UZIEL PAULO DA SILVA

**Um Estudo do Método de Homogeneização
Assimptótica visando Aplicações em Estruturas
Ósseas**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Interunidades Bioengenharia - Escola de Engenharia de São Carlos / Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto / Instituto de Química de São Carlos da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre em Bioengenharia.

Área de Concentração: Bioengenharia

Orientador: Prof. Adair Roberto Aguiar, PhD

São Carlos,
2009

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

S586e Silva, Uziel Paulo da
Um estudo do método de homogeneização assintótica
visando aplicações em estruturas ósseas / Uziel Paulo da
Silva ; orientador Adair Roberto Aguiar. -- São Carlos,
2009.

Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação e Área
de Concentração Interunidades em Bioengenharia) -- Escola
de Engenharia de São Carlos, Faculdade de Medicina de
Ribeirão Preto e Instituto de Química de São Carlos da
Universidade de São Paulo, 2009.

1. Estrutura óssea. 2. Homogeneização assintótica.
3. Propriedades efetivas. I. Título.

UZIEL PAULO DA SILVA
MESTRADO EM BIOENGENHARIA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO PROGRAMA DE PÓS
- GRADUAÇÃO INTERUNIDADES BIOENGENHARIA
EESC - FMRP - IQSC DA UNIVERSIDADE DE SÃO
PAULO PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM
BIOENGENHARIA.

Aprovado em: 08/07/09.

PROF. DR. ADAIR ROBERTO AGUIAR
(ORIENTADOR)

Escola de Engenharia de São Carlos - USP

Julgamento: Aprovado

Assinatura: Adair R. Aguiar

PROF. DR. WALTER SAVASSI

Escola de Engenharia de São Carlos - USP

Julgamento: Aprovado

Assinatura: Walter Savassi

PROF. DR. JULIAN BRAVO CASTILLERO

Universidade de Havana - CUBA

Julgamento: Aprovado

Assinatura: Bravo

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, pelo amor, incentivo, apoio incondicional, companheirismo e suporte emocional, além dos sacrifícios e concessões. À minha irmã, Nice, pelo incentivo desde o princípio, e por conceder-me todas as condições para chegar até aqui. À minha noiva, Rafaela, com amor, admiração e gratidão por sua compreensão, carinho, presença e incansável apoio ao longo do período de elaboração deste trabalho.

Agradecimentos

A Deus, razão de tudo o que somos e fazemos.

Aos meus pais, Paulo e Sebastiana, razão maior de minha existência e exemplo de amor com que fui criado.

Às minhas irmãs, Claudia e Vera, ao meu irmão, Lindomar e especialmente à minha irmã, Nice, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

Ao meu orientador e amigo Prof. Adair Aguiar, PhD., pela atenção e apoio, orientação, pela paciência, dedicação, e por sua competência na realização deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Julian Bravo-Castillero, pelo apoio, pela paciência, e pelo inestimável auxílio.

Ao Prof. Dr. Reinaldo Rodriguez-Ramos, pelo auxílio na revisão do trabalho.

Aos meus amigos, pessoas tão queridas e especiais, que seria impossível ter feito alguma coisa sem eles.

Ao Programa de Pós-Graduação Interunidades Bioengenharia, pela oportunidade de realização do curso de mestrado.

À Capes, pela concessão da bolsa de mestrado.

O coração do homem se exalta antes de ser abatido e diante da honra vai a humildade.

Pv 18.12

"...não importa tanto o tema da tese quanto a experiência de trabalho que ela comporta."

Umberto Eco

Resumo

SILVA, U. P. (2009). **Um Estudo do Método de Homogeneização Assimptótica visando Aplicações em Estruturas Ósseas**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação Interunidades Bioengenharia, EESC/FMRP/IQSC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

O osso é um sólido heterogêneo com estrutura bastante complexa que geralmente exige o emprego de múltiplas escalas em sua análise. A análise do comportamento eletromecânico da estrutura óssea tem sido realizada por meio de métodos da mecânica clássica, métodos de elementos finitos e métodos de homogeneização. Procura-se descrever matematicamente a relação entre o comportamento eletromecânico da estrutura óssea e as propriedades efetivas, ou, globais. Assim, muitos esforços têm sido dispendidos para desenvolver modelos analíticos rigorosos capazes de prever as propriedades globais e locais das estruturas ósseas. O propósito deste trabalho é estudar o Método de Homogeneização Assimptótica (MHA) com a finalidade de determinar as propriedades eletromecânicas efetivas de estruturas heterogêneas, tais como a estrutura óssea. Inicialmente, são analisados o problema de condução de calor e o problema elástico e demonstra-se que estes problemas estão relacionados entre si. Para o problema de condução de calor, dois métodos para obter as constantes efetivas são apresentados. Além disso, uma aplicação do MHA em osso cortical é apresentada e os resultados estão de muito bom acordo com resultados encontrados na literatura. Em vista disto, verifica-se a possibilidade da aplicação do MHA para determinar as propriedades efetivas da estrutura óssea com estrutura cristalina na classe 622.

Palavras-chave: estrutura óssea, homogeneização assimptótica, propriedades efetivas.

Abstract

SILVA, U. P. (2009). **A Study of the Asymptotic Homogenization Method for Applications in Bone Structures.** Dissertation (Master) – Programa de Pós-Graduação Interunidades Bioengenharia, EESC/FMRP/IQSC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

The bone is a heterogeneous solid with a highly complex structure that requires a multiple scale types of analysis. To analyze the electromechanical behavior of the bone structure, methods of classical mechanics, finite element methods, and methods of homogenization are being used. This analysis describes mathematically the relationship between the electromechanical behavior of the bone structure and its effective, or, global, properties. Thus, many efforts have been spent to develop rigorous analytical models capable of predicting the global and local effective properties of bone structures. The purpose of this work is to study the Asymptotic Homogenization Method (AHM) in order to determine the electromechanical effective properties of heterogeneous structures, such as the bone structure. The analysis of heat conduction and elastic problems using AHM shows that these problems are related to each other. Furthermore, an application of the AHM in cortical bone is presented and the results are shown to be in very good agreement with results found in the literature. Finally, this work shows great promise in the application of the AHM to determine the effective properties of a bone structure whose constituent material belongs to the crystal class 622.

Keywords: bone estrutura, asymptotic homogenization, effective properties.

Lista de Figuras

2.1	Osso trabecular e osso cortical. (Fonte: http://www.gla.ac.uk/ibls/US/fab/public/images/bocompac.jpg)	21
2.2	Osso trabecular saudável. (Fonte: http://bonesupport.com/bone_support/image_bank/full/healthybone.jpg)	22
2.3	Esquema Representativo do Sistema de Haversian (JUNQUEIRA; CARNEIRO, 2004).	24
4.1	Volume elementar para análise unidimensional da condução de calor.	37
4.2	Decomposição em múltiplas escalas. Figura obtida de (ROCHINHA, F.; MADUREIRA, A.L., 2004)	38
4.3	Curva do coeficiente de condutividade $k(\xi)$	44
5.1	Composto fibroso com estrutura periódica, cujas fibras estão na direção do eixo $0x_3$	57
5.2	Composto Laminado	64
5.3	Célula periódica de um composto bifásico.	67
6.1	Figura (a) Compósito poroso consistindo de cilindros circulares periodicamente distribuídos em um meio piezoelétrico; (b) célula periódica elementar quadrada com coordenadas locais (ξ_1, ξ_2) dadas por $\xi_1 = \frac{x_1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$, $\xi_2 = \frac{x_2}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$. 81	81
A.1	Círculos Concêntricos.	122

Lista de Tabelas

6.1	Equações para os problemas $_{pq}L$	87
6.2	Condições de Contorno para os Problemas $_{pq}L$	87
6.3	Vetores deslocamento $\mathcal{R}$ - <i>periódicos</i> $_{pq}M(\xi)$	88
6.4	Equações para os Problemas $_pL$	89
6.5	Condições de Contorno para os Problemas $_pL$	89
6.6	Vetores deslocamento $\mathcal{R}$ - <i>periódicos</i> $_pM(\xi)$	89
7.1	Constantes efetivas de Titanato de Bário, onde N corresponde aos valores obtidos por R. Kar-Gupta and T.A. Venkatesh e M é corresponde aos valores obtidos via MHA . O valor de referência é $\hat{p}$	95
7.2	Constantes efetivas de Titanato de Bário, onde N corresponde aos valores obtidos por R. Kar-Gupta and T.A. Venkatesh e M é corresponde aos valores obtidos via MHA . O valores de referência é $\hat{s}$	96
7.3	Constantes efetivas de Titanato de Bário, onde N corresponde aos valores obtidos por R. Kar-Gupta and T.A. Venkatesh e M é corresponde aos valores obtidos via MHA . Valor de referência $\hat{t}$	96
7.4	Constantes elásticas efetivas do osso cortical, onde N corresponde aos valores tomados da Tabela 2 de Swan et al. (2003) e M é corresponde aos valores obtidos via MHA	97

Lista de Abreviaturas e Siglas

AHM	Asymptotic Homogenization Method
Cap	Capítulo
Fig	Figura
lim	Límite
MHA	Método de Homogeneização Assintótica
MGF	Materiais com Gradação Funcional
MOT	Método de Otimização Topológica
MEF	Método de Elementos Finitos
PVC	Problema de Valor de Contorno
3D	Arranjo Tridimensional

Lista de Símbolos

μm	Micrômetro
η	Medida representativa de um compósito
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
ϵ	Símbolo utilizado para representar diferentes grandezas no texto
$\approx$	Símbolo utilizado no texto para igualdade assintótica e para isomorfismo
$ \cdot $	Módulo
E	Tensor das Deformações
W	Tensor das Rotações
∇	Gradiente
div	Divergente
$<<$	Bem menor
$[[\cdot]]$	Condição de contato (ou salto)
$\equiv$	Equivalente
$\triangleq$	Igual por definição
$\ \cdot\ $	Norma
$\partial\Omega$	Borda (ou fronteira) do conjunto Ω
Δ	Laplaciano
$\mathbb{E}_3^S$	Espaço das matrizes simétricas de 3ª ordem

Sumário

1	Introdução	15
2	Revisão da Literatura	18
2.1	Composição Óssea	18
2.1.1	Representação Quantitativa da Composição Óssea	18
2.2	Tipos de Estruturas Ósseas	20
2.2.1	Osso Trabecular	22
2.2.2	Osso Cortical	22
2.3	O Método de Homogeneização Assimptótica	25
3	Desenvolvimento Teórico para a Aplicação do MHA	30
3.1	Elasticidade, Piezoeletricidade e Dieletricidade	30
3.1.1	Elasticidade Linear	30
3.1.2	Piezoeletricidade	34
3.1.3	Dieletricidade	34
4	Aplicação do MHA em Problemas Unidimensionais	36
4.1	Transferência de Calor Por Condução	36
4.2	Caso Geral	43
4.3	Generalização do MHA para o caso em que $k(\xi)$ é suave por partes	52

5	Aplicação do MHA em Problemas Bidimensionais	56
5.1	Campos Térmicos Estacionários: Condução Térmica	56
5.1.1	Formulação do Problema	56
5.1.2	Homogeneização	58
5.2	Problemas Locais e Coeficientes Efetivos: Caso Descontínuo	63
5.2.1	Homogeneização Unidimensional em Meios Laminados	64
5.2.2	Homogeneização Bidimensional em Compostos Fibrosos	66
5.2.3	Passo Limite Correspondente a Fibras Ocas	73
5.3	Problema de Fronteira Livre Sobre a Célula Periódica	74
5.3.1	Resolução dos Problemas Locais $_{i_2}L$, $i_2 = 1, 2$	74
6	O Modelamento da Estrutura Óssea	79
6.1	O Modelo	79
6.1.1	Equações Básicas	82
6.2	Homogeneização	83
6.2.1	Definição dos Problemas Locais	83
6.2.2	Resolução dos Problemas Locais $_{pq}L$ e $_pL$	85
6.3	Os coeficientes Efetivos	92
7	Resultados	94
7.1	Aplicações do MHA	94
7.1.1	Aplicação em Mecânica de Osso	95
8	Conclusão	98
A	Conceitos Básicos	107
A.1	Símbolos de Ordem	107

A.2	Perturbações Regulares e Perturbações Singulares	110
A.2.1	Expansões Assimptóticas	110
A.2.2	Perturbações Regulares	112
A.2.3	Perturbações Singulares	113
A.3	Funções de Uma Variável Complexa	116
A.3.1	Números Complexos	117
A.3.2	Representação Cartesiana e Representação Polar	117
A.3.3	Funções Analíticas	119

Capítulo 1

Introdução

A interação de agentes físicos, tais como o ultra-som pulsado, o laser, os campos elétricos e magnéticos, todos de baixa intensidade, com sistemas biológicos tem sido muito estudada. Evidências da ação destes agentes sobre o metabolismo ósseo revelam que estes são capazes de estimular a osteogênese*, acelerar o processo de consolidação de fraturas e aumentar a massa óssea (LIRANI; LAZARETTI-CASTRO, 2005). O osso é um compósito heterogêneo contendo múltiplos e hierárquicos níveis estruturais (HOLLISTER et al., 1994a), com uma estrutura complexa de componentes orgânicos e inorgânicos e revela uma natureza anisotrópica. Além disso, pode ser modelado como um sólido piezoelétrico, dielétrico e, considerando pequenas deformações, possui um comportamento elástico linear. Certos tipos de ações musculares, com intensidade e duração maiores que as habituais, causam alterações permanentes no osso que as suporta, devido à plasticidade da estrutura óssea. A estrutura óssea adapta-se a essas cargas alterando a sua forma por meio de mecanismos de aposição e reabsorção do tecido ósseo (MARTIN; BURR; SHARKEY, 2004). Embora a viscoelasticidade e plasticidade sejam propriedades importantes, não são abordadas neste trabalho.

As propriedades efetivas do osso têm sido extensivamente estudadas nas últimas décadas; principalmente, devido às respostas obtidas com estimulação elétrica e mecânica em sua estrutura. Devido às suas propriedades, o tecido ósseo tem a capacidade de multiplicar-se quando é submetido a ações mecânicas e determinados campos eletromagnéticos. Estas características já são utilizadas em terapias ortopédicas e tratamento de osteoporose. Se-

*Osteogênese é o processo de formação e desenvolvimento do tecido ósseo normal.

gundo Lirani e Lazaretti-Castro (2005), após a constatação da piezoeletricidade no osso por Fukada e Yasuda (1957), preconizou-se o uso de ultra-som pulsado de baixa intensidade para acelerar o reparo ósseo. Segundo Duarte (1983), o ultra-som atinge o osso por uma sucessão de impulsos mecânicos e cada impulso resulta em um sinal elétrico emitido pelo osso como resposta. Este fenômeno que transforma estímulo mecânico em sinal elétrico e vice-versa é conhecido como *efeito piezoelétrico*. O campo elétrico formado é um dos fatores que regulam o processo de formação óssea estimulando eletricamente o metabolismo ósseo.

No entanto, a velocidade do processo de consolidação de fraturas depende da qualidade óssea. A qualidade óssea compreende os aspectos da estrutura e composição óssea que contribuem para a rigidez e resistência do osso e são independentes da densidade mineral óssea, tais como *turnover ósseo*, microarquitetura, mineralização, microdanos e composição da matriz óssea e mineral. A resistência mecânica óssea é determinada pela qualidade óssea que envolve a massa óssea, a microestrutura (geometria, placas ou bastonetes no osso trabecular e dimensões no osso cortical) e a orientação 3D (COMPSTON, 2006).

Alterações microestruturais, tais como redução do número e largura das trabéculas, são alguns sinais característicos de que há osteoporose e que, portanto, há redução da resistência óssea (SIERPOWSKA et al., 2006). Porém, alterações nas trabéculas não podem ser medidas por técnicas tradicionais de medição da qualidade óssea, as quais medem densidade mineral óssea, tais como a densitometria óssea. Espera-se que as propriedades elétricas e dielétricas do osso trabecular, as quais dependem da microestrutura, possam fornecer informações sobre a integridade óssea que não são fornecidas pela densitometria óssea (SIERPOWSKA et al., 2006). Hoje, estuda-se a possibilidade de fazer diagnóstico de osteoporose utilizando-se das diferenças nas propriedades dielétricas do osso saudável e do osso comprometido com a doença (POLLI, 2008).

O estudo das propriedades efetivas de estruturas ósseas possibilita quantificar alterações na microestrutura. Por exemplo, a redução do módulo de Young e da resistência do osso trabecular durante a osteoporose pode ser atribuída à perda de elementos trabeculares e conectividade (DING et al., 2002). Além disso, entender a relação entre as propriedades efetivas e a microarquitetura óssea é de grande interesse no desenvolvimento de experimentos e na correta interpretação das observações experimentais.

A finalidade precípua deste trabalho é determinar matematicamente as constantes que representam as propriedades eletromecânicas efetivas de materiais heterogêneos utilizando

o Método de Homogenização Assimptótica (MHA). Para isto, estuda-se detalhadamente o MHA realizando uma análise unidimensional de condução térmica e, simultaneamente, de barras elásticas de materiais compostos com estruturas periódicas. Esta análise é então estendida a domínios bidimensionais. Neste caso, resolve-se problemas térmicos por estes serem mais didáticos à compreensão do MHA. A seguir, modela-se a estrutura óssea como um sólido piezoelétrico poroso com comportamento elástico. Admite-se, que ela possui estrutura composta de células periódicas com geometria simples. Utilizando o MHA, mostra-se que é possível determinar um modelo geral para propriedades efetivas e aplica-se o modelo a fim de caracterizar as propriedades elásticas e de simetria da estrutura óssea. A análise dos resultados é baseada na comparação dos resultados obtidos com o MHA com resultados encontrados na literatura. Estas comparações servem para verificar a validade das hipóteses realizadas e, eventualmente, para recomendar a melhor metodologia de homogeneização para a análise de estruturas ósseas.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

2.1 Composição Óssea

O osso é composto de água, colágeno, hidroxiapatita e pequenas quantidades de glicoproteínas e proteínas não colágenas. Colágeno é uma proteína estrutural, amplamente encontrada no reino animal, que pode organizar-se em fibras fortes. O colágeno provê ao osso elasticidade e significativa resistência à tração e compressão (MARTIN; BURR; SHARKEY, 2004). A parte mineral é formada basicamente por um complexo de fosfato e cálcio, na forma cristalina, genericamente denominado *hidroxiapatita*, $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$ e provê dureza ao osso (MARTIN; BURR; SHARKEY, 2004). A extrema rigidez do tecido ósseo é resultado da interação entre o componente orgânico e o componente mineral. Segundo Junqueira e Carneiro (2004, p. 140), "[...]Após a remoção do cálcio, os ossos mantêm sua forma intacta, porém tornam-se tão flexíveis quanto os tendões. A destruição da parte orgânica, que é principalmente colágeno, pode ser realizada por incineração, e também deixa o osso com sua forma intacta, porém tão quebradiço que dificilmente pode ser manipulado sem se partir".

2.1.1 Representação Quantitativa da Composição Óssea

Seja V_T o volume total de alguma região do osso. Esta região é ocupada pela matriz óssea com volume V_m e vazios preenchidos com tecido mole, os quais possuem volume V_v . Deste

modo,

$$V_T = V_m + V_v. \quad (2.1)$$

Geralmente, pequenos vazios no osso, consistindo de lacunas dos osteócitos e canalículos, são incluídos na matriz óssea, ao invés de serem incluídos no tecido mole. Neste trabalho, diz-se que a matriz óssea é composta de tecido ósseo e denomina-se o osso, ou, parte dele, por estrutura óssea. Genericamente, o osso refere-se a uma região suficientemente grande contendo canais de Haversian e outros vazios (MARTIN; BURR; SHARKEY, 2004).

Define-se fração de volume óssea por

$$B_V = \frac{V_m}{V_T} \quad (2.2)$$

e porosidade por

$$p_v = \frac{V_v}{V_T}. \quad (2.3)$$

Assim,

$$B_V + p_v = 1. \quad (2.4)$$

Os ossos podem ser esponjosos, com porosidade $p_v > 0,5$, ou compactos, com $p_v < 0,5$. Uma descrição mais detalhada sobre os ossos cortical e trabecular será realizada nas próximas seções. A medula óssea*, também conhecida como tutano, é um tecido gelatinoso que preenche a cavidade interna de vários ossos, tais como os ossos esponjosos, e fabrica os elementos figurados (ou formadores) do sangue como hemácias, leucócitos e plaquetas. Na diáfise dos ossos, as lamelas ósseas se organizam em um arranjo típico, como na Fig. 2.3 a seguir, constituindo os sistemas de Haversian. Cada sistema, também conhecido como ósten, é semelhante a um cilindro longo paralelo à diáfise, às vezes bifurcado, e formado por quatro a vinte lamelas ósseas concêntricas (JUNQUEIRA; CARNEIRO, 2004). No centro desse cilindro ósseo existe um canal revestido de endóstio, o canal de Haversian, que contém vasos e nervos. Os canais de Haversian comunicam-se entre si, com a cavidade medular, e com a superfície externa do osso por meio de canais transversais ou oblíquos, os canais de Volkman. Estes se distinguem dos canais de Haversian por não apresentarem lamelas ósseas concêntricas. Os canais de Volkman atravessam as lamelas ósseas. Todos os canais vasculares

*A medula óssea é constituída por um tecido esponjoso mole localizado no interior dos ossos longos.

existentes no osso aparecem quando a matriz óssea se forma ao redor dos vasos preexistentes (JUNQUEIRA; CARNEIRO, 2004).

Outra variável muito utilizada é a densidade aparente, ρ , definida por

$$\rho = \frac{(\rho_m V_m + \rho_v V_v)}{V_T}, \quad (2.5)$$

onde V_T é dado por (2.1), ρ_m é a densidade do tecido ósseo e ρ_v a densidade do tecido mole.

Segue, portanto, de (2.2), (2.3), e (2.5) que

$$\rho = \rho_m B_V + \rho_v p_v. \quad (2.6)$$

Utilizando (2.4), obtém-se a forma alternativa

$$\rho = \rho_m - (\rho_m - \rho_v) p_v. \quad (2.7)$$

Portanto, a densidade aparente depende da densidade do tecido ósseo, ρ_m , e da porosidade da estrutura óssea, p_v .

2.2 Tipos de Estruturas Ósseas

Classifica-se as estruturas ósseas de acordo com o seu aspecto morfológico e anatômico. Portanto, os ossos podem ser classificados em chatos, longos, curtos, esponjosos e compactos. Também existem os ossos pneumáticos, os quais conservam grande quantidade de ar no seu interior.

Já a classificação baseada no critério histológico admite apenas duas variantes de tecido ósseo: o tecido ósseo primário e o tecido ósseo secundário, para maiores detalhes ver (JUNQUEIRA; CARNEIRO, 2004).

Outra classificação está relacionada à densidade do tecido ósseo. Neste sentido, as duas principais estruturas ósseas estão representadas na Fig. 2.1 e consistem no osso cortical (compact bone) e no osso trabecular (spongy bone).

Figura 2.1: Osso trabecular e osso cortical. (Fonte: <http://www.gla.ac.uk/ibls/US/fab/public/images/bocompac.jpg>)

2.2.1 Osso Trabecular

O osso trabecular é um osso esponjoso com alta porosidade. Normalmente encontrado em ossos cuboidais, planos, e nas extremidades de ossos longos. A porosidade do osso trabecular, dada por (2.3), varia de 75% a 95 %. Os poros são interconectados e preenchidos com medula. A matriz óssea está em forma de placas e bastonetes chamados trabéculas, as quais estão dispostas aleatoriamente e cada uma com aproximadamente $200\ \mu m$ de espessura (MARTIN; BURR; SHARKEY, 2004). Mostra-se na Fig. 2.2 uma ilustração de osso trabecular seco, o qual é um osso trabecular que não contém tecido mole.

Figura 2.2: Osso trabecular saudável. (Fonte: http://bonesupport.com/bone_support/image_bank/full/healthybone.jpg)

2.2.2 Osso Cortical

O osso cortical é um osso compacto encontrado na diáfise de ossos longos. Ele forma um *córte*x, ou, concha, em volta de corpos vertebrais e outros ossos esponjosos (MARTIN; BURR; SHARKEY, 2004). O osso cortical contém aproximadamente 10% de porosidade e 80% de tecido ósseo (HOLLISTER; KIKUCHI, 1994b). O osso cortical humano consiste de ósteons

secundários de 100 a 300 μm de diâmetro, circundando canais de Haversian e embebidos em tecido intersticial, o qual é formado por resíduos de ósteons envelhecidos. Cada ósteon é composto de lamelas concêntricas, dentre as quais as células ósseas chamadas, osteócitos, que residem no interior de lacunas elipsoidais de 10 a 50 μm (GUO, 2001). No osso cortical, os canais vasculares são muito estreitos e impossíveis de serem vistos a olho nu. Por este motivo, o osso aparenta ser maciço. Mostra-se na Fig. 2.3 um modelo ilustrativo do osso cortical com sistemas de Haversian.

Canais de Haversian

Os canais Haversianos, descritos na seção 2.1.1, estão aproximadamente alinhados aos eixos de ossos longos, contém capilares e nervos, e possuem diâmetro de 50 μm . Um esquema representativo da parede da diáfise é mostrado na Fig. 2.3. Observe desta figura a existência de três tipos de tecido lamelar: os sistemas de Haversian e as lamelas circunferenciais internas e as externas. O sistema de Haversian, ou, sistema de Havers desenhado em três dimensões, no alto e à esquerda, mostra a trajetória das fibras colágenas nas lamelas. À direita observa-se um sistema de Haversian isolado, mostrando um capilar sanguíneo central e muitos osteócitos com seus prolongamentos.

Canais de Volkmann

Os canais de Volkmann, descritos na seção 2.1.1, são curtos e conectam-se transversalmente a canais de Haversian e à superfície externa do osso, conforme ilustrado na Fig. 2.3. Estes canais também contém capilares e nervos.

