onde se formou a imagem. As figuras 6.9, 6.10, 6.11 ilustram essas relações.

Figura 6.9: Variação da acuidade visual por região da fóvea

Figura 6.10: Variação da resolução visual com o contraste da cena

Figura 6.11: Variação da acuidade visual com o brilho da cena e a abertura pupilar

6.3.4 Adaptação e Sensibilidade

A menor quantidade de luz que pode ser detectada pelo olho humano depende do nível de iluminação ambiente no qual ele se encontra. A este processo dá-se o nome de adaptação e ocorre quando a redução da iluminação estimula a dilatação da pupila e a sensibilidade retina provocada por sua vez pela troca da visão baseada nos cones por outra baseada nos bastonetes. A sensibilidade do olho também depende do comprimento de onda da luz. Sob condições normais de iluminação o processo visual é dominado pelos cones que são mais sensíveis a comprimentos de onda situados entre 400 nm e 700 nm com máxima eficiência em 555 nm . Neste estágio do processo visual é possível ver cores e a resposta espectral do olho é denominada fotópica. Para baixos níveis de iluminação o processo visual é dominado pelos bastonetes que são mais sensíveis a comprimentos de onda situados entre 380 nm e 630 nm com máxima eficiência em 507 nm . Neste estágio não se pode distinguir cores e a resposta espectral do olho é denominada escotópica (figura 6.12).

Figura 6.12: Resposta espectral do olho

7 *Materiais e Métodos*

7.1 Introdução

Por convenção, o local apropriado para a avaliação das aberrações de um sistema óptico é a sua pupila de entrada ou de saída. Quando esta avaliação é feita por meio do método de *Hartmann* o processo torna-se muito simples e resume-se em posicionar o sensor HS no plano pupilar, alinhá-lo corretamente e tomar a quantidade de dados adequada. Em virtude das características ópticas e morfológicas do olho humano este processo, de largo emprego em sistemas ópticos convencionais, não pode ser utilizado por diversos fatores.

Primeiro, as pupilas de entrada e saída situam-se na parte interna do olho humano não sendo possível posicionar o sensor HS sobre elas.

Segundo, a ação de agentes químicos, a iluminação ambiente e o estado psicológico do paciente alteram as dimensões pupilares.

Terceiro, o caminho de entrada e de saída da luz é o mesmo e não há possibilidade de retro-iluminar o olho. Portanto o sensor HS e a fonte de iluminação não podem estar sobre o mesmo eixo.

Um instrumento para investigar as aberrações oculares por meio do método de *Hartmann* deve ser então cuidadosamente projetado para contornar as restrições citadas. Neste capítulo descreveremos o desenvolvimento de um protótipo de *Analizador de Frente de Onda* (AFO) para uso oftalmológico, o seu princípio de funcionamento e os seus componentes.

7.2 O Analisador de Frente de Onda

A figura 7.1 mostra o protótipo do analisador de frente de onda construído. Este é formado por três telescópios dispostos na forma triangular e opticamente conectados por meio do divisor de feixes *BS*. Esses telescópios têm a estrutura em alumínio que suporta e mantém alinhados os componentes ópticos e são recobertos internamente por uma película antirefletora. O telescópio *T3*, na sua configuração básica possui magnificação unitária e um mecanismo que lhe permite alterar a separação entre os seus componentes ópticos e desta forma alterar a vergência do feixe luminoso que incide no olho. O telescópio *T1* têm magnificação fixa 0,5 e é coaxial ao telescópio *T2* que possui três versões com diferentes valores de magnificação - nominalmente 4, 2, e 1 - as quais em combinação com *T1* resultam nas magnificações 2, 1 e 0,5 que permitem examinar pupilas oculares com diâmetros entre 2,0 e 9,0 mm com máximo aproveitamento da área útil do sensor. Posicionado entre *BS* e *T3* está um conjunto intercambiável de filtros e polarizadores que servem para controlar a intensidade da radiação que incide no olho assim como compatibilizar as suas propriedades de polarização com *BS*.

Na extremidade externa de *T3* encontra-se um alojamento para um pequeno conjunto colimador ao qual a radiação proveniente da fonte de luz é conectada por meio de uma fibra óptica.

Na extremidade de *T2* está situado um sensor HS composto por uma matriz de 31x24 microlentes tendo cada uma delas 0,198 mm de abertura e 15,483 mm de distância focal e por uma câmera CCD COHU 2122. Este conjunto é fabricado pela *Wavefrontsciences* e detecta irradiâncias entre 350 nW/cm² e 10 mW/cm².

