UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Nathália Pio Aprile

Supercondutores holográficos

São Carlos

2021

Nathália Pio Aprile

Supercondutores holográficos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Física Teórica e Experimental

Orientador: Profa. Dra. Betti Hartmann

Versão original

São Carlos

2021

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Aprile, Nathália Pio
Supercondutores holográficos / Nathália Pio Aprile;
orientador Betti Hartmann -- São Carlos, 2021.
183 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Física
Teórica e Experimental) -- Instituto de Física de São
Carlos, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Supercondutores holográficos. 2. AdS/CFT. 3.
AdS/CMT. I. Hartmann, Betti, orient. II. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Nathália Pio Aprile

Tese apresentada ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutora em Ciências. Área de Concentração: Física Teórica e Experimental.

Aprovado(a) em: 14/09/2021

Comissão Julgadora

Dr(a). Betti Hartmann

Instituição: (University College London/Inglaterra)

Dr(a). Olexandr Zhydenko

Instituição: (UFABC/Santo André)

Dr(a). Mauricio Richartz

Instituição: (UFABC/Santo André)

Dr(a). Ulysses Camara da Silva

Instituição: (UFES/Vitória)

Dr(a). Roldão da Rocha Junior

Instituição: (UFABC/Santo André)

À minha família, com amor.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Deus por me permitir nascer e a Jesus e a Ave Maria por embalarem minhas preces e noites mal dormidas, eu aprendi a enxergá-los com olhos de não-ver, obrigada.

Queria agradecer ao amigos de outro plano Manoel, Claudius, pai Joaquim, Mãe Maria, pai Benedito, irmã Doulores, Esmeralda, Lucius, seu Franscisco, meus avós e tios queridos. Alguns anos dentro destes anos de tese se tornaram uma eternidade e vocês vieram ao meu encontro sempre que precisei e a coisa mais linda é que sempre virão. Obrigada por me fazerem enxergar o que meu raciocínio ainda não compreende, obrigada pelo amor infinito que me chega todo dia, obrigada por não desistirem de mim nem quando desisto e brigo com vocês, eu sou melhor por tê-los (de alguma forma) em minha vida!

Queria agradecer meu pai e miha mãe. Quanta a sorte eu tenho de tê-los? Eu nem sei o tamanho disso! Eu sou uma garota de sorte por esta família, eu sei disso. Obrigada mãe por superar o Platão nos seus dias(kkk), você é a inspiração de tanta coisa linda, de tanta coisa forte que nem sei dizer. E Pai, obrigada! Minha juventude não deixa ver, mas seus conselhos são e sempre serão mais que preciosos. Eu vou guardar tudo sempre dentro de mim, obrigada. Aos meus irmãos, Helô e Rafha, obrigada gente. Obrigada por me amarem muito todos vocês. Eu amo vocês! <3

Queria agradecer ao Renato, meu noivo, obrigada por nós! Obrigada por sempre me incentivar na carreira, sempre me ajudar: quando o programa "da pau", "o pc quebra" e "eu não sei se meu inglês tá certo, kk". Obrigada por me fazer sorrir em longas horas de telefone dia-a-dia, porque o Covid, a França e o Brasil ainda 'brincam' conosco. Ainda estamos aqui, hehe! 0/

Obrigada a Betti Hartmann! Do fundo de meu ser eu agradeço sua presença na minha vida! Embora eu esteja muito longe da aluna que gostaria de ser, só de você ter acreditado em mim, me ajudado, me dado tantas oportunidades, ter sido tão humana e generosa, minha vida se fez um lugar mais colorido, e eu fico muito mais feliz! Obrigada de verdade pela oportunidade de eu poder me exercer aqui na física, eu realmente aprendi muito não só em física, mas também sobre a profissional que desejo ser. E estendo este

agradecimento a professora Jutta Kunz por ser tão generosa quanto se pode ser nos sonhos de uma menina pequena. Muito obrigada, pelas oportunidades, eu espero ser digna desses encontros todos.

Agradeço aos colegas de grupo: Guiga, Felipe, Etevaldo, Carol, Gustavo, quando podíamos passear, fazer churrasco, ir ao bares era muito divertido e bom estar com vcs. E em especial ao Rogério por toda parceria nesses anos!

Agradeço as minhas amigas Pri, Tati, Iara e Ana Letícia por tantas fofocas e discussões, é sempre bom ter notícias de vocês, manos!

Enfim, são muitas pessoas nesses anos todos, nome que me saltam ao olhos Simone, Caface, Arnol, Iza, Mariane, Fabi, pessoas lindas que cruzaram meu caminho e ajudaram cada um do seu jeitinho a torna especial essa jornada, obrigada.

Agradeço ao pessoal do serviço de Pós-graduação em especial ao Sílvia por sempre me ajudar em tudo que precisei da maneira mais solícita possível. Também agradeço a Neusa por corrigir minha tese com tamanho carinho e presteza.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

"Há mais coisas, Horácio, entre o céu e a terra, do que sonha nossa vã filosofia."

William Shakespeare

RESUMO

APRILE, N. P. **Supercondutores holográficos**. 2021. 183p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

Este trabalho teve como objetivo o estudo e a construção de diagramas de transição de fase para modelos do tipo condutor/supercondutor em diferentes situações físicas. No primeiro caso foi estudado a formação de supercondutores com a inclusão da *backreaction* e dos termos de *Gauss Bonnet* (GB) com constante de acoplamento negativa. Percebemos que a medida que a constante de acoplamento se torna mais negativa a temperatura crítica do condensado aumenta, enquanto a amplitude de condensação diminui. Inserindo-se a *backreaction* no sistema, notamos que a temperatura crítica tende a diminuir embora ainda permaneça positiva e a medida que a *backreaction* mesma se torna mais acentuada o condensado passa a variar mais amplamente com o acoplamento GB. No segundo modelo estudamos a escalarização espontânea de um buraco negro esfericamente simétrico, estático e assintoticamente Anti-de Sitter (aAdS) em um modelo de gravidade escalar-tensorial e descobrimos que quando incluída a *backreaction* do espaço-tempo em consideração, a escalarização do buraco negro se torna dupla a descrição de uma transição de fase em um sistema quântico fortemente acoplado, ou seja, corresponde a uma transição de fase holográfica. Já no terceiro e último caso estudamos o modelo de duas bandas supercondutoras para um supercondutor não-homogêneo e analisamos a competição entre os acoplamentos de ambas situações físicas. Para criar um modelo de duas bandas foi inserido dois campos escalares distintos no sistema e uma constante de acoplamento entre ambos, enquanto para a criação de um modelo não-homogêneo além do campo gauge existente inserimos um outro campo gauge e também uma constante de acoplamento entre ambos. Com a inserção de dois parâmetros de ordem fica evidente a distinção entre supercondutores balanceados e não-balanceados através da modificação da temperatura crítica no sistema para estes últimos. Além de que ambas configurações apresentam a competição entre as fases surgidas em $T < T_c$, bem como, a formação de uma nova fase para $T > T_c$. A inclusão da constante de acoplamento para os campos de gauge no sistema, para valores suficientemente positivo, passa a ser dominante em $T > T_c$, embora não seja capaz de suprimir a diferença de temperatura crítica dos supercondutores não-balanceados.

Palavras-chave: Supercondutores holográficos. AdS/CFT. AdS/CMT.

ABSTRACT

APRILE, N. P. **Holographic superconductors**. 2021. 183p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

This work aimed to study and build phase transition diagrams for conductor/superconductor type models in different physical situations. In the first case the formation of superconductors was studied with the inclusion of the backreaction and the Gauss Bonnet terms (GB) with negative coupling constant. We realize that as the coupling constant becomes more negative the critical temperature of condensate increases, while the amplitude of condensation decreases. Inserting to backreaction in the system, we notice that the critical temperature tends to decrease although still stay positive. As it becomes more accentuated, the condensate becomes vary more widely with GB coupling. In the second model we study the spontaneous scalarization of a black hole spherically symmetric, static and asymptotically Anti-de Sitter (aAdS) in a gravity model scalar-tensor and we found that when we included the space-time backreaction in consideration, the black hole scalarization becomes dual to description of a phase transition in a strongly coupled quantum system, i.e., it corresponds a phase holographic transition. In the third and last case, we studied the model of two superconducting bands for a non-homogenous superconductor and we analyzed the competition between the couplings of both physical situations. To create a two-band model, two fields were inserted two distinct scalars fields in the system and a coupling constant between them, while to create a non-homogeneous model, beyond the existing gauge field, we insert another gauge field and also a coupling constant between them. With the insertion of two order parameters the distinction between superconductors balanced and unbalanced becomes evident thought the modification of the critical temperature in the system. In addition to the fact that both configurations present the competition between the phases arising in $T < T_c$, as well as the formation of a new phase for $T > T_c$. The inclusion of the coupling constant for the gauge fields in the system for sufficiently positive values becomes dominant in $T > T_c$, although it is not able to suppress the critical temperature difference of superconductors unbalanced.

Keywords: Holographic superconductors. AdS/CFT. AdS/CMT.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação do AdS_2 embebido em $\mathbb{R}^{1,2}$ dimensões com coordenadas X^0 , X^1 e X^2 . Curvas contínuas são linhas de ρ constante, enquanto curvas tracejadas são linhas para τ constante.	36
Figura 2 – Representação ilustrativa da fronteira conforme do espaço de Anti-de Sitter em duas dimensões.	37
Figura 3 – Representação ilustrativa do AdS em coordenadas de Poincaré.	40
Figura 4 – Pintura em mosaico do artista holandês M.C. Escher no início do século XX. A figura representa um espaço hiperbólico embebido num espaço euclidiano bidimensional sendo um exemplo de transformação conforme.	40
Figura 5 – Diagrama de Penrose parcial e periódico para espaço o Anti-de Sitter com cobertura universal e métrica conforme. As geodésicas tipo-luz são representadas por linhas que alcançam a fronteira e são ricocheteadas num tempo finito, enquanto as geodésicas do tipo-tempo são representadas por linhas tracejadas que divergem e voltam a convergir em tempo finito sem nunca alcançarem a fronteira deste espaço.	43
Figura 6 – Diagrama ilustrativo da representação do espaço de AdS_3 mostrando a relação entre o interior e a fronteira. A seta verde representa trajetórias tipo-tempo, que nunca alcançam a fronteira, enquanto a seta amarela representa trajetórias do tipo-luz, capazes de alcançar a fronteira sem atravessá-la e voltar ao interior do espaço em um tempo finito.	44
Figura 7 – Representação do buraco negro planar de Schwarzschild-AdS em $(d+1)$ -dimensões.	46
Figura 8 – Diagrama do fluxo do grupo de renormalização para uma TQC em duas dimensões, cujos pontos fixos ($\beta(g^i) = 0$) levam a acoplamentos marginais invariantes por escala.	49
Figura 9 – Abaixo da temperatura crítica o mínimo do parâmetro de ordem se torna máximo e aparecem dois outros mínimos simétricos.	62

Figura 10 – Representação esquemática das transições de fase pelos cruzamentos dos níveis de energia E dos estados fundamental e excitado no entorno de $g = g_c$. Em $a)$ há uma transição de primeira ordem e em $b)$ uma transição de segunda ordem.	64
Figura 11 – Representação esquemática de um diagrama de fases no plano $g - T$ próximo ao ponto crítico. Em $a)$ o sistema possui ordem apenas em $T = 0K$, já em $b)$ o sistema possui ordem de longo alcance a temperatura finita.	66
Figura 12 – Evolução do aumento da temperatura crítica T_c para materiais supercondutores ao longo dos anos desde a descoberta de Ohms no resfriamento de mercúrio à $4.2K$	67
Figura 13 – Diagrama típico para transição de fase de supercondutores a altas temperaturas.	71
Figura 14 – Transição de fase para supercondutores não-homogêneos mostrando o limite Chandrasekhar-Clogston e a formação da fase LOFF.	73
Figura 15 – Condensado do campo escalar no bulk do AdS_4 . A curva a direita mostra escolhas para $\Delta_- = 1$, onde $B_\psi = \langle \mathcal{O}_1 \rangle$, enquanto a curva a esquerda mostra escolhas para $\Delta_+ = 2$, onde $A_\psi = \langle \mathcal{O}_2 \rangle$ representa a combinação mais adequada para construção de uma transição de fase de segunda ordem típica de materiais supercondutores. As curvas apresentadas estão devidamente normalizadas para que as quantidades envolvidas sejam adimensionais de acordo com a construção típica destes modelos.	80
Figura 16 – Condensação para $\gamma = 0$ e diferentes valores de $\alpha < 0$. A medida que α se torna mais negativo a temperatura crítica aumenta, enquanto a amplitude de condensação diminui.	89
Figura 17 – Em $a)$ A condensação para $\gamma = 0$ e diferentes valores de α com $\alpha = 0$. A linha vermelha é para $\alpha = 0.001$, a linha marrom para $\alpha = 0.1$, a linha azul para $\alpha = 0.2$, enquanto a linha verde é para $\alpha = 0.25$. Em $b)$ a condensação para $\alpha = 0$ e diferentes valores para γ , incluindo $\gamma = 0$ com $T_c = 2.48$. Foi visto que a T_c diminui com o aumento de γ , e embora o comportamento do condensado para grandes e pequenos valores de γ seja similar, o condensado se torna bastante largo a medida que γ cresce.	89

- Figura 18 – Em ambas figuras, as linhas sólidas representam $\gamma = 0$ enquanto as linhas tracejadas representam $\gamma = 0.1$. É nítido que nestes dados sem normalização, a inserção da *backreaction* abaixa a T_c do condensado. Em a) as curvas apresentam $\alpha < 0$, onde linha vermelha é para $\alpha = -0.001$, a linha marrom para $\alpha = -0.1$, a linha azul para $\alpha = -0.2$ e a linha verde é para $\alpha = -0.22$. Em b) as curvas apresentam $\alpha > 0$, onde linha preta é para $\alpha = 0.0$, a linha verde para $\alpha = 0.125$ e a linha magenta para $\alpha = 0.25$ 90
- Figura 19 – Curvas normalizadas da condensação com *backreaction* γ e acoplamento negativo para os termos de *Gauss Bonnet* α . Em a) $\gamma = 0.1$, em b) $\gamma = 0.2$. É possível notar em ambas curvas que com a adição de γ ao sistema a amplitude do condensado aumenta significativamente ao compararmos com a Fig.16, cujo γ é nulo. 91
- Figura 20 – A figura demonstra valores de Q^2 em dependência de $-\gamma/3 = 1/l^2$ para os quais soluções não-triviais da equação 6.20 existem para vários valores fixos de λ_+ , isto é, a dimensão do operador dual na fronteira conforme com $\alpha = 0$ 100
- Figura 21 – Valores de $-\Lambda$, l e γ em dependência de λ_+ para os quais valores não-triviais da equação 6.20 existem no *background* das soluções de Schwarzschild-Anti-de Sitter (SAdS), ou seja, para $Q = 0$ e $\alpha = 0$ 101
- Figura 22 – Valores do valor esperado do operador dual com dimensão λ_+ , $(\phi_+)^{1/\lambda_+}$, sobre a fronteira em função da temperatura de Hawking T_H 101
- Figura 23 – A esquerda, nós mostramos as derivadas da função métrica $\sigma(r)$ no horizon, $\partial_r \sigma(r_h)$, em dependência do valor do campo escalar no horizonte de eventos, ϕ_r , para buracos negros espontaneamente escalarizados incluindo *backreaction*, $\gamma = 0.3$ e diferente valores de λ_+ . Também mostramos o valor do condensado ϕ_+ na dependência de ϕ_h para essas soluções à direita (com a mesma codificação de cores da esquerda). . . 103

Figura 24 – A figura da esquerda representa o condensado admensional $\phi_+^{1/\lambda_+}/T_c$ em dependência da temperatura T dividido pela temperatura T_c , enquanto a figura da direita representa o condensado admensional $\phi_+^{1/\lambda_+}/\mu_c$ em dependência do potencial químico μ dividido pelo potencial químico μ_c ; para buracos negros escalarizados com <i>backreaction</i> $\gamma = 0.3$ e vários valores de λ_+	104
Figura 25 – Exemplo da coexistência dos condensados para a presença dos campos escalares ϕ (vermelho) e ξ (azul) para $T < T_c$. Note que a curva em ξ (azul) é interrompida para valores de temperatura que estão abaixo de seus valores de condensação devido a técnica que utilizamos para a varredura do sistema, veja secção (7.5.1).	113
Figura 26 – Balanceado com $\epsilon = 0.0$	114
Figura 27 – Não-balanceado com $\epsilon = 0.0$	114
Figura 28 – Balanceado com $\lambda = 0.0$	115
Figura 29 – Balanceado com $\epsilon = 0.0$	115
Figura 30 – Balanceado com $\epsilon = -0.5$	115
Figura 31 – Balanceado com $\epsilon = 0.5$	115
Figura 32 – Balanceado com $\epsilon = -0.9$	115
Figura 33 – Balanceado com $\epsilon = 0.9$	115
Figura 34 – Não-balanceado com $\lambda = 0.0$	117
Figura 35 – Não-balanceado com $\epsilon = 0.0$	117
Figura 36 – Não-balanceado com $\epsilon = -0.5$	117
Figura 37 – Não-balanceado com $\epsilon = 0.5$	117
Figura 38 – Não-balanceado com $\epsilon = -0.9$	117
Figura 39 – Não-balanceado com $\epsilon = 0.9$	117
Figura 40 – Balanceado com $\epsilon = 0.9$ e $\lambda = 0.0$	119
Figura 41 – Balanceado com $\epsilon = 0.0$ e $\lambda = 0.0$	119
Figura 42 – Balanceados com $\epsilon = -0.9$ e $\lambda = 0.0$	119
Figura 43 – Não-balanceado com $\epsilon = 0.9$ e $\lambda = 0.0$	121
Figura 44 – Não-balanceado com $\epsilon = 0.0$ e $\lambda = 0.0$	121
Figura 45 – Não-balanceado com $\epsilon = -0.9$ e $\lambda = 0.0$	121

Figura 46 – Supercondutores não-balanceado com $\epsilon = -0.9$ e $\epsilon = 0.9$, respectivamente, no plano $(T/T_c, \mu_2)$. As curvas demonstram que não há sinal da formação de uma fase LOFF.	122
--	-----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
2	CORRESPONDÊNCIA ADS/CFT	33
2.1	O espaço-tempo de Anti-de Sitter (AdS)	33
2.1.1	Sistemas de coordenadas e a fronteira conforme	35
2.1.2	Geodésicas radiais e uma fancy box	41
2.1.3	Fronteira do AdS e espaços AAdS	44
2.1.4	Buraco Negro de Schwarzschild (aAdS)	45
2.2	Teoria de campo conforme (conforme field theory-CFT)	48
2.2.1	Álgebra conforme	51
2.3	A conjectura AdS/CFT	52
2.3.1	Função de Partição	53
3	SUPERCONDUTORES	59
3.1	Transição de fase - Teoria de Landau	60
3.1.1	Transição de Fase Clássica	61
3.1.2	Transição de Fase Quântica	63
3.2	Supercondutores	66
3.2.1	Supercondutores não-homogêneos	71
4	ROTAS PARA UM SUPERCONDUTOR HOLOGRÁFICO	75
4.1	Supercondutores Holográficos	75
5	SUPERCONDUTORES HOLOGRÁFICOS EM $3 + 1$ DIMENSÕES	83
5.1	Os termos de Gauss-Bonnet e a Backreaction do espaço-tempo	83
5.1.1	Termos de Gauss Bonnet	83
5.1.2	Backreaction	84
5.2	O Modelo	84
5.3	Resultados numéricos	88
5.3.1	Comentário sobre o código	88
5.3.2	Resultados	88

6	ESCALARIZAÇÃO DE BURACOS NEGROS E TRANSIÇÕES DE FASE HOLOGRÁFICAS	93
6.1	Espôntanea escalarização	93
6.2	O Modelo	94
6.3	No <i>probe limit</i>	97
6.3.1	O limite de Breitenlohner-Freedman e as restrições de parâmetros	98
6.3.2	Sobre a Numérica	99
6.3.3	Fixando a dimensão do operador dual	99
6.4	Incluindo a <i>backreaction</i>	102
6.4.1	Transição de fase holográfica	103
7	SUPERCONDUTORES HOLOGRÁFICOS NÃO-BALANCEADOS	107
7.1	O modelo	107
7.1.1	Condições da Fronteira	109
7.1.2	Soluções sem os campos escalares	110
7.1.3	Resultados: campos de gauge dinâmicos	111
7.2	Coexistência de duas ordens supercondutoras	112
7.3	Influência de ϵ sobre λ	114
7.3.1	Supercondutores balanceados	115
7.3.2	Supercondutores não-balanceados	117
7.4	Análise de ϵ no sistema	118
7.4.1	Supercondutores balanceados	119
7.4.2	Supercondutores não-balanceados	121
7.5	Fase LOFF	122
7.5.1	Sobre a numérica	123
8	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	125
	REFERÊNCIAS	127
	APÊNDICES	135
	APÊNDICE A – EXPERIÊNCIA PROFISSIONAL ADQUIRIDA DURANTE O DOUTORADO	137

