UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

Pedro Alonso Amaral Falcão

Aspectos da teoria de funções modais

São Paulo

2012

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FACULDADE DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS

DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA

Dissertação de Mestrado

Aspectos da teoria de funções modais

Dissertação de mestrado,
apresentada ao Departamento de
Filosofia da Faculdade de
Filosofia, Letras e Ciências
Humanas da Universidade de São
Paulo, sob a orientação do Prof.
Dr. Rodrigo Bacellar.

Pedro Alonso Amaral Falcão

Agradecimentos

Ao meu orientador, o Prof. Dr. Rodrigo Bacellar (também conhecido como Roderick Batchelor), pela supervisão cuidadosa da pesquisa e pelo companheirismo.

À professora Dra. Andréa Loparic por ter me apresentado a essa bela ciência, a Lógica; e por ter me orientado nos primeiros anos de pesquisa.

A todos os colegas do seminário de lógica, em especial: Luciano Vicente e René Pierre Mazak, pelo apoio e incentivo que recebi ao começar a frequentar os seminários; e Tomás Troster, por compartilhar do entusiasmo que tive ao ser apresentado à teoria das funções modais e pelas discussões que tivemos desde então.

A todos os amigos que tiveram a curiosidade de perguntar e a paciência de escutar sobre o que é a minha pesquisa.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo auxílio concedido através da bolsa de mestrado.

À Emília.

Resumo

FALCÃO, P.A.A. Aspectos da teoria de funções modais. 2012. 116 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas. Departamento de Filosofia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

Apresentamos alguns aspectos da teoria de funções modais, que é o correlato modal da teoria de funções de verdade. Enquanto as fórmulas da lógica proposicional clássica expressam funções de verdade, as fórmulas da lógica proposicional modal (S5) expressam funções modais. Generalizamos alguns dos teoremas da teoria de funções de verdade para o caso modal; em particular, exibimos provas da completude funcional de alguns conjuntos de funções modais e definimos uma (nova) noção de ‘reductio vero-funcional’ de funções modais, bem como a composição de funções modais em termos destes reductos.

Palavras-chave: funções modais, lógica proposicional modal (S5), completude funcional.

Abstract

FALCÃO, P.A.A. Aspects of the theory of modal functions. 2012. 116 f. Thesis (Master Degree) – Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas. Departamento de Filosofia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

We present some aspects of the theory of modal functions, which is the modal correlate of the theory of truth-functions. While the formulas of classical propositional logic express truth-functions, the formulas of modal propositional logic (S5) express modal functions. We generalize some theorems of the theory of truth-functions to the modal case; in particular, we show the functional completeness of some sets of modal functions and define a (new) notion of ‘truth-functional reduct’ of modal functions, as well as the composition of modal functions in terms of such reducts.

Keywords: modal functions, modal propositional logic (S5), functional completeness.

Índice

1. Introdução	6
2. Vero-funcionalidade e predicatividade	12
3. Completude funcional em S5	17
4. Um critério de ordem para tautologias	21
5. Existência de instâncias de valores modais	24
6. Predicatividade e forma normal Massey-Canty-Scharle	26
7. Quase vero-funcionalidade	30
8. Redutos vero-funcionais	33
9. Valores puramente modais e funções de verdade	38
10. Composição de funções	41
11. Polaridade	57
Apêndice	61
Bibliografia	115

1. Introdução

A linguagem da lógica proposicional modal (S5) pode ser tomada como consistindo em conectivos $\sim$, $\vee$, $\Diamond$ (representando negação, disjunção e possibilidade), e variáveis proposicionais p , q , r , s , p' , q' , ...

As fórmulas de S5 são definidas da maneira usual: variáveis proposicionais são fórmulas e, se ϕ e ψ são fórmulas, então também são fórmulas: $\sim\phi$, $\Diamond\phi$ e $\phi \vee \psi$.

Na interpretação pretendida, as variáveis proposicionais variam sobre proposições. Qualquer definição razoável de proposição deve ser tal que toda proposição é verdadeira ou falsa e não ambas. Além disso, para os nossos propósitos, a definição deve ser tal que a negação de uma proposição é uma proposição, bem como a possibilização de uma proposição ou a disjunção de duas proposições.

A seguinte definição servirá para os nossos propósitos: diremos que uma *proposição* é um conjunto de mundos possíveis. E.g. a proposição [Sócrates é filósofo] é o conjunto dos mundos possíveis onde Sócrates é filósofo. A proposição $\sim$ [Sócrates é filósofo] é o complemento de [Sócrates é filósofo] com relação ao conjunto de todos os mundos possíveis; a proposição [Sócrates é filósofo] $\vee$ [Platão é filósofo] é a união dos conjuntos dos mundos possíveis onde Sócrates é filósofo e dos mundos possíveis onde Platão é filósofo; e a proposição $\Diamond$ [Sócrates é filósofo] é o conjunto de todos os mundos possíveis, pois há pelo menos um mundo possível onde Sócrates é filósofo, e.g. o mundo real. Uma proposição é verdadeira sse ela contém o mundo real.

Um modelo para a lógica proposicional *clássica* atribui para cada variável proposicional um valor de verdade. Agora, dada uma sequência de proposições específicas, nem toda atribuição de valores de verdade para seus termos precisa ser realmente *possível*. Porém, quaisquer que sejam as reais possibilidades de atribuição de valores de verdade para uma sequência de proposições, elas devem ser é claro um subconjunto do conjunto de *todas* as atribuições; e dentre as atribuições realmente possíveis de valores de verdade para uma sequência de proposições, uma deve ser de fato verdadeira. Isso inspira a seguinte noção de modelo para S5.

Diremos que um *modelo* M para a lógica proposicional *clássica* consiste numa função das variáveis proposicionais em {T, F}. Um *modelo* para a lógica proposicional *modal* S5 consiste num conjunto não vazio qualquer de modelos para a lógica proposicional clássica com um elemento designado, i.e. um par $\langle W, a \rangle$ onde $a \in W \subseteq \{M : M \text{ é um modelo para a lógica proposicional clássica}\}$.

(Um modelo assim definido é basicamente a restrição, para S5 proposicional, da semântica apresentada em Kripke 1959. Neste artigo Kripke mostra a completude e correção desta semântica para S5.)

Um modelo $\langle W, a \rangle$ induz uma *valoração*, i.e. uma função $\langle W, a \rangle^+$ das fórmulas de S5 em {T, F}, da seguinte maneira:

Se ϕ é uma variável proposicional p, $\langle W, a \rangle^+(\phi) = T$ sse $a(p) = T$.

$\langle W, a \rangle^+(\sim\phi) = T$ sse $\langle W, a \rangle^+(\phi) = F$.

$\langle W, a \rangle^+(\phi \vee \psi) = T$ sse $\langle W, a \rangle^+(\phi) = T$ ou $\langle W, a \rangle^+(\psi) = T$.

$\langle W, a \rangle^+(\Diamond\phi) = T$ sse $\langle W, b \rangle^+(\phi) = T$ para algum $b \in W$.

Um modelo $\langle W, a \rangle$ atribui assim a cada fórmula um valor de verdade; logo o modelo atribui a cada sequência de fórmulas $\phi_1 \dots \phi_n$ uma sequência de valores de verdade. Além disso, o modelo determina, para cada sequência de fórmulas, um *valor puramente modal*: esse é o conjunto das sequências de valores de verdade que os modelos a -variantes de $\langle W, a \rangle$ atribuem à sequência de fórmulas.

Para $n \geq 1$, definimos:

Um *valor de verdade de grau n* é um elemento de $\{T, F\}^n$.

Um *valor puramente modal de grau n* é um subconjunto não vazio de $\{T, F\}^n$.

Um *valor modal de grau n* é um par $\langle W, a \rangle$ onde $a \in W \subseteq \{T, F\}^n$.

Uma *função de verdade de grau n* é uma função de $\{T, F\}^n$ em $\{T, F\}$.

Uma *função modal de grau n* é uma função de $\{\langle W, a \rangle : W \subseteq \{T, F\}^n, a \in W\}$ em $\{T, F\}$.

O valor modal *de* uma sequência de proposições $p_1 \dots p_n$ é o par cujo primeiro elemento é o conjunto de valores de verdade de grau n que $p_1 \dots p_n$ *possivelmente* assume e cujo segundo termo é o valor de verdade de grau n que $p_1 \dots p_n$ *de fato* assume. E.g., o valor modal do par $\langle [\text{Sócrates é filósofo}], [2 + 2 = 4] \rangle$ é $\langle \{\langle T, T \rangle, \langle F, T \rangle\}, \langle T, T \rangle \rangle$: o segundo termo do par indica que ambas são de fato verdadeiras e o primeiro termo do par indica os valores de verdade possíveis; é impossível atribuir ao par $[\text{Sócrates é filósofo}], [2 + 2 = 4]$ os valores de verdade (de grau 2) $\langle T, F \rangle$ ou $\langle F, F \rangle$.

Diremos que uma proposição que pode ser verdadeira e pode ser falsa é *contingente*. O valor modal de uma proposição contingente é $\langle \{T, F\}, T \rangle$ se a proposição é verdadeira e $\langle \{T, F\}, F \rangle$ se a proposição é falsa. Um par de proposições que pode

assumir qualquer um dos quatro valores de verdade de grau 2 é dito um par de proposições *independentes*. O valor modal e.g. de um par de proposições independentes e verdadeiras é $\langle \{T, F\}^2, \langle T, T \rangle \rangle$. De maneira geral, uma n-upla de proposições que pode assumir qualquer um dos 2^n valores de verdade de grau n é dita uma n-upla de proposições independentes. O valor modal de uma tal n-upla é da forma $\langle \{T, F\}^n, a \rangle$ ($a \in \{T, F\}^n$).

Dado um modelo, a variável p será induzida em um dos valores $\langle \{T, F\}, T \rangle$ (contingente e verdadeira), $\langle \{T, F\}, F \rangle$ (contingente e falsa), $\langle \{T\}, T \rangle$ (necessária), $\langle \{F\}, F \rangle$ (impossível). Estes são todos os valores modais de grau 1, e estão representados na seguinte tabela. Cada sub-tabela (separada por traços horizontais) representa um valor puramente modal, e cada linha da tabela representa um valor modal.

p	$\sim p$	$\Diamond p$	$\sim \Diamond \sim p$
T	F	T	F
F	T	T	F
T	F	T	T
F	T	F	F

(Claramente as atribuições de valores de verdade para as fórmulas $\sim p$, $\Diamond p$ e $\sim \Diamond \sim p$ atendem as condições de valoração definidas acima: $\langle W, a \rangle^+(\Diamond \phi) = T$ sse $\langle W, b \rangle^+(\phi) = T$ para algum $b \in W$, e $\langle W, a \rangle^+(\sim \phi) = T$ sse $\langle W, a \rangle^+(\phi) = F$.)

Do fato que existem quatro valores modais de grau 1, é fácil ver que devem então existir dezesseis classes de fórmulas não equivalentes com uma variável proposicional dada. Cada expressão com uma variável representa, portanto, uma das seguintes funções modais:

p	$\top$	$\Diamond$	$\sim\Box$	∇	$\sim\nabla^-$	id	$\sim\Diamond\vee\nabla^+$	∇^+	$\sim\nabla^+$	$\Box\vee\nabla^-$	$\sim$	∇^-	Δ	$\Box$	$\sim\Diamond$	$\perp$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F
T	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F

$$\top p = p \vee \sim p \text{ (lido 'verum p')};$$

$$\Diamond p \text{ (lido 'possível p')};$$

$$\sim\Box p = \Diamond\sim p \text{ (lido 'não é necessário que p')};$$

$$\nabla p = \Diamond p \wedge \Diamond\sim p \text{ (lido 'p é contingente')};$$

$$\sim\nabla^- p = \sim(\Diamond p \wedge \Diamond\sim p \wedge \sim p) \text{ (lido 'não é contingentemente falso que p')};$$

$$\text{id}(p) = p \text{ (lido 'id(p')')};$$

$$\sim\Diamond\vee\nabla^+(p) = \sim\Diamond p \vee \nabla^+ p \text{ (lido 'p é impossível ou contingentemente verdadeiro')};$$

$$\nabla^+ p = \Diamond p \wedge \Diamond\sim p \wedge p \text{ (lido 'p é contingentemente verdadeiro')};$$

$$\sim\nabla^+ p = \sim(\Diamond p \wedge \Diamond\sim p \wedge p) \text{ (lido 'não é contingentemente verdadeiro que p')};$$

$\Box \vee \nabla^-(p) = \Box p \vee \nabla^- p$ (lido ‘p é necessário ou contingentemente falso’);

$\sim p$ (lido ‘não p’);

$\nabla^- p = \Diamond p \wedge \Diamond \sim p \wedge \sim p$ (lido ‘p é contingentemente falso’);

$\Delta p = \Box p \vee \sim \Diamond p$ (lido ‘p é rígido’);

$\Box p = \sim \Diamond \sim p$ (lido ‘p é necessário’);

$\sim \Diamond p$ (lido ‘p é impossível’);

$\perp p = p \wedge \sim p$ (lido ‘falsum p’).

Pode ser checado facilmente que as definições estão corretas, e disso se segue que todas as funções modais de grau 1 podem ser expressas em termos dos conectivos $\sim, \vee, \Diamond$.

O conjunto de todas as funções de verdade (de grau n) será denotado por τ (τ^n).

O conjunto de todas as funções modais (de grau n) será denotado por μ (μ^n).

Praticamente todas as definições apresentadas nesta introdução se encontram *verbatim* em Batchelor 2011.

2. Vero-funcionalidade e predicatividade

A lógica modal não é vero-funcional. O valor de verdade de uma proposição p pode não ser suficiente para determinar o valor de verdade de uma proposição construída a partir de p através de aplicações dos operadores $\Box$, $\Diamond$. Em alguns casos, no entanto, o valor de verdade de p é suficiente para determinar o valor de $\Box p$ ou $\Diamond p$: se a proposição p é verdadeira $\Diamond p$ também é verdadeira, e se p é falsa $\Box p$ também é falsa. Mas da verdade de p não podemos inferir nem a verdade nem a falsidade de $\Box p$, e da falsidade de p não podemos inferir nem a verdade nem a falsidade de $\Diamond p$.

Nós vimos que qualquer fórmula de S5 com uma variável é equivalente a uma de dezesseis fórmulas. Cada uma dessas fórmulas expressa uma função modal. A relação de determinação (e indeterminação) entre o valor de verdade de uma proposição p e o valor de verdade de proposições construídas a partir de p através da aplicação de funções modais é apresentada na seguinte tabela:

p	$\top$	$\Diamond$	$\sim\nabla^-$	id	$\sim\nabla^+$	$\Box\vee\nabla^-$	Δ	$\Box$	$\sim\Box$	∇	$\sim\Diamond\vee\nabla^+$	∇^+	$\sim$	∇^-	$\sim\Diamond$	$\perp$
T	T	T	T	T	?	?	?	?	?	?	?	?	F	F	F	F
F	T	?	?	F	T	?	?	F	T	?	?	F	T	?	?	F

Das dezesseis funções modais unárias, quatro são vero-funcionais: o valor de verdade de $f(p)$ é totalmente determinado pelo valor de p . São elas $\top$, id , $\sim$, $\perp$.

Oito delas são *semi-vero-funcionais*: o valor de verdade de $f(p)$ é *em alguns casos mas não todos* determinado pelo valor de verdade de p . São elas $\Diamond$, $\Box$, $\sim\Diamond$, $\sim\Box$, ∇^+ , ∇^- , $\sim\nabla^+$, $\sim\nabla^-$.

As quatro funções modais de grau 1 restantes são *radicalmente não vero-funcionais*. O valor de verdade de $f(p)$ não é em nenhum caso determinado pelo valor de verdade de p . São elas ∇ , Δ , $\sim\Diamond\vee\nabla^+$, $\Box\vee\nabla^-$.

Todas as funções modais de grau 1 são tais que, dado um valor modal para a variável p , o valor de verdade de $f(p)$ é determinado. Este fato pode levar alguém a imaginar que a lógica modal pode ser tratada como uma lógica 4-valorada, na qual as variáveis assumem um dos quatro valores modais unários $\langle\{T, F\}, T\rangle$ (contingentemente verdadeiro), $\langle\{T, F\}, F\rangle$ (contingentemente falso), $\langle\{T\}, T\rangle$ (necessário), $\langle\{F\}, F\rangle$ (impossível). Que isso não é o caso, nem para quatro nem para qualquer número finito, foi demonstrado por Dugundji (1940).

(Dugundji mostra que, para todo n , existe uma fórmula da linguagem de S5 que é uma tautologia em ' n -valorações' e que não é válida em S5. A fórmula em questão é uma versão da curiosa tautologia $p \equiv q \cdot \vee \cdot p \equiv r \cdot \vee \cdot q \equiv r$. O que esta tautologia faz transparecer é que só existem dois valores de verdade e portanto, dadas três proposições, pelo menos duas delas têm o mesmo valor de verdade. Uma disjunção da forma $\Box(p_1 \equiv p_2) \cdot \vee \cdot \Box(p_1 \equiv p_3) \cdot \vee \cdot \dots \cdot \vee \cdot \Box(p_2 \equiv p_3) \cdot \vee \cdot \Box(p_2 \equiv p_4) \cdot \vee \cdot \dots \cdot \vee \cdot \Box(p_n \equiv p_{n+1})$ é válida em n -valorações mas não em S5.)

Discutiremos brevemente alguns dos problemas que surgem ao tentar interpretar a lógica modal simplesmente pela atribuição de valores modais unários às variáveis

proposicionais. Utilizaríamos os símbolos $\Box$, ∇^+ , ∇^- , $\sim\Diamond$ para representar os valores modais unários, e isso inspiraria a seguinte tabela:

$p \ q$	$p \vee q$	$p \wedge q$
$\Box \Box$	$\Box$	$\Box$
$\Box \nabla^+$	$\Box$	∇^+
$\Box \nabla^-$	$\Box$	∇^-
$\Box \sim\Diamond$	$\Box$	$\sim\Diamond$
$\nabla^+ \Box$	$\Box$	∇^+
$\nabla^+ \nabla^+$	$?$	∇^+
$\nabla^+ \nabla^-$	$?$	$?$
$\nabla^+ \sim\Diamond$	∇^+	∇^+
$\nabla^- \Box$	$\Box$	∇^-
$\nabla^- \nabla^+$	$?$	$?$
$\nabla^- \nabla^-$	∇^-	$?$
$\nabla^- \sim\Diamond$	∇^-	$\sim\Diamond$
$\sim\Diamond \Box$	$\Box$	$\sim\Diamond$
$\sim\Diamond \nabla^+$	∇^+	$\sim\Diamond$
$\sim\Diamond \nabla^-$	∇^-	$\sim\Diamond$
$\sim\Diamond \sim\Diamond$	$\sim\Diamond$	$\sim\Diamond$

É claro que a conjunção de quaisquer proposições necessárias é também necessária, a disjunção de quaisquer proposições impossíveis é também impossível, a negação de uma proposição contingentemente falsa é contingentemente verdadeira, etc. Mas e.g. do mero fato de que duas proposições são contingentemente verdadeiras não se segue que a disjunção delas é contingentemente verdadeira: esse não é o caso se a negação de uma implica a outra, pois neste caso a disjunção delas é necessária. E.g. se p e q são proposições independentes e verdadeiras, então $p \vee q$ é contingentemente verdadeira, assim como $p \vee \sim q$; mas $(p \vee q) \vee (p \vee \sim q)$ não é contingente.

Estes fatos ajudam a explicitar o caráter essencialmente relacional dos valores modais. Quando atribuímos um valor modal para uma sequência de proposições, o que fazemos não é simplesmente atribuir um valor para cada uma das proposições. Enquanto o valor de verdade n -ário de uma sequência de proposições $p_1 \dots p_n$ é determinado pelos valores de verdade unários dos p_i , um valor modal n -ário não é, em geral, determinado por atribuições de valores modais unários aos p_i .

Apresentaremos agora a noção de uma função predicativa, noção essa apresentada e discutida em Batchelor 2011.

Seja f uma função modal de grau n . Diremos que f é *predicativa* se o valor de verdade de $f(p_1 \dots p_n)$ é determinado pelos valores modais de grau 1 dos p_i . De maneira equivalente podemos dizer que as funções predicativas são aquelas que podem ser expressas por funções de verdade de fórmulas do tipo $g(p_i)$, onde $g \in \{\Box, \nabla^+, \nabla^-, \sim\Diamond\}$.

Observação. As funções $\Box, \nabla^+, \nabla^-, \sim\Diamond$ são funções características de valores modais unários. A equivalência alegada acima é justificada por:

Proposição. Se α e β são predicativas, então $\sim\alpha$ é predicativa, assim como $\alpha \vee$

β . $\square$

Uma vez que toda função de verdade pode ser expressa em forma normal disjuntiva, podemos dizer também que as funções predicativas com dois argumentos são aquelas que podem ser expressas como $(f_1(p) \wedge f_2(q)) \vee \dots \vee (f_{n-1}(p) \wedge f_n(q))$ onde $f_i \in \{\square, \nabla^+, \nabla^-, \sim\Diamond\}$.

A *impredicatividade* ocorre porque os valores modais unários são compatíveis com vários valores modais binários, assim como um valor de verdade é compatível com mais de um valor modal. Um par de valores modais unários atribuídos às variáveis p, q não determina em geral o valor modal binário dessas mesmas variáveis. A determinação ocorre no outro sentido, mas é uma relação muitos para um.

