UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

Diogo Henrique Bispo Dias

Paraconsistentização de Lógicas

Versão Corrigida

São Paulo
2018

Diogo Henrique Bispo Dias

Paraconsistentização de Lógicas

Versão Corrigida

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia do Departamento de Filosofia da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Filosofia.

Área de Concentração: Filosofia

Orientador: Prof. Dr. Edelcio Gonçalves de Souza

São Paulo
2018

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Catalogação na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo

D541p

Dias, Diogo
Paraconsistentização de Lógicas / Diogo Dias ; orientador Edelcio de Souza. – São Paulo, 2018.
118 f.

Tese (Doutorado)– Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo. Departamento de Filosofia. Área de concentração: Filosofia.

1. Filosofia. 2. Lógica. 3. Lógica Paraconsistente. I. de Souza, Edelcio, orient. II. Título.

fflch

ENTREGA DO EXEMPLAR CORRIGIDO DA DISSERTAÇÃO/TESE

Nome do (a) aluno (a): Diogo Henrique Bispo Dias

Data da defesa: 24/01/2019

Nome do Prof. (a) orientador (a): Edelcio Gonçalves de Souza

Nos termos da legislação vigente, declaro **ESTAR CIENTE** do conteúdo deste **EXEMPLAR CORRIGIDO** elaborado em atenção às sugestões dos membros da comissão Julgadora na sessão de defesa do trabalho, manifestando-me **plenamente favorável** ao seu encaminhamento e publicação no **Portal Digital de Teses da USP**.

São Paulo, 12/03/2019

(Edelcio Gonçalves de Souza)

DIAS, D. H. B. **Paraconsistentização de Lógicas**. Tese apresentada à Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Filosofia.

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. _____ Instituição _____

Julgamento _____ Assinatura _____

Prof. Dr. _____ Instituição _____

Julgamento _____ Assinatura _____

Prof. Dr. _____ Instituição _____

Julgamento _____ Assinatura _____

À Annelise, com todo amor

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer aos meus pais, Aparecido e Dejanira; meu irmão, Gustavo, e toda a minha família, pelo apoio incondicional durante toda minha vida. Sem eles, jamais teria coragem de trilhar todo esse caminho acadêmico.

À CAPES, pela concessão da bolsa PROEX - 0487, durante o doutorado, e pela bolsa PDSE, número 88881.132731/2016-01, para a realização do estágio de pesquisa no exterior.

Ao Prof. Dr. Edelcio Gonçalves de Souza, meu orientador desde o meu TCC da graduação, por ter despertado em mim não só a paixão pela lógica mas, também, pelo ensino. Sou muito grato pela orientação sempre presente e cuidadosa; pelas incontáveis reuniões e revisões da tese e, principalmente, pela amizade.

Ao Prof. Dr. Alexandre Costa-Leite, pelo apoio e amizade desde a qualificação do Mestrado; pela sugestão do tema que se tornou o centro da minha pesquisa; pela leitura de versões preliminares desta tese, e pelas valiosas críticas e sugestões, não limitadas ao escopo da lógica.

Ao Prof. Dr. Rodrigo Bacellar, pela participação na minha banca de qualificação; pela leitura minuciosa da tese, bem como sugestões e discussões sobre a pesquisa. Com o Prof. Bacellar, aprendi a levar a sério os pressupostos metafísicos subjacentes à lógica, e a lidar com as consequências disso.

Ao Prof. Dr. Otávio Bueno, que foi meu supervisor do estágio de pesquisa no exterior. Sou grato pela atenção, orientação cuidadosa e interessada, e pelas conversas agradáveis sobre os mais diversos assuntos. Eu sempre admirei o trabalho do Prof. Otávio à distância, e foi um prazer poder trabalhar ao seu lado por um ano.

Ao Prof. Dr. Mario Ariel González Porta, que esteve presente desde a graduação, e que sempre foi uma referência na minha trajetória acadêmica. Sou grato, também, pela amizade.

À Marie Marcia Pedroso, por me ajudar com todas as questões burocráticas durante o Doutorado. Sem a sua ajuda, eu não teria a calma necessária para desenvolver a pesquisa.

Ao Lucas Amaral, que se tornou meu amigo desde o primeiro dia da graduação. Passamos pela licenciatura, bacharelado, mestrado e, agora, doutorado, praticamente de forma simultânea. Sua companhia deixou esta caminhada bem mais divertida.

À Rita Miranda, que entrou na graduação um semestre depois do Lucas, e também trilhou todo esse caminho conosco. Além de divertido, tornou o caminho mais musical.

Ao Lucas Baccarat, por ampliar meus interesses filosóficos; pelas inúmeras discussões sobre nossas pesquisas, e diversos outros temas - nem sempre filosóficos. Por dividir comigo todas as angústias e prazeres de uma carreira acadêmica. Mas, acima de tudo, pela amizade que ultrapassa as eventuais distâncias espaço-temporais que resultam da nossa profissão.

Aos amigos Lais, Pneu e Luis, pela amizade e apoio incondicional por mais de quinze anos. Eu não estaria aqui sem vocês.

À Annelise, que chegou há pouco tempo, e se tornou parte central da minha vida. Sou grato pela leitura e revisão da tese; pela companhia, carinho e paciência nos momentos difíceis da pesquisa e, acima de tudo, pelo amor.

Ladies and jellyspoons, hobos and tramps,
cross-eyed mosquitos and bow-legged ants,
I stand before you and sit behind you
to tell you something I know nothing about.
Next Thursday, which is Good Friday,
there's a Mother's Day meeting for fathers only;
wear your best clothes if you haven't any.
Please come if you can't; if you can, stay at home.
Admission is free, pay at the door;
pull up a chair and sit on the floor.
It makes no difference where you sit,
the man in the gallery's sure to spit.
The show is over, but before you go,
let me tell you a story I don't really know.
One bright day in the middle of the night,
two dead boys got up to fight.
The blind man went to see fair play;
the mute man went to shout "hooray!"
Back to back they faced each other,
drew their swords and shot each other.
A deaf policeman heard the noise,
and came and killed the two dead boys.
A paralysed donkey passing by
kicked the blind man in the eye;
knocked him through a nine-inch wall,
into a dry ditch and drowned them all.
If you don't believe this lie is true,
ask the blind man; he saw it too,
through a knothole in a wooden brick wall.
And the man with no legs walked away.

- *Poema infantil americano*

Resumo

DIAS, D.H.B. Paraconsistentização de Lógicas. 2018. 118 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas. Departamento de Filosofia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

Esta tese tem como objetivo estudar a paraconsistentização de lógicas, que consiste em encontrar, para uma dada lógica, sua contraparte paraconsistente. A estratégia geral utilizada para tal tarefa é: ao encontrar premissas inconsistentes, faça inferências a partir de seus subconjuntos consistentes. Para isso, foram desenvolvidos dois métodos de paraconsistentização. O primeiro consiste na utilização do arcabouço teórico da Teoria de Categorias, enquanto que o segundo faz uso da teoria da prova e da noção de estruturas valorativas. Após a apresentação dos métodos, algumas propriedades formais de ambas as propostas foram investigadas. Em particular, provou-se que a paraconsistentização preserva correção e completude, isto é, se a lógica inicial for correta e completa, sua contraparte paraconsistente também o será. Também foram estabelecidas as condições suficientes que uma lógica deve satisfazer para poder ser paraconsistentizada. A partir destes resultados, os dois métodos propostos foram comparados com outras abordagens desenvolvidas para raciocinar a partir de conjuntos inconsistentes. Por fim, a tese analisa o debate entre pluralismo e monismo lógico investigando, especificamente, as contribuições da paraconsistentização para tal discussão.

Palavras-chave: paraconsistentização; inconsistência; lógicas paraconsistentes; pluralismo lógico.

Abstract

DIAS, D.H.B. Paraconsistentization of Logics. 2018. 118 f. Thesis (Doctoral) - Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas. Departamento de Filosofia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

This thesis aims to study the paraconsistentization of logics, which consists in finding, for a given logic, its paraconsistent counterpart. The general strategy used for this task is the following: when finding inconsistent premises, one must draw inferences from its consistent subsets. For this, two methods of paraconsistentization were developed. The first consists in using the framework of Category Theory, while the second one makes use of proof theory and the notion of valuation structure. After their presentation, some formal properties of both proposals were investigated. In particular, it was proved that paraconsistentization preserves soundness and completeness, that is, if the initial logic is sound and complete, its paraconsistent counterpart will also be. The sufficient conditions that a logic must satisfy in order for it to be paraconsistentized were also established. From these results, the two proposed methods were compared with other approaches developed to reason from inconsistent sets. Finally, the thesis analyses the debate between pluralism and logical monism investigating, specifically, the contributions of paraconsistentization to this discussion.

Keywords: paraconsistentization; inconsistency; paraconsistent logics; logical pluralism; logical monism.

Sumário

Introdução **13**

1 Paraconsistentização de Lógicas **16**

1.1 Teoria de Categorias 16

1.2 A Categoria CON 22

1.3 O Funtor $\mathbb{P}$ 25

1.4 Propriedades de $Cn_{\mathbb{P}}$ 27

1.5 Paraconsistentização via Teoria de Categorias 29

1.6 Paraconsistentização via Teoria da Prova e de Modelos 31

1.6.1 Sistemas Formais 31

1.6.2 Estruturas Valorativas 33

1.6.3 Paradedução 36

1.7 Correção e Completude 40

1.8 Paraconsistentização Semântica e Sintática 41

2 Paraconsistentização diz-se de várias formas **43**

2.1 A Abordagem de Rescher e Manor 45

2.2 Subconjuntos Maximais Preferíveis 48

2.3 Paraconsistentização da Família $\mathcal{L}_n$ 52
2.3.1 Linguagens proposicionais 53
2.3.2 A família $\mathcal{L}_n$ 54
2.3.3 Paraconsistentização Semântica de $\mathcal{L}_n$ 57
2.3.4 Paraconsistentização usando a abordagem de Rescher e Manor 63

3 Pluralismo e Monismo Lógico 66
3.0.5 Evidência Histórica do Debate 70
3.1 Mudança de Significado 76
3.1.1 Princípio de Tolerância e Pluralismo Lógico 77
3.1.2 Significado Semântico 82
3.1.3 Paraconsistentização e Variação de Significado 87

4 Pluralismo diz-se de várias formas 95
4.1 Níveis de Pluralismo Lógico 95
4.2 Variação de Domínio 98
4.3 Teoria e Lógica Subjacente 102

Considerações Finais 106

Referências Bibliográficas 110

Introdução

> . . . before us lies the boundless ocean of unlimited possibilities.
>
> - *Carnap, The Logical Syntax of Language*

A lógica paraconsistente surgiu há pouco mais de cinquenta anos, mas já se constitue como uma área bem estabelecida da lógica. Ainda que exista uma disputa sobre seu verdadeiro criador, Newton da Costa, um dos candidatos a este posto, deve ser considerado - nas suas próprias palavras - o Cristóvão Colombo da lógica paraconsistente: talvez outros antes dele tenham descoberto a lógica paraconsistente, mas, após sua descoberta, ninguém mais pode reivindicar este papel[1].

Desde então, vimos não só uma proliferação de distintas lógicas paraconsistentes, mas, também, diferentes abordagens a estas lógicas[2]. Deste modo, temos lógicas paraconsistentes intuicionistas, modais, quânticas, entre outras, desenvolvidas para lidar com teorias inconsistentes, mas não-triviais, em diversos âmbitos. Não obstante, evitar a trivialização de uma teoria inconsistente geralmente pressupõe mudar completamente a lógica subjacente desta teoria. Dito de outra forma, quando se está investigando uma teoria

[1] Cf. GOMES & D'OTTAVIANO (2016).
[2] Cf. PRIEST (2002), da COSTA, KRAUSE & BUENO (2007).

usando uma dada lógica explosiva e, eventualmente, inconsistências são encontradas mas, ainda assim, se deseja estudar tal teoria, é preciso abandonar a lógica explosiva original e substituí-la por uma lógica paraconsistente que, em geral, se comporta de um modo muito diferente da anterior.

Sendo assim, esta pesquisa pretende responder a seguinte pergunta: é possível transformar uma lógica explosiva qualquer em uma lógica paraconsistente, mantendo algumas características centrais da lógica inicial? Esta transformação é chamada de *paraconsistentização de lógicas*[3].

COSTA-LEITE (2007) estuda e desenvolve a paraconsistentização da lógica clássica, bem como de algumas lógicas modais. Não obstante, esses procedimentos foram desenvolvidos para dar conta da paraconsistentização destas lógicas específicas. Não havia, ainda, uma generalização que transformasse qualquer lógica explosiva em uma lógica paraconsistente. Levar a cabo tal generalização é o principal objetivo desta tese.

O primeiro capítulo desenvolve dois métodos de paraconsistentização. O primeiro consiste na utilização do arcabouço conceitual da Teoria de Categorias. Apresentaremos os conceitos básicos desta teoria que serão utilizados, e mostraremos como podemos definir, em um âmbito bem geral, lógicas como categorias de estruturas de consequência. Em seguida, definiremos uma relação entre estas categorias, que transforma uma lógica explosiva em uma paraconsistente.

Já o segundo método faz uso da teoria da prova e da noção de estruturas valorativas. Mostraremos como é possível alterar os aparatos sintático e semântico de uma dada lógica para obter sua contraparte paraconsistente. Após sua apresentação, investigaremos algumas propriedades formais de ambas as propostas. Em especial, estudaremos o comportamento de algumas propriedades metalógicas, tais como a preservação de correção e completude.

No segundo capítulo, estudaremos possíveis alternativas às definições propostas de paraconsistentização, bem como uma análise comparativa entre tais

[3]O termo foi cunhado por COSTA-LEITE (2007).

procedimentos. Em particular, investigaremos a relação entre nossa abordagem e o trabalho desenvolvido por RESCHER & MANOR (1970). Apresentaremos, também, a paraconsistentização da família de lógicas multivaloradas $\mathcal{L}_n$, formuladas por Łukasiewicz.

O terceiro capítulo apresenta uma análise crítica do debate entre pluralismo e monismo lógico investigando, especificamente, as contribuições da paraconsistentização para tal discussão. Investigaremos a tese de que o significado dos conectivos lógicos é dado por suas regras de inferência e/ou suas condições de verdade. Mostraremos que, usando a noção de paraconsistentização, podemos definir lógicas distintas que contêm os mesmos conectivos. Assim, esta tese não implica em um monismo lógico.

O último capítulo avalia algumas críticas ao pluralismo lógico que não estão diretamente relacionadas à ideia de paraconsistentização, mas que são relevantes para estabelecer a possibilidade de um pluralismo lógico. Encerraremos o trabalho com alguns comentários gerais sobre os resultados obtidos, e as indicações de possíveis pesquisas futuras sobre o tema estudado.

Capítulo Um

Paraconsistentização de Lógicas

> Logic, n. the art of thinking and reasoning in strict accordance with the limitations and incapacities of the human misunderstanding.
>
> *- Ambrose Bierce, Devil's Dictionary*

Neste capítulo, apresentaremos formalmente a noção de paraconsistentização de lógicas, e definiremos duas formas de transformar uma dada lógica em uma lógica paraconsistente. A primeira forma faz uso da Teoria de Categorias, enquanto que a segunda utiliza os aparatos semântico e sintático de uma dada lógica. Comecemos, portanto, com uma apresentacão geral de Teoria de Categorias.

1.1 Teoria de Categorias

Apresentaremos, no que se segue, os conceitos básicos categoriais utilizados neste trabalho.

Definição 1.1.1 *Uma* **categoria** $\mathcal{C}$ *consiste nos seguintes itens*[1]*:*

[1]Seguimos a apresentação axiomática de GOLDBLATT (1984). Assumiremos, também, a notação usual da teoria de conjuntos. Cf. HALMOS (1960).

i) Uma coleção cujos membros são chamados de $\mathcal{C}$-objetos;

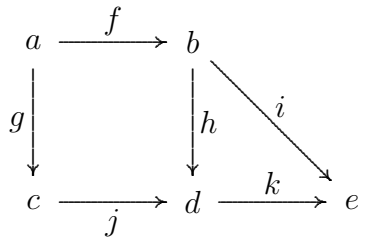
ii) Uma coleção cujos membros são chamados de $\mathcal{C}$-morfismos;

A cada $\mathcal{C}$-morfismo f estão associados dois $\mathcal{C}$-objetos chamados de **domínio** *e* **codomínio** *de f, denotados por $dom(f)$ e $codom(f)$, respectivamente. Para indicar que um $\mathcal{C}$-morfismo f é tal que $dom(f) = a$ e $codom(f) = b$, utilizamos as seguintes notações: $a \xrightarrow{f} b$ ou $f : a \to b$.*

Sempre que houver $\mathcal{C}$-morfismos tais que $a \xrightarrow{f} b$ e $b \xrightarrow{g} c$, existe um $\mathcal{C}$-morfismo $g \circ f : a \to c$ chamado de **composição** *dos $\mathcal{C}$-morfismos f e g, nesta ordem. Composição de $\mathcal{C}$-morfismos satisfaz a* Lei de Associatividade*: Se existirem $\mathcal{C}$-morfismos tais que $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$, então $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Para cada $\mathcal{C}$-objeto a, fica determinada a existência de um $\mathcal{C}$-morfismo 1_a, dito a **identidade** *em a, tal que $dom(1_a) = codom(1_a) = a$. Identidades em $\mathcal{C}$ satisfazem a* Lei de Identidade*: Sejam os $\mathcal{C}$-morfismos $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$, então $1_b \circ f = f$ e $g \circ 1_b = g$.*

Definição 1.1.2 *Um* **diagrama** *em $\mathcal{C}$, ou um* **$\mathcal{C}$-diagrama**, *é uma coleção (possivelmente vazia) de $\mathcal{C}$-objetos junto com alguns (possivelmente nenhum) $\mathcal{C}$-morfismos entre eles. Diagramas podem, então, ser representados por figuras tais como:*

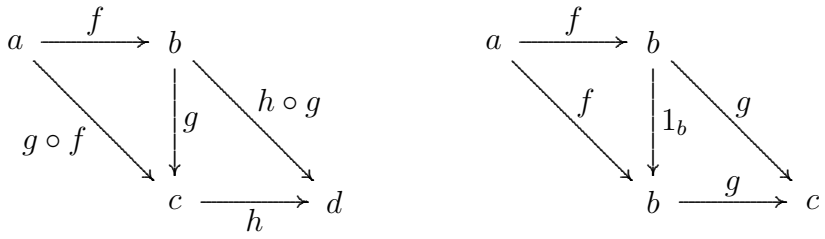


Definição 1.1.3 *Um diagrama é dito* **finito** *se ele possui um número finito de objetos e um número finito de morfismos entre eles.*

Definição 1.1.4 *Dizemos que um $\mathcal{C}$-diagrama* **comuta** *(ou que um $\mathcal{C}$-diagrama é* **comutativo***) se quaisquer $\mathcal{C}$-morfismos obtidos por composição de $\mathcal{C}$-morfismos no diagrama com domínio e contradomínio comuns são sempre*

idênticos. Assim, dizer que o diagrama acima comuta é dizer que: $h \circ f = j \circ g$, $i = k \circ h$, $k \circ j \circ g = i \circ f$ *e* $k \circ h \circ f = i \circ f$[2]. *Podemos, ainda, tornar essa noção um pouco mais precisa: um* **caminho** *em um diagrama* D *é uma sequência finita* $(f_1, ..., f_n)$ *de* $\mathcal{C}$*-morfismos em* D *tal que* $cod\,(f_i) = dom\,(f_{i+1})$ *para* $i = 1, ..., n-1$. *O número natural* n *é denominado o* **comprimento** *do caminho. Assim, dizemos que um diagrama* D **comuta** *se, para quaisquer caminhos* $(f_1, ..., f_n)$ *e* $(g_1, ..., g_m)$ *dados, tais que* $n \geq 2$ *ou* $m \geq 2$ *(ou ambos), com* $dom\,(f_1) = dom\,(g_1)$ *e* $cod\,(f_n) = cod\,(g_m)$, *tem-se que* $f_1 \circ ... \circ f_n = g_1 \circ ... \circ g_m$.

Com essa noção, podemos expressar as leis de associatividade e identidade pela comutatividade dos seguintes diagramas:



Definição 1.1.5 *Sejam* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{D}$ *duas categorias. Um* **funtor covariante** $\mathbb{F}$ *de uma categoria* $\mathcal{C}$ *em* $\mathcal{D}$ *é uma regra que determina:*

(i) um $\mathcal{D}$*-objeto* $\mathbb{F}(a)$, *para cada* $\mathcal{C}$*-objeto* a;

(ii) para cada $\mathcal{C}$*-morfismo* $f : a \to b$, *um* $\mathcal{D}$*-morfismo* $\mathbb{F}(f) : \mathbb{F}(a) \to \mathbb{F}(b)$.

Ademais, para caracterizar-se como funtor, $\mathbb{F}$ *deve respeitar as seguintes propriedades:*

(a) $\mathbb{F}(Id_a) = Id_{\mathbb{F}(a)}$;

(b) Se $(g \circ f)$ *estiver definida, então* $\mathbb{F}(g \circ f) = \mathbb{F}(g) \circ \mathbb{F}(f)$.

$\mathcal{C}$ *é dito o* **domínio** *do funtor* $\mathbb{F}$ *e* $\mathcal{D}$ *é seu* **contradomínio**. *A ação de* $\mathbb{F}$ *pode ser denotada por* $\mathbb{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, *ou por* $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathbb{F}} \mathcal{D}$.

[2]Note que a lei de associatividade nos permite eliminar os parênteses nas composições.

Definição 1.1.6 *Um* **endofuntor** *é um funtor de uma categoria nela mesma.*

Em seguida, construiremos os conceitos necessários para a formalização categorial de estrutura de consequência.

Definição 1.1.7 *Chamamos de* **estrutura de consequência** *o par* $\langle X, Cn\rangle$*, tal que:*

(i) X *é um conjunto, denominado* **domínio** *da estrutura;*

(ii) Cn *é um operador nas partes do conjunto* X*, i.e.,* $Cn : \wp(X) \to \wp(X)$*, denominado* **operador de consequência** *da estrutura.*

É importante notar que esta definição não impõe restrições à relação de consequência. Tampouco estamos fixando um conjunto específico para a estrutura[3].

Definição 1.1.8 *Sejam* $\langle X, Cn\rangle$ *uma estrutura de consequência e* $A \subseteq X$*.*

(i) $Cn(A)$ *é dito o* **conjunto das consequências** *de* A*;*

(ii) A *é dito* Cn-**consistente** $\Leftrightarrow Cn(A) \neq X$*. Quando este não for o caso,* A *é* Cn-**inconsistente**.

Definição 1.1.9 *Sejam duas estruturas de consequência* $\langle X, Cn\rangle, \langle X', Cn'\rangle$*. Uma função* $h : X \to X'$ *é chamada de* **homomorfismo** *se* h *é injetora e, para todo* $A \subseteq X$*,* $h(Cn(A)) = Cn'(h(A))$*, isto é, se o diagrama abaixo comuta*[4]*.*

[3]Em particular, isso permite que as estruturas $\langle \emptyset, \emptyset\rangle$ e $\langle X, X\rangle$ sejam consideradas lógicas (lógica vazia e trivial, respectivamente). Tratam-se de casos extremos, mas possíveis dentro do nosso escopo. São, em certo sentido, as fronteiras da lógica.

[4]Notem que, eventualmente, utilizaremos a mesma notação para a função h estendida ao conjunto das partes de X.

$$\begin{array}{ccc} \wp(X) & \xrightarrow{Cn} & \wp(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h} \\ \wp(X') & \xrightarrow{Cn'} & \wp(X') \end{array}$$

Utilizamos a notação $\langle X, Cn\rangle \xrightarrow{h} \langle X', Cn'\rangle$ para indicar que a função $h : X \to X'$ é um homomorfismo de $\langle X, Cn\rangle$ em $\langle X', Cn'\rangle$. Além disso, composição de homomorfismos é a composição usual de funções.

Os homomorfismos possuem as seguintes propriedades:

Proposição 1.1.1 *Composição de homomorfismos é homomorfismo.*

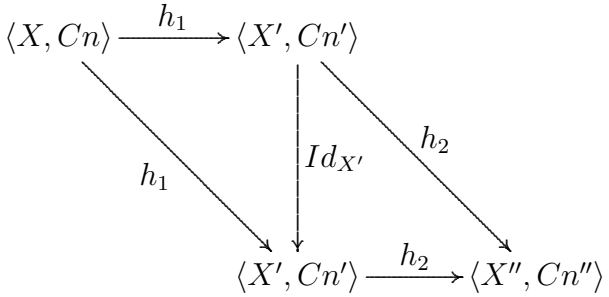
Prova. Sejam $\langle X, Cn\rangle \xrightarrow{h_1} \langle X', Cn'\rangle \xrightarrow{h_2} \langle X'', Cn''\rangle$.
Assim, $(h_2 \circ h_1)(Cn(A)) = h_2(h_1(Cn(A))) = h_2(Cn'(h_1(A))) =$
$Cn''(h_2(h_1(A))) = Cn''((h_2 \circ h_1)(A))$. Isto é, o diagrama seguinte comuta.

$$\begin{array}{ccc} \wp(X) & \xrightarrow{Cn} & \wp(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_1} \\ \wp(X') & \xrightarrow{Cn'} & \wp(X') \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_2} \\ \wp(X'') & \xrightarrow{Cn''} & \wp(X'') \end{array}$$

Logo, $\langle X, Cn\rangle \xrightarrow{h_2 \circ h_1} \langle X'', Cn''\rangle$ □

Proposição 1.1.2 *Identidades são homomorfismos que satisfazem a Lei de Identidade.*

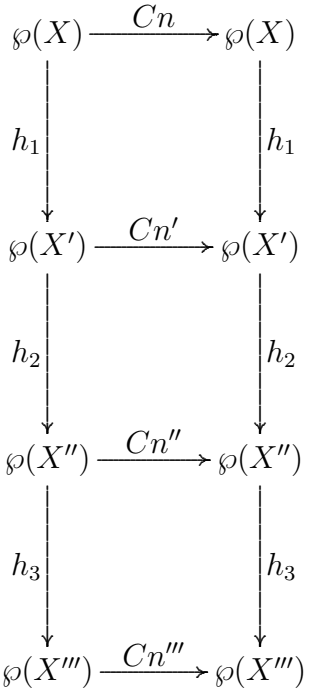
Prova. Em primeiro lugar, é fácil ver que $Id_X : X \to X$ é um homomorfismo de $\langle X, Cn\rangle$ em $\langle X, Cn\rangle$. Assim, $Cn(Id_X(A)) = Cn(A) = Id_X(Cn(A))$. Sejam $\langle X, Cn\rangle \xrightarrow{h_1} \langle X', Cn'\rangle$, $\langle X', Cn'\rangle \xrightarrow{Id_{X'}} \langle X', Cn'\rangle$ e $\langle X', Cn'\rangle \xrightarrow{h_2} \langle X'', Cn''\rangle$. Por um lado, temos que $(Id_{X'} \circ h_1)(Cn(A)) = Cn'((Id_{X'} \circ h_1)(A)) = Cn'(h_1(A)) = h_1(Cn(A))$, isto é, $Id_{X'} \circ h_1 = h_1$. Por outro, segue-se que $(h_2 \circ Id_{X'})(Cn'(A)) = Cn''((h_2 \circ Id_{X'})(A)) = Cn''(h_2(A)) = h_2(Cn'(A))$, isto é, $h_2 \circ Id_{X'} = h_2$. Assim, o diagrama abaixo comuta.



e o resultado está estabelecido. □

Proposição 1.1.3 *Composição de homomorfismos é associativa.*

Prova. Sejam $\langle X, Cn\rangle \xrightarrow{h_1} \langle X', Cn'\rangle \xrightarrow{h_2} \langle X'', Cn''\rangle \xrightarrow{h_3} \langle X''', Cn'''\rangle$. Assim, temos que $h_3 \circ (h_2 \circ h_1)(Cn(A)) = h_3(h_2(h_1(Cn(A)))) = h_3(h_2(Cn'(h_1(A)))) = h_3(Cn''(h_2(h_1(A)))) = Cn'''(h_3(h_2(h_1(A)))) = Cn'''((h_3 \circ h_2 \circ h_1)(A))$. Desta forma, o diagrama seguinte comuta.



e segue-se o resultado. □

Proposição 1.1.4 *Os homomorfismos preservam os conjuntos consistentes. Isto significa que, dados* $\langle X, Cn\rangle \xrightarrow{h} \langle X', Cn'\rangle$*, e* $A \subseteq X$*, se* A *é* Cn*-consistente, então* $h(A)$ *é* Cn'*-consistente.*

Prova. Temos que provar que, se $Cn(A) \neq X$, então, $Cn'(h(A)) \neq X'$. Suponha que A é Cn-consistente, e $h(A)$ é Cn'-inconsistente. Assim, temos que $Cn(A) \neq X$ e $Cn'(h(A)) = X'$. Mas, como h é homomorfismo, segue-se que $h(Cn(A)) = Cn'(h(A))$ e, portanto, $h(Cn(A)) = X'$. Além disso, como h é injetor, temos que $Cn(A) = X$, o que contraria nossa hipótese inicial. Logo, se $Cn(A) \neq X$, então $Cn'(h(A)) \neq X$. □

1.2 A Categoria CON

Na seção anterior, vimos que composições de homomorfismos são homomorfismos que satisfazem associatividade, e que as identidades em X são

homomorfismos que satisfazem a lei de identidade. Portanto, CON é uma categoria, definida da seguinte forma:

Definição 1.2.1 *A categoria CON das estruturas de consequência consiste em:*

(i) Objetos de CON: $\langle X, Cn\rangle$;

(ii) Morfismos de CON: homomorfismos.