Do ponto de vista funcional o instrumento pode ser dividido em dois blocos. O bloco iluminador formado por *T3*, *BS* e *T1*; e o bloco coletor formado por *T1*, *BS* e *T2*. O bloco iluminador projeta dentro do olho um feixe de luz polarizada e o bloco coletor capta a luz espalhada pela retina projetando-a sobre o sensor HS.

Figura 7.1: Esquema geral do protótipo de AFO

7.3 Princípio de Funcionamento

A luz da fonte S é colimada por uma lente condensadora e forma um feixe paralelo com 1 mm de diâmetro. Este feixe passa por $T3$ e por um filtro neutro N onde tem sua intensidade adequadamente atenuada e em seguida o feixe atinge BS onde é dividido (50/50) e polarizado. A componente com polarização p atravessa BS e é focalizada sobre um sensor usado para monitorar a potência luminosa da fonte S . A componente com polarização s é defletida em 90° , passa por $T1$ e é focalizada pelo olho sobre uma pequena região da retina. O tamanho desta região varia de acordo com o estado de acomodação do olho e tem grande impacto sobre as dimensões da mancha luminosa produzida por cada microlente do sensor HS. Quando o paciente for míope ou hipermetrópe a focalização do feixe sobre a retina é auxiliada pelo afastamento ou pela aproximação das lentes de $T3$.

A parte da luz espalhada pelo fundo do olho emerge pela pupila ocular e é levada ao sensor HS por $T1$, BS e $T2$. Em BS a componente de polarização p da luz são bloqueadas chegando ao sensor apenas a a componente de polarização s .

Figura 7.2: Princípio de funcionamento do protótipo de AFO

7.4 O Sistema Óptico

Devido as características ópticas e morfológicas do olho humano e do método utilizado para examiná-lo, a principal tarefa do sistema óptico do *AFO* deve ser reproduzir com fidelidade no plano do sensor HS a imagem da pupila ocular e simultâneamente a forma da frente de onda que desta emerge, no momento do exame.

Podemos abordar este problema usando uma construção óptica simples como mostra a figura 7.3(A). Nesta, uma lente com distância focal f distante $S_o > f$ produz uma imagem da pupila ocular sobre o plano do sensor HS situado a uma distância S_i da lente. Se uma frente de onda plana emerge da pupila ocular, podemos ver, da construção adotada, que esta chega ao plano do sensor HS como uma onda esférica divergente. Portanto este sistema não reproduz com fidelidade o binômio pupila-frente de onda.

Uma abordagem alternativa envolve o uso de duas lentes configuradas na forma de telescópio, como esquematizado na figura 7.3(B). Nesta configuração tanto a pupila ocular quanto a frente de onda terão suas formas reproduzidas sobre o plano do sensor HS, desde que este seja colocado no plano focal da lente $L2$ e a pupila ocular, no plano focal da lente $L1$. Além do exposto, esta configuração telescópica facilita o processo de magnificação da imagem, pela correta combinação das lentes.

Figura 7.3: Imagem da pupila e reprodução da frente de onda

Na figura 7.4 está esquematizado o sistema óptico do *AFO*. Este é composto por dois telescópios coaxiais entre os quais é interposto um cubo divisor de feixes que por sua vez tem a função de acoplar ao eixo óptico do sistema a luz proveniente de um diodo superluminescente. O cubo divide o feixe em componentes de polarização sendo que a componente ‘s’ é desviada na direção do eixo óptico enquanto a componente ‘p’ é transmitida livremente. Entre a fonte de luz e o divisor de feixes está situado um sistema telescópico auxiliar que permite alterar as condições de vergência do feixe luminoso.

Figura 7.4: Esquema de óptico do AFO

Todo o conjunto foi otimizado para introduzir a mínima quantidade de aberrações nas frentes de ondas amostradas e como podemos ver na figura 7.5 versões com magnificações 0, 5, 1 e 2 foram elaboradas para serem empregadas com diferentes tamanhos pupilares. Todos os componentes ópticos utilizados possuem qualidade óptica $\frac{\lambda}{4}$, são recobertos por camadas antirefletoras otimizadas para a banda 750–850 nm e possuem alta transmissividade óptica entre 400–1100 nm.

Figura 7.5: Composição das magnificações ópticas do AFO

A fonte de luz empregada é um diodo superluminescente (SLD) infravermelho (850 nm e $\Delta\lambda = 40\text{ nm}$) Anritsu SD1S101C regulado para que a potência óptica introduzida no olho não exceda $100\text{ }\mu\text{W}$. Outras fontes de luz também podem ser empregadas particularmente lasers de diodo e de *HeNe*. A figura 7.6 mostra o espectro de emissão do SLD.