A noção de predicatividade, definida aqui com relação a valores modais unários, pode ser definida com relação aos valores modais de cada um dos outros graus. (Cf. Batchelor 2011.)

Há uma relação entre as funções radicalmente não vero-funcionais, as funções predicativas, e as funções modais da forma normal Massey-Canty-Scharle, que apresentamos em outra seção.

3. Completude funcional em S5

Dado um modelo, o par p, q será induzido em um dentre os trinta e dois valores modais de grau 2; cada linha da seguinte tabela representa um desses valores modais. Apresentamos a tabela junto com exemplos de sentenças que têm o valor puramente modal indicado, sob a assunção de que r e s são independentes.

Do fato de que existem 32 valores modais de grau 2 segue-se que existem 2^{32} funções modais de grau 2.

Proposição. Todas as funções modais são expressáveis em termos dos conectivos $\sim, \vee, \Diamond$.

Prova. Mostraremos como construir a fórmula característica de uma linha de sub-tabela; a disjunção das fórmulas características das linhas onde uma função recebe T expressará essa função.

p q	valor puramente modal	exemplo
T T T F F T F F	independentes	$p = r, q = s.$
T T T F F T	disjunção necessária	$p = r \vee s,$ $q = \sim r \vee s.$
F F	ambas impossíveis	$p = r \wedge \sim r, q = s \wedge \sim s.$
T T T F F F	implicação conversa necessária	$p = r, q = r \wedge s.$
F T	primeira impossível, segunda necessária	$p = r \wedge \sim r, q = s \vee \sim s.$
T T F T F F	implicação necessária	$p = r \wedge s, q = r.$
T F	primeira necessária, segunda impossível	$p = r \vee \sim r, q = r \wedge \sim r.$
T F F T F F	incompatibilidade necessária	$p = r \wedge s, q = \sim r \wedge s.$
T T	ambas necessárias	$p = r \vee \sim r, q = s \vee \sim s.$
T T T F	primeira necessária, segunda contingente	$p = r \vee \sim r, q = s.$
F T F F	primeira impossível, segunda contingente	$p = r \wedge \sim r, q = s.$
T T F T	primeira contingente, segunda necessária	$p = r, q = s \vee \sim s.$
T F F F	primeira contingente, segunda impossível	$p = r, q = s \wedge \sim s.$
T T F F	equivalência necessária	$p = r, q = r$
T F F T	disjunção exclusiva necessária	$p = r, q = \sim r$

A fórmula característica de uma linha de sub-tabela é obtida através da conjunção de (1) a conjunção das possibilizações das fórmulas características (no sentido clássico) das linhas presentes na sub-tabela, (2) a conjunção das impossibilizações das fórmulas características das linhas ausentes da sub-tabela e (3) a fórmula característica da linha. Assim em

p q	
...	
T T	
F T	
F F	
...	

a fórmula característica da primeira linha da sub-tabela indicada é: $\Diamond(p \wedge q) \wedge \Diamond(\sim p \wedge q) \wedge \Diamond(\sim p \wedge \sim q) \wedge \sim \Diamond(p \wedge \sim q) \wedge (p \wedge q)$. É fácil ver que uma fórmula característica será verdadeira em exatamente uma linha da tabela modal e que, portanto, uma função modal arbitrária pode ser expressa como a disjunção adequada de fórmulas características.

Como a definição de fórmula característica não depende em nada do grau do valor modal, provamos que todas as funções modais são expressáveis em termos de $\sim$, $\vee$, $\Diamond$. (O fato de que usamos $\wedge$ na construção da fórmula característica é inofensivo para

o resultado, pois evidentemente a conjunção é definível em termos de disjunção e negação.) $\square$

(A prova da completude funcional de $S5$ apresentada aqui é essencialmente a mesma apresentada em Batchelor 2011, que por sua vez é uma reformulação da prova dada em Massey 1966.)

4. Um critério de ordem para tautologias

Onde f é uma função de verdade de grau n , $Sat(f)$ denotará $\{\langle v_1 \dots v_n \rangle : f(\langle v_1 \dots v_n \rangle) = T\}$, i.e. $Sat(f)$ é conjunto dos valores de verdade n -ários que satisfazem f .

As próximas definições procurarão caracterizar uma noção intuitivamente clara, a do grau de especificidade de um conectivo clássico. É razoável dizer que a conjunção é mais específica do que a disjunção, pois uma expressão do tipo $\alpha \wedge \beta$ nos dá mais informação sobre os valores de verdade de α e β do que uma expressão do tipo $\alpha \vee \beta$. Também é razoável dizer que $\alpha \wedge \beta$ é tão específico quanto $\alpha \downarrow \beta$, pois ambas determinam totalmente o valor de verdade do par α, β .

O grau de especificidade de um conectivo pode ser expresso por uma relação entre o número de linhas que ocorrem na tabela para o conectivo (o que é determinado pela aridade do conectivo) e o número de linhas da tabela onde ocorre T. Ao compararmos conectivos de mesma aridade, podemos ordenar o grau de especificidade a partir do número de linhas onde o conectivo tem T, e um conectivo é tanto mais específico quanto menos linhas recebem T.

A seguinte definição permite comparar o grau de especificidade de conectivos de aridades diferentes:

$Esp(f) = |\{T, F\}^n| / |Sat(f)|$, exceto quando $Sat(f) = \emptyset$, caso em que $Esp(f) = \infty$. Se $Esp(f) < Esp(g)$, diremos que f é *menos específica* do que g , ou que g é *mais*

específica do que f . E.g. a disjunção ternária é menos específica do que a binária, pois $8/7 < 4/3$.

A noção de especificidade ‘mede’ quanta informação podemos apreender sobre os argumentos a partir da *verdade* de uma fórmula construída a partir de um conectivo vero-funcional. Mas uma fórmula cujo operador principal é um $\perp^n$ nunca é verdadeira. Por isso faz algum sentido dizer que a informação apreendida a partir da verdade de uma tal fórmula é infinita.

Proposição. O par (τ, Esp) é uma ordem parcial. $\square$

Note que $\text{Sat}(f) \subseteq \text{Sat}(g)$ implica $\text{Esp}(f) \geq \text{Esp}(g)$, mas não conversamente. A noção $\text{Sat}(f) \subseteq \text{Sat}(g)$ é o que costumamos usar para dizer que f é mais forte que (ou tão forte quanto) g (i.e. $\models f(p_1 \dots p_n) \supset g(p_1 \dots p_n)$), enquanto a noção de especificidade não tem relação direta com força nesse sentido implicacional.

Segundo a ordem proposta, $\underline{\vee}$ é mais específico do que $\vee$. Parece razoável dizer portanto que a tautologia $p \underline{\vee} \sim p$ é, em algum sentido, mais forte que a tautologia $p \vee \sim p$. O mesmo vale e.g. entre as tautologias $p \equiv p$ e $p \supset p$. É claro que este sentido de força não é o implicacional, pois todas as tautologias são nesse sentido equivalentes.

Poderíamos dizer que a forma tautológica $\alpha \underline{\vee} \sim \alpha$ é *mais específica* do que a forma tautológica $\alpha \vee \sim \alpha$. Como diz Wittgenstein, ‘as tautologias não dizem nada a respeito do mundo’. No entanto, podemos dizer que elas dizem algo a respeito das formas proposicionais. E a primeira forma acima diz mais do que a segunda sobre a relação de α com $\sim \alpha$.

As definições a seguir pretendem dar um tratamento que permita ordenar as tautologias de maneira que essas distinções, apontadas de maneira informal, ganhem um traço sistemático.

Sejam $p_1, p_2, p_3 \dots$ variáveis proposicionais e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ fórmulas construídas a partir dos p_i através de conectivos vero-funcionais. O *curso de valores* de uma sequência $\alpha_1 \dots \alpha_n$ construída a partir de $p_1 \dots p_k$ é o conjunto dos valores de verdade de grau n que $\alpha_1 \dots \alpha_n$ assume enquanto $p_1 \dots p_k$ ‘percorre’ os 2^k valores de verdade de grau k . Indicaremos o curso de valores de $\alpha_1 \dots \alpha_n$ por $V(\alpha_1 \dots \alpha_n)$. E.g. o par $\langle p \wedge q, q \rangle$ tem o curso de valores $\{\langle T, T \rangle, \langle F, T \rangle, \langle F, F \rangle\}$.

Diremos que uma tautologia $f(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ é *perfeita* quando $\text{Sat}(f) = V(\alpha_1 \dots \alpha_n)$, i.e. quando o conjunto dos valores de verdade (de grau n) que satisfazem f é igual ao curso de valores de $\alpha_1 \dots \alpha_n$. Se $\text{Sat}(f)$ for subconjunto próprio de $V(\alpha_1 \dots \alpha_n)$, a fórmula $f(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ não será tautológica. Se $V(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ for subconjunto próprio de $\text{Sat}(f)$, haverá uma função g mais específica do que f tal que $g(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ é tautológica.

Podemos definir também uma noção dual da noção de tautologia perfeita. Uma expressão da forma $f(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ é uma *contradição perfeita* quando f é a função menos específica que quando aplicada a $\alpha_1 \dots \alpha_n$ resulta numa contradição.

Exemplo: $p \equiv \sim p$ é uma contradição perfeita, $p \wedge \sim p$, não.

Seria possível também definir a noção de especificidade para funções modais.

5. Existência de instâncias de valores modais

Nesta seção mostraremos que, sob a hipótese (inteiramente plausível) de que existe uma coleção infinita de proposições independentes, segue-se que para todo valor modal $\langle W, a \rangle$ existe uma sequência de proposições tal que $\langle W, a \rangle$ é o valor modal da sequência.

Proposição. Dada uma sequência infinita de proposições independentes $p_1, p_2, p_3, \dots$, temos que: para todo $C \subseteq \{T, F\}^n$ ($n \geq 1$), $C \neq \emptyset$, existem proposições $\alpha_1 \dots \alpha_n$ construídas a partir dos p_i por funções de verdade, tais que o valor puramente modal da sequência de proposições $\alpha_1 \dots \alpha_n$ é C .

Prova. Se $C = \{T, F\}^n$ tomamos $p_1 \dots p_n$ por $\alpha_1 \dots \alpha_n$. Se C é um conjunto unitário tomamos α_i por $p_i \wedge \sim p_i$ se o i -ésimo termo da sequência é F e por $p_i \vee \sim p_i$ se o i -ésimo termo da sequência é T . Para um C qualquer, o seguinte procedimento leva-nos a uma sequência $\alpha_1 \dots \alpha_n$ com o valor puramente modal C : tomamos uma sequência $p_1 \dots p_n$ e ‘preenchemos’ as 2^n linhas da tabela de verdade para $p_1 \dots p_n$ de maneira a usar todos e apenas os elementos de C . O resultado deste procedimento será uma sequência de n colunas de valores de verdade. Cada coluna representa uma função de verdade de $p_1 \dots p_n$; tomamos os α como fórmulas que expressam tais funções. $\square$

E.g. se p, q, r são independentes podemos construir fórmulas cujo valor puramente modal é $\{\langle T, T, F \rangle, \langle F, T, T \rangle\}$:

$p \ q \ r$	$p \supset (r \supset q) \ .\wedge. \sim p \supset \sim q$	$p \vee \sim p$	$p \supset (\sim q \wedge r) \ .\wedge. \sim p \supset q$
T T T	T	T	F
T T F	T	T	F
T F T	F	T	T
T F F	T	T	F
F T T	F	T	T
F T F	F	T	T
F F T	T	T	F
F F F	T	T	F

Proposição. Para todo valor modal n-ário $\langle W, a \rangle$ existem proposições $\alpha_1 \dots \alpha_n$ tais que o valor modal de $\alpha_1 \dots \alpha_n$ é $\langle W, a \rangle$.

Prova. A proposição anterior mostra que para todo W existem $\alpha_1 \dots \alpha_n$ tais que o valor puramente modal de $\alpha_1 \dots \alpha_n$ é W . A prova desta proposição é essencialmente a mesma, a única diferença é que ao ‘preencher’ a tabela para $p_1 \dots p_n$ tomamos um cuidado adicional: além de usar de usar todos e apenas os elementos de W ao preencher a tabela para $p_1 \dots p_n$ preenchemos a linha que corresponde ao valor de verdade da sequência $p_1 \dots p_n$ com o valor a . $\square$

(Burgess (1999) afirma que a existência de instâncias de todos os valores modais já esta implícita em Carnap 1946, e apresenta uma prova.)

6. Predicatividade e forma normal Massey-Canty-Scharle

Uma vez que o número de funções modais de grau n é o mesmo que o número de funções de verdade de grau $m = 2^n + n - 1$ (como foi mostrado em Carnap 1946), é possível estabelecer uma correspondência um-para-um entre μ^n e τ^m . Uma maneira interessante de fazer isto é escolher funções $g_1 \dots g_k \in \mu^n$ tais que

$$\{f(p_1 \dots p_n, g_1(p_1 \dots p_n), \dots, g_k(p_1 \dots p_n)) : f \in \tau^m\} = \mu^n$$

onde $k = m - n$.

Uma expressão do tipo $f(p_1 \dots p_n, g_1(p_1 \dots p_n), \dots, g_k(p_1 \dots p_n))$ que atende a condição acima pode ser chamada uma expressão na forma normal Massey-Canty-Scharle. (V. Canty & Scharle 1966 e Massey 1968.)

Proposição (Canty & Scharle 1966, corrigida em Massey 1968; cf. também Batchelor 2011).

$$\{f(p, g(p)) : f \in \tau^2\} = \mu^1 \text{ sse } g = \Delta \text{ ou } g = \nabla \text{ ou } g = \sim\Diamond\vee\nabla^+ \text{ ou } g = \Box\vee\nabla^-.$$

Prova. Considere a tabela:

p	$\Delta(p)$	$\nabla(p)$	$\Box\nabla\nabla^-(p)$	$\sim\Diamond\nabla\nabla^+(p)$
T	F	T	F	T
F	F	T	T	F
T	T	F	T	F
F	T	F	F	T

Em cada caso os pares de valores de verdade de $p, g(p)$ são *todos* os pares de valores de verdade (TT, TF, FT, FF); e essas são as únicas funções com essa propriedade. Cada $f \in \tau^2$ gerará uma coluna de valores diferente para $f(p, g(p))$. Como existem dezesseis funções em τ^2 e dezesseis funções em μ^1 segue-se que $\{f(p, g(p)) : f \in \tau^2\} = \mu^1$. Se um dos pares TT, TF, FT, FF estivesse ausente da coluna de valores para $p, g(p)$ então a aplicação das dezesseis funções em τ^2 geraria menos do que dezesseis funções modais: e.g. se o valor TT estivesse ausente então $p \wedge g(p)$ teria o mesmo valor que $\perp(p, g(p))$.

□

Note que é o caráter radicalmente não vero-funcional que permite que as funções tenham a propriedade desejada. Se $g \in \mu^1$ é semi--vero-funcional então pelo menos um dos valores TT, TF, FT, FF estará ausente da tabela para $p, g(p)$. Se g é semi--vero-funcional, digamos determinada por T, então um dos valores TT, TF estará ausente da tabela para $p, g(p)$. (E.g., se $g = \Diamond$ então o valor TF estará ausente da tabela para $p, \Diamond p$.)

Há um fato similar, que mostra uma relação entre a forma normal Massey-Canty-Scharle para μ^2 e as funções predicativas.

Consideremos a forma normal Massey-Canty-Scharle para μ^2 . Existem certas funções $g_1, g_2, g_3 \in \mu^2$ tais que

$$\mu^2 = \{f(p, q, g_1(p, q), g_2(p, q), g_3(p, q)) : f \in \tau^5\}.$$

Uma vez que a propriedade de ser uma função predicativa é preservada por operadores vero-funcionais, e μ^2 contém funções não predicativas, as funções modais na forma normal acima não podem ser *todas* predicativas. De fato *nenhuma* delas pode ser predicativa, i.e.

Proposição. $\mu^2 \neq \{f(p, q, g_1(p, q), g_2(p, q), g_3(p, q)) : f \in \tau^5\}$ se algum g_i for predicativo.

Prova. As funções g_i devem atender a certas condições para que possam figurar numa forma normal Massey-Canty-Scharle; em particular cada g_i deve atender o seguinte: para cada valor de verdade a , o número de W 's onde $g_i(W, a) = T$ é o mesmo que o número de V 's onde $g_i(V, a) = F$. Na tabela para duas proposições cada a ocorre em oito W 's, e portanto as g_i devem ser verdadeiras em quatro e falsas em quatro das linhas onde cada a ocorre. Mostraremos que uma função predicativa não pode atender a esta condição.

Se uma função $f(p, q)$ é predicativa e $\langle W, a \rangle$ e $\langle V, a \rangle$ determinam o mesmo valor modal unário para as variáveis p, q então $f(W, a) = f(V, a)$. Ocorre que e.g. os valores $\langle \{T, F\}, T \rangle, \langle \{T, F\}, T \rangle$ para as variáveis p, q são determinados por cinco valores modais de grau 2 para o par p, q , viz. $\langle \langle TT, TF, FT, FF \rangle, TT \rangle, \langle \langle TT, TF, FT \rangle, TT \rangle, \langle \langle TT, TF, FF \rangle, TT \rangle, \langle \langle TT, FT, FF \rangle, TT \rangle, \langle \langle TT, FF \rangle, TT \rangle$. Se uma função é predicativa, deve ter o mesmo valor para cinco das linhas onde TT ocorre, não podendo portanto ter quatro T 's e quatro F 's para as linhas TT . Um argumento exatamente similar mostra que uma

função predicativa deve ter o mesmo valor em cinco linhas TF, em cinco linhas FT e em cinco linhas FF. $\square$

Este resultado parece ser generalizável para funções de grau arbitrário.

7. Quase vero-funcionalidade

Dizemos que uma função modal de n -ária f é *vero-funcional* se existe uma função de verdade n -ária g tal que

$$f(p_1 \dots p_n) \succsim g(p_1 \dots p_n)$$

é verdade para quaisquer proposições como valores de $p_1 \dots p_n$.

Proposição. Nenhuma função propriamente modal (i.e. função modal que não é função de verdade) é vero-funcional.

Prova. É obvio que nenhuma função propriamente modal satisfaz esta propriedade: se $f \in \mu - \tau$ então $f\langle W, a \rangle \neq f\langle V, a \rangle$ para algum W e V . E se $g \in \tau$, $g\langle W, a \rangle = g\langle V, a \rangle$ para todo W e V . Tais f, g não poderiam satisfazer nem mesmo a condição mais fraca:

$$f(p_1 \dots p_n) \equiv g(p_1 \dots p_n)$$

é verdadeiro para todas as proposições como valores para as variáveis $p_1 \dots p_n$. Se $f\langle W, a \rangle \neq f\langle V, a \rangle$ e $g(p_1 \dots p_n) = f(p_1 \dots p_n)$ quando o valor puramente modal de $p_1 \dots p_n$ é W , então $g(p_1 \dots p_n) \neq f(p_1 \dots p_n)$ quando o valor puramente modal de $p_1 \dots p_n$ é V . $\square$

Dizemos que uma função modal f é *quase vero-funcional* se, para cada sequência de proposições como valores das variáveis $p_1 \dots p_n$, existe um $g \in \tau^n$ tal que

$$f(p_1 \dots p_n) \succsim g(p_1 \dots p_n)$$

é verdadeiro.

Observação. A diferença entre vero-funcionalidade e quase vero-funcionalidade é a diferença entre

$$\exists f \in \tau^n \forall p_1 \dots p_n (f(p_1 \dots p_n) \succ \prec g(p_1 \dots p_n))$$

e

$$\forall p_1 \dots p_n \exists f \in \tau^n (f(p_1 \dots p_n) \succ \prec g(p_1 \dots p_n)).$$

A primeira implica a segunda, e isso se segue do cálculo de predicados: $\exists x \forall y Rxy \supset \forall x \exists y Rxy$ é válido. A conversa não vale – e.g. $\Box$ é quase vero-funcional mas não é vero-funcional.

Proposição. Toda função modal é quase vero-funcional.

Prova. Observaremos primeiro que todo $f \in \mu$ satisfaz a condição mais fraca:

$$\forall p_1 \dots p_n \exists g \in \tau^n (f(p_1 \dots p_n) \equiv g(p_1 \dots p_n)).$$

Isso é trivial: para cada escolha de valores para $p_1 \dots p_n$ temos $f(p_1 \dots p_n)$ verdadeiro ou $f(p_1 \dots p_n)$ falso. No primeiro caso $f(p_1 \dots p_n) \equiv \top(p_1 \dots p_n)$, no segundo caso $f(p_1 \dots p_n) \equiv \perp(p_1 \dots p_n)$.

A condição mais forte requer que para cada $f \in \mu$ e para cada escolha de valores para $p_1 \dots p_n$ exista um $g \in \tau$ tal que

$$f(p_1 \dots p_n) \succ \prec g(p_1 \dots p_n)$$

é verdadeiro.

Mas isso significa apenas que, onde W é o valor puramente modal de $p_1 \dots p_n$, nós temos $f\langle W, a \rangle = g(a)$ para cada $a \in W$. Certamente podemos designar um tal g em cada caso, e em alguns casos podemos designar vários tais g 's. $\square$

O fato de que as funções modais são quase vero-funcionais foi observado pelo autor; a descrição do fato apresentada nesta seção é muito próxima da que se encontra em Batchelor 2011.