A.1	Publicações	137
A.1.1	Concluídas	137
A.1.2	Em andamento	138
A.2	Palestras	138
A.3	Coorientação de TCC	138
	 ANEXOS	 139

1 INTRODUÇÃO

Dualidade *gauge/gravidade* é uma classe de teorias em física que afirma a equivalência entre alguma teoria quântica de campos e uma teoria quântica de gravidade. Para situar, dualidades em física tornaram-se um grande advento nos anos de 1990, principalmente no contexto de cordas.¹ Um exemplo está no fato de que a teoria das cordas tendo atualmente cinco formulações diferentes entre si necessitou de argumentos em favor da existência de alguma equivalência entre as mesmas para obter maior consistência quanto a realidade física apresentada*. Embora algumas dessas equivalências entre uma ou outra formulação já houvesse sido descrita,³ este processo se consolidou em um constructo denominado teoria *M* apresentado por Edward Witten numa palestra proferida em uma conferência na *University of Southern California* em 1995.⁴

É importante tentarmos perceber quão relevante as teorias de *gauge/gravidade* são no contexto e desenvolvimento da física teórica hoje. O modelo padrão é a teoria em física de maior sucesso e realização quanto a descrição da natureza que propõe. São inúmeras partículas divididas em duas grandes categorias, bósons e férmions, que descrevem a interação de três das quatro forças fundamentais da natureza, força-fraca, força-forte e força eletromagnética†. Como sabemos a gravidade é a única força fundamental sobre a qual o modelo padrão não consegue conjecturar. Isto se deve ao fato de que no modelo padrão todas as forças são descritas por teorias quânticas de campo renormalizáveis, mas a gravidade não. A gravidade não é renormalizável⁵ e as tentativas de quantizá-la ainda não lograram sucesso. Enquanto se analisa a natureza em regimes de baixa energia é possível e é usualmente empregado negligenciar os aspectos quânticos da gravidade ou até mesmo sua interação. Porém, à escala de Planck ($\sim 10^{-35}m$) isso já não pode mais ser feito, nesta escala os efeitos quânticos da gravidade se tornam aparentes e as interações requerem uma teoria mais fundamental. Neste cenário a teoria de cordas se apresenta como proposta a teoria capaz de unificar as quatro forças fundamentais da natureza, haja vista que a mesma tem como escala fundamental a escala de Planck e que em sua descrição

* Apesar deste conjunto de equivalência ainda não esteja completamente provado existem fortes evidências de seu êxito.²

† Os bósons são os mediadores das forças, enquanto os férmions são as partículas elementares entre os quais os bósons são trocados.

fundamental existe uma partícula de spin 2 que representaria o gráviton,⁶ partícula esta que mediaría a interação da força gravitacional. Entretanto, mesmo a Teoria de Cordas não é bem tratável neste regime de altas energias, suas amplitudes de espalhamentos só são elaboradas de maneira efetiva, tendo melhor tratamento em regimes de baixa energia. É neste panorama que as teorias de *gauge/gravidade* ganham espaço, pois, além de tudo sobre o qual discorreremos aqui, conferem uma abordagem única para teorias de campo fortemente acopladas tornando certas questões computacionalmente tratáveis.⁷

Uma das mais estudadas e bem entendidas dualidades em *gauge/gravidade*, atualmente, é a conjectura elaborada pelo Físico argentino Juan Maldacena em 1997 denominada como correspondência *AdS/CFT*,⁸ onde *AdS* refere-se ao espaço-tempo de Anti-de Sitter e *CFT* refere-se à *Conformal Field Theory*. Maldacena propôs existir uma equivalência entre uma teoria quântica de campos em 4-dimensões com simetria conforme - a teoria de *Yang-Mills* supersimétrica - e uma teoria de supercordas em 10-dimensões num *background* curvo envolvendo o espaço-tempo de AdS - a teoria das supercordas do tipo IIB num espaço-tempo $AdS_5 \times S^5$ definido como o produto entre o espaço *AdS* e uma esfera em 5-dimensões. Esta equivalência é a correspondência *AdS₅/CFT₄*.⁹ A correspondência é estabelecida a partir do acoplamento entre os parâmetros livres em ambos os lados da teoria e é dado pelas seguintes relações,

$$\lambda = (L/l_s)^4 = g^2 \quad , \quad g^2 = 4\pi g_s \quad (1.1)$$

onde $\lambda = gN$ é o acoplamento 't Hooft, N o rank do grupo de gauge, L o raio de curvatura do espaço-tempo AdS, l_s o comprimento das cordas, g o acoplamento do campo de gauge na teoria Conforme e g_s o acoplamento das cordas nas teorias das cordas. Esta relação fornece um dicionário entre ambas as teorias de maneira que estados, observáveis, funções de correlação e dinâmica têm uma equivalência, ou seja, as teorias descrevem a mesma física sob diferentes pontos de vista.

Da maneira como descrita acima temos o que é conhecido como a forma mais “forte” da correspondência *AdS₅/CFT₄*, porém neste limite é muito difícil realizar cálculos com valores genéricos para estes parâmetros. Uma tentativa de torná-los mais tratáveis sem que percamos a física estabelecida nesta relação é buscar por limites nos quais ambas teorias possam ser realizáveis com menos “força”, ou seja, com constantes de acoplamentos em

regimes de baixas energias. O que segue, de fato é que, na sua realização, a dualidade terá uma correspondência forte-fraco quanto aos acoplamentos: se de um lado a teoria analisada apresenta forte correlação entre seus parâmetros, do outro lado da dualidade a teoria possuirá, para esses mesmo parâmetros, equivalentes fracamente correlacionados e vice-versa; significando que podemos trabalhar em regimes não-perturbativos para analisar questões fortemente acopladas, por exemplo. Esse, sem dúvida, é um dos grandes motivos ao apelo a teoria para descrever sistemas fortemente correlacionados na matéria condensada.¹⁰

Assim, na realização de AdS/CFT neste trabalho, seguimos um particular limite. Como a teoria de cordas atualmente é melhor entendida num regime perturbativo, podemos trabalhar com esta sendo o lado da dualidade que esteja num acoplamento fraco de maneira a reivindicar sua conexão à teoria de campos. Escolhemos, então, o limite em que $g_s \ll 1$ de modo que L/l_s permaneça constante e conectamos ao 't Hooft limite¹¹ que mostra que tomado $N \rightarrow \infty$ com λ constante a teoria quântica de campos nada mais é do que uma teoria de cordas, ou seja, que este limite implica num mapeamento entre um limite de expansão $1/N$ pela teoria quântica de campos a um outro limite de expansão $g_s \ll 1$ para teoria das cordas, de modo que $1/N \sim g_s$.

Ainda dentro desse limite existe algo mais que pode ser feito olhando para a relação do AdS e o comprimento das cordas. Da relação estabelecida por 't Hooft segue que a relação L/l_s ainda é uma parâmetro livre, de modo que, podemos tomar $l_s/L \rightarrow 0$, significando que quando comparada a curvatura do AdS a corda é tratada como uma partícula pontual, tal que, $\lambda \rightarrow \infty$. Este limite implica num limite clássico em que o espaço-tempo de AdS pode ser descrito pela teoria Geral da Relatividade, ou seja, que a gravidade clássica é dual a uma teoria de campo de calibre fortemente acoplada em $N \rightarrow \infty$.¹²

Um aspecto interessante a se saber sobre a AdS/CFT é que esta é uma completa realização do Princípio Holográfico enunciado por 't Hooft e Susskind¹³ inspirado sobre os cálculos para entropia de buracos negros.^{14,15} A ideia consiste em, uma vez que em escalas de Planck toda informação de um buraco negro é proporcional a área de seu horizonte de eventos, toda sua entropia também o é, a tal ponto, de estender-se este conceito a imaginar que as componentes mais fundamentais do universo, os seus graus de liberdade, existiriam numa superfície limítrofe e não em seu interior. AdS/CFT realiza essa ideia quando relaciona no bulk uma teoria quântica com gravidade em $d + 1$ -dimensões maior

que a teoria quântica em d -dimensões da fronteira.

A dualidade AdS/CFT pode ser investigada sobre muitos aspectos,^{9,12,16} além de ganharmos *insights* sobre sistemas fortemente acoplados como na aplicação em *Cromodinâmica quântica* (QDC)¹⁷ na análise de confinamento de quarks, por exemplo, ou na matéria condensada,¹⁸ como fazemos aqui, podemos também olhar do outro lado do dicionário e buscar aspectos do próprio espaço-tempo. Podemos olhar para aspectos não-lineares no espaço-tempo curvo e tentar lançar luzes sobre a existência de soluções para buracos negros com cabelo,¹⁹ ou ainda, voltar a teoria de cordas e nos perguntar sobre aspectos para a construção de uma teoria quântica para gravidade²⁰ ou sobre a evaporação de buracos negros,²¹ bem como, sobre teoria de informação,²² entre outros.

Da aplicação da dualidade AdS/CFT na matéria condensada tem-se duas abordagens: *bottom-up*²³ e *top-down*.²⁴ A maneira como a tratamos nesta tese é através da abordagem *bottom-up*, em que os ingredientes que capturam a física em questão são introduzidos *ad hoc*, ou seja, com a finalidade desejada sem que para isto tenham sido deduzidos de primeiros princípios. Dentro desta abordagem a exata teoria dual correspondente à teoria trabalhada é desconhecida sendo impossível comparar precisamente graus de liberdade, bem como a dinâmica dos operadores em questão. Esta abordagem parece conferir à aplicação de AdS/CFT um caráter fenomenológico²⁵ e apesar de ter sua discussão pautada na classe de universalidades fornecidas pela transição de fase dentro da teoria de *Ginzburg-Landau*[‡], para AdS/CFT , diferentemente de *Ginzburg-Landau*, é sempre possível construir a lagrangiana dupla por primeiros princípios. Isto é feito, na abordagem *top-down*, construindo o modelo embebido na teoria de cordas ou numa teoria de supergravidade, de modo que se tem acesso explícito e detalhado aos operadores duais, seus graus de liberdade e as dinâmicas em ambas teorias.²⁶

Na matéria condensada, embora a supercondutividade para materiais que se tornam supercondutores a baixas temperaturas tenha uma descrição quântica dos processos envolvidos à luz da teoria de BCS²⁷ relacionando o estado supercondutor a formação de estados do tipo bosônico a partir de dois elétrons chamados de pares de Cooper, isto não se aplica à supercondutividade em altas temperatura, observada pela primeira vez em 1986,²⁸ estando os resultados experimentais sobre este tipo de material em total desacordo

[‡] A teoria de *Ginzburg-Landau* é uma teoria fenomenológica e sobre tal discutiremos brevemente no capítulo 2.

com os resultados da teoria BCS. Uma dica do que poderia estar em jogo aqui vem do fato de que o gap de energia - essencialmente a energia necessária para quebrar um par de Cooper - ser mais do que o dobro para os supercondutores em altas temperaturas sugerindo a possibilidade da existência de algum mecanismo de forte acoplamento entre os elétrons. Como uma teoria microscópica baseada na matéria condensada ainda não existe, foi proposto^{25,29,30} que poderia se usar a dualidade AdS/CFT para descrever supercondutividade em alta temperatura.

A ideia chave é baseada em um artigo do físico Gubser,¹⁹ no qual foi mostrado que um buraco negro estático e carregado no espaço-tempo de AdS podia se tornar instável para a formação de campos não-triviais, ou seja, cabelos no seu horizonte de eventos. Isso acontece quando a temperatura de Hawking do buraco negro é reduzida e está relacionado ao limite de Breitenlohner-Freedman (BF).³¹ Foi mostrado por Gubser, na geometria do horizonte próximo do buraco negro carregado, que a massa (efetiva) pode cair abaixo do limite de BF, enquanto na fronteira do AdS permanecer acima. Como tal, o buraco negro possui um campo não trivial no horizonte que decai no *bulk* do AdS. Na fronteira do AdS, o valor desse campo de matéria é então interpretado como o valor esperado de um operador na teoria dual, uma teoria de gauge fortemente acoplada, que do ponto de vista de uma transição de fase corresponde ao parâmetro de ordem. Como um buraco negro sempre tem uma temperatura associada a ele, a formação de campos não-triviais em horizontes de buracos negros tem sido interpretada como o dual de uma transição de fase condutora-supercondutora a temperatura finita.

Quando as transições são impulsionadas por outros fatores, que não a temperatura, o que acontece com os supercondutores em altas temperaturas por exemplo, no lado da gravidade, pode-se usar soluções do tipo sólitons no espaço-tempo de AdS para descrever a transição de fase, que neste caso, é do tipo isolante-supercondutor.³² Ao compactarmos uma coordenada, certos modelos contêm soluções usando-se tanto sólitons quanto buracos negros. Pode-se então construir diagramas de fase e notavelmente estes diagramas se assemelham muito aos diagramas de fase de alguns supercondutores em alta temperatura para algumas escolhas de parâmetros no modelo.^{32,33}

A maioria dos estudos de supercondutores holográficos tem sido realizada no *probe limit*. Este limite corresponde a negligenciar a *backreaction* do espaço-tempo utilizado, que pode ser entendida como a resposta do próprio espaço-tempo a presença desses

campos. Assim, neste limite os campos de matéria são estudados num contexto de AdS fixo. Entretanto, resultados recentes sugerem que a *backreaction* altera os resultados qualitativos e quantitativos dos modelos. Um exemplo disso está no fato de que o gap de energia na temperatura crítica T_c é da ordem de 8 para supercondutores holográficos,³⁴ mas quando se inclui a *backreaction* esse resultado muda, pois a relação passa a depender do acoplamento gravitacional³⁵ e, portanto, não é universal, como afirmado pelos resultados tratados no *probe limit*.

Curiosamente, parece haver uma contradição entre a abordagem supercondutora holográfica e o teorema de Coleman-Mermin-Wagner,³⁶ que proíbe a quebra espontânea da simetria para uma simetria contínua em $(2+1)$ -dimensões à temperatura finita. Foi sugerido que, como descrito acima, a gravidade clássica corresponde ao limite $N \rightarrow \infty$ no lado da teoria de gauge. No entanto, modelos físicos certamente possuem $N < \infty$ e levando-se isto em consideração, deve-se adicionar mais altas ordens de correções de curvatura que apareçam em ações efetivas de baixa energia na Teorias de Cordas. Consequentemente, os termos de Gauss-Bonnet (GB) foram incluídos e estudados.³⁷ Entretanto, embora a temperatura crítica diminua ao se incluir estes termos, a condensação não pode ser suprimida - nem mesmo quando a *backreaction* do espaço-tempo é incluída.^{35,37-40} Em nosso caso, até mesmo um acoplamento negativo para o termos GB com ou sem a inclusão da *backreaction* não é capaz de inibir a condensação.

Os supercondutores convencionais na teoria BCS são tipicamente distinguidos pela simetria da função de onda que descreve o par de Cooper quanto ao mecanismo de emparelhamento entre os elétrons e os fónons da rede. Tal que, a função passa a ser classificada como tipos s-wave, p-wave, d-wave, etc. De modo que, os supercondutores são denominados como sendo supercondutores de onda-s, onda-p, onda-d, e assim por diante. Logo, a pesquisa em holografia também classifica os supercondutores assim. Até agora, o foco principal das pesquisas tem sido em supercondutores de onda-s, mas supercondutores de ondas-p e ondas-d também foram estudados.²⁴ Os casos de supercondutores holográficos de onda-s, em geral, são realizados mantendo-se o acoplamento do campo de gauge ao campo escalar carregado cujo valor assintótico corresponde ao valor esperado de um operador escalar na *CFT*. Isso é também o que fazemos aqui, utilizando soluções de buracos negros com simetrias planares afim de se conectarem com a ideia da supercondutividade em alta temperatura associada a camadas bidimensionais dos supercondutores a base de

Cuprato. Porém foi encontrado na literatura que buracos negros carregados e extremos podem tornam-se instáveis ao campos escalares sem carga associada. Exemplos disso estão nos artigos citados,^{25,41} em que o último analisa ainda esta instabilidade incorporando termos de GB. Além disso, foi mostrado⁴² que a escalarização espontânea de um buraco negro esférico, simétrico, estático e assintoticamente AdS em um modelo de gravidade escalar-tensorial quando levado em conta a backreaction se torna dual a um supercondutor permitindo a identificação da transição de uma física supercondutora.

Uma outra aplicação, ainda, mantendo-se o campo escalar consiste em analisar a competição de várias bandas supercondutoras associadas a formação do condensado no que tange a inserção de diferentes parâmetros de ordem na descrição Ginzburg-Landau para supercondutores e analisar a possibilidade da ocorrência de novas fases, uma vez que nas imediações do ponto crítico quântico ainda há muito para se explorar, bem como analisar a competição ou o melhoramento das mesmas e a possibilidade de haver supressão da condutividade nestes sistemas.⁴³ Além disso, é possível expandir os modelos holográficos para criar o caso da supercondutividade não-homogênea inserindo na lagrangiana outros campos que possam simular a diferença entre as superfícies de Fermi da entidade supercondutora. Um exemplo é colocar dois campos de gauge acoplados à campos escalares (diferentes ou não entre si), afim de que um campo de gauge represente a contribuição elétrica da corrente supercondutora, enquanto o outro represente a sua contribuição devido ao spin de maneira a investigar a formação da fase LOFF nestes sistemas.^{44,45} Esta fase tem o nome LOFF devido aos seus descobridores Fulde, Ferrell, Larkin e Ovchinnikov em 1964^{46,47} e evidência a formação de uma fase intermediária à transição supercondutora-normal, a partir do limite Chandrasekhar-Clogston,⁴⁸ em que exista a formação de duas superfícies de Fermi distintas devido a interação Zeeman de um campo aplicado externo, contabilizando um momento total não-nulo para o estado fundamental.

Uma vez estabelecidos os limites de empregos e motivação para a utilização da conjectura AdS/CFT aos supercondutores seguimos para a ordem de escrita deste trabalho. No Capítulo 2, pincelamos as ideias estruturais da conjectura mantendo nosso foco na Relatividade Geral, o local de partida desta tese. No capítulo 3 adentramos uma breve discussão sobre a física supercondutora e traçamos um ligeiro panorama de seus avanços nas últimas décadas. O capítulo 4 é a conjectura aplicada a física supercondutora em si, discutimos assim as ideias fundamentais para a construção dos supercondutores holográficos.

Os capítulos seguintes são diferentes construções em que nos aventuramos estudar. No capítulo 5 analisamos a influência da constante de acoplamento negativa para os termos GB num modelo de Einstein puro e num modelo com a inserção da *backreaction*, no capítulo 6 analisamos a formação de supercondutores holográficos a partir da formação de duas bandas, suas competições e melhoramentos, inserindo dois campos escalares e um termo de acoplamento entre os mesmos, além da possibilidade do desenvolvimento de uma fase LOFF com dois gauges interagindo entre si e acoplados distintamente a estes mesmos campos escalares. O capítulo 7 segue com a modelagem da escalarização espontânea de um buraco negro assintoticamente AdS, num modelo de gravidade escalar-tensorial, que em determinados limites e com a inserção da *backreaction* se torna dual à transição de fase de segunda ordem para um supercondutor. O capítulo 8, enfim, encerra esta tese, onde deixamos perspectivas para trabalho futuros nestes mesmos modelos.

Deixamos constado que nesta tese mantivemos $\hbar = c = 1$, salvo contrário quando dito explicitamente.

2 CORRESPONDÊNCIA ADS/CFT

Como dito anteriormente a conjectura AdS/CFT tem sua origem na teoria de cordas, mas é importante destacar que nesta tese temos como objetivo traçar os caminhos para sua aplicação do ponto de vista da gravidade e iremos dispor de parte dos elementos das teorias necessárias ao outro lado da correspondência (*string/QFT/CFT*) conforme nos forem necessários e relevantes. Nessa perspectiva, devido a correlação forte-fraca da conjectura o sistema com forte correlação, o qual não temos acesso à física microscópica, pertence à CFT, enquanto os cálculos efetuados se estabelecem no espaço-tempo de Anti-de Sitter e a conjectura é estabelecida através de um dicionário entre as entidades físicas calculadas.

É importante ressaltar que estamos saindo da generalidade do que se tem hoje estabelecido como dualidade *gauge/gravidade* e incorporando dentro do modelo mais bem sucedido da mesma, a *AdS/CFT*, uma aplicação da mesma na busca de maior compreensão sobre sistemas fortemente acoplados que satisfazem invariância conforme. Os supercondutores em altas energias são candidatos exemplos, cuja a explicação física, como dito antes, ainda esta incompleta. Por isso neste capítulo apresentaremos uma breve descrição sobre o espaço-tempo de Anti-de Sitter, sua fronteira, a conexão com a teoria conforme e o dicionário da correlação.