Observação

A estrutura óssea sofre transformações com o passar do tempo que alteram suas propriedades físicas, tais como a porosidade. Por exemplo, a conectividade das trabéculas no osso trabecular pode sofrer alterações resultantes de patologias, tais como a osteoporose, alterando a porosidade do osso. Ossos corticais também podem sofrer alterações respondendo a estímulos mecânicos, ou, fisiológicos, alterando a sua forma para se adaptar a estes estímulos. Estas mudanças afetam fortemente as propriedades mecânicas do osso (MARTIN; BURR; SHARKEY, 2004).

Figura 2.3: Esquema Representativo do Sistema de Haversian (JUNQUEIRA; CARNEIRO, 2004).

2.3 O Método de Homogeneização Assimptótica

Os métodos de homogeneização são aplicados em materiais compostos, também chamados compósitos. Materiais compostos são aqueles constituídos de dois ou mais tipos de materiais diferentes, combinados em escala macroscópica, que proporcionam propriedades ao material resultante que nenhum dos componentes apresentam individualmente. Os materiais compostos distinguem-se das ligas no tocante à escala em que os componentes do material resultante são combinados. As ligas também são associações de diferentes materiais, tais como ferro e manganês no aço, porém, em escala atômica.

A determinação das propriedades efetivas, ou globais, de materiais compostos utilizando métodos de homogeneização serve para a concepção de experimentos que visem o desenvolvimento de novos materiais com as propriedades desejadas. Por exemplo, já existem linhas de pesquisa cujo objetivo é projetar meta-materiais MGF (Materiais com Gradação Funcional: FGMS, do inglês *functionally graded materials*) através da combinação do Método de Homogeneização e Otimização Topológica (MOT). Os meta-materiais são compostos especiais que apresentam uma transição gradual na microestrutura e composição, são materiais projetados para apresentar propriedades não-usuais, ou seja, que não podem ser obtidas com materiais encontrados na natureza, como por exemplo, razão de Poisson negativa, expansão térmica negativa. O método de homogeneização permite calcular as propriedades efetivas desses materiais compostos e, geralmente, se utiliza do método de elementos finitos para isso. Entre os materiais MGF projetados destacam-se materiais termelétricos, piezelétricos e piezoresistivos. Essa linha de pesquisa ainda inclui o desenvolvimento de softwares baseados no MOT para projetar esses materiais. O conceito de propriedades efetivas permite tratar um meio constituído por matriz e heterogeneidades, tais como vazios, como um meio contínuo e homogêneo.

Neste trabalho, considera-se que os materiais compostos possuem estrutura periódica. Este fato assegura a existência de um elemento representativo, denominado célula periódica, o qual possui todas as propriedades físicas e geométricas do compósito.

Meios heterogêneos providos de estrutura periódica são modelados matematicamente por sistemas de equações diferenciais com coeficientes periódicos e rapidamente oscilantes. Estudos diretos de tais modelos por meio de métodos numéricos, tais como o Método de Elemento Finito (MEF), requerem malhas extremamente refinadas cuja aplicação torna-se

impraticáveis.

O método de homogeneização é um método matemático que permite encontrar com grande precisão as propriedades efetivas de um material composto a partir das propriedades físicas e geométricas de seus componentes. Em particular, o Método de Homogeneização Assimptótica (MHA), desenvolvido por Bensoussan et al. (1978), Sánchez-Palencia (1980) e Bakhvalov e Panasenko (1989), é utilizado para encontrar os coeficientes que representam as propriedades efetivas de um meio com estrutura periódica. O método consiste na busca da solução do problema de valor de contorno (PVC) na forma de uma expansão assintótica das variáveis de interesse em termos de séries de potência de um parâmetro geométrico. Este parâmetro é dado pela razão entre o tamanho característico da célula periódica do compósito por um tamanho representativo do compósito.

O método garante que a solução do PVC original converge para a solução do problema homogeneizado quando o parâmetro geométrico tende a zero. Porém, a aplicação deste método necessita da solução de PVC's locais, sobre a célula periódica, para a determinação dos coeficientes efetivos do meio homogeneizado (SÁNCHEZ-PALENCIA, 1980), (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989), (SABINA et al, 2001), (BRAVO-CASTILLERO et al, 2001).

Grandes esforços têm sido despendidos a fim de desenvolver modelos analíticos rigorosos capazes de prever as propriedades efetivas de compósitos. Meguid e Kalamkarov (1994) aplicam o MHA na determinação do comportamento elástico de materiais compostos reforçados por fibras regulares unidirecionais. Estes autores aplicam o método em problemas planos[†] e anti-planos[‡]. Eles utilizam potenciais complexos de Muskhelishvili, para construir as soluções a partir de expansões em séries, em termos de funções elípticas de Weierstrass duplamente periódicas. As soluções construídas são determinadas explicitamente.

Bravo-Castillero et al. (1998) utilizam o MHA para determinar as propriedades efetivas elásticas, piezoelétricas e dielétricas de um composto piezoelétrico laminado dotado de uma estrutura periódica. Estes autores calculam explicitamente as propriedades do com-

[†]Muitos problemas em elasticidade podem ser tratados satisfatoriamente por meio de uma análise bidimensional. Existem dois tipos de problemas que envolvem esta análise plana: tensão plana e deformação plana.

[‡]Existe um estado de deformação em um corpo conhecido por deformação anti-plana. Neste estado de deformação os deslocamentos são zero no plano de interesse mas diferentes de zero na direção perpendicular ao plano.

pósito e, para o caso particular de um meio laminado binário, conectado em paralelo, cujos constituintes são transversalmente isotrópicos, obtêm fórmulas para as constantes efetivas semelhantes às obtidas por Benveniste et al. (1992). Estes autores também utilizam um método de homogeneização para obter as propriedades globais de materiais piezoelétricos para aplicações em hidrofônicos.

Guinovart-Díaz et al. (2001) e Rodriguez-Ramos et al. (2001) aplicam o MHA a fim de obter expressões analíticas fechadas para calcular coeficientes elásticos efetivos de um composto elástico reforçado com fibras, as quais possuem forma circular cilíndrica e estão periodicamente distribuídas em uma matriz. A matriz e as fibras exibem arranjo transversalmente isotrópico e possuem a condição de contato perfeito ao longo das interfaces (*welded contact*). Enquanto que Guinovart-Díaz et al. (2001) aplicam o método para um composto com simetria hexagonal, Rodriguez-Ramos et al. (2001) aplicam para um composto que exibe simetria quadrada. Métodos potenciais de funções complexas e funções elípticas de Weierstrass são utilizadas em ambos os trabalhos.

Bravo-Castillero et al. (2001) e Sabina et al. (2001) dão continuidade aos trabalhos de, respectivamente, Rodriguez-Ramos et al., (2001) e Guinovart-Díaz et al., (2001) e determinam as propriedades elásticas, piezoelétricas e dielétricas de compósitos reforçados com fibras e obtêm expressões analíticas fechadas.

Guinovart-Díaz et al. (2002) utilizam o MHA para determinar as propriedades elásticas de um material transversalmente isotrópico. Os resultados que estes autores obtêm utilizando o MHA estão de bom acordo com resultados obtidos por métodos numéricos, experimentais e teoria clássica da elasticidade. Sabina et al. (2002) também comparam os resultados obtidos pelo MHA com resultados obtidos por métodos experimentais, verificando concordância satisfatória entre os resultados. Estes autores comparam também os resultados obtidos por meio das soluções exatas com as cotas de Bruno (1991), Hill (1964) e Hashin (1965).

Um composto piezoelétrico binário cujas propriedades eletroelásticas dos constituintes pertencem aos cristais da classe 622 é estudado por López-López et al. (2005). Estes autores consideram um meio homogêneo com arranjo quadrado reforçado com fibras cilíndricas circulares. Neste trabalho são analisados cisalhamentos anti-planos e obtém-se fórmulas explícitas para propriedades efetivas. Exemplos numéricos para colágeno e colágeno-hidroxiapatita são realizados baseados nos dados de Silva et al. (2001).

Otero et al. (2005) apresentam um modelo dinâmico, no qual a propagação de ondas acústicas ao longo de direções descontínuas de um polímero piezocerâmico composto com conectividade 2-2. Estes autores determinam expressões fechadas para os coeficientes efetivos (elásticos, piezoelétricos e dielétricos) utilizando o MHA. Um modelo dinâmico é formulado em termo das propriedades globais para uma primeira aproximação do MHA e, por fim, estes autores ilustram o comportamento dos campos de deslocamento mecânico e potencial elétrico.

Além das aplicações mencionadas acima, o MHA tem sido aplicado em termoelasticidade Francfort (1984); em magnetoelasticidade por Bytner e Gambin (1993), em piezoelectricidade por Pastor (1997) e Bravo-Castillero et al. (1997), em termopiezoelectricidade por Galka et al. (1996), em meios porosos por Dimitrienko (1998a, b), em misturas sólido-fluido por Tekada et al. (1998), em viscoelasticidade por Yi et al. (1998), em plasticidade por Suquet (1987), em compostos supercondutores e superfluidos por Berlyand (1999). No caso de estruturas ósseas, Hollister et al. (1989) realizam uma análise da micro-mecânica do osso trabecular utilizando uma teoria de homogeneização assintótica combinada com uma análise morfológica. Pela teoria da homogeneização assintótica, o comportamento mecânico da estrutura óssea, admitida como um sólido elástico heterogêneo, é determinado por uma expansão assintótica da variável de interesse. Admite-se que a estrutura é periódica e que, portanto, existe um elemento representativo (célula periódica) para cada microestrutura a partir da qual pode-se extrair propriedades efetivas para toda estrutura. Dois tipos de elementos representativos são analisados: o modelo de barras e o modelo de poros esféricos. Os resultados obtidos da teoria de homogeneização para as propriedades mecânicas do modelo de poros esféricos estão consistentes com resultados obtidos por meio de uma análise padrão de elementos finitos do mesmo modelo.

Fyhrie et al. (1989) utilizam o método de homogeneização assintótica para estudar a dependência da resistência mecânica do osso trabecular com uma fração de volume do osso. Estes autores admitem que o osso trabecular é um meio elástico poroso cujos poros têm a forma esférica. Os resultados indicam uma dependência quadrática da resistência sobre a fração de volume da parte sólida do osso para carregamentos normais e uma dependência cúbica para carregamentos transversais, ou, de cisalhamento. Estes resultados são consistentes com predições teóricas de outros pesquisadores e com resultados obtidos por meio de técnicas experimentais.

Hollister e Kikuchi (1992) observam que a maioria dos métodos de homogeneização que utilizam o conceito de elemento de volume representativo fornecem estimativas precisas das propriedades elásticas dos compósitos quando a razão entre um tamanho característico do elemento representativo do compósito por um tamanho representativo do compósito, denotado aqui por η , tende a zero. No entanto, muitos compósitos são localmente periódicos com $\eta > \eta_0 > 0$, para um dado valor de η_0 . Estes autores comparam resultados de análises baseadas em ambos, teoria de homogeneização e teoria clássica da mecânica dos materiais, e concluem que a teoria de homogeneização é preferível à teoria clássica para compósitos com estrutura periódica, mesmo quando a periodicidade é local $\eta > \eta_0 > 0$.

Hollister et al. (1994a) consideram o osso trabecular como material poroso contendo múltiplos e hierárquicos níveis estruturais, os quais determinam dois importantes aspectos da mecânica do osso e adaptação. Estes autores afirmam que a organização estrutural determina as propriedades efetivas elásticas do osso trabecular. Por outro lado, eles consideram que a organização estrutural determina como as cargas são transferidas para o osteócito e para o nível de revestimento celular. Utilizando o conceito de elemento de volume representativo, os autores determinam relações entre deformações globais e locais. Estes autores aplicam uma teoria de homogeneização juntamente com a teoria de elementos finitos em modelos tridimensionais construídos a partir de imagens de osso trabecular digitalizadas. Os autores concluem que os resultados obtidos por meio da teoria de homogeneização são consistentes com resultados experimentais.

Capítulo 3

Desenvolvimento Teórico para a Aplicação do MHA

Neste capítulo desenvolve-se alguns conceitos necessários para a aplicação do MHA. São introduzidos de forma breve os conceitos de elasticidade linear, piezoeletricidade, dieletricidade. Porém, tais conceitos são expostos em caráter preliminar, não se almejando uma apresentação completa sobre o assunto. Pois, o objetivo deste capítulo é estabelecer idéias e conceitos básicos a partir de uma apresentação mais intuitiva do que rigorosa. Para maiores detalhes, ver por exemplo, Sokolnikoff (1956), NYE (1969) e IKEDA (1990).

3.1 Elasticidade, Piezoeletricidade e Dieletricidade

3.1.1 Elasticidade Linear

Define-se aqui um material com comportamento elástico aquele que se deforma ao ser submetido a ações externas, tais como forças devidas ao contato com outros corpos e a ação gravitacional agindo sobre sua massa, retornando à sua forma original quando a ação externa é removida.

Na teoria linear da elasticidade, adotam-se duas hipóteses que levam à linearidade dos problemas nela formulados: *Linearidade Geométrica* e *Elasticidade Física*. A linearidade

geométrica implica que os tensores das deformações e das rotações são dados por

$$E = \frac{1}{2} (L + L^T) \text{ e } W = \frac{1}{2} (L - L^T), \quad (3.1)$$

respectivamente, onde E é dado, em notação indicial, por ε_{ij} . Em (3.1), L é o gradiente do campo dos deslocamentos $u(x)$ na configuração de referência e é dado por

$$L = \nabla u. \quad (3.2)$$

Na linearidade geométrica não se faz distinção entre a configuração de referência e a configuração atual.

Seja x o vetor posição. Com a hipótese de linearidade geométrica, todos os tensores de tensão coincidem e as equações locais do movimento tornam-se

$$\operatorname{div} T + b = \rho \ddot{u} \text{ e } T = T^T, \quad (3.3)$$

onde T (T_{ij} em notação indicial) é o tensor das tensões e b o vetor das forças de volume.

Um material elástico é aquele para o qual existe uma aplicação tal que

$$T = \hat{T}(E). \quad (3.4)$$

A tensão inicial é dada

$$T_0 = 0$$

onde 0 é o tensor nulo. Neste caso a configuração de referência é dita *natural* quando $T_0 = 0$.

A segunda hipótese da teoria linear da elasticidade, linearidade física, admite que a aplicação (3.4) é linear. Portanto, pode ser escrita como

$$T = \mathbb{C}E, \quad (3.5)$$

onde $\mathbb{C}$ é um tensor da quarta ordem, denominado *tensor dos módulos de rigidez elástica*, ou simplesmente, tensor de elasticidade. Em elasticidade linear, esta relação entre as tensões e deformações é única e se denomina *Lei de Hook Generalizada*.

O tensor $\mathbb{C}$ tem oitenta e uma componentes em uma base ortonormal qualquer. Nota-se,

no entanto, que T e E são simétricos, e, portanto, o tensor $\mathbb{C}$ possui as chamadas simetrias menores. Deste modo, restam apenas 36 constantes independentes. Por outro lado, o tensor $\mathbb{C}$ é simétrico, logo, possui simetria maior, e o número de constantes independentes em um material anisotrópico reduz-se para vinte e uma. Veja maiores detalhes sobre simetrias em Valliappan (1981).

Invertendo a relação (3.5), obtemos,

$$\begin{aligned} E &= \mathbb{S}T, \\ \mathbb{S} &= \mathbb{C}^{-1} \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde $\mathbb{S}$ é chamado *tensor dos módulos elásticos de flexibilidade*.

Em notação indicial, as componentes dos tensores $\mathbb{C}$ e $\mathbb{S}$ são escritas como C_{ijkl} e S_{ijkl} , respectivamente. Podemos escrever estas componentes utilizando a notação indexada dupla; por exemplo, $C_{1111} = c_{11}$. Deste modo, tem-se

$$11 \rightarrow 1 \quad 22 \rightarrow 2 \quad 33 \rightarrow 3 \quad 23 = 32 \rightarrow 4 \quad 13 = 31 \rightarrow 5 \quad 21 = 12 \rightarrow 6.$$

O tensor $\mathbb{C}$ possui o mesmo arranjo de $\mathbb{S}$ quando representados matricialmente; além disso, as matrizes destes tensores possuem as mesmas simetrias (COWIN; DOTY, 2006). A relação (3.5) pode ser expressa, matricialmente, pelas componentes em base canônica como segue,

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Para um material com simetria ortotrópica, a relação (3.7) é dada por 9 constantes

elásticas independentes, como segue

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

No caso de um material transversalmente isotrópico, a relação (3.7) é dada por 5 constantes elásticas independentes:

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}). \quad (3.10)$$

Para materiais isotrópicos, a relação (3.7) é dada por 2 constantes elásticas independentes:

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}). \quad (3.12)$$

3.1.2 Piezoeletricidade

Materiais piezoelétricos possuem as seguintes propriedades eletromecânicas: sofrem deformação mecânica sob a ação de cargas elétricas e produz campo elétrico sob a aplicação de forças mecânicas. Nas relações constitutivas destes materiais, a tensão depende da deformação e também do campo elétrico. De forma semelhante, o deslocamento elétrico depende do campo elétrico e da deformação.

As relações constitutivas que relacionam as grandezas tensoriais e vetoriais acima são (IKEDA, 1990):

$$\begin{cases} T_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k, \\ D_i = e_{ikl}\varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik}E_k. \end{cases} \quad (3.13)$$

Adota-se em (3.13) a convenção usual de soma sobre todos os índices latinos repetidos, os quais variam de um a três. Observe de (3.13) que as componentes do tensor tensão T_{ij} , e do vetor deslocamento elétrico, associado com cargas livres, D_i , estão linearmente relacionados com as componentes do tensor deformação, ε_{kl} , e do vetor campo elétrico, E_k , respectivamente. As propriedades do material são dadas pelas componentes dos tensores elástico, C_{ijkl} , piezoelétrico, e_{kij} , e de permissividade elétrica, ϵ_{ik} .

3.1.3 Dieletricidade

Quando submetidos a um campo elétrico, átomos e moléculas adquirem um momento de dipolo induzido, deslocando densidades de cargas positivas e negativas. Em um material anisotrópico, dado um campo elétrico, E_j , a polarização, P_i , que é o momento de dipolo, por unidade de volume, é proporcional ao campo elétrico aplicado (NYE, 1969), ou seja,

$$P_i = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j, \quad (3.14)$$

onde

$$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \frac{\text{farad}}{\text{m}}$$

é a permissividade do vácuo e χ_{ij} são componentes do tensor de suscetibilidade dielétrica. O deslocamento elétrico D_i relaciona-se com o campo elétrico, E_j , e o momento de dipolo, P_i , segundo a equação (GRIFFITHS, 1999):

$$D_i = \epsilon_0 E_i + P_i \quad (3.15)$$

Substituindo (3.14) na expressão (3.15) obtém-se:

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j, \quad (3.16)$$

onde, ϵ_{ij} , é o tensor de permissividade elétrica do material, dado por:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}). \quad (3.17)$$

Na expressão (3.17), δ_{ij} é a função delta de Kronecker.

A permissividade elétrica relativa é denominada constante dielétrica, e dada por:

$$K_{ij} = \frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_0}. \quad (3.18)$$

A permissividade, por ser um dos parâmetros constitutivos dos materiais dielétricos, é uma variável de grande importância na determinação das características destes materiais. Ela é uma constante física que descreve como um campo elétrico afeta e é afetado por um meio.

Nos próximos capítulos faz-se análises unidimensionais e bidimensionais de problemas térmicos.

Capítulo 4

Aplicação do MHA em Problemas Unidimensionais

4.1 Transferência de Calor Por Condução

Se há um gradiente de temperatura em um corpo, então há transferência de energia por condução, cuja taxa de transferência de calor por unidade de área, A , é proporcional ao gradiente de temperatura, ou seja,

$$q = -kA \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (4.1)$$

onde q é a taxa de transferência de calor, $\frac{\partial u}{\partial x}$ é o gradiente de temperatura na direção do fluxo de calor, $k > 0$ é a condutividade térmica do material, e o sinal negativo expressa o fato de que o calor deve fluir no sentido oposto ao do gradiente de temperatura. Neste trabalho, k pode variar no interior do corpo.

Considere agora um paralelepípedo com faces paralelas aos eixos Ox , Oy , Oz , conforme mostrado na Fig. 4.1. Admite-se que o fluxo de calor é unidimensional, de modo que q_x é a única componente não nula do vetor q em (4.1). Admite-se também que o fluxo de calor está em regime permanente, de modo que a variação da taxa de transferência de calor pelas paredes laterais do elemento de espessura dx mostrado na Fig. 4.1 é igual ao calor gerado,

$\mathbf{f}Adx$, no interior deste elemento; ou seja,

$$q_{x+dx} - q_x = \mathbf{f}Adx, \quad (4.2)$$

onde f é o calor gerado por unidade de volume.

Figura 4.1: Volume elementar para análise unidimensional da condução de calor.

Substituindo (4.1) em (4.2) juntamente com a aproximação

$$q_{x+dx} = -A \left[k \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \right],$$

obtém-se

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{du}{dx} \right) = \mathbf{f}(x). \quad (4.3)$$

A expressão (4.3) é uma equação diferencial de segunda ordem que fornece o campo de temperatura u em uma barra não homogênea com coeficiente de condutividade $k(x)$ contendo uma fonte de geração de calor com intensidade $\mathbf{f}(x)$. Esta equação diferencial também fornece o campo de deslocamento u em uma barra elástico-linear, isotrópica e não homogênea com módulo de elasticidade $k(x)$ sob a ação da força de corpo $-\mathbf{f}(x)$.

Tomando a equação diferencial de segunda ordem (4.3) e considerando u o campo de temperatura, define-se o problema de valor de contorno abaixo

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(k \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \frac{du}{dx} \right) - \mathbf{f}(x) = 0 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Considere o problema (4.4) decomposto em múltiplas escalas, sendo ϵ o parâmetro que define a razão entre as diferentes escalas presentes no problema. Isto pode ser compreendido a partir da Fig. 4.2, que apresenta uma função genérica na qual intuitivamente percebe-se duas escalas: uma mais "lenta" e uma mais "rápida". Segundo Rochinha e Madureira (2004), essa função possui um comportamento de baixa frequência e um de alta. Tal referência vai ao encontro da decomposição sugerida na Fig. 4.2, na qual a função apresentada pode ser vista como a soma de duas outras funções, sendo a segunda altamente oscilatória e parcialmente apresentada no "zoom". Nesse caso, $\epsilon \ll 1$, o que significa que a razão entre as dimensões associadas às escalas "rápida" e "lenta" é bastante significativa.

Figura 4.2: Decomposição em múltiplas escalas. Figura obtida de (ROCHINHA, F.; MADUREIRA, A.L., 2004)

A Fig. 4.2, é utilizada em Rochinha e Madureira (2004) para resolver um problema unidimensional elástico-linear. Neste trabalho em vez de considerar a variável $y = \frac{x}{\epsilon}$, como na figura, utiliza-se $\xi = \frac{x}{\epsilon}$. De modo análogo, em vez de $f^\epsilon(x)$, utiliza-se $\mathbf{f}(x)$, para o problema unidimensional de condução de calor. A partir da visão apresentada na Fig. 4.2 introduz-se uma nova coordenada, de modo que as funções passam a ser pensadas de forma diferente, $\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(x, \xi(x))$.

Em (4.4), $k(\xi)$ é uma função 1-periódica, isto é, $k(\xi) = k(\xi + 1)$. A coordenada

macroscópica x é a variável lenta ou global, enquanto que a coordenada microscópica ξ é a variável rápida ou local.

Para maior simplicidade, analisar-se-á inicialmente o caso onde f e k são infinitamente diferenciáveis.

Introduz-se, então, a seguinte expansão assintótica para a solução do problema (4.4)

$$u^\infty(x, \xi) = u_0(x, \xi) + \epsilon u_1(x, \xi) + \epsilon^2 u_2(x, \xi) + \dots \quad (4.5)$$

onde $u_i(x, \xi)$ são funções 1-periódicas com respeito a ξ . Substituindo a expansão (4.5) na equação em (4.4), utilizando a regra da cadeia

$$\frac{d}{dx} F(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial x} F(x, \xi) + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} F(x, \xi) \Big|_{\xi = \frac{x}{\epsilon}}, \quad (4.6)$$

onde F é uma função diferenciável em x e ξ , e agrupando por potências de ϵ , obtém-se:

$$\begin{aligned} & \epsilon^{-2} L_{\xi\xi} u_0(x, \xi) + \\ & \epsilon^{-1} [L_{\xi\xi} u_1(x, \xi) + L_{\xi x} u_0(x, \xi) + L_{x\xi} u_0(x, \xi)] + \\ & \epsilon^0 [L_{\xi\xi} u_2(x, \xi) + L_{\xi x} u_1(x, \xi) + L_{x\xi} u_1(x, \xi) + L_{xx} u_0(x, \xi) - \mathbf{f}(x)] + \dots \approx 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde o símbolo $\approx$ representa uma igualdade assintótica e o operador L_{pq} é definido por

$$L_{pq} u \triangleq \frac{\partial}{\partial p} \left(k(\xi) \frac{\partial u}{\partial q} \right) \quad (4.8)$$

Igualando a zero os termos que multiplicam $\epsilon^{-2}, \epsilon^{-1}, \epsilon^0$ na equação (4.7), obtém-se

$$L_{\xi\xi} u_0(x, \xi) = 0 \quad (4.9)$$

$$L_{\xi\xi} u_1(x, \xi) + L_{\xi x} u_0(x, \xi) + L_{x\xi} u_0(x, \xi) = 0 \quad (4.10)$$

$$L_{\xi\xi} u_2(x, \xi) + L_{\xi x} u_1(x, \xi) + L_{x\xi} u_1(x, \xi) + L_{xx} u_0(x, \xi) - \mathbf{f}(x) = 0 \quad (4.11)$$

Supondo formalmente que x e ξ são variáveis independentes, analisa-se as equações (4.9), (4.10) e (4.11), como uma cadeia recorrente de equações diferenciais em ξ , com uma função desconhecida $u_i(x, \xi)$ dependente de um parâmetro x .