Diremos que uma função de verdade f é *W-equivalente* a uma função de verdade g se $\forall w \in W (f(w) = g(w))$. E.g. diremos que $\wedge$ é $\{\langle T, T \rangle, \langle T, F \rangle\}$ -equivalente a $\equiv$.

Proposição. A cardinalidade dos conjuntos de funções W -equivalentes é 2^k onde $k = |\{T, F\}^n| - |W|$. $\square$

8. Redutos vero-funcionais

Examinemos μ^1 .

p	$\top$	$\Diamond$	$\sim\Box$	∇	$\sim\nabla^-$	id	$\sim\Diamond \vee \nabla^+$	∇^+	$\sim\nabla^+$	$\Box \vee \nabla^-$	$\sim$	∇^-	Δ	$\Box$	$\sim\Diamond$	$\perp$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F
T	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F

Se p é contingente, i.e. o valor puramente modal de p é {T, F}, então

$$\Diamond p = \sim\Box p = \nabla p = \top p;$$

$$\sim\nabla^- p = (\sim\Diamond p \vee \nabla^+ p) = \nabla^+ p = \text{id}(p);$$

$$\sim\nabla^+ p = (\Box p \vee \nabla^- p) = \nabla^- p = \sim p;$$

$$\Delta p = \Box p = \sim\Diamond p = \perp p.$$

Se p é necessária, i.e. o valor puramente modal de p é {T}, então

$$\Diamond p = \sim\nabla^+ p = \sim\nabla^- p = (\Box p \vee \nabla^- p) = \Box p = \Delta p = \text{id}(p) = \top p;$$

$$\sim\Diamond p = \nabla^+ p = \nabla^- p = (\sim\Diamond p \vee \nabla^+ p) = \sim\Box p = \nabla p = \sim p = \perp p.$$

Se p é impossível, i.e. o valor puramente modal de p é {F}, então

$$\Diamond p = \nabla^- p = \nabla^+ p = (\Box p \vee \nabla^- p) = \nabla p = \Box p = \text{id}(p) = \perp p;$$

$$\sim \Diamond p = \sim \nabla^- p = \sim \nabla^+ p = (\sim \Diamond p \vee \nabla^+ p) = \Delta p = \sim \Box p = \sim p = \top p.$$

Cada $f \in \mu^1$ pode ser expresso por uma trinca $\langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ onde $g_i \in \tau^1$ e $f \approx \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ significa: se p é contingente, então $f(p) \succ \prec g_1(p)$; se p é necessário, então $f(p) \succ \prec g_2(p)$; e se p é impossível, então $f(p) \succ \prec g_3(p)$.

Repare que para cada $f \in \mu^1$ podemos escolher $g_2 = g_3$. Isso nos permite dizer que para cada $f \in \mu^1$, nós temos $f \approx \langle h_1, h_2 \rangle$ onde $h_i \in \tau^1$ e $f \approx \langle h_1, h_2 \rangle$ significa: se p é contingente, $f(p) \succ \prec h_1(p)$; caso contrário (i.e. se p é rígido) $f(p) \succ \prec h_2(p)$. Temos portanto o seguinte:

$$\top \approx \langle \top, \top \rangle$$

$$\Diamond \approx \langle \top, \text{id} \rangle$$

$$\sim \Box \approx \langle \top, \sim \rangle$$

$$\nabla \approx \langle \top, \perp \rangle$$

$$\sim \nabla^- \approx \langle \text{id}, \top \rangle$$

$$\text{id} \approx \langle \text{id}, \text{id} \rangle$$

$$\sim \Diamond \vee \nabla^+ \approx \langle \text{id}, \sim \rangle$$

$$\nabla^+ \approx \langle \text{id}, \perp \rangle$$

$$\sim \nabla^+ \approx \langle \sim, \top \rangle$$

$$\Box \vee \nabla^- \approx \langle \sim, \text{id} \rangle$$

$$\sim \approx \langle \sim, \sim \rangle$$

$$\nabla^- \approx \langle \sim, \perp \rangle$$

$$\Delta \approx \langle \perp, \top \rangle$$

$$\Box \approx \langle \perp, \text{id} \rangle$$

$$\sim \Diamond \approx \langle \perp, \sim \rangle$$

$$\perp \approx \langle \perp, \perp \rangle.$$

É fácil ver na tabela acima como os pares de funções de verdade correspondem a funções modais. A primeira sub-tabela é exatamente igual a uma tabela de verdade para uma variável. E a segunda e a terceira sub-tabelas juntas podem simular uma tabela de verdade para uma variável.

Dado $f \in \mu^1$, diremos que um par $\langle f_1, f_2 \rangle$, $f_i \in \tau^1$, é um *reduto vero-funcional* de f se $f \approx \langle f_1, f_2 \rangle$.

Podemos tratar as funções modais de dois argumentos essencialmente da mesma maneira e associar a cada $f \in \mu^2$ uma óctupla $\langle f_1, \dots, f_8 \rangle$, $f_i \in \tau^2$. Utilizaremos sub-tabelas complementares para simular tabelas de verdade de dois argumentos, e assim as quinze sub-tabelas de uma tabela modal para dois argumentos são arranjadas de maneira a simular um conjunto de oito tabelas de verdade, como na seguinte tabela:

$p\ q$	$f \in \mu^2$	$g_i \in \tau^2$
TT		g_1
TF		
FT		
FF		
TT		g_2
TF		
FT		
FF		
TT		g_3
TF		
FF		
FT		
TT		g_4
FT		
FF		
TF		
TF		g_5
FT		
FF		
TT		
TT		g_6
TF		
FT		
FF		
TT		g_7
FT		
TF		
FF		
TT		g_8
FF		
TF		
FT		

Podemos usar $f \approx \langle f_1 \dots f_8 \rangle$ de maneira similar à definida para o caso de funções de grau 1. Dado $f \in \mu^2$, uma sequência $\langle f_1 \dots f_8 \rangle$, $f_i \in \tau^2$ é um *reducto vero-funcional* de g se $f \approx \langle f_1 \dots f_8 \rangle$.

Estes redutos vero-funcionais são bastante vívidos semanticamente. Eu até acredito que eles iluminam o sentido de algumas das nossas funções modais mais recônditas. Entendo por $\Diamond \approx \langle \top, \text{id} \rangle$ que: dizer de uma proposição contingente que ela é possível é afirmar algo necessário; e dizer de uma proposição rígida que ela é possível é equivalente a afirmar a proposição, i.e.: dizer de uma proposição necessária que ela é possível também é dizer algo necessário; e dizer de uma proposição impossível que ela é possível é dizer algo impossível. Similarmente $\nabla^- \approx \langle \sim, \perp \rangle$. Dizer de uma proposição contingente que ela é contingentemente falsa é equivalente a negar a proposição: é uma afirmação contingentemente falsa se a proposição for contingentemente verdadeira, e é uma afirmação contingentemente verdadeira se a proposição for contingentemente falsa; dizer de uma proposição rígida que ela é contingentemente falsa é equivalente a afirmar uma contradição. Vejamos agora os mais exóticos. $\Box \vee \nabla^- \approx \langle \sim, \text{id} \rangle$. Dizer de uma proposição contingente que ela é necessária ou contingentemente falsa é o mesmo que negá-la; dizer de uma proposição rígida que ela é necessária ou contingentemente falsa é o mesmo que afirmá-la. (É o famoso ‘sim, mas só se não tiver outro jeito’.) $\sim \Diamond \vee \nabla^+ \approx \langle \text{id}, \sim \rangle$: é a afirmação das proposições contingentes e a negação das proposições rígidas.

9. Valores puramente modais e funções de verdade

Os valores puramente modais são objetos centrais da teoria de funções modais. Uma caracterização vívida desses objetos é, portanto, muito bem vinda. Há um fato bastante simples que pode contribuir para este objetivo.

Proposição. O número de funções de verdade de grau n é o sucessor do número de valores puramente modais de grau n .

Prova. Os valores puramente modais de grau n são os subconjuntos não vazios de $\{T, F\}^n$. $\{T, F\}^n$ tem 2^n elementos, logo o número de valores puramente modais de grau n é $(2 \uparrow 2^n) - 1$. O número de valores de verdade de grau n é 2^n , logo o número de funções de verdade de grau n é $2 \uparrow 2^n$. $\square$

Há uma relação natural entre valores puramente modais de grau n e funções de verdade de grau n : para todo $W \subseteq \{T, F\}^n$ (em particular para todo tal $W \neq \emptyset$) existe um $f \in \tau^n$ tal que $\text{Sat}(f) = W$. (Lembramos que $\text{Sat}(f)$ denota o conjunto das sequências de valores de verdade $v_1 \dots v_n$ tais que $f(v_1 \dots v_n) = T$.)

Se $\text{Sat}(f) = W$, diremos que f é a *função característica* de W . Podemos dizer, portanto, que $\top^1$ é a função característica de $\{T, F\}$, id é a função característica de $\{T\}$ e $\sim$ é a função característica de $\{F\}$.

Considerações similares se aplicam a funções e valores puramente modais de cada um dos outros graus. Examinemos em detalhe o caso das funções e valores puramente modais de grau 2.

p	q	$\top^2$	$\vee$	$\subset$	p	$\supset$	q	$\equiv$	$\wedge$		$\underline{\vee}$	$\sim q$	∇	$\sim p$	$\not\subset$	$\downarrow$	$\perp^2$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F

Os valores puramente modais de grau 2 podem receber os seguintes nomes, que nem são muito imaginativos nem têm grande valor mnemônico, mas serão úteis em definições subsequentes.

Definição. $W_1 = \{TT, TF, FT, FF\}$; $W_2 = \{TT, TF, FT\}$; $W_3 = \{TT, TF, FF\}$; $W_4 = \{TT, FT, FF\}$; $W_5 = \{TF, FT, FF\}$; $W_6 = \{TT, TF\}$; $W_7 = \{TT, FT\}$; $W_8 = \{TT, FF\}$; $W_9 = \{TF, FT\}$; $W_{10} = \{TF, FF\}$; $W_{11} = \{FT, FF\}$; $W_{12} = \{TT\}$; $W_{13} = \{TF\}$; $W_{14} = \{FT\}$; $W_{15} = \{FF\}$.

É claro que $\top^2$ é a função característica de W_1 , $\vee$ é a função característica de W_2 , etc. Proponho portanto os seguintes ‘apelidos’ para os valores puramente modais de grau 2:

$$W_1 = W_{\top}; \quad W_2 = W_{\vee}; \quad W_3 = W_{\subset}; \quad W_4 = W_{\supset}; \quad W_5 = W_{|};$$

$$W_6 = W_p; \quad W_7 = W_q; \quad W_8 = W_{\equiv}; \quad W_9 = W_{\underline{\vee}}; \quad W_{10} = W_{\sim q};$$

$$W_{11} = W_{\sim p}; \quad W_{12} = W_{\wedge}; \quad W_{13} = W_{\not\Rightarrow}; \quad W_{14} = W_{\not\Leftarrow}; \quad W_{15} = W_{\downarrow}.$$

Estes apelidos têm um valor mnemônico considerável: acredito que todo lógico sabe de cor qual é $\text{Sat}(f)$ para $f \in \tau^2$. Denotaremos os valores puramente modais pelo nome ou pelo apelido, conforme for mais conveniente.

10. Composição de funções

Uma maneira de determinar o resultado da composição de funções modais é tratar das iterações de fórmulas que expressam tais funções.

Seja $f(p, q)$ a *equivalência qualificada*, i.e.

$$(\sim p \wedge \sim q) \vee (\Box p \wedge \nabla^+ q) = \alpha$$

– apresentada em Batchelor 2011 como função de Sheffer binária para S5.

Para determinar qual é a função $f(p, f(p, q))$ fazemos a iteração: $(\sim p \wedge \sim \alpha) \vee (\Box p \wedge \nabla^+ \alpha)$, i.e.

$$(\sim p \wedge \sim((\sim p \wedge \sim q) \vee (\Box p \wedge \nabla^+ q))) \vee (p \wedge \nabla^+((\sim p \wedge \sim q) \vee (\Box p \wedge \nabla^+ q))),$$

e avaliamos esta fórmula usando a tabela modal.

Este método é eficaz no sentido de que sempre podemos determinar o resultado de uma composição de funções através da iteração de fórmulas que expressam tais funções. Mas ao partirmos de uma função arbitrária, à qual nenhuma fórmula usual corresponde, podemos ser levados a ter que tratar de composição de formas normais.

É um fato interessante que o resultado da composição de funções modais pode ser determinado a partir de seus redutos vero-funcionais. Mostraremos como fazer isso. Trataremos em detalhe o caso de composições de funções modais de no máximo dois

argumentos. O caso para n argumentos pode ser tratado da mesma maneira, com algumas adaptações.

Algumas considerações preliminares serão úteis.

Se f, g são funções de verdade unárias e $f(g(p))$ é equivalente a $h(p)$, podemos dizer que $f(g) = h$. E.g.: diremos que $\sim(\top) = \perp$, pois $\models \sim\top p \equiv \perp p$.

Se f, g, h são funções de verdade binárias e $f(g(p, q), h(p, q)) = j(p, q)$, podemos dizer que $f(g, h) = j$. E.g. diremos que $\wedge(\supset, \subset) = \equiv$, pois $\models (p \supset q) \wedge (p \subset q) \equiv (p \equiv q)$.

Comecemos pelo caso de funções modais de um argumento. Examinemos, por exemplo, a iteração das funções $\sim\Diamond\forall\nabla^+ \approx \langle \text{id}, \sim \rangle$ e $\Box\forall\nabla^- \approx \langle \sim, \text{id} \rangle$. Consultando a tabela modal podemos verificar que $\sim\Diamond\forall\nabla^+(\Box\forall\nabla^-(p)) = \sim p$. A composição destas funções a partir de seus redutos vero-funcionais pode ser expressa por

$$\langle \text{id}, \sim \rangle \circ \langle \sim, \text{id} \rangle = \langle \langle \text{id}(\sim), \sim(\text{id}) \rangle \rangle = \langle \sim, \sim \rangle.$$

A composição dos redutos vero-funcionais neste caso funciona de maneira ‘linear’: $\langle f_1, f_2 \rangle \circ \langle g_1, g_2 \rangle = \langle f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2 \rangle$. Consideremos, por outro lado, a iteração das funções $\Box \approx \langle \perp, \text{id} \rangle$ e $\Diamond \approx \langle \top, \text{id} \rangle$. Sabemos que $\Box\Diamond p = \Diamond p$ e, portanto, que $\langle \perp, \text{id} \rangle \circ \langle \top, \text{id} \rangle = \langle \top, \text{id} \rangle$. Neste caso a iteração ocorre de maneira ‘não linear’: $\langle f_1, f_2 \rangle \circ \langle g_1, g_2 \rangle = \langle f_2 \circ g_1, f_2 \circ g_2 \rangle$. ($\langle \perp, \text{id} \rangle \circ \langle \top, \text{id} \rangle = \langle \text{id}(\top), \text{id}(\text{id}) \rangle = \langle \top, \text{id} \rangle$.)

Procuremos compreender melhor a ‘mecânica’ destas composições. Lembremos que $\langle f_1, f_2 \rangle p$ é lido: ‘ $f_1(p)$, se p é contingente; $f_2(p)$ se p é rígido’. Ora, o mesmo se aplica

para as iterações. $\langle f_1, f_2 \rangle \langle g_1, g_2 \rangle p$ é lido: ‘ $f_1(\langle g_1, g_2 \rangle p)$, se $\langle g_1, g_2 \rangle p$ é contingente; $f_2(\langle g_1, g_2 \rangle p)$ caso contrário’. A não linearidade na composição $\langle \perp, \text{id} \rangle \circ \langle \top, \text{id} \rangle$ ocorre porque quando p é contingente $\langle \top, \text{id} \rangle p = \top(p)$ e $\top(p)$ não é contingente.

A composição de funções modais unárias pode ser definida através das seguintes cláusulas:

$$\langle f_1, f_2 \rangle \circ \langle g_1, g_2 \rangle = \langle f_2(g_1), f_2(g_2) \rangle \text{ se } g_1 = \top \text{ ou } g_1 = \perp;$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle \circ \langle g_1, g_2 \rangle = \langle f_1(g_1), f_2(g_2) \rangle \text{ caso contrário.}$$

As cláusulas acima são justificadas pelos seguintes teoremas de S5:

$$\models \Delta \top(p)$$

$$\models \Delta \perp(p)$$

$$\models \nabla(p) \supset \nabla(\text{id}(p))$$

$$\models \nabla(p) \supset \nabla(\sim p).$$

O leitor poderá verificar que, determinadas de maneira usual ou via redutos vero-funcionais, a iteração das funções modais unárias é a apresentada na seguinte tabela (já apresentada em Batchelor 2011):

	$\top$	$\perp$	id	$\sim$	$\square$	$\sim\square$	$\diamond$	$\sim\diamond$	Δ	∇	∇^+	$\sim\nabla^+$	∇^-	$\sim\nabla^-$	$\square\vee\nabla^-$	$\sim\diamond\vee\nabla^+$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
id	$\top$	$\perp$	id	$\sim$	$\square$	$\sim\square$	$\diamond$	$\sim\diamond$	Δ	∇	∇^+	$\sim\nabla^+$	∇^-	$\sim\nabla^-$	$\square\vee\nabla^-$	$\sim\diamond\vee\nabla^+$
$\sim$	$\perp$	$\top$	$\sim$	id	$\sim\square$	$\square$	$\sim\diamond$	$\diamond$	∇	Δ	$\sim\nabla^+$	∇^+	$\sim\nabla^-$	∇^-	$\sim\diamond\vee\nabla^+$	$\square\vee\nabla^-$
$\square$	$\top$	$\perp$	$\square$	$\sim\diamond$	$\square$	$\sim\square$	$\diamond$	$\sim\diamond$	Δ	∇	$\perp$	Δ	$\perp$	Δ	$\square$	$\sim\diamond$
$\sim\square$	$\perp$	$\top$	$\sim\square$	$\diamond$	$\sim\square$	$\square$	$\sim\diamond$	$\diamond$	∇	Δ	$\top$	∇	$\top$	∇	$\sim\square$	$\diamond$
$\diamond$	$\top$	$\perp$	$\diamond$	$\sim\square$	$\square$	$\sim\square$	$\diamond$	$\sim\diamond$	Δ	∇	∇	$\top$	∇	$\top$	$\diamond$	$\sim\square$
$\sim\diamond$	$\perp$	$\top$	$\sim\diamond$	$\square$	$\sim\square$	$\square$	$\sim\diamond$	$\diamond$	∇	Δ	Δ	$\perp$	Δ	$\perp$	$\sim\diamond$	$\square$
Δ	$\top$	$\top$	Δ	Δ	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ
∇	$\perp$	$\perp$	∇	∇	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	∇	∇	∇	∇	∇	∇
∇^+	$\perp$	$\perp$	∇^+	∇^-	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	∇^+	∇^-	∇^-	∇^+	∇^-	∇^+
$\sim\nabla^+$	$\top$	$\top$	$\sim\nabla^+$	$\sim\nabla^-$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\sim\nabla^+$	$\sim\nabla^-$	$\sim\nabla^-$	$\sim\nabla^+$	$\sim\nabla^-$	$\sim\nabla^+$
∇^-	$\perp$	$\perp$	∇^-	∇^+	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	∇^-	∇^+	∇^+	∇^-	∇^+	∇^-
$\sim\nabla^-$	$\top$	$\top$	$\sim\nabla^-$	$\sim\nabla^+$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\sim\nabla^-$	$\sim\nabla^+$	$\sim\nabla^+$	$\sim\nabla^-$	$\sim\nabla^+$	$\sim\nabla^-$
$\square\vee\nabla^-$	$\top$	$\perp$	$\square\vee\nabla^-$	$\sim\diamond\vee\nabla^+$	$\square$	$\sim\square$	$\diamond$	$\sim\diamond$	Δ	∇	∇^-	$\sim\nabla^-$	∇^+	$\sim\nabla^+$	id	$\sim$
$\sim\diamond\vee\nabla^+$	$\perp$	$\top$	$\sim\diamond\vee\nabla^+$	$\square\vee\nabla^-$	$\sim\square$	$\square$	$\sim\diamond$	$\diamond$	∇	Δ	$\sim\nabla^-$	∇^-	$\sim\nabla^+$	∇^+	$\sim$	id

De maneira geral, a determinação da iteração de funções modais a partir de seus redutos vero-funcionais passa pela determinação do valor puramente modal dos argumentos da função, para cada um dos valores das variáveis. A composição de funções modais binárias $f \approx \langle f_1 \dots f_8 \rangle$, $g \approx \langle g_1 \dots g_8 \rangle$, $h \approx \langle h_1 \dots h_8 \rangle$, $f(g, h) = i \approx \langle i_1 \dots i_8 \rangle$, é determinada em oito etapas.

(1) Para determinar i_1 , consideramos $f(g, h)$ para argumentos cujo valor é $W_\top$. Neste caso $f(g, h)$ é estritamente equivalente a $f(g_1, h_1)$, pois g_1 e h_1 são as funções de verdade que representam g e h quando o valor puramente modal dos argumentos é $W_\top$. Consideramos então qual é o valor puramente modal, em $W_\top$, de $\langle g_1 h_1 \rangle$, i.e. o conjunto dos valores de verdade binários que o par $\langle g_1(p, q), g_2(p, q) \rangle$ assume enquanto p, q percorrem os valores em $W_\top$. Se f_j é a função de verdade que representa f para o valor puramente modal de $\langle g_1, h_1 \rangle$ em $W_\top$, então $i_1 = f_j(g_1, h_1)$.