Definiremos, agora, algumas propriedades categoriais que serão investigadas em CON[5].

Definição 1.2.2 *Um objeto 0 é dito* **inicial** *na categoria $\mathcal{C}$ se, para todo $\mathcal{C}$-objeto a, existe um e somente um morfismo de 0 em a.*

Definição 1.2.3 *Um objeto 1 é dito* **terminal** *na categoria $\mathcal{C}$ se, para todo $\mathcal{C}$-objeto a, existe um e somente um morfismo de a em 1.*

Definição 1.2.4 *Um* **co-produto** *de $\mathcal{C}$-objetos a e b é um $\mathcal{C}$-objeto $a + b$, junto com um par $i_a : a \to a + b, i_b : b \to a + b$ de $\mathcal{C}$-morfismos, tal que, para qualquer par de $\mathcal{C}$-morfismos da forma $(f : a \to c, g : b \to c)$, existe um e somente um morfismo $[f, g] : a + b \to c$, tal que $[f, g] \circ i_a = f$, e $[f, g] \circ i_b = g$. O morfirmo $[f, g]$ é chamado de* **co-produto** *de f e g, com respeito aos morfismos injetores i_a e i_b.*

Proposição 1.2.1 *CON não tem objeto terminal.*

Prova. Suponha, por absurdo, que CON tenha objeto terminal $\langle X, Cn\rangle$ e que $card(X) = \kappa$. Considere $\langle Y, Cn'\rangle$, tal que $card(Y) > \kappa$. Como não há injeção de Y a X, não há um homomorfismo em CON de $\langle Y, Cn'\rangle$ em $\langle X, Cn\rangle$, o que contradiz nossa hipótese inicial. Logo, CON não tem objeto terminal. □

[5]Para uma exposição estendida desta, e das três próximas seções, cf. de SOUZA, COSTA-LEITE & DIAS (2016).

Proposição 1.2.2 *CON não tem objeto inicial.*

Prova. EM *SET*, a categoria de conjuntos[6], $\emptyset$ é um objeto inicial. Se *CON* tivesse objeto inicial, seu domínio seria $\emptyset$. Mas, neste caso, o operador de consequência seria $Id_{\{\emptyset\}}$, que é uma injeção. Por outro lado, um *CON*-morfismo h de $\langle \emptyset, Id_{\{\emptyset\}} \rangle$ em $\langle X, Cn \rangle$ seria tal que $h(\emptyset) = \emptyset$, pois $(h \circ Id_{\{\emptyset\}})(\emptyset) = h(\emptyset) = \emptyset$.

Mas é fácil ver que, neste caso, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \{\emptyset\} & \xrightarrow{Id_{\{\emptyset\}}} & \{\emptyset\} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h} \\ \wp(X) & \xrightarrow[Cn]{} & \wp(X) \end{array}$$

comuta somente se $Cn(\emptyset) = \emptyset$. Isso, pois $(Cn \circ h)(\emptyset) = Cn(h(\emptyset)) = Cn(\emptyset)$.

□

Proposição 1.2.3 *CON não é (finitamente) completo, nem (finitamente) co-completo.*

Prova. Das duas proposições anteriores, segue-se imediatamente que o diagrama vazio não tem limite, nem co-limite. □

Proposição 1.2.4 *CON não tem co-produtos.*

Prova. Tome quaisquer duas categorias $\mathcal{C} = \langle C, Cn_C \rangle$ e $\mathcal{D} = \langle D, Cn_D \rangle$. Suponha, por absurdo, que $\mathcal{C}+\mathcal{D}$ seja o co-produto das duas. Assim, existem injeções $inl : \mathcal{C} \to \mathcal{C}+\mathcal{D}$ e $inr : \mathcal{D} \to \mathcal{C}+\mathcal{D}$ garantindo, para cada $f : \mathcal{C} \to \mathcal{X}$ e $g : \mathcal{D} \to \mathcal{X}$, um $[f, g] : \mathcal{C} + \mathcal{D} \to \mathcal{X}$, com $[f, g] \circ inl = f$ e $[f, g] \circ inr = g$. Considere que $f, f' : \mathcal{C} \to \mathcal{X}$ e $g, g' : \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ são tais que há $c \in C$,

[6]Os *SET*-objetos são conjuntos, e os *SET*-morfismos são funções entre conjuntos.

$d \in D$, com $f(c) = g(d)$ e $f'(c) \neq g'(d)$. Temos, então, que $f(c) = g(d)$ garante que $([f, g] \circ inl)(c) = ([f, g] \circ inr)(d)$; e, dado que $[f, g]$ deve ser injetora, isso significa que $inl(c) = inr(d)$. Mas $f'(c) \neq g'(d)$ implica que $([f', g'] \circ inl)(c) \neq ([f', g'] \circ inr)(d)$; e, como $[f', g']$ e uma função, segue-se que $inl(c) \neq inr(d)$, o que é uma contradição. Logo, CON não tem co-produtos. □

1.3 O Funtor $\mathbb{P}$

O Funtor $\mathbb{P}$ é chamado de **funtor de paraconsistentização**, pois será responsável por transformar uma estrutura de consequência explosiva em uma estrutura paraconsistente. Para tal finalidade, definiremos uma nova operação $Cn_{\mathbb{P}} : \wp(X) \to \wp(X)$ tal que, para todo $A \subseteq X$:

$$Cn_{\mathbb{P}}(A) := \bigcup \{Cn(A') : A' \subseteq A,\ Cn - consistente\}.$$

Desta forma, temos que $x \in Cn_{\mathbb{P}}(A)$ se e somente se existe $A' \subseteq A$ Cn-consistente, tal que $x \in Cn(A')$.

A ação de $\mathbb{P}$ em CON é dada pelas seguintes condições:

- Para CON-objetos (X, Cn), $\mathbb{P}(X, Cn) = (X, Cn_{\mathbb{P}})$;
- Para CON-morfismos h, $\mathbb{P}(h) = h$.

A ação de $\mathbb{P}$ nos CON-objetos está bem definida a partir da construção da operação $Cn_{\mathbb{P}}$. Para mostrar que $\mathbb{P}(h)$ também está bem definida, considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (X, Cn) & \xrightarrow{\quad h \quad} & (X', Cn') \\ \Big\downarrow \mathbb{P} & & \Big\downarrow \mathbb{P} \\ (X, Cn_{\mathbb{P}}) & \xrightarrow[\mathbb{P}(h) = h]{} & (X', Cn'_{\mathbb{P}}) \end{array}$$

Temos que provar que $(X, Cn_{\mathbb{P}}) \overset{\mathbb{P}(h)=h}{\longrightarrow} (X', Cn'_{\mathbb{P}})$ é, de fato, um morfismo. Isto é, temos que verificar que, para todo $A \subseteq X$, vale que $h(Cn_{\mathbb{P}}(A)) = Cn'_{\mathbb{P}}(h(A))$, ou seja, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} \wp(X) & \xrightarrow{\quad Cn_{\mathbb{P}} \quad} & \wp(X) \\ \Big\downarrow h & & \Big\downarrow h \\ \wp(X') & \xrightarrow[Cn'_{\mathbb{P}}]{} & \wp(X') \end{array}$$

Fazendo uso da proposição 1.1.4, é fácil ver que:

$$\begin{array}{rcl} h(Cn_{\mathbb{P}}(A)) & = & h(\bigcup\{Cn(A') : A' \subseteq A, Cn - consistente\}) \\ & = & \bigcup\{h(Cn(A')) : A' \subseteq A, Cn - consistente\} \\ & = & \bigcup\{Cn'(h(A')) : h(A') \subseteq h(A), Cn' - consistente\} \\ & = & Cn'_{\mathbb{P}}(h(A)). \end{array}$$

Portanto, $\mathbb{P}$ é um endofuntor na categoria CON. Notem que $\mathbb{P}$ possui as seguintes propriedades:

Proposição 1.3.1

(a) $\mathbb{P}(Id_a) = Id_{\mathbb{P}(a)}$;

(b) $\mathbb{P}(a \circ b) = \mathbb{P}(a) \circ \mathbb{P}(b)$.

Prova.

(a) Basta notar que $\mathbb{P}(Id_X) = Id_X = Id_{\mathbb{P}(X)}$.

(b) Para ver isto, considere $\langle X, Cn\rangle \xrightarrow{h_1} \langle X', Cn'\rangle \xrightarrow{h_2} \langle X'', Cn''\rangle$. Segue-se que $\mathbb{P}(h_2 \circ h_1) = \mathbb{P}(h_2(Cn'(h_1(A)))) = h_2(Cn'(h_1(A))) = Cn''(h_2(h_1(A))) = Cn''((h_2 \circ h_1)(A)) = Cn''((\mathbb{P}(h_2) \circ \mathbb{P}(h_1))(A))$. □

1.4 Propriedades de $Cn_{\mathbb{P}}$

O próximo passo é investigar quais as propriedades de Cn são preservadas pela ação de $\mathbb{P}$. Apresentaremos, antes, as propriedades que serão estudadas.

Definição 1.4.1 *Sejam Cn um operador de consequencia em X e $A, B \subseteq X$.*

i) Cn satisfaz **inclusão** *se e somente se $A \subseteq Cn(A)$;*

ii) Cn satisfaz **idempotência** *se e somente se $Cn(Cn(A)) \subseteq Cn(A)$;*

iii) Cn satisfaz **monotonicidade** *se e somente se $A \subseteq B$ implica que $Cn(A) \subseteq Cn(B)$;*

iv) Cn satisfaz **compacidade** *se e somente se temos que:*

$$Cn(A) = \bigcup\{Cn(A') : A' \subseteq A \textit{ finito}\}.$$

Portanto, $x \in Cn(A)$ se e somente se existe $A' \subseteq A$, finito, tal que $x \in Cn(A')$.

Definição 1.4.2 *Dizemos que uma estrutura de consequência (X, Cn) é* **tarskiana** *se e somente se o operador de consequência satisfaz inclusão, idempotência e monotonicidade.*

Usaremos, também, os seguintes resultados gerais sobre operadores de consequência:

Lema 1.4.1

i) Se Cn satisfaz inclusão e idempotência então, para todo $A \subseteq X$, temos que $Cn(Cn(A)) = Cn(A)$;

ii) Se Cn é monotônico e $A \subseteq X$ é Cn-consistente, então todo subconjunto de A é Cn-consistente.

Prova.

i) O resultado sai diretamente da aplicação da idempotência e inclusão.

ii) Considere $A' \subseteq A$. Como Cn é monotônico, segue-se que $Cn(A') \subseteq Cn(A)$. E, como $Cn(A) \neq X$, temos que $Cn(A') \neq X$, i.e., A' é Cn-consistente. □

Proposição 1.4.1 *Sejam (X, Cn) uma estrutura de consequência e $A \subseteq X$. Assim, se A é Cn-consistente, então $Cn(A) = Cn_{\mathbb{P}}(A)$.*

Prova. A prova segue imediadamente da definição de $Cn_{\mathbb{P}}$. □

Proposição 1.4.2 *$\mathbb{P}$ preserva compacidade, i.e., se Cn satisfaz compacidade, então $Cn_{\mathbb{P}}$ também a satisfaz.*

Prova. Suponha que Cn satisfaz compacidade. Considere $x \in Cn_{\mathbb{P}}(A)$. Pela definição de $Cn_{\mathbb{P}}$, existe $A' \subseteq A$, Cn-consistente, tal que $x \in Cn(A')$. Como Cn satisfaz compacidade, existe $A'' \subseteq A'$, finito, tal que $x \in Cn(A'')$. Pelo lema 1.4.1, A'' é Cn-consistente. Pela proposição 1.4.1, $Cn(A'') = Cn_{\mathbb{P}}(A'')$. Logo, existe $A'' \subseteq A$, finito, tal que $x \in Cn_{\mathbb{P}}(A'')$.

Por outro lado, suponha que existe $A' \subseteq A$, finito, tal que $x \in Cn_{\mathbb{P}}(A')$. Assim, existe $A'' \subseteq A'$, Cn-consistente, tal que $x \in Cn(A'')$. Portanto, existe $A'' \subseteq A$, Cn-consistente, tal que $x \in Cn(A'')$, i.e., $x \in Cn_{\mathbb{P}}(A)$. □

Proposição 1.4.3 *$\mathbb{P}$ força monotonicidade, i.é., se $A \subseteq B$, então $Cn_{\mathbb{P}}(A) \subseteq Cn_{\mathbb{P}}(B)$.*

Prova. Considere $A \subseteq B$ e $x \in Cn_{\mathbb{P}}(A)$. Assim, existe $A' \subseteq A$, Cn-consistente, com $x \in Cn(A)$. Mas A' também é um subconjunto de B, Cn-consistente, com $x \in Cn(A)$. Portanto, $x \in Cn_{\mathbb{P}}(B)$, ou seja, $Cn_{\mathbb{P}}$ é monotônico. □

Proposição 1.4.4 *Se (X, Cn) é tarskiana, e existe $u \in X$, tal que $\{u\}$ é Cn-inconsistente, então em $(X, Cn_{\mathbb{P}})$ não existem conjuntos $Cn_{\mathbb{P}}$-inconsistentes.*

Prova. Considere a hipótese e suponha, por absurdo, $A \subseteq X$, tal que $Cn_{\mathbb{P}}(A) = X$. Então, $u \in Cn_{\mathbb{P}}(A)$. Logo, existe $A' \subseteq A$, Cn-consistente, tal que $u \in Cn(A')$. Portanto, $\{u\} \subseteq Cn(A')$, e temos que $X = Cn(\{u\}) \subseteq Cn(Cn(A')) = Cn(A')$, o que contraria nossa hipótese. □

Corolario 1.4.1 *Nas condições da proposição anterior, temos que*

$$\mathbb{P}(\mathbb{P}(X, Cn)) = \mathbb{P}(X, Cn) = (X, Cn_{\mathbb{P}})$$

i.e., o funtor age de modo idempotente em estruturas de consequências tarskianas.

Prova. Pela proposição 1.4.4, todo subconjunto A de X é $Cn_{\mathbb{P}}$-consistente. Portanto, pela proposição 1.4.1(ii), $Cn_{\mathbb{P}}(Cn_{\mathbb{P}}(A)) = Cn_{\mathbb{P}}(A)$. □

Por fim, é possível provar, para Cn particulares, que $\mathbb{P}$ não preserva inclusão, nem idempotência[7].

1.5 Paraconsistentização via Teoria de Categorias

Nesta seção, iremos provar que o funtor, de fato, transforma uma lógica explosiva em uma lógica paraconsistente. Para tal, introduziremos algumas

[7]Cf. de SOUZA, COSTA-LEITE & DIAS (2016), para a paraconsistentização da lógica clássica, bem como o estudo das propriedades preservadas por esta operação. Ademais, na seção 2.3 desta tese, investigaremos a paraconsistentização de L_n.

definições preliminares. No que se segue, pressupomos que o domínio X das estruturas de consequência contém um **operador de negação**[8], denotado por $\neg$. Assim, se $x \in X$, então $\neg x \in X$.

Definição 1.5.1 *Seja (X, Cn) uma estrutura de consequência.*

i) (X, Cn) satisfaz **ex falso quodlibet** *(ou* **explosão***) se e somente se, para todo $A \subseteq X$, se existe um $x \in X$, tal que $x, \neg x \in Cn(A)$, então $Cn(A) = X$ (i.e., A é Cn-inconsistente). Caso contrário, (X, Cn) é dito* **paraconsistente**.

ii) (X, Cn) satisfaz **consistência conjunta** *se e somente se existe $x \in X$, tal que $\{x\}, \{\neg x\}$ são ambos Cn-consistentes, e $\{x, \neg x\}$ é Cn-inconsistente.*

iii) (X, Cn) satisfaz **propriedade conjuntiva** *se e somente se para todo $x, y \in X$, existe $z \in X$, tal que $Cn(\{x, y\}) = Cn(\{z\})$.*

Todo o trabalho que fizemos até aqui foi para estabelecer o arcabouço conceitual no qual podemos provar a paraconsistentização de lógicas usando teoria de categorias. Sendo assim, o teorema abaixo constitui um dos principais resultados desta tese, a saber:

Teorema 1.5.1 *Se (X, Cn) é tarskiano, satisfaz explosão, consistência conjunta e propriedade conjuntiva, então $(X, Cn_{\mathbb{P}})$ é paraconsistente.*

Prova. Como (X, Cn) satisfaz consistência conjunta, existe $a \in X$, tal que $\{a\}, \{\neg a\}$ são ambos Cn-consistentes. Seja $A = \{a, \neg a\}$. Assim, $Cn(A) = X$. Por inclusão, $A \subseteq Cn(A)$ e, por consistência conjunta, $A \subseteq Cn_{\mathbb{P}}(A)$. Como (X, Cn) satisfaz a propriedade conjuntiva, existe $c \in X, Cn(\{c\}) = Cn(A) = X$. Mostraremos que $c \notin Cn_{\mathbb{P}}(A)$, i.e., $(X, Cn_{\mathbb{P}})$ é paraconsistente. O conjunto A tem três subconjuntos Cn-Consistentes, a saber: $\{a\}$, $\{\neg a\}$ e

[8]Não entraremos no debate acerca da natureza da negação. Simplesmente pressupomos que a estrutura de consequência tem uma negação, independentemente do seu comportamento.

$\emptyset$[9]. Temos que mostrar que c não pertence ao operador Cn aplicado a estes conjuntos. Se $c \in Cn(\{a\})$, então $\{c\} \subseteq Cn(\{a\})$. Por monotonicidade, $Cn(\{c\}) \subseteq Cn(Cn(\{a\}))$. Por idempotência e inclusão, $X \subseteq Cn(\{c\}) \subseteq Cn(\{a\})$, i.e., $Cn(\{a\}) = X$, o que está em contradição com a hipótese inicial. Por um argumento similar, temos que $c \notin Cn(\{\neg a\})$. Por fim, se $c \in Cn(\emptyset)$, então $\{c\} \subseteq Cn(\emptyset)$. Assim, segue-se que $X = Cn(\{c\}) \subseteq Cn(Cn(\emptyset)) = Cn(\emptyset)$, que tambem está em contradição com nossa hipótese. Portanto, $(X, Cn_{\mathbb{P}})$ é paraconsistente. □

Logo, é legítimo chamar o funtor $\mathbb{P}$ de funtor de paraconsistentização pois, aplicado a uma estrutura de consequência explosiva satisfazendo as condições do teorema anterior, ele obtém sua contraparte paraconsistente.

1.6 Paraconsistentização via Teoria da Prova e de Modelos

Mostraremos, nesta seção, como paraconsistentizar uma lógica no âmbito da teoria da prova. Como lidaremos com diferentes sistemas formais, precisamos de um arcabouço conceitual comum que permita afirmar que todos esses sistemas são, de fato, lógicas. Em seguida, apresentaremos a contraparte semântica desta tranformação e provaremos, nas condições que serão explicitadas a seguir, a correção e completude das lógicas paraconsistentes resultantes destas ações, com respeito a certa estrutura valorativa[10].

1.6.1 Sistemas Formais

Sintaticamente, escolhemos estudar lógicas apresentadas como sistemas axiomáticos[11]. Comecemos com algumas definições gerais sobre tais sistemas.

[9] $\emptyset$ é Cn-consistente, pois $\emptyset \subseteq \{a\}$ e, por monotonicidade, $Cn(\emptyset) \subseteq Cn(\{a\}) \neq X$.

[10] Os resultados desta, e das duas próximas seções, serão publicados em de SOUZA, COSTA-LEITE & DIAS (no prelo).

[11] A princípio, não há nada que impeça o desenvolvimento dos resultados desta e das seções posteriores deste capítulo usando outra apresentação, tal como dedução natural ou

Definição 1.6.1 *Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Uma* **regra de inferência** *R* **de grau** *n* **sobre** *X é uma relação $R \subseteq \wp^n(X) \times X$. Se $(\{x_1, \ldots, x_n\}, x) \in R$, dizemos que x é* **uma consequência imediata de** *$\{x_1, \ldots, x_n\}$* **pela aplicação da regra** *R.*

Seja $\mathbb{R}$ uma família de regras de inferência sobre X. Dizemos que x é uma **consequência imediata** *de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ se x é uma consequência imediata de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ pela aplicação de uma regra de inferência $R \in \mathbb{R}$.*

Definição 1.6.2 *Um* **sistema formal** *S é uma estrutura $S = \langle X, \mathbb{A}, \mathbb{R} \rangle$ tal que:*

(i) X é um conjunto não-vazio, cujos elementos são chamados de **fórmulas** *de S;*

(ii) $\mathbb{A} \subseteq X$. Os elementos de $\mathbb{A}$ são chamados de **axiomas** *de S;*

(iii) $\mathbb{R} \subseteq \wp^n(X) \times X$, finito, cujos elementos são denominados **regras de inferência** *de S.*

A paraconsistentização via teoria da prova se dá a partir de uma modificação na definição usual de dedução. Para tanto, relembraremos tal definição.

Definição 1.6.3 *Sejam S um sistema formal e $\Gamma \subset X$. Uma* **dedução** *em S a partir de Γ é uma sequência finita de elementos de X, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tal que, para cada $1 \leq i \leq n$, ao menos uma das condições seguintes é satisfeita:*

i) $\alpha_i \in \Gamma$;

ii) $\alpha_i \in \mathbb{A}$;

iii) α_i é consequência imediata de fórmulas anteriores via aplicação de alguma regra de inferência R.

Dizemos que uma fórmula α é **dedutível em** *S (ou* **S-dedutível***) a partir de Γ quando existe uma dedução $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ em S a partir de Γ, tal que $\alpha = \alpha_n$. Denotamos isto por $A \vdash_S \alpha$.*

---

cálculo de sequentes.

Seja $\Gamma \subseteq X$, denotamos por $Cn_S(\Gamma)$ o conjunto de todos os elementos de X que são dedutíveis em S, i.e.

$$Cn_S(\Gamma) := \{\alpha \in X : \Gamma \vdash_S \alpha\}.$$

De forma análoga ao que fizemos na seção 1.1, dizemos que $\Gamma \subseteq X$ é S-**consistente** se e somente se $Cn_S(\Gamma) \neq X$. Caso contrário, Γ é dito S-**inconsistente**.

É simples verificar que sistemas formais definidos deste modo satisfazem as seguintes propriedades:

(I) Se $\alpha \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash_S \alpha$;

(II) Se $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Gamma \vdash_S \alpha$, então $\Delta \vdash_S \alpha$;

(III) Se $\Delta \vdash_S \alpha$ e, para todo $\delta \in \Delta$, $\Gamma \vdash_S \delta$, então $\Gamma \vdash_S \alpha$;

(IV) $\Gamma \subseteq Cn_S(\Gamma)$;

(V) Se $\Gamma \subseteq \Delta$, então $Cn_S(\Gamma) \subseteq Cn_S(\Delta)$;

(VI) $Cn_S(Cn_S(\Gamma)) = Cn_S(\Gamma)$;

(VII) Se Γ é S-consistente e $\Delta \subseteq \Gamma$, então Δ é S-consistente;

(VIII) Se $\Gamma \vdash_S \alpha$, então existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$ finito, tal que $\Gamma' \vdash_S \alpha$.

1.6.2 Estruturas Valorativas

Para provar a correção e completude das lógicas obtidas a partir da paraconsistentização sintática e semântica, precisamos definir uma estrutura valorativa para os sistemas formais iniciais.

Definição 1.6.4 *Uma* **estrutura valorativa** *é um par $(X, \mathcal{V})$, tal que $\mathcal{V}$ é uma família de funções da forma:*

$$v : X \to \{0, 1\},$$

que não contém a função constante $\mathbf{1} : X \to \{0,1\}$*, tal que* $\mathbf{1}(x) = 1$*, para todo* $x \in X$*. Elementos de* $\mathcal{V}$ *são chamados de* **valorações** *para* X*.*[12]

Definição 1.6.5 *Considere* $\Gamma \subseteq X$*. O conjunto de* $\mathcal{V}$**-modelos** *de* Γ*, denotado por* $Mod_{\mathcal{V}}(\Gamma)$*, é definido como:*

$$Mod_{\mathcal{V}}(\Gamma) := \{v \in \mathcal{V} : v(\alpha) = 1 \text{ para todo } \alpha \in \Gamma\}.$$

De modo análogo, definimos os $\mathcal{V}$*-modelos de* $\alpha \in X$ *como:*

$$Mod_{\mathcal{V}}(\alpha) := Mod_{\mathcal{V}}(\{\alpha\}) = \{v \in \mathcal{V} : v(\alpha) = 1\}.$$

Note que $Mod_{\mathcal{V}}(\emptyset) = \mathcal{V}$ e $Mod_{\mathcal{V}}(X) = \emptyset$. Ademais, se $\Gamma \neq \emptyset$, então $Mod_{\mathcal{V}}(\Gamma) = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} Mod_{\mathcal{V}}(\alpha)$. Também vale que, se $\Gamma \subseteq \Delta$, then $Mod_{\mathcal{V}}(\Delta) \subseteq Mod_{\mathcal{V}}(\Gamma)$.

Definição 1.6.6 $\Gamma \subseteq X$ *é dito* $\mathcal{V}$**-satisfatível** *se e somente se* $Mod_{\mathcal{V}}(\Gamma) \neq \emptyset$*, i.e., existe um* $v \in \mathcal{V}$*, tal que* $v(a) = 1$*, para todo* $\alpha \in \Gamma$*. Caso contrário,* Γ *é dito* $\mathcal{V}$**-insatisfatível**.

Definição 1.6.7 *Sejam* $\Gamma \subseteq X$*,* $\alpha \in X$ *e* $(X, \mathcal{V})$ *uma estrutura valorativa. Dizemos que* α *é uma* $\mathcal{V}$**-consequência** *se e somente se todo* $\mathcal{V}$*-modelo de* Γ *é* $\mathcal{V}$*-modelo de* α*. Denotamos tal fato por* $\Gamma \models_{\mathcal{V}} \alpha$*. Assim, temos que:*

$$\Gamma \models_{\mathcal{V}} \alpha \Leftrightarrow Mod_{\mathcal{V}}(\Gamma) \subseteq Mod_{\mathcal{V}}(\alpha).$$

Definição 1.6.8 *Podemos definir, como fizemos para sistemas formais, o conjunto das* $\mathcal{V}$*-consequências de* $\Gamma \subseteq X$ *como:*

$$Cn_{\mathcal{V}}(\Gamma) := \{\alpha \in X : \Gamma \models_{\mathcal{V}} \alpha\}.$$

[12]Quando $v(x) = 1$, dizemos que x é **verdadeiro na valoração** v. Quando este não é o caso, dizemos que x é **falso na valoração** v. Desconsideramos a função constante pois, para os nossos propósitos, não faz sentido considerar uma valoração que atribui verdadeiro a todas as fórmulas.