Uma vez que $k > 0$, segue de (4.9) e da definição (4.8) que

$$\frac{\partial u_0(x, \xi)}{\partial \xi} = \frac{C(x)}{k(\xi)}, \quad (4.12)$$

onde C é uma função arbitrária de x .

Aqui, os parênteses angulares, $\langle . \rangle$, representam a média 1-periódica, ou seja

$$\langle \mathbf{f}(x, \xi) \rangle = \int_0^1 \mathbf{f}(x, \xi) d\xi, \quad (4.13)$$

onde x e ξ são consideradas variáveis independentes na integral acima.

Aplicando o operador $\langle . \rangle$ nos dois lados da igualdade (4.12), e admitindo que $u_i(x, \xi)$ é 1-periódica em ξ tem-se

$$\left\langle \frac{\partial u_0(x, \xi)}{\partial \xi} \right\rangle = \int_0^1 \frac{\partial u_0(x, \xi)}{\partial \xi} d\xi = u_0(x, \xi) \Big|_0^1 = 0.$$

Assim, $C(x) = 0$, pois $\langle k^{-1}(\xi) \rangle > 0$. Segue de (4.12) que

$$\frac{\partial u_0(x, \xi)}{\partial \xi} = 0.$$

Portanto, $u_0(x, \xi)$ é independente de ξ .

Definindo

$$v_0(x) \triangleq u_0(x, \xi); \quad (4.14)$$

segue da definição (4.8) e da equação (4.10) que

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(k(\xi) \left(\frac{\partial u_1(x, \xi)}{\partial \xi} + \frac{dv_0}{dx} \right) \right) = 0. \quad (4.15)$$

Integrando a expressão (4.15) com respeito a ξ , obtém-se

$$\frac{\partial u_1(x, \xi)}{\partial \xi} + \frac{dv_0}{dx} = \frac{C_1(x)}{k(\xi)} \quad (4.16)$$

onde C_1 é uma função arbitrária de x .

Aplicando o operador $\langle . \rangle$ em ambos os lados da igualdade (4.16) e lembrando que $u_1(x, \xi)$ é 1-periódica em ξ , segue que

$$\frac{dv_0}{dx} = C_1(x) \left\langle \frac{1}{k(\xi)} \right\rangle. \quad (4.17)$$

Resolvendo (4.17) para $C_1(x)$, obtém-se

$$C_1(x) = \widehat{k} \frac{dv_0}{dx},$$

onde

$$\widehat{k} \triangleq \left\langle \frac{1}{k(\xi)} \right\rangle^{-1}, \quad (4.18)$$

$\widehat{k}$ é a média harmônica de $k(\xi)$.

Substituindo (4.18) de volta na equação (4.16), obtém-se

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi} = \left(\frac{\widehat{k}}{k(\xi)} - 1 \right) \frac{dv_0}{dx},$$

a qual pode ser integrada com respeito a ξ , fornecendo

$$u_1(x, \xi) = N_1(\xi) \frac{dv_0}{dx} + D_1(x), \quad (4.19)$$

onde

$$N_1(\xi) \triangleq \int_0^\xi \left(\frac{\widehat{k}}{k(\tau)} - 1 \right) d\tau, \quad (4.20)$$

e $D_1(x)$ é uma função arbitrária, à qual, para este caso particular, pode-se impor que

$$D_1(x) = 0, \quad (4.21)$$

uma vez que D_1 é constante com respeito a ξ e não interferirá no valor da constante efetiva.

A expressão (4.20) para $N_1(x)$ pode ser obtida alternativamente utilizando separação

de variáveis. Para isto, reescreve-se a equação (4.15) na forma

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(k(\xi) \frac{\partial u_1(x, \xi)}{\partial \xi} \right) = - \left(\frac{dk(\xi)}{d\xi} \right) \frac{dv_0}{dx}. \quad (4.22)$$

Utilizando agora o método de separação de variáveis, busca-se uma solução u_1 de (4.22) da forma

$$u_1(x, \xi) = N_1(\xi) \frac{dv_0}{dx}, \quad (4.23)$$

onde N_1 é uma função arbitrária de ξ .

Substituindo $u_1(x, \xi)$, dado por (4.23) em (4.22), obtém-se uma equação para a determinação de N_1 , a qual é dada por

$$\frac{d}{d\xi} \left(k(\xi) \frac{d}{d\xi} (N_1(\xi) + \xi) \right) = 0. \quad (4.24)$$

Note que $N_1(\xi)$ é uma solução particular da equação (4.24).

Integrando (4.11) com relação a ξ sobre $[0, 1]$ e considerando a periodicidade de $u_1(x, \xi)$ e de $k(\xi)$ resulta:

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k(\xi) \frac{\partial u_1(x, \xi)}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k(\xi) \frac{\partial u_0(x, \xi)}{\partial x} \right) \right) d\xi = \mathbf{f}(x) \quad (4.25)$$

Substituindo as equações (4.14) e (4.23), em (4.25) tem-se

$$\widehat{k} \frac{d^2 v_0}{dx^2} = \mathbf{f}(x), \quad (4.26)$$

onde

$$\widehat{k} = \int_0^1 k(\xi) \frac{d}{d\xi} (N_1(\xi) + \xi) d\xi.$$

A equação (4.26) é chamada de equação homogeneizada e $\widehat{k}$ de coeficiente efetivo.

Se $v_0(x)$ é uma solução da equação (4.26), então a equação (4.11) é solúvel com respeito a u_2 na classe das funções 1-periódicas em ξ . Consequentemente, em virtude de (4.9),(4.10),(4.11), a solução proposta (4.5) satisfaz (4.4) e, portanto, (4.7) até os termos de

ordem ϵ^0 .

Assim a barra original não homogênea é modelada como uma barra homogênea tendo $\hat{k}$ como constante efetiva. Deste modo, resolve-se diversos problemas de condução de calor representando diferentes situações do sistema (4.4) utilizando-se (4.26).

4.2 Caso Geral

Na seção (4.1) utiliza-se a expansão assintótica (4.5) para se obter uma aproximação de ordem $O(\epsilon^3)$ da solução da equação (4.4). Além disto, as condições de contorno são específicas, isto é, $u(0) = u(1) = 0$. Nesta seção, deseja-se construir uma expansão assintótica da solução $u : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$ do problema

$$Pu \equiv \frac{d}{dx} \left(k(\xi) \frac{du}{dx} \right) - f(x) = 0, \quad x \in (0, l), \quad \xi = \frac{x}{\epsilon} \quad (4.27)$$

$$\begin{cases} u(0) = g_1, \\ u(l) = g_2, \end{cases} \quad (4.28)$$

utilizando todos os termos desta expansão, e, neste caso, para quaisquer condições de contorno, g_i , na classe das funções continuamente diferenciáveis, $\mathbb{C}^\infty(0, l)$.

Em (4.27) e (4.28), supõe-se que

- (1) $k(\xi) \in \mathbb{C}^\infty(0, l)$ é 1-periódico e $0 < k_1 < k(\xi) < k_2$, $\xi \in \mathbb{R}$.
- (2) $f(x) \in \mathbb{C}^\infty(0, l)$, $f(x) \in [0, 1]$.
- (3) $\epsilon \ll 1$, $\epsilon = \frac{l}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Observe que o comportamento do coeficiente de condutividade, $k(\frac{x}{\epsilon})$, o qual esta ilustrado na Fig. 4.3, é rapidamente oscilante

Busca-se uma solução assintótica do problema (4.27), (4.28) da forma (4.5). Antes, lembre-se que, na seção (4.1) introduz-se a expansão assintótica (4.5) para a solução do problema (4.4). Define-se (4.14) e calcula-se (4.23). Em vista disto, assume-se que a expansão

Figura 4.3: Curva do coeficiente de condutividade $k(\xi)$.

assimptótica (4.5) tem a forma:

$$u^\infty(x, \xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i N_i(\xi) \frac{d^i v(x)}{dx^i} \quad (4.29)$$

onde a função $N_i(\xi)$ é 1-periódica e, $v(x)$, que será construída a seguir, é uma solução para o problema (4.27), (4.28) após homogeneizado. E, além disso, $v(x)$ possui uma expansão assimptótica

$$v(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j v_j(x), \quad (4.30)$$

onde $v_j(x) \in C^\infty(0, l)$ e não depende de ϵ .

Substituindo (4.29) em (4.27), lembrando que $\xi = \frac{x}{\epsilon}$, e utilizando a regra da cadeia, obtém-se

$$\begin{aligned} Pu^\infty(x, \xi) &\approx \frac{d}{dx} \left(k(\xi) \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^{i-1} \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \frac{d^i v(x)}{dx^i} + k(\xi) \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i N_i(\xi) \frac{d^{i+1} v(x)}{dx^{i+1}} \right) \approx \\ &\sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^{i-2} \frac{d}{d\xi} \left(k(\xi) \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \right) \frac{d^i v(x)}{dx^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^{i-1} k(\xi) \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \frac{d^{i+1} v(x)}{dx^{i+1}} + \\ &\sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^{i-1} \frac{d}{d\xi} (k(\xi) N_i(\xi)) \frac{d^{i+1} v(x)}{dx^{i+1}} + \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i k(\xi) N_i(\xi) \frac{d^{i+2} v(x)}{dx^{i+2}}. \end{aligned}$$

Após simplificações da expressão anterior, tem-se que

$$\begin{aligned} Pu^\infty(x, \xi) &\approx \epsilon^{-2} \frac{d}{d\xi} \left(k \frac{dN_0}{d\xi} \right) v + \epsilon^{-1} \left(\frac{d}{d\xi} \left(k \frac{dN_1}{d\xi} \right) + k \frac{dN_0}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} (k N_0) \right) \frac{dv}{dx} + \\ &\sum_{i=2}^{\infty} \epsilon^{i-2} \left(\frac{d}{d\xi} \left(k \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \right) + k \frac{dN_{i-1}}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} (k N_{i-1}) + k N_{i-2} \right) \frac{d^i v}{dx^i}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Neste passo, selecionar-se-ão as funções v_0 e N_i de tal forma que os termos que multiplicam ϵ^{-2} e ϵ^{-1} sejam iguais a zero e todos os termos de ordem superior são independentes de ξ . Obtém-se uma cadeia de relações

$$LN_0 = 0 \quad (4.32)$$

$$LN_1 + k(\xi) \frac{dN_0}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} (k(\xi) N_0) = 0 \quad (4.33)$$

$$LN_i + k(\xi) \frac{dN_{i-1}}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} (k(\xi) N_{i-1}) + k(\xi) N_{i-2} = h_i, \quad i > 1. \quad (4.34)$$

onde

$$L \triangleq \frac{d}{d\xi} \left(k(\xi) \frac{d}{d\xi} \right) \quad (4.35)$$

e h_i são constantes.

Admite-se que $N_0 = 1$. Então, (4.32) é satisfeito automaticamente e (4.33) toma a forma

$$\frac{d}{d\xi} \left(k \left(\frac{dN_1}{d\xi} + 1 \right) \right) = 0. \quad (4.36)$$

Substituindo agora as condições (4.28), na expansão (4.29), tem-se

$$\begin{cases} v(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i N_i(0) \frac{d^i v(0)}{dx^i} \approx g_1, \\ v(l) + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i N_i(0) \frac{d^i v(l)}{dx^i} \approx g_2. \end{cases} \quad (4.37)$$

Na segunda equação de (4.37), utiliza-se

$$N_i \left(\frac{l}{\epsilon} \right) = N_i(n) = N_i(0)$$

devido à periodicidade de $N_i(\xi)$. Em seguida, seleccionando N_i , impõe-se a condição

$$N_i(0) = 1 \quad \text{se } i \geq 1. \quad (4.38)$$

Neste caso, a relação (4.37) toma a forma

$$\begin{cases} v(0) = g_1 \\ v(l) = g_2 \end{cases} \quad (4.39)$$

Agora, reescreve-se as expressões (4.34) e (4.36) na forma

$$LN_i - T_i(\xi) = h_i, \quad i \geq 1, \quad \text{onde } h_1 = 0. \quad (4.40)$$

Como a expressão (4.36) pode ser escrita na forma

$$LN_1 + \frac{dk(\xi)}{d\xi} = 0, \quad (4.41)$$

então, de (4.34), (4.40) e (4.41) tem-se

$$\begin{cases} T_1(\xi) = -\frac{dk(\xi)}{d\xi}, & i = 1, \\ T_i(\xi) = -k\left(\frac{d}{d\xi}N_{i-1} + N_{i-2}\right) - \frac{d}{d\xi}(k(\xi)N_{i-1}), & i > 1. \end{cases} \quad (4.42)$$

Observe, na segunda equação de (4.42), que T_i é obtida de N_j para $j < i$. As constantes h_i são escolhidas sob a hipótese de que existam soluções 1-periódicas da equação (4.40).

Lema 1 *Sejam $F(\xi)$, $k(\xi)$ funções diferenciáveis 1-periódicas e $k(\xi) > 0$. A condição necessária e suficiente para que a solução 1-periódica da equação*

$$LN = F(\xi), \quad (4.43)$$

onde L é definido por (4.35), exista é que

$$\langle F(\xi) \rangle = \int_0^1 F(\xi) d\xi = 0, \quad (4.44)$$

onde $\langle . \rangle$ é a média 1-periódica definida em (4.13).

Prova: ($\implies$) Seja $N(\xi)$ uma solução 1-periódica de (4.43). Integrando (4.43) no intervalo $(0, 1)$ e utilizando a definição (4.35), obtém-se

$$k(1) \frac{dN(1)}{d\xi} - k(0) \frac{dN(0)}{d\xi} = \langle F(\xi) \rangle.$$

A 1-periodicidade de ambos, $k(\xi)$ e $N(\xi)$, implica (4.44).

Prova: ($\impliedby$) A solução geral da equação ordinária (4.43) é dada por

$$N(\xi) = \int_0^\xi k^{-1}(y) \left(\int_0^y F(t) dt + C_1 \right) dy + C_2, \quad (4.45)$$

onde C_i , $i = 1, 2$, são constantes de integração.

Segue da hipótese $\langle F \rangle = 0$ e da periodicidade de $F(t)$ que

$$\int_0^{y+1} F(t) dt - \int_0^y F(t) dt = \int_y^{y+1} F(t) dt = 0.$$

Logo, $\int_0^y F(t) dt$ é 1-periódica em y . Assim, a expressão $k^{-1}(y) \left[\int_0^y F(t) dt + C_1 \right]$ também é uma função 1-periódica em y . Então

$$\begin{aligned} N(\xi + 1) - N(\xi) &= \int_{\xi}^{\xi+1} k^{-1}(y) \left[\int_0^y F(t) dt + C_1 \right] dy \\ &= \left\langle k^{-1}(y) \left[\int_0^y F(t) dt + C_1 \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Escolhe-se a constante C_1 na solução geral (4.45) de forma que a integral em (4.46) anule-se, isto é,

$$C_1 = \langle -k^{-1}(y) \rangle^{-1} \left\langle k^{-1}(y) \int_0^y F(t) dt \right\rangle. \quad (4.47)$$

Deste modo,

$$N(\xi + 1) = N(\xi),$$

isto é, a função $N(\xi)$ é 1-periódica.

Encontra-se, portanto a solução 1-periódica da equação (4.43) e o lema (1) está provado.

Observe de ambos, (4.45) e (4.47), que, exceto pela constante C_2 , a solução $N(\xi)$ está determinada. Assim, se exigir que a solução de (4.43) satisfaça a condição

$$N(0) = 0, \quad (4.48)$$

então a constante C_2 deve ser zero, e a solução dada por (4.45) e (4.48) com a condição (4.44) existe e é única.

Retornando agora às equações (4.40) e (4.42), lembrando que N_i , $i = 0, 1, \dots$, são 1-

periódicas e utilizando o lema (1), as constantes h_i , $i \geq 1$, na equação (4.40) devem ser calculadas de acordo com a condição

$$\langle T_i(\xi) + h_i \rangle = 0,$$

de modo que,

$$h_i = - \langle T_i(\xi) \rangle. \quad (4.49)$$

Em particular, para $i = 1$, tem-se

$$h_1 = - \langle T_1 \rangle = \left\langle \frac{dk}{d\xi} \right\rangle = k(1) - k(0) = 0.$$

Isto implica, pelo lema (1), que, para $h_1 = 0$ existe solução periódica de (4.43). Deste modo, as funções N_i são construídas usando o seguinte procedimento recorrente. Seja $N_0 = 1$ e admite-se que as funções N_j para $j \leq i - 1$, são conhecidas. Determine $T_i(\xi)$ das fórmulas (4.42), calcule h_i de (4.49) e então encontre $N_i(\xi)$ como uma solução 1-periódica de (4.40) que satisfaz as condições (4.38).

Os problemas (4.38) e (4.40) são chamados de *problema locais*, ou, *problemas na célula periódica*.

Visto que $N_i(\xi)$ satisfaz (4.32)-(4.34), a série (4.31) toma a forma

$$\frac{d}{dx} \left(k(\xi) \frac{du^\infty}{dx} \right) \approx \sum_{i=2}^{\infty} \epsilon^{i-2} h_i \frac{d^i v}{dx^i}.$$

Se v é uma solução assintótica formal satisfazendo as relações

$$\sum_{i=2}^{\infty} \epsilon^{i-2} h_i \frac{d^i v}{dx^i} \approx f(x), \quad (4.50)$$

e (4.39), então u^∞ de (4.29) é a solução assintótica formal do problema (4.27), (4.28).

Chama-se (4.50) de *equação homogeneizada* de ordem infinita de aproximação. Lembre-se que os coeficientes h_i , $i \geq 1$, em (4.50) são constantes calculadas de (4.49). Em particular,

h_2 é chamado coeficiente efetivo da barra, e denotado por $\widehat{k}$ e dado por

$$\widehat{k} = \left\langle k(\xi) \left(\frac{dN_1}{d\xi} + 1 \right) \right\rangle. \quad (4.51)$$

Para obter (4.51), utilizou-se (4.49) juntamente com (4.42) para $i = 2$. Por outro lado, observe de (4.36) que

$$\frac{dN_1}{d\xi} = k^{-1}(\xi) C - 1, \quad (4.52)$$

onde C é uma constante de integração. Para determinar C , toma-se a média periódica de (4.52), chegando-se a

$$N_1(1) - N_1(0) = \langle k^{-1}(\xi) \rangle C - 1.$$

Uma vez que, N_1 é 1-periódico, ou seja, $N_1(1) = N_1(0)$ então $C = \langle k^{-1}(\xi) \rangle^{-1}$. Consequentemente, segue de (4.51) que

$$\widehat{k} = \langle C \rangle = \langle k^{-1} \rangle^{-1} > 0.$$

Substituindo a expansão assintótica (4.30) na equação (4.50) e aplicando a derivada para dentro do somatório, uma vez que v é analítica, tem-se que

$$\sum_{i=2}^{\infty} \epsilon^{i-2} h_i \frac{d^i v}{dx^i} \approx \sum_{i=2}^{\infty} \epsilon^{i-2} h_i \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \frac{d^i v_j}{dx^i}.$$

Realizando agora a mudança de índices $q = i + j - 2$, obtém-se

$$\sum_{q=0}^{\infty} \epsilon^q \left(h_2 \frac{d^2 v}{dx^2} + \sum_{j=0}^{q-1} h_{q-j+2} \frac{d^{q-j+2} v_j}{dx^{q-j+2}} \right) \approx f(x).$$

Por outro lado, substituindo (4.30) nas condições (4.39), tem-se que

$$\sum_{q=0}^{\infty} \epsilon^q v_q(0) \approx g_1$$

$$\sum_{q=0}^{\infty} \epsilon^q v_q(l) \approx g_2.$$

Seja

$$f_q(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } q = 0, \\ -\sum_{j=0}^{q-1} h_{q-j+2} \frac{d^{q-j+2} v_j}{dx^{q-j+2}}, & \text{se } q > 0, \end{cases}$$

$$g_i^q = g_i \delta_q^0 = \begin{cases} g_i & \text{se } q = 0, \\ 0 & \text{se } q > 0. \end{cases}$$

Segue que $v_q(x)$ deve satisfazer as equações

$$h_2 \frac{d^2 v_q}{dx^2} = f_q(x), \quad q \geq 0 \quad (4.53)$$

e as condições de contorno

$$\begin{cases} v_q(0) = g_1^q, & q \geq 0 \\ v_q(l) = g_2^q \end{cases} \quad (4.54)$$

Assim, todos os v_q podem consecutivamente ser encontrados, seguindo a cadeia de recorrência de problemas de valor de contorno (4.53) e (4.54). Além disso, pode-se provar por indução que $v_q(x)$ é infinitamente diferenciável.

O problema (4.53) e (4.54) para $q = 0$ têm a forma

$$\begin{cases} \hat{k} \frac{d^2 v_0}{dx^2} = f(x), \\ v_0(0) = g_1, \\ v_0(l) = g_2, \end{cases} \quad (4.55)$$

e é chamado *problema homogeneizado*. Ele descreve um campo térmico em um meio homogeneizado cujas propriedades efetivas são obtidas de expressões analíticas fechadas. A solução do problema (4.53), (4.54) para todo $q \geq 0$ completa o procedimento de construção das soluções assintóticas formais do problema (4.27), (4.28).

A solução do problema (4.27)-(4.28) converge para a solução do problema homogeneizado (4.55) quando ϵ tende a zero.

Seja $u^{(J)}$ uma soma parcial da série em (4.29)

$$u^{(J)} = \sum_{i=1}^{J+1} \epsilon^i N_i \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \frac{d^i v^{(J)}}{dx^i} \quad (4.56)$$

na qual

$$v^{(J)} = \sum_{j=1}^J \epsilon^j v_j(x). \quad (4.57)$$

Mostra-se que

$$\|u - u^{(J)}\|_{C([0,l])} = O(\epsilon^J), \quad (4.58)$$

isto é,

$$\max_{x \in [0,l]} |u - u^{(J)}| = c_0 \epsilon^J, \quad (4.59)$$

onde c_0 é uma constante independente de ϵ . Para maiores detalhes, ver Bakhvalov e Panasenko (1989, p. 25).

4.3 Generalização do MHA para o caso em que $k(\xi)$ é suave por partes

Na seção anterior, define-se o problema (4.27), (4.28) para $k(\xi) \in C^\infty(0, l)$. Nesta seção, deseja-se construir uma expansão assintótica da solução $u : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$, porém, para o caso em que $k(\xi)$ é suave por partes. Como o procedimento é semelhante ao realizado na seção (4.2), aplicação é apresentada de forma de sucinta.

Considere $k(\xi)$ uma função infinitamente diferenciável nos sub-intervalos,

$$[0, \xi_1], [\xi_1, \xi_2], \dots, [\xi_p, 1],$$

onde

$$0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_p < 1$$

e u é a solução generalizada do problema de contorno, (4.27), (4.28), que será reformulado a seguir. Suponha que $k(\xi)$ seja uma função 1-periódica que satisfaz a desigualdade $0 < k_1 \leq$

$k(\xi) \leq k_2$ e que $f(x)$ é uma função infinitamente diferenciável definida sobre $[0, 1]$. Para maior simplicidade, analisar-se-á o caso em que $k(\xi)$ é infinitamente diferenciável no ponto $\xi = 0$ e, conseqüentemente, no segmento $[\xi_i, \xi_{i+1}]$.

Sejam x_{mj} os pontos de descontinuidade do coeficiente $k(\xi)$ em $(0, l)$, os quais são dados por

$$x_{mj} = (\xi_m + j)\epsilon, \quad m = 1, \dots, p, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad n = \frac{l}{\epsilon}.$$

Sejam também

$$[[F]]_{x=x_{mj}} \triangleq F(x_{mj}^+) - F(x_{mj}^-)$$

o salto da função $F : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$ nos pontos x_{mj} .

A formulação clássica do problema de contorno sobre o meio heterogêneo, consiste em achar $u : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça a equação diferencial:

$$Pu \equiv \frac{d}{dx} \left(k(\xi) \frac{du}{dx} \right) = f(x), \quad x \in (0, l), \quad x \neq x_{mj}, \quad (4.60)$$

juntamente com as condições de contorno

$$\begin{cases} u(0) = g_1, \\ u(l) = g_2, \end{cases} \quad (4.61)$$

e as condições de salto

$$[[u]]_{x=x_{mj}} = 0, \quad (4.62)$$

$$\left[\left[k \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \frac{du}{dx} \right] \right]_{x=x_{mj}} = 0, \quad (4.63)$$

O procedimento de construção de u^∞ , visto nas seção (4.1), é completamente aplicável ao problema (4.60)-(4.63), com a diferença de que as funções $N_i(\xi)$ são soluções generalizadas das equações (4.40). De modo análogo para ao lema (1), o lema abaixo pode ser demonstrado. Para maiores detalhes, ver Bakhvalov e Panasenko (1989, p. 27)

Lema 2 *Sejam $F_0(\xi)$, $F_1(\xi)$ e $k(\xi)$ funções 1-periódicas e infinitamente diferenciáveis em cada um dos sub-intervalos $[0, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2]$, ..., $[\xi_p, 1]$, e no ponto $\xi = 0$. Seja $k(\xi) > 0$ e*

limitada e defina o operador linear

$$L \triangleq \frac{d}{d\xi} \left(k(\xi) \frac{d}{d\xi} \right).$$

A condição necessária e suficiente para a existência e unicidade de uma solução $N(\xi)$ com período 1 para o problema

$$LN(\xi) = F_0(\xi) + \frac{dF_1(\xi)}{d\xi}, \quad \xi \neq \xi_m \quad (4.64)$$

$$N(0) = 0, \quad (4.65)$$

$$[[N]]_{\xi=\xi_m} = 0, \quad (4.66)$$

$$\left[\left[k(\xi) \frac{dN}{d\xi} - F_1(\xi) \right] \right]_{\xi=\xi_m} = 0, \quad (4.67)$$

é que $\langle F_0(\xi) \rangle = 0$

A solução do problema (4.64)-(4.65) é uma solução generalizada da equação

$$LN = F_0(\xi) + \frac{dF_1(\xi)}{d\xi},$$

com a condição inicial $N(0) = 0$.

