UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FACULDADE DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

DOUTORADO EM FILOSOFIA

SAUL GURFINKEL MARQUES DE GODOY

Estudos em Lógica Paraconsistente Deôntica DL- $DQ^{=}$

São Paulo

Versão Original

2016

Saul Gurfinkel Marques de Godoy

Estudos em Lógica Paraconsistente Deôntica DL- $DQ^{=}$

Tese apresentada ao Programa de Pos-graduação em Filosofia do Departamento de Filosofia da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas (FFLCH) da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Filosofia, sob orientação do Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa

São Paulo

2016

Saul Gurfinkel Marques de Godoy

Estudos em Lógica Paraconsistente Deôntica DL- $DQ^{=}$

Tese apresentada ao Programa de Pos-graduação em Filosofia do Departamento de Filosofia da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas (FFLCH) da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Filosofia, sob orientação do Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa.

Versão Original

São Paulo

2016

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Catalogação na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo

```
        de Godoy, Saul Gurfinkel Marques
dS588E     Estudos em Lógica Paraconsistente Deôntica DL- DQ=
e       / Saul Gurfinkel Marques de Godoy ; orientador
        Newton Carneiro Affonso da Costa. - São Paulo, 2016.
           108 f.


           Tese (Doutorado)- Faculdade de Filosofia, Letras
        e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo.
        Departamento de Filosofia. Área de concentração:
        Filosofia.


           1. lógica. 2. deôntica. 3. paraconsistente. 4.
        paradoxo. 5. direito. I. da Costa, Newton Carneiro
        Affonso, orient. II. Título.
```

DE GODOY, S.G.M**. Estudos em Lógica Paraconsistente Deôntica DL- DQ$^{=}$.** Tese apresentada à Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Filosofia.

Aprovado em:

Banca examinadora

Prof. Dr. _____________________Instituição:______________________

Julgamento:___________________Assinatura:_____________________

Prof. Dr. _____________________Instituição:______________________

Julgamento:___________________Assinatura:_____________________

Prof. Dr. _____________________Instituição:______________________

Julgamento:___________________Assinatura:_____________________

Prof. Dr. _____________________Instituição:______________________

Julgamento:___________________Assinatura:_____________________

Prof. Dr. _____________________Instituição:______________________

Julgamento:___________________Assinatura:_____________________

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos

Pelo apoio, ao amigo Marcos e ao Dr. Moise. À Camila pela ajuda e companheirismo. Ao Professor Newton pelos anos de paciência e ajuda. Aos Professores Scott Brewer, Agustín Rayo e Timothy Williamson pela oportunidade inesquecível.

Ao apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo-Fapesp e do Conselho Nacional do Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq que viabilizaram essa pesquisa.

Em especial, ao Professor Edélcio que possibilitou o impossível.

Financiamento do estudo: Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo-Fapesp. Processo número 2012/23377-0 e Conselho Nacional do Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq. Processo número 248661/2012-4

SUMÁRIO

DE GODOY, S.G.M**. Estudos em Lógica Paraconsistente Deôntica DL- DQ$^{=}$.** Tese (Doutorado). Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo. 2016.

RESUMO

Em nossa dissertação de mestrado, **ESTUDOS SOBRE A LÓGICA PARACONSISTENTE DL E APLICAÇÕES EM DIREITO** estávamos interessados na construção de um sistema deôntico paraconsistente a partir de uma lógica dialética e na introdução de operadores de interpretação na lógica clássica. A pesquisa atual pretende ampliar o uso de lógicas deônticas paraconsistentes para formalizações com quantificadores e operador de igualdade e apresentar a lógica DL-DQ$^{=}$, como uma melhor formalização do que os sistemas input/out e algumas lógicas de proposições normativas. Pretendemos aplicar a lógica DL-D$^{Q=}$ na solução de paradoxos deônticos.

Palavras-chave: lógica; deôntica; paraconsistente; paradoxos; direito.

DE GODOY, S.G.M. **Studies of Paraconsistent Logic DL-DQ$^{=}$**. Tese (Doutorado). Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas. Universidade de São Paulo. 2016.

ABSTRACT

In our master's dissertation, **ESTUDOS SOBRE A LÓGICA PARACONSISTENTE DL E APLICAÇÕES EM DIREITO** (Studies of Paraconsistent Logic DL and its applications in Law) we focused on establishing a paraconsistent deontic system based on specific dialectical logic and urging in interpretation's symbols in classical logic. In this research we try to expand the paraconsistent deontic logic to formal languages with symbols for quantifiers and equality and to develop the logic DL-DQ$^{=}$ which we believe presents a better formalization, compared to two other system called Input\Output and Normative Propositional Logics. We intend to apply DL-DQ$^{=}$ as tool to solve deontic paradoxes

Keywords: logic; deontic; paraconsistent; paradox; law.

INTRODUÇÃO

O objetivo deste texto é a obtenção de extensões do sistema paraconsistentes DL para o cálculo deôntico de primeira ordem com igualdade DL-DQ$^{=}$. Pretendemos aplicar o nosso sistema à solução de alguns paradoxos deônticos. Também analisaremos sistemas propostos por Carlos Alchourrón e David Makinson e descreveremos as vantagens da aplicação da lógica DL-D$^{Q=}$ na formalização de teorias jurídicas.

A nossa dissertação dissertação de mestrado apresentadomos um sistema de lógica paraconsistente desenvolvido por N. C. da Costa e R. Wolf, baseado em investigações de McGill e Parry referentes a certos aspectos da dialética Hegeliana.

Partindo do sistema denominado DL é estrutuarado a partir de uma lógica positiva intuicionista, de maneira semelhante a outros sistemas paraconsistentes. Importante frisar que o sistema DL torna-se diverso destes sistemas.

Adicionamos, com em outros cálculos paraconsistentes de Da Costa, a definição de fórmulas *bem comportadas,* que acarretam no cumprimento tanto do princípio do terceiro excluído como o da não-contradição.

Apresentaremos o cálculo DL acrescido de quantificadores e igualdade, enriquecendo o nosso sistema e obtendo uma semântica a partir da noção de mundos possíveis.

Como os sistemas lógicos utilizados para o tratamento de questões são variados e numerosos, entendemos importante confrontar algumas dessas abordagens, como a lógica denominada Input/Output e algumas considerações sobre sistemas apresentados por Carlos Carlos Eduardo Alchourrón.

A seguir apresentaremos os principais paradoxos deônticos e com entendemos que o cálculo DL-DQ$^{=}$ pode contribuir para a sua solução.

CAPÍTULO I - Histórico

Histórico

A influência desse tipo de lógica paraconsistente pode ser apenas indireta, por exemplo, atingindo a demonstração das teorias filosóficas, esclarecendo assim, conceitos como os de negação e contradição. Isso aconteceria através da possibilidade de se construir teorias fortemente inconsistentes (mas não triviais), elaboração de sistemas ontológicos diferentes, etc.

Pode-se estabelecer um vínculo estreito entra a ontologia e a lógica, pois ao modificar-se os postulados lógicos também se modifica o que se assume que seja o contexto de uma determinada teoria. Assim, nas mudanças de lógicas, entram ontologias mais ricas e completas. Por exemplo: a partir da lógica clássica, se criou a teoria dos objetos de Meinong e, na medida que esta aceita a existência de objetos contraditórios, necessitaria de uma abordagem diferenciada. Esse objetivo seria alcançado adotando-se uma lógica paraconsistente, eliminando dessa forma objetos contraditórios que eventualmente pudessem existir em outro contexto.

Os argumentos acima, porém, são afetados pelo desenvolvimento da lógica paraconsistente. A lógica paraconsistente surgiu para evitar o fenômeno da trivialização possibilitando que a partir de uma contradição, e com ela, se possibilite administrar as contradições num cálculo lógico. Na verdade, ela nos permite localizar as contradições e mantê-las no sistema e estruturar uma semântica na qual tanto sua afirmação quanto sua negação são verdadeiras sem que isto destrua a cadeia de inferências válidas.

O desenvolvimento da lógica paraconsistente também tem servido para entender muito mais profundamente esse fenômeno denominado trivialização. A lógica paraconsistente mostra que é mais apropriado qualificar como triviais sistemas dedutivos nos quais se possam deduzir quaisquer formulas e chamar de inconsistentes aqueles nos quais se deduz uma contradição, articulada com um determinado operador de negação.

Devemos frisar que uma coisa é um sistema lógico e outra são as teorias que usam deste sistema como base inferencial. Outra distinção importante deve ser feita entre sistemas triviais e sistemas trivializáveis. Os primeiros são aqueles que fornecem todas as condições requeridas para se deduzir qualquer preposição. O segundo são aqueles que, sob certas condições, qualquer proposição pode ser deduzida. Há necessariamente uma conexão entre ambas noções.

O Princípio da contradição já foi descrito por Sócrates que apresentou uma Formulação Ontológica:“É impossível que uma mesma coisa pertença e não pertença a determinada coisa ao mesmo tempo e sob o mesmo respeito.” Uma formulação lógica: “O mais certo de todos os princípios é que preposições contraditórias não são simultaneamente verdadeiras” e uma formulação Psicológica: “Ninguém pode crer que a mesma coisa possa ser e não ser.”

Formulação Ontológica:

“A nenhum objeto pode a mesma característica pertencer e ao mesmo tempo não pertencer.”

Formulação Lógica:

“Duas proposições contraditórias não são verdadeiras ao mesmo tempo.”

Formulação Psicológica:

“Dois atos de crença correspondentes a proposições contraditórias não podem co-existir na mesma consciência.”

Na lógica clássica o princípio de não contradição deve ser aceito, as discussões sobre a possibilidade de um cálculo lógico que derrogue tal princípio foi um dos patamares da criação de sistemas paraconsistentes. Importante frisar que o princípio de não contradição é formulado num sistema lógico pois possui caráter indemonstrável, ou seja, uma proposição não é demonstrável ou indemonstrável de *per si*, porém em relação a outras. [1]

1- O conceito de demonstração refere-se à um cálculo lógico, portanto a abordagem seria formal. Outras conceitos podem ser utilizado como por exemplo o de demonstração elêntica do princípio da contradição que consiste em fazer que seu opositor diga algo significante para todos. Por exemplo: homem significa animal bípede; Primeira prova: Se é possível dizer que alguma coisa é homem, é necessário que ela seja animal bípede; isto é o que a palavra homem significa. Porém, se isto é necessário, então é impossível que tal coisa não seja um animal bípede, pois necessidade significa a impossibilidade de não ser. Portanto, não é possível asseverar ao mesmo tempo que a mesma coisa é homem e não homem.

Autores como De Morgan, Peirce, Schröder, Frege e Peano procuram com estabelecer critérios que diferenciassem a lógica através de uma formulação rigorosa obtendo um cálculo lógico. Boole por sua vez, estruturou a lógica de caráter algébrico. Todos esses autores buscavam um tratamento rigoroso para os princípios racionais existente restabelecendo a proposta dos pensadores gregos, em especial Aristóteles que empenharam-se nessa empreitada. Houve assim nesse momento histórico a formação de uma proposta de matematizar a lógica e depois uma concentração da matemática pura na lógica, alçando esse domínio a um novo patamar estabelendo a lógica como disciplina matemática.

Desde Aristóteles a tentativa de esclarecimento do raciocínio fundado em princípios lógicos foi objeto de estudo dos pensadores, com a formalização desses princípios abriu-se um novo campo de estudo, dentre esses princípios um dos mais importantes foi o da não contradição que era considerado essencial para que qualquer raciocínio fosse considerado plausível e ainda para que a realidade pudesse ser tratada com sentido. Teorias que buscavam dar um alicerce ao estudo da matemático tomaram corpo, em especial a teoria de conjuntos formulada inicialmente por Cantor.

A discussão sobre os fundamentos da matemática despertou interesse em pensadores que se dispuseram a questionar as bases dessa disciplina. Como representante dessa tendência é inegável a contribuição de Bertrand Russell e suas indagações sobre paradoxos na teoria de conjuntos. Esses paradoxos indicavam a existência de contradições em uma teoria formalizada que deveria estar livre dessa aparição. Com o objetivo de edificar um sistema que impedisse essa situação Russell e Whitehead publicaram uma obra de impacto denominada *Principia Mathematica.*

Nesse mesmo ano um filósofo e lógico polaco chamado Jan Lukasiewcs publicou cujo título traduzido seria “Sobre o princípio de contradição em Aristóteles”. Com esse trabalho o autor iniciou a discussão sobre o consenso na época de que as contradições deveriam ser rechaçadas propondo uma revisão tendo como ponto de partida o fato de que o aparecimento de uma contradição não nos força a aceitarmos que ´tudo` seria contraditório. Fundamentava esse posicionamento sustentando, por exemplo que a lei da contradição não pode ser provada sustentando-se que ela é evidente. A evidencia não possui critério seguro da verdade. Preconizava que há objetos contraditórios. Por exemplo, o círculo quadrado de Meinong. Com isso propicia o tratamento de teorias lógico-matemáticas nas quais figuram objetos contraditórios que derrogariam a lei da contradição.

Segundo a tese de Hegel temos que um paradoxo informal, ou seja, argumento prima facie logicamente aceitável com premissas também aparentemente aceitáveis mas cuja conclusões aparecem inaceitáveis.

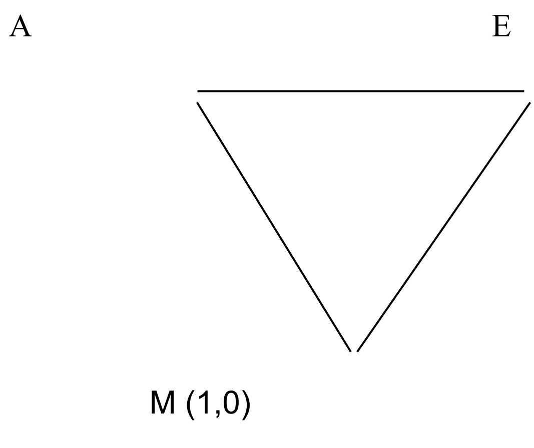
Falácia:

Qualquer argumento de forma inaceitável ou possuindo alguma premissa inaceitável.

Com a descoberta de Lobachevisky da possibilidade da construção de uma geometria que negava o postulado das paralelas, a discussão sobre a revisão dos princípios declarados pela lógica aristotélicas foram automaticamente passíveis de discussão. No texto denominado Sobre os Juízos Particulares, o triângulo dos opostos e a lei do quarto excluído, Nikolaj Alexandrovic Vasiliev, sem conhecimento do trabalho de Lukasiewicz, faz um estudo sobre a classificação tradicional dos juízos, a partir do qual se constrói o quadro clássico de oposições entre os quatro tipos de juízos com base no silogismo aristotélico[1]: universal afirmativo A, universal negativo E, particular afirmativo I e particular negativo O. Vasiliev considera que quando se afirma “algum S é P” pode-se estar afirmando duas coisas distintas: ou que algum S é P, podendo ser todo S é P; ou que somente algum, não todo, S é P, (apud Arruda) Uma análise atenta do primeiro sentido torna claro o sentido de uma proposição indefinida, por ser nem particular nem universal.

Sugerindo uma exemplo sobre triângulos equiláteros, ou autor aponta que que podem existir tantos triângulos que são equiláteros quanto outros que não são, de tal forma que estes juízos particulares podem ser tanto afirmativos como negativos, a diferença está apenas no que cada um explicita. Vasiliev conclui então que se trata de um único juízo, cuja formulação mais adequada seria “todo S ou é ou não é P”, propondo denominá-lo juízo acidental, assinalando a letra M. O objetivo é estipular se o conceito de triângulo pode ser aplicado a um ou a vários predicados particulares. Vasiliev procura uma distinção de quando nos referimos a ações, que seriam juízos singulares ou juízos sobre grupos, e este últimos por sua vez poderiam ser numericamente determinados ou indeterminados.

Como resultado da análise anterior, o quadrado de oposição clássica, e suas distintas relações entre juízos contraditórios, contrários e subalternos seria modificada, no caso dos juízos que tratam sobre predicados aplicáveis a determinados conceitos. Como resultado obtém-se um esquema de oposições entre três tipos de juízos contrários, conforme o esquema revela:



Neste triângulo de oposições. Os membros de cada um dos pares (A,E); (A,M); (E,M) não podem ser ambos verdadeiros, mas podem ser ambos falsos, na medida em que um dos três juízos e somente um pode ser verdadeiro. Essa seria uma indicação de que não existiria uma quarta possibilidade, Vasiliev denominou isto como princípio do quarto excluído. Esta lei não se aplica à juízos sobre ações, pois para este se manteria Diante disto Vasiliev conclui que essa lei não expressa uma necessidade do pensamento independente do objeto tratado, pois no caso de juízos sobre conceitos se pode pensar uma terceira possibilidade excluindo-se uma quarta

Na verdade a análise de Vasiliev sobre esse tema foi superficial, uma vez que desde Frege e Peirce já havia se desenvolvido a teoria sobre quantificadores e funções proposicionais, no entanto, mostra um preocupação em visar os princípios lógicos ditos inquestionáveis por tantos séculos, esta revisão se estendeu além do nível da forma alcançando o conteúdo. Vasiliev tratou apenas do problema do terceiro excluído, mantendo os outros princípios lógicos mas possibilitando uma discussão crítica.

Em outro artigo, segundo tradução de Arruda, Vasiliev escreveu que "O objetivo do presente artigo é mostrar a possibilidade de existência de uma outra lógica e de outras operações lógicas diferentes daquelas que usamos; é mostrar que nossa lógica Aristotélica é somente um dos muitos sistemas lógicos possíveis. Esta nova lógica não será uma nova formulação da antiga lógica; ela diferenciar-se-á não somente pela formulação, mas, também, pelo próprio alcance das operações lógicas. Esta será uma "nova lógica" e não apenas uma nova formulação da lógica (Arruda 1990).

Da mesma forma que se mostrou que ao se modificar o axioma das paralelas dos postulados da geometria euclidiana obteríamos uma geometria não-euclidiana, estava aberta a possibilidade para a formulação de lógicas não aristotélicas através da mudança de postulados da lógica clássica. Isto se deve à permissividade, até então latente, da construção de sistemas lógicos construído a partir de vários princípios ou/e axiomas independentes, sendo uma opção racional a eliminação de alguns deles.

Vasiliev chegou a mesma constatação de Lukasiewicz em relação ás "percepções negativa" ", no entanto a definição de negação é diferente e aparentemente oposta a que havia apresentado. Na medida em que Vasilieva afirmava que o princípio da não contradição não deveria se vinculara a definição de negação, eu não está sendo vinculada. No seu entendimento, a negação não se pode fundamentar na ausência de um predicado pois, a ausência de um predicado não pode ser assegurada pela percepção.

A lei da contradição expressa a incompatibilidade da afirmação com a negação, e a negação é aquilo que é incompatível com a afirmação. Isto torna claro que a lei da contradição já se encontra na definição de negação. Não é difícil ver porque a lei da contradição não pode ser violada na nossa lógica. Se alguma vez a afirmação A coincidisse com a sua negação B, não reconheceríamos uma violação da lei da contradição, mas concluiríamos que incorretamente chamamos B de negação de A. Pois a negação, conforme sua definição, é aquilo que é incompatível, que não pode coincidir com a afirmação. A lei da contradição é real assim como é real a verdade segundo a qual a Terra se realize mais rapidamente ou mais vagarosamente, ela realizar-se-á durante um dia, já que chamamos de dia precisamente o tempo de rotação da Terra em torno do seu eixo. Contudo, a rotação da Terra em torno de seu eixo durante um dia e alei da contradição não ã simples tautologias. Elas pressupõem, respectivamente, o fato da Terra girar em torno de seu eixo e a existência de predicados, incompatíveis (Arruda 1990; p. 45)

Lukasiewicz afirmou que o as entidades matemáticas e lógicas são verdadeiras apenas no mundo ideal e nunca saberemos se possuem correspondentes com objetos reais. [pag 46] . Esta posição contraria a de Vasiliev pois, afirma que o princípio da não contradição não está determinado ontologicamente sendo na parte de nossas construções para entendermos o mundo real.

Segundo Lukasiewics a lógica aristotélica possui antinomias que demonstram suas lacunas. Este fato levou-o a um questionamento do lógica aristotélica afirmando que existem das proposições verdadeiras e falsas, as possíveis,, que correspondem a um terceiro valor . Isto foi a origem da lógica trivalente, sendo um sistema consistente como a lógica aristotélicas, sendo porém mais amplo no sentido de possuir mais fórmulas e leis.

Usando deste novo sistema, Lukasiewics ataca a posição determinista ao introduzia a noção de fenômenos possíveis que não tem causas podendo ser um ponto de partida numa sequência causal. Afirma que “o ato de um indivíduo criativo pode ser livre e ao mesmo tempo afetar o curso do mundo.

Trata-se de um marco no desenvolvimento da lógica, uma vez que, se tem uma posição questionando o princípio da não contradição de forma racional, visando ainda uma mudança na semântica bivalente até então adotada conforme a orientação de Boole.

Lukasiewics prossegue com o desenvolvimento da lógica trivalente estabelecendo como valor de verdade 0 para falso, 1 como verdadeiro e 2 como possível, depois modifica este último introduzindo o valor ½. Utiliza os operadores de implicação e identidade para realizar cálculos com estes valores, introduzindo o que seria mais tarde desenvolvido por Wittgenstein como tabelas de verdade.

Com o desenvolvimento formal do sistema apresentado Lukasiewics pôde constatar que princípios como o da não contradição e terceiro excluído, que eram necessariamente verdadeiros na lógica aristotélica, passam a ser “possíveis”.

Este desenvolvimento formal propicia a Lukasiewics a discussão filosófica em torno do determinismo tendo o conceito de bivalência confrontado com o de trivalência um caminho, no seu entender, que livraria a coação do verdadeiro-falso em prol de uma nova concepção libertária.

Emil Post desenvolveu neste mesmo período estudos sobre o cálculo proposicional como descrito no Principia Mathematica de Russell e Whiteheadmostrando que este sistema é um fragmento bem definido da lógica. Neste texto, desenvolveu as tabelas de verdade e as primeiras demonstrações de consistência e completude[1]

---

[1] Introduction to a general tehory of elemetary propositions”Amereican Journal of Mathematics vol. 43 (1921) p. 163-165

[2] A mesma definição foi apresentada por Kolmogorov [Bomberieth]

[3] Para um questionamento filosófico destes problemas, consulte Quine, W. V. O., 1953, “Reference and

Post afirmou que os resultados obtidos poderiam ser estendidos para outras partes do Principia Mathematica e para outros sistemas, o que foi efetivamente realizado posteriormente. Uma dessas extensões tratava de sistemas com proposições quereriam ter *m* valores de verdade. Cria o que denomina lógica não-aristotélica.