Figura 7.6: Espectro de emissão do SLD

7.5 O Software

O programa de coleta e processamento de sinais foi desenvolvido em *Matlab 6.0* e parcialmente em linguagem *C*. Está dividido em 4 módulos lógicos: *Controle e Aquisição de Dados*, *Processamento da Imagem*, *Cálculo da Aberrações* e *Apresentação dos Resultados*. Todos os módulos foram projetados para funcionar de forma independente e quando em operação conjunta, esta se dá por meio de um protocolo onde estão definidas as formas de comunicação e troca de dados. Para o usuário esta comunicação é invisível e ao final da execução de cada módulo é produzido um arquivo texto através do qual podemos rastrear erros de execução nas funções implementadas, trocar dados com programas similares e programas específicos para engenharia óptica. Na figura 7.7 podemos ver a tela principal do programa

Figura 7.7: Interface principal do programa

7.5.1 Módulo de Controle e Aquisição de Dados

Este módulo opera diretamente sobre o hardware de captura de imagens e foi implementado para operar com diferentes dispositivos tais como Matrox Meteor II, Matrox Meteor e Epix PIXCI. Na versão utilizada neste trabalho a captura de imagens foi feita por uma *'framegrabber'* Matrox II PCI de 8 bits. A taxa de transmissão de dados é da ordem de 130 MB/s a 30 quadros/s e as imagens produzidas podem ter tamanhos variáveis indo até 800 x 600 pixels.

Neste módulo também se encontra alguns pontos de entrada onde podemos configurar o programa para operar com sensores HS diferentes do utilizado neste trabalho. A figura 7.8 ilustra um desses pontos de entrada.

Figura 7.8: Pontos de entrada do módulo de controle e aquisição

7.5.2 Módulo de Processamento da Imagem

Este módulo recebe as imagens de referência e de dados¹, os valores do *threshold* e da magnificação óptica sob a qual as imagens foram tomadas. O processamento é realizado inicialmente na imagem de referência e se dá em várias etapas. Na primeira delas o ruído é reduzido pela aplicação do *threshold*. Em seguida é delimitada uma região de interesse (ROI) em torno de cada ponto luminoso da imagem no qual foram encontradas as características necessárias para qualificá-lo como resultante da focalização de um trecho da frente de onda pela matriz de microlentes. Cada ROI delimita uma região de 20 x 20 pixels em cujo centro está situado cada ponto luminoso. Na terceira etapa deste processo são calculadas as coordenadas (x,y) do centróide de cada ROI e a sua intensidade. Esta etapa é complementada com a gravação das referidas coordenadas em um arquivo texto.

Na imagem de dados o processamento é semelhante; exceto a etapa relativa à criação e posicionamento das ROIs, pois são utilizadas aquelas produzidas para a imagem de referência. A figura 7.9 ilustra parte deste processo.

Figura 7.9: Imagem de referência com malha de ROIs

---

¹No contexto utilizado, imagem de dados é aquela que desejamos comparar com a imagem de referência

7.5.3 Módulo de Cálculo das Aberrações

Este módulo compara a posição dos centróides encontrados dentro de cada ROI e determina seu deslocamento Δx e Δy . A partir desses dados são calculados os coeficientes de zernike e reconstruída a frente de onda. Considerando que os polinômios de Zernike são ortogonais apenas dentro de um círculo de raio unitário, uma máscara é aplicada às imagens definindo uma região circular na qual as posições dos centróides são normalizadas de forma obedecer esta condição. É possível definir a posição da máscara sobre a imagem, escolhendo o centro desta e um ponto da circunferência. Os centróides contidos dentro da pupila selecionada na imagem de referência (figura 7.10) e os respectivos centróides da imagem de dados são utilizados no cálculo dos coeficientes dos polinômios de Zernike.

Figura 7.10: Aplicação da máscara sobre uma imagem

7.5.4 Módulo de Apresentação dos Resultados

Esta é a interface gráfica com o usuário final. Fornece diversos tipos de gráficos e recursos que ajudam a visualizar e quantificar as aberrações. A partir dos coeficientes encontrados é possível visualizar gráficos de superfície e de curvas de nível para cada aberração óptica definida entre os primeiros quinze polinômios de Zernike além de um gráfico de barras com os valores de cada coeficiente. A figura 7.11 mostra o resultado da operação deste módulo. Nele podemos observar um mapa de contorno referente a uma frente de onda.