As funções N_i são construídas consecutivamente pelo algoritmo abaixo (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989):

(1) Seja $N_0 \equiv 1$ e suponha que N_j é conhecido para $j \leq i-1$.

(2) Defina-se $T_i(\xi)$ de (4.42), com os termos

$$-k(\xi) \left(\frac{d}{d\xi} N_{i-1} + N_{i-2} \right)$$

operando como $F_0(\xi)$ e os termos

$$\frac{d}{d\xi} (k(\xi) N_{i-1}),$$

operando como

$$\frac{d}{d\xi} (F - 1) (\xi) .$$

(3) Calcular h_i pela fórmula

$$h_i = \left\langle k (\xi) \left(\frac{d}{d\xi} N_{i-1} + N_{i-2} \right) \right\rangle . \quad (4.68)$$

(4) Encontrar uma solução 1-periódica da equação

$$LN_i = T_i (\xi) + h_i, \quad N_i (0) = 0,$$

isto é, a solução do problema

$$LN_i = T_i (\xi) + h_i, \quad \xi \neq \xi_m, \quad m = 1, \dots, p, \quad (4.69)$$

$$N_i (0) = 0 \quad (4.70)$$

$$[[N_i]]_{\xi_m} = 0, \quad (4.71)$$

$$\left[\left[k (\xi) \left(\frac{dN_i}{d\xi} + N_{i-1} \right) \right] \right]_{\xi_m} = 0 \quad (4.72)$$

A existência e unicidade da solução do problema (4.69)-(4.70) segue do Lema (2) e (4.68).

O procedimento para construção da solução assintótica formal e do problema para as funções $v_j (x)$ (4.53), (4.54), é idêntico ao da seção (4.2).

Capítulo 5

Aplicação do MHA em Problemas Bidimensionais

5.1 Campos Térmicos Estacionários: Condução Térmica

Neste capítulo, estendem-se os resultados descritos na seção (4.1), ao caso da equação da condução térmica sobre um composto s -dimensional provido de uma estrutura periódica.

5.1.1 Formulação do Problema

Seja $\left(A_{kj}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right)$, $k, j = 1, \dots, s$, e $\frac{x}{\epsilon} = \xi$, a matriz que define o tensor de condutividade térmica em cada ponto $x = (x_1, \dots, x_s)$ de um domínio Ω s -dimensional com contorno $\partial\Omega$ infinitamente suave. Suponha que as componentes $A_{kj}(\xi)$ são funções com período 1, isto é, são 1-periódicas, além disso, $A_{kj}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^s)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$ (de modo que as funções $A_{kj}(\xi)$ são ϵ -periódicas em todo x). A Figura (5.1) mostra a seção transversal de um composto fibroso, na qual ϵ é o lado da célula periódica quadrada, $(0, \epsilon) \times (0, \epsilon)$.

Estuda-se aqui o problema de valor de contorno correspondente à determinação da

Figura 5.1: Composto fibroso com estrutura periódica, cujas fibras estão na direção do eixo $0x_3$.

temperatura $u(x)$ que satisfaz a equação de balanço de energia

$$Pu \equiv \frac{\partial}{\partial x_k} \left(A_{kj}(\xi) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - f(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (5.1)$$

a qual é análoga em $\mathbb{R}^s$ à equação (4.3) em $\mathbb{R}$, com a condição de contorno

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (5.2)$$

onde $f(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ representa uma função fonte de calor. Considera-se a convenção de soma com relação aos índices repetidos de 1 até a dimensão s do espaço. Supõe-se também que a matriz $(A_{kj}(\xi))$ é simétrica e positiva definida em cada ponto ξ , ou seja, $A_{kj}(\xi) = A_{jk}(\xi)$, $\exists k_1 > 0$, tal que,

$$A_{kj}(\xi) \eta_k \eta_j \geq k_1 \eta_k \eta_k, \quad \forall \eta = (\eta_1, \dots, \eta_s) \in \mathbb{R}^s, \quad (5.3)$$

onde $k_1 > 0$ é uma constante independente de ambos, ϵ e ξ .

5.1.2 Homogeneização

Analogamente ao Capítulo 4, propõe-se a solução de (5.1), (5.2) na forma de uma expansão assintótica em ϵ . Aqui, no entanto, deseja-se obter uma aproximação desta solução considerando os três primeiros termos da expansão, ou seja,

$$u^2(x, \xi) = u_0(x, \xi) + \epsilon u_1(x, \xi) + \epsilon^2 u_2(x, \xi), \quad \xi = \frac{x}{\epsilon}, \quad (5.4)$$

onde $u_i(x, \xi)$, $i = 0, 1, 2$, são funções 1-periódicas e infinitamente diferenciáveis.

Substituindo (5.4) na equação (5.1), aplicando a regra da cadeia

$$\frac{d}{dx_k} F(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial x_k} F(x, \xi) + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_k} F(x, \xi) \quad (5.5)$$

e introduzindo a notação

$$L_{pq} u(x, \xi) = \sum_{k, j=1}^s \frac{\partial}{\partial p_k} \left[A_{kj}(\xi) \frac{\partial u(x, \xi)}{\partial q_j} \right] \quad (5.6)$$

resulta

$$\begin{aligned} Pu^2 &= \epsilon^{-2} (L_{\xi\xi}u_0) + \epsilon^{-1} (L_{\xi\xi}u_1 + L_{\xi x}u_0 + L_{x\xi}u_0) + \\ &\epsilon^0 (L_{\xi\xi}u_2 + L_{\xi x}u_1 + L_{x\xi}u_1 + L_{xx}u_0 - f) + \\ &\epsilon^1 (L_{\xi x}u_2 + L_{x\xi}u_2 + L_{xx}u_1) + \epsilon^2 (L_{xx}u_2). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Agora, iguala-se a zero os termos que multiplicam ϵ^{-2} , ϵ^{-1} , ϵ^0 , de modo que a equação (5.1) seja satisfeita por $u^{(2)}$ até os termos de ordem ϵ^0 . Os termos de ordem ϵ e ϵ^2 compõem a discrepância na equação (5.1). Assim, obtém-se as equações que definem as funções $u_i(x, \xi)$, $i = 0, 1, 2$,

$$L_{\xi\xi}u_0 = 0 \quad (5.8)$$

$$L_{\xi\xi}u_1 = -L_{\xi x}u_0 - L_{x\xi}u_0 \quad (5.9)$$

$$L_{\xi\xi}u_2 = -L_{\xi x}u_1 - L_{x\xi}u_1 - L_{xx}u_0 + f, \quad (5.10)$$

onde x e ξ são consideradas variáveis independentes. O lema seguinte, similar ao lema (1), pode ser formulado para garantir a existência de soluções na classe das funções 1-periódicas para as equações (5.8)-(5.10):

Lema 3 *Sejam $A_{kj}(\xi)$, $F(\xi)$ funções diferenciáveis 1-periódicas e suponha que $A_{kj}(\xi)$ é simétrico e positivo-definido. Então, uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução 1-periódica, $N(\xi)$, da equação*

$$L_{\xi\xi}N \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(A_{kj}(\xi) \frac{\partial N(\xi)}{\partial \xi_j} \right) = F(\xi) \quad (5.11)$$

é que

$$\langle F(\xi) \rangle = \int_0^1 \dots \int_0^1 F(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_s = 0.$$

No contexto do lema (3) entende-se por uma solução geral 1-periódica da equação (5.11) uma família de funções dependentes de uma constante arbitrária C , definida por $N(\xi) = \overline{N(\xi)} + C$, donde $\overline{N(\xi)}$ é uma solução de (5.11) com média nula, isto é, $\langle \overline{N(\xi)} \rangle = 0$ (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989, p. 106).

Utilizando argumentos análogos aos utilizados na seção (4.1), mostra-se que o lema (3)

implica que a solução 1-periódica $u_0(x, \xi)$ de (5.8) é independente de ξ . Definindo

$$v_0(x) \triangleq u_0(x, \xi). \quad (5.12)$$

reescreve-se (5.9) como

$$L_{\xi\xi}u_1 = -L_{\xi x}v_0. \quad (5.13)$$

Considerando x como um parâmetro em (5.13), toma-se $F(\xi) = -L_{\xi x}v_0$ no lema (3) juntamente com a definição (5.6) e obtém-se a condição necessária e suficiente para a solubilidade de (5.9), a qual é dada por

$$\langle -L_{\xi x}v_0 \rangle = -\frac{\partial v_0(x)}{\partial x_j} \left\langle \frac{\partial A_{kj}(\xi)}{\partial \xi_k} \right\rangle = 0,$$

pois $A_{kj}(\xi)$ é uma função 1-periódica.

Utilizando o método de separação de variáveis, a solução do problema (5.13) pode ser representada por

$$u_1(x, \xi) = N_{i_1}(\xi) \frac{\partial v_0}{\partial x_{i_1}} \quad (5.14)$$

onde $N_{i_1}(\xi)$, $i_1 = 1, \dots, s$ é uma solução 1-periódica da equação

$$L_{\xi\xi}N_{i_1} + \frac{\partial A_{ki_1}(\xi)}{\partial \xi_k} = 0, \quad (5.15)$$

a qual foi obtida de (5.13) juntamente com a hipótese de que $\frac{\partial v_0}{\partial x_i}$ não são linearmente dependentes entre si. A expressão (5.15) pode ser reescrita, utilizando (5.11), na forma

$$L_{\xi\xi}(N_{i_1} + \xi_{i_1}) = 0. \quad (5.16)$$

Observe que (5.16) é semelhante a expressão (4.24) da seção (4.1). A equação (5.16) é chamada *equação sobre uma célula periódica* e deve ser resolvida para definir *os coeficientes efetivos* da *equação homogeneizada*. Com efeito, pelo lema (3) a solução da equação (5.16) existe. Esta solução contém uma constante arbitrária, que é determinada pela condição $\langle N_{i_1} \rangle = 0$.

Além disso, utilizando as expressões (5.12) e (5.14) pode-se reescrever a equação (5.10)

como

$$L_{\xi\xi}u_2 + \left(\frac{\partial}{\partial\xi_k} (A_{ki_1} N_{i_2}) + A_{i_1j} \frac{\partial N_{i_2}}{\partial\xi_j} + A_{i_1i_2} \right) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} = f, \quad (5.17)$$

onde A_{ij} e N_i dependem somente de ξ e f depende somente de x .

Uma condição necessária e suficiente para a solubilidade de (5.17) na classe das funções 1-periódicas determina a *equação homogeneizada*

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial\xi_k} (A_{ki_1}(\xi) N_{i_2}(\xi)) + A_{i_1j}(\xi) \frac{\partial N_{i_2}(\xi)}{\partial\xi_j} + A_{i_1i_2}(\xi) \right\rangle \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} = f(x). \quad (5.18)$$

Visto que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial\xi_k} (A_{ki_1}(\xi) N_{i_2}(\xi)) \right\rangle = 0,$$

devido a 1-periodicidade de $A_{ki_1}(\xi) N_{i_2}(\xi)$, a equação (5.18) é reescrita como

$$\hat{A}_{i_1i_2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} = f(x), \quad (5.19)$$

onde os coeficientes efetivos $\hat{A}_{i_1i_2}$ são constantes definidas por

$$\hat{A}_{i_1i_2} = \left\langle A_{i_1j}(\xi) \frac{\partial M_{i_2}(\xi)}{\partial\xi_j} \right\rangle, \quad M_i \equiv N_i + \xi_i. \quad (5.20)$$

Teorema 1 *Os coeficientes efetivos $\hat{A}_{i_1i_2}$ satisfazem a condição de simetria $\hat{A}_{i_1i_2} = \hat{A}_{i_2i_1}$ e de elipticidade*

$$\hat{A}_{i_1i_2} \eta_{i_1} \eta_{i_2} \geq k_1 \eta_{i_1} \eta_{i_2}.$$

A demonstração deste teorema encontra-se em Bakhvalov e Panasenko (1989, p. 108).

Uma vez que $v_0(x)$ é solução da equação (5.19), tem-se que a equação (5.10), pode ser escrita como

$$L_{\xi\xi}u_2 = \left(\hat{A}_{i_1i_2}(\xi) - T_{i_1i_2}(\xi) \right) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}, \quad (5.21)$$

onde

$$T_{i_1i_2}(\xi) = \frac{\partial}{\partial\xi_k} (A_{ki_1}(\xi) N_{i_2}(\xi)) + A_{i_1j}(\xi) \frac{\partial N_{i_2}(\xi)}{\partial\xi_j} + A_{i_1i_2}(\xi).$$

Utilizando separação de variáveis, assume-se que

$$u_2(x, \xi) = N_{i_1 i_2}(\xi) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \quad (5.22)$$

e insere-se esta expressão de $u_2(x, \xi)$ em (5.21), obtendo-se

$$L_{\xi\xi} N_{i_1 i_2}(\xi) + T_{i_1 i_2}(\xi) = \widehat{A}_{i_1 i_2}(\xi). \quad (5.23)$$

Novamente pelo lema (3), existem soluções 1-periódicas de $N_{i_1 i_2}$ de (5.23).

Portanto, pode-se assumir que, se $N_{i_1}(\xi)$, $N_{i_1 i_2}(\xi)$ e v_0 são, respectivamente, soluções das equações (5.16), (5.23) e da equação homogeneizada (5.19), com $v_0 \in C^\infty(\bar{\Omega})$, então a função

$$u^2 = v_0 + \epsilon N_{i_1}(\xi) \frac{\partial v_0}{\partial x_{i_1}} + \epsilon^2 N_{i_1 i_2}(\xi) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}$$

é uma solução da equação

$$Pu^2 = \epsilon r^2(x, \epsilon),$$

onde

$$\epsilon r^2(x, \epsilon) \triangleq \epsilon (L_{\xi x} u_2 + L_{x\xi} u_2 + L_{xx} u_1) + \epsilon^2 (L_{\xi\xi} u_2)$$

contém os termos de ordem ϵ^i ($i = 1, 2$) em (5.7). Assim, para $v_0(x) \in C^4(\bar{\Omega})$, existe uma constante $c > 0$, independente de ϵ , tal que

$$|r^2(x, \epsilon)| \leq c, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Isto conduz a

$$\|u - v_0\|_{C(\bar{\Omega})} = O(\epsilon)$$

onde u é a solução do problema original (5.1)-(5.2) e v_0 é a solução do problema homogeneizado (5.19) com condições de contorno

$$v_0(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

5.2 Problemas Locais e Coeficientes Efetivos: Caso Descontínuo

Nesta seção, apresenta-se, de modo mais intuitivo que rigoroso, a formulação do problema (5.1), (5.2), para o caso em que $A_{kj}(\xi)$ possuem pontos de descontinuidade. Para mais detalhes, ver Bakhvalov e Panasenko (1989).

Sejam $A_{kj}(\xi)$ funções 1-periódicas suaves por partes, isto é, $A_{kj}(\xi)$ são infinitamente diferenciáveis exceto sobre superfícies suaves Σ_l que não se interceptam e das quais só um número finito tem intersecção com o cubo unitário. Sobre cada uma das superfícies Σ_l os coeficientes $A_{kj}(\xi)$ e todas as suas derivadas podem ter descontinuidades de primeira ordem. Supõe-se que a matriz $(A_{kj}(\xi))$ é simétrica e positiva definida. Tal como na seção anterior, o domínio Ω tem contorno suave, $\partial\Omega$, e $f(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Neste caso, o problema consiste em encontrar u que satisfaça a equação (5.1) naquelas regiões que não têm contato com as superfícies de descontinuidade Σ_l , a condição de contorno (5.2) e devem satisfazer as seguintes condições de contato perfeito sobre Σ_l :

$$[[u]] = 0, \quad (5.24)$$

$$\left[\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] = 0, \quad (5.25)$$

onde $\frac{\partial u}{\partial n}$ denota a derivada com respeito à conormal e é definida por

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{k, j=1}^s A_{kj} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_k.$$

De modo análogo à seção anterior, obtém-se a mesma equação homogeneizada (5.19), e determinam-se os coeficientes efetivos, $\hat{A}_{i_1 i_2}$, mediante (5.20). As funções locais N_{i_1} ($i_1 = 1, \dots, s$) são soluções generalizadas 1-periódicas das equações (5.16), ou seja, elas devem satisfazer os equações e condições apresentadas abaixo, as quais constituem o problema denotado por ${}_{i_1}L$:

$$L_{\xi\xi} (N_{i_1} + \xi_{i_1}) = 0, \quad \xi \notin \Sigma_l, \quad (5.26)$$

$$[[N_{i_1}]]_{\xi \in \Sigma_l} = 0, \quad (5.27)$$

$$\left[\left[\frac{\partial (N_{i_1} + \xi_{i_1})}{\partial n} \right] \right]_{\xi \in \Sigma_l} = 0, \quad (5.28)$$

$$\langle N_{i_1} \rangle = 0. \quad (5.29)$$

Tal como na seção anterior, a condição (5.29) garante a unicidade da solução do problema local $_{i_1}L$.

Nas próximas seções mostram-se alguns exemplos de soluções de problemas locais em compósitos de interesse para aplicações em bioengenharia.

5.2.1 Homogeneização Unidimensional em Meios Laminados

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a região ocupada por um composto laminado formado por células periódicas ao longo do eixo Ox_3 , conforme ilustrado na Fig. 5.2. Cada célula tem comprimento unitário e pode possuir qualquer número finito de lâminas com tensor de condutividade térmica $A_{kj}(\xi)$ ($k, j = 1, 2, 3$) com $\xi = \xi_3$.

Figura 5.2: Composto Laminado

Neste caso, a equação (5.26) é ordinária e o problema de obter os coeficientes efetivos do composto pode ser resolvido de modo simples seguindo as idéias desenvolvidas no Capítulo 5 de Pobedrya (1984, p.144), o qual trata do caso elástico.

Deste modo, os problemas locais ${}_{i_2}L$ ($i_2 = 1, 2, 3$) consistem em encontrar as funções $N_{i_2}(\xi)$ que sejam 1-periódicas, tal que (Bravo-Castillero, 2005)

$$\frac{d}{d\xi_3} \left(A_{33} \frac{dN_q}{d\xi_3} + A_{3q} \right) = 0. \quad (5.30)$$

O coeficiente efetivo definido por (5.20) toma a forma (Bravo-Castillero, 2005):

$$A_{pq} = \left\langle A_{pq}(\xi) + A_{p3}(\xi) \frac{dN_q(\xi)}{d\xi_3} \right\rangle. \quad (5.31)$$

Assim, para obter uma expressão para os coeficientes efetivos basta obter a derivada $\frac{dN_q(\xi)}{d\xi_3}$ de (5.30) e substituí-la em (5.31). De fato, de (5.30) resulta

$$\frac{dN_q(\xi)}{d\xi_3} = A_{33}^{-1}(\xi) (C_{3q} - A_{3q}(\xi)), \quad (5.32)$$

onde C_{3q} são constantes de integração. Aplicando o operador $\langle \cdot \rangle$ em ambos os lados de (5.32), e utilizando a periodicidade de N_q , encontra-se

$$C_{3q} = \langle A_{33}^{-1}(\xi) \rangle^{-1} \langle A_{33}^{-1}(\xi) A_{3q}(\xi) \rangle. \quad (5.33)$$

Finalmente, substituindo (5.32) e (5.33) em (5.31), obtém-se

$$\hat{A}_{pq} = \langle A_{pq}(\xi) \rangle + \langle A_{p3}(\xi) A_{33}^{-1}(\xi) \rangle \langle A_{33}^{-1}(\xi) \rangle^{-1} \langle A_{33}^{-1}(\xi) A_{3q}(\xi) \rangle - \langle A_{p3}(\xi) A_{33}^{-1}(\xi) A_{3q}(\xi) \rangle \quad (5.34)$$

a qual é a expressão geral dos coeficientes efetivos para o composto laminado.

Efetua-se os cálculos e mostra-se que (5.34) satisfaz a propriedade de simetria

$$\hat{A}_{pq} = \hat{A}_{qp}$$

e ao remover as médias, nota-se que

$$\widehat{A}_{pq} = A_{pq}.$$

Esta fórmula é certa para células periódicas que contenham qualquer número finito de lâminas.

Para o caso em que as lâminas são isotrópicas, isto é, para

$$A_{kj}(\xi) = k(\xi) \delta_{kj},$$

as propriedades efetivas resultantes ao aplicar a fórmula (5.34) são

$$\widehat{A}_{kj} = 0 \ (k \neq j), \ \widehat{A}_{11} = \widehat{A}_{22} = \langle k(\xi) \rangle, \ \widehat{A}_{33} = \langle k^{-1}(\xi) \rangle^{-1}.$$

Para o caso particular de um composto bifásico, cujo tensor de condutividade térmica está definido por

$$A_{kj}(\xi) = \begin{cases} A_{kj}^{(1)}; & \xi \in (0, \theta) \\ A_{kj}^{(2)}; & \xi \in (\theta, 1) \end{cases} \quad (k, j = 1, 2, 3),$$

com $\xi = \xi_3$ e θ a interface entre as fases. O coeficiente efetivo é (Galka et al., 1996, p. 139)

$$\widehat{A}_{kj} = \langle A_{kj} \rangle - \theta(1 - \theta) [[A_{k3}]] \tilde{A}^{-1} [[A_{3j}]], \quad (5.35)$$

onde

$$[[A]] = A^{(1)} - A^{(2)} \text{ e } \tilde{A}^{-1} = \theta A_{33}^{(2)} + (1 - \theta) A_{33}^{(1)}.$$

5.2.2 Homogeneização Bidimensional em Compostos Fibrosos

Estuda-se aqui o comportamento efetivo de um material composto bifásico formado por fibras cilíndricas unidirecionais isotrópicas, de seção transversal circular, que se encontram periodicamente distribuídas em um meio isotrópico (matriz) não limitado em $\mathbb{R}^3$. Os eixos de simetria das fibras têm a mesma direção do eixo Ox_3 , como na Fig. 5.1. Este caso corresponde a um problema de homogeneização bidimensional. Para o desenvolvimento dos problemas locais, seleciona-se a célula periódica ilustrada na Fig. 5.3, onde $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ representam as regiões ocupadas pela matriz e fibra, respectivamente. A interface entre as regiões é dada

pela circunferência

$$\Sigma : \xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2$$

onde r é o raio do círculo $\mathcal{F}$ e Ω a fronteira externa de $\mathcal{R}$.

Figura 5.3: Célula periódica de um composto bifásico.

Em virtude da isotropia de cada fase, escreve-se o tensor de condutividade térmica como

$$A_{kj}(\xi) = k(\xi) \delta_{kj} = \begin{cases} \delta_{kj} k_1 & \text{se } \xi \in R_1, \\ \delta_{kj} k_2 & \text{se } \xi \in R_2, \end{cases} \quad (5.36)$$

onde δ_{kj} é o delta de Kronecker, definido por

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = j, \\ 0 & \text{se } k \neq j. \end{cases}$$

Para esta aplicação, das equações (5.26)-(5.28), resultam os problemas locais, $i_2 L$, $i_2 = 1, 2$, definidos pelas equações de Laplace em cada uma das regiões R_γ ($\gamma = 1, 2$):

$$\Delta N_{i_2}^{(\gamma)}(\xi) \equiv \frac{\partial^2 N_{i_2}^{(\gamma)}(\xi)}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 N_{i_2}^{(\gamma)}(\xi)}{\partial \xi_2^2} = 0, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in R_\gamma, \quad \gamma = 1, 2, \quad (5.37)$$

e pelas condições de salto (contato perfeito) sobre a circunferência Σ :

$$[[N_{i_2}(\xi)]] = 0, \quad (5.38)$$

$$\left[\left[k(\xi) \frac{\partial N_{i_2}(\xi)}{\partial \xi_k} n_k \right] \right] = -[[k(\xi)]] n_{i_2}, \quad (5.39)$$

onde

$$[[f(\xi)]] = f_1(\xi) - f_2(\xi), \quad (5.40)$$

e,

$$N_{i_2}(\xi) = \sum_{\gamma=1}^2 N_{i_2}^{(\gamma)}(\xi) \mathbb{P}_{R_\gamma}(\xi), \quad \text{para } \mathbb{P}_{R_\gamma}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi \in R_\gamma \\ 0 & \text{se } \xi \notin R_\gamma \end{cases} \quad (5.41)$$

resultam das equações e condições (5.26), (5.28).

A solução dos problemas locais (5.37)-(5.39) é necessária para a determinação dos quatro coeficientes efetivos $\hat{A}_{i_1 i_2}$ mediante a fórmula (5.20), escrita agora da seguinte forma

$$\hat{A}_{i_1 i_2} = \langle A_{i_1 i_2}(\xi) \rangle + \left\langle A_{k i_1}(\xi) \frac{\partial N_{i_2}(\xi)}{\partial \xi_k} \right\rangle. \quad (5.42)$$

Estudar-se-á nesta aplicação a metodologia para a solução do problema correspondente apenas para $i_2 = 1$, aplicando elementos da teoria das funções de variável complexa, uma vez que $\mathbb{R}^2$ isomorfo a $\mathbb{C}$, ver detalhes no Apêndice (A.3.2).

Seja $z = \xi_1 + i\xi_2$, propõe-se uma solução para o problema (5.37)-(5.39) com $i_2 = 1$ da forma

$$N_1^{(1)}(z) = \text{Re} \left\{ a_1 [\zeta(z) - \pi z] + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} \frac{\zeta^{(2k)}(z)}{(2k)!} \right\} \quad (5.43)$$

$$N_1^{(2)}(z) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z^{2k+1} \right\}, \quad (5.44)$$

onde $\zeta(z)$ e $\zeta^{(k)}(z)$ são as funções *Zeta de Weierstrass*. (MARKUSHEVICH, 1970).

As funções definidas por (5.43) e (5.44) são funções analíticas em R_1 e R_2 , respectivamente, cujas partes real e imaginária são funções harmônicas, isto é, satisfazem a equação de Laplace (5.37) (MARKUSHEVICH, 1970).

Observe de (5.43) que a função $N_1^{(1)}(z)$ é duplamente periódica com períodos $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = i$, a qual está em concordância com a exigência geométrica de encontrar a solução de (5.37)-(5.39) na classe de funções com dupla periodicidade (BRAVO-CASTILLERO, 2005).