(2) Para determinar i_2 , temos de considerar dois casos: o caso $W_\vee$ e o caso $W_\downarrow$. Em ambos os casos $f(g, h) = f(g_2, h_2)$, pois g_2 e h_2 representam g e h para esses valores puramente modais. Verificamos em cada um dos dois casos qual é o valor puramente modal do par $\langle g_2, h_2 \rangle$. O valor puramente modal de $\langle g_2, h_2 \rangle$ em $W_\vee$ é o conjunto dos valores de verdade binários que $g_2(p, q)$ e $h_2(p, q)$ assumem enquanto p, q percorrem os valores em $W_\vee$; e similarmente para $W_\downarrow$.

$i_2' = f_j'(g_2, h_2)$ onde f_j' é o representante vero-funcional de f para o valor puramente modal de $\langle g_2, h_2 \rangle$ em $W_\vee$.

$i_2'' = f_j''(g_2, h_2)$ onde f_j'' é o representante vero-funcional de f para o valor puramente modal de $\langle g_2, h_2 \rangle$ em $W_\downarrow$.

i_2 é a (sempre única) função de verdade que pertence à intersecção do conjunto das funções $W_\vee$ -equivalentes a i_2' com conjunto das funções $W_\downarrow$ -equivalentes a i_2'' . Ou seja i_2 é a função de verdade que concorda com i_2' nas linhas presentes em $W_\vee$, e concorda com i_2'' na linha de $W_\downarrow$.

Os casos de (3) a (8) são similares ao caso (2).

As seguintes definições serão úteis na apresentação formal do procedimento que acabamos de descrever.

Definição. λ é a função que atribui, a cada trinca $\langle W, f, g \rangle$ onde W é um valor puramente modal binário e f e g são funções de verdade binárias, o conjunto dos pares de valores de verdade $\langle v_1, v_2 \rangle$ tais que, para algum $w \in W$, $f(w) = v_1$ e $g(w) = v_2$. Assim, se W é o valor puramente modal de p, q , então $\lambda\langle W, f, g \rangle$ é o valor puramente modal de $f(p, q), g(p, q)$.

λ é uma função muito similar à função ‘curso de valores’, definida na Seção 4 acima (‘Um critério de ordem para tautologias’). A função $V(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ associa a cada sequência $\alpha_1 \dots \alpha_n$ (onde α_i é construída a partir de $p_1 \dots p_k$ e de funções de verdade), um conjunto de valores de verdade n -ários: o conjunto dos valores de verdade n -ários que $\alpha_1 \dots \alpha_n$ assume enquanto $p_1 \dots p_k$ percorrem os 2^k valores de verdade k -ários. A função λ associa, a cada valor modal binário W e par de funções de verdade binárias f, g , o curso de valores do par $f(p, q), g(p, q)$ (onde p, q percorrem apenas os valores em W).

Definição. δ é a função que associa, a cada valor puramente modal W de grau n e cada função de verdade f de grau n , o conjunto das funções de verdade W -equivalentes a f .

Definição. θ é a função que atribui a cada valor puramente modal W_i , $i \leq 8$, o número i ; e a cada valor puramente modal W_i , $i > 8$, o índice do valor puramente modal ‘complementar’ a W_i (i.e. $\{T, F\}^2 - W_i$). Ou seja:

$$\theta(W_1) = 1;$$

$$\theta(W_2) = \theta(W_{15}) = 2;$$

$$\theta(W_3) = \theta(W_{14}) = 3;$$

$$\theta(W_4) = \theta(W_{13}) = 4;$$

$$\theta(W_5) = \theta(W_{12}) = 5;$$

$$\theta(W_6) = \theta(W_{11}) = 6;$$

$$\theta(W_7) = \theta(W_{10}) = 7;$$

$$\theta(W_8) = \theta(W_9) = 8.$$

E.g. se f é uma função modal binária cujo reduto vero-funcional é $\langle f_1 \dots f_8 \rangle$ e W_{10} é o valor puramente modal de $g(p, q)$, $h(p, q)$, então $f(g(p, q), h(p, q)) = f_7(g(p, q), h(p, q))$.

A composição de funções modais binárias através dos redutos vero-funcionais pode ser definida a partir das seguintes cláusulas:

$$\langle f_1, \dots, f_8 \rangle (\langle g_1, \dots, g_8 \rangle, \langle h_1, \dots, h_8 \rangle) = \langle i_1, \dots, i_8 \rangle,$$

onde

$i_1 = f_i(g_1, h_1)$, onde

$i = \theta(\lambda\langle W_1, g_1, h_1 \rangle)$.

$i_2 \in \delta(W_2, i_2') \cap \delta(W_{15}, i_2'')$, onde

$i_2' = f_j(g_2, h_2)$, onde

$j = \theta(\lambda\langle W_2, g_2, h_2 \rangle)$; e

$i_2'' = f_k(g_2, h_2)$, onde

$k = \theta(\lambda\langle W_{15}, g_2, h_2 \rangle)$.

...

$i_8 \in \delta(W_8, i_8') \cap \delta(W_9, i_8'')$, onde

$i_8' = f_j(g_8, h_8)$, onde

$j = \theta(\lambda\langle W_8, g_8, h_8 \rangle)$; e

$i_8'' = f_k(g_8, h_8)$, onde

$k = \theta(\lambda\langle W_9, g_8, h_8 \rangle)$.

Ilustraremos nosso método considerando a função $f \approx \langle \supset, \supset, \supset, \nabla, \nabla, \supset, \mid, \mid \rangle$ apresentada em Massey 1967. Neste artigo, a prova de que $f(p, p) = \sim p$, $f(p, f(p, q)) = p \supset q$, $f(f(f(p, p), p), p) \supset p = \Diamond p$ é deixada como um exercício.

Repare que destes fatos segue-se que f é função de Sheffer para μ , i.e. todas as funções modais são definíveis em termos de f . (Nós vimos que todas as funções são definíveis em termos de $\sim, \vee, \Diamond$, e é claro que $\vee$ é definível em termos de $\sim, \supset$.)

Consideremos o reduto vero-funcional de $f(p, f(p, q))$:

$$\langle \supset, \supset, \supset, \nabla, \nabla, \supset, \mid, \mid \rangle \langle \langle p, p, p, p, p, p, p, p \rangle, \langle \supset, \supset, \supset, \nabla, \nabla, \supset, \mid, \mid \rangle \rangle = \langle g_1 \dots g_8 \rangle.$$

(1)

$$\lambda \langle W_{\top}, p, p \supset q \rangle = W_{\vee} = W_2$$

$$\theta(W_2) = 2, f_2 = \supset$$

$$g_1 = p \supset (p \supset q) = p \supset q$$

(2)

$$\lambda \langle W_{\vee}, p, p \supset q \rangle = W_{\vee} = W_2$$

$$\theta(W_2) = 2, f_2 = \supset$$

$$g_2' = p \supset (p \supset q) = p \supset q$$

$$\lambda \langle W_{\downarrow}, p, p \supset q \rangle = W_{\varphi} = W_{14}$$

$$\theta(W_{14}) = 3, f_3 = \supset$$

$$g_2'' = p \supset (p \supset q) = p \supset q$$

$$g_2 = p \supset q \in \delta\langle W_{\vee}, p \supset q \rangle \cap \delta\langle W_{\downarrow}, p \supset q \rangle$$

$$(3)$$

$$\lambda\langle W_{\subset}, p, p \supset q \rangle = W_{\vee} = W_2$$

$$\theta(W_2) = 2, f_2 = \supset$$

$$g_3' = p \supset (p \supset q) = p \supset q$$

$$\lambda\langle W_{\subset}, p, p \supset q \rangle = W_{\subset} = W_{14}$$

$$\theta(W_{14}) = 3, f_3 = \supset$$

$$g_3'' = p \supset (p \supset q) = p \supset q$$

$$g_3 = p \supset q \in \delta\langle W_{\subset}, p \supset q \rangle \cap \delta\langle W_{\subset}, p \supset q \rangle$$

$$(4)$$

$$\lambda\langle W_{\supset}, p, p \not\supset q \rangle = W_{\sim q} = W_{10}$$

$$\theta(W_{\sim q}) = 7, f_7 = \mid$$

$$g_4' = p \mid (p \not\supset q) = p \supset q$$

$$\lambda\langle W_{\not\supset}, p, p \not\supset q \rangle = W_{\not\supset} = W_{13}$$

$$\theta(W_{\sup}) = 4, f_4 = \sup$$

$$g_4'' = p \sup (p \sup q) = p \wedge q$$

$$g_4 = p \sup q \in \delta\langle W_{\sup}, p \sup q \rangle \cap \delta\langle W_{\sup}, p \wedge q \rangle$$

(5)

$$\lambda\langle W_{\mid}, p, p \sup q \rangle = W_{\equiv} = W_8$$

$$\theta(W_{\equiv}) = 8, f_8 = \mid$$

$$g_5' = p \mid (p \sup q) = p \sup q$$

$$\lambda\langle W_{\wedge}, p, p \sup q \rangle = W_{\sup} = W_{13}$$

$$\theta(W_{\sup}) = 4, f_4 = \sup$$

$$g_5'' = p \sup (p \sup q) = p \wedge q$$

$$g_5 = p \sup q \in \delta\langle W_{\mid}, p \sup q \rangle \cap \delta\langle W_{\wedge}, p \wedge q \rangle$$

(6)

$$\lambda\langle W_p, p, p \sup q \rangle = W_p = W_6$$

$$\theta(W_p) = 6, f_6 = \sup$$

$$g_6' = p \sup (p \sup q) = p \sup q$$

$$\lambda\langle W_{\sim p}, p, p \sup q \rangle = W_{\varepsilon} = W_{14}$$

$$\theta(W_{\varphi}) = 3, f_3 = \supset$$

$$g_6'' = p \supset (p \supset q) = p \supset q$$

$$g_6 = p \supset q \in \delta\langle W_p, p \supset q \rangle \cap \delta\langle W_{\sim p}, p \supset q \rangle$$

$$(7)$$

$$\lambda\langle W_q, p, p \mid q \rangle = W_{\underline{\vee}} = W_9$$

$$\theta(W_{\underline{\vee}}) = 8, f_8 = \mid$$

$$g_7' = p \mid (p \mid q) = p \supset q$$

$$\lambda\langle W_{\sim q}, p, p \mid q \rangle = W_q = W_7$$

$$\theta(W_q) = 7, f_7 = \mid$$

$$g_7'' = p \mid (p \mid q) = p \supset q$$

$$g_7 = p \supset q \in \delta\langle W_7, p \supset q \rangle \cap \delta\langle W_{11}, p \supset q \rangle$$

$$(8)$$

$$\lambda\langle W_{\Rightarrow}, p, p \mid q \rangle = W_{\underline{\vee}} = W_9$$

$$\theta(W_{\underline{\vee}}) = 8, f_8 = \mid$$

$$g_8' = p \mid (p \mid q) = p \supset q$$

$$\lambda\langle W_{\underline{\vee}}, p, p \mid q \rangle = W_q = W_7$$

$$\theta(W_q) = 7, f_7 = \mid$$

$$g_8'' = p \mid (p \mid q) = p \supset q$$

$$g_8 = p \supset q \in \delta\langle W_{\equiv}, p \supset q \rangle \cap \delta\langle W_{\downarrow}, p \supset q \rangle.$$

$$\text{Logo, } f(p, f(p, q)) = p \supset q.$$

Consideremos o reduto vero-funcional de $f(p, p)$:

$$\langle \supset, \supset, \supset, \nabla, \nabla, \supset, \mid, \mid \rangle (\langle p, p, p, p, p, p, p, p \rangle, \langle p, p, p, p, p, p, p, p \rangle) = \langle g_1 \dots g_8 \rangle.$$

Note que o valor puramente modal do par p, p é sempre um dentre $W_{\equiv}, W_{\wedge}, W_{\downarrow}$. Note, além disso, que o valor puramente modal do par p, p depende apenas do valor puramente modal unário de p . Estes valores puramente modais binários podem ser chamados de *representantes diretos* de valores puramente modais unários. O valor puramente modal do par $p, \sim p$ é um dentre $W_{\downarrow}, W_{\nabla}, W_{\nabla}$. Talvez valha a pena chamar esses valores puramente modais binários de *representantes indiretos* de valores puramente modais unários.

Ao tratar da função $f(p, p)$ podemos usar um ‘atalho’ considerando apenas os casos $W_{\equiv}, W_{\wedge}$ e $W_{\downarrow}$.

$$\text{Em } W_{\equiv}, f(p, p) \text{ é equivalente a } p \downarrow p = \sim p;$$

$$\text{em } W_{\wedge}, f(p, p) \text{ é equivalente a } p \nabla p = \perp p;$$

$$\text{em } W_{\downarrow} f(p, p) \text{ é equivalente a } p \supset p = \top p.$$

$$\sim p \in \delta\langle W_{\wedge} \perp p \rangle \cap \delta\langle W_{\downarrow} \top p \rangle.$$

Logo $f(p, p) = \sim p$.

Vejamos agora a definição de $\Diamond p$: $f(f(f(p, p), p), p) \supset p$.

Quando p é contingente, o valor do par p, p é $W_{\equiv}$.

Comecemos com $f(f(f(p, p), p), p)$.

Em $W_{\equiv}$, $f(p, p) = f_8(p, p) = (p \mid p) = \sim p$.

$\lambda(W_{\equiv}, \sim p, p) = W_{\underline{\vee}}$

$\theta(W_{\underline{\vee}}) = 8$

$f(f(p, p), p) = f_8(\sim p, p) = \sim p \mid p = \top p$

$\lambda(W_{\equiv}, \top p, p) = W_p$

$\theta(W_p) = 6$; $f_6 = \supset$

$f(f(f(p, p), p), p) = f_6(\top p, p) = \top p \supset p = \text{id}(p)$,

i.e.: quando p é contingente, $f(f(f(p, p), p), p)$ é $\text{id}(p)$; logo

$f(f(f(p, p), p), p) \supset p = \text{id}(p) \supset p = \top p$.

Quando p é necessário, o valor modal do par p, p é $W_{\wedge}$.

Em $W_{\wedge}$, $f(p, p)$ é $f_5(p, p) = p \nrightarrow p = \perp p$.

$\lambda(W_{\wedge}, \perp p, p) = W_{\varnothing}$

$$\theta(W_{\sup}) = 3; f_3 = \sup$$

$$f(f(p, p), p) = f_3(\perp p, p) = \perp p \sup p = \top p$$

$$\lambda(W_{\sup}, \top p, p) = W_{\sup}$$

$$\theta(W_{\sup}) = 5; f_5 = \neq$$

$$f(f(f(p, p), p), p) = f_5(\top p, p) = \top p \neq p = \perp p$$

$$f(f(f(p, p), p), p) \sup p = \perp p \sup p = \top p.$$

Quando p é impossível o valor modal do par p, p é $W_{\downarrow}$.

Em $W_{\downarrow}$, $f(p, p)$ é $f_2(p, p) = p \sup p = \top p$.

$$\lambda(W_{\downarrow} \top p, p) = W_{\neq}$$

$$\theta(W_{\neq}) = 4; f_4 = \neq$$

$$f(f(p, p), p) = f_4(\top p, p) = \top p \neq p = \perp p$$

$$\lambda(W_{\downarrow}, \perp p, p) = W_{\downarrow}$$

$$\theta(W_{\downarrow}) = 2; f_2 = \sup$$

$$f(f(f(p, p), p), p) = f_2(\perp p, p) = \perp p \sup p = \top p$$

$$f(f(f(p, p), p), p) \sup p = \top p \sup p = \text{id}(p).$$

$$\text{id}(p) \in \delta(W_{\sup} \top p) \cap \delta(W_{\downarrow}, \text{id}(p)).$$

$$\text{Logo } f(f(f(p, p), p), p) \supset p \approx \langle \top, \text{id} \rangle \approx \diamond p. \quad \square$$

11. Polaridade

Os redutos vero-funcionais das funções modais unárias são bastante vívidos semanticamente. O mesmo não pode ser dito dos redutos vero-funcionais para funções modais binárias. E.g. o reduto da implicação estrita é

$$\langle \perp, \downarrow, \not\vdash, \supset, \wedge, \sim p, q, \equiv \rangle,$$

e isso não ajuda a iluminar o significado de $p \prec q$.

Suponho que a maneira mais clara de expressar o significado de qualquer função puramente modal (i.e. função que só depende do valor puramente modal) é em termos de $\top$'s e $\perp$'s, mostrando para quais W_i $f(p, q)$ corresponde a $\top(p, q)$ e para quais W_j $f(p, q)$ corresponde a $\perp(p, q)$; de preferência exibindo uma condição para os W_i , ao invés de uma lista.

Gostaríamos de conceber um procedimento geral para, partindo de uma função modal arbitrária, exibir a forma mais sucinta de descrevê-la. Este procedimento deveria ser tal que e.g., aplicado ao reduto vero-funcional da implicação estrita, resultaria em: se $\{TF\} \notin W$, $f(p, q)$ corresponde a $\top(p, q)$; caso contrário $f(p, q)$ corresponde a $\perp(p, q)$.

Uma forma de buscar uma expressão que explicate melhor o significado da implicação estrita é tomar os conjuntos de funções $C_1 = \delta\langle W_{\top}, \perp \rangle$, $C_2 = \delta\langle W_{\vee}, \downarrow \rangle$, $C_{15} = \delta\langle W_{\downarrow}, \downarrow \rangle$, ..., $C_8 = \delta\langle W_{\equiv}, \equiv \rangle$, $C_9 = \delta\langle W_{\underline{\vee}}, \equiv \rangle$, e escolher um menor conjunto C de funções tal que (1) $C \cap C_i \neq \emptyset$ ($1 \leq i \leq 15$), de preferência um C tal que (2) $C \cap C_i$ ($1 \leq i \leq 15$) é um conjunto unitário.

A condição (1) pode se tornar uma descrição utilizando uma ordem alfabética para as funções de verdade. Poderíamos dizer C será *o primeiro*, entre os menores conjuntos C tais que (1).

$$\delta\langle W_{\top}, \perp \rangle = \{\perp\};$$

$$\delta\langle W_{\vee}, \downarrow \rangle = \{\perp, \downarrow\};$$

$$\delta\langle W_{\downarrow}, \downarrow \rangle = \{\top, \supset, \subset, \equiv, \downarrow, \mid, \sim p, \sim q\};$$

$$\delta\langle W_{\subset}, \varphi \rangle = \{\perp, \varphi\};$$

$$\delta\langle W_{\varphi}, \varphi \rangle = \{\top, \supset, \vee, \varphi, \underline{\vee}, \mid, \sim p, q\};$$

$$\delta\langle W_{\supset}, \supset \rangle = \{\top, \supset\};$$

$$\delta\langle W_{\not\supset}, \supset \rangle = \{\perp, \wedge, \supset, \varphi, \equiv, \downarrow, \sim p, q\};$$

$$\delta\langle W_{\mid}, \wedge \rangle = \{\perp, \wedge\};$$

$$\delta\langle W_{\wedge}, \wedge \rangle = \{\top, \wedge, \vee, \supset, \subset, \equiv, p, q\};$$

$$\delta\langle W_p, \sim p \rangle = \{\perp, \varphi, \downarrow, \sim p\};$$

$$\delta\langle W_{\sim p}, \sim p \rangle = \{\top, \supset, \mid, \sim p\};$$

$$\delta\langle W_q, q \rangle = \{\top, \vee, \supset, q\};$$

$$\delta\langle W_{\sim q}, q \rangle = \{\perp, \wedge, \varphi, q\};$$

$$\delta\langle W_{\equiv}, \equiv \rangle = \{\top, \supset, \subset, \equiv\};$$

$$\delta\langle W_{\perp}, \equiv \rangle = \{\perp, \wedge, \equiv, \downarrow\}.$$

Os conjuntos tais que (1) são: $\{\top, \perp\}$ e $\{\supset, \perp\}$. $\{\top, \perp\}$ atende também à condição (2).

Diremos que f é uma função *apolar* se f é uma função constante. f é *n-polar* se existem funções de verdade $g_1 \dots g_n$ tais que

$$\models f(p_1 \dots p_k) \succ \prec g_1(p_1 \dots p_k) \cdot \vee \dots \vee f(p_1 \dots p_k) \succ \prec g_n(p_1 \dots p_k).$$

Uma função apolar não distingue nem valores modais nem valores de verdade. Uma função monopolar (i.e. 1-polar) distingue valores de verdade, e uma função multipolar distingue valores modais. (Obviamente as funções monopolares são precisamente as funções de verdade.)

Dentre as funções bipolares (i.e. 2-polares), as puramente modais são de um tipo especial, pois as funções de verdade que as representam são apolares. É claro que toda função puramente modal é bipolar, mas nem toda função bipolar é puramente modal. A equivalência qualificada $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\Box p \wedge \nabla^+ q)$ é um exemplo. Esta função é equivalente a $p \downarrow q$ exceto quando o valor modal de p, q é W_p , caso em que é equivalente a $p \wedge q$.

A função de Massey 1967, discutida acima, cujo reduto vero-funcional é $\langle \supset, \supset, \supset, \nabla, \nabla, \supset, \mid, \mid \rangle$ é tripolar: os menores entre os conjuntos que atendem a (1) têm três elementos. Mas é impossível encontrar um conjunto que atenda às condições (1) e (2).