Estruturas valorativas satisfazem propriedades análogas àquelas dos sistemas formais:

(I) Se $\alpha \in \Gamma$, então $\Gamma \models_{\mathcal{V}} \alpha$;

(II) Se $\Gamma \subseteq \Delta$ and $\Gamma \models_{\mathcal{V}} \alpha$, then $\Delta \models_{\mathcal{V}} \alpha$;

(III) Se $\Delta \models_{\mathcal{V}} \alpha$ e, para todo $\delta \in \Delta$, $\Gamma \models_{\mathcal{V}} \delta$, então $\Gamma \models_{\mathcal{V}} \alpha$;

(IV) $\Gamma \subseteq Cn_{\mathcal{V}}(\Gamma)$;

(V) Se $\Gamma \subseteq \Delta$, então $Cn_{\mathcal{V}}(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathcal{V}}(\Delta)$;

(VI) $Cn_{\mathcal{V}}(Cn_{\mathcal{V}}(\Gamma)) = Cn_{\mathcal{V}}(\Gamma)$;

(VII) Se Γ é $\mathcal{V}$-satisfatível e $\Delta \subseteq \Gamma$, então Δ é $\mathcal{V}$-satisfatível.

Definição 1.6.9 *Seja $S = (X, \mathbb{A}, \mathbb{R})$ um sistema formal e considere a estrutura valorativa $(X, \mathcal{V})$. Note que o conjunto subjacente à estrutura valorativa é o mesmo conjunto X de S.*

Dizemos que a estrutura valorativa $(X, \mathcal{V})$ é **correta** *com respeito ao sistema formal S se e somente se, para todo $\Gamma \subseteq X$ e $\alpha \in X$ temos que: se $\Gamma \vdash_S \alpha$, então $\Gamma \models_{\mathcal{V}} \alpha$. Neste caso, $Cn_S(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathcal{V}}(\Gamma)$, para todo $\Gamma \subseteq X$.*

Dizemos que a estrutura valorativa $(X, \mathcal{V})$ é **completa** *com respeito ao sistema formal S se e somente se, para todo $\Gamma \subseteq X$ e $\alpha \in X$, temos que: se $\Gamma \models_{\mathcal{V}} \alpha$, então $\Gamma \vdash_S \alpha$. Logo, $Cn_{\mathcal{V}}(\Gamma) \subseteq Cn_S(\Gamma)$, para todo$A \subseteq X$.*

Dizemos que a estrutura valorativa $(X, \mathcal{V})$ é **adequada** *com respeito ao sistema formal S se e somente se ela é correta e completa com respeito a S, i.e., para todo $\Gamma \subseteq X$ e $\alpha \in X$, temos que: $\Gamma \vdash_S \alpha$ se e somente se $\Gamma \models_{\mathcal{V}} \alpha$. Neste caso, $Cn_S(\Gamma) = Cn_{\mathcal{V}}(\Gamma)$, para todo $\Gamma \subseteq X$.*

Faremos uso, sem provar, do fato de que, para todo sistema formal S, existe uma estrutura valorativa $(X, \mathcal{V})$ que é adequada para S[13].

[13]Dada a chamada *Tese de Suszko*, que afirma que toda lógica multivalorada pode ser convertida em uma lógica bivalente, não falta generalidade quando definimos valorações como bivalorações, i.e., funções com codomínio $\{0, 1\}$. Para mais sobre a tese de Suszko, cf. TSUJI (1988).

Lema 1.6.1 *Sejam $S = (X, \mathbb{A}, \mathbb{R})$ um sistema formal e $(X, \mathcal{V})$ uma estrutura valorativa. Então:*

i) Se $(X, \mathcal{V})$ é completa com respeito a S, então $\Gamma \subseteq X$ é S-consistente implica que Γ é $\mathcal{V}$-satisfatível;

ii) Se $(X, \mathcal{V})$ é correta com respeito a S, então $\Gamma \subseteq X$ é $\mathcal{V}$-satisfatível implica que Γ é S-consistente.

Prova.

i) Considere $\Gamma \subseteq X$, S-consistente e assuma, por redução ao absurdo, que Γ é $\mathcal{V}$-insatisfatível, i.e., $Mod_{\mathcal{V}}(\Gamma) = \emptyset$. Então, para todo $\alpha \in X$, vale que $\Gamma \models_{\mathcal{V}} \alpha$. Da completude de $(X, \mathcal{V})$, segue-se que $\Gamma \vdash_S \alpha$, para todo $\alpha \in \Gamma$, i.e., Γ é S-inconsistente, o que contraria nossa hipótese inicial.

ii) Considere $\Gamma \subseteq X$, $\mathcal{V}$-satisfatível e assuma, por redução ao absurdo, que Γ é S-inconsistente, i.e, $Cn_S(\Gamma) = X$. Da corretude, temos que $Cn_{\mathcal{V}}(\Gamma) = X$. Logo, $Mod_{\mathcal{V}}(\Gamma) \subseteq Mod_{\mathcal{V}}(\alpha)$, para todo $\alpha \in X$. Como Γ é $\mathcal{V}$-satisfatível, seja $v \in Mod_{\mathcal{V}}(\Gamma)$. Então, $v \in Mod_{\mathcal{V}}(\alpha)$, para todo $\alpha \in X$, i. e., $v(\alpha) = 1$, para todo $\alpha \in X$. Ou seja, v é a função constante $\mathbf{1}$, o que contradiz a definição de $\mathcal{V}$. □

1.6.3 Paradedução

Nesta seção, apresentaremos uma modificação na noção de dedução definida acima, que nos permitirá paraconsistentizar sintaticamente uma dada lógica. Precisamos, apenas, de algumas consideracões iniciais.

Seja X um conjunto e considere uma sequência finita de pares

$$\sigma = (\Gamma_1, \alpha_1), ..., (\Gamma_n, \alpha_n)$$

tal que $\Gamma_i \subseteq X$ e $\alpha_i \in X$, para $1 \leq i \leq n$. Introduzimos, baseado em σ, duas novas sequências dadas por:

$$\Pi_1\sigma := \Gamma_1, ..., \Gamma_n$$

$$\Pi_2\sigma := \alpha_1, ..., \alpha_n$$

que são sequências compostas, respectivamente, pelos primeiros e segundos elementos da sequência σ original.

Definição 1.6.10 *Sejam $S = (X, \mathbb{A}, \mathbb{R})$ um sistema formal e $\Gamma \subseteq X$. Uma* **paradedução** *em S a partir de Γ é uma sequência finita de pares $\sigma = (\Gamma_1, \alpha_1), ..., (\Gamma_n, \alpha_n)$, para $1 \leq i \leq n$, e $\Gamma_i \subseteq X$, $\alpha_i \in X$, tal que:*

1. *Γ_i é S-consistente, para todo $1 \leq i \leq n$.*
2. *Para cada $1 \leq i \leq n$, temos:*
   (a) *$\alpha_i \in \Gamma$ e $\Gamma_i = \{\alpha_i\}$ (e, portanto, $\{\alpha_i\}$ é S-consistente); ou*
   (b) *$\alpha_i \in \mathbb{A}$ e $\Gamma_i = \emptyset$; ou*
   (c) *α_i é uma consequência imediata de um conjunto de fórmulas anteriores $\{a_{i_1}, ..., a_{i_k}\}$ na sequência $\Pi_2\sigma$ e $\Gamma_i = \bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_{i_j}$ (e, também, Γ_i é S-consistente).*

Lema 1.6.2 *Seja $(\Gamma_1, \alpha_1), ..., (\Gamma_n, \alpha_n)$ uma paradedução em S a partir de $\Gamma \subseteq X$. Então, para $1 \leq i \leq n$, Γ_i é S-consistente, $\Gamma_i \subseteq \Gamma$ e $\Gamma_i \vdash_S \alpha_i$.*

Prova. Por definição, cada Γ_i, para $1 \leq i \leq n$, é S-consistente. Ademais, pela definição de paradedução, ou $\Gamma_i = \emptyset$, ou $\Gamma_i = \{\alpha_i\}$, ou Γ_i é a união dos Γ_k anteriores. Por indução, temos que $\Gamma_i \subseteq \Gamma$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Considere uma paradedução dada por:

$$(\Gamma_1, \alpha_1), ..., (\Gamma_n, \alpha_n).$$

Para $i = 1$, temos dois casos:

1. $\alpha_1 \in \Gamma$. Neste caso, $\Gamma_1 = \{\alpha_1\}$ e temos, pela primeira propriedade dos sistemas formais, que $\Gamma_1 \vdash_S \alpha_1$.

2. $\alpha_1 \in \mathbb{A}$. Aqui, $\Gamma_1 = \emptyset$ e, pela definição de dedução em S, segue-se que $\Gamma_1 \vdash_S \alpha_1$.

Suponha que $\Gamma_i \vdash_S \alpha_i$, para $1 \leq i \leq k-1$, e considere (Γ_k, α_k). Temos, então, três casos: i. $\alpha_k \in \Gamma$; ii. $\alpha_k \in \mathbb{A}$ ou iii. α_k é obtido por alguma regra de inferência. Nos dois primeiros casos, um argumento análogo ao de cima mostra que $\Gamma_k \vdash_S \alpha_k$. Para o caso (iii), suponha que α_k é uma consequência imediata de $\{\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_l}\}$ pela aplicação da regra $R \in \mathbb{R}$. Por hipótese de indução, temos que:

$$\Gamma_{i_1} \vdash_S \alpha_{i_1}$$
$$\vdots$$
$$\Gamma_{i_l} \vdash_S \alpha_{i_l}$$

Além diso, $\Gamma_k = \bigcup_{j=1}^{l} \Gamma_{i_j}$ é S-consistente. Agora, pelas propriedades (II) e (III) da dedução em S, segue-se que a sequência $\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_l}, \alpha_k$ é uma dedução em S de α_k a partir de $\Gamma_k = \bigcup_{j=1}^{l} \Gamma_{i_j}$. Ou seja, $\Gamma_k \vdash_S \alpha_k$. □

Definição 1.6.11 *Sejam $S = (X, \mathbb{A}, \mathbb{R})$ um sistema formal, $\Gamma \subseteq X$ e $\alpha \in X$. Dizemos que α é S-***paradedutível** *a partir de Γ se existe uma paradedução em S, $(\Gamma_1, \alpha_1), ..., (\Gamma_n, \alpha_n)$, a partir de Γ, tal que $\alpha = \alpha_n$. Denotamos tal fato por $\Gamma \vdash_S^P \alpha$.*

Vejamos um exemplo de paradedução. Considere o seguinte conjunto:

$$\Gamma = \{p \wedge q, p \to r, q \to \neg r\}$$

Se tomarmos a lógica clássica $\mathbb{C}$, é simples ver que obteríamos a seguinte dedução: $\Gamma \vdash_{\mathbb{C}} r \wedge \neg r$. Por outro lado, uma paradedução em $\mathbb{C}$ consideraria somente os subconjuntos $\mathbb{C}$-consistentes de Γ, a saber:

$$\{p \wedge q\}; \{p \to r\}; \{q \to \neg r\}; \{p \wedge q, p \to r\}; \{p \wedge q, q \to \neg r\};$$
$$\{p \to r, q \to \neg r\} \text{ e } \emptyset.$$

Assim, temos uma paradedução que permite inferir r a partir de $\{p \wedge q, p \to r\}$, e outra paradedução que infere $\neg r$ a partir de $\{p \wedge q, q \to \neg r\}$.

Mas não há paradedução que permita inferir $r \wedge \neg r$, visto que este resultado não sai de nenhum dos conjuntos consistentes acima.

O próximo resultado estabelece uma relação entre a noção de funtor de paraconsistentização apresentada na seção 1.3 e a noção de paradedução.

Proposição 1.6.1 *Sejam $S = (X, \mathbb{A}, \mathbb{R})$ um sistema formal, tal que $\Gamma \subseteq X$ e $\alpha \in X$. $\Gamma \vdash_S^P \alpha$ se e somente se existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$, S-consistente, tal que $\Gamma' \vdash_S \alpha$.*

Prova. ($\Rightarrow$) Suponha que $\Gamma \vdash_S^P \alpha$. Então, existe uma paradedução em S, dada por $(\Gamma_1, \alpha_1), ..., (\Gamma_n, \alpha_n)$, a partir de Γ, tal que $\alpha = \alpha_n$. Pelo lema 1.6.2, temos que Γ_i é S-consistente, $\Gamma_i \subseteq \Gamma$ e $\Gamma_i \vdash_S \alpha_i$, para todo $1 \leq i \leq n$. Portanto, existe $\Gamma_n \subseteq \Gamma$, S-consistente, tal que $\Gamma_n \vdash_S \alpha$.

($\Leftarrow$) Suponha que existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$, S-consistente, tal que $\Gamma' \vdash_S \alpha$. Considere, então uma dedução em S de α a partir de Γ', dada por:

$$\alpha_1, ..., \alpha_n (= \alpha).$$

Dado que todos os subconjuntos de Γ são S-consistentes (pela propriedade VII), é fácil converter a dedução acima em uma paradedução em S:

$$(\Gamma_1, \alpha_1), ..., (\Gamma_n, \alpha_n),$$

tal que

$$\Gamma_i = \begin{cases} \{\alpha_i\} & \text{Se } \alpha_i \in \Gamma', \\ \emptyset & \text{Se } \alpha_i \in \mathbb{A}, \\ \bigcup_k \Gamma_k & \text{Se } \alpha_i \text{ é uma consequência de fórmulas anteriores} \\ & \Gamma'_k s \text{ associadas.} \end{cases}$$

Portanto, como $\Gamma' \subseteq \Gamma$, segue-se que $\Gamma \vdash_S^P \alpha$. □

Com a noção de paraconsistentização sintática devidamente formulada, passamos à construção de uma definição semântica análoga à definição de

paradedução. Para tanto, considere uma estrutura valorativa $(X, \mathcal{V})$. Sejam $\Gamma \subseteq X$ e $\alpha \in X$. Por definição, temos que:

$$\Gamma \models_{\mathcal{V}} \alpha \Leftrightarrow Mod_{\mathcal{V}}(\Gamma) \subseteq Mod_{\mathcal{V}}(\alpha).$$

Definição 1.6.12 *Chamamos de* **relação de $\mathcal{V}$-paraconsequência** *entre* Γ *e* α *o seguinte:*

$$\Gamma \models^{P}_{\mathcal{V}} \alpha \Leftrightarrow \text{ existe } \Gamma' \subseteq \Gamma, \ \mathcal{V}\text{-satisfatível, tal que } \Gamma' \models_{\mathcal{V}} \alpha.$$

1.7 Correção e Completude

Com este aparato, podemos provar a correção e completude da lógica obtida através das paraconsistentizações sintática e semântica[14]. Esse resultado tem uma dupla importância. Por um lado, garante que ambos os métodos de paraconsistentização produzem a mesma lógica paraconsistente e, por outro, tem implicações filosóficas que serão discutidas no próximo capítulo.

Teorema 1.7.1 *Sejam $S = (X, \mathbb{A}, \mathbb{R})$ um sistema formal e $(X, \mathcal{V})$ uma estrutura valorativa adequada para S. Então, para todo $\Gamma \subseteq X$ e $\alpha \in X$, temos que:*

i) $\Gamma \models^{P}_{\mathcal{V}} \alpha$ *implica que* $\Gamma \vdash^{P}_{S} \alpha$*;*

ii) $\Gamma \vdash^{P}_{S} \alpha$ *implica que* $\Gamma \models^{P}_{\mathcal{V}} \alpha$*.*

Prova.

i) Assuma que $\Gamma \models^{P}_{\mathcal{V}} \alpha$. Então, existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\mathcal{V}$-satisfatível, tal que $\Gamma' \models_{\mathcal{V}} \alpha$. Pela completude de $(X, \mathcal{V})$, temos que $\Gamma' \vdash_{S} \alpha$ e, da corretude de $(X, \mathcal{V})$, e do lema 1.6.1 (ii), segue-se que Γ' é S-consistente. Portanto, pela proposição 1.6.1, $\Gamma \vdash^{P}_{S} \alpha$.

[14]Provaremos apenas a versão 'forte' desses resultados. A versão 'fraca' de correção e completude, isto é, $\emptyset \vdash^{P}_{\mathbb{S}} \alpha \Leftrightarrow \emptyset \models^{P}_{\mathbb{S}} \alpha$, é consequência direta das definições de paraconsistentização semântica e sintática, e do fato de que estas transformações preservam teoremas e tautologias.

ii) Suponha que $\Gamma \vdash_S^P \alpha$. Pela proposição 1.6.1, existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$, S-consistente, tal que $\Gamma' \vdash_S \alpha$. Pela corretude de $(X, \mathcal{V})$, temos que $\Gamma' \models_{\mathcal{V}} \alpha$ e, da completude de $(X, \mathcal{V})$, lema 1.6.1 (i), segue-se que Γ' é $\mathcal{V}$-satisfatível. Portanto, $\Gamma \models_{\mathcal{V}}^P \alpha$. □

1.8 Paraconsistentização Semântica e Sintática

Na seção 1.5, estabelecemos as condições suficientes nas quais o funtor de paraconsistentização transforma uma estrutura de consequência explosiva em uma paraconsistente. O resultado se situava em um nível de abstração independente das formulações semânticas e sintáticas das estruturas de consequência envolvidas[15]. Nesta seção, provaremos um resultado análogo, mostrando que as noções de paradedução e paraconsequência também paraconsistentizam sistemas formais e estruturas valorativas, respectivamente.

Começemos pela paradedução. Antes de provar o resultado desejado, precisamos reapresentar as condições suficientes da seção 1.5, agora usando o arcabouço conceitual dos sistemas formais.

Sejam $S = \{X, \mathbb{A}, \mathbb{R}\}$ um sistema axiomático, $\vdash_S$ sua relação de consequência e, para todo $\Gamma \subseteq X$, $Cn_S(\Gamma)$ é o conjunto de todos os elementos de X que são dedutíveis em S. Assim, Cn_S tem as seguintes propriedades:

i) Inclusão: $\Gamma \subseteq Cn_S(\Gamma)$;

ii) Idempotência: $Cn_S(Cn_S(\Gamma)) \subseteq Cn_S(\Gamma)$;

iii) Monotonicidade: $Cn_S\Gamma \subseteq Cn_S(\Gamma \cup \Delta)$.

Definição 1.8.1 *Suponha que um sistema axiomático $S = \{X, \mathbb{A}, \mathbb{R}\}$ tenha um operador de negação $\neg$ tal que, se $\alpha \in X$, então $\neg\alpha \in X$.*

[15] Só pressupúnhamos que as estruturas tinham um operador de negação.

i) $\vdash_S$ *é dita* **explosiva** *se e somente se, para todo* $\Gamma \subseteq X$*, se existe* α*, tal que* $\Gamma \vdash_S \alpha$ *e* $\Gamma \vdash_S \neg\alpha$*, então* $\Gamma \vdash_S \beta$*, para todo* $\beta \in X$*. Caso contrário,* $\vdash_S$ *é chamada de* **paraconsistente**.

ii) S *satisfaz* **consistência conjunta** *se e somente se existe* $\alpha \in X$*, tal que* $\{\alpha\}, \{\neg\alpha\}$ *são ambas* S*-consistentes, mas* $\{\alpha, \neg\alpha\}$ *é* S*-inconsistente.*

iii) S *satisfaz* **propriedade conjuntiva** *se e somente se para todo* $\alpha, \beta \in X$*, existe* $\delta \in X$*, tal que* $\{\alpha, \beta\} \vdash_S \gamma$ *se e somente se* $\delta \vdash_S \gamma$*, para todo* $\gamma \in X$*. Isto é,* $Cn_S(\alpha, \beta) = Cn_S(\{\delta\})$.

Podemos, enfim, enunciar o resultado análogo ao teorema 1.5.1.

Teorema 1.8.1 *Se* $S = \{X, \mathbb{A}, \mathbb{R}\}$ *é um sistema axiomático que satisfaz consistência conjunta e propriedade conjuntiva, e* $\vdash_S$ *é explosiva, então* $\vdash_S^P$ *é paraconsistente.*

Prova. Como $S = \{X, \mathbb{A}, \mathbb{R}\}$ satisfaz consistência conjunta, existe $\alpha \in X$, tal que $\{\alpha\}$ e $\{\neg\alpha\}$ são ambos S-consistentes, mas $Cn_S(\{\alpha, \neg\alpha\}) = X$. Considere $\Gamma = \{\alpha, \neg\alpha\}$. Por inclusão, $\Gamma \subseteq Cn_S(\Gamma)$. Então, por consistência conjunta, $\Gamma \subseteq Cn_S^P(\Gamma) := \{\alpha \in X : \Gamma \vdash_S^P \alpha\}$. Logo, $\Gamma \vdash_S^P \alpha$ e $\Gamma \vdash_S^P \neg\alpha$. Portanto, como S satisfaz propriedade conjuntiva, existe $\beta \in X$, tal que $Cn_S\beta = Cn_S(\Gamma) = X$. Temos que provar que $\Gamma \nvdash_S^P \beta$, i.e., que $\vdash_S^P$ é paraconsistente. Note que Γ tem três subconjuntos S-consistentes: $\{\alpha\}$, $\{\neg\alpha\}$ e $\emptyset$. $\emptyset$ é S-consistente pois $\emptyset \subseteq \{\alpha\}$ e, por monotonicidade, $Cn_S(\emptyset) \subseteq Cn_S(\{\alpha\}) \neq X$. Precisamos mostrar que i) $\beta \notin Cn_S(\emptyset)$, ii) $\beta \notin Cn_S(\{\alpha\})$, e iii) $\beta \notin Cn_S(\{\neg\alpha\})$. O argumento é o mesmo para os três casos. Seja $\Delta \in \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\neg\alpha\}\}$. Se $\beta \in Cn_S(\Delta)$, então $\{\beta\} \subseteq Cn_S(\Delta)$. Por monotonicidade, $Cn_S(\beta) \subseteq Cn_S(Cn_S(\Delta))$ e, por inclusão e idempotência, $Cn_S(Cn_S(\Delta)) = Cn_S(\Delta)$. Portanto, como $Cn_S(\Delta) \neq X$, temos que $X = Cn_S\{\beta\} \subseteq Cn_S(\Delta) \neq X$, o que é uma contradição. Logo, $\vdash_S^P$ é paraconsistente. □

Capítulo Dois

Paraconsistentização diz-se de várias formas

> Whatever the fate of the particulars, one thing is certain. There is no going back to the view that logic is [standard] first-order logic.
>
> *- Barwise, Model-Theoretic Logics*

No capítulo anterior, estudamos duas formas equivalentes de paraconsistentizar uma lógica. Agora, pretendemos explorar possíveis variações destes métodos. Recordemos que a relação de consequência sintática da paraconsistentização foi definida da seguinte forma:

$\Gamma \vdash_S^P \alpha \Leftrightarrow$ existe $\Gamma' \subseteq T$, S-consistente, tal que $\Gamma' \vdash_S \alpha$.

Notem que não há nada de essencial na escolha da propriedade de consistência nesta construção. É possível obter outras formas de paraconsistentização alterando a restrição da relação de consequência. Escolhemos consistência como critério mas, dependendo do objetivo proposto, outros caminhos podem ser desenvolvidos. Obviamente, as propriedades formais das lógicas resultantes variam bastante. Nao obstante, estamos interessados em alternativas que mantenham o caráter paraconsistente da lógica resultante.

É importante ressaltar que, de um ponto de vista puramente formal, não há critérios a priori acerca da adequação de uma forma específica de paraconsistentização. Sua adequação deve ser avaliada de acordo com sua eficácia para lidar com o problema para o qual ela foi proposto.

Para deixar este ponto claro, note que é possível acrescentar, na noção de consequência apresentada acima, propriedades a serem respeitadas. Em particular, podemos forçar a preservação de inclusão. Assim, a definição modificada de paraconsistentização sintática ficaria:

Definição 2.0.2 $\Gamma \vdash_S^{P*} \alpha \Leftrightarrow$ *existe* $\Gamma' \subseteq T$, *S-consistente, tal que* $\Gamma' \vdash_S \alpha$, *ou* $\alpha \in \Gamma$.

Com esta mudança, a lógica resultante desse procedimento é inclusiva[1], i.e., $\alpha \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash_S^{P*} \alpha$. Assim, dada um sistema formal S e $\Gamma = \{\alpha \wedge \neg\alpha\}$, temos que $\Gamma \nvdash_S^{P} \alpha \wedge \neg\alpha$, mas $\Gamma \vdash_S^{P*} \alpha \wedge \neg\alpha$.

Quando S é a lógica clássica, a lógica resultante deste procedimento é chamada de **lógica paraclássica com inclusão**[2]. Como dissemos, não há nenhum critério a priori para escolher preservar ou não a inclusão. O melhor critério que temos é a aplicabilidade. Portanto, trata-se de uma avaliação caso a caso. Por exemplo, a lógica paraclássica com inclusão pode ser utilizada para formalizar a teoria atômica de Bohr[3].

O método de paraconsistentização desenvolvido nas seções anteriores consiste em restringir o aparato inferencial a subconjuntos consistentes dos conjuntos originais. Quando o conjunto original também é consistente, e vale monotonicidade, o resultado da paraconsistentização é equivalente ao aparato inferencial da logica inicial. Mas, quando o conjunto original é inconsistente, esse método evita a trivialização. A estratégia, como vimos, é separar os subconjuntos consistentes de um conjunto inconsistente, e limitar as inferências

[1] Mesmo que a lógica original não o seja.

[2] Para uma análise das diferenças entre a lógica paraclássica, e a lógica paraclássica com inclusão, cf. DIAS (2013), capítulo 3.

[3] Cf. de SOUZA (1995), capítulo 3, seção 3.6.

a eles. Raciocinar com subconjuntos consistentes de conjuntos inconsistentes é uma estratégia bem estabelecida. No que se segue, faremos algumas comparações entre nosso trabalho e as principais abordagens que também usam essa estratégia para inferir a partir informações inconsistentes.

2.1 A Abordagem de Rescher e Manor

O artigo de RESCHER & MANOR (1970) consiste no primeiro tratamento extenso sobre como raciocinar com subconjuntos consistentes de conjuntos inconsistentes. A estratégia geral deste trabalho é definir uma relação de consequência não em função de subconjuntos meramente consistentes, mas de maximais consistentes. O artigo apresenta a seguinte definição de subconjunto maximal consistente[4]:

Definição 2.1.1 *Seja* Γ *um conjunto de proposições qualquer . Dizemos que* Γ'*é* **subconjunto maximal consistente** *de* Γ *se* Γ' *satisfaz as seguintes condições:*

i) Γ' *é um subconjunto não-vazio de* Γ*;*

ii) Γ' *é consistente;*

iii) se $\Delta \subseteq \Gamma$ *é consistente e* $\Gamma' \subseteq \Delta$*, então* $\Gamma' = \Delta$*.*

A partir da noção de conjuntos maximais consistentes, os autores desenvolvem duas possíveis relações de consequência:

Definição 2.1.2 *i)* α *é uma* **consequência inevitável** *(I-consequência) de* Γ *se e somente se, para todo subconjunto maximal consistente* Γ' *de* Γ*, temos que* $\Gamma' \vdash \alpha$*.*

ii) α *é uma* **consequência fraca** *(F-consequência) de* Γ *se e somente se, existe um subconjunto maximal consistente* Γ' *de* Γ*, tal que* $\Gamma' \vdash \alpha$*.*

[4]Reformulada, aqui, para manter a uniformidade do tratamento formal e conceitual da tese. Portanto, estritamente falando, trata-se de uma definição equivalente àquela apresentada no artigo.