Os coeficientes a_k em (5.43) e c_k em (5.44) são constantes reais obtidas de (5.43) e (5.44) nas condições de contato sobre a circunferência Σ . Para obtê-las, é necessário desenvolver $N_1^{(1)}(z)$ em série de Laurent em torno da origem.

Mostra-se que a série

$$S_{k+l} = \sum'_{m,n} \frac{1}{(m+in)^{k+l}} \quad (5.45)$$

é real e que se anula quando $k+l$ não é da forma $4t$ para $t = 1, 2, 3$. Para $k+l \geq 2$ esta série é convergente. Para maiores detalhes ver Markushevich (1970). A linha em Σ , na expressão (5.45), indica que a soma dupla realiza-se sobre todos os números inteiros exceto para $m = n = 0$.

Assim, ao desenvolver a função $N_1^{(1)}(z)$ em séries de Laurent em torno do ponto $z = 0$, obtém-se:

$$N_1^{(1)}(z) = \text{Re} \left\{ -a_1 \pi z + \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+1} z^{-(2l+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \sum_{l=0}^{\infty} \eta_{(2k+1)(2l+1)} z^{-(2l+1)} \right\} \quad (5.46)$$

onde $\eta_{rs} \neq \eta_{sr}$ e é definido por

$$\eta_{rs} = -C_{r+s-1}^s S_{r+s}, \quad (5.47)$$

com

$$C_r^s = \frac{r!}{s! (r-s)!}, \quad S_{r+s} = \sum'_{m,n} \frac{1}{(m+in)^{r+s}}. \quad (5.48)$$

Substituindo (5.44) e (5.46) na condição de contato (5.38), obtêm-se uma relação de dependência entre os coeficientes a_k e c_k que aparecem nas expressões (5.43), (5.44). Esta relação é dada por

$$c_p = \frac{a_p}{r^{2p}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \eta_{(2k+1)p} - a_1 \delta \delta_{1p}, \quad p = 1, 3, 5, \dots, \quad (5.49)$$

onde $\delta = \frac{\pi}{\sin \mu}$, e $\mu = \frac{\pi}{2}$.

Similarmente, substitui-se (5.44) e (5.46) na condição de contato (5.39) para se obter a

expressão

$$c_p = \frac{k_1}{k_2} \left[-\frac{a_p}{r^{2p}} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \eta_{(2k+1)p} - a_1 \delta \delta_{1p} \right] + \frac{[[k]]}{k_2} \delta_{1p}, \quad p = 1, 3, 5, \dots, \quad (5.50)$$

a qual estabelece outra relação entre a_k e c_k

Assim, ao combinar as relações (5.49) e (5.50), eliminando c_p e ao rearranjar a expressão resultante, obtém-se um sistema de infinitas equações algébricas para a determinação de a_k . Este sistema é dado por

$$a_p = \chi r^{2p} \left[(1 - a_1 \pi) \delta_{1p} + \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+1} \eta_{(2l+1)p} \right], \quad p = 1, 3, 5, \dots \quad (5.51)$$

onde

$$\chi = \frac{[[k]]}{k_1 + k_2}. \quad (5.52)$$

É possível obter a solução do sistema (5.51) mediante a redução deste sistema a sistemas finitos, ou seja, a solução de (5.51) pode ser encontrada como o caso limite de uma sequência de soluções de sistemas finitos de ordem N , os quais são obtidos do sistema infinito original considerando somente as N primeiras equações com seus correspondentes termos independentes e as N primeiras incógnitas (BRAVO-CASTILLERO, 2005). Também existe uma teoria análoga ao Método de Cramer para sistemas infinitos, (ver, por exemplo, em Kantarovichy e Krilov (1964)).

Uma vez que, os coeficientes a_k , $k = 1, 3, 5, \dots$, são determinados pela solução de (5.51), determinam-se também, os coeficientes, c_k , $k = 1, 3, 5, \dots$, da expressão (5.50). Inserindo estes coeficientes nas expressões (5.43) e (5.44), determina-se N_1 . Por conseguinte, o coeficiente $\hat{A}_{i_1 i_2}$, de (5.42), pode ser calculado.

Para $i_1 = i_2 = 1$, ver por exemplo, em Bravo-Castillero (2005), somente o coeficiente a_1 aparece na fórmula do coeficiente efetivo $\hat{A}_{11}$, o qual é dado por

$$\hat{A}_{11} = \langle A_{11}(\xi) \rangle + \left\langle A_{11}(\xi) \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi_1} \right\rangle. \quad (5.53)$$

Utilizando a definição (4.13) para média periódica em um quadrado de dimensões

unitárias, obtém-se

$$\left\langle A_{11}(\xi) \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi_1} \right\rangle = \int_0^1 \int_0^1 A_{11}(\xi) \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2.$$

Utilizando agora a definição (5.36), reescreve-se esta última expressão da forma

$$\left\langle A_{11}(\xi) \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi_1} \right\rangle = k_1 \iint_{R_1} \frac{\partial N_1^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2 + k_2 \iint_{R_2} \frac{\partial N_1^{(2)}(\xi)}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2,$$

a qual, por sua vez, pode ser reescrita na forma

$$\left\langle A_{11}(\xi) \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi_1} \right\rangle = k_1 \oint_{\Omega} N_1^{(1)}(\xi) d\xi_2 - k_1 \oint_{\Sigma} N_1^{(1)}(\xi) d\xi_2 + k_2 \oint_{\Sigma} N_1^{(2)}(\xi) d\xi_2, \quad (5.54)$$

utilizando o Teorema de Green para regiões conexas.

Observe de (5.54) que

$$\oint_{\Omega} N_1^{(1)}(\xi) d\xi_2 = 0$$

devido às condições de periodicidade de $N(\xi)$ em lados opostos da célula periódica, enquanto que

$$\oint_{\Sigma} N_1^{(1)}(\xi) d\xi_2 = \oint_{\Sigma} \partial N_1^{(2)}(\xi) d\xi_2$$

em virtude da condição de salto (5.38). Consequentemente, resulta de (5.54) que

$$\left\langle A_{11}(\xi) \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi_1} \right\rangle = -\|k\| \oint_{\Sigma} N_1^{(1)}(\xi) d\xi_2. \quad (5.55)$$

Utilizando agora a representação polar da variável complexa z , $z = re^{i\theta}$, observe de (5.46) que $N_1^{(1)}$ é dado por combinações lineares de senos e cossenos de múltiplos do argumento θ .

Desenvolvendo o lado direito de (5.55), utilizando a ortogonalidade de sistemas de

funções trigonométricas sobre $[0, 2\pi]$, em particular

$$\int_0^{2\pi} \cos(p\theta) \cos \theta d\theta = \pi \delta_{1p},$$

tem-se

$$\oint_{\Sigma} N_1^{(1)}(\xi) d\xi_2 = r \int_0^{2\pi} N_1^{(1)}(re^{i\theta}) \cos \theta d\theta = \frac{2a_1\pi}{\|k\|} - \pi r^2. \quad (5.56)$$

De (5.55) e (5.56) obtém-se a seguinte expressão para o *coeficiente efetivo*

$$\hat{A}_{11} = k_1 (1 - 2a_1\pi). \quad (5.57)$$

É possível obter uma fórmula explícita para o coeficiente a_1 decompondo o sistema infinito (5.51) em três sistemas de equações, fazendo $k = 1$, $k = 4s - 1$ e $k = 4s + 1$, sucessivamente, e tendo em conta que η_{rs} dado por (5.47) e (5.48), anula-se quando $r + s$ não é da forma $4t$. Os sistemas são dados por (BRAVO-CASTILLERO, 2005)

$$(1 + \chi V_2) a_1 = \chi r^2 \left(1 + \sum_{t=1}^{\infty} a_{4t-1} \eta_{(4t-1)1} \right), \quad (5.58)$$

$$a_{4s-1} = \chi r^{2(4s-1)} \left(a_1 \eta_{1(4s-1)} + \sum_{t=1}^{\infty} a_{4t+1} \eta_{(4t+1)(4s-1)} \right), \quad (5.59)$$

$$a_{4s+1} = \chi r^{2(4s+1)} \sum_{t=1}^{\infty} a_{4t-1} \eta_{(4t-1)(4s+1)}, \quad (5.60)$$

onde $s = 1, 2, 3, \dots$. De (5.58)-(5.60) resulta que

$$a_1 = \frac{\chi r^2}{1 + \chi V_2 - \chi^2 v_p^T M_p^{-1} \tilde{v}_p}, \quad (5.61)$$

onde $V_2 = \pi r^2$. O supra-índice T denota transposição do vetor $v_p(v_s)$. A matriz $M_p(m_{ts})$ e o vetor $\tilde{v}_p(\tilde{v}_s)$ têm, ambos, ordem infinita. As componentes de $v_p(v_s)$ são dadas por:

$$v_s = r^{8s} \eta_{1(4s-1)}, \quad (5.62)$$

as componentes de $M_p(m_{ts})$ são dadas por:

$$m_{ts} = \delta_{(4t-1)(4s-1)} - \chi^2 r^{8s} \sum_{t=1}^{\infty} r^{8s} \eta_{(4t-1)(4i+1)} \eta_{(4i+1)(4s-1)}, \quad (5.63)$$

e as componentes de $\tilde{v}_p(\tilde{v}_s)$ são dadas por:

$$\tilde{v}_t = \eta_{(4t-1)1}, \quad (5.64)$$

para $t, s = 1, 2, 3, \dots$

5.2.3 Passo Limite Correspondente a Fibras Ocas

Estuda-se, nesta seção, o comportamento efetivo de um material composto bifásico formado por fibras cilíndricas unidirecionais ocas, de secção transversal circular, que se encontram periodicamente distribuídas em um meio isotrópico (matriz), semelhante ao descrito na seção (5.2.2). Utiliza-se o estudo realizado para o composto fibroso e aplica-se o limite em χ quando k_2 tende a zero.

Observe que, substituindo (5.61) em (5.57) a expressão de $\hat{A}_{11}$ é dada por

$$\hat{A}_{11} = k_1 (1 - 2V_2 \chi K), \quad (5.65)$$

onde

$$K = \frac{1}{1 + \chi V_2 - \chi^2 v_p^T M_p^{-1} \tilde{v}_p} = \chi r^2 a_1. \quad (5.66)$$

De (5.65) quando $r \rightarrow 0$ resulta no caso limite $\hat{A}_{11} = k_1$.

Quando k_2 tende a zero em (5.65) resulta no caso limite correspondente a fibras vazias. Deste modo, de (5.52), (5.65) e (5.66) obtém-se

$$\lim_{k_2 \rightarrow 0} A_{11} = \lim_{k_2 \rightarrow 0} k_1 (1 - 2V_2 \chi K) = k_1 - 2V_2 \lim_{k_2 \rightarrow 0} \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \cdot K = k_1 - 2V_2 K^0 = \hat{A}_{11}^0$$

cujo coeficiente efetivo $\hat{A}_{11}^0$ é dado por

$$\hat{A}_{11}^0 = k_1 [1 - 2V_2 K^0], \quad (5.67)$$

onde

$$K^0 = \frac{1}{1 + V_2 - v_p^T M_p^{-1} \tilde{v}_p}. \quad (5.68)$$

5.3 Problema de Fronteira Livre Sobre a Célula Periódica

Nesta seção, o comportamento efetivo de um material composto bifásico formado por fibras cilíndricas unidirecionais ocas, de seção transversal circular, que se encontram periodicamente distribuídas em um meio isotrópico (matriz), semelhante ao descrito na seção (5.3), é estudado por meio de um problema de fronteira livre. O qual é definido abaixo

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta N_{i_2}(\xi) = 0 & \text{em } R_1, \\ \frac{\partial N_{i_2}(\xi)}{\partial \xi_k} n_k = -n_{i_2}, & \text{sobre } \Sigma, \\ \langle N_{i_2}(\xi) \rangle = 0. \end{array} \right. \quad (5.69)$$

Faz-se as seguintes considerações:

1 - $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$,

2 - $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in R_1$,

3 - $\Sigma = \xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2$,

4 - $\Delta N_{i_2}(\xi) \equiv \frac{\partial^2 N_{i_2}(\xi)}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 N_{i_2}(\xi)}{\partial \xi_2^2} = 0$,

5 - $N_{i_2}(\xi)$ é $\mathcal{R}$ -periódica.

6 - $n = (n_1, n_2)$ é o vetor normal.

5.3.1 Resolução dos Problemas Locais $_{i_2}L$, $i_2 = 1, 2$.

Solução de ${}_1L$

Seja $z = \xi_1 + \xi_2$, e $f(z) = U_1(\xi) + iU_2(\xi)$, uma função de uma variável complexa, dada por

$$f(z) = a_1 [\zeta(z) - \pi z] + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} \frac{\zeta^{(2k)}(z)}{(2k)!}. \quad (5.70)$$

Propõe-se uma solução para o problema (5.69), $N_1(z)$, tomando a parte real de $f(z)$, ou seja,

$$N_1(z) = \operatorname{Re} \left\{ a_1 [\zeta(z) - \pi z] + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} \frac{\zeta^{(2k)}(z)}{(2k)!} \right\} \quad (5.71)$$

onde $\zeta(z)$ e $\zeta^{(k)}(z)$ são as funções *Zeta de Weierstrass*.

Desenvolvendo $N_1(z)$ em séries de Laurent, de modo semelhante a seção (5.2.2), em torno do ponto $z = 0$, obtém-se

$$N_1(z) = \operatorname{Re} \left\{ -a_1 \pi z + \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+1} z^{-(2l+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \sum_{l=0}^{\infty} \eta_{(2k+1)(2l+1)} z^{(2l+1)} \right\}. \quad (5.72)$$

No qual $\eta_{rs} \neq \eta_{sr}$ e η_{rs} , C_r^s e S_{r+s} estão definidas em (5.47) e (5.48).

Assim, para $z = re^{i\theta} = (r \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, a equação (5.72) admite a seguinte forma

$$\begin{aligned} N_1(z) = & -\pi a_1 r \cos \theta + \sum_{l \geq 0} a_{(2l+1)} r^{-(2l+1)} \cos [(2l+1)\theta] + \\ & + \sum_{k \geq 0} a_{(2k+1)} \sum_{l \geq 0} \eta_{(2k+1)(2l+1)} r^{(2l+1)} \cos [(2l+1)\theta]. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Por (5.69),

$$\frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi_1} n_1 + \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi_2} n_2 = -n_1. \quad (5.74)$$

Além disto, sobre $\Sigma = re^{i\theta}$, para cada raio, $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, considera-se $(n_1, n_2) =$

$(\cos \theta, \sin \theta)$, e deste modo

$$\begin{aligned}\xi_1 &= r \cos \theta \implies d\xi_1 = -r \sin \theta \implies n_2 = -\frac{1}{r} \frac{d\xi_1}{d\theta}, \\ \xi_2 &= r \sin \theta \implies d\xi_2 = r \cos \theta \implies n_1 = \frac{1}{r} \frac{d\xi_2}{d\theta}.\end{aligned}\tag{5.75}$$

Substituindo (5.75) em (5.74), obtém-se

$$\frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi_1} \frac{d\xi_2}{d\theta} - \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi_2} \frac{d\xi_1}{d\theta} = -\frac{d\xi_2}{d\theta}.\tag{5.76}$$

De (5.72), $N_1(\xi) = \operatorname{Re}(U_1(\xi) + iU_2(\xi)) = U_1(\xi)$. Por outro lado, aplicando as condições de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial U_1(\xi)}{\partial \xi_1} = \frac{\partial U_2(\xi)}{\partial \xi_1}, \\ \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial U_1(\xi)}{\partial \xi_2} = \frac{\partial U_2(\xi)}{\partial \xi_2}.\end{aligned}\tag{5.77}$$

Por conseguinte, substituindo (5.77) em (5.76), obtém-se a derivada total

$$\frac{dU_2(\xi)}{d\theta} = -\frac{d\xi_2}{d\theta}.\tag{5.78}$$

Integrando (5.78) sobre $[0, \theta]$, conclui-se que

$$U_2(\xi) = -r \sin \theta\tag{5.79}$$

Por outro lado, de (5.70), a imagem de $f(z)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f(z)) &= -\pi a_1 r \sin \theta + \sum_{l \geq 0} a_{(2l+1)} r^{-(2l+1)} \sin[(2l+1)\theta] + \\ &+ \sum_{k \geq 0} a_{(2k+1)} \sum_{l \geq 0} \eta_{(2k+1)(2l+1)} r^{(2l+1)} \sin[(2l+1)\theta].\end{aligned}\tag{5.80}$$

De (5.79) e (5.80), obtém-se

$$a_{(2l+1)} = r^{2(2l+1)} \left[(1 - \pi a_1) \delta_{(1)(2l+1)} + \sum_{k \geq 0} a_{(2k+1)} \eta_{(2k+1)(2l+1)} \right]. \quad (5.81)$$

Para obter a solução do sistema (5.81), resolve-o de modo semelhante ao sistema (5.51). Substituindo (5.81) em (5.71) determina-se $N_1(z)$.

De (5.42),

$$\hat{A}_{11} = \langle A_{11}(\xi) \rangle + \left\langle A_{11}(\xi) \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi_1} \right\rangle. \quad (5.82)$$

Observe-que,

$$\langle A_{11}(\xi) \rangle = \int_R A_{11}(\xi) d\xi = \iint_R k_1 d\xi_1 d\xi_2 = k_1 \iint_R d\xi_1 d\xi_2 = k_1 (1 - \pi r^2), \quad (5.83)$$

e, semelhante a (5.55),

$$\left\langle A_{11}(\xi) \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi_1} \right\rangle = -\|k\| \oint_{\Sigma} N_1(\xi) d\xi_2. \quad (5.84)$$

O lado direito de (5.84) é desenvolvido como em (5.55)-(5.56), utilizando a ortogonalidade de sistemas de funções trigonométricas sobre $[0, 2\pi]$, em particular

$$\int_0^{2\pi} \cos(p\theta) \cos \theta d\theta = \pi \delta_{1p},$$

obtém-se

$$\oint_{\Sigma} N_1(z) d\xi_2 = r \int_0^{2\pi} N_1(re^{i\theta}) \cos \theta d\theta = \frac{2a_1\pi}{\|k\|} - \pi r^2,$$

e deste modo, obtém-se o coeficiente efetivo

$$\hat{A}_{11}(\xi) = -k_1 (1 - 2a_1\pi). \quad (5.85)$$

Observe que a fórmula para o coeficiente efetivo, $\hat{A}_{11}(\xi)$, em (5.85) e (5.65) são semelhantes,

a menos de uma função, χ .

Resolvendo o sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (1 + V_2) a_1 & = & r^2 \left(1 + \sum_{t=1}^{\infty} a_{4t-1} \eta_{(4t-1)(1)} \right), \\ a_{4s-1} & = & r^{2(4s-1)} \left(a_1 \eta_{1(4s-1)} + \sum_{t=1}^{\infty} a_{4t+1} \eta_{(4t+1)(4s-1)} \right), \\ a_{4s+1} & = & r^{2(4s+1)} \sum_{t=1}^{\infty} a_{4t-1} \eta_{(4t-1)(4s+1)}, \end{array} \right. \quad (5.86)$$

onde $s = 1, 2, 3, \dots$. Resulta

$$a_1 = \frac{r^2}{1 + V_2 - v_p^T M_p^{-1} \tilde{v}_p}, \quad (5.87)$$

onde a matriz $M_p(m_{ts})$ e o vetor $\tilde{v}_p(\tilde{v}_s)$ têm, ambos, ordem infinita. As componentes de $v_p(v_s)$ são dadas por:

$$v_s = r^{8s} \eta_{1(4s-1)}, \quad (5.88)$$

as componentes de $M_p(m_{ts})$ são dadas por:

$$m_{ts} = \delta_{(4t-1)(4s-1)} - r^{8s} \sum_{t=1}^{\infty} r^{8s} \eta_{(4t-1)(4i+1)} \eta_{(4i+1)(4s-1)}, \quad (5.89)$$

e as componentes de $\tilde{v}_p(\tilde{v}_s)$ são dadas por:

$$\tilde{v}_t = \eta_{(4t-1)1}, \quad (5.90)$$

para $t, s = 1, 2, 3, \dots$

Portanto, substituindo (5.87) em (5.85), obtém-se

$$\hat{A}_{11} = k_1 [1 - 2V_2 K], \quad (5.91)$$

onde

$$K = \frac{1}{1 + V_2 - v_p^T M_p^{-1} \tilde{v}_p}. \quad (5.92)$$

Observe que $K = K^0$ em (5.92) e (5.68), e, deste modo, os coeficiente efetivos $\hat{A}_{11}$ em

(5.91) e (5.67) são iguais.

Solução de ${}_2L$

A resolução deste problema é semelhante a resolução do problema ${}_1L$, com a diferença que, propõe-se uma solução para o problema (5.69), $N_1(z)$, tomando a parte imaginária da função $f(z)$, em (5.70).

Resolvendo o problema ${}_2L$, obtém-se uma forma para o coeficiente efetivo $\hat{A}_{22}$ semelhante a $\hat{A}_{11}$, dado em (5.91), o que já era esperado.

Capítulo 6

O Modelamento da Estrutura Óssea

6.1 O Modelo

Admite-se que o osso exibe um comportamento elástico-linear para pequenas deformações e que é um sólido não homogêneo, anisotrópico e piezoelétrico. Lembre-se do Cap. 3 que anisotropia é um conceito local que está relacionado às diferentes respostas mecânicas que um ponto material pode exibir quando solicitado em diferentes direções. Se estas respostas forem iguais, não importando as direções dos carregamentos, então o ponto material é chamado isotrópico. Por conseguinte, um corpo é chamado isotrópico se todos os pontos materiais do corpo exibirem o mesmo comportamento de um único ponto material deste corpo. Obviamente, segue do Cap. 1 que o osso não é um sólido isotrópico.

Dando continuidade ao exposto no Cap. 5, modela-se o osso como um sólido poroso composto de furos cilíndricos circulares vazios distribuídos periodicamente em uma matriz óssea, admitida ser transversalmente isotrópica, de classe 6mm. Para maiores detalhes, ver Nye (1969, p. 296).

Pirâmide Hexagonal Regular. Forma básica dos cristais da classe 6mm
(Fonte: http://home.hetnet.nl/~turing/promorph_crystals_2.html)

	σ	E	ΔT	
ϵ				5
				3
				2
				2
				1
D				1
ΔS				14

Sistema hexagonal, classe Piramidal dihexagonal 6mm. Nye (1969, p. 300).

Este modelo é geral e pode ser aplicado tanto para osso trabecular considerando a porosidade da estrutura óssea em macroescala quanto para ossos corticais considerando sistemas Haversianos. Em ambos os casos o modelo é aplicado considerando ossos secos. Considera-se osso seco aquele formado apenas pelo tecido ósseo, não contendo fluidos, medula, vasos sanguíneos ou capilares.

A matriz óssea ocupa a região $\mathcal{M}$ de uma amostra ilustrada na Fig. (6.1, a) e a célula periódica ocupa a região $\mathcal{R}$ ilustrada na Fig. (6.1, b). A região $\mathcal{R}$ é um paralelogramo contendo a região $\mathcal{R}_1$ da matriz óssea e a região $\mathcal{R}_2$ de um furo circular, centrado na interseção das diagonais do paralelogramo, de raio r e contorno Σ . Considera-se uma distribuição periódica destas células na região $\mathcal{M}$ com períodos $\omega_1 = (\epsilon, 0)$ e $\omega_2 = (0, \epsilon)$.

Figura 6.1: Figura (a) Compósito poroso consistindo de cilindros circulares periodicamente distribuídos em um meio piezoelétrico; (b) Célula periódica elementar quadrada com coordenadas locais (ξ_1, ξ_2) dadas por $\xi_1 = \frac{x_1}{\epsilon} - \frac{1}{2}$, $\xi_2 = \frac{x_2}{\epsilon} - \frac{1}{2}$.

6.1.1 Equações Básicas

Na seção (3.1.2), as relações constitutivas de uma material piezoelétrico linear são dadas por (3.13) e estão reescritas abaixo por conveniência.

$$\begin{cases} T_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k, \\ D_i = e_{ikl}\varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik}E_k. \end{cases} \quad (6.1)$$

Os coeficientes de (6.1) são grandezas locais que variam no compósito poroso. Estes coeficientes materiais satisfazem as propriedades clássicas de simetria e positividade, dadas, respectivamente por

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk}, \quad e_{kij} = e_{kji}, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}, \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \exists C > 0 : \epsilon_{ij}\eta_i\eta_j &\geq C\eta_i\eta_j & \forall \eta \in \mathbb{R}^3, \\ \exists C > 0 : C_{ijkl}a_{ij}a_{kl} &\geq Ca_{ij}a_{kl} & \forall a = (a_{ij}) \in \mathbb{E}_3^S. \end{aligned} \quad (6.3)$$

As componentes do tensor deformação, ε_{ij} , relacionam-se com o as componentes do vetor deslocamento, u_i , e esta relação é dada por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (6.4)$$

As componentes do campo elétrico, E_k , são expressas pelas componentes do gradiente do potencial elétrico, φ , como segue

$$E_k = -\varphi_{,k} \quad (6.5)$$

onde $(*)_{,\delta} = \frac{\partial(*)}{\partial \xi_\delta}$.