2.1 O espaço-tempo de Anti-de Sitter (AdS)

Uma maneira interessante de buscar soluções para as equações de campo de Einstein no vácuo é nos perguntarmos sobre soluções maximamente simétricas^{*}, que significam, aquelas que quando comparadas ao espaço Euclidiano contenham o maior número de isometrias possíveis. Assim dada a equação de Einstein em d -dimensões no vácuo com constante cosmológica,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.1)$$

^{*} Tais simetrias estão associadas aos vetores de killing. Dado um vetor de Killing X , a simetria no espaço-tempo é satisfeita pela equação: $\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = 0$.

os mais simples espaços-tempo que podemos construir implica em um espaços-tempo com curvatura constante, que podem ser localmente caracterizados por

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{R}{d(d-1)}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}). \quad (2.2)$$

Substituindo a equação (2.2) na equação 2.1, temos a seguinte relação

$$R = \frac{2d}{(d-2)}\Lambda \quad ; \quad d > 2, \quad (2.3)$$

que são, enfim, as soluções de curvatura constante com constante cosmológica Λ par as equações de Einstein.⁴⁹ Se $\Lambda = 0$, temos o espaço-tempo plano de Minkowski, se $\Lambda > 0$, significa curvatura constante positiva, temos o espaço-tempo de de-Sitter (dS) e se $\Lambda < 0$, temos curvatura constante negativa e assim, o espaço-tempo de anti-de-Sitter (AdS).

O espaço-tempo de AdS apresenta inúmeras peculiaridades tendo recebido, nos últimos vinte anos, grande atenção principalmente pela sua aplicação à conjectura AdS/CFT e por isso faz-se objeto de interesse neste capítulo. Para uma revisão sistemática veja (⁵⁰).

Uma maneira de construir o espaço-tempo de Anti-de Sitter é imaginar primeiramente um espaço-tempo plano, tipo o espaço-tempo de Minkowski, por exemplo, e embebido nele uma hipersuperfície que representaria o AdS, que significa dizer que temos uma variedade (o espaço plano) e imerso nesta variedade uma subvariedade (a hipersuperfície). Assim, se imaginarmos o espaço-tempo de Minkowski em $(d+2)$ -dimensões pertencente à $\mathbb{R}^{d,2}$, cuja métrica é dada por,¹²

$$ds^2 = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + \dots + d(X_d)^2 - d(X_{d+1})^2 \quad (2.4)$$

teremos então embebido neste espaço-tempo o espaço de Anti-de Sitter em $(d+1)$ -dimensões, AdS_{d+1} , representado pela hipersuperfície, o hiperbolóide abaixo em $d+1$ -dimensão com raio de curvatura $L > 0$,

$$-(X^0)^2 + \sum_{i=1}^d (X^i)^2 - (X^{d+1})^2 = -L^2. \quad (2.5)$$

em conexão entre a constante cosmológica e o raio do AdS é dada por

$$\Lambda = \frac{-d(d-1)}{L^2} \quad (2.6)$$

As equações (2.4) e (2.5) inserem o AdS ao $SO(2, d)$ como grupo de isometrias com $(d+1)(d+1)/2$ geradores de Killing, sendo, como dito, um espaço-tempo maximamente simétrico.

2.1.1 Sistemas de coordenadas e a fronteira conforme

Podemos parametrizar a equação (2.5) de maneiras diferentes, a depender de nosso interesse. Em **coordenadas globais**, como o próprio nome sugere, podemos ter acesso a todo o espaço-tempo, o que quer dizer que todos os pontos da equação (2.5) são levados em conta exatamente uma vez. A parametrização é feita por,

$$X^0 = L \cosh \varphi \cos \tau, \quad (2.7)$$

$$X^{d+1} = L \sinh \varphi \sin \tau, \quad (2.8)$$

$$X^i = L \hat{x}_i \sinh \rho \quad (2.9)$$

onde $\tau \in [0, 2\pi[$, $\rho \in [0, \infty)$ e $\hat{x}_i$ são vetores unitários que parametrizam uma esfera em $d-1$ -dimensões e satisfazem,

$$\sum_{i=1}^d \hat{x}_i^2 = 1 \quad (2.10)$$

$$\hat{x}_1 = \cos \varphi_1, \quad (2.11)$$

$$\hat{x}_2 = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \quad (2.12)$$

$$\hat{x}_3 = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, \quad (2.13)$$

$$\vdots \quad (2.14)$$

$$\hat{x}_{d-1} = \sin \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{d-2} \cos \varphi_{d-1}, \quad (2.15)$$

$$\hat{x}_d = \sin \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{d-2} \sin \varphi_{d-1}. \quad (2.16)$$

em que $\varphi_i \in [0, \pi]$ para $i = 1, \dots, d$ e $\varphi_{d-1} \in [0, 2\pi[$. Com

$$d\Omega_{d-1}^2 = d\varphi_1^2 + \sin^2 \varphi_1 d\varphi_2^2 + \dots + (\sin^2 \varphi_1 \cdots \sin^2 \varphi_{d-2}) d\varphi_{d-1}^2. \quad (2.17)$$

Assim (2.5) é dada por

$$ds^2 = L^2(-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{d-1}^2). \quad (2.18)$$

A Fig.1 apresenta o AdS_2 embebido em $\mathbb{R}^{1,2}$ dimensões, em que as coordenadas são X^0 , X^1 e X^2 e onde $(d-1)$ -dimensões foram suprimidas. As curvas contínuas são linhas de ρ constante, enquanto as curvas tracejadas são linhas de τ constante.

Figura 1 – Representação do AdS_2 embebido em $\mathbb{R}^{1,2}$ dimensões com coordenadas X^0 , X^1 e X^2 . Curvas contínuas são linhas de ρ constante, enquanto curvas tracejadas são linhas para τ constante.

Fonte: AMMON, ERDMENGER.¹²

Uma vez que a coordenada temporal é periódica, temos para todo o hiperbolóide curvas fechadas do tipo-tempo, veja Fig.1. Para evitar esta situação, a fim de obtermos um espaço-tempo causal, podemos simplesmente tomar a cobertura deste espaço-tempo com $\tau \in (-\infty, \infty)^\dagger$ e descompactificar a coordenada temporal de modo a obtermos o recobrimento universal da equação (2.18),⁵¹

$$ds^2 = -\cosh^2 \rho d\tau^2 + L^2(d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_p^2). \quad (2.19)$$

Para investigarmos a fronteira conforme do espaço AdS podemos efetuar a seguinte transformação na equação (2.18),

$$\begin{aligned} \sinh \rho &= \tan \theta, \\ \cosh \rho d\rho &= \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta, \end{aligned} \quad (2.20)$$

[†] Para $(\tau \equiv L\tau \in \mathbb{R})$.

de modo que a métrica se torna,

$$ds^2 = \frac{L^2}{\cos^2 \theta} (-d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{d-1}^2). \quad (2.21)$$

onde $\theta \in [0, \pi/2[$ e $\tau \in [0, 2\pi[$ de maneira que esta métrica cobre apenas parte do espaço-tempo. E como fizemos anteriormente, podemos descompactificar a coordenada temporal de modo a obtermos o recobrimento universal para $\tau \in (-\infty, \infty)$.

Estas coordenadas são conhecidas como **coordenadas conforme**, onde ao redimensionarmos a métrica para se livrar de um fator global a estrutura causal do espaço-tempo permanece inalterada. Para entender isso vamos restringir por um momento nosso espaço-tempo a duas dimensões (τ e θ) e supor $\tilde{g}_{\mu\nu}$ uma métrica associada a este elemento de linha

$$ds^2 = (-d\tau^2 + d\theta^2) \quad (2.22)$$

com $\tau \in (-\infty, \infty)$ e $\theta \in [0, \pi/2[$ (como antes). Analizando equação (2.22) percebemos que esta métrica tem uma fronteira $\pi/2$ como representado na Fig.(2), além do fato de ser regular nessa fronteira.

Figura 2 – Representação ilustrativa da fronteira conforme do espaço de Anti-de Sitter em duas dimensões.

Fonte: Elaborada pela autora.

Assim, dada uma métrica $g_{\mu\nu}$ associada ao elemento de linha,

$$ds^2 = \frac{L^2}{\cos^2 \theta} (-d\tau^2 + d\theta^2), \quad (2.23)$$

com $\tau \in (-\infty, \infty)$ e $\theta \in [0, \pi/2[$. Dizemos que $g_{\mu\nu}$ representa um espaço-tempo com fronteira conforme se pudermos definir a seguinte expressão

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{z^2(x)} \tilde{g}_{\mu\nu}(x) \quad , \quad ds^2 = \frac{1}{z^2(x)} \tilde{g}_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (2.24)$$

onde $x \equiv x^\mu$, com $z(x)$ satisfazendo:[‡]

- $z(x) > 0$;
- $z(x_f) = 0$;
- $dz(x_f) \neq 0$.

em que x_f representa um ponto qualquer localizado na fronteira deste espaço-tempo. Note que $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$ é de fato uma métrica regular (uma variedade $\mathcal{M}$) com uma fronteira definida e existente $(\partial\mathcal{M})$, enquanto $g_{\mu\nu}(x)$ não tem esta fronteira realmente, o espaço-tempo representado por $g_{\mu\nu}(x)$ é que tem um comportamento assintótico controlado por $z(x)$, com comportamento no infinito ditado por $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$. Assim, voltando a nossa argumentação inicial, uma vez que podemos escrever a equação 2.21 como a equação 2.24, sendo, neste caso, $\tilde{g}_{\mu\nu}$ a métrica associada a

$$ds^2 = -d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{d-1}^2 \quad (2.25)$$

dizemos que o AdS tem no infinito uma "fronteira conforme". Conforme aqui precisa ser um pouco melhor discutido. O que a fronteira do AdS (∂_{AdS}) na verdade tem é este limite assintótico que no infinito se comporta com uma métrica que tem simetrias conforme. Para

[‡] apresentação exposta inspirada em (52,53).

ver isso, podemos fazer a seguinte transformação na equação(2.18),

$$X^0 = \frac{L^2}{2r} \left(1 + \frac{r^2}{L^4} (\vec{x}^2 - t^2 + L^2) \right), \quad (2.26)$$

$$X^i = \frac{rx^i}{L} \quad ; \quad i = 1, \dots, d-1, \quad (2.27)$$

$$X^d = \frac{L^2}{2r} \left(1 + \frac{r^2}{L^4} (\vec{x}^2 - t^2 - L^2) \right) \quad (2.28)$$

$$X^{d+1} = \frac{rt}{L}. \quad (2.29)$$

onde encontramos para o AdS_{d+1} as coordenadas de Poincaré,

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) \equiv \frac{L^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{L^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) \quad (2.30)$$

com $\mu = 0, 1, 2, \dots, d$. Estas coordenadas também cobrem apenas metade do hiperbolóide descrito em 2.5. Se permitirmos que $\frac{r^2}{L^2} = z^2$, então teremos o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) + dz^2 \quad (2.31)$$

o que nos permite identificar que esta métrica nada mais é que a $\tilde{g}_{\mu\nu}$ discutida acima, que verdadeiramente tem uma fronteira e cuja isometrias são manifestações do grupo conforme. Em particular temos duas isometrias, as translações de Poincaré

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad , \quad x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu, \quad (2.32)$$

e a invariância por escala

$$z \rightarrow \lambda z \quad , \quad x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu. \quad (2.33)$$

Sendo assim, podemos dizer que o grupo $SO(2, d)$ atua na fronteira do AdS da mesma maneira que o grupo conforme no espaço-tempo de Minkowski. Além disso, da equação 2.30, podemos ler o AdS_{d+1} como uma parametrização de um espaço plano por $t, \vec{x}$ com a adição de uma direção r . Para um valor de r fixo o espaço-tempo transversal à r é o espaço-tempo de Minkowski em $R^{d-1,1}$ dimensões como representa a Figura 3. Note que $r \rightarrow 0$ é uma singularidade devido apenas a coordenada.

Figura 3 – Representação ilustrativa do AdS em coordenadas de Poincaré.

Fonte: AMMON, ERDMENGER.¹²

Um exemplo interessante de um espaço hiperbólico embebido num espaço euclidiano bidimensional em uma transformação conforme são algumas pinturas em mosaico do artista holandês M.C. Escher, como na Fig. 4.

Figura 4 – Pintura em mosaico do artista holandês M.C. Escher no início do século XX. A figura representa um espaço hiperbólico embebido num espaço euclidiano bidimensional sendo um exemplo de transformação conforme.

Fonte: JOSLEYS.⁵⁴

2.1.2 Geodésicas radiais e uma fancy box

Dadas as propriedades acima, podemos discutir também como Anti-de Sitter se comporta em relação a geodésica de uma partícula teste, sendo geodésicas do tipo-luz para partículas como o fóton e geodésicas do tipo-tempo para partículas massivas. Reescrevendo a equação 2.19 em **coordenadas estáticas** pela substituição,

$$\rho = \ell \arcsin(r/\ell) \quad (2.34)$$

$$d\rho = \frac{dr}{\ell\sqrt{1+r^2/\ell^2}} + r^2 d\Omega_p^2, \quad (2.35)$$

onde $r \geq 0$ e ℓ o raio do AdS. Inserindo $\omega = 1/\ell$ e reescrevendo a equação acima em 4-dimensões, temos

$$ds^2 = -(1 + \omega^2 r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{(1 + \omega^2 r^2)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.36)$$

A formulação lagrangiana $\mathcal{L}$ é dada por,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (2.37)$$

com as seguintes constantes de movimento para a geodésica:

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\nu = \begin{cases} 1, & \text{tipo-tempo,} \\ 0, & \text{luz.} \end{cases} \quad (2.38)$$

Desse modo, resolvendo as equações de Euler-Lagrange, podemos obter equações de movimento associadas a métrica 2.36, dada a abaixo:

$$\ddot{t} + \left(\frac{2\omega^2 r}{1 + \omega^2 r^2} \right) \dot{r} \dot{t} = 0 \quad (2.39)$$

$$\ddot{r} + \omega^2 r \left[(1 + \omega^2 r^2) \dot{t}^2 - \frac{1}{(1 + \omega^2 r^2)} \dot{r}^2 \right] - r(1 + \omega^2 r^2)(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = 0 \quad (2.40)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0 \quad (2.41)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r} + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cot \theta = 0 \quad (2.42)$$

onde o ponto indica a derivada em relação a um parâmetro afim τ .

Como a lagrangiana usada é explicitamente independente do tempo t e independente das coordenadas angulares φ , temos que os momentos conjugados p_t e p_ϕ são conservados, tal que

$$p_t = E = \text{constante} \quad , \quad p_\phi = L = \text{constante.} \quad (2.43)$$

o que implica em

$$\dot{t} = \frac{E}{1 + \omega^2 r^2} \quad , \quad \dot{\phi} = \frac{L}{r^2} \quad (2.44)$$

onde ($E = \text{constante}$) é a energia da partícula analisada e ($L = \text{constante}$), o momento angular da mesma.

Por causa da conservação do momento angular e sem perda de generalidade, podemos restringir o movimento ao plano equatorial tomando $\theta = \pi/2$ e ainda restringi-lo ao movimento radial tomando $L = 0$, o que implica em $\dot{\phi} = 0$, tal que, a relação 2.38, tornar-se⁵⁵

$$-(1 + \omega^2 r^2)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 + \omega^2 r^2} = \begin{cases} -1, & \text{tipo-tempo,} \\ 0, & \text{tipo-luz.} \end{cases} \quad (2.45)$$

Da relação 2.45, para partículas massivas, temos a seguinte relação

$$\dot{r}^2 = E^2 - (1 + \omega^2 r^2) \quad (2.46)$$

Inserindo a primeira parte da equação 2.44 na equação acima 2.46, obtemos

$$\ddot{r} + \omega^2 r = 0 \quad (2.47)$$

que nada mais é do que a equação de um oscilador harmônico simples com frequência ω . Se interpretarmos o parâmetro afim τ como o tempo próprio da partículas, teremos que as geodésicas tipo-tempo são curvas senoidais cujo ponto de retorno à $r = 0$ se dá com tempo próprio $\tau = \pi\ell$ e assim periodicamente como a Fig. 5, onde os máximos finitos para $r(\tau)$ dependem apenas das condições iniciais.

Para geodésicas do tipo-luz, das relações 2.39 e 2.45, obtemos que $\ddot{r} = 0$, cuja

solução são relações lineares com relação ao tempo-próprio ($r \propto \pm \tau$). Assim, o fóton deve em uma trajetória linear alcançar a fronteira do espaço AdS e devido a conservação de energia ser ricocheteado de volta a posição inicial em um tempo finito como na Fig. 5.

Figura 5 – Diagrama de Penrose parcial e periódico para espaço o Anti-de Sitter com cobertura universal e métrica conforme. As geodésicas tipo-luz são representadas por linhas que alcançam a fronteira e são ricocheteadas num tempo finito, enquanto as geodésicas do tipo-tempo são representadas por linhas tracejadas que divergem e voltam a convergir em tempo finito sem nunca alcançarem a fronteira deste espaço.

Fonte: CALVO.⁵⁶

Assim, além do fato de a fronteira do Anti-de Sitter ser uma fronteira conforme, como visto na seção anterior, temos uma segunda característica fundamental atribuída a mesma, a afirmação desse espaço-tempo pode ser visto como uma caixa chique (*fancy box*). Analisando as geodésicas radiais para o tipo-luz e tipo-tempo, acima, concluímos que ao impormos conservação de energia e portanto fronteira reflexiva, a *fancy box* se revela no sentido de que objetos massivos nunca podem alcançar a fronteira enquanto a luz o faz, porém sem atravessá-la e retornando num tempo finito. É como se a curvatura negativa atuasse como uma fonte de atração adicional "redirecionando" as geodésicas em direção ao interior de espaço.

De modo geral, isso que dizer que o interior do AdS e sua fronteira estão em "comunicação", ou seja, existe um contanto causal entre ambos. Uma vez que sua fronteira

é conforme, nas palavras de Witten,⁵⁷ existem duas maneiras de se conseguir extrair a física do espaço-tempo de AdS , uma dada por uma teoria de campo relativística (com ou sem gravidade) no seu interior e outra dada por uma teoria conforme na fronteira. Esta afirmação, de fato, é o pensamento subjacente que norteia toda conjectura AdS/CFT .

Uma imagem muito comum na literatura da conjectura para visualização da interpretação de *fancy box* é apresentada na Fig.6, onde o espaço tridimensional do AdS é representado como uma pilha de discos hiperbólicos, cada um representando um estado do universo em um dado momento resultando num espaço-tempo em forma de cilindro sólido. Nesta representação localmente em torno de qualquer ponto o AdS se parecerá exatamente com um espaço de Minkowski.⁵⁸

Figura 6 – Diagrama ilustrativo da representação do espaço de AdS_3 mostrando a relação entre o interior e a fronteira. A seta verde representa trajetórias tipo-tempo, que nunca alcançam a fronteira, enquanto a seta amarela representa trajetórias do tipo-luz, capazes de alcançar a fronteira sem atravessá-la e voltar ao interior do espaço em um tempo finito.

Fonte: Adaptada de FAVPNG.⁵⁹

2.1.3 Fronteira do AdS e espaços $AAdS$

Como visto na descrição das geodésicas acima, para partículas tipo-luz, impor conservação de energia ao sistema nos levou a impor condições de contorno reflexivas, isto acontece porque o espaço AdS não é globalmente hiperbólico, ou seja, é caracterizado pela ausência de uma superfície global de Cauchy, o que implica que, uma vez que especificamos as condições iniciais para uma superfície do tipo-tempo isto não nos leva a uma única prescrição da dinâmica do seu estado futuro, para caracterizar sua evolução nós precisamos especificar as condições na sua fronteira.

Isso nos induz a outra questão, a fim de se beneficiar do acoplamento forte/fraco da

correspondência AdS/CFT se torna interessante analisar na fronteira modelos fortemente acoplados que envolvam temperatura. As soluções descritas acima tratam do espaço AdS puro de modo que para termos outros objetos inseridos em seu interior, como um buraco negro, passamos a nos interessar em espaços cujo limite assintótico recupere a física do Anti-de Sitter, o que chamamos de espaços assintoticamente Anti-de Sitter (aAdS). Existem na literatura muitos estudos dedicados a estes espaços.^{60–62} Em nosso caso, o papel da fronteira ficará mais claro a medida que avançarmos na construção de um dicionário entre as grandezas presentes no interior do AdS (bulk) e as grandezas identificadas na teoria quântica que "vive" na fronteira do AdS. Assim, a mais genérica ação que podemos supor para o AdS é dada abaixo em (2.48),

$$\mathcal{S}(g_{ab}, A_a, \phi, \dots) \sim \frac{1}{2k_{d+1}^2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (\mathcal{R} - \gamma + \text{Tr}(F^2) + (\partial\phi)^2 + V(\phi) + \dots). \quad (2.48)$$

Note que esta ação é descrita em teoria de cordas e dada os necessários limites leva a descrição clássica da relatividade geral como especificado em (1.1).