Nesta contribuição para a lógica polivalente, Post ainda descreveu um sistema infinitamente polivalente. Sua contribuição à lógica merece ainda destaque na criação de sistemas modais que mostrou serem incompatíveis com o cálculo proposicional bivalente, sendo necessário estabelecer uma terceira opção para o “possível”.

Russell e Whitehead em seu Principia Mathematica apresentaram um sistema formal que ficou conhecido como uma das principais vertentes do chamado sistema clássico. Nesta formalização o princípio da não-contradição aparece com teorema e não como axioma. Esta utilização do princípio da não-contradição foi a que predominou no demais sistemas clássicos desenvolvidos, ou seja, em sistemas equivalentes denominados clássicos.

Post realizou estudos sobre o sistema descrito nos Principia Mathematica e neles desenvolveu as tabelas de verdade e o conceito de função de verdade, paralelamente a Wittgenstein em *Tractatus logico-philosophicus*, bem como o de tautologia (denominação cunhada por Wittgenstein na obra citada).

Seu trabalho se desenvolveu culminando na formulação de teoremas de consistência e completude. O primeiro afirmava que o sistema dos Principia Mathematica é consistente, ou seja, toda função de verdade do sistema pode ser afirmada a partir dos postulados ou é inconsistente em relação a eles.

A partir disto, resultou o seguinte corolário: Uma função ou é afirmada como resultado dos postulados ou sua afirmação acarreta na derivação de todas as proposições elementares possíveis.

O resultado é que enquanto o teorema fundamental mostra que os postulados conduzem a se afirmar somente os teoremas do sistemas, o último teorema e seu corolário permitem excluir a possibilidade de agregar-se qualquer outra afirmação ao sistema.

O cálculo é dito completo, no sentido de que o conjunto de fórmulas bem formadas demonstráveis coincide com o conjunto de fórmulas verdadeiramente-funcionalmente válidas. Outro tipo de completude é estabelecido no artigo de Post, um sistema é completo no sentido de que toda fórmula bem formada torna-se demonstrável se acrescentarmos aos postulados qualquer fórmula bem formada que não possa ser demonstrada. O que Post chama de sistema completo é aquele em que toda função de verdade pode ser escrita em termos de funções primitivas e mostra que o cálculo estudado, onde os conectivos são a negação e a disjunção é completo neste sentido. Post apresenta uma nova definição de consistência, as vezes chamada de consistência no sentido de Post que é apresentada da seguinte forma: um cálculo que contém variáveis proposicionais é consistente no sentido de que nenhuma fórmula bem formada constituída de uma única variável é demonstrável Van Heijenoort 1967, p 264.

Estes resultados metateóricos foram pioneiros em demonstrações para outros sistemas lógicos, sendo importantes como configuração do que se poderia entender como um sistema lógico relevante, ou seja, que obtivesse resultados importantes.

Nos sistema ditos não clássicos a prova destes teoremas foi fundamental para sua aceitação como lógicas pertinentes e passível de estudos comparativos entre os diversos sistemas.

David Hilbert formula o que se denominou tese da contradição, $A \rightarrow (B \wedge \neg B) \rightarrow \neg A)$, tese da dupla negação $\neg\neg A \rightarrow A$ .Da primeira obtém a fórmula $(A \wedge \neg A) \rightarrow B)$, e a partir da segunda chega a uma fórmula diferente do princípio do terceiro excluído: $\{(A \rightarrow B) \wedge \neg A \rightarrow B) \rightarrow B\}$.

Hilbert sustenta nessa época que o problema central do método axiomático é a inexistência de uma contradição nesse sistema. Com isso, visa garantir que o sistema axiomático por ele desenvolvido é consistente.

A intenção de Hilbert era eliminar os paradoxos da matemática, como apresentados no caso da teoria dos conjuntos e no cálculo infinitesimal, fundamentando a matemática toda a partir da formalização da aritmética.

As versões de Post e Hilbert diferiram em relação a suposta demonstração da consistência de um sistema lógico. Post pretendia sua prova para um sistema lógico elementar, no nível proposicional e Hilbert intentou o mesmo num sistema que objetivou formalizar a aritmética.

Outra diferença é que Post sustentava que se um sistema contivesse todas as propriedades verdadeiras não seria possível a inclusão de nenhuma outra, pois esta proposição seria contraditória com outra que já fazia parte do sistema. Isso ocorrendo, poderia afirmar-se qualquer outra proposição.

Hilbert, com outra visão, procura mostras que em um sistema axiomático da do n se pode deduzir qualquer proposição, como no caso da aritmética, a fórmula $0 \neq 0$. Portanto, não haveria uma contradição no sistema, pois em caso positivo, seria possível deduzir-se qualquer coisa, em particular a fórmula mencionada.

Este aspecto é crucial para o desenvolvimento da lógica. O que se revela é o conceito de Trivialidade. Se em um sistema lógica encontra-se uma contradição, esse sistema torna-se trivial podendo ser deduzida qualquer fórmula sendo assim, um sistema sem interesse. Outra formulação equivalente diz que nesse sistema um conjunto de fórmulas dedutíveis é equivalente ao de fórmulas bem formadas. Esse sistema perderia o seu interesse ao não agregar nenhuma informação.

As regras de inferência de um sistema lógico devem garantir que de um conjunto de fórmulas válidas seriam dedutíveis certas proposições se fossem verdadeiras, sendo que todas as verdadeiras seriam dedutíveis. A trivialização, como se pode obviamente perceber, inutilizaria as regras de inferência.

Hilbert e Bernays em sua obra Gryndzüg der Theoretischem Logik Elementos de Lógica Teórica, tratam do princípio da não contradição nos sistemas axiomáticos. Esse trabalho foi importante pela mudança do tratamento em relação a existência de contradições nos sistemas lógicos

Nessa obra ocorre uma mudança no tratamento da contradição num sistema axiomático. A consequência de sua existência nos sistemas formais é analisada.

Nos trabalhos sobre lógica de Lewis houve uma tentativa de resolver os problemas referentes à implicação material, o que gerou outros paradoxos dentro do sistema desenvolvido.

Lewis tinha uma visão da lógica como meio de se obter a inferência dedutiva e como uma disciplina que compreende todos os princípios que tratam de proposições tautológicas (Lewis e Langford, 1959]. Sendo que para a inferência lógica o importante seria o entendimento da relação de implicação, pois no seu entendimento, é através dela que se estabelece a conexão entre as premissas e a conclusão que se quer mostrar como sendo um inferência válida.

O que nos interessa sobre o trabalho desse autor é seu tratamento sobre contradições. Em sua análise sobre a implicação, Lewis afirma que ao se assumir uma contradição que não havia sido provada ou deduzida com a aplicação de regras de inferência como a simplificação, a adição ou o silogismo disjuntivo obtém-se a dedução de qualquer proposição. O interessante é que esse argumento fundamentaria a impossibilidade de uso da contradição.

O que na verdade propugna Lewis já vinha sido mencionado no conhecido princípio denominado Pseudo-Scoto. Não nos interessa o aporte histórico sobre o descobridor do princípio sendo encontrada na bibliografia textos que tratam desse tema [Kneale e Kneale e Bochensky]

O princípio seria originado de cinco regras que garantiriam conseqüências corretas, conseqüências, nesse sentido seriam orações que expressam uma inferência logicamente justificada, o que os lógicos medievais chamavam de *consequentiae.* No texto do Pseudo-Scoto encontra-se a seguinte definição: Conseqüência é uma sentença hipotética composta de antecedente e conseqüente através de um conjunção condicional ou racional que significa que nos casos em que eles, antecedente e conseqüente, se formam simultaneamente, é impossível que o antecedente seja verdadeiro e o conseqüente falso (apud Bochenski 1985)

O texto estabeleceu critérios que depois foram considerados como paradoxos da implicação material.

Das cinco regras estabelecidas na obra, três nos interessam. A primeira estabelece que de qualquer proposição que implica uma contradição segue-se qualquer outra proposição como consequência formal. A diferença entre consequência formal e material foi definida em função do argumento ser “perfeito” ou dependerem de outras premissas para que o argumento fosse válido. A consequência formal poderia ser diferente dependendo se seus antecedentes fossem proposições categóricas ou hipotéticas. As materiais poderiam ser “simplesmente” válidas validas “por hora” A prova dessa primeira regra diz que partindo-se de uma contradição ($A \wedge \neg A$), isto é, da conjunção de duas proposições contraditórias pode-se afirmar cada uma delas separadamente A e ¬A, porque de uma conjunção pode-se deduzir qualquer um de seus componentes, portanto, se tomada a proposição A pode-se juntá-la com qualquer outra na forma disjuntiva, $A \vee B$, pois um disjunção pode ser o resultada da implicação de qualquer um de seus disjuntos. Logo, tem-se uma disjunção e uma negação de um dos disjuntos, $A \vee B$ e ¬A, podendo-se deduzir B, que no caso seria qualquer proposição (Kneale e Kneale)

A segunda regra diz que de qualquer proposição impossível segue-se qualquer outra proposição, não em consequência formal, mas sim, em consequência material simplesmente.

A quarta regra diz que de qualquer proposição falsa, se segue qualquer outra proposição, como consequência material por hora.

As três regras tratam do tema que nos preocupa, ou seja, de uma contradição pode-se deduzir qualquer coisa, o mesmo ocorrendo de uma proposição falsa. Essas duas situações são, se analisadas, distintas. O texto do Pseudo-Scoto já menciona essa distinção, a segunda afirmação. Essa atenção é requerida em função da percepção do autor para uma problemática até então desapercebida. Somente com Popper esse tema é novamente abordado.

Não nos interessa a discussão sobre a existência de contradições no mundo real, essa aclaração é importante na medida em que tratamos de sistemas formais onde se trata como os axiomas e teoremas desse sistema. Nos *Principia Mathematica* as fórmulas para o *ex falso sequitor quodlibet* é $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ ou $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$. Essas fórmulas não referem-se a contradições empíricas mas apenas na situação dentro do sistema onde uma proposição implica sua negação.

Quando estamos lidando apenas com um sistema formal a falsidade reduz-se ao que se pode demonstrar logicamente, ou seja, as contradições.

Hilbert e Lukasiewicz expuseram que se um sistema contiver contradições poder-se-ia deduzir-se qualquer coisa. Lukasiewicz justificou as primeiras fórmulas dos *Principia Mathematica* com fundamento no pensamento encontrado no Pseudo-Scoto com refer6encaia às deduções a partir de contradições.

Importante salientar que apesar de aparente diferença nas formalizações do princípio *ex falso sequitor quodlibet* que podem ser apresentadas como na forma implicativa, $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ ou $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$, ou na forma conjuntiva $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$ ou $(\neg A \wedge A) \rightarrow B$, ambas são equivalentes, o que se pode mostrar utilizando-se o chamado princípio da exportação, $[(A \wedge B) \rightarrow C] \leftrightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow C]$.

O que se procura atentar é que ambas as formulações estão intrinsicamente interligadas, e que ambas foram descritas pelo Pseudo-Scoto. O princípio descrito cumpre o alegado de que a partir de duas proposições,s sendo uma a negação da outra , pode deduzir qualquer outra proposição. Esse foi portanto um marco histórico no tratamento da contradição.

Em 1.938 Harol Jeffreys publica um artigo denominado “The nature of Mathematics” que trata de problemas da lógica. Esse artigo originou um debate com Karl Popper que teve importantes resultados para o nosso tema.

Jeffreys não via razão suficiente para afirmar que toda proposição contraditória seria necessariamente dedutível e uma contradição qualquer entendendo que o problema situava-se na impossibilidade do aparecimento de proposições contraditórias nos dados evitando, assim deduzir as contradições de premissas contraditórias rechaçando a trivialização como elemento de maior interesse.

Em resposta, Popper tratando de formulações da dialética chega a conclusão de que de duas premissas contraditórias podemos deduzir logicamente qualquer coisa, inclusive a sua negação. No entanto, como em uma teoria contraditória nada seria transmitido sendo uma teoria inútil ao não transmitir nenhuma informação.

Popper estabelece com isso uma relação com o princípio da não contradição ao afirmar que o sentido real do princípio é que ao rechaçarmos todas as contradições estaríamos assegurando a possibilidade de transmitir alo através do sistema dedutivo, uma vez que todo a ciência colapsaria. Para evitar essa situação deveríamos, portanto, evitar qualquer contradição.

Jeffreys rebate os argumentos de Popper alegando que não ocorreria a inconsistência generalizada planteada por Popper mas que simplesmente se manteria um sistema com uma contradição. Reitera ainda que de um par de proposições contraditórias pode-se deduzir outras contradições (Does a Contradiction Entail Every Proposition?", Jeffreys 1942).

Segundo Bomberith nesse artigo de Jeffreys encontra-se uma insinuação a possibilidade de se criar um sistema sem o princípio do Pseudo-Scoto mas que mantenha a coerência do sistema sem que houvesse maior desenvolvimento do tema pelo autor em outros trabalhos.

No artigo denominado "Are Contradictions Embracing?" (Popper 1943), Popper contestando a alegação de Jeffreys de que seu argumento seria circular, na medida em que nele se presumiria que as contradições são inaceitáveis, introduz o conceito de *embracing* que mais tarde seria denominado como trivialização. Rebate as críticas de Jeffreys dizendo que não apenas as contradições produziriam esse fenômeno mas também que o *embracing* seria uma razão prática para não se admitir contradições. Portanto, o argumento seria circular somente se estivesse presumindo que as contradições são inadmissíveis para provar o primeiro.

A menção desse artigo é importante para o desenvolvimento das lógicas paraconsistentes em virtude além da noção de trivialização da discussão sobre as lógicas positivas e sobre como o problema da trivialização foi tratada com a inserção do conceito finitamente trivializável. Popper sintetiza sua posição afirmando que mesmo nos cálculos mais fracos, mas que possibilitem alguma derivação, a contradição e a trivialização coincidem. Pode-se debilitar o operador de negação, coincidindo assim negação e trivialização da parte negativa do cálculo, sem no entanto podendo avançar salvo privando o negação de seu caráter de operador lógico [*ibid*]. Com esse posicionamento, Popper alinhava-se com o desenvolvimento recente à época dos sistemas minimais, feito por Johansson, baseados no cálculo intuicionista.

Popper teve importância acentuada ao destacar a possibilidade de desenvolvimento de sistemas nos quais nem todos as proposições contraditórias implicassem em todas as proposições aceitando a existência de contradições. No entanto, afirmou que tais sistemas seriam inúteis e de pouco interesse, o que veio a se mostrar como falso.

Para Brower se se abstrai do conteúdo emocional chega-se ao fenômeno elementar dualidade-unidade [Kneale e Kneale 980, pag 626]. Brower tenta mostrar como os conceitos fundamentas da matemática surgem dessa intuição básica e que refere-se às distintas classes de números assim com a forma de se efetuar as demonstrações matemáticas, em especial utilizando-se a indução matemática. Para o intuicionismo a essência está nas construções mentais matemáticas.

Essa perspectiva levou Brower a rechaçar e a inverter a dedução da matemática à lógica que era o objetivo do logicismo e paralelamente a objetar a afirmação do formalismo no tocante a não contradição como critério único de existência na matemática. Segundo Brower seria necessária a inclusão do critério de construtibilidade; dizer que um número de um tipo determinado e que tem tais e quais propriedade, para um intuicionista equivale a dizer que número é construtível [Haack 1982]Essa afirmação impele a problemas não somente em relação aos números finitos com também para os infinitos. Desse questionamento surge a famosa discrepância de Brower em relação ao tratamento do infinito, pois não poderia tratá-lo matematicamente como infinito atual, entendido como a totalidade completa, como anterioridade e independência de qualquer processo humano de geração ou construção, pois haveria que limitar-se ao infinito potencial, em permanente estado de criação ou construção (Kleene 1974).

Brower aceitava o tratamento dos conjuntos finitos pela lógica clássica, mas objetava o tratamento do infinito atual e exigia eu em relação aos infinitos potenciais não se utilizaria o princípio do terceiro excluído nem a eliminação da dupla negação (Kneale e Keneale)

O problema desses princípios estava relacionado aos conjuntos infinitos, pois nem sempre poder-se-ia obter uma demonstração direta. A matemática clássica apela para o uso de demonstrações indiretas, ou seja, v.g., o princípio de redução ao absurdo.. Para o intuicionismo pelo uso do princípio de redução ao absurdo o resultado obtido, ou seja, construído, seria o da dupla negação de uma proposição e não da afirmação dessa proposição, pois para esse passo teríamos de assumir uma proposição qualquer podemos obter uma demonstração dessa proposição A de sua negação ¬A, mas isso não seria válido para todos os casos se se estivesse lidando, por exemplo, com números infinitos, pois não se pode tratar com totalidade completas [Kleene 1974]

O estaria no fato de que se passa dos conjuntos finitos aos infinitos sem se considerar que as intuições matemáticas articularam-se em virtude dos conjuntos finitos, ao agir dessa forma incorreria em problemas, como por exemplo, o aparecimento de paradoxos como o de Burali-Forti.

Brower considerava que a matemática era uma atividade essencialmente mental e, em consequência, pensava que o formalismo matemático e, *a fortiori*, a lógica, eram relativamente pouco importantes (Haack). Por isso desenvolveu um sistema formal que contivesse somente base lógica.

Kolmogorov foi o precursor do formalismo de um sistema intuicionista. A partir do sistema axiomático proposto por Hilbert, que não poderia ser aceito do ponto de vista intuicionista, em especial o axioma que representava o terceiro excluído deveria ser modificado, assim como os axiomas da negação deveriam ser excluídos. Adiciona o que denomina princípio da contradição $(A \rightarrow B) \rightarrow \{(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)\}$. Para Kolmogorov a implicação e a negação não podem ser representadas pelos axiomas de Hilbert. Com a formulação apresentada e o primeiro axioma da implicação introduziu o novo princípio de redução ao absurdo, se uma proposição é verdadeira e de outra proposição segue a negação da primeira então a segunda proposição é falsa.

Kolmogorov apresenta um sistema equivalente ao de Hilbert mas que satisfizesse os critérios de Brower. No sistema apresentado, o lógico russo, ainda insere o axioma $\neg\neg A \rightarrow A$, conhecido como eliminação da dupla negação.

Arend Heyting propõe outra formalização de um sistema intuicionista com as mesmas regras do sistemas chamados de clássicos, mas com o acréscimo de onze esquemas proposicionais. Insere também, uma nova definição dos conectivos lógicos baseados na construtibilidade sem que fossem interdefiníveis. O sistema de Heyting não permite a dedutibilidade das fórmulas $A \vee \neg A$ e $\neg\neg A \rightarrow A$. Esse sistema é de particular interesse conter modificações sintáticas em relação ao sistema clássico, ao contrário das propostas anteriores de sistemas não clássicos que modificavam a semântica ou introduziam novos operadores modais. Esse sistema surgiu como uma restrição ou enfraquecimento da lógica clássica mas que podia obter a maioria das deduções obtidas nos sistemas clássicos. Assemelha-se ao proposto por Kolmogorov ao não possibilitar a dedução do terceiro excluído e da dupla negação. A análise dos axiomas desse sistema possibilita a identificação da parte positiva vislumbrando a criação de um sistema somente com esses axiomas excluindo-se os da negação, mantendo o cálculo, logicamente, interessante.

Hilbert e Bernays desenvolveram um sistema onde poderia extrair-se a lógica positiva, com fundamento na alegação de que em tal formalismo os argumentos lógicos são independentes da suposição de que para cada enunciado existe um oposto. No entanto, isso não quer dizer que somente com os axiomas positivos poderias deduzir-se todas as fórmulas do sistema original que não possuíssem a negação, isso ocorre pois existem tautologias que não são dedutíveis somente a partir dos axiomas positivos, como por exemplo a chamada Lei de Peirce, $(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$, que é independente dos axiomas positivos, e para demonstrá-la seria necessitaria a inclusão de um axioma de negação, que no caso seria a dupla negação.

O interesse nesse sistema é relativo a sua equivalência com o sistema proposto somente com os axiomas positivos do sistema intuicionista. A partir disso é possível alegar a aceitação de uma lógica positiva cuja característica e que contém todos os teoremas que são deriváveis a partir dos axiomas positivos de qualquer dos sistemas formais propostos estabelecendo um núcleo comum entre o sistema clássico de Hilbert-Bernays e o sistema intuicionista de Heyting. Isso foi um passo importante para a construção sintática de sistemas lógicos, pois cria-se uma relação entre os sistemas agregando-se à negação os axiomas da lógica positiva.

Cumpre salientar que lei de Peirce não pode ser demonstrável na lógica intuicionista, uma vez que, para que essa fórmula fosse dedutível seria necessária o acréscimo ao sistema da fórmula conhecida como eliminação da dupla negação que, como já mencionado, não pode ser válida num cálculo intuicionista. Interessante notar que a lei de Peirce não possui nenhuma negação. Cumprindo esse requisito estar-se-ia diante de uma lógica implicativa intuicionista. Poder-se-ia, no entanto, não cumprir essa restrição obtendo uma lógica implicativa comparecendo a lei de Peirce como axioma e outros axiomas de implicação sendo nesse sistema demonstráveis todas as tautologias do sistema clássico que contivessem apenas o operador de implicação (Edélcio, Maranhão).

É surpreendente que o projeto formalista desenvolvido por Hilbert forneceu subsídios para o desenvolvimento de diversos sistema axiomáticos não equivalentes entre si apesar do status de lógico clássico que Hilbert adquiriu. A lógica positiva é de especial interesse em virtude de seu caráter precursor no desenvolvimento de diversos sistemas alternativos ou contrários à lógica clássica, em particular, a lógica paraconsistente.