Além disso, as equações de equilíbrio e a lei de Gaus da eletrostática na ausência de cargas livres são dadas por

$$\begin{aligned} T_{ij} + X_i &= 0, \\ D_{i,i} &= 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Substituindo (6.1), (6.4) e (6.5) em (6.6), obtém-se

$$\begin{cases} (C_{ijkl}u_{k,l} + e_{kij}\varphi_{,k})_{,j} + X_i = 0, \\ (e_{ikl}u_{k,l} - \epsilon_{ik}\varphi_{,k})_{,i} = 0. \end{cases} \quad (6.7)$$

6.2 Homogeneização

Considere os coeficientes C_{ijkl} , e_{kij} , ϵ_{ik} funções $\mathcal{R}$ -periódicas. Realiza-se uma análise bidimensional, semelhante a realizado na seção (5.3), sobre célula periódica $\mathcal{R}$, dada na Fig. 6.1, a qual tem coordenadas local, (ξ_1, ξ_2) . Para isso, fixamos $C_{ijkl} = C_{ijkl}(\xi)$, $e_{kij} = e_{kij}(\xi)$ e $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik}(\xi)$. A coordenada rápida, ou local, é $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ enquanto que $x = (x_1, x_2)$ é a coordenada global, ou lenta, como na seção (4.1); $\xi = \frac{x}{\epsilon}$, e $\epsilon = \frac{l}{L} \ll 1$, um parâmetro pequeno, o qual representa a razão entre o comprimento característico, l , da célula periódica $\mathcal{R}$, e o comprimento característico, L , de toda a amostra.

Busca-se uma solução para o problema (6.7) na forma de uma expansão assintótica de escala dupla

$$\begin{aligned} u^i(x) &= u_0^i(x, \xi) + \epsilon u_1^i(x, \xi) + \epsilon^2 u_2^i(x, \xi) + \dots, \\ \varphi(x) &= \varphi_0(x, \xi) + \epsilon \varphi_1(x, \xi) + \epsilon^2 \varphi_2(x, \xi) + \dots \end{aligned} \quad (6.8)$$

Similarmente à (4.14) e (5.12) as funções u_0^i e φ_0 não dependem de ξ . Admite-se a linearidade do problema e considera suave e regulares os coeficientes (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). Por meio do MHA é possível obter os coeficientes efetivos que representem o comportamento global do compósito.

6.2.1 Definição dos Problemas Locais

Aplicando o método de homogeneização assintótica descrito na seção acima e nos capítulos anteriores, o qual também pode ser visto detalhadamente em Sanches-Palencia (1980), Bakhvalov e Panasenko (1989), Sabina et al. (2001) e Bravo-Castillero (2001), surgem dois conjuntos de problemas valor de contorno locais, sobre a célula periódica, denotados por ${}_{pq}L$ e ${}_pL$. Para maiores detalhes, ver Parton and Kudryavtsev (1993, p. 167-175). Estes problemas

também conhecidos por *problemas de fronteira livre sobre a célula periódica* serão definidos a seguir. Por serem problemas de fronteira livre não será necessário acrescentar as condições de salto (5.40).

Os problemas locais ${}_{pq}L$ consistem em encontrar as componentes dos vetores deslocamento $\mathcal{R}$ -*periódicos* ${}_{pq}M(\xi)$ e dos potenciais $\mathcal{R}$ -*periódicos* ${}_{pq}N(\xi)$ que satisfaçam as seguintes condições:

$$\begin{cases} {}_{pq}T_{i\delta,\delta} = 0, \\ {}_{pq}D_{\delta,\delta} = 0. \end{cases} \quad \text{em } \mathcal{R}, \quad (6.9)$$

$$\begin{cases} {}_{pq}T_{i\delta}n_\delta = -C_{i\delta pq}n_\delta, \\ {}_{pq}D_\delta n_\delta = -e_{\delta pq}n_\delta. \end{cases} \quad \text{sobre } \Sigma, \quad (6.10)$$

$$\begin{cases} \langle {}_{pq}M(\xi)_i \rangle = 0, \\ \langle {}_{pq}N(\xi) \rangle = 0. \end{cases} \quad (6.11)$$

onde, de (6.1), as relações constitutivas, para os problemas ${}_{pq}L$, são dadas por

$$\begin{cases} {}_{pq}T_{i\delta} = C_{i\delta k\lambda} {}_{pq}M(\xi)_{k,\lambda} + e_{\lambda i\delta} {}_{pq}N(\xi)_{,\lambda}, \\ {}_{pq}D_\delta = e_{\delta k\lambda} {}_{pq}M(\xi)_{k,\lambda} - \epsilon_{\delta\lambda} {}_{pq}N(\xi)_{,\lambda}. \end{cases} \quad (6.12)$$

Semelhante a (6.5), nas equações (6.9) e (6.12), a vírgula denota a derivada parcial em relação à componente ξ_δ , isto é, $(*)_{,\delta} = \frac{\partial(*)}{\partial\xi_\delta}$.

Índices latinos variam de um a três e índices gregos de um a dois em (6.9)-(6.12). Em (6.10), n_δ são as componentes do vetor unitário normal a Σ . Os parênteses angulares em (6.11) definem a média sobre a célula periódica, a qual é dada por

$$\langle F \rangle = \frac{1}{\|X\|} \int_X F dS, \quad (6.13)$$

na qual $\|X\|$ é a medida da célula.

6.2.2 Resolução dos Problemas Locais ${}_{pq}L$ e ${}_pL$

Para o caso de um material com uma matriz hexagonal transversalmente isotrópica, de classe 6mm, as componentes dos tensores são apresentados de acordo com a disposição matricial da figura Fig. 6.1. Nesta figura, os pontos $\cdot$ representam as componentes nulas, enquanto que os pontos maiores $\bullet$ representam as componentes não nulas. Os pontos ligados por um traço, $\bullet - \bullet$, são as componentes iguais. De (6.9) e (6.12), para $i = 1$ e $M(\xi) = M$, tem-se

$$(C_{1\delta k\lambda} {}_{pq}M_{k,\lambda} + e_{\lambda 1\delta} {}_{pq}N_{,\lambda})_{,\delta} = 0. \quad (6.14)$$

Assim,

$$(C_{11k\lambda} {}_{pq}M_{k,\lambda} + e_{\lambda 11} {}_{pq}N_{,\lambda})_{,1} + (C_{12k\lambda} {}_{pq}M_{k,\lambda} + e_{\lambda 12} {}_{pq}N_{,\lambda})_{,2} = 0. \quad (6.15)$$

Como

$$e_{\lambda 11} = e_{\lambda 12} = 0, \quad (6.16)$$

obtém-se

$$(C_{11k1} {}_{pq}M_{k,1} + C_{11k2} {}_{pq}M_{k,2})_{,1} + (C_{12k1} {}_{pq}M_{k,1} + C_{12k2} {}_{pq}M_{k,2})_{,2} = 0. \quad (6.17)$$

Desta forma,

$$C_{11k1} {}_{pq}M_{k,11} + C_{11k2} {}_{pq}M_{k,21} + C_{12k1} {}_{pq}M_{k,12} + C_{12k2} {}_{pq}M_{k,22} = 0. \quad (6.18)$$

Devido a classe de simetria da matriz transversalmente isotrópica, ver Fig. 6.1 acima, os coeficientes abaixo são nulos,

$$C_{1121} = C_{1131} = C_{1112} = C_{1132} = C_{1211} = C_{1231} = C_{1222} = C_{1232} = 0. \quad (6.19)$$

Assim, a equação (6.18) é reescrita na forma

$$C_{1111} {}_{pq}M_{1,11} + C_{1122} {}_{pq}M_{2,11} + C_{1221} {}_{pq}M_{2,12} + C_{1212} {}_{pq}M_{1,22} = 0. \quad (6.20)$$

Além disso, coeficiente C_{1212} é dado por

$$C_{1212} = \frac{C_{1111} - C_{1122}}{2}, \quad (6.21)$$

então, substituindo (6.21) em (6.20) e desenvolvendo as operações, obtém-se

$$C_{1212}\Delta_{pq}M_1 + (C_{1212} + C_{1122})_{pq}M_{\theta,\theta 1} = 0. \quad (6.22)$$

Para $i = 2, 3$ tem-se, respectivamente

$$(C_{2\delta k\lambda}{}_{pq}M_{k,\lambda} + e_{\lambda 2\delta}{}_{pq}N_{,\lambda})_{,\delta} = 0, \quad (6.23)$$

e

$$(C_{3\delta k\lambda}{}_{pq}M_{k,\lambda} + e_{\lambda 3\delta}{}_{pq}N_{,\lambda})_{,\delta} = 0. \quad (6.24)$$

De forma análoga ao caso em que $i = 1$, desenvolve-se (6.23) e (6.24), e obtém-se, respectivamente, as seguintes equações

$$C_{1212}\Delta_{pq}M_2 + (C_{1212} + C_{1122})_{pq}M_{\theta,\theta 2} = 0, \quad (6.25)$$

e

$$C_{1313}\Delta_{pq}M_3 + e_{131}\Delta_{pq}N = 0. \quad (6.26)$$

De (6.9) e da segunda equação de (6.12), tem-se

$$(e_{\delta k\lambda}{}_{pq}M_{k,\lambda} - \epsilon_{\delta\lambda}{}_{pq}N_{,\lambda})_{,\delta} = 0. \quad (6.27)$$

Considerando a classe de simetria da matriz e desenvolvendo (6.27), obtém-se a equação

$$e_{131}\Delta_{pq}M_3 + \epsilon_{11}\Delta_{pq}N = 0. \quad (6.28)$$

Utilizando (6.22),(6.25),(6.26) e (6.28), constrói-se a Tabela 6.1 para os problemas ${}_{pq}L$.

Equações para os Problemas Locais $_{pq}L$			(6.29)
$i = 1$	$\implies$	$C_{1212}\Delta_{pq}M_1 + (C_{1212} + C_{1122})_{pq}M_{\theta,\theta 1} = 0$	
$i = 2$	$\implies$	$C_{1212}\Delta_{pq}M_2 + (C_{1212} + C_{1122})_{pq}M_{\theta,\theta 2} = 0$	
$i = 3$	$\implies$	$C_{1313}\Delta_{pq}M_3 + e_{131}\Delta_{pq}N = 0$	
		$e_{131}\Delta_{pq}M_3 - \epsilon_{11}\Delta_{pq}N = 0$	

Tabela 6.1: Equações para os problemas $_{pq}L$.

Utilizando a Tabela (6.1) e as condições de contorno (6.10), obtém-se a Tabela 6.2, e observa-se, que os problemas $_{11}L$, $_{22}L$, $_{33}L$ e $_{12}L$, se identificam com os problemas de deformações planas, da teoria da elasticidade linear, para meios isotrópicos e homogêneos. Enquanto que os problemas $_{13}L$ e $_{23}L$ são problemas anti-planos.

Condições de Contorno para os Problemas Locais $_{pq}L$							
		$_{11}L$	$_{22}L$	$_{33}L$	$_{23}L$	$_{13}L$	$_{12}L$
$i = 1$	$-C_{1\delta pq}n_\delta$	$-C_{1111}n_1$	$-C_{1122}n_2$	$-C_{1133}n_1$	0	0	$-C_{1212}n_1$
$i = 2$	$-C_{2\delta pq}n_\delta$	$C_{2211}n_2$	$-C_{2222}n_2$	$-C_{2233}n_2$	0	0	$-C_{2112}n_1$
$i = 3$	$-C_{3\delta pq}n_\delta$	0	0	0	$-C_{3223}n_2$	$-C_{3113}n_1$	0
	$-e_{\delta pq}n_\delta$	0	0	0	$-e_{223}n_2$	$-e_{113}n_1$	0

(6.30)

Tabela 6.2: Condições de Contorno para os Problemas $_{pq}L$.

Da Tabela (6.2) constroi-se a Tabela (6.3). Os problemas, $_{13}L$ e $_{23}L$, são os problemas de interesse neste trabalho.

Vetores deslocamento $\mathcal{R}$ -periódicos ${}_{pq}M(\xi)$						
	${}_{11}L$	${}_{22}L$	${}_{33}L$	${}_{23}L$	${}_{13}L$	${}_{12}L$
$i = 1$	${}_{11}M_1 \neq 0$	${}_{22}M_1 \neq 0$	${}_{33}M_1 \neq 0$	${}_{23}M_1 = 0$	${}_{13}M_1 = 0$	${}_{12}M_1 \neq 0$
$i = 2$	${}_{11}M_2 \neq 0$	${}_{22}M_2 \neq 0$	${}_{33}M_2 \neq 0$	${}_{23}M_2 = 0$	${}_{13}M_2 = 0$	${}_{12}M_2 \neq 0$
$i = 3$	${}_{11}M_3 = 0$	${}_{22}M_3 = 0$	${}_{33}M_3 = 0$	${}_{23}M_3 \neq 0$	${}_{13}M_3 \neq 0$	${}_{12}M_3 = 0$
	${}_{11}N = 0$	${}_{22}N = 0$	${}_{33}N = 0$	${}_{23}N \neq 0$	${}_{13}N \neq 0$	${}_{12}N = 0$

(6.31)

Tabela 6.3: Vetores deslocamento $\mathcal{R}$ -periódicos ${}_{pq}M(\xi)$.

De forma análoga ao procedimento utilizado para obter as equações dos problemas ${}_{pq}L$, define-se e os problemas locais ${}_pL$. Os quais consistem em encontrar as componentes dos vetores deslocamento $\mathcal{R}$ -periódicos ${}_pM(\xi)$ e dos potenciais $\mathcal{R}$ -periódicos ${}_pN(\xi)$ que satisfaçam as seguintes condições:

$$\begin{cases} {}_pT_{i\delta,\delta} = 0, \\ {}_pD_{\delta,\delta} = 0. \end{cases} \quad \text{em } \mathcal{R}, \quad (6.32)$$

$$\begin{cases} {}_pT_{i\delta}n_\delta = -e_{pi\delta}n_\delta, \\ {}_pD_\delta n_\delta = \epsilon_{\delta p}n_\delta. \end{cases} \quad \text{sobre } \Sigma, \quad (6.33)$$

$$\begin{cases} \langle {}_pM(\xi)_i \rangle = 0, \\ \langle {}_pN(\xi) \rangle = 0. \end{cases} \quad (6.34)$$

onde, de (6.1), relações constitutivas, para os problemas ${}_pL$, são dadas por

$$\begin{cases} {}_pT_{i\delta} = C_{i\delta k\lambda} {}_pM(\xi)_{k,\lambda} + e_{\lambda i\delta} {}_pN(\xi)_{,\lambda}, \\ {}_pD_\delta = e_{\delta k\lambda} {}_pM(\xi)_{k,\lambda} - \epsilon_{\delta\lambda} {}_pN(\xi)_{,\lambda}. \end{cases} \quad (6.35)$$

Devido à classe de simetria considerada para o material, 6mm, obtém-se, as seguintes

tabelas:

Equações para os Problemas Locais ${}_pL$			(6.36)
$i = 1$	$\implies$	$C_{1212}\Delta_p M_1 + (C_{1212} + C_{1122})_p M_{\theta,\theta 1} = 0$	
$i = 2$	$\implies$	$C_{1212}\Delta_p M_2 + (C_{1212} + C_{1122})_p M_{\theta,\theta 2} = 0$	
$i = 3$	$\implies$	$C_{1313}\Delta_p M_3 + e_{131}\Delta_p N = 0$	
		$e_{131}\Delta_p M_3 - \epsilon_{11}\Delta_p N = 0$	

Tabela 6.4: Equações para os Problemas ${}_pL$.

As tabelas 6.5 e 6.6 contém, respectivamente, as condições de contorno para os problemas ${}_pL$ e os vetores deslocamento, M e N .

Condições de Contorno para os Problemas Locais ${}_pL$					(6.37)
		${}_1L$	${}_2L$	${}_3L$	
$i = 1$	$-e_{pi\delta}n_\delta$	0	0	$-e_{311}n_1$	
$i = 2$	$-e_{pi\delta}n_\delta$	0	0	$-e_{322}n_2$	
$i = 3$	$-e_{pi\delta}n_\delta$	$-e_{113}n_1$	$-e_{232}n_2$	0	
	$\epsilon_{\delta p}n_\delta$	$\epsilon_{11}n_1$	$\epsilon_{22}n_2$	0	

Tabela 6.5: Condições de Contorno para os Problemas ${}_pL$.

Vetores deslocamento $\mathcal{R}$ -periódicos ${}_pM(\xi)$				(6.38)
	${}_1L$	${}_2L$	${}_3L$	
$i = 1$	${}_1M_1 = 0$	${}_2M_1 = 0$	${}_3M_1 \neq 0$	
$i = 2$	${}_1M_2 = 0$	${}_2M_2 = 0$	${}_3M_2 \neq 0$	
$i = 3$	${}_1M_3 \neq 0$	${}_2M_3 \neq 0$	${}_3M_3 = 0$	
	${}_1N \neq 0$	${}_2N \neq 0$	${}_3N = 0$	

Tabela 6.6: Vetores deslocamento $\mathcal{R}$ -periódicos ${}_pM(\xi)$.

O Problema Local ${}_{13}L$

De acordo com (6.29)-(6.31), define-se o problema ${}_{13}L$, como segue

$$\begin{cases} \Delta_{13}M_3 = 0, \\ \Delta_{13}N = 0. \end{cases} \quad \text{em } \mathcal{R}, \quad (6.39)$$

$$\begin{cases} {}_{13}T_{3\delta}n_\delta = -C_{1313}n_1, \\ {}_{13}D_\delta n_\delta = -e_{113}n_1. \end{cases} \quad \text{sobre } \Sigma, \quad (6.40)$$

$$\begin{cases} \langle {}_{13}M_3 \rangle = 0, \\ \langle {}_{13}N \rangle = 0. \end{cases} \quad (6.41)$$

onde $\delta = 1, 2$.

Desenvolvendo as equações (6.39) e aplicando as condições de contorno (6.40), obtém-se as equações

$$\begin{cases} C_{131313}M_{3,\theta}n_\theta + e_{13113}N_{,\theta}n_\theta = -C_{1313}n_1, \\ e_{13113}M_{3,\theta}n_\theta - \epsilon_{1113}N_{,\theta}n_\theta = -e_{131}n_1. \end{cases} \quad (6.42)$$

e, deste modo,

$$\begin{pmatrix} C_{1313} & e_{131} \\ e_{131} & -\epsilon_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_{13}M_{3,\theta}n_\theta \\ {}_{13}N_{,\theta}n_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_{1313}n_1 \\ -e_{131}n_1 \end{pmatrix}. \quad (6.43)$$

Na equação (6.43) o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero, e portanto, a matriz é inversível. Desta forma, pre multiplicando pela matriz inversa, obtém-se

$$\begin{pmatrix} {}_{13}M_{3,\theta}n_\theta \\ {}_{13}N_{,\theta}n_\theta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} n_1. \quad (6.44)$$

Assim, aparecem duas equações desacopladas, isto é,

$${}_{13}M_{3,\theta}n_\theta = -n_1, \quad (6.45)$$

e,

$${}_{13}N_{,\theta} n_{\theta} = 0. \quad (6.46)$$

De (6.45), ${}_{13}N = k$, onde k é constante. Por outro lado, de (6.41), $\langle k \rangle = 0$, portanto ${}_{13}N(\xi) = 0$ e ${}_{13}M_3 \neq 0$. Desta forma, é necessário encontrar somente as componentes do vetor deslocamento $\mathcal{R}$ -*periódico* ${}_{13}M(\xi)_3$.

Como ${}_{13}N(\xi) = 0$, então, as equações que definem o problema (6.39)-(6.41) se identificam com as equações que definem o problema (5.69), para o caso condutivo. E, portanto, a metodologia para encontrar as componentes do do potencial $\mathcal{R}$ -*periódicos* ${}_1N(\xi)$ é a mesma realizada na seção (5.3).

O Problema Local ${}_1L$

De (6.36)-(6.38), define-se o problema ${}_1L$, como segue

$$\begin{cases} \Delta_1 M_3 = 0, \\ \Delta_1 N = 0. \end{cases} \quad \text{em } \mathcal{R}, \quad (6.47)$$

$$\begin{cases} {}_1T_{3\delta} n_{\delta} = -e_{113} n_1, \\ {}_1D_{\delta} n_{\delta} = \epsilon_{11} n_1. \end{cases} \quad \text{sobre } \Sigma, \quad (6.48)$$

$$\begin{cases} \langle {}_1M_3 \rangle = 0, \\ \langle {}_1N \rangle = 0. \end{cases} \quad (6.49)$$

Seguindo os mesmos passos realizados na resolução do problema ${}_{13}L$, obtém-se que ${}_1M_3 = 0$ e ${}_1N \neq 0$. Analogamente ao problema ${}_{13}L$, o problema ${}_1L$ se identifica com a definição do problema (5.69), para o caso condutivo. E, portanto, a metodologia para encontrar as componentes do vetor deslocamento $\mathcal{R}$ -*periódicos* ${}_1N$ é a mesma realizada na seção (5.3).

6.3 Os coeficientes Efetivos

De forma análoga à equação (5.42), da seção (5.2.2), as constantes elásticas, piezoelétricas e dielétricas homogeneizadas, isto é, as constantes efetivas, são calculadas pelas equações

$$\begin{cases} \widehat{C}_{ijpq} = \langle C_{ijpq} + C_{ijkl} {}_{pq}M_{k,l} + e_{kij} {}_{pq}N_{,k} \rangle, \\ \widehat{e}_{ipq} = \langle e_{ipq} + e_{ikl} {}_{pq}M_{k,l} - \epsilon_{ik} {}_{pq}N_{,k} \rangle, \end{cases} \quad (6.50)$$

onde ${}_{pq}M_{k,l}$ e ${}_{pq}N_{,k}$ são soluções dos problemas locais ${}_{pq}L$ definidos por (6.9-6.11), e por

$$\begin{cases} \widehat{e}_{pij} = \langle e_{pij} + C_{ijkl} {}_pM_{k,l} + e_{kij} {}_pN_{,k} \rangle, \\ \widehat{\epsilon}_{ip} = \langle \epsilon_{ip} + e_{ikl} {}_pM_{k,l} - \epsilon_{ik} {}_pN_{,k} \rangle, \end{cases} \quad (6.51)$$

onde ${}_pM_{k,l}$ e ${}_pN_{,k}$ são soluções dos problemas locais ${}_pL$ definidos por (6.32-6.34). O chapéu sobrescrito refere-se à propriedade efetiva.

De (6.50), (6.51) e da resolução dos problemas locais ${}_{13}L$ e ${}_1L$, obtém-se

$$\begin{cases} \widehat{C}_{1313} = \langle C_{1313} \rangle + C_{1313} \langle {}_{13}M_{3,1} \rangle, \\ \widehat{e}_{113} = \langle e_{113} \rangle + e_{113} \langle {}_1N_{,1} \rangle, \\ \widehat{\epsilon}_{11} = \langle \epsilon_{11} \rangle + \epsilon_{11} \langle {}_1N_{,1} \rangle. \end{cases} \quad (6.52)$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial}{\partial n} ({}_{13}M_3) = \frac{\partial}{\partial n} ({}_1N) = -n_1,$$

e,

$$\frac{\partial}{\partial n} ({}_1M_3) = \frac{\partial}{\partial n} ({}_{13}N) = 0.$$

assim ${}_{13}M_3 \equiv {}_1N$ e ${}_1M_3 = {}_{13}N = 0$. Deste modo, $\langle {}_{13}M_3 \rangle = \langle {}_1N \rangle$, e, portanto

$$\langle {}_{13}M_{3,1} \rangle = \frac{\widehat{C}_{1313} - \langle C_{1313} \rangle}{C_{1313}} = \frac{\widehat{e}_{113} - \langle e_{113} \rangle}{e_{113}} = \frac{\widehat{\epsilon}_{11} - \langle \epsilon_{11} \rangle}{\epsilon_{11}}. \quad (6.53)$$

Em vista de (6.53), os problemas locais ${}_{13}L$ e ${}_1L$ estão vinculados; e ambos, vinculados com o problema condutivo (5.69).

Alem disso, as relações constitutivas (6.1) podem ser escritas em termos de 11 parâmetros independentes $k, l, n, p, m, m', q, r, s, t$ e u (BRAVO-CASTILLERO, 2001), de modo

que os termos não nulos destas equações tornam-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(T_{11} + T_{22}) &= k(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + l\varepsilon_{33} + q\varphi_{,3}, \\
T_{33} &= l(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + n\varepsilon_{33} + r\varphi_{,3}, \\
T_{11} - T_{22} &= 2m'(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \\
D_3 &= q(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + r\varepsilon_{33} - u\varphi_{,3}, \\
T_{23} &= 2p\varepsilon_{23} + s\varphi_{,1}, \\
T_{13} &= 2p\varepsilon_{13} + s\varphi_{,2}, \\
T_{12} &= 2m\varepsilon_{12}, \\
D_1 &= 2s\varepsilon_{23} - t\varphi_{,1}, \\
D_2 &= 2s\varepsilon_{13} + t\varphi_{,2},
\end{aligned} \tag{6.54}$$

As fórmulas (6.54) se assemelham as de Hill (1964) para meios elásticos transversalmente isotrópicos com a simbologia usual para as constantes elásticas: $2k = C_{1111} + C_{1122}$, $l = C_{1133} = C_{2233}$, $n = C_{3333}$, $p = C_{1313} = C_{2323}$, $m = C_{1212}$, $2m' = C_{1111} - C_{1122}$, os coeficientes piezoelétricos são: $q = e_{311} = e_{322}$, $r = e_{333}$, $s = e_{113} = e_{223}$, e os coeficientes dielétricos: $t = \epsilon_{11}$, $u = \epsilon_{33}$ (BRAVO-CASTILLERO, 2001).

Capítulo 7

Resultados

7.1 Aplicações do MHA

A fim de verificar a eficiência do MHA, utilizam-se aqui dados obtidos por R. Kar-Gupta and T.A. Venkatesh, via Método de Elementos Finitos (denotado por N), para Titanato de Bário com geometria 3-1 longitudinalmente porosa, isto é, um material piezoelétrico com distribuição periódica de células com fibras ocas. Os quais foram cedidos pelo Prof. Dr. Julia Bravo Castillero. Na Tabela 7.1 são utilizados os dados do coeficiente $\hat{p}$, obtidos por R. Kar-Gupta and T.A. Venkatesh, via Método de Elementos Finitos, como referência. Utilizando as relações em (6.53), faz-se os cálculos via MHA, (M) . Os termos t_v e t_{ar} representam, respectivamente, a permissividade no vázio e no ar. Admitindo a permissividade relativa do ar, $K_{ar} = 1,0006$, de (3.18), $t_{ar} = K_{ar}t_v$. As unidades de C_{ijkl} , e_{ijk} , ϵ_{ij} são, respectivamente, Pa , C/m^2 e C/Vm . Na Tabela 7.2, são utilizados os dados do coeficiente $\hat{s}$ como referência, enquanto que, na Tabela 7.3, são utilizados como referência os dados do coeficiente $\hat{t}$, ambos obtidos por R. Kar-Gupta and T.A. Venkatesh, via Método de Elementos Finitos. Nas tabelas Tabela 7.1 e Tabela 7.2, a permissividade no vázio e no ar são, respectivamente, $t_v = 8,854 \times 10^{-12}$ e $t_{ar} = 8,858 \times 10^{-12}$.