Figura 7.11: Tela principal do programa

8 *Resultados*

8.1 Introdução

Quem constrói qualquer instrumento metrológico deve fornecer a quem vai operá-lo pelo menos duas informações fundamentais: o maior e o menor valor da grandeza física que este instrumento é capaz de medir. No caso do protótipo de instrumento que nos propusemos a desenvolver, essas duas informações só podem ser obtidas a partir das dimensões físicas do sensor Hartmann-Shack e dos pequenos deslocamentos Δx e Δy que a variação de fase provoca na posição de focalização dos trechos amostrados da frente de onda.

Neste capítulo descreveremos uma série de testes executados com o objetivo de caracterizar o protótipo tanto em relação à sua precisão quanto o maior valor de variação de fase que este pode medir. Os valores numéricos produzidos por esses testes iniciais devem ser vistos com reservas pois ainda carecem de uma comprovação por meio de algum instrumento calibrador como um interferômetro ou outro sensor HS.

8.2 Caracterização do Ruído do CCD

É sabido que as principais fontes de ruído em câmeras CCD são as de origem térmica e eletrônica. O ruído térmico é produzido pela movimentação de elétrons livres no meio material do qual é fabricado o CCD. Já o ruído eletrônico é introduzido pelos circuitos que coletam e transmitem os sinais da câmera e é proporcional à taxa de coleta e transmissão destes sinais.

A inexistência de um sistema de refrigeração, aliada a elevada taxa de transmissão de dados permite-nos presumir que o ruído do CCD empregado neste trabalho seja muito alto quando comparado àquele tolerado para este tipo de instrumento. Essas restrições nos levaram a procurar a melhor relação *signal-ruído* do sistema, manipulando o tempo de exposição do CCD à luz.

Com esta finalidade montamos um experimento para determinar o valor médio do ruído por pixel do CCD. O método consiste em bloquear o acesso da luz ao CCD tomar vários grupos de imagens, cada um deles com tempo de exposição diferente e calcular o valor médio para cada grupo.

Os resultados obtidos mostram (figura 8.1) que o ruído permanece estável para todos os tempos de exposição, o que nos leva a concluir que a maior contribuição não é do ruído térmico mas sim do eletrônico.

Figura 8.1: Ruído do CCD

8.3 Caracterização do Protótipo de AFO

O ponto de focalização de cada trecho amostrado da frente de onda movimenta-se sobre o CCD por influência da turbulência do ar, das vibrações mecânicas e da variação na intensidade da luz incidente. Este fenômeno limita a precisão com que as coordenadas X_c e Y_c do centróide de cada ponto de focalização podem ser calculadas o que, por sua vez, limita a precisão na reconstrução da frente de onda. Torna-se então necessário elaborar um procedimento experimental para estimar e reduzir o erro cometido no cálculo dessas coordenadas a partir das quais poderemos caracterizar o protótipo de AFO. Este procedimento, esquematizado na figura 8.2, mostra que o feixe

Figura 8.2: Montagem para a caracterização do AFO

luminoso gerado por um laser de HeNe ($\lambda = 632.8 \text{ nm}$) foi focalizado sobre um micro-furo ($25\mu\text{m}$) por uma objetiva de microscópio com aumento de 40X. A luz que emergiu deste *filtro espacial* foi passada por uma lente de boa qualidade óptica produzindo então um feixe colimado cujo diâmetro pode ser controlado por um diafragma localizado sobre a pupila de entrada do AFO. O sistema óptico foi montado de modo que este diafragma e a matriz de microlentes formassem planos conjugados nos quais as frentes de onda fossem iguais exceto, talvez, pelas as aberrações introduzidas por meio dos componentes ópticos e pelo efeito da magnificação. Em seguida várias imagens foram tomadas e tratadas pela aplicação de um nível adequado de *threshold* para reduzir o ruído. As coordenadas dos centróides de cada ponto luminoso foram calculadas pela forma habitual dada pelas equações 8.1 e 8.2

$$X_c = \frac{\sum_i \sum_j x_i I_{ij}}{\sum_i \sum_j I_{ij}} \quad (8.1)$$

$$Y_c = \frac{\sum_i \sum_j y_i I_{ij}}{\sum_i \sum_j I_{ij}} \quad (8.2)$$

onde x , y e I são as coordenadas e a intensidade do i -ésimo pixel.