Johansson propôs um “cálculo minimal” como sendo um sistema intuicionista reduzido. Mencionando o sistema de Heyting aponta que a relação de implicação ou de conseqüência tem um sentido diferente do que se pode obter no uso habitual da linguagem. Para ele a fórmula A $\rightarrow$ B pode ter três significados: B é uma conseqüência lógica de A, ou B é considerado como certo e por último que A é falso ou absurdo. Segundo Johansson os dois primeiros casos parecem ter fundamento mas o terceiro se segue da fórmula $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ o que na sua opinião seria uma ampliação não aceitável do conceito de conseqüência. Com isso esse autor procurava evitar o paradoxo da implicação contido na regra *ex falso sequitur quodlibet.*

Johansson construiu um sistema intuicionista a partir do sistema proposto por Heyting excluindo o axioma $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$. Importante frisar que Johansson ao excluir alguma das formulações implicativas do princípio do Pseudo-Scoto segue o mesmo caminho trilhado por Kolmogorov na construção do seu cálculo. O sistema é denominado minimal em função da redução do número de axiomas de negação em relação ao sistema de Heyting com a o símbolo de negação sendo definido e como única regra a do destacamento. Nesse novo sistema todos teoremas do sistema de Heyting que não contenham a negação são demonstráveis e ainda alguns que possuem a negação também são demonstráveis.

Além do sistema de Heyting, o cálculo minimal baseou-se no sistema Gentzen. Os sistemas formais de Gentzen não se utilizava de axiomas junto com as regras de inferência, como era comum nos sistemas formulados até então. Gentzen criou um sistema onde utilizava somente as regras de inferência com um mecanismo próprio de demonstração, sem os axiomas serem considerados. O fato relevante é que Johansson criou um sistema mais fraco do que o de Gentzen mas que possuía a particularidade de ser um sistema de dedução natural assim como axiomático-dedutivo sendo que ambos são intuicionistas. No sistema de Jojansson as fórmulas que representam o Pseudo-Scoto foram modificadas de maneira tal que não seja permitido que se demonstre qualquer proposição mas somente aquelas que sejam precedidas do operador de negação.

O importante questionamento que surgiu dessas novas formulações seria o de qual sistema seria o mais adequado para a formalização da lógica intuicionista. Para

Brower, a formalização de Heyting teria sido adequada [Kneale e Kneale] sendo que outros autores teriam preterido o sistema aceitando as formalizações minimais [Haack pag 109]

O que nos interessa no tocante à esses sistemas em primeira análise é sua contribuição para o desenvolvimento dos primeiros sistemas paraconsistentes em especial pelo debate sobre a justificação intuitiva das fórmulas que geram a trivialização. Segundo Bomberith a controvérsia surge do sentido que pode ter dizer que de uma falsidade lógica ou de um absurdo lógico, algo como declarar p e não-p, se pode deduzir qualquer proposição, quando essa falsidade não pode ser demonstrada segundo os critérios intuicionistas (Van Dalen)

O questionamento reside sobre o fato de como se pode construir legitimamente uma prova partindo do que, em si, não é construtivo. Não parece plausível que o que não tenha prova sirva de base para se construir uma demonstração de algo que é completamente distinto. E que não seja derivável de nenhuma outra construção sendo esse um óbice ao intuicionismo que não obteve atenção dos lógicos dessa área.

Como já descrito, Johansson não aceita o axioma de Heyting para a negação $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ e sugere a sua substituição por $\neg A \rightarrow [(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)] \rightarrow \neg B$. Analisando-os percebe-se que ambos tratam de situações contraditórias mas como efeitos distinto: no primeiro de uma falsidade lógica pode-se deduzir qualquer enunciado positivo, no segundo se u enunciado implica numa falsidade lógica, então é demonstrável a negação desse enunciado. Esse segundo enunciado é uma forma do princípio de redução ao absurdo semelhante a um axioma proposto por Kolmogorov. O primeiro axioma citado foi refutado tanto por Kolmogorov como por Johansson com o intuito de evitar-se que se possa deduzir qualquer outro enunciado de caráter positivo, no sentido já aclarado, no entanto, ao manter o segundo axioma citado ou introduzir o de Kolmogorov isso possibilita que de uma contradição seja demonstrado qualquer enunciado precedido de uma negação, ou seja, de uma contradição pode-se demonstrar qualquer proposição, de forma negativa, o que acontece nas lógicas paraconsistentes. São esses cálculos, denominados intuicionistas-minimais, os primeiros a evitar que de uma contradição surja qualquer outra proposição, mas, evitam apenas os enunciados positivos, mantendo, no entanto, que de uma contradição possa derivar-se qualquer proposição negativa. Isso pode ser dito da seguinte forma: uma contradição trivializa a parte negativa do cálculo, o que equipara-se a trivialização de todo cálculo. A importância desse fato foi a utilização desse enfoque na formulação dos cálculos paraconsistente sendo mais interessante, do ponto de vista lógico e de aplicações do que os cálculos minimais.

A hierarquia Cn desenvolvida por Newton C. A. da Costa tratou da relação entre as contradições e a noção de trivialização. Na obra Sistemas Formais Inconsistentes uma lógica paraconsistente é criada independente dos sistemas propostos por Jaskowski e Vasiliev.

CAPÍTULO II - Sistema DL

Remetemos o leitor para nossa dissertação de mestrado(Godoy 2010) pra os detalhes dos sistemas DL, DLQ e DLD, referentes a parte proposicional, quantificacional e deôntica proposicional. Não obstante, apresentamos de forma compactada esses sistemas.

Axiomas para DL positivo implicativo (proposicional):

A1. $a \rightarrow (b \rightarrow a)$

A2. $(a\rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow (b \rightarrow g)) \rightarrow (a\rightarrow g))$

A3. $a, a\rightarrow b/ b$

A4. $(a \wedge b) \rightarrow a$

A5. $(a \wedge b) \rightarrow b$

A6. $a \rightarrow (b \rightarrow (a \wedge b)$

A7. $a \rightarrow (a \vee b)$

A8. $b \rightarrow (a \vee b)$

A9. $(a \rightarrow g) \rightarrow \{[(b \rightarrow g) \rightarrow [(a \vee b) \rightarrow g]\}$

A10. $a \vee (a \rightarrow b)$

A11. $\neg(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$

A12. $\neg(a \vee b) \leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$

A13. $(a^{\circ}\wedge b^{\circ}) \rightarrow ((a \rightarrow b)^{\circ}\wedge (a \wedge b)^{\circ}\wedge (a \vee b)^{\circ}\wedge (\neg a)^{\circ})$

A14. $(a^{\circ}\wedge b^{\circ}) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow \neg b) \rightarrow \neg a))$

A15. $a^\circ \rightarrow (\neg\neg a \rightarrow a)$

A16. $a^{\circ\circ} \leftrightarrow a^\circ$

A17. $a^\circ \rightarrow ((a \vee \neg a) \wedge ((a \rightarrow b) \vee (\neg a \rightarrow b)))$

A18. $\neg a^\circ \rightarrow ((a \vee \neg a) \rightarrow b) \vee (a \wedge \neg a)$

Apresentaremos alguns metateoremas de DL.

Teorema 1 – Todos os esquemas e regras da lógica proposicional positiva clássica são válidos em DL.

Teorema 2 [da Dedução] $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Teorema 3 – Em DL os seguintes esquemas de axiomas não são válidos.

1- $a \vee \neg a$

2- $(a \rightarrow b) \rightarrow (\neg a \vee b)$

3- $(a \wedge \neg a) \rightarrow b)$

4- $\neg(a \wedge \neg a)$

5- $(a \rightarrow b) \rightarrow \neg(a \vee \neg b)$

6- $(a \rightarrow (\neg a \rightarrow b)$

7- $(a \rightarrow \neg a) \rightarrow \neg a$

8- $(a \wedge \neg a) \rightarrow b$

9- $b \rightarrow (a \vee \neg a)$

10- $(\neg a \rightarrow a) \rightarrow a$

11- $\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$

12- $a \vee (\neg a \wedge a^{o})$

13- $((a \vee \neg a) \wedge ((a \rightarrow b) \vee (\neg a \rightarrow b))) \rightarrow a^{o}$

14- $(a \rightarrow b) \rightarrow (\neg b \rightarrow a)$

15- $(\neg b \rightarrow \neg a) \rightarrow (a \rightarrow b)$

16- $(a \vee \neg a) \rightarrow b) \vee (a \wedge \neg a) \rightarrow \neg a^{o}$

Dem. Pela matriz abaixo sendo 2 e 3 os valores distinguidos podemos verificar que as fórmulas não são teorema.

a	**~a**	**a°**
0	0	0
1	2	2
2	1	2
3	3	0

ab	$\rightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\leftrightarrow$
00	2	0	0	2
01	2	1	0	2
02	2	0	2	0
03	2	1	2	0
10	2	1	0	2
11	2	1	1	2
12	2	1	2	1
13	2	1	3	1
20	0	0	2	0
21	1	1	2	1
22	2	2	2	2
23	3	3	2	3
30	0	1	2	0
31	1	1	3	1

32	2	3	2	3
33	3	3	3	3

Teorema 4 – Em DL, o esquema $\neg\neg a \leftrightarrow a$ não é válido

Teorema 5 – Em DL temos os seguintes teoremas:

i- $\vdash_{DL}$ $(a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a$ Lei de Peirce.

ii - $\vdash_{DL}$ $(a \rightarrow (b \vee g) \leftrightarrow \{a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow g)$

iii- $\vdash_{DL}$ $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a)$

iv- $\vdash_{DL}$ $(a° \wedge a \wedge \neg a) \rightarrow b$

iv - $\vdash_{DL}$ $(a° \wedge a \wedge \neg a) \rightarrow \neg b$

Teorema 6- Seja $\Gamma \cup \{a\}$ um conjunto de fórmulas quaisquer de DL, sendo que Γ contém somente fórmulas atômicas p_1, $p_{2,.....,}p_n$, e C_0 o cálculo proposicional clássico no qual o conectivo unário "°" e os axiomas 13 e 18 são adicionados. Então Γ, $p_1°$, $p_2°_{,.....,}p_n°$ $\vdash$ a em C_0 se e somente se Γ, $p_1°$, $p_2°_{,.....,}p_n°$ $\vdash_{DL}$ a. $p_1°$, $p_2°_{,.....,}p_n°$.

Teorema 6– Em DL temos:

i- $a° \vdash_{DL} a° \vee \neg(a°)$

ii- $b° \vdash_{DL} (a° \rightarrow b°) \rightarrow (a° \rightarrow \neg b° \rightarrow \neg a°)$

iii- $a° \vdash_{DL} a° \rightarrow (\neg a° \rightarrow b°)$

Teorema 7- DL é consistente em relação à ¬ e não trivial

Definição 1 ╒ $=_{def}$ $p^{\circ} \wedge p \wedge \neg p$ em que p é uma fórmula atômica fixada[2], sem restrição de que seja a variável p bem comportada.

Definição 2 – (de uma negação clássica ou forte)

~a $=_{def}$ a → ╒

Definição 3-

╓ $=_{def}$ ~ ╒

[2] A mesma definição foi apresentada por Kolmogorov [Bomberieth]

CAPÍTULO III - A Lógica DLQ

Nesta seção estende-se DL a uma lógica de predicados de primeira ordem inserindo-se o seguintes axiomas:

A18- $g \to a(x)/g \to \forall x a(x)$, com a restrição de que a variável x não ocorra livre em g.

A19- $\forall x(a(x) \to a(t))$, com a restrição de que a variável t ocorra livre em x para a(x) .

A20- $a(t) \to \exists\, x a(x)$, com a restrição de que a variável t ocorra livre em x para a(x)

A21- $a(x) \to g/\exists x(a(x) \to g)$, com a restrição de que x não ocorre livre em g .

A22- $\forall x\, a(x)^{\circ} \to (\forall x a(x))^{\circ}$

A23- $\forall x\, a(x)^{\circ} \to (\exists x a(x))^{\circ}$

Teorema 8- DL^{Q} é indecidível.

A negação forte ~ em DL^{Q} da mesma forma como fizemos em DL.

Definição – (de uma negação clássica ou forte)

$\sim a =_{def} a \rightarrow$ Ϝ

Definição 3-

╓ $=_{def} \sim$ Ϝ

Teorema 25- Em DLQ, os símbolos $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\forall$ e $\exists$ satisfazem todos os postulados do cálculo de predicados clássico. Em particular, os seguintes são teoremas:

$\vdash_{DL^Q} (a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow \sim b) \rightarrow \sim a$

$\vdash_{DL^Q} a \vee \sim a$

$\vdash_{DL^Q} \sim a \rightarrow (a \rightarrow b)$

$\vdash_{DL^Q} \sim\sim a \leftrightarrow a$

$\vdash_{DL^Q} \forall x a(x) \leftrightarrow \sim\exists x \sim a(x)$

$\vdash_{DL^Q} \exists x a(x) \leftrightarrow \sim\forall x \sim a(x)$

$\vdash_{DL^Q} \forall x \forall y a \leftrightarrow \forall y \forall x a$

$\vdash_{DL^Q} \forall x \forall y a(x,y) \rightarrow \forall z a(z,z)$ sendo x,y e z livres em a.

$\vdash_{DL^Q} \forall z a(z,z) \rightarrow \exists x \exists y a(x,y)$ sendo x,y e z livres em a.

$\vdash_{DL^Q} \sim\forall x \forall y \forall a \leftrightarrow \exists x \exists y \exists z \sim a$

Para explicitarmos alguns significados do teorema 27, note-se que os seguintes esquemas não são válidos em DL^Q :

$(a \wedge \neg a) \rightarrow b$

$(a \wedge \neg a) \rightarrow \neg b$

$\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$

$a \rightarrow (\neg a \rightarrow b)$

$\neg a \rightarrow (a \rightarrow \neg b)$

$a \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b)$

$(a \rightarrow b) \rightarrow (\neg b \rightarrow \neg a)$

$\neg\neg a \leftrightarrow a$

$\neg(a \wedge \neg a)$

$a \wedge \neg a$

Teorema 9 – Em DL^Q, os seguintes esquemas não são válidos:

$\neg\exists x \neg a(X) \leftrightarrow \forall x a(x)$

$\neg\forall x \neg a(X) \leftrightarrow \exists x a(x)$

CAPÍTULO IV - DL-Deôntico

O cálculo DL-D é uma extensão de DL com operadores deônticos. Os símbolos são os mesmos de DL com acréscimo de O para obrigatoriedade e P para permissão. Na definição de fórmula se α e β são fórmulas, então $O\alpha$ também é fórmula, a interpretação intuitiva seria de que é obrigatório que α, sendo α uma fórmula da linguagem. O operador de permissão é introduzido por intermédio da seguinte definição:

$P\alpha =_{def} \sim O \sim \alpha$ sendo ~ o símbolo já definido para negação forte.

Os axiomas e regras para o cálculo proposicional DL-D são os seguintes:

A 24 – $\alpha^{\circ} \rightarrow (O\alpha)^{\circ}$

A 25 – $O\alpha \rightarrow P\alpha$

A 26 – $O(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (O\alpha \rightarrow O\beta)$

A 27 – $P\alpha \rightarrow OP\alpha$

A 28 – $\alpha / O\alpha$ (regra de Gödel)

Teorema 36 – São teoremas em DL-D:

1. $(O\alpha \vee O\beta) \rightarrow O(\alpha \vee \beta)$

2. $(O\alpha \leftrightarrow \sim P \sim \alpha)$

3. $P(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (P\alpha \vee P\beta)$

4. $(O\alpha \vee O\beta) \rightarrow O(\alpha \vee \beta)$

5. $O(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (P\alpha \rightarrow P\beta)$

6. $P\alpha \wedge O\beta \rightarrow P(\alpha \wedge \beta)$

7. $O(\alpha \vee \beta) \vee (O\alpha \vee P\beta)$

8. $P\alpha \rightarrow PP\alpha$

9. $O{\sim}\alpha \leftrightarrow {\sim}P\alpha$

10. $OO\alpha \vee O\alpha$

11. $PO\alpha \leftrightarrow OO\alpha$

12. $OO\alpha \leftrightarrow OOO\alpha$

13. $PP\alpha \leftrightarrow PPP\alpha$

14. $O{\sim}\alpha \rightarrow {\sim}O\alpha$

15. $PP\alpha \leftrightarrow OP\alpha$

16. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$

17. $O\alpha \wedge O{\sim}\alpha \rightarrow O\beta$

18. $O\neg\alpha \wedge \alpha^{o} \rightarrow \neg O\alpha$

Teorema 37 – Os seguintes esquemas não são válidos em DL-D:

$O\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

$(O\neg\alpha \wedge O\neg\neg\alpha) \rightarrow O\beta$

$O{\sim}\alpha \rightarrow \neg O\alpha$

$\neg(O\neg\alpha \wedge \neg O\neg\alpha)$

$(O\neg\alpha \leftrightarrow \neg P\alpha)$

$O(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$

CAPÍTULO V – Semântica de DL-D

Apresentaremos uma semântica para o cálculo DL-D de forma diferente da que fizemos para DL para que possamos enriquecer o conteúdo do texto com uma semântica utilizada em lógicas modais e de conteúdo intuitivo . Será utilizada uma semântica sem o uso de valorações que também é possível de ser realizada. Aplicaremos as noções de acessibilidade e forçamento entre mundos, essa maneira de apresentação é conveniente diante da existência dos operadores modais O e P.

A semântica de mundos possíveis pretende levar em consideração o fato de que os operadores deônticos lidam com as situações obrigatórias e permitidas em mundos deonticamente possíveis, portanto, necessitamos de condições de verdade para os operadores deônticos.

Nesse modelo, diferentes interpretações, podem ser atribuídas a uma mesma sentença deôntica, pois, em geral, ela é indeterminada, no sentido de que a sentença não apresenta explicitamente a restrição ao conjunto de mundos contra os quais ela é avaliada. Tal restrição é obtida com a relação de forçamento

A noção de acessibilidade estabelecida através de uma relação procura estabelecer os critérios para a verdade ou falsidade de uma fórmula com operadores deônticos. Os mundos acessados pela relação de forçamento seriam os mundos deonticamente possíveis onde estão estabelecidas as obrigações e permissões.

Se considerarmos o princípio da precariedade, então no mundo real W_R existem normas que não são cumpridas, logo não é um mundo deonticamente perfeito em relação a si mesmo, portanto, em $O\alpha \rightarrow \alpha$ e $\alpha \rightarrow P\alpha$ podem ser falsas na semântica apresentada.

Definição. Estrutura deôntica $\wp$ para uma linguagem $L\text{-}_{DL\text{-}D}$ é um par do tipo $\wp = \langle W, R \rangle$, onde W é um conjunto não vazio e R é um subconjunto de WxW (W cartesiano W), isto é, uma relação binária entre os elementos de W.

Os elementos de W são denominados mundos de $\wp$. Quando os mundos w, w' $\in$ W são relacionados por R indica-se por w R w' e essa expressão é lida w' é acessível deonticamente a w. A relação R é chamada de relação de acessibilidade de $\wp$. A interpretação intuitiva

A noção de modelo *M* é definida em relação ao conjunto de fórmulas de DL-D. O modelo assinala um conjunto de mundos somente ás fórmulas da linguagem. Uma forma intuitiva de entender a noção de acessibilidade é supor que wRw´, i.e., w acessa w´ se e somente toda fórmula α verdadeira em w é deonticamente verdadeira em w´. A ideia é a de que o que é interpretado em w é genuinamente possível do ponto de vista de w´ e então as fórmulas verdadeiras em w são possíveis em w´

Definição de estrutura deôntica para o cálculo DL-D. Seja $\wp$ = < W, R > uma estrutura deôntica para a linguagem L-DL-D. $\wp$ é uma estrutura deôntica para o cálculo DL-D se para todo w $\in$ W existir w'$\in$ W tal que wRw' e para qualquer w, w', w'' $\in$ W, se wRw' e wRw'', então w' R w''.

Definição de forçamento entre mundos de $\wp$ e fórmulas de L_{DL-D}. Seja $\wp$ = < W, R > uma estrutura deôntica para DL-D. A relação ||- é de DL-D-forçamento de $\wp$ se ||- é um subconjunto de W x L_{DL-D} e, para todo w, w' $\in$ W; α, β $\in$ L_{DL-D}, as seguintes condições se verificam:

w ||- $\alpha \Leftrightarrow$ w n||- ~ α.

w ||- $\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow$ w ||-~ α ou w ~ β

w ||- $\alpha \vee \beta \Leftrightarrow$ w ||- α ou w ||- β

w ||- $\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow$ w ||- α e ||- β

w ||- $\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow$ w ||- $\neg\alpha$ ou w ||- $\neg\beta$

w ||- $\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow$ w ||- $\neg\alpha$ e w ||- $\neg\beta$

$w \Vdash \alpha^{o}, w \Vdash \beta^{\circ} \Rightarrow w \Vdash (\alpha \to \beta)^{o}; (\alpha \wedge \beta)^{o}; (\alpha \vee \beta)^{o}; (\neg\alpha)^{\circ}$

$w \Vdash \alpha^{\circ} \Leftrightarrow w \Vdash \alpha^{oo}$

$w \Vdash \alpha^{\circ} \Rightarrow w \Vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$

$w \Vdash \alpha; \neg\alpha \Rightarrow w \Vdash \alpha^{\circ}$

$w \Vdash \alpha;\ w \Vdash \neg\alpha \Rightarrow w$ ″ $\neg\alpha^{o}$

$w \Vdash \alpha; \Vdash \neg\alpha \Rightarrow w$ n|- $\neg\alpha^{o}$

$w \Vdash O\alpha \Leftrightarrow w' \Vdash \alpha$ para todo w':tal que w R w'

$w \Vdash \alpha^{\circ} \Rightarrow \Vdash (O\alpha)^{\circ}$.

As expressões w ||- ~α e w n||- ~ α são lidas respectivamente, w força α e w não força α.

Definição de DL-D-modelo. Sejam $\wp$ = < W, R > uma estrutura deôntica para DL-D e ||- α relação de DL-D-forçamento de $\wp$. Um modelo para o cálculo DL-D, ou, simplesmente um DL-D-modelo é um par do tipo M = < $\wp$, ||- >.

Definição de uma fórmula válida num mundo, de fórmula válida num DL-D-modelo, de fórmula válida no cálculo DL-D e de modelo de um conjunto de fórmulas. Sejam

M = < $\wp$, ||->um DL-D-modelo, $w \in W$, $\alpha \in L_{DL\text{-}D}$ e $\Gamma \subset L_{DL\text{-}D}$. Então:

α é válida em um mundo w se w ||- α.

α é válida em um DL-D-modelo se α for válida em w, para todo $w \in W$.

α é válida no cálculo DL-D, ou, simplesmente, DL-D-válida, se α for válida em todo DL-D-modelo.

w é um modelo de Γ se para toda $\beta \in \Gamma$, β é válida em w.

Definição de consequência semântica. Seja $\alpha \in$. α é consequência semântica de Γ se para todo DL-D-modelo M = < $\wp$, ||- >e para todo w $\in$ W, se w é modelo de Γ, então w é modelo de {α}. Neste caso, escrevemos Γ ||- α. Se Γ for vazio, escrevemos ||- α.

