Universidade de São Paulo
Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas
Departamento de Filosofia
Programa de Pós-Graduação em Filosofia

JACINTHO DEL VECCHIO JUNIOR

Metafísica e Racionalidade Científica:
um Ensaio sobre os Fundamentos da Matemática

v. 1

São Paulo
Dezembro de 2010

Universidade de São Paulo
Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas
Departamento de Filosofia
Programa de Pós-Graduação em Filosofia

**Metafísica e Racionalidade Científica:
um Ensaio sobre os Fundamentos da Matemática**

Jacintho Del Vecchio Junior

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia do Departamento de Filosofia da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Doutor em Filosofia.

Orientador: Prof. Dr. Pablo Rubén Mariconda (FFLCH-USP)

Co-orientador: Prof. Dr. Oscar João Abdounur (IME-USP)

Prof. Dr. Gerhard Heinzmann (Université Nancy 2)

v. 1

São Paulo
Dezembro de 2010

Para Luíza, Beatriz, Rita e Edna.
Afinal, como não lembrar de vocês por um só momento?

Agradecimentos

Citar aqui todos os meus incentivadores seria uma tarefa enfadonha, pois foram muitos. Mas certamente alguns deles devem ser nominados, pela participação e importância decisivas que tiveram para a consecução deste trabalho.

Aos meus professores, principalmente meu orientador, Professor Pablo Rubén Mariconda, por sua incessante disponibilidade em orientar meus estudos, por sua perspicácia e notável experiência na pesquisa voltada à filosofia da ciência. Ao Professor Oscar João Abdounur, cujas contribuições foram preciosas para o resultado final da presente tese. Ao professor Gerhard Heinzmann, que desde nosso primeiro contato, ainda por correio eletrônico, concordou em colaborar incondicionalmente com o projeto, demonstrando em todos os momentos disponibilidade, gentileza e comprometimento, sobretudo durante minha estadia em Nancy. Aos professores Luiz Henrique Lopes dos Santos, João Virgílio Gallerani Cuter, Roger Pouivet, Manuel Rebuschi e Scott Walter, pelos debates proveitosos e indicações valiosas para a pesquisa.

Ao meu ex-comandante, Coronel PM Walter Gomes Mota, grande incentivador e amigo, por sua colaboração no sentido de viabilizar meu estágio no exterior. Ao pessoal do Departamento de Filosofia da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da USP, pela competência acima de qualquer prova, aos membros do Laboratoire d'Histoire et de Philosophie des Sciences – Archives Henri Poincaré, pela oportunidade do convívio em Nancy, e à Capes, pela concessão da bolsa PDEE.

Aos meus amigos e parentes, em especial à minha mãe, Edna, meus irmãos, Edson e Bianca, e sogros, Othoni e Olindina, pelo apoio prestado a mim, minha esposa e filhas, mormente durante minha permanência no exterior. E, naturalmente, o justo agradecimento a estas últimas, Rita, Beatriz e Luíza, pela paciência e tolerância durante quatro longos meses de ausência, bem como pelas incontáveis horas de estudo e pesquisa que foram necessárias para a concretização deste trabalho.

Resumo

Del Vecchio Junior, Jacintho, *Metafísica e racionalidade científica: um ensaio sobre os fundamentos da matemática*. 2010. 248f. Tese (Doutorado em Filosofia). Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas. Departamento de Filosofia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

A tese presta-se à discussão de aspectos importantes da filosofia da matemática contemporânea, tomando por base as contribuições e perspectivas perpetradas a partir de meados do século XIX, quando a crise dos fundamentos da matemática inaugura uma discussão generalizada entre as três principais vertentes do pensamento matemático consolidadas no século XX: o logicismo, o formalismo e o intuicionismo. O debate advindo da crise dos fundamentos da matemática angaria importância ao assumir contornos de uma questão normativa, exterior à matemática propriamente dita, mas a ela subjacente, por tocar aspectos relativos à ontologia inerente à matemática, centrada principalmente em posições realistas ou antirrealistas. Ocorre que, particularmente a partir de Brouwer, realismo e antirrealismo tendem a fomentar posições divergentes no que diz respeito à aceitação de determinados conceitos da matemática clássica. O objetivo principal da tese consiste na defesa de uma posição antirrealista e não revisionista na matemática, que se traduz na reivindicação da possibilidade de aceitar noções usuais da matemática clássica sem que seja necessário postular entes matemáticos como realidades independentes. A argumentação é delineada a partir de alguns temas que constituem a própria prosa da filosofia da matemática, privilegiando aspectos de natureza epistemológica.

Palavras-chave: filosofia, ciência, epistemologia, matemática.

Abstract

Del Vecchio Junior, Jacintho, *Metaphysics and scientific rationality: an essay concerning the foundations of mathematics*. 2010. 248f. Thesis (Doctoral). Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas. Departamento de Filosofia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

The thesis is centered on the debate concerning important issues of the contemporary philosophy of mathematics, mainly derived from the contributions and perspectives sketched in the nineteenth century, when the crisis on the foundations of mathematics initiated a wide discussion among the three main positions consolidated in the twentieth century's mathematical thought, namely, logicism, intuitionism and formalism. The disputation which came to light was outlined as a normative problem, extrinsic to the mathematical theory properly so-called, but subjacent to it, when touches the questions related to the inherent ontology of mathematics, centered on realist or anti-realist conceptions. After Brouwer, above all, realism and anti-realism tend to give raise to different positions about the acceptance of some concepts involved in classic mathematics. This work is developed in order to vindicate the plausibility of an anti-realist and non-revisionist position in mathematics. In other words, I try to argue in favor of the possibility of the acceptance of some usual notions employed in classical mathematics, without the necessity of postulating the existence of mathematical entities as independent beings, basing my arguments on some epistemological claims regarding the foundations of mathematics.

Key Words: philosophy, science, epistemology, mathematics.

Sumário

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Sumário	vii
Introdução	1
 Primeira Parte O desenvolvimento da matemática e a questão ontológica	 11
• Capítulo 1 A crise nos fundamentos da matemática: origens e perspectivas . . .	12
1.1. A matemática no século XIX	12
1.2. A teoria cantoriana dos conjuntos e seus paradoxos	16
1.3. O logicismo de Frege e Russell	24
1.4. A perspectiva formalista	36
1.5 O intuicionismo: a reforma da matemática	50
 • Capítulo 2 A questão ontológica e suas consequências	 59
2.1. O realismo e os entes matemáticos	62
2.2. O antirrealismo: nomes e definições	69
2.3. O comprometimento ontológico: definições, predicatividade e o infinito .	78
 Segunda Parte Matemática, verdade e conhecimento científico	 95
• Capítulo 3 Os constituintes formais da matemática	96
3.1. Duas concepções de rigor	97
3.1.1. Rigor matemático enquanto demonstração lógica	97
3.1.2. Rigor enquanto evidência intuitiva	102
3.2. Abstração, forma e demonstração	111
3.3. Sintaxe: a linguagem formal e simbolismo matemático	123

• Capítulo 4	Os constituintes informais da matemática	130
	4.1. O papel da intuição matemática	130
	4.2. Linguagem matemática: semântica e simbolismo	156
• Capítulo 5	Matemática, verdade e conhecimento científico	170
	5.1. Verdade matemática	170
	5.2. Matemática, ciência e realidade	192
Conclusão		223
Referências bibliográficas		227

“... porque a filosofia, que não começa senão com o assombro estupefato diante dessa maravilha do ser que simplesmente é, só persevera se afrontada pela aporia acarretada por ela, e que se impõe sobre o desconhecido. Por isso apenas ela distingue-se radicalmente das ciências, situadas no ser, asseguradas pelo método. A aporia não impede a filosofia, ela a torna possível, e a filosofia só perece se esquecê-la.”¹

¹ « ... parce que la philosophie, qui ne commence qu'avec l'étonnement stupéfait devant cette merveille que l'étant simplement est, ne persiste qu'affrontée à l'aporie accueillie par elle, et arc-boutée sur l'inconnu. Par quoi seulement elle se distingue radicalement des sciences, situées dans l'étant, assurées par la méthode. L'aporie n'empêche pas la philosophie, elle la rend possible, et la philosophie ne meurt que de l'oblier » (Jean-Luc Marion).

Introdução

Eu me proponho a falar sobre os fundamentos da matemática. Um importante problema surge desse próprio tema: como posso eu – ou qualquer um que não é matemático – falar sobre isso? Que direito tem um filósofo de falar sobre matemática? (...) Eu posso, enquanto filósofo, falar sobre matemática porque eu apenas vou tratar de problemas oriundos de nossa linguagem ordinária, tais como ‘prova’, ‘número’, ‘séries’, ‘ordem’, etc. Conheço nossa linguagem cotidiana – essa é a razão pela qual eu posso falar sobre eles.¹

O que são números? Conjuntos matemáticos existem de fato ou são apenas abstrações? Qual a natureza da verdade em matemática? Não deixa de ser curioso o fato de nos debatermos ainda com esse tipo de questão, malgrado os notáveis e incontestáveis avanços da ciência de Pitágoras, Gauss e Gödel, avanços esses percebidos tanto no que tange ao desenvolvimento da teoria, pela ampliação e aprofundamento de suas linhas de pesquisa, assim como por sua aplicabilidade em diversos ramos do conhecimento científico, da física à sociologia, da biologia à economia. Mas impressão que temos é a de que, efetivamente, o cenário da filosofia atinente à matemática (e mesmo sua necessidade ou legitimidade) não acompanha essa certeza e segurança. A título de exemplo, ao diagnosticar a crise dos fundamentos da matemática nos anos 30, Paul Bernays ressalta que não há propriamente um problema com a matemática: a “crise” está calcada *apenas* em problemas filosóficos.² Claro que a posição adotada por Bernays não resolve o problema, apenas o classifica. Mas mesmo

¹ “*I am proposing to talk about the foundations of mathematics. An important problem arises from the subject itself: How can I – or anyone who is not a mathematician – talk about this? What right has a philosopher to talk about mathematics? (...) I can as a philosopher talk about mathematics because I will only deal with puzzles which arise from the words of our ordinary language, such as ‘proof’, ‘number’, ‘series’, ‘order’, etc. Knowing our everyday language – this is the reason why I can talk about them.*” /E ainda: “*Another reason is that all the puzzles I will discuss can be exemplified by the most elementary mathematics – in calculations which we learn from ages six to fifteen, or in what we easily might have learned, for example, Cantor’s proof.*” [Outra razão é a de que todos os problemas que eu abordarei podem ser exemplificados na matemática mais elementar - em cálculos que nós aprendemos dos seis aos quinze anos, ou que facilmente poderíamos ter aprendido, como, por exemplo, a prova de Cantor.] (WITTGENSTEIN apud BOSANQUET et al., 1976, p. 13-4).

² “*It must be pointed out that the situation is not so critical as one could think from listening to those who speak of a foundational crisis. From certain points of view, this expression can be justified; but it could give rise to the opinion that mathematical science is shaken at its roots. The truth is that the mathematical sciences are growing in complete security and harmony. The ideas of Dedekind, Poincaré and Hilbert have been systematically developed with great success, without any conflict in the results. It is only from the philosophical point of view that objections have been raised.*” [Deve-se ressaltar que a situação não é tão crítica quanto pode pensar alguém que ouve aqueles que falam de uma crise dos fundamentos. De certos pontos de vista, essa expressão pode ser justificada; mas ela poderia levar à opinião de que a matemática está abalada em suas raízes. A verdade é que as ciências matemáticas estão crescendo em completa segurança e harmonia. As idéias de Dedekind, Poincaré e

que aceitemos seu argumento, não há como ignorar a relevância desses temas ainda que, a rigor, sejam extrínsecos à matemática: efetivamente, não há como passar ao largo desses problemas, a não ser que aceitemos a proposição de Russell que declara não sabermos do que falamos ao tratar da matemática.³ Defendemos aqui, entretanto, outra posição: a crise dos fundamentos, por remeter a questões de ordem metodológica e normativa (ainda que extrínsecas à teoria propriamente dita), tem impacto direto na matemática por haver imposto a ela padrões até hoje vigentes.⁴ Por isso, esses problemas também não são, em absoluto, questões superadas. Basta verificar as publicações contidas nos compêndios das grandes universidades para notar que a discussão acerca desse tema ainda anima o mundo filosófico, o que lhe dá visibilidade e importância.

O tema tem suas raízes na história da matemática contemporânea. O desenvolvimento da matemática nos séculos XVIII e XIX foi um fenômeno que levou aos poucos a uma mudança no que diz respeito à própria maneira como a disciplina era concebida, tanto em áreas concernentes à aritmética (teoria dos números, o cálculo e a análise) quanto na geometria, com as mudanças conceituais operadas pela criação do cálculo infinitesimal e das geometrias não euclidianas. Em um caso como em outro, o desenvolvimento teórico leva a uma mudança nos próprios critérios de aceitação das teorias matemáticas, de modo que, em

Hilbert vêm sendo sistematicamente desenvolvidas com grande sucesso, sem qualquer conflito em seus resultados. É só do ponto de vista filosófico que as objeções têm surgido.] (BERNAYS, 1934, p. 258).

³ “*Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.*” [A matemática pode ser definida como o assunto sobre o qual nós nunca sabemos o que estamos falando, nem se o que estamos dizendo é certo.] (RUSSELL, 2003, p. 221).

⁴ « *On peut faire remonter précisément la naissance de la « crise des fondements » des mathématiques à la lettre que Russell adresse à Frege le 16 juin 1902, pour lui exposer la dommageable imprédictivité qui grève son dispositif du paradoxe bien connu. Il est plus malaisé cependant de dire quand cette crise s'est terminée, puisque cela implique l'interprétation de ce qu'est une « crise ». Le concept mériterait une étude autonome, mais, du fait des contraintes matérielles de ce propos, j'en fixe ici un sens étroit et descriptif : période de transition, préparée mais née sous l'impulsion de facteurs déclenchants précis, où des contradictions, exacerbées jusqu'au paroxysme, accélèrent de façon décisive l'état d'un ou plusieurs problèmes, pour laisser des traces durables (habitudes de pensées et de comportements). De ce point de vue le « problème des fondements » tel qui est diversement traité aujourd'hui témoigne de telles traces critiques, sans pour autant être encore le centre d'une crise.* » [Pode-se remontar precisamente o nascimento da “crise dos fundamentos” da matemática à carta que Russell endereça a Frege em 16 de junho de 1902, ao expor para ele a nefasta impredecibilidade de seu bem conhecido paradoxo. Todavia, é mais difícil dizer quando essa crise terminou, uma vez que isso implica na interpretação do que é uma “crise”. O conceito mereceria um estudo autônomo, mas, em vista das imposições materiais da proposta, eu fixo a ele um sentido estreito e descritivo: período de transição, preparado, nascido sob o impulso de fatores precisos, onde as contradições, exacerbadas ao ponto do paroxismo, aceleram de modo decisivo o estado de um ou de vários problemas, por deixarem traços duráveis (hábitos de pensamento e de comportamento). Desse ponto de vista, o “problema dos fundamentos”, tal como tratado de outra maneira hodiernamente, atesta esses traços críticos, mesmo sem que seja ainda pensado como o centro de uma crise.] (BAROT, 2005, p. 24).

meados do século XIX, vislumbramos o que autores como Kline denominam “*o período da instalação do rigor na análise*” (KLINE, 1972, p. 947). Esse movimento estava diretamente associado à exigência do rigor analítico como padrão e critério “superior”, se comparado à forma “intuitiva” até então aceita. Essa mudança significativa tinha por escopo evitar contradições e imprecisões como as do chamado “escândalo dos infinitesimais” e a da contraditória “ciência das paralelas” (que acaba desaguando na criação das geometrias não euclidianas).

Nesse contexto, o rigor característico das ciências formais passa a ser associado quase que exclusivamente à sua forma lógico-dedutiva: a boa expressão de uma teoria matemática consiste em sua formalização. Isso significa que a intuição, como aparece, por exemplo, na geometria euclidiana ou nos princípios matemáticos de Descartes, acaba sofrendo sérias restrições enquanto critério de justificação (e, conseqüentemente, de aceitação) de teorias particulares, algo que se evidencia com Weierstrass, por exemplo. A boa matemática passa a ser absolutamente formal e, dentro de sua axiologia e metodologia próprias, todo conceito matemático deve ser perfeitamente formalizado, a fim de estar em consonância com as novas exigências da disciplina.

Inserido nesse ambiente, Cantor apresenta a sua teoria dos conjuntos, oportunidade em que, além de possibilitar a formalização de conceitos bastante usuais, ele tem a pretensão de formalizar a noção de infinito, indissociavelmente ligada a várias aplicações e teorias matemáticas, mas que até então soava como absolutamente intuitiva. Cantor formaliza a noção de transfinito definindo suas propriedades, as relações que guarda com outras grandezas (sejam finitas ou também transfinitas) além de possibilitar um método de cálculo (sob a perspectiva conjuntista) para os números que representam grandezas transfinitas. Pode-se dizer que a teoria coroa esse movimento de exacerbação do rigor na análise: com ela, até mesmo as grandezas transfinitas passam a ser, de alguma maneira, objeto de cálculo formal. A importância e a adequação dos trabalhos de Cantor ao ideal corrente de ciência tem como resultado sua rápida e ampla aceitação, já que praticamente todos os ramos da disciplina podem ser expressos em termos conjuntistas. Assim, sua adoção é natural, pois a teoria dos conjuntos passa a constituir uma base comum para diversos ramos da matemática.

Justamente a ampla aceitação dos princípios da teoria cantoriana dos conjuntos torna os paradoxos associados a ela tão comprometedores. Eles soam como uma campanha de alerta para mostrar que algo não se passava como deveria. Os primeiros paradoxos datam de

1899 a 1902 (respectivamente, os paradoxos conhecidos como o de Cantor e o de Russell), e inauguram uma discussão generalizada em torno dos fundamentos da matemática. É a oportunidade, por exemplo, de implementar a formalização da matemática, com o intuito de introduzir determinados critérios para sua realização, de modo a adequar a teoria e evitar problemas como os supracitados, fortalecendo e adequando sua base axiomática, como fazem Zermelo e Russell. Mas é também a oportunidade de declarar, como Poincaré e Brouwer, a inviabilidade dessa exacerbação formal, completamente dissociada da intuição. Aí radica em grande parte o interesse filosófico da questão: a tentativa da solução imposta por um problema real da teoria matemática remete ao debate acerca de como efetivamente construí-la, o que se dá pela consideração dos critérios empregados para a compreensão da natureza dos números, da aceitabilidade de determinados tipos de provas matemáticas, do caráter das definições, da fonte donde decorre o conhecimento matemático, entre outras coisas. As diferentes formas de resposta a essas questões acabam por se aglutinar em três grandes linhas teóricas que iriam dominar o contexto da matemática a partir de então: o logicismo de Frege, Russell e Peano (que coloca as bases de toda a matemática em princípios exclusivamente lógicos), o formalismo de Hilbert e Zermelo (que reconhece na matemática uma espécie de jogo simbólico, que não precisa necessariamente apresentar qualquer tipo de conteúdo) e o intuicionismo de Brouwer e Heyting (que consiste na negação da matemática enquanto disciplina puramente formal, atribuindo, ou melhor, restabelecendo a importância fundamental da intuição dentro da disciplina).

Destarte, a questão assume contornos normativos: a discordância está centrada em diferentes perspectivas do que a matemática *deve ser*, o que, naturalmente, traz consequências práticas. Logo, a questão é exterior à matemática propriamente dita, mas com resultados diretos no que diz respeito a ela. Esse fator está intrinsecamente relacionado a um outro: não há como negar que, diretamente associado às respostas possíveis aos problemas citados, temos a existência de um debate subjacente, o da ontologia inerente à matemática. De modo geral, Quine (1953, p. 14) associa três perspectivas metafísicas (que remontam aos textos de Platão e têm um amplo tratamento na Idade Média) às três correntes matemáticas contemporâneas: o realismo, o conceitualismo e nominalismo, que consistem nas linhas adotadas em relação à natureza dos universais, “renascem” na filosofia da matemática contemporânea, respectivamente, sob os nomes de logicismo, intuicionismo e formalismo.

Resumidamente, o realismo matemático sustenta a existência de números como seres independentes de nossa capacidade de apreensão e/ou compreensão: dentre as Formas platônicas, a expressão mais forte do realismo, existem esses “seres”, de modo que “nossa” matemática consiste em um esforço de tentar apreendê-los e expressá-los adequadamente. Para o realista, “descobrimos” a matemática. O antirrealismo, que engloba tanto a perspectiva conceitualista quanto a nominalista, submete, por sua vez, o conhecimento matemático ao poder, à aptidão de criá-lo: a matemática consiste de uma criação do espírito humano, seja pela utilização de conceitos e definições, seja pela mera utilização de nomes (símbolos) que não passam, para usar um termo contemporâneo, de *ficções*. Para o antirrealista, a matemática não é descoberta, é *inventada*. Mas apesar do debate ontológico já existir a tempos, ele soava como algo superado, uma vez que o desenvolvimento da matemática estava “em ordem” e que certamente o bom desempenho e o sucesso geral da disciplina, por exemplo, enquanto aporte às outras ciências, não podia ser questionado. É a oportunidade da crise dos fundamentos que leva à pauta a revisão desses princípios, até mesmo como parâmetro do que a ciência efetivamente é e ao que ela deve conduzir.

Todavia, se a crise dos fundamentos põe em evidência um problema que remete à ontologia que fundamenta a ciência, uma posição em especial torna o debate ontológico algo que efetivamente não pode ser ignorado. O intuicionismo de Brouwer aponta para as sérias consequências da aceitação de uma doutrina antirrealista da matemática: tomar a matemática por um produto do intelecto humano significa restringir a disciplina àquilo que efetivamente nós somos aptos a conceber, e o ato de conceber está subordinado à apresentação de uma regra de geração de prova. Há, portanto, um descompasso em relação à lógica clássica: só é possível pensar, digamos, no princípio do terceiro-excluído como válido no âmbito daquilo que podemos efetivamente conceber. Brouwer mostra que a aceitação inadvertida do princípio do terceiro-excluído está associada à crença em uma realidade *perene* dos objetos matemáticos.

Logo, a partir de Brouwer, essas duas tendências levam a posições divergentes quanto à aceitação da matemática clássica, e por motivos diferentes: a defesa da matemática clássica, no que diz respeito, por exemplo, à possibilidade de aplicação irrestrita do princípio do terceiro-excluído, da não obrigatoriedade de adoção de métodos finitistas e da aceitabilidade de noções não predicativas *exige* que tenhamos uma perspectiva realista dos objetos matemáticos; por outro lado, não existe, em tese, a possibilidade de adotar um antirrealismo

sem que tenhamos obrigatoriamente que aceitar sérias restrições à matemática *standard*. As nuances que surgem entre essas posturas tornam o debate ainda mais rico, e ramificam os problemas que decorrem de cada uma dessas posições:

Quanto ao realista, a grande dificuldade da qual ele tem que dar conta é a da possibilidade de estabelecer uma correspondência entre uma realidade intangível e a maneira como expressamos a “nossa” matemática. Se os entes matemáticos são perenes e independem de nosso intelecto, por algum mecanismo misterioso nossa razão “apreende” essa realidade e a expressa de maneira mais ou menos perfeita. Em suma, é a dificuldade intrínseca aos critérios de verdade do platonismo em geral. A defesa mais engajada dessa perspectiva (e uma das mais criticadas) é a de Gödel, que postula que o conhecimento dos objetos matemáticos é similar ao que temos em relação aos objetos concretos (cf. capítulo 2, seção 2.1). Há outras defesas possíveis do realismo que soam menos radicais, como a de Quine, centrada no chamado *argumento de indispensabilidade*.⁵ De modo geral, essa posição leva em conta a aceitação de que a natureza comporta-se como se em harmonia com as leis matemáticas, motivo pelo qual *deve haver* uma realidade matemática independente de nós e que participa da realidade empírica de alguma maneira.

Quanto ao antirrealista, por sua vez, a dificuldade principal deriva justamente da força do argumento de indispensabilidade: como tomar por simplesmente *errada* a matemática *standard*? Isso significaria considerar que toda a ciência conforme a conhecemos hoje encontra *por acaso* nas leis matemáticas uma forma correta de expressão. Em outros termos, se a matemática é uma criação do espírito humano e o argumento de indispensabilidade é válido, há que se encontrar uma explicação para o fato de que a matemática tem se mostrado um valioso instrumento para a tão almejada explicação da natureza através das teorias da física, assim como uma formulação possível do conhecimento científico que o isente da necessidade de recorrer a “entidades”. O revisionismo característico do antirrealismo pós-

⁵ “Certain mathematical theories, such as arithmetic or real analysis, are indispensable for modern physics in the sense that the physical theories cannot be stated in a form that would be incompatible with the falsehood of those mathematical theories. But these mathematical theories are ontologically committed to abstract entities: the quantifiers used in stating them range over domains that must include mathematical entities that are not in space or time. So the physical theories themselves carry commitment to abstracta.” [Certas teorias matemáticas, como a aritmética ou a análise real, são indispensáveis para a física moderna, no sentido de que as teorias físicas não podem ser asseveradas de modo a serem incompatíveis com a falsidade dessas teorias matemáticas. Mas essas teorias matemáticas são comprometidas ontologicamente com entidades abstratas: os quantificadores utilizados para introduzi-las incluem domínios que devem incluir entidades matemáticas que não estão no espaço e tempo. Assim, as próprias teorias físicas implicam em compromisso com entidades abstratas.] (SZABÓ, 2003, p. 34).

brouweriano se vê diante desse dilema: cabe realmente corrigir a matemática apenas para negar o realismo, se ela se aplica, se não perfeitamente, ao menos adequadamente, à realidade que nos cerca, por intermédio das teorias físicas? O preço parece ser alto demais. Não obstante, alguns autores se dispõem a pagá-lo. Hartry Field, por exemplo, lança-se à tentativa de mostrar a possibilidade de defender princípios da física e da geometria sem recorrer a números reais. Charles Chihara, por sua vez, aborda o problema a partir das construções lógicas associadas à matemática, apresentando uma lógica modal que serve de sustentação à disciplina através da qual os enunciados, centrados no conceito de possibilidade, não nos prendam a qualquer tipo de compromisso ontológico (cf. SHAPIRO, 2000, p. 227-43).

Em suma, do ponto de vista epistemológico, uma posição antirrealista e, ao mesmo tempo, não revisionista, parece algo de difícil aceitação em face do cenário apresentado acima. Mas o que se pretende aqui sustentar não é nada de extraordinário: um antirrealismo não revisionista procura apenas salvaguardar a viabilidade de aplicar a matemática clássica sem que para isso seja necessário pressupor uma ontologia a ela subjacente, provendo uma base conceitual consistente para essa finalidade. Esta tese é articulada com intuito de propiciar uma alternativa viável a essa posição, não sob uma perspectiva centrada na lógica, como a de Chihara, mas sim atentando especialmente para os problemas inerentes à teoria do conhecimento e à semântica envolvida na utilização da matemática. A articulação de uma defesa possível para uma posição antirrealista não revisionista está fundada sobretudo na inaceitabilidade dos problemas derivados do realismo e do revisionismo. Sob minha perspectiva, o antirrealismo radica principalmente no fato de que me parece inadmissível tomar como critério de verdade da ciência uma suposta identidade misteriosa entre a forma lógica das proposições e uma realidade não verificável; o antirrevisionismo, por sua vez, encontra guarida na certeza de que há algum fundamento respeitável naquilo que o construtivista estrito simplesmente objeta, e que não pode simplesmente ser ignorado por conta da adoção de uma perspectiva filosófica que, a rigor, é extrínseca à matemática.

Sob essa inspiração, a tese a ser apresentada consistirá em uma interpretação filosófica da matemática com vistas a superar as dificuldades suscitadas acima e tentar estabelecer uma leitura não contraditória de uma perspectiva antirrealista e não revisionista. Quanto à estrutura da argumentação, apresentaremos uma parte introdutória acerca do desenvolvimento da matemática e das questões ontológicas a ela concernentes, e uma segunda parte onde

discutiremos os aspectos formais e os constituintes informais da disciplina, bem como os conceitos de verdade e de ciência que devem sustentar essa articulação.

Na tentativa de estabelecer uma interpretação quanto às bases do conhecimento matemático, existem outras premissas aliadas ao antirrealismo e ao antirrevisionismo que balizam toda a minha argumentação. Resumidamente, podemos apontar três características mais prementes:

- **A ciência em geral, e a matemática em particular, são produtos do intelecto humano** e, desse modo, não há como dissociar a capacidade de fazer ciência das condições de possibilidade de emprego da racionalidade. Isso significa que as teorias científicas, até mesmo no âmbito das ciências empíricas, consistem em uma espécie de tentativa de *tradução* da realidade por intermédio de uma idealização racional. Tal concepção leva a duas outras consequências:
- Tomo por pressuposto a tese platônica da identidade entre pensamento e discurso enunciativo. Todo pensamento se expressa em termos de linguagem, seja ela linguagem comum, simbologia lógico-matemática ou outra qualquer. Há que se considerar, portanto, que **não há conhecimento objetivo propriamente dito em nível pré-discursivo**. Para a tese recíproca, todavia, existem ressalvas: nem toda expressão linguística precisa necessariamente veicular conteúdo para ser significativa. As fórmulas matemáticas e lógicas são bons exemplos disso.
- Especificamente no que concerne à matemática, reconhecê-la como produto do intelecto torna menos rígida a separação entre o processo de criação matemática e a “forma final” da teoria. Sob esse ponto de vista, a forma de expressão de uma teoria, de um postulado, nada mais é que o produto final de uma elaboração intelectual; podemos dizer que é sua face “visível”. Todavia, se a matemática consiste, em última análise, em uma *elaboração* conceitual, a adoção da postura inversa (considerar apenas a forma lógica da teoria), apesar de usual, é um ato artificial e que, de certa maneira, está associado a um realismo velado: abandona-se o que há de mais rico em nome de sua forma visível. Destarte, **um delineamento amplo da matemática deve considerar seu processo de criação e sua forma de expressão como constituintes intrinsecamente relacionados**. Se na prática recorremos apenas às “fórmulas”, isso decorre de um aspecto pragmático, ou seja, a aplicação efetiva daquilo que advém do

esforço originário de criação. A atividade intelectual que consiste na matemática é antes um ato de elaboração conceitual que um longo inventário de fórmulas, ainda que por meio desse inventário de fórmulas se possa *realizar*, por assim dizer, a matemática.

Partindo dessas premissas, abordaremos cada um dos constituintes importantes da matemática sob a perspectiva que elegemos, algo que nos levará a dialogar com várias correntes divergentes, com o fulcro de lapidar nossa proposta. Trataremos, portanto, do que caracteriza a demonstração matemática e da noção de rigor a ela associada, e de que modo a intuição relaciona-se com a natureza dos objetos matemáticos e do simbolismo que os expressa. A linguagem matemática de segunda ordem, por sua vez, tem um papel importante na consideração da relação entre o ambiente do discurso matemático e do extramatemático: aqui se realizam, pela metalinguagem, tanto a atribuição do sentido aos constituintes intrínsecos da teoria, bem como a apropriação da teoria matemática em outras searas, como na física. Mais que a descrição de meros processos mentais ou de prova, a metalinguagem matemática é a instância que propicia essa bitransitividade, mormente a partir da premissa de que o momento de criação não pode ser ignorado no contexto totalizante da teoria.

Apesar do termo “metafísica” soar como ultrapassado e mesmo pejorativo, ao considerar a problemática relativa à verdade matemática, o debate contemporâneo alude irremediavelmente à questão ontológica. *Grosso modo*, podemos dizer que do ponto de vista da teoria do conhecimento, a crença na existência de objetos matemáticos como seres independentes do nosso intelecto exige uma noção de verdade por correspondência: um enunciado matemático é verdadeiro na medida em que corresponde a essa realidade; por outro lado, a negação dessa existência independente remete a uma espécie de noção coerencial: a verdade de um enunciado impõe-se pela sua adequação a uma teoria preestabelecida; o enunciado é verdadeiro na medida em que se articula harmonicamente com um conjunto de conceitos (de postulados, de axiomas). Logo, crer ou não em objetos matemáticos como seres independentes é um ato de escolha que *determina* o tipo de verdade ao qual nos referimos, algo que traz consequências para a própria noção de ciência com a qual tratamos. O problema torna-se mais intrincado ao reconhecermos que nenhum dos posicionamentos em relação à questão ontológica é isento de dificuldades. Procurarei sustentar minha posição diante dos problemas que se apresentam, que não são simples. Em linhas gerais, procurarei argumentar

que uma correspondência tão problemática quanto a proposta pelo realismo matemático não se presta a servir como critério último de verdade da ciência.

Todavia, subsiste o problema relativo ao revisionismo da matemática *standard*, que consiste na consequência, digamos, mais natural do antirrealismo. Se a correspondência não pode servir convenientemente como critério último de verdade, a contraparte da questão permanece inalterada: a matemática clássica ou, mais precisamente, alguns conceitos a ela pertinentes, são problematizados em uma leitura antirrealista, pois ao antirrealismo está normalmente associado o construtivismo. O que pretendo ressaltar na tese é o fato de que uma noção de verdade deve corresponder não apenas às exigências internas de uma teoria, mas também a uma perspectiva contextual que nos leva a tentar congrega, por exemplo, tanto a validade da matemática clássica quanto da intuicionista, mas sem postular um relativismo pandêmico. Minha proposta é a de que uma verdade contextual da matemática é uma alternativa plausível para esse impasse. A noção de ciência enquanto empreitada racional, enquanto atividade de solução de problemas, permite uma perspectiva semelhante a essa. A verdade matemática deixa de ser um *corpus* monolítico e perene e passa a apresentar várias formas possíveis. Nesse contexto, a estratégia proposta no que tange a essa dificuldade é a de tentar “esvaziar” a importância do debate ontológico tanto quanto possível, procurando também uma alternativa que permita tomar a matemática sob uma perspectiva antirrealista sem que necessariamente caiamos no construtivismo como regra geral e absoluta. A solução apresentada, como veremos, coincide com as premissas que adotamos, tanto em seus motivos quanto no que diz respeito aos seus resultados. Os pontos positivos dessa teoria podem ser, de alguma maneira, uma compensação ao caráter “fraco” da noção de verdade delineada dessa maneira.

A concepção geral de ciência decorrente dessa posição não implica necessariamente também em um antirrealismo para as ciências naturais. Ele implica sim em uma espécie de idealização, algo que já existe mesmo em “versões fracas” do realismo científico; dessa forma, a interpretação da matemática conforme sugerida no presente trabalho pode ser coerente com quaisquer sistemas que não impliquem em um realismo exacerbado. A aceitação de que o conhecimento científico está baseado na apresentação de modelos que procuram representar, em nível racional/discursivo, a realidade empírica, encontra guarida em uma interpretação da matemática conforme apresentada e no conceito de verdade a ela associada.

PRIMEIRA PARTE

O Desenvolvimento da Matemática

e a Questão Ontológica

Capítulo 1

A Crise nos Fundamentos da Matemática: Origens e Perspectivas

Se hoje os cientistas não têm mais necessidade nenhuma dos filósofos nem, sobretudo, de se fazer filósofos, é na medida em que seus métodos estão em ordem, seus conceitos são universalmente admitidos e as querelas científicas rareiam. Que apareçam contradições (crise da teoria dos conjuntos, em matemática, no começo do século), que nasçam controvérsias (problema da hereditariedade do adquirido, em biologia), e bem depressa o cientista volta a tornar-se filósofo.

(LEBRUN, 1993, p. 25).

1.1. A matemática no século XIX

Enquanto uma reflexão acerca do conhecimento matemático, o tema ao qual se refere o presente trabalho encontra duas referências importantes em períodos históricos muito diferentes: a Antiguidade Clássica e o século XIX. Se no que diz respeito ao desenvolvimento da matemática podemos fazer um recuo modesto até apenas meados do século XIX, no que concerne à questão de sua ontologia subjacente, somos obrigados a recuar até Antiguidade, uma vez que a corrente que mais fortemente se impõe hodiernamente tem uma forte inspiração no platonismo. Aceitá-lo ou refutá-lo é uma tarefa obrigatória para qualquer esforço de constituir uma leitura epistemológica da matemática. Todavia, os compromissos teóricos decorrentes das possíveis posturas ontológicas adotadas serão abordados detalhadamente no segundo capítulo. O que nos ocupa neste primeiro momento é a apresentação da forma como surge, entre o fim do século XIX e início do século XX, uma ampla discussão acerca dos fundamentos da matemática. Para tanto, procuraremos ressaltar características importantes do desenvolvimento científico que acabaram por levar a esse *status quo*, bem como os frutos desse debate que, apesar de apresentar aspectos controversos, pode ser identificado com dois momentos bem distintos e que se estendem até 1930, pelo menos.

O século XVII, como sabemos, é amplamente reconhecido como o momento de nascimento da ciência moderna, por meio dos trabalhos de Galileu, Kepler, Copérnico, Descartes, entre outros.¹ Talvez a característica mais notável dessa nova forma de fazer

¹ “By 1600 the European scientists were unquestionably impressed with the importance of mathematics for the study of nature. The strongest evidence of this conviction was the willingness of Copernicus and Kepler to

ciência seja o esforço no sentido de sua adequação à geometria, e mais tarde, à álgebra e à aritmética: no que concerne à física, esse movimento significa o rompimento em relação padrões aristotélicos tão bem cristalizados (que as controvérsias entre Galileu e os peripatéticos bem exemplificam). Dessa forma, a nova ciência prima pela exatidão e previsão fundadas intransigentemente no cálculo matemático e nos modelos geométricos. Descartes é uma figura particularmente importante nesse contexto, dada a criação da geometria analítica. De certo modo, ele chega a impor um novo modelo à geometria ao associar novas idéias aos pressupostos do cânone euclidiano,² a partir do que duas importantes consequências se apresentam: o delineamento de uma identidade intrínseca no que tange aos fundamentos da matemática e da geometria (algo que aparecia ainda muito fragilmente nos *Elementos*), assim como a possibilidade do tratamento de problemas de ambas as ciências a partir da álgebra. A aproximação entre aritmética, geometria e física intensifica-se principalmente através da criação do cálculo infinitesimal de Leibniz e Newton na segunda metade do século XVII. O desenvolvimento conceitual levado a cabo por matemáticos como os irmãos Bernoulli, Pierre Varignon, Lagrange, entre outros, permite a maturação da disciplina a ponto de possibilitar um crescimento notável tanto no estudo da geometria quanto da aritmética no século XVIII, o que se traduz em um nível de rigor e abstração das provas e teoremas até então desconhecido.

Dessa maneira, não obstante alguns pensadores antigos já atribuírem à matemática um papel diferenciado dos outros modos de conhecimento racional e primarem também por demonstrações rigorosas, não há como negar que os trabalhos elaborados a partir do século XVIII encontram-se em um patamar de maior complexidade no que concerne à abstração de suas formulações teóricas. A geometria projetiva de Poncelet e a sua representação algébrica

overturn the accepted laws of astronomy and mechanics and religious doctrines for the sake of a theory which in their time had only mathematical advantages. (...) In the seventeenth century two men, Descartes and Galileo, revolutionized the very nature of scientific activity. They selected the concepts science should employ, redefined the goals of scientific activity, and altered the methodology of science.” [Por volta de 1600 os cientistas europeus estavam inquestionavelmente impressionados com a importância da matemática no estudo da natureza. A maior evidência dessa convicção foi a disposição de Copérnico e Kepler em subverter as leis aceitas da astronomia, mecânica e as doutrinas religiosas com a finalidade de propor uma teoria que a seu tempo apresentava apenas vantagens do ponto de vista da matemática. (...) No século XVII, dois homens, Descartes e Galileu, revolucionaram a própria natureza da atividade científica. Eles escolheram os conceitos que a ciência deveria empregar, redefiniram os objetivos da atividade científica e alteraram a metodologia da ciência.] (KLINE, 1972, p. 325).

² Em Euclides, por exemplo, não se encontra a identificação entre a continuidade dos objetos geométricos e a quantificação numérica da matemática, o que vai ocorrer mais tardiamente com os trabalhos de Descartes, que possibilitam um tratamento algébrico à geometria, ampliando o poder explicativo de ambas através do ideal de uma *mathesis universalis*. A obra *La Géométrie* (“A Geometria”), de Descartes, datada de 1637, foi o primeiro texto publicado que combina de maneira direta álgebra e geometria (cf. MARTIN, 1975, p. 51).

inaugurada por Möbius e Plücker são exemplares nesse sentido. Além dos estudos acerca da geometria projetiva, pode-se citar ainda a criação das chamadas séries de Fourier, o desenvolvimento da teoria dos números com Gauss, Kummer e Dedekind, assim como da teoria das equações com Abel e Galois (GRAY, 1993, p. 581-585). Nesse espírito, o século XIX surge como o momento em que esse novo paradigma nascido no seio das ciências formais já conhece sua maturidade e encontra-se apto a começar a oferecer seus melhores frutos. O esforço de vários autores do período no sentido de implementar o caráter rigoroso e abstrato dos raciocínios matemáticos está intimamente relacionado aos resultados desse desenvolvimento.

Nesse ambiente é que János Bolyai, a partir de 1823, e Nicolai Lobatchewsky, em 1826, desenvolvem em esforços absolutamente independentes modelos de geometria muito similares entre si e que têm em comum o distanciamento em relação a alguns aspectos da ciência de Euclides. Seus resultados, todavia, adotam contornos mais dramáticos que os da geometria analítica, porque essa nova geometria desvela um mundo conceitual que chega a ser, ao menos aparentemente, ofensivo à nossa intuição sensível, mas que nem por isso pode ser considerado como inválido. A *geometria hiperbólica*, denominação pela qual conhecemos atualmente o modelo proposto por Lobatchewsky e Bolyai, apesar de abandonar o quinto postulado de Euclides,³ permanece tão consistente quanto a nossa cara geometria euclidiana.

Sob uma perspectiva epistemológica, o surgimento das geometrias não euclidianas deve ser compreendido como resultado de um processo de investigação e de amadurecimento da disciplina, principalmente por dois fatores: o primeiro, a busca pelo rigor como característica premente nas ciências formais do século XIX; o segundo, a possibilidade da substituição das réguas e compassos pelos procedimentos de cálculo graças à geometria analítica. Justamente nesse contexto é que a busca pelo rigor absoluto no estudo das paralelas leva à exaustiva tentativa de encontrar uma demonstração para o quinto postulado de Euclides e, como resultado disso, ao utilizarem recursos algébricos e trigonométricos, os dois matemáticos europeus acabam por descortinar um novo e inesperado veio da geometria. O

³ “Se uma linha reta corta duas outras formando ângulos internos de um mesmo lado que sejam menores que dois ângulos retos, as duas linhas retas, se prolongadas indefinidamente, encontram-se no lado onde se formam os ângulos menores que dois ângulos retos” (EUCLIDES, 1994, p. 2).

modelo euclidiano, cuja importância é enorme e, por isso mesmo, inegável,⁴ perde, todavia, sua exclusividade. No que nos interessa diretamente, a importância da criação das geometrias não euclidianas está intimamente relacionada a uma fragilização da intuição enquanto fundamento da verdade das asserções matemáticas.

As vicissitudes da intuição na geometria encontram par no que se passa no âmbito da aritmética e da análise. Em sua formulação preliminar, o cálculo infinitesimal, tanto na forma apresentada por Leibniz quanto na formulação de Newton, apresentava sérias inconsistências referentes a sua fundamentação, se observados os problemas de cunho filosófico decorrentes da tentativa de aplicação desse algoritmo para a compreensão da maneira como se comportam corpos reais.⁵ O esforço no sentido de superar essas dificuldades se dá através do desenvolvimento, elaboração e refinamento das teorias, de modo que já no século XVIII nota-se, principalmente a partir de Bolzano, uma mudança de perspectiva interessante, em relação ao que efetivamente esperar de uma “boa” teoria: conhecimento matemático é conhecimento demonstrativo. A intenção normativa aqui é óbvia: a matemática *deve ser* uma ciência demonstrativa, para que se possa atingir um grau de perfeição superior e definitivamente banir paradoxos, contradições e dubiedades, como os envolvidos na noção de infinitesimal. Impõem-se, assim, novos critérios para a aceitabilidade das proposições matemáticas, e seus pressupostos passam a ser compreendidos como necessariamente obedecendo a um novo nível de elaboração, propiciado pelo rigor demonstrativo. É esse contexto que faz Kline, por exemplo, denominar o século XIX como o momento da *instalação do rigor na análise* (KLINE, 1972, p. 947). Essa perspectiva, ou melhor, esse programa de ciência, encontra sua caracterização mais efetiva através da obra de Karl Weierstrass, a grande figura do “rigor” na

⁴ Wilder (1952, p. 5) assevera taxativamente que “a influência do trabalho de Euclides foi tremenda. Provavelmente, nenhum outro documento teve mais influência no pensamento científico.”

⁵ Basicamente, a questão pode ser resumida da seguinte maneira: Newton escapa do problema da consideração do infinito ao postular como fundamento de seu argumento a existência de grandezas reais que, em um fluxo, dissipam-se através de seu movimento contínuo. O conceito é fugidio, pois ao se dissipar, o objeto matemático concebido enquanto fluxo é submetido a uma divisão que leva à exaustão, mas sem se comprometer com um limite rígido para o seu último ponto de referência. A noção de limite, nesse caso, desempenha um papel crucial. Já em Leibniz, o problema tem fundamento no motivo inverso, ou seja, por articular uma resposta aos problemas do cálculo que deliberadamente lança mão de grandezas infinitesimais. Assim, o episódio que ficou conhecido como o “escândalo dos infinitesimais” deixa claro que não há como sustentar que o cálculo infinitesimal nasce com uma teoria sólida do ponto de vista filosófico, malgrado seu poder explicativo imediatamente verificado. Apesar de válido e viável, falta-lhe uma base confiável que o livre das dificuldades acima mencionadas, mas não apenas isso. Falta-lhe também uma justificação suficiente no que tange aos pressupostos matemáticos, quando prescinde de “uma descrição exaustiva do sistema dos números reais, tarefa realizada apenas no século XIX” (VAN ROOTSELAAR, 1991, p. 301). Sem uma descrição dessa natureza, todo o âmbito da disciplina está em risco de sérias inconsistências.

análise, criador de funções contínuas não deriváveis em nenhum de seus pontos e cuja obra matemática abriu novas e fecundas perspectivas. Nesse contexto, a intuição, guia, por exemplo, da aritmética cartesiana, parecia incontestavelmente superada, salvo pelo clamor de algumas vozes que pouco ecoavam (como a de Kronecker, por exemplo), até mesmo porque o momento não era, por assim dizer, de “recuar”. Tudo apontava para uma possibilidade cada vez maior de efetivar essa perfeita formalização da matemática, e é nesse ambiente que Georg Cantor apresenta sua notável teoria dos conjuntos, que veicula uma matemática do infinito, formalizada com todo o rigor que se poderia esperar do século XIX.

1.2. A teoria cantoriana dos conjuntos e seus paradoxos

A teoria dos conjuntos obtém ampla ressonância no seio das ciências formais, interessando aos matemáticos por seus aspectos técnicos. Todavia, a leitura que dela fazem lógicos e filósofos é a que nos interessa diretamente, por representar de modo paradigmático os resultados do processo desmesurado de busca pelo rigor conforme citado acima. Isso porque, sob certo ponto de vista, a teoria dos conjuntos simplesmente retrata a formalização de noções corriqueiras da matemática até então fundadas intuitivamente. A partir da definição de seus conceitos básicos, como os de elemento e de conjunto, Cantor não faz mais que definir rigorosamente o significado e o alcance de ideias que sempre nortearam todas as operações da aritmética e da álgebra, mesmo que implicitamente, mas enfrentando o desafio que consiste em por às claras o conceito formal de infinito matemático. Procuraremos aqui ressaltar apenas as características filosóficas mais importantes desse esforço. Elas se referem aos conceitos apresentados e à forma com a qual o autor propõe seu encadeamento.

O passo inicial de Cantor é apresentar os conceitos de elemento, conjunto, bem como de sua mensuração enquanto *totalidades*.⁶ Todas essas grandezas são mensuráveis e sua representação é dada de acordo com o valor do número cardinal que representa cada uma

⁶ “By an aggregate (Menge) we are to understand any collection into a whole (Zusammenfassung zu einem Ganzen) *M* of definite and separate objects *m* of our intuition or our thought. (...) We will call by the name ‘power’ or ‘cardinal number’ of *M* the general concept which, by means of our active faculty of thought, arises from the aggregate *M* when we make abstraction of the nature of its various elements of *m* and of the other in which they are given.” [Por um agregado entendemos alguma coleção reunida em uma totalidade *M* de objetos separados e definidos *m* de nossa intuição ou nosso pensamento (...) Nós denominaremos ‘potência’ ou ‘número cardinal’ de *M* o conceito geral que, através de uma faculdade ativa do pensamento, possa ser obtido através do agregado *M* quando fazemos a abstração da natureza dos vários elementos *m* e da ordem na qual eles são dados.] (CANTOR, 1915, p. 85-6).

delas. Desse modo, como a abstração da natureza individual de cada um dos elementos é *conditio sine qua non* para a definição da cardinalidade de um agregado na teoria dos conjuntos, podemos estabelecer comparações - e mais que isso, *relações* - através da consideração da grandeza de dois conjuntos dados, por mais díspares que sejam as naturezas de seus constituintes. A definição de um número cardinal qualquer, por conseguinte, ressalta o papel central do ato de abstração, tanto para a formação do conjunto (no que tange aos elementos particulares) quanto de sua concepção como totalidade. Assim, o número cardinal torna um conjunto passível de ser quantificado a partir de sua totalidade; uma vez efetuada tal operação (e determinada a sua *potência*), poder-se-á efetuar operações matemáticas básicas a partir dessas grandezas *enquanto* totalidades.

Dessa maneira, portanto, pode-se estabelecer um procedimento de cálculo da adição, subtração, multiplicação e exponenciação não mais dos elementos constituintes de conjuntos, mas desse próprio conjunto, agora representado por uma grandeza mensurável, que é seu valor cardinal, ou seja, a grandeza que representa sua totalidade. Assim, aos cardinais finitos aplicam-se as regras da matemática elementar, por se tratarem simplesmente de números que representam a grandeza de um conjunto a partir da quantidade de seus elementos. Podemos citar três dentre as várias consequências que decorrem naturalmente dessa definição, a saber, o paralelismo existente entre a série dos naturais e a série dos cardinais, uma ordem de grandeza ($a < b < c$) entre os constituintes da série dos cardinais e, finalmente, a impossibilidade de introduzir “cardinais fracionários.” (CANTOR, 1915, p. 99).

Os números cardinais transfinitos são introduzidos a partir de um exemplo: a totalidade dos cardinais finitos.⁷ Essas grandezas, todavia, não se assemelham às grandezas finitas, obedecendo a regras que denegam as da matemática elementar. A título de exemplo, algumas propriedades do menor dos números transfinitos são as seguintes:

$$\begin{aligned} (2) \aleph_0 + 1 &= \aleph_0 \\ (5) \aleph_0 + \aleph_0 &= \aleph_0 \\ (6) \aleph_0 + \aleph_0 &= \aleph_0 \text{ (ou, sob outra forma, } \aleph_0 * 2 = \aleph_0 \text{)} \end{aligned}$$

⁷ “The first example of a transfinite aggregate is given by the totality of finite cardinal numbers v ; we call its cardinal number ‘Aleph-zero’ and denote it by $\aleph_0$. (...) That $\aleph_0$ is a transfinite number, that is to say, is not equal to any finite number μ , follows from the simple fact that, if to the aggregate $\{v\}$ is added a new element e_0 , the union aggregate $(\{v\}, e_0)$ is equivalent to the original aggregate $\{v\}$ ” [O primeiro exemplo de um agregado transfinito é dado pela totalidade de números cardinais finitos v ; nós denominamos seu número cardinal ‘Aleph-zero’, e o denotamos por $\aleph_0$. (...) Se $\aleph_0$ é um número transfinito, isso quer dizer que ele não é igual a nenhum número finito μ , e isso se segue do simples fato de que, se ao agregado $\{v\}$ soma-se um novo elemento e_0 , o conjunto união $(\{v\}, e_0)$ é equivalente ao agregado original $\{v\}$.] (CANTOR, 1915, p. 103-4).

$$(7) \aleph_0 * \nu = \nu * \aleph_0 = \aleph_0$$

$$(8) \aleph_0 * \aleph_0 = \aleph_0 \quad (\text{CANTOR, 1915, p. 106}).$$

Em suma, a expressão formal-axiomática das grandezas transfinitas evidencia que elas possuem *naturezas* completamente diferentes das finitas. O que Cantor propõe nas entrelinhas de sua apresentação é, na verdade, uma ampliação do conceito tradicional de número. As grandezas transfinitas, que obedecem a princípios tão diferentes dos princípios dos números finitos, são também concebidas enquanto números e, por isso, uma concepção mais ampla de número precisa ser formulada, a fim de abarcar suficientemente esses dois tipos de números agora trazidos à baila, os finitos e os transfinitos.

A ideia de cardinais transfinitos é, assim, totalmente nova. E se os cardinais finitos são introduzidos na teoria dos conjuntos com o intuito de possibilitar a concepção de conjuntos finitos enquanto totalidades mensuráveis, essa pretensão também existe e se realiza sob a pena de Cantor para os cardinais transfinitos. Assim, como sugerem os teoremas acima, os subconjuntos de um conjunto transfinito também são necessariamente transfinitos e, portanto, também representados por $\aleph_0$. Em estrita observância à teoria, é preciso atribuir a *mesma* grandeza, por exemplo, aos naturais, aos números pares, aos múltiplos de 20 e aos múltiplos de 200, pois, apesar de todos os múltiplos de 200 serem também de 20, e os de 20 de 2, todos eles são exemplos de partes do conjunto dos números naturais que são tão grandes quanto ele próprio.

Apesar de $\aleph_0$ representar grandezas transfinitas, Cantor o apresenta como sendo apenas o primeiro número transfinito de uma série, série essa que, por sua vez, também pode ser concebida *ad infinitum*.⁸ Considerar tal hipótese, entretanto, obriga-nos a tomar as grandezas

⁸ “After we have introduced the least transfinite cardinal number $\aleph_0$ and derived its proprieties that lie in the most readily to hand, the question arises as to the higher cardinal numbers and how they proceed from $\aleph_0$. We shall show that the transfinite cardinal numbers can be arranged according to their magnitude, and, in this order, form, like the finite numbers, a ‘well-ordered aggregate’ in an extended sense of the words. Out of $\aleph_0$ proceeds, by a definite law, the next great cardinal number $\aleph_1$, out of this by the same law the next greater $\aleph_2$, and so on. But even the unlimited sequence of cardinal numbers

$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_\nu, \dots$

does not exhaust the conception of transfinite cardinal number. We will prove the existence of a cardinal number which we denote by $\aleph_\omega$ and which shows itself to be the next greater to all the numbers $\aleph_\nu$; out of it proceeds in the same way as $\aleph_1$, out of $\aleph_\omega$ a next greater $\aleph_{\omega+1}$, and so on, without end.”

[Após havermos introduzido o menor número cardinal transfinito $\aleph_0$ e derivado suas propriedades que se configuram como as mais úteis, surge o problema relativo aos números cardinais maiores que $\aleph_0$ e como esses números procedem a partir de $\aleph_0$. Nós mostraremos que os números cardinais transfinitos podem ser organizados de acordo com sua magnitude e, desse modo, formam, assim como os números finitos, um agregado bem ordenado, em sentido amplo do termo. A mesma maneira que $\aleph_0$ é obtido através de uma lei de geração definida,

dessa natureza como se tratando de *elementos* de um determinado conjunto, o conjunto dos números transfinitos. O conceito de cardinalidade não é suficiente para dirigir nossa investigação a partir desse momento, porque surge uma nova necessidade de considerar elementos que fazem parte de um conjunto, e não apenas o conjunto em si. Daí a introdução da noção de número ordinal.

Segundo Cantor, a ideia de ordinal nada mais é do que a extensão natural do conceito de número (CANTOR, 1915, p. 117) e de sua ordenação através de uma regra dada. Os números ordinais, entretanto, não são apenas atribuíveis a um elemento dentro de uma série. Há uma distinção introduzida por Cantor entre o ordinal do elemento na série e o número ordinal da série, que tem a função de representar aquilo que o autor denomina “tipo ordinal”. De modo semelhante ao que ocorre na definição dos cardinais, os tipos ordinais têm a função de representar um conjunto de elementos abstratamente, mantendo apenas a ordem de precedência dos elementos na série, respeitando a peculiaridade das séries finitas ou transfinitas.⁹ O estudo das propriedades dos ordinais transfinitos inicia-se com a consideração do valor η , que representa a ordem do agregado R , conjunto que inclui os números racionais maiores que 0 e menores que 1. Dada a possibilidade de estabelecer uma correspondência biunívoca entre o agregado R e a série dos naturais, apesar de conceitualmente diferentes, o ordinal transfinito η é igual ao cardinal transfinito $\aleph_0$. A primeira dificuldade que surge quando da consideração desse agregado é acerca da possibilidade de efetuar aquilo que Cantor denomina uma *boa ordenação*. Encontramos a definição de agregado bem ordenado no segundo texto de Cantor, em 1897, e a primeira de suas exigências é que, para que um

o próximo número cardinal $\aleph_1$, subsequentemente $\aleph_2$ e assim por diante. Mas mesmo a sequência ilimitada de números cardinais

$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_v, \dots$

não esgota a concepção de número cardinal transfinito. Provaremos a existência de um número cardinal que denotamos por $\aleph_\omega$ e que se mostra como o maior dentre os números $\aleph_v$; assim, do mesmo modo, se procede como em $\aleph_1$, partindo de $\aleph_0$ para obter $\aleph_{0+1}$, e assim por diante, infinitamente.] (CANTOR, 1915, p. 108-9).

⁹ “Thus the finite simple ordinal types are subject to the same laws as the finite cardinal numbers, and it is allowable to use the same signs 1, 2, 3, ..., v, ... for them, although they are conceptually different from the cardinal numbers. The case is quite different with the transfinite ordinal types; for to one and the same cardinal number belong innumerable many different types of simply ordered aggregates, which, in their totality, constitute a particular ‘class of types’. Every one of these classes of types is, therefore, determined by the transfinite cardinal number $\mathfrak{a}$, which is common to all the types belonging to the class.” [Dessa maneira, os tipos simples de ordinais finitos são submetidos às mesmas leis a que são os números cardinais finitos, e é permissível utilizar os mesmos símbolos 1, 2, 3, ..., v, ... para eles, embora sejam conceitualmente diferentes dos números cardinais. O caso é muito diferente no que se refere aos tipos ordinais transfinitos, pois para o mesmo número cardinal pertence uma inumerável quantidade de agregados de ordenação simples, que, em sua totalidade, constituem uma certa ‘classe de tipos’. Cada uma dessas classes de tipos é, portanto, determinada por um número cardinal transfinito $\mathfrak{a}$, que é comum a todos os tipos pertencentes à classe.] (CANTOR, 1915, p. 113-4).

agregado possa ser considerado como bem-ordenado, é preciso saber qual é o primeiro elemento de um conjunto, no caso, R .¹⁰ Ora, como determinar precisamente o primeiro número real maior que zero? R é, por conta dessa dificuldade, um exemplo de uma classe de conjuntos que Cantor denomina *densos em todos os pontos*, e do qual não se pode extrair um primeiro ou um último elemento da série (CANTOR, 1915, p. 123). Sob esse aspecto, R pode ser considerado um conjunto ordenado, mas não atende às exigências daquilo que se entende por um conjunto *bem* ordenado.¹¹

Com a distinção estabelecida entre agregados ordenados e agregados bem ordenados, o matemático enxerga, portanto, uma possibilidade de considerar os agregados bem ordenados de maneira peculiar. Atribuir a certo agregado um número ordinal transfinito significa representar a “posição” que os elementos mantêm, uns em relação aos outros, com base em uma determinada regra de ordenação. A consequência disso é o fato de que, para ordinais não finitos, o critério determinado para sua definição é a possibilidade de concebê-los distintamente. O conjunto R , representado por η , é tão grande quanto qualquer conjunto de mesma natureza ao qual possamos estabelecer uma relação biunívoca entre seus elementos e os de R . Logo, mesmo os agregados que constituem subconjuntos de R podem ser colocados em uma relação biunívoca com os elementos de R , assim como agregados maiores, dos quais o próprio R pode ser concebido como parte.

Assim, a ideia de correspondência biunívoca, apesar de simples, traz em seu bojo uma possibilidade que se mostraria fundamental para a matemática do transfinito: mesmo que não se saiba exatamente o ‘tamanho’ de um agregado (e nunca poderemos conhecer um conjunto transfinito da mesma maneira que conhecemos um conjunto finito, ou seja, através da *enumeração* de seus termos), basta que possamos estabelecer, ou melhor, definir como possível, uma correspondência biunívoca entre os elementos de dois conjuntos transfinitos para podermos atribuir também a ambos o mesmo número cardinal.

¹⁰ “By a ‘well-ordered aggregate’, Cantor understood any well-defined aggregate whose elements have given definite succession such that there is a first element, a definite element follows every one (if it is not the least) and to any finite or infinite aggregate a definite element belongs which is the next following element in the succession of them all (unless there are no following elements in the succession).” [Por um agregado bem-ordenado, Cantor concebeu qualquer agregado bem definido cujos elementos possuem uma sucessão definida dada, tal que há um primeiro elemento, um elemento é sucessor de um outro (desde que aquele não seja o último) e para qualquer agregado, finito ou infinito, haja um elemento definido, que é o próximo na sucessão deles todos (ao menos que não haja elementos na sucessão).] (JOURDAIN, 1915, p. 60-1).

¹¹ A título de contra-exemplo, o conjunto dos inteiros positivos é um conjunto bem ordenado e transfinito.

O recurso à correspondência biunívoca é, talvez, o que há de mais simples e engenhoso no trabalho de Cantor. Com essa estratégia, vários “tipos” de infinito são concebíveis: os representados por $\aleph_0$ são apenas alguns deles. Entre grandezas finitas e transfinitas, entretanto, não há passagem, ou seja, relação de mensuração ou comparação possíveis. Logo, a artificialidade dos conceitos de cardinal e de ordinal transfinitos é evidente, porque toda relação possível estabelecida entre grandezas infinitas sustenta-se a partir dessas mesmas definições, e só delas. *Cria-se* (ou, para Cantor, *descobre-se*) um novo universo numérico, perfeitamente definido, mas que estamos longe de poder efetivamente construir. Os melhores exemplos são os ordinais θ (isto é, os ordinais dos números reais entre 0 e 1) e η , que representam um certo tipo de ordenação que conhecemos, mas não somos capazes de efetuar. Para Cantor, entretanto, uma boa definição é o suficiente para garantir a perfeita determinação dos transfinitos.

Esse novo paraíso inventado por Cantor - o paraíso das operações matemáticas entre grandezas transfinitas - mostraria seus pontos frágeis em pouco tempo. O período de efervescência dos paradoxos da teoria dos conjuntos é, em grande parte, aquele denominado por Bourbaki como o da “*grande crise dos fundamentos da matemática*”, como já citamos. Uma vez formalizada a teoria em tela e considerada sua importância capital, um problema existente em suas bases colocava-a sob suspeita e não coadunava, em absoluto, com o ideal de rigor da matemática que se tornara um valor intrínseco e inegociável da disciplina; afinal, “*qualquer incerteza nos fundamentos da ‘mais certa de todas as ciências’ é extremamente desconcertante.*” (CARNAP, 1931, p. 41).

Seguindo Peano e Ramsey, faremos uma distinção entre os paradoxos propriamente lógicos e os de natureza semântica. Os principais paradoxos propriamente lógicos são o paradoxo de Cantor, o de Russell e o de Burali-Forti.

O Paradoxo de Cantor: suponhamos o conjunto U , conjunto esse definido por $\{x \mid x \text{ é um conjunto}\}$. U é, portanto, o conjunto de todos os conjuntos. $P(U)$ é um conjunto de todos os subconjuntos de U e, portanto, subconjunto de U . Como por definição um subconjunto é menor ou igual ao conjunto do qual faz parte, $P(U)$ é menor ou igual a U . Entretanto, segundo o teorema de Cantor, dado o número v como número cardinal do conjunto U , o número de elementos de $P(U)$ é 2^v e, portanto, maior que v (cf. STOLL, 1993, p. 228). O paradoxo surge porque o número cardinal de $P(U)$ não pode ser maior que o de U , pois U é, por definição, o

conjunto de *todos* os conjuntos. Apesar de apresentado em 1899 por Bertrand Russell, o próprio Cantor já tomara conhecimento dele anteriormente, mas ainda não o publicara.

O Paradoxo de Russell remete ao problema dos conjuntos que não são membros de si mesmos. A apresentação do paradoxo surge em uma carta de Russell a Frege, datada de junho de 1902: “*Seja w o conjunto de todas as classes que não são membros de si mesmas. Então, para qualquer classe a que pertença x , ‘ x é w ’ é equivalente (ou seja, assume os mesmos valores de verdade) a ‘ x não é um x ’. Assim, atribuindo a x o valor w , ‘ w é um w ’ equivale a ‘ w não é um w ’.*”¹² Em linguagem simbólica,

$$\forall X(X \in E \leftrightarrow X \notin X) \text{ (cf. HEINZMANN, 1985, p. 38)}$$

A Contradição de Burali-Forti, datada de 1897, (mesmo ano em que Cantor apresenta a segunda parte de sua versão “definitiva” da teoria dos conjuntos) levanta o problema relativo à consideração do “número ordinal da série de ordinais”:

Pode-se mostrar que toda a série bem ordenada possui um número ordinal, que as séries de ordinais maiores ou iguais a qualquer ordinal dado excedem esse ordinal dado em um, e que a série de todos os ordinais é bem ordenada. Segue-se daí que a série de ordinais possui um número ordinal; chamemo-lo de Ω . Mas nesse caso, a série de todos os ordinais incluindo Ω possui o número ordinal $\Omega+1$, que é maior que Ω . Assim, Ω não é o número ordinal de todos os ordinais.¹³

Além dos paradoxos concernentes à teoria dos conjuntos que possuem uma natureza propriamente lógica, há que se notar também os paradoxos semânticos, dentre os quais citamos os de König, Richard, Grelling e Berry, descritos em Russell (cf. 1908, p. 200-3) e, em versões formalizadas, como apresentadas por Heinzmann (cf. 1985, p. 39, 43-4). O paradoxo semântico de Epimênides¹⁴ é particularmente importante, pois acaba por ganhar uma versão formal com os notórios teoremas da incompletude de Gödel.

¹² “*Let w be the class of all those classes which are not members of themselves. Then, whatever class x may be, ‘ x is a w ’ is equivalent to ‘ x is not an x ’. Hence, giving to x the value w , ‘ w is a w ’ is equivalent to w is not a w ’” (RUSSELL, 1908, p. 200).*

¹³ “*It can be shown that every well-ordered series has an ordinal number, that the series of ordinals up to and including any given ordinal exceeds the given ordinal by one, and (on certain very natural assumptions) that the series of all ordinals has an ordinal number, Ω say. But in that case the series of all ordinals including Ω has the ordinal number $\Omega+1$, which must be greater than Ω . Hence, Ω is not the ordinal number of all ordinals” (RUSSELL, 1908, p. 201-2).*

¹⁴ “*Epimenides the Cretan said that all the Cretans were liars, and all other statements made by Cretans were certainly lies. Was this a lie? The simplest form of this contradiction is afforded by the man who says ‘I am lying’; if he is lying, he is speaking the truth, and vice versa.*” [Epimênides, o Cretense, dizia que todos os cretenses eram mentirosos, e todos os enunciados asseverados pelos cretenses eram certamente mentirosos. Essa

De modo geral, os paradoxos envolvem funções e definições que não podem expressar *ipso facto* conjuntos ou classes de forma não contraditória, malgrado sua aparente normalidade. Desde o surgimento desses paradoxos, parece ter ficado claro que eles estavam diretamente relacionados a definições “circulares” ou aos pressupostos da teoria dos números transfinitos, porque, como podemos verificar, a maioria dos paradoxos citados apresenta uma, outra, ou ambas as características. Os paradoxos de Cantor e de Burali-Forti são asserções acerca de números transfinitos. Por outro lado, são obviamente circulares as ideias do tipo “o número ordinal da série de todos os ordinais”, que encontramos na antinomia de Burali-Forti, a ideia de “conjunto de todos os conjuntos”, presente no paradoxo de Cantor e a de “conjuntos que não são membros de si mesmos”, do paradoxo de Russell.

A superação dessas dificuldades não surge de maneira pacífica. Vários autores procuram apresentar soluções para os paradoxos, soluções essas que foram muitas vezes superficiais e incompletas, e não soaram como absolutamente suficientes. Nesse contexto, o que se instala é uma ampla discussão entre os matemáticos envolvidos, que contribuiu para que eles passassem a compreender melhor os problemas suscitados e, assim, propusessem as soluções que, de fato, se mostraram mais pertinentes e eficazes, apesar de acreditar ser lícito afirmar que nenhum deles conseguiu uma resposta *absolutamente* suficiente, pelo menos até o advento dos teoremas da incompletude de Gödel, quando, de fato, a discussão mais recrudescer que propriamente se resolve.

As soluções propostas para os paradoxos podem ser classificadas como possuindo duas orientações básicas: a primeira delas, o tipo de solução formulada por Henri Poincaré e corroborada principalmente por outros matemáticos franceses: primar pela *predicatividade da função*, ou seja, procurar identificar se os conceitos matemáticos empregados são obtidos por intermédio de uma regra de construção, sendo que apenas os conceitos com tal característica podem servir como fundamento adequado de funções predicativas, uma vez associados a classificações imutáveis a partir das quais estabelecemos nossas construções conceituais.¹⁵

asserção era mentirosa? A forma mais simples dessa contradição é propiciada pelo homem que diz ‘eu estou mentindo’; se ele está mentindo, está dizendo a verdade, e vice-versa.] (RUSSELL, 1908, p. 200).

¹⁵ A solução aqui apresentada já é uma formulação mais elaborada e, creio, a que podemos considerar “definitiva” do pensamento de Poincaré, que ele defende a partir de 1909 (POINCARÉ, 1986[1909.3], p. 235-9). Suas primeiras formulações voltadas especificamente a essa questão, concebidas entre 1904 e 1905, proibiam remeter a conjuntos infinitos sob *quaisquer* circunstâncias, por considerar que o estabelecimento de quaisquer operações com os conjuntos transfinitos tomavam como base evidentemente “*um método contrário a toda sã psicologia*.” (POINCARÉ, 1986[1905], p. 12).

Assim, a possibilidade de tratarmos daquilo que inadvertidamente denominamos como “conjuntos transfinitos” sofre uma séria restrição, pois a imutabilidade das classificações envolvidas em qualquer operação exige que, mesmo nos domínios dos conjuntos transfinitos, possamos não apenas definir, mas também descrever os objetos aos quais reportamos. Isso significa, em outros termos, abandonar qualquer pretensão de retratar o infinito como dado.

O segundo tipo de solução é aquele no qual podemos identificar características das obras de Zermelo e Russell: ao invés de restringir a amplitude de ação da teoria cantoriana dos conjuntos, eles procuraram enriquecer sua base teórica, dotando-a de instrumentos que garantissem o seu perfeito funcionamento e sua total formalização. No caso de Russell, a apresentação da teoria dos tipos lógicos abre caminhos para evitar a circularidade das definições, quando estabelece uma hierarquia dos tipos lógicos dentro dos quais cada função deve ser classificada. Uma vez formulada sua teoria, Russell deixa claro que os paradoxos originados a partir dos ordinais e cardinais transfinitos não são problemas intrínsecos a esses números ou aos conjuntos que representam, mas à correta formulação das proposições que os definem e aplicam, pois é fundamental que a elaboração dessas sentenças observe as limitações de seus respectivos campos de significação. Zermelo, por sua vez, procura aperfeiçoar o trabalho de Cantor, apresentando novos axiomas que propiciassem uma formulação mais rígida (e, portanto, menos problemática) para a teoria dos conjuntos. Podemos exemplificar esse fato citando o axioma da escolha, de 1904, que é tão notório quanto polêmico, ou a base axiomática que ele apresenta no texto “*Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*” (“*Investigação acerca dos fundamentos da teoria dos conjuntos*”). Há, dessa maneira, uma mesma inspiração que norteia os trabalhos de Russell e Zermelo, apesar das soluções diferentes que eles apresentam para o problema. As três correntes mais fortes da filosofia matemática no século XX estão intimamente ligadas a essas posições.

1.3. O logicismo de Frege e Russell

O logicismo é a corrente que procura levar a aproximação entre a lógica e a matemática às raízes de uma identidade, ou melhor, de uma subordinação da matemática em

relação à lógica.¹⁶ Assim, procura-se minimizar a importância da intuição na matemática por um motivo muito simples: para o logicista, que indubitavelmente é inspirado em uma concepção matemática de tipo leibniziana,¹⁷ a sua grande obra se realizaria no momento em que se provasse adequadamente que *todos* os raciocínios da matemática são redutíveis à forma lógica, desde os mais elementares até os mais refinados, de modo que os raciocínios e leis da lógica precedem os da matemática e, por isso, podem propiciar instrumentos suficientes para a total compreensão das operações matemáticas a partir de suas bases.¹⁸ As ideias de inspiração logicista desenvolvem-se de maneiras diferentes sob a pena de cada autor, de modo que um estudo sistemático deveria levar em conta essas diferenças.¹⁹ Aqui, entretanto, consideraremos apenas as noções mais fundamentais concernentes aos trabalhos dos dois autores cuja obra é mais relevante para o nosso tema: Gottlob Frege e Bertrand Russell.

A obra de Frege é considerada como uma contribuição de suma importância para o desenvolvimento da lógica e da matemática modernas. A “*Begriffsschrift*” (“*Conceitografia*”

¹⁶ “The logicist project had three components: to refrain from assuming the existence of any facts outside the logic, to define all arithmetic concepts and relations in terms of logical concepts and relations alone, and to prove all the postulates of arithmetic as theorems of the augmented logic (or to show how such a series of proofs could be carried out). Thus, when proving statements about the new system – such as that its definitions are acceptable or consistent – the logicist can use only previously accepted logical principles and rules.” [O projeto logicista apresentava três componentes: negar a aceitação da existência de quaisquer componentes externos à lógica, definir todos os conceitos aritméticos e relações apenas em termos de conceitos e operações lógicos, e provar todos os postulados da aritmética como termos de uma lógica estendida (ou mostrar como tal sequência de provas pode ser executada). Assim, ao provar enunciados acerca do novo sistema – tais como os relativos à sua aceitabilidade ou consistência – o logicista só pode utilizar princípios e regras lógicos previamente aceitos.] (FOLINA, 1992, p. 96).

¹⁷ Que fique bem claro que não pretendo estabelecer mais que uma inspiração, ou melhor, uma influência leibniziana no ideário logicista. Qualquer tentativa de pensar *ipsis litteris* a filosofia leibniziana hodiernamente é uma tarefa bastante problemática, devido a uma série de fatores, da mesma maneira que não se pode sustentar hoje em dia um kantismo ortodoxo, sem efetuar, no mínimo, uma releitura da *Estética Transcendental*.

¹⁸ Desse modo, o ideal logicista se traduz pela tentativa de exprimir toda a matemática de modo perfeito em termos do que conhecemos atualmente por “grande lógica”, que Newton da Costa conceitua da seguinte maneira: “O raciocínio dedutivo não se enquadra, inteiramente, na lógica elementar. No referente à matemática, por exemplo, tem-se necessidade de recursos lógicos mais fortes. No terreno clássico, torna-se possível reforçar a lógica elementar seguindo-se dois caminhos diversos: pela teoria dos conjuntos ou pelo cálculo de predicados de ordem superior (teoria dos tipos). Deve-se, em resumo, elaborar uma grande lógica ou uma lógica não-elementar” (DA COSTA, 1980, p. 68).

¹⁹ Vide o exemplo de Giuseppe Peano. Ele tem na chamada *logística* um método para expressar suas proposições dentro de uma forma lógica, mas com uma perspectiva diferente da de Frege e Russell: “Para Peano e seus seguidores, o uso da lógica simbólica é dado como um meio para atingir uma finalidade. A lógica, para eles, deveria ser uma serva da matemática; uma serva que a matemática não poderia dispensar” (WILDER, 1952, p. 220). Cabe ressaltar ainda que não é uma unanimidade que Frege é o pai da nova lógica. O papel de Boole, de Morgan, Peano e outros é muito relevante, e Frege só se torna realmente uma figura central nessa problemática

ou “*Ideografia*”, conforme a tradução), apesar de pouco extensa, é bastante ambiciosa. Devido à grandeza do que pretende o projeto logicista – demonstrar todos os princípios da matemática em bases lógico-dedutivas - Frege percebe que havia uma condição necessária para atingir sua finalidade, sem a qual seu trabalho provavelmente estaria fadado ao fracasso, qual seja, estabelecer uma linguagem adequada que lhe permitisse expressar de modo mais preciso os conceitos que viria a desenvolver, o que não se poderia encontrar na linguagem coloquial, devido à sua ambiguidade e imprecisão, tão distantes das rigorosas exigências da matemática.²⁰

A primeira parte da *Conceitografia* trata da definição dos termos que seriam utilizados por Frege, e que viriam a constituir o núcleo dessa nova linguagem criada (artificialmente, é claro) para atender a uma finalidade específica, que é a de veicular adequada e precisamente o conteúdo a ela atribuído. Uma das características peculiares do sistema de Frege é sua concepção de proposição. Ele introduz uma simbologia que desempenha a função de veicular a aplicação de um julgamento a um argumento, julgamento este que remete ao *conteúdo* do argumento; ele tem um papel fundamental para o abandono da forma sujeito-predicado que caracteriza a lógica aristotélica e impede uma aproximação em relação à matemática, pelo tipo de raciocínio que esta disciplina exige. O sinal, ao expressar um julgamento, possibilita o abandono de um universo discursivo de associação de ideias, para se configurar em um enunciado assertivo; eis aí novamente a forma predicativa. Logo, *toda* proposição é passível do mesmo predicado: “é um fato”. Isso equivale a asseverar que toda a relevância de um enunciado se assenta no sujeito, devido à esterilidade de um predicado comum a todas as proposições, que passa, portanto, por um constituinte neutro. Do mesmo modo, a forma de

depois de Russell “redescobri-lo”. Essa importância primaz de Frege é uma leitura proposta principalmente por Quine (apud DA COSTA, 1977, p. 6).

²⁰ “I believe that I can make the relation of my ideography to ordinary language [Sprache des Lebens] clear if I compare it to that which the microscope has to the eye. Because of the range of its possible uses and the versatility with which it can adapt to the most diverse circumstances, the eye is far superior to the microscope. Considered as an optical instrument, to be sure, it exhibits many imperfections, which ordinarily remain unnoticed only on account of its intimate connection with our mental life. But, as soon as scientific goals demand great sharpness of resolution, the eye proves to be insufficient. The microscope, on the other hand, is perfectly suited to precisely such goals, but that is just why it is useless for all others.” [Eu acredito que posso deixar mais clara a relação existente entre minha ideografia e a linguagem ordinária se eu estabelecer uma comparação com a relação existente entre o olho e o microscópio. Devido ao vasto campo de usos possíveis e a versatilidade com a qual ele se adapta às mais diversas circunstâncias, o olho é muito superior ao microscópio. Considerado enquanto mecanismo óptico, certamente ele possui muitas imperfeições, mas que permanecem imperceptíveis devido à sua íntima relação com nossa atividade mental. Entretanto, quando objetivos científicos exigem uma maior precisão de resolução, o olho se mostra insuficiente. O microscópio, ao contrário, é perfeitamente adequado a tais fins, e por isso é inútil para outros propósitos.] (FREGE, 1879, p. 6).

apresentação da proposição não tem relevância a ser considerada para o valor de verdade que ela veicula. Assim, nos termos de Frege, se postulamos os seguintes enunciados: “*Os gregos derrotaram os persas em Plateia*” e “*Os persas foram derrotados pelos gregos em Plateia*”, por ambos representarem *exatamente* o mesmo fato ocorrido ao Sul de Tebas em 479 a.C., têm *exatamente* o mesmo significado. As diferenças, por assim dizer, linguísticas, são veementemente ignoradas; tudo o que importa é retratado pela descrição do fato e, consequentemente, pelas condições objetivas que coloca em evidência.²¹

Assim apresentada, a proposição encontra uma reformulação bastante engenhosa, porque Frege abandona a concepção clássica de forma lógica do enunciado conforme concebido por Aristóteles²² (que envolve a bipolaridade e a complexidade essencial da proposição), a fim de apresentar um novo conceito de enunciado enquanto *função*

²¹ “*In ordinary language, the place of the subject in the sequence of words has the significance of a distinguished place, where we put that to which we wish especially to direct the attention of the listener. (...) Now, all those peculiarities of ordinary language that result only from the interaction of speaker and listener (...) have nothing to answers to them in my formula language, since in a judgment I consider only that which influences its possible consequences. Everything necessary for a correct inference is expressed in full, but what is not necessary is generally not indicated; nothing is left to guesswork.*” [Na linguagem ordinária, o lugar do sujeito na sequência de palavras tem a significação de um lugar de destaque, onde nós colocamos aquilo a que queremos dirigir especialmente a atenção do ouvinte. (...) Por conseguinte, todas as peculiaridades da linguagem ordinária que resultam apenas da interação entre o falante e o ouvinte (...) nada têm a responder em minha fórmula de linguagem, pois em um julgamento eu considero apenas aquilo que influencia suas possíveis consequências. Tudo que é necessário para uma correta inferência é expresso de maneira completa, mas o que não é necessário normalmente não é indicado. Nada se presta a conjecturas.] (FREGE, 1879, p. 12).

²² Por cerca de dois milênios a concepção de enunciado conforme proposta por Aristóteles norteou os trabalhos dos lógicos antigos, medievais e modernos. Apesar das diferentes formulações e contribuições no decorrer desses anos, a proposição nunca perdeu seu caráter de combinação entre sujeito e predicado, ou, em outras palavras, da atribuição ou negação de determinado predicado ao sujeito. O enunciado, que tem um papel primaz e fundamental enquanto veicula a verdade daquilo que afirmamos ou apenas pensamos, é concebido a partir dessa bipolaridade e de uma complexidade essencial, na medida em que adquire significado e pode vir a ser verdadeiro ou falso de acordo com a maneira que se dá a combinação de conceitos no universo do discurso e que, pretensamente, combina-os em harmonia com o “real”, possibilitando sua descrição. Em suma, na medida em que os enunciados representam, no universo de discurso, uma verossimilhança em relação aos fatos observados através da estrutura e do conteúdo que lhe são peculiares, eles são verdadeiros. Quando representam apenas algo possível, mas não verificado pelos fatos, são falsos, mas ainda assim significativos. Assim, a função do enunciado como meio de representação da realidade não permite que a ele seja atribuída a característica de simplesmente *nomear fatos*. Ao contrário dos nomes, que Aristóteles explicitamente afirma significarem por convenção, os enunciados *significam complexamente*, para utilizar os termos do Professor Luiz Henrique Lopes dos Santos (1994, p. 24), pois é na relação de predicação que se funda a representação da realidade e, por conseguinte, a verdade da proposição. Quando a relação apontada pela proposição é significativa, mas não encontra fulcro no campo do “real”, o enunciado é falso, mas, insistamos, ainda assim significativo. A possibilidade de trânsito entre verdade e falsidade das proposições significativas é, por assim dizer, dirigida por essa teia de significação complexa que constitui o enunciado, que encontra suas regras precípuas nos princípios de identidade, de não contradição e do terceiro-excluído, explicitados tanto na *Metafísica* quanto no *De Interpretatione*. Todo enunciado afirmativo deve ser passível de ser negado, e a negação, por sua vez, de ser afirmada, algo que não faz sentido aos nomes que significam por convenção. A complexidade essencial da

proposicional.²³ Em sua nova concepção, o enunciado passa a ser identificado como uma função de verdade de determinada variável. Ao contrário do que tínhamos sob a égide do paradigma aristotélico, a combinação dos operadores de condicional e negação permite efetuar operações entre enunciados através de regras preestabelecidas, consolidando a possibilidade de um trato dedutivo em seu sistema, marcado inclusive pela transitividade permitida entre funções que possuam o mesmo grau de carência.²⁴

proposição exige que a representação da realidade por meio do enunciado se constitua em uma escolha que dê conta adequadamente do modo como sujeitos e predicados articulam-se na realidade.

²³ Uma passagem de Leibniz é interessante para ressaltar esse fenômeno: “*A razão ou proporção entre duas retas L e M pode ser concebida de três maneiras diferentes: como uma razão da maior L para a menor M; como uma razão da menor M para a maior L; e, finalmente, como algo abstraído de ambas, isto é, como uma razão entre L e M, sem levar em conta qual é a antecedente e qual é a consequente, qual o sujeito e qual o objeto (...) Na primeira maneira e considerá-las, L (a maior) é o sujeito, e na segunda é M (a menor) o sujeito daquele acidente a que os filósofos chamam razão ou relação. Mas no terceiro modo de considerá-las, qual delas será o sujeito? Não se pode dizer que ambas, ao mesmo tempo, sejam o sujeito de tal acidente; porque se assim fosse, teríamos um acidente dividido por dois sujeitos, com um pé num e outro pé no outro, o que é contrário à noção de acidente. Devemos convir, portanto, que tal relação, nesta terceira maneira de considerá-la, está, de fato, fora dos sujeitos; mas, não sendo nem uma substância nem um acidente, deve ser uma mera coisa ideal, cuja consideração apesar disso é útil*” (LEIBNIZ apud RUSSELL, 1968[1958], p. 14-5). Ou seja, apesar de significativa, a elaboração do problema sob um ponto de vista que não é compatível com a forma sujeito-predicado acaba por ser simplesmente abandonada, assumindo um *status* muito menos relevante se comparado à forma compatível à lógica predicativa. O autor, por não conseguir enquadrar a terceira formulação na forma canônica da lógica clássica, a considera como útil, mas não passível de uma análise nos termos de substância e acidente, par que atua respectivamente como nas figuras de sujeito e predicado lógico. Diante do abandono inglório e carente de fundamento dessa “mera coisa ideal”, cabe-nos apenas imaginar quanto esse ato de ignorar uma representação relacional de um problema deve ter custado caro ao matemático que idealizou o cálculo infinitesimal e ao metafísico que concebeu a *Monadologia*. Os trabalhos de Boole também são dignos de nota sob esse prisma. Por interessante e fecundo que seja o teor do seu texto, falta-lhe ainda a capacidade de se desprender do cânone aristotélico. De certa maneira, Boole limita-se a “aritmétizar” a lógica, trazendo para o seu âmbito a possibilidade de aplicação da álgebra, mas apesar de explicitamente deixar clara sua intenção de tomar a lógica como um amplo sistema de relações, enxerga essas relações ainda sob a forma sujeito-predicado, o que o tona mais alinhado aos seus predecessores que propriamente um inovador. O mesmo não ocorre com Frege. Aliás, o modo como Boole constrói “*The mathematical analysis of logic*” (“*A análise matemática da lógica*”) em nada se parece com o *Begriffsschrift*, que pode ser considerado como talvez a maior referência na filosofia da lógica anglo-saxã.

²⁴ “*Since the sign Φ occurs in the expression $\Phi(A)$ and since we can imagine that it is replaced by other signs, Ψ or X , which could then express other functions of the argument A , we can also regard $\Phi(A)$ as a function of the argument Φ . This shows quite clearly that the concept of function in analysis, which in general I use as a guide, is far more restricted than the one developed here.*” [Quando ocorre Φ na expressão $\Phi(A)$, e como nós podemos imaginar que ele pode ser substituído por outros signos, Ψ ou X , que assim expressariam as funções do argumento A , nós podemos também tomar $\Phi(A)$ como uma função do argumento Φ . Isso mostra muito claramente que o conceito de função em análise, que de modo geral eu usei como guia, é muito mais restrito que aquele que eu formulei aqui.] (FREGE, 1879, p. 24). Heijenoort (1967, p. 03) ressalta que é exatamente nesse ponto que Russell iria se apegar para apresentar o paradoxo que leva seu nome, como veremos adiante. Há ainda outros pontos de interesse na *Conceitografia*. Adotando uma estratégia que possibilita efetuar generalizações no seu sistema (o que faz a partir de uma notação própria, utilizando letras germânicas), Frege introduz uma forma de juízos universais como funções proposicionais, uma estratégia de quantificação universal que o leva ao âmbito do que denominamos hodiernamente um modelo de *lógica de segunda ordem*. Assim, com o intuito de estabelecer uma correlação entre o sistema da *Conceitografia* e as linguagens lógicas de segunda ordem contemporâneas, existe a possibilidade de sempre extrair de um julgamento geral (universal) uma relação menos geral, a exemplo da introduzida pela quantificação existencial (FREGE, 1879, p. 24).

A possibilidade de estabelecer um tratamento funcional-veritativo das proposições evidencia a importância do valor de verdade da proposição. Se “os gregos derrotaram os persas em Plateia” e “os persas foram derrotados pelos gregos em Plateia” são, por assim dizer, indiscerníveis do ponto de vista da fórmula da linguagem, parece óbvio que o sentido das proposições deve ser tomado de forma genérica, deixando em segundo plano o modo *como* se constitui o sentido proposicional, bastando que ele exista, abandonando-se a característica de complexidade essencial da proposição. Ela acaba por exercer, na realidade, a função de um nome do fato.