O grau de polaridade de uma função modal n -ária não pode ser superior a $(2 \uparrow 2^n) - 1$, pois este é o número de valores puramente modais de grau n . A

‘complementariedade’ entre todos menos um dos valores puramente modais garante que tal grau não pode ser superior a $2 \uparrow 2^{n-1}$.

Uma questão natural é: para cada n , qual é o grau máximo de polaridade para uma função modal n -ária?

Apêndice

Uma das partes mais interessantes da teoria de funções modais é a teoria dos *sistemas* de funções, ou conjuntos de funções fechados por composição de funções e permutação ou identificação de variáveis. Neste apêndice apresentamos a lista de todos os sistemas de funções modais unárias, junto com suas bases independentes, i.e. os menores conjuntos de funções em termos das quais todas as funções do sistema são definíveis.

Esta lista foi gerada através de um programa (concebido pelo Prof. Dr. Rodrigo Bacellar [= Roderick Batchelor] e implementado pela Prof. Dra. Andréa Loparic) que segue as seguintes instruções. Para cada subconjunto $\{f_1 \dots f_n\}$ de μ^1 consideramos, no primeiro estágio, qual é o resultado da iteração $f_i f_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, consultando a lista das iterações de funções modais unárias. E.g. $\sim\sim = \text{id}$, $\Box\Diamond = \Diamond$, etc. Se todas as funções resultantes já estão presentes no conjunto original, paramos. Caso contrário, avançamos para o segundo estágio. Tomamos o conjunto estendido e repetimos o procedimento. Este programa termina em um número finito de estágios. Em cada caso o programa determina o sistema gerado por $\{f_1 \dots f_n\}$. Associamos a cada sistema o conjunto de suas bases. As bases independentes são os menores conjuntos dentre as bases, por ordem de inclusão.

Um programa similar poderia ser construído a fim de determinar, para cada conjunto C de funções modais de grau 2, qual é o conjunto das funções de grau 2 definíveis em termos de funções em C . A princípio basta que o computador possa determinar qual é o resultado de cada iteração $f(g, h)$. Isso pode ser feito seguindo os

passos definidos na Seção 10 (‘Composição de funções’), desde que o computador possa determinar para todo $W \subseteq \{T, F\}^2$, $W \neq 0$, e todo $f, g \in \tau^2$, qual é $\lambda\langle W, f, g \rangle$ e qual é $\delta\langle W, f \rangle$, além de determinar, para cada $f, g, h \in \tau^2$, qual é o resultado da iteração de $f(g, h)$. Bastaria consultar uma lista gerada por outro programa, facilmente concebível.

O problema é que o número de subconjuntos de μ^2 é $2 \uparrow 2^{32}$, e esse é um número de casos muito grande, mesmo para um computador.

Um problema mais modesto que parece ser solucionável nestas linhas é a determinação de todas as funções modais de Sheffer de grau 2.

Enumeramos as funções binárias de algum modo. No primeiro estágio tomamos a primeira função modal binária f e verificamos qual é o resultado da iteração $f(f, f) = g$; a seguir consideramos os resultados das iterações $f(f, g) = h_1$, $f(g, f) = h_2$, $f(g, g) = h_3$, $g(f, f) = h_4$, $g(f, g) = h_5$, $g(g, f) = h_6$ e $g(g, g) = h_7$, e assim sucessivamente. Em um número finito de passos essas iterações deixarão de resultar em funções novas. Teremos então determinado o *campo* de f , i.e. o conjunto de funções binárias definíveis em termos de f . Se o campo de f for μ^2 , f é uma função de Sheffer para S5. Se o campo de f for menor que μ^2 , é claro que nenhuma função no campo de f é uma função de Sheffer para S5. Retiramos todas estas funções da lista enumerada, e repetimos o procedimento. E assim por diante.

Alguns critérios de ‘parada’ podem ser estabelecidos para evitar que o programa tenha que rodar muitos passos no caso de f ser uma função de Sheffer. Podemos fornecer para o programa uma lista de conjuntos de funções que sabemos ser funcionalmente completos e instruir o programa para consultar esta lista de tempos em tempos, a fim de determinar se o campo da função é μ^2 .

Outros atalhos são concebíveis; em particular podemos adaptar algumas das simplificações do problema no caso vero-funcional, apresentadas em Wernick 1942, para o caso modal.

Sistema: T

Bases independentes: T

Sistema: T $\perp$

Bases independentes: T $\perp$

Sistema: T $\perp$ (id)

Bases independentes: T $\perp$ (id)

Sistema: T $\perp$ (id)~

Bases independentes: T~ $\perp$ ~

Sistema: T $\perp$ (id)~ $\square$ (~ $\square$) $\diamond$ (~ $\diamond$)

Bases independentes: T~ $\square$ T~(~ $\square$) T~ $\diamond$ T~(~ $\diamond$) $\perp$ ~ $\square$ $\perp$ ~(~ $\square$) $\perp$ ~ $\diamond$ $\perp$ ~(~ $\diamond$)

Sistema: T $\perp$ (id)~ $\square$ (~ $\square$) $\diamond$ (~ $\diamond$) Δ ∇

Bases independentes: ~ $\square$ Δ ~ $\square$ ∇ ~(~ $\square$) Δ ~(~ $\square$) ∇ ~ $\diamond$ Δ ~ $\diamond$ ∇ ~(~ $\diamond$) Δ ~(~ $\diamond$) ∇

Sistema: T $\perp$ (id)~ $\square$ (~ $\square$) $\diamond$ (~ $\diamond$) Δ ∇ (∇ ~)(~ ∇ ~)(∇ ~)(~ ∇ ~)

Bases independentes: ~ $\square$ (∇ ~) ~ $\square$ (~ ∇ ~) ~ $\square$ (∇ ~) ~ $\square$ (~ ∇ ~) ~(~ $\square$)(∇ ~) ~(~ $\square$)(~ ∇ ~) ~(~ $\square$)(∇ ~) ~(~ $\square$)(~ ∇ ~) ~ $\diamond$ (∇ ~) ~ $\diamond$ (~ ∇ ~) ~ $\diamond$ (∇ ~) ~ $\diamond$ (~ ∇ ~) ~(~ $\diamond$)(∇ ~) ~(~ $\diamond$)(~ ∇ ~) ~(~ $\diamond$)(∇ ~) ~(~ $\diamond$)(~ ∇ ~)

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \sim \Delta \nabla (\nabla+) (\sim \nabla+) (\nabla-) (\sim \nabla-) (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+)$

Bases independientes: $\sim \Delta (\nabla+) (\Box \nabla \nabla-) \sim \Delta (\nabla+) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \sim \Delta (\sim \nabla+) (\Box \nabla \nabla-) \sim \Delta (\sim \nabla+) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \sim \Delta (\nabla-) (\Box \nabla \nabla-) \sim \Delta (\nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \sim \Delta (\sim \nabla-) (\Box \nabla \nabla-) \sim \Delta (\sim \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \sim \nabla (\nabla+) (\Box \nabla \nabla-) \sim \nabla (\nabla+) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \sim \nabla (\sim \nabla+) (\Box \nabla \nabla-) \sim \nabla (\sim \nabla+) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \sim \nabla (\nabla-) (\Box \nabla \nabla-) \sim \nabla (\nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \sim \nabla (\sim \nabla-) (\Box \nabla \nabla-) \sim \nabla (\sim \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) (\sim \Diamond \nabla \nabla+)$

$\Delta (\nabla+) (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \Delta (\sim \nabla+) (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \Delta (\nabla-) (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \Delta (\sim \nabla-) (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \nabla (\nabla+) (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \nabla (\sim \nabla+) (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \nabla (\nabla-) (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \nabla (\sim \nabla-) (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \sim \Delta \nabla (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+)$

Bases independientes: $\sim \Delta (\Box \nabla \nabla-) \sim \Delta (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \sim \nabla (\Box \nabla \nabla-) \sim \nabla (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \Delta (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \nabla (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \sim (\nabla+) (\sim \nabla+) (\nabla-) (\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\top \sim (\nabla+) \top \sim (\sim \nabla+) \top \sim (\nabla-) \top \sim (\sim \nabla-) \perp \sim (\nabla+) \perp \sim (\sim \nabla+) \perp \sim (\nabla-) \perp \sim (\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \sim (\nabla+) (\sim \nabla+) (\nabla-) (\sim \nabla-) (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+)$

Bases independientes: $\top \sim (\nabla+) (\Box \nabla \nabla-) \top \sim (\nabla+) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \top \sim (\sim \nabla+) (\Box \nabla \nabla-) \top \sim (\sim \nabla+) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \top \sim (\nabla-) (\Box \nabla \nabla-) \top \sim (\nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \top \sim (\sim \nabla-) (\Box \nabla \nabla-) \top \sim (\sim \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \top (\nabla+) (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \top (\sim \nabla+) (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \top (\nabla-) (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \top (\sim \nabla-) (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \perp \sim (\nabla+) (\Box \nabla \nabla-) \perp \sim (\nabla+) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \perp \sim (\sim \nabla+) (\Box \nabla \nabla-) \perp \sim (\sim \nabla+) (\sim \Diamond \nabla \nabla+)$

$\perp \sim (\nabla-) (\Box \nabla \nabla-) \perp \sim (\nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \perp \sim (\sim \nabla-) (\Box \nabla \nabla-) \perp \sim (\sim \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \perp (\nabla+) (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \perp (\sim \nabla+) (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \perp (\nabla-) (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \perp (\sim \nabla-) (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \sim (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+)$

Bases independientes: $\top \sim (\Box \nabla \nabla-) \top \sim (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \top (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \perp \sim (\Box \nabla \nabla-) \perp \sim (\sim \Diamond \nabla \nabla+) \perp (\Box \nabla \nabla-) (\sim \Diamond \nabla \nabla+)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box$

Bases independientes: $\top \perp (\text{id}) \Box$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\sim \Box)$

Bases independientes: $\top(\text{id})(\sim\Box) \perp(\text{id})(\sim\Box)$

Sistema: $\top \perp(\text{id})\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)$

Bases independientes: $\top(\text{id})\Box(\sim\Diamond) \top(\text{id})(\sim\Box)\Diamond \top(\text{id})(\sim\Box)(\sim\Diamond) \perp(\text{id})\Box(\sim\Diamond) \perp(\text{id})(\sim\Box)\Diamond$
 $\perp(\text{id})(\sim\Box)(\sim\Diamond)$

Sistema: $\top \perp(\text{id})\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)\Delta\nabla$

Bases independientes: $(\text{id})\Box(\sim\Diamond)\Delta (\text{id})\Box(\sim\Diamond)\nabla (\text{id})(\sim\Box)\Diamond\Delta (\text{id})(\sim\Box)\Diamond\nabla (\text{id})(\sim\Box)(\sim\Diamond)\Delta (\text{id})(\sim\Box)(\sim\Diamond)\nabla$

Sistema: $\top \perp(\text{id})\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)\Delta\nabla(\nabla+)$

Bases independientes: $(\text{id})\Box(\sim\Diamond)(\nabla+) (\text{id})(\sim\Box)\Diamond(\nabla+) (\text{id})(\sim\Box)(\sim\Diamond)(\nabla+)$

Sistema: $\top \perp(\text{id})\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)\Delta\nabla(\nabla+)(\sim\nabla+)(\nabla-)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\Box(\sim\Diamond)(\nabla+)(\sim\nabla+) (\text{id})\Box(\sim\Diamond)(\sim\nabla+)(\nabla-) (\text{id})\Box(\sim\Diamond)(\nabla-)(\sim\nabla-)$
 $(\text{id})(\sim\Box)\Diamond(\nabla+)(\sim\nabla+) (\text{id})(\sim\Box)\Diamond(\sim\nabla+)(\nabla-) (\text{id})(\sim\Box)\Diamond(\nabla-)(\sim\nabla-) (\text{id})(\sim\Box)(\sim\Diamond)(\nabla+)(\sim\nabla+)$
 $(\text{id})(\sim\Box)(\sim\Diamond)(\sim\nabla+)(\nabla-) (\text{id})(\sim\Box)(\sim\Diamond)(\nabla-)(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top \perp(\text{id})\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)\Delta\nabla(\nabla+)(\sim\nabla+)(\nabla-)(\sim\nabla-)(\Box\nabla\nabla-)$

Bases independientes: $\Box(\sim\Diamond)(\nabla+)(\sim\nabla+)(\Box\nabla\nabla-) \Box(\sim\Diamond)(\nabla+)(\sim\nabla-)(\Box\nabla\nabla-) \Box(\sim\Diamond)(\sim\nabla+)(\nabla-)(\Box\nabla\nabla-)$
 $\Box(\sim\Diamond)(\nabla-)(\sim\nabla-)(\Box\nabla\nabla-) (\sim\Box)\Diamond(\nabla+)(\sim\nabla+)(\Box\nabla\nabla-) (\sim\Box)\Diamond(\nabla+)(\sim\nabla-)(\Box\nabla\nabla-) (\sim\Box)\Diamond(\sim\nabla+)(\nabla-)(\Box\nabla\nabla-)$
 $(\sim\Box)\Diamond(\nabla-)(\sim\nabla-)(\Box\nabla\nabla-) (\sim\Box)(\sim\Diamond)(\nabla+)(\sim\nabla+)(\Box\nabla\nabla-) (\sim\Box)(\sim\Diamond)(\nabla+)(\sim\nabla-)(\Box\nabla\nabla-) (\sim\Box)(\sim\Diamond)(\sim\nabla+)(\nabla-)$
 $(\Box\nabla\nabla-) (\sim\Box)(\sim\Diamond)(\nabla-)(\sim\nabla-)(\Box\nabla\nabla-)$

Sistema: $\top \perp(\text{id})\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)\Delta\nabla(\nabla+)(\sim\nabla+)(\nabla-)(\sim\nabla-)(\sim\Diamond\nabla\nabla+)$

Bases independientes: $\Box(\sim\nabla+)(\sim\Diamond\nabla\nabla+) \Box(\nabla-)(\sim\Diamond\nabla\nabla+) (\sim\Box)(\sim\nabla+)(\sim\Diamond\nabla\nabla+) (\sim\Box)(\nabla-)(\sim\Diamond\nabla\nabla+)$
 $\Diamond(\sim\nabla+)(\sim\Diamond\nabla\nabla+) \Diamond(\nabla-)(\sim\Diamond\nabla\nabla+) (\sim\Diamond)(\sim\nabla+)(\sim\Diamond\nabla\nabla+) (\sim\Diamond)(\nabla-)(\sim\Diamond\nabla\nabla+)$

Sistema: $\top \perp(\text{id})\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)\Delta\nabla(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\Box(\sim\Diamond)(\nabla-) (\text{id})(\sim\Box)\Diamond(\nabla-) (\text{id})(\sim\Box)(\sim\Diamond)(\nabla-)$

Sistema: $\top \perp(\text{id})\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)\Delta\nabla(\nabla+)(\nabla-)(\Box\nabla\nabla-)$

Bases independientes: $\Box(\sim\Diamond)(\nabla+)(\Box\vee\nabla-)$ $\Box(\sim\Diamond)(\nabla-)(\Box\vee\nabla-)$ $(\sim\Box)\Diamond(\nabla+)(\Box\vee\nabla-)$ $(\sim\Box)\Diamond(\nabla-)(\Box\vee\nabla-)$
 $(\sim\Box)(\sim\Diamond)(\nabla+)(\Box\vee\nabla-)$ $(\sim\Box)(\sim\Diamond)(\nabla-)(\Box\vee\nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id})\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)\Delta\nabla(\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\Box(\sim\Diamond)(\nabla+)(\sim\nabla-)$ $(\text{id})(\sim\Box)\Diamond(\nabla+)(\sim\nabla-)$ $(\text{id})(\sim\Box)(\sim\Diamond)(\nabla+)(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id})\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)\Delta\nabla(\nabla+)(\sim\nabla-)(\sim\Diamond\vee\nabla+)$

Bases independientes: $\Box(\nabla+)(\sim\Diamond\vee\nabla+)$ $\Box(\sim\nabla-)(\sim\Diamond\vee\nabla+)$ $(\sim\Box)(\nabla+)(\sim\Diamond\vee\nabla+)$ $(\sim\Box)(\sim\nabla-)(\sim\Diamond\vee\nabla+)$
 $\Diamond(\nabla+)(\sim\Diamond\vee\nabla+)$ $\Diamond(\sim\nabla-)(\sim\Diamond\vee\nabla+)$ $(\sim\Diamond)(\nabla+)(\sim\Diamond\vee\nabla+)$ $(\sim\Diamond)(\sim\nabla-)(\sim\Diamond\vee\nabla+)$

Sistema: $\top \perp (\text{id})\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)\Delta\nabla(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\Box(\sim\Diamond)(\sim\nabla+)$ $(\text{id})(\sim\Box)\Diamond(\sim\nabla+)$ $(\text{id})(\sim\Box)(\sim\Diamond)(\sim\nabla+)$

Sistema: $\top \perp (\text{id})\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)\Delta\nabla(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)(\Box\vee\nabla-)$

Bases independientes: $\Box(\sim\Diamond)(\sim\nabla+)(\Box\vee\nabla-)$ $\Box(\sim\Diamond)(\sim\nabla-)(\Box\vee\nabla-)$ $(\sim\Box)\Diamond(\sim\nabla+)(\Box\vee\nabla-)$ $(\sim\Box)\Diamond(\sim\nabla-)(\Box\vee\nabla-)$
 $(\sim\Box)(\sim\Diamond)(\sim\nabla+)(\Box\vee\nabla-)$ $(\sim\Box)(\sim\Diamond)(\sim\nabla-)(\Box\vee\nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id})\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)\Delta\nabla(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\Box(\sim\Diamond)(\sim\nabla-)$ $(\text{id})(\sim\Box)\Diamond(\sim\nabla-)$ $(\text{id})(\sim\Box)(\sim\Diamond)(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id})\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)\Delta\nabla(\Box\vee\nabla-)$

Bases independientes: $\Box(\sim\Diamond)\Delta(\Box\vee\nabla-)$ $\Box(\sim\Diamond)\nabla(\Box\vee\nabla-)$ $(\sim\Box)\Diamond\Delta(\Box\vee\nabla-)$ $(\sim\Box)\Diamond\nabla(\Box\vee\nabla-)$
 $(\sim\Box)(\sim\Diamond)\Delta(\Box\vee\nabla-)$ $(\sim\Box)(\sim\Diamond)\nabla(\Box\vee\nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id})\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)\Delta\nabla(\sim\Diamond\vee\nabla+)$

Bases independientes: $\Box\Delta(\sim\Diamond\vee\nabla+)$ $\Box\nabla(\sim\Diamond\vee\nabla+)$ $(\sim\Box)\Delta(\sim\Diamond\vee\nabla+)$ $(\sim\Box)\nabla(\sim\Diamond\vee\nabla+)$ $\Diamond\Delta(\sim\Diamond\vee\nabla+)$
 $\Diamond\nabla(\sim\Diamond\vee\nabla+)$ $(\sim\Diamond)\Delta(\sim\Diamond\vee\nabla+)$ $(\sim\Diamond)\nabla(\sim\Diamond\vee\nabla+)$

Sistema: $\top \perp (\text{id})\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)(\Box\vee\nabla-)$

Bases independientes: $\top\Box(\sim\Diamond)(\Box\vee\nabla-)$ $\top(\sim\Box)\Diamond(\Box\vee\nabla-)$ $\top(\sim\Box)(\sim\Diamond)(\Box\vee\nabla-)$ $\perp\Box(\sim\Diamond)(\Box\vee\nabla-)$
 $\perp(\sim\Box)\Diamond(\Box\vee\nabla-)$ $\perp(\sim\Box)(\sim\Diamond)(\Box\vee\nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\sim \Box) \Diamond (\sim \Diamond) (\sim \Diamond \nabla \nabla +)$

Bases independientes: $\top \Box (\sim \Diamond \nabla \nabla +) \top (\sim \Box) (\sim \Diamond \nabla \nabla +) \top \Diamond (\sim \Diamond \nabla \nabla +) \top (\sim \Diamond) (\sim \Diamond \nabla \nabla +) \perp \Box (\sim \Diamond \nabla \nabla +)$
 $\perp (\sim \Box) (\sim \Diamond \nabla \nabla +) \perp \Diamond (\sim \Diamond \nabla \nabla +) \perp (\sim \Diamond) (\sim \Diamond \nabla \nabla +)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\sim \Box) \Delta \nabla$

Bases independientes: $(\text{id}) (\sim \Box) \Delta (\text{id}) (\sim \Box) \nabla$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\sim \Box) \Delta \nabla (\nabla +)$

Bases independientes: $(\text{id}) (\sim \Box) \Delta (\nabla +) (\text{id}) (\sim \Box) \nabla (\nabla +)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\sim \Box) \Delta \nabla (\nabla +) (\sim \nabla +) (\nabla -) (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) (\sim \Box) (\nabla +) (\sim \nabla +) (\text{id}) (\sim \Box) (\sim \nabla +) (\nabla -) (\text{id}) (\sim \Box) (\nabla -) (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\sim \Box) \Delta \nabla (\nabla +) (\sim \nabla +) (\nabla -) (\sim \nabla -) (\Box \nabla \nabla -)$

Bases independientes: $(\sim \Box) (\nabla +) (\sim \nabla +) (\Box \nabla \nabla -) (\sim \Box) (\nabla +) (\sim \nabla -) (\Box \nabla \nabla -) (\sim \Box) (\sim \nabla +) (\nabla -) (\Box \nabla \nabla -)$
 $(\sim \Box) (\nabla -) (\sim \nabla -) (\Box \nabla \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\sim \Box) \Delta \nabla (\nabla +) (\nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) (\sim \Box) \Delta (\nabla -) (\text{id}) (\sim \Box) \nabla (\nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\sim \Box) \Delta \nabla (\nabla +) (\nabla -) (\Box \nabla \nabla -)$