A primeira definição exige que α seja consequência de todo subconjunto maximal de Γ, ao passo que a segunda exige apenas a existência de um subconjunto maximal Γ', tal que $\Gamma' \vdash_L \alpha$. Os autores consideram ambas as definições insatisfatórias:

> em geral, [não] queremos nos restringir somente às I-consequências de S. Por outro lado, as F-consequências de S são difíceis de serem aceitas visto que elas formam novamente um conjunto inconsistente (RESCHER & MANOR (1970), p. 194.)[5]

O motivo para não aceitar somente as I-consequências é pragmático: em muitos contextos, aceitar somente fórmulas que se seguem de todos os conjuntos maximais consistentes parece ser uma exigência muito forte. Por exemplo, suponha que mil entrevistadores reportaram o conjunto de observações $O_1 = \{p, \neg p \vee q\}$, e um entrevistador declarou o conjunto $O_2 = \{\neg p, \neg p \vee q\}$. O conjunto resultante das observações é $O = \{p, \neg p, \neg p \vee q\}$. É simples ver que q não é consequência de todo subconjunto maximal consistente de O. No entanto, parece muito forte rejeitar q, visto que o conjunto maximal consistente do qual ele não se segue é fruto do relato de um único observador.

Por outro lado, a razão para rejeitar a segunda definição é principalmente epistemológica. Segundo os autores, "dado um conjunto inconsistente de premissas, como $S = \{p, p \rightarrow q, \neg q\}$, sabemos que não podemos racionalmente aceitar todas as suas consequências (e.g., tanto p quanto $\neg p$)[6]". No entanto, no contexto das lógicas paraconsistentes, essa restrição não faz sentido. Afinal, uma das principais contribuições das lógicas paraconsistentes é distinguir inconsistência de trivialidade (ou explosão), nos permitindo aceitar racionalmente todas as consequências de um conjunto inconsistente de premissas. Portanto, Rescher e Manor falham em notar que o ponto central do problema não está em aceitar todas as consequências de um conjunto inconsistente, mas em afirmar que essas consequências correspondem a todas as fórmulas. Dito de outra forma, o problema não está na inconsistência do con-

[5] Todas as traduções das citações em língua estrageira são de nossa autoria.
[6] RESCHER & MANOR (1970), p. 182.

junto, mas na explosão da lógica. Assim, a priori, não há problemas no fato de que as F-consequências possam formar um novo conjunto inconsistente.

Há outras distinções importantes entre esta abordagem e a nossa. Neste artigo, ainda que de forma implícita, a lógica clássica é usada como lógica subjacente ao mecanismo para lidar com inconsistência. Isso significa que a própria noção de consistência está atrelada à lógica clássica e, em particular, ao conceito de negação clássico. Por exemplo, os autores afirmam que, dado um conjunto S de fórmulas, falar que $Cn(S)$ é consistente significa que, se $p \in Cn(S)$, então $\neg p \notin C(S)$. Nosso método de paraconsistentização permite definir consequência sem mencionar a noção de negação e, portanto, de modo independente da linguagem subjacente[7]. Assim, um conjunto pode ser inconsistente em determinada lógica, mas consistente em outra[8]. É exatamente essa independência com respeito à linguagem subjacente que permite a paraconsistentização ser aplicada de modo uniforme a diferentes lógicas.

É interessante notar que, de acordo com o trabalho desenvolvido pelos autores, alguns conjuntos inconsistentes não têm nenhuma F-consequência. Por exemplo, o conjunto $\{p, \neg p\}$ não tem subconjunto maximal consistente. O motivo para isto é que, ao definir a noção de subconjunto maximal consistente, Rescher e Manor exigem que este conjunto seja diferente do vazio. Mas parece estranho afirmar que as tautologias - fórmulas que são consequências do conjunto vazio - da lógica inicial (a lógica clássica, no caso do artigo estudado) não sejam consideradas consequências de todos os conjuntos inconsistentes.

Mesmo com essas diferenças entre as duas abordagens, podemos combinar o arcabouço conceitual do capítulo anterior com a ideia de restringir a relação de consequência a subconjuntos maximais consistentes de um dado conjunto, e gerar outras formas de paraconsistentizar uma lógica. Comecemos pela reforulação da própria noção de subconjuntos maximais consistentes, eliminando

[7]Isto será essencial quando discutirmos a relação entre paraconsistentização e pluralismo lógico no próximo capítulo.

[8]Basta ver que $\{p, \neg p\}$ é classicamente inconsistente, mas é paraclassicamente consistente. Lembrando que Γ é L-consistente se e somente se $Cn_L(\Gamma) \neq X$.

o vínculo à uma lógica subjacente particular:

Definição 2.1.3 *Sejam $L = \langle X, \mathbb{A}, \mathbb{R} \rangle$ um sistema formal e $\Gamma \subseteq X$. Dizemos que Γ' é* **subconjunto maximal consistente** *de Γ se e somente se:*

i)$\Gamma' \neq \emptyset \subseteq \Gamma$*;*

ii) $Cn(\Gamma') \neq X$*, i.e., Γ é L-Consistente;*

iii) se $\Gamma'' \subseteq \Gamma$ é L-consistente e $\Gamma' \subseteq \Gamma''$, então $\Gamma' = \Gamma''$.

Enfim, podemos construir duas formas de paraconsistentizações inspiradas na definição 2.1.2:

Definição 2.1.4 *i) α é uma* **consequência inevitável** *(I-consequência) de Γ se e somente se, para todo $\Gamma' \subseteq \Gamma$, L-maximal consistente de Γ, temos que $\Gamma' \vdash_L \alpha$.*

ii) α é uma **consequência fraca** *(F-consequência) de Γ se e somente se, existe um $\Gamma' \subseteq \Gamma$, L-maximal consistente de Γ, tal que $\Gamma' \vdash_L \alpha$.*

Ao remover a referência a uma lógica subjacente específica, temos, agora, duas novas formas de paraconsistentizar uma dada lógica.

2.2 Subconjuntos Maximais Preferíveis

Após rejeitar as duas definições de consequência como casos extremos, Rescher e Manor afirmam que:

> um caminho intermediário entre estas duas concepções é definido da seguinte forma: p é uma P-consequência de S, onde P é algum critério de preferência determinando que alguns dos conjuntos maximais consistentes são preferíveis a outros, e p é consequência de todos os conjuntos maximais consistentes P-preferíveis de S. (RESCHER & MANOR (1970), p. 179.)

Assim, é possível definir, dentre os vários subconjuntos maximais consistentes de um conjunto inconsistente, quais seriam seus subconjuntos preferíveis. Do ponto de vista abstrato, teríamos uma relação $<$ no conjunto dos maximais consistentes de um dado conjunto que é irreflexiva e transitiva, isto é, uma relação de ordem parcial estrita.

Obviamente, a noção de preferível não é absoluta. Os critérios para estabelecer quais os subconjuntos preferíveis dependem da tarefa em questão. Por exemplo, imagine que estamos estudando a teoria Γ de determinado filósofo, e percebemos que tanto p quanto $\neg p$ fazem parte das consequências desta teoria. No entanto, apenas p é explicitamente afirmada pelo filósofo. Uma exegese possível seria defender que o filósofo não sabia que $\neg p$ também é consequência de sua teoria e, portanto, deveríamos dar preferência aos subconjuntos maximais consistentes que contém p. Outra possibilidade é estabelecer a noção de preferível com base no tamanho dos subconjuntos maximais consistentes de um certo S. Desta forma, os conjuntos com mais elementos de S são preferíveis aos demais[9].

A ideia de definir conjuntos preferíveis e restringir o aparato inferencial a estes conjuntos deu início a uma série de publicações estabelecendo diferentes noções de conjuntos preferíveis, de acordo com objetivos distintos. Uma comparação com todas as propostas está fora do escopo deste trabalho, mas podemos fazer alguns comentários pontuais destacando as relações mais relevantes entre estes trabalhos e a nossa abordagem.

AVRON & LEV (2001) têm como objetivo formalizar situações em que raciocinamos com inconsistência, levando em consideração a possibilidade de uma proposição ser rejeitada em determinado momento e, com base em inferências posteriores, ser aceita novamente. Para tal, o trabalho define graus de inconsistência que os modelos de uma teoria podem ter. Deste modo, os modelos preferíveis são aqueles com menos inconsistências. A partir desta noção de preferência, o artigo desenvolve diferentes concepções de consequência paraconsistentes e não-monotônicas.

[9]Cf. RESCHER & MANOR (1970), seção III para exemplos desses dois procedimentos.

Por sua vez, VAN DE PUTTE (2013) apresenta, em certa medida, uma generalização da abordagem de AVRON & LEV (2001). O artigo investiga uma classe específica de lógicas não-monotônicas chamadas de *DACRs*[10]. A ideia básica das DACRs é estabelecer um conjunto de hipóteses Δ para ajudar a raciocinar de forma não-monotônica. Dado um conjunto de premissas Γ, deve-se tirar conclusões dos subcojuntos maximais consistentes de Δ que são consistentes com Γ. Em seguida, forma-se a intersecção dos conjuntos resultantes. A proposta do artigo é substituir a lógica clássica subjacente por qualquer lógica tarskiana compacta e supraclássica[11], e subtituir a utilização de subconjuntos maximais consistentes por outros critérios, como simplicidade, poder explicativo, etc. Como nossa abordagem força monotonicidade, ela está inserida em um programa de pesquisa distinto dos artigos anteriores. Assim, não são propostas concorrentes, mas complementares.

Com poucas exceções, o procedimento geral nesta literatura é o seguinte: dado um conjunto inconsistente[12] de premissas, são estabelecidos critérios para classificar seus subconjuntos consistentes. AVRON & LEV (2001) usa graus de consistências dos modelos das teorias para criar um ranking de preferência, i.e., quanto menos inconsistente, mais preferível é um modelo; BENFERHAT, DUBOIS & PRADE (1995) estudam noções de preferência baseadas em graus de certeza das fórmulas, e no tamanho dos subconjuntos consistentes; SUBRAHMANIAN & AMGOUD (2007) estabelecem um arcabouço comum no qual diferentes noções de preferência podem ser definidas; ARIELI, BORG & STRAßER (2017) estudam formas diversas de escolher entre os subconjuntos maximais consistentes; e BROWN & PRIEST (2004) estabelecem uma relação de permeabilidade que permite certas informações passarem de alguns subconjuntos consistentes a outros. Após estabelecer tais critérios, em geral, alguma lógica específica é aplicada aos subconjuntos selecionados: BROWN & PRIEST (2004), SUBRAHMANIAN

[10]Relações de Consequência com Hipóteses Default (*Default Assumption Consequence Relations*).

[11]Uma lógica é compacta quando ela satisfaz compacidade, e é supraclássica quando a lógica clássica está contida nela.

[12]Implicitamente compreendido como inconsistente na lógica clássica.

& AMGOUD (2007), e ARIELI, BORG & STRAßER (2017) usam lógica clássica; AVRON & LEV (2001) e VAN DE PUTTE (2013) exploram o uso de lógicas não-monotônicas. Há alguns casos de generalização para diferentes lógicas: ARIELI, BORG & STRAßER (2017) estudam inferências em lógicas não-Tarskianas; VAN DE PUTTE (2013) usa lógicas Tarskianas supraclássicas e compactas e BROWN & PRIEST (2004) mencionam, sem maior investigação, a possibilidade de generalizar o procedimento para lógicas não-clássicas.

Por outro lado, o ponto de partida da nossa abordagem não é meramente um conjunto inconsistente, mas uma lógica na qual inconsistências podem surgir[13]. Neste cenário, nosso maior foco não está em raciocinar usando subconjuntos consistentes de um conjunto inconsistente, mas na paraconsistentização da lógica original, isto é, no processo de transformar uma lógica explosiva em uma paraconsistente, mas mantendo certas propriedades da lógica inicial[14].

Nesse sentido, nosso trabalho é não só distinto da literatura, mas contrário a parte dela. Por exemplo, BENFERHAT, DUBOIS & PRADE (1995) justificam sua proposta afirmando que

> na presença de inconsistências, a abordagem desenvolvida neste artigo deve ser de natureza sintática, dado que ela explicitamente usa fórmulas que aparecem na base de conhecimento (*knowledge base*) original, ao passo que duas bases de conhecimento inconsistentes sobre a mesma linguagem são semanticamente equivalentes (de modo trivial).(BENFERHAT, DUBOIS & PRADE (1995), p. 1450.)

O método de paraconsistentização semântica desenvolvido no capítulo anterior, ao distinguir trivialidade de insatisfatibilidade, garante que conjuntos

[13]SUBRAHMANIAN & AMGOUD (2007) também começam com uma noção abstrata de lógica e consistência. No entanto, após determinar os subconjuntos consistentes preferíveis, aplicam a lógica clássica neles, independente da lógica original. Sendo assim, este trabalho não pode ser considerado como uma forma de paraconsistentização de lógicas.

[14]Note que na versão paraconsistentizada L^P de uma lógica L, não existem conjuntos L^P-inconsistentes.

insatisfatíveis não sejam, em geral, equivalentes[15]. Desse modo, a restrição acima não faz sentido.

Tendo claro que nosso foco não é meramente no raciocínio a partir de subconjuntos consistentes de premissas inconsistentes, mas na paraconsistentização de lógicas, é interessante notar que mesmo artigos que reconhecem a importância de lógicas paraconsistentes para raciocinar com inconsistência, mas não focam sua atenção em selecionar conjuntos consistentes preferíveis, podem apresentar propostas conflitantes com a nossa. Assim, ARIELI, AVRON & ZAMANSKY (2011) pretendem estabelecer critérios desejáveis "para uma lógica 'decente' raciocinar com inconsistências"[16]. Entre esses critérios, está o que os autores chamam de "fidelidade à lógica clássica", isto é,

> uma lógica paraconsistente deve ser o mais fiel à lógica clássica possivel. Isso implica, em particular, que as consequências (*entailment*) da lógica paraconsistente devem também ser válidas na lógica clássica.(ARIELI, AVRON & ZAMANSKY (2011), p. 706.)

Frente à nossa abordagem, esse requisito não faz sentido, visto que estamos preocupados em paraconsistentizar uma lógica qualquer, e preservar certas propriedades desta lógica. Em particular, se uma lógica L é tal que o conjunto vazio é L-consistente, temos que os teoremas, isto é, as fórmulas que são consequências de $\emptyset$ continuam sendo teoremas na contraparte paraconsistente de L. Portanto, temos, em certo sentido, uma "fidelidade à lógica inicial escolhida".

2.3 Paraconsistentização da Família $\mathcal{L}_n$

Em DIAS (2013) e de SOUZA, COSTA-LEITE & DIAS (2016), estudamos a paraconsistentização da lógica proposicional clássica. Nesta seção,

[15] Isto é, equivalentes no sentido de serem todos triviais.
[16] ARIELI, AVRON & ZAMANSKY (2011), p. 706.

apresentaremos a ação da paraconsistentização à família de lógicas proposicionais multi-valoradas $\mathcal{L}_n$, desenvolvida por Łukasiewicz, usando tanto a abordagem definida no primeiro capítulo, quanto a estratégia de Rescher e Manor[17]. Portanto, o objetivo desta seção é, por um lado, exemplificar com um caso concreto o procedimento de paraconsistentizar uma lógica e, por outro, comparar a preservação de propriedades das lógicas obtidas por formas diferentes de paraconsistentização.

2.3.1 Linguagens proposicionais

Considere uma *linguagem proposicional* $\mathcal{L}$ construída de maneira usual. Os símbolos primitivos de $\mathcal{L}$ são:

- **Conectivos Lógicos**:

  i) Negação: $\neg$;

  ii) Conjunção: $\wedge$;

  iii) Disjunção: $\vee$;

  iv) Implicação: $\rightarrow$.

- **Variáveis Proposicionais**

  $p_0, p_1, p_2..., q_0, q_1, q_2...$ Consideraremos Var o conjunto de todas essas variáveis.

Definição 2.3.1 *As* **fórmulas** *de $\mathcal{L}$ são sequências de símbolos de $\mathcal{L}$ que satistazem as seguintes condições:*

i) toda variável proposicional é fórmula;

ii) se α é fórmula, então $\neg\alpha$ é fórmula;

iii) se α e β são fórmulas, , então $(\alpha \wedge \beta)$ é fórmula;

[17]Para ser mais preciso, usaremos a generalização da estratégia original, visto que os autores só consideraram o caso em que a lógica subjacente é a clássica, e limitavam sua abordagem ao aparato sintático da lógica.

iv) se α e β são fórmulas, então $(\alpha \vee \beta)$ é fórmula;

v) se α e β são fórmulas, então $(\alpha \rightarrow \beta)$ é fórmula;

vi) nada mais é fórmula.

Denotamos o conjunto das fórmulas por For.

2.3.2 A família $\mathcal{L}_n$

Construiremos a semântica para $\mathcal{L}$ através das noções de matriz e valoração. Formalmente:

Definição 2.3.2 *Uma* **matrix** *para $\mathcal{L}$ é uma tripla*

$$M_n = \langle L_n, 1, \{f_\neg, f_\wedge, f_\rightarrow, f_\vee\}\rangle,$$

tal que

- $L_n = \{\frac{k}{n-1} \in \mathbb{Q} : 0 \leq k \leq n-1\}$, *com* $k, n \in \mathbb{N}$, *e* $n \geq 2$. *É claro que* $1 \in L_n$.
- $f_\neg : L_n \rightarrow L_n$
  $x \mapsto f_\neg(x) = 1 - x$
- $f_\wedge : L_n \times L_n \rightarrow L_n$
  $(x, y) \mapsto f_\wedge(x, y) = min(x, y)$
- $f_\rightarrow : L_n \times L_n \rightarrow L_n$
  $(x, y) \mapsto f_\rightarrow(x, y) = min(1, 1 - x + y)$
- $f_\vee : L_n \times L_n \rightarrow L_n$
  $(x, y) \mapsto f_\vee(x, y) = max(x, y)$

Definição 2.3.3 *Dada uma matriz M_n para $\mathcal{L}$, dizemos que $v : Var \to L_n$ é uma M_n-***valoração** *para $\mathcal{L}$.*

Podemos definir a extensão $v : For \to L_n$ que satisfaz as seguintes condições:

i) $v(\neg\alpha) = f_{\neg}(v(\alpha))$;

ii) $v(\alpha \wedge \beta) = f_{\wedge}(v(\alpha), v(\beta))$;

iii) $v(\alpha \vee \beta) = f_{\vee}(v(\alpha), v(\beta))$;

iv) $v(\alpha \to \beta) = f_{\to}(v(\alpha), v(\beta))$.

Definição 2.3.4 *Sejam $\Gamma \subseteq For$ e $\mathcal{V}_{M_n}$ o conjunto das M_n-valorações. Definimos o conjunto dos M_n-***modelos** *de Γ como:*

$$Mod_{M_n}(\Gamma) := \{v \in \mathcal{V}_{M_n} : v(\alpha) = 1, \text{ para todo } \alpha \in \Gamma\}$$

De forma análoga, o conjunto dos M_n-modelos de α é dado por:

$$Mod_{M_n}(\alpha) := \{v \in \mathcal{V}_{M_n} : v(\alpha) = 1\}$$

*Dizemos que Γ é M_n-***satisfatível** *se e somente se $Mod_{M_n}(\Gamma) \neq \emptyset$. Caso contrário, Γ é dito M_n-***insatisfatível**.

Definição 2.3.5 *Podemos, enfim, definir a relação de consequência semântica para cada n:*

$$\Gamma \models_{M_n} \alpha \Leftrightarrow Mod_{M_n}(\Gamma) \subseteq Mod_{M_n}(\alpha)$$

O par $\mathcal{L}_n = \langle For, \models_{M_n}\rangle$ é a lógica associada à matriz M_n.

O conjunto das M_n-consequências de Γ é dado por:

$$Cn_{M_n}(\Gamma) = \{\alpha \in For : \Gamma \models_{M_n} \alpha\}.$$

Note que o par $\langle For, \models_{M_n}\rangle$ é uma lógica tarskiana para todo $n \geq 2$.[18]

[18]Cf. MALINOWSKI (1993), p. 30.

Em particular, quando $n = 3$, temos a lógica trivalente de $\mathcal{L}_3$, dada pela seguinte matriz:

$$M_3 = \langle L_3, 1, \{f_\neg, f_\wedge, f_\rightarrow, f_\vee\}\rangle,$$

tal que $L_3 = \{0, 1/2, 1\}$. Os conectivos de $\mathcal{L}_3$ podem ser representados pelas seguintes tabelas de verdade:

Implicação

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
1	1	1
1	1/2	1/2
1	0	0
1/2	1	1
1/2	1/2	1
1/2	0	1/2
0	1	1
0	1/2	1
0	0	1

Disjunção

α	β	$\alpha \vee \beta$
1	1	1
1	1/2	1
1	0	1
1/2	1	1
1/2	1/2	1/2
1/2	0	1/2
0	1	1
0	1/2	1/2
0	0	0

Conjunção

α	β	$\alpha \wedge \beta$
1	1	1
1	1/2	1/2
1	0	0
1/2	1	1/2
1/2	1/2	1/2
1/2	0	0
0	1	0
0	1/2	0
0	0	0

Negação

α	$\neg\alpha$
1	0
1/2	1/2
0	1

O primeiro passo antes de investigar a contraparte paraconsistente de $\mathcal{L}_n$ é garantir que, para cada n, $\models_{M_n}$ é explosiva.

Proposição 2.3.1 *Para todo n, $\models_{M_n}$ é explosiva.*

Prova. Considere $\{\alpha, \neg\alpha\}$. Independente de n, nunca é o caso que $v(\alpha) = v(\neg\alpha) = 1$. Assim, $Mod_{M_n}(\{\alpha, \neg\alpha\}) = \emptyset$ e, portanto, $\alpha, \neg\alpha \models_{M_n} \beta$, para todo n. □

2.3.3 Paraconsistentização Semântica de $\mathcal{L}_n$

Como $\mathcal{L}_n$ é explosiva, para todo n, podemos paraconsistentizar $\mathcal{L}_n$. Para tanto, precisamos modificar as definições de consequência lógica e satisfabilidade do modo esperado. O resultado não é propriamente uma definição, visto que estamos aplicando o método a uma família de lógicas, mas um esquema de definição, a ser especificado pela escolha adequada de um n. Formalmente,

Definição 2.3.6 $\Gamma \models^P_{M_n} \Leftrightarrow$ *existe* $\Gamma' \subset \Gamma, M_n-$*satisfatível, tal que* $\Gamma' \models_{M_n} \alpha$.

De forma análoga ao que fizemos nas seções anteriores, o conjunto consequência de Γ *em* $\models^P_{M_n}$ *é definido do seguinte modo:*

$$Cn_{P_{M_n}}(\Gamma) = \{\alpha \in For : \Gamma \models^P_{M_n} \alpha\}$$

Mesmo com a generalidade deste esquema, é possivel proval algumas propriedades abstratas do resultado deste processo, para qualquer n.

Proposição 2.3.2 *Inclusão não vale em* $\models^P_{M_n}$.

Prova. Considere $\Gamma = \{\neg(\alpha \to \alpha)\}$. Para todo n, $v(\neg(\alpha \to \alpha)) = 0$ em $\mathcal{L}_n$. Dado que $\emptyset$ é o único subconjunto M_n-satisfatível de Γ e $\emptyset \not\models_{M_n} \neg(\alpha \to \alpha)$, temos que $\Gamma \not\models^P_{M_n} \neg(\alpha \to \alpha)$. □

Proposição 2.3.3 *Transitividade não vale em* $\models^P_{M_n}$.

Prova. Note que, para qualquer n, em $\mathcal{L}_n$ vale que $\alpha \models_{M_n} \alpha \vee \beta$. Sejam, então, $U = \{p \vee q, \neg p\}$ e $\Gamma = \{p, \neg p\}$. É fácil ver que $\Gamma \models_{M_n} U$. Dado que os conjuntos $\{p\}$ e $\{\neg p\}$ são M_n-satisfatíveis, e vale a regra acima, temos que $p \models^P_{M_n} p \vee q$ e $\neg p \models^P_{M_n} \neg p$. Logo, $\Gamma \models^P_{M_n} U$. Considere, agora, q. Temos que $U \models_{M_n} q$, pois se v é uma M_n-valorização tal que $v(p \vee q) = v(\neg p) = 1$, temos $v(p) = 0$ e $max(v(p), v(q)) = 1$, o que implica em $v(q) = 1$. Além disso, como U é M_n-satisfatível, pois $v(p) = 0$ e $v(q) = 1$ (ou seja, v é uma M_n-valorização que satisfaz U), temos que $U \models^P_{M_n} q$. Por outro lado, as partes M_n-satisfatíveis de Γ são $\emptyset, \{p\}$ e $\{\neg p\}$, e q não é consequência semântica, em $\mathcal{L}_n$, de nenhum destes conjuntos. Portanto, $\Gamma \not\models^P_{M_n} q$. □

Corolario 2.3.1 *Se* Γ *for* M_n*-satisfatível, a transitividade vale.*

Prova. Suponha que $\Gamma \models^P_{M_n} \gamma$, para todo $\gamma \in U$ e $U \models^P_{M_n} \alpha$. Como Γ é M_n-satisfatível e $\Gamma \models^P_{M_n} \gamma$, para todo $\gamma \in U$, segue-se que U é M_n-satisfatível. Pela transitividade em $\models_{M_n}$ temos que $\Gamma \models_{M_n} \alpha$. Logo, $\Gamma \models^P_{M_n} \alpha$. □

Não obstante, há uma forma fraca de transitividade que vale, i.e., se $\{\alpha\} \models^P_{M_n} \beta$ e $\{\beta\} \models^P_{M_n} \gamma$, então $\{\alpha\} \models^P_{M_n} \gamma$. Antes de provar isto, precisamos de algumas definições e resultados preliminares.

Definição 2.3.7

i) α *é uma* M_n**-contradição** *se e somente se* $v(\alpha) = 0$*, para todo* v*;*

ii) α *é uma* M_n**-tautologia** *se e somente se* $v(\alpha) = 1$*, para todo* v*.*

Lema 2.3.1

i) Se β *é uma* M_n*-contradição, então para todo* $\Gamma \subset X$, $\Gamma \not\models^P_{M_n} \beta$*;*

ii) Se β *é uma* M_n*-tautologia e* $\{\beta\} \models^P_{M_n} \gamma$*, então* γ *é uma* M_n*-tautologia e, para todo* $\Gamma \subset X$, $\Gamma \models^P_{M_n} \gamma$*, para qualquer* n*;*

iii) Se $\{\alpha\} \models^P_{M_n} \beta$*, então* β *é uma* M_n*-tautologia ou* $\{\alpha\}$ *é* M_n*-satisfatível e* $\{\alpha\} \models^P_{M_n} \beta$*, para qualquer* n*.*

Prova. O resultado segue imediatamente das definições. □

Proposição 2.3.4 *A transitividade fraca vale em* $\models^P_{M_n}$*.*

Prova. Suponha que $\{\alpha\} \models^P_{M_n} \beta$ e $\{\beta\} \models^P_{M_n} \gamma$. Pelo lema 2.3.1 (i), dado que $\{\alpha\} \models^P_{M_n} \beta$, β não é uma M_n-contradição. Assim, temos dois casos:

i) β é uma M_n-tautologia. Neste caso, como $\{\beta\} \models^P_{M_n} \gamma$, pelo lema 2.3.1 (ii), temos que $\{\alpha\} \models^P_{M_n} \gamma$.

ii) β não é uma M_n-tautologia. Assim, pelo lema 2.3.1 (iii), $\{\alpha\}$ é M_n-Satisfatível e $\{\alpha\} \models_{M_n} \beta$. Dado que $\{\beta\} \models^P_{M_n} \gamma$, pelo lema 2.3.1 (iii), temos que γ é uma M_n-tautologia (e, novamente pela parte (iii) do lema, segue-se

que $\{\alpha\} \models^{P}_{M_n} \gamma$) ou $\{\beta\}$ é M_n-satisfatível e $\{\beta\} \models_{M_n} \gamma$. Por transitividade em $\models_{M_n}$, $\{\alpha\} \models_{M_m} \gamma$ e $\{\alpha\}$ é M_n-Satisfatível. Portanto, $\{\alpha\} \models^{P}_{M_n} \gamma$. Logo, temos o resultado desejado. □

Proposição 2.3.5 *Idempotência não vale em* $\models^{P}_{M_n}$.