Destarte, a proposição é “colada” a um fato como na lógica clássica um nome o é a uma coisa. Apesar de constituir-se complexamente, não funciona propriamente como símbolo complexo, pois o que importa para o cálculo funcional-veritativo, em última análise, é o valor de verdade da proposição.²⁵ De modo geral, o que Frege faz é substituir a relação que se impõe entre sujeito e predicado, respectivamente, pela relação entre argumento e função proposicional (FREGE, 1879, p. 07), dando uma nova dimensão e abrindo novas perspectivas à lógica. Como a matemática desde sua criação foi um exemplo no que respeita à perfeição modelar de seus raciocínios, operações e provas, e tendo em vista a necessidade para a qual a linguagem lógica de Frege é concebida, a reformulação do conceito de enunciado como função proposicional é muito bem vinda, justamente por poder abarcar as proposições matemáticas e resumir o projeto logicista: através de uma linguagem adequada, a aritmética poderia ser idealizada e estruturada em termos estritamente lógicos, o que garantiria à lógica o papel de grande fundamento da matemática.²⁶

²⁵ “Não há como exagerar a intensidade dos efeitos subversivos da definição fregeana do conceito lógico de função em relação aos alicerces dessa concepção do que seja a essência da representação proposicional. Para Frege, proposições são nada mais e nada menos que nomes de uma certa espécie de objetos, os valores de verdade. Tanto quanto o papel lógico de um termo numérico é introduzir um número como o valor de uma função para um ou mais argumentos dados, o papel lógico de uma proposição é introduzir um valor de verdade, o verdadeiro ou o falso, como o valor de uma função proposicional para um ou mais argumentos dados” (SANTOS, 1994, p. 40).

²⁶ Ao apresentar o conceito de função proposicional na *Conceitografia*, Frege não aborda ali nenhuma das questões espinhosas que mereceriam sua atenção cerca de uma década mais tarde, nos artigos “*Funktion und Begriff*” (“*Função e conceito*”), de 1891, e “*Über Sinn und Bedeutung*” (“*Sobre sentido e significado*”), de 1892. Aparentemente, Frege só desperta para essas dificuldades posteriormente, porque na obra de 1879, ele se contenta em introduzir essa linguagem ideal que, através de regras que pretensamente se apoiam com exclusividade em princípios lógicos, permite a dedução dos principais conceitos da aritmética elementar, principalmente a partir da terceira parte de seu trabalho, não obstante os intrincados problemas que essa concepção traz em seu bojo.

Dessa forma, parece evidente que o desenvolvimento da matemática no século XIX, aliado à busca de um novo modelo mais amplo para a lógica (algo idealizado pelo menos desde o século XVII por Leibniz) acabam por aproximar esses dois ramos do conhecimento. Consolida-se um ponto de conexão que até então não possuíam, devido à impossibilidade de tratar as noções e operações matemáticas básicas com os recursos propiciados pela lógica clássica. Note-se que isso constituía um sério problema para a lógica: o fato dessa disciplina, que trata das leis do entendimento, não ser capaz de comportar justamente as relações matemáticas, modelos do pensamento puro, torna-a, no mínimo, restrita, insuficiente. Leibniz procura ansiosamente uma saída para esse dilema. Boole abre caminho para novas perspectivas tratando a lógica matematicamente. Frege, a seu tempo, funda uma nova concepção e soluciona o problema ao instituir uma linguagem formal do pensamento, que tem na matemática seu objeto peculiar, o que não o isenta das consequências sérias ligadas ao problema inerente ao sentido proposicional. Sob a pena de Cantor, a aproximação entre lógica e matemática assumiria uma outra forma possível, e conheceria dificuldades ainda maiores que as intrínsecas ao sistema fregeano (quando o paradoxo de Russell problematiza sobremaneira uma versão forte do logicismo, a ponto de inviabilizá-la).

Russell, por sua vez, passa efetivamente a defender a perspectiva logicista em “*The principles of mathematics*” (“*Os princípios da matemática*”), obra que, segundo ele confidenciara a Frege logo após sua publicação, trazia várias opiniões que já não lhe pareciam corretas (cf. GRATTAN-GUINNESS, 2000, p. 329). A insuficiência do corpo teórico da obra em relação à possibilidade de dar conta dos problemas suscitados pelos paradoxos pode ser indicada como um dos pontos principais do abandono de Russell em relação às perspectivas abertas por sua primeira versão do logicismo. Isso fica evidente no décimo capítulo do livro, quando o autor procura abordar as contradições que se apresentam até o momento. Apesar de sua forma de apresentação não ser exatamente aquela pela qual foi posteriormente conhecida, ali já estão explicitados os paradoxos de Cantor e de Russell.

As alternativas que Russell propõe nesse momento apenas tateiam em direção de uma solução, levantando hipóteses que viriam mais tarde a ser lapidadas e encadeadas de maneira a constituir uma teoria. Dentre elas, a desconfiança na utilização das palavras como “*todo*”, “*qualquer*”, “*um*”, “*algum*” e “*e*”; uma distinção de classes como pluralidade ou como unidade (que sugeriria a distinção entre *tipos* de variáveis) e, finalmente, o diagnóstico de funções proposicionais denominadas aqui como *formas quadráticas*, do tipo $\phi[f(\phi)]$ (cf.

RUSSELL, 1903, p. 148-50). Não há, entretanto, uma verdadeira solução para o problema. O paradoxo por ele descoberto e que leva seu nome também problematiza sua própria perspectiva.²⁷ Essas circunstâncias fazem Russell recompor seu pensamento acerca das questões relativas aos fundamentos da matemática, passando pelo que Grattan-Guinness denomina uma *teoria substitucional* (cf. GRATTAN-GUINNESS, 2000, p. 360), que se caracteriza como um momento intermediário entre o “*The principles of mathematics*” e o “*Principia mathematica*”. Nesta última, sua teoria dos tipos lógicos, que podemos considerar como a versão final que o autor destina ao problema, já se encontra satisfatoriamente elaborada.

Primeiramente, Russell introduz uma distinção entre funções proposicionais com variáveis reais e funções proposicionais com variáveis aparentes: “*quando algum valor da função proposicional é asseverado, chamamos o argumento de variável real; por outro lado, quando se diz que uma função é sempre verdadeira, ou nem sempre verdadeira, o argumento é chamado de variável aparente.*”²⁸ As deduções lógicas devem sempre operar com proposições que contenham variáveis reais. Entretanto, as proposições que trazem variáveis aparentes também possuem um papel substancial. Russell mostra sua importância a partir da análise da proposição “todo homem é mortal”. Através de passos sucessivos de sua argumentação, ele explica que a frase sugerida como exemplo pode ser reformulada mais adequadamente do ponto de vista lógico como “*para todos os valores de x , se x é homem, x é mortal.*” O exemplo tem como finalidade esclarecer o que Russell denomina *campo de significação*: há um conjunto definido de seres que a variável aparente dessa proposição é

²⁷ Uma série de textos posteriores a esse encorpa o debate entre os autores, e o faz sob novos pontos de vista. O surgimento de novos paradoxos e um intenso trabalho de Russell voltado ao problema caracterizam essa fase do seu pensamento, no qual textos relativos à lógica matemática se revezam com textos propriamente filosóficos, dentre os quais o que mais nos interessa é o de 1905, denominado “*On Denoting*” (“*Sobre a denotação*”). A partir daí, Russell iria enveredar pelo labirinto da intrincada questão filosófica que ainda o assombraria uma década mais tarde, a saber, a que diz respeito à significação, ao sentido proposicional e à descrição, problemas que remetem à existência e a questões bem mais gerais que aquelas tratadas pela lógica matemática. A filosofia da linguagem ganharia um de seus mais proeminentes teóricos, que compreensivelmente centraria sua análise em questões análogas às da filosofia da matemática, dialogando tanto com a tradição platônico-aristotélica da filosofia da lógica quanto com o grande Frege. Com isso, parece necessário ressaltar que, sob a ótica de Russell, a superação dos paradoxos não poderia estar restrita a uma solução meramente técnica; há que se considerar que os problemas filosóficos decorrentes das teorias em foco são fundamentais para a elaboração realmente consistente do problema.

²⁸ “*When any value of a propositional function is asserted, the argument is called a real variable; whereas, when a function is said to be always true, or to be not always true, the argument is called an apparent variable*” (RUSSELL, 1908, p. 206).

apta a substituir e garantir sua significatividade, o que é uma característica que antecede a verificação de sua verdade ou falsidade.²⁹

Na verdade, nada permite tomar como regra a existência de um mesmo campo de significação para duas funções diferentes entre si. Se isso ocorre, trata-se da exceção da regra. Russell denomina *homogeneidade lógica* a propriedade de funções que contenham o mesmo campo de significação. Quando nos deixamos levar pela aparência semântica de determinada função proposicional e não respeitamos a peculiaridade de seu campo próprio de significação, incorremos nos paradoxos. É possível, desse modo, estabelecer uma hierarquia dos tipos lógicos (ou campos de significação) a fim de evitar tais contradições. Essa hierarquia traduz-se em ordens predeterminadas: as proposições elementares são as que trazem variáveis reais, bem como termos individuais; são exemplos do primeiro tipo lógico; proposições de primeira ordem possuem indivíduos como variáveis aparentes; são o segundo tipo lógico; proposições de segunda ordem possuem proposições de primeira ordem como variáveis aparentes; são o terceiro tipo lógico, e assim sucessivamente. Esse método, se corretamente aplicado, mostra-nos o campo de significação adequado a determinada função proposicional. Ora, as funções não predicativas têm como característica comum a inobservância dos respectivos campos de significação, donde advém a aplicação de proposições, por exemplo, de tipo lógico $n+1$ valendo-se de variáveis do campo de significação de variáveis n . A teoria apresenta-se, portanto, como um instrumento valioso para identificar funções proposicionais mal formuladas, que podem nos levar a trabalhar fora de seu campo de significação adequado e, conseqüentemente, gerar paradoxos.

Dessa forma, o que faz a teoria dos tipos lógicos é procurar estabelecer uma regra para a elaboração de proposições, algo que efetua ao “recortar” os campos de significação próprios de cada uma das asserções. Essa concepção deságua na impossibilidade de transposição de um campo a outro. Quando, todavia, são abordados também os paradoxos semânticos inerentes ao problema da concepção de totalidades, torna-se necessária a possibilidade de

²⁹ Entretanto, funções diferentes podem ter campos de significação diferentes, o que pode levar a circunstâncias curiosas como a seguinte: “*Suppose we say: ‘all terms which have the property ϕ have the property ψ ’. That means, according to the above interpretation, ‘ ϕx always implies ψx ’. Provided the range of significance of ϕx is the same as that of ψx , this statement is significant (...) But it sometimes happens that what appears verbally as one function is really many analogous with different ranges of significance.*” [Suponhamos: ‘todos os termos que têm a propriedade ϕ têm a propriedade ψ ’. Isso quer dizer segundo a interpretação acima que ‘ ϕx sempre implica ψx ’. Desde que o campo de significação de ϕx seja o mesmo de ψx , a asserção é significativa. (...) Mas

passagem entre campos de significação, o que, segundo essa mesma teoria, acaba por realizar-se através de um recurso que rende vários debates e pode ser visto como um dos grandes pontos fracos da solução de Russell: *o axioma da redutibilidade* é o recurso que garantirá a *tradutibilidade* de um nível semântico em outro. A teoria ramificada dos tipos lógicos carece da assunção desse axioma, cuja importância reside na sua propriedade de possibilitar a alocação de qualquer proposição em harmonia com o seu devido tipo lógico, através de uma reformulação: “*é absolutamente necessário, se a matemática for possível, que nós tenhamos algum método de propor asserções que devem ser equivalentes àquilo que temos em mente quando falamos descuidadamente de ‘todas as propriedades de x’.*”³⁰ Busca-se apenas uma possibilidade de *traduzir* uma determinada função proposicional elaborada de modo inadequado, e que essa tradução garanta que passemos a operar dentro do devido campo de significação: “*toda função é equivalente, para todos os seus valores, a uma função predicativa do mesmo argumento*” (RUSSELL, 1908, p. 221).

Todavia, não há um procedimento analítico que garanta essa tradução, ou sequer uma indicação de como ela deve ser articulada.³¹ Da maneira como é construída, a teoria dos tipos lógicos não deixa de ser problemática. Em primeiro lugar, porque não soa como um recurso natural uma classificação da linguagem nesses termos. Apesar da existência de campos de significação ser algo relativamente evidente (ao ressaltar, por exemplo, a existência de um conjunto de termos que satisfazem determinadas condições de verdade para certo tipo de função), a solução de Russell acaba, por assim dizer, sendo pouco natural, ao estabelecer níveis e mais níveis de linguagem (que são, em tese, inumeráveis), com o intuito de efetuar uma classificação que é, em sua origem, relativamente simples. Russell recorre a esse mecanismo para livrar-se das armadilhas de uma linguagem imprecisa, mas acaba sendo obrigado a recorrer a ela por ocasião da inserção do axioma da redutibilidade no sistema. Em suma, trata-se de um recurso muito aprimorado, de uma técnica bem articulada, que exige

às vezes acontece que aquilo que parece verbalmente uma função, na verdade são funções análogas com diferentes campos de significação.] (RUSSELL, 1908, p. 213).

³⁰ “*It is absolutely necessary, if mathematics is to be possible, that we should have some method of making statements which will usually be equivalent to what we have in mind when we (inaccurately) speak of ‘all properties of x’.*” (RUSSELL, 1908, p. 219).

³¹ O axioma da redutibilidade seria a garantia da possibilidade de tradução de funções proposicionais mal formuladas em termos adequados. Uma das proposições passíveis de ser traduzidas, inclusive, é o princípio de indução completa, seja ele apresentado através de qualquer formulação proposta anteriormente, pois todas elas pressupõem a assunção de uma totalidade, sendo, desse modo, passíveis de revisão pelo referido axioma. Assim,

uma classificação extensa no que tange aos elementos da linguagem proposicional e que tem, ao final de contas, uma viabilidade contestável:

Devido à introdução da teoria ramificada dos tipos, certas dificuldades se instalaram no que tange à construção da matemática, dificuldades que estão especialmente relacionadas à teoria dos números reais. Muitos dos teoremas fundamentais [da matemática dos números reais] além de não poderem ser provados, sequer podiam ser expressos.³²

Esse é talvez o principal motivo pelo qual o magistral trabalho de Russell e Whitehead, os *Principia Mathematica*, não consegue ampla aceitação. Tão incômoda passa a ser a presença do axioma da redutibilidade que a situação chega a ponto de Russell, ao apresentar a segunda edição do trabalho, em 1925, excluí-lo de seu texto original. Desta feita, não obstante a tentativa de superar todos os paradoxos ser bastante louvável, a assunção do axioma da redutibilidade como pressuposto necessário à teoria dos tipos lógicos distancia a teoria do objetivo original do projeto logicista, que é o de fundar a matemática *apenas* sobre os seguros juízos analíticos. Recorrer ao axioma da redutibilidade significa aceitar como parte integrante da solução aos paradoxos um gritante recurso à intuição, uma vez que não se pode tomar, *stricto sensu*, o princípio em tela como um juízo analítico sob quaisquer circunstâncias.

Em 1926, Frank Ramsey introduz a distinção entre paradoxos propriamente lógicos e paradoxos de natureza semântica, com o intuito de mostrar que não importa à lógica matemática a solução de paradoxos de natureza semântica, exatamente porque são extrínsecos aos domínios da lógica. Considerava, portanto, que a introdução da teoria ramificada dos tipos, quando procura formular uma solução que abarca uma gama muito diversificada de problemas, acabava desvirtuando a viabilidade de uma solução pertinente para aquilo que realmente importa. Dessa maneira, ao ignorar os paradoxos semânticos, torna-se possível também dispensar o uso do axioma da redutibilidade, que só fora introduzido ao *corpus* da teoria para resolvê-los, uma vez que os paradoxos propriamente lógicos, uma vez formalizados, podem ser resolvidos satisfatoriamente com a teoria dos tipos lógicos simples. Dentre outras contribuições, o que Ramsey propõe, destarte, é um “recuo estratégico”, no sentido de abandonar a teoria ramificada para que operemos apenas com a teoria simples, algo que resolve bem os problemas que de fato importa ao lógico resolver, e com a vantagem de

a teoria dos tipos lógicos se pretende como “um método que nos habilita a asseverar as definições fundamentais da matemática, e, ao mesmo tempo, evitar todas as contradições conhecidas” (RUSSELL, 1908, p. 223).

não distanciar o projeto logicista de seus objetivos primordiais, mantendo sua força original. Uma formulação mais tardia é a de Rudolf Carnap, que apresenta uma versão do logicismo que se aproxima muito das bases do formalismo (sob o ponto de vista do método empregado) e do intuicionismo (no que diz respeito à exigência de construtibilidade dos seus termos),³² e dirige sérias restrições contra os escritos de Russell³⁴ e Ramsey,³⁵ procurando salvar o que julga essencial do projeto logicista, a saber, a possibilidade de conceber toda a matemática (e, como parte dela, os números reais) tomando os juízos analíticos como único recurso legítimo para isso. Os esforços de Carnap não foram, todavia, suficientes para ressuscitar o logicismo. Apesar de haver inspirado novas perspectivas na filosofia da ciência (como o empirismo lógico que floresceu no século XX), o fato incontestável é que o logicismo fracassou no que

³² “Because of the introduction of the ramified theory of types, certain difficulties arose in the construction of mathematics, especially in the theory of real numbers. Many fundamental theorems not only could not be proved but could not even be expressed” (CARNAP, 1931, p. 46).

³³ “Logicism as here described has several features in common both with intuitionism and with formalism. It shares with intuitionism a constructivistic tendency with respect to definition, a tendency which Frege emphatically endorsed. A concept may not be introduced axiomatically but must be constructed from undefined, primitive concepts step by step through explicit definitions. (...) Further, logicism has a methodological affinity with formalism. Logicism proposes to construct the logical-mathematical system in such a way that, although the axioms and rules of inference are chosen with an interpretation of the primitive symbols in mind, nevertheless, inside the system the chains of deductions and definitions are carried through formally as in a pure calculus, i.e., without reference to the meaning of primitive symbols.” [O logicismo conforme aqui descrito possui várias estruturas em comum tanto com o intuicionismo quanto com o formalismo. Ele compartilha com o intuicionismo uma tendência construtivista com respeito à definição, tendência essa que Frege também endossava enfaticamente. Um conceito não pode ser introduzido axiomáticamente; deve, sim, ser construído a partir de conceitos indefinidos e primitivos, passo a passo e através de definições explícitas. (...) Por sua vez, o logicismo possui uma afinidade metodológica com o formalismo. O logicismo se propõe a construir o sistema lógico-matemático de forma que, embora os axiomas e regras de inferência sejam escolhidos com uma interpretação dos símbolos primitivos da mente, dentro do sistema, as cadeias de dedução e definições são obtidas formalmente, como no cálculo puro, ou seja, sem referência aos significados dos símbolos primitivos.] (CARNAP, 1931, p. 52).

³⁴ Ao mensurar o valor das soluções que propõe, Carnap afirma que “if the theory just sketched proves feasible, logicism will have been helped over its greatest difficulty, which consists in steering a safe course between the Scylla of the axiom of reducibility and the Charybdis of the allocation of the real numbers to different others.” [Se a teoria esboçada acima se mostrar exequível, o logicismo terá sido auxiliado a superar sua maior dificuldade, que consiste em manter uma rota segura entre a Cila do axioma da redutibilidade e a Caríbe da alocação dos números reais a outros números diferentes.” (CARNAP, 1931, p. 52).

³⁵ Apesar do reconhecimento em relação à obra de Ramsey, Carnap não compactua com todos os seus pressupostos: “Can we have Ramsey’s results without retaining his absolutist conceptions? His result was this: Limitation to the simple theory of types and retention of the possibility of the definitions for mathematical concepts, particularly in real number theory. We can reach this result if, like Ramsey, we allow impredicative definition, but can we do this without falling into his conceptual absolutism? I will try to give an affirmative answer to this question.” [Podemos manter os resultados de Ramsey sem incorrer em suas concepções absolutistas? Seu resultado era o seguinte: Limitação da teoria simples dos tipos e retenção da possibilidade de definição de conceitos matemáticos, particularmente na teoria dos números reais. Podemos salvar esse resultado se, como Ramsey, aceitarmos definições não predicativas, mas podemos fazer isso sem cair em seu absolutismo conceitual? Eu tentarei apresentar uma resposta afirmativa a essa questão.] (CARNAP, 1931, p. 50).

diz respeito a basear os fundamentos da matemática em critérios exclusivamente lógicos (algo acerca do que a adoção do axioma da redutibilidade é talvez a face mais evidente). Seria necessário esperar mais de cinquenta anos por uma nova alternativa viável no sentido de fundar a matemática exclusivamente na lógica.³⁶

1.4. A perspectiva formalista

O formalismo matemático é uma corrente que antecede o logicismo. Se só podemos falar efetivamente em uma corrente formalista a partir de Berkeley, suas origens são bem anteriores. Desde a divisão da matemática entre aritmética e geometria conforme proposta por Aristóteles, o ideal de prova formal é um elemento forte no contexto da disciplina, por exemplo, devido à importância atribuída à definição conceitual no delineamento dos objetos. Essa tendência, todavia, intensifica-se no período em que a intuição passa a ser substituída cada vez mais pela prova analítica pura, como veremos no terceiro capítulo.

Segundo Detlefsen (2005, p. 236-7), existem alguns elementos chave para o que ele denomina uma “estrutura comum” do formalismo. São eles:

- A inversão da divisão clássica entre aritmética e geometria que dá primazia a esta última. Segundo o ponto de vista do formalismo, há que se privilegiar, por vezes no sentido metafísico, por vezes no sentido epistemológico, a aritmética em detrimento da geometria como o âmbito mais originário da matemática.
- O abandono do paradigma aristotélico no que diz respeito ao que o autor denomina *modelo genético*: afastando-se dessa concepção, conhecer não é necessariamente

³⁶ Dentre as críticas possíveis ao modo como Carnap constrói seu sistema, podemos citar uma que parece lapidar: “*some critics pointed out that the very statement of logical positivism undermines the view. Consider, for example, the proposition that every meaningful statement is either analytic or verifiable (in some sense) through experience. Apparently, this proposition is not analytic, in the sense of being true in virtue of the meaning of the words it contains. Also, the proposition does not seem subject to verification by experience, in any sense of the term. Thus, logical positivism seems to brand itself as a banned metaphysical doctrine. Many of Carnap’s own philosophical statements, needed to outline the program, do not seem to be made within a fixed linguistic framework.*” [Alguns críticos ressaltaram que a própria proposta do positivismo lógico problematiza sua perspectiva. Considere-se, por exemplo, a proposição que sustenta que toda asserção é analítica ou é verificável (em algum sentido) pela experiência. Aparentemente, essa proposição não é analítica, no sentido de ser verdadeira em virtude do significado das palavras que a compõem. A asserção também não parece passível de verificação experimental, qualquer que seja o sentido atribuído ao termo. Dessa forma, o positivismo lógico parece macular a si mesmo com uma doutrina metafísica que banira. Muitos dos próprios argumentos filosóficos de Carnap, necessários para delimitar seu programa, não parecem haver sido construídos a partir de uma estrutura linguística fixa.] (SHAPIRO, 2000, p. 130).

compreender as causas, ou sequer construir passo a passo suas provas. Assim, o formalista liberta-se da intuição em nome do rigor e da abstração cada vez mais acentuados.

- Como consequência direta da tese anterior, o formalista abre mão de linguagem como um instrumento que seja necessariamente representacional. Já em Berkeley, por exemplo, há a ideia de que existem usos de expressões que são independentes de conteúdos semânticos.
- Finalmente, temos o que Detlefsen denomina como *componente criativista*: o matemático tem total liberdade para criar instrumentos teóricos viáveis para atingir seus fins, sem perder, todavia, o foco na aquisição de conhecimento legítimo.

Vários autores adotam um viés formalista; a importância dessa corrente na Inglaterra do século XIX é evidente, e não está dissociada do desenvolvimento da lógica experimentado nos tempos de Boole e De Morgan. A influência do pensamento de Berkeley e do formalismo de Peacock são exemplares nesse sentido, e o trabalho de Hilbert, levado em conta o contexto de sua produção, soa como uma versão amadurecida dessa corrente, não obstante ser confundida frequentemente com outras versões mais ingênuas e imprecisas do formalismo, sobretudo pelos seus detratores.

A crise dos fundamentos da matemática pode ser considerada como possuindo dois momentos distintos: o primeiro, se adotarmos a terminologia empregada por Poincaré, representa a contenda entre cantorianos e pragmáticos, onde o posicionamento característico da escola formalista não está no centro das atenções, apesar da importância de Zermelo, que já contribui com idéias notáveis para a superação dos paradoxos. Em um segundo momento da crise, os preceitos formalistas entram em cena de modo muito mais intenso, no debate travado contra os intuicionistas. No que diz respeito especificamente ao pensamento de Hilbert, tanto ao tratar do problema dos paradoxos, quanto ao travar, já nos anos vinte, a polêmica com Brouwer, um de seus objetivos centrais era a preservação da obra de Cantor, e, em especial, de seu trabalho relativo às grandezas transfinitas. Para Hilbert, salvaguardar a obra de Cantor significava estabelecer uma via segura através da qual o matemático pudesse caminhar sem incorrer em contradições. Assim, desde suas obras de juventude, o autor dirige a atenção para duas características que devem obrigatoriamente nortear os fundamentos da matemática: completude e consistência.

Quando nos referimos à consistência de determinado sistema, o que está em jogo é a possibilidade de suas proposições fundamentais (axiomas e postulados) estarem em perfeita harmonia, isentando-o de contradições. Todavia, a verificação *lógica* da consistência de um sistema formal (pois, a rigor, não basta uma intuição de tal propriedade) esbarra necessariamente em outra questão: só é possível provar logicamente sua consistência na medida em que o sistema for completo. De maneira análoga ao modo como o problema da consistência remete ao princípio de não contradição, ao tratarmos da completude do sistema, estamos nos referindo indiretamente a outro princípio que também remete a Aristóteles: o princípio do terceiro-excluído. Segundo esse princípio, dada uma afirmação, é preciso escolher entre sua verdade ou falsidade, isto é, escolher entre afirmá-la ou negá-la.³⁷ Desse modo, em um sistema completo, sempre poderemos decidir acerca da verdade ou falsidade de uma asserção, um postulado ou um axioma.³⁸ Em suma, em um sistema completo, não deve haver espaço para proposições “insolúveis”.³⁹ Todo o problema reside no fato *sui generis* de que a aritmética não pode recorrer a outra instância senão a ela própria para estabelecer a consistência e a completude dela mesma,⁴⁰ onde a prova de completude no âmbito da

³⁷ “Não é possível que haja qualquer coisa entre as duas partes de uma contradição, mas é necessário ou afirmar ou negar uma coisa de outra” (ARISTÓTELES, *Metafísica*, 1011b).

³⁸ Nem sempre o ideal de completude (e, conseqüentemente, de decidibilidade) é facilmente atingido por um sistema qualquer. Esse é o cerne do famoso *Entscheidungsproblem* (“Problema da decisão”), que entra em cena na obra mais tardia de Hilbert, bem como nos escritos de Gödel e de Alan Turing.

³⁹ A preocupação relativa à completude do sistema aritmético fora esboçada por Hilbert já em 1900, em termos daquilo que ele denominava “resolvibilidade” (*Lösbarkeit*) dos problemas matemáticos: „Diese Ueberzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik giebt es, kein Ignorabimus!” [A convicção de que todo problema matemático pode ser resolvido é um poderoso incentivo ao trabalho. Ouvimos entre nós um chamado perpétuo: Há um problema. Procure a solução. Você poderá encontrá-la através do uso da razão, pois na matemática não há *ignorabimus*!] (HILBERT, 1900, p. 6). Entretanto, só muito mais tarde, em 1928, por ocasião do Congresso de Bolonha, o autor aprofundará seu pensamento nessa direção e sistematizará uma resposta ao problema. Cabe ressaltar que Arthur Schönflies é o primeiro matemático a diagnosticar que a recorrência dos paradoxos tem uma relação estreita com a inobservância do princípio do terceiro-excluído, já em 1906 (GRATTAN-GUINNESS, 2000, p. 369).

⁴⁰ “In fact, some of the difficulties in the foundations of arithmetic are different in nature from those that had to be overcome when the foundations of geometry were established. In examining the foundations of geometry, it was possible for us to leave aside certain difficulties of a pure arithmetical nature; but recourse to another fundamental discipline does not seem to be allowed when the foundations of arithmetic are at issue.” [De fato, algumas dificuldades concernentes aos fundamentos da aritmética têm uma natureza diferente daquelas que tiveram que ser superadas quando os fundamentos da geometria foram estabelecidos. Examinando os fundamentos da geometria, foi possível deixar de lado algumas dificuldades de natureza puramente aritmética; mas recorrer a outra disciplina fundamental não nos parece ser permitido quando os fundamentos da matemática estão sob análise.] (HILBERT, 1904, p. 130).

matemática do transfinito é particularmente difícil.⁴¹ A importância desse projeto e as perspectivas que ele inspira foram resumidas no segundo dos vinte e três problemas que Hilbert apresenta em 1900. A salvação do cantorismo exigia assim uma fundamentação adequada, algo que ele propõe pela primeira vez em 1904, com “*Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*” (“Sobre os fundamentos da lógica e da matemática”).

A forma como Hilbert define os objetos da aritmética em 1904 segue a maneira como Cantor refere-se aos constituintes de um agregado: um objeto matemático é definido a partir de um símbolo a ele associado. Hilbert, na exposição analítica em que apresenta a construção de seu sistema, inicia a sua explanação primeiramente ao introduzir aquilo que vagamente denomina “objeto mental”. Curiosamente, a ele não atribui qualquer significado ou conteúdo, compreendendo esse objeto como um conceito primitivo, representado pelo sinal gráfico “1”. Nesse primeiro momento, o sinal é tomado simplesmente como um objeto do pensamento, isento de qualquer conteúdo, e que pode ser repetido e combinado das mais diferentes maneiras, por exemplo, através de sua repetição sucessiva, como em “1,1”, ou “1,1,1” e assim por diante, reconhecendo também a possibilidade de construir séries dessas combinações possíveis, como por exemplo podemos ver em

$$(1), (1,1), (1,1,1), (1,1,1,1), (1,1,1,1,1) \dots$$

O próximo passo da argumentação de Hilbert é inserir um segundo símbolo que se refere a outro objeto de pensamento, que é o sinal “=”. Ao definir esse novo objeto, Hilbert recorre a uma estratégia idêntica à utilizada para definir o primeiro objeto mental: este segundo objeto também não apresenta qualquer conteúdo; basta reconhecê-lo como diferente do primeiro para podermos passar a operar com ele. Feito isso, abre-se um leque de novas possibilidades de combinação desses dois objetos do pensamento. Não há, portanto, um limite definido para os objetos mentais que possamos introduzir nesse nosso sistema formal, desde que tenhamos a capacidade de entender esses objetos como distintos uns dos outros. Mas é bom insistir que, até o momento, esses objetos-símbolos são destituídos de qualquer conteúdo, porque essa é uma característica central no pensamento de Hilbert. Basta, até aqui, entendê-los como idênticos àqueles que podem ser representados através do mesmo signo e

⁴¹ Existe um conjunto de correspondências trocadas entre Frege e Hilbert que é particularmente esclarecedor no que concerne à questão da consistência. Para Frege, por exemplo, qualquer prova de consistência é dispensável, uma vez que parte do pressuposto da autossuficiência da definição, baseada, curiosamente, na intuição

diferentes daqueles aos quais isso é vedado. Essa característica dos objetos de pensamento possibilita a divisão que Hilbert estabelece entre entidades e não entidades; uma vez inserido o conceito de negação no sistema, todas as proposições formadas pela combinação entre objetos do pensamento, bem como suas respectivas negações, são distribuídas em um ou outro dos conjuntos acima citados. Dada essa dupla possibilidade, se uma proposição se enquadra em um dos grupos, sua negação se enquadra no outro, e vice-versa. Dessa regra, Hilbert obtém o princípio de não contradição, o que é também um momento exemplar, porque constatamos que as regras da matemática que o autor está construindo são claramente hipóteses inseridas *ad hoc*. Não há, nesta ou em qualquer outra regra da matemática formalista hilbertiana, uma hipótese necessária. Até mesmo os princípios de identidade e de não contradição são apresentados como regras criadas no sistema, e nada mais que isso.

Podemos ter uma ideia de quão peculiar é essa concepção se atentarmos para o fato de que, assim construída, não há que se falar em significatividade da combinação de sinais que caracteriza a proposição, pois são apenas combinações aleatórias de símbolos destituídos de conteúdo e de significação e de interpretação possível. Dessa maneira, sob o ponto de vista hilbertiano, as fórmulas “ $1=1$ ”, “ $1, 1, 1$ ”, “ $= 1=$ ” e “ $= = =$ ”, por exemplo, encontram-se no mesmo contexto. Um dos motivos dessa concepção peculiar é a tentativa que inspira o trabalho de fundamentação da lógica e da matemática simultaneamente,⁴² e o recurso que lhe possibilita concretizar essa tarefa é o caráter abstrato atribuído aos objetos mentais que são a matéria-prima para a constituição de seu sistema.

Com as proposições definidas conforme a estratégia exposta, Hilbert reconhece também como proposições aquelas compostas por duas ou mais proposições que poderemos aqui denominar elementares. Para operar adequadamente com essas, entretanto, é necessário

(SHAPIRO, 2000, p. 154-5). Há, portanto, um papel legítimo a ser atribuído à intuição mesmo sob a ótica de Frege, ainda que pequeno e não propriamente matemático.

⁴² “*Arithmetic is often considered to be a part of logic, and the traditional fundamental logic notions are usually presupposed when it is a question of establishing a foundation for arithmetic. If we observe attentively, however, we realize that in the traditional exposition of the laws of logic certain fundamental laws of arithmetic are already used, for example, the notion of set and, to some extent, also that of number. Thus, we find ourselves turning in a circle, and that is why a partly simultaneous development of the laws of logic and of arithmetic is required if the paradoxes are to be avoided.*” [Frequentemente a aritmética é considerada uma parte da lógica, e as noções lógicas tradicionais fundamentais são normalmente pressupostas quando se espera estabelecer os fundamentos da aritmética. Entretanto, se observarmos atentamente, nós compreenderemos que na exposição tradicional das leis da lógica certas noções fundamentais da aritmética já são utilizadas, como, por exemplo, a noção de conjunto e, de modo um pouco mais amplo, a noção de número. Então nos vemos andando em círculos, e é por isso que se requer o desenvolvimento simultâneo das leis da lógica e da aritmética para que os paradoxos sejam evitados.] (HILBERT, 1904, p. 131).

inserir os conectivos de implicação, conjunção e disjunção (respectivamente “ $\mid$ ”, “ $\wedge$ ” e “ $\vee$ ”, de acordo com sua notação). Com esse reduzido número de conceitos e operações definidos, já se torna possível apresentar os dois primeiros axiomas do sistema aritmético hilbertiano, (“ $x=x$ ” e “ $\{x=y \wedge w(x)\} \mid w(y)$ ”).

Outro ponto característico do sistema é o artifício de Hilbert para introduzir a noção de infinito. Os conceitos necessários para dar conta do problema relativo às séries infinitas surgem simplesmente como novos objetos de pensamento, como “1” e “=” : são eles o de sucessor, de infinito e o conceito de operação (semelhante ao de função), a partir dos quais são estipulados os teoremas seguintes: os elementos possuem sucessores, dois elementos que sucedem um mesmo antecessor são iguais, e, finalmente, não há elemento que precede o primeiro dentre eles (HILBERT, 1904, p. 133). Partindo desses pressupostos, o autor se debruça sobre a elaboração dos axiomas e das leis do pensamento matemático (como a consistência entre os axiomas e a exigência de fidelidade quanto à natureza dos objetos do pensamento tomados como noções primitivas, bem como de suas combinações), acreditando, com isso, haver criado um corpo teórico suficiente para fundamentar a contento a matemática, que servirá como um valioso instrumento para superar os paradoxos (Ibid., p. 135-8).

Devido ao modo como a noção de infinito é inserida na argumentação desenvolvida pelo autor, ela perde todo o seu caráter problemático: simplesmente atribuímos a um símbolo um nome, e definimos axiomáticamente suas propriedades.⁴³ O fato de que estipulamos axiomas para essas noções primitivas conforme entendemos necessário (e considerar a axiomatização hilbertiana apenas um exemplo dentre outros possíveis parece algo que vai ao encontro de seu pensamento) significa tomar o tão problemático conceito de infinito como um dos instrumentos com os quais nosso intelecto opera. Esse movimento conceitual, todavia, não se dá impunemente. Para recorrermos a um âmbito bem conhecido, ele parece muito

⁴³ A simpatia que Hilbert guardava em relação à obra de Cantor não era o único fator que permitia uma aproximação entre o pensamento desses dois autores. Em algumas passagens, Cantor sustenta concepções que poderiam ser tranquilamente atribuídas a Hilbert, e se não podemos simplesmente rotular Cantor como um formalista, seus textos nos permitem vislumbrar uma influência significativa no pensamento de Hilbert. Talvez essa influência apareça de modo mais límpido no que diz respeito à maneira como Cantor toma os objetos da matemática: “*In his judgment, the process followed in the correct formation of concepts is everywhere the same; we posit a thing without properties, which is at first nothing else than a name or a sign A, and give it in order different, even infinitely many, predicates, whose meaning for ideas already present is known, and which may not contradict one another.*” [No julgamento de Cantor, o correto processo de formação de conceitos é sempre o mesmo: apresenta-se uma coisa sem propriedades, que a princípio nada mais é que um nome ou um sinal A, e atribui-se a ele diferentes e, eventualmente, infinitos predicados, cujo significado das ideias já são conhecidos, e que não podem contradizer uns aos outros.] (JOURDAIN, 1915, p. 69).

diferente do que vemos nas *Categorias* (ARISTÓTELES, *Categorias*, 2a-8b), pois a proposta de Hilbert leva-nos a considerar, por exemplo, um número (1), uma substância (o infinito, se tomado como entidade) e uma relação (o “seguinte”) como possuindo um mesmo “peso” dentro do discurso, o de objetos primitivos do pensamento, algo que só é possível devido à vacuidade inerente que caracteriza o discurso estritamente formalista. O discurso, o *Logos*, conforme concebido pelo Filósofo, de maneira alguma poderia possuir tais características. Ele era significativa por natureza, o que não ocorre na axiomatização hilbertiana; devido a essa característica, seus críticos acusam-no de simplesmente transformar a matemática em um jogo de palavras sem sentido (WEYL, 1927, p. 483), o que acaba, por exemplo, evidenciando também um problema no que diz respeito à relação entre matemática e natureza.⁴⁴

Também em 1904, Zermelo procura resolver o problema da ordenação de séries transfinitas apresentando seu axioma da escolha. Esse simples fato mostra qual é a perspectiva de Zermelo no que diz respeito à teoria dos conjuntos: pode-se salvar a matemática do transfinito desde que se tenha um sistema axiomático suficientemente forte para livrá-la de qualquer tipo de contradição. No que tange ao axioma da escolha, sua simplicidade é tão evidente quanto enganosa. Nos termos de Russell, o axioma da escolha pode ser assim postulado: “*dado um conjunto w , existe uma função f^u tal que, se u é um conjunto não-vazio contido em w , então f^u é membro de u .*” (RUSSELL, 1906.1, p. 72). Uma asserção que pode ser simplificada em uma vintena de palavras em português, e que tem o poder de solucionar o problema da ordenação de conjuntos quaisquer, sejam eles finitos ou transfinitos: esse é o axioma da escolha, um dos grandes pontos de conflito entre os matemáticos do período.⁴⁵

⁴⁴ „Der Formalismus kann die Anwendbarkeit der Mathematik, z.B. in der Naturwissenschaften nicht erklären. Die Möglichkeit, angewandte Mathematik zu betreiben, bleibt ein nur dem Zufall zuschreibbares Rätsel. (...) Will der Formalismus mehr sein als eine kontingente Theorie des Hantierens mit Zeichen, so muss er durch eine Theorie der Annehmbarkeit ergänzt werden. Deren Funktion ist es, zwischen ‚interessanten‘ und ‚uninteressanten‘ Kalkülen zu unterscheiden - wozu letztlich inhaltliche Erwägungen herangezogen werden müssen. Hier fordert die informale (heuristische) Ebene ihre Rechte.“ [O formalismo não pode esclarecer o limite de aplicação da matemática, por exemplo, na ciência da natureza. A capacidade de operar com a matemática aplicada permanece um enigma que só pode ser atribuído ao acaso. (...) Se o formalismo quer ser mais que uma teoria contingente de manipulação de símbolos ele deve ser complementado por uma teoria da justificação. Sua função é distinguir entre os cálculos “interessantes” e os “não interessantes”, para o que se deve levar em conta seus fundamentos. Esse é o nível informal (heurístico) de suas regras.] (VOLKERT, 1986, p. 352).

⁴⁵ Todo o problema se resume ao seguinte: para os conjuntos finitos, o axioma é trivial e evidente; para os conjuntos infinitos, contudo, ele é adequado sob a perspectiva formalista, mas, sob outras, como a de Poincaré, apenas uma hipótese carente de demonstração e que, portanto, não pode ser entendida como irrestritamente válida. O que está em jogo é responder afirmativa ou negativamente a uma questão básica: o simples ato de formular o axioma da escolha é suficiente para torná-lo existente e operativo em um sistema lógico-matemático?

Para Zermelo, todavia, o axioma é suficiente, pois não lhe importa qualquer perspectiva construtivista ou método de aplicação do axioma para validar a matemática.

O mesmo caráter generalista e conceitual seria aplicado para o sistema axiomático que Zermelo apresentaria algum tempo depois: a “*Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*” (“*Investigação acerca dos fundamentos da teoria dos conjuntos*”) traz uma solução para a formalização da teoria dos conjuntos sob a perspectiva axiomático-formalista. A contribuição desse artigo é uma proposta de axiomatização da teoria dos conjuntos, bastante eficiente por sinal. Também aqui a estratégia de Zermelo é estabelecer uma base axiomática o mais simples possível, e que permita, ao mesmo tempo, fundamentar a matemática e escapar dos paradoxos, apresentando para a teoria dos conjuntos um sistema análogo àquele que Hilbert propusera para a geometria, e isso sem recorrer a qualquer recurso diferente dos disponibilizados pela lógica elementar. Originalmente, são sete axiomas.⁴⁶ O mérito de Zermelo é trazer as contribuições de Cantor para uma perspectiva estritamente formalista, implementá-la para a superação dos paradoxos e, por fim, demonstrar sua consistência sob essa nova forma. Mais tarde, no ano de 1922, Abraham Fraenkel e, em 1923, Toralf Skolem, através de trabalhos que desenvolviam independentemente, sugerem a inserção do chamado *axioma da substituição*, que vem a ser um reforço bem vindo à teoria e, em 1929, os estudos de von Neumann levam-no a implementar novamente o sistema de Zermelo com o *axioma da fundação*, cuja principal função é impedir a formulação de sentenças autorreferenciais, colocadas em evidência por Russell e Ramsey. Até hoje o sistema ZF e suas variantes (ZFC, ZFCH) são, por assim dizer, os modelos axiomático-formais *standard* da teoria dos conjuntos.

*

*

Seja devido às críticas, como as endereçadas por Poincaré,⁴⁷ seja devido a outros interesses de pesquisa, Hilbert só volta a tratar dos fundamentos da matemática no verão de

⁴⁶ Axioma da extensionalidade, axioma do conjunto elementar, axioma do par, axioma da separação, axioma da união, axioma do infinito e o axioma da escolha.

⁴⁷ Em *Les Mathématiques et la Logique*, Poincaré dedica uma crítica precisa à formulação do sistema hilbertiano conforme exposto até aqui. Como o artigo sugere, Hilbert comete um erro semelhante ao de Russell: enquanto este parte do pressuposto de atribuir uma base estritamente lógica para a matemática, Hilbert procura, como vimos, desenvolver lógica e matemática ao mesmo tempo. A execução do projeto, entretanto, mostra-se inviável, segundo a leitura de Poincaré e, porque não dizer, do próprio Hilbert, mais tardiamente, ao reconhecer que sua teoria, na versão de 1904, “*existia apenas em seus estágios completamente preliminares e inadequados*”

1921, em uma conferência em Hamburgo. Os textos mais importantes desse novo período são certamente “*Über das Unendliche*” (“Do infinito”), de 1925, e “*Die Grundlagen der Mathematik*” (“Os fundamentos da matemática”), de 1927. Nesse momento é que Hilbert vai lapidar sua teoria, apresentando propriamente o chamado *Programa de Hilbert*. O que distingue o primeiro e o segundo período do pensamento de Hilbert é principalmente a introdução, nos anos vinte, do que Hilbert denomina *Beweistheorie*, ou teoria da prova. Esse recurso teórico permite ao matemático responder, por exemplo, às objeções de Poincaré contidas no “*Les Mathématiques et la Logique*” (“A matemática e a lógica”). O que Hilbert propõe é uma maneira de trazer legitimamente para o contexto do pensamento formalista a expressão de algo que “*deve ser dado a nós em nossa faculdade de representação*”; esse “algo” são os objetos extralógicos, dados pela intuição e que derivam de “*uma experiência imediata anterior a qualquer pensamento*” (HILBERT, 1927, p. 464).⁴⁸ A distinção entre esses objetos e a maneira pela qual eles podem ser combinados (os seus meios de concatenação) tem como base fundamental a intuição. A teoria da prova de Hilbert, assim como, segundo ele, todo o conhecimento científico, deve pressupor esse fato como base primordial.

(HILBERT, 1927, p. 473). Somente com o efetivo delineamento do Programa de Hilbert a teoria passa a ser satisfatória, ao menos até Gödel.

⁴⁸ A notória passagem abaixo é reproduzida em alguns outros textos de Hilbert com pequenas modificações: “*Rather, as a condition for the use of logical inferences and the performance of logical operations, something must already be given by our faculty of representation [in der Vorstellung], certain extralogical concrete objects that are intuitively [anschaulich] present as immediate experience prior to all thought. If logical inference is to be reliable, it must be possible to survey these objects completely in all their parts, and the fact that they occur, that they differ from one another, and that they follow each other, or are concatenated, is immediately given intuitively, together with the objects, as something that neither can be reduced to anything else nor requires reduction. This is the basic philosophical position that I consider requisite for mathematics and, in general, for all scientific thinking, understanding and communication.*” [Assim, como condição para o uso de inferências lógicas e para o bom desempenho de operações lógicas, algo já deve ser dado à nossa faculdade de representação, ou seja, certos objetos concretos e extralógicos, que estão presentes intuitivamente como uma experiência imediata anterior a todo o pensamento. Se a inferência lógica é aceitável, deve ser possível examinar esses objetos completamente em todas as suas partes, o fato de que eles ocorrem, que diferem uns dos outros, que são subsequentes uns aos outros, ou que estão concatenados é algo dado intuitivamente, juntamente com os objetos, como algo que nem pode ser reduzido a outra coisa nem carece de redução. Essa é a posição filosófica básica que considero um requisito para a matemática e, em geral, para todo o pensamento, entendimento e comunicação científicos.] (Ibid., p. 376). Cabe ressaltar que Hilbert não pode ter a pretensão de originalidade ao adotar esse posicionamento, que já aparecia como uma característica importante em Aristóteles: “*There will be no scientific knowledge of the primary premises, and since except intuition nothing can be truer than scientific knowledge, it will be intuition that apprehends the primary premises – a result which also follow from the fact that demonstration cannot be the originative source of demonstration, nor, consequently, scientific knowledge of scientific knowledge.*” [Não há conhecimento científico acerca das primeiras premissas, e, uma vez que com exceção da intuição nada pode ser mais certo que o conhecimento científico, é a intuição que apreende as primeiras premissas – um resultado que também segue-se do fato de que a demonstração não pode ser a fonte

A teoria da prova, ou metamatemática, é a decorrência da conversão de proposições ordinárias da matemática em fórmulas que podem conter simbologia lógica (que representam operações lógicas e de quantificação). Algumas dessas fórmulas assumem o papel de axiomas do sistema e, partindo desses axiomas, nós podemos *provar* as consequências deles decorrentes. Assim, as fórmulas matemáticas são vistas como as *proposições reais* de uma teoria (operações numéricas, como postulados de igualdades, por exemplo), enquanto o “nível” que contém os símbolos lógicos e aborda as teorias de modo mais geral é concebido por Hilbert como o campo dos *objetos ideais* da teoria, algo estabelecido a partir do modo geral de *fazer matemática*: “*para chegar à concepção de fórmulas como proposições ideais, nós precisamos apenas seguir, de forma natural e consistente, a linha de desenvolvimento que a prática matemática vem seguindo até agora*”.⁴⁹ Assim, o significado de “prova” na *Beweistheorie* é peculiar: Hilbert diz que se trata de “*uma raiz que deve ser dada na nossa intuição perceptiva*”, e consiste de inferências como as do *modus ponens* baseadas em axiomas (ou de outra maneira, baseadas em proposições que fazem as vezes dos axiomas por substituição direta), relacionando diretamente o ato de pensar e a atividade matemática, na qual a intuição desempenha um papel importante.

Um momento crucial da apresentação da *Beweistheorie* é a distinção entre *indução de conteúdo* (“*a construção intuitiva de um numeral*”) e a *indução formal*, uma asserção baseada no axioma da indução, que permite o uso das variáveis matemáticas no contexto do sistema formal. Essa segunda forma de indução é compatível com a matemática cantoriana, que pode, como mostra Hilbert, ser tratada de um ponto de vista finitário, como ele o faz na última parte do “*Über das Unendliche*”, onde expõe uma maneira possível de resolver a hipótese do contínuo pela aplicação desse método (cf. HILBERT, 1925, p. 385-92).

A nova roupagem do formalismo hilbertiano não esconde, portanto, que a intuição ganha um espaço notável. Sem dúvida, desde seus textos de juventude, Hilbert atribuía um papel de direito à intuição, a exemplo de seu *Gedankending*, conceito central no texto de 1904, assim como no “*Grundlagen der Geometrie*” (“*Fundamentos da geometria*”), ao tratar

originária da demonstração, nem o conhecimento científico do próprio conhecimento científico.] (ARISTÓTELES, *Segundos analíticos*, 100b).

⁴⁹ “*To arrive at the conception of formulas as ideal propositions, we need only to pursue in a natural and consistent way the line of development that mathematical practice has already followed till now*” (HILBERT, 1927, p. 470).

dos objetos geométricos⁵⁰). Todavia, é também incontestável que o papel desempenhado pela intuição tem um tratamento mais perfeito nos anos vinte, e, malgrado Hilbert sustentar que essa foi apenas uma forma de implementar a teoria original, suas mudanças são sérias e profundas a ponto de causar sua recusa por parte de Zermelo:

Zermelo se opôs a quase todas as posições relativas aos fundamentos de seu tempo. Ele particularmente não seguiu Hilbert quando este se move em direção à metamatemática. Na metamatemática, Hilbert abandona sua neutralidade ontológica e epistemológica e propõe um modelo construtivo ou operativo que é próximo do intuicionismo de Brouwer quanto à sua restrição às operações finitas. Zermelo, entretanto, rejeitou qualquer abordagem finitista da matemática como uma expressão de “Skolemismo” na teoria dos conjuntos.⁵¹

A opinião de Zermelo é importante na medida em que mostra que há realmente uma mudança profunda no formalismo hilbertiano. Essa mesma perspectiva pode ser atribuída a Michael Detlefsen. Ao comentar como o raciocínio que remete a conteúdos e o raciocínio formal podem ser vistos como mutuamente complementares, o autor considera essa leitura defensável tanto de acordo com um ponto de vista epistemológico quanto no que se refere a sua faceta psicológica. Desse modo, há boas razões para considerar que a teoria da prova traz realmente um compromisso epistêmico-ontológico que não existia originalmente:

Claro que a questão, como Frege enfatizava repetidamente, é como um raciocínio puramente simbólico pode ser epistemicamente produtivo. A isso respondemos que o raciocínio simbólico, por si só, não justifica a conclusão contentual à qual ele leva. Mais que isso, ele é enriquecido pelos juízos matemáticos contentuais para assegurar conclusões contentuais. A metamatemática de Hilbert, sua teoria da prova, foi proposta para suprir as necessidades de tal aplicação.⁵²

⁵⁰ “We think of these points, straight lines, and planes as having certain mutual relations, which we indicate by means of such words as “are situated,” “between,” “parallel,” “congruent,” “continuous,” etc. The complete and exact description of these relations follows as a consequence of the axioms of geometry. These axioms may be arranged in five groups. Each of these groups expresses, by itself, certain related fundamental facts of our intuition.” [Concebemos pontos, retas e planos como possuindo relações mútuas, que indicamos pelos termos “são situados”, “entre”, “paralelo”, “congruente”, “contínuo”, etc. A descrição completa e exata dessas relações segue-se como uma consequência dos axiomas da geometria. Esses axiomas podem ser organizados em cinco grupos. Cada um desses grupos representa, por si mesmo, certos fatos fundamentais relacionados à nossa intuição.] (HILBERT, 1950, p. 2).

⁵¹ “Zermelo opposed almost all foundational positions at that time. He particularly didn’t follow Hilbert’s move towards metamathematics. In metamathematics Hilbert left his ontological and epistemological neutrality and proposed a constructive or operative way of founding mathematics which comes close to Brouwer’s intuitionism in its restriction to finite operations. Zermelo, however, rejected any finitistic approach to mathematics as expression of a ‘Skolemism’ in set theory” (PECKHAUS, 2002, p. 10).

⁵² “The question, of course, as Frege repeatedly emphasized, is how purely symbolic reasoning can be epistemically productive. To this we answer that symbolic reasoning does not, by itself, justify a contentual conclusion to which it leads. Rather, it is supplemented by contentual metamathematical judgments to secure contentual conclusions. Hilbert’s ‘metamathematics’ or ‘proof theory’ was intended to supply the means for such an application” (DETLEFSEN, 2005, p. 298).

Em suma, o que para Hilbert parece um passo a frente no sentido de construir uma solução para os fundamentos da matemática, parece a Zermelo uma limitação descabida e não propriamente matemática. A ideia geral que norteia tanto a perspectiva de Zermelo quanto a de Detlefsen é óbvia: existe uma mudança conceitual com a adoção, por Hilbert, da concepção criada a partir da metamatemática, que se aproxima mui claramente de premissas intuicionistas, ao sugerir que o raciocínio simbólico passa a ser produtivo (do ponto de vista epistêmico) quando deixa de ser meramente simbólico, formal. Os juízos que atribuem conteúdo à matemática de Hilbert dão a ela, segundo Detlefsen, sentido epistêmico e, segundo Zermelo, comprometimento ontológico. A ideia básica é que Hilbert segue Berkeley quanto a isso: qualquer tipo de conteúdo intuitivo não é *negado* na matemática; ele é *permitido*, mas não *exigido*. O conteúdo intuitivo é permissível, mas não necessário ao desenvolvimento da prova matemática, pois esta não necessita expressar conteúdos em todos os seus usos semânticos (cf. DETLEFSEN, 2005, p. 266-7, 293). Nesse sentido, a teoria da prova procura um método finitista para provar a consistência da matemática de grandezas finitas e de grandezas infinitas (cf. WILDER, 1952, p. 265), para o que segue os passos já explicitados acima, de uma perspectiva formalista estrita.⁵³

A formalização e a demonstração da axiomática devem considerar apenas sua estrutura, e não o conteúdo intuitivo e suas significações, donde não podemos concluir que tais significações não têm qualquer importância. A teoria da demonstração se dissocia da matemática propriamente dita por consistir em uma teoria da prova não isenta, mas provida de conteúdo (cf. HILBERT, 1925, p. 385) e, desta feita, daquilo que nos ocupamos mais detidamente ao tratar do formalismo. A matemática é sim um jogo de símbolos; entretanto, é preciso considerá-la em um contexto amplo, que aglutine a metamatemática e a matemática para podermos visualizar toda a sua grandeza e beleza. Mas a forma como se dá tal “costura” não é, em absoluto, isenta de problemas:

O formalismo não é capaz de explicar como é possível obter proposições matemáticas válidas de outras fontes além da percepção, uma vez que deixa como dados não considerados a gênese lógica e histórica dos termos matemáticos. Ele inviabiliza a conexão entre o nível formal e o informal, a fim de posteriormente

⁵³ Há três passos que caracterizam essa maneira de prover uma demonstração de consistência para as teorias ou partes de teorias matemáticas: são eles a *axiomatização* da teoria em tela, a *formalização* dessa axiomática, que tem o papel de converter os axiomas “*numa espécie de jogo grafo-mecânico, efetuado com símbolos destituídos de significação e regulado por meio de regras determinadas*” (DA COSTA, 1977, p. 35), e, finalmente, a *demonstração* da consistência da axiomática formalizada, que caracteriza o desenvolvimento dos símbolos através das regras preestabelecidas, com o intuito de verificar a não contradição entre postulados do sistema.

introduzi-la na estrutura proposta mais uma vez. (...) A redução da intuição ao sinal perceptivo impede uma correta abordagem quanto ao papel da intuição na matemática. A iconicidade externa como base da abordagem formalista permanece amplamente inexplorada.⁵⁴

A introdução dos teoremas de incompletude de Gödel é um ponto nevrálgico para o projeto formalista. Em termos gerais, podemos dizer que Gödel cria uma estrutura conceitual que lhe permite construir um paradoxo formal semelhante ao de Epimênides, que o leva a duas possíveis posturas: no primeiro caso – defendendo a decidibilidade da sentença “problemática” no sistema - este se torna completo, mas inconsistente, por abrigar uma contradição em termos. No segundo caso – negando a decidibilidade dessa sentença do sistema – teremos um sistema consistente, porque isento de contradição, mas seremos obrigados a reconhecer a existência de pelo menos um postulado nascido no próprio sistema cuja decisão acerca de sua verdade ou falsidade simplesmente não pode ser efetuada. Entre a primeira e a segunda alternativa, opta-se pela segunda, pois é preferível um sistema incompleto a um sistema inconsistente.⁵⁵ A conclusão é clara: o matemático obtém êxito ao construir uma sentença que pertence ao sistema formalizado de acordo com os cânones do *Principia Mathematica*, que é autorreferente e, ao mesmo tempo, autoexcludente, demonstrando assim sua indecidibilidade por um procedimento legitimamente matemático, que deve ser considerado consoante com as premissas do programa formalista, uma vez que recorre apenas aos números naturais e à matemática finitista para se estabelecer. Logo, todo sistema axiomático que seja, no mínimo, capaz de englobar toda a aritmética elementar é incompleto, por suscitar a formulação de sentenças indecidíveis.

⁵⁴ „Der Formalismus kann nicht erklären, wie es möglich ist, mathematische gültige Sätze aus aderen Anschauungsarten als der Markenwahrnehmung zu gewinnen, da er sowohl die logische als auch die historische Genese der Begriffe der Mathematik unbeachtet lässt. Er zerstört den Zusammenhang von formaler und informaler Ebene, um ihn im Nachhinein als Desiderat in Gestalt der Annehmbarkeit wieder einzuführen. (...) Die Reduktion der Anschauung auf Markenwahrnehmung verhindert eine adäquate Einschätzung der Rolle der Anschauung in der Mathematik. Die externe Ikonizität als Grundlage des formalistischen Ansatzes bleibt weitgehend ungeklärt“ (VOLKERT, 1986, p. 352-3).

⁵⁵ Na verdade, a prova de Gödel se refere não à consistência, mas à ω -consistência. Este conceito engloba o de consistência e o amplia: “The notion of ω -consistency is stronger than consistency, but is a very reasonable requirement, since it demands merely that one cannot prove in a system both that some number does not have the property A- i.e. that $\exists(x) \sim A(x)$ and also all of $A(0), A(1) \dots$ are theorems. The American mathematician J. Barkley Rosser, who also contributed to number theory and applied mathematics, weakened the hypothesis to mere consistency in 1936.” [A noção de ω -consistência é mais forte que a de consistência, mas é bastante razoável, por implicar apenas que não se pode provar em um sistema dado tanto que algum número não possua a propriedade A, ou seja, $\exists(x) \sim A(x)$, e que, simultaneamente, $A(0), A(1) \dots$ são teoremas. O matemático americano J. Barkley Rosser, que também contribuiu para a teoria dos números e para a matemática aplicada, enfraqueceu a hipótese à mera consistência em 1936.] (WANG & SCHAGRIN, 1993, p. 247).

Destarte, há pelo menos uma sentença matemática que *não pode ser matematicamente demonstrada em um sistema consistente*, apesar da validade dos princípios da matemática e dos teoremas que o fundamentam. Isso significa que a matemática não pode provar *per se* sua consistência. Não obstante, isso não significa uma absoluta incapacidade para a resolução desse problema. A leitura mais comum e óbvia das consequências do trabalho de Gödel em relação ao programa de Hilbert é a de que ele o inviabiliza completamente.⁵⁶ Mas essa não é, por exemplo, a posição adotada por Michael Detlefsen (2005, p. 309), quando defende que o segundo teorema da incompletude de Gödel não pode ser tomado como uma refutação do formalismo, dada a observância de dois princípios: o de que o formalista é livre para criar instrumentos de prova que lhe aprazem e, em segundo lugar, o de que a prova de consistência está restrita aos teoremas *úteis* dentro de um determinado sistema. Nesse contexto, os teoremas da incompletude são como que intrusos, algo com o que efetivamente o formalista não se compromete e não precisa se comprometer. Nosso ponto de vista, todavia, é que essa é uma leitura possível, embora contrarie o espírito geral da teoria formalista hilbertiana.

A inovação, ou melhor, a reformulação conceitual pela qual passa o formalismo (se considerada a transição da primeira para a segunda versão do pensamento de Hilbert) deixa patente que, sob alguns aspectos do ponto de vista dos resultados obtidos, o segundo Hilbert aproxima-se dos preceitos aspirados pelo intuicionismo. O finitarismo hilbertiano parece assenhorear-se das mesmas benesses e garantias encontradas na ideia de construtibilidade intuicionista e, acessoriamente, acaba por obedecer ao emprego “lícito” do princípio do terceiro-excluído, quando propõe que as provas do infinito devem ser buscadas *via*

⁵⁶ „Seit den metamathematischen Ergebnissen von Gödel, Church, Tarski, u.a. ist klar, dass das ursprüngliche Hilbertsprogramm undurchführbar ist). Die Beschränkung auf finite Mittel in der Metastufe kann nicht durchgehalten werden. Es entsteht damit erneut das Problem, nicht-finiten Verfahren zu rechtfertigen. Damit geht aber die *pointe* des Ansatzes verloren, der ja die nicht-finiten Methoden der inhaltlichen Mathematik finit rechtfertigen wollte. Es erhebt sich die Frage, warum man noch den ganzen metamathematischen, Überbau' errichten soll, wenn man doch infinite Mittel verwenden muss.“ [Desde os resultados da metamatemática de Gödel, Church, Tarski e outros, é óbvio que o programa original de Hilbert não é exequível. A restrição ao âmbito do finito na metateoria não se sustenta. De novo, o problema não se justifica por um procedimento finito. Mas esse é um ponto de apoio perdido, pois agora métodos não-finitos são requeridos para abarcar a matemática do finito. Isso levanta a questão acerca de porque a superestrutura da metamatemática deve ser construída se ela deve ser um recurso ao infinito.] (VOLKERT, 1986, p. 351). Guerrierio (2006, p. 40) é outro autor que considera que o projeto de Hilbert se esvaece no ar diante dos teoremas da incompletude de Gödel. Todavia, mesmo apesar do teorema da incompletude mostrar a impossibilidade de articular um sistema exclusivamente formal que seja completo e consistente, as provas de consistência de Gentzen em relação aos axiomas de Peano não deixam de ser uma possibilidade de extensão do projeto formalista de Hilbert. Isso indica uma espécie de desmistificação em relação ao pensamento matemático: a matemática pode ser uma doutrina correta e eficaz, desde que não se pretenda a chave total e absoluta do raciocínio e do mundo.

procedimentos finitários. Mas não é em tudo que intuicionismo e formalismo concordam. Muito longe disso.

1.5 O intuicionismo: a reforma da matemática

O intuicionismo foi desenvolvido principalmente por Luitzen Egbertus Jan Brouwer e, acessoriamente, por Arend Heyting. Suas primeiras formulações datadas do início do século XX acabaram por propiciar uma ampla releitura da matemática e do papel desempenhado pela lógica em seu contexto histórico, a partir da radicalização dos argumentos primeiramente sugeridos por Leopold Kronecker e Henri Poincaré. Os caminhos propostos pelo intuicionismo consistem indubitavelmente em vias originais e heterodoxas para a concepção da matemática. Tão originais eram as ideias de Brouwer que seu orientador, Diederik Korteweg, tomou-as como *heterodoxas demais*, motivo pelo qual Brouwer foi dissuadido da intenção de apresentar suas ideias na tese de doutorado, cuja versão original foi mutilada em vários trechos, chegando Korteweg a ponto de aconselhar que o jovem “*se concentrasse em uma matemática mais ‘respeitável’, a fim de aumentar sua reputação como matemático e, assim, assegurar uma carreira acadêmica*” (O’CONNOR & ROBERTSON, 2003, p. 01). O caráter temerário da concepção matemática de Brouwer, aos olhos de Korteweg, dá uma indicação da audácia de suas propostas.

Em seus primeiros trabalhos, a preocupação de Brouwer é, via de regra, voltada à crítica dos pressupostos matemáticos vigentes, motivo pelo qual esse é considerado o período “negativo” de sua produção intelectual (cf. FEFERMAN, 1993, p. 555), sendo que o trabalho mais importante do período é o que o matemático publica em 1907, intitulado “*Over de Grondslagen der Wiskunde*” (“*Sobre os fundamentos da matemática*”). Só mais tarde, no decorrer dos anos vinte, e já em companhia de Arend Heyting (de quem Brouwer é orientador desde antes de seu doutorado), ele iria realmente propor as bases de uma matemática e de uma lógica intuicionistas.⁵⁷ Em linhas gerais, o intuicionismo toma como eixo central a ideia da

⁵⁷ Cabe o esclarecimento de um engano comum: Brouwer chega a ser considerado como “*o Lobatchewsky da lógica*” (DA COSTA, 1997, p. 103), por haver aberto caminhos até então inéditos para a disciplina, a exemplo do que o geômetra russo fizera a partir da formulação do primeiro modelo de geometria não euclidiana. Todavia, a peculiaridade da concepção matemática brouweriana relegava a segundo plano qualquer elaboração lógica, o que se torna evidente ao considerarmos que é Heyting, e não Brouwer, que se lançará ao desafio, durante os anos vinte, de formalizar uma lógica intuicionista. Portanto, o papel de Brouwer no que diz respeito ao nascimento

faculdade da intuição como o fundamento mais importante da matemática, fazendo com que ela seja concebida como uma disciplina informal, no sentido de que o foco principal não está no rigor lógico ou em sua forma esquemático-estrutural. Matemática não se resume aos seus aspectos lógicos, tampouco a um jogo grafo-mecânico de símbolos; ela é antes uma atividade peculiar do intelecto humano, atividade essa da qual a notação matemática é apenas uma forma de expressão mais ou menos perfeita.⁵⁸

Como já salientamos, os predecessores da corrente intuicionista são principalmente Kronecker e Poincaré, que defendem uma espécie de leitura semi-intuicionista da matemática, cada um a sua maneira, malgrado o engano em que se pode incorrer ao delimitar a obra desses autores *apenas* nesses termos.⁵⁹ Kronecker defende um posicionamento contrário ao do rigor como fundamento último da matemática,⁶⁰ pensamento que, como vimos, era uma forte tendência de sua época. O autor exige, além do rigor, um critério superveniente à elaboração da “boa” matemática, a saber, sua efetiva construção a partir de números inteiros, o que reduz sensivelmente o espaço de ação do matemático, a partir da delimitação mais restrita de seu objeto. Poincaré, por sua vez, concebe o grande fundamento da matemática como sendo os

das lógicas heterodoxas não deixa de ser controverso: apesar de inegavelmente ele ser o grande idealizador de uma nova maneira de operar com a lógica, sua própria concepção matemática o levava para longe dessa seara.

⁵⁸ Acerca dessa questão, vide capítulo 4, seção 4.2, onde é abordada a relação entre linguagem e conhecimento matemático sob a perspectiva brouweriana.

⁵⁹ “*There is no doubt that Poincaré influenced the development of intuitionism, for Poincaré was some sort of constructivist, and he wielded a very strong theory of mathematical intuition. But to call him a ‘pre-intuitionist’ is to risk misrepresenting his particular solution to the dilemma of classical mathematics.*” [Não há dúvida de que Poincaré influenciou o desenvolvimento do intuicionismo, pois ele foi uma espécie de construtivista e erigiu uma teoria da intuição matemática muito consistente. Mas denominá-lo ‘semi-intuicionista’ é incorrer no risco de descaracterizar sua solução particular ao dilema da matemática clássica.] (FOLINA, 1992, p. 73).

⁶⁰ “*According to Kronecker, for the foundations of mathematics, as well as of the natural sciences, phenomena are basic concepts and principles which are given by experience and open to modification in the course of the development of the subject matter. (...) This first consequence of the Kronecker conception throws light on the import of Kronecker’s sentence (...) “natural numbers were created by God, everything else is the work of men”. It means that ordinal numbers, that Kronecker assumed to be at the basis of pure mathematics, need not be defined. They have to be considered as given and as the only given objects of this science. All other objects must be built from them. It is for this reason that Kronecker, in opposition to the other foundation schools of thought in mathematics, as led by Frege, Hilbert or Brouwer, never tried to seek the ultimate foundation of the basic concepts of his discipline outside mathematics itself.*” [Segundo Kronecker, para os fundamentos da matemática, assim como para as ciências naturais, os fenômenos são os conceitos e princípios básicos dados pela experiência e abertos à modificação no curso do desenvolvimento da matéria. (...) Essa primeira consequência da concepção de Kronecker esclarece a importância de sua sentença (...) ‘*números naturais foram criados por Deus, e todos os demais são criações do homem*’. Isso significa que números ordinais, que Kronecker considerava serem a base da matemática pura, não precisariam ser definidos. Eles devem ser considerados como os objetos dados, os únicos objetos dados para essa ciência. Todos os outros objetos devem ser construídos a partir deles. Por essa razão que Kronecker, em oposição a outras escolas de concepção dos fundamentos da matemática, como as deixadas por Frege, Hilbert e Brouwer, nunca tentou procurar o fundamento último dos conceitos básicos da disciplina fora da própria matemática.] (BONIFACE, 2005, p. 145-6).

juízos sintéticos *a priori*, algo que exclui da matemática, em seu nível fundamental, a analiticidade (ao contrário do que pretendem os logicistas), posição essa que marca um posicionamento tanto linguístico quanto epistemológico.⁶¹ Cada um a seu modo, portanto, sustentam posições que privilegiam a construtibilidade das asserções legítimas da disciplina. Brouwer, todavia, distancia-se tanto de Kronecker e Poincaré quanto de logicistas e de formalistas ao levar às últimas consequências esse papel privilegiado da intuição, coisa que seus antecessores não ousaram fazer, porque apesar de considerarem a faculdade da intuição mais relevante que o mecanismo analítico para as bases da matemática, eles ainda estavam presos a premissas da matemática ortodoxa com as quais Brouwer rompe definitivamente.

O intuicionista tem como ponto de partida principal o ato de postular como verdadeira uma asserção que pode parecer trivial, mas que tem sérias consequências para a consideração da validade de seus princípios: a matemática, enquanto disciplina científica, é produto do intelecto humano. Nós insistiremos muito nesse ponto no decorrer da argumentação. Brouwer traz à tona a necessidade de, uma vez explicitada essa característica, estabelecer um compromisso com as consequências que dela decorrem: se todo o âmbito da matemática remete a raciocínios matemáticos que são frutos da razão humana, qualquer asserção que procure inadvertidamente sustentar-se em premissas gerais e irrestritas deve levar em conta essa limitação. Assim, a matemática *standard* sofre sérias mutilações a partir de uma perspectiva intuicionista, pois as exigências que decorrem de suas premissas tornam várias provas e procedimentos inválidos, dos quais o axioma da escolha e o princípio do terceiro-excluído são os mais notórios e evidentes. Estamos, portanto, no mesmo *locus* gerador das dificuldades relativas à teoria dos conjuntos, mas não *apenas* delas, pois as questões trazidas à baila por Brouwer problematizam a matemática ortodoxa a um ponto até então inédito.

O texto de 1907 que citamos acima traz algumas pistas muito valiosas da maneira como Brouwer direciona sua análise sobre o problema dos fundamentos. Em primeiro lugar, ele declaradamente subverte a concepção logicista, ao anunciar que não é a matemática que se alicerça em princípios lógicos, mas justamente o contrário: a lógica remete à matemática, por

⁶¹ “Whereas analyticity/syntheticity is a linguistic distinction concerning the content of our statements (or judgments), the *a priori*/ *a posteriori* distinction is epistemological, concerning how we can come to know the truth of, and how we can justify our beliefs and assertions.” [Enquanto a distinção entre analiticidade e sinteticidade é linguística no que diz respeito ao conteúdo das proposições (ou juízos), a distinção entre *a priori*/a *a posteriori* é epistemológica, e diz respeito a como nós chegamos a conhecer uma verdade e como podemos justificar nossas crenças e asserções.] (FOLINA, 1992, p. 4).

se tratar *apenas* de um caso particular dela.⁶² Tanto a lógica clássica, denominada por Brouwer *teórica*, quanto a *logística*, são *traduções*, formulações linguísticas de construções matemáticas. Uma dedução com base na teoria do silogismo, por exemplo, nada mais é do que uma forma discursiva de apresentar uma relação tautológica entre elementos (que, na lógica, são denominados *sujeitos*) e conjuntos (os *predicados*).⁶³ Passando a uma formulação intuitiva, parece evidente a possibilidade de trabalhar com qualquer uma das formas válidas de dedução da lógica clássica com base nos diagramas de Venn. Assim, onde o lógico, por exemplo, enxerga uma contradição (ou seja, uma insustentável quebra das próprias leis do pensar), Brouwer enxerga apenas a constatação de que a construção matemática não mais pode se desenvolver dentro da estrutura básica na qual se assenta (cf. BROUWER, 1907, p. 73). Assim, a passagem da intuição matemática pura para a sua forma descritiva que caracteriza a lógica só se processa pela necessidade de representar essa tal intuição pela linguagem. O legítimo raciocínio matemático prescinde, portanto, da linguagem, e isso afasta a concepção brouweriana da relação intrínseca que deve existir entre discurso e pensamento já

⁶² “While thus mathematics is independent of logic, logic does depend upon mathematics: in the first place intuitive logical reasoning is that special kind of mathematical reasoning which remains if, considering mathematical structures, one restricts oneself to relations of whole and part. (...) People try by means of sounds and symbols to originate in other people copies of mathematical constructions and reasonings they have made themselves; by the same means they try to aid their own memory. In this way the mathematical language comes into being, and as its special case the language of logical reasoning.” [Logo, enquanto a matemática é independente da lógica, a lógica depende da matemática: primeiramente, o pensamento lógico intuitivo é um caso especial do pensamento matemático que resta se, uma vez consideradas as estruturas matemáticas, alguém se restringe a relações de todo e parte. (...) Pessoas tentam, por meios de sons e símbolos, criar em outras pessoas cópias de construções e raciocínios matemáticos que fizeram para si mesmos; pelos mesmos meios eles tentam auxiliar sua própria memória. Nesse sentido, a *linguagem matemática* se realiza, e, como seu caso particular, a *linguagem do raciocínio lógico*.] (BROUWER, 1907, p. 73).

⁶³ “Let us, by way of illustration, consider the classical syllogism:

All men are mortal.

Socrates is a man.

ergo: Socrates is mortal.

The thoughts accompanied by these words are the following:

We start by projecting in the world of perception a mathematical system, namely a finite set of ‘subjects’, each of which is connected with some (none or one or more) elements of another set whose elements are called ‘predicates’. It turns out that in the human intellect a part of the world of perception can approximately be projected on such a system.”

[Consideremos, a título de ilustração, o seguinte exemplo:

Todos os homens são mortais.

Sócrates é homem.

logo: Sócrates é mortal.

Os pensamentos acompanhados por essas palavras são os seguintes:

Nós começamos projetando no mundo da percepção um sistema matemático, ou seja, um conjunto finito de ‘objetos’, cada um dos quais está conectado com alguns (ou nenhum, ou um, ou mais de um) elementos de outro conjunto cujos elementos são denominados ‘predicados’. Daí se extrai que no intelecto humano, uma parte do mundo perceptivo pode ser projetado aproximativamente nesse sistema matemático.] (BROUWER, 1907, p. 74).

conhecida desde os escritos de Platão. Esse aspecto do pensamento de Brouwer o leva a uma ideia *sui generis*, especialmente se considerarmos o momento histórico no qual ele estava inserido: a lógica não se constitui como o conjunto de regras do pensamento; ao contrário, assume a forma de uma simples ciência empírica que procura aplicar princípios matemáticos ao mundo fenomênico.

A maneira como Brouwer constrói sua concepção matemática encontra na discussão acerca do *status* do princípio do terceiro-excluído um momento muito oportuno. Talvez o grande mérito de sua obra tenha sido a capacidade de demonstrar que essa suposta indissociabilidade cunhada contemporaneamente entre lógica e matemática é bastante questionável, e isso ocorre por um motivo muito simples: o princípio do terceiro-excluído, na realidade, não pode ser tomado como irrestritamente válido para os domínios da matemática. Vide como exemplo sua aplicação ao argumento diagonal de Cantor,⁶⁴ à verificação de um conjunto solução para o último teorema de Fermat ou à conjectura de Goldbach.⁶⁵ O resultado dessa tese é o reconhecimento de que não há como propriamente afirmar ou negar determinadas asserções matemáticas:

¬A possui um *status* epistêmico positivo se e somente se A possui um *status* epistêmico negativo, e isso será correto se tivermos uma contraprova de A. Desse modo, o princípio do terceiro-excluído diz que nós temos ou a prova de A ou a contraprova de A ou, mais genericamente, que nós temos a evidência de A ou a evidência contra A. Mas também pode ocorrer que não tenhamos a evidência de A ou contra A.⁶⁶

⁶⁴ De modo geral, o argumento diagonal de Cantor mostra a existência de ao menos duas grandezas infinitas diferentes, a série dos naturais, que é passível de ser enumerada, ou seja, é contável, e a série dos reais, que é incontável, por não poder ser enumerada. O argumento está fundado na possibilidade de sempre encontrar um real que não faça parte de uma sequência prévia estabelecida. « *Ce qui importe à Cantor c'est de montrer qu'il n'y a pas de bijection possible entre deux suites infinies, ce qui suffit pour établir le début d'une hiérarchie entre les infinis. Le procédé diagonal est une démonstration par l'absurde qui pose l'hypothèse à réfuter: la possibilité d'établir une correspondance biunivoque entre les réels et les naturels.* » [O que importa a Cantor é mostrar que não há bijeção possível entre duas séries infinitas, o que basta para introduzir o início de uma hierarquia entre infinitos. O procedimento diagonal é uma demonstração por absurdo que propõe a hipótese a refutar: a possibilidade de estabelecer uma correspondência biunívoca entre os reais e os naturais.] (LAURIA, 2004, p. 81).

⁶⁵ O último teorema de Fermat postula a inexistência de x, y, z e n , sendo $n > 2$, que verifiquem a equação $x^n + y^n = z^n$. A conjectura de Goldbach assevera que “*tudo número par pode ser expresso pela soma de dois números primos*” (BARKER, 1976, p. 102). Note-se ainda que o argumento diagonal é aplicável ao trato das grandezas irracionais, e os teoremas de Fermat e Goldbach remetem a problemas relativos inteiros positivos.

⁶⁶ “¬A has a positive epistemic status iff. A has a negative epistemic status. And that will be true if we have a disproof of A. Excluded middle thus says that we have a proof of A or a disproof of A, or, more generally, that we have evidence for A or evidence against A. But we might have no evidence relevant to A at all” (BONEVAC, 2007, p. 2).

A partir dessa constatação, surge naturalmente a impossibilidade da aplicação do princípio do terceiro-excluído tal como isso acontece na matemática ortodoxa, o que redundaria em uma séria restrição a ser imposta aos diversos sistemas matemáticos, porque o princípio do terceiro-excluído é a grande base (juntamente com o princípio de não contradição) da testabilidade de sistemas e de partes de sistemas matemáticos;⁶⁷ ao introduzir tal dificuldade, obviamente o intuicionista está em clara oposição, por exemplo, aos princípios mais básicos do logicismo e do formalismo. O grande problema vislumbrado por Brouwer e Heyting é a aplicação peremptória desse princípio para além dos limites de sua validade ou, se preferirmos, de sua testabilidade. Ora, Brouwer já argumentara que os problemas conforme expostos são consequências da inobservância do princípio da construtibilidade dos raciocínios matemáticos; uma vez, portanto, reconhecida a origem e as limitações do princípio lógico do qual aqui tratamos, a sua aplicação deve corresponder ao universo matemático ao qual podemos legitimamente associá-lo, ainda que por articulações complexas, necessariamente exigindo a devida clareza e distinção fornecidas pela intuição.

Quanto ao aspecto relativo à clareza dos argumentos, existe uma diferença fundamental se consideramos a construção elaborada para dois entes matemáticos que nos são muito familiares e que podemos adotar como nossos exemplos: os números 2 e $\sqrt{2}$. Esses dois conceitos matemáticos parecem constituídos de naturezas muito diferentes, se considerada a sua forma de construção que, em suma, resume-se ao reconhecimento da perfeita determinação da grandeza do primeiro, por intermédio da intuição, bem como da impossibilidade da efetiva determinação da grandeza do segundo nos mesmos termos. O que tomamos de fato pelo símbolo $\sqrt{2}$, ou por qualquer outro número irracional, só pode ter um caráter aproximativo, por mais que nos esforcemos em explicitá-lo. Em ambos os casos, portanto, estamos tratando com conceitos ideais, mas essa idealidade assume formas diferentes, com a perfeita simplicidade que encontramos no número inteiro e com a maneira fragmentária e imprecisa que decorre de nossa concepção de número irracional. Definida uma

⁶⁷ “*Within a specific finite ‘main system’, we can always test (that is, either prove or reduce to absurdity) properties of systems, that is, test whether systems can be mapped, with prescribed correspondences between elements, into other systems. (...) On the basis of the testability just mentioned, there hold, for properties conceived within a specific main system, the principle of excluded middle, that is, the principle that for every system every property is either correct or impossible.*” [Em um dado sistema finito, nós podemos sempre testar (quer dizer, apresentar uma prova ou proceder à redução ao absurdo) propriedades de sistemas particulares, ou seja, testar se sistemas podem ser mapeados através de correspondências estabelecidas entre elementos e outros sistemas. (...) Na base da testabilidade acima mencionada se encontra o princípio do terceiro-excluído, para

grandeza qualquer ao tomar $\sqrt{2}$ como nosso limite (por exemplo, entre 1,4142 e 1,4143) estamos simplesmente esclarecendo o que essa grandeza *não é*. Portanto, nesse caso como em tantos outros, asserções que implicam em uma perfeita definição dessas grandezas não podem ser submetidas ao crivo do princípio do terceiro-excluído. A matemática construída sob essa perspectiva assume um caráter completamente distinto da matemática ortodoxa, pois, de acordo com Brouwer, ela passa a constituir-se muito mais como uma atividade humana em sentido amplo, encontrando uma área de aplicação muito mais extensa do que possuía originalmente:

Para mim, suas chances de ser útil para a filosofia, história e ciências sociais são melhores. De fato a matemática, tomando como base o ponto de vista intuicionista, é um estudo acerca de certas funções da mente humana e, enquanto tal, é similar a outras ciências.⁶⁸

Além das premissas filosóficas das quais parte, muito da originalidade da argumentação intuicionista decorre de sua concepção de conjunto. Curiosamente, não é a partir de uma definição estabelecida *ad hoc*, que respeite apenas o princípio de não contradição relativamente a outros constituintes do sistema que podemos satisfatoriamente considerar um conjunto como bem definido. Ao invés disso, existe a necessidade da definição de uma regra estipulada previamente para a formação do conjunto, regra essa muitas vezes dispensável no contexto da matemática clássica. Podemos dizer que três constituintes são fundamentais para a construção de um conjunto que satisfaça as exigências do intuicionista: o início da série, uma regra de formação e a realização das escolhas sucessivas que decorrem naturalmente dos dois primeiros constituintes. Uma passagem é especialmente interessante para compreender a perspectiva conjuntista do intuicionismo:

Consideremos o conceito ‘números reais entre 0 e 1’. Para o formalista, esse conceito equivale a ‘série elementar de dígitos que ocupam sucessivamente as casas decimais’; para o intuicionista, significa ‘regra de construção de uma série elementar de dígitos das casas decimais, construída através de um número finito de passos’. E quando o formalista cria o ‘conjunto de todos os números reais entre 0 e 1’, essas palavras não veiculam sentido para o intuicionista, mesmo se concebermos os números reais como os formalistas, determinados por uma série elementar de dígitos

propriedades concebidas como estando inseridas em um sistema finito originário; ou seja, esse princípio assegura que, para todo sistema, uma propriedade é correta ou impossível.] (BROUWER, 1923, p. 335).

⁶⁸ “*In my eyes its chances of being useful for philosophy, history and the social sciences are better. In fact, mathematics, from the intuitionist point of view, is a study of certain functions of the human mind, and as such it is akin to these sciences*” (HEYTING, 1931, p. 73-4).

escolhidos livremente, ou como os intuicionistas, determinados por leis de construção finitistas.⁶⁹

A base da argumentação intuicionista está na ideia de unidade, e de multiplicidade que dela decorre naturalmente. A definição de uma unidade impõe-se como o fundamento que possibilita sua perfeita delimitação e, por conseguinte, sua distinção em relação a *outra* unidade. A possibilidade de conceber unidades distintas umas das outras é a origem da série dos naturais positivos, que, *a priori*, não parece algo muito problemático. A verdadeira problemática que traz à tona a peculiaridade do intuicionismo refere-se à concepção do infinito, tendo em vista que a interpretação das sequências numéricas (tanto dos naturais quanto dos reais) sob essa nova perspectiva exige uma releitura do conceito de infinitude, porque a simples repetição de uma série não causa qualquer atrativo; é justamente o salto da finitude para a infinitude (e a possibilidade de seu trato matemático) que nos intriga.

Ao contrário das concepções logicistas e formalistas, o intuicionista pensa o contínuo como um procedimento sequencial de escolhas, com base em leis que não são necessariamente deterministas. As regras de geração dessas sequências são dadas no início de seu desenvolvimento, e cada novo termo determina a correção da sequência que dele decorre. Logo, o que o intuicionista denomina como infinito é uma *sequência infinita* de intervalos dados potencialmente, na qual cada um desses intervalos está determinado por seus predecessores.⁷⁰ A formalização dessa noção é instituída a partir de dois teoremas denominados *bar theorem* e *fan theorem*,⁷¹ que traduziremos aqui precariamente por *teorema da cadência* e *teorema da propagação*. Resumidamente, o teorema da cadência postula a

⁶⁹ “Let us consider the concept: ‘real number between 0 and 1’. For the formalist this concept is equivalent to ‘elementary series of digits after the decimal point.’ For the intuitionist it means ‘law for the construction of an elementary series of digits after the decimal point, built up by means of a finite number of operations.’ And when the formalist creates the ‘set of all real numbers between 0 and 1’, these words are without meaning for the intuitionist, even whether one thinks of real numbers of the formalist, determined by elementary series of freely selected digits, or of the real numbers of the intuitionist, determined by finite laws of construction” (BROUWER, 1912, p. 85).

⁷⁰ A série dos reais, sob a perspectiva intuicionista, é vista como “um espectro onde os pontos não estão perfeitamente determinados, mas em processo de aparecimento. Em particular, assim como os números naturais, não se trata de uma completa totalidade.” (WILDER, 1952, p. 251). Não obstante, sua concepção dos infinitos enumeráveis se assemelha à de Cantor, que parte de uma correspondência biunívoca, recorrendo ao axioma da extensionalidade (Ibid., p. 254).

⁷¹ A tradução dos nomes desses dois teoremas não pode ser ao mesmo tempo precisa e elegante. *Bar* é o substantivo que significa limite, obstáculo, mas ao mesmo tempo ritmo, compasso, cadência. O teorema com esse nome representa a construção cadenciada e sucessiva que se espera em conjuntos bem construídos. *Fan*, por sua vez, é o verbo que significa incitar, atizar, inflamar, sempre com o sentido de dar movimento a algo, o que,

possibilidade de efetuar a construção de conjuntos bem ordenados, o que significa a capacidade do matemático em partir de um segmento inicial finito, estabelecendo sucessivas escolhas determinadas a partir desse segmento inicial.

Aplicado dessa maneira, o teorema da cadência garante também a segurança quanto à possibilidade de recorrer ao princípio da indução, desde que a operação associada à indução seja tomada como infinita apenas em potência e, obviamente, restrita à finitude na realidade.⁷² Nesse mesmo sentido, o conceito de *expansão* (“*spread*” em inglês), é inserido na terminologia intuicionista exatamente para denotar a distinção entre o conjunto concebido a partir de seus princípios, em oposição às escolas de inspiração cantoriana. A sequência de expansão não é, por sua vez, composta das *entidades* cantorianas, mas de *espécies*, concebidas a partir das propriedades por meio das quais os elementos são definidos; o teorema da propagação e o princípio da reciprocidade de espécies complementares⁷³ são outros exemplos da forma peculiar através da qual os argumentos intuicionistas são apresentados. Sem nos atermos às propriedades e provas estritamente matemáticas, basta reconhecer que a matemática intuicionista é nem mais nem menos rigorosa que a matemática ortodoxa; ela é *completamente diferente* daquela (cf. DA COSTA, 1997, p. 86), donde provém sua relevância.

obviamente, também está associado à possibilidade de propagação das sequências de modo uniforme e tendendo ao infinito.

⁷² Não apresentaremos aqui o teorema em tela, porque sua explicitação envolve uma série de conceitos relativos à nomenclatura utilizada pelos intuicionistas, cuja reprodução seria muito enfadonha e pouco esclarecedora, se considerada a natureza do trabalho. Os conceitos básicos que envolvem a formalização e o desenvolvimento da teoria das funções em Brouwer podem ser vistos em uma interessante coletânea explicativa em van Heijenoort (1976, p. 453-7).