Teorema 46. Seja A $\in \alpha$. Em DL-D, tem-se ||- $\alpha \Leftrightarrow \alpha$ é DL-D-válida.

Dem. Imediata.

Correção de DL-D

Lema 1 Seja M = < $\wp$, ||- > um DL-D-modelo de L_{DL-D}. Para todo w $\in$ W e toda fórmula α de L_{DL-D}, tem-se w ″ $\alpha \Leftrightarrow$ w ||- ~α.

Dem. A ida por redução ao absurdo supondo w ||- α e ||- ~α e a volta mostrando que se w $\models$ ~α então w ||- α supondo w ||- ~α obtendo a prova por casos.

Teorema 47- Correção. Seja $\alpha \in L_{DL-D}$ Em DL-D, tem-se: $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \alpha$.

Dem. Sejam M = <$\wp$,||- > um DL-D-modelo e w $\in$ W um modelo de Γ.

A demonstração é feita mostrando que α é válida em w, ou seja, w ~ α para todo w $\in$ W que for modelo de Γ. Utilizaremos o método de indução sobre o comprimento da dedução de α a partir de Γ.

Por hipótese, $\Gamma \vdash \alpha$. Então, existe uma dedução de α a partir de Γ. Seja α_1, α_2,...... α_n, essa dedução. Para todo i, $1 \leq i \leq n$, α_i é:

Um axioma pertence a Γ; ou a fórmula foi obtida de fórmulas precedentes por modus ponens; ou foi obtida de α_j , j < i, pela aplicação da regra de inferência denominada regra de Gödel, e existe uma subsequência de α_1, α_2,...... α_n, que é uma demonstração de α_j.

Considerando cada um desses casos.

A_i é um axioma. Fazendo a demonstração para alguns esquemas de axiomas.

A 24 – $\alpha^\circ \rightarrow (O\alpha)^o$

Dem. Se w $\models \alpha^o$, então, w $||\!-\ \alpha^\circ \rightarrow (O\alpha)^o$

Se w $||\!-\ \alpha^o$, então, w $||\!-\ (O\alpha)^\circ$ e portanto, $||\!-\ \alpha^\circ \rightarrow (O\alpha)^o$

A 25 – $O\alpha \rightarrow P\alpha$

Dem. Suponhamos que existe w $\in$ W tal que w ″ $O\alpha \rightarrow P\alpha$. Daí, w $||\!-\ O\alpha$ e ″ $P\alpha$.

Se w ″ $P\alpha$, isto é, w $||\!-$ ~O~α, então, pelo lema 1, w $||\!-$ O~α. No entanto, para todo w $\in$ W, existe w' $\in$ W tal que w R w'; donde w' $||\!-$ ~α. Logo, w' ″A e portanto, w ″ $O\alpha$; o que não é possível.

A 27 – $P\alpha \rightarrow OP\alpha$

Dem. Admitindo-se que existe w $\in$ W tal que w ″$P\alpha \rightarrow OP\alpha$, então w $||\!-\ P\alpha$ e w ″ $OP\alpha$. Se w $||\!-\ P\alpha$, temos, pelo lema 1, w ″ O~α. Mas, existe w'$\in$ W tal que w R w', para todo w $\in$ W; daí w' ″~α e portanto, w' $||\!-\ \alpha$. Se ″ $OP\alpha$, então, para algum w'' e W tal que w R w'', w'' ″ $P\alpha$ e daí w'' $||\!-$ O~α Como w R w' e w R w'', então, w' R w'' e assim, w' $||\!-$ ~α Donde, w' ″ α, o que não é possível.α pertence a Γ. Obviamente, como w é modelo de Γ, α_i é válida em w. α foi obtida de fórmulas precedentes por Modus Ponens.

Dem. Sejam β e $\beta \rightarrow \alpha_i$ essas fórmulas precedentes. Como $\Gamma \vdash \beta$ e $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha_{i,}$ então, pela hipótese de indução, $\Gamma\ ||\!-\ \beta$ e $\Gamma\ ||\!-\ \beta \rightarrow \alpha_i$. Isso significa, que pata todo w $\in$ W, w $||\!-\ \beta$ e w $||\!-\ \beta \rightarrow \alpha_i$; e modus ponens é regra de DL-D e preserva $||\!-$, donde, w $||\!-\ \alpha_i$.

4. α foi obtida de α_j , j < i, pela aplicação da regra de inferência denominada regra de Gödel, e existe uma subsequência de α_1, α_2,...... α_n, que é uma

demonstração de αj. Neste caso, suponhamos que α_j é β e α_j é Oβ. Como, por hipótese, existe uma demonstração de α_j, então $\vdash \beta$ e essa demonstração é uma subsequência própria da dedução de β a partir de Γ, neste caso Γ é vazio. Portanto, por hipótese de indução, ||- β; consequentemente, β é DL-D-válida, pois ||- $\beta \leftrightarrow \beta$ é válida em DL-D. Logo, para todo w $\in$ W, β é válida em w e para todo w' $\in$ W : w R w', w' ||- β. Assim, w ||- Oβ.

Diante dos casos examinados conclui-se que Γ ||- α

Corolário. Seja $\alpha \in L_{DL\text{-}D.}$ Em DL-D, tem-se:

$\alpha \Rightarrow$ ||-α

Dem. A partir dos resultados

Os lemas assumidos possuem demonstração semelhante às usuais. As noções de conjunto maximal não-trivial é a mesma da Definição 5. Com as devidas adaptações as demonstrações são semelhantes à apresentada na semântica de DL.

A prova da completude é realizada utilizando-se a noção de modelo canônico, seguindo [Chellas] a prova da completude para uma lógica modal consiste na questão de se obter um modelo canônico para a lógica, o qual deve estar na classe de modelos, ou seja, no caso de DL-D um modelo canônico para $L_{DL\text{-}D}$ deve ser obtido, cuja propriedade de que uma fórmula é válida no modelo canônico se e somente se a fórmula é teorema de $L_{DL\text{-}D}$.

Teorema 47. Se Γ for maximal não-trivial e a e b forem quaisquer fórmulas, então (utilizando-se $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ como abreviações metalinguísticas para implicação e equivalência).

$\Gamma \vdash a \Leftrightarrow a \in \Gamma$

$a \in \Gamma \Rightarrow {\sim}a \notin \Gamma$; ${\sim}a \in \Gamma \Rightarrow a \notin \Gamma$

$a \in \Gamma$ ou ${\sim}a \in \Gamma$

$\vdash a \Rightarrow a \in \Gamma$

$a, a° \in \Gamma \Rightarrow \neg a \notin \Gamma$; $\neg a, a° \in \Gamma \Rightarrow a \notin \Gamma$; e $a, \neg a \in \Gamma \Rightarrow a° \notin \Gamma$

$a, a \rightarrow b \in \Gamma \Rightarrow b \in \Gamma$

$a \rightarrow b \in \Gamma \Leftrightarrow a \notin \Gamma$ ou $b \in \Gamma$

$a \wedge b \in \Gamma \Leftrightarrow a \in \Gamma$ e $b \in \Gamma$

$a \vee b \in \Gamma \Leftrightarrow a \in \Gamma$ ou $b \in \Gamma$

$a°, b° \in \Rightarrow (a \rightarrow b)°, (a \wedge b)°, (a \vee b)°, (\neg a)° \in \Gamma$; $a° \in \Gamma \Leftrightarrow a°° \in \Gamma$

$a° \in \Gamma \Rightarrow a \vee \neg a, \sim a \vee \sim\neg a \in \Gamma$

$\neg a° \in \Gamma \Rightarrow \sim(a \vee \neg a) \in \Gamma$ ou $a \wedge \neg a \in \Gamma$

$O\alpha \in \Gamma$ ou $O\sim\alpha \in \Gamma$

$\alpha° \in \Gamma \Rightarrow (O\alpha)° \in \Gamma$

Lema [de Lindenbaum]. Todo conjunto de fórmulas não-trivial está contido em um conjunto maximal não trivial,

Dem. Análoga à demonstração desse teorema para DL.

Definição: Seja α, e $\alpha \in \Psi$

$M =_{def} \{\Gamma : \Gamma$ é não-trivial maximal$\}$

$\Gamma^{\circ} =_{def} \{ \alpha \in \Gamma :$ para algum β, $\alpha = O\alpha\}$.

$E(\Gamma^{\circ}\} =_{def} \{\alpha : O\alpha \in \Gamma\}$

S é um subconjunto de M x M tal que Γ S Γ' se $E(\Gamma^{\circ}) \subset \Gamma'$.

Lema Se Γ é não trivial, então $E(\Gamma^{\circ})$ é não trivial

Lema. Para todo $\Gamma \in M$, existe $\Gamma' \in M$ de modo que Γ S Γ'.

Lema Para todo $\Gamma, \Gamma' \in M$ tal que Γ S Γ', tem-se:

$P\alpha \in \Gamma \Rightarrow P\alpha \in \Gamma'$ e $OP\alpha \in \Gamma'$.

$O\alpha \notin \Gamma \Rightarrow O\alpha \notin \Gamma'$

Corolário. Sejam Γ, Γ' e $\Gamma'' \in M$ então:

Γ S $\Gamma' \Rightarrow \Gamma'^{\circ} \subset \Gamma^{\circ}$

S Γ' e Γ S $\Gamma'' \Rightarrow \Gamma'$ S Γ''

Construiremos um modelo DL-D-modelo.

A cada $\Gamma \in M$, associaremos um mundo. Seja Ŵ o conjunto formado por todos esses mundos.

Seja Ř a relação entre esses mundos dada por: w Ř w' sse Γ S Γ'.

Obviamente o par < Ŵ, Ř > é uma estrutura deôntica canônica para DL-D.

Seja Ř uma relação entre os mundos de Ŵ e as fórmulas de α, dada por: w ||- α se $\alpha \in \Gamma$. Facilmente , pode-se verificar que a relação ||- é de DL-D-forçamento de Ŵ .

Assim o par < Ŵ, Ř > é um DL-D-modelo. Chamaremos < Ŵ, Ř > de modelo canônico para o cálculo DL-D.

Teorema 48 – Todo conjunto de fórmulas maximal não-trivial tem modelo.

Corolário 1- Em DL-D $\Gamma \vdash a \Rightarrow \Gamma$ ||- a

demonstração - Imediata pelos teoremas 11 e 14.

Corolário 2- a $\Leftrightarrow$ ||- a

Capítulo VI – A lógica DL-DQ$^{=}$

Desenvolvemos o DL-DQ$^{=}$ com quantificadores e igualdade. Essa tentativa é realizada considerando-se os problemas em se adicionar quantificadores a nosso sistema DL-D. Sem o tratamento adequado dos quantificadores, nenhum sistema de lógica deôntica pode ser considerado satisfatório. Em alguns sistemas, torna-se tecnicamente impossível implementar quantificadores de forma razoável.[3]

Para alcançar tal tratamento, novos postulados são apresentados, mas ao mesmo tempo, a maioria dos axiomas usuais de sistemas padrão de lógica deôntica é descartada. Os axiomas A30 a A38 seguem as restrições usuais para as variáveis[4]. Adicionamos os seguintes esquemas de axiomas de igualdade para o cálculo DL-D$^{Q=}$:

A 30 $\forall x a \to a_x[t]$

A 31 $a_x(t) \to \exists x a$

A32 $\forall x \alpha^o \to ((\forall x \alpha)^o \wedge (\exists x \alpha)^o$

A 33 $x = x$

A 34 $x = y \to (a(x) \to a_x[y])$

A 35 $a \leftrightarrow a'$, onde a' é uma variante de a.

A 36 $\forall x O a \to O \forall x a$

A 37 $x \neq y \to O(x \neq y)$

A38 $\underline{a \to \beta}$

$a \to \forall x \underline{\beta}$

---

[3] Para um questionamento filosófico destes problemas, consulte Quine, W. V. O., 1953, “Reference and Modality”, in *From a Logical Point of View*, Cambridge, MA: Harvard University Press. 139-159.

[4] Seguimos Kleene, Stephen Cole. “Introduction to metamathematics”. D. Van Nostrand Company, Princeton, 1962.

A39 $\underline{a \rightarrow \beta}$

$\exists x\underline{a} \rightarrow \beta$

A semântica será formulada com a definição de forçamento entre mundos de uma estrutura deôntica *Ď* com o acréscimo das cláusulas para os quantificadores e da variante a´. Adotando-se os resultados obtidos para DL-D, verificamos que DL-$D^{Q=}$ é correto e completo.

Nossa linguagem para DL-$DQ^{=}$ é obtida a partir do acréscimo do símbolo =, para igualdade, c como símbolo para constantes e p para variáveis de predicados.

Tomaremos as variáveis e constantes individuais como termos. Se t_1 e t_2 forem termos, então $t_1 = t_2$. Definimos o símbolo $\exists xa =_{def} \neg\forall x\neg a$.

$a_x(t)$ será uma fórmula obtida em $L^{=}$ através da substituição de todas as ocorrências livres de x em a por um termo t, como a extensão usual

$a_{x1,x2....,xn}(t_1, t_2,...... t_n)$

Sendo $x_1,x_2....,x_n$ ocorrência livres que são substituídas por $t_1, t_2,...... t_n$.

w $p^n c,c....c_n \Leftrightarrow$ w $<d_{Ď}(c_1), d_{Ď}(c_2)........ d_{Ď}(cn) \in I_w(p^n)$.

w ||- $c_1 = c_2 \Leftrightarrow d_{Ď}(c_1) = d_{Ď}(c_2)$

w ||- $\neg\neg\alpha \Rightarrow$ w ||- α.

w ||- $\neg\alpha \Rightarrow$ w ||- α

w ||- $\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow$ w ||- $\sim\alpha$ ou w $\sim\beta$

w ||- $\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow$ w ||- $\sim\alpha$ ou w $\sim\beta$

$w \,½\, \alpha \vee \beta \Leftrightarrow w \,||\text{-}\, \alpha$ ou $w \,||\text{-}\, \beta$

$w \,||\text{-}\, \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow w \,||\text{-}\, \alpha$ e $||\text{-}\, \beta$

$w \,||\text{-}\, \neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow w \,||\text{-}\, ½\, \neg\alpha$ ou $w \,½\, \neg\beta$

$w \,||\text{-}\, \neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow w \,||\text{-}\, \neg\alpha$ e $w \,½\, \neg\beta$

$w \,||\text{-}\, \alpha^{o}, w \,||\text{-}\, \beta^{\circ} \Rightarrow w \,||\text{-}\, (\alpha \rightarrow \beta)^{o}; (\alpha \wedge \beta)^{o}; (\alpha \vee \beta)^{o}; (\neg\alpha)^{\circ}$

$w \,||\text{-}\, \alpha^{\circ} \Leftrightarrow w \,||\text{-}\, \alpha^{oo}$

$w \,||\text{-}\, \alpha^{\circ} \Rightarrow w \,||\text{-}\, \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$

$w \,||\text{-}\, \alpha; \neg\alpha \Rightarrow w \,||\text{-}\, \alpha^{\circ}$

$w \,||\text{-}\, \alpha;\ w \,||\text{-}\, \neg\alpha \Rightarrow w \,||\text{-}\, \neg\alpha^{o}$

$w \,''\alpha \,||\text{-}\, \neg\alpha \Rightarrow w \,||\text{-}\, \neg\alpha^{o}$

$w \,||\text{-}\, O\alpha \Leftrightarrow w' \,||\text{-}\, \alpha$ para todo w':tal que w R w'

$w \,||\text{-}\, \alpha^{\circ} \Rightarrow \,||\text{-}\, (O\alpha)^{\circ}$.

$w \,||\text{-}\, \forall xa \Leftrightarrow w \,||\text{-}\, a_x [c_1]$ para todo nome i de $L^{=} (\check{D})$

$w \,||\text{-}\, \exists xa \Leftrightarrow w \,||\text{-}\, a_x [c_1]$ para algum nome i de $L^{=} (\check{D})$

$w \,||\text{-}\, c_1 = c_2$ e $w \,||\text{-}\, a_x [c_1] \Rightarrow w \,||\text{-}\, a_x [c_2]$

$w \,||\text{-}\, \forall xa^{\circ} \Leftrightarrow w \,||\text{-}\, (\forall xa)^{\circ} \wedge (\exists xa)^{\circ}$

Se $\check{D}$ = <W,R, D, $d_{\check{D}}$, $(I_w)_{w \in W}$> uma estrutura deôntica par DL-DQ$^{=}$ e ½ a relação de forçamento, um modelo para o cálculo DL-DQ$^{=}$ é um par do tipo M=< $\check{D}'$, ½ >

CAPÍTULO VII -LÓGICA DE PROPOSIÇÕES NORMATIVAS DE ALCHOURRÓN

Apresentaremos alguns sistemas lógicos com a intenção de obter resultados ampliando ou modificando tais sistemas e com o objetivo de conseguir clareza e avanço conceitual. Em especial sustentamos que o cálculo DL-$D^{Q=}$ é apto a lidar com certos paradoxos deônticos que podem ser solucionados com esse sistema.

Faremos uma apresentação e comparação com DL-$DQ^{=}$ do sistema proposto por Carlos Alchourron que apresenta a lógica de proposições normativas através de uma metalinguagem e não na linguagem objeto. Para tanto apresenta um sistema inicial tratando de universo de casos e soluções, que resumidamente apresenta o seguinte desenvolvimento:

A função de um sistema normativo consiste em estabelecer relações entre casos e soluções. Um conjunto normativo é um conjunto de enunciados tais que entre suas consequências existem enunciados que correlacionam casos com soluções, se contiver todas as suas consequências é um *sistema normativo.*

Todo subconjunto não vazio do conjunto das constantes P é um UP, UP_1,UP_2......UP_2m -1 na sequência da UP da linguagem

Universo de ações. Todo subconjunto não vazio do conjunto das constantes de A é UA

UA_1,UA_2......UA_2m -1

Para se definir o conjunto das expressões significativas da linguagem objeto é introduzida a noção de fecho de um conjunto. [C(a)] é o fecho normativo de um conjunto [N | C(a)]

C(a) é o menor conjunto β tal que $\alpha \subseteq \beta$ e se x, y e β então x, (x,y) $\in \beta$.

NC(a) é o menor conjunto β taque para todo x, se $x \in C(a)$, então Px $\in \beta$ e para todo x e y, se x, y e β então x, $(x,y) \in \beta$.

M é o conjunto de todas as expressões bem-formadas

$$M = C(\{P_1,P_2......P_n\} + N\ C(\{A_1,A_2......A_n\}) + C\ ((\{A_1,A_2......A_n\})$$

A partir de tais definições são apresentados teoremas que garantem que as expressões deônticas e que as combinações veritativo–funcionais das expressões P e A não sejam significativas, bem como excluem a reiteração de operadores deônticos.

São introduzidos os operadores fortes, fracos, condicionais e categóricos.

Obrigação condicional forte. $Os\ (y/x) = (x \rightarrow Oy) \in Cn(\alpha)$

Permissão condicional forte. $ps\ (x/y) = (x \rightarrow Py) \in Cn(\alpha)$

Obrigação condicional fraca. $Ow\ (y/x) = (x \rightarrow P\ \neg y) \notin Cn(\alpha)$

Permissão condicional fraca. $Pw\ (y/x) = (x \rightarrow O\ \neg y) \notin Cn(\alpha)$

Obrigação Categórica forte. $Os\ (y) = Oy \in Cn(\alpha)$

Permissão Categórica forte .$Pw\ (y) = Py \in Cn(\alpha)$

Obrigação Categórica fraca. $Ow(y) = P\neg y \notin Cn(\alpha)$

Permissão categórica fraca. $Pw(y) = O\neg y \notin Cn(\alpha)$

A seguir são definidos operadores de negação externa, de condicionais e operadores categóricos, leis de distribuição e comutatividade.

É apresentada a noção de determinação normativa e completude, utilizando-se ~ como símbolo de negação interna.

Det (x/y) = ~Ps(y/x) ou Os(y/x) que pode ser lido como a ação y é normativamente determinada por α no caso x, quando y está proibida no caso x, pois a negação interna e a permissão forte representaria o sentido de proibição.

O conceito de determinação normativa de um conjunto de ações em um caso e de uma ação em um conjunto de casos mostra que a determinação normativa através de α de um conjunto de ações em conjunto de casos é equivalente a completude de α em relação aos correspondentes universos de casos e universos de soluções maximais.

A seguir define-se a noção de coerência, um conjunto α é coerente quando nenhuma ação está proibida e permitida ao mesmo tempo.

Com esses conceito é definida a noção de normatividade

$N(y/x) = [Ps(y/x) \vee Os(\neg y/x)]$

que pode ser lida como uma ação é normatizada por α em caso, quando esta ação ou sua negação estão fortemente permitidas por α neste caso.

Essa apresentação traz vantagens ao caracterizar o sistema normativo pelo operador de consequência e não diz nada sobre os enunciados que compõem o sistema. Também não diz nada sobre os enunciados que formam a base do sistema, que podem ter diferentes origens, diferente natureza e maior ou menor número.

Nos sistemas jurídicos, há declarações que correlacionam casos com casos, por exemplo, maioridade, e enunciados que correlacionam soluções com soluções, podendo ser postulados de significação quando definem o alcance de um direito ou obrigação, ou revelar-se uma obrigação

Um sistema normativo α é dito completo em relação a um universo de casos e USmaxj[5] se e somente se α não possui lacunas em relação ao USmaxj.

[5] Universo de soluções maximais j

Uma lacuna normativa ocorre quando em um universo de casos, determinado uso de seus elementos não pertence ao domínio de correlação entre o sistema α, um universo de casos i e um universo de soluções maximais j.

Duas normas são redundantes em um caso C de um universo de casos em relação a um universo de soluções minimal se cada uma das normas correlacionam C com o mesmo elemento do universo de soluções mínimas. Se isso não ocorrer, ou seja, se não forem redundantes, não são independentes.