Prova. Considere $\Gamma = \{p, \neg p\}$. Então, $p \vee q$ e $\neg p$ pertencem a $Cn_{P_{M_n}}(\Gamma)$. Portanto, $q \in Cn_{P_{M_n}}(Cn_{P_{M_n}}(\Gamma))$. Não obstante, $q \notin Cn_{P_{M_n}}(\Gamma)$. □

O caso do teorema semântico da dedução é sutil. Começaremos investigando seu comportamento em $\mathcal{L}_3$.

Proposição 2.3.6 *O teorema semântico da dedução não vale em* $\models_{M_3}$.

Prova. Considere $\Gamma = \{p \to (p \to q)\}$. Seja v uma valoração ta que $v(p) = 1$ e $v(p \to (p \to q)) = 1$. Visto que

$$\begin{aligned} v(p \to (p \to q)) &= min(1, 1 - p + v(p \to q)) \\ &= min(1, (min(1, v(q)))) \\ &= min(1, v(q)) \\ &= v(q) \end{aligned}$$

temos que $v(q) = 1$. Logo, $\Gamma, p \models_{M_3} q$. No entanto, $\Gamma \not\models_{M_3} p \to q$. Para ver isto, considere a valoracão v' tal que $v(p) = 1/2$ e $v(q) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} v(p \to (p \to q)) &= min(1, 1 - p + v(p \to q)) \\ &= min(1, 1/2 + (min(1, 1/2 + v(q)))) \\ &= min(1, 1/2 + (min(1, 1/2))) \\ &= min(1, 1/2 + 1/2) \\ &= min(1, 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} v(p \to q) &= min(1, 1 - v(p) + v(q)) \\ &= min(1, 1/2) \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

□

O mesmo argumento se aplica a $\models^{P}_{M_3}$. Portanto, em $\models^{P}_{M_3}$ não vale o teorema semântico da dedução.

Proposição 2.3.7 *Há um teorema semântico da dedução modificado que vale em* $\models_{M_3}$. *Formalmente:*
$\Gamma \cup \{\alpha\} \models_{M_3} \beta \Leftrightarrow \Gamma \models_{M_3} \alpha \to (\alpha \to \beta)$

Prova. Suponha que $\Gamma \cup \{\alpha\} \models_{M_3} \beta$, mas $\Gamma \not\models_{M_3} \alpha \to (\alpha \to \beta)$ Logo, $v(\Gamma) = 1$ e $v(\alpha \to (\alpha \to \beta)) = 0$. Temos, então, dois casos:

i) $v(\alpha) = v(\beta) = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} v(\alpha \to (\alpha \to \beta)) &= min(1, 1 - v(\alpha) + min(1, 1 - v(\alpha) + v(\beta)) \\ &= min(1, 0 + min(1, 0 + 1)) \\ &= min(1, 1) \\ &= 1(Contradição!) \end{aligned}$$

ii) $v(\alpha) = 0$. Neste caso,

$$\begin{aligned} v(\alpha \to (\alpha \to \beta)) &= min(1, 1 - v(\alpha) + min(1, 1 - v(\alpha) + v(\beta)) \\ &= min(1, 1 + min(1, 1 + 1)) \\ &= min(1, 2) \\ &= 1(Contradição!) \end{aligned}$$

Para a outra direção, faremos uma prova por contrapositiva. Suponha que $v(\Gamma) = 1$, $v(\alpha) = 1$ e $v(\beta) = 0$. Então,

$$\begin{aligned} v(\alpha \to (\alpha \to \beta)) &= min(1, 1 - v(\alpha) + min(1, 1 - v(\alpha) + v(\beta)) \\ &= min(1, 0 + min(1, 0 + 0)) \\ &= min(1, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Proposição 2.3.8 *Apenas um lado do teorema semântico da dedução modificado vale em* $\models^P_{M_3}$*, i.e.,* $\Gamma \cup \{\alpha\} \models^P_{M_3} \beta \Rightarrow \Gamma \models^P_{M_3} \alpha \to (\alpha \to \beta)$

Prova. Suponha que $\Gamma \cup \{\alpha\} \models^P_{M_3} \beta$. Então, existe $\Gamma' \subset \Gamma \cup \{\alpha\}$, M_3-satisfatível, tal que $\Gamma' \models_{M_3} \beta$. Temos três casos possíveis para considerar:

1) $\alpha \in \Gamma$. Neste caso, temos $\Gamma' \subset \Gamma$, tal que $\Gamma' \cup \{\alpha\} \models_{M_3} \beta$ e, pelo teorema semântico modificado em $\models_{M_3}$, $\Gamma' \models_{M_3} \alpha \to (\alpha \to \beta)$. Visto que Γ é M_3-satisfatível, temos que $\Gamma \models^P_{M_3} \alpha(\to \alpha \to \beta)$.

2) $\alpha \notin \Gamma$ e $\alpha \notin \Gamma'$. Logo, $\Gamma' \subset \Gamma$ e, pelo mesmo argumento acima, $\Gamma \models^P_{M_3} \alpha(\to \alpha \to \beta)$.

3) $\alpha \notin \Gamma$ e $\alpha \in \Gamma'$. Neste caso, $\Gamma' - \{\alpha\} \subset \Gamma$ é M_3-satisfatível, e $\Gamma' - \{\alpha\} \models_{M_3} \alpha(\to \alpha \to \beta)$. Portanto, $\Gamma \models^P_{M_3} \alpha(\to \alpha \to \beta)$.

Para ver que a conversa não vale, note que $\Gamma \models^P_{M_3} \neg(p \to p) \to (\neg(p \to p) \to \neg(p \to p))$, (pois esta fórmula é tautológica), mas $\Gamma \cup \{\neg(p \to p)\} \not\models^P_{M_3} \neg(p \to p)$, pois esta fórmula é contraditória. □

Proposição 2.3.9 *Há uma versão generalizada do teorema semântico da dedução modificado que vale em* $\models_{M_n}$*, para qualqer n, a saber:*
$\Gamma \cup \{\alpha\} \models_{M_n} \beta \Leftrightarrow \Gamma \models_{M_n} \alpha \to (\alpha \to (\cdots \to (\alpha \to \beta)) \dots)$ *(com* $n - 1$ *repetições de* $\to$*).*

Prova. Suponha que $\Gamma \cup \{\alpha\} \models_{M_n} \beta$, mas $\Gamma \not\models_{M_n} \alpha \to (\alpha \to (\cdots \to (\alpha \to \beta)) \dots)$ Logo, $v(\Gamma) = 1$ e $v(\alpha \to (\alpha \to (\cdots \to (\alpha \to \beta))) \dots) = 0$. Temos dois casos possíveis:

i) $v(\alpha) = v(\beta) = 1$. Portanto

$$\begin{aligned} v(\alpha \to (\alpha \to (\cdots \to (\alpha \to \beta))\ldots)) &= min(1, 1-v(\alpha)+min(1, 1-v(\alpha)+\cdots+ \\ &\quad min(1, 1-v(\alpha)+v(\beta))) \\ &= min(1, 0+min(1, 0+\cdots+min(1, 0+1))) \\ &= min(1, min(1, +\cdots+min(1, 1))) \\ &= 1(Contradição!) \end{aligned}$$

ii) $v(\alpha) = 0$. Neste caso,

$$\begin{aligned} v(\alpha \to (\alpha \to (\cdots \to (\alpha \to \beta))\ldots)) &= min(1, 1-v(\alpha)+min(1, 1-v(\alpha)+\cdots+ \\ &\quad min(1, 1-v(\alpha)+v(\beta))) \\ &= min(1, 1-v(\alpha)+min(1, 1-v(\alpha)+\cdots+ \\ &\quad min(1, 1-v(\alpha)+v(\beta)))) \\ &= min(1, 1+min(1, 1+\cdots+min(1, 1+v(\beta)))) \\ &= 1(\text{dado que } min(1, 1+v(\beta)) \text{ é sempre 1}) \end{aligned}$$

o que contraria nossa suposição inicial.

Provaremos o outro lado por contrapositiva. Suponha que $v(\Gamma) = 1$, $v(\alpha) = 1$ e $v(\beta) = 0$. Então,

$$\begin{aligned} v(\alpha \to (\alpha \to (\cdots \to (\alpha \to \beta))\ldots)) &= min(1, 1-v(\alpha)+min(1, 1-v(\alpha)+\cdots+ \\ &\quad min(1, 1-v(\alpha)+v(\beta))) \\ &= min(1, 1-v(\alpha)+min(1, 1-v(\alpha)+\cdots+ \\ &\quad min(1, 1-v(\alpha)+v(\beta)))) \\ &= min(1, 0+min(1, 0+\cdots+min(1, 0+0))) \\ &= min(1, 0+0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, se $\Gamma \cup \{\alpha\} \not\models_{M_n} \beta$, então $\Gamma \not\models_{M_n} \alpha \to (\alpha \to (\cdots \to (\alpha \to \beta))\ldots)$, e isso conclui a prova. □

Proposição 2.3.10 *Apenas um lado da versão generalizada do teorema semântico da dedução modificado vale em* $\models^P_{M_n}$*, para qualquer* n*.*

Prova. A prova é análoga ao caso de $\models^P_{M_3}$

□

2.3.4 Paraconsistentização usando a abordagem de Rescher e Manor

Vejamos o resultado da paraconsistentização de $\mathcal{L}_n$ usando as noções de F-consequência e I-consequência[19]. Lembremos que suas respectivas relações de consequência são:

i) α é uma consequência inevitável (I-consequência) de Γ se e somente se, para todo $\Gamma' \subseteq \Gamma$, L-maximal satisfatível de Γ, temos que $\Gamma' \models_L \alpha$. Denotamos tal fato por $\Gamma \models^I_L \alpha$.

ii) α é uma consequência fraca (F-consequência) de Γ se e somente se, existe um $\Gamma' \subseteq \Gamma$, L-maximal satisfatível de Γ, tal que $\Gamma' \models_L \alpha$. Denotamos isto por $\Gamma \models^F_L \alpha$.

Como todo conjunto satisfatível pode ser extendido a um maximal satisfatível[20], segue-se que $\Gamma \models^F_L$ é equivalente a $\Gamma \models^P_L$, quando $\Gamma \neq \emptyset$[21]. Estudemos, portanto, as propriedades de $\models^I_{M_n}$. O conjunto consequência de Γ em $\models^I_{M_n}$ é dado por:

$$Cn_{I_{M_n}}(\Gamma) = \{\alpha \in For : \Gamma \models^I_{M_n} \alpha\}.$$

Proposição 2.3.11 $\models^I_{M_n}$ *não satisfaz inclusão.*

Prova. A prova é idêntica à proposição 2.3.3. □

Proposição 2.3.12 *Transitividade vale em* $\models^I_{M_n}$

Prova. Suponha que $\Gamma \models^I_{M_n} \delta$, para todo $\delta \in \Delta$, e $\Delta \models^I_{M_n} \beta$. Como $\Gamma \models^I_{M_n} \delta$, temos que, para todo $\Gamma' \subseteq \Gamma$, M_n-satisfatível de Γ, $\Gamma' \models_{M_n} \delta$.

[19] Além da generalização com respeito à lógica subjacente, usaremos a contraparte semântica dessas noções, algo que também está ausente no trabalho de Rescher e Manor.

[20] Este resultado é chamado de Lema de Lindenbaum. Para sua demonstração, cf. de SOUZA (2001), p. 217.

[21] Lembremos que Rescher e Manor exigem que conjuntos maximais satisfatíveis sejam diferentes do vazio.

Isso significa que Δ é satisfatível. Assim, Δ é o único subconjunto maximal consistente de Δ. Seja Γ' um subconjunto M_n-maximal consistente qualquer de Γ. Temos, assim, que $\Gamma' \models_{M_n} \delta$, para todo $\delta \in \Delta$, e $\Delta \models^I_{M_n} \beta$. Logo, pela transitividade de M_n, segue-se que $\Gamma' \models_{M_n} \beta$. Portanto, $\Gamma \models^I_{M_n} \beta$. □

Proposição 2.3.13 $\models^I_{M_n}$ *satisfaz idempotência.*

Prova. Tome $Cn_{I_{M_n}}(\Gamma)$. Para todo $\alpha \in Cn_{I_{M_n}}(\Gamma)$, e todo $\Gamma' \subseteq \Gamma, M_n$-maximal satisfatível de Γ, temos que $\Gamma' \models^I_{M_n}$. Sendo assim, $Cn_{I_{M_n}}(\Gamma)$ é sempre M_n-satisfatível. Pela idempotência em M_n, segue-se que $Cn_{I_{M_n}}(Cn_{I_{M_n}}(\Gamma)) = Cn_{I_{M_n}}(\Gamma)$. □

Proposição 2.3.14 *Apenas um lado da versão generalizada do teorema semântico da dedução modificado vale em* $\models^I_{M_n}$*, para qualquer* n*.*

Prova. Suponha que $\Gamma, \alpha \models^I_{M_n} \beta$. Então, para todo $\Delta \subseteq \Gamma \cup \{\alpha\}$, M_n-maximal satisfatível de $\Gamma \cup \{\alpha\}$, temos que $\Delta \models_{M_n} \beta$. Sem perda de generalidade, tome um desses Δ qualquer. Temos, assim, dois casos:

i) $\Delta \subseteq \Gamma$. Assim, $\Delta \cup \{\alpha\} \models_{M_n} \beta$. Como Δ é subconjunto maximal satisfatível de $\Gamma \cup \{\alpha\}$, Δ é subconjunto maximal satisfatível de Γ. Pelo teorema modificado da dedução em $\mathcal{L}_n$, temos que $\Delta \models_{M_n} \alpha \to (\alpha \to (\cdots \to (\alpha \to \beta))\dots)$ (com $n-1$ repetições de $\to$). Como Δ é um subconjunto M_n-maximal consistente de Γ qualquer, segue-se que $\Gamma \models^I_{M_n} \alpha \to (\alpha \to (\cdots \to (\alpha \to (\alpha \to \beta))\dots)$ (com $n-1$ repetições de $\to$).

ii) $\Delta \not\subseteq \Gamma$. Neste caso, temos que $\Delta - \{\alpha\} \models_{M_n} \alpha \to (\alpha \to (\cdots \to (\alpha \to \beta))\dots)$ (com $n-1$ repetições de $\to$). Além disso, sabemos que Δ é subconjunto maximal M_n-satisfatível de $\Gamma \cup \{\alpha\}$. Como $\alpha \notin \Gamma$, $\Delta - \{\alpha\}$ continua sendo subconjunto maximal M_n-satisfatível de Γ. Portanto, $\Gamma \models^I_{M_n} \alpha \to (\alpha \to (\cdots \to (\alpha \to \beta))\dots)$ (com $n-1$ repetições de $\to$).

O contra-exemplo de $\models^P_{M_n}$ também mostra que a conversa da do teorema semântico da dedução modificado não vale em $\models^I_{M_n}$ □

Proposição 2.3.15 $\models^{I}_{M_n}$ *não satisfaz monotonicidade*[22].

Prova. Seja $\Gamma = \{p, q, \neg p\}$ e $\Delta = \{p, q, \neg p, \neg q\}$. Assim, $\Gamma \subseteq \Delta$. Os subconjuntos maximais M_n-satisfatíveis de Γ são $\{p, q\}$ e $\{\neg p, q\}$. Logo, $\Gamma \models^{I}_{M_n} q$. Por sua vez, os subconjuntos maximais M_n-satisfatíveis de Δ são $\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}$ e $\{\neg p, \neg q\}$. Segue-se que $\Delta \not\models^{I}_{M_n} q$. Portanto, $Cn_{P_{M_n}}(\Gamma) \not\subseteq Cn_{P_{M_n}}(\Delta)$. □

É importante ressaltar que, isoladamente, a preservação - ou não - de certa propriedade não é o suficiente para aceitar ou rejeitar uma lógica. A adequação da lógica é sempre dado de acordo com a função pela qual a lógica foi desenvolvida. Por exemplo, uma lógica explosiva que pretenda representar inferências revogáveis (*defeasible inference*) em ambientes inconsistentes, deve ser paraconsistentizada com um método que não preserve monotonicidade. Por outro lado, uma teoria que relativiza o princípio de identidade para investigar objetos quânticos, e que usa uma lógica subjacente explosiva[23], deve ser paraconsistentizada, se necessário, com uma abordagem que refute a inclusão. Neste sentido, encerramos o capítulo apresentando os resultados obtidos nesta seção na tabela abaixo.

	$Cn_{P_{M_n}}$	$Cn_{I_{M_n}}$
inclusão	×	×
transitividade	×	✓
transitividade fraca	✓	✓
idempotência	×	✓
teorema da dedução	×	×
monotonicidade	✓	×

✓significa que o operador de consequência tem a propriedade indicada

× significa o contrário.

[22]Lembrando que a paraconsistentização apresentada no primeiro capítulo não somente preserva monotonicidade, como a impõe.

[23]Cf. KRAUSE & BÉZIAU (1997).

Capítulo Três

Pluralismo e Monismo Lógico

Logic is in the eye of the logician.

- *Gloria Steinem*

O objetivo deste capítulo é apresentar uma análise do debate entre pluralismo e monismo lógico, evidenciando os principais pressupostos da discussão, bem como as ramificações filosóficas dessas diferentes posições. Além disso, indicaremos o desenvolvimento de um possível pluralismo lógico a partir da noção de paraconsistentização de lógicas. A estratégia geral do texto é mostrar que os principais argumentos apresentados por um monista contra o pluralismo lógico são infundados e que, portanto, é possível a existência de alguma forma de pluralismo lógico. Investigaremos, também, alguns aspectos da relação entre monismo, pluralismo e relativismo lógico[1].

Em termos gerais, pluralismo lógico é a tese de que há mais de uma lógica adequada, coerente ou, em algumas formulações, verdadeira. Dito de outra forma, isso significa que há vários modos de caracterizar adequadamente a noção de consequência lógica.

O monismo lógico, por outro lado, defende que há uma única lógica correta, adequada, ou verdadeira. Assim, há uma única e definitiva avaliação da

[1]A supervisão do Prof. Otávio Bueno, durante a realização do estágio de pesquisa na *University of Miami*, foi fundamental para o desenvolvimento dos capítulos 3 e 4.

validade de um dado argumento, ainda que, eventualmente, podemos desconhecer ou estarmos errados com respeito a esta avaliação.

Relativismo, por sua vez,

> não é uma única doutrina, mas uma família de visões cujo tema comum é que alguns aspectos centrais da experiência, pensamento, avaliação ou, até mesmo, a realidade é, de alguma forma, relativo a outra coisa. Por exemplo, padrões de justificação, princípios morais, ou verdade, são ditos, às vezes, relativos à linguagem, cultura, ou constituição biológica. (SWOYER (2003).)

Portanto, todo relativismo é uma instanciação do seguinte esquema geral: Y é relativo a X. No caso do relativismo lógico, a relação de consequência lógica ocupa a posição da variável dependente Y. A especificação da variável X, por sua vez, será discutida ao longo deste, e do próximo capítulo.

É importante notar que relativismo e pluralismo são distintos e independentes. A tendência de pensar que há uma relação necessária entre ambos surge porque, geralmente, os casos mais interessantes envolvem sobreposições das duas teses. Mas, a princípio, elas são independentes. Tomemos, por exemplo, o caso de regras de etiqueta. Se aceitarmos que etiqueta é relativa à cultura, mas que, no entanto, só há uma cultura, então somos relativistas, mas monistas com relação aos costumes[2]. Portanto, relativismo só implica pluralismo se aceitarmos, também, que há mais de uma possibilidade de substituição da variável independente X, à qual Y é relativa.

Por outro lado, é possível ser pluralista sem ser relativista. Basta defender que não há variável independente X à qual Y é relativa, mas que, não obstante, há diferentes tratamentos adequados de X.

Do anterior, fica claro que relativismo lógico, assim conceituado, não significa que vale qualquer coisa em lógica, ou que todas as lógicas são igualmente adequadas. A tese relativista se aplica, por exemplo, à proposta de

[2]Obviamente, também podemos ser monistas, mas não relativistas. Usando o mesmo exemplo, basta aceitarmos que existe um único conjunto de regras de etiqueta, e que ele é absoluto, isto é, não é relativo a nenhum outro domínio.

TARSKI (1956) e BOLZANO (1972) a respeito da possibilidade de diversas distinções não-equivalentes entre termos lógicos e não-lógicos. Aqui, a relação de consequência é relativa à divisão dos termos em lógicos e não-lógicos. E disso não se segue, como o próprio Tarski notou, que qualquer divisão é válida.

O pluralismo lógico defendido por BEALL & RESTALL (2006) também se caracteriza como uma forma de relativismo. Segundo estes autores, um argumento é válido se e somente se, em todo 'caso' em que a premissa é verdadeira, a conclusão também o é. Esta formulação é pluralista na medida em que se aceita, como faz os autores, que há mais de um tratamento para esses 'casos'. Temos, também, um relativismo lógico ao reconhecer que a noção de consequência lógica é relativa aos possíveis 'casos'.

Há diversos problemas já na formulação destas distinções. E boa parte do debate se torna infrutífero caso tais problemas não sejam resolvidos ou, ao menos, explicitados. Em primeiro lugar, adequação, coerência e verdade são noções bem distintas. Sendo assim, é preciso separá-las e tratá-las isoladamente.

Usualmente, o conceito de verdade é tratado como um predicado de sentenças. Assim, parece não fazer sentido dizer que uma lógica é verdadeira. Quando alguns autores defendem esta tese[3], o que está em jogo, de fato, são pressupostos metafísicos. Em última instância, esses autores são realistas com respeito à lógica. Ou seja, quando afirmam que a lógica lida com preservação de verdade, eles acreditam que há uma noção absoluta de verdade, e que esta noção se funda em uma correspondência entre linguagem e mundo. Neste caso, dizer que uma lógica é *a* lógica verdadeira é afirmar que existe apenas uma lógica que captura os aspectos formais desta correspondência.

As noções de adequação e correção, por outro lado, geralmente são invocadas quando não há o pressuposto de uma correspondência necessária entre linguagem e mundo, e se está meramente interessado na relação entre uma

[3]Cf. READ (2006).

noção informal de consequência em determinado domínio e a noção formal de consequência em alguma lógica. Assim, uma lógica é adequada ou correta se ela representa corretamente a relação informal de consequência em um dado domínio de objetos.

Nossa abordagem, como dito anteriormente, será considerar as críticas que um monista lógico propõe ao pluralismo e relativismo lógico, e mostrar que elas são, ou infundadas, ou insuficientes para rejeitar tais posições. Sendo assim, não nos preocuparemos em escolher uma noção particular de coerência, ou adequação. Utilizaremos as noções propostas pelos monistas, e mostraremos os problemas com as mesmas.

A principal crítica ao pluralismo lógico é a tese de que, quando mudamos de lógica, mudamos o significado dos conectivos lógicos. Assim, parece que não há um desacordo real entre lógicos que defendem sistemas formais diferentes: eles estão meramente falando de coisas distintas. Se este é o caso, então o pluralismo lógico tem um sério problema. Pois ou ele é falso, ou é meramente trivial, consistindo em simplesmente afirmar que há lógicas distintas, formuladas em linguagens distintas e que, portanto, falam sobre coisas diferentes. Não obstante, isto também é um problema para um monista lógico que reconhece o debate entre lógicas distintas, mas acredita que apenas uma determinada lógica é a correta, adequada, ou verdadeira.

Deste modo, antes de analisarmos o debate entre monismo e pluralismo lógico, é preciso estabelecer se, e como, seria possível um desacordo entre lógicas. Notem que esta investigação é independente de eventuais caracterizações específicas de pluralismo ou monismo lógico. Trata-se do estabelecimento de um pressuposto relevante para qualquer posição que pressuponha um debate entre lógicas.

A formulação clássica desta crítica está nas seguintes palavras de Quine:

> quem nega a lei do terceiro excluído está mudando o assunto. Isto não é o mesmo que dizer que ele está errado em fazê-lo. Ao rejeitar '$p \vee \neg p$' ele está, de fato, abandonando a negação clássica (...); e ele pode ter seus motivos. (QUINE (1960), p. 100).

Este é um ataque claro à posição intuicionista. Outra passagem expressa a mesma atitude com relação à lógica paraconsistente:

> Falando sobre uma extravagância popular, e se alguém rejeitasse a lei da não-contradição e, então, aceitasse ocasionalmente uma sentença e sua negação como verdadeiras? Uma resposta que se ouve é que isso iria contaminar toda a ciência. Qualquer conjunção da forma '$p \wedge \neg p$' implica logicamente qualquer sentença; portanto, a aceitação de uma sentença e sua negação como verdadera nos comprometeria a aceitar toda sentença como verdadeira e, portanto, a abandonar toda a distinção entre verdadeiro e falso. (...) Minha visão do diálogo é que nenhuma das partes sabe do que está falando. Pensa-se que se está falando de negação, '¬', 'não'; mas certamente a noção deixou de ser reconhecível como negação quando se considera como verdadeiras algumas conjunções da forma '$p \wedge \neg p$', e se deixa de tomar tais sentenças como implicando todas as outras. Esta, evidentemente, é a situação do lógico desviante: quando ele tenta negar a doutrina, ele apenas muda de assunto. (QUINE (1986), p. 81.)

Obviamente, a crítica de Quine não é restrita a essas lógicas. Qualquer lógico que queira refutar alguma lei lógica estaria mudando o assunto da discussão.

No entanto, afirmar que não há debate entre lógicas distintas implica em desconsiderar boa parte da prática dos lógicos e matemáticos, assim como parte central do debate sobre filosofia da matemática e da lógica do último século. Em particular, isto significa que a maioria das controversas sobre fundamentos da matemática na virada do século XIX para o XX foi, em última instância, sem sentido ou, no mínimo, um enorme mal entendido.

3.0.5 Evidência Histórica do Debate

Comecemos apresentando várias evidências textuais de lógicos explicitamente discordando (ou acreditando estar discordando) de uma lógica diferente daquela que ele defende.

DUMMETT (2000) reconhece, em diversas passagens, a possibilidade de comunicação entre as lógicas clássica e intuicionista, tais como:

> Este enunciado é demonstrável classicamente e, portanto, pela tradução de Gödel da aritmética clássica para a aritmética intuicionista, podemos demonstrá-lo intuicionisticamente[4] (DUMMETT (2000), p. 184).

Em outra ocasião, ele reconhece não só um acordo entre as lógicas clássica e intuicionista, mas também a possibilidade de expressar seu desacordo em termos deste núcleo comum:

> Intuicionistas e platonistas podem encontrar um campo comum; os enunciados, tanto matemáticos quanto não-matemáticos que são, na visão de ambos, decidíveis, de modo que não há disputa real sobre seus significados, e ambos os lados aceitam que [os enunciados] obedecem à lógica clássica. Cada grupo pode, consequentemente, pelo uso e referência a esses enunciados não-problemáticos, explicar um ao outro no que sua concepção de significado consiste para aqueles enunciados matemáticos que estão em disputa. (DUMMETT (1978), p. 238).

Dummet, ademais, afirma que a lógica clássica e a matemática clássica são incoerentes[5]. Sendo assim, se quisermos dar sentido ao debate precisamos explicar, de um lado, como Dummett pode defender a ininteligibilidade da lógica clássica e, de outro, reconhecer a possibilidade de provar enunciados nesta lógica, além da existência de um corpo comum entre esta e a lógica clássica.