⁷³ O teorema da propagação pode ser definido da seguinte maneira: “*Se com cada elemento de um conjunto finito M um número natural β_e é associado, pode ser especificado um número z tal que β_e é determinado completamente pelas primeiras z escolhas geradoras de e* ” (BROUWER, 1927, p. 462). A importância desse teorema advém do fato que dele decorre a garantia de continuidade uniforme das sequências de escolha que caracterizam a construção dos conjuntos conforme os preceitos do intuicionismo; diretamente relacionado a ele, temos o chamado *princípio da reciprocidade das espécies complementares*, também importante para a testabilidade dos sistemas, e que postula, em linhas gerais, que, em todo sistema, da correção de determinada propriedade decorre a impossibilidade de sua impossibilidade (BROUWER, 1923, p. 335).

Capítulo 2

A Questão Ontológica e suas Consequências

Existe uma realidade mais sutil que percorre a vida dos entes matemáticos, e que é algo distinto da lógica.¹

As três grandes correntes da filosofia da matemática nascidas entre o início do século XIX e fim do século XX implicam em consequências importantes do ponto de vista filosófico, que acabam também por influenciar posicionamentos no que tange às próprias estruturas teóricas empregadas na matemática. Nesse sentido, logicismo, formalismo e intuicionismo, malgrado consistirem em posições epistemológicas - e não propriamente em teorias matemáticas – reivindicam a observância de regras que tenham relação direta com aquilo que, em última análise, consideramos ser a matemática do ponto de vista ontológico e epistemológico, comprometendo-se fortemente com a metafísica subjacente à teoria matemática pura. O presente capítulo dedica-se a questões dessa natureza.

Sobre o termo “metafísica” pesa o ranço de uma filosofia prolixa e ultrapassada, de alcance e validade questionáveis, pelo menos desde Kant,² mas sobretudo após a conhecida crítica de Carnap, não obstante os sérios problemas que traz a tiracolo.³ Contudo, apesar da

¹ « *Il y a une réalité plus subtile, qui fait la vie des êtres mathématiques, et qui est autre chose que la logique* » (POINCARÉ, 1908, p. 133).

² Como Kant expressa nos *Prolegômenos*, seu trabalho propõe uma profunda releitura da metafísica: “*A minha intenção é convencer todos os que crêem na utilidade de ocuparem-se com a metafísica de que lhes é absolutamente necessário interromper o seu trabalho, considerar como inexistente tudo o que se fez até agora e levantar antes de tudo a questão: ‘de se uma coisa como a metafísica é simplesmente possível’*” (KANT, 1783, p. 12).

³ A superação da metafísica com base na crítica centrada em uma análise lógica da linguagem tem a pretensão de rejeitar qualquer sentido a proposições metafísicas, incluindo as proposições axiológicas e normativas: “*El desarrollo de la lógica moderna ha hecho posible dar una reposta nueva y más precisa al problema de la validez y justificación de la metafísica. (...) En el campo de la metafísica (incluyendo la filosofía de los valores y la ciencia normativa), el análisis lógico ha conducido al resultado negativo de que las pretendidas proposiciones de dicho campo son totalmente carentes de sentido. (...) Nuestra tesis es que el análisis lógico ha revelado que las pretendidas proposiciones de la metafísica son en realidad pseudoproposiciones.*” [O desenvolvimento da lógica moderna tornou possível dar uma resposta nova e mais precisa ao problema da validade e da justificação da metafísica. (...) No campo da metafísica (incluindo a ciência dos valores e a ciência normativa) a análise lógica conduziu ao resultado negativo de que as pretensas proposições desse campo são totalmente carentes de sentido. (...) Nossa tese é a de que a análise lógica revelou que as pretensas proposições da metafísica são na realidade pseudoproposições.] (CARNAP, 1932, p. 66-7). O problema central de um posicionamento dessa natureza é o fato de que ele, ao se constituir, coloca-se imediatamente no rol das pseudoproposições cuja validade pretende questionar, uma vez que se trata evidentemente de uma postura

aparente dispensabilidade dos temas da metafísica, um debate dessa natureza foi travado nas entrelinhas da questão relativa à solução dos paradoxos da teoria dos conjuntos pelos autores que a ela se dedicaram,⁴ pois não há como olvidar que as posições assumidas quanto à natureza dos entes matemáticos encontram uma ressonância evidente nos critérios definidos para a validade dos argumentos apresentados. A leitura que Quine faz a esse respeito ressalta dois aspectos importantes: o primeiro, a correspondência entre as teses medievais relativas à questão dos universais e as correntes da filosofia matemática do século XX;⁵ o segundo, o compromisso ontológico decorrente da aceitação de cada uma dessas teses.⁶ Assim, simplesmente não há como se furtar de uma resposta ao problema, porque a crença subjacente na natureza dos objetos matemáticos por vezes *determina* os critérios de justificação e de aceitabilidade das provas matemáticas. Isso significa que há conceitos e fundamentos que se dão *em função* da postura ontológica adotada, ou mesmo de sua negação.

Logo, não obstante a viabilidade da adoção de uma perspectiva mais descritiva e menos normativa em relação ao papel da filosofia da matemática (que não deixa de ser uma

normativa em relação à metafísica, e que sustenta um caráter valorativo também muito claro. É uma proposição valorativa que pretende tomar como carentes de sentido *todas* as proposições valorativas.

⁴ Isso aparece, por exemplo, em Poincaré, já em 1906: « *La croyance à l'infini actuel est essentielle dans la logistique russellienne. C'est justement ce qui la distingue de la logistique hilbertienne. Hilbert se place au point de vue de l'extension, précisément afin d'éviter les antinomies cantorienes ; Russell se place au point de vue de la compréhension. Par conséquent le genre est pour lui antérieur à l'espèce, et le summum genus est antérieur à tout. Cela n'aurait pas d'inconvénient si le summum genus était fini ; mais s'il est infini, il faut poser l'infini avant le fini, c'est-à-dire regarder l'infini comme actuel.* » [A crença no infinito atual é essencial para a lógica russelliana. É isso justamente que a distingue da lógica de Hilbert. Este se coloca a partir do ponto de vista da extensão, precisamente com o intuito de evitar as antinomias cantorianas. Russell, por sua vez, coloca-se a partir do ponto de vista da compreensão. Consequentemente, o gênero é para ele anterior à espécie, e o *summum genus* é anterior a tudo. Não haveria problema se esse *summum genus* fosse finito; mas se ele é infinito, é necessário colocar o infinito anteriormente ao finito, o que significa conceber o infinito como atual.] (POINCARÉ, 1986[1906.2], p. 104).

⁵ “*The three main mediaeval point of view regarding universals are designated by historians as realism, conceptualism and nominalism. Essentially these same three doctrines reappear in twentieth-century surveys of the philosophy of mathematics, under the new names logicism, intuitionism and formalism.*” [Os três pontos de vista acerca dos universais são designados pelos historiadores como realismo, conceitualismo e nominalismo. Em essência, essas mesmas três doutrinas reaparecem nos estudos do século XX concernentes à filosofia da matemática, sob os nomes de logicismo, intuicionismo e formalismo.] (QUINE, 1953, p. 14).

⁶ “*According to Quine, the ontological dispute in modern philosophy of mathematics is clearer than the mediaeval controversy over universals because we possess a standard 'to decide what a theory or form of discourse is committed to: a theory is committed to those and only those entities to which the bound variables of the theory must be capable of referring in order that affirmations made in the theory be true.'*” [Segundo Quine, a disputa ontológica na filosofia da matemática moderna é mais clara que a controvérsia medieval acerca dos universais porque nós temos um padrão para ‘decidir com o que a teoria ou forma de discurso está comprometida: uma teoria está comprometida com aquelas entidades (e apenas com elas) às quais as variáveis não-livres da teoria devem ser capazes de referir, a fim de que as afirmações feitas na teoria sejam verdadeiras’.] (VIDAL-ROSSET, 1996, p. 2).

medida profilática diante de possíveis e constantes devaneios filosóficos), a questão metafísica é anterior à reflexão filosófica, e determina a crença subjacente à construção do sistema como um todo, algo que se assemelha à crença natural, típica do senso comum, na existência da realidade do mundo como requisito necessário às ciências empíricas. Por outro lado, se há que se objetar os devaneios filosóficos, também é viável conter a pretensão de absoluta autonomia científicista, pois é impossível abandonar todo tipo de determinações extrínsecas à atividade matemática (entendendo essas determinações extrínsecas como preceitos e noções comuns impostas pela racionalidade, no sentido mais amplo do termo), uma vez que a construção do sistema, incluindo a evidente necessidade de estabelecer critérios axiológicos e metodológicos que o regem, não pode encontrar guarida apenas dentro do próprio sistema. Assim, dada a impossibilidade de nos furtarmos da adoção de uma posição sobre a questão metafísica (o que certamente significaria uma atitude ingênua diante do problema), resumiremos o grande leque de posturas possíveis em duas grandes linhas que nos interessam mais diretamente:

- O realismo ou platonismo matemático: números consistem em algo que possui uma existência própria e independente; e
- O antirrealismo: números são criações do intelecto humano, sejam eles nomes (conforme sustenta o nominalismo), sejam conceitos (do ponto de vista do conceitualismo).

Apesar do debate acerca dos universais existir já desde a Antiguidade (e dos objetos matemáticos já estarem inseridos, de alguma maneira, no contexto da metafísica clássica), podemos considerar que o renascimento do interesse e da importância do problema é devido, em grande parte, ao clamor do intuicionismo: a restrição da aplicação do princípio do terceiro-excluído devolve a importância do posicionamento metafísico, ao tornar claras as consequências da aceitação ou da negação de uma doutrina referente às existências independentes dos seres matemáticos. O intuicionismo coloca em evidência que o compromisso ontológico deve resultar em consequências práticas, uma vez que, por exemplo, a aceitabilidade da validade irrestrita do princípio do terceiro-excluído na matemática decorre de uma determinada concepção metafísica e, sua negação, ao contrário, da recusa dessa concepção. Em termos gerais, o problema que se apresenta é o seguinte: a concepção realista em ontologia é interpretada como aquela que preserva a legitimidade da matemática ortodoxa,

enquanto a idealista (ou antirrealista), aquela que exige, em princípio, sua reformulação ou restrição.

Destarte, temos um par bem definido: a defesa da viabilidade (da verdade, da pertinência) da matemática clássica reclama uma postura realista, enquanto a negação de um fundamento ontológico subjacente através da tese de que os objetos matemáticos são criações do espírito (sejam eles conceitos ou nomes), depois de Brouwer, leva naturalmente à não aceitação da totalidade da matemática clássica. Contudo, essa relação não chega a ser necessária, apesar de soar como a mais natural. Existe uma maneira de legitimamente adotar uma postura antirrealista, mas que não seja necessariamente reformista. Por hora, basta-nos ter por horizonte que minha proposta será a de, mesmo aceitando e legitimando a matemática intuicionista, não adotar uma postura revisionista em relação à matemática clássica.

2.1. O realismo e os entes matemáticos

O realismo parte de um pressuposto claro e simples: *objetos matemáticos existem*, e não como simples idéias, não como símbolos representados por sinais gráficos; eles existem como realidades dadas. Essa posição traz consequências diretas para a própria concepção de matemática e o que esperar dela, ao se tratar de uma tentativa de obter conhecimento de objetos bastante peculiares:

Na filosofia da matemática, o realista sustenta que objetos matemáticos existem e que o matemático procura fornecer informações acerca desses objetos. Assim, os realistas baseiam grande parte de sua concepção da matemática na hipótese de que coisas como números, conjuntos, funções, vetores, matrizes, realmente existem. (...) Entidades matemáticas supostamente não são coisas passíveis de serem vistas, tocadas, ouvidas, cheiradas, experimentadas, ou mesmo detectadas por nossos mais avançados instrumentos científicos.⁷

Nossa melhor inspiração para a concepção realista vem dos pitagóricos. Segundo eles, números existem; mais que isso, eles são a realidade última de *todas* as coisas. Isso se evidencia pelas razões e proporções que estão em tudo, em todas as partes, e se o mundo é matemático em sua essência, cabe-nos descobri-la por intermédio da ciência dos números. Os pitagóricos procuram estabelecer uma espécie de *dedução* do mundo a partir dos números e

⁷ “In the philosophy of mathematics, the realist maintains that mathematical objects exist and that the mathematician is attempting to provide us with informations about these objects. Thus, realists base much of their view of mathematics on the hypothesis that such things as numbers, sets, functions, vectors, matrices and

da dicotomia existente entre unidade e pluralidade, questão esta suscitada pela investigação parmenidiana.⁸ Mais do que uma existência real, a concepção em tela arca, de bom grado, com o peso de procurar identificar na música, na perfeição dos objetos geométricos e, mais, na pluralidade do mundo, manifestações dos números. Com isso, mesclado ao contexto místico-religioso no qual a doutrina pitagórica estava inserida, surge uma das mais inusitadas formulações do período pré-socrático. A unidade de todas as coisas, o grande princípio buscado pela via racional através da filosofia nascente encontra nos objetos matemáticos um *locus* privilegiado. A realidade passava a ser uma das possíveis formas de expressão dos números.

No mesmo diapasão, se o pitagorismo é a melhor inspiração, é com base em uma concepção inspirada no platonismo que podemos considerar que o realismo matemático encontra uma expressão lapidar, ao aceitar deliberadamente noções que não encontram aporte nem na intuição, nem na experiência (cf. BERNAYS, 1934, p. 259). Se comparado às formulações dos pré-socráticos, a obra de Platão traz à tona uma posição madura e ousada no que diz respeito à concepção da realidade e da verdade, o que esbarra na consideração da natureza dos entes matemáticos e da maneira pela qual podemos conhecê-los;⁹ por esse motivo, o platonismo torna-se uma referência necessária a ser seguida ou combatida, pois o realismo matemático pode ser considerado como um desdobramento da doutrina platônica das Formas. Encontramos referências importantes no que diz respeito ao tratamento dispensado ao problema dos universais especificamente nos seus diálogos da maturidade, pois com o

such truly exist. (...) Mathematical entities are not supposed to be things that can be seen, touched, heard, smelled, tasted, or even detected by our most advanced scientific instruments. (CHIHARA, 2005, p. 492).

⁸ “O número é a essência própria das coisas. Os eleatas dizem: ‘Não há não-ser, logo, tudo é uma unidade’. Os pitagóricos: ‘A própria unidade é o resultado de um ser e de um não-ser, portanto há, em todo caso, não-ser e, portanto, uma pluralidade’. À primeira vista, é uma especulação totalmente insólita. O ponto de partida me parece ser a apologia da ciência matemática contra o eleatismo. (...) A contribuição original dos pitagóricos é, pois, uma invenção extremamente importante: a significação do número e, portanto, a possibilidade de uma investigação exata em física.” (NIETZSCHE, 1996, p. 62-3).

⁹ “There are two senses of Platonism. (...) The better known and less plausible explication is ‘ontological Platonism’, which is a doctrine about a realm of mathematical objects, the existence of which is somehow independent of our mathematical activity – of our awareness and access to it. (...) The second explication of Platonism, which is at least *prima facie* distinct from the first, is one whereby the question is shifted from the ontological issue from the existence of mathematical objects to the issue of the objectivity of mathematical truth. It is unclear whether or not the two ‘types’ of Platonism are really independent.” [Há dois sentidos para o platonismo (...) O mais conhecido e que encerra uma explicação menos plausível é o ‘platonismo ontológico’, que é uma doutrina sobre a realidade de objetos matemáticos, que são de alguma forma independentes de nossa atividade matemática, de nossa consciência e acesso a eles. (...) A segunda explicação do platonismo, que é ao menos *prima facie* distinta da primeira, é a que se refere ao deslocamento do tema ontológico da existência de

passar do tempo, Platão vai paulatinamente se distanciando da posição, por assim dizer, aporética de Sócrates, muito evidente em seus primeiros diálogos. Em suas obras mais tardias, o filósofo apresenta uma doutrina comprometida com a explicação da realidade, tomando por base uma argumentação que não é de todo dissociada da forma típica da demonstração matemática.¹⁰

Ao tratar da natureza das Formas, uma questão que se impõe é a de como se torna possível estabelecer essa identidade, essa correspondência pretendida entre uma Forma perene e os seus casos particulares, concretos, observáveis. O trabalho do filósofo é a arte de identificar a realidade não-imediata, ao transcender da aparência do concreto à totalidade e perfeição da Forma; o descortinar dessa relação permite a efetiva compreensão da verdade, processo esse onde a *Teoria Platônica da Reminiscência* tem um papel fundamental.¹¹ Esses temas são recorrentes em Platão, dada sua importância ontológica e epistemológica. A alegoria da caverna é certamente a passagem mais conhecida da obra de Platão, que tem dentre suas finalidades a apresentação dessa teoria de modo simples e metafórico. Na concepção de Platão, as verdadeiras Formas, que existem em si e têm realidade própria, mantêm uma estreita relação com a origem dos seres individuais, onde essas Formas se espelham;¹² o argumento relativo à preexistência da alma funciona como forma de intermediação entre o particular (físico) e o transcendente (a verdadeira realidade), uma vez

objetos matemáticos para o campo da objetividade da verdade matemática. Não está claro se esses dois ‘tipos’ de platonismo são ou não independentes.] (FOLINA, 1992, p. 146).

¹⁰ “*Plato’s fascination with mathematics may also be responsible for his distaste with the hypothetical and fallible Socratic methodology. Mathematics proceeds (or ought to proceed) via proof, not mere trial and error. As Plato matures, Socratic method is gradually supplanted.*” [O fascínio de Platão pela matemática pode ser responsável por seu desagrado com a hipotética e falível metodologia socrática. A matemática trabalha (ou deveria trabalhar), através de prova, e não da mera tentativa e erro. Na medida em que Platão amadurece, o método socrático vai sendo gradualmente abandonado.] (SHAPIRO, 2000, p. 62).

¹¹ No *Mênon*, o autor traz à cena um escravo que, devidamente conduzido pela argumentação característica da maiêutica socrática, efetua a dedução de um teorema de geometria, apesar de ser ignorante na ciência (PLATÃO, *Mênon*, 82-5). A preexistência do saber é prova de um conhecimento anterior, que pode ser trazido à tona uma vez que descortinado o véu que o cobre. Essa é a ideia da maiêutica em geral: trazer à luz o que já conhecemos. E se é possível deduzir um teorema como o escravo o faz no *Mênon*, isso significa que sua alma já tem uma participação comum com as formas puras dos números e dos objetos geométricos; significa, em outros termos, que os objetos que compõem aquilo que denominamos aritmética e geometria possuem uma existência transcendente.

¹² “*Then may we not say, Simmias, that if, as we are always repeating, there is an absolute beauty, and goodness, and an absolute essence of all things? And if to this, which is now discovered to have existed in our former state, we refer all our sensations, and with this compare them, finding these ideas to be pre-existent?*” [Então não podemos dizer, Símias, que, como estamos sempre repetindo, existe uma absoluta Beleza, uma absoluta Bondade, e uma absoluta essência de todas as coisas? E, desse modo, agora que descobrimos que já

que o ato de contemplar a verdade não é senão um esforço de recordar o previamente conhecido, antes do retorno da alma ao mundo físico e de sua prisão nos grilhões da caverna que constituem o corpo material. O reconhecimento da beleza em várias coisas tão distintas entre si (uma paisagem, uma obra de arte, um corpo feminino, uma música, etc.) decorre de sua natureza comum em relação à Ideia (ou Forma) original da beleza. Essa é a articulação básica que dá sustentação ao realismo platônico.¹³

Dessa maneira, em Platão, o conhecimento das Formas se caracteriza por uma evidência intelectual, com o ato de olhar “com os olhos do espírito”. A metáfora é bem empregada, pois é praticamente como se a contemplação racional se realizasse por um processo análogo ao da visão sensorial: o intelecto *contempla* a realidade, pois há uma realidade em si que a razão pode efetivamente apreender (que não se resume a ideias criadas pela mente humana ou a experiências sensoriais), e da qual fazem parte os entes matemáticos. Há, portanto, uma referência direta e real à qual o matemático pode visar; em termos da metafísica clássica, há um ser a ser conhecido. Todo o trabalho do filósofo (e no caso específico, do matemático) é o de traduzir, tão perfeitamente quanto possível, a realidade eterna, perene e perfeita das Formas. Os números e as formas geométricas, por sua vez, podem ser considerados como as Formas platônicas, ou, no mínimo, constituintes do mundo dos seres que refletem as verdadeiras Formas (cf. PLATÃO, *República*, 509-11), não obstante as várias possibilidades de interpretação abertas pelos textos platônicos. São, todavia, uma “classe” diferenciada de Formas que, ao contrário das outras, têm a peculiaridade de existir em quantidade (e não como uma essência única, como é o caso do Belo, por exemplo).¹⁴ Essa outra concepção de Forma representada pelos números está mais associada ao mundo ideal que ao sensível e, por isso, não estabelece por si só qualquer laço mais forte com o mundo da aparência, algo que explica como a relação de direito que surge entre o realismo matemático e

existimos em um estado anterior, a elas nós referimos todas as nossas sensações, e com isso as comparamos, encontrando essas ideias como pré-existentis?] (PLATÃO, *Fédon*, 76).

¹³ « *Le ressort de tout réalisme est un argument, que nous appelons l'argument du Ménon, grâce auquel Socrate-Platon fonde la nécessité du recours à ce que le Moyen Age appellera des 'natures communes participées' pour expliquer ontologiquement la conspécificité des individus.* » [O sustentáculo de todo o realismo é um argumento, que nós denominamos ‘argumento de Ménon’, graças ao qual Sócrates/Platão fundam a necessidade de recorrer àquilo que na Idade Média irá se chamar ‘naturezas comuns participadas’ para explicar ontologicamente a co-especificidade dos indivíduos.] (LIBERA, 1996, p. 28).

¹⁴ Também no *Fédon*, as relações de grandeza e de quantidade tomam parte da argumentação: com o intuito de sustentar sua teoria das Formas, Platão procura fundamentar sua argumentação, dentre outros aspectos, nos pares do tipo “maior/menor”, “grande/pequeno”, acabando por se referir a grandezas matemáticas e a relações básicas da geometria e da aritmética com a pretensão de sustentarem uma natureza imutável (PLATÃO, *Fédon*, 100-2).

a matematização dos fenômenos físicos encontra maior proximidade na concepção aristotélica que para Platão: por pertencerem ao mundo das Formas, não há qualquer laço mais forte entre a perfeição dos objetos matemáticos e a realidade observável.

Vários autores contemporâneos também sustentam um realismo de cunho platônico, dentre os quais Russell e Gödel são bons exemplos. Russell apresenta, em um texto de 1911, intitulado “*Le Réalisme Analytique*” (“*O realismo analítico*”) a maneira como ele concebe a articulação entre matemática e a ontologia a ela subjacente.¹⁵ O nome atribuído ao artigo é justamente o de seu posicionamento teórico. Defender uma concepção realista e analítica significa, segundo Russell, sustentar ao mesmo tempo a crença na existência de entidades não mentais (o que o torna realista) e, associado a esse compromisso ontológico, um outro que não deixa também de ser metodológico: o autor denomina sua filosofia como analítica ao postular que tudo que é complexo é derivado do simples. Ao explicitar o que entende por “simples”, Russell atribui ao conceito dois sentidos: “simples” pode ser atribuído tanto a conceitos universais quanto a dados sensoriais. Essa ideia guarda uma relação íntima com o conceito de infinito leibniziano, além de estar em consonância com o chamado *axioma da compreensão*, importante tanto na teoria dos tipos lógicos quanto em ZF. Note-se, porém, que apesar da importância capital dos conceitos e definições na matemática, eles são mais ou menos aceitáveis de acordo com sua suposta adequação, sua provável similaridade em relação às formas perenes. Nesse sentido é que as verdades matemáticas existem *per se*, são universais e externas em relação a nossa consciência.¹⁶

A justificação dessa posição de Russell é fundamentada, em parte, pela insuficiência dos sistemas que lhe são concorrentes, quando opõe o realismo tanto à tese empirista quanto à idealista. Segundo ele, o idealismo, ao fundamentar *toda* a existência na consciência, exige uma regressão infinita (pois a própria existência da consciência também é dada na

¹⁵ No que diz respeito a Russell, uma referência temporal é necessária, tendo em vista as constantes e profundas mudanças de seu pensamento. Vide, por exemplo, o fato de que ele, que fora o grande defensor da corrente logicista e autor dos *Principia Mathematica*, anteriormente defendia uma concepção dos juízos matemáticos como sintéticos em 1901, como ele deixa claro em 1937 (RUSSELL, 1968, p. xviii). Outras mudanças de rumo menos radicais são constantes, algo que dá testemunho de sua honestidade intelectual.

¹⁶ « *La mathématique pure appartient au monde de l'essence. L'erreur capitale de l'idéalisme consiste à vouloir trouver pour le monde de l'essence une place en dedans du monde de l'existence, à savoir dans l'esprit. Cette erreur a rendu impossible, jusqu'à présent, une philosophie satisfaisante des mathématiques ou des autres connaissances a priori.* » [A matemática pura pertence ao mundo das essências. O erro capital do idealismo consiste em querer encontrar para o mundo das essências um lugar dentro do mundo da existência, ou seja,

consciência), o que não é, de fato, aceitável. O problema do empirismo é que seu princípio (“tudo é conhecido pelos sentidos”) não pode ser conhecido pelos sentidos, no que acaba por inviabilizar a tese em suas bases. A conclusão a que se chega é a de que nem idealismo nem empirismo são capazes de fundamentar devidamente a matemática, donde se conclui, portanto, que o realismo é a melhor maneira de realizar essa tarefa.¹⁷ Note-se, entretanto, a forma falaciosa da construção dos argumentos: Russell ataca versões radicais, quase caricatas, do empirismo e do idealismo, posições essas que, sem dúvida, são mais facilmente objetáveis, o que lhe permite mui facilmente tirá-los do contexto para a sustentação do realismo como “a alternativa viável”. A sua estratégia é, portanto, trasladar o problema de uma instância a outra: como as posições sustentadas pelo idealismo e empirismo têm o foco nas condições de conhecimento e, portanto, no sujeito cognoscente, o ato de problematizar suas soluções lança-o, de modo pretensamente legítimo, a uma instância que diz respeito ao objeto, e só a ele. Assim, o autor entende o conhecimento viabilizado pela “nossa” matemática como uma tentativa de aproximação por parte do intelecto que procura apreender as existências matemáticas, que lhe são estranhas e perenes, de modo que todos os paradoxos e problemas da matemática não constituem mais que os momentos imperfeitos das teorias; há uma realidade a conhecer e uma ciência aproximativa a conceber.

Kurt Gödel também comunga de pressupostos semelhantes, ao sustentar um realismo pouco modesto, reivindicando a legitimidade de conhecer os objetos matemáticos de maneira análoga àquela através da qual conhecemos os objetos reais:

Nós temos uma espécie de percepção também em relação aos objetos da teoria dos conjuntos, quando vemos que os axiomas se mostram para nós como verdadeiros. Não vejo nenhuma razão pela qual deveríamos ter menos confiança nesse tipo de percepção, ou seja, a intuição matemática, que na percepção sensorial, que nos leva a construir teorias físicas e esperar que as futuras percepções sensoriais concordem com elas...¹⁸

dentro do espírito. Esse erro impossibilitou, até agora, uma filosofia satisfatória da matemática ou de outros conhecimentos *a priori*.] (RUSSELL, 1911, p. 303).

¹⁷ « *La plupart des philosophies mènent à la conclusion que les propositions mathématiques ne peuvent être complètement vraies, et qu'elles sont plus ou moins entachées de contradiction ou d'inexactitude. La philosophie que j'appelle le réalisme analytique, au contraire, mène à la conclusion qu'il n'y a aucune raison de douter de la vérité absolue des propositions mathématiques.* » [A maioria das filosofias leva à conclusão de que as proposições matemáticas não podem ser completamente verdadeiras, e elas são mais ou menos contaminadas com a contradição ou a inexatidão. A filosofia que eu denomino como realismo analítico, em contraste, leva à conclusão de que não há nenhuma razão para duvidar da verdade absoluta das proposições matemáticas.] (RUSSELL, 1911, p. 297).

¹⁸ “*We do have something like a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves on us as being true. I don't see any reason why we should have less confidence in this*

Os próprios resultados fomentados pelos teoremas da incompletude podem ser tomados como uma decorrência natural desse estado de coisas.¹⁹ A matemática, por se tratar, em sua totalidade, de algo que transcende a razão humana, pode evidentemente incluir questões para as quais nós não tenhamos respostas, o que a prova de Gödel retrata bem. Essa é, por assim dizer, a consequência da amplitude, riqueza e suposta inesgotabilidade da matemática. Via de regra, as consequências do teorema da incompletude são interpretadas como resultados nocivos à matemática, tanto por supostamente destruir as pretensões de Hilbert no que tange ao programa que leva seu nome, quanto por apontar um limite à pretensão ingênua de perfeição da disciplina. Esse aspecto negativo, que acaba por restringir a matemática a um sistema conceitual dentro do qual se deve escolher entre a completude e a consistência, é visto pelo próprio Gödel de uma maneira bem diferente. Naquilo que assume a forma de uma limitação, o seu articulador ali enxerga também um sintoma: a matemática, em sua totalidade, não é passível de ser expressa em um sistema simbólico pronto e fechado, o que talvez seja, aos seus olhos, uma consequência natural do fato de que os objetos matemáticos existem assim como os objetos concretos. Em ambos os casos, a linguagem deve ser moldada e procurar uma identidade com a realidade exterior. Existe, dessa forma, uma diferença notável entre, de um lado, a realidade dos objetos matemáticos, esse conjunto de formas perfeitas e perenes, e, de outro, a “nossa matemática”, que consiste em um esforço de chegar tão perto quanto possível do seu ideal.

Apesar da série de argumentos existentes contra o realismo, não abordaremos questões lógicas e metafísicas; nosso ponto de debate concentrar-se-á na dificuldade de sua consistente fundamentação do ponto de vista epistemológico. Nesse prisma, o *argumento de indispensabilidade* de Quine, dada sua ampla aceitação mesmo entre nominalistas, é a pedra de salvação do realismo e o problema a ser superado por uma leitura contrária a essa posição. Uma forma de apresentação interessante do argumento é a proposta por Colyvan em duas proposições distintas:

(P1) Devemos estar ontologicamente comprometidos com todas as entidades que são indispensáveis para nossas teorias científicas, e apenas com elas.

kind of perception, i.e., mathematical intuition, than in sense perception, which introduces us to build up physical theories and to expect that future sense perceptions will agree with them...” (GÖDEL, 1947, p. 484).

¹⁹ “Gödel claimed that his realism was an important factor in the discovery of both the completeness of first-order logic and the incompleteness of arithmetic.” [Gödel alegou que seu realismo foi um fator importante tanto na descoberta da completude da lógica de primeira ordem quanto da incompletude da aritmética.] (SHAPIRO, 2000, p. 15).

(P2) Entidades matemáticas são indispensáveis para nossas melhores teorias científicas.²⁰

Um desdobramento possível desses dois princípios é o do reconhecimento de que, se a matemática desempenha um papel efetivo nas teorias explicativas da realidade, deve haver uma instância de contato entre esses dois pólos; daí a necessidade de postular uma identidade entre a ontologia da matemática e a realidade “em si”, o que se traduz pelo compromisso ontológico decorrente da matemática *standard*. A referência externa a uma realidade objetiva comum seria, *grosso modo*, o motivo da legítima e evidentemente bem-sucedida aplicação da matemática à realidade exterior: se há uma espécie de compatibilidade entre relações matemáticas e grande parte de nossas teorias relativas às ciências naturais (ou, em outros termos, se a matemática é aplicável e, em alguns casos, indissociável das nossas melhores teorias físicas), deve haver uma espécie de origem compartilhada, pois não é possível considerar que essa semelhança, que tende à identidade, seja produto de um feliz acaso. Entretanto, as dificuldades inerentes ao realismo também são muito claras. Dois problemas epistemológicos mais centrais são os seguintes: primeiro, o desafio de compreender *como* se dá a apreensão desse tipo de entidades pelo intelecto. Em segundo lugar, uma questão cuja solução decorre da resposta à primeira dificuldade: como essas entidades podem ser consideradas objeto de saber científico? Elas serão discutidas no capítulo 5.

2.2. O antirrealismo: nomes e definições

O antirrealismo engloba tanto o conceitualismo quanto o nominalismo, uma vez que, no que diz respeito à questão ontológica, ambas as correntes podem ser identificadas quanto ao seu “espírito”, sua inspiração original: o antirrealista subordina a existência dos objetos matemáticos à nossa capacidade de concebê-los. Se nosso foco estivesse centrado nas questões relativas à lógica matemática, a distinção entre nominalismo e conceitualismo seria mais importante. No momento, não se trata de algo que precisemos considerar em detalhe. Desse modo, para o antirrealista, não há que se falar em existências independentes de entes matemáticos: a existência do objeto matemático está na sua concepção, seja em nível meramente linguístico, seja em um nível conceitual a ele associado; em ambos os casos, o que

²⁰ (P1) “*We ought to be ontologically committed to all and only the entities that are indispensable to our best scientific theories.*” (P2) *Mathematical entities are indispensable to our best scientific theories*” (BUENO, 2003, p. 18).

o caracteriza é o fato de que sua realidade está diretamente associada ao exercício do intelecto. A profusão de caminhos que se desdobram a partir daí é extensa: é possível, através dessa perspectiva, conceber os entes matemáticos como nomes, conceitos, meras ficções, mas sempre denegando a eles qualquer existência fora do âmbito do pensamento. Os entes matemáticos, do ponto de vista do antirrealismo, são criações mentais que devem satisfazer ao que o intelecto deles exige e espera, como sugere o seguinte trecho:

Quais são os entes matemáticos aos quais nós atribuímos esse caráter de beleza e elegância, e que podem desenvolver em nós uma espécie de emoção estética? São aqueles onde os elementos estão dispostos harmoniosamente, de maneira que o espírito pode sem esforço compreender seu conjunto ao penetrar em seus detalhes. Essa harmonia é, por sua vez, uma satisfação para nossas necessidades estéticas e uma ajuda ao intelecto que ela apoia e guia. E, ao mesmo tempo, ao expor aos nossos olhos um todo bem ordenado, ela nos faz pressentir uma lei matemática.²¹

Como em tantos outros temas, o pensamento de Aristóteles no que diz respeito à realidade dos entes matemáticos opõe-se ao de Platão, e também se torna uma referência historicamente importante. Sua posição em relação às essências da matemática é explicitada na *Metafísica* (cf. ARISTÓTELES, *Metafísica*, 987b, 1001b), quando ele aborda especificamente a natureza do número. Sob certo ponto de vista, podemos dizer que Aristóteles considera a quantidade, expressa através dos números, como uma categoria anterior à própria substância, pois faz uma distinção entre a primazia que os objetos matemáticos apresentam no que diz respeito a sua definição, mas não à sua “substancialidade” (Ibid., 1077b). Resumidamente, a posição de Aristóteles articula-se dentro de um quadro onde qualquer remessa aos universais depende de suas instâncias particulares, individuais, donde decorre que os universais não existem atualmente, mas apenas enquanto abstrações derivadas dos entes concretos. Assim, apesar de também se tratar de uma teoria de cunho realista, o realismo de Aristóteles está subordinado a, digamos, sua participação nos seres particulares para subsistir. Há um entrelaçamento que exige um esforço de compreensão maior que a simplicidade da teoria platônica das Formas; esse esforço de compreender algumas passagens dúbias do Filósofo em relação à natureza dos universais²² rende quase dois mil anos de

²¹ « *Quels sont les êtres mathématiques auxquels nous attribuons ce caractère de beauté et d'élégance, et qui sont susceptibles de développer en nous une sorte d'émotion esthétique ? Ce sont ceux dont les éléments sont harmonieusement disposés, de façon que l'esprit puisse sans effort en embrasser l'ensemble tout en pénétrant les détails. Cette harmonie est à la fois une satisfaction pour nous besoins esthétiques et une aide pour l'esprit qu'elle soutient et qu'elle guide. Et en même temps, en mettant sous nos yeux un tout bien ordonné, elle nous fait pressentir une loi mathématique.* » (POINCARÉ, 1908, p. 58).

²² Um bom exemplo de como a obra de Aristóteles se presta a interpretações dúbias é a *Isagoge*, o comentário de Porfírio ao livro das *Categorias*. Sua intenção, ao abordar aquilo que concerne aos gêneros e espécies, remete ao

intensos debates. Resumidamente, portanto, a solução de Aristóteles quanto ao problema dos universais afasta-se da teoria platônica ao concebê-los como existentes apenas potencialmente, enquanto concede exclusivamente aos seres particulares realidade atual. Aristóteles condena a ideia de substâncias universais dotadas de existência independente na atualidade,²³ e, de maneira análoga, ao considerar a natureza das proposições, nega qualquer realidade aos universais separados de grupos de substâncias particulares.²⁴ Note-se: a primeira

“problema de saber se são realidades subsistentes em si mesmas ou apenas simples concepções do espírito e, admitindo serem realidades substanciais, se são corpóreas ou incorpóreas, se, enfim, estão separadas ou se subsistentes apenas nas coisas sensíveis, e junto a elas” (PORFÍRIO, 1965, p. 19-20). Porfírio se vê então em meio a um problema que esbarra todo o tempo em consequências que por vezes soam como lógicas, e outras vezes como ontológicas. Vide, por exemplo, o tratamento do gênero (Ibid., p. 37): trata-se de escolher entre defender a ideia de que existe um *conceito* aplicável a uma totalidade de coisas ou um *atributo essencial*, real, quicá corpóreo, aplicável a essa mesma realidade. Quando Porfírio dirige seu comentário à categoria denominada “espécie” a dificuldade parece então ainda maior: *“por sua participação à espécie, a multidão dos homens é apenas um só homem; ao contrário, pelos homens particulares, o homem único e comum torna-se múltiplo; o particular é sempre fator de divisão, e o que é comum, fator de similitude e de unificação”* (Ibid., p. 65-6). Fato é que encontramos na *Isagoge* um comentário às *Categorias* que soa muito mais platônico que aristotélico, e que é um ponto decisivo para o problema dos universais, por funcionar como uma estrutura conceitual presente em todo o período medieval. *«Les théories des Reales du XII siècle apparaissent comme l’expansion doctrinale d’un programme conceptuel fixé dans le formulaire porphyrien : la théorie réaliste de la collectio, discutée par Abelard n’est que la mise en argument de la formule de l’Isagoge. A l’autre extrémité du Moyen Age, la théorie de l’homme commun opposée à Occam par Gauthier Burley n’est qu’un raffinement de la notion porphyrienne de l’homme unique et commun.»* [As teorias dos Reales do século XII aparecem como expansão doutrinária fixada através das fórmulas de Porfírio: a teoria realista da *collectio* discutida por Abelardo não é nada além da apresentação argumentativa da fórmula contida na *Isagoge*. No outro extremo da Idade Média, a teoria do homem comum, contraposta a Ockham por Gauthier Burley, não é nada além de um refinamento da noção porfiriana de ‘homem único e comum’.] (LIBERA, 1966, p. 33).

²³ *“Obviously, then, the cause which consists of the Forms (taken in the sense in which some maintain the existence of the Forms, i.e., if they are something apart from the individuals) is useless, at least with regard to comings-to-be and to substances; and the Forms need not, for this reason at least, be self subsistent substances.”* [Obviamente, portanto, a causa que consiste nas Formas (tomada no sentido de que algo mantém a existência das Formas, isto é, como algo separado dos individuais) é inútil, ao menos com vistas a um vir a ser e às substâncias; e as Formas não precisam, ao menos por esse motivo, consistirem em substâncias existentes por si mesmas.] (ARISTÓTELES, *Metafísica*, 1033b). Vide também Aristóteles (Ibid., 991b).

²⁴ Em Aristóteles (*Segundos analíticos*, 85a). Como vemos, a dificuldade da interpretação guarda uma relação estreita com a doutrina da substância em Aristóteles, exposta sobretudo nas *Categorias*: *«Toute la problématique des universaux se développe donc, en fonction des supports autoritaires, soit comme une transgression permanente de Catégories, soit comme un effort pour sauver ‘les phénomènes’.* Ce n’est pas l’*Isagoge* de Porphyre qui commande le développement conceptuel, mais l’obscurité de la doctrine de la substance exposée dans *Catégories*, 2. Il fallait bien une Introduction à la doctrine des Catégories. Celle de l’*Isagoge* n’a pas suffi à dissiper les difficultés. Les premières solutions essayées au Moyen Age – admettre qu’il y a des choses prédiquées – comme les plus tardives – poser qu’il y a des structures conceptuelles (disons un ordre essentiel) inhérentes aux choses – n’ont fait que déployer à fond l’inconsistance des équations fondatrices.» [Toda a problemática dos universais se desenvolve então em função de defesas autoritárias, seja como uma transgressão permanente do livro dois das *Categorias*, seja como um esforço para salvar ‘os fenômenos’. Não é a *Isagoge* de Porfírio que comanda seu desenvolvimento conceitual, mas a obscuridade da doutrina da substância exposta nas *Categorias*. Uma introdução à doutrina das *Categorias* era necessária, mas a *Isagoge* foi insuficiente para dissipar suas dificuldades. As primeiras soluções ensaiadas na Idade Média – admitir que há coisas predicadas – assim como as soluções mais tardias – postular que há estruturas conceituais (digamos, uma ordem essencial) inerentes às coisas – não fazem mais que aprofundar a inconsistência das soluções originais.] (LIBERA, 1996, p. 32).

formulação é *metafísica*; a segunda, *linguística*; mas em se tratando de *realidades universais*, só há que se falar, no máximo, em uma espécie de potencialidade, e não mais que isso; cabe ainda ressaltar que, em Aristóteles, o devir, a potencialidade, alinha-se ao que ainda não é, ao não ser, de modo que não podemos propriamente conferir qualquer tipo de realidade factual aos universais.

Em parte devido ao laconismo de Aristóteles, o problema concernente à natureza dos universais é objeto recorrente de estudo de um extremo a outro da Idade Média, mas certamente os escritos de Pedro Abelardo, datados do século XII, são valiosos para o tema em questão. O autor, ao adotar uma postura nominalista, atribui aos universais um *status quid non est res*,²⁵ em um período que testemunhou a criação de dois termos que identificavam posições distintas acerca do problema dos universais: *reales* e *nominales*.²⁶ A partir desse sectarismo, tornam-se claras as concepções divergentes acerca da questão dos universais.²⁷ Os realistas do século XII têm como pressuposto básico a ideia de que os gêneros são coisas, ou seja, existe uma realidade concreta, palpável, a ser atribuída a eles, a exemplo da concepção absoluta dos gêneros que encontramos nas formas perfeitas de Platão. Há, portanto, uma consequência imediata desse posicionamento: o comprometimento com a tese de que há algo que antecede as existências dos seres particulares. Daí a necessidade de reconhecer que o indivíduo está em uma relação direta de predicação com seu respectivo gênero e espécie. *Coisas predicam de coisas*. As teses nominalistas, por sua vez, podem ser entendidas como uma contraposição direta às teses realistas: gêneros e espécies não têm, em absoluto, qualquer existência concreta; são, ao contrário, simplesmente nomes atribuídos genericamente a coisas particulares. Por esse motivo, não há que se conceber qualquer realidade que não aos seres particulares e, consequentemente, a predicação legítima não é de coisas para coisas; para o nominalista, *nomes predicam de nomes*.

²⁵ Um trecho de Abelardo é ilustrativo acerca de sua concepção em relação aos universais: “O significado dos universais (...) é sempre formado por meio da abstração. Quando eu ouço dizer homem, brancura ou branco, eu não me lembro pela força do nome de todas as naturezas ou propriedades que existem nas realidades substanciais, mas pela palavra homem tenho apenas a concepção, embora confusa, não distinta, de animal e de racional mortal. (...) Com efeito, os significados das coisas individuais formam-se por meio de abstração quando, por exemplo, se diz: esta substância, este corpo, este animal, este homem, esta brancura, este branco” (ABELARDO, 1973, p. 243).

²⁶ Existe uma discussão acerca da origem desses termos, o que parece soar como um verdadeiro problema ao diferenciar-se os *nominales* dos *nominalistae* (LIBERA, 1996, p. 136). Contudo, essa abordagem está fora de nosso objeto de estudo, cabendo apenas ressaltar a existência de uma contenda entre autores que professam teses realistas e outros que se alinham ao nominalismo.

O conceitualismo,²⁸ por sua vez, ganha força no século XIII, a partir dos averroístas latinos e da consequente recuperação do *corpus* aristotélico que ela propicia à Europa, com Siger de Brabant, cujas posições foram retomadas mais tarde de maneira primorosa por Guilherme de Ockham. Essa parece ser uma doutrina mais próxima da formulação contida na *Metafísica* de Aristóteles quanto aos universais, ao sustentar que “*o universal enquanto universal não é substância*”. Estes são conceitos delineados pelo espírito, e sua existência se resume a isso. Enquanto uma criação intelectual, o universal segundo os conceitualistas adota uma existência própria, separada dos particulares, mas que também está além de um simples nome. A relação de participação e separação que o realista concebe como algo que deve ser atribuído às próprias coisas, o conceitualista coloca entre aspas: é a ação do intelecto que pode encontrar nos particulares gêneros comuns, participações e singularidades. Ao *aplicar* um conceito a um conjunto de coisas, parece evidente que o mecanismo através do qual essas operações se processam é, acima de tudo, o da *abstração*. Desse modo, os universais só existem quando se apresentam como objetos mentais.²⁹

A doutrina kantiana é outra forte referência para o antirrealismo. Em Kant, toda a origem do conhecimento em geral, e da matemática em particular, resume-se a *juízos*, não havendo qualquer recurso a uma realidade externa propriamente dita, mas à maneira como os objetos externos afetam nossa sensibilidade. A bem conhecida distinção entre a coisa-em-si

²⁷ Nesse pormenor, sigo a interpretação de Libera (1996, p. 136-41).

²⁸ Cabe uma breve referência em relação a esse termo. Alguns autores simplesmente vêem no conceitualismo uma forma específica de nominalismo, como Spade, que toma Ockham, por exemplo, sob a alcunha de nominalista. Libera e Quine são dois autores que adotam a posição contrária. Vide Libera (1996), Quine (1953) e Spade (2002).

²⁹ “*What Ockham and fourteenth-century nominalists in general do, in a sense, is to take the realists’ notion of a universal entity, and transfer it into the mind, where it becomes the notion of a universal concept. A universal concept is of course not universal at all in any metaphysical sense of the word. But, since concepts are terms in mental language, a universal concept is universal in the other sense — it can be predicated of many. Thus, the only kind of ‘universals’ Ockham will allow are universal terms. These are, primarily and most basically, general concepts in the mind, and then, secondarily and derivatively, the spoken or written terms subordinated to such general concepts. Such terms — spoken, written or mental — are ‘universal’ only in the logical sense; they are universal by signification or predication. There are no common natures out there in reality.*” [O que Ockham e os nominalistas do século XIV em geral fazem, em certo sentido, é adotar a noção dos realistas de uma entidade universal, e transferi-la para a mente, onde se torna a noção de um conceito universal. Um conceito universal não é, naturalmente, universal no sentido metafísico da palavra. Mas, uma vez que os conceitos são termos da linguagem mental, um conceito universal é universal em outro sentido: ‘que pode ser predicado de muitos’. Assim, o único tipo de ‘universais’ que Ockham permitirá são termos universais. Estes são, em primeiro lugar e mais fundamentalmente, conceitos gerais na mente, e, em seguida, em segundo lugar e consequentemente, os termos falados ou escritos subordinados a tais conceitos gerais. Tais condições - falada, escrita ou mental - são ‘universais’ somente no sentido lógico, pois eles são universais pela significação ou predicação. Não há naturezas comuns lá fora, na realidade.] (SPADE, 2002, p. 147).

incognoscível e o fenômeno que é objeto de conhecimento já exclui a possibilidade de qualquer recurso *direto* à exterioridade, uma vez que nossas experiências sensíveis estão determinadas pelas formas de sensibilidade do sujeito cognoscente. Desse modo, todo o conhecimento constitui-se por uma reunião de conceito e intuição sensível, pois “o conceito sem a intuição é vazio; a intuição sem o conceito é cega” (KANT, 1781, p. 89), e não tem outro *locus* senão no intelecto. Portanto, até mesmo no caso em que o “sensível” entra em cena, ele está subordinado, determinado, dirigido pela ação do intelecto, através de suas formas de sensibilidade, que caracterizam sua estrutura peculiar, conforme a bem conhecida teoria elaborada na *Estética transcendental* da *Crítica da razão pura*. O conhecimento humano assume assim um caráter ideal, a partir do que os binômios análise³⁰/síntese³¹, e *a priori/a posteriori* vêm especificar o conteúdo e a origem desses juízos.³² No caso específico da matemática, todo o conhecimento é reduzido a juízos sintéticos *a priori*, mas com um tratamento bastante distinto entre os objetos da aritmética e os da geometria. Como não se trata de um trabalho específico acerca de Kant, podemos passar ao largo do trato mais preciso de seus argumentos, para nos atermos apenas à forma como ele introduz as linhas mestras para uma perspectiva antirrealista na matemática.

³⁰ Em termos gerais, o âmbito do *analítico* remete aos juízos de cunho lógico ou linguístico, algo que não exige uma extrapolação do próprio conceito, ao contrário do juízo sintético, cuja característica é exatamente essa. Um juízo analítico é, em termos gerais, aquele em que o predicado já se encontra descrito no próprio conceito do sujeito (como a definição de triângulo já implica em sua descrição). Nesses termos, há dois constituintes para a consideração dos juízos analíticos que não nos podem escapar: em primeiro lugar, seu determinismo lógico; em segundo lugar, a presença, ainda que incômoda, de constituintes psicológicos para sua determinação, uma vez que o juízo propriamente dito não pode escapar de seus constituintes psicológicos. Como ressalta Folina (1992, p. 3), a teoria da analiticidade, apesar de seu apelo psicológico, pode ser compreendida como uma teoria sobre o conteúdo de nossas expressões, bem como pode ser descoberta apenas pelo emprego da lógica e de definições.

³¹ O juízo sintético, por sua vez, remete a uma ampliação do conceito em questão. Como Hume argutamente já tornara claro, nada há no conceito de luz que *necessariamente* estabeleça uma ligação com o conceito de calor. Essa relação imediata, ou melhor, *aparentemente* imediata, é produzida a partir de uma síntese entre esses dois conceitos, pois nada há no primeiro que torne necessário o segundo. Desse modo, delineia-se minimamente o que Kant entendia por juízo sintético. Todas as teorias físicas, ao transcenderem a mera explicitação de conceitos, implicam em juízos sintéticos, uma vez que a experiência sensível é a fonte primaz para a consideração da viabilidade dessa relação que se estabelece. Nesse contexto, o caráter apriorístico do juízo analítico nada tem de problemático, por encontrar-se restrito ao campo conceitual, lógico-linguístico. O juízo sintético *a posteriori* também não encontra maiores dificuldades para seu delineamento, uma vez que a extensão prometida pela síntese encontra na experiência sensível a fonte à qual recorrer.

³² Segundo Folina (1992, p. 4), enquanto a distinção entre analiticidade e sinteticidade é linguística no que diz respeito ao conteúdo das proposições (ou juízos), a distinção entre *a priori/a posteriori* é epistemológica, e diz respeito a como chegamos a conhecer uma verdade e como podemos justificar nossas crenças e asserções. O problema se impõe ao considerarmos a natureza e a possibilidade dos juízos sintéticos *a priori*. A fantástica estrutura conceitual que compõe a *Primeira Crítica* é sabidamente uma resposta a essa questão formulada em poucas palavras.

A argumentação que delineia a matemática como um conhecimento sintético e *a priori* é descrita com maior propriedade no texto dos *Prolegômenos* que na *Estética transcendental*. Ali, a estrutura conceitual empregada por Kant aparece com clareza: o fato de a matemática ser constituída por juízos dessa natureza tem uma relação direta com a origem ideal do conhecimento sintético *a priori*, e com a subordinação às formas de sensibilidade, espaço e tempo: no tempo, encontramos a base da aritmética; no espaço, a da geometria. A forma da intuição de espaço, *a priori*, é anterior a toda experiência sensível (e, portanto, antecede as próprias intuições sensíveis), e, assessorivamente, *conditio sine qua non* da representação dos objetos sensíveis:

O espaço é uma representação necessária, *a priori*, que fundamenta todas as intuições externas. Não se pode nunca ter uma representação de que não haja espaço, embora se possa perfeitamente pensar que não haja objeto algum no espaço. Consideramos, por conseguinte, o espaço a condição de possibilidade dos fenômenos, não uma determinação que dependa deles; é uma representação *a priori*, que funda necessariamente todos os fenômenos externos (KANT, 1781, p. 64-5).

A geometria, por sua vez, é a ciência que determina, sinteticamente e *a priori*, as propriedades desse espaço, pois não pode ser derivada de simples conceitos, mas requer necessariamente uma intuição que permita a síntese desses conceitos. Há, portanto, um fundamento mais sólido que o mero acúmulo de experiências individuais, uma base para o estudo das formas geométricas e sua posição no espaço que transcende a *empíria*. As proposições da geometria, enquanto concebidas dessa maneira, não são válidas impõem senão ao âmbito dos objetos dos sentidos. O espaço deixa de ser o lugar dos objetos concretos para tornar-se uma forma através da qual nossa sensibilidade articula nossas experiências e, por isso, a geometria, fundada diretamente na intuição pura de espaço, encerra nossa *perspectiva* em relação ao mundo sensível. O exemplo em relação a uma geometria diferente da tridimensional é oportuno: segundo Kant, apesar de um conjunto de asserções acerca de um espaço quadridimensional não apresentar necessariamente contradições lógicas, ele contradiz a estrutura estabelecida como forma de experiência *a priori* (cf. KANT, 1783, p. 52-3).³³

³³ Parece difícil sustentar a viabilidade da tese de Couturat que diz respeito à possibilidade de compreender a concepção de geometria kantiana como em perfeita harmonia em relação às geometrias não euclidianas, uma questão difícil e que mereceria um delineamento preciso. Apesar de Kant ser específico como no excerto acima, há realmente outras passagens que sugerem a possibilidade de não pensar em uma única estrutura geométrica possível, por exemplo, a partir do momento em que temos um modelo de geometria que denega os princípios de Euclides e que pode ser tomado como uma forma de receptividade dos objetos pelo sujeito (KANT, 1871, p. 69), mas é um tanto fantasioso sugerir que Kant efetivamente pensava em algo dessa natureza. Assim, a estratégia de Couturat traveste-se de uma tentativa de salvar *in extremis* a compatibilidade do pensamento de Kant com as geometrias não euclidianas, mas pouco tem realmente de sua inspiração original. Vide nota 4 do capítulo 4.

Do mesmo modo que o espaço, o tempo é uma forma pura de sensibilidade, condição prévia e *a priori* para as representações e fundamento de *todas* as intuições sensíveis, tendo, portanto, um alcance maior que o da intuição intelectual de espaço (KANT, 1871, p. 70). Ao tempo, Kant reserva o *status* de condição formal e *a priori* de todos os fenômenos. O próprio conceito de número é uma decorrência da intuição de adição sucessiva de unidades de tempo; à intuição de “momento”, unidade de tempo, associa-se o conceito de número. A série dos naturais e as operações fundamentais da aritmética são criações conceituais que representam desdobramentos naturais da intuição originária de tempo (KANT, 1783, p. 51).

A questão da construtibilidade na concepção matemática kantiana sugere uma temática interessante. Segundo Kant, na matemática nós obtemos conclusões tanto do que é dado pelo conceito quanto do que é dado pela ‘construção’ do conceito. Uma vez que nós os estamos construindo (linhas, pontos, triângulos), somos guiados em nossas provas por intuição e pela síntese da imaginação; assim, nossas inferências são sintéticas. Mas uma vez que a intuição que nos guia não é empírica, a síntese se refere a uma ‘imagem’ *a priori*, e nossas inferências ou juízos são sintéticos *a priori*, motivo pelo qual a análise conceitual por si só é inadequada à matemática como um todo, mas na geometria especialmente (cf. FOLINA, 1992, p. 21-2). Todavia, se na geometria temos o desenrolar desse processo, quando nos referimos à aritmética, não se pode falar propriamente de uma construção de objetos em sentido estrito. O emprego do termo é metafórico, pois remete a um tipo de imaginação espacial encontrada apenas nas formas da geometria. Assim, não é sem esforço que podemos identificar a semelhança da possibilidade de traçar uma linha com a possibilidade de conceber um objeto matemático com determinadas propriedades e reconhecer que a elaboração da segunda concepção, de algum modo, segue a primeira. Em suma, a natureza do conhecimento matemático está diretamente calcada na construção de conceitos com base em intuições, mas essas construções são individuais, ainda que a elas atribua-se o *status* de uma validade geral,³⁴ a existência dos objetos matemáticos decorre de sua efetiva construção.

A construtibilidade dos objetos matemáticos é uma noção levada ao extremo por Brouwer, dentro do contexto da reformulação da matemática pretendida pelo intuicionismo. As bases de um construtivismo estrito levam, como vimos no capítulo anterior, à reelaboração

³⁴ Mooij (1966, p. 120) argumenta que a matemática é um conhecimento da razão por construção de noções. Assim, o ato de construir uma noção é o de estabelecer *a priori* a intuição que a ela corresponde. A intuição

da matemática que se mostra muitíssimo mais ousada que os modelos kantiano e semi-intuicionistas. Sua exigência no que concerne ao princípio do terceiro-excluído é emblemática e traz à tona uma questão que, podemos considerar, impulsiona o debate ontológico: até Brouwer, o realismo ou o antirrealismo não traziam consequências importantes à teoria matemática, pois o posicionamento ontológico soava muito mais como inspiração que como critério para a teoria matemática. Como já indicamos, o trabalho de Brouwer pareceu indicar que o ato de sustentar a matemática clássica *implicava*, de alguma maneira, no comprometimento com uma doutrina de cunho realista, enquanto que, por outro lado, uma postura antirrealista tinha como consequência natural a restrição dos objetos matemáticos à sua efetiva construção mental,³⁵ rejeitando, por conseguinte, parte considerável da matemática *standard*. O que se percebe a partir daí é que o antirrealismo, em suas manifestações mais importantes, assume um cunho reformista da matemática clássica, na tentativa de moldá-la de acordo com seus padrões. Assim, a pergunta a ser formulada ao revisionismo característico do antirrealismo pós-brouweriano refere-se à pertinência da reconstrução da matemática clássica (malgrado sua aplicabilidade e poder explicativo quando bem associada às teorias físicas) com o único propósito de objetar teses de cunho realista.

Há autores que se enveredam por esse caminho,³⁶ justificando sua atitude em uma necessidade de alinhar o “produto final” à nossa “capacidade produtiva”: partindo da premissa de que a matemática é apenas um conjunto de definições, nomes ou conceitos, a adoção de uma perspectiva de natureza antirrealista, por abrir mão deliberadamente de qualquer conceito

pura, enquanto intuição de um único objeto, deve exprimir através de sua representação a validade geral de toda sorte de intuições que recaem sobre a mesma noção.

³⁵ Note-se que há uma inversão, e que ela não é casual: a matemática clássica tende a levar ao realismo; o antirrealismo, por sua vez, deságua mais naturalmente na matemática construtivista. Nesses dois pares, o realismo pode ser visto como consequência, e o antirrealismo, por sua vez, como causa. Essa inversão será importante para o caminho que pretendemos percorrer.

³⁶ Como exemplo dessa tendência revisionista na matemática, podemos citar, claro que com variações importantes, os trabalhos de Dummet, Chihara e Field, os autores mais destacados dessa linha. Em termos gerais, a argumentação de Dummet se baseia numa tentativa de efetuar uma interpretação semântica da matemática enquanto produto do intelecto humano, algo que se distancia do pensamento de Brouwer por dissociar a verdadeira matemática da linguagem que a expressa (BROUWER, 1907, p. 94). Hartry Field, por sua vez, em seu *“Science Without Numbers”* (*“Ciência sem Números”*) lança-se à tentativa de mostrar a possibilidade de defender princípios da física e da geometria sem recorrer a números. Chihara, por sua vez, é uma meia-exceção; o autor aborda o problema a partir das construções lógicas associadas à matemática, apresentando uma lógica modal que serve de sustentação à matemática através da qual os enunciados, centrados no conceito de possibilidade, não nos prendam a qualquer tipo de compromisso ontológico. Em suma, uma posição antirrealista e, ao mesmo tempo, não revisionista, parece algo de difícil aceitação, em vista do cenário apresentado. Todavia, minha tese é articulada com intuito de propiciar uma alternativa viável a essa posição, mas não sob uma

que não seja passível de uma construção precisa, compromete-se também com um rol mais restrito em termos do que é aceitável dentro do universo matemático. Todavia, os autores dessa linha têm que se defrontar principalmente, em nível teórico, com o *argumento de indispensabilidade*, que sustenta a perspectiva realista e, em nível prático, com a posição de uma *philosophy-last-if-at-all*, que questiona a legitimidade de um reformismo de cunho filosófico na matemática. A força do argumento de indispensabilidade reclama um compromisso ontológico em relação à teoria. Cabe, portanto, explicar como a matemática encontra uma aplicação tão precisa e direta nas ciências naturais, se ela é apenas um conjunto de conceitos que não guarda qualquer relação com a realidade. Os autores da segunda metade do século XX, por sua vez, procuraram formas alternativas de solucionar o problema, dentre as quais a de Hartry Field é certamente a mais emblemática: seu ataque não é dirigido à matemática, mas à ciência como um todo: contra praticamente toda a tradição científica desde o século XVII, ele procura argumentar em favor de uma ciência qualitativa, que prescindia da aplicação de números e grandezas matemáticas, com o intuito de mostrar que essa relação entre a física e a matemática é possível e cômoda, mas não necessária (cf. SHAPIRO, 2000, p. 229). Demonstrada a possibilidade de assim proceder, resta a questão relativa à viabilidade dessa empreitada: até que ponto podemos efetivamente esperar a desconstrução da ciência apenas para que se reconheça a inexistência de números enquanto entidades independentes do intelecto? Aos nossos olhos, parece uma atitude injustificada.

2.3. O comprometimento ontológico: definições, predicatividade e o infinito

Faremos aqui uma breve exposição de como a aceitação da tese do compromisso ontológico ou sua recusa passam a impor critérios para a elaboração das teorias matemáticas. Antes disso, porém, é preciso observar que não podemos legitimamente dissociar a atividade e a criação científicas de seu processo de desenvolvimento, de modo que qualquer tentativa de interpretação passa por questões inerentes à inserção histórica dos problemas visados. Logo, é fato sabido que os padrões e critérios de aceitabilidade das teorias podem vir a sofrer metamorfoses significativas, como, por exemplo, as verificadas em relação ao conceito de existência matemática no curso do século XIX:

perspectiva centrada na lógica, como a de Chihara, ou com a filiação de cunho intuicionista verificada em Dummett; meu foco está centrado especialmente nos problemas inerentes à semântica e à epistemologia.

Os três estágios seguintes podem ser observados no desenvolvimento do conceito de existência (matemática):

1. Existência – disponibilidade de um modelo intuitivo (até aproximadamente o início do século 19);
- 2 a. Existência – redutibilidade em termos de números reais através de recursos analíticos (primeiro estágio do programa de aritmetização – Cauchy);
- 2 b. Existência - redutibilidade em termos de números naturais através de recursos analíticos (segundo estágio do programa de aritmetização - Kronecker, Weierstrass, Cantor, Dedekind);
3. Existência – compatibilidade com um sistema de axiomas (HILBERT, 1900).

Os estágios 2 e 3 têm em comum o fato de tratarem a “existência” como um metapredicado, que pode ser compreendido como a identificação dos conjuntos de regras axiomáticas. Desse modo, “existência”, nesse campo descritivo, refere-se (em sentido amplo) a entidades da linguagem. Por outro lado, quando nos encontramos no primeiro grau, o campo do objeto, “existência” refere-se então a algo não verbal, a algo que indica uma atividade de construção. De acordo com a variação do caráter indicado, variam os diferentes estágios. No primeiro estágio, estamos tratando com ícones, enquanto nos estágios 2 e 3, estamos tratando com símbolos.³⁷

O trecho deixa claro não apenas o desenvolvimento do conceito em tela, mas também a orientação do seu autor. Um realista poderia descrever o mesmo fenômeno como um esforço de alçar a disciplina a um maior grau de perfeição, representado, em última análise, por sua estrutura axiomática. Volkert adota outra postura, deixando à penumbra o fato de que é perfeitamente compatível com esse desenvolvimento do conceito a referência a entidades da linguagem que remetem efetivamente a entes (argumento que sustentaria uma tese realista, por exemplo). Em outros termos, o desenvolvimento do conceito de existência na matemática contemporânea não traz necessariamente qualquer obrigatoriedade de restringir os objetos matemáticos a traços linguísticos. Se assim fosse, simplesmente não haveria meios de sustentar uma postura realista. O problema é mais sutil, e envolve o *status* a ser atribuído às definições com as quais opera a matemática, e, conseqüentemente, com o problema da verdade. É possível até mesmo considerar que as dificuldades em relação aos fundamentos se encerram na questão acerca de qual o tipo de definição a que o conhecimento matemático

³⁷ „Folgenden drei Stufen lassen sich also in der Entwicklung des Existenzbegriffes unterscheiden:

1. Existenz -Verfügbarkeit eines anschaulichen Modells (bis etwa Beginn des 19. Jahrhunderts);
- 2 a. Existenz – Zurückführbarkeit mit analytischen Hilfsmitteln auf die reellen Zahlen (erste Stufe des Arithmetisierungsprogrammes; z.B. Cauchy);
- 2 b. Existenz – Zurückführbarkeit mit analytischen Hilfsmitteln auf die natürlichen Zahlen (zweiten Stufe des Arithmetisierungsprogrammes; z. B. Kronecker, Weierstrass, Cantor, Dedekind);
3. Existenz – Widerspruchsfreiheit einer Menge von Axiomenschemata (Hilbert, ab1900)

Den Stufen 2 und 3 ist gemeinsam, dass sie ‚Existenz‘ als Metaprädikat behandeln, das Kennzeichnungen bzw. Mengen von Axiomenschemata zugesprochen werden kann. Damit gehört ‚Existenz‘ in die Beschreibungsebene, den sie bezieht sich auf sprachliche (in weitesten Sinne) Entitäten. Dagegen befinden wir uns in 1 auf der Gegenstandsebene. ‚Existenz‘ bezieht sich hier auf etwas Nichtsprachliches, nämlich auf Zeichenherstellungshandlungen. Entsprechend variiert der Zeichencharakter auf den verschiedenen Stufen. In 1 haben wir es mit Ikonen zu tun, während bei 2 und 3 die Symbole überwiegen“ (VOLKERT, 1986, p. 199). Vide ainda a distinção entre ícone e símbolo no capítulo 4.

pode e deve recorrer. Tarski, por exemplo, é um autor que procura delinear um conceito neutro de verdade em relação a uma ontologia subjacente:

Argumentou-se que - devido ao fato de uma sentença como ‘a neve é branca’ ser tomada como semanticamente verdadeira se a neve é, *de fato*, branca (grifos do crítico) - a lógica encontra-se envolvida em um realismo muito pouco crítico. (...) De fato, a definição semântica de verdade não implica nada a respeito de condições sob as quais uma sentença como (1):

(1) a neve é branca.

possa ser afirmada. Ela implica apenas que, em quaisquer circunstâncias que afirmemos ou neguemos essa sentença, devemos estar prontos para afirmar ou negar a sentença correlata (2):

(2) a sentença ‘a neve é branca’ é verdadeira.

Assim, podemos aceitar a concepção semântica de verdade sem abandonar qualquer atitude epistemológica que possamos ter tido. Podemos permanecer realistas ingênuos, realistas críticos ou idealistas, empiristas ou metafísicos – seja lá o que tenhamos sido antes. A concepção semântica é completamente neutra em relação a todas essas questões (TARSKI, 2007, p. 189-90).

No capítulo 5 teremos a oportunidade de discutir o motivo pelo qual não consideramos suficiente uma concepção de verdade dessa natureza. Por hora, com o intuito de elucidar os contrastes entre essas posições, discutiremos o modo como alguns autores sustentam sua argumentação acerca das noções de infinito e da predicatividade matemáticos.

Um debate ocorrido entre matemáticos franceses acerca do estatuto do axioma da escolha ilustra o papel central da natureza das definições, que, podemos dizer, trata-se de uma releitura do debate ontológico relativo às definições reais e nominais.³⁸ De um lado, Borel, Lebesgue e Baire impõem sérias restrições à aceitação do axioma da escolha, sobretudo porque se trata de um postulado que nada esclarece acerca de como efetuar aquilo que eles asseveram quando aplicado às séries transfinitas.³⁹ Malgrado os enganos cometidos (como a incompreensão da incomensurabilidade entre séries infinitamente enumeráveis e séries

³⁸ “Discussions of ‘nominal’ and ‘real’ definitions go back at least to the nominalist/realist debates of 14th century. Pascal’s application on the distinction is interesting for the emphasis that it laid on mathematical definitions being nominal and on the usefulness of nominal definitions. Although the Port-Royal logic itself contained no symbolism, the philosophical foundation for using symbols by nominal definitions was nevertheless laid.” [As discussões sobre definições ‘nominais’ e ‘reais’ remontam pelo menos aos debates entre nominalistas e realistas do século 14. O emprego dessa distinção em Pascal é interessante, dada a ênfase colocada nas definições matemáticas enquanto definições nominais, bem como na utilidade das definições nominais. Embora a lógica de Port-Royal não contivesse simbolismos, continha a base filosófica para a utilização de símbolos por meio de definições nominais.] (DIPERT, 1993, p. 269).

³⁹ « Pour moi, le progrès, dans cet ordre d’idées, consisterait à délimiter le domaine de ce qui est définissable. Et, en fin de compte, en dépit des apparences, tout doit se ramener au fini. » [Para mim, o progresso, nesse sentido, seria o de delimitar o âmbito do que é definível. E, ao final, não obstante as aparências, tudo deve restringir-se ao finito.] (BAIRE apud BOREL, 1904, p. 152).

transfinitas apontada por Hadamard⁴⁰), os argumentos desses autores giram ao redor do clamor pela perfeita construtibilidade e pela efetiva possibilidade de veiculação de conteúdo de uma definição. A posição desses matemáticos remete sempre à necessidade de ater-se a um universo discursivo-conceitual, quando Baire e Lebesgue exigem uma definição específica para os objetos tratados, posição tacitamente corroborada por Borel (cf. BOREL, 1904, p. 151, 153, 158), parecendo evidente a filiação das escolhas na matemática como subordinadas às regras da linguagem que refletem, em última análise, as regras do pensar. Jacques Hadamard, entretanto, posiciona-se efetuando a distinção entre a *definição* e a *descrição* de relações matemáticas. Com essa distinção preliminar, ele mostra que há, na busca por uma efetiva descrição, um esforço desnecessário: a descrição está diretamente ligada à determinação efetiva, enquanto o que realmente importa é a possibilidade de postular a existência da série, no caso específico do axioma da escolha. Segundo Hadamard, portanto, não há necessidade de uma correspondência entre, de um lado, os objetos e as provas matemáticas e, de outro, nossa capacidade de efetiva compreensão de suas teses que extrapole os limites da mera definição.⁴¹ É declaradamente a ciência acerca da qual não sabemos do que estamos falando. A matemática não se limita àquilo que podemos *efetivamente* conceber.

Essa perspectiva poderia conduzir-nos à sugestão de que é nos limites da não contradição que Hadamard encontra o critério para a existência dos objetos matemáticos,

⁴⁰ « Je n'admit pas, tout d'abord, l'assimilation que tu établis entre le fait qui sert de point de départ à Zermelo et le raisonnement qui consisterait à numéroter les éléments de l'ensemble les uns après les autres, ce numérotage étant poursuivi transfiniment. Il y a, en effet, une différence fondamentale entre les deux cas : le raisonnement qui vient d'être cité en dernier lieu comporte une série de choix successives dont chacun dépend des précédents : c'est pour cela que son application transfinie est inadmissible. Je ne vois aucune analogie à établir, au point de vue qui nous occupe, entre les choix en question et ceux dont parle Zermelo, lesquels sont indépendants les uns des autres. » [Eu não admito, por exemplo, a assimilação que o senhor estabelece entre o fato que serve como ponto de partida para Zermelo e o raciocínio que consistiria em enumerar os elementos de um conjunto um após outro, devendo essa enumeração prosseguir *transfinitamente*. Há, com efeito, uma diferença fundamental entre os dois casos: o raciocínio citado por último comporta uma série de escolhas sucessivas onde cada uma depende das precedentes; por isso sua aplicação transfinita é inadmissível. Eu não vejo qualquer analogia a estabelecer, do ponto de vista que nos ocupa, entre as escolhas em questão e aquelas de que fala Zermelo, que são independentes umas das outras.] (HADAMARD apud BOREL, 1904, p. 150).

⁴¹ “Why should the quest for truth and understanding be part of psychology? Frege would be horrified at the idea; and so would Aristotle. Discovering the structure of reality is a serious business for these people, and proof is the main instrument for it. Proof is exploratory, as well as justificatory. How else can we reach truth?” [Por que a questão da verdade e do entendimento deveria ser parte da psicologia? Frege ficaria horrorizado com essa ideia, assim como Aristóteles. Descobrir a estrutura da realidade é uma tarefa séria para essas pessoas, e a prova é o principal instrumento para isso. A prova é exploratória, bem com justificativa. De que outro modo podemos alcançar a verdade?] (CHATEAUBRIAND, 2005, p. 432).

assim como sugerem Hilbert (cf. capítulo 1, seção 1.4) e Poincaré.⁴² Contudo, o autor recusa-se a aceitar até mesmo a determinação lógica como critério apto a determinar a existência de objetos matemáticos: a consistência, assim como a definição desses objetos, *deriva* de sua existência (cf. MOOIJ, 1966, p. 76), motivo pelo qual, para ele, assim como para Frege, a preocupação de Hilbert quanto à consistência de sistemas matemáticos é secundária. Ele chega a defender a possibilidade de demonstrar a existência de um ente matemático até mesmo sem defini-lo: a lógica, ou mais especificamente, o princípio de não contradição, é tomado por Hadamard como pertencendo aos domínios da psicologia, que subordina a existência a uma forma peculiar de operação de nossa mente (HADAMARD apud BOREL, 1904, p. 156), quando na verdade os objetos matemáticos transcendem esses limites estreitos (note-se ainda que o termo existência aqui escapa completamente ao contexto de significação traçado acima por Klaus Volkert). O advento dos paradoxos é explicado do ponto de vista da aplicação indevida da linguagem que descreve essas realidades, como, por exemplo, a dificuldade suscitada pela antinomia de Burali-Forti, quando a própria definição de conjunto é imprecisa: utiliza-se uma definição que supõe um conjunto em construção quando licitamente só podemos formar um conjunto com objetos previamente existentes (Ibid., p. 157).

Uma discussão semelhante é travada entre Poincaré e Russell em relação ao *status* do princípio de indução completa. Para Russell, o princípio de indução completa não vem a ser mais que uma definição disfarçada de número inteiro e que, enquanto tal, pode ser reduzida apenas a juízos analíticos, posicionamento este inaceitável para Poincaré, dada a importância

⁴² « *Stuart Mill a prétendu que toute définition contient un axiome, puisqu'en définissant on affirme implicitement l'existence de l'objet défini. C'est aller beaucoup trop loin ; il est rare qu'en mathématiques on donne une définition sans la faire suivre par la démonstration de l'existence de l'objet défini, et quand on s'en dispense, c'est généralement que le lecteur y peut aisément suppléer. Il ne faut pas oublier que le mot existence n'a pas le même sens quand il s'agit d'un être mathématique et quand il est question d'un objet matériel. Un être mathématique existe, pourvu que sa définition n'implique pas contradiction, soit en elle-même, soit avec les propositions antérieurement admises.* » [Stuart Mill propôs que toda definição contém um axioma, pois o ato de definir afirma explicitamente a existência do objeto definido. Isso, todavia, é ir longe demais; raramente na matemática introduz-se uma definição sem que se siga a demonstração do objeto definido, e quando ela é dispensada, o é geralmente porque o leitor pode facilmente provê-la. Não se pode esquecer que o termo 'existência' não tem o mesmo sentido quando aplicado a um ente matemático e quando está em questão um objeto material. Um ente matemático existe desde que sua definição não implique em contradição, seja em si mesma, seja em relação às proposições anteriormente admitidas.] (POINCARÉ, 1902, p. 70). Um outro trecho do autor corrobora esse posicionamento: « *Toute définition implique un axiome, puisqu'elle affirme l'existence de l'objet défini. La définition ne sera donc justifiée, au point de vue purement logique, que quand aura démontré qu'elle n'entraîne pas de contradiction, ni dans les termes, ni avec des vérités antérieurement admises.* » [Toda definição implica em um axioma, pois ela afirma a existência do objeto definido. A definição não será então justificada, do ponto de vista exclusivamente lógico, a não ser quando restar demonstrado que ela não acarreta uma contradição, nem em relação a seus termos, nem em relação às verdades anteriormente admitidas.] (POINCARÉ, 1908, p. 139).

capital que ele atribui a esse princípio, e que, a seus olhos, encerra o raciocínio matemático por excelência.⁴³ Segundo Poincaré, o princípio de indução completa é mais que uma regra lógica para formar sequências de números inteiros e, portanto, mais que uma definição disfarçada; segundo ele, a característica mais fundamental do princípio da indução é a possibilidade de transformar uma repetição silogística em uma totalização que supera o procedimento analítico. Esse “salto” faz do princípio de indução completa um postulado indemonstrável, que denota uma propriedade comum a todos esses números e torna explícito o caráter sintético do raciocínio matemático.

Logo, o referido princípio não se resume a uma definição. Para Poincaré, uma definição matemática atende a demandas diferentes das existentes nas ciências naturais. As definições, para as ciências formais, devem ser proposições que garantam a não contradição daquilo que é enunciado.⁴⁴ Nas ciências naturais, não basta satisfazer a não contradição, mas exige-se também a existência real daquilo que é definido, o que torna fundamental a corroboração empírica da teoria. Assim, bastaria a demonstração da não contradição da proposição acima para assegurar sua viabilidade, pois o problema relativo à existência real daquilo que está supostamente sendo definido não entra em jogo. Ocorre que a impossibilidade de demonstrar analiticamente o princípio da indução completa que nos impede de tomá-lo como uma definição.⁴⁵ A base fundamental da matemática não pode,

⁴³ « *Le principe d'induction ne signifie pas que tout nombre entier peut être obtenu par additions successives ; il signifie que pour tous les nombres que l'on peut obtenir par additions successives, on peut démontrer une propriété quelconque par voie de récurrence. Un nombre peut être défini par récurrence ; sur ce nombre on peut raisonner par récurrence ; ce sont deux propositions distinctes. Le principe d'induction ne nous apprend pas que la première est vraie, il nous apprend que la première implique la seconde. Voilà la confusion qu'a faite M. Russell, et voilà qui explique comment il a pu sans s'en apercevoir avancer une définition qu'il était incapable de justifier en démontrant qu'elle était exempte de contradiction.* » [O princípio de indução não significa que todo número inteiro pode ser obtido a partir de adições sucessivas; ele significa que, para todos os números que se pode obter por adições sucessivas, pode-se demonstrar uma propriedade qualquer através da repetição. Um número pode ser definido por repetição; sobre esse número pode-se raciocinar por repetição; essas são duas proposições distintas. O princípio de indução não nos mostra que a primeira é verdadeira. Ele nos mostra que a primeira implica a segunda. Eis a confusão que faz o Senhor Russell, e é isso que explica como ele pode, sem se aperceber, propor uma definição que ele é incapaz de justificar e de demonstrar que é isenta de contradição.] (POINCARÉ, 1986[1905], p. 34).

⁴⁴ Exceção feita aos sistemas formais baseados em lógicas não-clássicas, como as lógicas paraconsistentes, que não existiam no momento em que se desenvolve o debate entre Poincaré e os logicistas. Seu desenvolvimento é posterior, a partir dos trabalhos de Lukasiewicz e Vasiliev (BUENO, 1997, p. 98).

⁴⁵ « *Un nombre entier est celui qui peut être obtenu par additions successives, c'est celui que l'on peut définir par récurrence. Cela posé, qu'est-ce que nous faisons ? Nous montrons que s'il n'y a pas eu de contradiction n° syllogisme, il n'y en aura pas davantage au n+1° et nous concluons qu'il n'y en aura jamais. Vous dites : j'ai le droit de conclure ainsi, parce que les nombres entiers sont par définition ceux pour lesquels un pareil raisonnement est légitime ; mais cela implique une autre définition du nombre entier et qui est la suivante : un*

portanto, remeter apenas a suas premissas lógicas (e, consequentemente, ao realismo que lastreia a perspectiva logicista). É, ao contrário, associado ao poder criativo do intelecto que o princípio de indução completa encontra sua legitimidade e sua força:

Por que essa solução se impõe a nós através de uma evidência irresistível? Porque ela é apenas a afirmação do poder de nossa mente que sabe ser capaz de conceber indefinidamente por meio de uma repetição o mesmo ato, se esse ato é possível ao menos uma vez. A mente possui uma intuição direta desse poder, e a experiência não pode ser mais que uma ocasião de se servir dele e, a partir disso, dele tomar consciência.⁴⁶

A polêmica em torno do *status* das definições em matemática acaba por lapidar o conceito de predicatividade, articulado principalmente como resultado do intenso debate entre Poincaré e Russell travado entre 1905 e 1912. O efetivo interesse em relação a essa característica dos postulados matemáticos nasce com os paradoxos, uma vez que é recorrente na matemática clássica o emprego de definições não predicativas (como o emprego da própria noção de número incomensurável, por exemplo).⁴⁷ A dificuldade suscitada pelos paradoxos

nombre entier est celui sur lequel on peut raisonner par récurrence ; (...) *Les deux définitions ne sont pas identiques ; elles sont équivalentes sans doute, mais elles le sont en vertu d'un jugement synthétique a priori ; on ne peut pas passer de l'une à l'autre par des procédés purement logiques.* » [Um número inteiro é aquele que pode ser obtido por adições sucessivas, é aquele que se pode definir por recorrência. Isto posto, que fazemos nós? Mostramos que se não há contradição no enésimo silogismo, isso também não ocorrerá para $n+1$, concluindo assim que não haverá jamais. Vocês dirão: tenho o direito de concluir, portanto, que os números inteiros são por definição aqueles para os quais tal raciocínio é legítimo; mas isso implica outra definição de número inteiro que é a seguinte: um número inteiro é aquele sobre o qual se pode raciocinar por recorrência. (...) As duas definições não são idênticas; elas são equivalentes, sem dúvida, mas o são devido a um julgamento sintético e *a priori*. Não se pode passar de uma a outra por procedimentos puramente lógicos.] (POINCARÉ, 1986[1906.1], p. 50-1).

⁴⁶ « *Pourquoi donc ce jugement s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence ? C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience* » (POINCARÉ, 1902, p. 41).

⁴⁷ O debate mais acirrado entre Poincaré e Russell gira em torno do problema da predicatividade das asserções matemáticas. Russell procura dar uma resposta à questão através da *teoria dos tipos lógicos*, de modo que toda a segurança de uma formulação precisa estava centrada na estratégia da obediência de um espaço lógico bem definido para os elementos que podem servir a determinada proposição. Em um primeiro momento, Poincaré dirige algumas objeções à teoria dos tipos lógicos, como por exemplo, se o axioma da redutibilidade (através do qual se pode demonstrar, segundo Russell, o princípio de indução completa) é mais geral que o princípio de indução completa, ou ainda é psicologicamente justificável. Note-se, portanto, que não se trata de uma questão relativa à “técnica” da teoria, mas à sua viabilidade diante de um modelo de ciência conforme defendido pelo matemático francês. Se tivermos em vista somente os aspectos técnicos, efetivamente teremos a impressão de que, a partir desse ponto, Poincaré não consegue mais dirigir uma crítica consistente e contundente a seu interlocutor, motivo pelo qual passa a atacá-lo de modo superficial, evitando o aprofundamento das críticas como ocorria outrora. Não há, sob a perspectiva de Poincaré, motivo para insistir nessa solução russelliana, simplesmente porque ela parte de bases errôneas, quando se afasta do que pode ser considerado o universo das *verdadeiras matemáticas* e que, por isso, ainda que reconhecida a engenhosa estratégia de solução, prescinde da observância do que realmente importa à matemática. Poincaré introduz a partir de 1909, a distinção conceitual entre a ordenação e a classificação dos conjuntos (POINCARÉ, 1986[1909.2], p. 233), chave para estabelecer a predicatividade das classificações de conjuntos infinitos. O termo *ordenação* não nos traz grandes dificuldades,

propriamente lógicos nascidos no seio da teoria dos conjuntos consistia em formulações de funções que, apesar de aparentemente perfeitas, não representam *ipso facto* conjuntos ou classes, como no caso do paradoxo de Cantor e na antinomia de Burali-Forti, dadas as contradições a eles inerentes. Aqui, o compromisso ontológico decorrente de uma leitura realista leva o matemático a uma espécie de preocupação correspondencial: a formulação de teoremas e axiomas deve coincidir com a realidade dos objetos matemáticos. Assim, temos uma situação *sui generis*: como existe uma referência exterior, existe também a efetiva possibilidade de aceitar definições impredicativas. A estratégia do realista passa a ser a adoção de recursos pontuais para evitar os paradoxos, como a implementação de um modelo axiomático mais forte ou da teoria dos tipos lógicos.

O antirrealista, por sua vez, apresenta fortes objeções às definições não predicativas, porque o único recurso do qual pode lançar mão é o da linguagem e do universo conceitual que ela encerra. Diante desse *status quo*, uma postura possível é a do construtivista estrito, representado, por exemplo, pelo intuicionismo brouweriano, que rejeita *qualquer* tipo de definição impredicativa; outra postura possível é a adotada por Poincaré, em que algum tipo de impredicatividade pode ser tolerada, desde que haja outro recurso possível para a correta determinação do objeto definido:

Definições não predicativas são alvo de objeção por Poincaré só se elas apresentam um círculo vicioso; e elas apresentam um círculo vicioso apenas quando propiciam um único acesso epistemológico possível para um objeto (seja ele conceito ou propriedade). Eu denominarei essas caracterizações não predicativas como ‘irredutíveis’ ou ‘não elimináveis’ quando não há uma saída não circular disponível a trilhar, devido, por exemplo, a uma teoria preliminar que define seu domínio. Na matemática, definições impredicativas não elimináveis devem ser excluídas pelo

pois ele se aplica no sentido usual de atribuição de números ordinais a elementos de um conjunto. Já a classificação, no sentido empregado por Poincaré, é a própria determinação dos elementos pertencentes ao conjunto e em seu “lugar” determinado, determinação essa que pode ser mutável ou imutável. A classificação será imutável se a inserção de novos elementos no conjunto não puder alterá-la e, por outro lado, será mutável se a inserção de um novo elemento em determinado conjunto nos obrigar a uma “reclassificação”. Poincaré considera as classificações imutáveis predicativas; as mutáveis, não predicativas, donde pode-se determinar a viabilidade ou não de cada função proposta, de acordo com as características do objeto a que se refere. Logo, apesar do deslocamento conceitual efetuado a partir da apresentação da teoria dos tipos lógicos por parte de Russell, Poincaré mantém-se fiel à ideia geral que norteia sua concepção de matemática. A consideração do objeto ordenado ou classificado, base para a definição da predicatividade da função, não se dá por uma regra formal, mas por um julgamento em que está presente, sem dúvida, a faculdade da intuição, e que, enquanto tal, deve ser aplicada na verificação de cada classificação em particular. A classificação como fator determinante da predicatividade dos conjuntos tem uma relação forte com problema da validade do axioma da escolha. Assim, aos olhos de Poincaré, os paradoxos em tela eram na realidade pseudoproblemas, consequências diretas das bases de um projeto cujos fundamentos apresentam erros essenciais. A compreensão adequada da natureza do raciocínio matemático e sua restrição às verdadeiras matemáticas seria suficiente para banir quaisquer espécies de paradoxos. Não obstante, há que se considerar que a distinção entre ordenação e classificação passa a atribuir *algum tipo* de legitimidade aos conjuntos infinitos, ainda que apenas sob o ponto de vista da extensão.

construtivista, porque certamente não se pode construir um objeto através de um procedimento circular.⁴⁸

A ideia de diagnosticar os paradoxos da teoria dos conjuntos a partir da concepção de um círculo vicioso, que Poincaré atribui a Richard, é um recurso para expor a falibilidade de classificações impredicativas e não elimináveis, que devem ser rejeitadas; o nominalismo que dirige seu pensamento nesse particular⁴⁹ acaba por constituir-se em um fator importante nesse contexto, mesmo no trato mais tardio dos temas relativos às demonstrações e definições em matemática.⁵⁰ Em outro viés, a teoria dos tipos lógicos é o estratagema de Russell para ordenar o discurso matemático em níveis e “quebrar” a circularidade problemática, mas que, por sua própria natureza, é relativamente permissiva no que diz respeito a formulações impredicativas, ao privilegiar uma boa definição em detrimento de uma regra de construção. A última versão da solução que Poincaré atribui ao problema, que ele denomina simplesmente como a solução da *classificação predicativa*, está centrada basicamente em uma classificação imutável a partir da qual o matemático pode operar com segurança,⁵¹ ou seja, sem os

⁴⁸ “*Impredicative definitions are objectionable to Poincaré only if they are vicious circular; and they are viciously circular only when they provide the only possible epistemological access to an object (concept, property). I shall call impredicative characterizations ‘irreducible’ or ‘ineliminable’ when there is no corresponding non-circular route available, such as, by virtue of a prior theory which defines the domain. In mathematics, ineliminable impredicative definitions must be excluded by the constructivist, for one certainly cannot construct an object via a circular procedure*” (FOLINA, 1992, p. 147).

⁴⁹ « *En refusant de commencer par une analyse des domaines supposés comme préexistants, il ne se limite pas non plus à une synthèse des éléments à construire. Par contre, pour être utiles, les constructions doivent être suivies d’une analyse descriptive dont l’objet sont les constructions elles-mêmes.* » [Ao recusar-se a partir de uma análise de domínios pressupostos como preexistentes, ele não se limita a mais que uma síntese de elementos a construir. Ao contrário, para serem úteis, as construções devem seguir-se de uma análise descritiva cujos objetos são as próprias construções.] (HEINZMANN, 1985, p. 21).