Coeficientes Efetivos	0	0,1	0,3	0,5	λ
$\widehat{C}_{1313} = \widehat{p}$	$4,386 \times 10^{10}$	$3,594 \times 10^{10}$	$2,365 \times 10^{10}$	$1,436 \times 10^{10}$	N
$\widehat{e}_{113} = \widehat{s}$	11,40	9,35	6,15	3,75	N
$\widehat{e}_{113} = \widehat{s} = s \frac{\widehat{p}}{p}$	11,40	9,34	6,15	3,73	H
$\widehat{\epsilon}_{11} = \widehat{t}$	$1,280 \times 10^{-8}$	$1,049 \times 10^{-8}$	$6,901 \times 10^{-9}$	$4,192 \times 10^{-9}$	N
$\widehat{\epsilon}_{11} = \widehat{t} = t \frac{\widehat{p}}{p}$	$1,280 \times 10^{-8}$	$1,049 \times 10^{-8}$	$6,901 \times 10^{-9}$	$4,191 \times 10^{-9}$	H
$\widehat{\epsilon}_{11} = \widehat{t} = t \frac{\widehat{p}}{p} + t_v \pi r^2$	$1,280 \times 10^{-8}$	$1,049 \times 10^{-8}$	$6,904 \times 10^{-9}$	$4,195 \times 10^{-9}$	H
$\widehat{\epsilon}_{11} = \widehat{t} = t \frac{\widehat{p}}{p} + t_{ar} \pi r^2$	$1,280 \times 10^{-8}$	$1,049 \times 10^{-8}$	$6,905 \times 10^{-9}$	$4,195 \times 10^{-9}$	H

Tabela 7.1: Constantes efetivas de Titanato de Bário, onde N corresponde aos valores obtidos por R. Kar-Gupta and T.A. Venkatesh e M é corresponde aos valores obtidos via MHA . O valor de referência é $\widehat{p}$.

7.1.1 Aplicação em Mecânica de Osso

Calcula-se, em parceria do grupo de mecânica dos sólidos, da Universidade de La Habana, La Habana, por meio de um software programado em Matlab, cedido pelo Prof. Dr. Julian Bravo Castillero, membro do grupo, as propriedades efetivas elásticas do osso cortical, utilizando os princípios do MHA (BRAVO-CASTILLERO et al., 2009). Nesta aplicação, considera-se que a parte sólida do osso é elástico-linear e isotrópica e admite-se que as constantes piezoelétricas e dielétricas da parte sólida são nulas no modelo. Considera-se que o módulo de Young e o coeficiente de Poisson da parte sólida sejam dados por $E = 12 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,38$, respectivamente, e que a porosidade do osso cortical seja $\lambda = 0,04$. Estes dados são comparados com os obtidos da Tabela 2 de (SWAN et al., 2003). Na Tabela 7.4, compara-se os valores das propriedades efetivas obtidas pelo MHA com os valores obtidos por (SWAN et al., 2003) via Método dos Elementos Finitos.

Coeficientes Efetivos	0	0,1	0,3	0,5	λ
$\hat{e}_{113} = \hat{s}$	11,40	9,35	6,15	3,75	N
$\hat{C}_{1313} = \hat{p}$	$4,386 \times 10^{10}$	$3,594 \times 10^{10}$	$2,365 \times 10^{10}$	$1,436 \times 10^{10}$	N
$\hat{C}_{1313} = \hat{p} = p \frac{\hat{s}}{s}$	$4,386 \times 10^{10}$	$3,597 \times 10^{10}$	$2,366 \times 10^{10}$	$1,435 \times 10^{10}$	H
$\hat{\epsilon}_{11} = \hat{t}$	$1,280 \times 10^{-8}$	$1,049 \times 10^{-8}$	$6,901 \times 10^{-9}$	$4,192 \times 10^{-9}$	N
$\hat{\epsilon}_{11} = \hat{t} = t \frac{\hat{s}}{s}$	$1,280 \times 10^{-8}$	$1,049 \times 10^{-8}$	$6,905 \times 10^{-9}$	$4,210 \times 10^{-9}$	H
$\hat{\epsilon}_{11} = \hat{t} = t \frac{\hat{s}}{s} + t_v \pi r^2$	$1,280 \times 10^{-8}$	$1,050 \times 10^{-8}$	$6,908 \times 10^{-9}$	$4,215 \times 10^{-9}$	H
$\hat{\epsilon}_{11} = \hat{t} = t \frac{\hat{s}}{s} + t_{ar} \pi r^2$	$1,280 \times 10^{-8}$	$1,050 \times 10^{-8}$	$6,908 \times 10^{-9}$	$4,215 \times 10^{-9}$	H

Tabela 7.2: Constantes efetivas de Titanato de Bário, onde N corresponde aos valores obtidos por R. Kar-Gupta and T.A. Venkatesh e M é corresponde aos valores obtidos via MHA . O valores de referência é $\hat{s}$.

Coeficientes Efetivos	0	0,1	0,3	0,5	λ
$\hat{\epsilon}_{11} = \hat{t}$	$1,280 \times 10^{-8}$	$1,049 \times 10^{-8}$	$6,901 \times 10^{-9}$	$4,192 \times 10^{-9}$	N
$\hat{C}_{1313} = \hat{p}$	$4,386 \times 10^{10}$	$3,594 \times 10^{10}$	$2,365 \times 10^{10}$	$1,436 \times 10^{10}$	N
$\hat{C}_{1313} = \hat{p} = p \frac{\hat{t}}{t}$	$4,386 \times 10^{10}$	$3,594 \times 10^{10}$	$2,364 \times 10^{10}$	$1,436 \times 10^{10}$	H
$\hat{e}_{113} = \hat{s}$	11,40	9,35	6,15	3,75	N
$\hat{\epsilon}_{11} = \hat{s} = s \frac{\hat{t}}{t}$	11,40	9,34	6,15	3,73	H

Tabela 7.3: Constantes efetivas de Titanato de Bário, onde N corresponde aos valores obtidos por R. Kar-Gupta and T.A. Venkatesh e M é corresponde aos valores obtidos via MHA . Valor de referência $\hat{t}$.

Constantes Elásticas Efetivas	N	M
$\bar{C}_{1111} = \bar{C}_{2222}$	18,631	18,660
$\bar{C}_{3333}$	19,975	19,443
$\bar{C}_{1133} = \bar{C}_{3311} = \bar{C}_{2233} = \bar{C}_{3322}$	11,138	10,949
$\bar{C}_{1122} = \bar{C}_{2211}$	10,701	10,736
$\bar{C}_{4444} = \bar{C}_{5555}$	4,016	4,013
$\bar{C}_{6666}$	3,922	3,915

Tabela 7.4: Constantes elásticas efetivas do osso cortical, onde N corresponde aos valores tomados da Tabela 2 de Swan et al. (2003) e M é corresponde aos valores obtidos via MHA.

Capítulo 8

Conclusão

O objetivo deste trabalho foi realizar um estudo sobre o Método de Homogeneização Assintótica (MHA), a fim de determinar as constantes que representam as propriedades eletromecânicas efetivas de materiais heterogêneos, tais como a estrutura óssea. São analisados, deste modo, o problema de condução de calor e o problema elástico. Mostra-se que estes problemas estão vinculados, e para o caso condutivo dois métodos para obter as constantes efetivas são apresentados. Além disso, uma aplicação do MHA em osso cortical é apresentada e os resultados estão de muito bom acordo com resultados encontrados na literatura. Estes resultados numéricos foram obtidos para o problema elástico e comparados com dados apresentados por Swan et al. (2003). Os valores das constantes elásticas obtidas pelo MHA quando comparados com os resultados de Swan et al. (2003) foram excelentes, verificando-se que o erro relativo é de 0.9%. Veja a Tabela 7.4. Esta aplicação mostra a eficiência do método e indica a possibilidade de sua aplicação em estruturas mais complexas, tais como osso trabecular.

Resultados numéricos foram obtidos para o problema elástico e comparados com os dados de R. Kar-Gupta and T.A. Venkatesh. Estes pesquisadores utilizam o Método de Elementos Finitos para modelar Titanato de Bário. Os valores são comparados nas tabelas, Tabela 7.1, Tabela 7.2 e Tabela 7.3, e verifica-se que os resultados estão de muito bom acordo.

Os resultados analíticos obtidos pelo MHA (6.53) são importantes na validação de modelos numéricos. Por exemplo, nas tabelas 7.1-7.3, mostram que, se por alguma via, experimental ou numérica, se obtém uma das propriedades efetivas, $\hat{p}$, $\hat{s}$ ou $\hat{t}$, envolvidas nas

equações (6.53), então é possível obter as demais. Veja por exemplo, Bravo-Castillero et al. (2009).

Uma vantagem do MHA sobre outros métodos de homogeneização, utilizados na análise das propriedades efetivas da estrutura óssea, consiste na determinação destas propriedades a partir da solução de problemas locais, os quais são definidos sobre uma única célula periódica. Por outro lado, para algumas estruturas biológicas, a periodicidade da microestrutura é uma limitação do método. Porém é possível admitir uma periodicidade local e aplicar o método, e, ainda assim, acredita-se que os resultados sejam bons.

Verificada a eficiência do MHA, sugestões para continuação da pesquisa são consideradas. Dentre elas, admitir que a estrutura ossea seja sólido piezoelétrico com comportamento elástico linear, possuindo matriz transversalvente isotrópica na classe de cristais com simetria 622 (FUKADA; YASUDA, 1957) e obter resultados numéricos para todas as propriedades efetivas por meio do MHA e compará-las com outros resultados existentes na literatura.

Os resultados analíticos, obtidos por meio do MHA, também poderão servir como base de comparação para resultados obtidos por meio de técnicas experimentais para uma possível monitoração da qualidade óssea. Além disso, dada uma geometria para a célula periódica, o MHA além de possibilitar o cálculo das propriedades efetivas, possibilita caracterizar as propriedades de simetria da estrutura.

Referências Bibliográficas

- [1] BACHMANN, P. (1894). **Die analytische Zahlentheorie**. Teubner, Leipzig.
- [2] BAKHVALOV, N.; PANASENKO, G. (1989). **Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media**. K.A. Publishers, Netherlands.
- [3] BENSOUSSAN, A.; LIONS, J. L.; PAPANICOLAOU, G. (1978). **Asymptotic Analysis for Periodic Structures**, North Holland, Amsterdam.
- [4] BENVENISTE, Y.; DVORAK, G. J. (1992). Uniform fields and Universal Relations in Piezoelectric Composites. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 40, p. 1295-1312.
- [5] BERLYAND, L. (1999). Effective properties of superconducting and superfluids composites. **Int. J. Modern Phys. B**. v. 12, p. 3063-3073.
- [6] BUSH, A. W. (1992). **Perturbations Methods For Enginners and Scientist**. CRC Press, Boca Raton, Florida.
- [7] BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DIAZ, R.; OTERO, J. A.; RODROGUEZ-RAMOS, R. (1997). Electromechanical Properties of Continuous fibre-reinforced piezoelectric Composites. **Mekh. Komp. Mat.** v.33, p. 670-680.
- [8] BRAVO-CASTILLERO, J.; OTERO, J. A.; RODROGUEZ-RAMOS, R.; BOURGEAT, A. (1998). Asymptotic Homogenization of Laminated Piezocomposite Materials. **Int. Journal of Solids and Estructures**. v 35, n. 5-6, p. 527-541.
- [9] BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DIAZ, R.; SABINA, F. J.; RODROGUEZ-RAMOS, R. (2001). Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced com-

posite with transversely isotropic constituents. – II. Piezoelectric and Square Symmetry. **Mechanics of Materials**, v. 33, p. 237-248.

- [10] BRAVO-CASTILLERO, J. B. (2005). **Una Introducción a los Métodos Asintóticos y Variacionales de Homogeneización**. Apostila Utilizada no Curso "Introdução aos Métodos Assimptótico e Variacional de Homogeneização", em 2007, USP, São Carlos.
- [11] BRAVO-CASTILLERO, J.; RODRIGUEZ-RAMOS, R.; GUINOVART-DIAZ, R.; SABINA, F. J.; AGUIAR, A. R.; SILVA, U. P.; GOMEZ-MUNOZ, J. L. (2009). Analytical formulae for electromechanical effective properties of 3–1 longitudinally porous piezoelectric materials **Acta Materialia**. v. 57, n. 3, p. 795-803
- [12] BRUNO, O. (1991). The effective conductivity of strongly heterogeneous composites. **Proc. R. Soc. Lond. A**, v. 443, p. 353-381.
- [13] BYTNER, S. O.; GAMBIN, B. (1993). Homogenization of Heterogeneous Magnetoelastic Medium. **Arch. Mech.** v. 45, p. 223-233.
- [14] CHURCHILL, R. V. (1975). **Variáveis Complexas e Suas Aplicações**. McGraw-Hill do Brasil, LTDA. São Paulo.
- [15] COMPSTON, J. (2006). Bone quality: what is it and how is it measured? **Arquivos Brasileiros de Endocrinologia & Metabologia**, vol.50, no.4, p.579-585.
- [16] CONWAY, J. B. (2000). **Functions of One Complex Variable**. 2ed. Springer, USA.
- [17] COWIN, S. C.; DOTY, S. B. (2007). **Tissue Mechanics**. Springer Science + Business Media, LLC. New York.
- [18] DIMITRIENKO, Y. I. (1998a). Mechanics of porous media with phase transformations and periodical structures 1. Method of Asymptotic Averaging. **Eur. J. , A/Solids** v. 17, p. 305-319.
- [19] DIMITRIENKO, Y. I. (1998b). Mechanics of porous media with phase transformations and periodical structures 2. Solution of Local and Global Problems. **Eur. J. , A/Solids** v. 17, p. 321-337.

- [20] DING M.; ODGAARD A.; LIND F.; HVID, I. (2002). Age-related variations in the microstructure of human tibial cancellous bone. **J. Orthop. Res.**, v. 20, p. 615-621.
- [21] DUARTE, L. R. (1983). The Simulation of Bone Growth by Ultrasound. **Achieves of Orthopedics and Traumatic Surge**, v. 101, p. 153-159.
- [22] FRANCFORT, G. A. (1984). Homogenization and linear thermoelasticity. **SIAM J. Math. Anal.** v. 14, p. 696-708.
- [23] FUKADA, E.; YASUDA, I. (1957). On Piezoelectric Effect of Bone. **Journal of The Physical Society of Japan**, v. 12, n. 10, p. 1158-1162.
- [24] FYHRIE, D. P.; JEPSEN, K. J.; HOLLISTER, S. J.; GOLDSTEIN, S. A. (1989). Predicting trabecular bone strength and micro-strain using homogenization theory. **Journal of Biomechanics**. v. 22, 1014.
- [25] GALKA, A.; TELEGA, J. J.; WOJNAR, R., (1996). Some computational aspects of Homogenization of Thermopiezoelectric Composites. **Comput. Assisted Mech. Engng. Sci.** v. 3, p. 133-154.
- [26] GIL, J.I.S.; SHINGAREVA, I.; GILDARDO, G. A. M. (2004). **Introducción a la Teoría de Perturbaciones Usando Álgebra Computacional**. Memorias de la XIV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. [online] Disponível na Internet via WWW. URL: <http://semana.mat.uson.mx/memoriasxiv/indicexiv.htm> Arquivo visualizado em 20 de novembro de 2007 as 17:00 hs.
- [27] GRIFFITHS, D. J., (1999) **Introduction to Electrodynamics**. Prentice Hall, 3 ed. New Jersey.
- [28] GUINOVART-DIAZ, R.; BRAVO-CASTILLERO, J.; RODRIGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. J. (2001). Closed-form expression for effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. I: Elastic and Hexagonal symmetry. **Journal of the Mechanics and Physics of Sólids**. v. 49, p. 1445-1462.
- [29] GUINOVART-DIAZ, R.; BRAVO-CASTILLERO, J.; RODRIGUEZ-RAMOS, R.; MARTINEZ-ROSADO, R.; SERRANIA, F.; NAVARRETE, M. (2002) Modeling of elastic transversely isotropic composites using the asymptotic method. Some comparisons with others models. **Material Letters** v. 56, p. 889-894.

- [30] GUO, X. E. (2001). **Mechanical Properties of Cortical Bone and Cancellous Bone Tissue**. In: Bone Mechanics Handbook.2 ed. CRC Press LLC. Boca Raton. p. 10-1 - 10-23.
- [31] HARDY, G. H. (1954). **Orders of Infinity**. 2nd. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [32] HASHIN, Z. (1965) On elastic behaviour of fibre reinforced materials of arbitrary transverse phase geometry. **J. Mech. Phys. Solids** v.13, p. 119-134.
- [33] HILL, R. (1964) Theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials: I. Elastastic behaviour. **J. Mech. Phys. Solids** v.12, p. 199-212.
- [34] HOLLISTER, S. J; FYHRIE, D. P; JEPSEN,K. J; GOLDSTEIN, S. A. (1989). Analysis of trabecular bone micromechanics using homogenization theory with comparison to experimental results. **Journal of Biomechanics**. v. 22, 1025.
- [35] HOLLISTER, S. J.; KIKUCHI, N. (1992). A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composite. **Computational Mechanics**. v. 10, p. 73-95.
- [36] HOLLISTER, S. J.; BRENNAN, J. M.; KIKUCHI, N. (1994a). Homogenization Sampling Procedure for Calculating Trabecular Bone Effective Stiffness and Tissue Level Stress, **J. Biomechanics**, v. 27, n. 04, p. 433-444.
- [37] HOLLISTER, S. J.; KIKUCHI, N. (1994b). Homogenization Theory and Digital Imaging: A Basis for Studying the Mechanics and Design Principles of Bone Tissue. **Biotechnology and Bioengineering**, v. 43, p. 586-596.
- [38] HOLMAN, J. P. (1983). **Transferência de Calor**. São Paulo. McGraw-Hill do Brasil.
- [39] HOLMES, M. H. (1955). **Introduction to Perturbation Methods**. Spring-Verlag, New York.
- [40] IKEDA, T. (1990). **Fundamentals of Piezoelectricity**. Oxford University Press, Oxford.
- [41] JUNQUEIRA, L. C. U.; CARNEIRO, J. (2004). **Histologia Básica**. 10ed. Guanabara Koogan S.A, Rio de Janeiro, RJ.

- [42] KANTAROVICHY, L.V.; KRILOV, V. I. (1964). **Approximated methods of higher analysis**. Interscience Publishers, inc, Four Edition, New York.
- [43] KAR-GUPTA, R.; VENKATESH, T. A. (2007). Electromechanical response of 1-3 piezoelectric composites: An analytical model. **Acta Materialia**, v. 55, p. 1093-1108.
- [44] KAR-GUPTA, R.; VENKATESH, T. A. (2006). Electromechanical response of porous piezoelectric materials. **Acta Materialia**, v. 54, p. 4063-4078.
- [45] KEVORKIAN, J.; COLE, J. D. (1981). **Perturbation Methods in Applied Mathematics**. Springer-Verlag, New York.
- [46] LAGERSTROM, P. A. (1988). **Matched Asymptotic Expansions: Ideas and Techniques**. Springer-Verlag, New York.
- [47] LANDAU, E. (1909). **Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen**. Teubner, Berlin.
- [48] LINS NETO, A. (1996). **Funções de Uma Variável Complexa**. 2ed. IMPA. Rio de Janeiro, RJ.
- [49] LIRANI, A. P. R.; LAZARETTI-CASTRO, M. (2005). Evidências da Ação de Agentes Físicos Sobre o Metabolismo do Tecido Ósseo e Seus Potenciais Usos Clínicos. **Arquivos Brasileiros de Endocrinologia & Metabologia**, vol.49, no.6, p. 891-896.
- [50] LOPEZ-LOPEZ, E.; SABINA, F.J.; BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DIAZ, R.; RODRIGUEZ-RAMOS, R. (2005). Overall electromechanical properties of a binary composite with 622 symmetry constituents. Antiplane shear piezoelectric state. **International Journal of Solids and Structures**, v. 42, p. 5765-5777.
- [51] MARKUSHEVICH, A. (1970). **Teoría de las Funciones Analíticas** (Tomo I & II). Editorial Mir, Moscow.
- [52] MARTIN, B. R.; BURR, D. B.; SHARKEY, N. A. (2004). **Skeletal Tissue Mechanics**. Springer, New York.
- [53] MEGUID, S. A.; KALAMKAROV, A. L. (1994) Asymptotic Homogenization of Elastic Composite Materials with a Regular Estructure. **Int. Journal of Solids and Structures**. v 31, n. 3, p. 303-316.

- [54] NAYFEH, A. H. (1973). **Perturbation Methods**. John Wiley & Sons, NY.
- [55] NAYFEH, A. H. (1981). **Introduction to Perturbation Techniques**. John Wiley & Sons, NY.
- [56] NYE, J.F. (1969) **Physical Properties of Crystals: Their representations by Tensors and Matrices**. University Press, Oxford.
- [57] OTERO, J. A.; RODRIGUEZ-RAMOS, R.; MONSIVAIS, G.; PEREZ-ALVAREZ, R. (2005). Dynamical behavior of a layered piezocomposite using the asymptotic homogenization method. **Mechanics of Materials**, v. 37, p. 33-44.
- [58] PASTOR, J. (1997). Homogenization of Linear Piezoelectric media. **Mech. Res. Commun.** v. 24, p. 145-150.
- [59] POBEDRYA, B. E. (1984). **Mechanics of Composite Materials**. Moscow State Univ. Press, Moscow, (texto em Russo).
- [60] PIMENTA, P. M. (2006). **Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas**. Texto de apoio às aulas das disciplinas de pós-graduação sobre Fundamentos da Teoria das Estruturas e de Análise Não-linear de Estruturas ministradas pelo autor no Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- [61] POLLI, Y. C. (2008). **Caracterização da Anisotropia na Permissividade de Osso Cortical Utilizando o Método da Impedância**. Tese de Doutorado da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - USP, São Paulo.
- [62] ROCHINHA, F.; MADUREIRA, A. L., (2004). **Modelagem Multiescala em Materiais e Estruturas**. Notas em Matemática Aplicada 12. SBMAC. São Carlos.
- [63] RODRIGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. J.; GUINOVART-DIAZ, R.; BRAVO-CASTILLERO, J. (2001). Closed-form expression for effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. I: Elastic and Square symmetry. **Mechanics of Materials**. v. 33, p. 223-235.
- [64] SABINA, F.J.; RODRIGUEZ-RAMOS, R.; BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DIAZ, R. (2001). Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced

- composite with transversely isotropic constituents. – II. Piezoelectric and Hexagonal Symmetry. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 49, p. 1463-1479.
- [65] SABINA, F. J.; BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DIAZ, R. ; RODRIGUEZ-RAMOS, R.; VALDIVIEZO-MIJANGOS, O. C. (2002). Overall behaviour of two-dimensional periodic composites. **Int. Journal of Solids and Structures** v. 39, p. 483-497.
- [66] SANCHEZ-PALENCIA, E. (1980). **Non-Homogeneous Media and Vibration Theory**. In: Lecture Notes in Physics, 127. Springer-Verlag. New York.
- [67] SIERPOWSKA, J.; HAKULINEN, M. A.; TOYRAS, J.; DAY, J. S.; WEINANS, H.; KIVIRANTA, I.; JURVELIN, J. S.; LAPPALAINEN, R. (2006). Interrelationships between electrical properties and microstructure of human trabecular bone. **Physics in Medicine and Biology**, v. 51, p. 5289–5303.
- [68] SILVA, C. C.; THOMAZINI, D.; PINHEIRO, A. G.; ARANHA, N.; FIGUEIRO, S. D.; GOES, J. C.; SOMBRA, A. S. B. (2001). Collagen-hydroxyapatite films: piezoelectric properties. **Mater. Sci. Eng. B86**, p. 201-218.
- [69] SUQUET, P. M. (1987) **Elements of Homogenization for Inelastic Solids Mechanics. Homogenization Techniques for Composite Media**. CISM Lectures, Udine. Springer, Berlin.
- [70] SWAN C. C; LAKES R. S.; BRAND R. A.; STEWART K. J. (2003). Micromechanically Based Poroelastic Modeling of Fluid Flow in Haversian. Bone **Journal of Biomechanical Engineering**, v.125, p. 25-37.
- [71] TEKADA, K.; ITO, T.; KIKUCHI, N. (1998). Characterization of the mechanical behaviors of solid-fluidmixture by the homogenization method. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.** v. 153, p. 223-257.
- [72] VALLIAPPAN (1981) **Continuum Mechanics Fundamentals**. A.A. Balkema. Rotterdam.
- [73] YI, Y.; PARK, S.; YOUN, S. (1998). Asymptotic Homogenization of Viscoelastic Composite with periodic Microstructure. **Int. J. Solids Struct.** v. 35, p. 2039-2055.

Apêndice A

Conceitos Básicos

Nesta seção, são introduzidos de forma breve os conceitos de símbolos de ordem, perturbação regular, perturbação singular e expansão assintótica.

A.1 Símbolos de Ordem

As letras "O" (maiúsculo) e "o" (minúsculo) são símbolos de ordem, ou, símbolos de Landau*. Eles são empregados para descrever e analisar o comportamento de funções quando estas são aproximadas por valores limites.

São considerados aqui apenas três tipos de valores limites: zero, um número finito diferente de zero e infinito. Limites como

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\sin \frac{1}{\epsilon} \right)$$

não são considerados.