No texto de 1975, Alchourron apresenta a lógica de proposições normativas através de uma metalinguagem e não na linguagem objeto, como fez no artigo de 1963. Para tanto apresenta um sistema inicial tratando de universo de casos e soluções, que resumidamente apresenta o seguinte desenvolvimento:

A função de um sistema normativo consiste em estabelecer relações entre casos e soluções. Um conjunto normativo é um conjunto de enunciados tais que entre suas consequências existem enunciados que correlacionam casos com soluções, se contiver todas suas consequências é um *sistema normativo.*

Todo subconjunto não vazio do conjunto das constantes P é um UP, UP_1,UP_2......UP_2m -1 na sequência da UP da linguagem

Universo de ações. Todo subconjunto não vazio do conjunto das constantes de A é UA

UA_1,UA_2......UA_2m -1

Para se definir o conjunto das expressões significativas da linguagem objeto é introduzida a noção de fecho de um conjunto. [C(a)] é o fecho normativo de um conjunto [N | C(a)]

C(a) é o menor conjunto β tal que $\alpha \subseteq \beta$ e se x, y e β então x, (x,y) $\in \beta$.

NC(a) é o menor conjunto β taque para todo x, se x $\in$ C(a), então Px $\in \beta$ e para todo x e y, se x, y e β então x, (x,y) $\in \beta$.

M é o conjunto de todas as expressões bem-formadas

$M = C(\{P_1, P_2......P_n\} + N\ C(\{A_1, A_2......A_n\}) + C\ ((\{A_1, A_2......A_n\})$

A partir de tais definições são apresentados teoremas que garantem que as expressões deônticas e que as combinações veritativo–funcionais das expressões P e A não sejam significativas, bem como excluem a reiteração de operadores deôntico.

São introduzidos os operadores fortes, fracos, condicionais e categóricos.

Obrigação condicional forte. $Os\ (y/x) = (x \rightarrow Oy) \in Cn(\alpha)$

Permissão condicional forte. $Os\ (x/y) = (x \rightarrow Py) \in Cn(\alpha)$

Obrigação condicional fraca. $Ow\ (y/x) = (x \rightarrow P\ \neg y) \notin Cn(\alpha)$

Permissão condicional fraca. $Pw\ (y/x) = (x \rightarrow O\ \neg y) \notin Cn(\alpha)$

Obrigação Categórica forte. $Os\ (y) = Oy \in Cn(\alpha)$

Permissão Categórica forte .$Pw\ (y) = Py \in Cn(\alpha)$

Obrigação Categórica fraca. $Ow(y) = P\neg y \notin Cn(\alpha)$

Permissão categorial fraca. $Pw(y) = O\neg y \notin Cn(\alpha)$

A seguir são definidos operadores de negação externa, de condicionais e operadores categóricos, leis de distribuição e comutatividade.

É apresentada a noção de determinação normativa e completude, utilizando-se ~ como símbolo de negação interna

Det (x/y) = ~Ps(y/x) ou Os(y/x) que pode ser lido como a ação y é normativamente determinada por α no caso x, quando y está proibida no caso x, pois a negação interna e a permissão forte representaria o sentido de proibição.

O conceito de determinação normativa de um conjunto de ações em um caso, de uma ação em um conjunto de casos mostra que a determinação normativa através de α de um conjunto de ações em conjunto de casos é equivalente a completude de α em relação aos correspondentes universos de casos e universos de soluções maximais.

A seguir define a noção de coerência, um conjunto α é coerente quando nenhuma ação está proibida e permitida ao mesmo tempo.

Com esses conceito é definida a noção de normatividade

$N(y/x) = [Ps(y/x) \vee Os(\neg y/x)]$

que pode ser lida como uma ação é normatizada por α em caso, quando esta ação ou sua negação estão fortemente permitidas por α neste caso.

Essa apresentação traz vantagens ao caracterizar o sistema normativo por suas consequências, não diz nada sobre os enunciados que compõem o sistema. Também não diz nada sobre os enunciados que formam a base do sistema, podem ter diferentes origens, natureza e maior ou menor número.

Nos sistemas jurídicos, há declarações que correlacionam casos com casos, por exemplo, maioridade, e enunciados que correlacionam soluções com soluções, podendo ser postulados de significação quando definem o alcance de um direito ou obrigação, ou revelar-se uma obrigação

Um sistema normativo α é dito é completo em relação a um universo de casos e USmaxj se e somente se α não possui lacunas em relação ao USmaxj.

Uma lacuna normativa ocorre quando em um universo de casos, determinado uso de seus elementos não pertence ao domínio de correlação entre o sistema α, um universo de casos i e um universo de soluções maximais j.

Duas normas são redundantes em um caso C de um universo de casos em relação a um universo de soluções minimal se cada uma das normas correlacionam

C com o mesmo elemento do universo de soluções mínimas. Se isso não ocorrer, ou seja, se não forem redundantes, não são independentes

Para assegurar-se de que um sistema é coerente, basta comprovar que nenhum dos casos está correlacionado com duas ou mais soluções incompatíveis; se o sistema for coerente em cada um dos casos, também o é com respeito a todos os casos possíveis, tanto genéricos como individuais

Um dos nossos objetivos é analisar o condicional utilizado nesse sistema se material ou estrito e obter resultados metalinguísticos através de teoremas como da correção, completude, interpolação, etc., e verificar se esse cálculo é decidível. Cumpre salientar que para Alchourron completude significa a ausência de lacunas e, portanto, não adentra na completude lógica.

Makinson e van der Torre desenvolveram uma lógica para lidar com normas introduzindo normas condicionais, um código de normas é um conjunto *G* de normas condicionais que é um par ordenado (a,x). Para tal par ordenado, o "corpo" *a* deve ser entendido como um input, representando alguma condição ou situação, e a "cabeça" *x* deve ser entendida como um output[6], representando o que a norma estabelece como requerido, obrigatório ou qualquer outro critério na situação apresentada. obviamente tais autores fazem uma analogia com um computador e os mecanismos de entrada e saída de dados sem, no entanto, referirem-se a uma máquina de Turing.

Dado um universo L tal que $G \subseteq L^2$ e um input $A \subseteq L$, o output de A a partir de G deve ser

$G(A) = \{x \mid (a,x) \in G \text{ para alguma } a \in A\}$

A lógica input/output atua sobre essa descrição sendo L uma linguagem do cálculo proposicional fechado pelos conectivos veritativos-funcionais e G um conjunto de pares ordenados (a,x) de fórmulas de L, como a definição é meramente

[6] Optamos por manter a terminologia original pois a tradução para entrada e saída não nos parece adequada. Como o termo input/output é conhecido no domínio da computação pode ser utilizado sem perda de compreensão.

conjuntista não há nenhuma restrição para seu uso apenas em sistemas deônticos, os autores esclarecem que G não é um apenas um conjunto de normas mas um conjunto gerador, para evitar qualquer confusão os geradores G não são tratados como fórmulas, mas apenas como pares ordenados de fórmulas booleanas, eventualmente de primeira ordem.

O par ordenado (a,x) é denominado *forwards* (à frente), ou seja, **a** sendo o corpo e **x** a cabeça, e a fórmula **a** → **x** como a sua materialização, tendo como referência a implicação material.

Se dado um conjunto A de fórmulas a lógica input/output procura lidar com a questão de como definir de forma racional o conjunto de proposições **x** compondo o output de A a partir de G, que também pode ser lido como G dado A, escrito como out(G,A). A intenção dos autores não é a de criar ou determinar um conjunto específico de normas, mas preparar a informação antes que ela seja dada como input para o conjunto G, e analisar o output como emerge e se necessário coordenar ambos de formas especificas. Um conjunto G de normas condicionais é desta forma entendido como um mecanismo de transformação, a tarefa da lógica é agir como assistente nesse processo.

A intuição é a de que tanto o input como o output são influenciados pelo operador de consequência Cn[7], e Makison e Torren definem

Out (G,A) = Cn(G(Cn(A))) sendo a função G(,) definida num nível não lógico e Cn é a consequência lógica, também representada pelo símbolo ﬁ. Dito de outra forma, dado um conjunto A de fórmulas como input, primeiramente são agrupadas todas as suas consequências para a seguir aplicar-se G a elas, e ao final considerar todas as consequências do que e obtido. São definidas diversas variantes para lidar

---

[7] A pesar dos autores não definirem, o operador de consequencia . Um estrutura de Tarski e um sistema lógico do tipo L = {FOR,Cn}, onde FOR representa o conjunto de todas as sentenças de uma linguagem L fixada e Cn denota o operador de consequencia. A partir de um subconjunto qualquer de sentenças de FOR na linguagem L, outras sentenças podem ser obtidas por meio de certas operações, ou seja, regras de inferência. Estes conceito foram desenvolvidos por Tarski e também é utilizado na definição de consequencia normativa de Alchourron. Para maiores detalhes remetemos à bibliografia. TARSKI, A. On some fundamental concepts of metamathematics (1930) in Logic, semantics, metamathematics. Oxford: Clarendon Press, 1983**..**

com inputs disjuntivos e disponibilizado outputs para serem reutilizados como inputs. Passaremos a expor algumas definições como a de Obrigação:

Def. Obrigação. Seja L um calculo proposicional com ı sendo o símbolo para tautologia e seja G um conjunto de pares ordenados de L (denominados geradores). Um gerador (a,x) deve ser lido como ‘se o input a então output x’.

As definições seguintes são definidas sendo v uma variável para uma valoração v(b) = 1 para toda formula b e o conjunto V = {b | v (b) = 1}.

$Out_1(G,A) = Cn(G(Cn(A),$

$Out_2 (G,A) = \cap\{Cn(G(V)) \mid v(A) = 1\}$

$Out_3 (G,A) = \cap\{Cn(G(B)) \mid A \subseteq B = Cn(B) \subseteq G (B)\}$

$Out_4 (G,A) = \cap\{Cn(G(V)) \mid v(A) = 1 \text{ e } G(V) \subseteq V\}$

A principal característica desses cálculos é que inputs não são, na maioria dos casos, outputs, ou seja, não temos $A \subseteq Out_1(G,A)$. A lógica input/output é axiomatizada como uma lógica condicional com o objetivo de responder questões tais como: suponha que é fornecido apenas o conjunto gerador G, como se define o par (A,x) de input/output de G, ou seja, out(G), o que seria o mesmo que out (G,A), pois $(A,x) \in out(G)$ se e somente se $x \in out(G,A)$. As duas formulações são aceitas pelos autores sendo aplicadas dependo do caso em análise, sendo que a última é mais bem compreendida no contexto semântico e a primeiro no sintático o que ocorre com o uso dos operadores Cn e fi.

As regras de inferência são obtidas através de um teorema.

Seja L a lógica subjacente e ı uma tautologia e seja G um conjunto de pares ordenados de L, a lógica Input/output $out_1(out_2/out_3/out_4/)$ é um fecho em $G \cup \{ (ı,ı)\}$ sobre substituição de equivalências lógicas e as regras SI, WO e AND (e OR/CT/OR e CT)

SI $(a,x)/(a\wedge b),x$ input forte

WO $(a,x)/(a,x\vee y)$ input fraco

AND $(a,x),(a,y)/(a,x\wedge y)$ conjunção de output

OR $(a,x),(b,x)/(a\vee b,x)$ disjunção de input

CT $(a,x),(a\wedge x,y)/(a,y)$ transitividade cumulativa

ID $/(a,a)$ identidade

As derivações são realizadas através de inputs únicos, definindo a derivabilidade de um conjunto input A como a derivação da conjunção de infinitos elementos de A. Para qualquer conjunto de regras de derivação, um par (a,x) de uma fórmula é dito derivável de G usando estas regras, e escrito $(a,x) \in deriv(G)$ sse (a,x) está no menor conjunto que inclui G, é fechado pelas regras e contém cada par (1,1).

A elaboração dessas lógicas foi uma resposta as indagações iniciadas por Alchourron sobre as lógicas deônticas como espelho das atividades exercidas pelos operadores do direito, o objetivo é restringir o uso do condicional e em especial com relação a definição de Permissão como operador deôntico, que seria ambíguo, podendo ser definido com uma negação de uma proibição, uma permissão fraca, na definição de Alchourron.

Uma segunda definição seria a de uma ação especifica, sendo uma obrigação fraca, podendo ser entendido como dado o que é obrigatório e o que é permitido fortemente a permissão real do agente é computada. Uma terceira definição seria aquela pela qual o legislador ao descrever os limites do que pode vir a ser proibido sem violar uma permissão estática, o que é chamado de imunidade proibitiva, pois o legislador deve antecipar o efeito do acréscimo de uma proibição a um corpo de normas existentes. Se proibir **x** condicionalmente nos compromete com a proibição de algo que já foi positivamente permitido em uma determinada situação, então, ao adicionar uma proibição isso torna-se inadmissível, pois levaria a uma contradição, o que explica a imunidade proibitiva.

Dado um conjunto de normas, a questão suscitada é de como podemos determinas quais obrigações são operacionais numa situação na qual ocorre uma violação de alguma delas que dão origem ao paradoxo contrario-ao-dever. O exemplo apresentado é o de uma casa não tem um muro ou um cachorro, se tiver um cachorro, deve ter o muro e uma placa de aviso. Na notação da lógica deôntica $O(\neg m \vee c/\mathrm{I})$, $O(m \wedge p/c)$, onde I é uma tautologia, na notação da lógica input/output $\mathrm{I}(\neg m \vee c)$, $(c, m \wedge p)$. Suponha que na casa já haja um cachorro, portanto a primeira norma já está violada, qual seria agora a obrigação a ser seguida?

Esse tipo de problema apontado pelos autores com as noções de proibição e permissão é a de como lidar com violações de obrigações, conhecido como paradoxos contrários-ao-dever, como o de Chisholm e Forrester, este fato levou os autores a utilizar a noção de restrição nas lógicas input/output. Isto é obtido através do uso de técnica de revisão de crenças, diminuindo o conjunto de normas para que não ocorram as situações que gerem o paradoxo do contrario-ao-dever as lógicas output possuem uma restrição no conjunto G de geradores no caso de obrigações do tipo contrarias-ao-dever. O input representa algo que é sempre verdadeiro, e o agente deve se perguntar quais obrigações (output) este input fornece, mesmo que o input não venha a ser verdadeiro e o agente deva se conformar com as circunstancias.

Def. (Restrição).Seja G um conjunto gerador e um lógica input/output. Escrevemos $x \in out(G,a)$ sse $(a,x) \in out(G)$.

Definimos:

maxfamilia(G,a) é o conjunto $\subseteq$-maximal de subconjunto G´ de G tais que $out(G',a) \cup \{a\}$ é consistente.

outfamilia(G, a) é o output dos elementos da maxfamilia,

i.e., $\{out(G', a) \mid G' \in maxfamilia(G,a)\}$.

(a, x) ∈ $out_{\cup}$(G) sse x ∈ ∪outfamilia(G,a)

(a, x) ∈ $out_{\cap}$(G) sse x ∈ ∩outfamilia(G,a)

Por exemplo múltiplos níveis de infrações podem ser analisados, seja G = {1,¬a), (a, x) (a∧¬x, y)} onde a é lido como `você quebra uma promessa, x como `você se desculpa´ e y como ´você está arrependido´. Considere o input a ∧ ¬x. Por um lado out(G, a ∧ ¬x) = Cn(¬a,x,y), que é consistente, por outro lado, out(G a∧¬x) é inconsistente com input a ∧ ¬x, então maxfamília(G, a∧¬x) = {(a∧¬x,y)} e outfamília(G, a∧¬x) = {Cn(y)}

Com a apresentação de tal sistema entendemos que seria natural admitir uma lógica deôntica corrigível (*defeasible*) que trata de sistemas onde uma norma é corrigível se ela admite exceções. Por exemplo, a frase Matar alguém Art. 121 do Código Penal implica na pena de reclusão, de 6 (seis) a 20 (vinte) anos. Essa norma pode ser admitida como uma regra de ampla aplicação a casos singulares, mas que tem exceções, pois aquele que mata em legítima defesa não é apenado. A lógica corrigível trata desse tipo enunciado. Sistemas normativos possuem regras com exceções, exceções de exceções, etc.

Uma característica desses sistemas é que as exceções podem ser introduzidas como novas premissas transformando o sistema em não-monotônico, com a possível perda da validade, pois uma conclusão pode não se seguir das premissas com a inserção de uma nova informação.

Um sistema corrigível deve estabelecer uma hierarquia de normas, o que pode ser obtido, exemplo, através da lógica input/output o que é um dos objetivos de nossa pesquisa.

Para assegurar-se de que um sistema é coerente, basta comprovar que nenhum dos casos está correlacionado com duas ou mais soluções incompatíveis; se o sistema for coerente em cada um dos casos, também o é com respeito a todos os casos possíveis, tanto genéricos como individuais

Um dos nossos objetivos é a analise do condicional utilizado nesse sistema, se material ou estrito, e a comparação conceitual com os sistemas paraconsistentes apresentados.. Pretendemos apresentar o sistema deôntico DL-$D^{Q=}$ que é paraconsistente e paracompleto, introduzindo as noções de bom comportamento e negação forte e dessa forma obter resultados metalinguísticos através de teoremas como da correção, completude, interpolação, etc., e verificar se esse novo cálculo é decidível. Cumpre salientar que para Alchourron completude significa a ausência de lacunas e, portanto, não adentra na completude lógica, o que esperamos fazer com nossa pesquisa.

CAPÍTULO VIII – LÓGICAS INPUT/OUTPUT

Makinson e van der Torre desenvolveram uma lógica para lidar com normas introduzindo normas condicionais. Um código de normas é um conjunto *G* de normas condicionais que é um par ordenado (a,x). Para tal par ordenado, o “corpo” *a* deve ser entendido como um input, representando alguma condição ou situação, e a “cabeça” *x* deve ser entendida como um output[8], representando o que a norma estabelece como requerido, obrigatório ou qualquer outro critério na situação apresentada. Obviamente tais autores fazem uma analogia com um computador e os mecanismos de entrada e saída de dados sem, no entanto, referirem-se a uma máquina de Turing.

A intuição é a de que tanto o input como o output são influenciados pelo operador de consequência Cn[9], e Makison e Torren definem

Out (G,A) = Cn(G(Cn(A))) sendo a função G( ) definida num nível não lógico e Cn é a consequência lógica, também representada pelo símbolo ﬁ. Dito de outra forma, dado um conjunto A de fórmulas como input, primeiramente são agrupadas todas as suas consequências para a seguir aplicar-se G a elas, e ao final considerar todas as consequências do que e obtido. São definidas diversas variantes para lidar com inputs disjuntivos e disponibilizado outputs para serem reutilizados como inputs. Passaremos a expor algumas definições como a de Obrigação:

A principal característica desses cálculos é que inputs não são, na maioria dos casos, outputs, ou seja, não temos A $\subseteq$ Out_1(G,A). A lógica input/output é

[8] Optamos por manter a terminologia original pois a tradução para entrada e saída não nos parece adequada. Como o termo input/output é conhecido no domínio da computação pode ser utilizado sem perda de compreensão.

[9] A pesar dos autores não definirem o operador de consequência . Uma estrutura de Tarski a um sistema lógico do tipo L = {FOR,Cn}, onde FOR representa o conjunto de todas as sentenças de uma linguagem L fixada e Cn denota o operador de consequência. A partir de um subconjunto qualquer de sentenças de FOR na linguagem L, outras sentenças podem ser obtidas por meio de certas operações, ou seja, regras de inferência. Estes conceitos foram desenvolvidos por Tarski e também é utilizado na definição de consequência normativa de Alchourròn. Para maiores detalhes remetemos àTARSKI, A. On some fundamental concepts of metamathematics (1930) in Logic, semantics, metamathematics. Oxford: Clarendon Press, 1983.

axiomatizada como uma lógica condicional com o objetivo de responder questões tais como: suponha que é fornecido apenas o conjunto gerador G, como se define o par (A,x) de input/output de G, ou seja, out(G), o que seria o mesmo que out (G,A), pois (A,x) $\in$ out(G) se e somente se x $\in$ out(G,A). As duas formulações são aceitas pelos autores sendo aplicadas dependo do caso em análise, sendo que a última é mais bem compreendida no contexto semântico e a primeiro no sintático o que ocorre com o uso dos operadores Cn e fi.

As derivações são realizadas através de inputs únicos, definindo a derivabilidade de um conjunto input A como a derivação da conjunção de infinitos elementos de A.

A elaboração dessas lógicas foi uma resposta às indagações iniciadas por Alchourrón sobre as lógicas deônticas como espelho das atividades exercidas pelos operadores do direito, o objetivo é restringir o uso do condicional e em especial com relação à definição de Permissão como operador deôntico, que seria ambíguo, podendo ser definido com uma negação de uma proibição, uma permissão fraca, na definição de Alchourrón.

Uma segunda definição seria a de uma ação especifica, sendo uma obrigação fraca, podendo ser entendido como dado o que é obrigatório e o que é permitido fortemente a permissão real do agente é computada. Uma terceira definição seria aquela pela qual o legislador ao descrever os limites do que pode vir a ser proibido sem violar uma permissão estática, o que é chamado de imunidade proibitiva, pois o legislador deve antecipar o efeito do acréscimo de uma proibição a um corpo de normas existentes. Se proibir **x** condicionalmente nos compromete com a proibição de algo que já foi positivamente permitido em uma determinada situação, então, ao adicionar uma proibição isso se torna inadmissível, pois levaria a uma contradição, o que explica a imunidade proibitiva.

Dado um conjunto de normas, a questão suscitada é de como podemos determinar quais obrigações são operacionais numa situação na qual ocorre uma violação de alguma delas que dão origem ao paradoxo contrário-ao-dever.

Esse tipo de problema apontado pelos autores com as noções de proibição e permissão é a de como lidar com violações de obrigações, conhecido como paradoxos contrários-ao-dever, como o de Chisholm e Forrester, este fato levou os autores a utilizar a noção de restrição nas lógicas input/output. Isto é obtido através do uso de técnica de revisão de crenças, diminuindo o conjunto de normas para que não ocorram as situações que gerem o paradoxo do contrário-ao-dever possuem uma restrição no conjunto G de geradores no caso de obrigações do tipo contrárias-ao-dever. O input representa algo que é sempre verdadeiro, e o agente deve se perguntar quais obrigações (output) este input fornece, mesmo que o input não venha a ser verdadeiro e o agente deva se conformar com as circunstancias.

CAPÍTULO IX PARADOXOS DA LÓGICA DEÔNTICA

Faremos uma discussão de paradoxos que aparecem em direito e como solucioná-los através da lógica. Inicialmente comentaremos o paradoxo da auto-emenda, como proposto por Suber seguindo Hart que o denominou paradoxo da auto referência. Paradoxos geram uma série de questionamentos tanto em lógica como em matemática, são proposições que numa primeira análise parecem verdadeiras mas que com argumento levam a conclusões contraditórias.