⁵⁰ « *Pour connaître les conséquences d’une restriction prédictive concernant les moyens de définition et de démonstration, Kreisel et Feferman traduisent dans leurs systèmes formels non seulement l’exigence du ‘principe du cercle vicieux’ de Russell, mais également les formulations de Poincaré. En ce sens, l’influence de Poincaré sur la ‘logique’ n’était pas uniquement destructive.* » [Por conhecerem as consequências de uma restrição predicativa relativa aos meios de definição e de demonstração, Kreisel e Feferman traduzem em seus sistemas formais não apenas a exigência do ‘princípio do círculo vicioso’ de Russell, mas também as formulações de Poincaré. Nesse sentido, a influência de Poincaré sobre a ‘lógica’ não foi somente destrutiva.] (HEINZMANN, 1985, p. 13).

⁵¹ « *Les antinomies qui ont été signalées proviennent toutes de l’oubli de cette condition si simple : on c’est appuyé sur une classification qui n’était pas immuable et qui ne pouvait pas l’être ; on a bien pris la précaution de la proclamer immuable ; mais cette précaution était insuffisante ; il fallait la rendre effectivement immuable et il y a des cas où cela n’est pas possible.* » [As antinomias indicadas são todas oriundas do esquecimento dessa condição muito simples: (construções matemáticas) devem apoiar-se em uma classificação que seja imutável e que não pudesse mudar; é bem verdade que se tem tomado a precaução de proclamar as classificações como imutáveis, mas essa precaução não é suficiente. É preciso torná-la efetivamente imutável, e há casos em que isso não é possível.] (POINCARÉ, 1986[1909.3], p. 235-6).

incômodos paradoxos, através de um processo de construção de conceitos fundado em um número finito de passos.

O conceito de infinito está intimamente ligado às noções discutidas até agora. Via de regra, as antinomias cantorianas encontram-se quase que exclusivamente no âmbito do trato com a formalização do conceito de infinito; apesar da negativa de Russell nesse sentido, que procura estabelecer um tratamento ao problema mais centrado nos preceitos da lógica, Poincaré sustenta categoricamente que todo o problema enfrentado encerra-se na crença, fomentada pelos partidários do pensamento de Cantor, em um infinito atual. Obviamente, o problema dissemina-se em várias perspectivas e possibilidades de abordagem. Aqui, todavia, apresentaremos sucintamente as concepções de Georg Cantor e de Henri Poincaré como os respectivos exemplos do realismo e do antirrealismo.

Cantor é realista, uma vez que defende a existência do infinito matemático, ou melhor, de vários infinitos matemáticos dados em ato, mas sob um ponto de vista inusitado, por articular harmonicamente ideias que costumam soar como contraditórias. Vide, por exemplo, o fato de que a definição inicial de conjunto remete a um ato mental (cf. nota 6, capítulo 1), mas já com o intuito de fundamentar uma postura realista, ao sustentar a possibilidade de veicular, através da linguagem, uma realidade exterior. Pelo texto de Cantor, nossa primeira sugestão é a de considerar que a intuição e o pensamento são os instrumentos a partir dos quais se dá um ato de abstração que constitui a totalidade das unidades de um conjunto; entretanto, se no que diz respeito aos conjuntos finitos é possível pensar sua origem como uma espécie de abstração decorrente da consideração de algum caso particular da realidade sensível, esse recurso não está disponível para a compreensão dos conjuntos transfinitos: considerar essas grandezas como existentes em ato significa, de alguma maneira, atribuir-lhes tanto existência real quanto reconhecer no homem uma capacidade cognitiva que obrigatoriamente transcende a esfera da experiência sensível, sem que haja nisso uma efetiva contradição. O modo como o autor resolve essa dificuldade é através da sustentação de uma dupla existência dos entes matemáticos: uma existência subjetiva, ou imanente, e uma existência trans-subjetiva, ou transcendente.⁵²

⁵² A crença na existência de uma dupla natureza dos números e conceitos matemáticos (naquilo que ele distingue como ‘realidade física’ e ‘realidade espiritual’) leva Cantor à necessidade de tentar compatibilizar satisfatoriamente a perspectiva idealista com a realista: «*Je suis toutefois absolument éloigné de l'idéalisme moderne tel qu'il s'est développé depuis Kant; mon idéalisme s'apparente à l'idéalisme 'aristotélo-platonicien' lequel, comme vous le savez, est en même temps un réalisme. Je suis aussi bien réaliste qu'idéaliste.*» [Sou

O número transfinito, como vimos, é uma representação de totalidades que transcendem qualquer totalidade finita dada, das quais a série dos ordinais é o primeiro exemplo, e uma série de artifícios permitem a identificação de grandezas sob a mesma representação: a possibilidade de correspondência biunívoca e a noção abstrata de grandeza (para os cardinais) e de ordem (para os ordinais), bem como a de igualdade enquanto similitude, que exige algum grau de idealização. Contudo, para além da representação da grandeza transfinita através do número, *deve haver* uma realidade a ser sustentada, uma realidade à qual corresponde esse novo “tipo” de número; esse é o grande compromisso do realismo. Para procurar atribuir objetividade à teoria e estabelecer a ponte entre o subjetivo e o trans-subjetivo, (fazendo assim o conhecimento obtido pela teoria transcender o mero *status* de crença ou definição), Cantor lança mão de dois recursos teóricos principais: o primeiro deles, a adaptação a seus fins do chamado *argumento ontológico* medieval; em segundo lugar, a filiação intransigente à definição de números arquimedianos.

Resumidamente, o argumento ontológico proposto por Santo Anselmo sustenta que a essência de uma coisa implica sua existência,⁵³ aplicando o raciocínio com a finalidade de abarcar uma prova *a priori* acerca da existência de Deus; a estratégia empregada é a de identificar a essência ao conceito de número, uma vez que ele representa, de forma abstrata, mas precisa, grandezas e ordens dessa natureza; essa estratégia deixa explícita a filiação da prova ontológica à lógica que fundamenta o raciocínio. Daí deriva a força do argumento ontológico: seja no que concerne à prova da existência de Deus, seja na definição dos entes matemáticos, o argumento privilegia a lógica como recurso último, quando se constitui em uma conclusão *a priori* a partir de conceitos. Essa escolha arca tanto com as vantagens quanto

completamente alinhado ao idealismo moderno tal como desenvolvido desde Kant; meu idealismo assemelha-se ao idealismo ‘aristotélico-platônico’ que, como se sabe, é ao mesmo tempo um realismo. Eu sou tão realista quanto idealista.] (CANTOR apud LAURIA, 2004, p. 49). Obviamente a compatibilidade entre o nível mental e a liberdade que ele encerra e a rigidez de uma realidade concreta a ser descrita envolve problemas, algo que Cantor não trata especificamente.

⁵³ « *Le fameux argument ontologique (l'essence de Dieu implique son existence), lequel procède aussi comme le principe ontologique d'un rapport entre concept et existence, va jouer un rôle particulièrement important dans la philosophie du transfini. Dans une certaine mesure, il apparaît même comme la pierre d'angle et la garantie de l'édifice. En effet, l'infini et l'absolu sont objets d'une connaissance certaine et immédiate sur laquelle peut s'appuyer le savoir.* » [O famoso argumento ontológico (a essência de Deus implica em sua existência), que se aplica também como o princípio ontológico de uma relação entre conceito e existência, desempenha um papel particularmente importante na filosofia do transfinito. Em certa medida, ele surge como pedra angular e segurança da construção. Com efeito, o infinito e o absoluto são objetos de um conhecimento certo e imediato sobre o qual pode se apoiar o saber.] (LAURIA, 2004, p. 53-4).

com as fraquezas decorrentes de atribuir à consistência lógico-conceitual o caráter de critério derradeiro para a existência de um ente.

A adoção da perspectiva de número arquimediano, por sua vez, traz consequências de duas ordens: em primeiro lugar, alinha essa nova ordem de números, os números transfinitos, a um preceito da matemática clássica, a partir da qual se assemelha aos números naturais e reais. Um número arquimediano é aquele em que, seja qual for sua magnitude, se adicionado a si mesmo um número suficiente de vezes, ele irá exceder qualquer magnitude dada. Em segundo lugar, o compromisso resultante dessa escolha leva a uma decisão no mínimo curiosa: a de postular a existência dos números transfinitos ao mesmo tempo em que se nega a existência de grandezas infinitesimais:

Nós não efetuamos o mesmo ato mental, ou melhor, duas operações lógicas inversas e similares: uma com o infinitamente grande, outra com o infinitamente pequeno? (...) A ótica realista adotada por Cantor para recusar essa simetria volta a descartar o problema e a supor que o princípio de Arquimedes seria como que inserido em um quadro mais amplo fornecido por sua teoria ontológica dos tipos de ordem. Uma vez que os infinitesimais são oriundos da negação do princípio de Arquimedes, os transfinitos, ao contrário, satisfariam a uma demonstração necessária que repousa, assim como o ‘teorema de Arquimedes’, sobre a ideia adequada da linearidade, ou da grandeza linear.⁵⁴

A contraparte de uma concepção do infinito dado em ato é a do infinito enquanto potência que, em Poincaré, pode ser identificada como uma consequência de sua postura antirrealista; sua importância é notável: segundo ele, *todos* os problemas relativos aos paradoxos da teoria cantoriana dos conjuntos têm como origem o fato de que os matemáticos que professam essa teoria partem do pressuposto da existência em ato do infinito e o círculo vicioso que ele propicia.⁵⁵ Segundo Poincaré, a concepção de um infinito em ato envolve

⁵⁴ « *N'effectuons-nous pas le même acte mental, ou plutôt deux opérations logiques inversées et similaires : l'une avec l'infiniment grand, autre avec l'infiniment petit ? (...) L'optique réaliste qu'adopte Cantor pour récuser cette symétrie revient à écarter ce problème et à supposer que le principe d'Archimède serait comme enveloppé à l'intérieur du cadre plus large fourni par sa théorie ontologique des types d'ordre. Alors que les infinitésimaux sont issus de la négation du principe d'Archimède, au contraire, les transfinis répondraient à une démonstration nécessaire reposant, tout comme 'théorème d'Archimède', sur l'idée adéquate de la linéarité ou de la grandeur linéaire.* » (LAURIA, 2004, p. 76-7).

⁵⁵ « *Il n'y a pas d'infini actuel, et quand nous parlons d'une collection infinie, nous voulons dire une collection à laquelle on peut sans cesse ajouter de nouveaux éléments.* » [Não existe infinito atual, e quando falamos de uma coleção infinita, nós queremos dizer que se trata de uma coleção à qual se pode adicionar novos elementos sem cessar.] (POINCARÉ, 1986[1909.3], p. 237). E ainda : « *Les définitions qui doivent être regardées comme non prédictives sont celles qui contiennent un cercle vicieux (...) Par exemple la définition d'aleph-un est non prédictive ; le raisonnement par lequel Cantor cherche à établir l'existence de ce nombre, me paraissant tout pareil à celui de Burali-Forti. Je ne suis donc pas sûr qu'aleph-un existe.* » [As definições que devem ser vistas como não predicativas são aquelas que comportam um círculo vicioso. (...) Por exemplo, a definição de aleph-um é não predicativa ; o raciocínio através do qual Cantor pretende introduzir esse número parece-me muito

sérios problemas, simplesmente porque o que está em jogo nesse caso não é, efetivamente, a apreensão (seja pelo intelecto ou pela experiência) de uma grandeza dada, como acreditam os cantorianos, mas a sua criação conceitual, a partir de sua definição e da efetiva possibilidade de sua construção.⁵⁶ Assim, o que existe ao final de contas é a possibilidade de prolongar indefinidamente as séries finitas, e não propriamente um infinito, por conta da própria limitação do intelecto que produz essas séries. O uso do termo “infinito” não deixa de ser uma concessão da linguagem para um procedimento finitário que não apresenta um limite preestabelecido.

Já ressaltamos que o princípio de indução completa conforme concebido por Poincaré é um indicativo de sua postura antirrealista. Esse princípio, por sua vez, permite o raciocínio por recorrência, indicado como o típico raciocínio matemático. Ele resolve o problema fundamental da matemática exposto pela dificuldade inerente a um tipo de saber que deve ser ao mesmo tempo rigoroso, mas não apenas dedutivo. O argumento com o qual o autor pretende superar essa dificuldade é simples: como não é possível fundamentar o raciocínio matemático e, em particular, o raciocínio por repetição, seja na experiência, seja em raciocínios analíticos, não há outra saída que não a de reconhecer o caráter dos juízos matemáticos como *sintéticos* e *a priori*: trata-se de um juízo que transcende qualquer prova analítica e que não recorre, em absoluto, ao concurso de qualquer tipo de experiência sensível.⁵⁷ Com esse recurso, que escapa evidentemente à prova lógica, a construtibilidade dos termos matemáticos lastreada na intuição é fundamental.

semelhante àquele de Burali-Forti. Portanto, eu não tenho convicção de que aleph-um existe.] (POINCARÉ, 1986[1906], p. 94).

⁵⁶ « *Est-il possible de raisonner des objets qui ne peuvent pas être définis en un nombre fini de mots ? Est-il possible même d'en parler en sachant de quoi l'on parle, et en prononçant autre chose que des paroles vides ? Ou au contraire doit-on les regarder comme impensables ? Quant à moi, je n'hésite pas à répondre que ce sont de purs néants.* » [É possível conceber objetos que não podem ser definidos em um número finito de palavras? Será que é até mesmo possível dizer que se sabe do que se fala, ao pronunciar algo diferente de palavras vazias? Ou, ao contrário, deve-se considerá-los como impensáveis? Quanto a mim, eu não hesitaria em responder que são nada.] (POINCARÉ, 1986[1909.3], p. 252).

⁵⁷ Sob a ótica de Poincaré, existem duas importantes intuições que direcionam as construções matemáticas, a saber, a intuição “aritmética”, obtida a partir do conceito de interabilidade indefinida, importante para a construção das séries numéricas, assim como a intuição “geométrica” ou “espacial”, que envolve a continuidade e de variabilidade contínua, permitindo a concepção clássica do domínio dos números reais. Vide nota 9 do capítulo 4.

Malgrado a possibilidade de interpretação de Poincaré como uma espécie de adepto do cantorismo por ocasião da apresentação de *“La science et l’hypothèse”*⁵⁸ (*“Ciência e hipótese”*), principalmente devido ao seu critério de existência matemática enquanto não contradição, a leitura dessa obra não deixa dúvidas em relação a sua postura antirrealista no que concerne à matemática. Dado o papel central atribuído ao princípio de indução completa, toda a matemática está baseada em uma construção intelectual, fundamento da *nosso* ciência, uma postura em muitos aspectos alinhada à do nominalismo, pois as hipóteses, que na matemática assumem a forma de definições veladas, *“são obra da livre atividade de nosso espírito que, nesse domínio, não encontra obstáculos. Ali, o intelecto afirma-se porque ele é o que decreta; mas esses decretos impõem-se à nossa ciência, que, sem eles, seria impossível. Eles não se impõem à natureza.”*⁵⁹

Assim, se a matemática é um conjunto de definições que remetem apenas ao “mundo” do intelecto, as construções matemáticas apoiam-se, em última análise, em critérios lógico-conceituais, sendo totalmente livres no que se refere a determinações externas. Em todos os casos, para a matemática, à experiência só é possível atribuir um papel acessório, o de propiciar uma oportunidade para o ato de criação matemática. Toda a descrição do processo de criação matemática contida em *“Science et méthode”* (*“Ciência e Método”*), assim como a ideia geral que norteia a obra de Poincaré no que tange à física (quando estabelece uma distinção efetiva entre o conteúdo da realidade e as relações que são traduzíveis em termos linguísticos e científicos)⁶⁰ corroboram essa divisão fundamental, que exclui a pretensão de

⁵⁸ É o caso de Jules Vuillemin, que assevera explicitamente a sustentação de um realismo por conta da perspectiva cantoriana que Poincaré adota antes do advento dos paradoxos, renunciando, em seguida, ao infinito atual (POINCARÉ, 1902, p. 15). Não é possível, entretanto, compactuar com essa leitura, pois apesar de não se referir explicitamente à negação de um infinito atual, Poincaré sustenta claramente a existência de um infinito apenas enquanto criação do espírito humano. Uma posição mais consistente seria a de reconhecer que o autor somente delineia com precisão essas duas maneiras de conceber o infinito por ocasião dos paradoxos, ou ainda, que até o seu advento, o tipo de nominalismo defendido por Poincaré não era ameaçado pela perspectiva cantoriana.

⁵⁹ « Ces conventions sont l’oeuvre de la libre activité de notre esprit, qui, dans ce domaine ne reconnaît pas d’obstacle. Là, notre esprit peut affirmer parce qu’il décrète ; mais entendons-nous ces décrets s’imposent à science, qui, sans eux, serait impossible ; ils ne s’imposent pas à la nature. » (POINCARÉ, 1902, p. 24).

⁶⁰ “O autor afirma que não somos aptos para apreender objetos exteriores e transformá-los, tal e qual são em si, em objetos de nosso conhecimento. No entanto, curiosamente ele acaba por postular uma certa identidade entre eles e as sensações que experimentamos e a eles se referem, identidade essa baseada não em uma prova rigorosa, mas na nossa crença pura e simples, porque qualquer prova nesse sentido é completamente impossível de ser levada a cabo: os objetos exteriores ‘são reais naquelas sensações que experimentamos, que nos parecem unidos entre si por não sei qual cimento indestrutível e não por um acaso de momento’ (POINCARÉ, 1923, p. 270). Mas mesmo que essa regra valha incondicionalmente, que essa liga seja realmente indestrutível, isso não resolveria o problema, pois nossa falta de competência de por à prova a identidade entre objeto exterior e

identidade entre a realidade concreta e a ciência enquanto produto do intelecto humano.⁶¹ No caso específico da matemática, a criação do contínuo matemático conforme descrita por Poincaré em *Ciência e hipótese* é um exemplo importante.

Poincaré distingue o contínuo matemático do contínuo físico, grandezas que, cada qual a sua maneira, apresentam limitações bem evidentes: o contínuo físico sofre as restrições da observação e das sensações físicas,⁶² enquanto que a criação do contínuo matemático tem como limite a capacidade do intelecto humano.⁶³ O raciocínio por recorrência é aquele que

fenômeno observado nos impede de conseguirmos estabelecer uma identidade entre mundo exterior e experiência, por mais forte e intuitivamente clara que seja a identidade dessas duas instâncias, que só podemos basear em uma mera crença. A linguagem, por sua vez, não é instrumento adequado para a transmissão de sensações, mas apenas das relações possíveis entre os objetos do conhecimento. Mas o que vem a ser essa pura relação, isenta de quaisquer qualidades, e qual o conhecimento possível do mundo a partir dela? Poincaré pode nos responder: 'suponhamos que uma cereja e uma papoula vermelha produzam em mim uma sensação A e sobre ele a sensação B, e que, ao contrário, uma folha produza em mim a sensação B e sobre ele a sensação A. É claro que nós nunca saberemos disso; porque eu denominarei 'vermelho' a sensação A e 'verde' a sensação B, enquanto ele chamará a primeira de 'verde' e a segunda de 'vermelho'. Ao final, o que podemos constatar é que tanto para mim quanto para ele, a cereja e a papoula vermelha produzem a mesma sensação, uma vez que ele atribui o mesmo nome à mesma sensação que experimenta, e eu faço o mesmo' (POINCARÉ, 1923, p. 262-3). Não é o conteúdo, mas as relações entre as coisas que são veiculadas pela linguagem, e isso ocorre devido ao fato de que nossos sentidos e nossa linguagem tomam nosso interlocutor, seja ele quem for, como uma instância que lhes é estranha. Tanto a linguagem quanto os sentidos são incapazes de apreender a 'coisa-em-si', o que não nos permite, por sua vez, a transmissão mútua de conteúdos, mas apenas das formas, das relações ou das estruturas através das quais compreendemos, classificamos e organizamos os dados de nossas experiências. O conhecimento que nosso intelecto produz acerca do mundo exterior é o mundo de tais relações.' (DEL VECCHIO, 2005, p. 20-1).

⁶¹ Gerhard Heinzmann tem um termo interessante para descrever a postura filosófica de Poincaré: *ocasionalismo pragmático*. Trata-se antes de um método do que de um sistema propriamente dito, pois, em regra, o autor não procura determinar *hic et nunc* as características das ciências de maneira normativa, mas, ao contrário, propõe uma forma de abordagem e de delineamento peculiar a cada ramo do conhecimento científico, o que se aproxima de um método para a compreensão e consideração devida do que está aí, pois « *la construction de l'objet scientifique à partir de sensations se fait simultanément avec la constitution du langage descriptif qui lui est adéquat.* » [a construção do objeto científico a partir de sensações se faz simultaneamente com a linguagem descritiva que lhe é adequada.] (HEINZMANN, 2006, p. 401). Essa perspectiva exige a aplicação a cada ramo do conhecimento de um método peculiar de descrição e construção; por isso « *il défend toujours la même philosophie : dans un processus de va-et-vient, l'intuition se rapporte à la fois à ce que l'on peut faire et, au niveau supérieur, à une connaissance propositionnelle. La construction et la description des objets n'est pas indépendante.* » [ele defende sempre a mesma filosofia: em um processo de vai-e-vem, a intuição a cada vez relaciona-se àquilo que pode fazer e, em um nível superior, a um conhecimento proposicional. A construção e a descrição dos objetos não são independentes.] (Ibid, p. 401).

⁶² « *Qu'arrive-t-il maintenant si nous avons recours à quelque instrument pour suppléer à l'infirmité de nos sens, si par exemple nous faisons usage d'un microscope ? (...) Malgré l'emploi des méthodes les plus perfectionnées, les résultats bruts de notre expérience présenteront toujours les caractères du continu physique avec la contradiction qui y est inhérente.* » [O que acontece se usarmos algum instrumento para compensar a fraqueza de nossos sentidos, como por exemplo um microscópio? (...) Apesar da utilização de métodos mais sofisticados, os resultados brutos de nossa experiência apresentarão sempre as características do contínuo físico, com a contradição que lhe é inerente.] (POINCARÉ, 1902, p. 52).

⁶³ Essa distinção entre contínuo físico e contínuo matemático é evidente: « *o verdadeiro contínuo matemático é algo muito diferente do contínuo dos físicos ou dos metafísicos.* » (POINCARÉ, 1902, p. 48). « *Les mathématiciens procèdent donc 'par construction', ils construisent des combinaisons de plus en plus*

permite a efetiva construção de um procedimento que não deve conhecer um limite e que, portanto, é *potencialmente* infinito. Até esse estágio de elaboração do contínuo, estamos tratando de uma construção contentual: existe efetivamente um juízo de síntese que viabiliza a construção de conceitos a partir de uma série sucessiva para a qual não podemos realmente apontar um fim, nem para a construção de séries cada vez maiores, nem para a divisão sequencial, caracterizada pela interposição de um número entre dois outros. O segundo estágio da construção do contínuo surge, por sua vez, a partir da necessidade de evitar contradições impostas pela limitação dessa mecânica “construtivista” do raciocínio por recorrência. A impossibilidade, por exemplo, de obter um valor para a diagonal do quadrado dentro desse ou de qualquer outro método construtivista leva à necessidade de procurar uma alternativa, diante da simples evidência de que *deve existir* um valor para aquela grandeza. A impossibilidade de construir uma prova para a obtenção dessa grandeza, tomando por base apenas os recursos do contínuo matemático de primeira ordem, faz o intuicionista simplesmente objetá-lo como algo sem sentido. Não é o caso de Poincaré. A construtibilidade é importante na consideração dos números, mas há a efetiva possibilidade de superar contradições do sistema decorrente dessas operações, inclusive com a inserção de símbolos que não representam grandezas da mesma forma que os naturais.

Assim, a validade do teorema de Pitágoras superpõe-se à incapacidade de calcular uma grandeza particular. De fato, os números incomensuráveis (e esse mesmo raciocínio pode ser aplicado, por exemplo, aos imaginários ou aos complexos) não têm a mesma origem ou o mesmo caráter representativo típico dos racionais. São, por assim dizer, abstrações que exigem um esforço ainda maior da imaginação e o abandono de uma real pretensão de conteúdo efetivo veiculado pelo símbolo. A representação do irracional passa a ser um instrumento necessário para superar contradições e garantir, até certo ponto, harmonia e consistência ao sistema. Nesse sentido, Poincaré parece avizinhar-se ao formalismo hilbertiano, sobretudo pela adoção tácita do princípio de resolvibilidade e da inexistência de uma relação necessária entre símbolos e conteúdos. Como produto do intelecto, a matemática não se restringe à aplicação recorrente das mesmas premissas para a obtenção dos mesmos

compliquées. Revenant ensuite par l'analyse de ces combinaisons, de ces ensembles, pour ainsi dire, à leurs éléments primitifs, ils aperçoivent les rapports de ces éléments et en déduisent les rapports des ensembles eux-mêmes. » [Os matemáticos procedem assim ‘por construção’, eles constroem combinações cada vez mais complicadas. Retornando em seguida, ao analisar as combinações desses conjuntos, por assim dizer, em seus elementos primitivos, vêem as relações desses elementos e deduzem as relações dos próprios conjuntos.] (POINCARÉ, 1902, p. 43).

resultados. Ao contrário, seu desenvolvimento envolve um trabalho constante de superação de seus próprios resultados, observando, naturalmente, regras preestabelecidas. Isso só é possível em face da consequência do antirrealismo de Poincaré que, especificamente no que concerne à matemática, aproxima-o do nominalismo (cf. POINCARÉ, 1902, p. 26): a matemática é uma atividade de *criação*, e não de descoberta.

SEGUNDA PARTE

Matemática, Verdade e

Conhecimento Científico

Capítulo 3

Os Constituintes Formais da Matemática

À questão de porque e com que direito reconhecemos uma lei da lógica como verdadeira, a lógica pode responder apenas reduzindo-a a outra lei da lógica. Quando isso não é possível, a lógica é incapaz de dar uma resposta.¹

No contexto das questões que esta tese visa debater, realizaremos uma abordagem acerca dos constituintes da matemática; sugerimos assim a distinção entre, de um lado, os constituintes formais, próprios do contexto lógico-demonstrativo e, de outro, os constituintes não formalizáveis da matemática. Dentre os constituintes não formalizáveis, temos, de um lado, os elementos *explícitos*, que se resumem nos preceitos da linguagem que suporta a metateoria e o simbolismo empregado, e, de outro lado, os elementos *implícitos*, onde incluímos os fatores que são extramatemáticos e não formalizáveis, mas que causam impacto direto na gênese da teoria e na sua valoração, como, por exemplo, as crenças de cunho metafísico acerca dos seres matemáticos, o exercício realizado pela intuição criativa, as analogias propiciadas pela experiência, etc. Essa tripartição (entre elementos formais, informais explícitos e informais implícitos) deve resumir a natureza geral do conhecimento matemático conforme a perspectiva aqui concebida. O presente capítulo destina-se à discussão de cunho epistemológico dos constituintes formais da disciplina, especificamente quanto a sua natureza lógico-demonstrativa e a noção de rigor a ela associada.

Rigor e abstração são conceitos que se relacionam intrinsecamente, e podem ser compreendidos *ab initio* como duas características que marcam a própria natureza do pensamento matemático:² em geral, o rigor matemático está relacionado à obediência de determinado raciocínio ou prova ao que se considera uma demonstração perfeita. Dada uma notação preestabelecida e as regras válidas a serem empregadas, processa-se o desenrolar dos

¹ “The question why and with what right we acknowledge a law of logic to be true, logic can answer only by reducing it to another law of logic. Where that is not possible, logic can give no answer” (FREGE apud CHATEAUBRIAND, 2001, p. 35).

² Vimos na primeira seção do primeiro capítulo que o movimento que dá causa ao debate em relação aos fundamentos da matemática está intimamente ligado à procura tanto de uma perfeição formal quanto de um maior grau de abstração que marca o desenvolvimento da matemática, principalmente entre os séculos XVIII e XIX, seja na análise, seja na geometria.

raciocínios através de um procedimento próprio, que garante a possibilidade de exatidão e de sua ampla aplicabilidade. Já o processo de abstração que envolve o pensamento matemático consiste no ato de extrair uma relação pura a partir da qual se desenvolverá a prova rigorosa, relação essa que privilegia determinado aspecto do ente ou do conceito em tela, deixando outros em segundo plano e procurando levar em conta apenas aquilo que para o desenvolvimento da prova analítica importa. Nós voltaremos primeiramente nossa atenção para o que diz respeito à noção de rigor para, em seguida, discorrermos sobre a natureza do processo de abstração e de como ele leva ao conceito de forma demonstrativa.

3.1. Duas concepções de rigor

Desde a Antiguidade até o nascimento da ciência moderna, a intuição intelectual desempenha um papel fundamental no conhecimento matemático. Os caminhos percorridos pela matemática nos séculos XVIII e XIX levaram naturalmente à consideração dessa evidência como insuficiente para as novas demandas da disciplina, criando a necessidade de delinear um novo critério de rigor baseado na demonstração formal, algo que é, por sua vez, levado às últimas consequências. Todavia, o padrão de rigor enquanto evidência intuitiva ressurgiu sob a pena de Brouwer, movimento impulsionado, em grande parte, pelas próprias dificuldades nascidas no seio de uma perspectiva estritamente demonstrativa. A presente seção tem por escopo abordar essas duas perspectivas de rigor matemático.

3.1.1. Rigor matemático enquanto demonstração lógica

Uma das concepções possíveis de rigor é a que o relaciona à demonstração lógica: trata-se da filiação estrita da demonstração à teoria do silogismo ou, hodiernamente, à lógica matemática; contudo, há também uma possibilidade de interpretação de demonstração lógica sob um prisma mais geral, não só a partir da teoria do silogismo contida nos *Primeiros analíticos*, mas voltada à teoria da ciência construída por Aristóteles nos *Segundos analíticos*. Se não podemos efetivamente falar em uma teoria do silogismo que lastreia os *Elementos* de Euclides, o *Almagesto* de Ptolomeu ou os *Principia mathematica* de Newton, a preocupação quanto à sistematização dos argumentos, que propicia uma base efetiva de um encadeamento racional fundado em causas e consequências, bem como a precisão com a qual os temas são tratados, são dados que corroboram o compromisso desses autores com a inspiração original

do conhecimento racional, a saber, a correção do discurso argumentativo e a preocupação em veicular, através desse mesmo discurso, a verdade. Ao tratar dos aspectos conceituais, da natureza evolutiva e da dimensão histórica da matemática, Michel Paty, por exemplo, refere-se ao que ele denomina *fundamentos racionais* da matemática, procurando estabelecer uma distinção entre o termo *fundamento*, intimamente ligado à lógica, e, por outro lado, a *racionalidade*, como uma espécie de norma estrutural, ainda que menos precisamente definida (PATY, 2005, p. 110). Levando em conta essa distinção, nosso objeto de estudo não será apenas dos constituintes propriamente lógicos da matemática, mas da racionalidade em sentido amplo, de modo a entender o rigor matemático sob uma perspectiva mais abrangente que a do mero silogismo.³

O amadurecimento das concepções matemáticas perpetradas entre os séculos XVIII e XIX permite que se concretize uma mudança de perspectiva interessante, não apenas do ponto de vista puramente matemático, mas também da teoria da ciência. A imposição normativa que testemunhamos exige um caráter demonstrativo para a matemática, para que se possa atingir um grau de perfeição superior e definitivamente banir paradoxos, contradições e dubiedades, como a da noção de infinitesimal. Impõem-se, assim, novos critérios para a aceitabilidade das proposições matemáticas, e seus pressupostos passam a ser compreendidos como necessariamente obedecendo a um novo nível de elaboração, propiciado pelo rigor demonstrativo (e não é sem certa dose de ironia que a crise dos fundamentos da matemática floresce justamente como um subproduto desse rigor desmesurado). A adoção dessa nova perspectiva permite um desenvolvimento notável da disciplina, do qual a criação mais emblemática talvez seja a concepção, por parte de Karl Weierstrass, de funções contínuas não deriváveis em qualquer de seus pontos. A concepção de uma função como essa, acerca da qual a intuição não tem efetivamente como se pronunciar, legitima a elaboração de relações matemáticas concebidas exclusivamente a partir de seus constituintes formais, estruturais e analíticos, acentuando a necessidade de provas “limpas”, absolutamente rigorosas,

³ Não é essa, por exemplo, a perspectiva de Evandro Agazzi. O autor toma como tendências contrapostas a forma demonstrativa típica da matemática e a lógica aristotélica, algo que denomina “autonomização” do rigor em relação à lógica. Para tanto, ele usa exatamente o argumento de oposição, por exemplo, dos *Elementos* ao cânone silogístico clássico. Um exemplo interessante suscitado pelo autor é o da *quaestio certitudine mathematicarum*, uma contenda levada a termo no século XVII, quando foi discutida a possibilidade de garantia de certeza na matemática, mesmo sendo ela desprendida da lógica formal (AGAZZI, 1986, p. 26-7). O que proponho aqui é simplesmente uma ampliação do termo ‘rigor’, ao considerá-lo a partir de um contexto mais amplo que o do silogismo estrito.

perfeitamente demonstráveis e não contraditórias.⁴ A busca de uma expressão lógica perfeita para a matemática passa assim a estar intimamente ligada à exacerbação dos valores de rigor e abstração da disciplina testemunhado no século XIX, em uma intensidade até então sem precedentes, e a criação da lógica matemática parece sacramentar o banimento da intuição da seara da matemática, consequência natural dos resultados da geometria não euclidiana e dos trabalhos de Bolzano e Weierstrass no que se refere à análise.⁵ A perfeição do rigor demonstrativo domina efetivamente a prova matemática no século XIX, e isso é um avanço inegável.

A axiologia que decorre desse ambiente evidencia-se, por exemplo, quando Frege comenta o motivo pelo qual julgava que Kant estava errado ao considerar os juízos matemáticos como sintéticos e *a priori*: a existência de lacunas a serem preenchidas na demonstração era o fator que exigia a atuação da intuição como forma de possibilitar a ligação desses atos mentais, entendidos como fragmentários, e dar um sentido geral à proposição matemática, propiciando a ela um encadeamento adequado.⁶ Todavia, vimos que uma das

⁴ Struik (1948, p. 237) afirma que tão exacerbadas eram essas características na obra do velho professor da Universidade de Berlim que seu nome acabou por se tornar um adjetivo: falava-se em “rigor weierstrassiano” como um objetivo a ser alcançado pela ciência dos números.

⁵ Uma citação de Brouwer é especialmente ilustrativa no que se refere a esse ponto: “*For in the first place, this development showed repeatedly how complete theories could be carried over from one domain of mathematics to another: projective geometry, for example, remained unchanged under the interchange of the roles of point and straight line, an important part of the arithmetic of real numbers remained valid for various complex number fields, and nearly all the theorems of elementary geometry remained true for non archimedean geometry (...) These discoveries seemed to indicate indeed that of a mathematical theory only the logical form was of importance.*” [Em primeiro lugar, esse desenvolvimento mostrou repetidamente como teorias inteiras podiam ser transportadas de um domínio da matemática para outro: a geometria projetiva, por exemplo, permaneceu inalterada apesar da substituição do papel do ponto e da linha reta, uma parte importante da aritmética dos números reais permaneceu válida para vários campos de números complexos, e quase todos os teoremas da geometria elementar permaneceram verdadeiros para a geometria não arquimediana (...). Essas descobertas pareciam indicar que, para uma teoria matemática, apenas a sua forma lógica era importante.] (BROUWER, 1912, p. 79 – grifo meu). Sob essa inspiração é que o logicismo procura deduzir uma determinada sentença Φ de um conjunto de sentenças Γ , de modo que Φ seja completamente justificado nos termos de Γ , sem que haja cadeias de raciocínio “quebradas”, que devam remeter à intuição para buscar sua justificação (cf. SHAPIRO, 2005, p. 24).

⁶ Todas as supostas “falhas”, “fissuras” de uma cadeia dedutiva são suscetíveis de serem pensadas como pontos em que se faz necessário recorrer à intuição, e isso é o que faz Kant, segundo Frege, quando relaciona o papel da intuição ao estabelecimento de inferências amplamente utilizadas na matemática. Todavia, “*these inferences expand our knowledge and one should, therefore, following Kant, consider them synthetic. Nevertheless, they can be proved purely logically and hence are analytic. They are in fact contained in the definitions, but like the plant in the seed, not like the rafter in the house. (...) If Kant erred with respect to arithmetic, this does not detract essentially, I think, from his merit. It was important for him that there should be synthetic judgments a priori; whether they occur only in geometry or also in arithmetic is of little importance.*” [essas inferências expandem nosso conhecimento e poder-se-ia, como Kant, considerá-las sintéticas. Contudo, pode-se prová-las somente com o auxílio da lógica pura, e, desta feita, são analíticas. Elas, de fato, estão contidas nas definições,

grandes críticas ao logicismo era centrada em sua impossibilidade de realizar aquilo a que se propunha.⁷ Esse contexto mudou recentemente, a partir de uma engenhosa reengenharia da obra de Frege, através da qual surge a possibilidade, ao menos em tese, de tornar exequível o projeto logicista. Trata-se do *neologicismo* (ou *neofregeanismo*) capitaneado, entre outros, por Crispin Wright, John Burgess e Allen Hazen. Não há dúvidas de que essa novidade é algo da maior importância nos últimos anos, porque, se realmente ele disponibiliza um meio de realizar essa empreitada de uma maneira demonstrativamente perfeita, é necessário retomar a perspectiva logicista como possibilidade real.

Frege é compelido a estabelecer seu quinto lema, “*as extensões de dois conceitos são idênticas se e somente se a esses conceitos servem como argumentos os mesmos objetos*” (HALE & WRIGHT, 2005, p. 168) principalmente a partir de uma dificuldade conceitual anunciada no mesmo texto, que problematiza sobremaneira a fundamentação da definição dos números cardinais apenas com base no princípio de Hume, que pode ser expresso como: “*o número de Fs = ao número de Gs se e somente se existe uma correlação unívoca entre Fs e Gs*” (HALE & WRIGHT, 2005, p. 167); a dificuldade é denominada por Frege como o *problema de Júlio César*. Basicamente, como no sistema fregeano deve-se admitir qualquer objeto como argumento de função, o princípio de Hume é adequado, mas a partir dele não é possível, por exemplo, dizer se em “o número de Fs é igual ao número de Gs”, Júlio César é o número de Fs, ou ainda mesmo se é um número. Essa dificuldade faz Frege reconhecer como

mas como a planta está na semente, e não como a viga está em uma casa. (...) Se Kant se engana quanto à aritmética, creio que isso não diminui essencialmente seu mérito. Era importante para ele que existissem juízos sintéticos e *a priori*; se eles ocorrem apenas na geometria ou também na aritmética é algo de pequena importância.] (FREGE, 1884, p. 154-5).

⁷ A partir da inconsistência decorrente do paradoxo de Russell, Frege chega a confessar que a descoberta do lógico inglês lhe causara surpresa e consternação, por colocar em perigo a construção da matemática conforme por ele idealizada (FREGE, 1902, p. 127-8). Tal é a inviabilidade do logicismo nos anos vinte que ele praticamente sai de cena no debate acerca dos fundamentos levado a termo pelos intuicionistas e formalistas. Há, inclusive, autores que consideram que o logicismo simplesmente não pode ser tomado como um posicionamento relativo à definição da matemática: “*In current popular discussions it is said that intuitionism, formalism and logicism are the three main views in regard to the nature of mathematics; the least is supposed to be the view that mathematics is logic. But we do not have here a third view of mathematics parallel with the other two; for to say that mathematics is logic is merely to replace one undefined term by another. When we go back of the word ‘logic’ to its definition in the logistic systems, we find that they run the gamut from extreme Platonism to pure formalism. The question of the relation of mathematics to logic is thus a different question from the definition of mathematics.*” [Nas atuais discussões populares costuma-se dizer que o intuicionismo, o formalismo e o logicismo são as três principais leituras concernentes à natureza da matemática; este último é tomado como o entendimento de que a matemática é lógica. Mas nós aqui não temos uma terceira via paralela às outras duas, pois dizer que a matemática é lógica é simplesmente substituir um termo indefinido por outro. Quando buscamos o significado da palavra ‘lógica’ nos sistemas logicistas, nós vemos que ela vai do extremo platonismo ao puro formalismo. Portanto, a questão da relação entre matemática e lógica é diferente da questão relativa à definição da matemática.] (CURRY, 1958, p. 206).

insuficiente a definição baseada no princípio de Hume para adotar uma definição extensional de cardinalidade, o que leva à formulação de seu quinto lema, o que, consequentemente, abre as portas para a inconsistência de seu sistema.

A ideia que dirige o argumento neologicista é relativamente simples. O que o neologicismo propõe, em linhas gerais, é voltar atrás no passo dado em termos da definição baseada na extensionalidade e fundamentar uma base teórica da aritmética em termos do princípio de Hume associado a um sistema lógico de segunda ordem, o que é suficiente para traduzir em termos lógicos os axiomas de Dedekind e Peano, a partir da tentativa de estabelecer uma cadeia de processos de abstração em termos lógicos. Dessa posição nasce uma teoria da análise e da lógica que se presta à sustentação de um sistema de definições sequenciais, pretensamente sem fazer qualquer referência à intuição, e radicado em um realismo de cunho platônico.

Há poucos anos, bastaria recorrer às *difficultés insurmontables du logicisme*⁸ para dá-lo por vencido. Muitas das críticas acerca dessa concepção centram seu foco nessas dificuldades encontradas no pensamento de Frege, como é o caso de alguns desafios propostos por Poincaré, por exemplo.⁹ Contudo, ainda que consolidada a possibilidade efetiva suscitada pelo neologicismo, algo sobre o que é muito cedo para pronunciar-se em definitivo, ela não atinge a raiz do problema conforme a concebemos aqui, devido ao que consideramos um erro de princípio. É preciso dizer que a ressalva em relação ao logicismo não está necessariamente ligada a sua ineficiência, de modo que a aceitação dessa nova possibilidade de realizar aquilo a que se propõe, mesmo em se concretizando, sofre de um problema mais essencial. Do ponto de vista epistemológico que abordaremos no quinto capítulo, é impossível considerar o conhecimento matemático como tendo toda sua realidade adstrita à lógica, bem como é inadequado adotar o platonismo decorrente da perspectiva logicista como critério para

⁸ “*difficultés insuperáveis do logicismo*”. É assim, por exemplo, que Dominique Lecourt (1999, p. 584) refere-se aos problemas da obra de Frege.

⁹ Isso parece muito claramente no texto *Les Mathématiques et la Logique*. Na oportunidade de produção do texto, a logística já contava com mais de vinte anos de existência, e sua proposta, que era a de englobar toda a matemática em princípios puramente lógicos, necessitaria, em tese, apenas de uma série de axiomas e definições, dos quais partiriam os primeiros teoremas que, aplicados a operações de cunho estritamente lógico, não trariam qualquer dificuldade consigo, mas apenas exigir-se-ia um bom grau de paciência para aplicar as regras formais da lógica e garantir a certeza e o rigor do resultado. Couturat diz que a logística peaniana lhes dará asas; Poincaré, com escárnio, responde que apesar de alados, há dez anos não conseguem alçar voo. (POINCARÉ, 1986[1906.2], p. 80). A tese logicista é, portanto, problematizada não apenas nos princípios dos quais parte, mas também tem que se explicar no que se refere à sua evidente ineficácia.

nortear minimamente o conhecimento científico. Mas ainda que a prova lógico-demonstrativa não seja a totalidade da matemática, nossa objeção aos argumentos de cunho logicista não questionam a importância do rigor demonstrativo: é inegável que a primeira e mais forte referência do rigor matemático é o padrão de demonstração lógica.

3.1.2. Rigor enquanto evidência intuitiva

Apesar de importante, o padrão de rigor como demonstração lógica não é a única alternativa que a história da ciência oferece. Existe também a possibilidade de fundamentar a noção de rigor enquanto evidência intuitiva, uma ideia que dominou a matemática por longo tempo. Mas uma noção ampla e central como a de intuição apresenta uma dificuldade inerente a sua própria conceituação:

A noção de intuição matemática é notoriamente obscura. De início, é difícil *dizer* no que consiste em geral o fato de “ter” uma intuição, pois se trata justamente de uma experiência cuja característica essencial é a de ser “direta”, “imediate”, não discursiva, e que o conhecimento adquirido para a melhor descrição “objetiva” da experiência em questão não equivale nunca ao conhecimento adquirido pelo fato de oferecer a si mesmo essa experiência em primeira pessoa. Assim, é difícil, em se tratando especificamente da intuição matemática, considerar exatamente o âmbito de aplicação da analogia que é proposta na maior parte do tempo entre essa intuição e a intuição sensível ordinária (perceptiva), e segundo a qual, por meio de uma espécie de “olho mental”, certa relação é estabelecida entre o matemático e os objetos da matemática aos quais se referem os enunciados que ele estuda, relação comparável àquela que liga o olho fisiológico aos objetos materiais que se encontram no campo visual do observador.¹⁰

Logo, qualquer tentativa de abordagem do rigor enquanto evidência propiciada pela intuição está fadada ao recurso a um tratamento qualitativamente diferente daquele que é próprio ao paradigma de rigor lógico-demonstrativo. A natureza imediata da evidência intuitiva é característica, por exemplo, do método cartesiano, diretamente identificado às construções matemáticas. Ali, a intuição caracteriza-se pela clareza e distinção através da qual o pensamento reconhece imediatamente a verdade de determinado conceito. Na perspectiva

¹⁰ « La notion d'intuition mathématique est notoirement obscure. D'abord il est difficile de dire en quoi consiste en général le fait d'« avoir » une intuition, parce qu'il s'agit justement d'une expérience dont la caractéristique essentielle est d'être « directe », « immédiate », non discursive et que la connaissance procurée par la meilleure description « objective » de l'expérience en question n'équivaut donc jamais à la connaissance procurée par le fait d'éprouver soi-même cette expérience en première personne. Ensuite il est difficile, s'agissant précisément de l'intuition mathématique, d'apprécier exactement la portée de l'analogie qui est proposée la plupart du temps entre cette intuition et l'intuition sensible ordinaire (perceptive), et selon laquelle, par le truchement d'une sorte d'« oeil mental », une certaine relation est établie entre le sujet mathématicien et les objets mathématiques auxquels se réfèrent les énoncés qu'il étudie, relation comparable à celle qui relie l'oeil physiologique aux objets matériels qui se trouvent dans le champ visuel de l'observateur » (DUBUCS, 1998, p. 95).

racionalista intelectualista cartesiana, a intuição sobre a qual deve basear-se o conhecimento e a verdade é, antes de tudo, uma pura experiência do intelecto em contato com suas próprias criações, suas ideias, em sua forma mais básica:

Por intuição entendo não a convicção flutuante fornecida pelos sentidos ou o juízo enganador de uma imaginação de composições adequadas, mas o conceito da mente pura e atenta tão fácil e distinto que nenhuma dúvida nos fica acerca do que compreendemos. (...) Assim, cada qual pode ver pela intuição intelectual que existe, que pensa, que um triângulo é delimitado apenas por três linhas, que a esfera o é apenas por uma superfície, e outras coisas semelhantes (DESCARTES, 1989, p. 20 – grifo meu).

O excerto é interessante porque nele podemos vislumbrar a contraposição entre as duas concepções citadas. O trecho grifado acima permite a interpretação relativa à clareza e distinção que deve nortear o saber em oposição ao oceano de possibilidades de composições de idéias. O *juízo enganador de uma imaginação de composições adequadas* consistiria, antes de tudo, em uma articulação carente de fundamento forte centrado em uma certeza intuitiva do intelecto, adquirindo, portanto, um caráter problemático. A questão teológica gerada pela concepção de um Deus onipotente que, dada sua onipotência, pode criar uma montanha tão alta que ele próprio não a pudesse escalar (o que, evidentemente, restringe sua onipotência) é, em última análise, um problema que só se impõe quando abandonada a intuição clara e distinta como forma última de critério para a verdade. Em Descartes, a intuição intelectual é a única garantia de segurança para o desenvolvimento adequado do método que lhe é tão caro, *conditio sine qua non* para a obtenção da verdade e para o progresso do saber, conforme explicitado nas *Meditações*, nas *Regras para a direção do espírito* e no *Discurso do método*.

A intuição e seu papel na atividade de conhecimento humano são articulados de outra forma em Kant. Há duas maneiras de compreender o termo *intuição* sob a perspectiva kantiana, como *intuição sensível* ou como *intuição pura*. A primeira resulta do contato com os objetos do conhecimento através de nossas sensações, propiciando assim a experiência dos fenômenos. Trata-se, portanto, de uma intuição *a posteriori*, que está diretamente relacionada com o conhecimento do mundo e com a maneira como se apresentam os fatos experimentais. A *intuição pura*, por sua vez, distingue-se da intuição intelectual cartesiana por ser a instância intimamente relacionada com nossas possíveis formas de sensibilidade. Kant a apresenta como a própria condição de possibilidade através do que se dá a representação dos objetos

sensíveis.¹¹ Assim, há uma diferença importante entre as concepções de Descartes e de Kant: de uma intuição intelectual que garante a verdade do objeto do conhecimento, passa-se à intuição pura que funciona como condição de possibilidade do fenômeno, resultado, em parte, das sérias restrições que se impõem ao dogmatismo racionalista, que tem em Hume um de seus críticos mais ferrenhos e competentes, a partir, principalmente, da bem conhecida crítica à noção metafísica de causalidade. Kant, atento aos problemas indicados por Hume, toma o cuidado de não mais conceder a possibilidade de uma intuição que reconheça a verdade dos objetos em si, mas também procura garantir um lugar de direito à intuição para além do meramente sensível, ainda que como condição de possibilidade, o que está intimamente ligado a sua doutrina do sintético *a priori*.

Em suma, enquanto Descartes vislumbra o conhecimento matemático como lastreado em uma intuição intelectual, para Kant ele está diretamente relacionado a uma construção conceitual baseada na forma pura da sensibilidade. Malgrado as diferenças entre suas formulações que, insisto, são grandes e fundamentais, ambos concordam em relação à evidência decorrente da intuição que fundamenta os objetos matemáticos, o que nos permite falar, em termos gerais, de um *padrão de evidência intuitiva*, independentemente da filiação a uma concepção ou a outra. Esse padrão, tomado por vezes como base suficiente para os fundamentos da matemática, experimentou um processo de ascensão, queda e ressurgimento. Desde a Antiguidade, a noção de evidência baseada em uma intuição é um critério importante para a aceitação de postulados e teoremas, e a distinção entre a forma lógica propiciada pelo paradigma aristotélico e a forma das proposições geométrico-matemáticas pode ser o diagnóstico parcial para esse fator (ao inviabilizar desde a Antiguidade um tratamento de postulados e teoremas de modo exclusivamente lógico). Claro que é incorreto excluir os preceitos demonstrativos completamente desse contexto; a presença recorrente das provas de

¹¹ “Chamo puras (no sentido transcendental) todas as representações em que nada se encontra que pertença à sensação. Por consequência, deverá encontrar-se absolutamente *a priori* no espírito a forma pura das intuições sensíveis em geral, na qual todo o diverso dos fenômenos se institui em determinadas condições. Essa forma pura de sensibilidade chamar-se-á também intuição pura. Assim, quando separo da representação de um corpo o que o entendimento pensa dele, como seja substância, força, divisibilidade, etc., e igualmente o que pertence à sensação, como seja impenetrabilidade, dureza, cor, etc., algo me resta ainda dessa intuição empírica: a extensão e a figura. Essas pertencem à intuição pura, que se verifica *a priori* no espírito, mesmo independentemente de um objeto real dos sentidos ou da sensação, como simples forma de sensibilidade” (KANT, 1994[1781], p. 62).

redução ao absurdo no seio das demonstrações geométricas mostra isso com clareza.¹² Todavia, parece igualmente óbvio que esse procedimento está submetido e controlado pela intuição, seja na geometria, seja na aritmética:

A intuição funciona como normativa ao exigir uma limitação do objeto matemático através do intuitivamente possível. Na matemática antiga, essa exigência – aceita normalmente de modo apenas implícito – foi respeitada quase sem exceção. Por exemplo, a restrição ao espaço tridimensional não era válida apenas para a geometria, mas também para a matemática, ao adotar os números quadrados sempre como medidas de planos e os números cúbicos como medidas de volumes.¹³

Logo, se há uma função para a demonstração quando do nascimento da matemática, ela é subordinada à evidência intuitiva, mas de maneira velada, implícita. Assim é que, com o advento do racionalismo cartesiano, há uma mudança importante, quando a evidência intuitiva deixa a penumbra para colocar-se em um papel central, pela concepção de verdade enquanto intuição clara e distinta dentro do programa de uma *mathesis universalis*.¹⁴ A legitimidade dessa ordem, uma vez desvelada sua natureza, seria amplamente questionada a partir de meados do século XIX. Esse padrão começa a ruir quando o próprio desenvolvimento da aritmética e da geometria passa a mostrar a possibilidade de extrapolar em muito os limites estreitos da intuição. Um bom exemplo nesse sentido é a inovação trazida pelas formulações geométricas não euclidianas. A geometria hiperbólica, em um primeiro momento,¹⁵ viabiliza o desprendimento em relação à intuição, quando denega o quinto

¹² Nós podemos indicar como exemplo o método arquimediano de exaustão, empregado para a determinação de áreas e volumes de figuras curvilineares e parábolas; ele consiste basicamente, como o próprio nome indica, em uma técnica para levar ao limite a mensuração de uma figura plana ou um volume. Trata-se, todavia, de uma prova indireta por redução ao absurdo, que se apresenta de diversas formas possíveis, como o método de compressão e um método de aproximação (CLAGETT, 1991, p. 86-103).

¹³ „Normativ wirkt Anschauung insofern, als sie eine Begrenzung der mathematischen Objekte auf das anschaulich Mögliche verlangt. In der antiken Mathematik wird diese Forderung – welche meist nur implizit erhoben wird – fast ohne Ausnahme beachtet. Beispielweise beschränkte man sich ganz auf den dreidimensionalen Bereich. Das gilt nicht nur für die Geometrie, sondern auch für die Arithmetik, in der Quadratzahlen immer als Masszahlen von Flächen, Kubikzahlen als Rauminhalte aufgefasst wurden.“ (VOLKERT, 1986, p. 13).

¹⁴ „Die Mathematiker der Antike hatten ihre gegenstände noch aus der Anschauung vermöge Idealisierung gewonnen. Jetzt jedoch war diese Genese verzichtbar geworden: jeder Gleichung entsprach eine Kurve - ein geometrische Ort - gleichgültig, ob man mit ihr eine anschauliche Bedeutung verbinden kann oder nicht. Die Gegenstände der analytischen Geometrie sind (und nicht etwa: werden beschrieben durch) so betrachtet Zahlentupel und Gleichungen zwischen diesen.“ [A matemática antiga obtinha seus objetos sobretudo a partir de uma intuição oriunda de idealização. Agora, todavia, essa gênese se tornara dispensável. Para cada equação correspondente a uma curva – um espaço geométrico – da mesma maneira, poder-se-ia atribuir a ele ou não uma significação gráfica. Os objetos da geometria analítica são concebidos (e não mais podem ser descritos) como sequências numéricas e equações que as relacionam.] (VOLKERT, 1986, p. 22-3).

¹⁵ “Not only are non-Euclidean geometries logically consistent, they are ‘experientially possible’: they are genuine candidates for the interpretation of our experience. A non-Euclidean geometry describes a real

postulado de Euclides e oferece um modelo concorrente ao paradigma euclidiano, que havia reinado incontestado ao longo dos séculos. Essa possibilidade é preparada no decorrer dos anos, pois a chamada “ciência das paralelas” já havia inspirado tentativas recorrentes de demonstração do quinto postulado. Ocorre que, a partir da dissociação operada entre os conceitos de *paralelismo* e *assintotia*¹⁶ - algo que em Euclides aparece como uma relação necessária - suportada agora pela noção de limite extraída do cálculo infinitesimal, tanto Bolyai quanto Lobatchewsky são capazes de angariar recursos teóricos para construir novas concepções no estudo das paralelas e das funções trigonométricas a elas relativas e não incorrerem, por exemplo, na mesma armadilha que deteve Girolamo Saccheri. Ele, ao deparar-se com a possibilidade de dar o mesmo passo de Bolyai e de Lobatchewsky, simplesmente não consegue desprender-se do paradigma oferecido pelo cânone euclidiano e da evidência sensível que em parte o sustenta, e acaba por encontrar uma contradição onde ela não existe: incapaz de sustentar essa possibilidade devido aos graves resultados que dela decorreriam, Saccheri abandona o rigoroso método de sua demonstração e “*toma a decisão de acreditar na intuição e na fé que professa acerca da validade do quinto postulado ao invés da lógica*” (BONOLA, 1955, pg. 43). Não se tratava de uma contradição lógica, mas de uma negação à evidência intuitiva que até o século XVIII era um recurso primaz de criação dos objetos da geometria.

Todavia, a partir de Lobatchewsky e de Bolyai, o corpo monolítico euclidiano de certezas dá lugar a uma infinidade de hipotéticos modelos geométricos que partem de postulados díspares, e criam modelos contraditórios entre si, mas internamente consistentes. Assim, após as contribuições perpetradas no século XIX, de modo algum poder-se-ia garantir à evidência intuitiva o *status* de critério de rigor matemático, uma vez que essa leitura assume

possibility: we can construct theoretical alternative edifices (physical theories) incorporating rival geometrical systems; so no one particular (pure) geometry has synthetic a priori status.” [Não apenas as geometrias não euclidianas são logicamente consistentes, elas são também possíveis do ponto de vista sensível: elas são genuínas candidatas à interpretação de nossa experiência. Uma geometria não euclidiana descreve uma possibilidade real: nós podemos construir edifícios teóricos alternativos (teorias físicas) incorporando sistemas geométricos rivais; desse modo, nenhuma (pura) geometria em particular tem um *status* de saber sintético e *a priori*.] (FOLINA, 1992, p. 31). A partir daí, as geometrias não euclidianas tornam-se modelos concorrentes e tão rigorosos quanto o original. A oposição “repugnante” à intuição mostra-se simplesmente fruto de uma carência de imaginação, pois quando surgem modelos que nos permitem visualizar o que propõem as novas geometrias, elas passam a se colocar inclusive como alternativas; a aplicação de um modelo baseado na geometria não euclidiana no contexto da teoria da relatividade de Einstein certamente seja o exemplo mais conhecido. Todavia, isso não responde completamente à questão, uma vez que, por exemplo, sustentar uma espécie de intuição que fundamente as formulações das geometrias *n*-dimensionais exige que concebamos essa intuição como um ato de imaginação necessário à formulação das hipóteses assumidas.

uma faceta marcadamente problemática, pois a adoção de critérios mais fortes para a prova demonstrativa está intimamente ligada à precisão dos termos utilizados, à custa de um formalismo e de uma axiomática cada vez mais fortes. Por isso, o rigor demonstrativo abre portas tanto à geometria quanto à análise, que conhecem um período extremamente fecundo e produtivo sob essa nova inspiração:

A ciência é, antes de tudo, teoria demonstrada. Contra os recursos tão fáceis à evidência, uma evidência que Descartes não evocava senão para as naturezas simples e que, para Kant, rege todos os raciocínios geométricos, Bolzano se eleva com a “*Rein analytischer Beweis*” (“*Prova analítica pura*”). A crise do crescimento da análise exigia, entretanto - como mostraram as “*Étapes de la Philosophie Mathématique*” (“*Etapas da filosofia matemática*”), de Leon Brunschvicg – uma mudança do tipo de evidência. Para Bolzano, tratava-se da transformação radical de constatação em demonstração.¹⁷

Vimos que a adoção dessa perspectiva, do modo como empregada, leva a contradições para o seio da disciplina, como a crise dos fundamentos da matemática. Mas a reação a tal perspectiva impõe-se antes mesmo da apresentação da teoria cantoriana dos conjuntos. Leopold Kronecker já reclama a necessidade de devolver o lugar de direito da intuição na matemática, ao defender ferrenhamente a aritmetização dentro da disciplina, que deve estar baseada *apenas* nos números inteiros, ou nos números que a partir deles podem ser obtidos através de operações com um número finito de passos. Assim, por uma questão de princípios é que, ao ser informado da prova obtida por Lindemann de que π é um número transcendental, ele achou a prova curiosa e interessante, “*exceto pelo fato de que π não existe.*” (WILDER, 1952, p. 203). Para Kronecker, toda prova matemática só pode ser aceita se for construtiva, ou seja, se estabelecer claramente um método finitista para sua constituição, método esse que possa abarcar tudo aquilo que pode ser objeto da prova proposta, de modo que existe uma interdependência entre a matemática “legítima” e o processo de geração dos objetos matemáticos e das provas que explicitam as relações entre eles, o que serve, em última análise, como critério para a aceitação dos argumentos e das estratégias utilizadas.¹⁸

¹⁶ Retas assintóticas são aquelas que não se intersectam.

¹⁷ « *La science est avant tout théorie démontrée. Contre les recours trop faciles à l'évidence, une évidence que Descartes n'invoquait que pour les natures simples et qui pour Kant régit toutes les raisonnements géométriques, Bolzano s'élève dans le Rein analytischer Beweis. La crise de croissance de l'analyse exigeait alors – ainsi que le montrent les Étapes de la Philosophie Mathématique – un changement de type d'évidence. Pour Bolzano, il s'agissait de la transformation radicale de constatation en démonstration* » (CAVAILLÈS, 1942, p.19-20).

¹⁸ “Kronecker admitia que, em tese, a aritmetização da análise, reduzindo-se tudo a números naturais, era correta. Porém, não aceitava as teorias de Weierstrass e Dedekind a respeito dos números reais, frisando que

É possível considerar que a exigência de Kronecker pela construtividade na matemática está diretamente relacionada à evidência intuitiva que assegura os passos dessa construção; do contrário, os argumentos, mesmo que perfeitos do ponto de vista estritamente lógico, não serão suficientes para a determinação de objetos matemáticos legítimos (cf. WILDER, 1952, p. 202-4). Dessa maneira, o que Kronecker faz é colocar-se em contraposição à nova e promissora exigência do procedimento lógico-demonstrativo (exclusivamente dele) como critério de rigor matemático, posição que certamente soa como reacionária e antiquada à maioria de seus contemporâneos,¹⁹ mas que inspira um posicionamento análogo que passa a ser sedimentado como uma tendência entre matemáticos franceses um pouco mais jovens, como Henri Poincaré, Émile Borel, René Baire e Henri Lebesgue. Se esse posicionamento deve ser interpretado como reacionário, por pleitear a retomada de antigos padrões, ou inovador, ao estabelecer uma nova exigência além da simples aceitação do paradigma lógico-demonstrativo, não é mera questão terminológica. Defendo a segunda alternativa, e por um motivo simples: nenhum desses autores sugeria ingenuamente o retorno da intuição em substituição ao rigor lógico-demonstrativo, mas uma espécie de construtibilidade a guiar a prova matemática para evitar seus desvios. Quem iria de fato propor contundentemente a substituição do padrão de rigor lógico-demonstrativo por um padrão baseado na evidência intuitiva seria Brouwer; e a única acusação que não poderíamos direcionar a ele seria a de não ser radicalmente inovador.

Já vimos alguns aspectos do intuicionismo professado por Brouwer no primeiro capítulo, mas é interessante ressaltar o modo como ele concebe o rigor matemático, algo que ficou apenas implícito. Delineado como uma estrita construção mental, e tendo os princípios da lógica apenas como recursos acessórios para submeter o sistema à prova (como pela redução ao absurdo), aquilo que garante a verdade do sistema deve ser algo que se superpõe

essas teorias implicavam a existência de conjuntos infinitos como entidades realizadas, ou seja, do infinito atual, dado” (DA COSTA, 1977, p. 18).

¹⁹ Kronecker não era, todavia, o único a defender idéias nesse sentido. Charles Hermite, por exemplo, ao comentar o advento de funções contínuas não deriváveis, é categórico: “*I turn away with fear and horror from the lamentable plague of continuous functions which do not have derivatives.*” [Eu rejeito com medo e terror a lamentável praga das funções contínuas que não têm derivadas.] (HERMITE apud PINKUS, 2000, p. 3). Poincaré, ainda que pertencendo a outra geração de matemáticos, compactua com eles, mantendo inclusive o mesmo tom dramático de Hermite, talvez uma característica dos *savants lorrains*: “*La logique parfois engendre des monstres. Depuis un demi-siècle on a vu surgir une foule de fonctions bizarres qui semblent s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose.* » [Por vezes a lógica engendra monstros. Há meio século vemos surgir uma multidão de funções bizarras que parecem esforçar-se em serem assemelhadas o mínimo possível às honestas funções que têm qualquer serventia.] (POINCARÉ, 1908, p. 132).

aos constituintes lógicos, porque, segundo ele, a lógica teórica e a logística são apenas ciências empíricas que *aplicam* a matemática e que, por isso, não podem fornecer qualquer informação acerca da organização do intelecto humano (cf. BROUWER, 1907, p. 74). Por isso, a matemática pode prescindir da aplicação da lógica. Note-se o peso dessa tese: a matemática, por ser anterior à lógica no que tange a sua elaboração e ao processo pelo qual apresenta seus objetos, deve também, obrigatoriamente, encontrar a legitimação de sua natureza sem ater-se a *qualquer* dependência de princípios lógicos. Estes são recursos para, no máximo, *testar*, e não para *criar* a ciência. Dessa forma, sob a perspectiva brouweriana, malgrado sua distância em relação à lógica, o rigor matemático não sofre qualquer quebra, tendo em vista que se trata, em última análise, de uma observância à intuição originária dos conceitos de unidade e dualidade. Aquilo que nos mostra a intuição serve como critério último de rigor sob o ponto de vista intuicionista, e a linguagem simbólica, por sua vez, consiste na melhor maneira disponível para expressar essa intuição originária e seus desdobramentos, ainda que de maneira imperfeita.

Por encontrar seu fundamento último na intuição de tempo enquanto desdobramento do uno em duplo, e, conseqüentemente, em múltiplo, Brouwer vê a si próprio como inserido em um processo de reformulação do kantismo, com todos os aspectos problemáticos em que um contexto de reformulação implica, enquanto representa uma espécie de filiação rebelde. O neokantismo ao qual ele adere caracteriza-se pelo abandono da ideia contida na *Crítica da razão pura* do espaço como intuição *a priori*. Ao contrário, concebe ainda mais radicalmente o apriorismo do tempo que, pela sucessão de momentos, oferece-nos a possibilidade fundamental para o estabelecimento de qualquer tipo de intuição de unidade-duplicidade, além da noção de contínuo linear, “*que não pode ser exaurido pela interposição de novas unidades e que, portanto, não poderá nunca ser pensado como uma mera coleção de unidades.*”²⁰ Na intuição do desdobramento do tempo reside a origem dos objetos matemáticos e o conceito de rigor ligado a eles.

*

*

²⁰ “Finally this basal intuition of mathematics, in which the connected and the separate, the continuous and the discrete are united, gives rise immediately to the intuition of linear continuum, i.e., of the ‘between’, which is not exhaustible by the interposition of new units and which therefore can never be thought of as a mere collection of units” (BROUWER, 1912, p. 80).

Desta feita, existe um paralelismo entre a adoção de um conceito de rigor calcado na demonstração lógica e outro na evidência intuitiva; todavia, tanto um quanto o outro são problemáticos, se considerados em sua forma pura: o padrão de rigor demonstrativo, pelas próprias características intrínsecas dos objetos matemáticos, permite a correção, mas paga o preço da esterilidade formal com a qual se compromete; o rigor delineado como evidência intuitiva, por sua vez, articula-se de uma maneira em que existe um sentido e uma espécie de iluminação interna, que de tão imediata e evidente, escapa à perfeita formulação discursiva e não responde, por exemplo, à possibilidade de transmissão para além do intelecto que o gerou, faltando-lhe objetividade, por conta de seu caráter fugidio.

Uma saída possível para essas dificuldades é a de tentar combinar as virtudes desses dois critérios, de maneira que elas se superponham aos seus respectivos problemas, harmonizando-os. Reconhecendo, portanto, um lugar de direito tanto para a demonstração lógica (contra a perspectiva brouweriana) quanto para a intuição (contra o logicismo e o neologicismo), esse esforço deve começar por uma tentativa de colocar “cada noção em seu devido lugar”. Deve-se reservar à demonstração lógica o único lugar que lhe cabe dentro da estrutura da ciência, a saber, o critério último para a verificação (ou o estabelecimento) do rigor de uma teoria matemática; assim, no que diz respeito aos constituintes formais da disciplina, a presença de um critério de rigor diferente do rigor lógico-demonstrativo parece fraco em demasia para fundar a ciência que tem os objetos como formas puras. Logo, se o rigor cabe à forma lógico-demonstrativa, o papel reservado à noção de evidência intuitiva deve residir em outra seara que não a do rigor puro e simples, uma seara que dê conta de responder ao desafio intrínseco à esterilidade do saber matemático e sua consequente dissociação em relação ao “real”. Desse modo, a estrutura da matemática pode ser vista como um amálgama entre evidência intuitiva e demonstração lógica. Se a demonstração lógica garante a segurança da certeza de uma maneira impossível à evidência intuitiva, a intuição, além de garantir a unidade e oferecer aquilo que denominamos *ato originário* da disciplina, possibilita também um entendimento de seu sentido²¹ e os mecanismos para sua criação e seu desenvolvimento.

²¹ Cabe esclarecer que, no nível de articulação da teoria no qual nos encontramos, o fato de estarmos comprometidos em primar pela demonstratividade lógica como base do rigor da disciplina não significa necessariamente que precisemos comprometer-nos com alguma formulação lógica em particular em detrimento de outra. Havendo várias lógicas possíveis, há também várias instanciações matemáticas decorrentes desses modelos. Outro aspecto interessante é o de que a demonstração fundada na lógica desempenha um papel de juíza

3.2. Abstração, forma e demonstração

Sob o ponto de vista antirrealista, no processo de abstração é que a própria matemática parece encontrar seu nascedouro,²² quando o intelecto realiza essa “seleção” do que importa para seu contexto específico e que passa efetivamente a constituir o âmbito das relações matemáticas. Se considerarmos o uso comum de medidas e contagens donde originariamente surge a matemática elementar, o caráter abstrato do número é evidenciado, e, ao assim procedermos, privilegiamos a *relação de quantidade* em detrimento de tantas outras relações possíveis a observar. Logo, uma das leituras viáveis acerca da gênese matemática é a de que, apesar de nascer *no mundo*, ela se impõe como disciplina autônoma quando dele vai se distanciando cada vez mais, pois, no que diz respeito ao universo matemático, não importa de fato a que estamos eventualmente nos referindo, mas somente as possibilidades de relações que o raciocínio estabelece através de suas regras (o que se faz por um ato de abstração), por intermédio de uma nomenclatura própria, que deve ser clara o suficiente para denotar todo o rigor almejado pelo juízo abstrato.

Obviamente esse recurso à abstração não é exclusivo à matemática, pois ele figura como uma característica marcante da própria razão e condição de existência de um discurso racional minimamente genérico. Aliados dessa capacidade, teríamos o triste destino de Funes, o memorioso, personagem de Jorge Luis Borges,²³ preso a um mundo de impressões

cega. Ela efetivamente dá a última palavra em relação a uma teoria, mas não encerra todo o processo. O logicismo de Frege, assim como o neologicismo de Wright e Hale, portanto, pecam ao propor *parte* da matemática como sua totalidade. Por isso, relegar completamente a intuição em nome da lógica demonstrativa é algo temerário. Henri Poincaré dá um bom exemplo das objeções que podem ser dirigidas a tal perspectiva. Crítico irascível do modo como alguns de seus contemporâneos lançam-se à empreitada da perfeita formalização em detrimento do papel fundamental da intuição, ele utiliza uma boa dose de ironia para evidenciar o absurdo a que pode chegar o rigor formal exacerbado na aritmética: “*Vemos que o Sr. Burali-Forti define o número 1 da seguinte maneira: $I = \neg \exists T \{Ko \cap (u, h) \ni (u \in Un)\}$, definição muito própria para dar uma ideia do número 1 às pessoas que nunca ouviram falar dele*” (POINCARÉ, 1986[1905], p. 22).

²² Não é necessário assumir um compromisso com qualquer tese mais profunda, ao menos neste momento do trabalho. Basta pensar a origem dos objetos e operações matemáticas de um ponto de vista empírico, como um ato de abstração. Qualquer outra proposição nesse sentido levaria à necessidade de uma argumentação mais bem elaborada, pois isso nos obrigaria a dar conta, por exemplo, de sua natureza apriorística ou de um realismo subjacente. Evitamos estas questões momentaneamente, para tratá-las a seu tempo.

²³ “*A voz de Funes, vinda da escuridão, seguia falando.*

Disse-me que em 1886 havia elaborado um sistema original de numeração e que em muito poucos dias havia ultrapassado vinte e quatro mil. Não o havia escrito, porque o pensado uma só vez já não podia desvanecer-lhe. (...) Em lugar de sete mil e treze, dizia (por exemplo) Máximo Pérez; em lugar de sete mil e catorze, A Ferrovia (...) Cada palavra tinha um signo particular, uma espécie de marca; as últimas eram muito complicadas... Eu tratei de explicar-lhe que essa rapsódia de vozes desconexas era precisamente o contrário de um sistema de numeração. Eu lhe observei que dizer 365 era dizer três centenas, seis dezenas, cinco unidades, análise que não existe no “número” “O negro Timóteo a manta de carne”. Funes não me entendeu ou não quis me entender.

criado por uma mente tão brilhante e tão precisa que o torna, por isso mesmo, uma espécie *sui generis* de alienado; afinal, como ignorar que a própria possibilidade da linguagem deriva de uma capacidade de abstração inerente à natureza do intelecto humano?²⁴ Não existe discurso genérico realizável que não passe por um processo de abstração e, como o discurso matemático insere-se indubitavelmente no âmbito da linguagem humana, o que se passa com ele não é diferente. A natureza abstrata do conceito de número permite que trabalhem dentro de uma estrutura própria (que remete a uma classificação adequada e a regras de operação peculiares), que pode ou não encontrar paralelo na realidade, pois para o sistema formal uma vez estabelecido, a relação com a realidade é secundária. Entretanto, empregando a nomenclatura da metafísica clássica, que espécie de substancialidade pode-se atribuir ao número que se dissocie (e, de alguma forma, suplante) sua definição? O direcionamento da resposta a essa pergunta está no cerne da discordância entre realistas e nominalistas. Mas abordemos o problema sob outro foco: um olhar direcionado à definição de substâncias naturais, em Tomás de Aquino, por exemplo, pode dar o contraste do qual precisamos:

Com efeito, evidencia-se que a essência é aquilo que é significado pela definição do ser. A definição das substâncias naturais, entretanto, contém não apenas forma, mas

Locke, no século XVII, postulou (ou reprovou) um idioma impossível no qual cada coisa individual, cada pedra, cada pássaro e cada ramo tivesse um nome próprio; Funes projetou uma vez um idioma análogo, mas o desdenhou por parecer-lhe demasiado geral, demasiado ambíguo. De fato, Funes não apenas recordava cada folha de cada árvore de cada monte, mas também cada uma das vezes que a havia percebido ou imaginado. Resolveu reduzir cada uma de suas jornadas pretéritas a umas setenta mil lembranças, que definiria logo por cifras. Dissuadiram-no duas considerações: a consciência de que a tarefa era interminável, a consciência de que era inútil. Pensou que na hora da morte não haveria acabado ainda de classificar todas as lembranças da infância.

Os dois projetos (um vocabulário infinito para a série natural dos números, um inútil catálogo mental de todas as imagens da lembrança) são insensatos, mas revelam certa balbuciante grandeza. Deixam-nos vislumbrar ou inferir o vertiginoso mundo de Funes. Este, não o esqueçamos, era quase incapaz de idéias gerais, platônicas. Não apenas lhe custava compreender que o símbolo genérico ‘cão’ abarcava tantos indivíduos díspares de diversos tamanhos e diversas formas; perturbava-lhe que o cão das três e catorze (visto de perfil) tivesse o mesmo nome que o cão das três e quatro (visto de frente). Sua própria face no espelho, suas próprias mãos, surpreendiam-no a cada vez. Comenta Swift que o imperador de Lilliput discernia o movimento do ponteiro dos minutos; Funes discernia continuamente os avanços tranquilos da corrupção, das cáries, da fadiga. Notava os progressos da morte, da umidade. Era o solitário e lúcido espectador de um mundo multiforme, instantâneo e quase intoleravelmente preciso” (BORGES, 1979, p. 481-4). A indicação desse exemplo devo ao professor João Virgílio Galerani Cuter.

²⁴ O uso do termo “abstração” pode ser mais amplo do que o emprego que adotamos aqui. A raiz etimológica do termo provém do latim *abstrahere*, e significa tirar, puxar, arrancar, o que permite desdobramentos variados. O seu uso mais comum é o que vemos, por exemplo, em Pedro Abelardo, quando esclarece a relação existente entre matéria e forma: “matéria e forma sempre existem misturadas ao mesmo tempo, mas a razão, pertencente à alma, tem o poder que é ora considerar a matéria por si mesma, ora dirigir a atenção só para a forma, ora conceber as duas misturadas. Por certo, os dois primeiros casos são processos de abstração” (ABELARDO, 1973, p. 240). Em Kant, por outro lado, a aplicação do termo “abstrair” (*abstrahieren*) é intransitiva: não se trata de abstrair *de* algo, mas simplesmente de um ato de escolha de características essenciais em detrimento das não essenciais em relação à representação ou conceito original (cf. INWOOD, 1997, p. 41).

também matéria; se não fosse assim, as definições de coisas naturais e de objetos matemáticos não difeririam.²⁵

A distinção entre forma e matéria enquanto componentes de um ente natural realiza-se a partir de um processo de abstração, algo que não ocorre na realidade, mas apenas no campo conceitual e, conseqüentemente, discursivo (quando, por exemplo, consideramos o que vem a ser a matéria ou a forma de um ser humano, sem que seja possível efetivamente separar uma da outra). Todavia, a natureza dos objetos matemáticos respeita outra sistemática: ainda que se obtenha o conceito de número por um processo de abstração, falar de números e operações matemáticas significa, em última análise, tratar de “entes” abstratos formais, totalmente isentos de qualquer materialidade. Toda a sua essência (com toda a carga metafísica que essa palavra nos inspira a partir de Tomás de Aquino) reside apenas em sua forma. O trecho de São Tomás é sugestivo por deixar claro qual é a peculiaridade do ente matemático, ao menos a partir de uma definição por exclusão: os objetos matemáticos são aqueles que se caracterizam, em oposição aos seres naturais, pela ausência de matéria, tendo como substrato último apenas a forma.²⁶ Se o ente natural é compreendido através da relação entre forma e matéria, onde parece haver uma interdependência desses atributos, aquilo de que trata a matemática, por isentar-se de matéria, deve ser suficiente e totalmente resolvido apenas pelo recurso à forma.

Trazendo essa perspectiva para o contexto da matemática contemporânea, obviamente devemos atentar para as diferenças importantes que existem entre uma e outra concepção. A título de exemplo, o conceito de matéria, em Tomás, não pode ser imediatamente identificado como uma espécie de conteúdo que “preenche” a forma – tendo em vista o caráter negativo do conceito de matéria em Aristóteles - o que inviabiliza uma aproximação em relação a uma formulação contentual da matemática, como vemos nos trabalhos mais tardios de Hilbert e nos preceitos do intuicionismo. Também não há que se pretender uma identidade entre o caráter abstrato da forma na metafísica clássica com a forma de natureza hipotético-dedutiva

²⁵ “*Ex hiis que dicta sunt patet quod essentia est illud quod per diffinitionem rei significatur; diffinitio autem substantiarum naturalium non tantum formam continet sed etiam materiam, aliter enim diffinitiones naturales et mathematice non differunt*” (TOMÁS, 1995, p. 17 – grifo meu).

²⁶ «*Je ne sais si je n'ai pas déjà dit quelque part que la mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. Il convient que ces choses, différentes par la matière, soient semblables par la forme, qu'elles puissent pour ainsi dire se couler dans le même moule.*» [Não sei se já disse em algum lugar que a matemática é a arte de dar o mesmo nome a coisas diferentes. É preciso que essas coisas, diferentes no que tange à matéria, sejam semelhantes quanto à forma, que elas possam, por assim dizer, ajustar-se a um mesmo molde.] (POINCARÉ, 1908, p. 29).

típica do formalismo, por exemplo. Basta-nos, portanto, reconhecer que referências tão díspares quanto a metafísica medieval e a matemática contemporânea concordam no aspecto fundamental de centrar a essência dos entes/objetos matemáticos em sua determinação formal.²⁷ Todavia, quando referimo-nos à primazia da forma na determinação dos objetos matemáticos, não é preciso que recorramos a qualquer espécie de leitura estruturalista, muito menos realista. Basta pensar o conceito de forma como fundado em uma definição, produzida a partir de um ato mental de abstração.

Nesse contexto, o fato da totalidade dos objetos matemáticos encerrar-se em sua pura forma não significa, em absoluto, que a remissão à forma explica *toda* a matemática: ela não se encerra exclusivamente nos entes dos quais trata, assim como a arte pictórica não se resume a telas em branco, pincéis e a bisnagas de tinta. A forma caracteriza a natureza do *objeto* matemático. Não há nele necessariamente conteúdo e, nesse sentido, o que distingue objetos matemáticos de objetos lógicos é o fato de que aqueles tratam da forma das grandezas, quantidades e medidas em geral, enquanto a lógica propõe-se ao tratamento de um universo de relações muito mais amplo. A relação intrínseca entre o âmbito da lógica e da aritmética parece ainda mais evidente se considerarmos que a forma, do modo como apresentada, só pode ser forma lógica, sob um ponto de vista contemporâneo relativo aos objetos da disciplina, enquanto elementos passíveis de tratamento e de expressão lógicos. As definições que constituem a forma dos objetos matemáticos, obtidas a partir de atos de criação e de abstração, prestam-se à veiculação por meio da linguagem lógica, como não poderia deixar de ser, pois isso soa como uma decorrência natural do rigor e da abstração característicos do saber matemático. Naturalmente, portanto, se ignorada a distinção entre, de um lado, objetos matemáticos e suas propriedades, e de outro, as atividades possíveis a partir desses objetos, a filiação de uma a outra parece óbvia e, nesse caso, o logicismo teria toda razão na sua tese

²⁷ Assim, não há, sob pena de descaracterizar a natureza abstrata da matemática, que aceitar uma definição de seus objetos em termos de matéria ou conteúdo, ainda que não se considere o problema inerente à definição última do conceito de matéria apontado por Hegel e retomado por Cavaillès (1942, p. 5): por ser a noção de matéria uma noção limite, um conteúdo sem seu conceito, é extraconceitual e, enquanto tal, meramente formal e carente de sentido. Logo, no que tange à consideração dos objetos matemáticos, a impossibilidade de recorrer à noção de conteúdo, (uma vez que só se poderia fazê-lo a preço de descaracterizar sua natureza abstrata e atrelá-la a um ato mental individual) não se trata de uma solução viável. O objeto matemático, por isso mesmo, limita-se ao âmbito formal. A forma é, por assim dizer, a totalidade do objeto matemático: « *Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre les objets ; il leur est donc indifférent de remplacer ces objets par d'autres, pourvu que les relations ne changent pas. La matière ne leur importe pas, la forme seule les intéresse.* » [Os matemáticos não estudam objetos, mas relações entre objetos; para eles, é indiferente substituir esses objetos por outros, desde que as relações não mudem. A matéria não lhes importa, apenas a forma lhes interessa.] (POINCARÉ, 1902, p. 49).

originária. Sugiro, todavia, que essa é uma leitura parcial do problema. A lógica tem seu papel de direito e uma importância fundamental, mas é preciso reconhecer que a forma, mesmo quando declaradamente lógica, mesmo enquanto totalidade dos objetos matemáticos, não nos fornece o instrumental necessário para abarcar toda a disciplina.

Em suma, a ampliação inadvertida da importância do conceito de forma - que, metaforicamente, pode lembrar a tentativa de compreender uma peça musical apenas pela descrição de cada nota - pode levar, por exemplo, à consideração de que toda a matemática resume-se a uma atividade lógica,²⁸ ponto de vista retomado pela perspectiva neologicista. Como vimos, a base argumentativa do neologicismo está centrada na substituição do princípio de extensionalidade, fundamental para o logicismo fregeano, por outro recurso postulacional que torna possível superar as dificuldades iniciais do logicismo, recurso esse que Frege já denominara *princípio de Hume*. Com a retomada desse princípio, o neologicista espera apresentar uma definição satisfatória de número, o que supostamente explicaria de maneira não problemática o princípio de abstração dentro dos limites da própria lógica. Wright e Hale propõem para tanto um recurso que denominam “*The Dedekindian Way*”, que consiste em uma cadeia sucessiva de abstrações, com base no recurso à forma lógica:

A partir do método de Dedekind, portanto, sucessivas abstrações conduzem-nos da correspondência unívoca de conceitos para cardinais, de cardinais para pares de cardinais, de pares de cardinais finitos para inteiros, de pares de inteiros para racionais e, finalmente, do conceito de racionais para (o que é então identificado como) os reais.²⁹

As reconhecidas fragilidades dessa nova perspectiva também não são poucas; para resumi-las em poucas palavras, os autores citam principalmente a dificuldade intrínseca da *realização* dessa cadeia de raciocínios, a trivialidade envolvida na adoção do princípio de

²⁸ Uma breve digressão e relação ao papel desempenhado pela intuição é oportuna. A insuficiência alegada da forma como *totalidade* da matemática, apesar de caracterizar a totalidade da essência de seus objetos, não autoriza pensar a intuição como uma espécie de conteúdo ao qual se refira a forma, a exemplo do modo como se dá a compreensão dos objetos reais/substanciais. Como não partimos de preceitos revisionistas, a exigência contentual do intuicionismo não pode prosperar enquanto fundamento de uma noção geral de número, justamente por sua aplicabilidade apenas no domínio dos racionais. Assim, no que diz respeito especificamente à constituição do objeto matemático, o papel desempenhado pela intuição assenta-se no processo de abstrair o conteúdo de uma determinada forma. “Purificar” o objeto matemático, torná-lo uma forma isenta de conteúdo, e consequentemente, oferecer à matemática seu objeto, é um processo cuja origem escapa a uma formalização rigorosa.

²⁹ “*On the Dedekindian Way, then, successive abstractions take us from one-to-one correspondence on concepts to cardinals, from cardinals to pairs of cardinals, from pairs of finite cardinals to integers, from pairs of integers to rationals, and finally from concepts of rationals to (what are then identified as) reals*” (HALE & WRIGHT, 2005, p. 187).

Hume, além de reconhecê-lo necessariamente como um recurso impredicativo, mas que *pode* ainda assim ser consistente no âmbito de uma lógica de segunda ordem (cf. HALE & WRIGHT, 2005, p. 185-7). Contudo, malgrado as dificuldades que enfrenta, essa nova alternativa não pode ser ignorada, por constituir-se em uma possibilidade real de considerar a prova demonstrativa como um todo bem constituído e articulado, e que certamente alimentará muitas contendas entre realistas e nominalistas no que concerne à metafísica subjacente à matemática e à aceitabilidade ou não desses princípios como formas de assegurar uma existência independente dos seres matemáticos. Entretanto, basta-nos aqui observar qual é o recurso utilizado pelos neologicistas: reduzir toda a abstração que envolve a construção das séries fundamentais da matemática a passos lógicos, a partir de um sistema de definições. Esse procedimento tem uma finalidade declarada:

Uma vez que os fatos acerca de correspondências unívocas de conceitos – basicamente, toda sorte de conceitos nos quais apenas objetos concretos se enquadram – são, como podemos razoavelmente presumir, acessíveis de maneira não problemática, nós obtemos acesso, através do princípio de Hume, às verdades correspondentes cuja formulação envolve uma referência a números, sem a necessidade de postular quaisquer misteriosas faculdades extrassensoriais ou a assim chamada intuição matemática.³⁰

Parece no mínimo curioso negar o emprego de “misteriosas faculdades extrassensoriais” e da intuição matemática com o objetivo de alicerçar uma tese que soa, em si, muito mais misteriosa e extrassensorial: a da existência independente de objetos matemáticos. Todavia, a perspectiva neologicista serve à dupla função de fundamentar a matemática em bases lógicas e sustentar o realismo; ocorre, contudo, que ela não realiza essa função satisfatoriamente, sobretudo porque a definição e o encadeamento de raciocínios têm limites óbvios: eles não dão conta satisfatoriamente nem da noção de infinito, nem da intuição de número. Entendemos, portanto, que, contra os argumentos do neologicismo, a definição da forma, que é a origem primária da essência dos objetos matemáticos, está indissociavelmente ligada a um ato originário de intuição, para o qual só se encontra fundamento ulterior através da explicitação da atividade da consciência que o efetua. O exercício de abstração propriamente dito, realizado pela intuição e traduzido em pura forma, ratifica a profunda identidade que se estabelece entre a estrutura intrínseca da matemática e a forma lógica tal

³⁰ “Provided that facts about one-one correlation of concepts – in the basic case, all sort of concepts under which only concrete objects fall – are, as we may reasonably presume, unproblematically accessible, we gain access, via Hume’s Principle and without any need to postulate any mysterious extrasensory faculties or so-called mathematical intuition, to corresponding truths whose formulation involves reference to numbers” (HALE & WRIGHT, 2005, p. 173).

como descrita, por exemplo, por Cavaillès, ao sustentar que “*não apenas os conteúdos objetivos são negligenciados, mas até mesmo a maneira como eles apresentam-se ao conhecimento. O formal coincide com o ato de pensar em geral, ou seja, com o ato de unificar diversas representações sob uma única.*”³¹ Uma vez estabelecidos formalmente, os objetos encontram sua expressão e seu desenvolvimento através de um procedimento adequado à sua vacuidade contentual: as regras que lhe são peculiares, a saber, o conjunto de premissas lógico-demonstrativas.