Outro exemplo de debate entre a lógica clássica e a intuicionista é encontrado na obra de Geoffrey Hellman. Trata-se de um caso curioso. Ainda que ele defenda que a lógica clássica e intuicionista consistam em duas linguagem e, portanto, não discordam entre si, ele reconhece que "existe um domínio de enunciados (...) no qual não surge nenhuma diferença entre o raciocínio clássico e o intuicionista"(HELLMAN (1989), p. 52).

[4]O livro contém vários exemplos de enunciados que são demonstráveis em uma das lógica, mas não na outra.

[5]Cf. DUMMETT (2000), p. 250.

O autor vai além e afirma que a lógica intuicionista pode rejeitar todas as leis lógicas clássicas, visto que ela defende que a noção clássica de "verdade-em-uma-estrutura"é sem significado. Assim, o intuicionismo "falha em compreender, ou considera ininteligível, a linguagem clássica *tout court*"(*idem, ibidem*).

Mas, em seguida, ele enfraquece esta tese e diz que é melhor afirmar que "o intuicionismo falha em compreender, ou considera ininteligível, a linguagem clássica aplicada a domínios infinitos ou casos indecidíveis"(*idem, ibidem*). Mais uma vez, ele está reconhecendo um acordo entre ambas as partes. Se elas apenas discordam em domínios infinitos, então é um problema com respeito à aplicação de lógica, mas não de sua formulação abstrata.

Na mesma linha, Epstein afirma que

> É na questão sobre como raciocinar sobre o infinito, ou o potencialmente infinito, que os intuicionistas discordam do matemático clássico, pois, no domínio do finito, eles concordam que a lógica clássica é apropriada. (EPSTEIN (1990), p. 197)

Ao explicar a expressão "lógica livre", Lamberd diz que

> é uma lógica na qual as expressões quantificacionais 'todo' e 'algum', e suas variantes estilísticas, têm sua interpretação clássica, e não há enunciados que são logicamente verdadeiros somente se é verdade que G existe para todos os termos gerais G, [tampouco] é verdadeiro que s existe para todos os termos singulares s. É esta explicação que realmente *define* a expressão 'lógica livre'. (LAMBERT (2002), p. 124.)

Lambert, portanto, reconhece que as lógicas clássica e livre têm a mesma interpretação para o quantificador existencial. Não obstante, as duas lógicas discordam, visto que "o princípio lógico conhecido como Especificação Universal não vale.(. . .) De modo similar, a regra de inferência correspondente

conhecida como Instanciação Universal é rejeitada na lógica livre"(LAMBERT (2002), p. 124)[6].

O debate não precisa ser necessariamente entre duas lógicas distintas. BURGE (1975) e GRANDY (1972) discordam com respeito à semântica correta para a lógica livre. Burge defende a lógica livre negativa, na qual todas as fórmulas atômicas com ao menos um termo vazio são consideradas falsas, ao passo que Grandy defende uma lógica livre positiva, um sistema que permite que algumas dessas fórmulas possam ser verdadeiras.

Uma situação análoga pode ser encontrada na lógica modal. Burgess começa um de seus artigos com a seguinte questão:

> Qual, se é que existe algum, dos principais sistemas de lógica modal na literatura é aquele no qual os teoremas são todas as corretas, e somente as corretas, leis gerais da necessidade? (BURGESS (1999), p.81).

O autor reconhece que há dois aspectos distintos sobre esta discussão: de um lado, temos a noção semântica de validade e, de outro, o conceito sintático de demonstrabilidade. Em seguida, ele afirma que "na medida em que há um consenso entre os lógicos hoje, eu tomo que esta visão é a de que a lógica correta da demonstrabilidade é $S4$"(*idem*, p. 82). Não obstante, ele reconhece que "continua concebível que a lógica correta [para a demonstrabilidade] seja mais forte que $S4$; que seja algo intermediário entre $S4$ e $S5$"(*idem, p. 83.*). Isto mostra um debate real entre lógicos modais, o que significa que as lógicas modais falam do mesmo assunto, ainda que, eventualmente, algumas delas possam estar erradas.

Graham Priest reconhece que sua Lógica do Paradoxo

> é exatamente a lógica clássica com a pressuposição de que cada sentença é ou verdadeira, ou falsa, mas não ambas, substituída pelo pressuposto de que cada sentença é ou verdadeira, ou falsa, ou ambas. (PRIEST (2007), p. 158).

[6]Há também uma discussão interessante sobre se a lógica livre é uma extensão ou uma alternativa à lógica clássica. Lambert defende que ela pode ser ambas, dependendo da formulação da lógica clássica. Cf. LAMBERT (2002), pp. 131-133.

Ao tentar defender a existência de uma única lógica verdadeira, Priest define uma noção de super-validade tal que um argumento (ou fórmula) é super-válido se é válido em todas as lógicas diferentes:

> A mesma teoria lógica deve ser aplicada em todos os domínios, ou domínios diferentes requerem lógicas diferentes? (...) Mesmo que os modos de inferência legítima variem de domínio para domínio, deve haver um núcleo comum determinado pela interseção sintática de todos eles. Em virtude da tradição da lógica como sendo neutra com relação a seu domínio, isso tem boas razões para ser chamado de *a* lógica correta. (PRIEST (2006), p. 174, ênfase no original.)

Ora, esta proposta só faz sentido se reconhecermos que todas estas lógicas estão falando do mesmo assunto. Obviamente, um lógico paraconsistente não precisa ser monista. Newton da Costa, ao apresentar sua lógica C_1, afirma que ela "deve ser composta da maioria dos esquemas válidos e regras do cálculo proposicional clássico, [mas] o princípio de não-contradição não deve ser válido em geral"(da COSTA, KRAUSE & BUENO, 2007, p. 797). Asim, ele explicitamente reconhece acordos e desacordos entre as lógicas clássica e paraconsistentes.

Lógicos paraconsistentes também podem discordar entre si. PRIEST & ROUTLEY (1989) argumentaram no passado que a lógica paraconsistente de da Costa não tem uma negação propriamente dita. O principal argumento é que, dado que $p \wedge \neg p$ não é logicamente falso nas lógica de da Costa, então p e $\neg p$ não são contraditórios, mas apenas sub-contrários. Obviamente, o argumento depende do pressuposto de que uma característica essencial da negação é ser uma relação formadora de contradição.

Alguns anos depois, SLATER (1995) apresentou uma reformulação desde raciocínio, argumentando que não existem lógicas paraconsistentes em geral. Isto levou a um debate frutífero, com várias respostas, mostrando como as abordagens paraconsistentes podem ser distintas entre si[7].

[7]Cf. RESTALL (1997); BROWN (1999); PRIEST (1999); BÉZIAU (2002); PAOLI (2003).

Por fim, READ (1988), um lógico relevante monista, também reconhece a possibilidade do debate lógico:

> O desviante lógico atribui propriedades diferentes do lógico ortodoxo a um conectivo lógico. Desvio lógico é possível? É possível da mesma maneira que desacordo em qualquer outra área. (...) A referência do termo é fixada por referência a certas crenças provisórias. Mas, uma vez fixada, qualquer uma ou todas essas crenças podem ser questionadas. (READ (1988), p. 155).

Ele reconhece que as lógicas clássicas e relevantes discordam a respeito da formulação correta da noção de validade, e acredita que a lógica relevante está certa:

> Ou tratar 'se' como funcional-veritativo, ou o Tratamento Clássico da Validade está errado. Mas, se o tratamento funcional-veritativo do 'se' for abandonado, também deve ser o Tratamento Clássico da Validade. (...) Então, de qualquer forma, o Tratamento Clássico está errado. (READ (1988), p. 24).

Sua conclusão final é que

> Há apenas uma lógica verdadeira, e ela toma V como seu critério de validade[8]. Mas ela resulta da compreensão da verdadeira natureza de preservação da verdade, que a conclusão é verdadeira sempre que as premissão são verdadeiras. (V) deve ser interpretado, e desenvolvido, em uma metalinguagem relevante na qual a relevância das premissas para a conclusão é uma parte integral da preservação da verdade: se a conclusão, de fato, segue das premissas, então estas premissas devem ser logicamente relevantes para a conclusão. (READ (2006), p. 11)

É importante notar que o debate pode se dar em níveis diferentes. O desacordo entre Burge e Grandy gira em torno da interpretação correta de

[8] "(V): Uma conclusão, A, segue de premissas, Σ, se e somente se em qualquer caso no qual cada premissa em Σ é verdadeira, é também o caso no qual A é verdadeira"(READ (2006), p.1).

algumas noções lógicas, a saber: os quantificadores. O desacordo de Dummet, por sua vez, é com a teoria clássica de significado. A investigação do Burgess foca-se no nível da linguagem objeto, procurando pela lógica com os teoremas 'corretos' sobre o conceito de necessidade lógica. Read, por outro lado, discorda da metalinguagem clássica. Estes exemplos mostram que o debate não envolve somente diferentes lógicas, mas se refere a aspectos diferentes destas lógicas.

O cenário acima indica que existe um domínio comum entre certas lógicas distintas: lógicas clássica e intuicionista concordam em domínios finitos; lógicas clássica e paraconsistentes concordam em domínios consistentes; lógicas livre e clássica coincidem quando todo indivíduo do domínio denota; lógicas paraconsistentes e intuicionistas são equivalentes em domínios finitos e consistentes etc.

Não obstante, é fundamental explicitar que isto não implica na existência de um domínio comum a todas as lógicas[9]. Muito menos em um domínio grande o suficiente para ser considerado como uma lógica.

3.1 Mudança de Significado

Passemos, enfim, ao que consideramos a principal crítica ao pluralismo lógico, a saber: a tese de que, quando mudamos de lógica, mudamos o significado dos conectivos lógicos. Uma das primeiras formulações explícitas desta ideia está em CARNAP (1937). Curiosamente, este livro também contém a primeira formulação do Princípio de Tolerância, que consiste, segundo alguns comentadores, na primeira defesa de um tipo de pluralismo lógico. Para dissolver esse aparente conflito, comecemos com uma análise deste princípio, e investigando se ele leva a um pluralismo, e de que tipo[10].

[9]Este ponto será explorado adiante.

[10]Para uma versão expandida da argumentação desenvolvida na seção seguinte, cf. DIAS (2015).

3.1.1 Princípio de Tolerância e Pluralismo Lógico

O objetivo do *Logical Syntax* é

> fornecer um sistema de conceitos, uma linguagem, com a ajuda do qual os resultados da análise lógica serão precisamente formuláveis. A filosofia será substituída pela lógica da ciência, isto é, pela análise lógica dos conceitos e sentenças da ciência, pois a lógica da ciência não é nada mais que a sintaxe lógica da linguagem da ciência. (CARNAP (1937), p. viii.)

Com a formulação de uma sintaxe geral, aplicável a qualquer linguagem, Carnap pretende apresentar uma solução a vários problemas filosóficos. De fato, a ideia de uma sintaxe geral era substituir a própria filosofia[11]. Não obstante, há um problema particular que ocupa posição central neste livro, a saber: a discussão entre formalismo, intuicionismo e logicismo com respeito aos fundamentos da matemática.

É precisamente neste contexto que o Princípio de Tolerância surge[12]. Uma vez que uma metalinguagem sintática é formulada, é possível ver que as três soluções propostas consistem meramente na formulação de linguagens diferentes. Em outras palavras, desta perspectiva, logicismo, formalismo e intuicionismo consistem em três modos diferentes de formular uma linguagem, i.e., de estipular um conjunto de símbolos e algumas regras para manipulá-los. Nesse nível, não há necessidade de justificativa externa para tais formulações. Assim, o Princípio de Tolerância consiste em afirmar que

> *Em lógica, não há moral.* Todos têm liberdade para construir sua própria lógica, i.e., sua própria forma de linguagem, como quiser. Tudo que lhe é solicitado é que, se quiser discuti-la, é preciso enunciar seu método claramente, e apresentar regras sintáticas em vez de argumentos filosóficos. (CARNAP (1937), p. 52, ênfase no original.)

[11] Nos limitaremos a evidenciar os aspectos do *Logical Syntax* que permitem a formulação do Princípio de Tolerância. Não investigaremos os problemas específicos desta obra, tampouco sua aplicação para outras questões filosóficas.

[12] Carnap afirma, anos depois, que 'ele poderia, talvez, ser chamado mais precisamente de 'princípio do convencionalismo das formas de linguagem'". (CARNAP (1963), p.55).

Portanto, este princípio não oferece uma solução para o problema dos fundamentos da matemática, mas representa uma dissolução do problema. Deve-se compreender as soluções propostas como sugestões sobre como construir uma linguagem. Após isto, o que resta é investigar e avaliar as consequências que se seguem de cada linguagem. De forma esquemática, o objetivo de Carnap com sua sintaxe geral e o Princípio de Tolerância é colocar um fim em qualquer discussão sobre a justificativa, ou 'verdade' de uma lógica. De acordo com o filósofo alemão, é exatamente esta busca por uma justificativa que, por um lado impossibilita as investigações sobre as diversas linguagens distintas da lógica clássica e, por outro, cria vários pseudo-problemas sobre o tema. Neste sentido - e somente neste - é possivel compreender o projeto de Carnap como uma solução para os fundamentos da matemática.

É fundamental evidenciar que a noção de lógica no *Logical Syntax* é muito mais abrangente que a noção atual. Para Carnap, tolerância lógica significa tolerância com respeito à linguagem adotada. A linguagem pode conter aparatos inferenciais diferentes, como aritmética e teoria dos tipos. Todos os tipos de formulações são permitidos, desde que os símbolos introduzidos e suas regras de manipulação sejam explicitamente apresentados. Dito de outro modo, uma linguagem ou uma estrutura linguística é sintaticamente especificada por suas regras de formação e transformação. Até aqui, este é o procedimento usual hoje em dia. Não obstante, para Carnap, uma linguagem pode conter componentes formais e empíricos. Assim, são necessárias tanto regras lógicas quanto físicas. Na terminologia de Carnap, temos as L-regras - as regras lógicas -, e as P-regras - as regras físicas; as L-consequências, e as P-consequências.

Ainda que haja uma distinção precisa entre L-sentenças e P-sentenças, uma vez que uma linguagem foi formulada, ambos os tipos de sentença estão abertos à revisão. Quando uma P-regra é reformulada, isto é feito dentro da mesma linguagem. Assim, isto é apenas uma reformulação das sentenças empíricas formuladas em uma mesma linguagem. Por outro lado, reformular uma L-regra significa mudar a linguagem, uma vez que estamos mudando o

comportamento dos seus símbolos[13].

Tampouco há uma divisão extralinguística absoluta entre estas regras. Tal divisão somente é possivel após o estabelecimento de uma linguagem. Portanto, é possível, em princípio, que uma regra seja lógica em uma linguagem, e empírica em outra.

A própria noção de sintaxe, neste contexto, é diferente da sua noção atual. Carnap "desenvolve a ideia de sintaxe lógica de uma linguagem como uma teoria analítica pura da estrutura de suas expressões"(CARNAP (1937), p. 53). Alguns conceitos presentes na sua sintaxe geral, tais como o conceito de analiticidade, seriam considerados como semânticos atualmente. Neste sentido, é curioso que Carnap nomeou seu projeto, em momentos anteriores à sua publicação, como *metalógica* e, até mesmo, como *semântica*.

Como vimos, de acordo com o Princípio de Tolerância, podemos desenvolver diferentes tipos de linguagem. A próxima questão é: como formular diferentes estruturas linguísticas e por quê? A resposta é encontrada uma vez que reconhecemos o caráter auxiliar da lógica e matemática dentro de uma estrutura linguística. De acordo com Carnap:

> Se considerarmos matemática aplicada como um instrumento de dedução dentro do campo do conhecimento empírico, em vez de um sistema de informação, então muitos dos problemas controversos são reconhecidos como sendo questões não sobre verdade, mas sobre conveniência técnica. A questão é: qual forma de sistema matemático é mais adequado para o propósito mencionado? Qual garante maior segurança? Se compararmos, e.g., o sistemas de matemática clássica e intuicionista, descobrimos que o primeiro é muito mais simples e tecnicamente eficiente, enquanto o segundo é mais seguro com relação a ocorrências surpreendentes, e.g., contradições. (CARNAP (1937), p. 50.)

Portanto, esta escolha é determinada por questões puramente pragmáticas, a saber: qual o propósito de tal formulação? Deste modo, questões

[13]Portanto, quando o conjunto de P-regras é vazio, o pluralismo de linguagem se reduz a um pluralismo lógico.

referentes à validade de um dado argumento podem ser entendidas de duas formas. Em primeiro lugar, podemos olhá-la como uma questão interna. Isto significa que escolhemos uma lógica, formulamos este argumento e, então, avaliamos sua validade. Outra opção é compreender este problema como externo. Podemos perguntar: Devemos interpretar este argumento na linguagem $\mathcal{L}$ ou em $\mathcal{L}^*$? Note que, em ambos os casos, não há resposta absoluta com respeito à validade de um dado argumento.

O próximo passo é avaliar se o Princípio de Tolerância implica em um pluralismo e, caso implique, de que tipo. Segundo RESTALL (2002), de uma forma esquemática, um lógico pluralista defende que existem situações tais que:

i) $\alpha, \neg\alpha \vdash_L \beta$; e

ii) $\alpha, \neg\alpha \nvdash_{L^*} \beta$.

Assim, há, ao menos, duas lógicas distintas que avaliam de modo diferente a validade do mesmo argumento. Do que foi discutido anteriormente, podemos afirmar que o Princípio de Tolerância não implica, necessariamente, em um pluralismo lógico. Isso pois, em primeiro lugar, ele não afirma que toda estrutura linguística seja legítima. Analizando a seguinte passagem, é claro que tal princípio tem seus limites:

> de acordo com meu princípio de tolerância, eu enfatizei que, ao passo que é importante fazer distinções entre definições e provas construtivistas e não construtivistas, parece aconselhável não proibir certas formas de procedimento, mas investigar todas as formas úteis. É verdade que certos procedimentos, e.g., aqueles admitidos pelo construtivismo ou intuicionismo, são mais seguros que outros. Portanto, é recomendável aplicar estes procedimentos o máximo possível. Não obstante, há outras formas e métodos que, ainda que menos seguros pois não temos uma prova de sua consistência, parecem ser indispensáveis para a física. Em tais casos, parece não haver boa razão para proibir estes procedimentos, na medida em que nenhuma contradição foi encontrada. (CARNAP (1937), p. 49.)

Note que tampouco temos tanta liberdade para formular uma linguagem. O Princípio de Tolerância não permite linguagens contraditórias. E o motivo

para tal é que Carnap ainda aceita o que chamamos de princípio de explosão. Isto é claro a partir da seguinte passagem, na qual Carnap apresenta, de modo informal, uma definição de sentenças analíticas:

> uma sentença analítica é absolutamente verdadeira independente dos fatos empíricos. Portanto, ela não fala nada sobre os fatos. Por outro lado, uma sentença contraditória diz muito para ser capaz de ser verdadeira, pois, de uma sentença contraditória, cada fato, bem como seu oposto [sua negação], pode ser deduzido. (CARNAP (1937), p. 41.)

Isto é, mesmo permitindo a formulação de diferentes linguagens, uma prova da consistência de uma dada linguagem ainda é utilizada como um parâmetro de segurança. Além disso, Carnap nunca afirma que duas linguagens distintas são igualmente legítimas, o que é parte central do pluralismo lógico.

O Princípio de Tolerância se limita a permitir o desenvolvimento de diferentes linguagens, e a avaliar suas consequências de acordo com critérios puramente pragmáticos. Ainda assim, tal tolerância abre espaço para um pluralismo lógico. Mas que tipo de pluralismo seria este? Para responder tal questão, retomemos a posição de Quine sobre o debate entre lógicas distintas. Para o filósofo, quando um lógico clássico defende que dada proposição é uma lei lógica, e outro lógico afirma o oposto, eles estão falando de assuntos diferentes. Este raciocínio já está presente no pensamento de Carnap. Ao afirmar que cada um é livre para escolher uma lógica, Carnap dá um enorme passo em direção a um convencionalismo e pluralismo lógico. Não obstante, uma vez que aceitar uma lógica implica em aceitar a linguagem que a formaliza, temos, em última instância, um pluralismo de linguagem. Isso significa que, em particular, um lógico intuicionista e um clássico não estão discutindo o mesmo assunto; eles estão falando em linguagens diferentes e, portanto, estão falando de matemáticas diferentes. Em última instância, não há desacordo entre ambos, apenas uma diferença de linguagem. Não há diferença na forma como eles avaliam o mesmo argumento mas, sim, a respeito da própria forma do argumento.

Logo, se compararmos ao esquema anterior, o pluralismo de Carnap afirmaria que

i) $\alpha, \neg_L \alpha \vdash \beta$; e

ii) $\alpha, \neg_{L^*} \alpha \vdash \beta$.

Mas isto não é tudo. Do ponto de vista de Carnap, a formulação esquemática de Restall seria simplesmente incoerente. Cada lógica tem uma linguagem subjacente. Portanto, uma vez que a linguagem é estabelecida, não há disputa interna com respeito à validade de um dado argumento. Isso significa, usando uma terminologia atual, que Carnap aceita a tese de que uma mudança nas regras sintáticas de um conectivo lógico significa uma mudança no seu significado.

Portanto, o caráter analítico de cada lógica é preservado, bem como sua universalidade. No entanto, cada lógica é universal apenas no seu própio domínio de discurso. Nas palavras de Shapiro, temos, assim, um "*monismo lógico banguela* (*toothless logical monism*)"(SHAPIRO (2014), p. 122).

3.1.2 Significado Semântico

Acima, vimos que Carnap estabelece a noção de que mudança nas regras sintáticas dos conectivos significa uma mudança no significado dos mesmos.

Entretanto, é possível, também, defender que o significado dos conectivos lógicos é dado não por suas regras sintáticas, mas por suas condições de verdade.

O precursor desta ideia é Frege:

> É determinado através de nossas estipulações sob quais condições o nome [expressão] representa o Verdadeiro. O sentido desse nome [expressão] - o *pensamento* - é o pensamento de que essas condições são satisfeitas. (...) Os nomes [expressões], simples ou compostos dos quais o nome de um valor de verdade é constituído, contribuem para a expressão de um pensamento, e essa contribuição individual [de cada constituinte] é o seu *sentido*. Se um

> nome [expressão] faz parte do nome de um valor de verdade [i.e. faz parte de uma sentença], então o sentido do primeiro é parte do pensamento expresso pelo segundo. (FREGE (1964), §32, enfâses no original.)

Aqui, a tese central de que o sentido da sentença é dado por sua condição de verdade está associada com outros elementos da filosofia Fregeana, tal como a ideia de que as sentenças denotam os objetos Verdadeiro e Falso ou, ainda, de que são nomes dos valores de verdade.

Wittgenstein abandona esses elementos Fregranos, mas mantém a tese central sobre a constituição do significado das sentenças:

> A proposição *mostra* como estão as coisas *se* for verdadeira. E *diz que* estão assim. (WITTGENSTEIN (2001), 4.022, ênfase no original)
>
> Entender uma proposição significa saber o que é o caso se ela for verdadeira (WITTGENSTEIN (2001), 4.024.)

Posteriormente, outros filósofos também defenderam que o significado das constantes lógicas são dadas pelas suas condições de verdade[14].

Mesmo supondo que esta tese é verdadeira, ainda há possibilidade de rivalidade entre lógicas distintas. Tomemos, por exemplo, a LP de Priest[15], e a lógica K_3, de Kleene[16]. Ambas possuem as mesmas condições de verdade para seus conectivos, representadas pelas tabelas de verdade abaixo:

Negação

α	$\neg\alpha$
1	0
i	i
0	1

[14]Cf. QUINE (1960), PRIEST (2006). Para uma análise dessas posições, cf. SHAPIRO (2014).
[15]PRIEST (1979).
[16]PRIEST (2008), p. 122-4.

Implicação

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
1	1	1
1	i	i
1	0	0
i	1	1
i	i	i
i	0	i
0	1	1
0	i	1
0	0	1

Disjunção

α	β	$\alpha \vee \beta$
1	1	1
1	i	1
1	0	1
i	1	1
i	i	i
i	0	i
0	1	1
0	i	i
0	0	0

Conjunção

α	β	$\alpha \wedge \beta$
1	1	1
1	i	i
1	0	0
i	1	i
i	i	i
i	0	0
0	1	0
0	i	0
0	0	0

Formalmente, a diferença entre as duas lógicas está nos valores designados[17]. Em K_3, um argumento é válido quando é impossível que suas premissas tenham valor 1, e a conclusão tenha valor 0. Por outro lado, um argumento é válido em LP se é impossível que suas premissas tenham valor 1 ou i, mas sua conclusão seja 0. É simples verificar que a lei de não-contradição é válida em LP, mas inválida em K_3[18]. Mas, como as condições de verdade dos conectivos são as mesmas, segue-se que os conectivos das duas lógicas são os mesmos.

Em geral, é possível encontrar uma lógica multi-valorada cujos conectivos apresentam as mesmas condições de verdade de uma dada lógica e, variando os valores designados na definição de validade, temos como resultado uma avaliação distinta com respeito à validade de um mesmo argumento.

Encontramos situação análoga quando comparamos a lógica clássica com a lógica intuicionista. Se há uma diferença entre os significados de seus conectivos, como podemos dizer que há uma intersecção entre as fórmulas válidas dessas lógicas? Como podemos afirmar que, ao lidar com domínios finitos, as lógicas coincidem? Isso significa que os conectivos mudam apenas quando falamos sobre o infinito? Se este for o caso, então o signficado dos conectivos

[17] A interpretação intuitiva do valor i também é diferente. Em LP, i significa 'verdadeiro e falso'; em K_3, i significa 'nem verdadeiro, nem falso'.

[18] De fato, K_3 não tem nenhuma fórmula válida.

não é dado meramente pelas suas condições de verdade; o domínio que está sendo formalizado também contribiu para estabelecer tais significados.

Em última instância, nenhum monista lógico apresenta uma teoria do significado - ou, ao menos, uma teoria do significado lógico - completa, explicando exatamente no que consiste essa tese e porque devemos aceitá-la. Portanto, não sabemos exatamente o que contribui - ou não contribui - para estabelecer o significado dos conectivos lógicos.

ESTRADA-GONZÁLEZ (2011) sugere uma análise frutífera desta situação. De acordo com este autor, aqueles que defendem esta tese têm uma visão maximalista dos conectivos. Isto é, quando eles afirmam que as condições de verdade dão significado aos conectivos, eles estão, na verdade, defendendo que este significado é determinado por um conjunto de teses, a saber:

> - As condições de verdade, propriamente ditas, que pressupõem
> - um número mínimo de valores de verdade, geralmente dois (verdadeiro e falso).
> - Um número exato de valores de verdade.
> - Uma noção precisa de validade que, por sua vez, pressupõe
> - uma forma precisa de separar os valores de verdade. (ESTRADA-GONZÁLEZ (2011), p. 119)

Um maximalista, ao afirmar que as condições de verdade determinam o significado dos conectivos lógicos, geralmente pressupõe - sem explicitar - todos os elementos da lista acima. Mas, como vimos, não há uma teoria do significado completamente desenvolvida e, portanto, esses pressupostos geralmente não são reconhecidos neste debate. Sendo assim, propomos, seguindo ESTRADA-GONZÁLEZ (2011), uma teoria minimalista do significado, de tal modo que nem todo elemento desta lista contribui para a constituição do significado dos conectivos lógicos mas, apenas, suas condições de verdade, e um número mínimo de valores de verdade.

É importante ressaltar que é possível formular uma versão sintática similar à teoria proposta aqui. De fato, a abordagem sintática é anterior ao trabalho de Estrada-González[19]. Assim, um maximalista - do ponto de vista sintático - pressupõe, usualmente, uma noção precisa de dedução que também é constituinte do significado dos conectivos lógicos.