Paradoxos são incômodos porque temos dificuldade em negar seu status como declarações significativas sujeitas às regras da lógica clássica sobre contradição e verdade. Estamos raramente dispostos a alterar nossa lógica meramente para acomodar uma sequencia de palavras que as distorcem. A solução mais fácil, então, é classificar a cadeia de caracteres fora da zona de perigo: se é insignificante (nem verdadeira nem falsa), ou indeterminável é desqualificada; então não é sujeita as regras lógicas sobre proposições e, portanto, não incomoda. Se aceitarmos a aplicação de princípios lógicos normais à declarações paradoxais, ou, se as proposições não podem ser distinguidas, por motivos relevantes, das proposições da ciência e da vida diária, então devemos enfrentar as contradições entre as regras que resultam.

Um paradoxo pode ser eliminado se reconsiderarmos nossos valores de verdade e alterarmos sua interpretação, impedindo o resultado que nos incomoda.

Para "resolver" um paradoxo podemos reafirmar nossas regras sobre valores de verdade ou sobre o significado de uma proposição ou sua interpretação, para não violar as regras estabelecidas, e, para que o corpo de verdades determinado pelas regras seja salvo, na medida do possível, da perda de significado ou do critério de verdade. Estas tentativas podem ser divididas em duas grandes classes: aqueles que atacam uma fórmula da linguagem como malformada e aqueles que atacam o sistema de regras como inconsistente ou incompleto. A primeira evidencia que as regras de formação do sistema não permitem que o paradoxo se configure no sistema. O segundo permite que declaração seja um enunciado significativo e usa isso como uma vantagem contra o sistema de regras que não pode, até então, acomodar o paradoxo.

Leis podem ser paradoxais dentro do sistema de normas jurídicas, proposições, podem ser paradoxais dentro do sistema de regras lógicas. (O que é mais interessante é que a legislação vista como proposições pode ser paradoxal dentro do sistema de regras lógicas e ainda não ser paradoxal dentro do sistema de normas jurídicas, como veremos). Os métodos de lidar com paradoxos legais enquadram-se nas duas categorias amplas. Por um lado, uma lei paradoxal pode ser atacada como nula ou, por outro lado, as regras jurídicas sobre a validade, autoridade e legitimidade podem ser atacadas como inconsistentes, incompletas ou inadequadas de alguma forma.

Em lógica podemos reformular as regras para eliminar a imprecisão e inconsistência, e podemos acrescentar outras que parecem resolver o problema. Mas, na elaboração ou aplicação da lei, apenas determinados operadores do direito têm esses poderes, como por exemplo, juízes ou legisladores. Na lógica nós podemos decidir que o argumento paradoxal é o culpado e marcá-lo como sem sentido, mas em direito, o poder de anular a lei paradoxal é possível apenas em alguns casos, apesar de sempre podermos desconsiderar o paradoxo. Uma solução em lógica para um paradoxo jurídico, portanto, raramente será uma solução jurídica também. Pela mesma razão, uma solução lógica para uma lei paradoxal, como uma nulidade processual, não possui a autoridade legal necessária para anular, e, por conseguinte, temos de admitir que uma lei pode persistir na realidade jurídica apesar de haver um paradoxo ou uma contradição. No entanto, a afirmação de que a aplicação de lógica em direito é irrisória não pode ser aceita a priori. A aplicação de lógica em direito e a sua importância para o raciocínio jurídico não podem ser subestimadas.

Muitos juristas negam que quaisquer contradições reais existem na lei. Aparentes contradições podem sempre em princípio ser eliminadas por regras de interpretação e prioridade; ou seja, em qualquer aparente conflito de normas jurídicas, apenas uma regra é inválida ou inaplicável para as circunstâncias sem contaminar todo o sistema legal. [10] Uma regra de interpretação exige que inconsistências sejam lidas de uma maneira que se consiga conciliá-las, e se são inconciliáveis, deve-se favorecer a lei mais recente em detrimento da mais antiga. David Daube reclama que sabemos muito pouco sobre leis contraditórias e impossíveis, porque elas são normalmente “interpretadas fora do sistema” pelos juízes, armados com diversas regras de interpretação e temerosos em lidar com a contradição. Consideraremos a questão da existência de contradições reais (em oposição à aparente) na lei como fato, para fins metodológicos. Se assumíssemos *a priori* que as contradições não podem existir, isso iria distorcer a nossa compreensão do direito.

A exploração das possíveis raízes de um paradoxo pode revelar falhas profundamente escondidas em nossas regras de significado. Como Quine afirmou:

“The argument that sustains a paradox may expose the absurdity of a buried premiss or of some preconception previously reckoned as central to physical theory, to mathematics or to the thinking process. Catastrophe may lurk, therefore, in the most innocent-seeming paradox. More than once in history the discovery of paradox has been the occasion for major reconstruction at the foundation of thought.”[11]

Os paradoxos em direito podem ser semelhantes aos que aparecem em lógica e matemática. Às vezes eles aparecem em julgamentos, às vezes aos legisladores e às vezes aos advogados. Os complexos emaranhados de regras, a falta de clareza sobre os pressupostos do sistema, auto-referência, inferências circulares e outras condições que dão origem a vários paradoxos, frequentemente ocorrem em casos jurídicos como contratos, estatutos, Constituições. O fenômeno dos paradoxos no

[10] Hans Kelsen adotou esta posição em *General Theory of Law and the State*, Harvard University Press, 1949, pp. 363, 375, e em *Pure Theory of Law*, University of California Press, 1967, pp. 74, 328. No entanto, Kelsen abandonou, em parte, esta posição em, "Derogation," em Ralph A. Newman (ed.), *Essays in Jurisprudence in Honor of Roscoe Pound*, Bobbs-Merrill, 1962, pp. 339-55, pp. 351ff, afirmando que normas conflitantes não implicão em rejeição automática, mas, curiosamente, ele também diz (p. 351) que tal conflito não pode ser compardo com uma contradição. Consulte H.L.A. Hart, "Kelsen's Doctrine of the Unity of Law," *in Essays in Jurisprudence and Philosophy*, Oxford University Press, 1983, pp. 309-42.
[11] W.V.O. Quine, "Paradox," *Scientific American*, 206 (1962) 84-96, p. 84

direito é especialmente intrigante porque os advogados não compartilham as mesmas ferramentas dos lógicos.[12]

Lógicos nunca ficariam satisfeitos com uma solução provisória para um paradoxo, ou com uma solução que reconhecidamente não levou em consideração as consequências dos princípios do sistema lógico sob escrutínio. Lógicos estudam a integridade própria de seus sistemas. Resultados negativos e a descoberta de novas dificuldades são louváveis em ciência. Lógicos sentem urgência para resolver os paradoxos porque seus sistemas serão menos seguros do que podem ser até que uma solução possa livrá-los de suspeita; Mas nenhum juiz vai ordená-los para apresentarem uma defesa que determinará, por exemplo, a liberdade de uma pessoa, no prazo de quinze dias.

Advogados trabalham dentro de sistemas jurídicos e se esforçam para preservá-los, de uma forma muito diferente da maneira na qual lógicos trabalham com lógica. Vamos discutir que um sistema jurídico é diferente de um sistema lógico na sua capacidade para tolerar a contradição, entre outras coisas.

[12] Como exemplo do direito americano, em 1897 um projeto do legislativo em Indiana, Estados Unidos votou por unanimidade em utilizar um valor incorreto de *pi*, para cobrar dos não residentes de Indiana uma taxa pelo uso deste valor. A lei foi aprovada na primeira votação pelo Senado, mas na segunda foi adiada indefinidamente. Petr Beckman, *A History of Pi*, St. Martin's Press, 1971, pp. 174-79.

Um paradoxo que é fundamental em direito é o da auto-emenda constitucional. O paradoxo em que vamos nos concentrar surge da pergunta: A cláusula de uma Constituição que autoriza alterações pode autorizar sua própria alteração ou revogação? O paradoxo da auto-emenda se evidencia da seguinte maneira: uma lei que permite a alteração de outras leis não poderia autorizar sua própria alteração, mas isso é perfeitamente aceitável na prática jurídica.

Este paradoxo não tem uma contrapartida rigorosa na lógica, pois ele trata da mudança de regras do sistema por meio de uma regra dentro do próprio sistema. No cálculo DL-DQ$^{=}$, por exemplo, rejeitamos alguns axiomas aceitos em lógica clássica, mas não permitimos que esses axiomas sejam alterados para obtenção de qualquer resultado dentro do sistema.

Outro paradoxo, no entanto, que tem sido estudado com mais frequência — o paradoxo da onipotência. O paradoxo de que o soberano pode fazer qualquer coisa a qualquer momento e, portanto, pode restringir seu próprio poder.[13] Em filosofia geralmente o paradoxo é de onipotência divina: o poder de fazer qualquer ato a qualquer momento.[14] Se uma entidade tem o poder de fazer qualquer lei ou fazer qualquer ato a qualquer momento, então ela pode limitar seu próprio poder de agir ou legislar? Se puder, então não pode, e se não for possível, então pode. Se ele pode fazer qualquer ato a qualquer momento, então ele pode limitar ou destruir a si mesmo, porque isso é um ato; Mas não pode assim fazer, porque ao fazê-lo significaria que não pode e não poderia fazer qualquer ato a qualquer momento. Na versão jurídica podemos dizer que há uma lei que o soberano não pode fazer ou uma lei que ele não pode revogar.[15]

---

[13] Veja Hintikka, "Remarks on a Paradox," *ibid*., 514-16. Consulte também Geoffrey Marshall, *Parliamentary Sovereignty and the Commonwealth*, Oxford University Press, 1957, *passim*, e também dele "Parliamentary Sovereignty and the Language of Constitutional Limitation," *Juridical Review*, 67 (1955) 62. Veja também Zelman Cowen, "Parliamentary Sovereignty and the Limits of Legal Change," *Australian Law Journal*, 26 (1952) 237-40; Sir William Ivor Jennings, *The Law and the Constitution*, University of London Press, 3d. ed., 1943, pp. 142-45, 148-53; e H.L.A. Hart, *The Concept of Law*, Oxford University Press, 1961, pp. 64-76, 144-50.

[14] Veja Bruce R. Reichenback, "Mavrodes On Omnipotence," *Philosophical Studies*, 37 (1980) 211-14 e Gary Rosenkrantz and Joshua Hoffman, "

[15] Essa formulação do paradoxo é talvez vulnerável se contrastada com objeções temporais.

Nessa visão, uma cláusula que autoriza sua própria alteração ou que, na verdade, limita-se pela auto-alteração é, talvez surpreendentemente, uma contradição. Sobre este ponto de vista, cláusulas de alteração são imutáveis exceto por meios ilegais ou extralegais tais como uma revolução. Alternadamente, qualquer ato de alteração considerado válido por autoridades legais é simplesmente um caso de "revolução pacífica".

O paradoxo da auto-emenda é uma das melhores formas para se estudar o paradoxo da onipotência. A ideia de um soberano ou uma divindade é vaga e requer muita especificação preliminar antes que os contornos de um problema possam vir em socorro. Dizer que uma cláusula de alteração se aplica à Constituição toda de que faz parte, portanto, incluindo ela mesmo, é inteligível e mesmo plausível. A auto aplicação de uma cláusula de alteração leva a um resultado, uma cláusula alterada, o que é perfeitamente compreensível, ao contrário de um caso de reduzida potência divina.

Mesmo se ignorarmos a possível auto-aplicação de uma cláusula de alteração pode-se argumentar que há um paradoxo na presença de uma cláusula de alteração em uma Constituição. Assemelha-se, neste caso, também ao paradoxo da onipotência. A Constituição é, aparentemente, suprema e ilimitada por lei superior, qualidades que também definem a onipotência. Mudar a constituição de baixo, dizer, por lei, é inadmissível porque uma autoridade derivada não pode alterar a suprema autoridade. Mas pode a Constituição mudar em si, ou usar sua supremacia contra si mesmo? Uma mudança no texto também pode ser considerada como uma limitação ou violação na sua supremacia, pois cada cláusula participa da supremacia do todo e desse modo é imunizada de deslocamento a partir do ápice de autoridade, pelo menos por regras de nível inferiores. Qualquer mudança significativa permitirá que o que foi uma vez proibido seja permito ou proibir o que uma vez foi permitido.

Ou podemos pensar sobre Constituições como contendo uma limitação implícita sobre a sua validade ou supremacia: válida e suprema até que seja alterada. Esta qualificação pode ou não nos livrar do paradoxo. Mas de qualquer forma, deixa-nos com uma supremacia qualificada, assim como táticas semelhantes nos deixam com onipotência e soberania limitada. Nós podemos nos contentar com divindades finitas e soberanos finitos, mas um poder de alteração finito pode implicar a imutabilidade de algumas normas jurídicas, uma conclusão que é muito menos palatável.

Se as cláusulas da Constituição podem ser substituídas por um método que fornece a alteração em si, então pode uma cláusula de alteração substituir-se por seu próprio método de alteração? A questão é semelhante à pergunta se um ser onipotente poderia limitar ou aniquilar-se pelo seu próprio poder. Para um poder, autoridade, regra, agente ou entidade deslocar-se da supremacia, ou destronar-se de onipotência, é *prima facie* paradoxal como, por exemplo, no caso o paradoxo do barbeiro que somente pode barbear aqueles que não barbeiam a si mesmos. Tais reflexividades em direito criam um dilema para os juristas: se a auto-emenda é impossível, o sistema contém regras imutáveis (cláusula de alteração suprema), ou que, se a alteração for permitida, então o sistema contém contradições (auto alteração).

Para um lógico lidar com o paradoxo da auto-emenda ele poderia tornar explícitas todas as regras e princípios utilizados, por exemplo, por legisladores, para decidir se a auto-emenda é admissível e se submete às regras e princípios estabelecidos. Permissibilidade seria uma função de consistência e dedutibilidade. Se auto-emenda for inconsistente ou fora do escopo das instalações disponíveis, em seguida, um lógico pode esboçar uma variedade de sistemas que permitam a alteração e torná-los auto-consistentes. Se a infinidade de princípios e regras disponíveis é internamente inconsistente, ou se faculta resultados inconsistentes, que serão quase sempre o caso, o lógico pode tentar mostrar quais são os subconjuntos consistentes, se for o caso, permitido a auto-emenda desde que isso tenha pouco impacto no restante da lei. O que pretendemos elaborar é o uso de um cálculo paraconsistente que lida com a inconsistência sem trivializar, no caso, a lei.

Um advogado iria abordar o problema de forma diferente. Cláusulas de alteração para Constituições já existem, como por exemplo, a possibilidade de emenda em nossa Constituição Federal.

Vamos discutir que uma das dificuldades do paradoxo de Ross[16] encontra-se em confundir os princípios da lógica com uma lei hierarquicamente superior. Se a solução lógica do paradoxo requer o apelo a uma regra da razão ou inferência, então ele teria de admitir que tal regra não existe tacitamente no sistema jurídico. A afirmação de que as leis do direito são vinculadas aos princípios lógicos hierarquicamente superiores é desafiadora e importante. No entanto, assumir essa superioridade seria o mesmo que tentar legislar sobre direito do ponto de vista da lógica, e não tentar entender a relação entre a lei e a lógica.

Se considerarmos a abordagem lógico-filosófica e a do advogado e perguntar qual é a resposta mais razoável e qual é a resposta jurídica à questão, ou seja, se uma cláusula de alteração pode autorizar a sua própria alteração, ou se um poder jurídico pode se limitar ou se eliminar ou se uma autoridade pode autorizar a sua própria revisão ou revogação da lei que o institui. Se as cláusulas de alteração são mutáveis apenas através de contradição ou revolução, então isso não automaticamente significará que tal alteração é legalmente impossível. A existência de contradição sequer causa o impedimento através da ótica da lógica, se aplicado uma lógica paraconsistente. A prática jurídica permite a auto-emenda, mesmo se tomada como base a lógica clássica, se houver uma revisão sobre a possibilidade legal.

Pensar sobre o que é juridicamente possível ou admissível levanta a questão de se saber em que medida os sistemas jurídicos são, ou devem ser, analisados com o uso da lógica. A nossa preocupação é mostrar este uso, da lógica como ferramenta na solução de paradoxos jurídicos.

Para nós, a solução do paradoxo não está na hierarquia, mas sim, na lógica utilizada. Se formularmos o paradoxo no nosso cálculo $DL\text{-}DQ^{=}$, ainda que se assuma a contradição, ela não impedirá a utilização da lei e de sua emenda.

Neste capítulo, faremos uma exposição da lógica deôntica padrão e de alguns dos paradoxos encontradas nessa classe de lógicas e como $DL\text{-}DQ^{=}$ pode lidar com

[16] Se p implica p ou q, 'João é obrigado a fazer p' implica que 'João é obrigado a fazer p ou q'. (consulte Hintikka, 'The Ross paradox as evidence for the reality of semantical games', Monist, 60)

alguns desses paradoxos.

Existem diversas definições do que é uma lógica deôntica, uma delas simplesmente como a lógica que lida com proibições, permissões e obrigações. Pode-se ainda ser entendida coma a lógica que lida com o ideal de comportamento em oposição aos comportamentos reais.

Nossa noção de obrigatoriedade deve tratar como os fatos se dão. Muitas obrigações e direitos existem em função do fato que os originou. No entanto, na lógica deôntica, o operador O, tal que $O\alpha$ é verdadeiro se e somente se o fato que α possui a propriedade referente à obrigatoriedade se dá. Independe do fato relacionado a tal obrigação ser físico, metafísico ou concreto, sendo, a princípio, uma construção abstrata.

Podemos afirmar que, geralmente, os fatos determinam as obrigações e os direitos. Obviamente que outros princípios básicos as sustentam, de tal sorte que, se tais fatos existirem, uma determinada obrigação ou direito também existirá.

Ao se aplicar o operador O a uma formula α obtemos uma nova formula β tal que β é satisfeito por Y se somente se β for satisfeito por Y, que é um fato originário.

Em todos os sistemas normativos os fatos e as ações são tais que aqueles que possuem a autoridade aceitam a obrigatoriedade, ou seja, aceitam que tais fatos e situações são obrigatórios. Logo, todos os fatos que são seguidos por obrigações, conforme a lógica jurídica aplicada, são obrigatórios intrinsicamente.

Tal asserção pode acarretar na admissão de que toda norma promulgada por um legislador deve ser seguida como mandatória, o que não se coaduna com a doutrina Positivista.

Mas poderíamos aceitar que existem normas que não são necessariamente impostas pelo ser humano, como as leis das física. No entanto, poder-se-ia alegar, nesse caso, que a mera existência de uma lógica normativa seria algo irreal. O Positivismo leva à própria negação da possibilidade de uma lógica jurídica.

Não concordamos com tal posição, visto que é inegável a existência de diversas normas que são criadas pelo homem e que não conflitam com leis da natureza ou qualquer outra, que eventualmente difira em sua essência.

Note que apesar de nosso sistema DL-D e extensões ser apresentado em uma linguagem formal, não sustentamos que a nossa semântica seja de um mundo ideal e que não tenha correspondência com o mundo real. Apesar de suas propriedades formais DL-$DQ^{=}$ pode ser utilizado em proposições que correspondam a problemas normativos, ou seja, muitas das obrigações são decorrentes do mundo real e podem ser inseridas em DL-D e suas extensões.

No tocante as normas éticas, em oposição às normas jurídicas, tais normas poderiam ser consideradas como ideais, promulgadas por uma lei maior. Mas mesmo nessa hipótese holística, é inegável que a interseção entre a norma ética e um fato existente é necessária. Logo, as obrigações morais refletem o mundo existente e não o contrário.

O mesmo podemos dizer dos direitos, em oposição aos deveres e obrigações. Que fatos se tornem lícitos ou corretos dependem diretamente das circunstâncias que os originaram, tanto para normas éticas como jurídicas.

Apesar de apresentarmos uma semântica formal com mundos ideais e ótimos, resta clara a existência de uma ideia intuitiva de um conjunto de regras fechadas, que represente situações obrigatórias, desde que estabelecida uma obrigação primitiva.

Nesse escopo, fica aparente a possibilidade de que obrigações possam ser separadas de outras ações. Para tanto, necessária a utilização de um padrão dedutivo que determine que dado que tal fato é obrigatório então a obrigação se seguir. Mas essa regra de consequência deve ser determinada como primitiva ou derivada pelas fórmulas da linguagem.

Logo, se tal inferência pode ser obtida, baseando-se em uma lógica não relevante, então se alguém não comete um crime, então ele não anda sobre a água, mas a proibição do crime implicaria e ele andar sobre a água e, portanto, andar sobre a água levaria as pessoas a cometer um crime.

Se uma semântica mais simples ou intuitiva pode ser obtida é uma questão doutrinária relativa e aberta, dependendo de quem vai operar com tal sistema.

A noção do que é lícito em um sistema normativo depende da definição de negação utilizada e para um ato ser lícito, a não-obrigação pode ser lícita ou não, o que depende da negação ser clássica ou paraconsistente. Porém, isso implicaria que a negação paraconsistente, em um certo sentido, admite graus de obrigação ou desobrigação, o que pode ser entendido, em certo sentido, como uma negação parcial, não negando totalmente o fato ou o ato jurídico. Mas mesmo neste contexto, a negação deve manter, para as situações clássicas que se um fato não-α é obrigatório, α não é lícito, ou seja, a licitude de α depende na medida que a obrigatoriedade de não-α não existe.

Importante frisar, que nossa negação paraconsistente não assume outro caráter que não seja uma negação, o que não retira a possibilidade de se interpretar tal negação, num sentido amplo, como permissiva de graus diferentes. Obviamente, existem, *a fortiori,* graus de obrigatoriedade, o que depende da noção de verdade utilizada, pois se um determinado fato jurídico α admite graus diferentes, o mesmo vale para sua negação. Logo α e não-α podem coexistir num mesmo mundo, seja ele o nosso mundo ou outro qualquer.

Uma possível abordagem é a de que a existência de α com um grau maior, acarretaria que daí menor seria o grau de não-α e seria possível o caso no qual α ou não-α existissem concomitantemente. Nesse caso, nos afastamos da lógica deôntica clássica, que não aceita tal caracterização.

Poderíamos advogar que tais graus de licitude e obrigatoriedade seguem o princípio de justiça de Leibniz, que afirma que situações similares devem obter tratamento iguais.