Sejam f, g funções definidas em um intervalo $I \in \mathbb{R}$. Escreve-se

$$f(\epsilon) = O[g(\epsilon)] \tag{A.1}$$

*Hardy (1954) relata que estes *símbolos* foram introduzidos por Bachmann (1894), e popularizados por Landau (1909). Por este motivo, os símbolos de ordem são também chamados de *símbolos* de Bachmann-Landau (Lagerstrom, 1988).

à medida que $\epsilon \rightarrow 0$, se existe $C > 0$ independente de ϵ e $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$|f(\epsilon)| \leq C |g(\epsilon)| \quad (\text{A.2})$$

para todo $|\epsilon| \leq \epsilon_0$; isto é,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\epsilon)}{g(\epsilon)} \right| < \infty.$$

Seguem abaixo alguns exemplos de aplicação do símbolo de ordem **O**.

- (a) $\sin \epsilon = O(\epsilon)$; $\sin 7\epsilon = O(\epsilon)$; $\sin \epsilon^2 = O(\epsilon^2)$;
- (b) $\cos \epsilon = O(1)$; $\cos \epsilon - 1 = O(\epsilon^2)$; $1 - \cos \epsilon = O(\epsilon^2)$;
- (c) $\tan \epsilon = O(\epsilon)$; $\cot \epsilon = O(\epsilon^{-1})$; $\sec \epsilon = O(1)$; à medida que $\epsilon \rightarrow 0$.

A função g da expressão (A.1) é chamada de *função de calibração*.

Considerando f, g nas mesmas condições acima. Escreve-se

$$f(\epsilon) = o[g(\epsilon)] \quad (\text{A.3})$$

à medida que $\epsilon \rightarrow 0$, se para todo $\delta > 0$, independente de ϵ , existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$|f(\epsilon)| \leq \delta |g(\epsilon)| \quad (\text{A.4})$$

para $|\epsilon| \leq \epsilon_0$; isto é,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\epsilon)}{g(\epsilon)} \right| = 0.$$

Seguem abaixo alguns exemplos de aplicação do símbolo de ordem **o**.

- (a) $\sin \epsilon = o(1)$; $\sin \epsilon^2 = o(\epsilon)$; $\sin \epsilon = o(\epsilon^{\frac{1}{2}})$;
- (b) $\cos \epsilon = o(\epsilon^{-\frac{1}{2}})$; $\cos \epsilon = o(\epsilon^{-1})$; $\cos \epsilon = o(\epsilon^{-\frac{1}{3}})$;
- (c) $\coth \epsilon = o(\epsilon^{\frac{3}{2}})$; $\cot \epsilon = o\left(\epsilon^{\frac{-(n+1)}{n}}\right)$ para n positivo; à medida que $\epsilon \rightarrow 0$.

Se f, g são funções de duas variáveis (x, ϵ) , escreve-se

$$f(x, \epsilon) = O[g(x, \epsilon)] \quad (\text{A.5})$$

à medida que $\epsilon \rightarrow 0$ se existe $A > 0$ independente de ϵ e $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$|f(x, \epsilon)| \leq A |g(x, \epsilon)| \quad (\text{A.6})$$

para todo $|\epsilon| \leq \epsilon_0$. Escreve-se

$$f(x, \epsilon) = o[g(x, \epsilon)] \quad (\text{A.7})$$

à medida que $\epsilon \rightarrow 0$, se para cada $\delta > 0$, independente de ϵ , existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$|f(x, \epsilon)| \leq \delta |g(x, \epsilon)| \quad (\text{A.8})$$

para todo $|\epsilon| \leq \epsilon_0$.

Propriedades das funções à medida que $\epsilon \rightarrow 0$.

- (1) Se $f(\epsilon) = o(g(\epsilon))$, então $f(\epsilon) = O(g(\epsilon))$;
- (2) Se $f(\epsilon) = O(g(\epsilon))$ e $g(\epsilon) = O(h(\epsilon))$, então $f(\epsilon) = O(h(\epsilon))$;
- (3) Se $f(\epsilon) = O(g(\epsilon))$ e $g(\epsilon) = o(h(\epsilon))$, então $f(\epsilon) = o(h(\epsilon))$;
- (4) Se $f(\epsilon) = o(g(\epsilon))$ e $g(\epsilon) = O(h(\epsilon))$, então $f(\epsilon) = o(h(\epsilon))$;
- (5) Se $f(\epsilon) = O(g(\epsilon))$, e C é uma constante, então $Cf(\epsilon) = O(g(\epsilon))$;
- (6) Se $f(\epsilon) = o(g(\epsilon))$, e C é uma constante, então $Cf(\epsilon) = o(g(\epsilon))$;
- (7) Se $f(\epsilon) = o(g(\epsilon))$, $\epsilon \rightarrow 0$ e C é uma constante não nula, $f(\epsilon) = o(Cg(\epsilon))$;
- (8) Se $f(\epsilon) = O(g(\epsilon))$, então $O(f(\epsilon)) + O(g(\epsilon)) = O(f(\epsilon)) = O(g(\epsilon))$;
- (9) $O(\epsilon^n) \cdot O(\epsilon^m) = O(\epsilon^{n+m}) = (O(\epsilon^n))^m$;
- (10) $O(\epsilon^n) = O(1) \epsilon^n$;
- (11) $o(\epsilon^n) = o(1) \epsilon^n$.

A.2 Perturbações Regulares e Perturbações Singulares

Grande quantidade de problemas físicos que envolvem funções escalares, ou, vetoriais da forma $u(x, \epsilon)$ podem ser representados matematicamente por equações diferenciais e condições de contorno dadas por

$$\begin{aligned} L(u, x, \epsilon) &= 0, \\ B(u, \epsilon) &= 0, \end{aligned} \tag{A.9}$$

nas quais x é uma variável escalar ou uma variável vetorial independente, L , um operador diferencial, B , as condições de contorno e ϵ é um parâmetro escalar. Em geral, tais problemas não possuem soluções fechadas exatas. Entretanto, busca-se uma solução para (A.9) por meio de uma expansão assintótica da forma

$$u(x, \epsilon) = u_0(x) + \epsilon u_1(x) + \epsilon^2 u_2(x) + \dots \tag{A.10}$$

onde u_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, independe de ϵ . Neste caso $u_0(x)$ em (A.10) é solução do problema para $\epsilon = 0$. Deste modo, desenvolve-se nesta seção os conceitos necessários a fim de resolver problemas de valor de contorno utilizando expansões assintóticas.

A.2.1 Expansões Assintóticas

Uma sucessão de funções $\{\delta_n(\epsilon)\}$, finita ou não, constitui uma sequência quando verifica-se

$$\delta_{n+1}(\epsilon) = o[\delta_n(\epsilon)] \tag{A.11}$$

à medida que $\epsilon \rightarrow 0$.

Dado $N > 0$, uma expansão assintótica da função $f(\epsilon)$ com respeito à sequência $\{\delta_n(\epsilon)\}$ é definida por

$$f(\epsilon) = \sum_{n=0}^N a_n \delta_n(\epsilon) + R_N(\epsilon) \tag{A.12}$$

à medida que $\epsilon \rightarrow 0$ e sempre que $R_N(\epsilon) = O(\delta_{n+1}(\epsilon))$.

Denota-se por

$$f(\epsilon) \approx \sum_{n=0}^N a_n \delta_n(\epsilon) \quad (\text{A.13})$$

uma aproximação de $f(\epsilon)$. Isto implica que

$$a_n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(\epsilon) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \delta_j(\epsilon)}{\delta_n(\epsilon)} \right). \quad (\text{A.14})$$

Se uma função f possui uma expansão assintótica em termos de uma sequência, então a expansão assintótica é única para essa sequência particular, isto é, dada a existência da aproximação (A.13) em termos da sequência $\{\delta_i(\epsilon)\}$, os coeficientes a_i podem ser calculados mediante a expressão (A.14). O valor inicial " a_0 " deve ser selecionado de modo que o limite à direita de (A.14) exista e seja finito. Porém, uma função pode ter várias expansões assintóticas, cada uma expressa em termos de uma sequência diferente. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \tan \epsilon &= \epsilon + \frac{1}{3}\epsilon^3 + \frac{2}{5}\epsilon^5 \\ \tan \epsilon &= \sin \epsilon + \frac{1}{2}(\sin \epsilon)^3 + \frac{3}{8}(\sin \epsilon)^5 \\ \tan \epsilon &= \epsilon \cosh \left(\sqrt{\frac{2}{3\epsilon}} + \frac{31}{220} \left[\epsilon \cosh \left(\sqrt{\frac{2}{3\epsilon}} \right) \right] \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, diferentes funções podem ter a mesma expansão assintótica.

Seja $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$. Dado $N > 0$, uma expansão assintótica da função $f(\epsilon, x)$ em relação aos termos da sequência $\{\delta_n(\epsilon)\}$ é representada por

$$f(\epsilon, x) = \sum_{n=0}^N a_n(x) \delta_n(\epsilon) + R_N(\epsilon, x) \quad (\text{A.15})$$

à medida que $\epsilon \rightarrow 0$ e sempre que $R_N(\epsilon, x) = O(\delta_{n+1}(\epsilon))$.

Observação 1 Diz-se que tal expansão assintótica é uniforme sobre Ω se existem constantes $K > 0$, $\epsilon_0 > 0$, independentes de x , tais que $|R_N(\epsilon, x)| \leq K |\delta_{n+1}(\epsilon)|$ para todo $(\epsilon, x) \in (0, \epsilon_0) \times \Omega$.

A.2.2 Perturbações Regulares

Define-se uma série de perturbações como sendo uma série de potências de ϵ com raio de convergência diferente de zero. Um problema do tipo (A.9) é chamado problema de perturbações regulares se existe uma série de perturbações que aproxima a solução do problema à medida que $\epsilon \rightarrow 0$.

Seja

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} &= -1 - \epsilon v \\ v(0) &= 1 \end{cases} . \quad (\text{A.16})$$

Admitindo que o problema é regular, expande-se candidata a solução do problema em termos da série de perturbações

$$v(t) = v_0(t) + \epsilon v_1(t) + \epsilon^2 v_2(t) + \dots \quad (\text{A.17})$$

Substituindo (A.17) em (A.16) e agrupando os termos que multiplicam as potências de ϵ , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{dv_0}{dt} + 1 + \left(\frac{dv_1}{dt} + v_0 \right) \epsilon + \left(\frac{dv_2}{dt} + v_1 \right) \epsilon^2 + \dots &= 0 \\ v_0(0) - 1 + v_1(0) \epsilon + v_2(0) \epsilon^2 + \dots &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Observe de (A.18) que, no limite quando $\epsilon \rightarrow 0$, cada termo multiplicando uma potência de ϵ deve ser nulo. Assim, obtém-se

$$\epsilon^0 : \begin{cases} \frac{dv_0}{dt} &= -1 \\ v_0(0) &= 1 \end{cases} ; \epsilon^1 : \begin{cases} \frac{dv_1}{dt} &= -v_0 \\ v_1(0) &= 0 \end{cases} ; \epsilon^2 : \begin{cases} \frac{dv_2}{dt} &= -v_1 \\ v_2(0) &= 0 \end{cases} \dots \quad (\text{A.19})$$

Resolvendo os problemas de valor inicial em (A.19) resultam:

$$\begin{aligned}
 \epsilon^0 : \begin{cases} \frac{dv_0}{dt} &= -1 \\ v_0(0) &= 1 \end{cases} \implies v_0(t) = -t + 1 \\
 \epsilon^1 : \begin{cases} \frac{dv_1}{dt} &= -v_0 \\ v_1(0) &= 0 \end{cases} \implies v_1(t) = \frac{t^2}{2} - t \\
 \epsilon^2 : \begin{cases} \frac{dv_2}{dt} &= -v_1 \\ v_2(0) &= 0 \end{cases} \implies v_2(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \\
 \vdots
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

Substituindo as soluções $v_0(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$, ..., em (A.17) obtém-se uma série de perturbações para a solução do problema (A.16) na forma

$$v_\epsilon(t) = 1 - t + \epsilon \left(\frac{t^2}{2} - t \right) + \epsilon^2 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right) + \dots \tag{A.21}$$

Observação:

A expressão (A.21) pode ser reescrita na forma

$$v_\epsilon(t) = \sum_{k \geq 0} \left[\frac{(-t)^k}{k!} + \frac{(-t)^{k+1}}{(k+1)!} \right] \epsilon^k. \tag{A.22}$$

A.2.3 Perturbações Singulares

Se um problema do tipo (A.9) não admitir uma solução em série de perturbações à medida que $\epsilon \rightarrow 0$, diz-se que o problema é de perturbações singulares.

Em geral, a solução do problema original possui um comportamento diferente da série de perturbações regulares para ϵ pequeno. Ilustra-se isto com o exemplo abaixo.

Exemplo 1 Seja $u(t, \epsilon) = u^\epsilon(t)$ uma função definida para $t \in [0, 1]$, com $\epsilon > 0$, satisfazendo o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \epsilon \frac{du^\epsilon(t)}{dt} + a(t) u^\epsilon(t) = b(t), & t \neq 0, \\ u^\epsilon(0) = 0, & \epsilon > 0, \end{cases}$$

onde a e b são funções de classe $C^1[0, 1]$, tais que:

$$0 \leq a(t), \quad b(0) \neq 0, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Observação:

Para $\epsilon = 0$, a equação deixa de ser diferencial obtendo-se

$$u^0(t) = \frac{b(t)}{a(t)},$$

porém a condição inicial perde seu sentido pois a e b são dados arbitrários.

(a) Busca-se a solução seguindo a proposta "regular" como segue:

$$\begin{aligned} u^\epsilon(t) &= \underbrace{u_0(t)}_{u^0(t)} + \underbrace{\epsilon u_1(t) + \epsilon^2 u_2(t) + \dots}_{o(1)}, \\ u^\epsilon(t) &= u^0(t) + o(1) \end{aligned}$$

A última igualdade significa que: $\forall t > 0$, e $\epsilon \rightarrow 0$ tem-se que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u^\epsilon(t) = u^0(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$$

No limite anterior t é diferente de zero, visto que $b(0) \neq 0$. Isto indica a existência de um fenômeno singular na vizinhança da origem ($t = 0$), pelo que a proposta de solução é conhecida como a "*expansão exterior da solução*" (no sentido de ser válida somente no exterior de $t = 0$)

(b) Para estudar a solução em uma vizinhança de $t = 0$, efetua-se uma aplicação para

variável independente t a fim de definir uma variável interior:

$$\tau = \frac{t}{\epsilon}$$

onde cumpre-se que

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{d\tau}.$$

Com esta mudança de variáveis, a solução $u^\epsilon(t)$ pode ser escrita como segue

$$u^\epsilon(t) = u^\epsilon(\tau\epsilon) = v^\epsilon(\tau)$$

onde resulta que

$$\frac{du^\epsilon(t)}{dt} = \frac{1}{\epsilon} \frac{dv^\epsilon(\tau)}{d\tau}.$$

Assim o problema inicial pode ser transformado do seguinte modo

$$\begin{cases} \epsilon \frac{du^\epsilon(t)}{dt} + a(t) u^\epsilon(t) = b(t) & ; t \neq 0 \\ u^\epsilon(0) = 0 & ; \epsilon > 0 \end{cases}$$

para $t \in [0, 1]$. Implica em

$$\begin{cases} \frac{dv^\epsilon(\tau)}{d\tau} + a(\epsilon\tau) v^\epsilon(\tau) = b(\epsilon\tau) & ; \tau \neq 0 \\ v^\epsilon(0) = 0 & ; \epsilon > 0 \end{cases}$$

para $\tau \in \left[0, \frac{1}{\epsilon}\right]$.

(c) Em virtude da mudança de variável o problema obtido é "regular", assim é natural pensar em buscar a solução anterior $v^\epsilon(\tau)$, na forma habitual como segue:

$$\begin{aligned} v^\epsilon(\tau) &= \underbrace{v_0(\tau)}_{v^0(\tau)} + \underbrace{\epsilon v_1(\tau) + \epsilon^2 v_2(\tau) + \dots}_{o(1)}, \\ v^\epsilon(\tau) &= v^0(\tau) + o(1) \end{aligned}$$

(d) A "regularidade" adquirida permite determinar o termo não perturbado $v^0(\tau)$ da

solução anterior,

$$v^\epsilon(\tau) = v^0(\tau) + o(1),$$

resolvendo o seguinte problema para $\epsilon = 0$.

$$\begin{cases} \frac{dv^\epsilon(\tau)}{d\tau} + a(\epsilon\tau)v^\epsilon(\tau) = b(\epsilon\tau) & ; \tau \neq 0 \\ v^\epsilon(0) = 0 & ; \epsilon > 0 \end{cases}$$

para $\tau \in \left[0, \frac{1}{\epsilon}\right]$, implica em

$$\begin{cases} \frac{dv^0(\tau)}{d\tau} + a(0)v^0(\tau) = b(0) & ; \tau \neq 0 \\ v^0(0) = 0 & ; \epsilon > 0 \end{cases}$$

para $\tau \in [0, +\infty)$.

(e) A solução exata deste último problema (a qual satisfaz a condição inicial) é

$$v^0(\tau) = \frac{b(0)}{a(0)}(1 - e^{-a(0)\tau}).$$

(f) Resumindo, a solução aproximada pode ser apresentada de modo uniforme como segue

$$u(t) = u^0(t) + v^0\left(\frac{t}{\epsilon}\right) - j,$$

onde j é um número que se determina a partir da condição de concordância

$$j = \lim_{t \rightarrow 0} u^0(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} v^0(\tau) \equiv \frac{b(0)}{a(0)}.$$

A.3 Funções de Uma Variável Complexa

A teoria das funções de uma variável complexa é uma das partes mais importantes da análise matemática. Por meio dela foi possível compreender melhor as funções definidas por séries de potências. Nesta seção são introduzidos alguns aspectos básicos da teoria, necessários à

compreensão deste trabalho. Os resultados básicos são enunciados, porém, as demonstrações são omitidas. Para um estudo mais detalhado, ver por exemplo, Markushevich (1970).

A.3.1 Números Complexos

Um número complexo z é definido por uma expressão da forma $a + bi$, sendo a e b números reais e i um número imaginário que satisfaz a seguinte relação $i^2 = -1$.

O conjunto dos números complexos é denotado por C . Admite-se que estão definidas em C duas operações, uma de soma e outra de produto. Assim, se $z = a + bi$ e $w = c + di$ são números complexos, define-se a soma e o produto, respectivamente, por:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad (\text{A.23})$$

$$z.w = (a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + bd)i \quad (\text{A.24})$$

Para maiores detalhes sobre as propriedades das operações (A.23) e (A.24) ver Lins Neto (1996).

A.3.2 Representação Cartesiana e Representação Polar

Pode-se identificar o conjunto dos números complexos, C , com o plano

$$\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) / x, y \in \mathbb{R} \},$$

por meio do isomorfismo $\mathbb{R}$ -linear

$$\varphi = \mathbb{R}^2 \longrightarrow C$$

definido por

$$\varphi(x, y) = x + yi.$$

De fato, da definição de (A.23) e (A.24) é fácil ver que se u e v são vetores de $\mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\varphi(u + \lambda v) = \varphi(u) + \lambda \varphi(v), \quad (\text{A.25})$$

logo φ é $\mathbb{R}$ -linear. É claro também que $\varphi(\mathbb{R}^2) = C$, isto é, φ é sobrejetora. Por outro lado, se $u = (x, y)$ e $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ são tais que $\varphi(u) = \varphi(\tilde{u})$ então

$$x + yi = \tilde{x} + \tilde{y}i = x - \tilde{x} = (y - \tilde{y})i \implies (x - \tilde{x})^2 = -(y - \tilde{y})^2.$$

Como o quadrado de um número real não pode ser negativo, conclui-se que $x = \tilde{x}$ e $y = \tilde{y}$. Logo, φ é injetora e portanto um isomorfismo. Deste modo diz-se que $\mathbb{R}^2$ é isomorfo a C (simbolicamente, $\mathbb{R}^2 \approx C$).

Dado

$$z = x + yi \in C,$$

define-se

$$\operatorname{Re}(z) = x$$

(parte real de z) e

$$\operatorname{Im}(z) = y$$

(parte imaginária de z), de modo que

$$\operatorname{Re} : C \longrightarrow \mathbb{R} \text{ e } \operatorname{Im} : C \longrightarrow \mathbb{R}$$

são aplicações $\mathbb{R}$ -lineares. Para todo $z \in C$, tem-se

$$z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i.$$

O conjugado de z é definido por

$$\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)i.$$

A norma, ou módulo, de $z = x + yi$ é dada por $|z|$, no qual

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x + yi)(x - yi)} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \geq 0. \quad (\text{A.26})$$

Para maiores detalhes sobre as propriedades da norma, ver Conway, 2000, Lins Neto, 1996, Churchill, 1975.

Seja $z \neq 0$, $z = x + yi$, admite-se

$$x = r \cdot \cos \theta \text{ e } y = r \cdot \operatorname{sen} \theta,$$

no qual $r = |z|$, dado por (A.26), então o número complexo z pode ser escrito na forma polar

$$z = r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \quad (\text{A.27})$$

A expressão (A.27) é conhecida por representação polar de um número complexo z e o número θ é chamado de argumento de z .

A.3.3 Funções Analíticas

Quando z designa qualquer um dos números de um conjunto S de números complexos, chama-se z de variável complexa.

As funções

$$x = \operatorname{Re}(z) \text{ e } y = \operatorname{Im}(z)$$

são reais. Se u e v são duas funções reais quaisquer das variáveis x e y , então $u + vi$ é uma função de z . Reciprocamente, toda função $f(z)$ tem partes real e imaginária bem definidas, as quais são funções reais de x e y . Se u e v designam tais partes, então

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

A Derivada

Seja z um ponto arbitrário de uma vizinhança de um ponto fixo z_0 , onde essa vizinhança é conhecida como domínio de definição de uma certa função f . Escreve-se $\Delta z = z - z_0$ e considera Δz como a variável complexa. A derivada f' , ou $\frac{df}{dz}$, de f em z_0 é, então, definida por

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z)}{\Delta z}, \quad (\text{A.28})$$

se o limite existe. Ou seja, se o número complexo $f'(z_0)$, existe, então, para cada número positivo ϵ existe um número δ tal que

$$\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \epsilon \quad (\text{A.29})$$

sempre que $0 < |\Delta z| < \delta$.

As Condições de Cauchy-Riemann

Suponha que uma função tenha derivada em z_0 . Seja $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y), \quad f'(z_0) = a + ib, \\ \Delta f &= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0), \quad \Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0), \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

e seja Δy o acréscimo correspondente em $v(x, y)$. Então,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = a + ib, \quad (\text{A.31})$$

de (A.31), e da teoria de limites de funções complexas, vem

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \right) = a, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \right) = b. \quad (\text{A.32})$$

Em particular, quando $\Delta y = 0$, ou seja, quando $\Delta z = \Delta x$, os limites em (A.32) se reduzem a limites de funções de uma só variável Δx , decorrendo daí que

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} &= a, \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} &= b, \end{aligned}$$

isto é, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial x}$ existem no ponto (x_0, y_0) e

$$\frac{\partial v}{\partial x} = a \text{ e } \frac{\partial u}{\partial x} = b \quad (\text{A.33})$$

em (x_0, y_0) .

Do mesmo modo, quando $\Delta x = 0$ ($\Delta z = i\Delta y$), os limites em (A.32) se reduzem a

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} &= a, \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{-\Delta y} &= b.\end{aligned}$$

Assim, as derivadas parciais em relação a y existem e

$$\frac{\partial v}{\partial y} = a \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -b \quad (\text{A.34})$$

em (x_0, y_0) .

De acordo com as fórmulas (A.33) e (A.34), tem-se, no ponto z_0 ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{A.35})$$

As equações (A.35) são as condições de *Cauchy – Riemann*.

Como $f'(z) = a + ib$, as fórmulas (A.33) e (A.34) fornecem duas expressões para a derivada de f :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{A.36})$$

no ponto $z = z_0$.

Funções Analíticas

Uma função f da variável complexa z é analítica num ponto z_0 , se sua derivada $f'(z)$ existe não só em z_0 como também em todo ponto z de uma vizinhança de z_0 . Assim, f é analítica em num domínio do plano- z se ela é analítica em todo ponto desse domínio.

Funções Harmônicas Seja a função $f = u + iv$ analítica num domínio do plano- z . Então de (A.35), em todo ponto do domínio

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (\text{A.37})$$

e, portanto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial v}{\partial y \partial x}, \quad (\text{A.38})$$

desde que estas derivadas segundas existam. Admitindo que, quando f é analítica, as derivadas parciais de u e v de todas as ordens existem e são funções contínuas de x e y . Segue-se que as duas derivadas mistas nas equações (A.38) são iguais e, portanto, que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{A.39})$$

em todos os pontos do domínio.

A equação (A.39) é a equação diferencial parcial de *Laplace* em duas variáveis independentes x e y . Qualquer função, com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, que satisfaz à equação de Laplace é chamada *função harmônica*.

Séries de Laurent Seja $\tilde{z}$ um ponto arbitrário de qualquer um dos dois círculos concêntricos C_1 e C_2 , $|\tilde{z} - z_0| = r_1$, $|\tilde{z} - z_0| = r_2$, com centro num ponto z_0 , onde $r_2 < r_1$ Fig. (A.1).

Figura A.1: Círculos Concêntricos.

Se f é analítica sobre C_1 e C_2 e na região entre esses dois círculos, então, em cada ponto de z entre os círculos, $f(z)$ é representada por uma série convergente de potências positivas e negativas de $(z - z_0)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \quad (\text{A.40})$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\tilde{z}) d\tilde{z}}{(\tilde{z} - z_0)^{n+1}}, \quad (\text{A.41})$$

onde $(n = 0, 1, 2, \dots)$,

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\tilde{z}) d\tilde{z}}{(\tilde{z} - z_0)^{-n+1}} \quad (\text{A.42})$$

sendo $(n = 0, 1, 2, \dots)$, e, cada integral em (A.41) e (A.42) calculada no sentido anti-horário.

A série em (A.40) é chamada de *série de Laurent*.