2.1.4 Buraco Negro de Schwarzschild (aAdS)

Quando adentrarmos o contexto de altas energias as tradicionais soluções de buracos negros para equações de Einstein em 4-dimensões como Schwarzschild, Reissner-Nordström e Kerr-Newman são estendidas a um vasto conjunto de soluções. Com a inserção de outras dimensões e/ou mesmo com a inserção da constante cosmológica podemos encontrar novas soluções que também satisfazem as equações de campo da relatividade geral e um compêndio dessa diversidade de soluções em altas dimensões inseridos em espaços-tempo com ou sem matéria está descrito na literatura^{63§}.

A exemplo disto temos a solução de Schwarzschild em d-dimensões para o aAdS, cuja a topologia no horizonte é plana. Este buraco negro é conhecido como solução planar de Schwarzschild-(aAdS) ou muitas vezes como brana negra[¶].

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} (-f(r) dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{dr^2}{f(r)} \quad , \quad f(r) = 1 - \left(\frac{r_h}{r} \right)^d \quad (2.49)$$

Este buraco negro é assintoticamente AdS, uma vez que quando $r \rightarrow \infty$, $f(r) \rightarrow 1$. Em

§ Também existe um pequeno apanhado introdutório de algumas dessas soluções em (64).

¶ A discussão empreendida aqui tem como guia as seguintes notas (18, 65, 66).

$r = r_h$, com $f(r_h) = 0$, define-se o plano R^{d-1} como horizonte de eventos no sentido que um observador localizado no infinito realmente não consegue receber informações do interior desta região.

Figura 7 – Representação do buraco negro planar de Schwarzschild-AdS em $(d + 1)$ -dimensões.

Fonte: FOKEEVA.⁶⁶

Em 1973 Bekenstein apresentou uma relação teórica entre o que chamou de o número de similaridades entre um buraco negro e a termodinâmica inspirado principalmente no fato de que tanto a área do horizonte de evento num buraco negro quanto a entropia de um sistema físico tendem a crescer irreversivelmente.¹⁴ Em 1974 Hawking elevou a termodinâmica para além de analogia consolidando-a como uma área na física moderna ao identificar que os buracos negros deveriam emitir partículas com distribuição térmica de energias quando se incluíssem alguns efeitos quânticos na descrição de modo a associar a estes uma temperatura inversamente proporcional à massa.⁶⁷ A descrição física que adiciona estes efeitos quânticos instituídos por Hawking é conhecida hoje como teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo e a predição feita é que horizontes de eventos emitem radiação como se fossem um corpo negro à temperatura finita, sendo assim, os buracos negros possuem uma descrição termodinâmica.

Para calcularmos a temperatura de Hawking associada a este buraco negro (SaAdS) vamos novamente usar a variável $z = \frac{r^2}{L^2}$ cuja métrica se torna,

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}(-f(z)dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{dz^2}{f(z)} \quad , \quad f(r) = 1 - \left(\frac{z}{z_h}\right)^d \quad (2.50)$$

com fronteira definida em $z = 0$.

É conveniente ao falarmos de temperatura aplicarmos uma rotação de Wick, que nos permite por continuidade passar do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano.

Esta transformação é uma rotação de $\pi/2$ realizada no plano complexo utilizada em mecânica quântica estatística no intuito de identificar uma certa periodicidade associadas as coordenadas temporais Euclidianas t_E cujo o inverso desta escala (β) é identificada como a temperatura, em uma tentativa entender a coordenada temporal neste espaço como uma dimensão espacial.^{51,68} Assim, definimos a rotação de Wick como $t \rightarrow -it_E$, tal que

$$ds_E^2 = \frac{L^2}{z^2} (f(z) dt_E^2 + d\vec{x}^2) + \frac{dz^2}{f(z)} \quad (2.51)$$

Próximo do horizonte para $z \sim z_h$ podemos tomar a métrica no entorno do ponto $z \simeq z_h + \bar{z}$ com $\bar{z} \rightarrow 0$ e expandi-la em série de Taylor, para investigarmos a relação entre a geometria nessa região e uma expressão para temperatura que procuramos. Assim,

$$f(z)|_{z=z_h} \simeq f(z_h) + f'(z_h)\bar{z} + \dots \simeq f'(z_h)\bar{z} \quad (2.52)$$

Desse modo, próximo do horizonte temos a seguinte métrica^{||}

$$ds_E^2 \approx \frac{L^2}{z_h^2} \left(f'(z_h)\bar{z} dt_E^2 + d\vec{x}^2 + \frac{d\bar{z}^2}{f'(z_h)\bar{z}} \right). \quad (2.53)$$

É conveniente definir as seguintes variáveis

$$\rho = 2\sqrt{\frac{\bar{z}}{|f'(z_h)|}} \quad , \quad \tau = \frac{1}{2}|f'(z_h t_E)| \quad (2.54)$$

tal que,

$$ds_E^2 \approx \frac{L^2}{z_h^2} \left(\rho^2 d\tau^2 + d\rho^2 + d\vec{x}^2 \right), \quad (2.55)$$

pois nos permite visualizar melhor a métrica que trabalhamos. Podemos perceber que existe uma singularidade cônica em $\rho = 0$, que é eliminada se permitirmos que a coordenada τ seja cíclica com $\tau = \tau + 2\pi$. Neste caso o período Euclidiano β é dado por

$$\beta = \frac{4\pi}{|f'(z_h)|} \quad (2.56)$$

Como $T \equiv 1/\beta$, temos

$$T = \frac{|f'(z_h)|}{4\pi} = \frac{d}{4\pi z_h} \quad (2.57)$$

^{||} Lembrando que em $f(z_h) = 0$.

voltando a coordenada r , a expressão para temperatura se torna

$$T = \frac{|f'(r_h)|r_h^2}{4\pi L^2} = \frac{r_h}{4\pi L^2} \quad (2.58)$$

Do ponto de vista de uma teoria de campos invariante todas as temperaturas não-nulas são equivalentes e isso pode ser observado pela manifestação de invariância por escala na métrica 2.50, tal que

$$(t, \vec{x}, z) \rightarrow \lambda(t, \vec{x}, z) \quad , \quad z_h \rightarrow \lambda z_h \quad (2.59)$$

2.2 Teoria de campo conforme (conforme field theory-CFT)

As teorias de campo podem ser clássica ou quânticas (TQC) a depender das escalas de energia envolvidas na análise da teoria. Fisicamente sabemos que uma descrição completa da natureza até o momento deve envolver uma descrição quântica, uma vez que a mesma gera, com exceção da gravidade, a outra metade de todo modelo teórico da física moderna: o modelo padrão para as partículas e o bóson de Higgs.

A análise das energias envolvidas num sistema nos convoca a estabelecer limites de emprego das teorias formuladas, uma TQC a depender das escalas de energia que lidamos pode estar condicionada a limites nos quais a teoria enfrenta divergências, exemplo é o condicionamento estabelecido entre os limites infravermelho (IR) e o ultravioleta (UV) nos quais se ultrapassados adentramos paragens aonde nossas limitações matemáticas, físicas, experimentais, filosóficas e até cognitivas nos defrontam. Assim a ideia mais sofisticada nos últimos anos de desenvolvimentos destas áreas é tomar a simetrias do sistemas, ao invés de diretamente lidar com as escalas de energia, como guia para nos informa das características relevantes da física presente. O que se ganha com isto é que, de maneira geral, uma vez estabelecida certa simetrias em um sistema físico com alguns pequenos detalhes podemos gerar uma classe de sistemas outros que satisfazem estas simetrias, assim, cada classe de teoria física que construímos surge da conjuntura ao satisfazer determinados grupos de simetria, bem como, a possibilidade de que as soluções destes mesmo sistemas agrupados nestas classes possam de alguma maneira não satisfazer essas simetrias, de modo que lidamos com quebras espontâneas destas simetrias no sistemas.

Quantizar uma teoria de campos clássica pertencente a determinada classe de

simetrias não nos leva ao mesmo conjunto de simetrias, isso porque uma vez escrita a lagrangiana clássica com acoplamentos g^i , a teoria quântica para tal introduzirá dependências destes acoplamentos sobre as escalas de energia deste determinado processo físico, o que significa que, a descrição de uma TQC muda a depender da escala de energia. A maneira de lidarmos com estas dependências de energia, no intuito de buscarmos uma linguagem baseada nas simetrias, é tarefa da renormalização, de modo a introduzir um limite superior nos graus de liberdade adicionais do sistema, chamado de *cutoff* e no sentido de permitir que a covariância relativística não seja destruída.** O conjunto desta análise de renormalização é conhecida como fluxo de grupo de renormalização (*RG flow*), onde um conjunto de relações diferenciais leva a definição entre as constantes de acoplamento e as escalas de energia (as funções $\beta(g^i)$). Através destas funções β (que se comportam como um tipo de gradiente) podemos construir diagramas de possibilidades para os acoplamentos em função das escalas do sistema e procurar por pontos fixos nesta topologia, Figura 8. Os pontos fixos na topologia do *RG flow* são pontos em que $\beta(g^i) = 0$, que significa que uma vez removidos todos acoplamentos dependentes da energia encontramos uma teoria que a longas distâncias (baixas energias) não depende de nenhuma escala do sistema, ou seja, não mudam sua resolução. Estas teorias, Figura 8, são as teoria de campos conforme (CFT).

Figura 8 – Diagrama do fluxo do grupo de renormalização para uma TQC em duas dimensões, cujos pontos fixos ($\beta(g^i) = 0$) levam a acoplamentos marginais invariantes por escala.

Fonte: QUALLS.⁷⁰

De modo geral, uma CFT é tida como uma teoria que é invariante sob transformações

** Uma pequena discussão histórica sobre o papel da renormalização na construção da TQC pode ser visto na literatura.⁶⁹

conforme. Embora a extensão destas transformações seja mais abrangente, a característica mais significativa para nós é pensar em uma CFT como uma teoria física invariante sobre transformações do grupo de Poincaré em adição a invariância sobre transformações por escala. As transformações de Poincaré são aquelas cuja atuação sobre a métrica no espaço-tempo de Minkowski $\eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(-, +, +, +)$ deixa-a invariante. Podemos representá-las como

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu + a^\mu \quad (2.60)$$

onde a combinação de todas as transformações de Lorentz são parametrizadas por Λ , enquanto as translações são parametrizadas por a .

Já as transformações por escala podem ser pensadas como um "zoom" entrando ou saindo em uma determinada região do espaço-tempo, ou seja, uma reescala, cujos ângulos envolvidos nesta transformação ou neste mapeamento permanecem invariantes. Se desacoplarmos o espaço-tempo em espaço e tempo podemos visualizar esta transformação como

$$t \rightarrow \lambda^z t \quad , x \rightarrow \lambda x \quad (2.61)$$

Para $z = 1$ adentramos as transições de fase com vasto emprego no campo da física conhecido como matéria condensada. É sábio que nas imediações de uma transição de fase todo ponto crítico apresenta invariância por escala e assim podemos dizer que todo ponto crítico (clássico ou quântico) é descrito por uma CFT.⁷⁰ As transições de fase de segunda ordem são apresentadas sucintamente no Capítulo 3 com destaque as transições envolvendo pontos críticos quânticos, que são a motivação à aplicação da conjectura *AdS/CFT* nesta tese.

Um exemplo de teoria clássica invariante por escala é o exemplo de um campo escalar não-massivo com interação quártica,⁷¹

$$S = \int dx^4 \left((\partial\phi)^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) \quad (2.62)$$

é invariante sobre transformação de escala se reescalarmos as coordenadas do espaço-tempo

e o campo ϕ pela transformação

$$\phi(x) \rightarrow \lambda^\Delta \phi(\lambda x) \quad (2.63)$$

onde x representa as coordenadas do espaço-tempo e Δ é conhecido como a dimensão de escala do campo, neste caso $\Delta = 1$.

A quantização da ação acima não é invariante por escala, de modo que, é necessária a renormalização da teoria. Se definirmos $\lambda = e^\alpha$, temos que $e^{i\alpha D}$ gerará todas as dilatações do campo, ou seja, dirigirá quaisquer mudança infinitesimal no campo. Assim, a versão quântica da relação 2.63 é entendida como

$$[D, \phi(x)] = i(\Delta + x_\mu \partial_\mu) \phi(x) \quad (2.64)$$

onde D é o operador dilatação.

2.2.1 Álgebra conforme

De modo mais geral podemos definir as transformações conforme como aquelas que deixam a métrica invariante sobre a transformação $ds^2 = dx_\mu dx_\mu \rightarrow \Omega(x)^2 dx_\mu dx_\mu$, cuja as transformações por escala são uma particularidade com $\Omega(x)^2 = \lambda$. Em $d > 2$ podemos definir os geradores das transformações conforme e a partir destes contruirmos relações de comutação que definem toda álgebra conforme. Esses geradores são descritos abaixo,

$$D = -ix^\mu \partial_\mu \quad \text{Dilatação} \quad (2.65)$$

$$P_\mu = -i\partial_\mu \quad \text{Translação} \quad (2.66)$$

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \quad \text{Rotação} \quad (2.67)$$

$$k_\mu = -(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu) \quad \text{Transformações especiais conforme} \quad (2.68)$$

É importante destacar, que a álgebra conforme em uma assinatura Minkowskiana é equivalente ao grupo $SO(2, d)$, enquanto em uma assinatura Euclidiana é equivalente ao grupo $SO(1, d + 1)$.

Os campos em uma CFT formam uma expansão (fechada) de produto de operadores.⁷² Em uma teoria quântica de campo, usualmente é feita a classificação local destes

operadores de campos $\mathcal{O}(x^\mu)$ através de representações irredutíveis que envolvem o spin do campo, a carga e sua dimensão Δ . Essa expansão de produto de operadores determinam, a princípio, todas as funções de correlação (ou funções de n-pontos) destes campos. Uma maneira interessante de codificar essas funções de correlação é através da análise da função de partição⁷³

$$\mathbf{z}[\phi_{\Delta_i}] \equiv \left\langle \exp \left(\int d^d x \phi_{\Delta_i}(x) \mathcal{O}_{\Delta_i}(x) \right) \right\rangle_{CFT} \quad (2.69)$$

onde ϕ_{Δ_i} são campos (ou fontes) clássicos associados aos operadores de campo $\mathcal{O}_{\Delta_i}(x)$. Tomando as derivadas de $\mathbf{z}$ com respeito a essas fontes podemos gerar todas as funções de correlação buscada,

$$\left\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1) \mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2) \dots \right\rangle = \left. \frac{\partial^n \mathbf{Z}[\phi_{\Delta_i}]}{\partial \phi_{\Delta_1}(x_1) \partial \phi_{\Delta_2}(x_2) \dots} \right|_{\phi_{\Delta_i}} \quad (2.70)$$

Note que, $\mathbf{Z}[\phi_{\Delta_i}]$ é invariante conforme o que faz com que as correlações também o sejam, assim, sobre transformação de escala das fontes esta invariância é manifestada como segue

$$\phi_{\Delta}(x) \rightarrow \lambda^{d-\Delta} \phi_{\Delta}(\lambda x). \quad (2.71)$$

2.3 A conjectura AdS/CFT

Depois de Maldacena ter iniciado as discussões sobre a *AdS/CFT*,⁸ estabeleceu-se^{23,57,74} uma precisa correspondência entre os observáveis em CFT àqueles da teoria de supergravidade. Mais precisamente foi mostrado que as funções de correlação em CFT são dadas através do comportamento assintótico no infinito da ação do AdS, com ênfase no fato de que as dimensões de um operador em CFT é dado pela massa das partículas na gravidade. Assim, nesta identificação encontramos um novo limite para os valores de massa m^2 . À exemplo, ao calcular o comportamento de um campo escalar com massa m^2 no AdS_{d+1} identifica-se que as soluções do mesmo no limite assintótico têm como resultante duas soluções linearmente independentes,⁵⁷ cujo comportamento de seus modos normais oferecem duas classes de soluções empregadas por uma equação do tipo $\Delta(\Delta - d) = m^2 L^2$, onde L é o raio de curvatura do AdS e Δ a dimensão de um operador na CFT. O que faz o dicionário do *AdS/CFT* se estabelecer de fato, é que esta mesma equação também representa o cálculo de uma função de dois pontos para algum operador com dimensão Δ na teoria conforme que acople sobre a fronteira do AdS_{d+1} . Desse modo a conjectura

AdS/CFT estabelece que as funções de partição de ambas teorias são equivalentes,

$$Z_{AdS} = Z_{CFT} \quad (2.72)$$

isto significa que estados, observáveis, funções de correlação e dinâmica têm uma equivalência, ou seja, as teorias descrevem a mesma física sob diferentes pontos de vista. Para tal, é preciso a existência de um dicionário que conecte os graus de liberdades das duas teorias. As ideias neste dicionário giram entorno destes seguintes pontos

Campos no AdS		Operadores locais em CFT	(2.73)
spin	$\longleftrightarrow$	spin	
massa	$\longleftrightarrow$	dimensão de escala Δ	

Um pequeno exemplo dessa associação é a seguinte,

AdS		CFT	(2.74)
ψ	$\longleftrightarrow$	$\mathcal{O}$	
A_a	$\longleftrightarrow$	J_μ	
g_{ab}	$\longleftrightarrow$	$T_{\mu\nu}$	

Portanto, um campo escalar no AdS corresponderá a um operador escalar na CFT, um campo de gauge à uma corrente conservada, enquanto a métrica ao tensor energia-momento.

Desse modo, a seguir discorreremos brevemente a tentativa de construção de (2.72). Não adentraremos aos detalhes, mas esta como outras demonstrações se encontram em vasta literatura.^{12, 16, 16, 75}

2.3.1 Função de Partição

Podemos tentar relacionar as funções de partição das duas teorias escrevendo alguma função covariante dos valores limite de campos na fronteira do AdS_{d+1} e relacioná-los a função de partição dos valores desses campos na CFT. Assim, a partir de uma integral

funcional dos campos $\phi(z, \mathbf{x})$ no AdS_{d+1} mantendo na fronteira $\phi(0, \mathbf{x}) \sim \bar{\phi}(\mathbf{x})$, temos

$$\mathbf{Z}[\bar{\phi}(\mathbf{x})] = \int_{\phi|_{\partial}=\bar{\phi}} \mathcal{D}\phi(z, \mathbf{x}) e^{-S[\phi(z, \mathbf{x})]} \quad (2.75)$$

Como $\mathbf{Z}$ é invariante sobre transformação de escala, que leva $\phi(z, \mathbf{x}) \rightarrow \phi(\lambda z, \lambda \mathbf{x})$, se perto da fronteira ϕ se comporta como

$$\phi(z, \mathbf{x}) \sim z^{d-\Delta} \bar{\phi}(\mathbf{x}) + O(z^{d-\Delta+1}) \quad (2.76)$$

tem-se que $\bar{\phi}$ o valor do campo na fronteira se transformação da seguinte maneira

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}) \rightarrow \lambda^{d-\Delta} \bar{\phi}(\lambda \mathbf{x}). \quad (2.77)$$

Comparando a equação acima com a equação 2.71 em que calculamos as atuação da transformação de escala de fontes na CFT, podemos perceber que $\bar{\phi} \equiv \phi_{\Delta}$, ou seja, a fonte de operador^{††} $\mathcal{O}_{\Delta}$ de dimensão Δ na CFT.

Por exemplo, para um campo escalar ϕ livre no AdS temos a seguinte ação

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} \sqrt{g} \quad \phi(-D_{\mu}D^{\mu} + m^2)\phi, \quad (2.78)$$

cujas equações de movimento geram duas independentes soluções próximas da fronteira, $z^{d-\Delta}$ e z^{Δ} com comportamento assintótico ditado por

$$\phi(z, \mathbf{x}) \sim z^{d-\Delta} \bar{\phi}(\mathbf{x}) + \dots + z^{\Delta} \varphi(\mathbf{x}) + \dots \quad (2.79)$$

com

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m^2 L^2}. \quad (2.80)$$

e $\bar{\phi}$ atuando como fonte para o operador $\mathcal{O}_{\Delta}$ na CFT. Como $\mathbf{Z}$ define uma integral de caminho, de maneira geral, uma teoria quântica é estabelecida para ϕ , assim, uma função de partição de uma teoria de gravidade quântica na fronteira do AdS_{d+1} , estabelecida como função para os campos nesta fronteira, é também uma função de partição destes valores de campos, que atuam como fonte para operadores (primários) em uma CFT_d .