Numa situação do nosso mundo real, diversos fatos se apresentam em diferentes contextos normativos, com pelo menos alguma discrepância. Uma abordagem puramente dicotômica não espelharia os casos reais e, pior, afetaria a obtenção de uma melhor solução para os problemas que se apresentam. A perfeita linha divisório entre o lícito e o lícito, o obrigatório e o permitido não se mostra satisfatória com o mundo real. Por exemplo, nos casos de direitos dos animais, morte assistida, aborto etc.

Com uma abordagem clássica, esses casos podem ser mal resolvidos. O que ocorre é que dois fatos jurídicos podem ser quase idênticos, mas são tratados de forma completamente diferente e não apenas por haver uma mudança no tempo no espaço ou na vigência da norma. Por exemplo, nos casos em que ao mesmo tempo dois julgamentos são apresentados de forma totalmente oposta.

No nosso código penal, o art. 124 e seguintes tipificam o aborto:

“Aborto provocado pela gestante ou com seu consentimento

Art. 124 - Provocar aborto em si mesma ou consentir que outrem lhe provoque:

Pena - detenção, de um a três anos.

Aborto provocado por terceiro

Art. 125 - Provocar aborto, sem o consentimento da gestante:

Pena - reclusão, de três a dez anos.

Art. 126 - Provocar aborto com o consentimento da gestante:

Pena - reclusão, de um a quatro anos.

Parágrafo único. Aplica-se a pena do artigo anterior, se a gestante não é maior de quatorze anos, ou é alienada ou débil mental, ou se o consentimento é obtido mediante fraude, grave ameaça ou violência.”

Se fossemos analisar uma situação na qual o aborto só é tipificado como crime se foi realizado após o terceiro mês de gestação, além da analise dos fatos, de autoria e demais elementos no qual um Juiz se apoia, a decisão se basearia nesse aspecto temporal. No entanto, o Código Penal não define a gestação. Ou seja, em qual momento ocorre a gestação? Essa questão é levada para outras disciplinas que tentam, ainda sem um consenso, determinar quando a vida começa.

Portanto determinar a ilicitude da conduta do agente que comete um aborto está diretamente vinculada à definição precisa do momento em que ocorreu a gestação, ou seja, podemos estar diante de definições temporais distintas para um mesmo fato jurídico.

No campo dos direitos dos animais, noutro exemplo, não existe qualquer vedação para a comercialização de animais de abate, mas aqueles que são denominados silvestres são proibidos. Como definir o conjunto de todos os animais que são passíveis de domesticação e todos aqueles que são silvestres se no ramo da taxinomia há um trabalho constante de obter tal classificação mais fundamental sem uma resolução final?

Em outra situação, analisamos as normas vigentes que se referem a crimes que são, obviamente, praticados por pessoas. Não há, por exemplo, no Código Penal, a definição de pessoa, mas seria aceitável que essa definição estaria implícita à definição antropológica de Homo Sapiens. Suponhamos que em uma região remota, aparecesse uma homem de Neandertal e que viesse acometer um assassinato. Após sua prisão, seu advogado alegaria que ele é inimputável e que não tem capacidade para compreender as normas vigentes. O juiz acata os argumentos e ele é libertado.

Depois de alguns anos, ele passa a reivindicar a terra onde mora através de uma ação de usucapião. O proprietário da terra se defende alegando que o Código Civil se aplica a Homo Sapiens e não para Neandertais e que, portanto, o usucapião não pode ser deferido.

Obviamente há uma lacuna na lei, que sequer define antropologicamente ou biologicamente quem se enquadra como pessoa. A questão é a de que a obrigatoriedade não é absoluta e tampouco sua negação. Pode-se alegar que a lei possui mecanismos para solucionar tal situação através da analogia ou da validação de um perito especialista, mas o questionamento filosófico se mostra lançado e entendemos que na definição da negação e da lógica aplicada pode-se encontrar um arcabouço mais favorável.

Existem diversas situações semelhantes, por exemplo, no caso da eutanásia ou da morte assistida. Como precisar o estado terminal de um paciente, em que dia hora, minuto ou segundo se pode terminar a vida? Como precisar a irreversibilidade do quadro médico?

Situações extremas devem ser analisadas sob o prisma do que é quase ilegal ou legal. Suponha, novamente, que uma lei determine que o aborto se configure após 60 dias de gestação. Um aborto ocorre no último segundo do quinquagésimo nono dia e um outro aborto, de outra mulher, ocorre no primeiro segundo do sexagésimo dia. Se a norma determinar a partir do sexagésimo dia como o tempo do crime para sua tipificação, parece claro que no primeiro caso não houve crime e no segundo, sim.

No entanto a medição precisa do último segundo, ou primeiro, respectivamente, seria fundamental para a configuração do crime de aborto. Obviamente, tal situações devem ser analisadas para a que a norma não se aplique de forma errada e sua interpretação, parece, novamente, depender de definições externas.

Devemos nos atentar para as situações nas quais não existe uma norma que determine se um fato α é permitido e um fato β também é permitido. Não podemos concluir que se alguém age conforme α também poderia agir como β, pois α poderia gerar um impedimento para β. Deve-se notar, ainda, que como princípio geral, uma pessoa não deve impedir o exercício do direito da outra.

Esta situação também pode ser analisada sob a ótica paraconsistente atribuindo-se valores diferentes para os graus de obrigação, proibição e permissão. Suponhamos uma situação na qual $P\alpha$ e $P\beta$, mas que essa permissão tenha restrições de tal sorte que em alguns casos $P\alpha$ è $P\beta$ é falso. Pela lógica clássica, tal fato não poderia ocorrer e, se esse fosse o caso, poderia derivar-se uma contradição.

Na nossa perspectiva, no entanto, uma ação poderia ser tanto permitida como proibida dependendo do grau definido.

Uma restrição a essa situação pode ser adicionada à lógica se um axioma do tipo “é necessário que se α então não-α será sempre falso”. Tal princípio determina que o que não é proibido é permitido. Esse princípio influencia, no mundo real, como a maioria das pessoas se comporta em relação às proibições. Não se age conforme a legalidade exposta na lei, mas sim em virtude da noção implícita de se fazer tudo aquilo que não é proibido, ou que mesmo que seja proibido, que não gere um punição.

Mas se as duas formas de agir são aceitas e a obrigação e a proibição dependem de graus de verdade, então poderíamos afirmar que estamos diante de uma lógica que permite diferentes ações, gerando lacunas. Tal lógica permitiria a fórmula PPα, no caso de não haver norma que estabeleça o contrário. Essa abordagem vai de encontro a noção de plenitude da lei, da sua ausência de lacunas, defendida por Kelsen e Ross.

Na nossa lógica paraconsistente, não obtemos qualquer fórmula a partir de uma contradição, portanto, não é o caso de se alegar que numa lógica paraconsistente tudo seria permitido ou proibido, havendo a impossibilidade de se submeter a um conjunto de normas.

Em geral, é natural atribuir a legalidade a uma forma de possibilidade ou permissividade. Para se evitar tal concepção, pode-se adicionar ao sistema deôntico os operadores O e P no lugar da necessidade e possibilidade modal. Porém a possibilidade modal se distingue da permissão deôntica, ainda que alguns princípios modais possam ser interpretados no cálculo deôntico.

Esses operadores modais são denominados aléticos, enquanto que os símbolos O e P são os operadores deônticos. Existe claramente uma semelhança entre eles que será discutida abaixo. Se em uma lógica deôntica, O for tomado como primitivo, P pode ser introduzido por definição e, desta forma, Pα, por definição, é equivalente a ¬O¬α. Se estabelecermos P como um símbolo primitivo, então O pode ser definido a partir dele, ou seja, $O\alpha$, equivale por definição, a $\neg O \neg \alpha$.

Estas possíveis definições podem levar a crer que existe uma dependência direta da lógica deôntica com a lógica modal, sendo a primeira uma ariação da segunda. Mas isto não é verdade. Se tomarmos um sistema modal elementar **T**, a fórmula $\Box\alpha \rightarrow \alpha$ é teorema. Esta fórmula diz apenas que se a proposição α for necessária, então α será verdadeira. Num sistema como **T**, podemos demonstrar que, se α for verdadeira, então α é possível, ou seja,

$\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$.

Na lógica deôntica, levanta-se a questão se tais princípios possuem fórmulas correspondentes. No entanto, isto não é verdade, pois a própria interpretação pretendida da lógica deôntica procura estabelecer as relações entre as noções intuitivas de obrigações e permissões que diferem da de necessidade e possibilidade.

Resta claro que a lógica deôntica trata do cumprimento ou não de obrigações e suas variações. Portanto, na maioria dos sistemas, não deve ser teorema a fórmula

$O\alpha \rightarrow \alpha$

Uma obrigação nem sempre é cumprida, ou seja, a formula acima poderia ser interpretada como tudo que é obrigatório torna-se verdadeiro, o que obviamente não ocorre.

Nesse tipo de lógica, também não é demonstrável $P \rightarrow P\alpha$, que pode ser lido como “o que é verdadeiro também é permitido”.

Da análise dos operadores deônticos, surge a questão da interação dos operadores, como por exemplo $OO\alpha \rightarrow O\alpha$. Esse princípio não deve ser rejeitado de forma irrestrita e tampouco aceito imediatamente. Por exemplo, se uma norma contida numa Constituição determina a elaboração de outra específica, ou seja, que seja criada uma lei, assim determinado constitucionalmente, então estaríamos diante de uma instância desta fórmula, mas poderia ocorrer que essa lei infra constitucional jamais fosse votada.

Referente aos quantificadores, se analisarmos a fórmula $P\exists x\alpha \to \exists xP\alpha$. Mesmo que alguém esteja desobrigado legalmente a pagar impostos, é falso que alguém está isento de pagar impostos, salvo havendo uma norma específica para tal isenção.

No caso de $\exists xO\alpha \to O\exists x\alpha$ podemos exemplificar como: mesmo que alguém deva ser preso não é o caso de que alguém seja necessariamente preso, como no caso onde nenhum crime foi cometido, o que está de acordo com a lei. O fato de haver um crime perpetrado por alguém que deve ser preso, não conflita com a permissividade da norma numa situação onde não há cumprimento da pena. Para ilustrar tal situação, suponha a hipótese na qual o criminoso morre após ter realizado a conduta ilegal.

No caso de $O\forall x\alpha \to \forall xO\alpha$, é inquestionável que é licito que ninguém seja punido, o que não é proibido. Obviamente, isso não ocorre no mundo real. Alternativamente, observe que $\forall xO\alpha \to O\forall x\alpha$.

Em $O(\alpha \vee B) \to O\alpha \vee O\alpha$, temos, por exemplo, o fato no qual alguém possui o direito de receber uma remuneração extra ou manter-se empregado, não se segue que ou a pessoa recebe o valor prometido ou se mantém empregado, pois até o momento no qual uma das alternativas tenha sida rejeitada, não há direito a nenhuma delas. Ou seja, somente quando um dos disjuntos é falso é que se obtém o direito ao outro.

Vejamos outra situação, $O\alpha \vee O\beta \to O(\alpha \vee \beta)$, que pode ser lido como, mesmo que alguém possa receber um carro como prêmio, não implica que deva ou receber a premiação ou roubar um carro.

No caso da chamada agregação deôntica, temos que $O\alpha \square O\beta \to O(\alpha \square \beta)$ e temos a situação na qual mesmo que α e β sejam mandatórios, mas incompatíveis, não se segue que tal norma obrigue α e β, o que seria uma obrigação não imposta.

O conflito de normas não obriga um cidadão a realizar atos incompatíveis entre si.

A simplificação deôntica se dá pela fórmula $O\alpha \wedge O\beta \rightarrow O(\alpha \wedge \beta)$, ou seja, por exemplo; em função de um contrato, uma loja de móveis é obrigada a entregar um sofá e retirar outro usado. A loja não é obrigada a fazer isso. Suponha que a loja tente realizar a entrega, mas falha por um acidente, não ocorre a obrigação de retirar o sofá velho sob a alegação, do comprador, de que a loja estaria contratualmente obrigada a assim fazer. Ou seja, a obrigação contratual não força o cumprimento das duas ações conjuntamente, não há o cumprimento de uma condição,

Temos ainda o caso da simplificação, $O(\alpha \wedge \beta) \rightarrow O\alpha$. Suponha que para que você seja aceito em um novo emprego, você deva perder dez quilos. No entanto, a perda de peso não obriga a sua contratação.

No caso de $\alpha \rightarrow \beta \vdash O\alpha \rightarrow O\beta$. Esta fórmula está na origem de diversos paradoxos, como por exemplo no do Bom Samaritano, do Assassino Gentil e outros que analisaremos a seguir.

Outros princípios podem ter uma contraparte modal como, por exemplo,

$O\alpha \wedge O\beta \rightarrow O(\alpha \wedge \beta)$, que trata de obrigações conjuntivas e ainda

$\neg\alpha \wedge O(\alpha \vee \beta) \rightarrow O\alpha$ descreve se uma conjunção é falsa, a licitude da disjunção torna obrigatório um de seus componentes.

$\alpha \wedge O\beta \rightarrow O(\alpha \wedge \beta)$, pode ser interpretado como se um ato qualquer e um outro ato for obrigatório então enquanto um ato for realizado o outro também será.

Os paradoxos em lógica deôntica são fórmulas que são válidas numa gama de sistemas lógicos deônticos, mas que são contra-intuitivos no senso comum. Obviamente que a questão entre a correspondência entre a intuição e os teoremas é um ponto comum de diversos sistemas lógicos e até mesmo, *lato sensu,* dos sistemas formais como um todo. O que é interessante é que no estudo das lógicas deônticas essas questões tem sido discutidas de forma contínua, em oposição à outras lógicas, como as modais temporais e epistêmicas. Alguns desses paradoxos aparecem na literatura de forma constante sem que haja um consenso tanto sobre a sua existência real ou suas soluções.

O que é revelador é a simplicidade relativa dos paradoxos. A maioria deles pode ser explicada para um leigo rapidamente e, no entanto, eles continuam a assombrar os pesquisadores de forma ininterrupta.

De forma simplificada, podemos expor alguns desses paradoxos. O paradoxo de Ross pode ser descrito como:

Estar obrigado a enviar uma carta implica em estar obrigado a enviar um carta e queimá-la.

O paradoxo da livre escolha:

A permissão de enviar uma carta implica na permissão de enviar uma carta e queimá-la

O paradoxo do Bom Samaritano:

Ser obrigado a ajudar Jones quando ele está sendo roubado implica que Jones está obrigado a ser roubado.

O paradoxo de Chisholm:

"Se houver a obrigação de fazer α, a obrigação de fazer α implica β, não-α implica a obrigação de fazer não-β e fazer não-α é inconsistente."

A importância dos paradoxos difere dependendo de cada pesquisador. Os paradoxos imperativos, denominados como contrários ao dever, como o paradoxo de Chisholm são os que mais preocupam os lógicos que trabalham com lógica deôntica.

As lógicas deônticas têm sido propostas para atuar como suporte às questões de cunho ético e legal o que gera um crítica a capacidade de tal lógica em representar um mecanismo adequado para tais aplicações. Originalmente, os sistemas deônticos tinham este objetivo, no entanto, atualmente, a lógica deôntica extrapolou o campo teórico e atingiu campos como a inteligência artificial, a ciência da computação, em especial na atribuição de sistemas inteligentes onde normas (comportamentos normativos em oposição a não normativos) são aplicado. Mesmo bibliotecários se utilizam de um raciocínio deôntica para a automação de determinados sistemas.[17]

Formalmente podemos apresentar alguns paradoxos, incluindo os já citados, da seguinte forma:

Sistema normativo vazio: Toda tautologia é obrigatória

$O\alpha$, onde α é uma tautologia, ou seja $O(\alpha \vee \neg \alpha)$

O paradoxo de Ross:

$O\alpha \rightarrow O(\alpha \vee \beta)$

Paradoxo da Não permissão da livre escolha:

$(P\alpha \vee P\beta) \leftrightarrow P(\alpha \vee \beta)$

Paradoxo do Penitente:

$Pr\alpha \rightarrow Pr(\alpha \wedge \beta)$

Paradoxo do Bom Samaritano:

$\alpha \rightarrow \beta \vdash O\alpha \rightarrow O\beta$

Paradoxo de Chisholm:

$(O\alpha \wedge O(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\neg\alpha \rightarrow O\neg\beta) \wedge \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \wedge \neg\alpha)$

Paradoxo de Forrester, ou do assassino gentil:

---

[17] A.J.I. Jones e M. Sergot. On the Characterization of Law and Computer System. The Normative Systems Perspective. J.J. Ch. Meyer e R.J. Wieringa. Deontica Logic in Computer Science: Normative System Specification, John Wiley e Sons Ltd. 1993.

$Pr\alpha \wedge (\alpha \rightarrow O\beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \wedge \alpha \vdash (\alpha \wedge \neg \alpha)$

Obrigações conflitantes

$\neg(O\alpha \wedge O\neg\alpha)$

ou

$O\alpha \rightarrow P\alpha$

Paradoxo da Obrigação derivada:

$O\alpha \rightarrow O(\beta \rightarrow \alpha)$

$Pr\beta \rightarrow O(\beta \rightarrow \alpha)$

$\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow O\beta)$

Paradoxo do Destacamento Deôntico:

$(O\alpha \wedge O(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow O\beta$

Paradoxo de Kant, Obrigação implica Possibilidade

$O\alpha \rightarrow \lozenge\alpha$

Paradoxo epistêmico da obrigação:

$OK\alpha \rightarrow O\alpha$

O paradoxo do sistema normativo vazio estabelece que toda tautologia é obrigatória, o que para alguns autores, como Von Wright, revela uma propriedade indesejável da lógica deôntica, pois algo que seja necessário e, portanto, inevitável, não poderia ser obrigatório.

O paradoxo de Ross se mostra desconcertante na linguagem natural, pois "se alguém é obrigado a enviar uma carta, então esse alguém deve ou remeter a carta ou queimá-la" soa particularmente estranho. No entanto, importante destacar que a obrigação de fazer α ou β é posterior a obrigação de fazer α, o que retira do agente a liberdade de escolha entre remeter a carta pelo correio ou em queimá-la (Ziemba, 1981).

O paradoxo da Não-Permissão da Livre Escolha implica que mesmo se α for permitido e β for proibido, α ou β será permitido. O que não parece intuitivo, pois essa disjunção sugere que existe a liberdade de escolha de se fazer α ou β. No mesmo esteio de raciocínio, surpreende o Paradoxo do Penitente. Trata-se de uma instância da fórmula que pode ser interpretada como " ocorre a proibição de se cometer um crime e, adicionalmente, a proibição de cometer um crime e se arrepender". O Paradoxo do Bom Samaritano revela que toda consequência lógica de algo que, se for obrigatório, torna-se obrigatório por si mesmo. Esta asserção é discutível, pois uma instância como "se João ajuda José, que foi ferido, implica que José foi ferido" soa difícil de ser aceita no mundo real.

O paradoxo do Bom Samaritano também pode ser escrito como $Pr\alpha \rightarrow Pr(\alpha \wedge q)$, o que pela definição de Pr, equivale a $O\neg\alpha \rightarrow O\neg(\alpha \wedge \beta)$. Mas pelas lei de De Morgan, obtemos

$O\neg\alpha \rightarrow O(\neg\alpha \vee \neg\beta)$. No entanto, nessa formulação do paradoxo não se sustenta. Este teorema afirma que somente no caso de se não se fazer α, então, obrigatoriamente, deve-se evitar fazer α ou β. (Forrester 1996)

O Paradoxo de Chisholm é uma versão formal de "se você for obrigado a ir à missa, torna-se obrigatório dizer ao padre que você virá; mas se você não vier, você está obrigado a não contar isso ao padre, mas, na realidade, você não irá à missa". Essa fórmula é inconsistente nos sistemas básicos de lógica deôntica.

No caso do Paradoxo de Forrester, ou do Assassino Gentil, temos que "é proibido matar, todavia, se alguém cometer um assassinato, essa pessoa dever fazê-lo de forma gentil!. Ou seja, um assassinato gentil implica num assassinato, logo, alguém comete tal crime. Esse paradoxo também é inconsistente na lógica deôntica padrão, apesar de parecer uma afirmação sensata.

O paradoxo das Obrigações Conflitantes estipula que não existe um conflito de obrigações, o que contraria o senso comum.

Os paradoxos das Obrigações derivadas são extensões deônticas dos paradoxos da implicação material da lógica clássica.

$\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow O\beta)$ é também denominado Paradoxo do Compromisso. Não é intuitivo, pois estabelece que se α for verdadeiro, então, α implica qualquer obrigação α.

O paradoxo do Destacamento Deôntico estatui que as obrigações são logicamente fechadas para à implicação. Esse paradoxo possui uma relação aparente com o paradoxo do Bom Samaritano.

O Paradoxo de Kant ou da Obrigação que implica Possibilidade determina que somente aquilo que é factível torna-se obrigatório, o que remove a possibilidade de se especificar que alguém é obrigado a fazer o impossível, ou seja, alguém é obrigado a fazer algo se e somente se pode fazê-lo.

Como em todos os paradoxos, fica claro que essa interpretação depende do que representam os símbolos O, P, ◊ e →. No caso da implicação, ela pode ser interpretada como a implicação material, estrita ou qualquer outra. O símbolo P também pode ser interpretado de formas diferentes, seja como uma mera oportunidade de se fazer algo ou apenas a possibilidade de algo vir a ser, o que acarreta na falsidade ou veracidade, dependendo da semântica aplicada.

Encerrando nossa lista, o Paradoxo epistêmico da obrigação pode ser lido como “ se alguém deve saber que você matou alguém, então é obrigatório que você tenha cometido um homicídio”.

O SISTEMA PADRÃO.

A partir do trabalho de von Wright (von Wright, 1951), a lógica deôntica foi aperfeiçoada e se tornou o que é chamado de ‚sistema padrão (standard em inglês)(Føllesdal; Hilpinen, 1971).

No sistema padrão, o operador de obrigação é apresentado como primitivo.

São estabelecidos três axiomas

A1. $O\alpha \rightarrow \neg O \neg \alpha$

A2. $O(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (O\alpha \wedge O\beta)$

A3. $O(\alpha \vee \neg \alpha)$

Pela definição de P, temos que $\neg O \neg$, do axioma A1 se obtém a fórmula $O\alpha \rightarrow P\alpha$, o chamado Princípio de Permissão ou Princípio da Consistência Deôntica, que pode ser lido como tudo que for obrigatório torna-se permitido.

O axioma A2 define a relação entre conjunção e obrigação, ou seja, se as proposições α e β expressarem obrigações, então expressam, singularmente, obrigações, valendo a volta, por ser uma equivalência.