A figura 8.3 mostra a amplitude de flutuação da posição de um ponto luminoso quando comparamos as coordenadas do seu centroide obtidos em 10 imagens diferentes. Observamos que esta amplitude situou-se num intervalo de aproximadamente 1/10 do tamanho do pixel ou seja, 10 vezes maior que o valor pretendido. Observamos também que esta flutuação aumenta quando aumenta a distância entre a fonte de luz e o protótipo de AFO e que é fortemente dependente do nível de *threshold* aplicado. Para reduzir esta flutuação calculamos os centróides dos pontos luminosos em várias

Figura 8.3: Flutuação na posição dos centróides

imagens e obtivemos um valor médio para cada um deles. O processo para a obtenção da media findava quando o desvio padrão obtido da posição de cada centróide atingisse um valor próximo a $p/100$ ou se estabilizasse em torno de algum valor. A figura 8.4 mostra o desvio padrão s_x e s_y para as coordenadas X_c e Y_c obtidos a partir de 10 imagens distintas. Esses valores foram obtidos por estabilização no processo e os seus valores médios foram $s_x \leq 0.015 p$ e $s_y \leq 0.017 p$, plenamente satisfatórios para o

emprego desejado. Tomando agora s_y como sendo o menor deslocamento detectável

Figura 8.4: Valor médio dos centróides

pelo sensor HS podemos caracterizar o nosso protótipo de AFO com o uso das equações da seção 5.23 e das dimensões do sensor HS. Além do valores gerais, também estamos interessados em caracterizá-lo quando este opera com pupilas circulares. Com esta finalidade escolhemos pupilas com diâmetros 3.5 e 4.4 mm pois essas possuem o formato e as dimensões aproximadas das pupilas oculares. Os valores obtidos foram colocados na tabela 8.1.

Símbolo	Valor	Magnificação
θ_{max}	6,39 $mrad$	1
W_{max}	40,51 μm (64λ)	1
θ_{min}	10,76 μrad	1
W_{min}	2,13 nm ($\lambda/297$)	1
ΔW	12,05 nm ($\lambda/52$)	1
$\Delta W_{3.5mm}$	9,04 nm ($\lambda/70$)	1
$\Delta W_{4.4mm}$	9,99 nm ($\lambda/53$)	1

Tabela 8.1: Características do AFO

8.4 Testes Com Lentes Oftalmológicas

Após a caracterização empregamos o AFO para avaliar duas lentes oftalmológicas com poderes diópticos nominais de $-0,75 \pm 0,1 D$ na sua componente cilíndrica e $0,0 \pm 0,1 D$ na sua componente esférica, para a lente **L1** e $2,0 \pm 0,1 D$ na sua componente esférica e $0,0 \pm 0,1 D$ na sua componente cilíndrica, para a lente **L2**. O experimento foi montado, primeiro com **L1** e em seguida com **L2**, como mostra a figura 8.5.

Figura 8.5: Montagem para a caracterização das lentes oftalmológicas

Ao aparato experimental usado na caracterização, introduzimos a lente oftalmológica e a colocamos sobre o plano da pupila de entrada do AFO e orientamos o seu eixo cilíndrico na direção da coordenada x do sensor HS com precisão de $0,5^\circ$. Se este alinhamento estiver correto todo o astigmatismo presente na frente de onda deverá se manifestar na direção do eixo y do sensor HS e consequentemente no valor do coeficiente de zernike pertinente. Após o processo de alinhamento capturamos 10 imagens e com média dos centróides obtidos calculamos os coeficientes de zernike, reconstruímos a frente de onda e dessa extraímos as aberrações de *Seidel* e o poder dióptrico da lente sob análise, como descrito na seção 5.4. Os resultados obtidos para os valores do poder dióptrico e da direção do astigmatismo estão na tabela 8.2, e na figura 8.6 estão representados os valores dos coeficientes de zernike.

Nas figuras 8.7 até 8.15 estão ilustrados em gráficos de contorno e tridimensionais, a forma da frente de onda $W(x, y)$ obtidas da lente **L1** e a sua decomposição nas aberrações de primeira e terceira ordem acompanhadas dos seus respectivos valores. A unidade de medida utilizada nesta representação é o comprimento de onda do laser de HeNe (632,8 nm), e as dimensões da pupila são representadas em milímetros.