Não obstante, uma teoria minimalista sintática do significado também permite a formulação de diferentes lógicas, mas mantendo as mesmas regras de inferência para seus respectivos conectivos. Assim, RESTALL (2014) desenvolve um aparato formal que permite manter as regras de inferência intactas, e variar algumas propriedades estruturais da lógica como, por exemplo, a possibilidade de um argumento ter múltiplas conclusões ou não. Quando permitimos múltiplas conclusões, obtemos a lógica intuicionista; caso contrário, temos a lógica clássica. Sendo assim, variando tais propriedades estruturais, obtemos lógicas distintas, mas com os mesmos conectivos[20].

Portanto, isoladamente, nenhuma das teorias do significado implica, necessariamente, em um monismo lógico. Mas, o que dizer quando aceitamos que tal significado é dado pela conjunção das abordagens semânticas e sintáticas, isto é, quando o significado dos conectivos é determinado tanto pelas suas condições de verdade quanto por suas regras de inferência? Neste caso, os contraexemplos propostos acima não se sustentam: os conectivos de K_3 e LP têm as mesmas tabelas de verdade, mas suas regras de inferência são diferentes; as lógicas clássica e intuicionista têm as mesmas regras de inferência no aparato desenvolvido por Restall, mas seus conectivos têm condições de verdade distintas.

Desse modo, é exatamente neste contexto que a paraconsistentização abre caminho para um tipo particular de pluralismo, uma vez que ela é imune a ambas as objeções.

[19]Cf. nota 7 de ESTRADA-GONZÁLEZ (2011).
[20]Para outra possibilidade de teoria minimalista sintática, cf. PAOLI (2014).

3.1.3 Paraconsistentização e Variação de Significado

Começemos com a noção semântica de paraconsistentização. Como vimos, dada uma lógica L, sua contraparte paraconsistente é obtida através da seguinte ação:

$$\Gamma \models_L^P \alpha \Leftrightarrow \text{Existe } \Gamma' \subset \Gamma, L - \text{satisfatível, tal que } \Gamma' \models_L \alpha$$

A única alteração com respeito à lógica inicial se dá na definição de consequência semântica. Não há alteração nas condições de verdade dos conectivos.

É preciso explicar a afirmação anterior com mais calma. A princípio, pode parecer que a alteração proposta pela paraconsistentização muda o significado dos conectivos. Tomemos, por exemplo, a lógica clássica. Nela, vale que $\alpha \wedge \beta \models_C \alpha$. Por outro lado, este resultado não vale na lógica paraclássica. Basta ver que $p \wedge \neg p \not\models_C^P p$. Assim, pode parecer que o significado da conjunção mudou de uma lógica para outra. Não obstante, temos que identificar exatamente a fonte desta mudança. A paraconsistentização não efetua nenhuma mudança no nível dos conectivos lógicos. A alteração proposta na relação de consequência implica em uma restrição na aplicação dos conectivos. Não se trata de modificar os conectivos, mas de avaliar se eles devem ou não ser usados. Quando o domínio de aplicação é consistente, os conectivos são usados exatamente da mesma forma que na lógica original. Em situações inconsistentes, por sua vez, o uso dos conectivos é limitado.

Então, o que há é uma restrição na aplicação dos conectivos a subconjuntos consistentes de um certo conjunto inicial. Mas, segundo nossa teoria minimalista do significado, isto não contribui para a constituição do significado dos conectivos lógicos. Afinal, qual o sentido em dizer que os conectivos são iguais em contextos consistentes, mas diferentes em contextos inconsistentes? Logo, estes são os mesmos nas duas lógicas.

Encontramos uma situação análoga quando analisamos a paraconsisten-

tização do ponto de vista sintático. Esta é obtida a partir da noção de paradedução que, como vimos, altera apenas a noção de dedução da lógica sendo paraconsistentizada. Retomemos a definição de paradedução:

Definição 1.6.10 Sejam $S = (X, \mathbb{A}, \mathbb{R})$ um sistema formal e $\Gamma \subseteq X$. Uma **paradedução** em S a partir de Γ é uma sequência finita de pares $\sigma = (\Gamma_1, \alpha_1), ..., (\Gamma_n, \alpha_n)$, para $1 \leq i \leq n$, e $\Gamma_i \subseteq X$, $\alpha_i \in X$, tal que:

1. Γ_i é S-consistente, para todo $1 \leq i \leq n$.
2. Para cada $1 \leq i \leq n$, temos:
   (a) $\alpha_i \in \Gamma$ e $\Gamma_i = \{\alpha_i\}$ (e, portanto, $\{\alpha_i\}$ é S-consistente); ou
   (b) $\alpha_i \in \mathbb{A}$ e $\Gamma_i = \emptyset$; ou
   (c) α_i é uma consequência imediata de um conjunto de fórmulas anteriores $\{a_{i_1}, ..., a_{i_k}\}$ na sequência $\Pi_2\sigma$ e $\Gamma_i = \bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_{i_j}$ (e, também, Γ_i é S-consistente).

Neste caso, podemos ver, explicitamente, a restrição da aplicação dos conectivos. As regras de inferência só são aplicadas em contextos consistentes. Como tal restrição não altera as regras de inferência, o significado dos conectivos é o mesmo na lógica inicial e na sua contraparte paraconsistente obtida sintaticamente.

Uma vez que a paraconsistentização preserva correção e completude, há uma correlação entre os conectivos obtidos pelas transformações semântica e sintática, isto é, eles são os mesmos conectivos. Portanto, se levarmos às últimas consequências a tese de que o significado dos conectivos lógicos é dado por suas regras de inferência e suas tabelas de verdade, a paraconsistentização mostra que, ainda assim, é possível haver rivalidade entre lógicas, isto é, é possível que duas lógicas diferentes discordem sobre a validade de um mesmo argumento. Dito de outra forma, é possível a construção de lógicas diferentes em uma mesma linguagem.

Vejamos um caso concreto desta estratégia. Durante toda sua obra, Dummett defende que a lógica intuicionista é a lógica correta para fundamentar a matemática, exigindo uma revisão na lógica (clássica) subjacente à matemática e, consequentemente, uma revisão da própria matemática (clássica). Mas o conflito entre lógica clássica e intuicionista não é meramente acerca da aceitação de leis lógicas distintas. O principal motivo pelo qual

> é possível colocar uma lei lógica básica em dúvida é que, subjacente ao desacordo sobre a lógica, há um desacordo ainda mais fundamental sobre o modelo correto de significado, isto é, sobre o que devemos considerar como constituindo uma compreensão de um enunciado. (DUMMETT (1991), p. 17).

Portanto, sua tese é de que a lógica clássica está errada porque baseia-se em uma teoria do significado falsa. Em particular, o significado clássico das constantes lógicas é incoerente. Uma teoria do significado correta deve ser baseada na manifestabilidade da linguagem. Ter conhecimento sobre uma sentença é saber como usá-la. Dito de forma diferente, todo aspecto relevante para determinar o significado de uma sentença deve ser publicamente manifestado. Assim, "se dois indivíduos concordam completamente com respeito ao uso de um enunciado, então eles concordam sobre seu significado"(DUMMETT (1978), p. 216).

De acordo com Dummett, a teoria do significado subjacente à lógica clássica não satisfaz essa exigência da manifestabilidade, pois ela

> requer que a compreensão de uma sentença consista em um conhecimento da condição para que ela seja verdadeira (...), isto é, em um reconhecimento do que tem que ser o caso para que ela seja verdadeira, devemos possuir uma compreensão da quantificação sobre um domínio infinito que não se relaciona com nossos próprios meios restritos de reconhecer como verdadeiras senteças formadas por tal quantificação, mas que produz uma concepção de verdade para tais sentenças como algo que elas, determinadamente, possuem ou não possuem. (DUMMETT (2000), p. 258).

Deste modo, o princípio de bivalência, quando aplicado a sentenças indecidíveis, constitui-se como uma noção transcendental:

> Supor que existe um ingrediente do significado que transcende o uso que é feito daquilo que carrega o significado é supor que alguém pode ter aprendido tudo o que é ensinado diretamente quando a linguagem de uma teoria matemática é ensinada a ele, e pode então comportar-se de todas as formas como alguém que entendeu essa linguagem e, no entanto, não a entende realmente (...). Mas supor isto é tornar o significado inefável, isto é, em princípio incomunicável. (DUMMETT (1978), pp. 217-218).

Mas esta revisão na lógica subjacente ao raciocínio matemático só é possível quando a visão holística da linguagem é rejeitada, isto é, quando se rejeita a tese de que o significado de todo enunciado é dado por suas conexões com outros enunciados. Caso se aceite esta tese, mudar o significado de alguns enunciados implicaria em mudar toda a linguagem. A solução, de acordo com Dummett, é adotar uma abordagem molecular com respeito à linguagem. Esta é uma posição

> na qual sentenças individuais transmitem um conteúdo que pertencem a elas de acordo com a forma na qual elas são compostas a partir de seus constituíntes, independentemente de outras sentenças da linguagem que não envolvam tais constituintes. (DUMMETT (1978), p. 222)

No caso específico de uma teoria do significado para as constantes lógicas, esta solução significa substituir a noção central de verdade pela noção de prova: saber o significado de um enunciado matemático é ser capaz de reconhecer uma prova para este. E, aqui, a visão molecular exerce um papel essencial. As provas das sentenças complexas são dadas com base nas provas dos seus constituintes mais simples. Portanto, o significado das sentenças complexas é determinado por seus componentes. No caso particular das constantes lógicas, seu significado é dado por suas condições de prova, isto é, suas regras de introdução.

Mas não é o caso que todo conjunto de regras determina o significado de um conectivo lógico. Tome, por exemplo, a estipulação de Heyting sobre o significado da implicação:

> A implicação $\mathfrak{p} \to \mathfrak{q}$ pode ser afirmada se e somente se possuímos uma construção $\mathfrak{r}$ que, combinada com qualquer construção provando $\mathfrak{p}$ (supondo que a última seja efetuada), automaticamente produziria uma construção provando $\mathfrak{q}$. Em outras palavras, uma prova de $\mathfrak{p}$, junto com $\mathfrak{r}$, produziria uma prova de $\mathfrak{q}$. (HEYTING (1956), p. 102-3)

Como não há restrição à prova de $\mathfrak{p}$[21], o próprio $\mathfrak{p}$ poderia ser uma implicação e, portanto, a definição seria circular. Dummett reconhece que precisamos distinguir entre provas em geral[22], e provas canônicas. Provas canônicas são verificações diretas de uma sentença, ao passo que provas em geral são verificações indiretas que podem ser transformadas em provas canônicas, se necessário:

> as regras de introdução para uma constante c representam o meio direto ou canônico de estabelecer a verdade de uma sentença com o operador principal c. Um enunciado pode frequentemente ser estabelecido por meios indiretos, mas rotular certos meios como 'canônicos' é afirmar que, sempre que tivermos razão para afirmar o enunciado, poderíamos ter chegado ao nosso direito de fazê-lo por esses meios restritos. (DUMMETT (1991), p. 252)

Assim, as provas que determinam o significado dos enunciados são as provas canônicas. Mas esta limitação às provas canônicas ainda não é o suficiente para determinar o significado dos conectivos. Deve haver uma harmonia entre as regras de introdução e de eliminação. Formalmente, isto significa que a linguagem com ambas as regras de introdução e eliminação deve constituir uma tradução conservativa da linguagem sem as regras de eliminação. Em outras palavras,

> Para uma constante lógica arbitrária c (...) não deveria ser possível - primeiro aplicando uma das regras de introdução para c e, então, imediatamente extraindo uma consequência da conclusão daquela regra de introdução através de uma regra de eliminação da qual ela é a premissa maior - derivar das premissas da regra de introdução uma consequência que não poderia ser obtida de outra forma. (DUMMETT (1991), pp. 247-248)

[21] Heyting usa letras góticas para denotar proposições arbitrárias.

[22] Ele frequentemente se refere a provas em geral como demonstrações.

Enfim, estas são as restrições que Dummett impõe ao desenvolvimento da correta teoria do significado e, de acordo com ele, a lógica resultante desta teoria é a lógica intuicionista.

Mostraremos como é possível, utilizando a noção de paraconsistentização sintática, construir uma lógica distinta daquela proposta por Dummett que, não obstante, satisfaz todos os requisitos impostos pelo autor.

Dummett apresenta a seguinte axiomática para a lógica intuicionista:

i) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

ii) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta)$

iii) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$

iv) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$

v) $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$

vi) $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$

vii) $\alpha \vee \beta \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma))$

viii) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

ix) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$

x) $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$[23]

A única regra de inferência é *Modus Ponens*:

$$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

Em seguida, ele apresenta a definição usual de derivação que, no nosso trabalho, estamos chamando de dedução: uma dedução de α a partir de um conjunto Γ de fórmulas é uma sequência finita de fórmulas, tal que cada fórmula da sequência é ou membro de Γ, ou axioma, ou obtida de fórmulas anteriores pela aplicação de uma regra de inferência.

[23]Cf. DUMMETT (2000), p. 91. Limitamos nossa investigação ao caso proposicional.

De acordo com Dummett, a lógica intuicionista apresentada acima seria a única lógica resultante de uma teoria do significado correta, isto é, que fosse anti-realista; baseada na noção de significado-enquanto-uso; cujos conectivos satisfazem o critério de harmonia; e seu significado é dado pelas formas canônicas de prova.

Porém, se aplicarmos a paraconsistentização sintática à lógica intuicionista, obtemos uma lógica intuicionista paraconsistente, sem alterar o significado dos conectivos. Portanto, a lógica resultante desta operação também satisfaz todas as exigências impostas por Dummett. Isto significa que a argumentação de Dummett não implica, necessariamente, na existência de uma única lógica correta. Se levarmos em conta as diferentes formas de paraconsistentizar uma lógica temos, então, uma gama de lógicas intuicionistas paraconsistentes que satisfazem os critérios determinados por Dummett.

Este resultado é particularmente importante para muitas aplicações da lógica paraconsistente. É comum a tese de que teorias inconsistentes exigem uma lógica subjacente paraconsistente. Assim, seria possível formalizar uma teoria de conjuntos inconsistentes, o cálculo infinitesimal, a teoria atômica de Bohr, etc., em diferentes lógicas paraconsistentes. No entanto, se pressupormos a tese de que o significado dos conectivos lógicos é dado por suas condições de verdade e/ou suas regras de inferência, a teoria de conjuntos clássica e a teoria de conjuntos inconsistentes não estariam, necessariamente, falando do mesmo assunto. O mesmo valeria para a mecânica clássica e a quântica.

A paraconsistentização oferece uma solução mais natural para este tipo situação. Imagine um lógico tentando formalizar uma dada teoria e investigando suas consequências lógicas. Então, este lógico escolhe uma lógica explosiva que lhe pareça adequada para esta tarefa[24]. Não obstante, no decorrer da investigação, são encontradas informações inconsistentes que, dada a lógica escolhida, trivializam o sistema. Aplicando a paraconsistentização, mantém-se algumas características essenciais da lógica original - em particu-

[24]Esta escolha pode ser baseada em critérios pragmáticos, epistêmicos ou outros.

lar, seus conectivos e teoremas são mantidos -, mas evita-se a trivialização da teoria. Assim, por exemplo, um intuicionista que lide com uma teoria contraditória pode continuar estudando-a com a contraparte paraconsistente de sua lógica que, entre outras coisas, refuta o terceiro excluído e a redução por absurdo, mantendo assim as características centrais da lógica original, mas evitando a trivialidade.

Capítulo Quatro

Pluralismo diz-se de várias formas

Logic is the beginning of wisdom ... not the end.

- *Mr. Spock*

O capítulo anterior apresentou a relação entre a paraconsistentização de lógicas e o debate sobre pluralismo e monismo lógico. Concentramos nossa atenção nas críticas ao pluralismo que poderiam ser contornadas com o aparato desenvolvido nos capítulos iniciais. A análise desse debate, entretanto, leva a críticas que são independentes da paraconsistentização de lógicas, mas são fundamentais para uma eventual defesa do pluralismo lógico. Sendo assim, este capítulo consiste em uma breve investigação de outras possíveis objeções ao pluralismo lógico, bem como suas respectivas respostas.

4.1 Níveis de Pluralismo Lógico

É importante reconhecer que há diferentes níveis nos quais um pluralismo pode surgir. Em primeiro lugar, podemos ter um *pluralismo puro*, que consiste em afirmar a existência de distintas lógicas puras, isto é, formulações

completamente abstratas da noção de consequência lógica, sem nenhuma preocupação com a eventual aplicação desta noção a algum domínio extralógico de objetos.

Podemos ter, também, um *pluralismo teórico*, que se preocupa com aplicações teóricas da lógica. Neste nível, ser um pluralista lógico consiste em defender que existem lógicas distintas igualmente adequadas para formalizar um mesmo domínio[1]. Por exemplo, em domínios inconsistentes, lógicas paraconsistentes são mais adequadas do que a lógica clássica, visto que, nesta, tudo se segue de contradições. Não obstante, muitas lógicas paraconsistentes são equivalentes à lógica clássica em domínios consistentes e, portanto, são igualmente adequadas nesta situação.

Por fim, há o chamado *pluralismo canônico*, que defende que, mesmo quando o domínio a ser investigado é o da linguagem natural, isto é, investiga os cânones tradicionais de inferência, é possível ter mais de uma lógica adequada.

Feitas as devidas distinções, podemos levantar as seguintes perguntas: Alguma dessas formas de pluralismo está correta? Quais as consequências filosóficas destas posições? Analisemos caso a caso.

Alguns monistas lógicos defendem que um pluralismo puro, ainda que coerente, é simplesmente trivial[2]. BUENO (2002) afirma que, se um pluralismo puro é trivial, o é, no máximo, de um ponto de vista sociológico, ou seja, é trivial que hoje há várias lógicas puras. Mas, o fato de que isso é um fenômeno recente na lógica mostra que não se trata de algo filosoficamente trivial, e pode ser comparado com a revolução que as geometrias não-euclidianas causaram na matemática. Não obstante, o interessante não é meramente o fato de que há várias lógicas diferentes, mas como devemos interpretar essa pluralidade.

[1]Isso não significa, obviamente, que, existe mais de uma lógica adequada para a formalização de todos os domínios.

[2]Cf. PRIEST (2006).

Do ponto de vista filosófico, esta pluralidade é extremamente importante. Por exemplo, Frege e Russell, dois dos maiores nomes da formulação da lógica clássica, defendiam uma visão universal da lógica, de tal modo que suas leis eram necessárias, *a priori*, e irrestritas com relação ao seu domínio de aplicação. Como consequência, nada poderia ser dito de fora da lógica. Assim, não só questões metalógicas estão ausentes nos escritos desses autores, mas a própria possibilidade de lógicas distintas e rivais é excluída de princípio[3]. Ainda que eles tenham efetuado mudanças profundas na noção de lógica, seu caráter universal permanece o mesmo desde, ao menos, Aristóteles.

A aceitação de um pluralismo lógico, ainda que do ponto de vista puramente abstrato, é um marco na história da lógica, e muda significantemente o debate de questões centrais da lógica, tais como a determinação do significado dos conectivos lógicos, e a relação entre lógica e racionalidade. Outrossim, qualquer outro tipo de pluralismo lógico pressupõe a possibilidade de desenvolver múltiplas lógicas puras. Portanto, a existência de um pluralismo puro não pode ser considerada meramente trivial.

O pluralismo teórico também é uma forma de relativismo, visto que uma lógica seria correta relativamente ao fenômeno que se pretende representar. Um monista lógico tende a argumentar que há critérios para escolher entre lógicas rivais na aplicação em um dado domínio[4]. Critérios como simplicidade, falta de elementos *ad hoc*, adequação aos dados, etc. são geralmente usados. No entanto, não há garantia de que tais critérios estabeleçam a adequação de uma única lógica. Tomemos, por exemplo, o conceito de simplicidade. Ao contrário do que parece, trata-se de um conceito muito complexo. O que significa ser simples? Ao avaliar uma lógica há, ao menos, três noções distintas de simplicidade[5], a saber: simplicidade com respeito à ontologia pressuposta, com respeito aos conceitos básicos, ou com respeito aos postulados lógicos. E, obviamente, esses três tipos de simplicidade podem entrar em conflito. Uma lógica pode ser mais simples que outra em termos de sua

[3]Isto está relacionado com a distinção entre lógica como cálculo e lógica como linguagem, proposta por van HEIJENOORT (1967).

[4]Cf. PRIEST (2006), p. 195.

[5]Cf. LEHRER (1990), capítulo 5.

ontologia, mas conter conceitos básicos mais complexos; ou pressupor menos postulados lógicos, mas com uma ontologia mais forte que outra. Quando vários desses critérios são analisados em conjunto, a tarefa de determinar uma única lógica adequada parece menos factível ainda: uma lógica pode ser mais simples que outra, mas com menor adequação aos dados; pode ter menos elementos *ad hoc*, mas ser mais complexa etc. Assim, em princípio, não podemos descartar uma forma de pluralismo teórico.

Contra a existência do pluralismo canônico, PRIEST (2006) argumenta que: ou lógicas diferentes são rivais, ou não o são, isto é, ou elas discordam acerca da validade de certos argumentos, ou não discordam. Se não forem rivais, então não importa qual será a escolhida. Todas avaliam igualmente os argumentos e, portanto, para a tarefa de formalizar argumentos da linguagem natural, essas lógicas são equivalentes. Porém, se elas forem rivais, então apenas uma delas é correta. De qualquer forma, o resultado final é uma única lógica. BUENO (2002) defende que este é um falso dilema, pois postula um pressuposto que é rejeitado por um lógico pluralista, a saber: que quando duas lógicas rivais são diferentes, apenas uma delas está certa. A recusa desta tese consiste precisamente em um dos pontos essenciais do pluralismo lógico.

4.2 Variação de Domínio

Um pluralista lógico defende que é possível que - ao menos - duas lógicas discordem e, não obstante, sejam igualmente adequadas para um determinado domínio. Isso pois, em primeiro lugar, essas lógicas podem concordar inteiramente neste domínio, mas discordar em domínios diferentes. Este é exatamente o caso da lógica paraconsistente e da lógica clássica. Ambas concordam em domínios consistentes, mas diferem em domínios inconsistentes. Do mesmo modo, a lógica clássica e a intuicionista avaliam igualmente os argumentos em domínios finitos, mas discordam em domínios infinitos. Além disso, é possível que uma determinada lógica seja capaz apenas de formalizar

partes de uma dada teoria, e outra lógica somente consiga formalizar outras partes desta teoria e, no entanto, podemos não conseguir determinar qual formalização é a mais adequada. Para ver como isso é possível, consideremos a seguinte objeção ao pluralismo:

> Suponha que alguém seja pluralista [com respeito à lógica]. Seja s alguma situação sobre a qual estamos raciocinando; suponha que s esteja em classes diferentes de situações, como K_1 e K_2. Devemos usar a noção de validade apropriada para K_1 ou K_2? Não podemos responder 'ambas' aqui. Tome alguma inferência que é válida em K_1, mas inválida em K_2, $\alpha \vdash \beta$, e suponha que saibamos (ou assumamos) que α vale em s; podemos, ou não, aceitar β? Ou sim, ou não: não pode haver pluralismo sobre isto. De fato, a resposta é que podemos, uma vez que s está em K_1, e a inferência preserva verdade em todas as situações em K_1. Em outras palavras, se sabemos que uma situação sobre a qual estamos raciocinando está na classe K, estamos justificados em raciocinar com a validade definida em uma classe restrita de situações K. (PRIEST (2006), p. 203.)

O problema com esse raciocínio é que ele nos conta apenas parte da história. Ainda que na situação descrita consigamos saber qual lógica usar, há vários contextos em que tal decisão não é óbvia[6]. Considere, por exemplo, que $\alpha \vdash \neg\beta$ é válido em K_2. Assim, teríamos uma situação inconsistente[7], e não saberíamos, necessariamente, qual lógica seria mais adequada. Ademais, imaginem a seguinte situação análoga: temos esse cenário apresentado por Priest e, além disso, sabemos que $\alpha \vdash \delta$ é válida em K_2, mas inválida em K_1. Além disso, suponha que δ e β sejam igualmente importantes para a teoria sendo formalizada. Assim, os tratamentos dados por K_1 e K_2 são igualmente adequados, e não temos, necessariamente, um critério para decidir qual deve ser usado.

Uma possível objeção a essa estratégia de discutir a adequação de lógicas relativa ao seu domínio de aplicação é a seguinte[8]: ainda que possamos falar que lógicas diferem em domínios diferentes, o que fazer quando precisamos

[6] Agradecemos ao Prof. Rodrigo Bacellar pela discussão sobre este ponto.

[7] O que é aceitável se estivermos no âmbito de uma lógica paraconsistente

[8] Essa objeção foi levantada por Ingolf Max em conversa particular.

raciocinar em múltiplos domínios? Ora, neste caso, temos um novo domínio e, portanto, podemos ter, novamente, mais de uma lógica adequada para formalizá-lo. Por exemplo, podemos raciocinar em um domínio construtivo e inconsistente. Assim, precisamos de alguma combinação entre uma lógica paraconsistente e uma intuicionista para estudá-lo. A objeção, então, afirmaria que a solução para a rivalidade entre lógicas seria combiná-las e produzir uma única lógica para formalizar um dado domínio. Assim, esta lógica resultante seria a única lógica adequada para tal tarefa.

A falha desta abordagem é que, a princípio, não há nenhum método geral para combinar lógicas. Isto significa que, dadas duas lógicas, pode não haver uma forma de combiná-las ou, pior ainda, essa combinação pode levar a resultados indesejados, como o *problema do colapso*[9]: a combinação entre duas lógicas pode ser equivalente a uma das lógicas iniciais, ou essa combinação pode gerar novas e indesejáveis interações entre os conectivos das lógicas inicias[10]. De um lado, isso pode fazer com que a lógica resultante seja considerada muito forte, no sentido de que ela tem um poder de inferência muito maior do que as lógicas iniciais. Por outro lado, esta combinação pode ser muito fraca, e falhar em inferir certas proposições importantes que eram captadas pelas lógicas iniciais. Portanto, a combinação de lógicas não exclui a possibilidade de algum pluralismo lógico.

Aceitar ou rejeitar a ideia de que a lógica é relativa ao domínio de implicação tem sérias consequências para questões centrais da lógica. Vejamos isto em detalhes. Um dos precursores desta noção pluralista de variação do domínio é Newton da Costa, que afirma que:

> É claro que, para objetos comuns, como um livro ou uma pessoa, (...) [o princípio lógico de identidade] se aplica sem uma única dificuldade importante. Qualquer pessoa A, por mais que sofra múltiplas modificações ao longo de sua vida, se mantém, em um certo sentido, idêntica a si mesma:

[9]Cf. CARNIELLI & CONIGLIO (2016), seção 5.

[10]Por exemplo, a combinação da disjunção de uma lógica com a conjunção de outra lógica pode gerar certas propriedades distributivas entre estes conectivos na lógica resultante. Essas propriedades podem ser - ou não - adequadas para o domínio sob investigação.

> $A = A$. Isto parece ainda mais claro no que diz respeito a objetos abstratos: por exemplo, a igualdade $1 = 1$ parece evidente e incontestável (...). No entanto, as coisas não são tão simples quanto um realismo ingênuo nos leva a crer. Na física quântica, as partículas elementares, ao que tudo indica, infringem o princípio de identidade. Assim, Schrödinger afirma que a relação de identidade entre partículas não tem sentido (...). Pode ser que a posição de Schrödinger seja aceitável apenas temporariamente e que o futuro nos mostrará que ele está errado. No entanto, o fato é que a física quântica mostra a possibilidade de dialetizar a ideia de identidade e, por consequência, a própria lei que corresponde a ela. (da COSTA (1997), pp. 120-1.)

Portanto, a lógica a ser usada varia de acordo com o domínio de fenômenos estudados. A resposta monista consiste em afirmar que

> como validade é preservação de verdade em todas as situações, se existem situações nas quais objetos podem ser não-idênticos, então o princípio de identidade não é, no final das contas, lógico. É apenas uma propriedade 'contingente' de alguns domínios, e pode ser invocada quando se está raciocinando sobre eles. (PRIEST (2006), p. 198.)