O axioma A3 determina a obrigatoriedade do Princípio de Terceiro Excluído.

As regras são as de substituição de variáveis proposicionais e modus ponens.

Se Pr representar a expressão "É proibido que...", então a frase $Pr\alpha$ (é proibido que α) pode ser introduzida, por definição, como $\neg P\alpha$ ou a $O\neg P\alpha$.

A partir desse axiomas e com a aplicação das regras, os seguintes teoremas demonstráveis:

$\neg(O\alpha \wedge O\neg\alpha)$ que pode ser lido como "não é o caso que tanto α quanto $\neg\alpha$ sejam obrigatórios", ou seja, no sistema padrão não é demonstrável a fórmula $((O\alpha \rightarrow O\beta) \wedge O\alpha) \rightarrow O\beta$ que pode ser entendido como "se a obrigatoriedade de uma fórmula implicar ad obrigatoriedade da outra e se a primeira for obrigatória, então a segunda também será".

A regra de modus ponens deôntico é apresentada da seguinte forma:

$((O\alpha \rightarrow O\beta) \wedge P\alpha) \rightarrow P\beta$

Essa regra pode ser interpretada como se a obrigatoriedade de uma proposição implica na obrigatoriedade de outra, e se, ainda, a primeira for permitida, então a segunda também o será.

Sobre a relação entre a disjunção de obrigações e a conjunção de proibições, obtemos o seguinte teorema

$(\neg O(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (Pr\alpha \wedge Pr\beta))$

Esse teorema mostra que numa disjunção caso haja uma obrigação de cumprir as proibições, seus componentes não podem ser proibidos.

$(O(\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)) \wedge (Pr\beta \wedge Pr\gamma)) \rightarrow Pr\alpha$

Entendemos esse teorema como: “uma implicação obrigatória, onde o consequente é composto de proposições proibidas e implica na proibição do antecedente correspondente”. O que pode ser exemplificado como no caso no qual se alguém fez algo errado, então, esse erro ocorreu.

Na interpretação feita por Tomás de Aquino, aquele que cometeu o erro encontra-se *perplexus secundum quid*. No exemplo de von Wright: se um motorista acessa uma avenida na contramão, estará obrigado a voltar de marcha à ré, o que é proibido pelas leis de trânsito. No entanto, o motorista, anteriormente, poucos metros do local, foi flagrado entrando numa via autorizada somente para pedestres o que também é proibido (von Wright, 1951.

Nossa proposta é a de que um lógica paraconsistente como $DL\text{-}DQ^{=}$ resolve pelo menos o paradoxo de Chisholm e de Forrester.

Note que ambos não são teoremas em $DL\text{-}DQ^{=}$. Podemos apresentar tais paradoxos numa linguagem quantificacional e com igualdade para que haja um alcance maior, no sentido de uma maior especificidade, pelo uso de quantificadores.

O que se revela relevante em $DL\text{-}DQ^{=}$ é o seu caráter paracompleto e paraconsistente.

Este tipo de paradoxo, para a sua configuração ou solução, depende da interpretação dos símbolos de implicação e conjunção em relação aos operadores deôntico. Além disso, o fato de ambos os paradoxos serem implicações, que derivam uma contradição ao serem inseridos no cálculo DL-DQ$^{=}$ permitem a sua análise do ponto de vista da validade de fórmulas onde presente o *ex falso quodlibet.*

Mas esta abordagem pode ser criticada como apenas uma rejeição do princípio ex falso quodlibet e não uma solução do paradoxo, ou seja, como o agente deve proceder diante do paradoxo. Nossa abordagem também se afasta das Lógicas Defensáveis. No entanto pode permanecer a dúvida de como lidar com situações na quais onde o agente é obrigado a fazer α, mas possui outras motivações para entender que alguém está obrigado a fazer β, se α e β forem incompatíveis entre si. Por exemplo, um conjunto de normas permite α e outro proíbe α, mas existe uma regulamentação para priorizar α segundo certas especificações.

Conclusão

Pretendemos até aqui apresentar o nosso sistema DL-DQ$^{=}$ e como uma lógica que seja ao mesmo tempo paraconsistente e deôntico pode tratar de paradoxos jurídico. A questão da efetiva solução dos paradoxos reside na possibilidade de que ou não sejam teoremas na lógica apresentada ou que se forem não trivializam o cálculo. Este foi nosso objetivo sem pretender esgotar o tema ou mesmo indicar que esta é a única solução possível.

A escolha de uma lógica como ferramenta para a solução de problemas jurídicos depende de diversos fatores e não há um consenso em qual seria a melhor opção. Obviamente que pode-se alegar que sequer o uso da lógica formal para tal empreitada é eficaz, mas com avanço das lógicas deônticas e paraconsistentes é inegável sua contribuição para o esclarecimento de questões conceituais importantes.

A lógica apresentada pode ser aplicada em diversos desses problemas conceituais. Uma questão relevante no estudo da filosofia do direito é a relação entre a moral e o direito.

Ainda que um sistema como DL-DQ$^{=}$ não tenha sido formulado para alcançar a relação entre o direito e a moral ele pode ser estendido para esse objetivo, trata-se de um importante problema da filosofia do direito. Na escola doutrinária do direito natural, se preconizava uma identidade entre direito e moral. A partir dos trabalhos de Hobbes, essa identificação foi recusada sendo proposta uma terceira, de modo a postular uma distancia maior ou menor entre o terreno jurídico e o terreno moral.

No debate entre Alexy e Bulygin, foi levantada a questão da possibilidade de uma relação conceitual entre o direito e a moral.

Alexy propõe um sistema definido a partir de uma relação necessária entre a moral de um argumento e sua correção, e *a fortiori,* de justiça. Para Alexy, a norma jurídica e os sistemas jurídicos ao se aproximar e superar os limites de injustiça, também violam o próprio caráter jurídico.

O autor também argumenta que quando não há uma pretensão de correção no sistema jurídico, ocorre uma contradição performativa. Se uma norma é promulgada sem satisfazer os requisitos da correção ou sem buscar atingir a sua correção, ela mesma seria contraditória, deve-se se considerar uma condição necessária do ato dele se afirmar e ser tal fato crível no que se afirma dele. Portanto, nessa linha de raciocínio, os sistemas jurídicos devem ter a pretensão de correção interna e que seja satisfeita, o que no mundo real, nem sempre acontece.

Alexy não se compromete com uma moral concreta ou com algum conteúdo específico. Basta então afirmar, que as sociedades possuem uma moral procedimental, na qual os argumentos de uns são contrapostos aos argumentos dos outros, que defendem argumentos morais, considerando-se as regras do discurso pratico geral e da argumentação jurídica.

O autor classifica os sistemas em jurídicos e não jurídicos. A satisfação da pretensão de correção possui uma conexão qualificadora com os sistemas jurídicos. Os sistemas jurídicos que a satisfazem são sistemas jurídicos, ȷ́á os que não a satisfazem, embora sendo sistemas jurídicos, são sistemas defeituosos. No entanto, nos parece que essa dicotomia não espelha as questões limítrofes, onde o pode ser difícil estabelecer quais sistemas satisfazem as condições pretendidas.

A distinção entre união classificatória e união qualificadora proposta por Alexy é contestada por Bulygin, que diz ser essa uma distinção defeituosa e falha. Entendemos que o problema não está na classificação, mas sim na dificuldade e se tratar das situações que não são tão claras.

O próprio Alexy, mostra que a questão não é tão simples e formula um exemplo de contradição performativa, citando um artigo de uma constituição de um estado qualquer que prescreva: “X é uma republica soberana, federal e injusta”. A partir deste exemplo nota-se uma distinção entre a correção e a execução da norma

Bulygin preconiza que não existem contradições entre ações, ocorrendo apenas uma incompatibilidade pragmática entre ela. A contradição existirias no caso entre proposições descritivas de prescrições, o que não corresponde tampouco com a realidade. Nesse caso o que se passa não é um problema na lógica e sim na abordagem política. Pactuamos da posição de Bulygin sobre a dificuldade da unicidade da moral. Parece irrefutável a existência de morais distintas entre grupos de pessoas, o que não restringe a possibilidade de especificar cada moral ao grupo correspondente e ligada ao direito que particularmente atenderá. No entanto, quando formulamos uma lógica como DL-$DQ^{=}$, pretende-se que seja capaz de tratar de problemas do direito atinentes a todos os grupos sem a diferenciação e especificação apontadas por Bulygin

Seria obviamente interessante a utilização de uma lógica deôntica que alcançasse as questões entre moral e o direito.

Um sistema paraconsistente que lida com dilemas morais foi apresentada por Vernengo, da Costa e Puga diferenciando as modalidades jurídicas das morais. A intenção é apresentar uma lógica que insere símbolos específicos e determina suas relações, criando uma diferenciação entre modalidades morais e legais, através operadores primitivos para obrigação moral (Om) e jurídica (Oj), estabelecendo suas relações e representando tanto enunciados morais como jurídicos.

Foram apontados anteriormente por Vernengo a formulação em uma linguagem obscura e povoada de metáforas os argumentos de Habermas acerca da conexão necessária entre a moral e o direito. Habermas pressupõe que as propriedades lógicas de inferências dos sistemas dedutivos também estão presentes em sua “lógica do discurso prático”. Habermas apresenta uma lógica informal o que gera imprecisões e problemas inerentes da linguagem natural, o mesmo ocorre com a teoria da argumentação jurídica de Alexy.

A lógica deôntica pode ser classificada como prescritiva ou descritiva, de acordo com a interpretação que as sentenças normativas recebam. Uma fórmula $O\alpha$, se analisada como prescritiva, poderia ser lida como “a ação ou o fato α deve ser obrigatório". Descritivamente, "α" é uma sentença ou proposição que descreve a ação ou o fato, logo, OA resultaria em "a ação ou o fato α é obrigatório".

Puga, da Costa e Vernengo, ao abordarem os diversos sistemas lógicos seguidos pelo pensamento ético, tomaram a segunda interpretação, sem prejuízo da interpretação prescritiva e não significando com isso que ser uma posição contrária a esta. Os operadores deônticos podem ser interpretados conforme seu significado legal ou moral.

Ao fazer uma análise não-formal do significado das modalidades, os autores expõem que alguns postulados dos sistemas desenvolvidos implicam consequências contra-intuitivas. Foram apresentados dois sistemas possíveis D e D', sendo que cada um desses definem um conceito legal e moral, sem dar preferencia por nenhum deles, cabendo a escolha do sistema ao moralista, jurista ou filósofo em sua atividade.

Nos trabalhos futuros pretendemos estender $DL\text{-}DQ^{=}$ para que possa lidar com questões morais e éticas. No nosso entendimento, a introdução de muitos símbolos primitivos na linguagem que lidem com as interpretações jurídicas pode tornar o cálculo de difícil operação, no sentido da complexidade da leitura dos diversos novos operadores.

Entendemos que isso é um problema que ocorre na formalização do direito através de sistemas lógicos deônticos e outros. Uma possível solução seria a criação de uma lógica matricial que pudesse abarcar uma grande número de variáveis sem que impedisse a sua manipulação, por exemplo, em sistemas computacionais. Num segundo passo o grande número de variáveis poderia ser reduzido através de uma lógica utilizando tensores, abrindo um novo leque de manipulação.

Fazemos essas considerações diante da complexidade que o direito apresenta na tentativa de espelhar a prática jurídica numa lógica jurídica. Se tomarmos, por exemplo, um processo judicial, a quantidade variáveis que podem ser introduzidas é enorme. Desde a petição inicial até uma decisão transitada em julgado, diversos elementos influenciam o resultado. Nesse sentido, parece que o objetivo é apenar de obter uma lógica que possibilite uma previsão de resultados, num certo sentido, probabilística. No entanto, esse não é o único enfoque. A análise de um processo judicial através de um sistema dedutivo pode trazer diversas informações sobre seus problemas intrínsecos.

Obviamente, que neste momento, preconizamos a abordagem de questões jurídicas através de uma lógica paracompleta, devido a sua eficácia em lidar com contradições que permeiam a atividade jurídica. No futuro novas abordagens podem ser utilizadas esperemos que nossa contribuição seja relevante.

REFERÊNCIAS

ALCHOURÓN, C. (1969) “Logic of norms and logic of normative propositions”, *Logiqueet Analyse*, 12, n.47.

_________. (1982) “Normative order and derogation”, in A.A. Martino (ed.) *Deontic Logic, Computational Linguistics and Legal Information Systems*, v. II, North-Holland Publishing Co., pp. 51-64.

_________. (1988a) “Conflictos de normas y revision de sistemas normativos”, in (*Alchourrón and Bulygin, 1991*), pp. 291-301.

_________. (1988b) “Condicionalidad y la representacion de las normas juridicas” in (*Alchourrón and Bulygin, 1991*), pp. 267-280.

_________. (1993) “Philosophical foundations of deontic logic and the logic of defeasible conditionals”, in J-J. Ch. Meyer and J.R. Wieringa (eds), *Deontic Logic in Computer Science: Normative System Specification*, John Wiley & Sons, pp. 43-84. 26

_________. (1995) Defeasible logics: demarcation and affinities, *in Crocco, Fariñas del Cerro e A. Herzig (eds.)*, *Conditionals: from Philosophy to Computer Science* Clarendon Press, pp. 67-102.

ALCHOURÓN, C. and BULYGIN, E. “Normative Systems”. Springer-Verlag. Referencia da versão espanhola publicada como *Introducción a la Metodologia de las Ciencias Juridicas y Sociales*, Astrea, 1975.

_________. “Lagunas del Derecho y Análisis de los Casos”, Buenos Aires, Tall. Graf. Buschi, l971.

AQVIST, L. “Deontic logic in Gabbay”, D. e Guenthner, F (eds.), Handbook of philosophical logic. vol.VIII. Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, 1984.

BULYGIN, E. (1986) “Legal Dogmatics and the Systematization of Law”, *Rechtstheorie*, 10, pp. 193-210.

_________. (1991) “Normas, Proposiciones Normativas y Enunciados Juridicos”, in (*Alchourrón and Bulygin, 1991*)*,* pp. 169-193.

CARNIELLI, Walter, Newton C. A. da Costa). “Paraconsistent deontic logics.” *Philosophia – The Philos. Quarterly of Israel* vol.16 numbers 3 and 4 (1988), pp. 293–305.

CARNIELLI, Walter e MARCOS J.. “A taxonomy of C- systems”. in *Paraconsistency- the Logical Way to the Inconsistent, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 228, pp. 01–94 2002.

CARNIELLI, Walter (Org.) ; CONIGLIO, M. E. (Org.) ; D'OTTAVIANO, I. M. L. (Org.) . “Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent”. 1. ed. Nova Iorque: Marcel Dekker, 2002. v. 1

CHELLAS, Brian F. “Modal logic: an introduction”, Cambridge University Press, 1993, Ed.: Santafe de Bogota: Tercer Mundo, 1996.

CHISHOLM, Roderick M. “Contrary-to-Duty Imperatives and Deontic Logic”, *Analysis* 24, pp. 33-36.

CONIGLIO, M. E. ; TESTA, Rafael . “Dilemas deônticos e escolha: considerações Pragmáticas. Revista Brasileira de Filosofia”, v. 232, p. 231-246, 2009.

CONIGLIO, M. E. . “Logics of deontic inconsistency”. Revista Brasileira de Filosofia, v. 233, p. 162-186, 2009.

CONIGLIO, M. E. ; PERON, N. M. . “A Paraconsistentist approach to Chisholm's Paradox. Principia “(Florianópolis. Online), v. 13, p. 299-326, 2009 .

CRUZ, A. M. P. “Lógica deôntica paraconsistente. Paradoxos e dilemas.” Natal: Editora da UFRN, 2005.

D'OTTAVIANO, I. M. L. ; CASTRO, M. A. .” Natural deduction for paraconsistent logic.” *Logica Trianguli,* v. 4, p. 3-24, 2000.

D'OTTAVIANO, I. M. L. ; GOMES, E.L. . “Aristotle's theory of syllogism and paraconsistency.*” Principia* (Florianópolis. Online), v. 14,n.1, p. 1-20, 2011.

DA COSTA, NEWTON C. A. “Ensaios sobre os fundamentos da Lógica Ed. Hucitec”, I980. (esgotado);

_________.”Sistemas formais inconsistentes”. Ed. da UFPR. Curitiba, 1993.

_________.”O Conhecimento Científico” Ed. Discurso Editorial, 2ª Edição 1.999.

DA COSTA, Newton C. A & Puga, L. Z. “On deontic predicate logic”. *The Journal of Symbolic Logic*, Campinas, v. 51, n. 4, p. 1101-1102, 1986

_________. “Logica deôntica e direito”. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*. Segunda Serie Curitiba, v.8 , n.2 , 1987(a), p.141-54.

_________. “Sobre a lógica deôntica não-classica”. *Revista Hispanoamericana de Filosofia Mexico*, v.19, n.55, p.19-36, abr. 1987(b).

_________.”Logic with deontic and legal modalities” *Bulletin of the Section of Logic*, Polônia, v. 16, n. 2, p. 71-75, 1987(c).

_________.”Sobre a lógica deôntica não-clássica”. *Revista Hispano Americana de Filosofia*, México, v. XIX, n. 55, p. 19-37, 1987(d).

_________.”Lógica deôntica e direito”. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, Paraná*, v. 8, n. 8, p. 141-154, 1987(e).

_________.”Logic of Vasilev”.. Meth Analysis Of Foundations Os Mathematics, USA, p. 135-147, 1988.

DA COSTA, N. C. A.; Puga. L. Z; Vernengo R.J. “Lógica, moral e direito”. *Conferências João Pessoa*: Espaço Cultural, 1990.

FOLLESDAL, D.; HILPINEN, R., “Deontic Logic: An Introduction”, in *R. Hilpinen* (ed.), 1971: 1-38.

GOMES, N. “Lógica deôntica in dicionário de filosofia moral e política*”. Instituto de filosofia da linguagem*. Universidade Nova de Lisboa, 2002: 1- 19.

HANSSON, B. (1969) “An analysis of some deontic logics”, *Nous*, 3, pp. 373-398.

HILPINEN, R. (1987) “Conflicts and change in Normative Systems”, in *Ake Frändberg and Mark Van Hoecke* (eds.), *The Structure of Law*, Iustus Förlag.Lewis, D. (1973) *Counterfactuals*, Blackwell.27.

MARCOS, J. . “Possible-translations semantics for some weak classically-based paraconsistent logics.” *Journal of Applied Non-Classical Logics*, v. 18, p. 7-28, 2008.

_________. “What is a non-truth-functional logic?” Studia Logica, v. 92, p. 215-240, 2009.

KALINOWSKI, G. “Logica del discurso normative”. Madrid: Tecnos, 1975

_________. “Introdución a la lógica jurídica”, Buenos Aires, Editorial Universitaria de Buenos Aires, l973.

KELSEN, Hans. “Normas jurídicas e análise lógica”. Rio de Janeiro, Forense, 1984. 106p.

KLEENE, Stephen Cole. “Introduction to metamathematics”. D. Van Nostrand Company, Princeton, 1962.

KLUG, Ulrich. Logica juridica, trad., por Juan Garcia Bacca, Caracas, Univ. Central, l961.

MAXIMILIANO, Carlos - Hermenêutica e aplicação do direito. Ed.Freitas Bastos, l965.

Mendelson, Elliot. Introduction to Mathematical Logic

PERELMAN e OLBRECHTS-TYTECA. Traité de l'Argumentation, La Nouvelle Rhetórique. Paris, l958.

LOPARIC, A. M. A. C. ; DA COSTA, Newton Carneiro Affonso. “Paraconsistency, paracompleteness, and induction.” LOGIQUE ET ANALYSE, v. 113, p. 73-80, 1986.

LOPARIC, A. M. A. C. ; PUGA, L. . “Two systems of deontic logic”. *Bulletin Of the Section of Logic*, Polish Ac. Of Sciences, v. 15, n.4, p. 137-144, 1986.

MAKINSON, David, 1994. “General patterns in nonmonotonic reasoning”. In Dov Gabbay et al eds *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming, vol. 3*, Oxford University Press, pp. 35-110.

_________.1997. Screened revision, *Theoria* 63: 14-23.

_________.1999. “On a fundamental problem of deontic logic”, In Paul McNamara and Henry Prakken eds *Norms, Logics and Information Systems. New Studies in Deontic Logic and Computer Science*, Amsterdam: IOS Press, Series: Frontiers in Artificial Intelligence and Applications, Volume 49, pp. 29-53.

MAKINSON, David and TORRE, Leendert van der, 2000. “Input/output logics”, *J. Philosophical Logic* 29: 383-408.

PERON, N. M.; CONIGLIO, M. E. . “Logics of deontic Inconsistencies and Paradoxes.” *CLE e-Prints* (Online), v. 8, p. 6, 2008.

QUEIROZ, G. S.; ALVES, E.H. “The construction of the calculi Cn of Da Costa.” *The Journal of Non-Classic Logic*, vol.8, n.2, 1991: 68-78.

REALE, Miguel - Filosofia do direito. São Paulo, Saraiva, l972. Direito como experiência, l970.

ROSS, A. ”Lógica de las normas”. Madrid: Tecnos, 1971.

GURFINKEL, S.M.G.. “Estudos em lógica paraconsistente DL e aplicações em Direito”. 2009. Dissertação de mestrado defendida na Universidade de São Paulo.

SHOENFIELD, J. R.. “Mathematical Logic”. Addison-Wesley, Massachusetts, 1973 (segunda impressão).

TARSKI, A. “On some fundamental concepts of metamathematics” (1930) in Logic, semantics, metamathematics. Oxford: Clarendon Press, 1983.

_________.”Sobre alguns conceitos fundamentais da matemática”. Traduzido e comentado por Patrícia Del Nero Velasco e Edélcio Gonçalves de Souza. *Principia,* 8, 2001: 187-209.

TESTA, R.R.. “Dilemas deônticos: uma abordagem baseada em relações de preferência”. Tese de Mestrado. UNICAMP, 2008.

VERNENGO, Roberto J. “Curso de teoria general del derecho”. Ed. Depalma, l985.

VON WRIGHT, G.H.V. “Norma y accion: una investigación lógica.” Madri, Editorial Tecnos, 1970. 216p.

_________.”Deontic Logic”, Mind, 60, 1951: 1-5.

_________. (1982) “Norms, truth and logic”, in A.A. Martino (ed.) *Deontic Logic Computational Linguistics and Legal Information Systems*, v. II, North-Holland Publishing Co. pp. 3-20.