Lente	Componente	Valor Nominal	Valor Medido
L1	Esférico	$0,0 \pm 0,1 D$	$-0,172 \pm 0,003 D$
L1	Cilíndrico	$-0,75 \pm 0,1 D$	$-0,678 \pm 0,005 D$
L1	Ângulo	$0,0^\circ$	$-0,16^\circ$
L2	Esférico	$-2,0 \pm 0,1 D$	$-2.150 \pm 0,020 D$
L2	Cilíndrico	$0,0 \pm 0,1 D$	$0,310 \pm 0,007 D$
L2	Ângulo	$0,0^\circ$	$32,19^\circ$

Tabela 8.2: Características das lentes oftalmológicas

Figura 8.6: Coeficientes de Zernike obtidos de L1

Figura 8.7: Representação da frente de onda $W(x,y)$ obtida de L1

Figura 8.8: Inclinação no eixo X em $W(x,y)$ obtida de L1

Figura 8.9: Inclinação no eixo Y em $W(x,y)$ obtida de L1

Figura 8.10: Astigmatismo a 45° em $W(x,y)$ obtida de L1

Figura 8.11: Desfocalização em $W(x,y)$ obtida de L1

Figura 8.12: Astigmatismo a 0° em $W(x,y)$ obtida de L1

Figura 8.13: Coma no eixo X em $W(x,y)$ obtida de L1

Figura 8.14: Coma no eixo Y em $W(x,y)$ obtida de L1

Figura 8.15: Aberração esférica em $W(x,y)$ obtida de L1

8.5 Testes Com Olho Artificial

O experimento foi montado conforme mostra a figura 8.16. Inicialmente o AFO foi configurado para a magnificação unitária e teve seu divisor de feixe original substituído por outro com as mesmas dimensões mas, desprovido das propriedades de polarização. Esta troca aumentou a relação *signal-ruído* no sensor HS pois permitiu a passagem de grande parte da luz altamente polarizada refletida pelo olho artificial. Em seguida o feixe de laser HeNe ($4\mu W$) foi alinhado com o eixo óptico do AFO.

O olho foi calibrado com um autorefrator de modo a não apresentar erro dioptrico, alinhado com o eixo óptico do AFO e com seu obturador completamente aberto (8 mm) foram tomadas 20 imagens com as quais produzimos os dados de referência. Após isto regulamos a pupila ocular para 4 mm , alteramos o poder dióptrico do olho para simular um erro de aproximadamente -1 D e tomamos novamente 20 imagens. Esta quantidade de imagens se fez necessária para podermos eliminar, por meio de média, o *speckle* produzido pela reflexão da luz coerente pela superfície rugosa do olho artificial.

Com os dados coletados calculamos os coeficientes para os 15 primeiros termos dos polinômios de zernike e com eles reconstituímos a topografia da frente de onda, mostrada na figura 8.17. Na figura 8.18 a frente de onda representada teve seu erro de focalização excluído e na figura 8.19 foram excluídos os erros de focalização e o astigmatismo. Em todas as figuras citadas, as coordenadas horizontais e verticais têm milímetros como dimensão e as curvas de nível são medidas em comprimentos de onda do laser de HeNe. Na figura 8.20 são mostrados os coeficientes dos 15 primeiros termos dos polinômios de zernike.

Figura 8.16: Montagem para testes com olho artificial

Figura 8.17: Mapa de aberrações do olho artificial

Figura 8.18: Mapa de aberrações sem a desfocalização

Figura 8.19: Mapa de aberrações sem desfocalização e astigmatismo

Figura 8.20: Coeficientes de Zernike

9 Conclusões

Os resultados obtidos mostram que o protótipo desenvolvido possui resolução suficiente para detectar variações de $0,01\mu m$ ao longo da superfície de uma frente de onda com $4,5\text{ mm}$ de diâmetro. Cotejando este resultado com aquele obtido por *Liang e Williams* ao examinarem olhos humanos *in vivo*[30], constatamos que esta resolução é 5 vezes superior àquela considerada suficiente para esta tarefa.

A máxima deformação na frente de onda que pode ser detectada sem ambigüidades é de aproximadamente $40\mu m$ a qual nos permite determinar erros dióptricos situados entre $-2,5\text{ D}$ e $+2,5\text{ D}$ quando examinamos pupilas oculares sob iluminação ambiente. Os testes efetuados também demonstraram que este protótipo possui capacidade para detectar eventuais aberrações de terceira ordem na frente de onda analisada.

Outra característica importante advém da possibilidade de amostrarmos a mesma quantidade de pontos sobre pupilas oculares com diâmetros entre $2,2$ e $9,0\text{ mm}$ manipulando, apenas, as propriedades de magnificação do instrumento. Esta flexibilidade dá aos instrumentos baseados no método de *Hartmann* maior precisão e fidelidade que as obtidas por aberroscópios convencionais.