^{††} Neste caso a fonte é um escalar, mas similares argumentos se aplicam a campos não-escalares.

Mostrando que de fato,

$$\mathbf{Z}_{qu-grav}[\bar{\phi}] = \mathbf{Z}_{CFT}[\bar{\phi}] \quad (2.81)$$

Esta relação tem algumas propriedades que são importantes mencionar. Para uma massa negativa ($m^2 < 0$) no AdS, da equação 2.80, temos que quando $0 > m^2 > -d^2/4L^2$, a massa está associada a dimensão $d > \Delta > d/2$ de um operador real e acima do limite unitário na CFT, o que preserva os estados de vácuo segundo o limite de Breitenlohner-Freedman (BF).³¹ Além disso para operadores cuja dimensão Δ está entre os limites $(d+2)/2 > \Delta > d/2$, ambas soluções assintóticas dos campos $z^{d-\Delta}$ e z^Δ são normalizáveis, de modo que, podemos usar quaisquer uma dessas soluções como fontes associadas aos operadores $\mathcal{O}$ ou $\mathcal{O}_{d-\Delta}$, respectivamente^{‡‡}.

A questão relevante aqui é que ainda estamos nos limites da gravitação quântica, ou seja, ainda estamos guardando esta discussão no reino da supercordas e para que possamos calcular nossas relações precisamos buscar limites mais tratáveis da teoria e para uma aproximação semi-clássica da gravidade é preferível neste caso, assim adentramos as equações da Relatividade Geral.

Em baixas energias uma ação efetiva no AdS_{d+1} tem a seguinte forma

$$\frac{1}{\kappa^2} \int d^{d+1}x \sqrt{g} (\mathcal{R} + \alpha' \mathcal{R}^2 + \dots) \quad (2.82)$$

onde $\mathcal{R}$ é escalar de Ricci e os pontos se referem a uma série infinita de termos de ordem superiores construídos a partir de tensores de curvatura, bem como outros campos. Como definido no capítulo 1, temos que as escalas de comprimento para este regime definem o alcance de aplicação da teoria. Assim, temos

$$l_p \sim \kappa^{\frac{2}{d-1}} \quad , \quad l_s \sim \sqrt{\alpha'} \quad (2.83)$$

onde l_p é o comprimento de Planck que em 2.83 define a teoria de gravitação que iremos utilizar e ainda quão relevante será a introdução dos termos de curvatura $\sqrt{\alpha'}$ quando comparados ao tamanho da corda l_s no *bulk*. Se escolhermos $\mathcal{R} \sim R^{-2}$ então a gravitação

^{‡‡} Note que isso nos ajudará a definir qual comportamento assintótico do campo estará associado ao operador dual, cujo comportamento ditará a transição de fase supercondutora na aplicação da AdS/CFT no 4

utilizada será clássica e os termos de alta curvatura serão pequenos, tal que

$$l_p \ll R, \quad l_s \sim R. \quad (2.84)$$

Assim, chegamos a um limite de aproximação clássica do lado gravitacional, que nos permite usar a Relatividade Geral (Einstein), assim

$$\mathbf{Z}_{qu-grav}[\bar{\phi}] \sim \sum_{\{\phi_{cl}\}} e^{-S_{Einstein}[\phi_{cl}]} \quad (2.85)$$

onde ϕ_{cl} representa os valores dos campos clássicos levados em conta, inclusive, a própria métrica do espaço-tempo. Diante dessa aproximação, agora podemos realizar os cálculos do lado gravitacional e extrair desse limite as funções de correlações associadas aos operadores na CFT. Portanto, cada campo ϕ no *bulk* do AdS_{d+1} obedecerá a uma equação diferencial parcial de movimento, cujo comportamento assintótico na fronteira deste espaço-tempo terá a seguinte expressão

$$\phi(z, \mathbf{x}) \sim z^{d-\Delta} \bar{\phi}(\mathbf{x}) + \dots + z^{\Delta} \varphi(\mathbf{x}) + \dots \quad (2.86)$$

onde $\phi = \bar{\phi}$ funcionará como fonte aos operadores $\mathcal{O}_{\Delta}$ na CFT e cujos valores fixados na fronteira $\bar{\phi}$ determinam φ e, portanto, as equações de movimento, logo, $\phi = \phi[\bar{\phi}]$. Assim, avaliando $S_{Einstein}$ neste cenário chegamos a CFT através da AdS/CFT ,

$$S_{Einstein}[\phi_{cl}] = -\ln(\mathbf{Z}_{CFT}[\bar{\phi}]) \equiv -W_{CFT}[\bar{\phi}]. \quad (2.87)$$

onde W_{CFT} são os geradores da CFT. De modo que, a conexão que buscamos para as correlações na CFT são estabelecidas por,

$$\left\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(\mathbf{x}_1) \dots \mathcal{O}_{\Delta_n}(\mathbf{x}_n) \right\rangle_{CFT-conexão} = \left. \frac{\partial^n S_{Einstein}[\{\bar{\phi}\}]}{\partial \bar{\phi}_{\Delta_1}(\mathbf{x}_1) \dots \partial \bar{\phi}_{\Delta_n}(\mathbf{x}_n)} \right|_{\bar{\phi}=0} \quad (2.88)$$

Em geral, para calcular $S_{Einstein}$ introduzimos um *cutoff* para renormalização. Defini-se, então, $z = \epsilon > 0$ com $z = \epsilon$ na fronteira, a fim de se preservar a invariância conforme. Tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$, através de algumas manipulações, pode-se mostrar que para um campo escalar massivo com termo de interação $-(g/4)\phi^4$ a função de dois pontos é dada

por

$$\left\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(\mathbf{x}_1) \mathcal{O}_{\Delta_2}(\mathbf{x}_2) \right\rangle_{CFT} = (2\Delta - d) \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2} \Gamma(\Delta - \frac{d}{2}) |x_{12}|^{2\Delta}} \quad (2.89)$$

o que concorda com um operador primário associado a um escalar desta natureza calculado apenas na CFT.

3 SUPERCONDUTORES

A ideia fundamental para a realização de supercondutores holográficos se baseia na descrição da transição de fase. As transições de fase apresentam classes de universalidades, de tal modo que, diferentes sistemas com diferentes descrições microscópicas podem revelar o mesmo comportamento assintótico para um determinado conjunto de quantidades físicas. O que se tem feito nos últimos anos^{24,25,29,76} é utilizar a dualidade AdS/CFT para criar uma descrição dual de um supercondutor construindo um esquema para que algo represente uma transição de fase do lado da gravidade. Para isso, é necessário estabelecer um certo tipo de dicionário entre as grandezas envolvidas. Para supercondutores com transição de fase dependentes da temperatura, a primeira identificação do dicionário do lado gravitacional é estabelecida através de um buraco negro, uma vez que a este objeto pode ser associada a noção de temperatura e calor específico. A saber, como na maioria dos sistemas não-gravitacionais, o calor específico de um buraco negro no espaço-tempo de AdS é positivo.³² Para a noção de condensado, no entanto, o buraco negro com cabelo é quem desempenhará este papel, de maneira que, a baixas temperaturas exista cabelo, mas que em altas temperaturas não. Em uma abordagem onde a temperatura passa a não ser relevante a transição de fase, sólitons topológicos é quem passam a ser os correspondentes no lado gravitacional.⁷⁷

Da abordagem que utilizamos, *bottom-up*, como dito anteriormente, não se tem acesso direto aos operadores da teoria da fronteira, a QFT , portanto, iniciaremos a discussão tentando capturar os aspectos mais relevantes da física supercondutora começando com transição de fase na teoria de Landau, para seguir com as discussões estabelecidas por Ginzburg-Landau para os supercondutores convencionais e adentrar as transições de fase que envolvam um ponto crítico quântico até alcançar o desenvolvimento dos supercondutores holográficos (Capítulo 4). É importante ressaltar que nossa motivação está nos supercondutores a alta temperatura, cuja temperatura crítica ocorre acima do valor usual para os supercondutores ditos convencionais e nos quais, na vizinhança do ponto crítico, o sistema exhibe invariância por escala, além de estabelecer uma forte correlação entre os elétrons envolvidos no processo de pareamento, uma vez que suas interações podem não necessariamente ser mediadas por fônons.⁷⁸

A gama de materiais que atualmente exibem supercondutividade é bastante grande, além da observação de supercondutores convencionais têm-se observado supercondutividade em materiais ferromagnéticos, em condutores orgânicos, em sistemas de férmions pesados e em sistemas de rutenato de estrôncio, o que fornece fortes argumentos para a existência de tipos mais exóticos de supercondutividade e outras fases de transição que precisam ser consideradas na modelagem deste, um exemplo é a contribuição do spin. Este fenômeno permanece relacionado com a forte interação entre os elétrons nestes materiais, colocando-os pertencente a uma classe mais geral chamada Materiais Eletrônicos Correlacionados.⁷⁹

3.1 Transição de fase - Teoria de Landau

As transições de fase são caracterizadas por meio de mudanças em determinadas quantidades macroscópicas de um sistema através da variação de algumas variáveis termodinâmicas ou parâmetros intensivos. Em 1930, em sua tese de doutorado, o físico Landau⁸⁰ desenvolveu uma abordagem fenomenológica conhecida como a teoria de Landau para as transições de fase, percebendo que se uma transição apresenta variação quanto à ordem do sistema é possível associar a esta transição um parâmetro de ordem, que nada mais é do que uma variável que respeita a simetria do sistema e que na fase ordenada é diferente de zero, sendo levada a zero na fase desordenada.

Assim, dentro desta abordagem pode-se classificar uma transição de fase quanto a sua ordem, ou seja, se o parâmetro de ordem vai à zero de forma descontínua, apresentando saltos numa transição, diz-se de primeira ordem; se o parâmetro de ordem vai à zero de forma contínua, suave, então, segunda ordem ou contínua.⁸¹ Além disso, uma transição de fase pode ser classificada como clássica ou quântica mediante ao predomínio das energias que levam o sistema a transicionar. A transição de fase clássica é caracterizada pela presença de flutuações térmicas como responsáveis por levar um sistema a transição, já quando a temperatura de um sistema é levada à zero, outro tipo de flutuação ganha domínio, as flutuações quânticas, geridas pelo Princípio da Incerteza de Heisenberg, podem levar o sistema a uma transição de fase ou podem levar a destruição da ordem de um sistema ordenado.

3.1.1 Transição de Fase Clássica

Numa transição de segunda ordem a medida que modificamos algumas variáveis do sistema, seja pressão, temperatura ou dopagem, por exemplo, é possível alcançar um ponto terminal a partir do qual não identificamos mais a coexistência entre as fases até ali apresentadas, este ponto é chamado ponto de crítico*. A proposta de Landau para caracterização de um sistema que sofre esse tipo de transição reside na expansão da energia livre de Gibbs G em torno do parâmetro de ordem nas imediações da transição de fase, de modo que a energia livre seja função analítica nas vizinhanças da criticalidade. A análise é feita com base na energia livre, pois esta é capaz de nos informar sobre toda dinâmica do sistema sem a necessidade da construção de Hamiltonianos, além de que durante a transição de fase o sistema busca o equilíbrio minimizando-a. Assim espera-se que em uma linha de coexistência, antes do ponto crítico, as fases estejam em equilíbrio, tal que, na transição a variação da energia livre de Gibbs seja a mesma para ambas as fases.⁸⁰

Segue-se assim que sendo g a energia livre de Gibbs por partícula sua expansão em termos dos invariantes de um dado sistema, cujo o parâmetro de ordem é um escalar (por simplicidade) é dada pela equação 3.1, onde Y é um campo termodinâmico como pressão ou campo magnético, por exemplo

$$g(T, Y, \psi) = g_0(T, Y) + g_1(T, Y)\psi + g_2(T, Y)\psi^2 + g_3(T, Y)\psi^3 + g_4(T, Y)\psi^4 + \dots \quad (3.1)$$

É importante ressaltar que nem sempre está garantida a existência desta expansão, mas de modo a descrever o ponto crítico e na tentativa de buscar um mínimo, em muitos casos podemos através de um rearranjo descartar o termo de terceira ordem g_3 e eliminar o termos de mais alta ordem ψ , mantendo-se o termo quártico. Assim, obtemos

$$g(T, Y, \psi) = A_0(T, Y) + A_1(T, Y)\psi + A_2(T, Y)\psi^2 + A_4(T, Y)\psi^4 \quad (3.2)$$

Nesta teoria existe uma certa arbitrariedade quanto a escolha e a definição do parâmetro de ordem, a única necessidade é que essas escolhas mantenham expressa a relação de simetria do sistema, de modo que, os termos em $A_i(T, Y)$ representem os

* Transições de fase de primeira ordem não apresentam pontos críticos, pois nestas sempre há a coexistência de ambas as fases.

rearranjos mencionados anteriormente. Analisando-se as primeiras derivadas g , para que o ponto crítico esteja associado a um mínimo estável, os termos A_1 e A_2 devem ser nulos na criticalidade.

Assim, qualitativamente o que se observa é que antes da transição de fase $T > T_c$ (em geral em altas temperaturas) o sistema se apresenta menos ordenado e mais simétrico com um valor mínimo para o parâmetro de ordem. Essa simetria está relacionada as invariâncias do sistema, enquanto a ordem está relacionada a organização do mesmo, de forma que, nessa fase o parâmetro de ordem é nulo. Quando nos encontramos depois da transição $T < T_c$ (em geral em baixas temperaturas), o sistema agora se apresenta mais ordenado, ou seja, agora tem-se um valor não-nulo para o parâmetro de ordem, além da ocorrência de uma quebra espontânea de simetria durante a transição. Então, o único valor mínimo para o parâmetro de ordem do sistema se torna um máximo. A Figura 9 apresenta esquematicamente esta ideia, onde $g_s = g - A_0$.

Figura 9 – Abaixo da temperatura crítica o mínimo do parâmetro de ordem se torna máximo e aparecem dois outros mínimos simétricos.

Fonte: SALINAS.⁸⁰

No ponto crítico, grandezas termodinâmicas derivadas em termos da energia livre, como o calor específico e a susceptibilidade magnética, apresentam singularidades, além de apresentarem comportamentos assintóticos com leis de potências associadas a uma classe de expoentes críticos obtidos tanto experimentalmente quanto teoricamente. A relação entre essas grandezas e estes expoentes estão exemplificadas para susceptibilidade magnética χ de um sistema ferromagnético em função da temperatura reduzida $t = (T - T_c)/T_c$, abaixo.

$$\chi(t) = - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial H^2} \right)_T \sim |t|^{-\gamma}, H = 0, t \rightarrow 0^\pm \quad (3.3)$$

Note que, H é o campo magnético externo, T a temperatura absoluta e a lei de potência

é representada pelo fator γ . Estes expoentes apresentam uma classe de universalidade no tratamento das transições de fase, pois para diferentes sistemas físicos com diferentes interações microscópicas encontramos os mesmos conjuntos de expoentes críticos.

3.1.2 Transição de Fase Quântica

As transições de fase quântica acontecem em $T = 0K$, onde T é a temperatura absoluta. Experimentalmente não se consegue levar um sistema a temperatura nula, mas próximo ao ponto crítico de qualquer sistema físico as flutuações quânticas, exibem invariância de escala no espaço e no tempo devido à divergência do comprimento das correlações associadas ao parâmetro de ordem.⁸⁰ Com as correlações divergindo, a influência do ponto crítico é tal que pode passar a ser sentida em uma ampla gama de temperaturas acima deste ponto, de forma que é possível a análise da transição sem de fato alcançar-se o zero absoluto, uma vez que a ordem do sistema pode ser preservada a longo alcance.⁷⁸

Teoricamente para a realização da transição de fase quântica é necessária que a amplitude das variações que leva o sistema a transicionar seja controlada por algum parâmetro adimensional, que chamaremos de g , no Hamiltoniano, tal que

$$H = H_0 + gH_1 \quad (3.4)$$

em que H_0 e H_1 representem o estado fundamental e o estado excitado, respectivamente. Em geral na equação 3.4, H_0 e H_1 não comutam significando a existência de uma diferença de energia Δ entre o estado fundamental e o estado excitado com diferentes estados quânticos acoplados por g . A transição de fase é caracterizada tomando-se o limite termodinâmico, pois próximo desse limite, a diferença entre os estados fundamental e excitado diminui até o ponto $g = g_c$, onde g_c representa o ponto crítico. Neste ponto o estado excitado torna-se o estado fundamental e a energia livre do sistema, representada $E(g)$, tornar-se não analítica.

Figura 10 – Representação esquemática das transições de fase pelos cruzamentos dos níveis de energia E dos estados fundamental e excitado no entorno de $g = g_c$. Em $a)$ há uma transição de primeira ordem e em $b)$ uma transição de segunda ordem.

Fonte: ALMEIDA.⁸²

Existem duas maneiras pelas quais a transição pode ocorrer, a Figura 10 apresenta em $a)$ a transição de fase gerida pelo cruzamento efetivo das energias do estado fundamental e excitado, neste caso H_0 e H_1 comutam e temos uma transição de fase de primeira ordem que pode ocorrer mesmo em um sistema finito. Já em $b)$ temos a transição acontecendo no limite do cruzamento das energias, ou seja, o toque entre as energias ocorre quando nos aproximamos do limite termodinâmico, pois nesse limite o sistema cresce ao infinito diminuindo o anticruzamento até haver uma singularidade na energia do estado fundamental, ou seja, essa fica não-analítica em $g = g_c$. Essa transição de fase é dita de segunda ordem ou contínua e podemos relacionar, neste caso, o comprimento de correlação característico de um sistema ξ com a diferença de energia entre os estados fundamental e o primeiro estado excitado Δ , que vai a zero como função do parâmetro g na forma de

$$\Delta \sim |g - g_c|^{\nu z} \quad (3.5)$$

onde νz são expoente crítico universais. Em transições contínuas ξ diverge com

$$\xi \sim |g - g_c|^{-\nu} \quad (3.6)$$

Tal que,

$$\Delta \sim \xi^{-z} \quad (3.7)$$

na qual, z é chamado expoente crítico dinâmico. Pela equação acima é fácil verificar que à

medida que o comprimento de correlação diverge a diferença entre os estados fundamental e primeiro estado excitado vai à zero. A invariância por escala no espaço e tempo no ponto crítico é então expressa por

$$t \rightarrow \lambda^z t, x \rightarrow \lambda x \quad (3.8)$$

Os casos em que $z = 1$ são sistemas que têm simetria de Lorentz, cujas escalas se tornam parte do grupo de simetria conforme $SO(d+1, 2)$ em d -dimensões espaciais,³⁰ ou seja pertencem à CFT, e por isso, são os sistemas físicos de interesse a nós, sob os quais aplicaremos a conjectura AdS/CFT .

A questão é que não é possível ainda chegar experimentalmente em $T = 0K$, mas como dito anteriormente, à medida que identificamos a presença de um ponto crítico quântico em temperatura nula, ou seja, que identificamos g_c , este ponto pode passar a afetar o comportamento de todo o sistema a temperatura finita e nisso consiste o desafio a ser feito. Se supusermos um sistema a temperatura finita, devemos nos perguntar qual tipo de transição esta acontecendo, quer dizer qual flutuação: térmica ou quântica está regendo o sistema. Para isso podemos classificar as transições quanto à predominância da flutuação comparando as escalas de energia do sistema, neste caso onde $k_B T$ é a energia térmica do sistema clássico enquanto $\hbar\omega$ é a flutuação associada ao comprimento de onda do parâmetro de ordem quântico. Quando $\hbar\omega \ll k_B T$ a transição em questão é dita clássica e empregamos os métodos estatísticos convencionais, já quando $\hbar\omega \gg k_B T$ a transição é quântica tendo sua estatística determinada pelo Princípio da Incerteza de Heisenberg.

Essa comparação entre as energias nos permite dividir o sistema quanto a sustentação de uma ordem de longo alcance a temperatura nula ou finita através da análise do diagrama de fases no plano $g-T$ na vizinha do ponto crítico como descrito na Figura 11. Em *a)*, o sistema possui ordem apenas em $T = 0K$. Uma vez que não acessamos a temperatura absoluta dividimos a transição de fase quântica em regimes nos quais podemos arguir sobre nossas conclusões teóricas. A região *(i)* chamada de clássico desordenado em $g < g_c$, apresenta ordem $T = 0K$; em *(ii)* chamado de quântico desordenado para $g > g_c$, as flutuações quânticas destroem a ordem de longo alcance do sistema e em *(iii)* chamado de ponto crítico, região esta próxima ao ponto crítico quântico $g = g_c$, existem ambas as flutuações, térmicas e quânticas, assumindo papéis relevantes e cujos limites dependem

do ajuste do parâmetro de ordem pela condição $k_B T > \hbar \omega \sim |g - g_c|^{\nu_z}$, de modo tal, que se as flutuações térmicas tornarem-se suficientemente longas podemos obter a perda da criticalidade. Em b), o sistema possui uma ordem de longo alcance à temperatura finita. Nessa situação, o ponto crítico quântico g_c é o ponto terminal da linha crítica das transições com $T_c \neq 0K$, onde as flutuações térmicas diminuem crescendo em direção a área sombreada da figura, cuja linha preta representa o domínio da transição de fase clássica. Assim, o ponto crítico quântico pode ser aproximado de duas maneiras diferentes: $g \rightarrow g_c$ à $T = 0K$ ou com $T \rightarrow 0K$ à $g = g_c$, em que o último permite uma abordagem experimental.