Ao adotar essa perspectiva, desloco o problema conforme tratado pelos neologicistas. Em termos gerais, o que ocorre é o seguinte movimento: os neologicistas partem do pressuposto de que a forma lógica é suficiente para assegurar a existência no nível semântico. Com isso, apostam em um trabalho exaustivo e intrincado do ponto de vista lógico, para procurar assegurar tanto quanto possível uma formalização dos processos de abstração envolvidos no que eles denominam *definição* dos objetos matemáticos. Sob a perspectiva que adoto, além da abstração não se resumir a procedimentos lógicos, a definição é parte - não totalidade - da *criação* dos objetos matemáticos. Ao contrário do neologicista, atribuo à intuição um papel originário e direcionador da ciência em geral, e da matemática especificamente. Essa estratégia exigirá um maior esforço quando discutirmos os temas do último capítulo, ao alocar o problema em uma justificação fundada obrigatoriamente no delineamento de uma teoria da ciência e da consciência que a origina.

* *

A demonstração matemática é o modo através do qual se articula adequadamente o conjunto de objetos conforme descritos até agora. É a única instância que lhe cabe, a única referência possível para sua natureza peculiar: regras para definir a maneira como tais formas isentas de conteúdo podem ser combinadas. O recurso a essas regras só pode dar-se na forma do pensamento em geral, ou seja, na lógica, de modo que as regras demonstrativas matemáticas devem ser, em última análise, regras lógicas aplicadas à peculiaridade desses objetos. Todavia, do ponto de vista histórico, essa aproximação entre lógica e a forma matemática não é dada imediatamente. Como vimos no primeiro capítulo, até o advento da lógica matemática, as formas de expressão do raciocínio matemático e do raciocínio lógico

³¹ « *Non seulement les contenus objectifs sont négligés mais même la façon dont ils se présentent à la connaissance. Le formel coincide avec l'acte de penser en général, c'est-à-dire d'unifier diverses représentations sous une seule* » (CAVAILLÈS, 1942, p. 5).

eram completamente díspares, pois qualquer emprego de símbolos para veicular as noções lógicas (como a de inferência, de identidade, de negação), por mais que assumisse traços semelhantes àqueles utilizados na matemática e mesmo que a eles se referissem, encontrar-se-ia limitado pela peculiaridade da natureza da proposição conforme concebida dentro do universo das chamadas lógicas de inspiração aristotélica. A *teoria dos modelos*, ramo das ciências formais que só se articularia no século XX, diagnosticaria com maior precisão a dificuldade de tornar a lógica aristotélica e a álgebra compatíveis: o cerne do problema está na ausência, até então, de um modelo isomórfico que permitisse a tradutibilidade mútua entre essas duas estruturas modelares (cf. HODGES, 1998, p. 1, 5-6).³² A criação de uma estrutura isomórfica não significa, entretanto, que a matemática e a lógica eram instâncias distintas e passaram a ser próximas. Essa aproximação permite indubitavelmente uma expressão “matematizada” das leis da lógica, bem como uma expressão lógica que caracteriza a metalinguagem matemática, mas trata-se apenas de um instrumento para sua expressão nesses termos. Há um engano sério em considerar que uma está atrelada à outra, engano semelhante ao do estruturalista, que tende a enxergar como uma única e mesma coisa os sistemas que compartilham estruturas sob um mesmo ponto de vista.

O desenvolvimento da lógica entre os séculos XIX e XX propicia assim a possibilidade de vislumbrar que a forma demonstrativa pela qual são expressos e combinados os objetos matemáticos é, antes de tudo, lógica. Isso significa que o desenvolvimento do sistema deve ser realizado a partir de regras perfeitamente claras em relação à forma do raciocínio, independentemente de sua expressão simbólica. A forma lógico-demonstrativa de um sistema matemático é caracterizada pela observância estrita em relação a regras preestabelecidas por meio do que se processam as operações que, ao final de contas, são a

³² Isso se dá paralelamente ao próprio desenvolvimento lógico de alguns ramos da matemática. A lógica aplicada à matemática, por exemplo, fomentou a criação de teorias específicas, « *comme la théorie des fonctions récursives, la théorie des modèles, la logique algébrique, la théorie des algorithmes et autres encore, qui ont « imposé » pour ainsi dire l'acceptation de la logique en tant que chapitre indépendant (et avec beaucoup d'articulations et de subdivisions) de l'encyclopédie des mathématiques. Quant au « pourquoi », on fait de la logique ou, si l'on préfère, quant aux buts de cette discipline, on reconnaît assez facilement, à côté des intérêts théoriques qui la rapprochent des autres disciplines mathématiques, les services qu'elle peut rendre dans l'élaboration des langages artificiels, et plus spécialement dans les différents domaines de l'informatique (donc sur le terrain de l'application strictement entendue).* » [... como a teoria das funções recursivas, a teoria dos modelos, a lógica algébrica, a teoria dos algoritmos e outras mais, que impuseram, por assim dizer, a aceitação da lógica como capítulo independente (e com muitas articulações e subdivisões) da enciclopédia da matemática. Quanto ao ‘porquê’ da lógica ou, se preferirmos, quanto aos seus fins, pode-se reconhecer muito facilmente, à parte dos interesses teóricos que a relacionam a outras disciplinas matemáticas, seus relevantes serviços para a elaboração de linguagens artificiais e, mais especificamente, para os diferentes domínios da informática (no plano específico de sua aplicação).] (AGAZZI, 1986, p. 18).

expressão das relações possíveis entre objetos. De acordo com as regras definidas, um determinado procedimento pode ser aceito ou não. Tomemos, por exemplo, a geometria proposta por Hilbert no “*Grundlagen der Geometrie*”. Assim que o autor introduz os nomes e as notações dos elementos básicos de seu sistema, ele define as relações possíveis entre esses objetos, o que o torna antes de tudo a aplicação de um método e seu desenvolvimento formal.³³ Pontos, linhas e planos, seja lá o que forem (pois a interpretação desses conceitos não está em questão sob a perspectiva meramente axiomática), articulam-se entre si através de determinadas regras, de modo que as relações possíveis entre esses elementos dentro desse sistema particular devem ser previstas ou simplesmente não podem existir:

Não é possível deduzir desses axiomas, por qualquer procedimento de raciocínio lógico, uma proposição que é contraditória em relação a qualquer outra. Para demonstrar isso, é suficiente construir uma geometria onde todos os cinco grupos (de axiomas básicos apresentados anteriormente) são satisfeitos.³⁴

Um sistema axiomático, como é o caso dos sistemas matemáticos *standard*, tem como pressuposto a filiação intransigente às bases do raciocínio lógico. *Demonstrar* um teorema, nesse sentido, significa ater-se à perfeita observância desses princípios, dentre as quais o mais usual e central é o de não contradição, malgrado a existência de sistemas heterodoxos (dos quais o intuicionismo brouweriano é o primeiro exemplo) que denegam a validade de alguns princípios da lógica clássica, como as lógicas paraconsistentes e paracompletas.³⁵ Destarte, o

³³ “Usually the story of Hilbert’s philosophy of mathematics is written starting with his seminal *Grundlagen der Geometrie*, not really a book on method, but the application of a method, the axiomatic method, to Euclidean geometry. Nevertheless, with this book modern axiomatics was created. Hilbert proceeded from three imagined systems of things (points, straight lines, planes) which he called, using the Kantian term, “thought things”. He then described their interrelations in a set of 20 axioms. In addition he investigated this set of axioms as an object in itself, proving its completeness, the independence of the axioms, and its consistency.” [Frequentemente a história da filosofia matemática de Hilbert é escrita começando-se por uma obra muito significativa, o *Grundlagen der Geometrie*, que não era um livro sobre o método, mas a aplicação de um método, o método axiomático, à geometria euclidiana. Apesar disso, com esse livro, foi criada a axiomática moderna. Hilbert partiu de três sistemas de coisas ‘imaginárias’ (pontos, linhas retas e planos) que ele denominou, utilizando a terminologia kantiana, de ‘objetos mentais’. Ele então descreveu suas relações mútuas através de um conjunto de vinte axiomas. Além disso, estudou esse conjunto de axiomas como um objeto em si, provando sua completude, a independência de seus axiomas e sua consistência.] (PECKHAUS, 2002, p. 4).

³⁴ “The axioms, which we have discussed in the previous chapter and have divided into five groups, are not contradictory to one another; that is to say, it is not possible to deduce from these axioms, by any logical process of reasoning, a proposition which is contradictory to any of them. To demonstrate this, it is sufficient to construct a geometry where all of the five groups are fulfilled” (HILBERT, 1950, p. 17 - grifo meu). A demonstração dos axiomas é lógica, mas sua obtenção é tomada por Hilbert como produto de um ato de intuição.

³⁵ Resumidamente, a lógica paraconsistente tem a finalidade de dar conta de sistemas inconsistentes, mas não triviais, que chegam a denegar o princípio de não contradição em circunstâncias específicas. A lógica paracompleta, por sua vez, não aplica o princípio do terceiro-excluído ao não exigir que, dadas uma asserção e sua negação, uma delas seja verdadeira, assim como restringindo o princípio da bivalência (DA COSTA, 1997, p. 81-3).

sistema lógico que fundamenta cada teoria é importante para sua consideração específica, bastando ressaltar a identidade existente entre observância de preceitos lógicos e demonstrabilidade. Uma teoria só é demonstrável a partir do momento em que radica seu desenvolvimento em critérios logicamente aceitos. Há, todavia, que observar-se a impossibilidade de fazer coincidir perfeitamente a noção de demonstrabilidade com a de verdade. O motivo é simples: o conceito de verdade é mais amplo que a noção de demonstrabilidade, pelo simples fato de reconhecermos a existência de noções verdadeiras e indemonstráveis.³⁶ Essa característica traz à tona também a relação entre, de um lado, a demonstrabilidade do sistema e, de outro, sua completude e consistência. Gödel provou a consistência para a lógica de primeira ordem e o incômodo posicionamento a ser adotado em relação à consistência ou completude na matemática elementar. Como a matemática tem obrigatoriamente em seu horizonte uma lógica de segunda ordem por conta de suas próprias demandas internas (como a construção da série dos naturais), o teorema de completude aplica-se apenas a sistemas lógicos mais restritos que os empregados na matemática elementar, pois ela não pode se furtar de dar conta de sua relação com o infinito, um problema sério para a demonstrabilidade lógica, por conta do princípio de indução matemática, formalizado, por exemplo, na aritmética de Peano.³⁷

Para nossa finalidade no que tange a esclarecer os aspectos intrínsecos da concepção estrutural da matemática aqui proposta, os temas estão suficientemente delineados. A demonstração está centrada na rígida observância da regra lógica subjacente ao discurso matemático que tem como premissa básica e fundamental o princípio lógico de identidade, do

³⁶ “Com o desenvolvimento da lógica moderna, a noção de demonstração matemática sofreu uma simplificação de longo alcance. Uma sentença de uma dada disciplina formalizada é demonstrável se ela pode ser obtida dos axiomas dessa disciplina pela aplicação de certas regras de inferência simples e puramente formais, tais como aquelas de destacamento e de substituição. Logo, para mostrar que todas as sentenças demonstráveis são verdadeiras, basta demonstrar que todas as sentenças aceitas como axiomas são verdadeiras, e que as regras de inferência, quando aplicadas a sentenças verdadeiras, acarretam novas sentenças verdadeiras. E isso não apresenta qualquer dificuldade. Por outro lado, tendo em vista a natureza elementar da noção de demonstrabilidade, uma definição precisa dessa definição requer apenas dispositivos lógicos bem simples. Na maioria dos casos, aqueles dispositivos lógicos que estão disponíveis na própria disciplina formalizada (com as quais a noção de demonstrabilidade está associada) são mais que suficientes para esse propósito. Sabemos, contudo, que no que diz respeito à definição de verdade, vale exatamente o oposto. Logo, como uma regra, as noções de verdade e demonstrabilidade não podem coincidir. E, uma vez que toda sentença demonstrável é verdadeira, deve haver sentenças verdadeiras que não são demonstráveis.” (TARSKI, 2007[1944], p. 177).

³⁷ “O raciocínio dedutivo não se enquadra, inteiramente, na lógica elementar. No referente à matemática, por exemplo, tem-se necessidade de recursos lógicos mais fortes. No terreno clássico, torna-se possível reforçar a lógica elementar seguindo-se dois caminhos diversos: pela teoria dos conjuntos ou pelo cálculo de predicados

qual os princípios de não contradição e do terceiro-excluído são consequências, digamos, naturais, malgrado as lógicas heterodoxas. É a partir do princípio de identidade, por exemplo, que Frege deriva o conceito de número.³⁸ Até agora, portanto, a perfeição da matemática está garantida e acima de quaisquer ataques: trata-se de uma disciplina fundada em objetos essencialmente isentos de conteúdo, que podem ser combinados de acordo com regras que se fundam, no mínimo, no princípio de identidade. Tamanha vacuidade só pode garantir um sistema incapaz de comprometer-se com conteúdo algum.

O trecho acima ressalta uma questão já introduzida anteriormente: articulada apenas nesse nível, a matemática adota uma faceta de mera operação de símbolos formais.³⁹ Concebida em termos essencialmente lógicos, ela encontra-se em face de um dilema muito

de ordem superior (teoria dos tipos). Deve-se, em resumo, elaborar uma grande lógica ou uma lógica não-elementar” (DA COSTA, 1980, p. 68).

³⁸ No “*Die Grundlagen der Arithmetik*” (“*Os Fundamentos da Aritmética*”), texto de 1884, Frege procura definir satisfatoriamente o conceito de número. Sua abordagem reproduz primeiramente o conceito leibniziano de número, e o toma como insuficiente, uma vez que, pelo que se espera do conceito de número sob a perspectiva logicista, a estratégia de Leibniz não pode ser corroborada, porque não é aceitável que se pretenda extrair o conceito de um número a partir de outro, por serem objetos (ou melhor, conceitos) totalmente independentes entre si (FREGE, 1884, p. 130-1). Portanto, antes de atermo-nos à formação das sequências numéricas como sugere a definição leibniziana, é preciso entender sob uma perspectiva puramente lógica a geração dos números, tarefa a que Frege se propõe. Ele utiliza para levar a cabo seu intento uma estratégia de investigar a natureza do que consideramos “o número” a partir da função que exerce nas expressões (enunciados) que elaboramos. A coerência de seu raciocínio o leva a procurar definir a *identidade numérica* antes de procurar estabelecer qualquer asserção no que tange às séries numéricas. Para isso, o conceito de identidade desempenha um papel fundamental. Ao tratar das chamadas *leis da igualdade*, Frege assevera que: “*Elas serão desenvolvidas como verdades analíticas do próprio conceito. Conforme Leibniz:*

‘Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate.’

[‘Coisas iguais são as que podem ser substituídas por outras sem alteração de seu (valor) de verdade.’]

Eu adotarei essa definição. (...) De fato, todas as leis de igualdade estão contidas no princípio universal de substitutividade” (FREGE, 1884, p. 136-7).

Consoante a essa leitura, Frege estabelece a relação existente entre esse princípio de substitutividade e os conceitos que idealizamos acerca dos objetos do discurso. O ato de definir reveste-se de um caráter dissociado do objeto e atinente, antes de tudo, ao símbolo ao qual se aplica. A identidade dos indiscerníveis, esse famoso princípio leibniziano, toma como base a possibilidade de substituição mútua, transcendendo evidentemente o universo dos objetos matemáticos: “*The definition of an object, as such, really says nothing about that object; rather it stipulates the meaning of a symbol. Once that has happened, the definition becomes a judgment which treats of the object: it now no longer introduces the object but stands on equal footing with other statements about it.*” [A definição de um objeto, em si mesma, na verdade nada diz acerca do objeto; ela estipula o significado de um símbolo. Uma vez ocorrido isso, a definição torna-se um julgamento que trata do objeto: ela não mais introduz o objeto, mas se mantém em pé de igualdade em relação a outras asserções acerca dele.] (FREGE, 1884, p. 138).

³⁹ Como já deixamos claro em outra oportunidade, podemos citar, por exemplo, a leitura de Poincaré do papel que deve ser atribuído à lógica quando considerados os raciocínios matemáticos: “*Em todos os momentos, Poincaré relega a lógica a segundo plano, tratando-a como um mero procedimento de classificação, que como todo procedimento analítico, ‘é estéril, pois a conclusão não é nada mais que as premissas traduzidas em uma outra linguagem’.* (POINCARÉ, 1902, p. 33). *Se a matemática tivesse suas bases fundadas apenas nos preceitos da lógica, ‘deveríamos admitir que todos os enunciados de todos os teoremas com os quais tantos volumes têm*

claro: ainda que fosse completa e consistente, seria tautológica. Mas sob esse ponto de vista, o que efetivamente ela ensina, ou a que serve? Esse problema, aliado ao da dissociação dos objetos matemáticos com a realidade,⁴⁰ impõe um alto preço ao caracterizá-la como um sistema formal isento de conteúdo e fundado em um procedimento lógico que nada diz em relação à realidade. Existe, portanto, a possibilidade de asseverar que o conhecimento nesses termos assemelha-se a um jogo de perde-ganha: quanto maior sua garantia adstrita aos limites da lógica,⁴¹ menor o conteúdo e até mesmo o sentido que ela é apta a expressar. Sua aplicação bem sucedida à física permanece uma incógnita. Essa conclusão parcial pode indicar que parte substancial do que de fato importa à matemática não está no que constitui propriamente sua natureza formal, demonstrativa, apesar de ser veiculado por ela, uma consideração que evidentemente envolve uma questão axiológica.⁴²

sido escritos são apenas maneiras indiretas de dizer que A é igual a A .’ (*Ibid.*, p.31). *O impacto que tal concepção de matemática terá frente ao logicismo é previsível?* (DEL VECCHIO, 2005, p. 69).

⁴⁰ „Im Leben ist es ja nie der mathematische Satz, den wir brauchen, sondern wir benützen den mathematischen Satz nur, um aus Sätzen, welche nicht der Mathematik angehören, auf andere zu schliessen, welche gleichfalls nicht der Mathematik angehören.“ [Na vida, a proposição matemática nunca é aquilo de que precisamos, mas utilizamos a proposição matemática apenas para inferir, de proposições que não pertencem à matemática, outras que igualmente não pertencem à matemática.] (WITTGENSTEIN, 1994, p. 262-3 – aforismo 6.211).

⁴¹ Obviamente, existem nuances de acordo com o sistema axiomático adotado em cada tentativa de formalização da matemática. O exemplo mais claro é o da grande diferença entre tentativas de formalização baseadas, de um lado, no cálculo de predicados de primeira ordem e, de outro, em lógicas de segunda ordem. Só faz sentido, por exemplo, considerar os teoremas de incompletude e o teorema de Löwenheim-Skolem dentro de uma perspectiva de lógicas de segunda ordem (cf. VÄÄNÄNEN, 2001, p. 505), o que traz a tiracolo não apenas questões de ordem tipicamente lógica, mas também filosófica.

⁴² « Les mathématiciens attachent une grande importance à l’élégance de leurs méthodes et de leurs résultats ; ce n’est pas là du pur dilettantisme. Qu’est-ce qui nous donne en effet dans une solution, dans une démonstration, le sentiment de l’élégance ? C’est l’harmonie des diverses parties, leur symétrie, leur heureux balancement ; c’est en un mot tout ce qui y met de l’ordre, tout ce qui leur donne de l’unité, ce qui nous permet par conséquent d’y voir clair et d’en comprendre l’ensemble en même temps que les détails. Mais, précisément, c’est là aussi ce qui lui donne un grand rendement ; en effet, plus nous verrons cet ensemble clairement et d’un seul coup d’oeil, mieux nous apercevrons ses analogies avec d’autres objets voisins, plus par conséquent nous aurons de chances de deviner les généralisations possibles. » [Os matemáticos atribuem grande importância à elegância de seus métodos e de seus resultados, algo que não se dá por puro dilettantismo. O que nos dá, com efeito, em uma solução, ou em uma demonstração, o sentimento de elegância? É a harmonia das diversas partes, sua simetria, seu equilíbrio; em uma palavra, tudo que lhe impõe uma ordem, que lhe dá unidade, o que nos permite, consequentemente, vê-la claramente, e compreender seu conjunto ao mesmo tempo em que seus detalhes. Mais precisamente, é assim também que se lhe atribui uma grande eficácia; com efeito, quanto mais pudermos ver esse conjunto claramente e de um só golpe de vista, melhor perceberemos suas analogias com

3.3. Sintaxe: a linguagem formal e o simbolismo matemático

Há uma notação própria para a expressão das ideias e relações matemáticas, como bem sabemos. O papel da linguagem simbólica dentro do contexto do pensamento lógico-matemático é fundamental, pois veremos que, em determinados casos, ela desempenha uma função ativa, o que ganha evidência com o advento das correntes formalista e logicista, até mesmo pela importância que adquire nesse contexto: a precisão e a abstração propiciadas pela linguagem simbólica, já enriquecida pela notação lógica, estavam intrinsecamente relacionadas ao projeto logicista, fazendo dela um instrumento muito adequado para a representação sistemática de proposições peculiares à lógica matemática nascente. As mudanças perpetradas a partir do advento da lógica matemática são importantes nesse sentido pela elucidação que fomentam acerca do emprego dos símbolos na matemática, e das consequentes distinções que podem nortear uma análise mais precisa do emprego da linguagem.

Logo, a linguagem simbólica é importante sob a perspectiva da nova lógica, por constituir-se em um elemento central da expressão da metateoria. Todavia, a aceitação e mesmo a compreensão relativa às suas peculiaridades desse novo modelo de lógica não ocorrem de imediato, até mesmo pelas profundas mudanças conceituais que traz em seu bojo (cf. capítulo 1, seção 1.3). Assim, a sintaxe impõe-se como um elemento fundamental para a compreensão das ciências formais, apesar de apresentar um papel preciso e limites bem evidentes:

O incrível poder das estruturas sintáticas é uma das descobertas mais notáveis dos lógicos do século XX, assim como as limitações dessas estruturas sintáticas. O que isso realmente significa é que a estrutura dos números naturais, assim como suas operações aritméticas, é inacreditavelmente mais poderosa do que alguém poderia imaginar a partir da suposta simplicidade de sua caracterização básica. Isso decorre do fato de que as estruturas sintáticas consideradas pelos lógicos, linguistas, cientistas da computação, etc., são tipicamente aspectos da estrutura dos números naturais. A sintaxe de uma linguagem comum como o inglês é abstraída de um determinado campo limitado de fenômenos linguísticos, e projetada em uma estrutura recursiva infinita de sequências bem formadas. O modelo básico para isso são as linguagens da lógica proposicional e de predicados desenvolvidas há mais de cem anos, mas cuja estrutura sintática só foi compreendida enquanto tal entre 1920 e 1930.⁴³

outros objetos vizinhos, e, assim, mais teremos chances de adivinhar suas generalizações possíveis.] (POINCARÉ, 1908, p. 25-6).

⁴³ “The amazing power of syntactic structures is one of the most remarkable discoveries of Twentieth Century logicians, as are the limitations of these syntactic structures. What this really means is that the structure of natural numbers, and the arithmetical operations, is incredibly more powerful than anybody would have

Um exemplo ao qual já recorreremos brevemente é o que retrata o nascimento da nova lógica matemática e a mudança que representa em relação ao modelo aristotélico, que tem nuances interessantes também no que concerne à função do simbolismo empregado.⁴⁴ Sem dúvida, a lógica nascente tinha como forte característica o simbolismo do qual faz amplo uso, mas ao contrário do que parece à primeira vista, não é possível caracterizá-la apenas por conta de seu simbolismo, uma vez que, apesar de marcante, ele não chega por si só a ser um traço distintivo da lógica matemática em relação à lógica clássica; afinal, o uso de símbolos que remetem a variáveis na lógica remonta ao próprio Aristóteles, pois já nos *Primeiros analíticos* existe o recurso a uma notação que simboliza a estrutura predicacional da proposição.⁴⁵ Logo, o que está por trás dessa mudança de perspectiva verificada para a lógica não pode ser, em absoluto, *apenas* a simbologia utilizada a partir de meados do século XIX.

imagined from the alleged simplicity of its basic characterization. This follows from the fact that the syntactic structures considered by logicians, linguists, computer scientists, etc., are typically aspects of the structure of natural numbers. The syntax of an ordinary language such as English is abstracted from a certain limited range of linguistic phenomena, and projected to an infinite recursive structure of well-formed strings. The basic model for this are the languages of propositional and predicate logic developed over a hundred years ago, but whose syntactic structure only came to be understood as such in the twenties and thirties.” (CHATEAUBRIAND, 2005, p. 69-70).

⁴⁴ Um bom exemplo é o de Poincaré, que chega a falar de um novo domínio para a lógica a partir do emprego de novos conectivos: «*La logique des propositions de M. Russell est l'étude des lois suivant lesquelles se combinent les conjonctions si, et, ou, et la négation n'est pas. C'est une extension considérable de l'ancienne logique. Les propriétés du syllogisme classique s'étendent sans peine au syllogisme hypothétique et, dans les formes de ce dernier, on reconnaît aisément les formes scolastiques ; (...) Mais la théorie du syllogisme n'est encore que la syntaxe de la conjonction si et peut-être de la négation. En y adjoignant deux autres conjonctions et et ou, M. Russell ouvre à la logique un domaine nouveau.* » [A lógica das proposições do Senhor Russell é o estudo das leis através das quais se combinam as conjunções 'se', 'e', 'ou' e a negação 'não'. Essa é uma extensão considerável da antiga lógica. As propriedades do silogismo clássico estendem-se facilmente para o silogismo hipotético e, nas formas deste último, reconhecemos facilmente as formas escolásticas; (...) mas a teoria do silogismo não é mais que a sintaxe da conjunção 'se' e talvez da negação. Ao adicionar duas outras conjunções 'e' e 'ou', o Sr. Russell abre à lógica um novo domínio.] (POINCARÉ, 1986[1905], p. 25). Esse novo domínio, segundo o autor, é caracterizado pela introdução das leis de comutação, adição e associação ao *corpus* da lógica. A falácia do argumento é verificada ao reconhecermos que é perfeitamente possível exprimir funções idênticas às expressas pelos conectivos de conjunção e disjunção através de uma linguagem que conte apenas com o conectivo de implicação e com a negação (DEL VECCHIO, 2006, p. 76-8), motivo pelo qual não há que se falar propriamente em extensão de domínio. A amplitude de alcance diferenciada é resultado da nova concepção de lógica que se apresenta, e não de sua nova notação gráfica. Poincaré não chega a aprofundar sua análise nesse sentido, talvez até por entender que a tese logicista não mereceria tal atenção, por sofrer de um vício ainda mais fundamental, que é o tratamento dispensado à faculdade da intuição.

⁴⁵ Quando da apresentação de suas três figuras nos *Primeiros analíticos*, o Filósofo utiliza a seguinte notação: para a primeira figura, os termos extremos são representados por A e Γ , e o termo médio por B, sendo este predicado da primeira premissa e sujeito da segunda; na segunda figura, os termos extremos são N e Ξ , e M o termo médio, que é sujeito das duas premissas; por fim, II e P são os termos extremos da terceira figura, e o termo médio é representado pela letra Σ , que figura como predicado das duas premissas (ARISTÓTELES, *Primeiros analíticos*, 25b–29a). É muito claro que a utilização das letras da forma apresentada já soa indubitavelmente como um emprego de símbolos abstratos que são inseridos no texto com a função de representar uma determinada estrutura da dedução.

A linguagem simbólica obedece a parâmetros distintos na aritmética e na geometria, de modo que seguiremos a distinção elaborada por Klaus Volkert entre *símbolos* e *ícones*. Considerando o trato hodierno dado às formulações elementares da matemática, podemos asseverar que símbolos dizem respeito, antes de mais nada, à expressão formal aritmética, enquanto ícones estão diretamente relacionados às construções geométricas. Isso ocorre basicamente por dois motivos: do ponto de vista da aritmética, o rigor proposto pela análise não permite mais o emprego de modelos centrados na intuição e que prescindam de definição; já na geometria, há um recurso necessário a mecanismos de construção. Com base nessa divisão, o ícone tem a capacidade de apenas inserir uma ideia de modo não discursivo, através da mera apresentação do objeto, enquanto o símbolo exige algum tipo de significação associada a ele por meio de uma definição. O símbolo é um sinal carregado de uma significação que não se restringe à forma aparente, mas a uma conceituação subjacente. Nesse sentido, conforme empregadas por Aristóteles no exemplo citado, as letras maiúsculas gregas, se tomadas de forma esquemática em seu conjunto para definir as três figuras do silogismo, não têm função simbólica, mas icônica, e encontram sua significação adequada pelo uso que a elas é dado, que é suficiente e completo, por atenderem aquilo a que se destinam.⁴⁶ Nesse caso, todavia, sua função é apenas a de *mostrar um esquema* próprio de dedução silogística, que relega a segundo plano a conceituação a elas atribuída. O emprego do esquema seguinte:

(1)	(2)	(3)
A–B	M–N	Π–Σ
<u>B–Γ</u>	<u>M–Ξ</u>	<u>P–Σ</u>
A–Γ	N–Ξ	Π–P

(KNEALE & KNEALE, 1991, p. 70)

⁴⁶ A noção de significação centrada no uso é comum em Wittgenstein: “we often put rules in form of definitions. But the important question is always how these expressions are used. Suppose someone knew logic but not mathematics. Could we teach him to multiply simply by definitions? (...) Mathematics and logic are two different techniques. The definitions are not mere abbreviations; they are transitions from one technique to another, projections from one technique into another. They connect two different techniques.” [Frequentemente introduzimos regras sob a forma de definições. Mas a pergunta importante é sempre como essas expressões são usadas. Suponha que alguém conhecesse lógica, mas não matemática. Poderíamos ensiná-lo a multiplicar apenas por definições? (...) Matemática e lógica são duas técnicas diferentes. As definições não são meras abreviações; são transições de uma técnica a outra, projeções de uma técnica em outra. Elas ligam duas técnicas diferentes.] (WITTGENSTEIN apud BOSANQUET et al., 1976, p. 42-3).

“mostra” uma forma de relação entre os seus constituintes, assim como o esquema estrutural da cadeia do Benzeno:

Figura 1 – Cadeia de Benzeno

Nada há, no modo como Aristóteles utiliza o esquema acima, que se assemelhe à característica marcante da lógica matemática, como por exemplo, nos domínios da lógica de segunda ordem, em que as letras que representam proposições podem ser objeto de cálculo e de quantificação a partir da definição que introduzem. Nesse caso, as variáveis proposicionais assumem a função de símbolos, pois há um emprego mais profundo que o simplesmente de *apresentar* a construção de um esquema qualquer. Tanto os símbolos (enquanto proposições) são definíveis quanto as relações que se estabelecem entre elas. Note-se que a função iconográfica das letras empregadas na lógica aristotélica representa tão somente um esquema a ser obedecido. Como a função da representação iconográfica está diretamente associada ao ato de *mostrar*, os limites da concepção aristotélica também são claros, e as formas de silogismo representadas iconicamente não bastam por si só no âmbito da lógica, tampouco no da aritmética.⁴⁷

A riqueza e a amplitude dos temas da matemática permitem, por sua vez, o emprego de notações tanto no sentido icônico quanto no simbólico. A representação icônica, por sua própria natureza, é típica do universo da geometria. O processo de construção que envolve o exercício da intuição geométrica e, conseqüentemente, a disciplina como um todo, permite naturalmente que uma percepção espacial (ainda que não empírica), anteceda a conceituação a ela associada. A construção da figura e seu conceito são, destarte, uma única e mesma coisa:

⁴⁷ Vide, a título de exemplo, as aspirações de Leibniz em relação à linguagem de expressão da matemática. Já no século XVII, ele procurava desenvolver o que denominava uma *lingua characteristica*, um sistema simbólico que permitisse ao intelecto expressar seus conceitos básicos com facilidade, primando por uma notação que, assim como a da matemática, se constituísse através de uma espécie de recurso pictórico, iconográfico, como uma melhoria dos ideogramas chineses. Um sistema notacional assim construído sugeria uma aproximação em relação à chamada *mathesis universalis* cartesiana (DIPERT, 1993, p. 270), de modo que o símbolo, em si, já desse alguma indicação de sua significação, o que permaneceu como um projeto não realizado.

“triângulo = figura geométrica plana de três lados, cujos ângulos internos somam 180 graus.”⁴⁸ A definição não deixa de ser a descrição da forma como se opera sua construção, ainda que não se refira a qualquer figura em particular (ao tratar apenas das suas propriedades gerais). Nesse sentido, o modo como a gênese da geometria é construída a partir de sua notação é deveras importante, dado seu caráter originário, uma vez que “*ao estudar o processo do pensamento geométrico, podemos esperar atingir o que há de mais essencial no intelecto humano.*”⁴⁹

O ícone empregado para a construção de objetos geométricos tem, portanto, como características centrais a ausência de individualização do que acaba por definir; entretanto, essa definição é peculiar, pois ela se dá através da atualização e da articulação de um esquema de construção (VOLKERT, 1986, p. 292). Ao não ser possível dissociar a elaboração do esquema de construção daquilo que o próprio ícone representa, a construção elucida a si própria, mostra seu próprio esquema e prescinde, em última análise, da necessidade de recorrer ao processo implícito em seu desenvolvimento, uma vez que lhe é própria uma espécie de autonomia quando se faz construir. É, portanto, ostensiva, basta a si própria, pois se realiza no próprio ato de sua apresentação através do ícone. Tome-se, por exemplo, a distinção entre trapézio, quadrado e retângulo. Na construção do trapézio, podemos ignorar qualquer consideração mais específica em relação à medida dos ângulos e dos lados. O retângulo exige, já em sua construção, um método para a obtenção de quatro ângulos iguais a 90° e, no caso do quadrado, além dessas exigências, impõe-se a relativa à igualdade dos lados. Todas essas considerações, que aqui abordamos de modo informal e superficial, encerram-se na simples representação icônica das figuras, ao mostrar sua forma geral:

⁴⁸ É o que veremos no capítulo 4, ao tratar da prova da igualdade dos ângulos do triângulo isósceles: o conceito veiculado pelo ícone não se dissocia, em absoluto, de sua construção. “*Das ikonische Zeichen bleibt in charakteristischer Weise von der Ausführung der zugehörigen Herstellungshandlungen abhängig: nur wenn man ein Dreieck z.B. zeichnet, d. h. Die Herstellungshandlung „ein Dreieck zeichnen“ ausführt, kann man nachher über das ikonische Zeichen „Dreieck“ verfügen.*” [O sinal icônico funda-se no modo característico da execução das etapas de sua construção: apenas quando, por exemplo, um triângulo é traçado, isto é, quando se efetua a ‘representação de um triângulo’, pode-se obter em seguida a indicação icônica de um ‘triângulo’.] (VOLKERT, 1986, p. 172).

⁴⁹ « *En étudiant le processus de la pensée géométrique, c’est ce qu’il y a de plus essentiel dans l’esprit humain que nous pouvons espérer atteindre.* » (POINCARÉ, 1908, p. 43).

Figura 2 – Representações gráficas do trapézio, retângulo e quadrado

Especificamente no que concerne à aritmética, o próprio uso que se faz dos sinais exige a veiculação de algo mais que uma simples forma, seja através de definições e conceitos, seja a partir de uma apresentação ostensiva do que representa o objeto em questão. Nesse sentido, por exemplo, há uma carga de significação diferente daquela representada pela iconicidade encontrada na construção e na ostensividade dos objetos da geometria,⁵⁰ uma vez que desde a imposição da adequação ao método axiomático como critério de existência em matemática, a possibilidade de apresentação de um modelo intuitivo não satisfaz a uma perfeita determinação do objeto da aritmética. Poderíamos considerar, por exemplo, que a maneira como o formalista procura estabelecer a construção matemática encerra uma espécie de iconicidade para os símbolos que utiliza, ao, por exemplo, comprometer-se com a ideia de que, na aritmética (conforme a primeira formulação de Hilbert), ou, mais especificamente, ao nível formal da aritmética (já dentro da perspectiva da *Beweistheorie*), recorre-se a ícones quando se emprega os sinais “1”, “0”, “+”, “=”, pretensamente isentos de todo e qualquer significado. Sob o ponto de vista da distinção que adotamos entre ícone e símbolo, a manipulação dos sinais conforme proposta pelo formalista tem limites ao tratar o instrumental matemático como um conjunto de ícones, pois enquanto tais, os sinais apontados acima não representam qualquer tipo de relação, não podem significar uma mera adequação a um modelo intuitivo, nem sequer mostram qualquer coisa ostensivamente; pretender esses sinais como ícones é correr o risco de transformá-los em nada, ou quase nada. Desse modo, e contra o modelo formalista proposto por Hilbert em 1904, só se atribui, só se constrói qualquer espécie de relação matemática a partir da adoção dos signos acima enquanto *símbolos*, onde,

⁵⁰ „Die externe Ikonizität trat im Verlauf der Mathematiksgeschichte, nachdem sie im Bereich der Arithmetik schon sehr früh durch die Symbolik verdrängt worden war, erst wieder ins allgemeine Bewusstsein, als man sich um die Formalisierung des mathematischen Beweises zu bemühen begann. In Rahmen der traditionellen Logik benutzt dagegen schon die Aristotelische Sillogistik extern-ikonische Darstellungen (...). Der Formalismus muss also als Fortsetzung dieser Entwicklungslinie angesehen werden.“ [A iconicidade externa surge no decorrer da história da matemática, apesar de logo ter sido suplantada no campo da aritmética pelo uso simbólico, voltado a uma consciência total, ao iniciar-se a procura pela formalização das provas matemáticas. Na estrutura da lógica

no sentido do reconhecimento do signo, a definição assume a precedência em detrimento da intuição.⁵¹ Dessa forma, ainda que aceite a noção formalista de ausência de conteúdo do signo aritmético, a adoção dessa perspectiva possui um limite, tanto em seu início quanto em seu fim: essa “manipulação icônica”, caracterizada pela operação simbólica isenta de conteúdo, deverá ter a função de simplesmente isentar-se de veicular conteúdo *durante as operações*; todavia, para não se tratar de um mero jogo vazio, *a manipulação icônica deve tornar-se forma simbólica*: o sinal gráfico torna-se símbolo ao veicular significado, e não apenas uma forma esquemática; o número natural, por exemplo, tem uma característica premente de símbolo, ao vincular-se necessariamente a um conteúdo dado por uma definição (ainda que nominal), e transcender a simples forma de representação icônica.⁵² A definição do número, em si, o resolve, de modo que a extensão do conceito de número é tão ampla quanto a definição que o fundamenta, nem mais, nem menos (cf. POINCARÉ, 1902, p. 33). Na aritmética, o recurso incessante à definição resolve a questão em definitivo. Uma única ressalva: definições não surgem “do nada”. A análise do papel da intuição na matemática mostrará isso claramente.

tradicional, ao contrário, utiliza-se as representações iconográficas externas da silogística aristotélica (...). O formalismo deve, portanto, ser visto como uma sequência desse desenvolvimento.] (VOLKERT, 1986, p. 346).

⁵¹ „Im Falle des einzelnen Symbols spielt die Anschauung nur eine untergeordnete Rolle als Markenwahrnehmung. Erkenntnis kann hier nur begrifflich gewonnen werden. Werden dagegen – wie meist in der Mathematik – ganze Symbolsysteme und deren Transformationen betrachtet, so gewinnt das Gesamtsystem erneut ikönische Züge und damit wird anschauliche Erkenntnis wieder möglich.“ [No caso dos símbolos particulares, a intuição desempenha somente um papel secundário na percepção do sinal. O conhecimento só pode ser obtido através da definição. Por outro lado – o que é comum na matemática – considerado o sistema simbólico como um todo, assim como suas transformações, ele ganha novamente um direcionamento icônico, e o conhecimento descritivo torna-se possível mais uma vez.] (VOLKERT, 1986, p. 176).

⁵² “Even if in principle all mathematical proofs could be expressed as the linear proof sequences of first-order logic, this is only interesting as a theoretical result, and it does not mean that these sequences either are proofs, or can be substituted for proofs.” [Mesmo se em princípio todas as provas matemáticas pudessem ser expressas como sequências lineares de prova da lógica de primeira ordem, esse resultado seria interessante apenas do ponto de vista teórico, e não significa que essas sequências são provas, ou que podem ser substituídas por provas.] (CHATEAUBRIAND, 2005, p. 434).

Capítulo 4

Os Constituintes Informais da Matemática

*A lógica é apenas uma faceta da axiomática; e a menos interessante...*¹

Nos capítulos anteriores insistimos no fato de que há constituintes importantes da matemática que escapam ao tratamento lógico-demonstrativo. O presente capítulo tem por escopo esmiuçar esse argumento, por meio de uma abordagem mais profunda das noções de linguagem e intuição.

4.1. O papel da intuição matemática

Até o momento referimo-nos de maneira genérica à intuição, bem como à intuição matemática. Tentemos, portanto, um melhor delineamento do termo em seu sentido genérico. Segundo Gerhard Heinzmann, há três usos do termo em tela que são mais destacados:

- a) A intuição concebida como ferramenta para ater-se a domínios cientificamente inacessíveis. Muitas vezes comparável ao instinto, intuição, nesse sentido, é um fenômeno frequente das obras literárias, místicas ou religiosas, mas igualmente das filosóficas.
- b) A intuição concebida como instrumento de invenção científica. Nesse sentido, ela pode ter uma função heurística ou crítica-normativa. As atuais representações de figuras geométricas são um exemplo da primeira função; na Antiguidade, a limitação dos números quadrados e cúbicos na álgebra, levado em consideração a intuição espacial, exemplifica a segunda função.
- c) A intuição como base epistemológica do conhecimento. Se quisermos assegurar à palavra *intuição* tomada nessa última perspectiva o máximo de rendimento semântico, ela designará uma apreensão simples (direta, imediata, sem conceito) de um objeto ou da validade de um domínio do conhecimento, em oposição a um conhecimento discursivo, intermediário, por demonstração. O *simples*, possuindo assim tantas significações quantos tipos de complexidade: ausência de composição, ausência de inferência, ausência de causas, ausência de capacidade de definir um termo, ausência de atividade, ausência de justificação, ausência de símbolos, ausência de pensamentos, etc. Enquanto o primeiro critério, o de ausência de composição, parece, à primeira vista, necessário e suficiente, o caráter suficiente das outras propriedades resta ainda muito vago e dependerá do contexto dado.²

¹ « *Même Bourbaki a soutenu que la logique représente la face la moins intéressante de l'axiomatique, ce n'en est qu'une face, et la moins intéressante* » (MOOIJ, 1966, p. 158).

² « a) *L'intuition conçue comme outil pour saisir des domaines scientifiquement inaccessibles. Souvent comparable à l'instinct, l'intuition en ce sens est un phénomène fréquent dans les traités littéraires, mystiques ou religieux mais également en philosophie.*

b) *L'intuition comme instrument de l'invention scientifique. En ce sens, elle peut avoir une fonction heuristique ou normative-critique. Les représentations actuelles de figures géométriques sont un exemple pour la première*

No que concerne à intuição matemática, é possível considerá-la principalmente a partir da segunda e da terceira acepções indicadas acima. Não obstante sua natureza imediata, pré-discursiva e que a torna um conceito de difícil abordagem, é possível estabelecer uma aproximação descritiva das funções que ela desempenha: basicamente, à intuição matemática cabe o ato originário, fundamental, do qual decorre a definição e a construção dos objetos matemáticos (algo intimamente ligado à capacidade humana de criar hipóteses e analogias), bem como a noção geral e percepção de unidade do conhecimento. Em uma formulação “forte”, tudo se passa como se os “olhos do espírito” pudessem de imediato reconhecer a validade da intuição como *naturalmente verdadeira*, ou, no caso de tratar-se da intuição matemática fundada em um ato de imaginação, como se esse produto fosse uma espécie de pintura realizada pelo intelecto, que ele próprio contempla e a reconhece como aceitável. É o caso que temos, por exemplo, ao considerar a passagem da *Sexta meditação*, onde Descartes afirma categoricamente que a concepção de uma figura geométrica de mil lados é tão certa e imediata quanto a de um triângulo,³ uma vez que basta a compreensão para que o ato intelectual seja realizado em sua plenitude: ele é imediato e total, e nada há que o oblitere. Sob essa perspectiva, uma vez concebido um objeto, a intuição dá conta de sua delimitação sem qualquer recurso exterior, o que propicia sua efetiva definição em termos linguísticos e sua aplicabilidade na demonstração.

Todavia, aquilo que para Descartes parecia seguro e certo, torna-se altamente problemático sobretudo a partir do século XIX, quando as contribuições às quais nos referimos impõem a necessidade de uma clara e irrevogável demonstrabilidade na matemática, pois não há meio de compatibilizar com o projeto cartesiano (no qual *toda* a construção da matemática, e mais, toda a verdade em ciência, decorre de um exercício do

fonction, la limitation, dans l'antiquité, à la considération des nombres carrés et des cubes dans l'algèbre, donc la prise en considération de l'intuition spatiale, exemplifie la deuxième fonction.

c) L'intuition comme base épistémologique de la connaissance. Si l'on voulait assurer au mot intuition, prise dans cette dernière perspective, le maximum de rendement sémantique, il désignerait une appréhension simple (directe, immédiate, sans concept) d'un objet ou de la validité dans un domaine de la connaissance, en opposition à une connaissance discursive, médiatisée, par démonstration. Or, simple possède autant de significations qu'il existe de sortes de complexité : absence de composition, absence d'inférence, absence de causes, absence de capacité de définir un terme, absence d'activité, absence de justification, absence de symboles, absence de pensée, etc. Tandis que le premier critère, absence de composition, semble, à première vue, nécessaire et suffisante, le caractère suffisant des autres propriétés reste assez vague et dépendra du contexte donné. » (HEINZMANN, 2002, p. 2).

³ “Quando quero pensar em um quiliógono, concebo na verdade que é uma figura de mil lados tão facilmente quanto concebo que um triângulo é uma figura de três lados” (DESCARTES, 1973, p. 138).

intelecto lastreado pela intuição) a solução de um problema ao qual a intuição não tem o que responder.

Essa é a formulação mais básica do problema concernente a uma teoria, digamos, *ambiciosa* da intuição. A ausência de uma resposta à altura para esse problema leva-nos a outra possibilidade de resposta, desta vez alinhada com o kantismo.⁴ Podemos iniciar essa questão enunciando basicamente que, malgrado a intuição, por definição, nos dê a evidência do objeto matemático, isso não significa, todavia, que essa evidência esteja isenta de erro. Esse é o ponto central que distingue aquilo que Jacques Dubucs denomina como teorias *modestas* da intuição (termo ao qual contrapôs o adjetivo “ambiciosa”). De acordo com essa

⁴ A filosofia da matemática que se pode extrair da *Crítica da Razão Pura* não é facilmente defensável para o leitor contemporâneo, ao menos no conjunto de teses que propõe e sem quaisquer tentativas de adaptação. De maneira geral, os problemas giram acerca de dois pontos: o primeiro deles, sua inadequação à geometria não euclidiana. Acerca desta questão, basta dizer que Kant explica, como sabemos, os postulados da geometria como juízos *a priori*, provenientes da forma de sensibilidade que caracteriza a estrutura do conhecimento humano. A interpretação que parece a mais natural no que concerne à teoria kantiana, em sua origem, é a da *necessidade* dos princípios euclidianos como atributo decorrente do seu caráter apriorístico. Logo, parece pouco viável a ideia de que Kant pudesse supor outros modelos de geometria contraditórios ao euclidiano, até mesmo porque sua aceitabilidade implicaria em inconsistência, se a tese da necessidade dos juízos geométricos como formas de sensibilidade *a priori* estiver correta: « *Selon lui (Helmholtz), en effet, la forme a priori de la sensibilité que représente l'espace dans la philosophie kantienne n'est pas un simple schème formel, vide de tout contenu et susceptible de s'accorder avec n'importe quelle expérience. Bien au contraire, seules les expériences en accord avec cette forme peuvent faire l'objet d'une intuition. Helmholtz adopte une interprétation du kantisme qui semble avoir été très répandue durant tout le XIX^{ème} siècle. Selon cette interprétation, la découverte des géométries non euclidiennes aurait rendu la conception kantienne d'espace obsolète. Une telle interprétation, semble avoir surtout prévalu chez certains mathématiciens qui, intéressés par les implications de leurs découvertes, tentèrent de se situer par rapport à la philosophie de Kant, alors prédominante.* » [Segundo Helmholtz, a forma *a priori* da sensibilidade que representa o espaço na filosofia é um simples esquema formal, isento de todo conteúdo e suscetível de concordar com toda e qualquer experiência. Ao contrário, apenas as experiências que concordam com essa forma podem se tornar objetos da intuição. Helmholtz adota uma interpretação do kantismo que parece ter sido defendida ao longo de todo o século XIX. De acordo com essa interpretação, a descoberta das geometrias não euclidianas tornara obsoleta a concepção kantiana de espaço. Tal interpretação parece ter prevalecido sobretudo entre matemáticos que, interessados pelas implicações de suas descobertas, procuravam situar-se em relação à filosofia kantiana, a corrente então predominante.] (ROLLET, 1999, p. 35). Essa não é, contudo, a única leitura possível no que diz respeito aos problemas enfrentados pelo kantismo diante das novas geometrias, apesar de ser a posição mais comum. Existe também a possibilidade de legitimamente asseverar a adequação de novas geometrias ao arcabouço conceitual kantiano. Ao defender a pertinência da geometria conforme concebida por Kant, Couturat assevera que « *ce résultat est contraire à l'opinion d'un grand nombre de mathématiciens, qui prétendent que l'invention des géométries non euclidiennes a réfuté la doctrine kantienne; ces auteurs, apparemment peu familiers avec la pensée de Kant, croient que sa doctrine implique qu'il n'y ait qu'une géométrie logiquement possible, ce qui est faux ; l'existence de plusieurs géométries possibles est bien plutôt un argument en faveur de la thèse kantienne, que les jugements géométriques sont synthétiques et fondés sur l'intuition.* » [Esse resultado é contrário à opinião de um grande número de matemáticos, que sustentam que a invenção das geometrias não euclidianas refutou a doutrina kantiana; esses autores, aparentemente pouco familiarizados com o pensamento de Kant, crêem que sua doutrina implica apenas uma geometria logicamente possível, o que é falso. A existência de várias geometrias possíveis é, antes, um argumento a favor da tese kantiana, em que os juízos geométricos são sintéticos e fundados na intuição.] (COUTURAT, 1980, p. 300). Ainda assim, o argumento parece tratar-se mais de um artifício retórico que propriamente de algo que está em sintonia com o pensamento original de Kant, uma tentativa *ad hoc* de salvar esse aspecto do kantismo.

perspectiva, o ato intelectual ao qual denominamos intuição matemática encontra, senão o mesmo, um grau de incerteza comparável àquele da intuição empírica. Nesses termos, um paralelismo, ainda que rasteiro, pode ser estabelecido: existe obviamente uma limitação de nossa capacidade de observação em relação aos meios dos quais dispomos. As intuições empíricas que, em termos kantianos, retratam a apresentação do fenômeno à sensibilidade e sua consequente apreensão pelo intelecto, estão inegavelmente condicionadas pelas nossas faculdades de percepção. De forma análoga, o matemático está “preso” a um âmbito para o qual a intuição é adequada e válida (como na consideração da natureza de um triângulo, por exemplo), mas que, em dado momento, sua clareza e distinção “evidentes” começam a se dissipar, como quando instada a responder acerca do que a intuição não possui, de fato, acesso. Alguns exemplos são característicos de questões clássicas da matemática, como o problema relativo ao contínuo matemático conforme formulado por Hilbert,⁵ no que diz

⁵ “Two systems, i. e., two assemblages of ordinary real numbers or points, are said to be (according to Cantor) equivalent or of equal cardinal number, if they can be brought into a relation to one another such that to every number of the one assemblage corresponds one and only one definite number of the other. The investigations of Cantor on such assemblages of points suggest a very plausible theorem, which nevertheless, in spite of the most strenuous efforts, no one has succeeded in proving. This is the theorem:

‘Every system of infinitely many real numbers, i. e., every assemblage of numbers (or points), is either equivalent to the assemblage of natural integers, 1, 2, 3,... or to the assemblage of all real numbers and therefore to the continuum, that is, to the points of a line; as regards equivalence there are, therefore, only two assemblages of numbers, the countable assemblage and the continuum.’

From this theorem it would follow at once that the continuum has the next cardinal number beyond that of the countable assemblage; the proof of this theorem would, therefore, form a new bridge between the countable assemblage and the continuum. (...)

The question now arises whether the totality of all numbers may not be arranged in another manner so that every partial assemblage may have a first element, i. e., whether the continuum cannot be considered as a well ordered assemblage—a question which Cantor thinks must be answered in the affirmative. It appears to me most desirable to obtain a direct proof of this remarkable statement of Cantor’s, perhaps by actually giving an arrangement of numbers such that in every partial system a first number can be pointed out.” [Dois sistemas, isto é, dois agregados de pontos ou de números reais comuns, são considerados (de acordo com Cantor) equivalentes ou detentores do mesmo número cardinal, se puderem ser colocados em uma relação entre si em que cada número de um agregado corresponde a um e somente um número do outro. As investigações de Cantor acerca desses agregados sugerem um teorema muito plausível, que, entretanto, apesar de grandes esforços, ninguém obteve sucesso em provar. O teorema é esse:

‘Todo sistema que contém infinitos números reais, isto é, todo agregado de números (ou pontos), ou é equivalente ao conjunto dos inteiros positivos 1, 2, 3, ... , ou ao conjunto de todos os números reais e, portanto, ao contínuo, ou seja, aos pontos de uma linha; do ponto de vista da equivalência, portanto, há apenas dois agregados de números, os contáveis e o contínuo.’

Desse teorema seguir-se-ia imediatamente que o contínuo possui o próximo número cardinal que segue aquele dos agregados contáveis; a prova desse teorema formaria, desse modo, uma nova ponte entre as grandezas contáveis e o contínuo. (...)

A questão que surge é se a totalidade de todos os números não pode ser ordenada de modo que cada agregado parcial possa ter um primeiro elemento, isto é, se o contínuo pode ser considerado um agregado bem ordenado — uma pergunta que Cantor acredita poder ser respondida afirmativamente. Parece de grande valia poder obter uma prova direta dessa importante asserção de Cantor, quem sabe dando realmente uma ordenação de números em que o primeiro número possa ser apontado em cada agregado parcial.] (HILBERT, 1900, p. 6).

respeito às séries transfinitas ou, no que concerne aos incomensuráveis, a existência de uma determinada sequência numérica dentre as casas decimais de π (digamos, $\pi = 3,1415...123456789...$). A intuição matemática, concebida nesses termos, guarda um paralelismo interessante em relação à intuição empírica. Note-se, todavia, uma mudança conceitual fundamental: se, em Descartes, bastava a compreensão perfeita do conceito envolvido para a garantia de sua evidência, sob essa outra perspectiva inspirada no kantismo, ao menos em um de seus aspectos, a evidência está associada a um processo de *construção*.

Fato é que a chamada teoria *modesta* da intuição permanece algo de difícil sustentação diante da concepção hodierna de objetos matemáticos centrada na *forma*. Basicamente, o problema com o qual devem se arcar os defensores de uma teoria modesta da intuição está centrado no fato de que a intuição é, de certo modo, dispensável: onde ela pode levar, o procedimento lógico-formal *também* pode, e ainda muito mais longe. O exemplo é claro: se a intuição mostra adequadamente a natureza de *alguns* tipos de funções, mas é incapaz de pronunciar-se em relação a outros, o procedimento lógico-demonstrativo apresenta uma solução mais completa e mais objetiva, por assim dizer, ao desprender a prova matemática do supostamente evidente para assegurá-la em bases *demonstráveis*. Sendo a intuição concebida como a base do raciocínio matemático, parece um pecado imperdoável o fato de que, ainda que *mostrando* o caminho a ser percorrido, a correção, a perfeição de uma determinada prova matemática pode sempre, e com vantagens, ser veiculada através de uma prova lógico-demonstrativa que *substitua* o exercício da intuição, por assim dizer. Dessa forma, as consequências são funestas: a validade da intuição é salva em um âmbito bastante restrito, mas ainda nesse âmbito, ela torna-se dispensável. E, nesse sentido, uma teoria modesta da intuição matemática deve amargar o fato de ser tão modesta a ponto de ser inútil, como pretendiam evidenciar os autores do Círculo de Viena: “*emergiu a exigência de uma expulsão total da intuição para fora da matemática, a exigência de uma total logicização da matemática. (...) A intuição pura não é uma forma a priori de conhecimento, é a força do hábito enraizada na inércia psíquica.*”⁶

Uma alternativa notável é a proposta por Evert Beth. Em oposição clara os princípios dos quais partem os filósofos do Círculo de Viena, ele propôs uma leitura original do

⁶ « *S'est fait jour l'exigence d'une expulsion totale de l'intuition hors des mathématiques, l'exigence d'une totale logicisation des mathématiques. (...) L'intuition pure n'est pas un moyen a priori de connaissance, mais la force de l'habitude enracinée dans l'inertie psychique* » (HAHN apud DUBUCS, 1999, p. 98-9).

kantismo, ao procurar sustentar não a doutrina constante da *Estética transcendental*, mas centrar seus argumentos na ideia de que a prova matemática, conforme descrita na *Metodologia transcendental*, é defensável, adotando assim outra versão de uma teoria modesta da intuição matemática. Beth lança mão *apenas* da possibilidade de pensar a intuição como associada à prova matemática, mostrando que o procedimento lógico de instanciação (que já se faz presente a partir das lógicas de primeira ordem) pode ser compreendido como um recurso à intuição matemática. Mas o que em um primeiro momento apresenta-se como um remodelamento da doutrina kantiana acaba por mostrar-se uma torção conceitual muito séria, quando altera premissas fundamentais do kantismo. A teoria de Beth significa, assim, um grande recuo do papel a ser atribuído à intuição matemática, ao torná-la apenas um processo de abstração.⁷ Assim, a intuição perde irremediavelmente a condução do enredo na matemática, e isso é algo que certamente Kant não estaria disposto a negociar; a solução de Beth, apesar de criativa, não soa significativamente como uma defesa do kantismo, pois altera completamente o papel que Kant reservara à intuição. Ao transfigurar profundamente o pensamento de Kant, tornando o principal em acessório e vice-versa, a solução de Beth mais enterra a doutrina kantiana da matemática que propriamente a salva, com o agravante de desprender-se de uma base filosófica mínima, ao abrir mão da noção de intuição conforme descrita na *Estética transcendental*.⁸ Não bastassem as próprias dificuldades internas da solução proposta por Beth, o advento do neologicismo ameaça ainda mais a viabilidade de sua

⁷ « Ce que Beth entend préserver de Kant n'est pas la thèse selon laquelle nous disposerions en mathématiques d'une faculté d'intuition nous permettant de déterminer que quelque chose est le cas, mais une thèse plus modeste, selon laquelle nous utilisons dans les preuves une intuition d'objets (et non d'une structure propositionnelle). En somme, l'intuition kantienne serait un simple procédé d'instanciation, doté d'un statut logique, mais en lui-même dénué de contenu mathématique. » [O que Beth entende preservar de Kant não é a tese segundo a qual nós dispomos, na matemática, de uma faculdade de intuição que nos permite determinar que algo é o caso, mas uma tese mais modesta, segundo a qual utilizamos nas provas uma intuição de objetos (e não de uma estrutura proposicional). Em suma, a intuição kantiana seria um simples procedimento de instanciação, dotado de um estatuto lógico, mas em si mesmo desprovido de conteúdo matemático.] (DUBUCS, 1999, p. 126).

⁸ « La construction des concepts dans l'intuition pure est donc irréductible à l'emploi de la technique logique d'instanciation : c'est seulement en construisant ces concepts de cette manière que le géomètre peut parvenir à réunir, aux propriétés « conceptuelles » des objets, leurs propriétés « intuitionnelles ». Contrairement à ce que Beth et Hintikka s'efforcent si laborieusement d'établir, les deux versants de la Critique sont inséparables. L'intuition pure qui est supposée nous donner, par « réflexion transcendente », accès aux principes euclidiens qui régissent l'expérience possible, et aussi celle « dans laquelle » nous construisons nos concepts lors d'une preuve géométrique. » [A construção de conceitos na intuição pura é, portanto, irreduzível ao emprego da técnica lógica de instanciação: é apenas ao construir esses conceitos dessa maneira que o geômetra pode efetivamente unir às propriedades “conceituais” dos objetos, suas propriedades “intuicionais”. Ao contrário do que Beth e Hintikka esforçam-se tão arduamente para efetivar, as duas vertentes da *Crítica* são inseparáveis. A intuição pura que é pressuposta para dar-nos acesso, através de uma “reflexão transcendental”, aos princípios euclidianos que regem a experiência possível, é também aquela “dentro da qual” construímos os conceitos de uma prova geométrica.] (DUBUCS, 1999, p. 130).

argumentação, pois exatamente o procedimento de abstração que envolve a instanciação matemática que é pretensamente apresentado em termos exclusivamente lógicos. Por isso, não há que se considerar a solução de Beth como uma saída plausível. Ela é, no máximo, uma interpretação acerca da questão da intuição matemática de inspiração kantiana constrangida diante do avanço inegável da lógica.

Assim, parece evidente que as dificuldades inerentes à noção de intuição matemática não permitem considerar satisfatória a versão ambiciosa e nem mesmo a versão modesta da intuição matemática. Há, todavia, outra forma de abordar a questão, mediante a condição de introduzir algumas distinções necessárias. A primeira delas é a que trata da diferença entre intuição geométrica e intuição aritmética, no que seguimos Poincaré:

Para resumir a teoria do sintético *a priori* de Poincaré (no que se refere à filosofia da matemática), existem duas importantes intuições que direcionam nossos conceitos e práticas. Uma nós podemos denominar intuição “aritmética”, assim como intuição “temporal”. Ela é obtida a partir do conceito de iterabilidade indefinida, e é exemplificada por nosso entendimento pelos tipos de ordenação que são produzidos por vários procedimentos de “interações indefinidas” (ou recursivas). A intuição aritmética desempenha assim um papel fundamental em nossa concepção e na caracterização do conjunto dos números naturais (0, 1, 2, 3...), no conjunto dos números racionais (todos os pares ordenados ou frações de números naturais, desde que excluído 0 como denominador) e em nosso entendimento da indução matemática. A outra intuição *a priori* que desempenha um papel importante na fundamentação do conhecimento matemático é a que nós podemos chamar intuição “geométrica” ou “espacial”. Ela resume-se aos conceitos de continuidade e de variabilidade contínua, que permitem a concepção clássica do domínio dos números reais.⁹

Essas duas formas de intuição podem ser consideradas como recursos necessários à concepção do contínuo matemático de segunda ordem. A elaboração do contínuo nesse grau de refinamento só se realiza porque é tipicamente por uma espécie de analogia com a imaginação geométrica (ao tomar a série dos reais como associada aos pontos de uma reta) que surge a possibilidade de “saltar” dos racionais aos irracionais.¹⁰ A essa dupla

⁹ “To summarize Poincaré’s theory of the synthetic *a priori* (as it relates to his philosophy of mathematics), there are two important intuitions which underlie our mathematical concepts and practices. One I shall call ‘arithmetic’ intuition, rather than ‘temporal’ intuition. This is captured by the concept of indefinite iterability, and is exemplified for our understanding of order types which are produced by various ‘indefinitely iterable’ (or recursive) procedures. Arithmetic intuition thus plays an essential role in our conception and characterization of the set of natural numbers {0, 1, 2, 3, ...}, the set of rational numbers (all ordered pairs, or fractions - excluding 0 as denominator - of natural numbers), and in our understanding of mathematical induction. The other *a priori* intuition which plays a major role in the foundations of our mathematical knowledge, I shall call ‘geometric’ intuition, rather than ‘spatial’ intuition. This is encapsulated in the concepts of continuity and continuous variability, and these enable a classical conception of the domain of real numbers” (FOLINA, 1992, p. 38).

¹⁰ “Without geometry, we should have no reason for ‘transcending’ the rationals. The set of rationals (with its ‘dense’ order type) represents the limits of arithmetic construction, of collecting, of indefinite iteration of an

conceituação da noção de intuição matemática, podemos adicionar uma classificação do conceito de evidência:

Dependendo de cada objeto distinguem-se diferentes tipos de evidência intuitiva: a originária-formal, a aritmética, a topológica e a geométrica. Os fatos nos quais cada uma delas é baseada apresentam uma complexidade crescente. Juízos intuitivos podem ser analisados conceitualmente. Evidências intuitivas podem ser então reconhecidas, pois elas não se impõem, através de cada análise, por força de persuasão: elas podem apenas (intuitivamente) reproduzirem-se (por alguma extensão “*ad oculus*”), mas sem se tornarem discursivas. Os fatos estão incluídos na natureza da evidência, enquanto a evidência é baseada no procedimento de construção do objeto mental, assim como no caso da criação de sinais.¹¹

Assim, nosso problema inicial ramifica-se. Aquilo que até agora denominávamos simplesmente intuição matemática divide-se, portanto, em duas formas de intuição - aritmética e geométrica - tendo quatro tipos de evidências aí envolvidas (a originária-formal, a aritmética, a topológica e a geométrica). A intuição distingue-se da evidência apenas do ponto de vista de nossa perspectiva em relação a ela: intuição é, nesse sentido, uma espécie de faculdade ativa do espírito, voltada à criação da ciência, ou ainda uma faculdade passiva, ligada à recepção das representações dadas (cf. KANT, 1781, p. 88) que permite a constituição da base epistemológica do conhecimento. A evidência, por sua vez, é uma *característica* indissociável da intuição, que adota formas diferenciadas de acordo com aquilo que é representado: a evidência constitui assim uma espécie de sensação decorrente dessa faculdade e que, de certa forma, com ela se confunde, por tratar-se de sua face “perceptível”. Os quatro tipos de evidência são determinados pelos respectivos tipos de intuição a partir dos quais se originam. Essa evidência é, por sua vez, irredutível a outras formas mais primitivas

algorithm. It is arithmetic operations applied to geometric domains which suggests that there are cardinal numbers which are no members of the dense set Q . Trying to arithmetise geometry suggests the idea that there are numbers corresponding to every point of the line, and that there are magnitudes corresponding exactly to every length.” [Sem a geometria, nós não teríamos razão para ‘transcender’ o limite dos números racionais. O conjunto dos racionais (com sua ordenação ‘densa’) representa os limites da construção aritmética, da obtenção de indefinidas interações de um algoritmo. São as operações aritméticas aplicadas aos domínios da geometria que sugerem a existência de números cardinais que não são membros do conjunto denso Q . Tentar aritmetizar a geometria sugere que há números correspondentes a todos os pontos de uma reta e que há magnitudes que correspondem exatamente a cada extensão.] (FOLINA, 1992, p. 123).

¹¹ „Je nach ihrem Gegenstand lassen sich verschiedene Arten von anschaulichen Evidenzen unterschieden: die primitiv-formale, die arithmetische, die topologische und die geometrische. Der Sachverhalt, auf den diese jeweils bezogen sind, wird dabei zunehmend komplexer. Anschauliche Urteile können begrifflich analysiert werden. Anschauliche Evidenzen erkennt man daran, dass sie durch solche Analysen nicht an Überzeugungskraft gewinnen: sie können nur (intuitiv) erzeugt (gewissermassen „*ad oculus*“) nicht aber (discursiv) werden. Die Tatsache liegt im Charakter der Evidenz eingeschlossen, da Evidenzen auf den Verfahren der Gegenstandskonstitution beruhen, also im vorliegenden Falle der Zeichenherstellungshandlungen“ (VOLKERT, 1986, p. 382-3).

de apresentação.¹² Podemos então sugerir que tipos de intuição e de evidência seguem o esquema abaixo:

Figura 3 – Representações esquemática de tipos de intuição e evidência

Esse esquema conceitual compromete-nos com a ideia de que não há recurso anterior à intuição em cada parte do processo, a própria formalização conceitual depende dela, e toda formalização advém desse processo calcado na evidência. Desse modo, pretendo argumentar em favor de duas teses:

- É possível defender uma tese modesta da intuição matemática inspirada no kantismo, desde que se abandone a intenção de declarar peremptoriamente *toda* a base do conhecimento matemático como sintética e *a priori*; e

¹² „Charakteristisch für eine derartige Evidenz ist, dass sie durch eine logische Analyse nicht “evidenter” gemacht werden kann; sie kann höchstens mit Hilfe begrifflicher Beispiele exemplifiziert werden. Hat der Interpret dieser Darstellung erst einmal die darin enthaltene Anweisung verstanden, so ist die Anwendung dieser Schlussfigur gesichert. (Man könnte die darin ausgedrückte Anweisung so formulieren: „Wann immer die Buchstaben und Zeichen S, S→T in dieser Reihenfolge auftauchen, darfst du sie durch T abkürzen“). Ebenso wie die Markenwahrnehmung alleine keine Evidenzen liefert, sondern des (nicht-begrifflichen) Denkens in Gestalt des Schemaaspektes der Zeichen bedarf, so braucht das logisch-begriffliche Schliessen die Ergänzung durch die primitiv-formale Anschauung.“ [É característico de tal evidência que ela não possa tornar-se “mais evidente” através de uma análise lógica; ela pode no máximo ser exemplificada através do auxílio de exemplos conceituais. Havendo essa interpretação apreendido uma vez o conteúdo do enunciado, a aplicação de sua forma final está assegurada. (Poder-se-ia formular essa regra da seguinte maneira: ‘Quando as letras e sinais S, S → T forem apresentadas nessa ordem, deve-se resumi-las por T’). Apesar de que os limites da percepção por si só não garantem a evidência, o pensamento (não conceitual), na forma do esquema apresentado, precisa dos sinais, assim como a inferência lógico-conceitual precisa ser suplementada pela intuição formal primitiva.] (VOLKERT, 1986, p. 384).

- É possível também procurar uma justificação da intuição no processo de abstração/instanciação lógica, nos termos de Beth, mas sem necessariamente efetuar a redução da intuição matemática como ele o faz.

Para sustentar essas teses, é preciso dar conta tanto das dificuldades internas da teoria quanto da negativa de uma teoria ambiciosa da intuição e da inaceitabilidade da perspectiva logicista ou do formalismo estrito. Vimos que uma teoria ambiciosa da intuição matemática como a de Descartes é altamente problemática, mas não é com a mesma facilidade que conseguimos refutar uma teoria ambiciosa da intuição como a sugerida por Brouwer. O motivo é simples: do modo como é concebida a matemática intuicionista, determinadas questões¹³ não são tratadas efetivamente como problemas, simplesmente por não constituírem o universo da matemática *legítima* aos seus olhos. Usando o dito popular, o que Brouwer faz é tratar a dor de cabeça decapitando o paciente. Ao fundamentar *toda* a matemática *apenas* em raciocínios propiciados *diretamente* pela intuição, ele encerra seu universo heurístico em um âmbito construtivista muitíssimo restrito. O preço de sua perfeição (via de regra, obtida à custa de procedimentos muito complexos) é, ao final de contas, alto em vista das vantagens que supostamente traz e, por isso, inviável. Claro que um intuicionista responderia que sua posição não está centrada em um problema pragmático, mas no compromisso com a certeza e na infalibilidade de seu método, por considerar que “*a intuição matemática cumpre sua função incomparavelmente melhor que a percepção, no sentido que ela é perfeitamente livre, em seu domínio, das incertezas e limitações que caracterizam em mais alto grau a intuição perceptiva.*”¹⁴ Logo, trata-se de um posicionamento que objetamos de início, em face de sua atitude revisionista exacerbada fundada em uma leitura antirrealista da disciplina, que leva, por sua vez, a uma restrição em nível epistemológico; mas veremos que, se não há meios de corroborar a tese intuicionista naquilo que ela reclama em termos epistemológicos, a

¹³ Por exemplo, questões relativas à geometria não euclidiana, aos números transfinitos, à concepção dos incomensuráveis, às funções contínuas não deriváveis e o chamado teorema dos valores intermediários de Bolzano: « *Le théorème des valeurs intermédiaires, dont un cas particulier important énonce qu’une fonction continue vérifiant $f(a).f(b)<0$ s’annule pour au moins une valeur de l’argument comprise entre a et b.* » [O teorema dos valores intermediários, onde um caso particular importante enuncia que uma função contínua que verifica $f(a).f(b)<0$ anula-se para ao menos um valor do argumento compreendido entre a e b.] (DUBUCS, 1999 p. 101).

¹⁴ « *L’intuition mathématique remplit son office incomparablement mieux que ne le fait la perception, en ce sens qu’elle est parfaitement affranchie, dans son domaine, des incertitudes et des limitations qui caractérisent au plus haut degré l’intuition perceptive* » (DUBUCS, 1999, p. 96).

contextualização histórica pode constituir um recurso viável para legitimar sua existência (cf. capítulo 5, seção 5.1).

No que diz respeito ao simples abandono de uma teoria da intuição como constituinte fundamental da matemática, a adoção dessa perspectiva nos alinharia com a corrente logicista/neologicista. A aproximação em relação ao formalismo, por sua vez, é menos custosa no que diz respeito às origens do conhecimento matemático, mas não há que se corroborar seu pensamento *in totum*. Em várias passagens, seja de seus textos de juventude, seja no período de maturidade, Hilbert afirma e reitera a necessidade de partir de noções *intuitivamente* verdadeiras que servirão de base para desenvolver a demonstração alicerçada nos símbolos que constituem a linguagem formal, posição esta que parece bastante plausível do ponto de vista de uma teoria modesta da intuição:

A matemática não tem melhores condições de ser fundada apenas na lógica que qualquer outra ciência; antes, todavia, como condição do uso de inferências lógicas e o desenvolvimento das operações lógicas, algo já deve nos ser apresentado pela faculdade de representação: certos objetos concretos, extralógicos, que são intuitivamente presentes como uma experiência imediata anterior a todo pensamento.¹⁵

Em suma, a matemática carece de uma intuição originária, pois sua forma lógica não se dá *ex nihilo*. Contudo, a noção geral da qual parte Hilbert mostra uma diferença sensível no que diz respeito à doutrina kantiana: note que Hilbert é enfático em afirmar que a intuição imediata é intuição de um objeto concreto, e não mais a forma de sensibilidade. Trata-se, efetivamente, de uma intuição *a posteriori*; o trecho acima permite concluir que, para Hilbert, a matemática nasce de uma intuição oriunda de uma experiência sensorial, de objetos concretos. Ele salva o *status* de uma intuição originária para a matemática, mas uma intuição que não é mais que a referência fenomênica aos objetos da experiência sensível; um ato de abstração e nada mais que isso.

* *

Começemos pelo diagnóstico do problema: a preocupação em “salvar” a classificação de um *status* analítico ou sintético, *a priori* ou *a posteriori* acaba por problematizar além do necessário a questão da existência e do papel da intuição matemática. O que sugiro aqui é

¹⁵ “No more than any other science can mathematics be founded in logic alone; rather, as a condition for the use of logical inferences, and the performance of logical operations, something must already be given to us in our faculty of representation, certain extralogical concrete objects that are intuitively present as immediate experience prior to all thought” (HILBERT, 1927, p. 464). Vide também nota 48 do capítulo 1.

negar os termos da disputa, para simplesmente propor uma teoria da intuição matemática que possa ser minimamente satisfatória diante dos problemas que se apresentam, e partir de uma premissa já apresentada: a matemática é antes uma *atividade intelectual* que uma disciplina pronta e acabada. Essa proposta parece tola, sobretudo se pensarmos no desenvolvimento hodierno da disciplina, no número exponencial de publicações e em tudo o mais que move o contexto da produção científica no mundo acadêmico. Ocorre que ainda parece haver muito de metafísico, no sentido pejorativo do termo, nas discussões relativas aos fundamentos da matemática. A partir do momento em que pensamos as teorias matemáticas como fazendo parte de um processo de construção intelectual, seus constituintes estão antes em harmonia que em oposição; e, nesses termos, uma perquirição sobre a gênese da matemática pode vir a ser uma contribuição para a elucidação de sua natureza.

Com isso, vamos partir de um ponto já abordado no capítulo anterior: os objetos matemáticos têm forma lógica e o rigor deve ter como referência básica critérios lógico-demonstrativos. Diante desse *status quo*, nesse momento de “esclarecimento”, por assim dizer, a intuição terá o papel de coadjuvante, de acordo com os desafios levantados por Dubucs. Nesse momento, ela deve operar como um acessório àquilo que já está bem definido como o coração da disciplina. Que se pergunte então em que a intuição pode *completar* o sentido da lógica no desenvolvimento das provas matemáticas, ou, em um contexto mais amplo, da disciplina em si. Nosso primeiro delineamento do que vem a ser o papel da intuição matemática é negativo: ela deve operar, em um primeiro momento, lá onde a forma do objeto e o procedimento lógico-demonstrativo não são capazes de ir; e não seria correto considerar que o emprego da intuição nesse contexto trata-se, por si só, de uma espécie de inserção de argumentos de cunho metafísico, ou um recurso *ad hoc* para a solução de uma ou outra dificuldade pontual. Ao contrário, a intuição encontra legitimidade no fato de que essa atividade que denominamos matemática, se considerada em sua totalidade, não pode recorrer apenas a elementos formais.

Consideremos a melhor das hipóteses: digamos que o neologicismo venha a concretizar a tarefa à qual se propõe, no sentido de “fechar” a cadeia de raciocínios das provas lógicas apenas com recursos tipicamente lógicos. Vamos mais longe: consideremos ainda que sejam capazes de fundamentar *todo* o processo de abstração das séries numéricas básicas (naturais, racionais, cardinais) também através de procedimentos lógicos. O que restaria, nesse quadro, à intuição? Restam, especificamente, ao menos duas das formas de evidência

descritas acima: no que diz respeito à intuição aritmética, resta a *necessidade* de uma evidência originária-formal; quanto à intuição geométrica, por sua vez, ela é o único recurso disponível para uma evidência topológica. Em suma, trata-se de salvar *in extremis*, senão a totalidade, parte importante da *Estética transcendental* kantiana, dando os anéis para manter os dedos: abrir mão de um caráter sintético e *a priori* para todos os juízos matemáticos, para reconhecer que há, no mínimo, um recurso necessário à intuição sensível (*ainda* enquanto forma de sensibilidade) do qual não podemos nos furtar. Esta é, como se pode perceber de imediato, uma estratégia minimalista, que toma por pressuposto o sucesso da consecução da parte mais substancial da doutrina neologicista. Quanto menor o seu sucesso em termos de formalizar os passos das provas lógico-demonstrativas e da abstração das principais cadeias numéricas, tanto maior será o papel atribuído à intuição; o *quantum* desse insucesso levaria à possibilidade de restabelecer como legítimo também o papel da intuição, com o escopo de oferecer o fundamento das evidências aritmética e geométrica. Estariam assim legitimados como necessários à construção da matemática os quatro tipos de evidência. Mas mantenhamos nossa argumentação por hora apenas na hipótese mais restrita, relativa ao possível “sucesso” do neologicismo. Vamos então considerar no que consistem as noções às quais nosso recurso é obrigatório, a saber, as de evidência formal-originária e evidência topológica.

No que se refere à maneira como a intuição provê a evidência formal-originária, podemos utilizar o trecho já citado de Hale e Wright (cf. nota 29 do capítulo 3). Note-se que as inferências pelas quais eles procuram deduzir sequências numéricas umas a partir das outras partem de *conceitos*. A questão que a eles endereçamos é simples, e recorrente em debates dessa natureza: e de onde provêm esses conceitos? O conceito de número, em última análise, não pode ser adotado como uma origem absoluta. Trata-se de uma daquelas noções irreduzíveis, pois originárias. Nesse âmbito, a intuição torna-se indispensável para a própria construção do conceito:

A intuição de número puro fornece, por assim dizer, a forma transcendental no interior da qual a dedução lógica e mesmo a compreensão matemática podem realizar-se. Ela é a responsável pelas sínteses primárias e a base sobre as quais se processam a análise lógica e matemática.¹⁶

¹⁶ « L'intuition du nombre pur fournit pour ainsi dire la forme transcendente à l'intérieur de laquelle la déduction logique de même que la compréhension mathématique peuvent se réaliser. Elle est responsable des synthèses primaires sur la base desquelles l'analyse logique et mathématique se fait » (MOOIJ, 1966, p. 117).

A interpretação aqui proposta é a da identificação daquilo que Poincaré denominava *intuição de número puro* como o ato de intuição matemática que propicia a evidência originária-formal. A passagem da evidência originária-formal para a evidência aritmética ocorre com a distensão da unidade originária em uma multiplicidade *ad infinitum*. A primeira, mais originária, oferece a própria noção de número. À segunda, Poincaré denominava como o *princípio de indução completa*. Esta última retrata o “salto” que existe entre um procedimento de dedução lógica e uma forma geral através da qual inumeráveis deduções como essa se processam sem que haja um recurso necessário e efetivo à mecânica dessa dedução. A irredutibilidade dessa última noção em termos de constituintes lógicos é questionável, algo que foi objeto de disputa recorrente, por exemplo, entre Poincaré e Russell.¹⁷ Todavia, no que diz respeito à evidência originária-formal que oferece a noção de número, seu caráter intuitivo parece inquestionável, tendo em vista que argumentar em sentido contrário significaria sustentar uma concepção de número advinda *do nada*. Responder que sua origem é empírica também não parece uma solução plausível: o ato de abstração, de fato, pode ser compreendido como a origem dos entes matemáticos, mas ainda assim, ele deve necessariamente estar escudado em uma forma que lhe é anterior, pois a abstração é um ato intelectual cuja estrutura já deve estar dada anteriormente pela maneira como nosso intelecto organiza os fenômenos

¹⁷ Conforme capítulo 2, seção 2.3. Um tratamento adequado desse tema mereceria ao menos uma dezena de páginas, pois a polêmica em relação ao *status* do princípio de indução completa desenvolve-se a partir de uma publicação na Revista “*Mind*”, em 1905, oportunidade em que Russell critica o modo como Poincaré concebe o princípio de indução completa em *Ciência e Hipótese*, tomando-o como uma definição disfarçada do número inteiro. Poincaré, naturalmente dado ao debate, responde às críticas e instala uma discussão que se estende até 1909, em várias publicações em periódicos. O resumo geral dos argumentos envolvidos é o seguinte: o princípio de indução não pode, aos olhos de Poincaré, ser tomado como uma definição disfarçada. Todavia, Russell entende que bastaria a demonstração da não contradição do referido princípio para assegurar sua viabilidade, pois o problema relativo à existência real daquilo que está supostamente sendo definido não entra em jogo. Mas é justamente a impossibilidade de demonstrar analiticamente o princípio da indução completa que nos impede de tomá-lo como uma definição (cf. nota 45 do capítulo 2). Em suma, a passagem da definição de número inteiro ao princípio de indução completa não se dá por procedimentos estritamente lógicos, e não pode ser objeto de prova analítica para a totalidade dos números inteiros; por isso, segundo Poincaré, ele não pode ser tomado como uma definição.

Em resposta a tais observações, fica clara a tentativa de Russell em mudar a visada do problema, ao negar-se a discutir a questão nos termos de Poincaré; Russell procura evitar as contradições e conservar, ao mesmo tempo, as contribuições da teoria cantoriana dos conjuntos, sendo que os resultados já obtidos permitem que os matemáticos se afastem “*das províncias até então abandonadas às vagas conjecturas denominadas ‘filosofia’*.” (RUSSELL, 1906.2, p. 143). A resposta dirigida a seu interlocutor segue a trilha daquilo que mais tarde seria consolidado sob a denominação de teoria dos tipos lógicos: «*laissant de côté la question si le principe d’induction est une définition ou un axiome, considérons comment on doit le formuler.*» [deixando de lado a questão que interroga se o princípio de indução é uma definição ou um axioma; consideremos como devemos formulá-lo.] (Ibid., p. 140). Uma formulação preliminar, que Russell considera que poderá ser aceita por Poincaré, é a seguinte: «*toute propriété qui appartient à 0, et appartient au suivant de tout nombre qui la possède, appartient à tous les nombres finis.*» [toda propriedade que pertence a 0 e que pertence ao sucessor de todo número que a possui, pertence a todos os números finitos.] (Ibid., p. 141).

testemunhados na experiência. Por isso é que, malgrado a importância da experiência enquanto oportunidade de exercício do ato intelectual/imaginativo de abstração, não é possível corroborar a tese de que é da experiência, e só dela, que extraímos os entes matemáticos.

A concepção de Volkert que toma cada um dos tipos de evidência intuitiva em um grau crescente de complexidade faz com que reconheçamos as intuições aritméticas também como mais originárias, ao menos em um sentido, que as geométricas. Isso se explica pelo fato de que a distensão, como denominamos, do número ao se duplicar, traz consigo imediatamente a ideia do “duplicar em”; eis a base da evidência topológica que, quantificada, vem a ser evidência geométrica. Todavia, há uma mudança de perspectiva importante entre uma e outra:

Enquanto a evidência aritmética é intrassensual (a sequência discreta $||| \dots$ pode, por exemplo, ser gerada pela repetição das mesmas notas, como no Código Morse), a evidência geométrica está ligada presumivelmente à expressão do sentido (e, portanto, ao espaço). Essa diferença importante desloca a evidência aritmética para perto do campo conceitual, enquanto que a evidência geométrica para perto do campo sensorial.¹⁸

Acessoriamente, é interessante notar que as evidências decorrentes da intuição geométrica seguem um movimento paralelo ao que se dá nas raias da intuição aritmética. A evidência topológica impõe-se de uma maneira mais originária que a evidência geométrica propriamente dita, porque pode ser tomada como a noção geral de espaço, da qual não podemos nos furtar; a evidência geométrica, por sua vez, implica em uma consideração já *quantitativa* do espaço. Podemos identificar essa duplicidade da evidência partir da distinção elaborada por Riemann entre *geometria* e *ciência da magnitude*. De maneira geral, ele argumenta que os problemas decorrentes da geometria são oriundos de uma má compreensão da noção originária de magnitude, da qual o espaço (leia-se espaço euclidiano) é apenas um caso particular.¹⁹ O que nos interessa especificamente é o fato de que essa tentativa de

¹⁸ „Während die arithmetische Evidenz intrasensual ist (die diskrete Abfolge $||| \dots$ kann z.B. auch durch Wiederholung des gleichen Tons (Morsen!) erzeugt werden), ist die geometrische Evidenz vermutlich an den Gesichtssinn (und damit an den Raum) gebunden. Dieser bemerkenswerte Unterschied rückt die arithmetische Evidenz in die Nähe des begrifflichen Bereiches, die geometrische Evidenz hingegen nahe an den Bereich des Sinnlichen“ (VOLKERT, 1986, p. 390).

¹⁹ O discurso de habilitação de Riemann, denominado “Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen” (“Sobre as hipóteses nas quais se baseia a geometria”), foi proferido na Universidade de Göttingen, em 1854. Göttingen era indubitavelmente um grande centro de pesquisas no que diz respeito às ciências formais no século XIX, inclusive no que se refere ao estudo dos fundamentos da matemática. Nesse sentido, colocando-se em pleno cerne do debate sobre as bases da geometria, Riemann ressalta o fato de que até então a ciência da

Riemann torna clara a diferença que existe entre a evidência topológica e a geométrica, onde uma passa a ser a instanciação da outra, sendo, obviamente, a evidência topológica mais primária. Aqui, especificamente, ocorre o fenômeno acerca do qual já havíamos chamado atenção: a evidência é decorrente de uma construção, a partir da qual são apresentados novos dados a cada passo realizado. Como ressalta Folina, essa característica explicita a insuficiência de trabalhar *apenas* em nível conceitual, pois a exemplo do que vemos nas evidências decorrentes da intuição aritmética, o recurso à intuição em geometria é indispensável:

Na matemática, obtemos conclusões tanto do que é dado pelo conceito quanto do que é dado pela ‘construção’ do conceito. Uma vez que estamos construindo (linhas, pontos, triângulos), somos guiados através de nossas provas por intuição e pela síntese da imaginação. (...) A análise conceitual por si só é inadequada à matemática.²⁰

Nessa abordagem minimalista, portanto, procuramos deixar claro como existem constituintes da matemática que simplesmente não são passíveis de serem reduzidos a uma forma lógica, utilizando para tanto uma concepção *modesta* de intuição matemática de inspiração kantiana. A possibilidade e a pertinência de ampliação desse núcleo mínimo encontram-se em uma relação direta com os resultados do neologicismo. Hoje, todavia, levando em conta os problemas inerentes à doutrina matemática em questão, ainda podemos sustentar a viabilidade de considerar *necessária* a intuição aritmética para além do campo da mera evidência formal-originária. Dessa maneira, pelo procedimento que adotamos, não nos comprometemos com a necessidade de dar conta de uma definição transcendental da intuição matemática, e escapamos, em um primeiro momento, das questões espinhosas da sustentação do kantismo (como, por exemplo, o que Dubucs denomina o “Dilema de Kant”²¹) decorrentes,

geometria tomava por certa a noção de espaço e outros de seus princípios básicos, mas de modo insuficiente. Segundo ele, tais conceitos básicos da geometria assentavam-se meramente em definições nominais, cujas relações permaneciam ainda obscuras. Ao diagnosticar o problema, Riemann sustenta um posicionamento que sugere, em um primeiro momento, uma saída curiosa para a questão: ele estabelece como primeira tarefa a construção do conceito de *quantidade multidimensional*, a partir do conceito geral de *magnitude*. O objeto multidimensional pode ser medido de maneiras diferentes, e o espaço é apenas um exemplo em particular do caso da tridimensionalidade. Assim, os teoremas da geometria não podem ser deduzidos apenas a partir da noção de magnitude, mas também daquelas propriedades que distinguem o espaço de outras entidades tridimensionais concebíveis, e essas propriedades só podem ser encontradas *experimentalmente* (RIEMANN, 2004, p. 257).

²⁰ “In mathematics we draw conclusions both from what is given in the concept and from what is given in the ‘construction’ of the concept. Because we are constructing (lines, points, triangles), we are ‘guided throughout’ our proofs by intuition and by the synthesis of the imagination. (...) Conceptual analysis alone is inadequate for mathematics” (FOLINA, 1992, p. 21-2).