Bases independientes: $(\sim \Box) \Delta (\nabla +) (\Box \nabla \nabla -) (\sim \Box) \Delta (\nabla -) (\Box \nabla \nabla -) (\sim \Box) \nabla (\nabla +) (\Box \nabla \nabla -) (\sim \Box) \nabla (\nabla -) (\Box \nabla \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\sim \Box) \Delta \nabla (\nabla +) (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) (\sim \Box) (\nabla +) (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\sim \Box) \Delta \nabla (\sim \nabla +) (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) (\sim \Box) (\sim \nabla +)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\sim \Box) \Delta \nabla (\sim \nabla +) (\sim \nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $(\sim \Box) (\sim \nabla +) (\Box \vee \nabla -) (\sim \Box) (\sim \nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\sim \Box) \Delta \nabla (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) (\sim \Box) (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\sim \Box) \Delta \nabla (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $(\sim \Box) \Delta (\Box \vee \nabla -) (\sim \Box) \nabla (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\sim \Box) (\nabla +)$

Bases independientes: $(\text{id}) (\sim \Box) (\nabla +)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\sim \Box) (\nabla +) (\nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) (\sim \Box) (\nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\sim \Box) (\nabla +) (\nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $(\sim \Box) (\nabla +) (\Box \vee \nabla -) (\sim \Box) (\nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\sim \Box) (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\top (\sim \Box) (\Box \vee \nabla -) \perp (\sim \Box) (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Diamond$

Bases independientes: $\top \perp (\text{id}) \Box \Diamond$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Diamond \Delta$

Bases independientes: $\perp (\text{id}) \Box \Diamond \Delta$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Diamond \Delta \nabla$

Bases independientes: $(\text{id}) \Box \Diamond \Delta \nabla$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Diamond \Delta \nabla (\nabla +)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Box \Diamond \Delta (\nabla +)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Diamond \Delta \nabla (\nabla +)(\sim \nabla +)(\nabla -)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Box \Diamond (\nabla +)(\sim \nabla +) (\text{id}) \Box \Diamond (\sim \nabla +)(\nabla -) (\text{id}) \Box \Diamond (\nabla -)(\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Diamond \Delta \nabla (\nabla +)(\sim \nabla +)(\nabla -)(\sim \nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\Box \Diamond (\nabla +)(\sim \nabla +)(\Box \vee \nabla -) \Box \Diamond (\nabla +)(\sim \nabla -)(\Box \vee \nabla -) \Box \Diamond (\sim \nabla +)(\nabla -)(\Box \vee \nabla -) \Box \Diamond (\nabla -)(\sim \nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Diamond \Delta \nabla (\nabla +)(\nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Box \Diamond \Delta (\nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Diamond \Delta \nabla (\nabla +)(\nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\Box \Diamond \Delta (\nabla +)(\Box \vee \nabla -) \Box \Diamond \Delta (\nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Diamond \Delta \nabla (\nabla +)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Box \Diamond (\nabla +)(\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Diamond \Delta \nabla (\sim \nabla +)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Box \Diamond \nabla (\sim \nabla +)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Diamond \Delta \nabla (\sim \nabla +)(\sim \nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\Box \Diamond \nabla (\sim \nabla +)(\Box \vee \nabla -) \Box \Diamond \nabla (\sim \nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Diamond \Delta \nabla (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(id) \Box \Diamond \nabla (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (id) \Box \Diamond \Delta \nabla (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\Box \Diamond \Delta \nabla (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (id) \Box \Diamond \Delta (\sim \nabla +)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\perp (id) \Box \Diamond (\sim \nabla +)$

Sistema: $\top \perp (id) \Box \Diamond \Delta (\sim \nabla +)(\sim \nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\perp \Box \Diamond (\sim \nabla +)(\Box \vee \nabla -) \perp \Box \Diamond (\sim \nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (id) \Box \Diamond \Delta (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\perp (id) \Box \Diamond (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (id) \Box \Diamond \Delta (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\perp \Box \Diamond \Delta (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (id) \Box \Diamond \nabla$

Bases independientes: $\top (id) \Box \Diamond \nabla$

Sistema: $\top \perp (id) \Box \Diamond \nabla (\nabla +)$

Bases independientes: $\top (id) \Box \Diamond (\nabla +)$

Sistema: $\top \perp (id) \Box \Diamond \nabla (\nabla +)(\nabla -)$

Bases independientes: $\top (id) \Box \Diamond (\nabla -)$

Sistema: $\top \perp (id) \Box \Diamond \nabla (\nabla +)(\nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\top \Box \Diamond (\nabla +)(\Box \vee \nabla -) \top \Box \Diamond (\nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Diamond \nabla (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\top \Box \Diamond \nabla (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Diamond (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\top \perp \Box \Diamond (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Delta$

Bases independientes: $\perp (\text{id}) \Box \Delta$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Delta \nabla$

Bases independientes: $(\text{id}) \Box \Delta \nabla$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Delta \nabla (\nabla +)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Box \Delta \nabla (\nabla +)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Delta \nabla (\nabla +)(\sim \nabla +)(\nabla -)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Box \nabla (\nabla +)(\sim \nabla +) (\text{id}) \Box \nabla (\sim \nabla +)(\nabla -) (\text{id}) \Box \nabla (\nabla -)(\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Delta \nabla (\nabla +)(\sim \nabla +)(\nabla -)(\sim \nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\Box \nabla (\nabla +)(\sim \nabla +)(\Box \vee \nabla -) \Box \nabla (\nabla +)(\sim \nabla -)(\Box \vee \nabla -) \Box \nabla (\sim \nabla +)(\nabla -)(\Box \vee \nabla -) \Box \nabla (\nabla -)(\sim \nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Delta \nabla (\nabla +)(\nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Box \Delta \nabla (\nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Delta \nabla (\nabla +)(\nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\Box \Delta \nabla (\nabla +)(\Box \vee \nabla -) \Box \Delta \nabla (\nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Delta \nabla (\nabla+) (\sim \nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Box \nabla (\nabla+) (\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Delta \nabla (\sim \nabla+) (\sim \nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Box \nabla (\sim \nabla+)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Delta \nabla (\sim \nabla+) (\sim \nabla-) (\Box \vee \nabla-)$

Bases independientes: $\Box \nabla (\sim \nabla+) (\Box \vee \nabla-) \Box \nabla (\sim \nabla-) (\Box \vee \nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Delta \nabla (\sim \nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Box \nabla (\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Delta \nabla (\Box \vee \nabla-)$

Bases independientes: $\Box \Delta \nabla (\Box \vee \nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Delta (\nabla+)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Box \Delta (\nabla+)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Delta (\nabla+) (\sim \nabla+) (\nabla-) (\sim \nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Box (\nabla+) (\sim \nabla+) (\text{id}) \Box (\sim \nabla+) (\nabla-) (\text{id}) \Box (\nabla-) (\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Delta (\nabla+) (\sim \nabla+) (\nabla-) (\sim \nabla-) (\Box \vee \nabla-)$

Bases independientes: $\Box (\nabla+) (\sim \nabla+) (\Box \vee \nabla-) \Box (\nabla+) (\sim \nabla-) (\Box \vee \nabla-) \Box (\sim \nabla+) (\nabla-) (\Box \vee \nabla-) \Box (\nabla-) (\sim \nabla-) (\Box \vee \nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Delta (\nabla+) (\nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Box \Delta (\nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \Delta (\nabla+) (\nabla-) (\Box \vee \nabla-)$

Bases independientes: $\Box\Delta(\nabla+)(\Box\forall\nabla-)\Box\Delta(\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $\top\perp(\text{id})\Box\Delta(\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\Box(\nabla+)(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top\perp(\text{id})\Box\Delta(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\perp(\text{id})\Box(\sim\nabla+)$

Sistema: $\top\perp(\text{id})\Box\Delta(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $\perp\Box(\sim\nabla+)(\Box\forall\nabla-)\perp\Box(\sim\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $\top\perp(\text{id})\Box\Delta(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\perp(\text{id})\Box(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top\perp(\text{id})\Box\Delta(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $\perp\Box\Delta(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $\top\perp(\text{id})\Box\nabla$

Bases independientes: $\top(\text{id})\Box\nabla$

Sistema: $\top\perp(\text{id})\Box\nabla(\nabla+)$

Bases independientes: $\top(\text{id})\Box\nabla(\nabla+)$

Sistema: $\top\perp(\text{id})\Box\nabla(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $\top(\text{id})\Box\nabla(\nabla-)$

Sistema: $\top\perp(\text{id})\Box\nabla(\nabla+)(\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $\top\Box\nabla(\nabla+)(\Box\forall\nabla-)\top\Box\nabla(\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box \nabla (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\top \Box \nabla (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\nabla +)$

Bases independientes: $\top (\text{id}) \Box (\nabla +)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\nabla +)(\nabla -)$

Bases independientes: $\top (\text{id}) \Box (\nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\nabla +)(\nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\top \Box (\nabla +)(\Box \vee \nabla -) \top \Box (\nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Box (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\top \perp \Box (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond$

Bases independientes: $\top \perp (\text{id}) \Diamond$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond (\sim \Diamond)$

Bases independientes: $\top (\text{id}) (\sim \Diamond) \perp (\text{id}) (\sim \Diamond)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond (\sim \Diamond) \Delta \nabla$

Bases independientes: $(\text{id}) (\sim \Diamond) \Delta (\text{id}) (\sim \Diamond) \nabla$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond (\sim \Diamond) \Delta \nabla (\nabla +)$

Bases independientes: $(\text{id}) (\sim \Diamond) (\nabla +)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond (\sim \diamond) \Delta \nabla (\nabla +) (\sim \nabla +) (\nabla -) (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id})(\sim \diamond)(\nabla +)(\sim \nabla +) (\text{id})(\sim \diamond)(\sim \nabla +)(\nabla -) (\text{id})(\sim \diamond)(\nabla -)(\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond (\sim \diamond) \Delta \nabla (\nabla +) (\sim \nabla +) (\nabla -) (\sim \nabla -) (\Box \nabla \nabla -)$

Bases independientes: $(\sim \diamond)(\nabla +)(\sim \nabla +)(\Box \nabla \nabla -) (\sim \diamond)(\nabla +)(\sim \nabla -)(\Box \nabla \nabla -) (\sim \diamond)(\sim \nabla +)(\nabla -)(\Box \nabla \nabla -)$
 $(\sim \diamond)(\nabla -)(\sim \nabla -)(\Box \nabla \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond (\sim \diamond) \Delta \nabla (\nabla +) (\nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id})(\sim \diamond)(\nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond (\sim \diamond) \Delta \nabla (\nabla +) (\nabla -) (\Box \nabla \nabla -)$

Bases independientes: $(\sim \diamond)(\nabla +)(\Box \nabla \nabla -) (\sim \diamond)(\nabla -)(\Box \nabla \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond (\sim \diamond) \Delta \nabla (\nabla +) (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id})(\sim \diamond)(\nabla +)(\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond (\sim \diamond) \Delta \nabla (\sim \nabla +) (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id})(\sim \diamond) \Delta (\sim \nabla +) (\text{id})(\sim \diamond) \nabla (\sim \nabla +)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond (\sim \diamond) \Delta \nabla (\sim \nabla +) (\sim \nabla -) (\Box \nabla \nabla -)$

Bases independientes: $(\sim \diamond) \Delta (\sim \nabla +) (\Box \nabla \nabla -) (\sim \diamond) \Delta (\sim \nabla -) (\Box \nabla \nabla -) (\sim \diamond) \nabla (\sim \nabla +) (\Box \nabla \nabla -) (\sim \diamond) \nabla (\sim \nabla -)$
 $(\Box \nabla \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond (\sim \diamond) \Delta \nabla (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id})(\sim \diamond) \Delta (\sim \nabla -) (\text{id})(\sim \diamond) \nabla (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond (\sim \diamond) \Delta \nabla (\Box \nabla \nabla -)$

Bases independientes: $(\sim \diamond) \Delta (\Box \nabla \nabla -) (\sim \diamond) \nabla (\Box \nabla \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond (\sim \Diamond) (\sim \nabla +) (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) (\sim \Diamond) (\sim \nabla +)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond (\sim \Diamond) (\sim \nabla +) (\sim \nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $(\sim \Diamond) (\sim \nabla +) (\Box \vee \nabla -) (\sim \Diamond) (\sim \nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond (\sim \Diamond) (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) (\sim \Diamond) (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond (\sim \Diamond) (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\top (\sim \Diamond) (\Box \vee \nabla -) \perp (\sim \Diamond) (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond \Delta$

Bases independientes: $\perp (\text{id}) \diamond \Delta$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond \Delta \nabla$

Bases independientes: $(\text{id}) \diamond \Delta \nabla$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond \Delta \nabla (\nabla +)$

Bases independientes: $(\text{id}) \diamond \Delta (\nabla +)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond \Delta \nabla (\nabla +) (\sim \nabla +) (\nabla -) (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) \diamond \Delta (\nabla +) (\sim \nabla +) (\text{id}) \diamond \Delta (\sim \nabla +) (\nabla -) (\text{id}) \diamond \Delta (\nabla -) (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond \Delta \nabla (\nabla +) (\sim \nabla +) (\nabla -) (\sim \nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\diamond \Delta (\nabla +) (\sim \nabla +) (\Box \vee \nabla -) \diamond \Delta (\nabla +) (\sim \nabla -) (\Box \vee \nabla -) \diamond \Delta (\sim \nabla +) (\nabla -) (\Box \vee \nabla -) \diamond \Delta (\nabla -) (\sim \nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \diamond \Delta \nabla (\nabla +) (\nabla -)$

Bases independientes: $(id) \Diamond \Delta (\nabla -)$

Sistema: $\top \perp (id) \Diamond \Delta \nabla (\nabla +)(\nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\Diamond \Delta (\nabla +)(\Box \vee \nabla -) \Diamond \Delta (\nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (id) \Diamond \Delta \nabla (\nabla +)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(id) \Diamond \Delta (\nabla +)(\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (id) \Diamond \Delta \nabla (\sim \nabla +)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(id) \Diamond \Delta \nabla (\sim \nabla +)$

Sistema: $\top \perp (id) \Diamond \Delta \nabla (\sim \nabla +)(\sim \nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\Diamond \Delta \nabla (\sim \nabla +)(\Box \vee \nabla -) \Diamond \Delta \nabla (\sim \nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (id) \Diamond \Delta \nabla (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(id) \Diamond \Delta \nabla (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (id) \Diamond \Delta \nabla (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\Diamond \Delta \nabla (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (id) \Diamond \Delta (\sim \nabla +)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\perp (id) \Diamond \Delta (\sim \nabla +)$

Sistema: $\top \perp (id) \Diamond \Delta (\sim \nabla +)(\sim \nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\perp \Diamond \Delta (\sim \nabla +)(\Box \vee \nabla -) \perp \Diamond \Delta (\sim \nabla -)(\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (id) \Diamond \Delta (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\perp (id) \Diamond \Delta (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond \Delta (\Box \nabla \nabla -)$

Bases independientes: $\perp \Diamond \Delta (\Box \nabla \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond \nabla$

Bases independientes: $\top (\text{id}) \Diamond \nabla$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond \nabla (\nabla +)$

Bases independientes: $\top (\text{id}) \Diamond (\nabla +)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond \nabla (\nabla +)(\sim \nabla +)(\nabla -)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Diamond (\nabla +)(\sim \nabla +) (\text{id}) \Diamond (\sim \nabla +)(\nabla -) (\text{id}) \Diamond (\nabla -)(\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond \nabla (\nabla +)(\sim \nabla +)(\nabla -)(\sim \nabla -)(\Box \nabla \nabla -)$

Bases independientes: $\Diamond (\nabla +)(\sim \nabla +)(\Box \nabla \nabla -) \Diamond (\nabla +)(\sim \nabla -)(\Box \nabla \nabla -) \Diamond (\sim \nabla +)(\nabla -)(\Box \nabla \nabla -) \Diamond (\nabla -)(\sim \nabla -)(\Box \nabla \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond \nabla (\nabla +)(\nabla -)$

Bases independientes: $\top (\text{id}) \Diamond (\nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond \nabla (\nabla +)(\nabla -)(\Box \nabla \nabla -)$

Bases independientes: $\top \Diamond (\nabla +)(\Box \nabla \nabla -) \top \Diamond (\nabla -)(\Box \nabla \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond \nabla (\nabla +)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Diamond (\nabla +)(\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond \nabla (\sim \nabla +)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Diamond \nabla (\sim \nabla +)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond \nabla (\sim \nabla +) (\sim \nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\Diamond \nabla (\sim \nabla +) (\Box \vee \nabla -) \Diamond \nabla (\sim \nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond \nabla (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Diamond \nabla (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond \nabla (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\top \Diamond \nabla (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond (\sim \nabla +) (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\perp (\text{id}) \Diamond (\sim \nabla +)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond (\sim \nabla +) (\sim \nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\perp \Diamond (\sim \nabla +) (\Box \vee \nabla -) \perp \Diamond (\sim \nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\perp (\text{id}) \Diamond (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Diamond (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\top \perp \Diamond (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Delta$

Bases independientes: $\perp (\text{id}) \Delta$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Delta \nabla$

Bases independientes: $(\text{id}) \Delta \nabla$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Delta \nabla (\nabla +)$

Bases independientes: $(id)\Delta\nabla(\nabla+)$

Sistema: $\top \perp (id)\Delta\nabla(\nabla+)(\sim\nabla+)(\nabla-)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(id)\Delta\nabla(\nabla+)(\sim\nabla+)$ $(id)\Delta\nabla(\sim\nabla+)(\nabla-)$ $(id)\Delta\nabla(\nabla-)(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top \perp (id)\Delta\nabla(\nabla+)(\sim\nabla+)(\nabla-)(\sim\nabla-)(\Box\nabla\nabla-)$

Bases independientes: $\Delta\nabla(\nabla+)(\sim\nabla+)(\Box\nabla\nabla-)$ $\Delta\nabla(\nabla+)(\sim\nabla-)(\Box\nabla\nabla-)$ $\Delta\nabla(\sim\nabla+)(\nabla-)(\Box\nabla\nabla-)$ $\Delta\nabla(\nabla-)(\sim\nabla-)(\Box\nabla\nabla-)$

Sistema: $\top \perp (id)\Delta\nabla(\nabla+)(\sim\nabla+)(\nabla-)(\sim\nabla-)(\sim\Diamond\nabla\nabla+)$

Bases independientes: $\Delta(\sim\nabla+)(\sim\Diamond\nabla\nabla+)$ $\Delta(\nabla-)(\sim\Diamond\nabla\nabla+)$ $\nabla(\sim\nabla+)(\sim\Diamond\nabla\nabla+)$ $\nabla(\nabla-)(\sim\Diamond\nabla\nabla+)$

Sistema: $\top \perp (id)\Delta\nabla(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $(id)\Delta\nabla(\nabla-)$

Sistema: $\top \perp (id)\Delta\nabla(\nabla+)(\nabla-)(\Box\nabla\nabla-)$

Bases independientes: $\Delta\nabla(\nabla+)(\Box\nabla\nabla-)$ $\Delta\nabla(\nabla-)(\Box\nabla\nabla-)$

Sistema: $\top \perp (id)\Delta\nabla(\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(id)\Delta\nabla(\nabla+)(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top \perp (id)\Delta\nabla(\nabla+)(\sim\nabla-)(\sim\Diamond\nabla\nabla+)$

Bases independientes: $\Delta(\nabla+)(\sim\Diamond\nabla\nabla+)$ $\Delta(\sim\nabla-)(\sim\Diamond\nabla\nabla+)$ $\nabla(\nabla+)(\sim\Diamond\nabla\nabla+)$ $\nabla(\sim\nabla-)(\sim\Diamond\nabla\nabla+)$

Sistema: $\top \perp (id)\Delta\nabla(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(id)\Delta\nabla(\sim\nabla+)$

Sistema: $\top \perp (id)\Delta\nabla(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)(\Box\nabla\nabla-)$

Bases independientes: $\Delta\nabla(\sim\nabla+)(\Box\nabla\nabla-)$ $\Delta\nabla(\sim\nabla-)(\Box\nabla\nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Delta \nabla (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Delta \nabla (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Delta \nabla (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\Delta \nabla (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Delta \nabla (\sim \Diamond \vee \nabla +)$

Bases independientes: $\Delta (\sim \Diamond \vee \nabla +) \nabla (\sim \Diamond \vee \nabla +)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Delta (\nabla +)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Delta (\nabla +)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Delta (\nabla +) (\sim \nabla +) (\nabla -) (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Delta (\nabla +) (\sim \nabla +) (\text{id}) \Delta (\sim \nabla +) (\nabla -) (\text{id}) \Delta (\nabla -) (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Delta (\nabla +) (\sim \nabla +) (\nabla -) (\sim \nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\Delta (\nabla +) (\sim \nabla +) (\Box \vee \nabla -) \Delta (\nabla +) (\sim \nabla -) (\Box \vee \nabla -) \Delta (\sim \nabla +) (\nabla -) (\Box \vee \nabla -) \Delta (\nabla -) (\sim \nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Delta (\nabla +) (\nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Delta (\nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Delta (\nabla +) (\nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\Delta (\nabla +) (\Box \vee \nabla -) \Delta (\nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Delta (\nabla +) (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) \Delta (\nabla +) (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Delta (\sim \nabla+) (\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\perp (\text{id}) \Delta (\sim \nabla+)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Delta (\sim \nabla+) (\sim \nabla-) (\Box \nabla \nabla-)$