Subjacente à excepcional simplicidade do método de *Hartmann*, reside grande quantidade de entraves de ordem técnica e teórica que podem comprometer os resultados obtidos ou até mesmo invalidá-los. Abordaremos aqui alguns desses problemas e quando possível as soluções implementadas.

Talvez, o mais importante problema encontrado quando utilizamos este método em instrumentos oftalmológicos, seja a dificuldade de associar cada ponto luminoso existente na imagem de referência com o seu correspondente na imagem produzida pela frente de onda deformada pois, esses pontos são morfologicamente idênticos e se encontram em posições diferentes nas duas imagens. Alguns autores introduziram uma solução que envolve o cálculo do centróide de ambas as imagens e também, a suposição que essas coordenadas devam coincidir-se quando as imagens forem superpostas. Este

método funciona razoavelmente bem em situações onde as pupilas são uniformemente iluminadas e as distorções nas frentes de onda, muito pequenas. Mas, consideramos que não pode ser aplicado em pupilas oculares pois, estas não apresentam iluminação uniforme tanto por ação do efeito *Stiles-Crowford*, quanto por eventuais opacidades no tecido ocular (catarata, por exemplo). Implementamos uma solução, partindo da constatação que todo sistema óptico, seja o que gerou a onda de referência quanto o que gerou a onda deformada, estavam alinhados com o eixo óptico do instrumento de medida quando esta foi realizada. Como as partes da frente de onda próximas ao eixo óptico do sistema sofrem poucas deformações, qualquer ponto luminoso situado nas proximidades do local onde este eixo intercepta o CCD, deve sofrer poucas alterações na sua posição em ambas as imagens e provavelmente foi produzido pela mesma microlente. Encontrado este "primeiro ponto" resta o problema de associar os pontos luminosos remanescentes. O método que utilizamos neste caso é aquele adotado pela maioria dos autores. Consiste em atribuir a cada ponto luminoso da imagem de referência uma região de interesse (ROI), dentro da qual esperamos encontrar o seu homólogo quando superpomos esta imagem com aquela produzida pela onda deformada.

O segundo problema que desejamos abordar diz respeito ao cálculo das coordenadas do centróide de cada ponto luminoso. Constatamos que essas coordenadas são fortemente influenciadas pelo valor do *threshold* aplicado para eliminar o ruído da imagem. Portanto devemos estabelecer um procedimento para otimizar o valor. Adicionalmente, verificamos que os pontos luminosos não possuem a mesma intensidade, logo um *threshold* otimizado para uma ROI não está otimizado para outra qualquer. Este assunto é pouco abordado na literatura existente e os exemplos encontrados leva-nos a acreditar que um valor de *threshold* é adotado e aplicado em toda imagem, sem nenhuma otimização. Para este problema introduzimos uma nova solução na qual o *threshold* é otimizado para cada ROI e o seu valor é determinado como uma fração da maior intensidade de um pixel que comprovadamente pertença a um ponto luminoso situado dentro da ROI.

Outro problema que desejamos destacar está relacionado ao emprego dos polinômios de Zernike. Para representar a frente de onda e as aberrações nela contida utilizamos os polinômios de Zernike pois, estes formam uma base ortogonal no espaço das funções. Esta afirmação é verdadeira no domínio do espaço contínuo mas não é necessariamente verdadeira no domínio do espaço discreto. No método de *Hartmann*, a frente de onda é amostrada em pontos discretos ao longo da pupila e portanto os polinômios de Zernike não podem ser aplicados, como descrito na seção 5.4, para reconstruir

a frente de onda. Neste caso a solução é elaborar um novo conjunto de polinômios que sejam ortogonais no espaço discreto, reconstruir a frente de onda com base neste conjunto e depois reconvertê-la à representação com os polinômios de zernike.