²¹ «Puisque l’explication transcendente des mathématiques exige que toutes les propriétés attribuées à l’espace par la géométrie possèdent leur exacte contrepartie dans l’expérience possible, la philosophie

em grande parte, de uma distinção rígida, quase maniqueísta, entre concepções sintéticas ou analíticas da matemática. Ao contrário de um diagnóstico como esse, sugerimos a possibilidade de pensar análise e síntese como constituintes complementares das bases da matemática. Nesse pormenor, sigo o pensamento de Ernst Zermelo:

Inicialmente assumimos que os juízos sintéticos e analíticos surgem lado a lado na aritmética, a partir do que aceitamos a tarefa de isolar sua parte analítica. (...) Os teoremas matemáticos reduzidos logicamente que surgem dessa maneira são, portanto, juízos hipotético-analíticos, e formam o esqueleto lógico de uma teoria matemática.²²

Todavia, a adoção dessa perspectiva obriga-nos a olhar ao menos um exemplo em relação a como se configura efetivamente essa participação da intuição na gênese de uma série aritmética e, por outro lado, na geometria. O motivo de assim proceder é óbvio: olhando o produto dessa correlação que caracteriza as teorias matemáticas, teremos uma chance de melhor entender sua constituição. Vejamos então algumas consequências que podemos extrair de dois exemplos. O primeiro deles é o da criação da sequência das três ordens básicas numéricas: o conjunto dos naturais, dos racionais e dos reais. Peano define a série dos inteiros positivos²³ a partir de noções básicas, como “zero”, “número” e “número subsequente”, por meio de seus cinco axiomas, que são os seguintes:

1º - Zero é um número inteiro.

kantienne se trouve exposée à une manière de dilemme dont les termes sont les suivants. (...) La nature du lien établi par la philosophie transcendente entre l'intuition mathématique et l'intuition empirique requiert que les deux types d'intuition se voient attribuer des pouvoirs de résolution comparables, ce qui ne peut être obtenu que de deux manières dont chacune est, à certains égards, problématique : ou bien en limitant la capacité de la première à pénétrer la nature des contraintes que l'esprit exerce sur les phénomènes, ou bien en surévaluant très largement les capacités effectives de discrimination de la seconde, c'est-à-dire finalement en considérant comme possibles un certain nombre d'expériences que nous sommes, en fait, incapables d'avoir. » [Uma vez que a explicação transcendental da matemática exige que todas as propriedades atribuídas ao espaço pela geometria tenham sua exata contraparte na experiência possível, a filosofia kantiana encontra-se exposta, de certo modo, a um dilema cujos termos são os seguintes. (...) A natureza da ligação estabelecida pela filosofia transcendental entre intuição matemática e intuição empírica requer que os dois tipos de intuição sejam dotados de poderes de resolução comparáveis, o que só pode ser realizado através de duas maneiras onde cada uma delas é, por certos aspectos, problemática: ou limitando a capacidade da primeira imiscuir-se na natureza das imposições que o espírito exerce sobre os fenômenos, ou supervalorizando demais as capacidades efetivas de discriminação da segunda, ou seja, considerar como possíveis experiências que nós somos, de fato, incapazes de possuir.] (DUBUCS, 1999, p. 106-7).

²² “We initially assume that synthetic and analytic judgments occur side by side in arithmetic and make it our business to isolate the analytical part. (...) The logically reduced mathematical theorems emerging in this way are analytical-hypothetical judgments and they form the logical skeleton of a mathematical theory” (ZERMELO apud PECKHAUS, 2002, p. 8).

²³ A versão apresentada contém apenas a transcrição dos axiomas da linguagem pasigráfica, como Peano a denomina, para o português, em nome da simplicidade de leitura. Vide Schmid (1978, p. 138) para uma

2º - O sucessor de todo inteiro também é inteiro, ao que convém adicionar, todo número inteiro tem um sucessor.

3º - Zero não é sucessor de nenhum número inteiro.

4º - Dois números inteiros são iguais se seus sucessores também o são.

5º - Se s é uma classe que contém zero, contém o inteiro x e o sucessor de x , então ela contém todos os números inteiros.

A definição do conceito de conjunto, seja a partir da teoria cantoriana, seja com a axiomática de Zermelo, permite uma extensão da sequência numérica, que acaba constituindo uma maneira de passar dos naturais para os racionais. Para tanto, podemos partir da ideia básica de estabelecer conjuntos de pares ordenados com uma regra de geração. Usemos um exemplo análogo ao de Heyting (1931, p. 54), quando procura estabelecer uma regra de geração para as grandezas contidas no intervalo fechado entre 0 e 1, malgrado nossa discordância em relação às consequências que ele extrai desse exemplo. Tomando como pressuposto o *axioma do par* (presente em Z e em ZF) e as operações básicas da aritmética, suponhamos:

$$(1) \quad \forall a \forall b ((a, b \in \mathbb{N}) \wedge (a \leq b) \wedge (b \neq 0))$$

Obedecendo a sequência que toma por base e limite a segunda grandeza, temos o seguinte conjunto de pares ordenados:

$$(2) \quad (0;1), (1;1), (0;2), (1;2), (2;2), (0;3), (1;3), (2;3), (3;3); (0;4), (1;4), \dots$$

A cada um dos pares ordenados é possível atribuir uma relação bivalente aRb , sendo R interpretado como “dividido por”. Excluindo os resultados “duplicados”, teremos ao final a seguinte sequência:

$$(3) \quad 0, 1, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, \dots$$

O problema referente à ordem adequada de cada um dos termos gerados pelo par ordenado em ordem crescente (a exemplo do que vemos nos naturais com a operação $n, n+1, n+2, \dots$) é resolvido pela aplicação direta do axioma da escolha.²⁴ O *grand finale* que o

apresentação resumida da versão apresentada por Peano datada de 1905. As traduções que se seguem são citações textuais da interpretação de Poincaré aos axiomas (cf. POINCARÉ, 1986[1905], p. 32).

²⁴ O axioma é formulado por Zermelo nos seguintes termos: „Ist T ein Menge, deren sämtliche Elemente von 0 verschiedene Mengen und untereinander elementfremd sind, so enthält ihre Vereinigung $\mathfrak{ZT}$ mindestens eine

sistema axiomático oferece como instrumento apto a realizar a explicitação de tal sequência é a garantia de que essa operação não se encerra no domínio do finito. Para tanto, simplesmente basta lançar mão do axioma do infinito,²⁵ que possibilita conceber uma série sequencial e bem ordenada de números que poderão constituir um conjunto infinito, simplesmente ao postular sua existência. Contudo, tanto a aceitabilidade do axioma da escolha quanto o axioma do infinito remetem a uma intuição que preside a construção da prova dessas séries. Ambos os axiomas são perfeitamente compreensíveis, mas seu emprego efetivo só ocorre ao *realizarmos* a construção de séries, ou seja, se operarmos com o *potencialmente* infinito.

Há, portanto, que se notar uma dupla função desses axiomas: podemos, em primeiro lugar, tomá-los como verdadeiros *apenas* para que possamos dar conta satisfatoriamente de uma definição formal de sequências infinitas e bem ordenadas; um segundo uso possível é o de que sua aplicação só pode ocorrer em um processo de construção de séries que sempre continuarão inacabadas. Nesse processo de construção, o recurso ao axioma da escolha torna claro que as operações matemáticas dessa natureza não podem furtar-se do emprego da intuição.

Dessa forma, ainda que proclamada a libertação dos constituintes psicológicos, a atividade matemática está irremediavelmente ligada ao menos à evidência originária-formal como uma indicação das propriedades dos termos *a* e *b* da fórmula (1). Uma leitura mais ousada diria que, apesar da alegada suficiência da definição nominal, o que importa realmente à matemática não é o que indica a fórmula referida acima, nem tampouco sua explicitação conforme (2), mas algo ainda mais elementar:

A matemática formal ensina efetivamente não a continuar indefinidamente um procedimento evidente de construção (...), mas a definir *a priori* os tipos dos quais depende a solução de um problema e, conseqüentemente, os limites que essas

Untermenge S_1 , welche mit jedem Elemente von T ein und nur ein Element gemein hat.“ [Se T é um conjunto onde seus elementos são conjuntos de elementos não vazios e diferentes entre si, postula-se sua união $\mathfrak{S}T$ através do subconjunto S_1 que com cada elemento de T tem um e apenas um elemento em comum.] (ZERMELO, 1907.1, p. 184).

²⁵ „Der Bereich enthält mindestens eine Menge Z , welche die Nullmenge als Element enthält und so beschaffen ist, dass jedem ihrer Element a ein weiteres Element der Form $\{a\}$ entspricht, oder welche mit jedem ihrer Elemente a auch die entsprechende Menge $\{a\}$ als Element enthält.“ [A extensão alcançada por um conjunto Z que contém o conjunto vazio como elemento dado é tal que, para cada elemento ‘ a ’, a ele corresponde um elemento seguinte de forma ‘ $\{a\}$ ’, ou que para cada elemento ‘ a ’ corresponde um conjunto ‘ $\{a\}$ ’ como elemento.] (ZERMELO, 1907.1, p. 184-5); ou numa formulação muito mais direta, “existe um conjunto infinito” (FOLINA, 1992, p. 112).

estruturas comportam intrinsecamente. (...) A matemática é menos uma longa cadeia de razões que uma composição feita de diferentes estruturas.²⁶

Os limites dessas estruturas não se encerram exclusivamente na sua definição ou na sua forma lógica; a intuição tem o papel fundamental de articular essas estruturas visando as “boas” construções. Parte desse processo toca a questão da inserção de entes que não podem ser definidos a partir de intuições diretas. Afinal, como falar em uma intuição dos números incomensuráveis e transfinitos? O problema que se coloca de início é o da impossibilidade de intuir, *da mesma maneira* que intuimos a unidade, um número que não podemos estabelecer com precisão e que não podemos efetivamente construir, ou a totalidade que não podemos contar. Em ambos os casos, entretanto, o termo intuição não deve ser tomado exatamente como o que fundamenta os naturais.

Como já ressaltamos, a origem dos incomensuráveis pode ser vista como produto da relação que se estabelece entre intuição aritmética e intuição geométrica, a partir da assimilação natural entre os pontos de uma reta e as grandezas numéricas da série dos racionais. A assimilação das grandezas aritméticas e geométricas, como a de números aos pontos de uma reta, traz à tona problemas como o da extensão da diagonal do quadrado, onde há um “lugar” na reta ao qual não se pode associar um número racional, ou mesmo a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, o número π , em que existe uma reconhecida impossibilidade de atribuir a uma determinada grandeza comensurável a uma razão constante deveras importante. Aqui, portanto, impõe-se a distinção já elaborada quanto a definir e descrever: é possível definir números incomensuráveis, mas sua descrição a partir de um modo de geração é impraticável. Destarte, existe uma definição, ainda que impredicativa, mas que serve àquilo que dela se exige, qual seja, a possibilidade de compatibilizar o espaço geométrico às séries numéricas, isentando essa relação de uma contradição. Não há que se negar alguma forma de conteúdo intuitivo a essa classe de números, pois existe efetivamente a possibilidade de intuí-lo; tomemos como exemplo $\sqrt{5}$: trata-se da grandeza maior que x , menor que y (isto é, que pode ser inserida em uma série), maior que zero (se estivermos restritos ao universo dos números positivos) e cujo quadrado é

²⁶ « Elle [la mathématique formelle] enseignait en effet non pas à continuer indéfiniment un procédé évident de construction, (...) mais à définir a priori les types des structures desquels dépend la solution d'un problème et, par conséquent, les limites que ces structures comportent intrinsèquement. (...) Les mathématiques sont moins un longue chaîne de raisons qu'une composition faite de différentes structures » (VUILLEMIN apud VOLKERT, 1986, p. 272).

igual a 5. A intuição que temos dessa grandeza assemelha-se, em sua aparente fragilidade se comparada aos números inteiros, às dízimas periódicas, onde sabemos da recorrência da mesma operação incessantemente, ou às operações com números muito grandes, mas finitos (como os números de Gödel e o googolplex), em que sua construção é dispensável.

Quanto aos números transfinitos, o ataque que o intuicionista lhe dirige parece indevido, sobretudo quando há uma referência ao tão exaustivamente citado infinito atual. Do ponto de vista estritamente matemático, não se espera realmente que, a partir da definição dos transfinitos, sejamos capazes de efetuar uma apreensão *hic et nunc* de um infinito dado em ato. $\aleph_0$ traz à baila apenas a representação abstrata de uma totalidade não finita, leia-se, incontável, e não obstante tratar-se de um conceito impredicativo, como grande parte dos conceitos aplicados em matemática, ele atende à finalidade a que se destina. O paraíso *criado* por Cantor,²⁷ ao tratar desse tipo de abstração, adota como pressupostos relações diversas daquelas que regem a matemática elementar (cf. capítulo 1, seção 1.2). Podemos considerar que, na qualidade de criação livre do espírito humano, o que se exige no contexto da matemática do transfinito não é a absoluta correspondência entre esse conceito abstrato e um suposto infinito dado em ato, mas a adequação isenta de contradições do sistema peculiar à lógica e à axiomática que o dirigem. No torvelinho, a matemática do transfinito, assim como as geometrias *n*-dimensionais e outras tantas possíveis criações, não passa de um esforço intelectual de procurar atribuir uma representação simbólico-axiomática a hipóteses imaginadas que, a rigor, não podemos conhecer pela experiência ou pela intuição. As questões inerentes ao contínuo matemático, exaustivamente tratadas por Hilbert e por Gödel, e a questão relativa às diversas ordens de infinito, são desdobramentos dessa teoria e das dificuldades que lhes são inerentes.

No que concerne à geometria, é ainda mais factível a presença de uma intuição que dirige efetivamente a construção e os processos de prova. Já tivemos a oportunidade de citar que Volkert atribui à proximidade em relação à expressão espacial o deslocamento da geometria para perto da atividade sensorial. Vamos tomar como exemplo a primeira parte da demonstração do quinto teorema de Euclides, contida no livro 1 dos *Elementos*. O teorema e sua respectiva demonstração são estabelecidos da seguinte maneira:

²⁷ “No one shall be able to drive us from the paradise that Cantor created for us.” [Ninguém há de expulsar-nos do paraíso que Cantor criou para nós.] (HILBERT, 1925, p. 376).

Figura 4 (EUCLIDES, 1994, p. 5)

Teorema: nos triângulos isósceles, os ângulos da base são iguais entre si, e se linhas retas iguais forem prolongadas, os ângulos subtendidos à base serão iguais entre si.

Demonstração: Seja ABC um triângulo isósceles com o lado AB igual ao lado AC; e sejam as retas BD, CE prolongadas a partir de AB e AC [Post 2]. Digo que o ângulo ABC é igual ao ângulo ACB, e o ângulo CBD ao ângulo BCE. Seja o ponto F tomado aleatoriamente sobre BD; a partir de AE, tome-se AG igual a AF [I 3]; que sejam traçadas as retas FC e GB [Post. 1]. Então, como AF é igual a AG e AB igual a AC, os dois lados FA e AC são respectivamente iguais a GA e AB; e eles contêm um ângulo comum, o ângulo FAG. Então a base FC é igual à base GB, e o triângulo AFC é igual ao triângulo AGB, e os ângulos remanescentes serão iguais aos seus respectivos ângulos, ou seja, os formados pelos lados iguais, quer dizer, o ângulo ACF igual ao ângulo ABG, e o ângulo AFC igual ao ângulo AGB [I 4]. Uma vez que AF é igual a AG, e neles AB igual a AC, o segmento remanescente BF é igual ao CG. Mas provou-se também FC igual a GB; assim, os dois lados BF e FC são iguais a CG e GB respectivamente; e o ângulo BFC é igual ao ângulo GCB, sendo a base BC comum a ambos; logo, o triângulo BFC é também igual ao triângulo GCB, e os ângulos remanescentes serão respectivamente iguais, ou seja, aqueles formados pelos lados iguais; assim, o ângulo FBC é igual ao ângulo GCB, e o ângulo BCF igual a CBG. Desse modo, uma vez que foi provado que o ângulo ABG é igual a ACF, e, neles, o ângulo CBG é igual a BCF, os ângulos remanescentes ABC e ACB são iguais; e eles estão na base do triângulo ABC. Mas o ângulo FBC também foi provado como sendo igual ao ângulo GCB; e ambos estão sob a base.²⁸

²⁸ “**Theorem:** The angles (ABC, ACB) at the base (BC) of an isosceles triangle are equal to one another, and if the equal sides (AB, AC) be produced further, the angles under the base will be equal to one another.

Demonstration: Let ABC be an isosceles triangle having the side AB equal to the side AC; and let the straight lines BD, CE be produced further in a straight line with AB, AC [Post. 2]. I say that the angle ABC is equal to the angle ACB, and the angle CBD to the angle BCE. Let a point F be taken at random on BD; From AE the greater let AG be cut off equal to AF the less [I 3]; and the straight lines FC, GB be joined [Post 1]. Then, since AF is equal to AG and AB to AC, the two sides FA, AC are equal to the two sides GA, AB, respectively; and they contain a common angle, the angle FAG. Therefore the base FC is equal to the base GB, and the triangle AFC is equal to the triangle AGB, and the remaining angles will be equal to the remaining

Há necessidade de provar o teorema, porque o conceito de triângulo isósceles enquanto definição de triângulo que possui dois lados iguais, não exige analiticamente a existência de dois ângulos iguais. O teorema tem a função de estabelecer uma relação necessária entre esses dois conceitos, que se pretende válida para triângulos isósceles em geral, quer dizer, independentes de seu tamanho ou da angulação dos lados em relação à base. A validade do teorema é irrestrita, para todos os triângulos que possuam tais propriedades. Essa condição decorre da maneira ampla e, ao mesmo tempo, precisa, por meio da qual o teorema é construído: qualquer triângulo que possua dois lados iguais é passível de tal prova. Não se trata, portanto, de uma prospecção empírica, de uma comparação de vários triângulos isósceles de variados tamanhos e ângulos internos diferentes. Trata-se de uma propriedade evidenciada por um processo de construção.²⁹

Esse processo é edificado a partir dos postulados, proposições e noções comuns previamente assumidos, um procedimento que caracteriza o método axiomático: emprega-se

angles respectively, namely those which the equal sides subtend, that is, the angle ACF to the angle ABG, and the angle AFC to the angle AGB [I 4]. And, since the whole AF is equal to the whole AG, and in these AB is equal to AC, the remainder BF is equal to the remainder CG. But FC was also proved equal to GB; therefore the two sides BF, FC are equal to the two sides CG, GB respectively; and the angle BFC is equal to the angle CGB, while the base BC is common to them; therefore the triangle BFC is also equal to the triangle CGB, and the remaining angles will be equal to the remaining angles respectively, namely those which the equal sides subtend; therefore the angle FBC is equal to the angle GCB, and the angle BCF to the angle CBG. Accordingly, since the whole angle ABG was proved equal to the angle ACF, and in these the angle CBG is equal to the angle BCF, the remaining angle ABC is equal to the remaining angle ACB; and they are at the base of the triangle ABC. But the angle FBC was also proved equal to the angle GCB; and they are under the base.” (EUCLIDES, 1994, p. 4-5).

²⁹ Para tanto, a solução proposta pela *Estética transcendental* talvez seja a melhor saída, ainda que não se possa considerá-la isenta de problemas: « *Chez Kant, l'intuition concerne exclusivement la faculté des sens ; des formes intellectuelles de l'intuition ne figurent pas dans son système. Toutefois, cette intuition ne doit pas nécessairement être empruntée à l'expérience. Il se peut aussi qu'elle repose uniquement sur la forme de la faculté des sens. Or, cette possibilité s'applique à l'intuition qui compte pour les mathématiques. La validité a priori des propositions mathématiques n'est par conséquent pas infirmée par suite de leur appui sur l'intuition. (...) Résumant, Kant dit : « Die mathematische (Erkenntnis ist die Vernunftkenntnis) aus der Konstruktion der Begriffe. Einen Begriff aber konstruieren heisst: die ihm korrespondierende Anschauung a priori darstellen. Zur Konstruktion eines Begriffes wird also eine nicht empirische Anschauung erfordert, die folglich als Anschauung ein einzelnes Objekt ist, aber nichtsdestoweniger als die Konstruktion eines Begriffes (einer allgemeinen Vorstellung) Allgemeingültigkeit für alle mögliche Anschauungen, die unter demselben Begriff gehören, in der Vorstellung ausdrücken muss. » » [Em Kant, a intuição concerne exclusivamente à faculdade dos sentidos; formas intelectuais de intuição não têm lugar em seu sistema. Contudo, essa intuição, apesar de sensível, não deve necessariamente ser tomada a partir da experiência. Conclui-se que ela repousa sobre a forma da faculdade dos sentidos. Destarte, essa possibilidade aplica-se à intuição no que concerne à matemática. A validade a priori das proposições matemáticas não deve ser inferida a partir de seu apoio propiciado pela intuição. (...)] Resumindo, Kant diz: “O conhecimento matemático é um conhecimento da razão por construção de noções. Construir uma noção quer dizer: estabelecer a priori a intuição que a ela corresponde. Uma intuição não empírica é, portanto, rigorosa para a construção de uma noção. Essa intuição, enquanto tal, é intuição de um único objeto, mas ela deve, entretanto, enquanto construção de uma noção (uma representação geral) exprimir*

na demonstração do quinto teorema os teoremas 3 e 4 (que tratam respectivamente da construção de retas iguais e de triângulos iguais), os postulados 1 e 2 (sobre a possibilidade de traçar linhas retas a partir de dois pontos e a de prolongar retas indefinidamente), bem como as noções comuns (“duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si”, “se grandezas iguais forem adicionadas a outras grandezas iguais, suas totalidades são iguais”, “o todo é maior que suas partes”, etc.). Contudo, apesar desses recursos empregados na prova do quinto teorema serem introduzidos no sistema por meio de definições, estão obviamente centrados em uma espécie de evidência que não pode estar dissociada de uma noção espacial, consideremo-la um produto de imagens mentais ou uma espécie de abstração oriunda da experiência sensível. Um caso claro é a própria definição do conceito de ângulo: “*um ângulo plano é a inclinação entre duas linhas em um plano, linhas essas que se encontram e não estão em linha reta.*”³⁰ Como vemos, o conceito em tela pressupõe outras definições, como a de linha reta e de plano, oriundas de uma evidência topológica, pois todos esses conceitos remetem a noções espaciais, dadas intuitivamente. Traçar linhas em um plano para construir um ângulo: a própria descrição do processo exige a “realização” dos conceitos em termos espaciais. A primordial noção de igualdade, em termos espaciais e da forma como é introduzida, decorre, em última análise, do reconhecimento de uma evidência intuitiva. A intuição também possibilita o emprego *adequado* dos recursos utilizados para a obtenção da demonstração pretendida:

Uma demonstração matemática não é uma simples justaposição de silogismos; são silogismos *colocados em uma certa ordem*, e a ordem na qual esses elementos são colocados é muito mais importante que os elementos em si mesmos. Se eu tenho esse sentimento, por assim dizer, a intuição dessa ordem, de modo a perceber de um só golpe de vista o conjunto do raciocínio, não devo mais recear esquecer um dos elementos, pois cada um deles virá colocar-se por si mesmo no quadro que lhe foi preparado, e sem que eu tenha que fazer qualquer esforço de memória.³¹

através da representação a validade geral de toda sorte de intuições que recaem sobre a mesma noção.] (MOOIJ, 1966, p. 119-20).

³⁰ “A plane angle is the inclination to one another of two lines in a plane which meet one another and do not lie in a straight line” (EUCLIDES, 1994, p. 1). Note-se que essa definição, a de número 8 dos *Elementos*, juntamente com a definição 9 (relativa aos ângulos retilíneos) são definições propriamente ditas, enquanto as de número 10, 11 e 12 têm apenas um caráter classificativo, quando distinguem ângulos retos, obtusos e agudos.

³¹ « Une démonstration mathématique n'est pas une simple juxtaposition de syllogismes, ce sont des syllogismes placés dans un certain ordre, et l'ordre dans lequel ces éléments sont placés est beaucoup plus important que ne le sont les éléments eux-mêmes. Si j'ai le sentiment, l'intuition pour ainsi dire de cet ordre, de façon à apercevoir d'un coup d'oeil l'ensemble du raisonnement, je ne dois plus craindre d'oublier l'un des éléments, chacun d'eux viendra se placer de lui-même dans le cadre qui lui est préparé, et sans que j'aie à faire aucun effort de mémoire » (POINCARÉ, 1908, p. 43).

Nesse sentido, podemos asseverar que as bases da demonstração são dadas axiomáticamente, mas a “boa” combinação dos pressupostos utilizados para a demonstração do teorema não encontra guarida em qualquer espécie de procedimento lógico, muito menos no mero acaso. A construção não é lógica, assim como não é aleatória. Os passos da dedução obedecem a uma sequência que a lógica axiomática dedutiva pode realizar, mas não pode prever. Passo a passo, a dedução apoia a intuição, que redireciona a dedução, que permite que a intuição indique o próximo passo, e assim sucessivamente. Esse é o sentido de uma construção intuitiva de conceitos, que propicia uma composição harmônica fundamental para aquilo que de fato importa nas construções geométricas:

Para o geômetra puro, a faculdade da intuição é necessária; pela lógica demonstra-se, pela intuição inventa-se. Saber criticar é bom, mas saber criar é melhor. (...) A lógica nos mostra que por este ou aquele caminho temos certeza de não encontrar obstáculos. (...) Sem a intuição, o geômetra seria como um escritor atrelado à gramática, mas que não tivesse ideias.³²

Logo, parece claro que sustentar essa tese não significa também excluir *totalmente* o procedimento lógico-demonstrativo do processo de criação. O que existe é uma sincronia harmônica entre elas, algo que no processo de demonstração do teorema de Euclides é tornado evidente. Intuição, por si só, não garante certeza exigida pelo matemático, pois “*a intuição por si só é incapaz da autocorreção*”,³³ assim como a lógica perfeita, sem outras referências, não pode ser tomada como algo para além de qualquer dificuldade, como mostram os paradoxos lógicos da teoria dos conjuntos e os teoremas da incompletude de Gödel. A ciência matemática deve ser lastreada pela demonstração e direcionada pela intuição; desse modo, “*o processo das corretas inferências lógicas pode ser testado apenas em uma de suas aplicações; (...) a lógica deve ser tomada como um elo de ligação restrito à evidência formal primitiva, descritiva.*”³⁴ De uma maneira metafórica, poderíamos dizer que os recursos lógico-demonstrativos são as lentes de aumento do matemático, os instrumentos através dos quais sua observação torna-se mais precisa; mas o instrumento, por si só, não funciona sozinho; o

³² «Pour le géomètre pur lui-même, cette faculté (l'intuition) est nécessaire, c'est par la logique qu'on démontre, c'est par l'intuition qu'on invente. Savoir critiquer est bon, savoir créer est mieux. (...) La logique nous apprend que sur tel ou tel chemin nous sommes sûrs de ne pas rencontrer d'obstacle. (...) Sans l'intuition, le géomètre serait comme un écrivain qui serait ferré sur la grammaire, mais qui n'aura pas d'idées » (POINCARÉ, 1908, p. 137).

³³ „Anschauung allein ist keiner Selbstkorrektur fähig“ (REIDEMEISTER apud VOLKERT, 1986, p. 332).

³⁴ „Das Verfahren des richtigen logisches Schliessens kann nur in ein seiner Anwendung geprüft werden. (...) Die Logik muss eine enge Verbindung mit der primitiv-formalen (anschaulichen) Evidenz eingehen.“ (VOLKERT, 1986, p. 383).

“olho nu” da intuição é incapaz de enxergar muito além. Associados, o poder do rigor demonstrativo é bem direcionado pela intuição, tomada tanto como responsável pela invenção científica quanto como base epistemológica do conhecimento, a partir do que a ciência em seu mais alto grau de refinamento e especialização realiza-se:

Acreditamos que, em nossos raciocínios, não mais apelamos para a intuição; os filósofos dizem-nos que isso é uma ilusão. A lógica pura não nos conduzirá jamais a não ser a tautologias; ela não pode criar nada de novo; não é dela apenas que qualquer ciência pode derivar. Esses filósofos têm razão em um sentido; para a aritmética, assim como para a geometria ou para outra ciência qualquer, precisa-se de outra coisa além da lógica pura. Essa outra coisa, não temos outro termo para designá-la senão como intuição. Mas quantas ideias diferentes se escondem sob essa mesma palavra?

Comparemos esses quatro axiomas:

1º Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si;

2º Se um teorema é verdadeiro para o número 1 e se demonstra-se que é válido para $n+1$, desde que o seja para n , ele será verdadeiro para todos os números inteiros;

3º Se sobre uma reta o ponto C está entre A e B, e o ponto D entre A e C, o ponto D estará entre A e B;

4º Por um ponto não pode passar mais de uma paralela a uma reta.

Os quatro axiomas devem ser atribuídos à intuição, e, todavia, o primeiro é o enunciado de uma das regras da lógica formal; o segundo, é um juízo sintético *a priori*, o fundamento da intuição matemática rigorosa; o terceiro, um apelo à imaginação, e o quarto, uma definição disfarçada. (...) Temos, portanto, vários tipos de intuição; primeiro, um apelo aos sentidos e à imaginação; em seguida, a generalização, por meio de indução, calcada, por assim dizer, nos procedimentos das ciências experimentais; temos enfim a intuição do número puro, donde se extrai o segundo axioma enunciado outrora e que pode engendrar o verdadeiro raciocínio matemático.³⁵

Notamos assim que a gênese do saber matemático supera a rígida distinção entre esferas e denominações às quais recorreremos para tentar compreender adequadamente a maneira como ele se processa. O que há, ao final de contas, é o intelecto humano em

³⁵ « Nous croyons dans nos raisonnements ne plus faire appel à l'intuition ; les philosophes nous diront que c'est là une illusion. La logique toute pure ne nous mènerait jamais qu'à des tautologies ; elle ne pourrait créer du nouveau ; ce n'est pas d'elle toute seule qu'aucune science peut sortir. Ces philosophes ont raison dans un sens ; pour faire l'Arithmétique, comme pour faire la Géométrie, ou pour faire une science quelconque, il faut autre chose que la logique pure. Cette autre chose, nous n'avons pour la désigner d'autre mot que celui d'intuition. Mais combien d'idées différentes se cachent sous ces mêmes mots ?

Comparons ces quatre axiomes :

1º Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles ;

2º Si un théorème est vrai du nombre 1 et si l'on démontre qu'il est vrai de $n+1$, pourvu qu'il le soit de n , il sera vrai de tous les nombres entiers ;

3º Si sur une droite le point C est entre A et B et le point D entre A et C, le point D sera entre A et B ;

4º Par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite.

Tous quatre doivent être attribués à l'intuition, et cependant le premier est l'énoncé d'une des règles de la logique formelle ; le second est un véritable jugement synthétique *a priori*, c'est le fondement de l'intuition mathématique rigoureuse, le troisième est un appel à l'imagination ; le quatrième est une définition déguisée. (...) Nous avons donc plusieurs sortes d'intuitions ; d'abord, l'appel aux sens et à l'imagination ; ensuite, la généralisation par induction, calquée, pour ainsi dire, sur les procédés des sciences expérimentales ; nous avons

exercício, desempenhando várias funções, agindo de várias maneiras, e que impõe novos desafios e demandas a cada nova construção ou relação introduzida.³⁶ Assim, o lugar próprio da estrutura formal e isenta de conteúdo que procura estabelecer regras de combinação e funcionamento para os objetos (tomados também enquanto formas isentas de conteúdo) é restrito à verificação³⁷ e à expressão da matemática. O erro de conceber as teorias matemáticas exclusivamente à moda do logicismo, do formalismo ou do estruturalismo reside no fato de deixar em segundo plano que há uma dimensão que é exterior à forma, e que ao mesmo tempo a constitui, dirige e dá a ela um sentido.³⁸

4.2. Linguagem matemática: semântica e simbolismo

Partimos da premissa de que conhecimento e discurso enunciativo guardam uma proximidade essencial, pois o próprio pensar, uma vez ordenado adequadamente, está

enfin l'intuition du nombre pur, celle d'où est sorti le second des axiomes que j'énonçais tout à l'heure et qui peut engendrer le véritable raisonnement mathématique. » (POINCARÉ, 1923, p. 20-2).

³⁶ « *Le mouvement qui, dans les sciences physiques transforme un élément de connaissance empirique en un élément rationnel, et même en principe rationnel d'explication, trouve son analogue dans les mathématiques pures, lorsqu'un nouvel être mathématique est posé, qui va, par ses capacités opératoires, transformer les données d'un problème, voire modifier un champ des mathématiques.* » [O movimento que, nas ciências físicas, transforma um elemento do conhecimento empírico em um elemento racional, e até mesmo em *princípio racional de explicação*, encontra seu análogo na matemática pura quando um novo ente matemático é introduzido, que vai, por suas capacidades de operação, transformar os dados de um problema e até mesmo modificar um campo da matemática.] (PATY, 2005, p. 126).

³⁷ No sentido que Poincaré atribui ao termo: « *La vérification diffère précisément de la véritable démonstration parce qu'elle est purement analytique et parce qu'elle est stérile. Elle est stérile parce que la conclusion n'est que la traduction des prémisses dans un autre langage. La démonstration véritable est féconde au contraire parce que la conclusion y est en un sens plus générale que les prémisses. L'égalité $2+2=4$ n'a été ainsi susceptible d'une vérification que parce qu'elle est particulière. Tout énoncé particulier en mathématique pourra toujours être vérifié de la sorte. Mais si la mathématique devait se réduire à une suite de pareilles vérifications, elle ne serait pas une science.* » [A verificação difere precisamente da verdadeira demonstração por ser puramente analítica e estéril. Ela é estéril porque sua conclusão nada é senão a tradução das premissas em outros termos. Ao contrário, a verdadeira demonstração é fecunda porque a conclusão que propicia é, de certo modo, mais geral que suas premissas. A igualdade $2+2=4$ só é passível de ser verificada porque ela é particular. Todo enunciado matemático individual sempre pode ser verificado do mesmo modo. Mas se a matemática fosse reduzida a uma série de verificações como essa, ela não seria uma ciência.] (POINCARÉ, 1902, p. 33-4).

³⁸ « *Dans ces édifices compliqués élevés par les maîtres de la Science mathématique, il ne suffit pas de constater la solidité de chaque partie et d'admirer l'oeuvre du maçon, il faut comprendre le plan de l'architecte. Or, pour comprendre un plan, il faut en apercevoir à la fois toutes les parties, et le moyen de tout embrasser dans un coup d'oeil d'ensemble, c'est l'intuition seule qui peut nous le donner.* » [Nesses edifícios complexos erigidos pelos mestres da ciência matemática, não basta constatar a solidez de cada parte e admirar a obra do construtor; é preciso compreender a ideia do arquiteto. E, para compreender sua ideia, é preciso perceber, por sua vez, todas as partes e a maneira como tudo se relaciona através de uma percepção de seu conjunto, algo que apenas a intuição pode nos dar.] (POINCARÉ apud MOOIJ, 1966, p. 116).

necessariamente relacionado a uma espécie de elaboração linguística.³⁹ Logo, temos uma indicação do motivo pelo qual a perspectiva fregeana de uma lógica passível de expressar também relações matemáticas é tão bem vinda no que concerne aos fundamentos da disciplina: a matemática, na condição de produto do conhecimento humano, está indissociavelmente atrelada à linguagem que a veicula e, conseqüentemente, à lógica que rege linguagem e pensamento. Assim, é pelo discurso enunciativo, adote ele que forma adotar, que a matemática realiza-se,⁴⁰ por intermédio de uma articulação necessária entre sintaxe e semântica.

Enquanto ramo do conhecimento científico, os processos mentais e mesmo a *praxis* da matemática que redundam na produção, concepção, elaboração, e até mesmo da apresentação da forma final da teoria, devem partir de alguns pressupostos. Por isso, podemos entender que crenças metafísicas, metodológicas, bem como valores preestabelecidos determinam uma postura normativa e valorativa em relação ao saber matemático. O exemplo de Kronecker é lapidar: o autor toma a matemática como uma ciência experimental, e tem sua formulação centrada em um realismo exacerbado. Isso mostra, em primeiro lugar, quantas nuances existem para o tratamento desse problema: Kronecker, percussor do intuicionismo, o é, paradoxalmente, por meio de uma perspectiva realista forte a ponto de tomar a matemática como uma ciência experimental (cf. nota 60 do capítulo 1). Mas note-se: é com base em sua postura realista (sobretudo devido a sua crença na existência independente dos objetos matemáticos enquanto realidades naturais criadas por Deus, e, por sua vez, da possibilidade de conhecer imediata e diretamente esses objetos matemáticos) que se torna possível desenvolver a ciência com base nos números naturais. Portanto, podemos resumir os passos

³⁹ Platão já denominara o pensamento como “o discurso silencioso da alma”: “*The soul when thinking appears to me to be just talking – asking questions of herself and answering them, affirming and denying. And when she has arrived at a decision, either gradually or by a sudden impulse, and has at least agreed, and does not doubt, this is called her opinion.*” [A alma, ao pensar, parece estar falando – fazendo perguntas a si mesma, respondendo-as, afirmando e negando-as. E quando ela chega a uma decisão, seja gradualmente ou por um impulso súbito, finalmente concordando e sem dúvidas, isso é chamado de opinião.] (PLATÃO, *Teeteto*, 190) ; “*Are not thought and speech the same, with this exception, that what is called thought is the unuttered conversation of the soul with herself?*” [Não são pensamento (*dianoia*) e discurso (*logos*) a mesma coisa, salvo que o que chamamos de pensamento é o diálogo silencioso da alma consigo mesma?] (PLATÃO, *Sofista*, 263).

⁴⁰ Assim, é plausível defender ideia de que a criação e a execução de uma teoria são duas faces de um mesmo processo; afinal, uma depende da outra de modo inextrincável. Por assim dizer, a matemática, apesar de ser direcionada pela intuição, realiza-se apenas através de sua elucidação formal e discursiva. A intuição, em sua forma original, pré-discursiva, não pode efetivamente a nada *responder*, mas apenas a *mostrar*. Só quando formalizada a matemática reveste-se de uma roupagem que pode efetivamente ser defendida; e então, já não se trata mais de uma intuição, mas da própria teoria construída a partir dela.

desse argumento sob a seguinte forma: a partir de uma crença preestabelecida, nasce uma metodologia própria e, dela, as regras do que é ou não permitido em matemática. A teoria axiomatizada da matemática, que deve ser expressa em linguagem formal e regulada por uma metalinguagem, é a realização desses princípios dos quais decidimos partir.

A teoria da prova de Hilbert certamente ratifica a ideia de que qualquer tentativa de atribuir algum sentido à matemática extrapola obrigatoriamente o âmbito da demonstração pura e simples, um tema que encontrou com Tarski um caminho original e interessante.⁴¹ Empregando um vocabulário mais moderno, parece claro que não basta prover a matemática de uma sintaxe bem definida; ela exige, no momento certo e em seu devido lugar, a apresentação de uma semântica⁴² que, por assim dizer, permita a devida significação do sinal, do ícone gráfico, e o torne efetivamente algo representativo da intuição originária à qual o sinal se refere. Assim, a semântica acaba por assumir um papel fundamental porque não há

⁴¹ Se tivermos em mente os autores do início do século XX, percebemos que seus esforços convergiam, *mutatis mutandis*, para direções análogas. Introduce-se, por exemplo, a ideia de níveis de linguagem, seja do ponto de vista da teoria ramificada dos tipos de Russell, ou mesmo da *Beweistheorie* de Hilbert (quando abandona a tese de uma formulação *absolutamente* isenta de conteúdos, que só remeteria à intuição para o estabelecimento de seus primeiros princípios, para sustentar que existe uma parte da matemática que não é tocada pela possibilidade de uma formalização perfeita, e que deve dar o sentido geral da teoria), sendo que uma de suas funções é a tentativa de fornecer uma prova para a consistência do sistema, já que sua completude é pressuposta, à época, também como um ponto pacífico: “*As an example in which fundamental questions can be treated I would like to choose the thesis that every mathematical problem can be solved. We are all convinced of that. After all, one of the things that attract us when we apply ourselves to a mathematical problem is precisely that within us we always hear the call: here is the problem, search the solution.*” [Como exemplo de como questões fundamentais devem ser tratadas, eu prefiro escolher a tese de que todo problema matemático pode ser resolvido. Estamos todos convencidos disso. Adicionalmente, uma das coisas que mais nos atrai quando nos aplicamos no estudo de um problema matemático é precisamente o fato de que, dentro de nós, ouvimos um chamado: eis o problema, busque a solução.] (HILBERT, 1925, p. 384). Apenas em 1928, em sua comunicação ao Congresso matemático de Bolonha, Hilbert apresentaria a decidibilidade não mais como uma aspiração, mas também como um problema a ser submetido à prova.

⁴² Interessante termos em mente que uma classificação possível da semântica a caracteriza, em parte, também como regra analítica de construção dos próprios sistemas semânticos: “*In Introduction to Semantics, for example, Carnap distinguishes between descriptive semantics, which is ‘... the description and analysis of the semantical features either of some particular historically given language, e.g. French, or of all historically given languages in general...’ and pure semantics: ‘the construction and analysis of semantical systems is called pure semantics. The rules of a semantical system S constitute, as we shall see, nothing else than a definition of certain semantical concepts with respect to S, e.g. ‘designation in S’ or ‘true in S’. Pure semantics consist of definitions of this kind and their consequences; therefore, in contradistinction to descriptive semantics, it is entirely analytic and without factual content.*” [Em “*Introdução à semântica*”, por exemplo, Carnap faz uma distinção entre, de um lado, a semântica *descritiva*, que é ‘... a descrição e análise dos traços semânticos, seja do ponto de vista de uma linguagem dada historicamente, como o francês, ou das linguagens em geral dadas historicamente.’ e, de outro, a semântica *pura*: ‘a construção e análise de sistemas semânticos é denominada semântica pura. As regras de um sistema semântico S, como podemos observar, constituem nada mais que a definição de certos conceitos semânticos com respeito a S, isto é, ‘designação em S’ ou ‘verdadeiro em S.’ A semântica pura consiste em definições dessa natureza e suas consequências; portanto, ao contrário da semântica descritiva, ela é inteiramente analítica e isenta de conteúdo factual.] (CHATEAUBRIAND, 2001, p. 250).

meios de encontrar uma prova satisfatória para sua consistência sem que recorramos a essa estratégia: são os aspectos semânticos que atribuem ou não a consistência a um sistema formal.

Dessa maneira, não obstante a formalização e a demonstração da axiomática que caracterizam a matemática moderna exigirem que centremos nosso foco nas estruturas formais, não podemos concluir que o conteúdo semântico e suas significações não têm qualquer importância. O emprego necessário do axioma da redutibilidade na teoria dos tipos lógicos e o fato de que a teoria da demonstração dissocia-se da matemática propriamente dita por apresentar-se enquanto uma indispensável teoria do *conteúdo* das provas formalizadas⁴³ torna clara a indispensabilidade de conteúdos informais para uma perspectiva ampla da disciplina. Assim, existe *irremediavelmente* a necessidade de recorrer a um universo exterior à pura teoria formalizada da matemática para atribuir sentido à disciplina ou, no mínimo, para tomá-la como algo mais que uma série de tautologias ou combinação simbólica sem conteúdo, uma vez que esse “algo” que está além da pura demonstração atribui o próprio sentido da regra que norteia a demonstração:

O que é uma regra? A resposta comum é que uma regra é um tipo de instrução formulada linguisticamente. Mas uma regra formulada linguisticamente é algo que depende de uma estrutura lógica e do significado das expressões componentes. Se não tivermos uma estrutura lógica para começar, e se nós não temos expressões significativas, então não temos regras linguísticas. Esta é a razão pela qual as regras de formação para a sintaxe das linguagens proposicionais e de primeira ordem

⁴³ “Every well-posed mathematical problem is solvable. This assertion is a general lemma belonging to metamathematics, as I would like to call the contentual theory of formalized proofs.” [Todo problema matemático bem elaborado pode ser resolvido. Essa asserção é um lema geral pertencente à *metamatemática*, como eu gostaria de chamar a teoria dos conteúdos das provas formalizadas.] (HILBERT, 1925, p. 385). Todavia, cabe um esclarecimento acerca da noção de metamatemática no contexto do debate entre intuicionistas e formalistas. Brouwer argumenta que aquilo que Hilbert denomina metamatemática já se tratava a alguns anos de um princípio defendido pelo intuicionismo. Logo, sua concordância em relação ao formalismo soa apenas como uma reafirmação de sua própria teoria: “After have been strongly prepared by Poincaré, it first appears in literature in Brouwer, 1907, where on pp. 173-4 the terms mathematical language and mathematics of second order are used to distinguish between the parts of formalistic mathematics mentioned above and where the intuitive character of the later part is emphasized. This insight penetrated the formalistic literature with Hilbert 1922 (...) where mathematics of second order was given the name metamathematics. The claim of the formalistic school to have reduced intuitionism to absurdity by means of this insight, borrowed from intuitionism, is presumably not to be taken seriously.” [Após ter sido fortemente preparada por Poincaré, a distinção aparece pela primeira vez em Brouwer, 1907, onde nas páginas 173-4, os termos *linguagem matemática* e *matemática de segunda ordem* são usados para distinguir entre as partes da matemática formalista citadas acima, e onde o caráter intuitivo da segunda parte é enfatizado. Essa distinção é inserida na literatura formalista em 1922 por Hilbert (...), onde à matemática de segunda ordem foi dado o nome de *metamatemática*. A reivindicação da escola formalista no sentido de haver reduzido o intuicionismo ao absurdo por meio dessa inserção apropriada do intuicionismo não deve ser levada a sério.] (BROUWER, 1927, p. 491). Não há, entretanto, condições de corroborar a tese de Brouwer, pois existem diferenças profundas entre a matemática de segunda ordem de Brouwer e a metamatemática hilbertiana. A semelhança entre elas é superficial e enganosa.

dependem de uma metalinguagem rica, que deve conter uma quantia razoável de lógica e ser significativa.⁴⁴

Os trabalhos de Tarski corroboram essa perspectiva de tomar o âmbito de uma metalinguagem como uma instância necessária para o efetivo estabelecimento de um sistema conceitual. Tarski dissocia a sintaxe do conteúdo semântico que ela veicula, assim como estabelece uma distinção importante entre a linguagem utilizada na própria teoria (que o autor denomina *linguagem-objeto*) e a linguagem que estabelece as regras de operação e de classificação da linguagem-objeto, a chamada *metalinguagem*. A ideia de níveis de linguagem que obedecem a certa hierarquia é emprestada dos sistemas já delineados, como o da teoria dos tipos lógicos e da *Beweistheorie*, em harmonia com os pontos de vista de Hilbert e de Russell, mas, podemos dizer, com uma perspectiva ainda mais clara que a desses autores. A linguagem formal era uma forma típica de tratar a metalinguagem até meados do século XX, escolha efetuada inclusive por Tarski, malgrado hodiernamente termos claro que é perfeitamente plausível compreender e tratar a metalinguagem a partir de uma formulação que não recorra à simbologia ou à linguagem formal (cf. HODGES, 2006). Mas considerando a primeira possibilidade aventada, somos compelidos a reconhecer que o ato de pensar uma metalinguagem a partir de uma forma exclusivamente sintática a tornaria uma nova linguagem-objeto, para o que seria necessário remeter à *sua* metalinguagem (uma meta-metalinguagem) e assim sucessivamente (cf. TARSKI, 2007[1944], p.170). Logo, a concepção semântica de verdade remete obrigatoriamente à semântica pelo fato de que a metalinguagem implica na adoção de noções por meio de definições, algo do que a interpretação é um ponto inegociável. Tarski sustenta que a metalinguagem deve ser “essencialmente mais rica” que a linguagem-objeto, a fim de possibilitar uma definição satisfatória de verdade (Ibid., p. 172-3). Assim, malgrado a amplitude que esse conceito pode assumir, de modo geral, ele significa que a metalinguagem possui uma maior abrangência, seja em termos de quantificação, considerada a partir da teoria dos tipos lógicos, seja de um campo mais amplo de interpretações possíveis, no que diz respeito à parte não lógica da metalinguagem.

⁴⁴ “What is a rule? The common answer is that a rule is a type of instruction formulated linguistically. But a linguistically formulated rule is something that depends on a logical structure and on the meaning of the component expressions. If we have no logical structure to start with, and if we have no meaningful expressions, then we do not have linguistic rules. This is the reason that the rules of formation for the syntax of propositional and first-order languages depend on a rich metalanguage, which must contain a fair amount of logic and must be meaningful” (CHATEAUBRIAND, 2005, p. 75).

Daí decorre a possibilidade de uma leitura peculiar no que se refere à linguagem formal. Uma vez que a metalinguagem pode ser tomada como um conjunto de regras de operação e de interpretação do sistema formal, ainda que também expressa em linguagem formal, há que se reconhecer que a forma perfeita não se exime de elementos informais; ao contrário, clama por eles, uma vez que, ao fim de contas, não há interpretação originária possível que não radique em linguagem comum. Por isso, não há como olvidar que a pretensão de construir a matemática completamente isenta de qualquer traço da linguagem informal é uma ilusão. Como a sintaxe matemática é uma criação artificial para veicular com mais precisão os conceitos e definições da matemática, pode-se tomá-la como uma espécie de decorrência natural da elaboração crescente da teoria em direção ao rigor e à abstração, mas que encontra sua origem, antes de tudo, na linguagem informal, porque suas definições e regras de operação e construção recorrem à semântica.

Há, todavia, aspectos interessantes quanto aos limites entre essas três instâncias, a saber, linguagem-objeto, a metalinguagem matemática formalizada e linguagem informal; isso ocorre porque se a distinção entre a linguagem-objeto da matemática e sua metalinguagem é bastante precisa, essa circunstância deriva da formalização que caracteriza ao menos a linguagem-objeto. Contudo, o outro pólo, que diz respeito à delimitação entre a metalinguagem matemática e a linguagem informal, não apresenta a mesma precisão. Se tivermos em mente o problema da incessante recursão de um nível da metalinguagem a outro nível a ele superior - tendo em vista que um nível linguístico não comporta a interpretação de seu próprio conteúdo - teremos duas consequências importantes.

Em primeiro lugar, a descrição do mecanismo linguístico a partir de uma estrutura estratificada é evidentemente artificial. Mas poder-se-ia argumentar que não há qualquer necessidade sequer de procurar essa semelhança entre um sistema formal e a linguagem comum. Contudo, o problema reside no fato de que não é possível evitar essa questão e radicar toda a natureza da matemática apenas em seu universo formal. Até mesmo a consistência de um sistema formal depende de sua interpretação semântica e, como Gödel já provou, o âmbito meramente formal é incapaz de garantir completude e consistência a um sistema que seja no mínimo tão extenso e complexo como a matemática elementar, sendo então necessário recorrer por derradeiro à linguagem informal para atribuir uma interpretação semântica à linguagem-objeto.

Em segundo lugar, a recursão aos vários níveis de metalinguagem, por sua vez, acabaria obrigatoriamente exigindo o emprego de termos cada vez mais gerais e abstratos (providos de uma “riqueza essencial” cada vez maior, nos termos de Tarski), menos precisos, e distantes daquilo que torna a sintaxe da linguagem-objeto peculiar. Desse modo, não obstante a existência de uma definição precisa entre, de um lado, sintaxe e semântica e, de outro, linguagem-objeto e metalinguagem, a distinção entre o âmbito metalinguístico e o da linguagem comum encontra sérios problemas se concebido a partir de uma sucessão de níveis de linguagem. Isso ocorre porque semelhante concepção simplesmente não coaduna com a forma como o discurso e o pensamento se processam.⁴⁵ O recurso a níveis distintos de linguagem como explicação para o processo de sua constituição é simplesmente dissociado da realidade da forma como se engendra o discurso enunciativo e o sentido a ele correlato; ele está, ao contrário, diretamente ligado a uma tentativa de impor uma forma normativa para a *reflexão* acerca das regras impostas à linguagem. Assim, o emprego da simbologia matemática envolve o problema relativo à variedade de usos da linguagem e de sua riqueza essencial, da qual a contraparte é a profusão de sentidos e o perigo da imprecisão discursiva, algo cuja intenção da formalização é justamente restringir.

Certamente uma concepção análoga a essa permite Arend Heyting dizer, por exemplo, que *“toda formalização repousa ao final de contas na linguagem ordinária que é, por sua vez, equívoca, de modo que, na verdade, apenas o sistema que é construído no espírito do*

⁴⁵ É o que se observa, por exemplo, a partir de uma das dificuldades apontadas por Wittgenstein em suas aulas em Cambridge de 1939, ao referir-se aos usos do termo *fundamento*. O problema de adotar o ponto de vista da recursão a níveis linguísticos em um âmbito informal encerra-se na necessidade de uma base que possibilite a atribuição de sentido a um discurso proposicional qualquer, que estabeleça suas regras de funcionamento e que o torne, em última análise, possível (tendo em vista a impossibilidade alegada de fazê-lo por si mesmo). Dessa maneira, a procura pelo fundamento da linguagem leva à metalinguagem, ou linguagem de segunda ordem, que supostamente precisa de regras para afirmar-se, quando recorre a uma linguagem de terceira ordem e assim sucessivamente. Contra essa ideia, Wittgenstein aponta que essa procura por fundamentos, da forma como se processa, redundaria em outras dificuldades, mas não na obrigatoriedade de recorrer a inumeráveis graus ou níveis de linguagem: *“I will talk about the word ‘foundation’ in the phrase ‘foundations of mathematics’. This is a most important word and will be one of the chief words we will deal with. This does not lead to an infinite hierarchy. Compare the fact that when we learn spelling we learn the spelling of the word ‘spelling’, but we do not call that ‘spelling of the second order.’”* [Eu vou falar acerca da palavra “fundamento” na frase “fundamentos da matemática”. Essa é uma palavra muito importante, e uma das principais com as quais vamos tratar. Mas ela não leva a uma hierarquia infinita. Compare-se com o fato de que quando nós aprendemos a soletrar, nós aprendemos a soletrar a palavra “soletrar” mas não a chamamos de “soletração de segunda ordem”]. (WITTGENSTEIN apud BOSANQUET et al., 1976, p. 14).

matemático é exato.”⁴⁶ O trecho é oportuno para destacar nossa concordância plena em relação à premissa de Heyting, assim como a inaceitabilidade de sua conclusão. De fato, se o sentido de uma teoria é determinado por uma metalinguagem que o sustenta e que, por sua parcela informal, imiscui-se na linguagem ordinária, há que se reconhecer que, em última análise, existe uma ligação *essencial* entre um espaço e outro. Tanto a linguagem formal quanto a informal são formas de expressões de conceitos e, enquanto tais, mais ou menos precisas. Todavia, nota-se uma mística voltada a um ideal de saber matemático que suplanta a verdadeira função desempenhada pela linguagem formal, ao atribuir inadvertidamente à sintaxe um papel desmesurado, chegando-se a considerá-la isenta de erro. Linguagens simbólicas são indubitavelmente formas privilegiadas de expressão de conceitos, mas que não podem abster-se de qualquer tipo de interpretação. Se tivermos também em mente a função da metalinguagem diante da linguagem-objeto, apesar da possibilidade de construí-la formalmente, ela também está obrigada a uma interpretação, por constituir em um conjunto de regras. Esse contato entre sintaxe e semântica, entre o formal e o informal, é, por exemplo, o fundamento da crítica que Poincaré dirige ao que ele considera uma valorização exacerbada do simbolismo lógico como recurso matemático: apesar de bem vindo e útil, seu poder de elucidação é limitado, porque adstrito, em última análise, a um uso claro da linguagem comum:

A linguagem simbólica criada pelo senhor Peano tem um papel muito importante para essas novas investigações. Ela é passível de prestar grandes serviços, mas parece-me que o senhor Couturat atribui a ela uma importância exagerada, que surpreende o próprio senhor Peano. Os elementos essenciais dessa linguagem são sinais algébricos que representam as diferentes conjunções: *se, e, ou, logo*. É possível que esses sinais sejam cómodos, mas se eles estão destinados a revolucionar toda a filosofia é uma outra questão. É difícil admitir que a palavra ‘se’ assume, quando a escrevemos com o sinal ‘ $\supset$ ’, um atributo que ela não possuía quando escrevíamos ‘se’.⁴⁷

Nesse sentido, o simbolismo lógico-matemático não se presta a transcender a linguagem comum, mas a torná-la tão precisa quanto possível. A conclusão de Heyting, no

⁴⁶ « *Toute formalisation repose en fin de compte sur la langue ordinaire et elle est par suite équivoque, de sorte qu'en fait, seul le système qui est construit dans l'esprit du mathématicien est exact.* » (HEYTING apud MOOIJ, 1966, p. 131).

⁴⁷ « *La langage symbolique créé par M. Peano joue un très grand rôle dans ces nouvelles recherches. Il est susceptible de rendre de grands services, mais il me semble que M. Couturat y attache une importance exagérée et qui a dû étonner M. Peano lui-même. L'élément essentiel de ce langage, ce sont certains signes algebriques qui représentent les différentes conjonctions : si, et, ou, donc. Que ces signes soient commodes, c'est possible ; mais qu'ils soient destinés à renouveler toute la philosophie, c'est une autre affaire. Il est difficile d'admettre que le*

que segue a perspectiva brouweriana, é o fato de que a verdadeira ciência não pode ser traduzida por meio de *qualquer* forma de linguagem, dada sua inaptidão em expressar tal e qual se apresenta originariamente pela pura intuição matemática. Segundo Brouwer e Heyting, há, portanto, duas “ciências”: a do espírito, intraduzível por meio da linguagem, e uma menos perfeita, que é aquela passível de ser expressa com os recursos que a linguagem formal (enquanto instância da linguagem ordinária) nos propicia:

A linguagem matemática sofre da mesma inaptidão inerente a toda linguagem. Em particular, sofre pela instabilidade e inexatidão, em um grau mais baixo. O veredicto final de Brouwer é que: ‘... mesmo para a matemática pura, não pode haver uma linguagem infalível, ou seja, uma linguagem que, no processo de comunicação, exclua o erro e que sua função mnemotécnica ofereça uma garantia contra os erros, isto é, confusões entre os diferentes entes matemáticos.’ Apesar de Brouwer estar preparado para aceitar até mesmo graus maiores de instabilidade da linguagem em outras esferas da vida, a instabilidade e a inexatidão da ‘linguagem matemática’ permaneceram uma obsessão por toda a sua vida e se tornaram o ponto chave para seu esforço de separação entre matemática e linguagem matemática.⁴⁸

Mas há um problema inerente a esse argumento que, aos nossos olhos, o inviabiliza. O intuicionista assevera a pretensa validade de um pensamento inexprimível, por quaisquer meios que seja, como “a verdadeira ciência”, aquilo que realmente é exato. Esse aspecto do pensamento dos intuicionistas torna-os, de certo modo, uma espécie de “platônicos às avessas”, que aspiram a um ideal tão irrealizável quanto o proposto pelo platonismo, dada a impossibilidade de estabelecer conhecimento objetivo e verdadeiramente científico que decorre de seu posicionamento. O que há de nocivo nessa concepção não é o fato de reconhecer problemas fundamentais inerentes à linguagem, nem tampouco efetuar uma séria tentativa de superá-los. O que há de realmente inaceitável é a pretensão de dissociar conhecimento objetivo e linguagem, e sustentar, a partir daí, que a verdadeira ciência “não

mot ‘si’ acquiert, quand on l’écrit ‘ $\supset$ ’, une vertu qu’il n’avait pas quand on l’écrivait ‘si’ » (POINCARÉ, 1986[1905], p. 20-1).

⁴⁸ “Mathematical language suffers from the inadequacy inherent in all language. In particular it suffers from instability and inexactness, admittedly to a lesser degree. Brouwer’s final verdict is that ‘... also for pure mathematics, there cannot be an infallible language, i.e. language which in communication excludes misunderstanding and in its mnemotechnical function offers a guarantee against errors, i.e., confusion of different mathematical entities.’ While Brouwer was prepared to accept the even higher degree of instability of language in other spheres of life, the instability and inexactness of ‘mathematical language’ remained a life-long obsession and became the key-issue in his campaign for the separation of mathematics and mathematical language” (VAN STIGT, 1990, p. 217). A seguinte passagem de Brouwer é particularmente esclarecedora nesse sentido: « Les mathématiques sont certainement entièrement indépendantes du monde matériel, mais en mathématiques exister veut dire : être construit intuitivement ; et qu’un langage qui les accompagne soit exempt de contradiction n’est ni important en soi, ni un critère pour l’existence mathématique. » [A matemática é certamente completamente independente do mundo material, mas, no âmbito da matemática, existir quer dizer ser construído intuitivamente; além disso, o fato da linguagem que a acompanha ser isenta de contradições não é nem importante em si, nem um critério para a existência matemática.] (BROUWER apud MOOIJ, p. 130).

pode ser dita perfeitamente”. Contra Brouwer, parece plausível sustentar que a matemática perfaz-se na linguagem e pela linguagem, e que o grau de perfeição total a que aspiramos não é, de fato, garantido pela linguagem, mas que ele pode e deve ser buscado e lapidado no próprio contexto de sua construção.

Em suma, é preciso reconhecer a semântica como a instância que atribui o sentido aos constituintes formais da teoria que, em si, são carentes de conteúdo. Uma vez que a demonstração lógico-matemática está irremediavelmente atrelada ao universo da linguagem informal como exigência para a própria compreensão de sua articulação interna (pois as regras da linguagem-objeto, formuladas na metalinguagem, exigem a remessa à linguagem informal), esse universo menos exato e mais profuso de significados é o *locus* onde a matemática encontra aquilo que a sintaxe pura é incapaz de fornecer.⁴⁹ São conteúdos que não obedecem a qualquer método ou regra rígida como as estabelecidas pelos parâmetros lógico-demonstrativos, mas que têm o papel crucial de fornecer a inspiração para a criação matemática, as formas de direcionamento da demonstração e, atribuir, por fim, o sentido interno para a teoria por meio de conteúdos semânticos. Nesse processo, a intuição tem um papel fundamental, ao propiciar o ato intelectual que oferece esse complemento semântico da teoria para além de sua simples forma, a partir do que a própria sintaxe é concebida.

Ao assim proceder, a intuição que efetiva esse processo de, digamos, “fecundação” semântica da forma lógica (quando recorre forçosamente a um universo de significados extrínseco à teoria propriamente dita), estabelece uma possibilidade de articulação e transitividade recíproca entre linguagem-objeto, metalinguagem e linguagem informal. Assim, impõe-se uma via de mão dupla: por um lado, a intuição propicia o sentido da teoria como um todo, bem como sua significação por sua parcela semântica; por outro, o processo de construção que combina elementos formais e informais possibilita também a adequação e a inspiração da linguagem ordinária com base em modelos teóricos (que, veremos, é um passo

⁴⁹ A escolha da linguagem mais adequada para a expressão das ideias centrais da ciência (e consequentemente, dos objetos com os quais o cientista irá operar a partir daí) também faz parte de uma espécie de estratégia de construção teórica: « *Un mot bien choisi suffit le plus souvent pour faire disparaître les exceptions que comportaient les règles énoncées dans l'ancien langage ; c'est pour cela qu'on a imaginé les quantités négatives, les quantités imaginaires, les points à l'infini, que sais-je encore ? Et les exceptions, ne l'oublions pas, sont pernicieuses, parce qu'elles cachent les lois.* » [Uma palavra bem escolhida é suficiente para eliminar as exceções contidas nas regras enunciadas na linguagem antiga; por isso foram imaginadas as grandezas negativas, as imaginárias, os pontos no infinito, quem sabe o que mais? E as exceções, não nos esqueçamos, são perniciosas, porque elas escondem as leis.] (POINCARÉ, 1908, p. 29-30). Parece evidente que a linguagem

importante para as aplicações da matemática às ciências naturais). Assim, a linguagem assume um papel fundamental para operar a transitividade entre o universo matemático e o extramatemático, movimento esse que tem dois sentidos:

O primeiro, da linguagem formal para a linguagem ordinária: esse movimento caracteriza-se pelo transbordamento da teoria para além de seus próprios limites, onde a intuição, por meio da imaginação e de analogias (processos mentais que nada têm de formal), realiza uma aproximação entre a teoria matemática e outras searas extrínsecas a ela. O exemplo mais evidente e imediato é o da aplicação da matemática como base inegociável das leis empíricas da física moderna; a própria ciência moderna nasce com a compreensão de que as grandezas físicas estão relacionadas a procedimentos de medição experimental, para o que a matemática desempenha papel central. Em outro viés, é uma tese bem conhecida de Jules Vuillemin o fato de que o desenvolvimento da matemática pode inspirar aspectos centrais de concepções metafísicas, a exemplo da criação dos irracionais em relação ao platonismo, da álgebra no que concerne ao cartesianismo, assim como no que tange ao cálculo infinitesimal em sua relação com a metafísica leibniziana. Podemos exemplificar esse movimento com o seguinte trecho de Vuillemin acerca do cartesianismo:

Na linguagem de Descartes, a palavra *razão* indica as proporções e a capacidade de compreendê-las. Ele recobra o domínio da ordem e da medida, objetos da matemática, de acordo com uma concepção que restabelece Aristóteles. A teoria matemática das proporções serviu naturalmente de modelo à metafísica cartesiana e, mais genericamente, à metafísica clássica. (...) Assim, podemos classificar as ideias principais das *Meditações* de acordo com seu grau na ordem de razões, como se classificam as equações em gêneros na geometria. A certeza absoluta de minha existência enquanto pensamento é como a unidade matemática.⁵⁰

O segundo sentido dessa transição entre o universo matemático e o que lhe é exterior realiza-se pelo caminho inverso, ou seja, do âmbito linguístico extramatemático ao formal: como todo sistema matemático remete, em última análise, à linguagem ordinária, por conta de seus constituintes semânticos, a intuição, enquanto exercício da imaginação, ato de criação, ou ao evidenciar a possibilidade de alguma analogia com a experiência, oferece, por

formal teria, sob essa perspectiva, apenas uma função simbólica no sentido de introduzir e representar os conceitos considerados “mais adequados”.

⁵⁰ « Dans la langue de Descartes, le mot de *raison* indique les proportions et la faculté de les entendre. Il recouvre le domaine de l'ordre et de la mesure, objets de la mathématique, suivant une conception reprise d'Aristote. La théorie mathématique des proportions a servi naturellement de modèle à la Métaphysique cartésienne et, plus généralement, à la Métaphysique classique. (...) Aussi peut-on classer les idées principales des *Méditations* suivant leur degré dans l'ordre des raisons, comme on classe les équations en genres dans la

intermédio da linguagem, um sentido próprio à teoria,⁵¹ direcionando-a, e possibilitando, por um lado, os processos de criação matemática (para os quais existem vários “caminhos” possíveis⁵²) e, por outro, a apresentação de critérios determinantes dos juízos acerca das teorias propriamente ditas. É assim que, por exemplo, Cantor insere no âmbito da teoria dos números a noção de correspondência biunívoca (uma noção que já se encontrava presente, ainda que sob outra forma, no tratamento do problema do contínuo em Aristóteles), o que lhe permite articular de modo rigoroso as bases da teoria dos conjuntos transfinitos. É assim que Leibniz, partindo do pressuposto metafísico de um infinito dado em ato (algo que caracteriza sua filosofia como um todo), desenvolve a possibilidade de representar simbolicamente a caracterização de processos de limite através dos procedimentos de cálculo algébrico, inaugurando as bases do cálculo infinitesimal.

As concepções metafísicas, por exemplo, inspiram o perscrutar de um sentido para nossa existência que transcende até mesmo o conhecimento científico, e constituem o

Géométrie. La certitude absolue de mon existence comme pensée est comme l'unité mathématique » (VUILLEMIN, 1987, p. 119-20 – grifo meu).

⁵¹ Essa ideia é corroborada, por exemplo, quando Léna Soler sustenta a existência de um *poder indutor do sistema simbólico* caracterizado pela linguagem. Em seu texto, o caso específico estudado é o da apresentação, por Max Planck, de uma equação fundamental para a física quântica, contribuição levada a cabo a partir de um modelo anterior introduzido por Boltzmann: « *il me semble que l'on peut généraliser l'exemple de l'analogie Planck-Boltzmann, et affirmer que ce sont essentiellement les contraintes systémiques inhérentes à la structure du langage de la physique qui sont à l'origine du mystérieux pouvoir heuristique traditionnellement reconnu à l'analogie. Vue de cette manière, l'analogie consiste à s'appuyer sur une structure symbolique préexistante, laquelle, du fait qu'elle est un réseau déjà fixé de contraintes plus ou moins fortement contraignantes, fonctionne comme un tuteur et 'porte' la pensée, la dirige comme 'de l'extérieur', l'entraîne comme 'malgré elle' et la devance en quelque sorte. Pour désigner cet état de choses de manière générale, je parlerai du pouvoir inducteur du tissu symbolique.* » [Parece-me que é possível generalizar o exemplo da analogia Planck-Boltzmann e afirmar que são essencialmente as imposições sistêmicas inerentes à estrutura da linguagem da física que estão na origem do misterioso poder heurístico tradicionalmente reconhecido à analogia. Vista dessa forma, a analogia consiste em apoiar-se em uma estrutura simbólica preexistente que, uma vez que ela consiste de uma rede já estabelecida de imposições *mais ou menos fortemente estabelecidas*, funciona como tutor e ‘veicula’ o pensamento, dirigindo-o como que ‘do exterior’, arrastando-o como que ‘apesar dele’, e o ultrapassa de alguma maneira. Para designar esse estado de coisas de maneira geral, referir-me-ei ao *poder de indução do sistema simbólico*.] (SOLER, 2001, p. 108).

⁵² « *L'analyse pure met à notre disposition une foule de procédés dont elle nous garantit l'infailibilité ; elle nous ouvre mille chemins différents où nous pouvons nous engager en toute confiance ; nous sommes assurés de n'y pas rencontrer d'obstacles ; mais, de tous ces chemins, quel est celui que nous mènera le plus promptement au but ? Qui nous dira lequel il faut choisir ? Il nous faut une faculté qui nous fasse voir le but de loin, et, cette faculté, c'est l'intuition. Elle est nécessaire à l'explorateur pour choisir sa route, elle n'est pas moins à celui qui marche sur ces traces et qui veut savoir pourquoi il l'a choisie.* » [A análise pura põe ao nosso dispor uma infinidade de procedimentos para garantir a infalibilidade; ela abre-nos mil caminhos diferentes, que podemos trilhar com toda confiança; temos a certeza de não encontrar obstáculos. Mas dentre todos esses caminhos, qual é o que nos levará mais prontamente à nossa finalidade? Quem nos dirá qual devemos escolher? Precisamos de uma faculdade que nos faça ver nossa finalidade de longe, e essa faculdade é a intuição. Ela é necessária ao navegador para escolher sua rota, e não é menos necessária àquele que caminha sobre seus rastros e quer saber por que os escolheu.] (POINCARÉ, 1923, p. 26-7).

resultado de um esforço inerente à capacidade racional humana. Destarte, quanto há de metafísico na matemática? No que diz respeito à concepção de infinito, por exemplo, as duas noções, lógico-matemática e metafísica estão profundamente ligadas, como já ressaltamos no capítulo 2. Essa relação é tão profusa e intensa que até mesmo a escolha de determinados símbolos que representam noções matemáticas não é acidental. O emprego do símbolo “ ∞ ” para a representação da noção de infinito, utilizado pela primeira vez por John Wallis, não apenas por coincidência representa uma linha que volta sobre si mesma indefinidamente, associando vagamente à função simbólica uma função icônica. Além dele, o símbolo utilizado por Cantor para a representação dos números cardinais transfinitos é $\aleph$ (sendo o primeiro deles $\aleph_0$), a mesma letra que a cabala hebraica atribui aos três níveis do imanifesto na árvore da vida, sendo que um deles é o infinito, o ilimitado (Ain Soph – em hebraico אין סוף) (GREER, 2003, p. 09), o que não deixa de ser, no mínimo, uma coincidência curiosa, notadamente pela ascendência judaica de Cantor. A escolha dos nomes, ou mesmo dos símbolos com os quais se pretende representar algum conceito matemático pode, assim, obedecer não apenas a determinações intrínsecas à teoria,⁵³ mas também a analogias com noções que são oriundas de outros ramos do saber humano.

Nosso entendimento acerca do problema segue também o pensamento de Vuillemin ao considerar que determinadas concepções extramatemáticas prestam-se à analogia e à inspiração criadora na matemática de maneira mais direta que outras. No comentário que apresenta ao comparar o conteúdo de dois textos de Descartes (o das *Cartas* com o da *Geometria*), a determinação do âmbito da matemática em função de como o autor concebe sua metafísica encontra uma formulação lapidar:

A invenção cartesiana, em *Lettres*, contrapõe-se ao estilo grave, limitado e restrito de uma geometria analítica que parece ter sido amputada. Só curvas algébricas realizam esta adequação entre entendimento e função, cuja descoberta abre caminho para a matemática moderna. Nem a trigonometria, nem o cálculo infinitesimal são aceitos na construção. (...) Se Descartes rejeitou estes argumentos e construções, se não procurou exprimir analiticamente as realidades matemáticas que a eles correspondiam, e deu-se por satisfeito ao tratá-las de acordo com as demandas e

⁵³ Podemos considerar uma referência intrínseca aquela que está associada à criação de um nome comum para coisas diversas, por exemplo, por um processo de abstração: « *Le choix du nom n'est pas non plus arbitraire ; il faut expliquer par quelles analogies on a été guidé et que si l'on a donné des noms analogues à des choses différentes, ces choses du moins ne diffèrent que par la matière et se rapprochent par la forme ; que leurs propriétés sont analogues et pour ainsi dire parallèles.* » [A escolha do nome não é mais arbitrária; é preciso explicar por quais analogias guiou-se e que, se foram dados nomes análogos a coisas diferentes, essas coisas, no mínimo, diferiam no que concerne à matéria, mas não quanto à forma, e que suas propriedades são análogas e, por assim dizer, paralelas.] (POINCARÉ, 1908, p. 140).

ocasiões através de processos que não entendeu como dignos de serem codificados em um método, é porque as idéias metódicas que levaram à formulação da *Géométrie* impediram, *a priori*, que se pudesse extrair desse livro os raciocínios em forma de equação para aplicá-los às questões propostas em *Lettres*. Na verdade, muito mais do que uma teoria do paralelismo entre as funções e curvas, a geometria é essencialmente uma concepção das proporções que permanece vinculada ao conjunto da metafísica cartesiana. Aos olhos do filósofo, a invenção da geometria analítica parece secundária em relação à invenção de um método universal de pensamento (...) contido na teoria geral das proporções.⁵⁴

Aceitar como viável uma argumentação nesse sentido leva-nos a corroborar a perspectiva de que as concepções e crenças metafísicas podem ser, em alguns casos, ainda que de maneira velada e subliminar, determinantes para a consideração de critérios e pressupostos aplicados na aquilatação e na construção das teorias, algo que encontra impacto tanto na concepção de verdade que tivermos em mente quanto no modo como a matemática articula-se no quadro geral do conhecimento científico.

⁵⁴ « L'invention cartésienne, dans les *Lettres*, vient ainsi contredire au style sévère, restreint et exclusif, d'une *Géométrie* analytique qui paraît amputée. Seules les courbes algébriques réalisent cette adéquation de l'entendue et de la fonction, dont la découverte ouvre la voie aux mathématiques modernes. Ni la Trigonométrie, ni le Calcul infinitésimal ne sont acceptés dans l'édifice. (...) Si Descartes a rejeté ces constructions et ces raisonnements, s'il n'a pas cherché à exprimer analytiquement les réalités mathématiques qui leur correspondaient et s'il s'est contenté de les traiter, sur demande et par occasion, par des procédés qu'il n'a pas cru dignes d'être codifiés dans une méthode, c'est que les idées méthodiques qui ont permis la formulation de la *Géométrie* empêchaient *a priori* qu'on pût extraire de ce livre les raisonnements de mise en équation pour les appliquer aux questions proposées dans les *Lettres*. En effet, beaucoup plus qu'une théorie du parallélisme entre fonctions et courbes, la *Géométrie* est d'abord une conception des proportions qui demeure liée à l'ensemble de la métaphysique cartésienne. Aux yeux du philosophe, l'invention de la *Géométrie* analytique paraît secondaire par rapport à l'invention d'une méthode universelle de pensée, contenue (...) dans la théorie générale des proportions » (VUILLEMIN, 1987, p. 9-10 – grifo meu).

Capítulo 5

Matemática, Verdade e Conhecimento Científico

A história permite perceber que as formas de racionalidade que operam na matemática não são uniformes e estáticas. (...) Poder-se-ia efetivamente relacionar as ampliações da matemática às ampliações da racionalidade que lhe é subjacente: mais precisamente, a ampliação da racionalidade é que torna possível a ampliação da matemática. (...) Vê-se ainda que se a racionalidade matemática (utilizemos esse termo para significar 'formas de racionalidade') evolui, um fundamento estático e absoluto para a matemática só pode ser ilusório.¹

A concepção de matemática delineada nos capítulos anteriores insere-se em uma interpretação mais ampla, que remete à totalidade do conhecimento científico e que, em parte, também lhe serve de fundamento. Os temas já abordados até o momento permitem um tratamento mais direto de algumas questões voltadas à epistemologia e ao conceito de verdade na matemática.

5.1. Verdade matemática

A questão relativa ao conceito de verdade é tão antiga quanto problemática e ampla. Uma referência importante é a de Aristóteles, que apresenta como definição do verdadeiro e do falso a seguinte asserção: “dizer do que é que não é ou do que não é que é, é falso, enquanto dizer do que é que é e do que não é que não é, é verdadeiro” (ARISTÓTELES, *Metafísica*, 1011b). No que diz respeito à matemática, a pergunta pela natureza da verdade daquilo que ela expressa assume traços bastante peculiares, especialmente devido ao problema relativo à existência ou não de uma referência “externa” à mera construção de conceitos. Sob esse aspecto, malgrado a existência de diversas concepções de verdade (como a consensual, a quase-verdade, a pragmática, entre outras), duas nos interessam diretamente

¹ « L'histoire même fait bien voir que les formes de rationalité qui opèrent en mathématiques ne sont pas uniformes et statiques. (...) On peut effectivement rapporter directement les élargissements des mathématiques à des élargissements de la rationalité qui leur est sous-jacente : à y bien regarder, ce sont ces derniers qui rendent possibles les premiers. (...) On voit d'ailleurs que si la rationalité (utilisons ce collectif pour signifier « les formes de rationalité ») mathématique évolue, un fondement statique et absolu des mathématiques ne pouvait être qu'illusoire » (PATY, 2005, p. 115-6).

neste trabalho, por melhor se harmonizarem ao realismo ou ao antirrealismo na matemática: a concepção de verdade como correspondência e a verdade coerencial. Abordaremos sucintamente também a concepção semântica de verdade, por tratar-se de uma formulação bastante importante hodiernamente no estudo das linguagens formais.

A **verdade como correspondência** é aquela que se impõe através da adequação entre um enunciado qualquer e o fato que ele descreve. É o que fundamenta nossa noção corriqueira de linguagem, seja em um sentido de atribuição concreta de um estado de coisas, como “*O Obelisco fica no Ibirapuera*”, “*Barack Obama é Presidente dos Estados Unidos da América*”, ou de noções mais abstratas ou gerais, como “*o bom cristão ama Jesus*”. Apesar das circunstâncias diferentes, nos três casos temos a pretensão de olhar para uma realidade que se impõe a nós com o intuito de asseverar a pertinência ou a falsidade do enunciado. Existem, claro, problemas em sustentar, por exemplo, a verdade do último enunciado, seja pela generalidade do termo “cristão”, seja pela subjetividade do verbo “amar”, seja até pelos problemas advindos da consideração da figura de Jesus (“Jesus” bíblico, “Jesus” histórico, “Jesus”, a segunda pessoa da Trindade, “Jesus”, profeta de Allah), mas o que permanece como ponto prioritário dessa concepção de verdade é a possibilidade de estabelecer uma correspondência entre realidade e discurso, de modo que o discurso a *represente* de maneira pertinente, algo que envolve problemas como a amplitude dos conceitos empregados, as formas através das quais os enunciados são produzidos, sua bipolaridade, sua complexidade essencial, a observância das leis lógicas elementares, e por aí afora. Existe sempre, a partir da concepção de verdade enquanto correspondência, a relação entre o discurso e uma referência externa a ele: há um mundo a descrever, há uma realidade a apresentar, e o discurso é pertinente, verdadeiro, na medida em que a representa adequadamente.

Uma concepção que pode ser compreendida como de natureza correspondencial (ainda que haja interpretações e aplicações a partir das quais essa classificação é questionável) é a **concepção semântica de verdade**. Apesar de privilegiarmos neste trabalho aspectos epistemológicos em detrimento de questões e temas propriamente lógicos, não há como relegar a segundo plano os trabalhos de Tarski relativos à noção de verdade, em vista de sua importância dentro do contexto que discutimos; entretanto, não temos aqui a pretensão de esmiuçar seus argumentos, o que pode ser encontrado na vasta literatura especializada (por exemplo, em CHATEAUBRIAND, 2001, e, claro, TARSKI, 2007[1944]); basta-nos a compreensão do esquema geral dessa concepção, notadamente no que concerne às linguagens

formais. Por tratar-se de uma abordagem de cunho *lógico* do problema da verdade, o autor está preocupado com o estatuto atribuído a esse conceito; ele argumenta, portanto, que enquanto nomes *denotam* objetos, não há propriamente que atribuir-se o predicado ‘verdadeiro’ (ou sua negação) quando temos apenas uma relação designativa, denotativa. “Verdade”, por sua vez, é uma noção que deve ser atribuída a sentenças, a enunciados. Por isso, ao apresentar um tratamento lógico à noção de verdade, Tarski atribui a ela um *status* lógico diferenciado das simples relações de definição ou de denotação.² Sob certo ponto de vista, não há novidade em relação ao paradigma aristotélico, uma vez que o “dizer” envolvido na definição de verdade implica, evidentemente, em uma aplicação enunciativa. Definir e denotar são, de certa forma, modos de nomear objetos, enquanto que enunciados são formas de nomear estados de coisas.³ A distinção entre, de um lado, o ato de definir e, de outro, o de reconhecer ou não uma sentença como verdadeira, torna-se evidente, pois o que está em jogo, neste último caso, é a forma como os conceitos são articulados na sentença. Um dos pontos importantes para isso é o critério de adequação material empregado pelo autor, que obedece ao seguinte esquema:

(T) X é verdadeiro se e somente se S.

² “Gostaria de propor o nome “concepção semântica de verdade” para a concepção de verdade que acaba de ser discutida. A semântica é uma disciplina que, de modo geral, trata de certas relações entre expressões de uma linguagem e os objetos (ou “estados de coisas”) “a que se referem” tais expressões. Como exemplos típicos de conceitos semânticos, podemos mencionar os conceitos de designação, satisfação e definição, tal como eles ocorrem nos seguintes exemplos:

a expressão “o pai de seu país” designa (denota) George Washington;

a neve satisfaz a função sentencial (a condição) “x é branca”;

a equação “ $2 \cdot x = 1$ ” define (determina unicamente) no número $\frac{1}{2}$.

Enquanto as palavras “designa”, “satisfaz” e “define” expressam relações (entre certas expressões e os objetos “referidos” por essas expressões) a palavra “verdadeiro” é de uma natureza lógica diferente: ela expressa uma propriedade (ou denota uma classe) de certas expressões, a saber, de sentenças. Contudo, vê-se facilmente que todas as formulações fornecidas antes e que procuravam explicar o significado dessa palavra (...) referiam-se não apenas às próprias sentenças, mas também aos objetos ‘dos quais se falava’ por meio dessas sentenças, ou possivelmente aos “estados de coisas” descritos por elas. E, além disso, resulta que a maneira mais simples e mais natural de obter uma definição exata da verdade é aquela que envolve o uso de outras noções semânticas, como a noção de satisfação. É por essas razões que consideramos o conceito de verdade aqui discutido como entre os conceitos semânticos; e o problema de definir a verdade se mostra intimamente relacionado com o problema mais geral de estabelecer os fundamentos da semântica teórica” (TARSKI, 2007[1944], p.164).

³ “If (...) we should decide to extend the popular usage of the term “designate” by applying it not only to names, but also to sentences, and if we agreed to speak of the designata of sentences as “states of affairs”, we could possibly use for the same purpose the following phrase: A sentence is true if it designates an existing state of affairs.” [Se decidirmos estender o emprego popular do termo “designar” aplicando-o não apenas a nomes, mas também a sentenças, e se concordarmos em denominar os designados pelas sentenças como “estados de coisas”, poderíamos usar para o mesmo propósito a seguinte frase: uma sentença é verdadeira se designa um estado de coisas existente.] (TARSKI apud CHATEAUBRIAND, 2001, p. 213).

Instâncias particulares desse esquema são obtidas substituindo ‘S’ por alguma sentença da linguagem em questão e ‘X’ por um nome ou descrição dessa sentença. O critério C(T) de adequação material para uma definição de verdade em uma linguagem dada é que todas as instâncias de (T) derivem logicamente da definição.⁴

A primeira hipótese é a de que a noção de verdade possa, assim, ser resolvida apenas a partir da estrutura sintática envolvida na sentença, dentro de uma linguagem dada. Mas, neste caso, uma distinção é necessária: linguagens formais e informais merecem tratamentos específicos, dadas suas peculiaridades. No que tange a linguagens informais, coloquiais, sua universalidade (ou seja, a possibilidade de expressarem em seus termos quaisquer outras noções expressas também em outras linguagens) é o que leva às imprecisões das quais derivam os paradoxos semânticos, como os de Epimênides, Richard, Greeling e Berry (cf. capítulo 1, seção 1.2). O diagnóstico de Tarski nesse sentido é simples: a linguagem coloquial não apresenta uma estrutura sintática que permita a formulação precisa das sentenças dessa linguagem, o que conseqüentemente inviabiliza uma análise adequada de cunho estrutural (CHATEAUBRIAND, 2001, p. 228).

O trato com linguagens formais, por sua vez, obedece a outras demandas. O autor apresenta em um primeiro momento uma definição de verdade fundada apenas em termos da estrutura das sentenças do cálculo de classes, que ele toma como o exemplo de uma linguagem formal. O intento até chega ser atingido, quando se torna possível verificar que o conjunto de sentenças verdadeiras coincide com o conjunto de teoremas que podem ser obtidos a partir de axiomas. Todavia, esta não pode ser tomada como uma solução satisfatória para linguagens formais em geral, uma vez que essa coincidência é compreendida pelo autor como uma circunstância “acidental”. A regra geral, de acordo com Tarski, é a de que a sintaxe pura não pode responder adequadamente à questão relativa à verdade dentro de uma linguagem formal. Obviamente, a metalinguagem também pode ser elaborada em termos exclusivamente sintáticos; mas remeteria, por sua vez, a uma meta-metalinguagem, e assim sucessivamente (cf. CHATEAUBRIAND, 2001, p. 229-30). Em face da insuficiência da sintaxe (ainda que recorramos a diversos níveis ou ordens de linguagens), é preciso reconhecer que o recurso à semântica é um ato necessário para o delineamento satisfatório do

⁴ “(T) *X* is true if and only if *S*. Particular instances of this schema are obtained replacing ‘*S*’ by any sentence of the language in question and replacing ‘*X*’ by a name or description of this sentence. The criterion C(T) of material adequacy for a definition of truth (for a given language) is that all the instances of (T) should follow logically from the definition” (CHATEAUBRIAND, 2001, p. 213).

conceito de verdade. Isso ocorre através de uma metalinguagem, que trata das sentenças da linguagem-objeto a que se refere.⁵

Assim, tanto no caso da linguagem coloquial quanto no caso de linguagens formalizadas, a sintaxe de uma linguagem L não basta para o delineamento suficiente de um conceito de verdade, uma vez que ele é compreendido como um metapredicado de L , de modo que o conceito de verdade tem como um de seus aspectos mais centrais o recurso necessário a uma linguagem de ordem superior, por tratar-se de uma noção que *classifica* sentenças de L .⁶ Desse modo, a concepção semântica, por centrar-se em aspectos onde o compromisso a ser assumido é apenas referente à formulação adequada de sentenças, ou melhor, à aceitabilidade de sentenças em função de outras, assume, segundo Tarski, uma faceta de neutralidade em relação à postura que queiramos adotar no que concerne à metafísica subjacente aos enunciados que constituem L (cf. capítulo 2, seção 2.3). Reclamar uma neutralidade nesses termos leva-nos a reconsiderar a natureza dessa verdade proposta por Tarski: tomar uma sentença por verdadeira, ainda que recorramos a uma semântica, significa comprometermos-nos tão somente com uma espécie de compatibilidade entre enunciados de ordens diferentes, ou, em outros termos, com uma morfologia: um enunciado é verdadeiro *apenas* porque a partir dele, podemos aceitar um outro, o que, logicamente, encontra na formulação de sentenças bicondicionais uma feliz expressão. Assim, concepção tarskiana, apesar de pretensamente neutra do ponto de vista metafísico, compromete-se com uma descrição de estados de coisas, e procura resolver essa questão ao recorrer à morfologia inerente à semântica da metalinguagem de L , o que, certamente, é uma posição que arca com sérias consequências:

O trabalho de Tarski acerca da verdade criou a ilusão de poder dissociar o problema da verdade da metafísica. Assim, o problema da verdade tornou-se o problema do

⁵ “*For every formalized language a formally correct and materially adequate definition of true sentence can be constructed in the metalanguage with the help only of general logical expressions, expressions of the language itself, and of terms from the morphology of language.*” [Para toda linguagem formalizada, uma definição formalmente correta e materialmente adequada de sentença verdadeira pode ser construída na metalinguagem com o auxílio apenas de expressões lógicas gerais, expressões da própria linguagem, e de termos da morfologia da linguagem.] (TARSKI apud CHATEAUBRIAND, 2001, p. 229).

⁶ As possibilidades de interpretação nesse sentido são diversas. Não deixa de ser curioso, por exemplo, que uma concepção de verdade como a de Tarski era cara aos positivistas lógicos, bem como o modo como o autor apresenta sua concepção permite que Oswaldo Chateaubriand interprete a concepção semântica de verdade como sendo, na realidade, uma concepção *sintática* de verdade, e com uma argumentação bastante consistente nesse sentido, sobretudo se tivermos em mente sua aplicação a linguagens formais. Vide Chateaubriand (2001, p. 213-59).