Bases independientes: $\perp \Delta (\sim \nabla+) (\Box \nabla \nabla-) \perp \Delta (\sim \nabla-) (\Box \nabla \nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Delta (\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\perp (\text{id}) \Delta (\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \Delta (\Box \nabla \nabla-)$

Bases independientes: $\perp \Delta (\Box \nabla \nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \nabla$

Bases independientes: $\top (\text{id}) \nabla$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \nabla (\nabla+)$

Bases independientes: $\top (\text{id}) \nabla (\nabla+)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \nabla (\nabla+) (\sim \nabla+) (\nabla-) (\sim \nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id}) \nabla (\nabla+) (\sim \nabla+) (\text{id}) \nabla (\sim \nabla+) (\nabla-) (\text{id}) \nabla (\nabla-) (\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \nabla (\nabla+) (\sim \nabla+) (\nabla-) (\sim \nabla-) (\Box \nabla \nabla-)$

Bases independientes: $\nabla (\nabla+) (\sim \nabla+) (\Box \nabla \nabla-) \nabla (\nabla+) (\sim \nabla-) (\Box \nabla \nabla-) \nabla (\sim \nabla+) (\nabla-) (\Box \nabla \nabla-) \nabla (\nabla-) (\sim \nabla-) (\Box \nabla \nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \nabla (\nabla+) (\nabla-)$

Bases independientes: $\top (\text{id}) \nabla (\nabla-)$

Sistema: $\top \perp (\text{id}) \nabla (\nabla+) (\nabla-) (\Box \nabla \nabla-)$

Bases independientes: $\top \nabla(\nabla+)(\Box \vee \nabla-) \top \nabla(\nabla-)(\Box \vee \nabla-)$

Sistema: $\top \perp(\text{id})\nabla(\nabla+)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\nabla(\nabla+)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp(\text{id})\nabla(\sim \nabla+)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\nabla(\sim \nabla+)$

Sistema: $\top \perp(\text{id})\nabla(\sim \nabla+)(\sim \nabla-)(\Box \vee \nabla-)$

Bases independientes: $\nabla(\sim \nabla+)(\Box \vee \nabla-) \nabla(\sim \nabla-)(\Box \vee \nabla-)$

Sistema: $\top \perp(\text{id})\nabla(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\nabla(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp(\text{id})\nabla(\Box \vee \nabla-)$

Bases independientes: $\top \nabla(\Box \vee \nabla-)$

Sistema: $\top \perp(\text{id})(\nabla+)$

Bases independientes: $\top(\text{id})(\nabla+)$

Sistema: $\top \perp(\text{id})(\nabla+)(\sim \nabla+)(\nabla-)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\top(\text{id})(\nabla+)(\sim \nabla+) \top(\text{id})(\sim \nabla+)(\nabla-) \top(\text{id})(\nabla-)(\sim \nabla-) \perp(\text{id})(\nabla+)(\sim \nabla+)$
 $\perp(\text{id})(\sim \nabla+)(\nabla-) \perp(\text{id})(\nabla-)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp(\text{id})(\nabla+)(\sim \nabla+)(\nabla-)(\sim \nabla-)(\Box \vee \nabla-)$

Bases independientes: $\top(\nabla+)(\sim \nabla+)(\Box \vee \nabla-) \top(\nabla+)(\sim \nabla-)(\Box \vee \nabla-) \top(\sim \nabla+)(\nabla-)(\Box \vee \nabla-) \top(\nabla-)(\sim \nabla-)$
 $(\Box \vee \nabla-) \perp(\nabla+)(\sim \nabla+)(\Box \vee \nabla-) \perp(\nabla+)(\sim \nabla-)(\Box \vee \nabla-) \perp(\sim \nabla+)(\nabla-)(\Box \vee \nabla-) \perp(\nabla-)(\sim \nabla-)(\Box \vee \nabla-)$

Sistema: $\top \perp(\text{id})(\nabla+)(\sim \nabla+)(\nabla-)(\sim \nabla-)(\sim \Diamond \vee \nabla+)$

Bases independientes: $\top(\sim\nabla+)(\sim\Diamond\nabla+)$ $\top(\nabla-)(\sim\Diamond\nabla+)$ $\perp(\sim\nabla+)(\sim\Diamond\nabla+)$ $\perp(\nabla-)(\sim\Diamond\nabla+)$

Sistema: $\top\perp(\text{id})(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $\top(\text{id})(\nabla-)$

Sistema: $\top\perp(\text{id})(\nabla+)(\nabla-)(\Box\nabla-)$

Bases independientes: $\top(\nabla+)(\Box\nabla-)$ $\top(\nabla-)(\Box\nabla-)$

Sistema: $\top\perp(\text{id})(\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\top(\text{id})(\nabla+)(\sim\nabla-)$ $\perp(\text{id})(\nabla+)(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top\perp(\text{id})(\nabla+)(\sim\nabla-)(\sim\Diamond\nabla+)$

Bases independientes: $\top(\nabla+)(\sim\Diamond\nabla+)$ $\top(\sim\nabla-)(\sim\Diamond\nabla+)$ $\perp(\nabla+)(\sim\Diamond\nabla+)$ $\perp(\sim\nabla-)(\sim\Diamond\nabla+)$

Sistema: $\top\perp(\text{id})(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\perp(\text{id})(\sim\nabla+)$

Sistema: $\top\perp(\text{id})(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)(\Box\nabla-)$

Bases independientes: $\perp(\sim\nabla+)(\Box\nabla-)$ $\perp(\sim\nabla-)(\Box\nabla-)$

Sistema: $\top\perp(\text{id})(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\perp(\text{id})(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top\perp(\text{id})(\Box\nabla-)$

Bases independientes: $\top\perp(\Box\nabla-)$

Sistema: $\top\perp(\text{id})(\sim\Diamond\nabla+)$

Bases independientes: $\top(\sim\Diamond\nabla+)$ $\perp(\sim\Diamond\nabla+)$

Sistema: $\top \perp \Box$

Bases independientes: $\top \perp \Box$

Sistema: $\top \perp \Box(\sim \Box)$

Bases independientes: $\top(\sim \Box) \perp(\sim \Box)$

Sistema: $\top \perp \Box(\sim \Box) \Diamond(\sim \Diamond)$

Bases independientes: $\top \Box(\sim \Diamond) \top(\sim \Box) \Diamond \top(\sim \Box)(\sim \Diamond) \perp \Box(\sim \Diamond) \perp(\sim \Box) \Diamond \perp(\sim \Box)(\sim \Diamond)$

Sistema: $\top \perp \Box(\sim \Box) \Diamond(\sim \Diamond) \Delta \nabla$

Bases independientes: $\Box(\sim \Diamond) \Delta \Box(\sim \Diamond) \nabla (\sim \Box) \Diamond \Delta (\sim \Box) \Diamond \nabla (\sim \Box)(\sim \Diamond) \Delta (\sim \Box)(\sim \Diamond) \nabla$

Sistema: $\top \perp \Box(\sim \Box) \Diamond(\sim \Diamond) \Delta \nabla(\nabla+)$

Bases independientes: $\Box(\sim \Diamond)(\nabla+) (\sim \Box) \Diamond(\nabla+) (\sim \Box)(\sim \Diamond)(\nabla+)$

Sistema: $\top \perp \Box(\sim \Box) \Diamond(\sim \Diamond) \Delta \nabla(\nabla+)(\sim \nabla+)(\nabla-)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Box(\sim \Diamond)(\nabla+)(\sim \nabla+) \Box(\sim \Diamond)(\sim \nabla+)(\nabla-) \Box(\sim \Diamond)(\nabla-)(\sim \nabla-) (\sim \Box) \Diamond(\nabla+)(\sim \nabla+) (\sim \Box) \Diamond(\sim \nabla+)(\nabla-) (\sim \Box) \Diamond(\nabla-)(\sim \nabla-) (\sim \Box)(\sim \Diamond)(\nabla+)(\sim \nabla+) (\sim \Box)(\sim \Diamond)(\sim \nabla+)(\nabla-) (\sim \Box)(\sim \Diamond)(\nabla-)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Box(\sim \Box) \Diamond(\sim \Diamond) \Delta \nabla(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $\Box(\sim \Diamond)(\nabla-) (\sim \Box) \Diamond(\nabla-) (\sim \Box)(\sim \Diamond)(\nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Box(\sim \Box) \Diamond(\sim \Diamond) \Delta \nabla(\nabla+)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Box(\sim \Diamond)(\nabla+)(\sim \nabla-) (\sim \Box) \Diamond(\nabla+)(\sim \nabla-) (\sim \Box)(\sim \Diamond)(\nabla+)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Box(\sim \Box) \Diamond(\sim \Diamond) \Delta \nabla(\sim \nabla+)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Box(\sim \Diamond)(\sim \nabla+) (\sim \Box) \Diamond(\sim \nabla+) (\sim \Box)(\sim \Diamond)(\sim \nabla+)$

Sistema: $\top \perp \Box(\sim \Box)\Diamond(\sim \Diamond)\Delta \nabla(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Box(\sim \Diamond)(\sim \nabla-)$ $(\sim \Box)\Diamond(\sim \nabla-)$ $(\sim \Box)(\sim \Diamond)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Box(\sim \Box)\Delta \nabla$

Bases independientes: $(\sim \Box)\Delta$ $(\sim \Box)\nabla$

Sistema: $\top \perp \Box(\sim \Box)\Delta \nabla(\nabla+)$

Bases independientes: $(\sim \Box)\Delta(\nabla+)$ $(\sim \Box)\nabla(\nabla+)$

Sistema: $\top \perp \Box(\sim \Box)\Delta \nabla(\nabla+)(\sim \nabla+)(\nabla-)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $(\sim \Box)(\nabla+)(\sim \nabla+)$ $(\sim \Box)(\sim \nabla+)(\nabla-)$ $(\sim \Box)(\nabla-)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Box(\sim \Box)\Delta \nabla(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $(\sim \Box)\Delta(\nabla-)$ $(\sim \Box)\nabla(\nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Box(\sim \Box)\Delta \nabla(\nabla+)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $(\sim \Box)(\nabla+)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Box(\sim \Box)\Delta \nabla(\sim \nabla+)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $(\sim \Box)(\sim \nabla+)$

Sistema: $\top \perp \Box(\sim \Box)\Delta \nabla(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $(\sim \Box)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Box(\sim \Box)(\nabla+)$

Bases independientes: $(\sim \Box)(\nabla+)$

Sistema: $\top \perp \Box(\sim \Box)(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $(\sim\Box)(\nabla-)$

Sistema: $\top\perp\Box\Diamond$

Bases independientes: $\top\perp\Box\Diamond$

Sistema: $\top\perp\Box\Diamond\Delta$

Bases independientes: $\perp\Box\Diamond\Delta$

Sistema: $\top\perp\Box\Diamond\Delta\nabla$

Bases independientes: $\Box\Diamond\Delta\nabla$

Sistema: $\top\perp\Box\Diamond\Delta\nabla(\nabla+)$

Bases independientes: $\Box\Diamond\Delta(\nabla+)$

Sistema: $\top\perp\Box\Diamond\Delta\nabla(\nabla+)(\sim\nabla+)(\nabla-)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\Box\Diamond(\nabla+)(\sim\nabla+)\Box\Diamond(\sim\nabla+)(\nabla-)\Box\Diamond(\nabla-)(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top\perp\Box\Diamond\Delta\nabla(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $\Box\Diamond\Delta(\nabla-)$

Sistema: $\top\perp\Box\Diamond\Delta\nabla(\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\Box\Diamond(\nabla+)(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top\perp\Box\Diamond\Delta\nabla(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\Box\Diamond\nabla(\sim\nabla+)$

Sistema: $\top\perp\Box\Diamond\Delta\nabla(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\Box\Diamond\nabla(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Box \Diamond \Delta (\sim \nabla +)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\perp \Box \Diamond (\sim \nabla +)$

Sistema: $\top \perp \Box \Diamond \Delta (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\perp \Box \Diamond (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp \Box \Diamond \nabla$

Bases independientes: $\top \Box \Diamond \nabla$

Sistema: $\top \perp \Box \Diamond \nabla (\nabla +)$

Bases independientes: $\top \Box \Diamond (\nabla +)$

Sistema: $\top \perp \Box \Diamond \nabla (\nabla +)(\nabla -)$

Bases independientes: $\top \Box \Diamond (\nabla -)$

Sistema: $\top \perp \Box \Delta$

Bases independientes: $\perp \Box \Delta$

Sistema: $\top \perp \Box \Delta \nabla$

Bases independientes: $\Box \Delta \nabla$

Sistema: $\top \perp \Box \Delta \nabla (\nabla +)$

Bases independientes: $\Box \Delta \nabla (\nabla +)$

Sistema: $\top \perp \Box \Delta \nabla (\nabla +)(\sim \nabla +)(\nabla -)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\Box \nabla (\nabla +)(\sim \nabla +) \Box \nabla (\sim \nabla +)(\nabla -) \Box \nabla (\nabla -)(\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp \Box \Delta \nabla (\nabla+) (\nabla-)$

Bases independientes: $\Box \Delta \nabla (\nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Box \Delta \nabla (\nabla+) (\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Box \nabla (\nabla+) (\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Box \Delta \nabla (\sim \nabla+) (\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Box \nabla (\sim \nabla+)$

Sistema: $\top \perp \Box \Delta \nabla (\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Box \nabla (\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Box \Delta (\nabla+)$

Bases independientes: $\Box \Delta (\nabla+)$

Sistema: $\top \perp \Box \Delta (\nabla+) (\sim \nabla+) (\nabla-) (\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Box (\nabla+) (\sim \nabla+) \Box (\sim \nabla+) (\nabla-) \Box (\nabla-) (\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Box \Delta (\nabla+) (\nabla-)$

Bases independientes: $\Box \Delta (\nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Box \Delta (\nabla+) (\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Box (\nabla+) (\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Box \Delta (\sim \nabla+) (\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\perp \Box (\sim \nabla+)$

Sistema: $\top \perp \Box \Delta (\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\perp \Box (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp \Box \nabla$

Bases independientes: $\top \Box \nabla$

Sistema: $\top \perp \Box \nabla (\nabla +)$

Bases independientes: $\top \Box \nabla (\nabla +)$

Sistema: $\top \perp \Box \nabla (\nabla +)(\nabla -)$

Bases independientes: $\top \Box \nabla (\nabla -)$

Sistema: $\top \perp \Box (\nabla +)$

Bases independientes: $\top \Box (\nabla +)$

Sistema: $\top \perp \Box (\nabla +)(\nabla -)$

Bases independientes: $\top \Box (\nabla -)$

Sistema: $\top \perp \Diamond$

Bases independientes: $\top \perp \Diamond$

Sistema: $\top \perp \Diamond (\sim \Diamond)$

Bases independientes: $\top (\sim \Diamond) \perp (\sim \Diamond)$

Sistema: $\top \perp \Diamond (\sim \Diamond) \Delta \nabla$

Bases independientes: $(\sim \Diamond) \Delta (\sim \Diamond) \nabla$

Sistema: $\top \perp \Diamond (\sim \Diamond) \Delta \nabla (\nabla +)$

Bases independientes: $(\sim \Diamond) (\nabla +)$

Sistema: $\top \perp \Diamond(\sim \Diamond) \Delta \nabla(\nabla+)(\sim \nabla+)(\nabla-)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $(\sim \Diamond)(\nabla+)(\sim \nabla+)(\sim \Diamond)(\sim \nabla+)(\nabla-)(\sim \Diamond)(\nabla-)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Diamond(\sim \Diamond) \Delta \nabla(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $(\sim \Diamond)(\nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Diamond(\sim \Diamond) \Delta \nabla(\nabla+)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $(\sim \Diamond)(\nabla+)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Diamond(\sim \Diamond) \Delta \nabla(\sim \nabla+)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $(\sim \Diamond) \Delta(\sim \nabla+)(\sim \Diamond) \nabla(\sim \nabla+)$

Sistema: $\top \perp \Diamond(\sim \Diamond) \Delta \nabla(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $(\sim \Diamond) \Delta(\sim \nabla-)(\sim \Diamond) \nabla(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Diamond(\sim \Diamond)(\sim \nabla+)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $(\sim \Diamond)(\sim \nabla+)$

Sistema: $\top \perp \Diamond(\sim \Diamond)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $(\sim \Diamond)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Diamond \Delta$

Bases independientes: $\perp \Diamond \Delta$

Sistema: $\top \perp \Diamond \Delta \nabla$

Bases independientes: $\Diamond \Delta \nabla$

Sistema: $\top \perp \Diamond \nabla (\nabla +)$

Bases independientes: $\Diamond \Delta (\nabla +)$

Sistema: $\top \perp \Diamond \nabla (\nabla +)(\sim \nabla +)(\nabla -)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\Diamond \Delta (\nabla +)(\sim \nabla +) \Diamond \Delta (\sim \nabla +)(\nabla -) \Diamond \Delta (\nabla -)(\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp \Diamond \nabla (\nabla +)(\nabla -)$

Bases independientes: $\Diamond \Delta (\nabla -)$

Sistema: $\top \perp \Diamond \nabla (\nabla +)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\Diamond \Delta (\nabla +)(\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp \Diamond \nabla (\sim \nabla +)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\Diamond \Delta \nabla (\sim \nabla +)$

Sistema: $\top \perp \Diamond \nabla (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\Diamond \Delta \nabla (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp \Diamond \Delta (\sim \nabla +)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\perp \Diamond \Delta (\sim \nabla +)$

Sistema: $\top \perp \Diamond \Delta (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\perp \Diamond \Delta (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \perp \Diamond \nabla$

Bases independientes: $\top \Diamond \nabla$

Sistema: $\top \perp \Diamond \nabla (\nabla +)$

Bases independientes: $\top \Diamond(\nabla+)$

Sistema: $\top \perp \Diamond \nabla(\nabla+)(\sim \nabla+)(\nabla-)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Diamond(\nabla+)(\sim \nabla+) \Diamond(\sim \nabla+)(\nabla-) \Diamond(\nabla-)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Diamond \nabla(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $\top \Diamond(\nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Diamond \nabla(\nabla+)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Diamond(\nabla+)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Diamond \nabla(\sim \nabla+)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Diamond \nabla(\sim \nabla+)$

Sistema: $\top \perp \Diamond \nabla(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Diamond \nabla(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Diamond(\sim \nabla+)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\perp \Diamond(\sim \nabla+)$

Sistema: $\top \perp \Diamond(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\perp \Diamond(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Delta$

Bases independientes: $\perp \Delta$

Sistema: $\top \perp \Delta \nabla$

Bases independientes: $\Delta \nabla$

Sistema: $\top \perp \Delta \nabla(\nabla+)$

Bases independientes: $\Delta \nabla(\nabla+)$

Sistema: $\top \perp \Delta \nabla(\nabla+)(\sim \nabla+)(\nabla-)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Delta \nabla(\nabla+)(\sim \nabla+) \Delta \nabla(\sim \nabla+)(\nabla-) \Delta \nabla(\nabla-)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Delta \nabla(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $\Delta \nabla(\nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Delta \nabla(\nabla+)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Delta \nabla(\nabla+)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Delta \nabla(\sim \nabla+)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Delta \nabla(\sim \nabla+)$

Sistema: $\top \perp \Delta \nabla(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Delta \nabla(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Delta(\nabla+)$

Bases independientes: $\Delta(\nabla+)$

Sistema: $\top \perp \Delta(\nabla+)(\sim \nabla+)(\nabla-)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Delta(\nabla+)(\sim \nabla+) \Delta(\sim \nabla+)(\nabla-) \Delta(\nabla-)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Delta(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $\Delta(\nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Delta(\nabla+)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\Delta(\nabla+)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \Delta(\sim \nabla+)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\perp \Delta(\sim \nabla+)$

Sistema: $\top \perp \Delta(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\perp \Delta(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \nabla$

Bases independientes: $\top \nabla$

Sistema: $\top \perp \nabla(\nabla+)$

Bases independientes: $\top \nabla(\nabla+)$

Sistema: $\top \perp \nabla(\nabla+)(\sim \nabla+)(\nabla-)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\nabla(\nabla+)(\sim \nabla+)$ $\nabla(\sim \nabla+)(\nabla-)$ $\nabla(\nabla-)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \nabla(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $\top \nabla(\nabla-)$

Sistema: $\top \perp \nabla(\nabla+)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\nabla(\nabla+)(\sim \nabla-)$

Sistema: $\top \perp \nabla(\sim \nabla+)(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\nabla(\sim \nabla+)$

Sistema: $\top \perp \nabla(\sim \nabla-)$

Bases independientes: $\nabla(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top \perp(\nabla+)$

Bases independientes: $\top(\nabla+)$

Sistema: $\top \perp(\nabla+)(\sim\nabla+)(\nabla-)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\top(\nabla+)(\sim\nabla+) \top(\sim\nabla+)(\nabla-) \top(\nabla-)(\sim\nabla-) \perp(\nabla+)(\sim\nabla+) \perp(\sim\nabla+)(\nabla-) \perp(\nabla-)(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top \perp(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $\top(\nabla-)$