Figura 11 – Representação esquemática de um diagrama de fases no plano $g - T$ próximo ao ponto crítico. Em a) o sistema possui ordem apenas em $T = 0K$, já em b) o sistema possui ordem de longo alcance a temperatura finita.

Fonte: ALMEIDA.⁸²

Tanto a supercondutividade quanto a superfluidez são fenômenos associados a transição de fase quântica. A introdução a teoria de Landau exposta acima foi feita no intuito de que se nos mantivermos num regime de transição onde a mesma possua parâmetro de ordem exibindo escalas divergentes no ponto crítico, como mencionada na Figura 10b, podemos aplicar a metodologia de Landau. Isso foi feito por Ginzburg-Landau aos materiais supercondutores em 1950⁸³ e sobre a qual discutiremos, brevemente, a seguir.

3.2 Supercondutores

No início do século 20, descobriu-se que a resistividade de alguns metais cai a zero quando sua temperatura diminui abaixo de uma temperatura crítica T_c permitindo que

uma supercorrente flua livremente no material. Isto foi concebido à primeira vez pelo físico Heike K. Onnes em 1911 ao resfriar mercúrio no entorno de $4K$ ⁸⁴ através do hélio liquefeito.⁸⁵ Em 1933 Meissner e Ochsenfeld mostraram que materiais supercondutores exibem perfeito diamagnetismo abaixo da temperatura crítica expelindo qualquer campo magnético no seu interior.⁸⁶

Figura 12 – Evolução do aumento da temperatura crítica T_c para materias surpercondutores ao longo dos anos desde a descoberta de Ohms no resfriamento de mercúrio à $4.2K$.

Fonte: HOFFMAN.⁷⁹

Uma descrição microscópica completa de um supercondutor convencional com temperatura crítica próxima ao zero absoluto é fornecida pela teoria BCS desenvolvida pelos físicos Bardeen-Cooper-Schrieffer em 1957.²⁷ Nesta teoria, uma fração do número total de elétrons do sistema condensa em um estado macroscópico descrito pela fase supercondutora onde a condução elétrica passa a fluir sem resistência. O condensado é composto por pares de elétrons com momentos e spins opostos conectados através de um fónon da rede e são conhecidos como os pares de Cooper.

A teoria de Ginzburg-Landau (GL)⁸⁷ para supercondutores foi realizada em 1950 e obteve grande sucesso em explicar suas propriedades macroscópicas. Nesta teoria, que também pode ser deduzida da teoria BCS,⁸⁸ a energia livre de um supercondutor é descrita em termos de uma transição de fase de segunda ordem cujo parâmetro de ordem é um campo escalar complexo Ψ diretamente relacionado a densidade de elétrons na componente

supercondutora, $|\Psi|^2$.²⁴ A contribuição de Ψ para a energia livre é dada pela eq. 3.9,

$$F = F_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*}|(-i\nabla - e^*\vec{A})\Psi|^2 + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_o} \quad (3.9)$$

onde F_n é a energia livre na fase normal, α e β são constantes fenomenológicas positivas, que se comportam como $\alpha = \alpha_0(T_c - T)$ com α_0 e β positivos. $\vec{A}$ é o potencial vetor onde $B = \nabla \times \vec{A}$ é o campo magnético. É importante lembrar que o índice estrela (*) representa na Teoria BCS massa e cargas efetivas, já que a partícula supercondutora é um bóson formado por dois elétrons com carga q e massa m cada um, tal que $m^* = 2m$ e $e^* = 2e$, mas que aqui representam a carga e a massa do campo escalar. Note que a Eq. 3.9 é invariante sobre transformação de gauge $U(1)$,

$$\Psi \longrightarrow \Psi e^{i\theta(x)} \quad , \quad \vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \frac{1}{e^*}\nabla\theta(x) \quad (3.10)$$

Para obter a equação de Ginzburg-Landau para $|\Psi|$ basta minimizarmos a energia livre dada pela eq. 3.9 com respeito ao parâmetro de ordem, tal que

$$\alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m^*}(-i\nabla - e^*\vec{A})^2\Psi = 0 \quad (3.11)$$

Se considerarmos o caso homogêneo em que não há corrente supercondutora, temos

$$\alpha|\Psi| + \beta|\Psi|^2\Psi = 0 \quad (3.12)$$

De modo que quando $T > T_c$ estamos na fase normal do sistema onde $\Psi = 0$, que tem menor energia potencial e portanto é dominante sobre o mesmo. Já quando $T < T_c$ adentramos a fase supercondutora onde $\Psi \neq 0$, tal que existe uma família de soluções para Ψ que geram o estado fundamental dado por

$$|\Psi_0| = \sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha_0(T_c - T)}{\beta}} \quad (3.13)$$

Através desta equação vemos que a transição de fase ocorre com a quebra espontânea da simetria de gauge, o sistema passa de uma fase normal a uma fase condutora a medida que T se aproxima de T_c , o que caracteriza o comportamento de transição de segunda ordem.²⁴

Agora, se minimizamos a energia livre na eq. 3.9 com respeito ao potencial vetor, obtemos

$$\vec{J}_s = -\frac{ie^*}{2m^*}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*}\Psi^*\Psi\vec{A} \quad (3.14)$$

onde J_s é a corrente elétrica supercondutora. Se negligenciarmos a contribuição do primeiro termo nesta equação, considerando o caso homogêneo ainda, verificamos que $\vec{J}_c \sim \vec{A}$. Se tomarmos a derivada temporal em ambos os lados chegaremos a

$$\vec{E} = -\partial_t\vec{A} \sim \partial_t\vec{J}_s \quad (3.15)$$

A eq. 3.15 está relacionada a equação de London afirmando que o campo elétrico acelera a corrente supercondutora resultando numa infinita condutividade. Tomando-se o rotacional combinando a equações de Maxwell é possível chegar-se ao Efeito Meissner $\nabla^2\vec{B} \sim \vec{B}$, indicando o decaimento no interior de um material supercondutor de um campo magnético aplicado.

A Teoria de GL prevê duas escalas de comprimento características para o estado supercondutor: o comprimento de correlação dado por ξ

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{2m^*|\alpha|}} \quad (3.16)$$

em que ξ representa a escala de comprimento da variação espacial do parâmetro de ordem, ou seja, na Teoria BCS o tamanho do par de Cooper; e o comprimento de penetração magnética λ .

$$\lambda = \sqrt{\frac{m^*}{\mu_0 e^{*2} |\Psi_0|^2}} = \sqrt{\frac{m^* \beta}{\mu_0 e^{*2} |\alpha|}} \quad (3.17)$$

que caracteriza a velocidade de decaimento exponencial de um campo magnético aplicado à superfície de um supercondutor, em que $|\Psi_0|$ representa o valor de equilíbrio para o parâmetro de ordem na ausência deste campo. A medida que $T \rightarrow T_c$ ambos ξ e λ divergem com o mesmo expoente crítico,

$$\xi \propto (T - T_c)^{-1/2} \quad (3.18)$$

$$\lambda \propto (T - T_c)^{-1/2} \quad (3.19)$$

Podemos, ainda, definir um parâmetro κ independente da temperatura através destes comprimentos característicos

$$\kappa := \frac{\lambda}{\xi} = \frac{m^*}{e^*} \sqrt{\frac{2\beta}{\mu_0}} \quad (3.20)$$

e classificar os supercondutores, tal que, os supercondutores do tipo-*I* apresentam valores de $0 < \kappa < 1/\sqrt{2}$, enquanto os supercondutores do tipo-*II* apresentam valores de $\kappa > 1/\sqrt{2}$. Os supercondutores do tipo-*II* têm comprimento de penetração maior que o comprimento de correlação, de modo que um campo suficientemente forte pode penetrá-lo formando vórtices.¹⁶

Os supercondutores do tipo-*II* também compõem um outro tipo conhecido como supercondutores de alta temperatura, com $T_c > 30K$. Estes supercondutores foram descobertos experimentalmente em 1986²⁸ e são compostos por óxidos de cobre sendo chamados também de supercondutores a base de cupratos, estando os elétrons ou buracos nos planos 2-dimensionais das estruturas Cu-O, o que promove a supercondutividade.

A Figura 13 mostra um diagrama típico do se tem conhecimento da transição de fase para estes materiais com alta temperatura crítica T_c . A fase supercondutora destes materiais ainda não é bem entendida. Enquanto a teoria BCS, que explica bem os supercondutores convencionais, está baseada na interação fracamente acoplada entre os elétrons que formam o par de Cooper, o mecanismo por trás destes supercondutores sugere o acoplamento fortemente correlacionado entre os elétrons, de modo que, apesar de a Matéria Condensada ter algumas ferramentas para lidar com este tipo de abordagem ainda não se conhece todos os mecanismos que os envolvem nem tampouco uma completa descrição de todas suas transições. O apelo ao estudo dos supercondutores holográficos é que seja possível ao menos a construção de um completo diagrama de fase gerando *insights* sobre os processos envolvidos. Não espera-se, claro, que se obtenha uma descrição completa microscópica destes mecanismos, para tal uma teoria quântica ainda deve ser estabelecida.

Figura 13 – Diagrama típico para transição de fase de usupercondutores a altas temperaturas.

Fonte: Adaptada de BAGGIOLI.⁸⁹

3.2.1 Supercondutores não-homogêneos

Nas últimas décadas, muitos tipos de supercondutores não-convencionais foram descobertos. Um exemplo disso são os materiais ferromagnéticos supercondutores que podem se tornar supercondutores quando um campo magnético é aplicado. Este mecanismo permite que as duas espécies envolvidas nos fenômenos de pareamento tenham suas superfícies Fermi diferentes e distintas, o que significa que as duas espécies fermiônicas podem contribuir com populações desequilibradas ou potenciais químicos desequilibrados na fase supercondutora. Este processo é chamado de supercondutividade não-homogênea e pode ser estendido a um contexto de densidade finita em *QCD* ou a outros materiais supercondutores quando dopados.⁹⁰

Se o acoplamento entre o campo externo e os elétrons de condução for suficientemente alto, o pareamento eletrônico é quebrado e o sistema passa da fase supercondutora à normal através de uma transição de fase de primeira order, cujo processo é denominado como limite de Chandrasekhar-Clogston.⁴⁸ Porém, a supercondutividade não-homogênea pode levar à quebra espontânea das simetrias no espaço do estado fundamental e valores apropriados da diferença entre os potenciais químicos permite o surgimento de um gap modulado anisotropicamente, que pode favorecer energeticamente o aparecimento de uma nova fase em relação ao estado BCS e o estado normal não-supercondutores, conhecida como fase LOFF, devido aos estudos de Fulde, Ferrell, Larkin e Ovchinnikov em 1964.^{46,47}

A aplicação de um campo magnético externo ao material supercondutor gera um acoplamento entre o momento angular orbital dos elétrons e o campo suprimindo,

muitas vezes, a interação Zeeman também presente, devido a interação do campo com o momento de spin eletrônico. Se quisermos olhar a supercondutividade não-homogênea temos levar em conta o desequilíbrio causado pela presença do efeito Zeeman nestes elétrons, isso pode ser feito observando a população eletrônica associada aos spins up e down, $(n_\uparrow)$ e $(n_\downarrow)$, respectivamente ou diretamente no desequilíbrio entre os potenciais químicos destes, com $(\mu_\uparrow)$ para o spin up $(\mu_\downarrow)$ para o spin down. Embora supercondutores convencionais possam apresentar estes desequilíbrios, existem geometrias em materiais supercondutores não-convencionais, como os cupratos, por exemplo, que podem favorecer esta configuração. Neste caso, justamente porque a supercondutividade se dá em planos paralelos ao aplicarmos um campo externo na direção destes planos, surge uma corrente perpendicular entre os planos que inibe o acoplamento angular e permite que o efeito Zeeman se torna dominante.⁶⁶ Podemos, assim, introduzir a seguinte relação,

$$\delta\mu = \frac{\mu_\uparrow - \mu_\downarrow}{2} \quad (3.21)$$

$$\mu = \frac{\mu_\uparrow + \mu_\downarrow}{2} \quad (3.22)$$

em que μ é o potencial químico médio e $\delta\mu$ o potencial químico desequilibrado, de modo que as diferenças entre as duas espécies eletrônicas sejam dadas por $\mu_\uparrow = \mu + \delta\mu$ e $\mu_\downarrow = \mu - \delta\mu$. Para um supercondutor metálico, a interação no hamiltoniano devido ao efeito Zeeman pode ser escrita como $\mathcal{H}_I = \bar{\Psi}\gamma^0 H_z \mu_B \sigma_3 \Psi$, onde μ_B é o magneto de Bohr e $\sigma_3 = \text{diag}(1, 1)$, de tal modo que, o potencial desequilibrado passa ser identificado como $\delta\mu = H_z \mu_B$.⁴⁴ As transições que envolvem o potencial químico $\delta\mu$ para supercondutores não-homogêneos são representadas no diagrama de fase na Figura 14.

Figura 14 – Transição de fase para supercondutores não-homogêneos mostrando o limite Chandrasekhar-Clogston e a formação da fase LOFF.

Fonte: BIGAZZI *et al.*⁴⁴

onde a linha pontilhada indica possibilidade da transição de fase da fase supercondutora a fase normal através de uma transição de primeira ordem desde o ponto triplo (TCP) até o limite $\delta\mu = \delta\mu_1$, este é o limite de Chandrasekhar-Clogston. A linha cheia desde do ponto (TCP) ao valor $\delta\mu = \delta\mu_2$ indica a transição de fase do estado BCS comum, cuja transição de ordem da fase supercondutora a fase normal é dada através de uma transição de segunda ordem. A fase LOFF é a possibilidade de a partir do ponto (TCP) o sistema transicionar a valores intermediários de $\delta\mu_1 \leq \delta\mu \leq \mu_2$.

Como dito, a LOFF fase pode acontecer em outros sistemas físicos como átomos ultrafrios na transição entre a fase supercondutora e a fase Bose-Einstein⁹¹ ou na interação de cor na formação do condensado quark-quark em baixas temperaturas e densidades altas em *QCD*. Neste caso a LOFF pode ser induzida, além da diferença de potencial químicos dos quarks envolvidos, também pela diferença entre as suas massas.⁹² Além da observação de supercondutores ferromagnéticos, a supercondutividade em condutores orgânicos, em sistemas de férmions pesados e no rutenato de estrôncio fornece fortes argumentos para a existência de tipos mais exóticos de supercondutividade e outras fases de transição que precisamos levar em consideração a contribuição do spin. Está claro hoje em dia que este fenômeno permanece relacionado com a forte interação entre os elétrons nestes materiais, colocando esta interação em uma classe mais geral chamada Materiais Eletrônicos Correlacionados.⁷⁹

O interessante sobre esses materiais é que podemos promover a sintonia entre duas

ou mais fases ajustando alguns parâmetros externos ao sistema, como pressão, dopagem e até mesmo temperatura. Como dito, estas transições de fase apresentam ponto crítico quântico e o sistema exibe uma invariância por escala, tal que, as características principais das transições de fase são preservadas a longo alcance. Assim, o surgimento da melhor compreensão da dinâmica da criticidade quântica, bem como o entendimento de seu comportamento com parâmetros de múltiplas ordens torna-se necessária.⁷⁸ Neste sentido a holografia pode ter um papel fundamental, as propriedades estatísticas, que nos permitem olhar para o comportamento macroscópico de um sistema sem ter alcance completo de sua entidade microscópica permitiu a física grandes saltos e neste caso não nos parece diferente. Embora a análise a ser feita abrange a relatividade geral, o dicionário estabelecido dentro da correspondência nos permite voltar a teoria quântica e aprender deste comportamento global. É claro que um desenvolvimento sólido virá com o avanço de teorias quânticas, sejam elas em cordas, em matéria condensada ou na própria gravidade; porém, também é claro que a dualidade gauge/gravidade tem nos mostrado rotas e conexões incrivelmente interessantes e plausíveis em quase todas as situações que tem sido colocada.⁷⁵

4 ROTAS PARA UM SUPERCONDUTOR HOLOGRÁFICO

Uma vez estabelecido o dicionário da conjectura AdS/CFT pretendemos neste capítulo avançar no desenvolvimento da aplicação da mesma aos estudos dos supercondutores com motivação aos supercondutores em alta temperatura, carentes, até o momento, de uma descrição quântica satisfatória em sua microscopia e complexidade. Pretendemos fazer uma revisão desde o surgimento desta aplicação até sua efetiva concretização.^{19, 25, 29}

A ideia é essencialmente usar buracos negros ou sólitons na gravidade clássica para descrever uma transição de fase quântica. Nosso foco, como já dito, estão nas transições de segunda ordem envolvendo temperatura, para tal, nossas soluções são baseadas em buracos negros, o ingrediente associado à termodinâmica no AdS, cuja dinâmica poderá ser associada à dinâmica supercondutora nas imediações do ponto crítico na CFT.

4.1 Supercondutores Holográficos

Uma das primeiras realizações de AdS/CFT ao modelo de supercondutores foi proposta por Steven S. Gubser em 2008,¹⁹ dentro da abordagem *bottom-up* ainda. A proposta consiste no estudo da formação de cabelo imediatamente do lado de fora do horizonte de eventos de um buraco negro no espaço-tempo de AdS. A origem do termo cabelo, assim como o nome buraco negro foram cunhados pelo físico John Wheeler.⁹³ Wheeler anunciou a conjectura conhecida atualmente como “*No hair conjecture*”, mais precisamente afirmando a proibição da existência de campos associados as soluções de buracos negros estacionários, além dos campos gravitacional e eletromagnético. Bekenstein⁹⁴ afirma de maneira mais atualizada que o cabelo para um buraco negro pode ser definido como qualquer parâmetro livre associado a este que não esteja sujeito à Lei de Gauss, assim massa, momento angular e carga, a priori, seriam quantidades suficientes na caracterização das soluções do tipo buracos negros estacionários. A “*No hair conjecture*” tem seu estabelecimento para soluções estacionária num espaço-tempo plano, enquanto a ideia de Gubser tem seu *background* num espaço-tempo com curvatura negativa, de tal forma que, não consiste uma violação.

Assim, foi proposto que a acoplagem de uma lagrangiana do tipo *Abelian-Higgs* à uma lagrangiana do tipo *Einstein-Hilbert* com constante cosmológica negativa geraria a quebra espontânea da simetria de gauge $U(1)$ (local) das soluções próxima ao horizonte de

eventos de um buraco negro carregado, eq. 4.1, ou seja, a existência de campos escalares não triviais nessa região. Nesta equação os campos são definidos, de modo que, a constante de Newton G_N é dada como um pré-fator global,

$$16\pi G_N \mathcal{L} = R - \frac{6}{L^2} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - |\partial_\mu \psi - iq A_\mu \psi|^2 - m^2 |\psi|^2. \quad (4.1)$$

Previamente, para analisarmos a formação deste cabelo vamos assumir a seguinte métrica

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + ds_2^2 \\ A_\mu dx^\mu &= \Phi dt \\ \psi &= \psi(r) \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde os campos descritos dependem apenas de r e o termo ds_2^2 é proporcional a uma métrica em duas dimensões. Supomos ψ pequeno de modo que a *backreaction* para os campos possa ser negligenciada. Assim, se olharmos apenas os dois últimos termos da eq. 4.1, teremos

$$16\pi G_N \mathcal{L}_\psi = -g^{tt} q^2 \Phi^2 |\psi|^2 - g^{rr} |\partial_r \psi|^2 - m^2 |\psi|^2 \quad (4.3)$$

cuja massa efetiva do campo escalar é dada por

$$m_{eff}^2 = m^2 + g^{tt} q^2 \Phi^2 \quad (4.4)$$

Da eq. 4.4 o termo g^{tt} diverge para $-\infty$ no horizonte tornando-se negativo imediatamente fora do mesmo de maneira que a massa efetiva m_{eff}^2 pode se tornar negativa para valores de Φ diferente de zero nessa região. Para que as relações sejam bem definidas e o termo Φdt não venha a divergir também é necessário que Φ seja nulo no horizonte podendo assumir valores não-nulos na fronteira. Para Φ não-nulo imediatamente fora do horizonte de eventos, valores de q grandes e eventualmente valores pequenos de m^2 são claramente possíveis permitindo que m_{eff}^2 se torne negativa favorecendo a formação do cabelo.