‘verdadeiro’, e o problema do ‘verdadeiro’ tornou-se o problema de caracterizar esse predicado como uma parte da morfologia da linguagem.⁷

Apesar de comprometermo-nos com o fato de que ciência é construída discursivamente, bem como com uma postura antirrealista acerca da matemática, isso não significa, em absoluto, que possamos aceitar de bom grado a tese de que todo o conhecimento matemático resume-se *apenas* em uma questão de classificações linguísticas; uma interpretação epistemológica baseada na postura que aqui sustentamos exige mais que isso. Utilizando os termos de Chateaubriand, ocupa-nos mais o problema da verdade que o do ‘verdadeiro’.

A **verdade coerencial** é, por sua vez, baseada em pressupostos de compatibilidade e coerência interna entre um sistema de enunciados:

A teoria da coerência, como nós a interpretamos, não se ocupa da definição da verdade e da falsidade, mas apenas com os meios através dos quais ela é determinada. Segundo essa teoria, poder-se-á aceitar uma proposição se ela for compatível com outras proposições aceitas; em caso contrário, ela será rechaçada. Desse modo, se queremos aceitar uma proposição antagônica a nosso sistema admitido, podemos abandonar uma ou mais das proposições que havíamos aceitado anteriormente.⁸

O critério de verdade em tela abandona de início uma pretensão de relação extrínseca, de contato com o “exterior”, e, portanto, de qualquer espécie de corroboração empírica, o que torna sua aplicação à descrição dos fenômenos evidentemente insuficiente, parecendo, todavia, uma forma privilegiada de abordar sistemas de cunho tautológico (cf. SCHLICK, 1965, p. 220). Para que um enunciado seja verdadeiro a partir dessa concepção, é permissível que ele perca toda e qualquer referência em relação à confirmação de natureza empírica; eles simplesmente estão fora de questão e não podem servir para que nos pronunciemos acerca da

⁷ “Tarski’s work on truth created the illusion that one can separate the problem of truth from metaphysics. Thus, the problem of truth became the problem of ‘true’, and the problem of ‘true’ became the problem of characterizing this predicate as a part of the morphology of language” (CHATEAUBRIAND, 2001, p. 240).

⁸ “La teoría de la coherencia, como nosotros la interpretamos, no se ocupa de la definición de la verdad y de la falsedad, sino solo de los medios mediante los cuales éstas se determinan. Conforme a ella, se aceptará una proposición si es compatible con otras proposiciones aceptadas, y en caso contrario se rechazará. Sin embargo, si estamos deseosos de aceptar una proposición antagónica a nuestro sistema admitido, podemos abandonar una o más de las proposiciones que habíamos aceptado con anterioridad.” (AYER, 1965, p. 236). Outra formulação possível é a de Newton da Costa, que insere, juntamente com enunciados, os sistemas de crenças como objeto de abordagem de cunho coerencial: “Talvez a característica marcante (da concepção coerencial de verdade) seja a seguinte: verdade é uma relação de coerência entre um enunciado e dado sistema de enunciados ou crenças; o enunciado *S* é verdadeiro em relação ao sistema proposicional *K*, se *S* for coerente com *K*, o que implica *S* ser consistente com *K* e, se não pertence a *K*, deve ampliar este último de modo coerente (ajustando-se bem a *K*). Em caso contrário, *S* é falso com referência a *K*. A finalidade, na busca da verdade, identifica-se com a consecução de sistemas de proposições maximais (consistentes) e coerentes.” (DA COSTA, 1997, p. 141).

verdade. Uma teoria de cunho coerencial que pretensamente descrevesse os fenômenos empíricos com os quais nos defrontamos seria tão válida, “verdadeira”, quanto outra qualquer que descrevesse um mundo fabuloso, o *Wonderland* de Lewis Carroll ou o planeta dos corpos bidimensionais de Poincaré,⁹ e por um motivo muito simples: só a consistência dos enunciados importa em uma concepção dessa natureza:

Se levarmos a sério a coerência como um critério geral de verdade, então devemos considerar que os contos de fadas, arbitrários, são tão verdadeiros quanto um relato histórico, ou como os enunciados de um livro de química, sempre que o conto seja construído de modo que não encerre nenhuma contradição.¹⁰

⁹ « *Supposons, par exemple, un monde renfermé dans une grande sphère et soumis aux lois suivantes : la température n'y est pas uniforme ; elle est maxima au centre, et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire au zéro absolu quand on atteint la sphère où ce monde est renfermé. Je précise davantage la loi suivant laquelle varie cette température. Soit R le rayon de la sphère limite ; soit r la distance du point considéré au centre de cette sphère. La température absolue sera proportionnelle à $R^2 - r^2$. Je supposerai de plus que, dans ce monde, tous les corps aient même coefficient de dilatation, de telle façon que la longueur d'une règle quelconque soit proportionnelle à sa température absolue. Je supposerai enfin qu'un objet transporté d'un point à un autre, dont la température est différente, se met immédiatement en équilibre calorifique avec son nouveau milieu. Rien dans ces hypothèses n'est contradictoire ou inimaginable. Un objet mobile deviendra alors de plus en plus petit à mesure qu'on se rapprochera de la sphère limite. Observons d'abord que, si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants. Quand ceux-ci, en effet, veulent se rapprocher de la sphère limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petits. Les pas qu'ils font sont donc aussi de plus en plus petits, de sorte qu'ils ne peuvent jamais atteindre la sphère limite. Si, pour nous, la géométrie n'est que l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides invariables ; pour ces êtres imaginaires, ce sera l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides déformés par ces différences de température dont je viens de parler. (...) Si ces êtres imaginaires fondent une géométrie, ce ne sera pas comme la nôtre, (...) ce sera celle des changements de position qu'ils auront ainsi distingués, et qui ne sont autres que les « déplacements non euclidiens », ce sera la géométrie non euclidienne.* » [Suponhamos, por exemplo, um mundo contido em uma grande esfera e submetido às seguintes leis: a temperatura não é uniforme; ela é máxima no centro, e decresce gradualmente na medida em que nos deslocamos em direção à superfície da esfera, onde a temperatura é o zero absoluto. A lei dessa temperatura é a seguinte. Se R é o raio da esfera e r a distância do ponto considerada a partir do centro, a temperatura absoluta seria proporcional a $R^2 - r^2$. Logo, posso supor que nesse mundo todos os corpos possuem o mesmo coeficiente de dilatação, o que tornaria a dilatação linear de qualquer corpo proporcional a sua temperatura. Finalmente, posso asseverar que um corpo transportado de um ponto para outro de temperatura diferente, estará instantaneamente em equilíbrio térmico em relação a seu novo ambiente. Não há nada de contraditório ou de inimaginável nessa hipótese. Um objeto tornar-se-á cada vez menor ao aproximar-se da superfície da esfera. Observe-se, em primeiro lugar, que embora do ponto de vista de nossa geometria ordinária esse mundo é finito, para seus habitantes ele parece infinito, porque na medida em que eles aproximam-se da extremidade da esfera, eles tornam-se mais frios e, portanto, menores. Por conseguinte, seus passos também serão cada vez menores, e eles não conseguirão nunca chegar à superfície da esfera. Se para nós a geometria é apenas o estudo das leis de acordo com as quais se movem os sólidos invariáveis, para esses seres imaginários, ela seria o estudo das leis do movimento dos sólidos deformados pelas diferenças de temperatura referidas acima. (...) Se eles construírem uma geometria, ela não será como a nossa; (...) será o estudo das mudanças de posição que eles vivenciam, que são ‘deslocamentos não euclidianos’, e será, portanto, a geometria não euclidiana.] (POINCARÉ, 1902, p. 89-91).

¹⁰ “*Si se ha de tomar en serio la coherencia como criterio general de verdad, entonces hay que considerar que los contos de hadas, arbitrarios, son tan verdaderos como un relato histórico, o como los enunciados de un libro de química, siempre que el cuento esté construido de tal manera que no encierre ninguna contradicción*” (SCHLICK, 1965, p. 221).

Quando aplicada apenas à matemática, a verdade coerencial é uma concepção que leva em conta simplesmente a compatibilidade de um enunciado com outro enunciado, ou com um sistema preestabelecido. Por isso basta, por exemplo, remeter à axiomática de Peano para verificar a verdade de um enunciado do tipo $5+4=3+6$, ou aos postulados de Euclides para “mensurar” a validade de uma construção como a efetuada no capítulo 4, seção 4.1. O que está em jogo, nesse caso, nada mais é que o reconhecimento da consistência entre a teoria e o enunciado particular. A concepção coerencial de verdade pode ser, em grande medida, associada às correntes nominalistas e convencionalistas, onde, em termos gerais, manter a coerência do discurso significa garantir sua verdade,¹¹ excluindo do sistema qualquer espécie de contradição. Há, entretanto, uma questão importante a ser tratada. Em sua versão mais conhecida, a concepção coerencial de verdade tem por escopo o estabelecimento de um conjunto de enunciados (ou seja, de um corpo teórico) que seja superior em relação aos outros conjuntos de enunciados que com ele concorrem. Como existe a pretensão de objetividade do conhecimento (uma característica do positivismo lógico), está no horizonte de uma teoria dessa natureza a possibilidade de estabelecer um critério inequívoco, através de uma solução que supere as que a ela se contraponham. Daí decorre, naturalmente, a ideia de que há um

¹¹ A mecânica conforme concebida por Poincaré é um exemplo lapidar: ela está em um patamar em que os fatos científicos possuem um papel um tanto quanto diferente do que desempenham na física. Existe certamente o fator fundamental da consideração dos fatos para a elaboração da teoria; entretanto, a partir do momento em que a teoria está consolidada, a importância atribuída aos fatos sofre uma séria restrição, porque a teoria, na mecânica, uma vez eleita, assume um papel de regra a ser observada para a própria interpretação dos fatos científicos, que simplesmente não pode ser desafiada com base nesses mesmos fatos (cf. POINCARÉ, 1902, p. 124). Sob esse ponto de vista, a mecânica newtoniana, por exemplo, não incorre em crise com a existência de um fato que não a corrobore, pois o corpo teórico que a constitui é tido como uma interpretação geral, a partir da qual se deve mensurar e analisar fatos empíricos particulares; dentro dessa perspectiva, a inadequação entre a teoria e o enunciado fundado na experiência particular nunca coloca *sub judice* a própria teoria, porque ela é uma espécie de interpretação da realidade e, enquanto tal, deve ser pressuposta como verdadeira em sua relação com os enunciados relativos a fatos científicos. Isso não significa que a teoria possa se desprender impunemente das referências oferecidas pela experiência, mas apenas que existe um núcleo que se superpõe aos casos particulares, em vista de sua amplitude e generalidade (cf. POINCARÉ, 1902, p. 123). Logo, verifica-se um claro distanciamento em relação à experiência, e um privilégio concedido à teoria enquanto produto da razão, no exercício de constituição do conhecimento, porque as leis da mecânica passam a servir, após instituídas, como as convenções que legitimam inclusive a observação empírica, apesar da disciplina constituir-se em uma tentativa de explicação satisfatória de um mundo que conhecemos através de nossas experiências sensíveis. Como contraponto à posição defendida por Poincaré, é oportuno citar a concepção de Pierre Duhem, principalmente por entender que não se pode atribuir a certa parte de uma teoria o *status* diferenciado como o faz Poincaré e que, portanto, teorias não podem ser refutadas em parte. A teoria deve ser tomada como um todo, desde as premissas mais fundamentais que são formuladas até o conjunto de fatos científicos testados por ela. Não há, segundo Duhem, condições de eleger uma porção inatacável da teoria; ela é, nesse sentido, monolítica, e deve ser testada como um todo indivisível: “uma contradição experimental sempre envolve a totalidade do grupo de asserções que constitui uma teoria, sem qualquer possibilidade de designar qual a proposição desse grupo que deve ser rejeitada.” (DUHEM, 1975, p. 37). Essa característica pode ser apontada talvez como a maior diferença

sistema de enunciados melhor que o outro, no sentido de ser mais amplo e consistente. A solução para essa questão acaba necessariamente esbarrando em critérios exteriores ao próprio sistema de enunciados, o que parece uma contradição bastante evidente em relação ao que propõe de início a concepção coerencial (cf. AYER, 1965, p. 237).

Desse modo, nenhuma das concepções acima descritas parecem dar conta suficientemente do problema da verdade matemática: no que diz respeito à verdade como correspondência, a ausência de um critério exterior (decorrente da não aceitação da existência de entes matemáticos independentes) torna-a uma correspondência sem correspondente possível. A noção de verdade como coerência, por sua vez, traz uma dificuldade séria para um posicionamento não revisionista, ao menos se procurarmos sustentar, como fazem autores como Hempel, a existência de um conjunto de enunciados privilegiado em detrimento de todos os seus possíveis concorrentes (cf. AYER, 1965, p. 236). Os temas dos quais tratamos nos capítulos anteriores podem apontar o direcionamento de algumas respostas no que concerne às concepções de verdade aplicadas aqui e ali: os autores que defendem o realismo matemático, por exemplo, precisam *de alguma maneira* sustentar uma teoria correspondencial de verdade para os objetos matemáticos; afinal, para eles, todo o trabalho do matemático tem a pretensão de adequar-se, ao final de contas, a objetos matemáticos como algo distinto de meras ideias, com realidade própria, e mais, suprassensível.¹² Seria uma espécie de apreensão direta e imediata de uma realidade em si, mas não através dos olhos do corpo, e sim dos olhos do espírito. Já para o antirrealista matemático, o posicionamento mais natural (mas não *necessário*) é o de defender a concepção coerencial de verdade, quando os objetos matemáticos são tomados como criações mentais, assim como as operações que deles se desdobram; afinal, o que se exige é apenas que essas criações do intelecto sejam sistematizadas a partir de uma axiomática que garanta sua consistência. Ele deve, todavia, arcar com a dificuldade inerente a essa posição, o que se vislumbra a partir de um total

nas concepções desses dois epistemólogos franceses. Vide, por exemplo, Rollet (1999, p. 64-7) para um delineamento preciso e comparativo de seus pontos de vista.

¹² Que fique bem claro que não estou sustentando a necessidade do realismo matemático comprometer-se com uma teoria de verdade centrada na correspondência por qualquer tipo de exigência em relação ao mundo, ou ao modo como ele se comporta. Obviamente a matemática aplicada deve ter alguma relação com a realidade, mas essa relação impõe-se mediante a construção de modelos conceituais, aos quais atribuímos interpretações, como veremos na seção subsequente. A necessidade do realista matemático comprometer-se com uma verdade centrada na correspondência decorre do simples fato de que ele toma os entes matemáticos como seres não mentais, externos, detentores de realidade própria.

distanciamento em relação à realidade e, conseqüentemente, à carência de um fundamento forte para sua aplicação na descrição dessa mesma realidade.

Os problemas do realismo matemático. Uma séria dificuldade do realismo matemático reside no critério de adequação do conceito a uma realidade dessa natureza: como estabelecer *objetivamente* um meio de mensurar a correspondência da instância discursiva à realidade em si que, no caso específico dos entes matemáticos, sequer pode ser fenomênica, no sentido kantiano do termo? Resumidamente, professar uma postura realista em matemática leva naturalmente à aceitação de um padrão de verdade correspondencial para os entes matemáticos, correspondência essa para a qual, acredito, nós não temos *qualquer* possibilidade de atribuir um lastro minimamente seguro. Ora, o reconhecimento da “verdade” de uma proposição acerca de um ente matemático deve ser dado a partir da contemplação direta de sua natureza. Assim, poderíamos dizer que é uma espécie de intuição que fomenta a possibilidade de contemplar essa verdade perene e independente do intelecto humano. As objeções que poderíamos dirigir a essa perspectiva são, quase que na totalidade, aquelas que Kant dirige à metafísica dogmática: parte-se do pressuposto de que existe uma realidade intangível, que deve ser conhecida apenas pelo intelecto, de modo que a faculdade do entendimento apreende a verdade do ente e a traduz através de nossa linguagem. Não há condições, todavia, de descrever como esse processo se realiza, pois não se trata de uma intuição sensível que fomenta o “modelo” a ser traduzido. Também não se trata de uma intuição intelectual no sentido cartesiano do termo (uma vez que esta se insere no âmbito do intelecto e é conceitual); é, ao contrário, uma espécie de apreensão do que transcende o sensível, de uma realidade invisível, algo cuja sustentação é evidentemente problemática.

As soluções do problema do realismo matemático conforme delineadas por Gödel e por Russell, por exemplo, gravitam, ao fim de contas, ao redor de uma espécie de intuição, ainda que fundada em preceitos lógicos. Gödel é específico nesse sentido: a intuição intelectual *reconhece* a verdade do conceito, de maneira tão espontânea e imediata quanto aquela que experimentamos ao presenciar que o triângulo tem três lados (cf. capítulo 2, seção 2.1). O realista substitui com naturalidade a visibilidade, a presença do fenômeno, da coisa, como se queira, ao pressupor uma existência exterior, que o intelecto apreende perfeita e completamente. Como, todavia, dar a palavra final acerca dessa posição? *Não há como responder ao problema* sem cair em um posicionamento dogmático, ou em uma perspectiva unilateral. Trata-se, portanto, de um problema insolúvel, simplesmente porque não há *para*

onde olhar e dar uma palavra final em relação a essa problemática, ainda que com os olhos do espírito, seja lá o que isso de fato signifique. A criação dos números transfinitos é exemplar. Se Cantor os *descobriu*, ao invés de havê-los *inventado*, o que se passa durante o período de elaboração desse trabalho notável é uma espécie de assimilação por parte de seu intelecto a algo que está para além dele, e para o qual a única pedra de toque que lhe resta é a apreensão intuitiva da coisa, logo em seguida formulada demonstrativamente, e que representa o ente matemático de maneira pretensamente fidedigna, mas cuja fidelidade nós só podemos verificar também a partir de uma suposta apreensão intelectual do ente. O curioso é que os preceitos lógico-demonstrativos passam a caracterizar uma teoria dessa natureza como a melhor e derradeira pedra de toque a servir como critério de verdade na matemática, “espelhada” nas regras da demonstrabilidade. Em suma, o realista matemático está na verdade criando conceitos com base em intuições que acredita inspiradas por realidades exteriores, perenes e imutáveis, ao pensar perceber as entidades matemáticas como seres externos. Junte-se a esse estado de coisas a inegável existência de teorias concorrentes, contraditórias entre si, e teremos a ideia de porque o realismo matemático professa como dogmas aquilo que pretende estabelecer como referências objetivas.

Logo, o que o realista matemático procura estabelecer é a possibilidade de asseverar a existência, e mais, a natureza de uma realidade exterior e independente, à custa de conceitos. A metáfora dos “olhos do espírito” permite-nos recorrer a uma analogia próxima para tornar mais clara a dificuldade própria a essa questão. O conhecimento que produzimos acerca de determinado estado de coisas está diretamente associado aos enunciados que asseveramos acerca deles, enunciados que se comprometem, ao mesmo tempo, em dizer o que esse ser é, e em dissociá-lo do que não é. Para tanto, a noção de verdade que está por trás do discurso enunciativo é do tipo correspondencial. Como o intelecto visa descrever o Ser através do discurso (segundo Platão, da mesma maneira que o arqueiro visa atingir o alvo com a flecha), ele atingirá seu intento na medida em que fizer corresponder suas proposições com os fatos que ele pretende descrever. Assim articula-se a tradução de uma realidade exterior a partir do intelecto: o enunciado descreve o fenômeno, representa-o em nível conceitual/linguístico, uma pretensão deveras problemática:

A ideia básica, para colocá-la metafisicamente, é que nós não podemos dizer, através da sintaxe, como é a realidade. Podemos provar que existem conjuntos inumeráveis, mas todas as nossas provas e asserções fazemos sentido perfeitamente se há apenas uma quantidade enumerável de coisas. Estamos inseridos na realidade, que é concebida como um modelo, e embora pareça muito claro para nós que o

conjunto dos números naturais não poderia ser colocado em uma relação de correspondência biunívoca com o conjunto dos números reais, isso pode simplesmente ocorrer devido ao fato de que quando falamos sobre ‘todas’ as correspondências biunívocas, não estamos falando realmente de *todas* as correspondências biunívocas. Alguém que pudesse ‘olhar’ para a realidade na qual estamos inseridos ‘de fora’ pode ser capaz de ver isso.¹³

A perspectiva realista em relação aos entes matemáticos sofre de uma dificuldade análoga; o que faz o realista matemático é asseverar um dogma, baseado na certeza de que as regras da lógica e as definições claras são suficientes para assegurar a compatibilidade dessas definições com os entes. Seria algo como asseverar que a boa definição e as regras da lógica permitem *per se* uma definição adequada de objetos externos, sem que tenhamos, todavia, sequer a possibilidade de recorrer a uma confirmação empírica, uma vez que a realidade dos entes matemáticos não se presta sequer a esse tipo de verificação. A situação torna-se ainda mais complexa se levarmos em conta o fato de que as teorias conflitantes podem indicar rupturas nessa realidade exterior, o que não é, de fato, aceitável. A concepção centrada em um realismo quanto aos entes matemáticos, ao pressupor um *corpus* de verdades eternas e perenes, não pode, sob pena de contradição, aceitar matemáticas alternativas. O que existem sob essa perspectiva são, no máximo, teorias mais ou menos distantes de sua referência “real”, mas que devem, sob quaisquer hipóteses, convergir em direção aos entes matemáticos, uma vez que têm a pretensão de descrevê-los. Em suma, parece claro que o simples reconhecimento da existência de teorias alternativas é um problema sério para o realismo matemático (cf. BARKER, 1976, p. 117). Nem mesmo a importante contribuição de Kreisel no sentido de trasladar a discussão centrada no problema dos entes matemáticos para o problema dos valores de verdade em matemática¹⁴ altera significativamente os dados essenciais do problema.

¹³ “The basic idea, to put it metaphysically, is that we cannot tell syntactically what reality is like. We can prove that there are non-denumerable sets, but all our proving and talking makes perfectly good sense if there are only denumerably many things. We are within reality, say, which is conceived as a model, and although it seems very clear to us that the set of natural numbers cannot be put into one-to-one correspondence with the set of real numbers, this may simply be due to the fact that when we talk about ‘all’ one to one correspondences we are not really talking about all one to one correspondences. Someone who could ‘look’ at the reality we are in from ‘outside’ may be able to see this” (CHATEAUBRIAND, 2005, p. 71-2).

¹⁴ “Georg Kriesel is often credited with shifting the focus from the existence of mathematical objects to the objectivity of mathematical discourse. Define realism in truth-value to be the view that mathematical statements have objective truth-values, independent of minds, languages, conventions, and so on of mathematicians. The opposition is anti-realism in truth-value, the thesis that if mathematical statements have truth-values at all, these truth-values are dependent on mathematician.” [Georg Kriesel é visto como o autor que mudou o foco da existência dos objetos matemáticos para a objetividade do discurso matemático. Ele define o realismo quanto a valores de verdade como o posicionamento em que as proposições da matemática possuem valores de verdade

O realista matemático encontra-se então com a seguinte dificuldade: sendo a realidade dos seres matemáticos uma instância exterior ao intelecto, tudo deve se passar por intermédio de um processo análogo ao dos objetos sensíveis, ainda mais se tivermos em mente uma perspectiva como a de Gödel. O problema decorre do fato de que a metáfora dos “olhos do espírito” só serve realmente enquanto metáfora. Quando exigimos um critério correspondencial que valide o discurso matemático, falta-lhe a referência objetiva que propicia esse proceder da linguagem em relação aos objetos sensíveis. No torvelinho, trata-se do dilema kantiano fundamental que coloca em xeque a metafísica ingênua: a referência a uma realidade exterior deve ser escudada por uma intuição sensível, ou corre o sério risco de incorrer nas antinomias da razão pura. Ao postular a existência de entes matemáticos suprassensíveis, o problema que se impõe no nível discursivo é a ausência de um *critério* para mensurar a validade desse mesmo discurso. Em outros termos, procura-se estabelecer uma verdade correspondencial sem que haja correspondência objetiva possível. Trata-se, portanto, da aceção do platonismo centrada na objetividade da verdade matemática (cf. nota 9 do capítulo 2). Em suma, não há recurso possível para o estabelecimento de um critério de verdade correspondencial para o conhecimento matemático, pois ainda quando esse recurso é *postulado*, no caso do realismo, ele não encontra condições mínimas para sua realização.

Um antirrealismo moderado. O ponto crucial da argumentação, entretanto, é o de que não há como objetar que o realista *pode* ter razão naquilo que ele professa, o que ocorre por dois motivos: o primeiro, o fato de que, se não há como verificar objetivamente a existência de objetos dessa natureza, a contraparte é a mesma: não podemos, da mesma maneira, negar peremptoriamente sua existência, por pura incapacidade de fazê-lo. Em segundo lugar, a força do compromisso ontológico estabelecido a partir do argumento de indispensabilidade de Quine é impositiva: se nos comprometemos ontologicamente com os seres por intermédio dos quais construímos nossa ciência, os números são certamente as primeiras referências para a construção de teorias científicas desde pelo menos o século XVIII. Em linhas gerais, isso significa que nossa ciência comporta-se como se os números existissem, mas não como seres distintos das coisas e processos do mundo. Se a ciência dos números é um recurso fundamental para a construção do conhecimento científico hodierno,

objetivos, independentes das mentes, linguagens, convenções e, portanto, dos matemáticos. O posicionamento contrário é o antirrealismo quanto a valores de verdade, a tese de que se as proposições matemáticas possuem algum valor de verdade, esses valores de verdade são dependentes do matemático.] (SHAPIRO, 2000, p. 29).

uma das consequências *possíveis* é a de que deve existir uma relação íntima entre os números e a natureza, relação essa que impõe uma espécie de compromisso teórico.

Nesse contexto, é preciso reconhecer a *possibilidade* de existência de números como realidades em si, mas que basear *todo* o conhecimento científico nessa premissa é, no mínimo, temerário. Levando em conta o modo como essas realidades chegam a nós, todavia, uma postura reducionista parece ser particularmente bem vinda. A exemplo da oposição entre *fenômeno* e *coisa-em-si* da filosofia kantiana, não é preciso que nos preocupemos com uma existência transcendente dos entes matemáticos se podemos centrar tudo o que essas supostas entidades representam apenas nos limites da intuição que as traz para nós. Ao final de contas, a intuição que temos delas será sua totalidade para nós, e então, mesmo que existam esses entes, tudo pode ocorrer como se estivéssemos *apenas* nos referindo a intuições formalizadas quando acreditamos falar de realidades transcendentais. O ponto nevrálgico do argumento é o fato de que, ao adotarmos uma postura não revisionista da matemática, procuramos um recurso filosófico para legitimar os passos e procedimentos da matemática ortodoxa, sem que, contudo, tenhamos a necessidade de postular entidades à moda de Platão. No que concerne ao argumento da indispensabilidade, minha proposta é aceitá-lo a partir de uma versão fraca: ao postular teorias, não precisamos necessariamente assumir um compromisso ontológico, se as temos simplesmente como modelos de compreensão da realidade. Os entes matemáticos serão efetivamente indispensáveis para os limites da teoria, o que não significa que tenhamos que acreditar total e absolutamente em sua existência real, e isso pode sugerir uma diferenciação entre compromisso ontológico e compromisso teórico. Só para o realista extremado o ato de comprometer-se no âmbito da teoria precisa ser visto como sinônimo de comprometer-se ontologicamente. A concepção de uma ciência enquanto modelo possível de compreensão da realidade pode eximir-se de um comprometimento ontológico absoluto.

Uma tese que será lapidada na próxima seção é a de que as teorias científicas não podem ter a pretensão de funcionar como descrições da realidade em si,¹⁵ algo que o caráter

¹⁵ O tema será tratado especificamente na próxima seção. Por hora e a título de exemplo, basta uma referência ao modo como o primeiro Wittgenstein aborda essa questão: „*Die Newtonsche Mechanik z.B. bringt die Weltbeschreibung auf eine einheitliche Form. Denken wir uns eine weisse Fläche, auf der unregelmässige schwarze Flecken wären. Wir sagen nun: Was für ein Bild immer hierdurch entsteht, immer kann ich seiner Beschreibung beliebig nahe kommen, indem ich die Fläche mit einem entsprechend feinen quadratischen Netzwerk bedecke und nun von jedem Quadrat sage, dass es weiss oder schwarz ist. Ich werde auf diese Weise die Beschreibung der Fläche auf eine einheitliche Form gebracht haben. Diese Form ist beliebig, denn ich hätte mit dem gleichen Erfolge ein Netz aus dreieckigen oder sechseckigen Maschen verwenden können. Es kann sein,*

multidedutivo¹⁶ constatado ao considerarmos o conhecimento científico como um todo vem apenas reforçar. Dessa forma, a indispensabilidade dos “entes” restringe-se ao universo da teoria e de seus pré-requisitos. Sob esse prisma, a indispensabilidade remete tão somente à consistência do conhecimento científico (de uma teoria, seus pressupostos e suas consequências), e não à fundamentação ontológica da realidade em si, algo que acaba por problematizar ainda mais a perspectiva do realista matemático. Nossa discordância está, portanto, centrada no que propõe o enunciado (P1) de Colyvan (cf. nota 20, capítulo 2). O que acontece nesse movimento, de fato, é a realocação do argumento da indispensabilidade não mais como uma tese realista, mas idealista: o comprometimento trazido a tiracolo pelo argumento da indispensabilidade, sob essa perspectiva, não é ontológico, mas relativo aos recursos teóricos necessários para manter uma teoria consistente, o que assume facetas peculiares de acordo com a disciplina a que se aplique. Assim, parece que a teoria correspondencial do ponto de vista do realismo matemático acaba por não se sustentar, seja pelo problema da remessa necessária à intuição para a apreensão do objeto matemático, seja

dass die Beschreibung mit Hilfe eines Dreiecks-Netzes einfacher geworden wäre; das heisst, dass wir die Fläche mit einem größeren Dreiecks-Netz genauer beschreiben könnten als mit einem feineren quadratischen (oder umgekehrt), usw. Den verschiedenen Netzen entsprechen verschiedene Systeme der Weltbeschreibung. Die Mechanik bestimmt eine Form der Weltbeschreibung, indem sie sagt: Alle Sätze der Weltbeschreibung müssen aus einer Anzahl gegebener Sätze – den mechanischen Axiomen – auf eine gegebene Art und Weise erhalten werden. Hierdurch liefert sie die Bausteine zum Bau des wissenschaftlichen Gebäudes und sagt: Welches Gebäude immer aufzuführen willst, jedes musst du irgendwie mit diesen und nur diesen Bausteinen zusammenbringen. (Wie man mit dem Zahlensystem jede beliebige Anzahl, so muss man mit dem System der Mechanik jeden beliebigen Satz der Physik hinschreiben können).“ [A mecânica newtoniana, por exemplo, põe a descrição do mundo em uma forma unitária. Concebamos uma superfície branca sobre a qual houvesse manchas pretas irregulares. Dizemos então: qualquer que seja a configuração que disso possa resultar, sempre poderei aproximar-me o quanto quizer de sua descrição recobrando a superfície com uma rede quadriculada de malhas convenientemente finas e dizendo, a respeito de cada quadrado, se é branco ou preto. Terei posto assim a descrição da superfície em uma forma unitária. Essa forma é arbitrária, pois eu poderia ter utilizado, com o mesmo sucesso, uma rede de malhas triangulares ou hexagonais. Pode ser que a descrição, com o auxílio de uma rede triangulada, se tornasse mais simples; ou seja, que pudéssemos, com uma rede triangulada de malhas mais grossas, descrever a superfície de maneira mais precisa do que o fariamos com uma rede quadriculada de malhas mais finas (ou vice-versa), e assim por diante. Às diferentes redes correspondem diferentes sistemas de descrição do mundo. A mecânica determina uma forma de descrição do mundo ao dizer: todas as proposições da descrição do mundo devem ser obtidas, de uma dada maneira, a partir de certo número de proposições dadas – os axiomas mecânicos. Provê, desse modo, as pedras para a construção do edifício científico e diz: qualquer que seja o edifício que você queira levantar, deve construí-lo, da maneira que seja, com estas e apenas estas pedras. (Assim como se deve, com o sistema numérico, poder descrever qualquer número, deve-se, com o sistema da mecânica, poder escrever qualquer proposição da física.)] (WITTGENSTEIN, 1994, p. 266-9).

¹⁶ “As diversas teorias científicas, no campo da física, podem ser unificadas e sistematizadas, organicamente, por meio da lógica multidedutiva. (...) Assim, em princípio, torna-se possível compatibilizar as teorias mais variadas, admitindo-se, obviamente, que não haja inconsistências a nível experimental. Desse modo, atinge-se a unidade teórica da física embora tal unificação não seja conseguida via lógica clássica. (...) E o que asseveramos para a física vale para as ciências empíricas em geral” (DA COSTA, 1997, p. 222). Claro que falar em unificação da física nesses termos é um argumento de alcance bastante questionável. De fato, um

pela impossibilidade de transformar a “apreensão direta” dos objetos matemáticos em critério mínimo para o conhecimento científico, seja porque existe uma saída para o argumento de indispensabilidade que é viável e não implica em comprometimento ontológico propriamente dito.

Verdade matemática, coerência e contexto. Por todo o exposto, uma concepção coerencial de verdade em matemática, a exemplo da defendida por nominalistas e conceitualistas, soa como a alternativa mais natural a partir da leitura que elegemos. A filiação à ideia de que os objetos matemáticos não possuem uma realidade efetiva para além do campo de significação humano (simplificando e unindo em um único conceito a posição de ambas as correntes) livra-os das dificuldades com as quais se depara o realismo matemático; a elaboração da matemática tem como recurso último aquilo que se encontra nos limites do que pode ser enunciado com precisão, dentro de uma lógica pertinente e definições bem elaboradas. Contudo, essa perspectiva problematiza de maneira mais acentuada dois temas importantes. O primeiro problema é interno: pode-se legitimamente desconfiar de um sistema incapaz de suprir a si mesmo, principalmente quando demonstrada sua impossibilidade de garantir pela via formal, ao mesmo tempo, seus atributos de completude e consistência, ainda que em circunstâncias relativamente simples, como restou demonstrado pelos teoremas da incompletude de Gödel. A aceitabilidade ou a recusa das definições impredicativas está ligada também a esse problema, pois a inexistência de uma referência externa impõe, ao menos em tese, restrições às definições nominais, como são as impredicativas. Em segundo lugar, uma questão mais voltada à relação da matemática com os outros saberes: se a matemática é apenas uma série de definições encadeadas consistentemente, o fato de que os termos matemáticos são inseridos e interpretados em teorias do âmbito das ciências naturais, pelas quais se estabelece uma compatibilidade com uma realidade exterior, pode parecer apenas uma feliz coincidência.

Na oportunidade em que apresenta sua concepção semântica de verdade, Tarski deixa claro que ela não se trata, em absoluto, da única possibilidade de conceber essa noção: *“deveríamos aceitar o fato de que estamos diante não de um conceito, mas de vários conceitos diferentes, que são denotados por uma palavra”* (TARSKI, 2007[1944], p. 180). Por isso, o fato de associar, de maneira direta como o fazemos, o ato de pensar que leva à

posicionamento dessa natureza apenas permite-nos um meio de salvaguardar uma compatibilidade da ciência em nível da lógica que a preside.

livre criação matemática e a forma final da teoria (renegando assim uma alegada irrelevância dos seus constituintes informais, como já apontamos) abre espaço para considerar a importância do contexto específico de cada ato de elaboração e criação matemática, mas, sobretudo, da aplicação desses conceitos de acordo com o uso a eles atribuído. A perspectiva de Tarski corrobora, portanto, a ideia de que a noção de verdade, mesmo no âmbito da matemática, pode ser tomada por vários ângulos possíveis, ao sabor do contexto teórico no qual se inserem, ou ainda, dependendo do emprego que lhes é dado. Esse *status quo* aplica-se ao conhecimento como um todo, algo que, por si só, é bastante evidente. Mas o emprego de conceitos matemáticos em diferentes contextos é um fenômeno que merece atenção. Uma das consequências desse posicionamento é a possibilidade de compreender cada sistema hipotético-dedutivo, ou cada forma de aplicação da matemática à ciência empírica, como um contexto particular. A axiomática de ZF, por exemplo, é algo que simplesmente não faz sentido dentro de uma perspectiva construtivista.¹⁷ Nesse sentido, dentro de uma concepção de verdade coerencial, essa coerência está intimamente relacionada ao contexto semântico e interpretativo que ao sistema atribuímos, o que torna um mesmo enunciado verdadeiro ou falso de acordo com as premissas anteriormente assumidas.

Essa contextualização é ainda mais evidente se tivermos em mente as várias possibilidades de aplicação das noções matemáticas: o fato de que existe um uso dos conceitos matemáticos fora de seu campo de significação original mostra que é possível utilizá-los também a partir de outras premissas, donde, a partir daí, podemos esperar mudanças significativas. Vide, por exemplo, como Wittgenstein constrói sua argumentação acerca de alguns usos possíveis de $\aleph_0$, que mostram-se como muito diversos de seu emprego na matemática do transfinito:

O Professor Hardy diz que o fato de que nenhum matemático tenha efetuado $\aleph_0$ silogismos não tem mais importância lógica que o fato de que não existe matemático que nunca tenha tomado um copo de água. Isso é um equívoco medonho. A ideia que surge daí é a de que os cardinais transfinitos não são aplicados e, se fossem, o seriam a algo que não podemos atingir.

Todavia, eles *são* aplicados. Eles têm uma aplicação ordinária perfeita, mas não a aplicação descrita por Hilbert. (...) De fato, nós poderíamos dizer que um certo guarda-livros fez um número infinito de cálculos. (Mas compare com o ato de dizer que Johnnie pode fazer $\aleph_0$ multiplicações). Mas tanto o professor Hardy quanto

¹⁷ « *Voilà pourquoi les axiomes de M. Zermelo ne sauraient me satisfaire. Non seulement ils ne me semblent pas évidents, mais quand l'on me demandera s'ils sont exempts de contradiction, je ne saurai que répondre.* » [Por esse motivo os axiomas de Zermelo não me satisfazem. Não apenas por não me parecerem evidentes, mas porque, se for perguntado se eles são isentos de contradição, não saberei o que responder.] (POINCARÉ, 1986[1909.3], p. 251).

Hilbert pensam que $\aleph_0$ deve ser aplicado não a um guarda-livros “atual”, mas a um possível guarda-livros.

A palavra “ $\aleph_0$ ” não tem nada de misterioso. Mas ela desempenha um papel muito diferente do idealizado por Hilbert e Hardy. Hilbert traduz a partir do papel matemático de $\aleph_0$ seu papel não matemático, como o faria do uso matemático de 4 a seu uso não matemático. Mas o papel não matemático de $\aleph_0$ é muito diferente do papel não matemático de 4. (...) Se os numerais “ $\aleph_0$ ”, “ $\aleph_1$ ”, ... , fossem introduzidos na gramática inglesa, você veria que $\aleph_0$ é uma parcela de discurso completamente diferente do que você esperaria que fosse a partir do seu papel na matemática.¹⁸

Em suma, o exemplo acima mostra claramente que o contexto é determinante na aplicação e na construção dos conceitos envolvidos, seja na teoria propriamente dita, seja nos usos da linguagem propiciados pela sua interpolação com a realidade. Concebida a matemática como o fazemos, também é possível entender diferentes premissas teóricas assumidas (como, por exemplo, os pressupostos da matemática formalista e da intuicionista) como diferentes contextos a serem observados.

Do modo como o problema se delineia, portanto, não é possível manter um sentido único e absoluto aos conceitos empregados na matemática, porque na realidade atribuímos o nome “matemática” a domínios muito distintos, com objetos de origens diferentes, em contextos diferentes, o que leva a conceitos e técnicas de naturezas bastante diversificadas. Isso se evidencia nas diferentes formas de intuição que norteiam as definições dos objetos matemáticos e de sua respectiva construção, como indicado no capítulo anterior.¹⁹ Esse

¹⁸ “Professor Hardy says that the fact that there is no mathematician who has completed $\aleph_0$ syllogisms is of no more logical importance than the fact that there is no mathematician who has never drunk a glass of water. This is a ghastly misunderstanding. The idea which you get is that the transfinite cardinals are not yet applied, and if they were, they would have to be applied to something we can't reach.

Whereas: they are applied. They have a perfect ordinary application, but not the application which Hilbert said. (...) In fact we might say that a certain bookkeeper has done an endless number of calculations. (But compare this with saying that Johnnie can do $\aleph_0$ multiplications.) But professor Hardy and Hilbert both think that $\aleph_0$ is to be applied not to any actual bookkeeper but to a possible bookkeeper.

This word “ $\aleph_0$ ” has nothing mysterious about it. But it plays a role quite different from what Hilbert and Professor Hardy think. Hilbert translates from the mathematical role of $\aleph_0$ to the non-mathematical role, as he would from the mathematical use of 4 to the non-mathematical role of 4. But the non-mathematical role of $\aleph_0$ is quite different from the non-mathematical role of 4. (...) If these numerals “ $\aleph_0$ ”, “ $\aleph_1$ ”, ... , were introduced into an English grammar, would you see that $\aleph_0$ is an entirely different part of speech from what you expect it to be from its role in mathematics” (WITTGENSTEIN apud BOSANQUET et al., 1976, p. 169-71).

¹⁹ No que também seguimos o pensamento de Poincaré: “Mathematics, like any other science, must seek after truth. And truth means more than mere consistency. In mathematics it means (on the Poincaré view) that the axioms, cohere with our intuitions, that is, with the form of experience. The heuristic of accepting or applying only those axioms which result in domains which on some interpretation mirror experience, provides a way of limiting the axioms to those which might justifiably be believed to be true (as opposed to merely consistent).” [A matemática, assim como as outras ciências, deve procurar a verdade. E verdade significa mais que mera consistência. Em matemática ela significa (sob a ótica de Poincaré) que os axiomas são coerentes com nossas intuições, ou seja, com a forma de nossa experiência. A heurística de aceitar apenas a aplicação dos axiomas que resultam em alguma interpretação que reflete a experiência propicia uma forma de limitar os axiomas àqueles

posicionamento permite-nos sustentar que não há contradição em tomar o infinito, sob um aspecto, enquanto potência, uma vez que é impossível concebê-lo em ato do ponto de vista aqui adotado (ou seja, pautado em um antirrealismo e tomando o conhecimento matemático como produto do intelecto humano) e, sob outra temática, especificamente dentro da criação sugerida por Cantor da matemática do transfinito, a saber, ao tomar $\aleph_0$ como a representação de um ato de abstração mental, abstração essa que remete a uma totalidade não contável de elementos. A ela não é necessário nem efetuar essa contagem do incontável, nem sustentar a existência dessa realidade “no mundo”: no contexto que se lhe impõe, basta a definição do número transfinito e a definição (ou seja, a escolha) das operações que a essas abstrações pode-se atribuir a partir de regras axiomáticas próprias e que, nesse caso específico, não mantêm contato com a matemática elementar. A reivindicação da incomensurabilidade entre grandezas finitas e transfinitas é muito oportuna ao restringir e isolar o paraíso cantoriano, adstrito apenas ao seu universo particular.

Ora, vimos que a noção de número transfinito e as operações que por definição a eles se aplicam não estão baseadas diretamente na intuição aritmética e nos tipos de evidência que ela pode oferecer. Por isso, não há que se falar em uma referência exclusiva, em um único contexto possível até mesmo para a noção de infinito. Trata-se, ao contrário, de técnicas diversas, regidas por regras diferentes e que operam objetos mentais de natureza dessemelhante, ainda que a eles se atribua o nome genérico de “número”. Se tivermos em conta os termos e a distinção introduzida por Kriesel, entre realismo ou antirrealismo quanto a valores de verdade em substituição ao realismo ou antirrealismo ontológico propriamente dito, a noção de uma verdade contextual mina até mesmo um realismo matemático no que tange a valores de verdade, e não apenas a objetos matemáticos propriamente ditos, pois não há que se falar em uma referência única de verdade quando aceitamos construções elaboradas sob contextos distintos. Justamente por conta da amplitude desse, digamos, conceito estendido de número, não é cabível a exigência de uma efetiva descrição dos objetos matemáticos (e, por isso, descabido o revisionismo de cunho construtivista), porque nem todos eles são passíveis de serem descritos, apesar de sua definição clara ser uma condição inegociável.

que podem ser justificadamente tomados como *verdadeiros* (opondo-os aos meramente consistentes).] (FOLINA, 1992, p. 113-4). A formalização não pode ignorar a intuição, ainda que a demonstração axiomática seja a pedra de toque da verdade.

Todavia, não havendo intuição que permita qualquer espécie de apreensão *hic et nunc* do infinito por parte do intelecto, é necessário reconhecer que a definição de uma grandeza dessa natureza deriva de uma espécie de raciocínio por exclusão: aquilo que *não* é finito, aquilo que *não* tem limite predeterminado. Indubitavelmente trata-se de uma definição negativa, mas fundada em uma capacidade do intelecto de repetir indefinidamente a mesma operação (vide nota 46 do capítulo 2). Esse é o sentido do emprego de um infinito *potencial*. O infinito dado em ato, por sua vez, só pode encontrar esteio em uma definição nominal e, por isso, a consistência passa a ser sua única pedra de toque. Neste caso em particular, como em tantos outros, a descrição é tão impossível quanto desnecessária, pois não compromete de modo algum o rigor matemático, e apesar de defendermos a concepção de números como entidades mentais, isso não significa que a criação de entidades mentais está irremediavelmente presa a um processo de descrição completa, mas à sua axiomatização.

O mesmo raciocínio que desenvolvemos no que diz respeito aos transfinitos pode ser aplicado, por exemplo, aos números irracionais. Mas há aqui uma diferença importante: conforme já exposto, existe uma intuição que permite a elaboração conceitual desse tipo de grandeza, ao combinar a intuição matemática com a intuição geométrica, donde deriva a axiomática a ela pertinente (vide figura 3, capítulo 4). Nesse sentido, supera-se a dificuldade relativa aos irracionais como números não arquimedianos (cf. nota 54 do capítulo 2), ao reconhecer uma espécie de evidência indireta sobre a qual eles são construídos. Caso contrário, o enunciado

$$\exists x \mid x^2=5$$

não teria qualquer significação. A significação, todavia, existe, e a definição de $\sqrt{5}$ está delineada *perfeitamente* e pronta para o uso que lhe é dado dentro da matemática usual, ainda que não possamos efetivamente calcular essa grandeza. Evidentemente, nesse caso, a descrição do número é impossível. Por isso, o símbolo que caracteriza os números irracionais é inserido no sistema axiomático e passa a constituir um recurso acrescido com o intuito de fazer coincidir a intuição aritmética à possibilidade de adequação dos números à cadeia do contínuo gerada a partir da intuição geométrica. Esse *status quo* denota que o ato de efetivamente conceber um número não significa de maneira nenhuma a restrição a um único modo de concepção desses objetos mentais, bem como essa possibilidade não redundaria na subversão da ordem de geração dos objetos mentais ao arrepio de suas condições de

realização.²⁰ Destarte, a justificação envolvida no conceito de verdade matemática deve inserir-se em um contexto específico; mas a ideia de que existe uma única via, um único contexto que preside a criação e a operação de todos os objetos matemáticos (como, por exemplo, a negação do intuicionismo em nome da verdade da matemática clássica ou vice-versa) é superficial e, por isso mesmo, enganosa.

No que concerne às definições impredicativas, a dificuldade é a de sustentar uma definição circular sem reconhecer uma realidade externa à qual seja possível recorrer. Como vimos, o antirrealismo, em regra, deságua em uma postura reformista, e o realismo permite definições impredicativas por pretensamente recorrer a uma concepção correspondencial de verdade, mas nenhuma dessas posições parece suficiente. Há que se reconhecer, de alguma maneira, a viabilidade de um posicionamento antirrealista e que permita asserções impredicativas. A estratégia que adotaremos para tanto é a de postular a possibilidade de viabilizar uma axiomática que evite contradições, malgrado a impredicatividade de algumas noções. Nem todas as definições impredicativas nos preocupam, mas apenas aquelas que são compreendidas como não elimináveis (cf. nota 48 do capítulo 2), pois estas, ao contrário das elimináveis, não encontram meio possível de tornarem-se predicativas: nesse caso, a concepção de verdade como coerência contextual viabiliza uma alternativa interessante.

A verdade matemática, sob o ponto de vista que elegemos, tem como critério a consonância entre objetos conceituais primitivos, axiomas e enunciados dentro de um processo de construção de conceitos lastreado em intuições originárias. Na aritmética, uma vez estabelecida a regra e, sobretudo, a técnica específica para cada operação, dispensa-se a intuição em nome da simples adequação da manipulação simbólica na qual acaba por caracterizar-se a efetiva aplicação dessa técnica.²¹ O rigor demonstrativo, bem como a lógica

²⁰ E, nesse aspecto, não há meios de corroborar a tese de Poincaré, que toma a matemática concebida por Russell como um atentado a toda a psicologia, por exemplo, quando o autor francês recorre ao argumento de que certas noções que não podem ser definidas em um número finito de palavras são inválidas, incluindo as definições nominais nesse mesmo bojo (POINCARÉ 1986[1909.3], p. 256). Ele exige a descrição, e não a simples definição das noções empregadas, além de sua inserção em uma classificação predicativa. Ele não considera que a simples definição sem sua respectiva descrição pode ter ser válida no contexto da “verdadeira matemática”. Mas procuramos aqui ressaltar que um uso em um contexto específico da teoria matemática pode perfeitamente aceitar definições nominais sem qualquer espécie de descrição de modo não problemático. O que Poincaré não aceita (e que, a nosso ver, é um posicionamento injustificado) é a existência de definições nominais sem um processo efetivo de construção, sob a alegação de tratar-se de algo que atenta contra o modo como opera nosso intelecto.

²¹ “*To understand a mathematical notion is to be able to solve problems involving notions that are different in various ways from previous encountered problems involving the notion. This shows a certain ‘creativity’, which*

que o preside, tem o papel de garantir a correção da aplicação da técnica que decorre da simples utilização dos símbolos conforme a regra preestabelecida, de modo que seu limite é a ausência de contradição. Essa idéia já surge no ideário do intuicionismo, notadamente em Dummet (1973, p. 98), mas não podemos corroborar, entretanto, as consequências que o intuicionista dela extrai, porque a falibilidade da intuição realmente traz à matemática a possibilidade de erro quando dissociada de uma lógica forte. O processo de amadurecimento e esclarecimento das noções matemáticas, entretanto, mostra que nada há de problemático ao permitir o fortalecimento de um sistema a partir de inserções *ad hoc* de regras axiomáticas, movimento este que também faz parte do seu desenvolvimento conceitual. Pensar o contrário, ou seja, tomar a ciência por um saber estanque, e seus princípios adotados como absolutamente prontos e acabados, é um posicionamento que pode encontrar alguma guarida no realismo, mas nenhuma sustentação a partir de um olhar histórico-epistemológico. Assim, noções impredicativas acabam por se inserir no contexto adequado às teorias que lhes servem de base; seu emprego e sua significação não exigem uma intuição originária nos mesmos termos da intuição de número inteiro, nem uma descrição que vá além da definição. Daí decorre, por exemplo, o fato de que o conceito de predicatividade não é sequer uma concepção forte o suficiente para distinguir *per se* a matemática clássica da vertente intuicionista, por exemplo.²² Dessa forma, não é a predicatividade que deve servir de parâmetro final e determinante da verdade matemática, mas a coerência das asserções em relação às bases do sistema, bem como de seus postulados fundamentais entre si.

Assim sendo, a criação matemática está diretamente associada ao livre exercício do intelecto humano, o que implica naturalmente em processos mentais não formalizáveis, como a utilização de analogias e, porque não dizer, do exercício da imaginação. Dessa origem

is credited to understanding. It is quite obvious in mathematics, however, that the ability to solve problems by means of a given algorithm does not necessarily show understanding of the notions involved, although it does show understanding of the application of the algorithm.” [Entender um conceito matemático é ser capaz de resolver problemas que envolvem noções que são, de várias formas, diferentes dos problemas anteriores que envolvem a noção. Isso mostra certa ‘criatividade’, que é creditada ao entendimento. Entretanto, é bastante óbvio em matemática que a capacidade de resolver problemas por meio de um algoritmo dado não revela necessariamente a compreensão dos conceitos envolvidos, apesar de mostrar a compreensão da aplicação do algoritmo.] (CHATEAUBRIAND, 2005, p. 64-5).

²² « *Puisque les mathématiques prédictives en ce sens sont contenues à la fois dans les mathématiques classiques et intuitionnistes, le concept de prédictivité sous-jacent ou sa traduction dans le formalisme sont trop étroits pour remplir le rôle que conféraient Cavaillès et Gilmore au prédictivisme : de servir de critère de décision entre les deux grands pensées mathématiques.* » [Uma vez que a matemática predicativa nesse sentido está contida tanto na matemática clássica quanto na intuicionista, o conceito de predicatividade subjacente ou sua

deriva a profusão da matemática e sua recorrente capacidade de superação dos problemas muitas vezes criados por seu próprio desenvolvimento. Não é senão a partir dessas circunstâncias que podemos tomar a criação dos números incomensuráveis, dos transfinitos, imaginários, complexos, bem como as especulações relativas aos espaços n-dimensionais, onde o limite é a imaginação do matemático.²³ A incompletude, portanto, deixa de ser um problema, para tornar-se apenas uma decorrência natural dessa inesgotabilidade e riqueza intrínsecas ao desenvolvimento de uma ciência em incessante construção. Dessa forma, parece possível defender a ideia de que até mesmo noções impredicativas não elimináveis podem ser empregadas (e, por isso, legitimadas), dentro do universo contextual ao qual pertencem: na linguagem própria e dentro daquilo a que se propõe a matemática do transfinito, por exemplo, o emprego dos termos dita, define e direciona sua aplicação, e tem como limite a ausência de contradição.

5.2. Matemática, ciência e realidade

Linguagem e objetividade. Já citamos na introdução ao trabalho que concebemos a matemática como um produto do intelecto humano calcado necessariamente na linguagem que o veicula. Nos capítulos anteriores, tivemos a oportunidade de verificar que há funções peculiares e inalienáveis tanto aos constituintes formais quanto aos constituintes informais da matemática. Nesse contexto, ainda que possamos operar com a matemática apenas em nível formal e simbólico, isento de conteúdo (algo do que a teoria da computação é uma prova incontestada), trata-se de um erro considerar que ela se resume *apenas* em modelos dessa natureza. Isso porque qualquer possibilidade de atribuição de significado à disciplina envolve a interpretação semântica dos símbolos que compõem sua linguagem, algo que não podemos ignorar, seja ao conceber seus usos, seja ao pensar no seu processo de criação.

tradução formalista são estreitos demais para preencher o papel que Cavaillès e Gilmore atribuem a ele: de servir como critério de decisão entre os dois grandes pensamentos matemáticos.] (HEINZMANN, 1985, p. 86).

²³ « *Qu'est-ce, en effet, l'invention mathématique ? Elle ne consiste pas à faire des nouvelles combinaisons avec des êtres mathématiques déjà connus. (...) Inventer, cela consiste précisément à ne pas construire les combinaisons inutiles et à construire celles qui sont utiles et qui ne sont qu'une infime minorité. Inventer, c'est discerner, c'est choisir.* » [O que é, portanto, a invenção matemática? Ela não consiste em fazer combinações com entes matemáticos já conhecidos. (...) Inventar consiste precisamente em não construir combinações inúteis, mas aquelas que são úteis, e que não são mais que uma ínfima minoria. Inventar é discernir, é escolher.] (POINCARÉ, 1908, p. 48).

O que pretendemos deixar claro é o fato de que teorias ou entes matemáticos não surgem *ex nihilo* ou *pro nihilo*. Sempre há o trabalho envolvido na elaboração conceitual, e centrado em algum objetivo. Não é viável, por isso, encarar o conhecimento matemático como algo que tem uma existência independente e atemporal, dissociada de qualquer finalidade. Mesmo no caso de teorias que nascem sem uma necessidade qualquer de emprego (como os estudos relativos a funções recursivas, por exemplo), sua finalidade, ainda que apenas centrada na especulação teórica por si e para si, envolve necessariamente um esforço conceitual que acaba por congrega os constituintes formais e informais para o delineamento do conhecimento matemático, onde o processo de criação matemática assume um papel indispensável. O rigor matemático direciona o *modus operandi* das demonstrações, e se estamos apenas remetendo ao procedimento de demonstrações com base em regras de operação, realmente não é necessário ir além dos símbolos e das técnicas próprias de combinação de algoritmos. Todavia, ainda que o objeto formal dispense qualquer representação diretamente atribuída a sua simbologia, o valor da matemática enquanto constituinte do conhecimento científico não radica em um conjunto de símbolos, mas no esforço do intelecto que atribui o sentido e o direcionamento dessa teoria, porque a própria regra remete, em última análise, a uma interpretação semântica. Logo, a criação matemática harmoniza tanto constituintes formais quanto informais, pois em nível de elaboração teórica, não há conflito, mas *associação* das faculdades e dos componentes que levam ao produto final, ou seja, a teoria axiomatizada. Esta, entretanto, é apenas a *forma visível* da teoria, o modo de empregar os conceitos para direcionar o rigor demonstrativo àquilo que designamos previamente e se mantém à penumbra. Em suma, a caracterização formal das teorias é o produto final de uma construção intelectual; é o meio de evidenciar aquilo que o processo informal de criação matemática determina, idealiza e transforma em linguagem formal, e que não se restringe apenas a relações quantitativas, mas pode focar inclusive aspectos qualitativos como legitimamente matemáticos.²⁴

²⁴ « L'« applicabilité des mathématiques » (...) est directement reliée aux divers types possibles de grandeurs ou quantités qui peuvent être considérés dans le champ de cette « application » (comme la physique). Prenons, par exemple, le cas du raisonnement géométrique et, en particulier, l'étude qualitative des courbes représentées par des systèmes d'équations différentielles, telle que Poincaré l'a inaugurée vers la fin du XIXe siècle. La recherche des solutions exactes, par les nombres, se voit dépassée par celle des solutions « qualitatives » (types de comportements de solutions pour une famille de courbes, etc.), pour lesquelles le raisonnement s'avère avoir beaucoup plus en prise. Cet exemple montre comment le raisonnement mathématique (...) ne se restreint pas à des nombres ou à des solutions de systèmes d'équations dans le sens généralement admis. » [A 'aplicabilidade da matemática' (...) está diretamente ligada aos vários tipos possíveis de grandeza ou de quantidades que podem

Quanto a esse pormenor, poderíamos dizer que a perspectiva dos logicistas e neologicistas mais empobrece que realmente descreve a matemática, ao atribuir toda a atenção apenas a um aspecto da disciplina. Ainda que se verifique a possibilidade de transformar toda a aritmética em um conjunto de deduções lógicas, e, mais, que a lógica esteja realmente isenta de aspectos intuitivos, o processo como um todo envolve atos mentais irredutíveis à lógica, como o emprego da intuição crítica e normativa para a criação matemática e o fornecimento de uma base anterior que a lógica é incapaz de oferecer. Ainda que todas as cadeias envolvidas no processo de demonstração sejam lógicas, há ainda o senso de conjunto e a própria elaboração da teoria, que escapa completamente de qualquer processo lógico, de modo que simplesmente não faz sentido dissociar a disciplina de sua criação. São momentos que se completam: a maneira como se apresentam, por exemplo, os artigos de Cantor datados de 1895 e de 1897 que introduzem a teoria dos transfinitos, não pode efetivamente ser dissociada do processo intelectual que os gerou: a apresentação final, logicamente perfeita, demonstrativamente elegante, é uma decorrência do processo de criação que lhe deu origem e sua lapidação por intermédio do trato axiomático. E esse processo nada tem de lógico. Mesmo Couturat, defensor ferrenho do logicismo, afirma explicitamente a inexistência de qualquer método no processo de invenção matemática (COUTURAT, 1980, p. 34). O testemunho de Poincaré acerca desse pormenor é valioso,²⁵ pois é bem conhecido o exemplo do matemático francês quanto ao processo de criação matemática e toda a imprecisão e subjetividade dos fatores que o compõem, como descritos de forma genérica em *Ciência e Método*, e, em especial, por ocasião do curioso processo de invenção das funções fuchsianas:

ser consideradas como inseridas no campo dessa ‘aplicação’ (como a física). Tomemos, por exemplo, o caso do raciocínio geométrico e, em particular, o estudo qualitativo das curvas representadas por sistemas de equações diferenciais, como as que Poincaré introduziu no final do século XIX. A busca por soluções exatas, através dos números, vê-se superada pela busca de soluções ‘qualitativas’ (tipos de comportamento de soluções para uma família de curvas, etc.), que os raciocínios procuram levar muito mais em conta. O exemplo mostra como o raciocínio matemático (...) não se restringe a números ou a soluções de sistemas de equações, no sentido geralmente admitido.] (PATY, 2005, p. 115).

²⁵ « Partant de l'expérience personnelle selon laquelle le fournissement de preuves mathématiques présuppose plus que la connaissance d'un petit nombre de lois logiques, il était par avance persuadé que la mathématique doit faire appel, non seulement à la logique, mais aussi et continuellement à l'intuition. C'est se référant à l'induction complète qu'il a voulu rendre acceptable cet énoncé. L'avantage d'une pareille tactique est que ce faisant, il indique en effet un méthode, dont il est indiscutable qu'elle soit admissible, mais qui semble – grâce à l'introduction de l'infini – être placée au-dessus de la logique. » [Partindo da experiência pessoal segundo a qual a obtenção de provas matemáticas pressupõe mais que o conhecimento de um pequeno número de leis lógicas, ele persuade-se de que a matemática deve recorrer não apenas à lógica, mas também à intuição. É ao referir-se à intuição completa que ele quis defender a aceitabilidade desse enunciado. A vantagem de semelhante tática é que, ao assim proceder, ele indica efetivamente um método, o qual soa indiscutivelmente admissível, mas que parece, graças à introdução do infinito, estar colocado para além da lógica.] (MOOIJ, 1966, p. 58).

Poincaré procurou, sob o título de *‘A invenção matemática’*, analisar a série de pensamentos que o conduziu a imaginar esses novos seres matemáticos. Ainda que em parte psicológica, a descrição não é estranha à pesquisa racional de uma abordagem filosófica. (...) O relato de Poincaré apresenta uma série de várias fases de um trabalho mental antes consciente, depois inconsciente, posteriormente novamente consciente e de novo inconsciente, etc. Ressaltemos desde já que, mesmo nos momentos de trabalho inconsciente do espírito, esse trabalho é preparado por uma atividade racional anterior (PATY, 2001, p. 166).

O compromisso estabelecido com uma concepção da matemática enquanto atividade intelectual leva-nos naturalmente a reconhecer que todo o conhecimento só torna-se transmissível quando passível de expressão por meio de um processo linguístico: é esse processo que propicia a objetividade do conhecimento científico, e do conhecimento matemático, em particular. Ela é a instância necessária da ciência, e deve arcar com a falibilidade que lhe é própria, pois *“todo pensar, e sobretudo todo pensar e conhecer teóricos, perfaz-se em certos ‘atos’ que surgem em conexão com a fala em que se exprimem”* (HUSSERL, 1996, p. 25). Logo, tudo que é objetivo é transmissível por intermédio da linguagem, e o que está por detrás da objetividade do conhecimento científico é um *sistema de relações*; sob essa perspectiva, apenas essas relações são de fato compartilháveis, e encontram esteio na maneira como a linguagem é articulada:

As sensações são, destarte, intransmissíveis, ou melhor, tudo nelas que é qualidade pura, é intransmissível e para sempre impenetrável. Mas o mesmo não ocorre para as relações entre essas sensações. (...) Desse ponto de vista, tudo que é objetivo é desprovido de toda qualidade que não seja uma relação pura.²⁶

Os conteúdos do conhecimento são, portanto, intransmissíveis, pertencem ao campo da experiência individual, e só a ela. Em termos de conteúdos, aceita-se uma espécie de solipsismo, o que não é, em absoluto, algo problemático. Poder-se-ia dizer, portanto, que há dois níveis de conhecimento: o contentual, pessoal, intransmissível, porque único e intraduzível, e o das relações que se estabelecem a partir da forma como organizamos esses conteúdos de modo significativo, o que se processa por meio da correlação essencial entre pensamento e discurso: *“nada terá valor objetivo se não for transmissível pelo discurso, ou seja, se não for inteligível.”*²⁷

²⁶ « Les sensations sont donc intransmissibles, ou plutôt tout ce qui est qualité pure est intransmissible et à jamais impenetrable. Mais il n'en est pas de même des relations entre ces sensations. (...) A ce point de vue, tout ce qui est objectif est dépourvu de toute qualité et n'est que relation pure » (POINCARÉ, 1923, p. 263).

²⁷ « Rien n'aura donc de valeur objective que ce qui sera transmissible par le discours, c'est-à-dire intelligible » (POINCARÉ, 1923, p. 265).

Assim, temos apenas a linguagem e a estrutura que lhe é própria como recursos compartilháveis para além da experiência pessoal. Nesta seara, e apenas nela, deve residir o conhecimento objetivo e, conseqüentemente, o conhecimento científico. As relações matemáticas ganham visibilidade e importância nesse sentido, pois representam exemplarmente essa tensão entre o intersubjetivo, encontrado nos constituintes formais da disciplina e, por outro lado, os conteúdos intuitivos que não podem ser reduzidos a esses termos. Os constituintes formais, portanto, são importantes por estabelecerem um papel objetivo e compartilhado da forma como essa transmissão se processa, identificando os conceitos de objetividade e de intersubjetividade como sinônimos dentro desse contexto, de forma que seja possível pensar a *“objetividade como aquilo que é potencialmente universalmente intersubjetivo: ‘o que é comum a vários seres pensantes, e poderia ser comum a todos’.*” Como Poincaré, podemos considerar que a objetividade concebida como intersubjetividade *“é de alguma forma limitada à ‘harmonia’ estabelecida por leis e relações matemáticas. O raciocínio por trás dessa reivindicação parece ser o de que essas leis são o que se pode conhecer objetivamente porque se originam puramente da forma a priori da experiência.”*²⁸

Se a forma *a priori* da experiência é o fundamento da objetividade do conhecimento, a estrutura linguística que permite a transmissão e compartilhamento dessas relações parece ser o fator capital para sua expressão objetiva.²⁹ Logo, ainda que não possa ser tomada como uma resposta absolutamente satisfatória,³⁰ a intersubjetividade constitui-se como uma boa aposta

²⁸ “Poincaré thus has a very kantian view of objectivity as that which is potentially universally intersubjective: ‘what is common to many thinking beings, and could be common to all’. He further claims that objectivity (intersubjectivity) is somehow limited to the ‘harmony’ established by mathematical laws and relations. The reasoning behind this claim seems to be that these laws are what can be known objectively, because these stem purely from the a priori form of experience” (FOLINA, 1992, p. 85).

²⁹ « On dira que la science n’est qu’une classification et qu’une classification ne peut être vraie, mais commode. Mais il est vrai qu’elle est commode, il est vrai qu’elle l’est non seulement pour moi, mais pour tous les hommes ; il est vrai qu’elle restera commode pour nos descendants ; il est vrai enfin que cela ne peut pas être par hasard. En résumé, la seule réalité objective, ce sont les rapports des choses d’où résulte l’harmonie universelle. » [Pode-se dizer que a ciência não é mais que uma classificação, e uma classificação não pode ser verdadeira, mas cômoda; mas se é verdade que ela é cômoda, será verdade que ela não o é somente para mim, mas para todos os homens; é verdade que ela permanecerá cômoda para nossos descendentes; e é verdade, enfim, que ela não pode ser cômoda por acaso. Resumidamente, a própria realidade objetiva (e, com ela, a verdade dos enunciados que a postulam) são as relações das coisas de onde resulta a harmonia universal.] (POINCARÉ, 1923, p. 271).

³⁰ Essa solução arca com um peso razoável, ao exigir que recorramos à consciência como substrato último da ciência, e que isso pode soar como um recurso injustificável, dado o grau de subjetividade em que implica: “It is quite plain that we are conscious, and it is also quite plain that we do not have a reasonable idea of what consciousness is in non-introspective terms.” [É bastante claro que somos conscientes, e é também bastante claro

diante do desafio da objetividade do saber como um todo, e do conhecimento científico em particular. Haja ou não uma realidade exterior, exista ou não um ponto de referência “fixo” ao qual se possa recorrer para balizar essa compreensão, fato é que os enunciados científicos estão centrados no âmbito de relações discursivas, e nelas se encerram. No que diz respeito à matemática, a situação é ainda mais evidente, pois mesmo que o platonismo prosperasse, o tipo de evidência que ele exige leva a uma impossibilidade tanto de justificação para além da experiência pessoal quanto de sua transmissão por meio de um sistema axiomático, uma vez que não é possível veicular, sob quaisquer hipóteses, a experiência pessoal acerca dos supostos entes matemáticos. Essa perspectiva acaba por indicar que, em última análise, não há saída para o solipsismo, a não ser pela concepção de uma objetividade enquanto intersubjetividade.

A escolha dessa alternativa é o coroamento das premissas das quais partimos. A objetividade enquanto intersubjetividade acaba por consolidar-se como a possibilidade intermediária entre a sustentação de um realismo matemático, cuja insuficiência deixamos clara na seção anterior, e o solipsismo que tornaria pouco plausível qualquer reclame de objetividade científica. A matemática torna-se objetiva ao caracterizar-se por um sistema de relações transmissível por meio da linguagem, relações estas mensuráveis e quantitativas, algo para o que o simbolismo lógico-matemático serve, senão perfeitamente, de modo mais adequado que a linguagem do cotidiano.

História e revisionismo. Reservar um lugar de direito para elementos informais da matemática significa obviamente reconhecer como importantes aspectos extrínsecos à demonstração pura e simples e, dentre eles, o do seu próprio desenvolvimento conceitual, algo intrinsecamente relacionado à significação semântica que o toca. Esse *status quo* sugere, todavia, uma perspectiva ainda mais ampla, ao evidenciar que um olhar sobre o processo histórico de uma disciplina pode levar a um enriquecimento de sua compreensão. A geometria analítica cartesiana, por exemplo, pode ser tomada como uma teoria bem construída, bem articulada e suficiente *per se*. Todavia, só é possível entender o que ela significa historicamente (e, conseqüentemente, atribuir-lhe a devida importância) ao perceber que é a partir dela que podemos realmente estabelecer uma relação forte e consistente entre matemática e geometria, que deu frutos preciosos para a ciência moderna e contemporânea.

que não temos uma idéia razoável do que é a consciência em termos não introspectivos.] (CHATEAUBRIAND, 2005, p. 66).

De maneira análoga, só é possível entender *realmente* as demandas do intuicionismo se tivermos no horizonte o que ele traz de radicalmente novo em relação à matemática ortodoxa, se assim podemos denominá-la: o intuicionismo é produto do desenvolvimento da matemática, e seus motivos e consequências pretendidas dialogam o tempo todo até mesmo com a axiologia inerente às premissas epistemológicas adotadas, dada sua condição de heterodoxia que procura estabelecer a viabilidade de seus princípios. Os exemplos multiplicam-se à medida de nossa vontade: as geometrias não euclidianas, a teoria dos grupos, o cálculo infinitesimal, e por aí afora. Isso significa que, de alguma maneira, apesar de cada teoria manter sua consistência interna, sua liberdade e autossuficiência, a sua efetiva valoração é parte de um processo mais amplo que o visado por suas determinações intrínsecas, fomentado, em grande parte, pelas demandas geradas a partir de seu próprio desenvolvimento.

Nesse sentido, se adotarmos uma perspectiva histórica do desenvolvimento científico, uma postura descritiva implica na consideração necessária quanto ao estado atual da ciência e a profusão que se verifica a partir dele. Assim, um dos problemas com o qual nos defrontamos é o de reconhecer a viabilidade da argumentação do intuicionismo (no que diz respeito às restrições da aplicação do princípio do terceiro-excluído e da construtibilidade matemáticas) sem incorrer em uma postura reformista em relação à teoria,³¹ algo para o que a noção contextual de verdade esboçada na seção anterior é uma saída possível. Afinal, o próprio caminhar da ciência é o que viabiliza seus novos objetos e tipos de relações que passam a constituí-la:

A história da matemática mostra (...) um alargamento incessante do seu campo, de seus objetos, dos tipos de relações entre esses objetos e suas transformações, e das passagens de um ramo da matemática a outro, testemunhando uma unidade da matemática que se revela como um caminho e torna-se ainda mais clara *a posteriori*.³²

³¹ Chihara, Dummet e Field seguem esse caminho: Dummet defende um construtivismo estrito, Field procura construir uma ciência sem números, meramente qualitativa, enquanto Chihara apresenta uma possibilidade de fundamentação das teorias científicas a partir de uma lógica modal, que não implica em comprometimento ontológico. Apesar de tratarem-se de esforços notáveis, sua viabilidade é no mínimo duvidosa, pelos altos custos exigidos em face dos discutíveis benefícios que proporcionam. Elas são, em maior grau, com Field e Dummet, ou em menor grau, com Chihara, tentativas de reformar a teoria matemática sob um pretexto a ela exterior, o de uma imposição filosófica originária (vide nota 36 do capítulo 2). Para um trato preciso e comparativo entre tais tendências, vide Shapiro (2000).

³² « *L’histoire des mathématiques montre (...) un élargissement sans cesse plus grand de leur champ, de leurs objets, des types de relations entre ces objets et de leurs transformations, et des passages d’une branche des*

Uma leitura como essa coloca em primeiro plano uma reflexão de cunho filosófico, bem como seu papel perante a matemática, pois é possível considerar a reflexão filosófica como uma decorrência natural do movimento conceitual que se processa historicamente, principalmente do ponto de vista de uma dialética dos conceitos,³³ sobretudo porque, em grande parte, a história da matemática acaba por caracterizar-se como a história do desenvolvimento dos conceitos que a compõem. Contudo, a própria legitimidade de uma perquirição dessa natureza é questionável.

Dentre os posicionamentos possíveis acerca de qual *status* conceder à perquirição filosófica enquanto compreensão da “mecânica interna” de desenvolvimento, transformação e justificação dos conceitos envolvidos na criação e expressão da matemática, dois deles apontam para tendências diametralmente opostas. A primeira delas assevera uma espécie de dependência direta da matemática em relação à filosofia. Segundo esse ponto de vista, a filosofia encerra uma atividade intelectual que, em um determinado sentido, sobrepõe-se às outras manifestações da razão e do entendimento humanos. Na condição de saber totalizante,³⁴ regula e direciona o conhecimento, bem como desempenha o papel de refletir acerca dos pressupostos e dos produtos do conhecimento humano. Logo, devido a sua natureza peculiar, a filosofia teria uma precedência de direito em relação às ciências. O reconhecimento de que há uma espécie de determinação das teorias matemáticas a partir dos pressupostos ontológicos, metodológicos e teleológicos (como verificamos no capítulo 2), que o matemático assume tácita ou explicitamente, pode servir como forte argumento no sentido de corroborar essa posição.³⁵

mathématiques à une autre, témoignant pour une unité des mathématiques qui se révèle chemin faisant et s'éclaire plus encore a posteriori » (PATY, 2005, p. 115).

³³ Uso o termo “dialética” em um sentido próximo ao empregado por Hegel. Sugiro que podemos falar, por exemplo, em uma dialética dos conceitos ao reconhecer que as próprias dificuldades introduzidas por uma tese põem em movimento a necessidade de superá-la, por meio de sua antítese: “a dialética propriamente dita é interna aos conceitos ou categorias: desenvolve radicalmente as imperfeições que contêm e os faz passar (*übergehen*) para um outro conceito ou categoria” (INWOOD, 1992, p. 101). Todavia, para sustentar essa tese, não é preciso necessariamente remeter à carga metafísica que encontramos na concepção hegeliana, como, por exemplo, a sustentação de que os conceitos têm um desenvolvimento *per se*, a exemplo do que faz Hegel: “Hegel fala frequentemente como se fossem os próprios conceitos, e não o pensador, que conduzem essa operação, e diz que eles mudam e se desintegram autonomamente” (Ibid., p. 101).

³⁴ “Diziam os antigos que filosofar é pensar Deus. Em suma, se as ciências e as artes representam manifestações concretas do poder espiritual do homem, a filosofia é uma tentativa superior, de segundo grau. Ela pretende reaver, na sua unidade abstrata, esse poder, ou, se preferirmos, o sentimento desse poder. A filosofia é reflexiva. É o espírito ou a inteligência que se apreende a si mesma” (MAUGÜÉ, 1954, p. 645).

³⁵ Apesar de parecer referir-se especialmente às teorias experimentais, a argumentação de Laudan pode ser um ponto a corroborar também essa leitura. Do ponto de vista do que o autor denomina *padrão hierárquico* (onde há

O outro posicionamento possível é o que incorre no extremo oposto, ou seja, aquele que exclui peremptoriamente qualquer prerrogativa da filosofia em relação à matemática. Stewart Shapiro denomina essa posição como a “*philosophy-last-if-at-all-principle*”: os partidários dessa ideia se opõem não apenas ao reconhecimento de uma primazia da filosofia em relação à matemática, mas a qualquer papel realmente importante que ela possa vir a desempenhar diante da matemática:

Nessa perspectiva, a matemática tem uma vida própria, completamente independente de quaisquer considerações filosóficas. Uma visão filosófica não tem nada a contribuir para a matemática; na pior das hipóteses, é sofística sem sentido, uma divagação e tentativa de intromissão de estranhos; na melhor das hipóteses, a filosofia da matemática é uma serva indigna de matemática.³⁶

O principal trunfo dos defensores dessa posição é o fato de que, na prática, a matemática sobrevive - e, diriam eles, sobrevive muito bem - sem qualquer auxílio da filosofia. Para verificar esse argumento não é necessário recorrer a teses complexas ou a raciocínios sutis; basta folhear os periódicos especializados ou visitar os departamentos de matemática das melhores universidades para constatar esse fato. Logo, o argumento leva a considerar que, se há algum papel de direito da filosofia perante a matemática, ele certamente não seria superior, regulador, determinante.

Já indicamos rapidamente qual o posicionamento adotado nesse pormenor (cf. capítulo 2, seção 2.2): nenhuma das duas teses é suficiente, pois há, sem dúvida, um papel a ser atribuído à filosofia, ao menos se pensarmos essa atividade em sua significação mais ampla.

um escalonamento entre fatos científicos, regras metodológicas e objetivos visados), evidencia-se a relação entre essas instâncias, onde critérios metodológicos e axiológicos resolvem problemas relativos ao direcionamento da teoria propriamente dita: “*Sometimes scientists disagree about the appropriate rules of evidence or procedure, or about how those rules are to be applied to the case at hand. In such circumstances, the rules can no longer be treated as an unproblematic instrument for resolving factual disagreement. When this happens, it becomes clear that a particular factual disagreement betokens a deeper methodological disagreement. In the standard hierarquical view, such methodological controversies are to be resolved by moving one step up the hierarchy, that is, by reference to the shared aims or goals of science.*” [Às vezes, os cientistas discordam sobre as regras apropriadas de provas ou de procedimentos, ou sobre como estas regras devem ser aplicadas ao caso em apreço. Em tais circunstâncias, as regras não podem mais ser tratadas como um instrumento isento de problemas para resolver uma divergência fatural. Quando isso acontece, torna-se claro que uma divergência fatural particular prenuncia uma divergência metodológica mais profunda. No padrão hierárquico, tais controvérsias metodológicas devem ser resolvidas dando um passo acima na hierarquia, ou seja, tomando por referência finalidades compartilhadas ou objetivos da ciência.] (LAUDAN, 1991, p. 25). Claro que, para aceitarmos como viável esse posicionamento nesse caso, é preciso identificar os critérios metodológicos ou, no mínimo, os objetivos compartilhados, como premissas de cunho filosófico.

³⁶ “*On this perspective, mathematics has a life of its own quite independent of any philosophical considerations. A philosophical view has nothing to contribute to mathematics and it is at worst a meaningless sophistry, the rambling and (attempted) meddling of outsiders. At best, philosophy of mathematics is an unworthy handmaiden to mathematics*” (SHAPIRO, 2000, p. 14).

Para tanto, procuremos abandonar tanto quanto possível essa distinção rígida que opõe filosofia e matemática enquanto disciplinas, para salientar que há, no processo de construção de uma teoria, manifestações mentais que podemos classificar de uma ou outra forma. Logo, se existe a preocupação de caracterizar alguns atos mentais como “filosóficos”, o primeiro e mais evidente é o da reflexão acerca das teorias sob um ponto de vista exterior, geral e totalizante, uma vez que *“a ciência matemática deve refletir sobre si mesma, pois refletir sobre si mesma é refletir sobre o intelecto humano que a criou.”*³⁷ Essa aplicação da filosofia, via de regra relegada a segundo plano, na melhor das hipóteses, mostra-se necessária para dirimir problemas fundamentais e aos quais não se pode oferecer uma resposta apenas nos estreitos limites da matemática, como o que ocorreu no episódio relativo à crise dos fundamentos: o que se discutiu nessa oportunidade foi justamente o que a matemática *deveria* ser e, portanto, qualquer resposta restrita à teoria seria naturalmente insuficiente. Quando se impõe um problema semelhante a esse, a própria teoria é incapaz de qualquer resposta que não recaia em uma circularidade dogmática e insolúvel. O exercício de reflexão passa a ser o *ponto de partida* para a determinação dos fundamentos da matemática, algo do que a disciplina simplesmente não pode se furtar.

Há outros aspectos que, apesar de não podermos classificar propriamente como filosóficos, têm sua importância no contexto da elaboração da própria teoria ou sua aplicação. Um deles é o que remete à natureza dos objetos matemáticos. A crença na natureza dos objetos matemáticos, assuma ela qual forma assumir, é anterior à reflexão filosófica propriamente dita, mas consiste antes em uma crença que em um pressuposto filosófico. Do ponto de vista da elaboração das teorias, a noção de número (metafísica, conceitual, simbólica) indubitavelmente precede sua formalização. Ao operar com números, há necessariamente uma noção do que seja número, ainda que não reflexiva, mas primária e bruta e, por isso mesmo, originária. Essa circunstância não pode ser compreendida especificamente como um exercício de reflexão, mas parece óbvio que a gênese de uma teoria exige um posicionamento nesse sentido como ponto de apoio preliminar de uma construção axiomática, posicionamento esse que traz consequências para a própria construção das teorias.

Finalmente, podemos citar como relevante a criação de hipóteses e analogias que permitam sua associação aos fenômenos da experiência por intermédio das ciências

³⁷ « *La science mathématique doit réfléchir sur elle-même et cela est utile, parce que réfléchir sur elle-même, c'est réfléchir sur l'esprit humain qui l'a créée* » (POINCARÉ, 1908, p. 31).

experimentais. Como vimos, a linguagem é o instrumento que propicia o trânsito entre esses dois pólos distintos, na tentativa de harmonizar experiência e razão. Obviamente esse ato envolve aspectos intuitivos, mas a transição de um campo a outro exige um esforço de imaginação e criatividade que transcende tanto a teoria empírica quanto a matemática consideradas particularmente e permite, portanto, a síntese entre elas, como o que presenciamos com a tentativa de compatibilizar as noções de contínuo matemático, contínuo físico e a intuição “perceptiva” de contínuo.³⁸ Se há, todavia, um caráter propriamente reflexivo neste ato específico, ele também parece estar em segundo plano.

Apesar de apresentarem-se como momentos importantes da constituição e da aplicação da teoria, obviamente não é possível considerar essas manifestações a que nos referimos acima como matemáticas e, no caso das duas últimas, sequer como propriamente filosóficas. Assim, apenas uma perspectiva genética e histórica pode ser aplicada para explicitar “momentos” em que cada uma dessas manifestações encontra maior ou menor importância, em função da necessidade que se apresenta em cada caso. Por exemplo, se a presente tese parte dos problemas teóricos nascidos na passagem do século XIX para o século XX, é tão somente porque esse período constitui um momento privilegiado de direcionar uma análise de cunho filosófico às bases da matemática, como vimos no capítulo 1. Logo, quando não está em questão a origem metafísica de seus elementos, quando alheia a qualquer tipo de crise ou isenta de problemas oriundos de sua aplicação em outras searas (e a esmagadora maioria do *quantum* da produção matemática se perfaz ao arrepio dessas questões), considerações filosóficas, ou melhor, extramatemáticas, são realmente dispensáveis; mas o são apenas nesses casos.

Nesse sentido, o antirrevisionismo que aqui defendemos deve ser compreendido a partir da tensão existente na atribuição do papel preciso a ser desempenhado pela filosofia perante a matemática. Por um lado, parece claro que não se pode atribuir à filosofia uma primazia absoluta perante o conhecimento científico; não lhe cabe, enquanto esforço interpretativo, arvorar-se na pretensão de ditar os caminhos da pesquisa científica, ainda que não concordemos com a *philosophy-last-if-at-all-principle*, ou com o que Quine denomina

³⁸ Um bom exemplo é o modo como Herman Weyl procura uma articulação entre esses conceitos de diferentes origens, com o intuito de legitimar seu posicionamento relativo à filosofia da ciência. Vide Bernard (2009, p. 158-9).

naturalized epistemology.³⁹ Enquanto exercício de interpretação e reflexão acerca dos produtos do conhecimento humano, a filosofia consiste em um esforço, digamos, de outra natureza, se comparado ao saber matemático. Ocorre, todavia, que um posicionamento de cunho epistêmico-metodológico é algo do que o cientista em geral, e o matemático, em particular, não pode negligenciar. Preceitos dessa natureza não estão contidos na construção axiomática dessa ciência; ao contrário, eles *determinam* a forma dessa construção, e ela, por sua vez, espelha esses preceitos. Assim, a filosofia, ao invés de ditar intransigentemente os caminhos da matemática, enquanto exercício de reflexão acerca de seus princípios e fundamentos, tem papel fundamental na tentativa de compreender como e porque ela é o que é, explicitar suas relações com outros domínios do saber humano e, quiçá, sugerir perspectivas de sua realização. Assumir um posicionamento não revisionista está longe de significar que abrimos mão da postura crítica que caracteriza a perquirição filosófica. A presente tese certamente não se dissocia de uma perspectiva crítica e reflexiva. Ocorre que, do modo como a argumentação foi direcionada, a crítica imposta por uma filosofia exterior à prática científica não se presta a excluir como indevidos quaisquer sistemas axiomáticos, desde que logicamente bem construídos. O que se propõe é a possibilidade de pensar a ciência de uma maneira mais ampla que uma visão míope, centrada no embate entre sistemas particulares, poderia propiciar.

Poder-se-ia objetar que o emprego de critérios metodológicos já é um passo do processo de axiomatização e, portanto, da matemática. Dessa forma, o problema seria apenas reduzido a uma querela voltada à classificação de atos mentais como “matemáticos” ou “extramatemáticos”, algo que, de fato, não nos preocupa. Basta o simples reconhecimento da existência desses pressupostos nos quais a formalização axiomática está alicerçada. Mas ainda que aceito o argumento, a imposição de aspectos metodológicos e axiológicos tanto na criação quanto na efetiva realização da matemática ocorre em momentos e circunstâncias específicas de seu desenvolvimento.

³⁹ “Quine rejected the traditional a priori way in which philosophers tended to practice epistemology and advocated instead taking epistemology to be a sub area of psychology. He suggested that epistemology should study ‘a natural phenomenon, a physical human subject.’” [Quine rejeitou a forma apriorística através da qual os filósofos tendiam a praticar a epistemologia e, ao contrário disso, defendeu a epistemologia como um ramo da psicologia. Ele sugeriu que a epistemologia deveria estudar ‘um fenômeno natural, um objeto humano físico’.] (CHIHARA, 2005, p. 494).

Matemática, ciências experimentais e realidade empírica. Ao mesmo tempo em que se reclama a autonomia do conhecimento matemático, é inegável a sua importância na tentativa de compreender a natureza, por intermédio das ciências empíricas. Verifica-se, portanto, uma situação paradoxal, pois parece indevido considerar essa aproximação, de maneira simplista, como uma apropriação circunstancial. A prática científica mostra que a matemática parece, de alguma forma, flertar com a realidade, ao servir de base racional para sua interpretação. Logo, apesar de tratar-se de um saber independente e distinto da realidade, sua ampla aplicação nas ciências naturais sugere uma proximidade curiosa e que merece atenção.

A ciência contemporânea tem como um de seus pressupostos mais fundamentais a possibilidade de matematização,⁴⁰ algo cada vez mais latente na química, na biologia e na física, para referirmo-nos apenas a grandes ramos das ciências experimentais. Podemos ainda indicar a crescente importância das simulações baseadas em modelos matemáticos para diversas áreas do conhecimento, como na meteorologia, bem como a estatística, fundamental em um sem número de ramos do saber. Até mesmo algumas ciências classificadas como “humanas” passam por um momento onde a aplicação de modelos matemáticos é uma aspiração clara, como na econometria e na sociometria (linhas de pesquisa derivadas respectivamente da economia e da sociologia), de modo que, para falar em termos grosseiros, constata-se o estabelecimento de um elo de direito entre a matemática e a interpretação da realidade conforme realizada a partir das teorias científicas. Entretanto, a adequação entre essas duas instâncias não é imediata, uma vez que existem diferenças notáveis quanto a suas origens, quanto aos métodos empregados, aos pressupostos adotados, etc. Em suma, elas parecem pertencer a campos distintos, se levados em conta os aspectos epistemológicos, não obstante a possibilidade de percepção, ao menos aos olhos do leigo, de que a natureza comporta-se matematicamente, e que isso é uma característica premente do conhecimento

⁴⁰ Devido a esse papel fundamental e em casos específicos, a matematização pode ser tomada até mesmo como critério para a solução de questões não apenas factuais, mas também metodológicas, enquanto um fim cognitivo em si mesmo: *“cognitive aims typically underdetermine methodological rules in precisely the same way that methodological rules characteristically underdetermine factual choices. (...) In sum, rules, like theories, are underdetermined by the relevant constraints.”* [Fins cognitivos em parte determinam regras metodológicas da mesma forma que regras metodológicas caracteristicamente determinam em parte escolhas factuais. (...) Em suma, regras, assim como teorias, são em parte determinadas pelas circunstâncias relevantes impositivas.] (LAUDAN, 1991, p. 37).

científico em geral.⁴¹ Como, então, uma concepção de matemática que se isenta de um compromisso ontológico pode dar conta dessa correlação sem incorrer, no mínimo, em uma justificação insuficiente? A ideia básica que norteia a posição aqui defendida é a de que a relação que justifica sua aplicação não se estabelece, em verdade, da matemática à realidade observável, mas entre a matemática e as teorias científicas que têm por escopo a compreensão da realidade.