Sistema: $\top \perp(\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\top(\nabla+)(\sim\nabla-) \perp(\nabla+)(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top \perp(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\perp(\sim\nabla+)$

Sistema: $\top \perp(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\perp(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top(\text{id})$

Bases independientes: $\top(\text{id})$

Sistema: $\top(\text{id})\Box$

Bases independientes: $\top(\text{id})\Box$

Sistema: $\top(\text{id})\Box\Diamond$

Bases independientes: $\top(\text{id})\Box\Diamond$

Sistema: $\top(\text{id})\Box\Diamond\Delta$

Bases independientes: $(\text{id})\Box\Diamond\Delta$

Sistema: $\top(\text{id})\Box\Diamond\Delta(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\Box\Diamond(\sim\nabla+)$

Sistema: $\top(\text{id})\Box\Diamond\Delta(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)(\Box\nabla-)$

Bases independientes: $\Box\Diamond(\sim\nabla+)(\Box\nabla-)\Box\Diamond(\sim\nabla-)(\Box\nabla-)$

Sistema: $\top(\text{id})\Box\Diamond\Delta(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\Box\Diamond(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top(\text{id})\Box\Diamond\Delta(\Box\nabla-)$

Bases independientes: $\Box\Diamond\Delta(\Box\nabla-)$

Sistema: $\top(\text{id})\Box\Diamond(\Box\nabla-)$

Bases independientes: $\top\Box\Diamond(\Box\nabla-)$

Sistema: $\top(\text{id})\Box\Delta$

Bases independientes: $(\text{id})\Box\Delta$

Sistema: $\top(\text{id})\Box\Delta(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\Box(\sim\nabla+)$

Sistema: $\top(\text{id})\Box\Delta(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)(\Box\nabla-)$

Bases independientes: $\Box(\sim\nabla+)(\Box\nabla-)\Box(\sim\nabla-)(\Box\nabla-)$

Sistema: $\top(\text{id})\Box\Delta(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\Box(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top(\text{id})\Box\Delta(\Box\nabla\nabla-)$

Bases independientes: $\Box\Delta(\Box\nabla\nabla-)$

Sistema: $\top(\text{id})\Box(\Box\nabla\nabla-)$

Bases independientes: $\top\Box(\Box\nabla\nabla-)$

Sistema: $\top(\text{id})\Diamond$

Bases independientes: $\top(\text{id})\Diamond$

Sistema: $\top(\text{id})\Diamond\Delta$

Bases independientes: $(\text{id})\Diamond\Delta$

Sistema: $\top(\text{id})\Diamond\Delta(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\Diamond\Delta(\sim\nabla+)$

Sistema: $\top(\text{id})\Diamond\Delta(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)(\Box\nabla\nabla-)$

Bases independientes: $\Diamond\Delta(\sim\nabla+)(\Box\nabla\nabla-)\Diamond\Delta(\sim\nabla-)(\Box\nabla\nabla-)$

Sistema: $\top(\text{id})\Diamond\Delta(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\Diamond\Delta(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top(\text{id})\Diamond\Delta(\Box\nabla\nabla-)$

Bases independientes: $\Diamond\Delta(\Box\nabla\nabla-)$

Sistema: $\top(\text{id})\Diamond(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(id)\Diamond(\sim\nabla+)$

Sistema: $T(id)\Diamond(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)(\Box V\nabla-)$

Bases independientes: $\Diamond(\sim\nabla+)(\Box V\nabla-)\Diamond(\sim\nabla-)(\Box V\nabla-)$

Sistema: $T(id)\Diamond(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(id)\Diamond(\sim\nabla-)$

Sistema: $T(id)\Diamond(\Box V\nabla-)$

Bases independientes: $T\Diamond(\Box V\nabla-)$

Sistema: $T(id)\Delta$

Bases independientes: $(id)\Delta$

Sistema: $T(id)\Delta(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(id)\Delta(\sim\nabla+)$

Sistema: $T(id)\Delta(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)(\Box V\nabla-)$

Bases independientes: $\Delta(\sim\nabla+)(\Box V\nabla-)\Delta(\sim\nabla-)(\Box V\nabla-)$

Sistema: $T(id)\Delta(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(id)\Delta(\sim\nabla-)$

Sistema: $T(id)\Delta(\Box V\nabla-)$

Bases independientes: $\Delta(\Box V\nabla-)$

Sistema: $T(id)(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $T(id)(\sim\nabla+)$

Sistema: $T(id)(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)(\Box V\nabla-)$

Bases independientes: $T(\sim\nabla+)(\Box V\nabla-)$ $T(\sim\nabla-)(\Box V\nabla-)$

Sistema: $T(id)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $T(id)(\sim\nabla-)$

Sistema: $T(id)(\Box V\nabla-)$

Bases independientes: $T(\Box V\nabla-)$

Sistema: $T\Box$

Bases independientes: $T\Box$

Sistema: $T\Box\Diamond$

Bases independientes: $T\Box\Diamond$

Sistema: $T\Box\Diamond\Delta$

Bases independientes: $\Box\Diamond\Delta$

Sistema: $T\Box\Diamond\Delta(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\Box\Diamond(\sim\nabla+)$

Sistema: $T\Box\Diamond\Delta(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\Box\Diamond(\sim\nabla-)$

Sistema: $T\Box\Delta$

Bases independientes: $\Box\Delta$

Sistema: $\top \Box \Delta (\sim \nabla +)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\Box (\sim \nabla +)$

Sistema: $\top \Box \Delta (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\Box (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \Diamond$

Bases independientes: $\top \Diamond$

Sistema: $\top \Diamond \Delta$

Bases independientes: $\Diamond \Delta$

Sistema: $\top \Diamond \Delta (\sim \nabla +)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\Diamond \Delta (\sim \nabla +)$

Sistema: $\top \Diamond \Delta (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\Diamond \Delta (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \Diamond (\sim \nabla +)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\Diamond (\sim \nabla +)$

Sistema: $\top \Diamond (\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\Diamond (\sim \nabla -)$

Sistema: $\top \Delta$

Bases independientes: Δ

Sistema: $\top \Delta (\sim \nabla +)(\sim \nabla -)$

Bases independientes: $\Delta(\sim\nabla+)$

Sistema: $\top\Delta(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\Delta(\sim\nabla-)$

Sistema: $\top(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\top(\sim\nabla+)$

Sistema: $\top(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\top(\sim\nabla-)$

Sistema: $\perp$

Bases independientes: $\perp$

Sistema: $\perp(\text{id})$

Bases independientes: $\perp(\text{id})$

Sistema: $\perp(\text{id})\Box$

Bases independientes: $\perp(\text{id})\Box$

Sistema: $\perp(\text{id})\Box\Diamond$

Bases independientes: $\perp(\text{id})\Box\Diamond$

Sistema: $\perp(\text{id})\Box\Diamond\nabla$

Bases independientes: $(\text{id})\Box\Diamond\nabla$

Sistema: $\perp(\text{id})\Box\Diamond\nabla(\nabla+)$

Bases independientes: $(\text{id})\Box\Diamond(\nabla+)$

Sistema: $\perp(\text{id})\Box\Diamond\nabla(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\Box\Diamond(\nabla-)$

Sistema: $\perp(\text{id})\Box\Diamond\nabla(\nabla+)(\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $\Box\Diamond(\nabla+)(\Box\forall\nabla-)\Box\Diamond(\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $\perp(\text{id})\Box\Diamond\nabla(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $\Box\Diamond\nabla(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $\perp(\text{id})\Box\Diamond(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $\perp\Box\Diamond(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $\perp(\text{id})\Box\nabla$

Bases independientes: $(\text{id})\Box\nabla$

Sistema: $\perp(\text{id})\Box\nabla(\nabla+)$

Bases independientes: $(\text{id})\Box\nabla(\nabla+)$

Sistema: $\perp(\text{id})\Box\nabla(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\Box\nabla(\nabla-)$

Sistema: $\perp(\text{id})\Box\nabla(\nabla+)(\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $\Box\nabla(\nabla+)(\Box\forall\nabla-)\Box\nabla(\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $\perp(\text{id})\Box\nabla(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $\Box\nabla(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $\perp(\text{id})\Box(\nabla+)$

Bases independientes: $(\text{id})\Box(\nabla+)$

Sistema: $\perp(\text{id})\Box(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\Box(\nabla-)$

Sistema: $\perp(\text{id})\Box(\nabla+)(\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $\Box(\nabla+)(\Box\forall\nabla-)\Box(\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $\perp(\text{id})\Box(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $\perp\Box(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $\perp(\text{id})\Diamond$

Bases independientes: $\perp(\text{id})\Diamond$

Sistema: $\perp(\text{id})\Diamond\nabla$

Bases independientes: $(\text{id})\Diamond\nabla$

Sistema: $\perp(\text{id})\Diamond\nabla(\nabla+)$

Bases independientes: $(\text{id})\Diamond(\nabla+)$

Sistema: $\perp(\text{id})\Diamond\nabla(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $(\text{id})\Diamond(\nabla-)$

Sistema: $\perp(\text{id})\Diamond\nabla(\nabla+)(\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $\Diamond(\nabla+)(\Box\forall\nabla-)\Diamond(\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $\perp(\text{id})\Diamond\nabla(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $\Diamond \nabla (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\perp (\text{id}) \Diamond (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\perp \Diamond (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\perp (\text{id}) \nabla$

Bases independientes: $(\text{id}) \nabla$

Sistema: $\perp (\text{id}) \nabla (\nabla +)$

Bases independientes: $(\text{id}) \nabla (\nabla +)$

Sistema: $\perp (\text{id}) \nabla (\nabla +) (\nabla -)$

Bases independientes: $(\text{id}) \nabla (\nabla -)$

Sistema: $\perp (\text{id}) \nabla (\nabla +) (\nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\nabla (\nabla +) (\Box \vee \nabla -) \nabla (\nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\perp (\text{id}) \nabla (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\nabla (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\perp (\text{id}) (\nabla +)$

Bases independientes: $\perp (\text{id}) (\nabla +)$

Sistema: $\perp (\text{id}) (\nabla +) (\nabla -)$

Bases independientes: $\perp (\text{id}) (\nabla -)$

Sistema: $\perp (\text{id}) (\nabla +) (\nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Bases independientes: $\perp (\nabla +) (\Box \vee \nabla -) \perp (\nabla -) (\Box \vee \nabla -)$

Sistema: $\perp(\text{id})(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $\perp(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $\perp\Box$

Bases independientes: $\perp\Box$

Sistema: $\perp\Box\Diamond$

Bases independientes: $\perp\Box\Diamond$

Sistema: $\perp\Box\Diamond\nabla$

Bases independientes: $\Box\Diamond\nabla$

Sistema: $\perp\Box\Diamond\nabla(\nabla+)$

Bases independientes: $\Box\Diamond(\nabla+)$

Sistema: $\perp\Box\Diamond\nabla(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $\Box\Diamond(\nabla-)$

Sistema: $\perp\Box\nabla$

Bases independientes: $\Box\nabla$

Sistema: $\perp\Box\nabla(\nabla+)$

Bases independientes: $\Box\nabla(\nabla+)$

Sistema: $\perp\Box\nabla(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $\Box\nabla(\nabla-)$

Sistema: $\perp \Box(\nabla+)$

Bases independientes: $\Box(\nabla+)$

Sistema: $\perp \Box(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $\Box(\nabla-)$

Sistema: $\perp \Diamond$

Bases independientes: $\perp \Diamond$

Sistema: $\perp \Diamond \nabla$

Bases independientes: $\Diamond \nabla$

Sistema: $\perp \Diamond \nabla(\nabla+)$

Bases independientes: $\Diamond(\nabla+)$

Sistema: $\perp \Diamond \nabla(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $\Diamond(\nabla-)$

Sistema: $\perp \nabla$

Bases independientes: ∇

Sistema: $\perp \nabla(\nabla+)$

Bases independientes: $\nabla(\nabla+)$

Sistema: $\perp \nabla(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $\nabla(\nabla-)$

Sistema: $\perp(\nabla+)$

Bases independientes: $\perp(\nabla+)$

Sistema: $\perp(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $\perp(\nabla-)$

Sistema: (id)

Bases independientes: (id)

Sistema: (id)~

Bases independientes: ~

Sistema: (id)~ $\square(\sim\square)\diamond(\sim\diamond)$

Bases independientes: $\sim\square \sim(\sim\square) \sim\diamond \sim(\sim\diamond)$

Sistema: (id)~ $\square(\sim\square)\diamond(\sim\diamond)(\square\vee\nabla-)(\sim\diamond\vee\nabla+)$

Bases independientes: $\sim\square(\square\vee\nabla-) \sim\square(\sim\diamond\vee\nabla+) \sim(\sim\square)(\square\vee\nabla-) \sim(\sim\square)(\sim\diamond\vee\nabla+) \sim\diamond(\square\vee\nabla-) \sim\diamond(\sim\diamond\vee\nabla+) \sim(\sim\diamond)(\square\vee\nabla-) \sim(\sim\diamond)(\sim\diamond\vee\nabla+) \square(\square\vee\nabla-)(\sim\diamond\vee\nabla+) (\sim\square)(\square\vee\nabla-)(\sim\diamond\vee\nabla+) \diamond(\square\vee\nabla-)(\sim\diamond\vee\nabla+) (\sim\diamond)(\square\vee\nabla-)(\sim\diamond\vee\nabla+)$

Sistema: (id)~ $(\nabla+)(\sim\nabla+)(\nabla-)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $\sim(\nabla+) \sim(\sim\nabla+) \sim(\nabla-) \sim(\sim\nabla-)$

Sistema: (id)~ $(\nabla+)(\sim\nabla+)(\nabla-)(\sim\nabla-)(\square\vee\nabla-)(\sim\diamond\vee\nabla+)$

Bases independientes: $\sim(\nabla+)(\square\vee\nabla-) \sim(\nabla+)(\sim\diamond\vee\nabla+) \sim(\sim\nabla+)(\square\vee\nabla-) \sim(\sim\nabla+)(\sim\diamond\vee\nabla+) \sim(\nabla-)(\square\vee\nabla-) \sim(\nabla-)(\sim\diamond\vee\nabla+) \sim(\sim\nabla-)(\square\vee\nabla-) \sim(\sim\nabla-)(\sim\diamond\vee\nabla+) (\nabla+)(\square\vee\nabla-)(\sim\diamond\vee\nabla+) (\sim\nabla+)(\square\vee\nabla-)(\sim\diamond\vee\nabla+) (\nabla-)(\square\vee\nabla-)(\sim\diamond\vee\nabla+) (\sim\nabla-)(\square\vee\nabla-)(\sim\diamond\vee\nabla+)$

Sistema: (id)~ $(\square\vee\nabla-)(\sim\diamond\vee\nabla+)$

Bases independientes: $\sim(\square\vee\nabla-) \sim(\sim\diamond\vee\nabla+) (\square\vee\nabla-)(\sim\diamond\vee\nabla+)$

Sistema: $(id)\Box$

Bases independientes: $(id)\Box$

Sistema: $(id)\Box(\sim\Box)$

Bases independientes: $(id)(\sim\Box)$

Sistema: $(id)\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)$

Bases independientes: $(id)\Box(\sim\Diamond) (id)(\sim\Box)\Diamond (id)(\sim\Box)(\sim\Diamond)$

Sistema: $(id)\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $\Box(\sim\Diamond)(\Box\forall\nabla-) (\sim\Box)\Diamond(\Box\forall\nabla-) (\sim\Box)(\sim\Diamond)(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $(id)\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)(\sim\Diamond\forall\nabla+)$

Bases independientes: $\Box(\sim\Diamond\forall\nabla+) (\sim\Box)(\sim\Diamond\forall\nabla+) \Diamond(\sim\Diamond\forall\nabla+) (\sim\Diamond)(\sim\Diamond\forall\nabla+)$

Sistema: $(id)\Box(\sim\Box)(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $(\sim\Box)(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $(id)\Box\Diamond$

Bases independientes: $(id)\Box\Diamond$

Sistema: $(id)\Box\Diamond(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $\Box\Diamond(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $(id)\Box(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $\Box(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $(id)\Diamond$

Bases independientes: $(id)\Diamond$

Sistema: $(id)\Diamond(\sim\Diamond)$

Bases independientes: $(id)(\sim\Diamond)$

Sistema: $(id)\Diamond(\sim\Diamond)(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $(\sim\Diamond)(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $(id)\Diamond(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $\Diamond(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $(id)(\nabla+)$

Bases independientes: $(id)(\nabla+)$

Sistema: $(id)(\nabla+)(\sim\nabla+)(\nabla-)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(id)(\nabla+)(\sim\nabla+)$ $(id)(\sim\nabla+)(\nabla-)$ $(id)(\nabla-)(\sim\nabla-)$

Sistema: $(id)(\nabla+)(\sim\nabla+)(\nabla-)(\sim\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $(\nabla+)(\sim\nabla+)(\Box\forall\nabla-)$ $(\nabla+)(\sim\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$ $(\sim\nabla+)(\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$ $(\nabla-)(\sim\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $(id)(\nabla+)(\sim\nabla+)(\nabla-)(\sim\nabla-)(\sim\Diamond\forall\nabla+)$

Bases independientes: $(\sim\nabla+)(\sim\Diamond\forall\nabla+)$ $(\nabla-)(\sim\Diamond\forall\nabla+)$

Sistema: $(id)(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $(id)(\nabla-)$

Sistema: $(id)(\nabla+)(\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$

Bases independientes: $(\nabla+)(\Box\forall\nabla-)$ $(\nabla-)(\Box\forall\nabla-)$

Sistema: $(id)(\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(id)(\nabla+)(\sim\nabla-)$

Sistema: $(id)(\nabla+)(\sim\nabla-)(\sim\Diamond\nabla+)$

Bases independientes: $(\nabla+)(\sim\Diamond\nabla+)(\sim\nabla-)(\sim\Diamond\nabla+)$

Sistema: $(id)(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(id)(\sim\nabla+)$

Sistema: $(id)(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)(\Box\nabla-)$

Bases independientes: $(\sim\nabla+)(\Box\nabla-)(\sim\nabla-)(\Box\nabla-)$

Sistema: $(id)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(id)(\sim\nabla-)$

Sistema: $(id)(\Box\nabla-)$

Bases independientes: $(\Box\nabla-)$

Sistema: $(id)(\sim\Diamond\nabla+)$

Bases independientes: $(\sim\Diamond\nabla+)$

Sistema: $\Box$

Bases independientes: $\Box$

Sistema: $\Box(\sim\Box)$

Bases independientes: $(\sim\Box)$

Sistema: $\Box(\sim\Box)\Diamond(\sim\Diamond)$

Bases independientes: $\Box(\sim\Diamond) (\sim\Box)\Diamond (\sim\Box)(\sim\Diamond)$

Sistema: $\Box\Diamond$

Bases independientes: $\Box\Diamond$

Sistema: $\Diamond$

Bases independientes: $\Diamond$

Sistema: $\Diamond(\sim\Diamond)$

Bases independientes: $(\sim\Diamond)$

Sistema: $(\nabla+)$

Bases independientes: $(\nabla+)$

Sistema: $(\nabla+)(\sim\nabla+)(\nabla-)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(\nabla+)(\sim\nabla+) (\sim\nabla+)(\nabla-) (\nabla-)(\sim\nabla-)$

Sistema: $(\nabla+)(\nabla-)$

Bases independientes: $(\nabla-)$

Sistema: $(\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(\nabla+)(\sim\nabla-)$

Sistema: $(\sim\nabla+)(\sim\nabla-)$

Bases independientes: $(\sim\nabla+)$

Sistema: $(\sim\nabla-)$

Bases independientes: ($\sim \nabla -$)

Bibliografia

(*JSL* = *Journal of Symbolic Logic*. *NDJFL* = *Notre Dame Journal of Formal Logic*.)

Batchelor, Roderick. *Modal Functions* (Lecture Notes), 2011.

Burgess, John P. 'Which modal logic is the right one?', *NDJFL*, vol. 40, 1999, pp. 81–93.

Canty, J. T., & Thomas Scharle. 'A note on the singularities of $S5$ ', *NDJFL*, vol. 7, 1966, p. 108.

Carnap, Rudolf. 'Modalities and quantification', *JSL*, vol. 11, 1946, pp. 33–64.

Dugundji, James. 'Note on a property of matrices for Lewis and Langford's calculi of propositions', *JSL*, vol. 5, 1940, pp. 150–1.

Hendry, Herbert, & Gerald Massey. 'On the concepts of Sheffer functions', in K. Lambert (ed.), *The Logical Way of Doing Things*, Yale, 1969, pp. 279–93.

Kripke, Saul. 'A completeness theorem in modal logic', *JSL*, vol. 24, 1959, pp. 1–14.

Massey, Gerald. 'The theory of truth tabular connectives, both truth-functional and modal', *JSL*, vol. 31, 1966, pp. 593–608.

———. ‘Binary connectives functionally complete by themselves in S5 modal logic’, *JSL*, vol. 32, 1967, pp. 91–2.

———. ‘Normal form generation of S5 functions via truth-functions’, *NDJFL*, vol. 9, 1968, pp. 81–85.

———. *Understanding Symbolic Logic*, New York, Harper & Row, 1970.

Scharle, Thomas W. ‘Axiomatization of fragments of S5’, *NDJFL*, vol. 16, 1975, pp. 45–70.

Wernick, William. ‘Complete sets of logical functions’, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 51, 1942, pp. 117–32.

Wittgenstein, Ludwig. *Tractatus Logico-Philosophicus*, London, Routledge, 1922.