Este panorama é o que permite dentro da geometria do AdS a quebra espontânea local da simetria de gauge $U(1)$ próximo ao horizonte de eventos. Analisando a eq. 4.1 podemos perceber que em um espaço plano, com constante de curvatura nula, este

acoplamento não favoreceria a formação de cabelo uma vez que o termo $m^2|\psi|^2$ para o campo escalar é constante em todo o espaço, impossibilitando, assim a quebra de simetria. Mas segundo as propriedades do AdS é possível que para determinados valores de q a contribuição do termo m^2 possa se tornar suficientemente negativa dentro dos limites de Breitenlohner-Freedman (BF)³¹ e permitir que a quebra de simetria ocorra, ou seja o acoplamento entre o campo escalar ψ e o campo de gauge torna instável as soluções para $\psi = 0$. O limite de BF afirma que se $m^2 L^2 > -\frac{d^2}{4L^2}$ fica garantida a estabilidade dos estados de vácuo do AdS.

Sendo assim, procuramos então, soluções onde o campo escalar ψ dependenda somente de r , seja infinitesimalmente pequeno e não-nulo. Quando $\psi(r) = 0$ as soluções da equação 4.1 são do tipo Reissner-Nordström (RNAdS) em 4-dimensões,

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega_{2,k}^2 \quad (4.5)$$

com

$$f = k - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{2r^2} + \frac{r^2}{L^2} \quad , \quad \Phi = \frac{Q}{r} - \frac{Q}{r_h}. \quad (4.6)$$

onde $k = 0$ para $d\Omega_{2,k}^2 \in \mathbb{R}^2$ e $k > 0$ para $d\Omega_{2,k}^2$ a métrica de uma 2-esfera com raio $1/\sqrt{k}$. Um horizonte de eventos regular em $r = r_h$ surge em $f(r_h) = 0$. Note que M e Q são quantidades cujas as dimensões de comprimento dependem da escolha de G_N e k .

Para utilizar a conjectura *AdS/CFT* precisamos buscar soluções que deixem o sistema invariantes pela transformação de escala $X \rightarrow \lambda^\alpha X$, para uma dada quantidade X com uma carga α . A análise destas transformações no leva ao fato de que para termos um horizonte de eventos distinto de zero, bem como a permissão de cargas Q diferentes de zero, as simetrias impostas devem ser do tipo de simetrias segunda ordem, o que por sua vez coincidem com o tipo de simetria que buscamos que as soluções de $\psi(r) \neq 0$ possam espontaneamente quebrar.

Da lagrangiana 4.3 temos a seguinte equação de movimento para o campo escalar

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_r \sqrt{-g} g^{rr} \partial_r \psi + m_{eff}^2 \psi = 0 \quad (4.7)$$

cujas soluções nos leva a análise das condições de contorno (horizonte de eventos e fronteira)

pela formação dos modos estáveis que venham a condensar dentro do AdS_4 . Quando $m^2 > 0$ a única condição restrita quanto a fronteira é que no limite infinito assintótico $\psi = 0$, já para o horizonte de eventos a única maneira de m_{eff}^2 se torna negativo e promover a formação de instabilidade ao AdS é devido ao termo $g^{tt}q^2\Phi^2$ em 4.4. Intuitivamente, o que podemos entender da física do AdS é que, como as partículas massivas não podem alcançar sua fronteira acabam sendo obrigadas condensar dentro do AdS.¹⁹

Quando $m^2 < 0$ a história muda um pouco. Para o horizonte de eventos, nos detemos ao limite de BF para o AdS, que garante que as perturbações que ψ não tornam o vácuo no AdS_4 instável desde que $m^2L^2 > -\frac{9}{4}$, garantindo um limite inferior para o quão negativo deva ser m_{eff}^2 . Para a fronteira, essas partículas, táquions, podem por sua vez alcançá-la, de modo que para que essas partículas permaneçam no bulk do AdS precisamos impor condições reflexivas na fronteira conforme. O comportamento assintótico para um campo escalar massivo ψ no AdS é dado por

$$\psi \sim \frac{A_\psi}{r^{3-\Delta}} + \frac{B_\psi}{r^\Delta} \quad (4.8)$$

E de acordo com o dicionário da correspondência AdS/CFT a massa m^2 de ψ no AdS está diretamente associado ao valor esperado um operador $\langle \mathcal{O} \rangle$ com dimensão Δ vivendo na fronteira conforme, onde Δ é dado por

$$m^2L^2 = \Delta(\Delta - 3) \quad (4.9)$$

Segue de 4.9 assim, duas possíveis soluções de escolha Δ ,

$$\Delta_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4m^2L^2}}{2} \quad (4.10)$$

Isto nos mostra que ao escolhermos Δ_+ ou Δ_- como soluções estamos de fato escolhendo entre A_ψ e B_ψ , respectivamente. Muitas teorias em AdS/CFT mostravam a escolha de Δ_+ como única possível escolha para soluções em conformidade com a fronteira do AdS_{d+1} que restringindo a dimensão dos operadores escalares a satisfazer a relação de unidade em que $\Delta = (d - 2)/2$.⁹⁵ Foi arguido⁹⁶ que devido ao fato de muitos operadores do lado CFT em AdS/CFT terem dimensões menores que $d/2$ existir uma janela para a possibilidade da escolha de Δ_- . O que verificamos contudo é que quando $m^2 \geq m_{BF}^2 + L^{-2}$ somente

valores de Δ_+ são permitidos de maneira que podemos interpretar $A_\psi = \langle \mathcal{O} \rangle$ sendo $\langle \mathcal{O} \rangle$ o valor esperado do operador dual ao campo escalar ψ , cuja dimensão é Δ_+ . Mas alternativamente é mostrado que para considerarmos soluções B_ψ em alternância à A_ψ basta mantermos os valores de massa no regime $m_{BF}^2 \leq m^2 < m_{BF}^2 + L^{-2}$. Assim, no AdS_4 , considerando $L = 1$ e $m_{BF}^2 = -9/4$ temos, pela eq. 4.10, os limites dado por $m^2 L^2 \geq -5/4$ para a escolha de Δ_+ e $-9/4 \leq m^2 < -5/4$ para quaisquer das possibilidades.

Em geral, as curvas descritas na transição de fase (devidamente normalizadas) se assemelham muito aquelas descritas pela teoria BCS seguindo a lei da raiz quadrada para valores de ψ , de tal forma, que mesmo no *probe limit* o comportamento para as escolhas de $B_\psi = 0$ apresentam o comportamento mais tipicamente associado a um supercondutor, uma vez que as soluções para $A_\psi = 0$ apresentam divergência para grande valores de q , ou seja quando $T \rightarrow 0$. Se escolhermos, por exemplo, $m^2 L^2 = -2$, que pertence a janelas apresentadas teremos dois valores de dimensão possíveis dados por $\Delta_+ = 2$ e $\Delta_- = 1$,

$$\Delta_- \longrightarrow A_\psi = 0, B_\psi = \langle \mathcal{O}_1 \rangle \quad (4.11)$$

ou

$$\Delta_+ \longrightarrow B_\psi = 0, A_\psi = \langle \mathcal{O}_2 \rangle \quad (4.12)$$

onde em $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ os índices representam a dimensão associada ao operador na CFT*. A figura 15 mostra um exemplo da aplicação para estes operadores. Este modelo é uma das primeiras aplicações da teoria,²⁵ cujo ansatz para métrica é dado pelo planar SAdS,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(dx^2 + dy^2), \quad (4.13)$$

com

$$f = \frac{r^2}{L^2} \left(1 - \frac{3r_h^3}{r^3} \right) \quad (4.14)$$

e temperatura de Hawking dada por,

$$T = \frac{3r_h}{4\pi L^2}. \quad (4.15)$$

* Veja secção 2.3.1 para mais detalhes

Figura 15 – Condensado do campo escalar no bulk do AdS_4 . A curva a direita mostra escolhas para $\Delta_- = 1$, onde $B_\psi = \langle \mathcal{O}_1 \rangle$, enquanto a curva a esquerda mostra escolhas para $\Delta_+ = 2$, onde $A_\psi = \langle \mathcal{O}_2 \rangle$ representa a combinação mais adequada para construção de uma transição de fase de segunda ordem típica de materiais supercondutores. As curvas apresentadas estão devidamente normalizadas para que as quantidades envolvidas sejam adimensionais de acordo com a construção típica destes modelos.

Fonte: HARTNOLL; HERZOG; HOROWITZ.²⁵

Assim, resumidamente, para soluções estáveis no AdS temos $\psi = 0$, onde a simetria do AdS é mantida. A partir de certos valores para o acoplamento entre os campos, as soluções para o campo escalar se tornam instáveis promovendo a formação de soluções para $\psi \neq 0$, quebrando a simetria local do AdS e incorporando a formação do cabelo nesta nova configuração, de modo que, o campo escalar ψ está associado a formação do condensado.

O parâmetro que incorpora a noção de temperatura é a o buraco negro. Mesmo que os supercondutores não-convencionais, motivação para nosso trabalho, tenham seu comportamento gerido por flutuações quânticas, as transições de fase em laboratório se dão em realidade com a temperaturas diferente do zero absoluto, o que ainda torna a temperatura um elemento importante para nossa codificação. De modo geral, a temperatura de um buraco negro estará associada à temperatura da transição para modelos condutor/supercondutor ou fluido/supercondutor. Porém, foi mostrado⁹⁷ que se desejarmos ainda compreender as transições do tipo isolante/supercondutor ou isolante/superfluido basta tomarmos uma rotação de Wick das soluções de buraco negro no AdS e construir soluções solitônicas para tal.

Ainda como o número de partículas pode variar ao longo do processo, por muitos fatores experimentais como impurezas, também aqui precisamos de identidades que nos assegurem esta possibilidade e para tal o potencial químico μ na termodinâmica de um

buraco negro terá papel fundamental. Discussões sobre supercondutores holográficos podem ser encontradas nas citações a seguir. [24, 25, 29, 32, 37, 76](#)

5 SUPERCONDUTORES HOLOGRÁFICOS EM $3 + 1$ DIMENSÕES

Neste capítulo apresentamos uma breve releitura dos estudos para a formação de um campo escalar na fronteira do AdS nos modelos supercondutores holográficos em $3 + 1$ -dimensões fora do *probe limit* e para $N < \infty$. Este modelo já foi proposto na literatura^{35,37,38,40} e reside em apresentar uma proposta mais robusta no que tange a inserção tanto da *backreaction* do espaço-tempo à presença de campos de matéria quanto da inclusão dos termos de *Gauss Bonnet* (GB). Aqui, estudamos a possibilidade da formação do condensado com uma constante de acoplamento negativa para os termos de GB.

5.1 Os termos de Gauss-Bonnet e a Backreaction do espaço-tempo

5.1.1 Termos de Gauss Bonnet

Foi demonstrado⁹⁸ que os termos de *Gauss Bonnet* correspondem a termos de curvatura de derivada mais alta numa ação efetiva em baixas energias em teoria de supercordas. Esses termos surgem da possibilidade ou necessidade de se generalizar as equações de Einstein em altas dimensões mantendo-se uma relação quadrática para o tensor de Riemann e de Ricci, de modo que, as equações advindas mantenham sua característica de equações não-lineares com derivadas de segunda ordem na métrica.

No contexto da dualidade AdS/CFT a inserção deste termos pode ser vista como uma correção para expansão de grandes N na fronteira da *CFT* dentro de um limite de um acoplamento forte, tornando o modelo mais realista, uma vez que os sistemas físicos possuem valores de N muito menores. Uma discussão interessante envolvendo os termos de *Gauss Bonnet* e termodinâmica de buracos negros no AdS está descritos na literatura.⁹⁹ Para os supercondutores holográficos, o interesse se deu na tentativa de que os mesmos fossem invializados, quer dizer, uma vez que mostrou-se que a condensação viola o teorema de Coleman-Mermin-Wagner,³⁶ o qual proíbe a quebra de uma simetria espontânea em $(2 + 1)$ -dimensões à temperatura finita, esperava-se que com esta correção o condensado não se formasse. O que se tem demonstrado é que embora a temperatura crítica tende a diminuir, isto ainda não é suficiente para barrar a condensação. Em nosso caso, mesmo com a constante de acoplamento para os termos GB negativa, mostramos que ainda assim

a condensação acontece e segue o comportamento análogo à constante positiva.

5.1.2 Backreaction

Em um primeiro momento, quando formulada, a teoria da relatividade geral foi imaginada tendo como *background* um espaço-tempo estático e fixo. A relação entre os campos ali inseridos e esta entidade ou este palco onde tudo acontece, era uma relação em que podíamos negligenciar qualquer resposta do mesmo à presença destes campos. Com o passar dos anos as pesquisas têm mostrado que o espaço-tempo em si próprio tem um caráter dinâmico, o que em muitos casos, significa que já não podemos negligenciar sua backreaction. Um cenário propício para tal está na própria correspondência *AdS/CFT*, mas existe uma grande discussão sobre a importância da backreaction em modelos com *Energia escura*,¹⁰⁰ além de ter sido recentemente noticiado os primeiros resultados de medição da mesma em modelos de gravidade análoga em sistemas fluidos.¹⁰¹

A maioria dos modelos na dualidade *gauge/gravidade* trabalham no *probe limit* e sem correção dos termos de alta ordem de curvatura, porém, quando esses últimos são incluídos, em geral, ainda se trabalha no *probe limit*. O *probe limit* consiste em negligenciar a backreaction permitindo que a carga elétrica do campo escalar vá para infinito como parte da reescala do sistema ou equivalentemente permitindo a constante de Newton ir a zero.

5.2 O Modelo

A ação para supercondutores holográficos em (3 + 1)-dimensões com *backreaction* e os termos de Gauss Bonnet (GB) é descrita em 5.1. Este modelo tem como objetivo o estudo de um valor não-trivial para o campo escalar fora do horizonte de eventos de um buraco negro no espaço-tempo de AdS em (4 + 1)-dimensões

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^5x \sqrt{-g} \left(R - 2\Lambda + \frac{\alpha}{4} (R^{\mu\nu\lambda\rho} R_{\mu\nu\lambda\rho} - 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + R^2) + 16\pi G \mathcal{L}_{matter} \right) \quad (5.1)$$

De 5.1 temos a ação de Einstein-Gauss Bonnet juntamente com a constante cosmológica negativa $\Lambda = -6/L^2$ para o AdS em (4 + 1)-dimensões, onde os termos de GB apresentam acoplamento α , que em nossa análise será considerada negativa.

O acoplamento entre o campo escalar e o campo de gauge está na equação a seguir,

$$\mathcal{L}_{matter} = -\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} - (D_M\psi)^*D^M\psi - m^2\psi^*\psi \quad (5.2)$$

Em 5.2 o campo eletromagnético é dado por $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$, sendo $M, N = 0, 1, 2, 3, 4$. Aqui e e m representam a carga elétrica e a massa do campo escalar ψ , respectivamente, onde $D_M\psi = \partial_M\psi - ieA_M\psi$ é a derivada covariante.

O Ansatz para métrica é dada por

$$ds^2 = -f(r)a^2(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + \frac{r^2}{L^2}d\Sigma_{k,3}^2 \quad (5.3)$$

Onde f e a são funções de r somente e k denota a curvatura de um espaço em 3-dimensões podendo assumir os valores abaixo,

$$d\Sigma_{k,3}^2 = \begin{cases} d\Omega_3^2, & k = 1 \\ dx^2 + dy^2 + dz^2, & k = 0 \\ d\Xi_3^2, & k = -1 \end{cases}$$

Por analogia ao planos simétricos de condução da supercondutividade nos cupratos escolhemos apenas os buracos negros simetricamente planos, $k = 0$, porém k está mantido nas equações por completeza. Um discussão mais abrangente para outros valores dessa constante pode ser encontrado na literatura.⁴¹

Os campos eletromagnéticos e esclar foram escolhidos apenas como função de r e são dados por,

$$A_M dx^M = \phi(r)dt \quad , \psi = \psi(r) \quad (5.4)$$

As equações acopladas de Einstein e da matéria podem ser obtidas variando-se a ação com respeito aos campos métricos e de matéria, respectivamente. De modo que, temos,

$$f' = 2r \frac{k - f + 2r^2/L^2}{r^2 + 2\alpha(k - f)} - \gamma \frac{r^3}{2fa^2} \left(\frac{2e^2\phi^2\psi^2 + f(2m^2a^2\psi^2 + \phi'^2) + 2f^2a^2\psi'^2}{r^2 + 2\alpha(k - f)} \right) \quad (5.5)$$

$$a' = \gamma \frac{r^3(e^2\phi^2\psi^2 + a^2f^2\psi'^2)}{af^2(r^2 + 2\alpha(k - f))} \quad (5.6)$$

$$\phi'' = -\left(\frac{3}{r} - \frac{a'}{a}\right)\phi' + 2\frac{e^2\psi^2}{f}\phi \quad (5.7)$$

$$\psi'' = -\left(\frac{3}{r} + \frac{f'}{f} + \frac{a'}{a}\right)\psi' - \left(\frac{e^2\phi^2}{f^2a^2} - \frac{m^2}{f}\right)\psi \quad (5.8)$$

onde $\gamma = 16\pi G$. Os modelos trabalhados no *probe limit* tratam o termos $\gamma = 0$. Isto equivale a reescalar os campos $\psi \rightarrow \psi/e$, $\phi \rightarrow \phi/e$ tal que $\gamma \rightarrow e^2\gamma$, de modo que, a *backreaction* dos campos de matéria é suprimida no limite que e torna-se grande. Aqui, sem perdas de generalidade colocamos $e \equiv 1$.

Para que estabeleçamos o comportamento da transição de fase supercondutora como discutido anteriormente, espera-se que próximo ao horizonte do buraco negro exista a formação de cabelo. Assim para a formação do horizonte de eventos em $r = r_h$, têm-se $f(r_h) = 0$, mantendo-se $a(r_h)$ finito. E ainda segundo 4.4, temos que o campos devam ser regulares nessa região, tal que

$$\phi(r_h) = 0 \quad , \quad \psi'(r_h) \neq 0 \quad (5.9)$$

com

$$\psi'(r_h) = \frac{m^2\psi(r_h^2 + 2\alpha\kappa)}{2r\kappa + 4r/L^2 - \gamma r^3(m^2\psi^2 + \phi'^2/(2a^2))} \Big|_{r=r_h} \quad (5.10)$$

Quanto à fronteira, espera-se que assintoticamente recuperemos um buraco negro do tipo Reissner-Nordström no AdS, de modo que escolhemos $a(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1$. O comportamento assintótico dos campos na fronteira é dado por,

$$\phi(r \gg 1) = \mu - \rho/r^2 \quad , \quad \psi(r \gg 1) = \frac{\psi_-}{r^{\lambda_-}} + \frac{\psi_+}{r^{\lambda_+}} \quad (5.11)$$

em que μ e ρ representam o potencial químico e a densidade de carga elétrica, respectivamente.

A dimensão $\lambda_{\pm}$ associada ao operador dual na fronteira, aqui, segue como,

$$\lambda_{\pm} = 2 \pm \sqrt{4 - 3(L_{eff}/L)^2} \quad (5.12)$$

com

$$L_{eff}^2 \equiv \frac{2\alpha}{1 - \sqrt{1 - 4\alpha/L^2}} \sim L^2(1 - \alpha/L^2 + O(\alpha^2)) \quad (5.13)$$

em que a correspondência ao valor esperado de um operador, $\langle \mathcal{O} \rangle$, tipicamente associado ao comportamento do parâmetro de ordem de um supercondutor e dual ao campo escalar é dado na escolha de $\psi_- = 0$, matendo-se as soluções de ψ_+ .

As soluções analítica das equações ($\psi \equiv 0$) seguem dadas por

$$f(r) = k + \frac{r^2}{2\alpha} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{L^2} + \frac{4\alpha M}{r^4} - \frac{4\alpha\gamma\rho^2}{r^6}} \right) \quad (5.14)$$

com

$$a(r) = 1 \quad , \quad \phi(r) = \frac{\rho}{r_h^2} - \frac{\rho}{r^2} \quad (5.15)$$

onde M e ρ são constantes arbitrárias de integração que podem ser interpretadas como a massa e a densidade de carga, respectivamente. Quando $\alpha \rightarrow 0$, $f(r)$ se torna,

$$f(r) = k + \frac{r^2}{L^2} - \frac{M}{r^2} + \frac{\gamma\rho^2}{r^4} \quad (5.16)$$

as quais são soluções para um buraco negro carregado no AdS_5 longe do *probe limit* e para diversos valores de k .

A temperatura Hawking em $r = r_h$ no horizonte de eventos para o buraco negro é dada por,

$$T = \frac{1}{4\pi} f'(r_h) a(r_h) \quad (5.17)$$

Lembrando que, a análise para transição de fase e comportamento do campo escalar é a seguinte: para $T > T_c$ as soluções satisfeitas são $\psi \equiv 0$, quando $T < T_c$ as soluções tornam-se instáveis e existe a formação do cabelo ($\psi \neq 0$) fora do horizonte de eventos do buraco negro, em que T_c é a temperatura crítica a partir da qual o campo escalar condensa.