É interessante notar que ambas as posições estão rejeitando uma característica considerada, por muitos, como fundamental da lógica, a saber: seu caráter *a priori*. Isso, pois, tanto defender que as leis lógicas são relativas a certos domínios, quanto afirmar que existem situações empíricas que podem nos levar a rejeitar uma lei lógica, implica em aceitar que estabelecer quais são as leis lógicas é uma tarefa *a posteriori*, visto que essas leis podem mudar de acordo com as propriedades físicas que encontramos nos objetos. Por outro lado, a primeira tese rejeita o pressuposto de que a lógica é neutra com relação a seu objeto, uma vez que as leis lógicas variam de acordo com os fenômenos estudados. Um monista, por sua vez, mantém o caráter puramente neutro da lógica ao defender que se uma lei é relativa a certos domínios, então tal lei não pode ser lógica. Quando encontramos evidências empíricas que refutam o que pensávamos ser uma lei lógica, isto significa que estávamos errados, e confundimos uma lei contingente a certos tipos de objetos com uma lei lógica.

Não obstante, esta postura monista pode, em última instância, levar à conclusão de que não existe nenhuma verdade - ou lei - lógica. Não seria possível imaginar um conjunto de fenômenos que rejeite cada uma das consideradas leis lógicas?[11] Portanto, teríamos leis locais que ditam o comportamento dos fenômenos em determinados domínios, mas não haveria leis que valessem independentemente do fenômeno investigado. Outrossim, sabemos que toda teoria tem alguma lógica subjacente. Se os resultados dessa teoria forem utilizados para reformular a lógica, será que não teríamos algum tipo de círculo vicioso? Além disso, enfrentaríamos o problema clássico de decidir, face a um experimento que contrarie nossa expectativa, qual parte da teoria devemos rejeitar (incluindo, agora, sua lógica subjacente).

4.3 Teoria e Lógica Subjacente

Vejamos um exemplo sobre a relação entre teoria e lógica subjacente, e a dificuldade de estabelecer uma única lógica adequada para formalizar uma dada teoria. Alguns autores defendem que lógica é empírica e, portanto, devemos olhar para as nossas melhores teorias científicas para descobrir qual a lógica correta.

Seguindo este raciocínio, Dickson

> afirma que a lógica quântica é a lógica 'verdadeira'. Ela cumpre o papel tradicionalmente atribuido à lógica, [isto é,] o papel normativo de determinar o raciocínio correto. Portanto, a lei da distributividade está errada. Ela não está errada 'para sistemas quânticos' ou 'no contexto das teorias físicas' ou algo do tipo. Ela está simplesmente errada. (DICKSON (2001), p. S276.)

Mas, mesmo se aceitarmos que a lógica quântica é a lógica correta, a seguinte pergunta permanece: qual lógica quântica? Dickson fornece um possível esboço de lógica quântica, mas há outros. KRAUSE & ARENHART

[11] Esta tese é conhecida como *possibilismo* ou *não-necessitarianismo*. Cf. ESTRADA-GONZÁLEZ (2011).

(2016) propõem uma lógica quântica não reflexiva, isto é, uma lógica na qual as leis de identidade da lógica clássica não valem, em geral. A motivação é

> levar a sério a afirmação feita por alguns autores [que defendem que] partículas quânticas são *não-individuais* em algum sentido, e também levar em conta o fato de que elas possam ser absolutamente indistinguíveis (ou indiscerníveis.) (KRAUSE & ARENHART (2016), p. 59, ênfase no original.)

Outrossim, da COSTA & de RONDE (2013) desenvolvem uma lógica quântica paraconsistente para lidar com o fenômeno da superposição na mecânica quântica. Superposição, em linhas gerais, significa a soma de certos fenômenos que gera um 'novo' fenômeno. Na física clássica, por exemplo, a soma de duas ondas nos dá uma 'nova' onda, que é completamente analizável em termos das ondas iniciais. Por outro lado, na física quântica, não há interpretação clara para o resultado da superposição de certos fenômenos. Segundo Dirac,

> A natureza das relações que o princípio da superposição exige que exista entre os estados de um dado sistema é de um tipo que não pode ser explicado em termos de conceitos físicos familiares. Não se pode, no sentido clássico, conceber um sistema estando parcialmente em cada um dos dois estados [iniciais] e ver a equivalência disto com o sistema estando completamente em outro estado. (DIRAC (1974), p. 12.)

Segundo da COSTA & de RONDE (2013), as diversas tentativas de dar conta dessa natureza não-clássica da superposição têm uma característica em comum, a saber: todas buscam evitar possíveis contradições no mundo quântico. Sendo assim, a proposta destes autores é "desenvolver uma nova interpretação de superposição que leva em conta a contradição, como elemento chave na estrutura formal da teoria, 'como ponto de partida'"[12]. Para levar a cabo tal projeto, os autores desenvolvem uma lógica paraconsistente subjacente à teoria quântica.

É interessante notar esta proposta não consiste em uma defesa de um monismo lógico. O objetivo do artigo é

[12]da COSTA & de RONDE (2013), p. 1.

> argumentar que físicos deveriam reconhecer a possibilidade de usar novas formas de lógica - tais como a lógica paraconsistente - que podem nos ajudar a compreender características de diferentes domínios da realidade; características estas que podem não necessariamente serem acomodadas pela lógica clássica. Não acreditamos na existência de uma 'lógica verdadeira', mas que distintos sistemas formais podem ser usados para desenvolver e compreender aspectos complementares da realidade. (da COSTA & de RONDE (2013), p. 15.)

Estes dois exemplos distintos de lógicas quânticas mostram que a argumentação de Dickens falha, essencialmente, por dois motivos. Primeiro, mesmo que partamos do pressuposto que devemos considerar a lógica quântica como a única lógica correta, isto não nos leva, necessariamente, a um monismo lógico: há diferentes lógicas quânticas, igualmente adequadas para formalizar a mecânica quântica. Em segundo lugar, defender a adequação de uma lógica não-clássica para a mecânica quântica não implica em um monismo lógico irrestrito com respeito a seu domínio de aplicação. Dickens não oferece nenhum motivo para aceitar que, mesmo se houvesse uma única lógica adequada ao domínio quântico, deveríamos aceitar esta lógica como *a* lógica correta para qualquer domínio.

Podemos olhar para este exemplo de uma outra perspectiva. Dickson reconhece que a inadequação entre a mecânica clássica e a quântica também depende da interpretação escolhida para a própria mecânica quântica. Portanto, se mudarmos esta interpretação e escolhermos, por exemplo, a interpretação Bohmiana[13], o problema que motiva o trabalho de Dickson desaparece. Isto pois, nesta interpretação, a mecânica quântica se torna compatível com a mecânica clássica e, então, não precisamos alterar sua lógica subjacente.

Temos, assim, uma outra razão para rejeitar a conclusão de Dickson de que a lógica quântica é a lógica correta e, em particular, que a sua formulação da lógica quântica é a 'verdadeira'.

[13]Cf. GOLDSTEIN (2017).

Com este exemplo, concluímos nossa análise do debate entre pluralismo, monismo e relativismo lógico. Nosso objetivo foi mostrar que os principais argumentos apresentados por um monista lógico são infundados, isto é, não excluem a possibilidade de alguma forma de pluralismo lógico.

Considerações Finais

> The conclusion is that just as we have learned to live with uncertainty in virtually every special subject, we can live with uncertainty in logic and foundations of mathematics, and we can live well.
>
> - *Stewart Shapiro,* Foundations without Foundationalism

SHAPIRO (2014) encerra seu livro contando a história de uma criança explicando para os pais o que aprendeu na escola sobre escrever um texto: "First, I says what I am going to say. Then I says it. Then I says what I said"[14]. Encerraremos esta tese com o mesmo espírito.

Desenvolvemos, ao longo deste trabalho, dois métodos de paraconsistentização de lógicas. Um método consiste em estudar lógicas no âmbito da Teoria de Categorias, e definir uma transformação entre lógicas tal que, dado uma lógica explosiva, esta transformação resultaria na contraparte paraconsistente da lógica inicial. Estudamos diversas propriedades da formulação categorial de lógicas, que chamamos de estruturas de consequência CON, e estabelecemos as condições mínimas que uma estrutura de consequência deve satisfazer para podermos aplicar a paraconsistentização. Estabelecemos, também, várias propriedades que esta transformação preserva. Desta

[14]SHAPIRO (2014), p. 205.

forma, esta pesquisa pode ser ampliada de um modo natural, aumentando o número de propriedades estudadas de CON, assim como investigando a preservação de novas propriedades formais ao aplicar a paraconsistentização. Outro possível caminho é tentar reformular a noção de CON-morfismo, de tal modo que as estruturas de consequência se constituam como *Topos*[15], e investigar a mudança que isto traria com respeito à preservação de propriedades da paraconsistentização.

O segundo método consiste, por um lado, em uma alteração da noção de dedução da lógica original e, por outro, em uma adaptação do aparato semântico da mesma. Também investigamos a preservação de propriedades obtida a partir desta paraconsistentização. Em particular, provamos que, se a lógica inicial é correta e completa, sua contraparte paraconsistente também o é.

Em seguida, investigamos alguns aspectos do debate entre monismo, pluralismo e relativismo lógico. Estudamos a origem da ideia de que o significado dos conectivos lógicos é dado por suas regras de inferência e/ou suas condições de verdade. Mostramos que o pluralismo de Carnap, junto com esta teoria do significado, implica que, ainda que possamos ter distintas lógicas, ao mudar de lógica, muda-se o significado de seus conectivos e, portanto, elas falam de assuntos diferentes. Também mostramos várias evidências históricas de desacordo entre lógicos defendendo diferentes sistemas formais. Sendo assim, um pluralismo lógico deve dar conta desse desacordo.

A partir dessas considerações, mostramos como a paraconsistentização oferece uma forma de pluralismo: dada uma lógica explosiva, há outra lógica distinta dela - sua contraparte paraconsistente - que mantém intacto o significado dos conectivos da lógica inicial. Deste modo, as duas lógicas diferem acerca da validade de um mesmo argumento e, portanto, há um desacordo real entre elas.

A paraconsistentização desenvolvida neste trabalho faz uso da ideia de que raciocinar com conjuntos inconsistentes significa raciocinar com seus sub-

[15]Cf. GOLDBLATT (1984), capítulos 4 e 5.

conjuntos consistentes. Como mostramos no segundo capítulo, há diversas formas de escolher quais desses subconjuntos consistentes devem ser utilizados para tal tarefa. Podemos exigir meramente que eles sejam consistentes, ou que sejam maximais consistentes ou, ainda, podemos definir uma noção de conjunto preferencial que crie uma hierarquia entre os conjuntos a partir dos quais podemos fazer inferência. Apesar dessa multiplicidade de abordagem, de acordo com a teoria minimalista do significado apresentada no trabalho, dada uma certa lógica explosiva, todas as lógicas paraconsistentes resultantes desses procedimentos têm os mesmos conectivos lógicos. Portanto, existe um desacordo não meramente entre uma lógica explosiva e sua contraparte paraconsistente mas, também, entre suas distintas contrapartes paraconsistentes.

Um possível desenvolvimento futuro desta pesquisa é estabelecer um arcabouço conceitual comum entre todas estas abordagens, de modo que uma comparação entre elas seja mais fácil e direta.

Outro caminho interessante é investigar outros critérios que poderíamos escolher para limitar a relação de consequência de uma dada lógica. Neste trabalho, focamos nossa atenção na restrição da relação de consequência aos conjuntos consistentes do conjunto de premissas:

$$\Gamma \vdash_L^P \alpha \Leftrightarrow \text{ existe } \Gamma' \subseteq \Gamma, L\text{-consistente, tal que } \Gamma' \vdash_L \alpha$$

Seria possível substituir a noção de consistência por outras noções que gerariam diferentes tipos de lógica? Será que existe uma noção geral de *construção-em-L* que transformaria uma lógica qualquer em uma lógica intuicionista? Ou uma noção de *relevante-em-L*, que obtém a contraparte relevante de uma dada lógica? Estas são perguntas com consequências lógicas e filosóficas muito interessantes, que merecem ser investigadas. Em certo sentido, encontramo-nos em uma situação análoga ao desenvolvimento das geometrias não-euclidianas no século XIX. Nas palavras de Coffa:

> Durante a segunda metade do século XIX, através de um processo que ainda espera explicação, a comunidade de geômetras chegou à conclusão

> de que todas as geometrias estavam aqui para ficar(...) Isto teve toda a aparência de ser a primeira vez que uma comunidade de cientistas concordou em aceitar de uma forma não meramente provisória todos os membros de um conjunto de teorias inconsistentes sobre um mesmo domínio(...) Cabe agora aos filósofos dar algum sentido epistemológico da atitude dos matemáticos com relação à geometria. O desafio foi um teste difícil para os filósofos, teste esse no qual (infelizmente) todos falharam. (COFFA (1986), p. 8.)

Não apenas o surgimento de uma pluralidade de lógicas, mas, também, de uma pluralidade de abordagens à lógica levou ao questionamento e, potencialmente, a mudanças em questões centrais da lógica como, por exemplo, a possibilidade da existência de diversas lógicas igualmente adequadas. Esta é uma tese que não faria o menor sentido até pouco menos de cem anos atrás. Sendo assim, independente de um eventual vencedor desta querela, o debate nos permite aumentar nosso conhecimento sobre lógica o que, afinal, é o objetivo principal de todo lógico.

Referências Bibliográficas

AMGOUD, L.; BESNARD, P. A Formal Analysis of Logic-Based Argumentation Systems. *In*: DESHPANDE, A; HUNTER, A. (eds.). *Scalable Uncertainty Management*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010, pp. 42-55.

ARIELI, O.; AVRON, A.; ZAMANSKY, A. What Is an Ideal Logic for Reasoning with Inconsistency? *In*: WALSH, T. (ed.). *Proceedings of the Twenty-Second International Joint Conference on Artificial Intelligence*, vol. 2. California: AAAI Press/International Joint Conferences on Artificial Intelligence, 2011, pp. 706-711.

ARIELI, O.; BORG, A.; STRAßER, C. Argumentative approaches to reasoning with consistent subsets of premises. *In*: BENFERHAT, S.; TABIA, K.; ALI, M. (eds.). *Advances in Artificial Intelligence: From Theory to Practice. IEA/AIE 2017. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 10350, Springer, 2017, pp. 455-465.

AVRON, A.; LEV, I. Formula-preferential systems for paraconsistent nonmonotonic reasoning. *In*: ARABNIA, H.R. (ed.). *International Conference on Artificial Intelligence (ICAI'01)*, vol. II, 2001, pp. 823-827.

BARWISE, J. Model Theoretic Logics: Background and Aims. *In*: BARWISE, J.; FEFERMAN, S. (eds.). *Model-Theoretic Logics*. New York: Springer-Verlag, 1985, pp. 3-25.

BEALL, J.C.; RESTALL, G. *Logical Pluralism*. Oxford: Oxford University Press, 2006.

BENFERHAT, S.; DUBOIS, D.; PRADE, H. How to infer from inconsistent beliefs without revising? *In*: *Proceedings of the 14th international joint conference on Artificial intelligence (IJCAI'95)*, vol. 2. California: Morgan Kaufmann Publishers, 1995, pp. 1449-1455.

BÉZIAU, J.-Y. Are paraconsistent negations negations? *In*: CARNIELLI at all (eds.). *Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent*. New York: Dekker, 2002, pp. 465-486.

BÉZIAU, J.-Y. Universal Logic. *In*: CHILDERS, T.; MAJER, O. (eds.). *Proceedings of the 8th International Colloquium - Logica'94*. Prague: Czech Academy of Sciences, 2004, pp. 73-93.

BIERCE, A. *Devil's Dictionary*. New York: Oxford University Press, 1999.

BOLZANO, B. *Theory of Science*. Berkeley: University of California Press, 1972.

BROWN, B. Yes, Virginia, there really are paraconsistent logics. *Journal of Philosophical Logic*, vol. 29, n. 5, pp. 489-500, Oct. 1999.

BROWN, B.; PRIEST, G. Chunk and permeate, a paraconsistent inference strategy. Part I: The infinitesimal calculus. *Journal of Philosophical Logic*, vol. 33, n.4, pp. 379-388, Aug. 2004.

BUENO, O. Can a Paraconsistent Theorist be a Logical Monist? *In*: CARNIELLI, W.; CONIGLIO, M.E.; D'OTTAVIANO, I.M.L. (eds.). *Paraconsistency: The logical way to the inconsistent*. New York: Marcel Dekker, 2002, pp. 535-552.

BUENO, O.; COLYVAN, M. Logical Non-Apriorism and the 'Law' of Non-Contradiction. *In*: PRIEST, G., BEALL, J.C., ARMOUR-GARB, B. (eds.). *The Law of Non-Contradiction: New Philosophical Essays*. Oxford: Oxford University Press, 2004, pp. 157-175.

BUENO, O.; da COSTA, N. C. A. Consistency, Paraconsistency and Truth: Logic, the Whole Logic and Nothing but the Logic. *Ideas y Valores*, vol. 45, n. 100,pp. 48-60, 1996.

BUENO, O.; da COSTA, N. C. A.; BÉZIAU, J.-Y. On The Usefulness of Paraconsistent Logic. *In*: VANDERVEKN, D. (ed.). *Logic, Thougth and Action*. Dordrecht: Springer, 2005, pp. 465-478.

BUENO, O.; da COSTA, N. C. A.; BÉZIAU, J.-Y. Paraconsistent Logic in Historical Perspective. *Logique et Analyse*, vol. 38, n. 150/152, 1995, pp. 111-125.

BURGE, T. Truth and singular terms. *Noûs*, vol. 8, n. 4, pp. 309-325, Nov. 1975.

BURGESS, J. P. Which modal logic is the right one? *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 40, n. 1, pp. 81-93, 1999.

CARNAP, R. Intellectual Autobiography. *In*: SCHILPP, P.A. (ed.). *The Philosophy of Rudolf Carnap*. Illinois: Open Court Publishing Company, 1963.

CARNAP, R. *The Logical Syntax of Language*. London: Kegan Paul, 1937.

CARNIELLI, W.; CONIGLIO, M.E. *Combining Logics*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Winter 2016. Disponível em: http://plato.stanford.edu/archives/sum2016/entries/logic-combining. Acesso em: 25/10/2018.

COFFA, A.J. From geometry to tolerance: sources of conventionalism in nineteenth-century geometry. *In*: COLODNY, R.G. (ed.) *From Quarks to Quasars: Philosophical problems of modern physics*. University of Pittsburgh Series, Volume 7. Pittsburgh: Pittsburgh University Press, 1986, pp. 3-70.

COSTA-LEITE, A. *Interactions of metaphysical and epistemic concepts*. Tese (Doutorado em Filosofia) - Université de Neuchâtel, Switzerland, 2007.

da COSTA, N.C.A. *Logiques Classiques et Non Classiques: Essai Sur les Fondements de la Logique*. Paris: Masson, 1997.

da COSTA, N.C.A.; de RONDE, C. The Paraconsistent Logic of Quantum Superpositions. *Foundations of Physics*, vol. 43, n. 43, pp. 845-858, 2013.

da COSTA, N.C.A.; KRAUSE, D.; BUENO, O. Paraconsistent Logics and Paraconsistency. *In*: JACQUETTE, D. (ed.). *Philosophy of Logic*. Amsterdam: North-Holland, 2007, pp. 791-911.

de SOUZA, E.G. Lindenbaumologia I: A Teoria Geral. *Cognitio: Revista de Filosofia*, n. 2, pp. 213-219, 2001.

de SOUZA, E.G. *O Problema de Destouches e as Lógicas Heterodoxas: ensaio sobre o uso de lógicas não clássicas no tratamento de inconsistências em teorias físicas*. Tese (Doutorado em Filosofia) - Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

de SOUZA, E.G.; COSTA-LEITE, A.; DIAS, D.H.B. On a paraconsistentization functor in the category of consequence structures. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, v. 26, n.3, pp. 240-250, 2016.

de SOUZA, E.G.; COSTA-LEITE, A.; DIAS, D.H.B. Paradeduction in an Axiomatic Formal Systems. *Logique & Analyse*. No prelo.

DIAS, D.H.B. Carnap's Principle of Tolerance and logical pluralism. *Argumentos: Revista de Filosofia (Online)*, v. 13, p. 225-236, 2015.

DIAS, D.H.B. *Lógicas Paraconsistentes de um Ponto de Vista Filosófico*. Dissertação (Mestrado em Filosofia) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

DICKSON, M. Quantum Logic is Alive $\wedge$ (It is True $\vee$ It is False). *Philosophy of Science*, vol. 68, n. S3, 2001, pp. S174-S287, Sep. 2001.

DIRAC, P.A.M. *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th Edition. Londres: Oxford University Press, 1974.

DUMMETT, M. *Elements of Intuitionism*, second edition. Oxford: Oxford University Press, 2000.

DUMMETT, M. *The Logical Basis of Metaphysics*. Cambridge: Harvard University Press, 1991.

DUMMETT, M. The Philosophical Basis of Intuitionism. *In*: DUMMETT, M. *Truth and Other Enigmas*. Cambrigde: Harvard UP, pp. 215-247, 1978.

EPSTEIN, R. L. *The Semantic Foundations of Logic. Propositional Logics, Vol. 1*. Dordrecht: Kluwer Academic, 1990.

ESTRADA-GONZÁLEZ, L. On the Meaning of Connectives (Apropos of a Non-Necessitarianist Challenge). *Logica Universalis*, vol. 5, n. 1, pp. 115-126, 2011.

FIELD, H. Pluralism in Logic. *The Review of Symbolic Logic*, vol. 2, n. 2, pp. 342-359, June 2009.

FREGE, G. Begriffsschrift. *In*: van HEIJENOORT, J. (ed.). *Frege and Gödel. Two Fundamental Texts in Mathematical Logic*. Lincoln: iUniverse, 1999, pp.5-85.

FREGE, G. *The Basic Laws of Arithmetic*. California: University of California Press, 1964.

GOLDBLATT, R. *Topoi. The Categorial Analysis of Logic*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1984.

GOLDSTEIN, S. Bohmian Mechanics. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Summer 2017. Disponível em: https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/qm-bohm. Acesso em: 25/10/2018.

GOMES, E.L.; D'OTTAVIANO, I.M.L. Newton da Costa: O Homem, o Lógico e o Filósofo. *Educação e Filosofia*, v. 30, n. 60, p. 533-546, 2016.

GRANDY, R. A definition of truth for theories with intensional definite description operators. *Journal of Philosophical Logic*, vol. 1, n. 2, pp. 137-155, May 1972.

HALMOS, P.R. *Naive Set Theory*. New York: Litton Educational Publishing, 1960.

HELLMAN, G. Never Say "Never"!: On the communication problem between intuitionism and classicism . *Philosophical Topics*, vol. 17, n. 2, pp.47-67, Fall 1989.

HEYTING, A. *Intuitionism. An Introduction*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1956.

KRAUSE, D.; ARENHART, J.R.B. Presenting Nonreflexive Quantum Mechanics: Formalism and Metaphysics. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, v. 2, n. 1, pp. 59-91, 2016.

KRAUSE, D.; BÉZIAU, J.-Y. Relativizations of the Principle of Identity. *Logic Journal of the IGPL*, vol. 5, n. 3, pp. 1-12, May 1997.

LAMBERT, K. *Free logic: Selected Essays*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

LEHRER, K. *Theory of Knowledge*. Oxon: Routledge, 1990.

MALINOWSKI, G. *Many-Valued Logics*. Oxford: Oxford Science Publications, 1993.

PAOLI, F. Quine and Slater on Paraconsistency and Deviance. *Journal of Philosophical Logic*, vol. 32, n. 5, pp. 531-548, Oct. 2003.

PAOLI, F. Semantic Minimalism For Logical Constants. *Logique & Analyse*, vol. 57, n. 227, pp. 439-461, Set. 2014.

PRIEST, G. *An Introduction to Non-Classic Logic*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

PRIEST, G. *Doubt True To Be a Liar*. Oxford: Oxford University Press, 2006.

PRIEST, G. Logic of Paradox. *Journal of Philosophical Logic*, vol. 8, n. 1, pp. 219-41, Jan. 1979.

PRIEST, G. Logic: One or Many?. *In*: WOODS, J.; BROWN, B. (eds.). *Logical Consequence: Rival Approaches*. Stanmore: Hermes, 2001, pp. 23-38.

PRIEST, G. Paraconsistency and Dialetheism. *In*: GABBAY, D.B.; WOODS, J. (eds.). *Handbook of the History of Logic. Volume 8: The Many Valued and Nonmonotonic Turn in Logic*. Amsterdam, Elsevier, 2007, pp. 129-204.

PRIEST, G. Paraconsistent logic. *In*: GABBAY, D.M.; GUENTHNER, F. (eds.). *Handbook of philosophical logic*, Vol. 6. Dordrecht: Springer Netherlands. Vol. 6, 2002, pp. 287-393.

PRIEST, G. What not? A defence of dialetheic theory of negation. *In*: GABBAY, D.; WANSING, H. (eds.). *What is Negation?* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1999, pp. 101-120.

PRIEST, G.; ROUTLEY,R. Systems of Paraconsistent Logic. *In*: ROUTLEY, R.; PRIEST, G.; NORMAN, J. (eds.). *Paraconsistent logic: Essays on the inconsistent*. Munich: Philosophia, 1989, pp. 151-186.

QUINE, W. von O. *Philosophy of Logic*, second edition. Cambridge: Harvard University Press, 1986.

QUINE, W. von O. *Word and Object*. Cambridge: MIT Press, 1960.

READ, S. Monism: The One True Logic. *In*: DEVIDI, D.; KENYON, T. (eds.). *A Logical Approach to Philosophy: Essays in Honour of Graham Solomon*. Dordrecht: Springer, 2006, pp. 193-209.

READ, S. *Relevant Logic: A Philosophical Examination of Inference*. Oxford: Basil Blackwell, 1988.

RESCHER, N.; MANOR, R. On inference from inconsistent premises. *Theory and Decision*, vol. 1, n. 2, pp. 179-217, Dec. 1970.

RESTALL, G. Carnap's Tolerance, Language Change and Logical Pluralism. *Journal of Philosophy*, vol. 99, n. 2, pp. 426-443, Aug. 2002.

RESTALL, G. Paraconsistent logics! *Bulletin of the Section of Logic*, vol. 26, n. 3, pp. 156-173, 1997.

RESTALL, G. Pluralism and proof. *Erkenntnis*, vol. 79, S2, pp. 279-291, Mar. 2014.

SHAPIRO, S. *Foundations without Foundationalism*. Oxford: Oxford University Press, 1991.

SHAPIRO, S. *Varieties of Logic*. New York: Oxford University Press, 2014.

SLATER, B.H. Paraconsistent logics? *Journal of Philosophical Logic*, vol. 24, n. 4, pp. 451-454, Aug. 1995.

SUBRAHMANIAN, V.; AMGOUD, L. A General Framework for Reasoning about Inconsistency. *In*: *Proceedings of the Twentieth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, Hyderabad, 2007, pp. 599-604.

SWOYER, C. Relativism. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Winter 2014. Disponível em https://plato.stanford.edu/archives/win2014/entries/relativism/. Acesso em 25/10/2018.

TARSKI, A. On the concept of logical consequence. *In*: TARSKI, A. *Logic, Semantics and Metamathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1956, pp. 409-420.

TSUJI, M. Many-Valued Logics and Suszko's Thesis Revisited. *Studia Logica*, vol. 60, n. 2, pp. 299-309, Mar. 1998.

VAN DE PUTTE, F. Default assumptions and selection functions: a generic framework for non-monotonic logics. *In*: CASTRO F.; GELBUKH, A.;

GONZÁLEZ, M. (eds.) *Advances in Artificial Intelligence and Its Applications. MICAI 2013. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 8265. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013, pp. 54-67.

van HEIJENOORT, J. Logic as calculus and logic as language. *Synthese*, vol. 17, n. 1, pp. 324-330, Jan. 1967.

WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Philosophicus*. São Paulo: Edusp, 2001.