As ciências experimentais estão sempre atreladas ao campo perceptivo, em maior ou menor grau, por mais ampla que seja a gama de possibilidades envolvidas nesse conceito. Basta, por exemplo, pensar como a observação na física de partículas difere das observações dos campos gravitacionais dos corpos celestes, ou de reações químicas desenvolvidas em laboratório. A experiência observacional, portanto, é multiforme e, em geral, depende diretamente do pesquisador, do método, do instrumental utilizado, da teoria subjacente e, claro, do objeto visado, onde os próprios significados que atribuímos à experiência e à observação não deixam de ser problematizados. É bem conhecida nossa limitação física, por exemplo, em relação à percepção dos espectros de luz visíveis. Nós apenas somos aptos a enxergar a olho nu uma parcela bastante reduzida e intermediária dentre os possíveis comprimentos de onda e de frequência (algo entre 400 e 700 nanômetros); contudo, um espectro eletromagnético muito mais amplo - que engloba ondas de rádio, microondas, o infravermelho, raios ultravioleta, raios X e raios gama - é hoje amplamente utilizado por astrônomos, por exemplo, com o intuito de observar e obter dados acerca do universo para os quais a luz visível é inapta a veicular. Assim, parece inegável a importância e a pertinência

⁴¹ « Pour un observateur superficiel, la vérité scientifique est hors des atteintes du doute ; la logique de la science est infaillible et, si les savants se trompent quelquefois, c'est pour en avoir méconnu les règles. Les vérités mathématiques dérivent d'un petit nombre de propositions évidentes par une chaîne de raisonnements impeccables ; elles s'imposent non seulement à nous, mais à la nature elle-même. (...) De chaque expérience, une foule de conséquences pourront sortir par une série de déductions mathématiques, et c'est ainsi que chacune d'elles nous fera connaître un coin de l'Univers. Voilà quelle est pour bien des gens du monde, pour les lycéens qui reçoivent les premières notions de physique, l'origine de la certitude scientifique. Voilà comment ils comprennent le rôle de l'expérimentation et des mathématiques. C'est ainsi également que le comprenaient, il y a cent ans, beaucoup de savants qui rêvaient de construire le monde en empruntant à l'expérience aussi peu de matériaux que possible. » [Para um observador superficial, a verdade científica está fora do alcance de dúvida; a lógica da ciência é infalível, e se os cientistas por vezes se enganam, é por haverem deixado de observar as regras. As verdades matemáticas são derivadas de um pequeno número de proposições evidentes por uma cadeia impecável de raciocínios. Elas impõem-se não só para nós, mas para a própria natureza. (...) Em cada experimento, uma série de consequências poderá derivar de uma série de deduções matemáticas e é assim que cada um deles permitir-nos-á conhecer uma parcela do universo. Isso é a origem da certeza científica para muitas pessoas no mundo, para os estudantes que tomam contato com os primeiros conceitos da física. É assim que eles entendem o papel da experimentação e da matemática. Assim, também o entenderam, há cem anos, muitos

dos recursos possibilitados pelo avanço tecnológico da instrumentação científica,⁴² com o escopo de ampliar nosso campo observacional: ao “enxergarmos” aquilo que não enxergávamos antes, ampliamos o rol de fatos experimentais nos quais podemos alicerçar nossas teorias, bem como submetê-las a prova, uma vez que a experiência é constituinte fundamental nas teorias da física.⁴³ Essa diversificação de experiências possíveis em relação aos mesmos objetos, aos mesmos entes, quando expostos através de novos fenômenos observacionais, trazem, evidentemente, questões filosóficas a tiracolo. A partir daí, podem adotar diferentes nuances, por exemplo, tanto o *status* a ser atribuído à observação experimental quanto a própria noção epistemológica da origem empírica das ciências naturais.

A título de exemplo, consideremos as três figuras seguintes. A aparência da Galáxia de Andrômeda, dentro do espectro de luz que enxergamos a olho nu (entenda-se: com os recursos ópticos que temos à disposição e que não implicam na utilização de outros espectros de luz), não é senão uma dentre as possíveis formas de manifestação daquele dado bruto:

Figura 5 – Galáxia de Andrômeda, à luz visível
(disponível em: <http://zuserver2.star.ucl.ac.uk/~idh/apod/ap040718.html>)

cientistas que sonhavam construir o mundo tomando por empréstimo à experiência o mínimo possível.] (POINCARÉ, 1902, p. 23).

⁴² Sobre esse pormenor, é muito interessante a distinção elaborada por Terry Shinn acerca dos regimes disciplinar, utilitário e transitório de produção e difusão da ciência. Vide Shinn (2008, p. 14-32).

⁴³ « *L'expérience est la source unique de la vérité : elle seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau ; elle seule peut nous donner la certitude. Voilà deux points que nul ne peut contester.* » [A experiência é a única fonte da verdade: só ela pode nos ensinar algo novo, só ela pode nos dar a certeza. Aqui estão dois pontos que ninguém pode contestar.] (POINCARÉ, 1902, p. 157).

Outros espectros de luz revelam outras formas, outras disposições, outras possibilidades de interpretação de dados que, naturalmente, levam a outras conclusões, como, por exemplo, a de tornar visíveis objetos e fenômenos para os quais éramos “cegos” antes de empregar essas técnicas de observação:

Figura 6 – Galáxia de Andrômeda, fotografada em infravermelho a 24 microns
(disponível em: <http://zuserver2.star.ucl.ac.uk/~idh/apod/ap051020.html>)

Figura 7 – Galáxia de Andrômeda, fotografada em ultravioleta (com correção digital)
(disponível em: <http://zuserver2.star.ucl.ac.uk/~idh/apod/ap031222.html>)

A amplitude do “observável” cresce na medida em que as possibilidades de observação (que são, obviamente, fomentadas pelo próprio desenvolvimento da ciência) também conhecem novas fronteiras.

O desenvolvimento científico trouxe há poucos anos um novo exemplo da problemática que envolve a noção de observação empírica. As discussões atuais sobre o conceito de matéria escura mostram que, neste caso, devemos pressupor a existência de uma matéria que não pode ser observada por meio de nenhum espectro de luz conhecido; trata-se

de algo acerca do que não conhecemos a natureza, não existe observação direta, mas apenas supõe-se sua existência com base nos efeitos sobre a matéria dita “luminosa” (que engloba inclusive os espectros eletromagnéticos não visualizáveis a olho nu), no que tange aos fenômenos gravitacionais verificados nos movimentos de rotação das estrelas nas galáxias.

O comportamento em desconformidade com as “decorrências naturais” da teoria, ou seja, com os resultados esperados segundo as relações que o corpo teórico *standard* da física estabelece, faz com que os cientistas tomem por pressuposto a existência de uma massa invisível, “não luminosa”, mas, todavia, bastante significativa. O estudo da radiação cósmica de fundo, que se trata de um indicador possível para a mensuração da densidade dos bárions luminosos, expressa uma cifra espantosa:

De um lado, 95% do Universo é constituído por matéria escura não bariônica. De outro, 90% dos bárions são escuros. Qual a forma assumida pelos bárions escuros? Mas, principalmente, do que é feito o resto do Universo, ou seja, a maior parte da matéria? Trata-se de um gravíssimo golpe ao antropocentrismo. Quatro séculos atrás fomos obrigados a aceitar que não estamos no centro do Universo. Agora descobrimos que somos feitos de uma matéria que constitui minúscula parte do Universo (CARAVEO & RONCADELLI, 2002, p. 32).

Essas circunstâncias levam-nos a reconhecer que as possibilidades abertas pelo desenvolvimento científico e tecnológico corroboram a distância existente entre as teorias científicas e a “realidade em si”. Obviamente, não existe aqui a pretensão de discutir essas questões detalhadamente, até mesmo por sua sutileza e pelos vários aspectos envolvidos. Para nossa finalidade, basta aceitar um argumento que procuramos balizar superficialmente com os exemplos acerca da observação empírica: conhecer algo, ainda que cientificamente, não significa apreender total e imediatamente as coisas como são em si, mas, ao contrário, a partir de um sistema que envolve todos os componentes que citamos acima, propiciar uma teoria explicativa dos fenômenos com os quais tomamos contato, remetendo tanto a conceitos observacionais quanto teóricos, combinados na melhor medida possível.⁴⁴ A metáfora abaixo é muito ilustrativa desse contexto:

⁴⁴ Para tanto, temos em mente a distinção entre conceitos observacionais e teóricos, nos termos de Feyerabend: “Un concepto es un concepto observacional cuando se puede decidir de un modo rápido y sólo en base a la percepción acerca del valor de verdad de una proposición singular que, o bien contiene sólo a este concepto, o bien lo contiene en conjunción con otros conceptos observacionales, o cuando ciertamente pueda imaginarse que algún día será posible una decisión de este tipo (el lado opuesto de la luna era observable en tal sentido antes de la publicación de la primera fotografía). Un concepto es un concepto teórico cuando, para decidir sobre el valor de verdad de una proposición singular que lo contiene son necesarias, además de observaciones, teorías. Breve pero menos precisamente: una proposición observacional es aceptada o rechazada a través de la

Os conceitos da física são criações do espírito humano e, não, como possam parecer, coisas determinadas pelo mundo externo. Em nosso esforço para compreender a realidade, a nossa posição lembra a de um homem que procura adivinhar o mecanismo de um relógio fechado. Este homem vê o mostrador e os ponteiros, ouve o tic-tac, mas não tem meios de abrir a caixa que esconde o maquinismo. Se é um homem engenhoso, pode fazer ideia de um mecanismo responsável por tudo que ele observa exteriormente, mas não poderá nunca ter certeza de que o maquinismo que ele imagina seja o único que possa explicar os movimentos exteriores.

Não poderá nunca comparar a ideia que forma do mecanismo interno com a realidade desse mecanismo - nem sequer pode imaginar a possibilidade ou a significação de tal comparação. Mas realmente crê que, à medida que o seu conhecimento cresce, a sua representação da realidade se torna mais e mais simples e explicativa de mais e mais coisas. Ele pode ainda crer na existência de limites para o conhecimento, e admitir que o espírito humano aproxima-se destes limites. Esse extremo ideal será ‘a verdade objetiva’ (EINSTEIN & INFELD apud DA COSTA, 1997, p. 37-8).

O fato de nunca podermos efetivamente chegar a uma solução final em relação à consonância “interna” do nosso modelo e da realidade como ela se apresenta não minimiza, de modo algum, nem a necessidade da observação, nem a importância da teoria: a corroboração empírica é o meio pelo qual podemos testar teorias dessa natureza; ademais, as teorias são produtos conceituais e, por consequência, formas possíveis de descrição e de previsão do comportamento dos fenômenos fundadas na racionalidade. Nesse sentido, teorias são *modelos* de compreensão da realidade, dentro dos quais “enquadramos” os fenômenos em esquemas preestabelecidos, onde há uma trama complexa no que concerne às crenças subjacentes e esquemas conceituais empregados.⁴⁵

Conceber as teorias como modelos a partir dos quais podemos tentar interpretar os fenômenos verificados na experiência impõe, evidentemente, uma distância entre a realidade em si e aquilo que a atividade científica é apta a oferecer. O processo de elaboração de uma teoria, entretanto, conta com aspectos que antecedem sua expressão formal, como, por exemplo, o posicionamento natural de atribuir existência e realidade dos elementos

pura percepción (vista, oído etc.). Una proposición teórica será aceptada o rechazada a través de la percepción y reflexión.” [Um conceito é observacional quando se pode decidir de modo rápido e só com base na percepção acerca do valor de verdade de uma proposição singular que, ou contém apenas esse conceito, ou quando o combina com outros conceitos observacionais, ou quando certamente se pode imaginar que algum dia será possível algo desse tipo (o lado oposto da Lua era observável nesse sentido antes da publicação de sua primeira fotografia). Um conceito é teórico quando, para decidir sobre o valor de verdade de uma proposição que o contém são necessárias, além das observações, teorias. De forma breve e menos precisa: uma proposição observacional é aceita ou rechaçada através da pura percepção (da visão, da audição, etc.) Uma proposição teórica será aceita através da percepção e da reflexão.] (FEYERABEND, 2005, p. 278).

⁴⁵ “O cientista é construtor de estruturas conceituais; procura mapear o real por intermédio das configurações que inventa. Deixa o conteúdo concreto de lado, buscando o universal e o estrutural. Por essa rota, ele chega

conhecidos por intermédio do campo cognitivo, a possibilidade de mensurá-los, a capacidade de compreender suas mudanças a partir de relações de causalidade, etc. Logo, posicionamentos metafísicos, ainda que tomados hipoteticamente, bem como pressupostos da ciência que são, por assim dizer, mais fundamentais e profundamente arraigados (e, dentre eles, podemos citar a matemática elementar) podem vir a assumir importância capital para teorias relativas ao campo experimental. Nesse contexto, a argumentação de Laudan no que concerne à sua teoria reticulada,⁴⁶ quando especifica a relação complexa entre valores e o estabelecimento das teorias, pode aparentemente ser trasladada para a relação que uma teoria científica guarda com as crenças metafísicas e as bases da matemática, quando estas assumem um papel fundamental dentro do quadro geral do conhecimento científico (cf. nota 40 do capítulo 1). Nesse sentido, uma concepção como essa se assemelha muito à chamada rede de crenças, “*the web of belief*” de Quine: elas estão intimamente ligadas, imiscuem-se umas às outras, fortalecendo-se e metamorfoseando-se mutuamente. Obviamente nesse contexto os dogmas matemáticos ocupam um lugar fundamental.⁴⁷

Adotar uma leitura das ciências empíricas como modelos de descrição da realidade torna-as passíveis de serem “tocadas” pela matemática sem qualquer dificuldade mais séria, resolvendo-se o problema relativo à suposta intangibilidade de uma “realidade que se comporta matematicamente”. Essa colocação é, portanto, mal formulada: não é prudente postular que a natureza comporta-se matematicamente, pois ainda que essa asserção seja

normalmente à matemática, pois esta última, em certo sentido, identifica-se com a teoria geral e abstrata dos sistemas conceituais ou, o que significa a mesma coisa, das estruturas matemáticas” (DA COSTA, 1997, p. 45).

⁴⁶ “*Reticulational picture differs most fundamentally from the hierarchical one in the insistence that there is a complex process of mutual adjustment and mutual justification going on among all three levels of scientific commitment. (...) Axiology, methodology and factual claims are inevitably intertwined in relations of mutual dependency.*” [O quadro proposto pela teoria reticulada difere fundamentalmente do modelo hierárquico em sua insistência de um complexo processo de ajustamento e justificação mútuos que perpassa todos os três níveis de comprometimento científico. (...) Axiologia, metodologia e reivindicações factuais estão inevitavelmente entrelaçados em relações de dependência mútua.] (LAUDAN, 1991, p. 62-63).

⁴⁷ “*For Quine, scientific theories are devices in the web (of belief) whose purpose is to organize and predict observations. (...) Mathematics plays a central part in the sciences. Indeed, it is hard to imagine doing any serious scientific research without invoking mathematics. Thus for Quine, mathematics itself has a central place in the web of belief. (...) Mathematics has the same status as the more theoretical parts of science. It lies far from ‘periphery’ of the web, where observation has a more direct role. The ultimate criterion for accepting anything – mathematics, physics, psychology, ordinary objects, myth – is that it should play an essential role in the web of belief.*” [Para Quine, teorias científicas são esquemas na rede de crenças cujo propósito é organizar e prever observações. (...) A matemática desempenha uma parte central nas ciências. Certamente, é difícil imaginar a realização de qualquer esforço sério de pesquisa científica sem recorrer à matemática. Assim, para Quine, a matemática desempenha um papel central na rede de crenças. (...) A matemática possui o mesmo *status* que as partes mais teóricas da ciência. Ela permanece longe da ‘periferia’ da rede, onde a observação tem um

verdadeira, nunca poderemos peremptoriamente sustentá-la, porque pura e simplesmente não somos aptos a pô-la à prova. Mas o problema desaparece se, ao contrário de asseverar que a natureza comporta-se matematicamente, reconhecermos que nossas teorias do âmbito das ciências naturais encontram na matemática uma forma privilegiada de expressão e de quantificação.⁴⁸ Em suma, a origem comum da matemática e das ciências experimentais enquanto elaborações conceituais faz esvaecer a dificuldade preliminar, porque simplesmente utilizamos uma criação teórica para justificar a outra, com o lastro da corroboração empírica.

Todavia, a aplicação da matemática às teorias que procuram descrever a realidade pode sugerir a pergunta de o quanto de matemático tem o próprio fenômeno; afinal, a equação que descreve e prevê o tempo da queda de um corpo de massa x a uma altura y não é incidental: a relação matemática, adequadamente aplicada, é apta para esclarecer o fenômeno e quantificar uma lei da mecânica, apesar de tratar-se de uma instância que pretensamente nada deve à experiência. Por isso mesmo, a aplicação da matemática dentro de um quadro onde temos uma concepção das teorias científicas como modelos que não geram compromissos ontológicos mais sérios é uma estratégia que merece uma melhor elaboração.

Ao contrário do que pode parecer, a ciência empírica não remete *necessariamente* a relações matemáticas, apesar das muitíssimo claras vantagens desse recurso no contexto da ciência contemporânea; a tentativa de fazer coincidir matemática e as teorias de cunho experimental não é impositiva, mas um ato de escolha da melhor maneira de se fazer ciência. A tentativa de consolidar essa “melhor maneira” faz com que procuremos meios possíveis e cada vez melhores para descrever e prever fenômenos, e a matemática mostra-se um instrumento poderoso para esse fim.⁴⁹ Todavia, essa aplicabilidade da matemática à física não

papel mais direto. O critério derradeiro para aceitar algo – matemática, física, psicologia, objetos comuns, mitos – é o fato desse ‘algo’ desempenhar um papel essencial na rede de crenças.] (SHAPIRO, 2000, p. 215).

⁴⁸ O posicionamento aqui defendido é o de uma possibilidade de apropriação dos conceitos da matemática na esfera da física; todavia, há outras leituras possíveis. Michel Paty, por exemplo, concebe essa relação entre física e matemática como um laço muito mais intenso e fundamental: « *Un théorie physique est une élaboration sui generis de concepts quantitatifs en relation, et non pas une « traduction » en termes mathématiques de concepts qui pourraient être conçus de manière seulement « qualitative », entendue au sens des qualités sensibles. Le sens physique des concepts physiques est indissociable de leur forme mathématique.* » [Uma teoria física é uma elaboração *sui generis* de conceitos quantitativos em relação, e não uma ‘tradução’, em termos matemáticos, de conceitos que poderiam ser concebidos de maneira apenas ‘qualitativa’, entendida no sentido de qualidades sensíveis. O sentido físico dos conceitos da física é indissociável de sua forma matemática.] (PATY, 2005, p. 111).

⁴⁹ Oswaldo Chateaubriand tem um posicionamento interessante quanto a esse pormenor: a forma lógica é compreendida por ele como um modo de descrever a própria estrutura da realidade, e a matemática, por sua vez, como uma maneira privilegiada de realizar, de concretizar a natureza abstrata da lógica: “*The usual logical*

é casual. Existe um esforço contínuo no sentido de utilizar todos os meios disponíveis para fazer coincidirem esses dois universos tão distintos; por exemplo, a descoberta de uma função que descreve um fenômeno é justamente isso: *cria-se* um meio, com recursos da matemática, para a descrição do fenômeno, manipulando-se esses recursos para a melhor aproximação possível da constância observada nos fenômenos empíricos. Trata-se assim de um exercício constante do intelecto humano no sentido de *fazer coincidir* uma regra geral da matemática (que sempre tem a pretensão da universalidade) à regularidade testemunhada nos fenômenos observáveis, donde nasce a quantificação da teoria. A ciência, enquanto produto do conhecimento humano, é marcada por um processo de criação, de construção,⁵⁰ e a aplicação da matemática nas teorias físicas é um recurso que pode ser acomodado de acordo com a demanda da própria teoria, e que, paralelamente, vem a gerar seu próprio desenvolvimento. Seguindo Poincaré, a experiência é uma instância que propicia as oportunidades de crescimento, desenvolvimento e superação constantes dos limites da matemática, o que se evidencia, por exemplo, no processo de criação dos números reais:

Em resumo, o intelecto tem a capacidade de criar símbolos, e assim ele construiu o contínuo matemático, que não é mais que um sistema particular de símbolos. Seu poder não é limitado, a não ser pela necessidade de evitar uma contradição, mas o intelecto não o utiliza a não ser que a experiência lhe proporcione um motivo. Neste

proofs only prove that if certain conditions are satisfied, then some other condition is satisfied. (...) In mathematics, the structuring that the sentences place in reality is quite clear, partly because the notions involved are clear, so it is possible to interpret the hypotheses of a theorem in terms of structuring. (...) We use pictures, and diagrams, and our imagination, to understand more precisely what the situation envisaged in the hypotheses must be like, and we go on from there. Set theory is marvelous in this respect, because it give us a more concrete representation of the logical forms. Set theory is not quite logic, but it is something of a concrete reflection of ideal structures that are purely extensional. That is the reason that in mathematics one can extract a lot from logic, and not anywhere else.” [As provas lógicas usuais provam apenas que se certas condições são satisfeitas, então alguma outra condição é também satisfeita. (...) Na matemática, a estruturação que as sentenças ocupam na realidade é muito clara, em parte porque as noções envolvidas são claras, e, por isso, é possível interpretar as hipóteses de um teorema em termos de sua estrutura. (...) Usamos imagens, diagramas, bem como nossa imaginação, para compreender mais precisamente a que a situação visada deve assemelhar-se, e partirmos daí. A teoria dos conjuntos é maravilhosa nesse aspecto, porque ela fornece uma representação mais concreta das formas lógicas. A teoria dos conjuntos não é propriamente lógica, mas é como um reflexo concreto das estruturas ideais que são puramente extensionais. Por essa razão é que, da matemática, e de nenhum outro lugar, pode-se extrair tanto da lógica.] (CHATEAUBRIAND, 2005, p. 348). Todavia, esse argumento sofre de dificuldades análogas às da postura realista em matemática; afinal, asseverar que existe uma identidade entre a estrutura lógica e a própria realidade não é algo que possamos aceitar sem ao menos introduzir uma ressalva acerca dessa realidade, que é *fenomênica*, em termos kantianos.

⁵⁰ “O tema da criação científica, tal como o encontramos na experiência vivida de cientistas que também foram filósofos, como Poincaré e Einstein, parece ligado, de um lado, a processos de pensamento em que a racionalidade, mesmo se não for total, permanece essencial e passível de ser apreendida em diversas seqüências, entre uma problematização inicial e a obtenção de resultados; de outro lado, a problemas epistemológicos fundamentais sobre a constituição e a natureza do conhecimento científico. É, assim, natural que esse tema pertença de direito ao domínio da investigação filosófica e que não possamos nos contentar em remetê-lo à psicologia ou ao estabelecimento de consensos sociais cristalizados em ‘paradigmas’.” (PATY, 2001, p. 181).

caso, essa razão era o contínuo físico, derivado dos dados brutos dos sentidos. Mas esta noção leva a uma série de contradições que precisam ser superadas sucessivamente. Assim, somos forçados a imaginar um sistema de símbolos cada vez mais complicado. O ponto onde nos damos por satisfeitos é não apenas isento de contradição interna por conta de todas as etapas já vencidas, mas ele também se isenta de contradição com as diversas proposições intuitivas, obtidas a partir de noções empíricas mais ou menos elaboradas.⁵¹

Dessa maneira, a partir de constantes refinamentos conceituais e “ajustes” em relação às teorias físicas, o cientista faz coincidir a matemática à realidade observável por meio da sua inserção como base dos modelos descritivos da realidade fenomênica, com o intuito de compatibilizá-las. Nesse exercício intelectual de associar matemática e realidade empírica, utilizamos todos os recursos dos quais dispomos para efetuar essa aplicação da matemática à experiência, em diferentes graus de complexidade. Nesse esforço, há casos em que bastam operações muito simples, como a que envolve o cálculo da velocidade média desenvolvida por um corpo qualquer, a partir da razão entre a distância percorrida e o tempo gasto. Note-se que para tanto, simplesmente definimos “unidades” de tempo e de espaço com a finalidade de relacioná-las através de uma operação elementar, desprezando tantas outras variáveis possíveis contidas no fenômeno. Obviamente, outras associações exigem recursos mais elaborados, como as do cálculo integral e diferencial.⁵² A física quântica alça esse

⁵¹ «En résumé, l'esprit a la faculté de créer des symboles, et c'est ainsi qu'il a construit le continu mathématique, qui n'est qu'un système particulier de symboles. Sa puissance n'est limitée que par la nécessité d'éviter toute contradiction ; mais l'esprit n'en use que si l'expérience lui en fournit une raison. Dans le cas qui nous occupe, cette raison était la notion du continu physique, tirée des données brutes des sens. Mais cette notion conduit à une série de contradictions dont il faut s'affranchir successivement. C'est ainsi que nous sommes contraints à imaginer un système de symboles de plus en plus compliqué. Celui auquel nous nous arrêtons est non seulement exempt de contradiction interne, il en était déjà ainsi à toutes les étapes que nous avons franchies, mais il n'est pas non plus en contradiction avec diverses propositions dites intuitives et qui sont tirées de notions empiriques plus ou moins élaborées » (POINCARÉ, 1902, p. 55).

⁵² É exemplar o emprego da chamada regra da cadeia: se y é função de v , v é função de w e w função de x , a seguinte regra do cálculo diferencial pode ser empregada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$$

Essa regra tem aplicações diretas na física: “Suponha que se despeje água num recipiente cilíndrico de raio $r = 0,25$ metros, à razão constante de 10^{-3} litros por segundo. Deseja-se saber a velocidade de subida do nível da água. Seja V o volume de água no instante t . O enunciado deu $dV/dt = 10^{-3}$ e o que se pede é dh/dt , onde h é a altura do nível da água no instante t . Sabemos que V é função de h , a saber $V = \pi r^2 h = \pi(0,25)^2 h$, e h é função de t . Pela regra da cadeia (...)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dh}} = \frac{10^{-3}}{\pi(0,25)^2} \cong 0,00509 \text{ m/s}'' \text{ (BOULOS, 1941, p. 68-9).}$$

refinamento a um grau ainda mais elevado, ao basear algumas teorias em modelos que se superpõem à efetiva experiência dos fenômenos, quando a expressão matemática, por assim dizer, *determina* os próprios acontecimentos visados pela teoria.⁵³

Lógica e as regras do pensar. Um posicionamento como o que adotamos não pode se furtar de uma explanação, ainda que superficial, de como pode ser estabelecida uma teoria da ciência ao nível da consciência. O problema é imposto pelas premissas adotadas: ciência como produto do intelecto humano, intuição como portadora do sentido geral das teorias matemáticas e como referência última à definição dos objetos matemáticos mais elementares, objetividade do saber científico enquanto intersubjetividade. Todo o tempo, portanto, tomamos como pressuposto implícito o exercício da consciência como articuladora do processo de construção da matemática, o que suscita o questionamento acerca do modo como isso ocorre.

Um ponto pacífico do qual podemos partir é a aceitação de que as regras básicas por meio das quais opera o intelecto são as descritas pela lógica.⁵⁴ Mas simplesmente reconhecer

Para a resolução desse problema, podemos notar a profusão de recursos utilizados: além da atribuição de valores de unidades de tempo, litros e extensão, o cálculo do volume do recipiente remete a um número que, na realidade, não pode ser calculado, mas deve ser empregado de forma aproximativa, combinado ao quadrado de seu raio, além da aplicação de uma regra de obtenção peculiar, a regra da cadeia acima exposta.

⁵³ “O que os físicos chamam de ‘modelo padrão’ da física de partículas – para indicar que ele ainda é uma obra em andamento – pode explicar boa parte do mundo que conhecemos. (...) Embora o modelo padrão tenha conquistado cada vez mais sustentação experimental, uma lista crescente de fenômenos ainda se encontra fora de seu campo de ação, e novos insights teóricos expandiram nossa percepção, mostrando que é possível enxergar um mundo mais rico e abrangente. (...) O princípio que norteia o modelo padrão é que suas equações são simétricas. Exatamente como uma esfera tem a mesma forma, qualquer que seja o ângulo de observação, as equações permanecem invariáveis mesmo quando há pequenas variações de diferentes quantidades, em diferentes pontos, no espaço e no tempo. (...) Dessa forma, o modelo padrão inverte a máxima do primeiro arquiteto modernista americano Louis Sullivan (1856-1924). Em vez de ‘a forma determina a função’, ‘a função determina a forma’. Isto é, a formulação da teoria, expressa na simetria das equações que a definem, determina a função – as interações entre partículas – que a teoria descreve.” (QUIGG, 2008, p. 56-7 – grifo meu). Há que se reconhecer também que é um posicionamento heurístico de natureza similar que impõe as conclusões obtidas a partir do problema da matéria escura, conforme citado anteriormente. Se existe uma exigência em reconhecer algo acerca do que simplesmente não podemos obter uma experiência direta, essa imposição é fruto dos pressupostos teóricos assumidos. Em termos gerais, podemos dizer que é preferível postular a existência de uma matéria invisível que denegar as bases acerca das quais a física é construída.

⁵⁴ Essa não é, todavia, a posição de Brouwer. Como a linguagem e suas formas de apresentação dependem, em grande parte, da cultura da qual são produto (e, conseqüentemente, de suas vinculações histórico-sociais), ele não hesita em situar a lógica antes como objeto de estudo da etnografia que da psicologia: “We infer that theoretical logic as well as logistic are empirical sciences and that they apply mathematics; consequently they can yield no information whatsoever on the organization of human intellect; they would be better reasons to reckon them under ethnography than under psychology.” [Nós concluímos que a lógica teórica, assim como a logística, são ciências empíricas e que elas aplicam a matemática; conseqüentemente, elas não podem veicular qualquer informação acerca da organização do intelecto humano; haveria melhores razões para classificá-las na etnografia que na psicologia.] (BROUWER, 1907, p. 74).

esse fato não resolve o intrincado problema relativo à elaboração dessas leis primeiras, algo acerca do que o pensamento de Jean Cavaillès é uma referência valiosa, sobretudo no diálogo que mantém com as filosofias de Kant e de Husserl. Ele argumenta que a ciência, na qualidade de produto do entendimento humano e, conseqüentemente, de um ato de julgamento, remete necessariamente a uma consciência concreta, cujas regras são irredutíveis a um conteúdo racional anterior a ela. Essas leis primeiras são, assim, *expressas* pela lógica, que constitui uma tentativa de apreender os atos de entendimento e razão por intermédio da forma pela qual o discurso se processa. Na “transformação” que ocorre a partir da passagem do empírico ao puro, ou seja, da “purificação” que permite tornar de fato a lógica em uma espécie de estrutura esquemática da linguagem e do pensamento, estão envolvidos os atos mentais de abstração, comparação (analogia) e reflexão. Mas é preciso considerar necessariamente dois sentidos para a lógica: o primeiro, o da lógica geral, ligado ao julgamento e ao raciocínio; o segundo, o da lógica transcendental, que pressupõe a consciência, pela construção dos conceitos através da intuição. A necessidade de uma lógica transcendental decorre da simples constatação da impossibilidade de manter um ato originário do entendimento nos limites estreitos estabelecidos pelas rígidas regras da lógica geral:

Como é possível uma ciência que não dispõe senão das noções de unidade, pluralidade e representação? O que extrair da exigência de concordância do pensamento consigo mesmo senão a eterna repetição? Para que esse arranjo revista-se de um sentido pleno, dever-se-ia atribuir-lhe ao menos uma diferenciação no interior do pensamento, onde a oportunidade de desacordo possuía já um conteúdo, mas a lógica seria então lógica transcendental ou dialética.⁵⁵

Uma concepção dessa natureza deve tomar a lógica transcendental como a base necessária desse ato originário e unificador da intuição e que, por suas próprias características, presta-se a ir além da aridez da mera repetição, propiciando mais que um esquema estrutural de regras da linguagem e do pensamento, para que seja possível a introdução de noções que escapem à identidade e às tautologias. A lógica transcendental espelha, ao final de contas, a necessidade da consciência em ultrapassar os estreitos limites de suas próprias regras para buscar o ato de constituição do conhecimento propriamente dito. Nesse ponto, entretanto, impõe-se uma dificuldade: a partir desse modelo, Cavaillès propõe que “*uma teoria da*

⁵⁵ « Comment est possible une science qui ne dispose que des notions d'unité, pluralité et représentation ? Que tirer de l'exigence d'accord de la pensée avec elle-même sinon l'éternelle répétition ? Pour que l'accord revêtît un sens plein, il faudrait qu'il y eût au moins une différenciation à l'intérieur de la pensée, que l'occasion de désaccord possédât déjà un contenu, mais la logique serait alors logique transcendente ou dialectique » (CAVAILLÈS, 1942, p. 6).

ciência só pode ser uma teoria unificada da ciência”, e que, por tratar-se de um movimento de realização da ciência enquanto produto de um processo de criação real e inserido em um contexto histórico, necessariamente *“incompletude e exigência de desenvolvimento fazem parte da sua definição”* (CAVAILLÈS, 1942, p. 22). Logo, até este ponto, o que se vislumbra é uma espécie de legitimidade efêmera e um tanto quanto forçada da concepção matemática esboçada nos capítulos anteriores, pois um posicionamento dessa natureza tornaria uma noção de verdade contextual, como a que defendemos na seção anterior, fraca demais para sustentar-se; afinal, a procura por uma unidade parece trazer à baila obrigatoriamente a consistência interna dessa teoria totalizante do conhecimento científico. A chave para a solução dessa problemática consiste no mergulho ainda mais profundo em direção à subjetividade que acaba por presidir o saber científico:

Graças à descoberta, preparada por Brentano, da intencionalidade da consciência, dada a correlação que estabelece entre atos noéticos e conteúdos noemáticos, ela diz-se capaz de assegurar, por sua vez, a independência recíproca entre objetos e meios de apreendê-los, bem como a unidade superior onde uns e outros adquirem sua fonte e sua significação.⁵⁶

O conceito de intencionalidade é fundamental para a concepção fenomenológica, ao garantir à consciência a condição de realizar a distinção efetiva entre, de um lado, o ato, a atividade de conhecimento e, de outro, o objeto a ser conhecido, representados, nos termos de Husserl, pelos termos *noesis* e *noema*. Assim, apesar da possibilidade de pensar uma consciência unificadora representada e realizada, por assim dizer, pelos atos particulares que a compõem, há possibilidade de conceber esses atos como manifestações independentes. Logo, dentro da profusão propiciada pela linguagem e pela criatividade humanas, as diferentes concepções matemáticas (como a matemática clássica e suas heterodoxias) podem ser tomadas como atos independentes de criação, voltados à constituição do conhecimento, lastreados em diferentes formas de construção conceitual,⁵⁷ uma leitura que resolve o

⁵⁶ « Grâce à la découverte, préparée par Brentano, de l'intentionnalité de la conscience, grâce à la corrélation qu'elle établit entre actes noétiques et contenus noématiques, elle se dit en mesure d'assurer à la fois l'indépendance réciproque entre objets et procès d'atteinte, et l'unité supérieure où les uns et les autres prennent source et signification » (CAVAILLÈS, 1942, p. 44).

⁵⁷ « Nous pouvons suivre l'invite de Cavaillès et inventorier l'histoire de la genèse et du développement des concepts mathématiques pour y trouver la marque de leur nécessité immanente. Cavaillès indique que cette nécessité est dialectique. Mais le terme est encore vague, et la question reste en suspens du rapport entre une philosophie du concept et les conditions de possibilité de structures théoriques nouvelles par construction de nouveaux concepts et relations de concepts. » [Podemos seguir a sugestão de Cavaillès e efetuar um inventário da história da gênese e do desenvolvimento dos conceitos matemáticos para aí encontrar a marca de sua necessidade imanente. Cavaillès indica que essa necessidade é dialética. Mas o termo é ainda vago, e permanece

problema relativo à unidade da ciência. Claro que não se pretende aqui transformar a perquirição que fazemos em uma defesa intransigente da fenomenologia husserliana, o que exigiria uma perfeita coincidência de idéias, algo que está para além dos objetivos desta tese. Também não há, em absoluto, a pretensão de solucionar os intrincados problemas decorrentes de uma formulação filosófica satisfatória em uma seara com tamanho nível de abstração,⁵⁸ mas apenas uma tentativa de aproximação ao tipo de justificação que temos em mente ao apresentar esse trabalho.

Um exemplo que torna evidente a aproximação pretendida é o que diz respeito ao modo como Husserl concebe o problema da significação. Ele está diretamente relacionado aos usos e contextos pretendidos da matemática (cf. capítulo 5, seção 5.1): se podemos realmente sustentar a existência de diferentes modelos matemáticos, isso pode ser interpretado apenas como a concretização de diferentes sistemas conceituais, aliados a aplicações de técnicas peculiares, que levam a diferentes significações. Mesmo nos casos que encerram a mera aplicação da técnica, sem que haja propriamente o lastro de uma intuição direta como origem, a concepção fenomenológica husserliana serve também como base adequada, pois ela propicia um quadro conceitual onde nem todo significar leva necessariamente a um ato de conhecer propriamente dito:

Ao falar em conhecimento, fazemos referência a uma relação entre ato de pensar e intuição preenchedora. Ora, não é por serem por sua vez pensados e conhecidos que os atos do pensar se expressam nos enunciados e nas partes dos enunciados, como, por exemplo, nos nomes. (No caso específico da constituição do conhecimento), só o enunciado que é ou que deve ser preenchido intuitivamente exprime alguma coisa

aberta a questão da relação entre uma filosofia do conceito e as *condições de possibilidade* de novas estruturas teóricas, a partir da construção de novos conceitos e relações de conceitos.] (PATY, 2005, p. 119).

⁵⁸ Talvez o problema mais intrincado a ser indicado é o que diz respeito à objetividade decorrente de uma leitura como essa, onde até mesmo os objetos lógicos são produtos da consciência e, por isso, carentes de um fundamento perene: « *Le problème de la phénoménologie est un problème de constitution, c'est à dire qu'il s'agit de 'connaître, en scrutant toutes les couches et tous les degrés, le système complet de configurations de conscience constituant la présentation originnaire de toutes les objectivités et par là de rendre de conscience de l'espèce considérée de réalités'. L'autorité de la logique a son fondement dans son rapport à la vie – se développant en nécessité interne – de la subjectivité transcendental : aussi bien les règles qu'elle énonce, que l'objet général qu'elle considère, que les produits enfin qu'elle engendre y trouvent place et rapport entre eux et avec le reste. (...) Le problème posé par la logique se transforme en problème de la constitution transcendental des entités objectives.* » [O problema da fenomenologia é um problema de *constituição*, quer dizer, que se trata de 'conhecer e perscrutar em todas as camadas e todos os graus, o sistema completo das configurações de consciência que constituem a apresentação originária de todas as objetividades e, a partir daí, de tornar inteligível o equivalente da consciência da espécie considerada de realidades'. A autoridade da lógica tem seu fundamento na relação que guarda com a vida – desenvolvendo-se por necessidade interna – da subjetividade transcendental: tanto as regras que ela enuncia, quanto o objeto geral que ela considera, assim como, enfim, os produtos que ela engendra, encontram lugar e relação entre si e com o resto. (...) O problema imposto pela lógica transforma-se em problema da constituição transcendental das entidades subjetivas.] (CAVAILLÈS, 1942, p. 58-9).

e, nesse caso, não são as palavras pronunciadas, e sim a fala já vivificada pelo sentido que já se constitui em ‘expressão’ da intuição correspondente. A função de conferir significação é exercida, em primeira linha e em qualquer caso, pelo complexo unitário de intenções signitivas que se prendem às palavras. Essas últimas constituem o julgar meramente signitivo, sempre que lhes falta toda e qualquer intuição preenchedora. (...) Os atos signitivos envolvem a mesma intenção que os intuitivos, sem terem o recheio destes últimos. (HUSSERL, 1996, p. 184-5 – grifo meu).

Nesse sentido é que podemos asseverar, por exemplo, um paralelismo com a concepção contextual que defendemos, onde não há, de fato, intuição direta de determinados conceitos (no mesmo sentido da intuição de unidade), ou mesmo construção propriamente dita, mas o emprego da linguagem para a expressão e, conseqüentemente, para a significação dessas noções, como no caso dos transfinitos e dos incomensuráveis.

Todavia, uma inconsistência parece se aninhar nesse posicionamento, a partir da incompatibilidade entre uma premissa inegociável característica da fenomenologia husserliana e uma consequência direta da postura não revisionista que adotamos. Uma das facetas do não revisionismo é a aceitação tanto da matemática clássica, de cunho formalista, quanto de suas heterodoxias, como a matemática intuicionista brouweriana. Ocorre que não é possível considerar esta última nos mesmos termos em que pensamos, por exemplo, a inserção dos transfinitos e dos incomensuráveis, pelo simples fato de que sua efetiva formalização (ainda que no ideário intuicionista a formalização seja uma tarefa secundária) exige a inserção de uma lógica diferente da clássica, onde, como já deixamos claro no capítulo 1, existe outra regra para o emprego do princípio do terceiro-excluído.⁵⁹ O quadro teórico daí decorrente parece não coadunar, em absoluto, com a filosofia de Husserl, onde as leis da lógica (e não *das lógicas*) surgem como garantia e sustentáculo da unidade do conhecimento científico. Esse quadro evidencia-se em *“Logische Untersuchungen”* (*“Investigações lógicas”*), onde uma de suas motivações mais importantes é a de sustentar a possibilidade de conceber um fundamento apodítico em oposição às leituras naturalistas no que concerne à realidade e ao conhecimento.⁶⁰ Logo, asseverar a existência de várias concepções lógicas parece estar em desacordo com a motivação primeira de unidade da

⁵⁹ Esse não é o caso de todas as matemáticas construtivistas. A concepção de Hermann Weyl, por exemplo, não impõe qualquer restrição ao princípio do terceiro-excluído, mas sim ao que efetivamente pode constituir o universo de entidades matemáticas (BERNARD, 2009, p. 157).

⁶⁰ „Wir leugnen, daß die als selbständige theoretische Disziplin abzulösende reine Logik es je auf psychische Tatsachen abgesehen hat und auf Gesetze, die als psychologische zu charakterisieren wären.“ [Negamos que, como disciplina teórica autossuficiente que a lógica pura é, ela seja vista como fatos psíquicos ou que suas leis venham a ser caracterizadas como psicológicas.] (HUSSERL, 1975, p. 176).

ciência e do conhecimento, pela fragmentação daquilo que teria a função precípua de unificar todos os produtos da consciência.

Dessa forma, cabe um esclarecimento em relação ao papel da lógica a partir dessas referências díspares. Entendemos aqui a lógica clássica nem tanto por sua forma de expressão ou por seu caráter formal e transcendental, mas pela validade de seus princípios, pois apenas essa característica ocupa-nos diretamente. Assim, tomamos a liberdade de denominar como “lógica clássica” a aplicação, seja sob a forma do simbolismo matemático, seja sob o paradigma discursivo aristotélico, de um conjunto mínimo de regras como os princípios de identidade, de não contradição, da bivalência, do terceiro-excluído.⁶¹ Enquanto leis primitivas do pensar, nos termos de Husserl, elas são a sustentação objetiva última de uma teoria da consciência, porque antes delas, apenas a vivência do ato de pensar é passível de tornar-se evidente. Logo, à primeira vista, não pareceria possível efetivamente conceber uma lógica que denegue esses princípios, se considerarmos que “*não podemos pensar nada de ilógico, porque, do contrário, deveríamos pensar illogicamente.*”⁶² Todavia, a lógica intuicionista é apenas o primeiro dos esforços de formalização de lógicas que se afastam desse cânone, e apesar da aparente contradição que ensejam ao permitirem o afastamento em relação às regras do pensar, as novas lógicas são uma realidade, além de, pelas várias alternativas que propiciam, sugerirem a amplitude de temas e aplicações que possibilitam: existem lógicas paraconsistentes, paracompletas, não aléticas, polivalentes, difusas, multidedutivas, entre outras.⁶³ O que nos sensibiliza quanto à importância dessas novas formas é o fato de que, do

⁶¹ Do ponto de vista husserliano, ao menos nas *Investigações Lógicas*, os conceitos associados à lógica são muito mais amplos; ele apresenta, por exemplo, como termos lógicos „*Vorstellung, Begriff, Urteil, Schluß, Beweis, Theorie, Notwendigkeit, Wahrheit u. dgl. auch als Klassennamen für psychische Erlebnisse und dispositionelle Gebilde auftreten können und auftreten müssen.*” [Os termos lógicos, como ideia, conceito, decisão, conclusão, evidência, teoria, necessidade, verdade, e assim por diante, podem e devem ocorrer como nomes de classes para experiências psíquicas e estruturas disposicionais.] Junto desses nomes de classes, temos as leis da lógica propriamente ditas, „*die rein-logischen Gesetze, wie z. B. die primitiven ‘Denkgesetze’ oder die syllogistischen Formeln...*” [as leis da lógica pura, como, por exemplo, as regras primitivas do pensar ou as formas silogísticas...] (HUSSERL, 1975, p. 176).

⁶² „*Wir können nichts Unlogisches denken, weil wir sonst unlogisch denken müssten.*“ (WITTGENSTEIN, 1994, p. 146 – aforismo 3.03).

⁶³ No que concerne às lógicas paraconsistentes e paracompletas, vide nota 35 do capítulo 3. De modo geral e esquemático, podemos dizer que as lógicas não aléticas têm como características a aceitação tanto dos pressupostos da paraconsistência quanto da paracompletude; lógicas polivalentes abolem o princípio da bivalência e, por isso, são vistas como ramificações da lógica paracompleta. As lógicas difusas, desenvolvidas a partir de demandas da engenharia e da teoria da computação, caracterizam-se pela possibilidade de introdução de valores difusos, encontrando sua aplicação no trato de conceitos vagos. As lógicas não reflexivas têm a característica de infringirem a lei de identidade, aplicando-se, em grande parte, à física quântica. A lógica multidedutiva, por sua vez, tem por escopo servir como base lógica aos sistemas multidedutivos, que ampliam o

ponto de vista da axiomática formal das quais partem, elas encontram tanta legitimidade quanto a lógica *standard*. Esse *status quo* obriga naturalmente a consideração de que existem, realmente, sistemas concorrentes em lógica, o que levaria a uma série de possibilidades, intrinsecamente justificáveis, de escolher um sistema em detrimento do outro.

A perspectiva que acolhemos em relação a esse pormenor permite-nos uma saída para salvar *in extremis* a primazia, mas não a exclusividade, da lógica *standard*. A ideia geral que baliza a tentativa de superar essa aparente contradição reside no argumento de que, na realidade, as lógicas não clássicas devem ser consideradas como *desdobramentos* da lógica clássica. Mesmo quando operamos nos moldes de uma axiomática paracompleta, por exemplo, a restrição do princípio do terceiro-excluído é uma regra *ad hoc*, inserida em sua base axiomática. Assim, mesmo viabilizando um sistema consistente, o que vemos é uma criação que caracteriza uma transgressão *deliberada* em relação à sua base original. A exemplo da matemática, os sistemas lógicos que se afastam das regras primitivas do pensar são sistemas conceituais construídos a partir de uma axiomática própria, e representam, em última análise, exemplos de quão diversificado pode ser o conjunto de criações da mente humana. Dessa forma, ainda quando operando dentro de uma axiomática não clássica, o ato de renegar alguns de seus princípios não significa que *realmente* abandonamos a forma pela qual nosso pensamento estrutura-se, ainda que as lógicas heterodoxas permitam que trabalhem com axiomas baseados em uma estrutura hipotético-dedutiva que a ela se opõe. Resumidamente, há uma diferença qualitativa entre as regras da lógica ortodoxa e as de suas heterodoxias: estas não podem ser vistas como regras primitivas do pensar, mas como distensões introduzidas por meio de formalização. Logo, antes de tratar-se de um modelo axiomático, a lógica ortodoxa efetivamente descreve (ou procura descrever) como “funciona” o pensamento, e, sobretudo, o pensar teórico, pelo qual a consciência estabelece e representa o conteúdo do conhecimento.⁶⁴ Evidentemente, essa pretensão não pode ser reclamada pelas

conceito usual de sistema formal, permitindo a combinação de sistemas dedutivos e lógicas diversas. Para uma apresentação geral do tema, vide da Costa (1997, p. 81-105).

⁶⁴ « C'est donc la référence au primat de la conscience qui en fin de compte permet de supprimer les difficultés. L'indépendance des objets n'est pas affirmation pour leur être, par rapport à la conscience, d'une hétérogénéité qui entraînerait subordination et, par suite de leur diversité, polymorphisme des connaissances correspondantes. Mais la conscience est la totalité de l'être : ce qu'elle affirme n'est que parce qu'elle affirme, s'il est vraiment ce qu'elle affirme en pleine sûreté de soi. La phénoménologie transcendentale étant analyse de toutes les prétensions et de tous les actes de connaissance, comme en général de tous les contenus visés par la conscience et de toutes les opérations par lesquelles cette visée s'accomplit, se doit trouver dans cette corrélation du noétique et du noématique le moyen de résoudre tous les problèmes qui ne sont pas des faux problèmes. » [É, portanto, a referência ao primado da consciência que enfim permite suprimir as dificuldades. A

lógicas não clássicas. Estas, por sua vez, constituem sistemas formais com os quais podemos operar, mas não há meios de reconhecê-los como regras “naturais” do pensar.⁶⁵ Por um procedimento análogo ao que temos no universo matemático do qual não há intuição direta correspondente, lógicas heterodoxas são sistemas significativos, indubitavelmente, ao ganharem corpo como transgressões deliberadas da lógica clássica. Inseridas nesse contexto, obviamente passam elas a ser também sistemas conceituais que podem vir a ter alguma utilidade na descrição de fenômenos.⁶⁶

Em suma, pretendemos com isso deixar claro que existe uma possibilidade de sustentar e reconhecer um papel de direito no contexto do conhecimento científico a ser

independência dos objetos não é afirmação para seu ser, em relação à consciência, de uma heterogeneidade que acarreta a subordinação e, por consequência de sua diversidade, polimorfismo de conhecimentos correspondentes. Ao contrário, a consciência é a totalidade do ser: o que ela afirma não o é senão porque ela afirma, se é verdadeiramente o que ela afirma em plena certeza de si própria. A fenomenologia transcendental, enquanto análise de todas as pretensões e de todos os atos de conhecimento, como, em geral, de todos os conteúdos visados pela consciência e de todas as operações pelas quais essa perspectiva se completa, deve encontrar nessa correlação do noético e do noemático o meio de resolver todos os problemas que não são falsos problemas.] (CAVAILLÈS, 1942, p. 55-6).

⁶⁵ Por esse motivo o estruturalismo não pode ser visto como a solução total em relação ao problema dos fundamentos da matemática. De fato, o que faz o estruturalista é procurar relações comuns a vários sistemas, normalmente centrado em características específicas e peculiares dentro da leitura a que se propõe. Se o estruturalismo está certo no que propõe, a aritmética deve ser compreendida apenas como uma dentre várias instanciações possíveis de modelos estruturais. Entretanto, existem estruturas que simplesmente não são compatíveis com a aritmética, enquanto outras o são. Assim, são pinçadas aquelas que podem guardar uma relação com a aritmética, tomando-as como modelos a serem estudados. O que se faz então é uma aproximação tendenciosa: aquela estrutura que é passível de uma tradução na aritmética é tomada como “a base” da aritmética. Mas poder-se-ia argumentar também no sentido contrário, ou seja, considerando não a matemática como um caso particular de modelos estruturais genéricos, mas estes como abstrações baseadas na matemática elementar. Essa é, em termos gerais, a armadilha preparada pela “tradutibilidade” que caracteriza o estruturalismo: o ato de enxergar estruturas pode, muitas vezes, não soar senão como uma entre várias formas possíveis de classificação.

⁶⁶ É bem conhecido o interesse causado pela impropriedade da lógica clássica quando da apresentação de alguns dos princípios da física quântica, que levaram a pensar novas formas de aplicação das leis da lógica, e, mais tardiamente, até mesmo o advento de novos sistemas axiomáticos, como podemos ver em artigo datado de 1936 (ou seja, uma década após a interpretação de Copenhagen, proposta por Bohr e Heisenberg): “*One of the aspects of quantum theory which has attracted the most general attention, is the novelty of the logical notions which it presupposes. It asserts that even a complete mathematical description of a physical system $\mathfrak{S}$ does not in general enable one to predict with certainty the result of an experiment on $\mathfrak{S}$, and that in particular one can never predict with certainty both the position and the momentum of $\mathfrak{S}$ (Heisenberg’s Uncertainty Principle). It further asserts that most pairs of observations are incompatible, and cannot be made on $\mathfrak{S}$ simultaneously (Principle of Non-Commutativity of Observations).*” [Um dos aspectos da teoria quântica que tem chamado mais atenção é a novidade das noções lógicas que ela pressupõe. Ela assevera que mesmo a completa descrição matemática de um sistema $\mathfrak{S}$, em geral, não habilita alguém a predizer com certeza o resultado de um experimento em $\mathfrak{S}$ e, em particular, ninguém nunca pode predizer com certeza tanto a posição quanto o *momentum* de $\mathfrak{S}$ (princípio da incerteza de Heisenberg). Ela impõe ainda que a maioria dos pares de observações são incompatíveis, e não podem ser asseverados em $\mathfrak{S}$ simultaneamente (princípio da não comutatividade das observações).] (BIRKHOFF & VON NEUMANN, 1936, p. 823). Hodiernamente denominamos lógicas dessa natureza como lógicas não reflexivas.

atribuído às lógicas heterodoxas, sem que isso venha a ferir o núcleo de uma fundamentação que tenha como aporte último a noção de consciência.⁶⁷ Sob esse prisma, até mesmo a totalidade do conhecimento científico pode vir a ser interpretado como um modelo amplo de saber multidedutivo. O problema da contradição inerente às teorias científicas divergentes que se destinam a explicar aspectos de um mesmo problema utilizando bases radicalmente díspares (e que, por vezes, são concomitantemente muitíssimo bem sucedidas em seus propósitos) deixa claro que a extensa gama de teorias e modelos racionais não mais permite pensar o conhecimento científico como um corpo único e não contraditório. O recurso à consciência como fundamento último da teoria da ciência suporta a interpretação de que cada concepção teórica em particular deve ser entendida como uma decorrência de um ato particular de significação originado na consciência. Articulada dessa maneira, a teoria da ciência possibilita a aceitação de verdades díspares, por vezes fundamentadas inclusive por sistemas lógicos que denegam o cálculo proposicional clássico, algo que coloca obviamente o estatuto dessas novas lógicas também em questão. Assim, opta-se pela aceitabilidade de teorias concorrentes articuladas harmonicamente ao nível da consciência (sem que, entretanto, abandone-se um critério claro de verdade), ao invés de estabelecer uma leitura maniqueísta decorrente de um critério mais forte de verdade, como o construtivismo estrito, por exemplo, que excluiria peremptoriamente uma variedade imensa de criações teóricas em nome de uma única alternativa aceitável.

⁶⁷ « D'une part, en effet, la physique mathématique ne représente qu'une promotion technique par rapport à la perception sensible. C'est une illusion datant de Galilée que le système des symboles et des concepts de la physique mathématique constitue un cosmos plus réel que le monde appréhendé directement dans l'intuition. (...) Puisque les choses ne sont pas en soi, mais fondées comme réalités dans l'intentionnalité de la conscience, il faut donner un privilège aux actes primitifs et d'ailleurs permanents par lesquels elle se manifeste : le monde stable, qui est, exige la perception comme elle l'exige, puisqu'en fin de compte, même dans une expérience de laboratoire, tout commence par elle et tout aboutit par elle. Les théories physiques ne sont qu'un entre-deux abstrait leur succession un jeu d'ombres sur sa masse immobile et toujours prête à intervenir. » [Em parte, com efeito, a física matemática não representa nada além de uma promoção técnica em relação à percepção sensível. É uma ilusão que data de Galileu que o sistema de símbolos e de conceitos da física matemática constitui um cosmos mais real que o mundo apreendido diretamente pela intuição. (...) Porque as coisas não são em si, mas fundadas como realidades na intencionalidade da consciência, deve-se um privilégio aos atos primitivos e, aliás, permanentes, pelos quais ela se manifesta: o mundo estável, que é, exige a percepção como ela o exige, porque, ao final de contas, mesmo em uma experiência de laboratório, tudo começa com ela e tudo acaba nela. As teorias físicas não são mais que um 'entre-dois' abstrato; sua sucessão, um jogo de sombras sobre sua massa imóvel e sempre pronta a intervir.] (CAVAILLÈS, 1942, p. 66-7).

Conclusão

A filosofia não é uma teoria, mas uma atividade. Uma obra filosófica consiste basicamente em elucidações.¹

Em palestra proferida na cidade de Nancy em 21 de outubro de 2009, Stewart Shapiro asseverou que uma de suas inspirações para enveredar-se no estudo que desenvolveu ao longo de sua carreira fora uma sugestão dada por um velho professor, que incitava seus alunos a pensarem com profundidade acerca de coisas muito simples, um ótimo conselho tanto para matemáticos quanto para filósofos. Este trabalho não deixa de ser uma tentativa nesse sentido, do qual as inspirações filosóficas mais fortes são evidentes: Poincaré, Wittgenstein, Cavaillès, Hilbert, entre outros, não obstante os diferentes pontos de vista abertos por cada uma das filosofias professadas por esses autores. Todavia, não é possível dizer que esta tese soa como a defesa intransigente de alguma dessas concepções em particular. A obra de Poincaré, que certamente é a maior referência que tenho em termos da filosofia da matemática, sequer toca parte substancial dos temas que abordamos aqui, seja pelo anacronismo, seja por simplesmente não figurarem em seu programa de pesquisa. Há, portanto, uma dupla tensão: ao mesmo tempo em que pretendemos trazer novamente à baila ideias que, em grande parte, o positivismo lógico acabou por pretensamente enterrar, esse esforço de reavivar questões que não fazem parte das grandes linhas de pesquisa da filosofia da matemática contemporânea envolve a sustentação de ideias que não são, em absoluto, originais. Se há alguma pretensão de originalidade neste trabalho, ela reside no modo como procuro encadear essas tendências, com o intuito de defender uma posição ao mesmo tempo antirrealista e não revisionista na matemática. Assim, conceber a matemática por esse viés significa retomar aspectos deliberadamente banidos do tratamento usual que lhes é dado.

Neste trabalho há tanto uma preocupação voltada a aspectos históricos quanto a questões propriamente filosóficas. Mais precisamente, a história da matemática acaba por constituir-se na base a partir da qual se desenvolve a reflexão filosófica. Logo, os resultados a que chegamos evidentemente não podem ser dissociados da axiologia da qual partimos, de modo que não há qualquer intenção de sustentar uma posição absoluta e intransigente, mas apenas uma alternativa possível de interpretação e justificação extrínseca em relação ao saber

¹ „Die Philosophie ist keine Lehre, sondern ein Tätigkeit. Ein philosophisches Werk besteht wesentlich aus Erläuterungen“ (WITTGENSTEIN, 1994, p. 176-7).

matemático. Desse modo, algumas breves considerações são necessárias, devido a posições controversas que foram aventadas no corpo do texto.

Primeiramente, procuramos deixar claro que os temas em discussão encontram sua pertinência na história recente da matemática, sobretudo a partir da chamada crise dos seus fundamentos. Mas se até a existência de tal crise é questionável, não o seriam em menor medida seus resultados. Ainda assim, mesmo se acatássemos a argumentação em desfavor da existência de uma crise propriamente dita, a polêmica acerca dos paradoxos da teoria cantoriana, bem como o processo que leva à elaboração do conceito de predicatividade, são, sem dúvida, momentos a partir dos quais podemos discutir as premissas, os caminhos e os destinos da ciência e, por isso mesmo, constituem uma oportunidade privilegiada para os temas que nos afetam. Questões metodológicas, teóricas e filosóficas imiscuem-se nos argumentos propostos para a solução das dificuldades, algo que, por si só, já denota a pertinência dos temas centrais do trabalho. Como assevera Barot:

Os problemas conceituais da crise do início do século XX, longe de estarem contidos, ao contrário, encontram ainda novos lugares e modos de expressão, restabelecendo ainda a reflexão sobre a natureza e modos de instituição ou de “acesso” às entidades lógico-matemáticas, e, portanto, perpetuando o problema do *platonismo* matemático.²

Em segundo lugar, evidencia-se o fato de que o questionamento em relação ao debate ontológico não pode ser ignorado enquanto fator importante na formulação das várias orientações da matemática. Por mais que se procure negar a pertinência ou a importância dessa questão, impõe-se a constatação de que, ao menos tacitamente, posturas neste ou naquele sentido são assumidas para a elaboração das teorias. Em outros termos, ainda que implicitamente, existem pressupostos dessa natureza importantes para o estabelecimento dos critérios de justificação de aceitabilidade de cada teoria, pressupostos estes impostos no *corpus* da teoria a partir de uma axiomática própria, que os introduz e os fazem prosperar veladamente. Também não encontra eco significativo a mudança de estratégia proposta por Kreisel, no sentido de procurar resolver o debate ontológico de modo mais objetivo (cf. capítulo 5, seção 5.1). Essa nova versão da perspectiva realista muda o foco para as asserções matemáticas, mas sua ideia básica permanece a mesma, ou seja, a da suposição da

² « *Les problèmes conceptuels de la crise du début du vingtième siècle, loin d'être réglés, au contraire trouvent encore de nouveaux lieux et modes d'expression tout en ramenant encore la réflexion sur la nature et les modes d'institution ou d'« accès » aux entités logico-mathématiques, et donc perpétuent le problème du platonisme mathématique* » (BAROT, 2005, p. 35).

objetividade dos valores de verdade desses enunciados. Segundo os realistas, esses enunciados teriam, em tese, uma validade objetiva em sentido próprio, a partir não apenas de uma referência mental, mas “externa”, independente do intelecto humano. Em suma, qualquer que seja a resposta a ser dada, ela implica obrigatoriamente em *algum tipo* de posicionamento no que concerne à questão ontológica, ainda que apenas no sentido de negá-la.

Em terceiro lugar, o fato de argumentar em prol da insuficiência da forma demonstrativa para conceber a ciência matemática em uma perspectiva ampla leva a algumas consequências, como o recurso à intuição, a necessidade de considerar o seu processo criativo como um aspecto importante, a relevância da metalinguagem e dos recursos a analogias e hipóteses. Alguns autores simplesmente consideram que essa perquirição não é, em absoluto, matemática. Neste caso, toma-se inadvertidamente o trato usual da disciplina em detrimento de uma perspectiva contextual. Mas a isso podemos responder que os aspectos informais, intuitivos, semânticos, têm seu devido lugar, e que, de certa forma, são complementares à perfeição formal do raciocínio que caracteriza a exatidão e a aridez características do pensamento lógico-matemático.

Em quarto lugar, o conceito de verdade centrado na noção de coerência contextual esboçado no capítulo quinto pode parecer fraco demais para consolidar-se propriamente como um conceito de verdade propriamente dito. Acima de tudo, para o realista, em vista dos pressupostos dos quais parte, falar em uma verdade enquanto coerência (e, portanto, já deixando, no mínimo, em segundo plano a correspondência fenomênica em nome do reconhecimento da primazia de um universo puramente linguístico) é um posicionamento agravado pela perspectiva contextual. Certamente essa concepção subordina a verdade matemática a condições circunstanciais de sua própria realização, posicionamento temerário aos olhos do realista, ao relativizar além do permissível a verdade, assim como ao aceitar, em termos gerais, valores de verdade distintos de acordo com o uso linguístico dos conceitos matemáticos envolvidos nesta ou naquela aplicação.

Ao abordarmos a questão da aplicação matemática como determinante de sua própria significação e, conseqüentemente, de seus critérios de verdade, evidencia-se a importância da consideração dos preceitos da matemática como recursos através dos quais compreendemos e tateamos em direção de uma explicação dos fenômenos físicos. Nesse pormenor, a concordância com os argumentos de Poincaré é total: não obstante a matemática tratar-se de uma construção inegavelmente conceitual, a experiência sensível é a pedra de toque que

propicia os problemas e, com eles, as oportunidades de desenvolvimento da capacidade criadora do intelecto humano; mas que esse argumento não seja confundido com uma espécie de empirismo matemático.

A consideração acerca do papel e do *status* das lógicas heterodoxas como instrumentos conceituais que podem ser utilizados em uma ou outra aplicação teórica deixou claro que procuramos manter sua validade enquanto modelos axiomáticos que permitem o desenvolvimento de vários recursos teóricos. Todavia, à lógica clássica reserva-se o papel de conjunto de regras do pensar, a partir das quais se desdobram posicionamentos como a paraconsistência e a para completude. Nesse sentido, as novas lógicas enquadram-se mais como recursos teóricos úteis que propriamente com descrições de uma realidade ou de um mecanismo mental. Nega-se veementemente a existência de lógicas concorrentes à clássica com o *status* a ela atribuído; elas estão, portanto, em pé de igualdade enquanto sistemas formais, mas não naquilo que esses sistemas significam e acarretam. A estratégia adotada resolve o problema do reconhecimento de um recurso último para as criações mentais, bem como de um conjunto de regras para a consciência que explica e unifica seus produtos, ao menos sob esse aspecto. Certamente essa é a parte menos lapidada da argumentação, e o é propositadamente, pois não está nos objetivos deste trabalho uma completa descrição dos processos lógicos e fenomenológicos que balizam uma teoria sólida da consciência, mas apenas uma indicação de seu direcionamento.

Em suma, as soluções apresentadas consistem em um esforço interpretativo que reivindica a viabilidade de uma filosofia da matemática tão defensável quanto suas concorrentes; e, em igual medida, arca com o peso de apresentar-se como uma solução tão controversa e problemática quanto elas.

Referências Bibliográficas

Abelardo, P. “Lógica para principiantes”. In: *Santo Anselmo de Cantuária – Pedro Abelardo*. São Paulo: Abril Cultural, 1973. p. 209-49. (Os Pensadores, v. 7).

Agazzi, E. “La logique et le probleme de la rigueur”. In: Vuillemin, J. (Org.). *Mérites et limites des methodes logiques en philosophie*. Paris: Fondation Singer-Polignac/Librairie Philosophique J. Vrin, 1986. p. 17-47.

Aristóteles. *The works of Aristotle*. 2 ed. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1994. (Great Books of Western World, v. 7).

Armendt, B., *Stake-invariant belief*, disponível em: <http://www.public.asu.edu/~armendtb/docs/Stake-Invariant%20Belief%20to%20post.pdf>, 2007, acessado em 08/04/2010.

Ayer, A. “Verificación y experiencia”. In: Ayer, A. *El positivismo lógico*. México: Fondo de Cultura Económica, 1965. p. 233-49.

Barker, S. *Filosofia da matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

Barot, E. “En quoi la crise des fondements des mathématiques est-elle terminée ?” In: *Philosophia Scientiae*. Paris : Kimé, 2005. p. 23-39. (v. 9).

Bernard, J. “Notes on the first chapter of the continuum : intension, extension and arithmetism”. In: *Philosophia Scientiae*. Paris : Kimé, 2009. p. 155-76. (v. 13).

Bernays, P. “On Platonism in mathematics”. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics – selected readings*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1934]. p. 258-271.

Biographical dictionary of mathematicians. New York: Charles Scribner’s Sons, 1991.

Birkhoff, G. & von Neumann, J. “The logic of quantum mechanics”. In: *Annals of mathematics*. Washington: Princeton University Press, 1936. p. 823-843. (v. 37, nº 4).

Bolyai, J. “The science of absolute space”. In: Bonola, R. *Non-euclidean geometry*. New York: Dover Publications Inc., 1955 [1896]. p. 01-48.

Bonevac, D. *Intuitionistic logic*, disponível em: <http://www.utexas.edu/cola/depts/philosophy/faculty/bonevac/>, acessado em 29/03/07.

- Boniface, J.** “Leopold Kronecker's conception of the foundations of mathematics”. In: *Philosophia Scientiae*. Paris : Kimé, 2005. p. 143-56. (cahier spécial).
- Bonola, R.** *Non-euclidean geometry*. New York: Dover Publications Inc., 1955.
- Boole, G.** *The mathematical analysis of logic*. Oxford: Oxford Basil Blackwell, 1965[1847].
- Boolos, G.** “The iterative concept of set”. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics – selected readings*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1971]. p. 486-502.
- Borel, É.** *Leçons sur la théorie des fonctions*. 3 ed. Paris: Gauthier, 1928[1904].
- Borges, J.** “Funes, o memorioso”. In: *Prosa completa*. Barcelona: Bruguera, 1979. p. 477-84.
- Bosanquet, R. et al.** *Wittgenstein's lectures on the foundations of mathematics – Cambridge, 1939*. New York: Cornell University Press, 1976.
- Boulos, P.** *Introdução ao cálculo*. São Paulo: Edgard Blucher, 1941.
- Brouwer, L.** “Consciousness, philosophy and mathematics”. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics – selected readings*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1948]. p. 90-6.
- _____ “Formalism and intuitionism”. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics – selected readings*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1912]. p. 77-89.
- _____ “Intuitionistic reflections on formalism”. In: Van Heijenoort, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967[1927.2]. p. 490-2.
- _____ “On the domains of definition of functions”. In: Van Heijenoort, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967[1927.1]. p. 446-63.
- _____ “On the foundations of mathematics”. In: *L. E. J. Brouwer collected works*. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1975[1907]. p. 13-97.
- _____ “On the significance of the principle of excluded middle in mathematics, especially in function theory”. In: Van Heijenoort, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in*

mathematical logic, 1879-1931. Cambridge: Harvard University Press, 1967[1923]. p. 334-45.

Bueno, O. “A lógica paraconsistente: um brevíssimo esboço histórico”. In: Da Costa, N. *O conhecimento científico*. São Paulo: Discurso Editorial, 1997.

_____. “Quine’s double standard: undermining the indispensability argument via the indeterminacy of reference”. In: *Revista Principia*. Florianópolis: Núcleo de Epistemologia e Lógica da Universidade Federal de Santa Catarina, 2003. p. 17–39. (v. 7).

Cantor, G. *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. New York: Dover Publications, 1915.

_____. & **Dedekind, R.** “Correspondance”. In: Cavaillès, J., *Philosophie mathématique*. Paris : Hermann, 1962[1937]. p. 197-250.

Caraveo, P. & Roncadelli, M. “O enigma da matéria escura”. In: *Scientific American Brasil*. São Paulo: Duetto, 2002. p. 26-33. (ano 1, nº 3).

Carnap, R. “The logicist foundations of mathematics”. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics – selected readings*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1931]. p. 41-51.

_____. “La superación de la metafísica mediante el análisis lógico del lenguaje”. In: Ayer, A. *El positivismo lógico*. México: Fondo de Cultura Económica, 1965 [1932]. p. 66-87.

Cavaillès, J. *Philosophie mathématique*. Paris: Hermann, 1962.

_____. *Sur la logique et la theorie de la science*. 4 ed. Paris: Librairie J. Vrin, 1987[1942].

Chateaubriand, O. *Logical forms – part I – truth and description*. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2001.

_____. *Logical forms – part II – logic, language and knowledge*. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2005.

Chihara, C. “Nominalism”. In: Shapiro, S. (Ed.). *The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*. New York: Oxford University Press, 2005. p. 483-513.

Clagett, M. “Archimedes”. In: *Biographical dictionary of mathematicians*. New York: Charles Scribner’s Sons, 1991. p. 85-103. (v. 1)

Couturat, L. *Les principes des mathématiques*. Paris : Albert Blanchard, 1980.

Curry, H. “Remarks on the definition and nature of mathematics”. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics – selected readings*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1954], p. 202-6.

Da Costa, N. *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. São Paulo: Hucitec/Edusp, 1980.

_____. *Introdução aos fundamentos da matemática*. São Paulo: Hucitec, 1977.

_____. *O conhecimento científico*. São Paulo: Discurso Editorial, 1997.

Del Vecchio Jr., J. *A filosofia de Henri Poincaré: a natureza do conhecimento científico e os paradoxos da teoria dos conjuntos*. Dissertação (Mestrado em Filosofia). Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas - Universidade de São Paulo, 2005.

Descartes, R. “Meditações metafísicas”. In: *Descartes*. São Paulo: Abril Cultural, 1973. p. 80-150. (Os Pensadores, v. 15).

_____. *Regras para a direção do espírito*. Lisboa: Edições 70, 1989.

Detlefsen, M. “Formalism”. In: Shapiro, S. (Ed.). *The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*. New York: Oxford University Press, 2005. p. 236-317.

Dipert, R. “The history and kinds of logic”. In: *Encyclopaedia britannica*. 15 ed. Chicago : 1993. p. 268-81. (v. 23).

Dubucs, J. “Beth et la doctrine kantienne de l’intuition”, in: *Un logicien consciencieux – la philosophie de Evert Willem Beth*. Paris: Kimé, 1998. p. 93-134.

Duhem, P. “Physical theory and experiment”. In: Harding, S. *Can theories be refuted?* Boston: Reidel Publishing Company, 1954[1906]. p. 01-40. (v. 81).

Dummet, M. “The philosophical basis of intuitionistic logic”. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics – selected readings*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1973]. p. 97-129.

Einstein, A. “Relativity: the special and the general theory”. In: *20th century natural science*. 2 ed. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1994. p. 187-243. (Great Books of Western World, v. 56).

Euclides. “Elements”. In: *Euclid, Archimedes, Nicomachus*. 2 ed. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1994. p. 01-396. (Great Books of Western World, v. 10).

Feferman, S. “Intuitionism”. In: *Encyclopaedia Britannica*. 15 ed. Chicago: 1993. p. 554-6. (v. 23).

Feyerabend, P. “El problema de la existencia de las entidades teóricas”. In: *Scientiae Studia*. São Paulo: 2005. p. 277-312. (v. 3, nº 2).

Folina, J. *Poincaré and the philosophy of mathematics*. London: Macmillan Press, 1992.

Frege, G. “Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought”. In: Van Heijenoort, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967[1879]. p. 01-82.

_____. “The concept of number”. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics – selected readings*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1884]. p. 130-59.

_____. “Letter to Russell”. In: Van Heijenoort, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967[1902]. p. 126-8.

Guerrerio, G. “Gödel, um tímido iconoclasta”. In: *Scientific American Brasil*. São Paulo: Duetto, 2006. p. 39-66. (nº 12).

Gödel, K. “On formally undecidable propositions of *Principia mathematica* and related systems”. In: Van Heijenoort, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967[1931]. p. 596-616.

_____. “The completeness of the axioms of the functional calculus of logic”. In: Van Heijenoort, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967[1930]. p. 582-91.

_____. “What is Cantor’s continuum problem?” In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics – selected readings*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1947], p. 470-85.

Grattan-Guinness, I. *The search for mathematical roots, 1870-1940*. New Jersey: Princeton University Press, 2000.

Gray, J. “Mathematics in the 19th and 20th centuries”. In: *Encyclopaedia Britannica*. 15 ed. Chicago: 1993. p. 581-93. (v. 23).

Greer, M. *The new encyclopedia of the occult*, St. Paul: Llewellyn Publications, 2003.

Hale, B. & Wright, C. “Logicism in the twenty-first century”. In: Shapiro, S. (Ed.). *The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*. New York: Oxford University Press, 2005. p. 166-202.

Hardy, G. “A mathematician’s apology”. In: *20th century natural science*. 2 ed. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1994[1940]. p. 363-88. (Great Books of Western World, v. 56).

Heinzmann, G. “Common sense, theory and science”. In: Lukasiewicz, D. & Pouivet, R. (Ed.). *Scientific knowledge and common knowledge*. Bydgoszcz: Kazimierz Wielki University Press, 2009. p. 87-95.

_____. *Entre intuition et analyse – Poincaré et le concept de prédictivité*. Paris : Blanchard, 1985.

_____. “Henri Poincaré et sa pensée en philosophie des sciences”. In : Charpentier, E. & Ghys, A. (Ed.). *L'héritage scientifique de Poincaré*. Paris : Belin, 2006, p. 399-418.

_____. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris : Blanchard, 1986.

_____. “Quelques aspects de l'histoire du concept d'intuition : d'Aristote à Kant”, 2002, disponível em: <http://poincare.univ-nancy2.fr/digitalassets/74753_histoire_intuition.pdf>, acessado em 27/09/09.

Heyting, A. “Disputation”. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics – selected readings*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1956]. p. 66-76.

_____. “The intuitionist foundations of mathematics”. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics – selected readings*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1931], p. 52-60.

Hilbert, D. *Mathematical problems - lecture delivered before the international congress of mathematicians at Paris in 1900*, disponível em: <<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html>>, acessado em 20/06/06.

_____. “On the foundations of logic and arithmetic”. In: Van Heijenoort, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967[1904]. p. 129-38.

Hilbert, D. “On the infinite”. In: Van Heijenoort, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967[1925]. p. 367-92.

_____. *The foundations of geometry*. Illinois: The Open Court Publishing Company, 1950, disponível em: <<http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf>> acessado em 22/09/2009.

_____. “The foundations of mathematics”. In: Van Heijenoort, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967[1927]. p. 464-79.

Hodges, W. *A shorter model theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

_____. *Tarski's truth definitions*, disponível em: <<http://plato.stanford.edu/entries/tarski-truth/>>, 2006, acessado em 27/07/2009.

Hume, D. “Investigação acerca do entendimento humano”. In: *Hume*. São Paulo: Nova Cultural, 1996[1748]. p. 17-154. (Os Pensadores).

Husserl, E. *Idées directrices pour une phénoménologie*. Paris: Gallimard, 1950.

_____. “Investigações lógicas - sexta investigação – elementos de uma elucidação fenomenológica do conhecimento”. In: *Husserl*. São Paulo: Nova Cultural, 1996[1900]. (Os Pensadores).

_____. “Logische Untersuchungen, Erster Band”. In: *Husserliana – Edmund Husserl Gesamte Werke*. Martinus Nijhoff, 1975[1900].

Inwood, M. *Dicionário Hegel*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1997.

Jourdain P. “Introduction”. In: Cantor, G., *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. New York: Dover Publications, 1915. p. 01- 82.

Kant, I. *Crítica da razão pura*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1994 [1781].

_____. *Prolegômenos a toda a metafísica futura*. 3ed. Lisboa: Edições 70, 1990[1783].

Kline, M. *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press, 1972.

Kneale, W. & Kneale, M. *O desenvolvimento da lógica*. 3 ed. Lisboa: Calouste Gulbenkian, 1991.

- Kreisel, G.** “Hilbert’s programme”. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics – selected readings*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1958]. p. 207-38.
- Kuhn, T.** *A estrutura das revoluções científicas*. São Paulo: Perspectiva, 1996.
- Lalande, A.** *Vocabulário técnico e crítico de filosofia*. São Paulo: Martins Fontes, 1996.
- Laudan, L.** *Science and values – the aims of science and their role in scientific debate*. Los Angeles: University of California Press, 1984.
- Lauria, P.** *Cantor et le transfini – mathématique et ontologie*. Paris: Harmattan, 2004.
- Lebrun, G.** “O papel do espaço na elaboração do pensamento kantiano”. In: *Sobre Kant*. São Paulo: Edusp, 1993. p. 25-36.
- Lecourt, D.** *Dictionnaire d’histoire et philosophie des sciences*. Paris : Presses Universitaires de France, 1999.
- Libera, A.** *La querelle des universaux: de Platon à la fin du moyen age*. Paris: Éditions du Seuil, 1996.
- Lobatchewsky, N.** “Geometrical researches on the theory of parallels”. In: Bonola, R. *Non-euclidean geometry*. New York: Dover Publications Inc., 1955. p. 1-45.
- Martin, G.** *The foundations of geometry and the non-euclidean plane*. New York: Springer Verlag, 1975.
- Maugüé, J.** “O ensino da filosofia: suas diretrizes”. In: *Revista Brasileira de Filosofia*. São Paulo: IBF, 1955, p. 643-9 (v.5., n. 20).
- Mooij, J.** *La philosophie des mathématiques de Henri Poincaré*. Paris : Gauthier-Villars, 1966.
- Nagel, E. & Newman, J.** *A prova de Gödel*. São Paulo: Perspectiva, 1973.
- Nietzsche, F.** “O nascimento da filosofia na época trágica dos gregos”. In: *Pré-Socráticos*. São Paulo: Nova Cultural, 1996. p. 62-4. (Os Pensadores).
- O’Connor, J. & Robertson, E.** *Luitzen Egbertus Jan Brouwer*, disponível em: <<http://history.mcs.st-andrews.ac.uk/Printonly/Brouwer.html>>, 2003, acessado em 12/07/2006.
- Paty, M.** “A criação científica segundo Poincaré e Einstein”. In: *Revista estudos avançados*.

São Paulo: Instituto de Estudos Avançados da Universidade de São Paulo, 2001. p. 157-92. (v. 15, nº41).

Paty, M. “Des fondements vers l’avant. Sur la rationalité des mathématiques et des sciences formalisées.”. In: *Philosophia Scientiae*. Paris : Kimé, 2005. p. 109-30. (n. 9).

Peano, G. “Aditione”. In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris : Blanchard, 1986[1906]. p. 106-20.

_____ “The principles of arithmetic, presented by a new method”. In: Van Heijenoort, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967[1889]. p. 83-97.

Peckhaus, V. *Pro and contra Hilbert: Zermelo’s set theories*, disponível em: <http://www.fakkw.uni-paderborn.de/institute/philosophie/Personal/Peckhaus/Texte_zum_Download/procontra.pdf> acessado em 27/07/06.

Pinkus, A. *Weierstrass and approximation theory*, Haifa: 2000, disponível em: <<http://www.math.technion.ac.il/~pinkus/paperswap.pdf>>, acessado em 20/06/06.

Platão. *The dialogues of Plato*. 2 ed. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1994. (Great Books of Western World, v. 6).

Poincaré, H. “A propos de la logistique”. In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris: Blanchard, 1986[1906.3]. p. 145-47.

_____ *Dernières pensées*. Paris : Ernest Flammarion, 1913.

_____ “La logique de l’infini”[1] . In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris: Blanchard, 1986[1909.3]. p. 235-56.

_____ “La logique de l’infini”[2]. In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris: Blanchard, 1986 [1912], p. 305-16.

_____ *La science et l’hypothèse*. Paris: Flammarion, 1968[1902].

_____ *La valeur de la science*. Paris: Ernest Flammarion, 1923.

_____ “Les mathématiques et la logique”[1]. In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris: Blanchard, 1986[1905]. p. 11-41.

_____ “Les mathématiques et la logique”[2]. In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris: Blanchard, 1986[1906.1]. p. 42-53.

Poincaré, H. “Les mathématiques et la logique”[3]. In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris: Blanchard, 1986[1906.2]. p.79-104.

_____ “Réflexions sur les deux notes precedentes”. In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris: Blanchard, 1986[1909.1]. p. 224-9.

_____ *Science et méthode*. Paris : Ernest Flammarion, 1920[1908].

_____ „Über transfinite Zahlen“. In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris: Blanchard, 1986[1909.2]. p. 231-4.

Porfírio. *Isagoge – introdução às categorias de Aristóteles*. São Paulo: Matese, 1965.

Quigg, C. “O horizonte da revolução da física de partículas”. In: *Scientific American Brasil*. São Paulo: Duetto, 2008. p. 56-63. (ano 6, nº 70).

Quine, W. *From a logical point of view*. 1 ed. Massachusetts: Harvard University Press, 1953.

_____ *Set theory and its logic*. 1 ed. Massachusetts: Harvard University Press, 1963.

Richard, J. “The principles of mathematics and the problem of sets”. In: Van Heijenoort, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967[1905]. p. 142-4.

Riemann, B. *Collected papers*. Heber City: Kendrick Press, 2004 [1892].

Rollet, L. *Henri Poincaré – Des mathématiques à la philosophie*. Tese (Doutorado em Filosofia) Universidade de Nancy 2, 1999.

Ross, D. *Aristóteles*. Lisboa: Dom Quixote, 1987[1923].

Russell, B. *A filosofia de Leibniz*. São Paulo: Biblioteca Universitária, 1968[1958].

_____ “Introduction to mathematical philosophy”. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics – selected readings*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1919]. p. 160-82.

_____ “La théorie des types logiques”. In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris: Blanchard, 1986[1910]. p. 257-95.

_____ “Le réalisme analytique”. In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris: Blanchard, 1986[1911]. p. 296-304.

Russell, B. “Les paradoxes de la logique”. In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris: Blanchard, 1986[1906.2]. p. 121-144.

_____ “Letter to Frege” In: Van Heijenoort, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967[1902]. p. 124-5.

_____ *Los principios de la matemática*. Buenos Aires: Espasa-Calpe, 1948[1903].

_____ “Mathematical logic as based on the theory of types”. In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris: Blanchard, 1986[1908]. p. 200-23.

_____ “Mathematicians and metaphysicians”. In: Sullivan, A. (Ed.). *Logicism and the philosophy of language – selections from Frege and Russell*. Toronto: Broadview Press, 2003. p. 221-34.

_____ “On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types”. In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris: Blanchard, 1986[1906.1]. p. 54-78.

_____ & **Whitehead, A.** *Principia mathematica*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1968.

Santos, L. “A essência da proposição e a essência do mundo”. In: Wittgenstein, L. *Tractatus Logico-Philosophicus*. São Paulo: Edusp, 1994. P. 11-112.

Schlick, M. “El fundamento del conocimiento”. In: Ayer, A. *El positivismo lógico*. México: Fondo de Cultura Económica, 1965. p. 215-32.

Schmid, A. *Une philosophie de savant – Henri Poincaré et la logique mathématique*. Paris : François Maspero, 1978.

Shapiro, S. “Philosophy of mathematics and its logic: introduction”. In: Shapiro, S. (Ed.). *The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*. New York: Oxford University Press, 2005. p. 3-28.

_____ *Thinking about mathematics*. New York: Oxford University Press, 2000.

Shinn, T. “Regimes de produção e difusão de ciência: rumo a uma nova organização transversal do conhecimento”. In: *Scientiae Studia*. São Paulo: 2008. p. 11-42. (v. 6, nº 1).

Soler, L. “Les origines de la formule $E=h\nu$, ou comment l’analogie est vecteur de nouveauté”. In: *Philosophia Scientiae*. Paris : Kimé, 2001. p. 89-123. (v. 5).

- Spade, P.** *Thoughts, words and things: an introduction to late medieval logic and semantic theory*, 2002, disponível em: <http://www.pvspade.com/Logic/docs/thoughts1_1a.pdf>, acessado em 09/04/2008.
- Stoll, R.** “Set theory”. In: *Encyclopaedia britannica*. 15 ed. Chicago: 1993. p. 226-32. (v. 27).
- Struik, D.** *A concise history of mathematics*. New York: Dover Publications, 1948.
- Szabó, Z.** “Nominalism”. In: Laux, M. & Zimmerman, D. (Ed.). *The Oxford handbook of metaphysics*. New York: Oxford University Press, 2003. p. 11-45.
- Tarski, A.** “A concepção semântica de verdade”. In: Tarski, A. *A concepção semântica de verdade – textos clássicos de Tarski*. São Paulo: Unesp, 2007[1944]. p. 157-201.
- Tomás de Aquino.** *O ente e a essência*. Petrópolis: Vozes, 1995.
- Väänänen, J.** “Second-order logic and foundations of mathematics”. In: *The Bulletin of Symbolic Logic*. 2001, p. 504-20 (v. 7 nº 4).
- Van Rootselaar, B.** “Bernard Bolzano”. In: *Biographical dictionary of mathematicians*. New York: Charles Scribner’s Sons, 1991. p. 299-305. (v. 1).
- Van Stigt, W.** *Brouwer’s intuitionism*. Amsterdam: North-Holland, 1990.
- Vidal-Rosset, J.**, *Philosophy of mathematics and ontological commitment - on Quine's and Vuillemin's classifications*. 1996, disponível em: <<http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/04/95/59/PDF/philmath.pdf>>, acessado em 09/04/2009.
- Volkert, K.** *Die Krise der Anschauung*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1986.
- Von Neumann, J.**, “The formalist foundations of mathematics”. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics – selected readings*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1931], p. 61-5.
- Vuillemin, J.** *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*. Paris: PUF, 1987.
- Wang, H. e Schagrin, M.** “Logic systems”. In: *Encyclopaedia britannica*. 15 ed. Chicago: 1993. p. 242-51. (v. 23).
- Weyl, H.** “Comments on Hilbert’s second lecture on the foundations of mathematics.” In: Van Heijenoort, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967[1927]. p. 480-4.

Wilder, R. *Introduction to the foundations of mathematics*. 2 ed. Tokyo: John Wiley and Sons, 1965[1952].

Wissenschaftliche Weltausfassung: Der Wiener Kreis. disponível em <<http://www.uni-erfurt.de/theophil/Homepage-Neu-mit-Frames/Huemer/manifest.pdf>>, acessado em 19/06/06.

Wittgenstein, L. “Investigações filosóficas”. In: *Wittgenstein*. São Paulo: Nova Cultural, 1996. (Os Pensadores).

_____. *Tractatus Logico-Philosophicus*. São Paulo: Edusp, 1994.

Zermelo, E. „Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung“. In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris: Blanchard, 1986[1907.2]. p. 157-78.

_____. “Proof that Every set can be well-ordered” In: Van Heijenoort, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967[1904]. p. 139-41.

_____. “Sur les ensembles finis et le principe de l’induction complète”. In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris: Blanchard, 1986[1907.1]. p. 148-56.

_____. „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre“. In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris: Blanchard, 1986[1907.3]. p. 179-99.