Referências

- [1] **Smirnov, M.S.** (1962). *Measurement of the wave aberration of the human eye*. Biophysics, v.7, p.766-795. **Apud: Charman, W.N.** (1991). *Wavefront aberration of the eye: A Review*. Optometry & Vision Science, v.68, p.574-583.
- [2] **Van den Brink, G.** (1962). *Measurement of the geometrical aberrations of the eye*. Vision Res, v.2, p.233-244.
- [3] **Tscherning, M.** (1894). *Die monochromatischen des menschlichen auges*. Z Psychol Physiol Sinn, v.6, p.456-471. **Apud: Charman, W.N.** (1991). *Wavefront aberration of the eye: A Review*. Optometry & Vision Science, v.68, p.574-583.
- [4] **Walsh, G.; Charman, W.N.; Howland, H.C.** (1984). *Objective technique for the determination of monochromatic aberrations of the human eye*. J Opt Soc Am A, v.1, p.987-992.
- [5] **Platt, B.C.; Shack, R.** (2001). *History and principles of Shack-Hartmann wavefront sensing*. Journal of Refractive Surgery, v.17, p.573-577.
- [6] **Liang, J.; Grimm, B.; Goelz, S.; Bille, J.** (1994). *Objective measurement of the wave aberration of the human eye with the use of a Hartmann-Shack sensor*. J Opt Soc Am A, v.11, p.1949-1957.
- [7] **Brown, E.B.** (1974). *Modern Optics*. Robert E. Krieger Publishing Company. p.3-37.
- [8] **Levi, L.** (1968). *Applied Optics: A Guide to Optical Systems Design*. Willey. v.1, p.53-97.
- [9] **Reitz, J.R.; Millford, F.J.; Cristy, R.W.** (1988). *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*, 3^a ed. Editora Campus. p.324-342, p.346-367.
- [10] **Born, M.; Wolf, E.** (1999). *Principles of Optics*, 7th ed. Cambridge University Press. p.32-51.
- [11] **Malacara, D.; Malacara, Z.** (1994). *Handbook of Lens Design*. Dekker. p.42-85.
- [12] **Born, M.; Wolf, E.** (1999). *Principles of Optics*, 7th ed. Cambridge University Press. p.116-136.
- [13] **Hecht, E.; Zajac, A.** (1986). *Optica*. Addison-Wesley Iberoamericana. p.106-147.
- [14] **Williams, C.S.; Becklund, O.A.** (1989). *Introduction to the Optical Transfer Function*. Willey-Interscience. p.92-131.

- [15] **Wyant, J.C.; Creath, K.** (1992). *Basic Wavefront Aberration Theory for Optical Metrology* IN: **Shannon, R.R.; Wyant, J.C.** *Applied Optics and Optical engineering*. Academic Press. v.XI, Cap.1, p.1-53.
- [16] **Montravadi, M.V.** (1997). *Lateral Shearing Interferometers* IN: **Malacara, D.** *Optical Shop Testing*, 2nd ed. Willey-Interscience. Cap.4, p.123-159.
- [17] **Geary, J.M.** (1995). *Wavefront Sensors*. SPIE Press. p.53-66.
- [18] **Ghozeil, I.** (1997). *Hartmann and Other Screen Test* IN: **Malacara, D.** *Optical Shop Testing*, 2nd ed. Willey-Interscience. Cap.10, p.367-392.
- [19] **Ojeda-Castañeda, J.** (1997). *Foucault, Wire and Phase Modulation Tests* IN: **Malacara, D.** *Optical Shop Testing*, 2nd ed. Willey-Interscience. Cap.8, p.265-309.
- [20] **Neal, D.R.; Armstrong, D.J.; Turner, W.T.** (1997). *Wavefront sensors for control and process monitoring in optics manufacture*. SPIE. v.2993, p.378-390.
- [21] **Southwell, W.H.** (1980) *Wavefront estimation from wavefront slope measurements*. J Opt Soc Am, v.70, p.998-1006.
- [22] **Cubalchini, R.** (1979) *Modal Wavefront estimation from phase derivative measurements*. J Opt Soc Am, v.69, p.972-977.
- [23] **Dorsh, R.G.; Haimenl, W.A.; Esser, G.K.** (1998). *Accurate computation of mean power and astigmatism by means of zernike polynomials*. J Opt Soc Am A, v.15, p.1686-1688.
- [24] **Salmon, T.O.** *Corneal Contribution to the Wavefront Aberration of the Eye*. 208p. Tese (PhD) - School of Optometry, Indiana University, Indiana, USA. 1999.
- [25] **Ganon, W.F.** (1991). *Fisiologia Médica*, 15^a ed. Prentice-Hall do Brasil. p.119-138.
- [26] **Atchinson, D.A.; Smith, G.** (2000). *Optics of the Human Eye*. Butherworth-Heinemann. p.1-9.
- [27] **Le Grand, Y.; El Hage, S.G.** (1980). *Physiological Optics*. Springer-Verlag. p.25-41.
- [28] **Walker, B.H.** (2000). *Optical Design for Visual Systems*. SPIE Press. p.53-66
- [29] **Pedrotti, L.S.; Pedrotti, F.L.** (1998). *Optics and Vision*. Prentice-Hall. p.194-223.
- [30] **Liang, J.; Williams, D. R.** (1997). *Aberrations and retinal image quality of the human eye*. J Opt Soc Am A, v.14, p.2873-2883.