5.3 Resultados numéricos

5.3.1 Comentário sobre o código

Uma discussão mais detalhada deste modelo encontra-se em [40].³⁸ Da análise numérica que fazemos aqui os dados são os seguintes: consideramos $r_h = 0.5$, $L = 1$, de modo que, $m^2 = -3/L^2 \equiv -3$, garantindo a estabilidade do AdS_5 dentro do limite de Breitenlohner-Freedman com $m^2 < m_{BF}^2 = -4/L^2$ e fixamos $a(\infty) = 1$.

Para mostrar o comportamento do condensado foi estudado o comportamento de ψ_+ em função da temperatura, onde $\psi_+ = \langle \mathcal{O} \rangle$. Na literatura a discussão é feita, em geral, mantendo-se ρ constante varrendo r_h , porém foi usado nesta discussão um valor fixo de horizonte $r_h = 0.5$, em que se constrói as soluções para diferentes valores de ψ_+ em que de fato temos, $\rho = \rho(\psi_+)$, mantendo-se a densidade de carga fixa para cada conjunto de solução. Assim, as quantidades com densidade fixa são diferenciada empregando-se o asterisco e mantendo $\rho^* = 1$.

$$T^* = \frac{T}{\rho^{1/3}} \quad , \quad \psi_+^* = \frac{\psi_+}{\rho^{\lambda_+/3}} \quad (5.18)$$

As quantidades adimensionais são dadas por

$$\langle \mathcal{O} \rangle^{1/\lambda_+} / T_c = (\psi_+^*)^{\lambda_+/3} / T_c \quad (5.19)$$

5.3.2 Resultados

Analisamos a formação do condensado primeiramente sem backreaction, ou seja, com $\gamma = 0$ para diferentes valores negativos da constante de acoplamento de *Gauss Bonnet* α . Nós encontramos para $\alpha = -0.001$ que $T_c = 2.489\rho^{1/3}$, $\alpha = -0.1$ que $T_c = 2.705\rho^{1/3}$, $\alpha = -0.2$ que $T_c = 3.060\rho^{1/3}$ e $\alpha = -0.22$ que $T_c = 3.235\rho^{1/3}$, ou seja, a medida que α se torna mais negativo a T_c aumenta permanecendo positiva em todos os resultados, veja Fig.16. Para valores $\alpha < -0.22$, numericamente, não foi possível determinar um valor para T_c .

Aproveitamos ainda para comparar os resultados com outros valores já realizados na literatura³⁷ para $\alpha > 0$, lado a) da Fig.17. Tem-se que para $\alpha = 0.001$ que $T_c = 0.198\rho^{1/3}$, $\alpha = 0.1$ que $T_c = 0.186\rho^{1/3}$, $\alpha = 0.2$ que $T_c = 0.171\rho^{1/3}$ e $\alpha = 0.25$ que $T_c = 0.158\rho^{1/3}$, ou seja, a medida que α diminui, T_c aumenta. O que demonstra, portanto, o mesmo tipo

Figura 16 – Condensação para $\gamma = 0$ e diferentes valores de $\alpha < 0$. A medida que α se torna mais negativo a temperatura crítica aumenta, enquanto a amplitude de condensação diminui.

Fonte: Elaborada pela autora.

de comportamento visto em nossa análise. Colocamos ao lado a formação do condensado para $\alpha = 0$ e diferentes valores,³⁸ no lado b) da Fig.17. Foi encontrado que para $\gamma = 0$ e $\alpha = 0$ a $T_c = 2.48$. Infelizmente não conseguimos encontrar um valor para T_c com ambos valores nulos, pois a análise numérica tornou-se muito instável, uma vez que inserção da backreaction torna a condensação mais difícil tornando a numérica bem difícil de se realizar.

Figura 17 – Em a) A condensação para $\gamma = 0$ e diferentes valores de α com $\alpha = 0$. A linha vermelha é para $\alpha = 0.001$, a linha marrom para $\alpha = 0.1$, a linha azul para $\alpha = 0.2$, enquanto a linha verde é para $\alpha = 0.25$. Em b) a condensação para $\alpha = 0$ e diferentes valores para γ , incluindo $\gamma = 0$ com $T_c = 2.48$. Foi visto que a T_c diminui com o aumento de γ , e embora o comportamento do condensado para grandes e pequenos valores de γ seja similar, o condensado se torna bastante largo a medida que γ cresce.

Fonte: a) GREGORY³⁸ e b) BRIHAYE; HARTMANN.³⁷

Inserindo a backreaction γ ao nosso sistema e mantendo α negativo, podemos notar numa curva não-normalizada, ou seja, com os dados crus, que com o aumento de γ , a temperatura crítica do sistema diminui da lado a) Fig.18. Isto pode ser comparado a curva do lado b) da Fig.18,³⁵ em que o mesmo comportamento é observado para α positivo. As linhas sólidas das curvas representam $\gamma = 0$, enquanto as linhas pontilhadas representam as curvas com $\gamma = 0.1$.

Figura 18 – Em ambas figuras, as linhas sólidas representam $\gamma = 0$ enquanto as linhas tracejadas representam $\gamma = 0.1$. É nítido que nestes dados sem normalização, a inserção da *backreaction* abaixa a T_c do condensado. Em a) as curvas apresentam $\alpha < 0$, onde linha vermelha é para $\alpha = -0.001$, a linha marrom para $\alpha = -0.1$, a linha azul para $\alpha = -0.2$ e a linha verde é para $\alpha = -0.22$. Em b) as curvas apresentam $\alpha > 0$, onde linha preta é para $\alpha = 0.0$, a linha verde para $\alpha = 0.125$ e a linha magenta para $\alpha = 0.25$.

Fonte: a) Elaborada pela autora e b) BARCLAY *et al.*³⁵

Notamos que para curvas normalizadas, Fig.19, que com a inclusão da *backreaction*, apesar de a T_c diminuir ela permanece positiva para todos os valores de α , e que a medida que γ aumenta, neste caso, o efeito da backreaction é extremamente acentuado, com o condensado variando mais amplamente com α . Segue o condensado para os valores de $\gamma = 0.1$, Fig.19 a) e $\gamma = 0.2$, Fig.19 b). As curvas para $\gamma = 0.2$ para valores pequenos da temperatura na vizinhança da T_c tornou a numérica muito complexa, embora ainda assim a condensação tenha ocorrido.

Figura 19 – Curvas normalizadas da condensação com *backreaction* γ e acoplamento negativo para os termos de *Gauss Bonnet* α . Em a) $\gamma = 0.1$, em b) $\gamma = 0.2$. É possível notar em ambas curvas que com a adição de γ ao sistema a amplitude do condensado aumenta significativamente ao compararmos com a Fig.16, cujo γ é nulo.

Fonte: Elaborada pela autora.

6 ESCALARIZAÇÃO DE BURACOS NEGROS E TRANSIÇÕES DE FASE HOLOGRÁFICAS

Neste capítulo nós estudamos a escalarização espontânea de um buraco negro esfericamente simétrico, estático e assintoticamente Anti-de Sitter (aAdS) em um modelo de gravidade escalar-tensorial num acoplamento não-mínimo da forma $\phi^2(\alpha R + \gamma \mathcal{G})$ e mostramos que quando levamos em conta a *backreaction* do espaço-tempo a escalarização do buraco negro é dupla a descrição de uma transição de fase em um sistema quântico fortemente acoplado, isto é, corresponde a uma transição de fase holográfica.

6.1 Espôntanea escalarização

Uma das questões mais interessantes sobre buracos negros é se estes objetos classicamente são, de fato, objetos muito simples e sem estrutura que podem ser descritos por um número muito pequeno de parâmetros - a massa, a carga e o momento angular - cumprindo, assim, a *No-hair* conjectura. Buracos negros teóricos na teoria de Einstein-Maxwell 4-dimensional assintoticamente plana têm provado possuir esta característica,¹⁰² mas a existência de buracos negros com cabelos primários¹⁰³ e secundários¹⁰⁴ em modelos com fontes de matéria não-linear demonstra claramente que está longe de ser óbvio que essa conjectura seja verdadeira em outros ambientes. Na verdade, embora existam vários teoremas para campos escalares em espaços-tempos de buracos negros,¹⁰⁵ os buracos negros podem carregar campos escalares não-triviais em seu horizonte quando eles estão, por exemplo, acoplados de forma não mínima à curvatura do espaço-tempo.¹⁰⁶ Isso foi investigado extensivamente nos últimos anos no contexto dos modelos de gravitação tensor-escalar de Horndeski¹⁰⁷ e, de fato, nestes modelos, buracos negros estáticos e assintoticamente planos que carregam cabelo escalar podem ser construídos.¹⁰⁸

Escalarização espontânea é um fenômeno que aparece tipicamente em modelos que contêm termos de acoplamento não mínimos da forma $f(\phi)\mathcal{I}(g_{\mu\nu}, \Sigma)$, onde $f(\phi)$ é uma função do campo escalar, enquanto $\mathcal{I}$ depende da métrica $g_{\mu\nu}$ e/ou outros campos Σ . o campo escalar é então "alimentado" por $\mathcal{I}$, de modo que, buracos negros espontaneamente escalarizados podem ser construídos para acoplamentos suficientemente grandes. Exemplos recentes incluem a escalarização de buracos negros estáticos, não-carregados

e assintoticamente planos usando $\mathcal{I} = \mathcal{G}$, onde $\mathcal{G}$ são os termo de *Gauss-Bonnet* (GB) e $f(\phi) = \phi^2$,¹⁰⁹ além de outras diferentes formas para $f(\phi)$ com um único termo em ϕ ou diferentes combinações de suas potências.¹¹⁰

As modificações da relatividade geral são geralmente motivadas assumindo que a relatividade geral é apenas um clássico e baixo limite de energia de uma teoria quântica da gravidade mais geral que deve ser aplicável perto e dentro da escala de Planck. Um dos melhores candidatos para tal teoria continua sendo a teoria das cordas e neste sentido a dualidade *gauge/gravidade* tem estabelecido um melhor entendimento nesta conexão.

Nosso modelo consite numa teoria de gravidade escalar-tensorial no espaço-tempo (aAdS) em $(3 + 1)$ -dimensões, com a presença de um campo escalar, que é a priori sem massa, mas que se acopla de forma não-trivial ao escalar de Ricci e aos termos de GB, respectivamente. Como ficará claro a seguir, este acoplamento não-trivial corresponde a uma “massa efetiva” para o campo escalar e gera a formação de cabelo escalar não-trivial no buraco negro para temperatura suficientemente baixa deste. Levando-se em conta a *backreaction* do espaço-tempo, esta “escalarização espontânea” pode ser interpretada como uma transição de fase holográfica, ou seja, uma transição de fase em uma superfície espacialmente bidimensional com parâmetro de ordem dado por um campo escalar com valor real, que aparecem em um sistema quântico fortemente acoplado. Note que o ingrediente fundamental para nossa demonstração é que apesar de os buracos negros não-carregados, estáticos, esfericamente simétricos e aAdS em um modelo escalar-Gauss-Bonnet já terem sido estudados, ainda não foram feitos com ênfase em soluções que possuem uma queda na lei de potência na fronteira do AdS, como fizemos aqui.

6.2 O Modelo

Nós estudamos um modelo em uma teoria de gravidade escalar-tensorial no espaço-tempo (aAdS) em $(3 + 1)$ -dimensões com a seguinte ação,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\mathcal{R}}{2} \Lambda + \phi^2 (\alpha \mathcal{R} + \gamma \mathcal{G}) - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (6.1)$$

onde $\mathcal{R}$ é o escalar de Ricci, $\mathcal{G}$ são os termos de Gauss-Bonnet, $\Lambda < 0$ a constante cosmológica, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ o tensor de força do campo de gauge $U(1)$, A_μ , e ϕ o valor real de um campo escalar sem massa acoplado ao escalar de Ricci $\mathcal{R}$, bem como, aos

termos de Gauss Bonnet $\mathcal{G}$, dados por

$$\mathcal{G} = R^{\mu\nu\lambda\rho} R_{\mu\nu\lambda\rho} - 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + R^2 \quad (6.2)$$

através dos acoplamentos α e γ , respectivamente. A variação em relação ao campo escalar, campo de gauge $U(1)$ e métrica, respectivamente, leva ao seguinte conjunto de equações diferenciais não-lineares acopladas:

$$\square\phi + (\alpha\mathcal{R} + \gamma\mathcal{G}) = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = 0, \quad G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^\phi + T_{\mu\nu}^{(EM)} \quad (6.3)$$

onde

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^\phi &= \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\sigma\phi\partial^\sigma\phi \\ &+ 4\alpha[D_\mu(\phi\partial_\nu\phi) - g_{\mu\nu}D_\sigma(\phi\partial^\sigma\phi)] \\ &- 2\gamma(g_{\rho\mu}g_{\lambda\nu} + g_{\lambda\mu}g_{\rho\nu})\eta^{\kappa\lambda\beta\delta}\eta^{\rho\iota\sigma\tau}R_{\sigma\tau\beta\delta}D_t(\phi\partial_k\phi) \end{aligned} \quad (6.4)$$

e

$$T_{\mu\nu}^{(EM)} = F_{\mu\alpha}F_\nu^\alpha - F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \quad (6.5)$$

Vamos considerar soluções de buracos negros estáticos com simetria esférica, assim, o Ansatz para a métrica lê-se,

$$ds^2 = -N\sigma^2 dt^2 + \frac{1}{N}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi) \quad (6.6)$$

com $N \equiv N(r)$ e $\sigma \equiv \sigma(r)$ dependendo somente da coordenada radial r . A forma explicita da curvatura invariante é então,

$$\mathcal{R} = \frac{1}{r^2}(-N''r^2\sigma - 3N'\sigma'r^2 - 4N'r\sigma - 2N\sigma''r^2 - 4N\sigma'r - 2N\sigma + 2\sigma), \quad (6.7)$$

$$\mathcal{G} = \frac{4}{r^2\sigma}(N''N\sigma - N''\sigma + (N')^2\sigma + 5N'\sigma'N - 3N'\sigma' + 2\sigma''N^2 - 2\sigma''N). \quad (6.8)$$

Assumindo que as simetrias de gauge $U(1)$ e o campo escalar, respectivamente, são equivalentes àquelas do espaço-tempo, nós escolhemos $A_\mu dx^\mu \equiv V(r)dt$ e $\phi \equiv \phi(r)$. Inserindo o Ansatz nas equações do movimento chegamos a um conjunto de equações

ordinárias não-lineares acopladas com a seguinte forma,

$$\begin{aligned} N' &= \mathcal{F}_1(N, \sigma, V, V', \phi, \phi'), \quad \sigma' = \mathcal{F}_2(N, \sigma, V, V', \phi, \phi') \\ V'' &= \mathcal{F}_3(N, \sigma, V, V', \phi, \phi'), \quad \phi'' = \mathcal{F}_4(N, \sigma, V, V', \phi, \phi') \end{aligned} \quad (6.9)$$

onde o apóstrofe indica a derivada com respeito a r e onde $\mathcal{F}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) são funções dos argumentos. O sistema (6.9) tem de ser resolvido de acordo com apropriadas condições de contorno. No horizonte de eventos regular $r = r_h$ com $N(r = r_h) = 0$ as condições para o campo escalar são,

$$\left(\frac{\phi'}{\phi} \right)_{r=r_h} = - \left(\frac{\alpha \mathcal{R} + \gamma \mathcal{G}}{N'} \right)_{r=r_h} \quad (6.10)$$

enquanto para o gauge $U(1)$ temos $V(r = r_h) = 0$. Contanto que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{G}$ sejam bem comportados no horizonte, esperamos que ψ e ψ' sejam bem comportados quando N' se torna nulo. Isto corresponde a um limite extremo onde a temperatura de Hawking do buraco negro é dada por,

$$T_H = \frac{1}{2\pi} (\sigma N')|_{r=r_h} \quad (6.11)$$

tende a zero. Para $r \rightarrow \infty$, assumimos que o espaço-tempo assintoticamente AdS e o buraco negro possuem uma carga elétrica Q , ou seja,

$$\sigma(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1, \quad N(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1 - \frac{\Lambda}{3} r^2, \quad V(r \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{Q}{r_h} - \frac{Q}{r} \equiv \mu - \frac{Q}{r} \quad (6.12)$$

onde μ corresponde ao valor de campo de gauge $U(1)$ na fronteira conforme $r \rightarrow \infty$ e pode ser interpretado como o potencial químico na aplicação da dualidade *gauge/gravidade*. Finalmente, para $\Lambda < 0$, o campo escalar tem uma queda na lei de potência da seguinte forma,

$$\phi(r \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{\phi_+}{r^{\lambda_+}} + \frac{\phi_-}{r^{\lambda_-}} \quad (6.13)$$

com

$$\lambda_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{\Delta}}{2}; \quad \Delta \equiv 9 + 48\alpha + 32\gamma\Lambda \quad (6.14)$$

o que significa que os acoplamento α e γ juntos com Λ determinam a dimensão do

operador dual na fronteira conforme na aplicação da dualidade, de modo que, $\psi_{\pm}$ pode ser interpretado como o valor esperado deste operador. Note que $\Lambda = 0$, o caso assintoticamente plano, é explicitamente excluído aqui e não consiste em um limite "suave" da equação 6.14. De fato, o campo escalar sempre decai como $\phi(r \rightarrow \infty) \sim \phi_0/r$ para $\Lambda = 0$ (independente de α e γ).¹¹⁰ Assim, esta interpretação não é mais possível no aAdS e, portanto, a seguir nos referiremos a $\psi_{\pm}$ como "o valor esperado do operador dual na fronteira conforme", segundo a terminologia da dualidade *gauge/gravidade*.

Em nosso sistema também há uma simetria de escala que se lê (incluindo todos os parâmetros e campos), como

$$\begin{aligned} r \rightarrow \beta r \quad , \quad t \rightarrow t \quad , \quad M \rightarrow \beta M \quad , \quad Q \rightarrow \beta Q \quad , \quad \Lambda \rightarrow \frac{\Lambda}{\beta^2}, \\ \alpha \rightarrow \alpha \quad , \quad \gamma \rightarrow \beta^2 \gamma \quad , \quad \phi_{\pm} \rightarrow \beta^{\lambda^{\pm}} \phi_{\pm} \quad , \quad \mu \rightarrow \beta \mu. \end{aligned} \quad (6.15)$$

6.3 No probe limit

Quando o campo escalar é nulo ($\psi \equiv 0$), o modelo tem soluções explícitas: soluções do tipo Schwarzschild- Anti- de Sitter (SAdS) quando a carga elétrica é nula e soluções do tipo Reissner-Nordström- Anti-de Sitter (RNAdS) quando a carga é não-nula, respectivamente. Estas soluções são dadas por,

$$N(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{2r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \quad , \quad \sigma \equiv 1 \quad , \quad V(r) = Q \left(\frac{1}{r_h} - \frac{1}{r} \right) \equiv \mu - \frac{Q}{r}. \quad (6.16)$$

onde M é a massa e Q a carga elétrica das soluções. O horizonte de eventos r_h é a maior raiz da equação $N(r_h) = 0$ e leva a seguintes relações

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}r_h - \frac{\Lambda}{6}r_h^3 + \frac{Q^2}{4r_h} \quad , \quad \Lambda = 3 \left(\frac{1}{r_h^2} - \frac{2M}{r_h^3} + \frac{Q^2}{2r_h^4} \right), \\ Q &= \pm \sqrt{-2r_h^2 + \frac{2}{3}\Lambda r_h^4 + 4Mr_h}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

A temperatura de Hawking, eq. 6.11, para o buraco negro RNAdS, lê-se

$$2\pi T_h = -\Lambda r_h - \frac{Q^2}{2r_h^3} + \frac{1}{r_h} \quad (6.18)$$

e se torna zero para soluções extremas, que satisfazem $N(r_{h,ex}) = N'(r_{h,ex}) = 0$. Esta

última condição gera,

$$r_{h,ex} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 2\Lambda Q_{ex}^2}}{2\Lambda}}, \quad , \quad Q_{ex} = \pm r_{h,ex} \sqrt{2(1 - \Lambda r_{h,ex}^2)}. \quad (6.19)$$

Assim, as possíveis cargas externas Q_{ex} aumentam (ou diminuem) desde $+\sqrt{2}r_{h,ex}$ (ou desde $-\sqrt{2}r_{h,ex}$) em $\Lambda = 0$ a medida que Λ decresce, que está relacionada a atrativa natureza da constante cosmológica negativa.

Nós vamos assumir que *background* do espaço-tempo é fixo e consideraremos um campo escalar que não interage com o espaço-tempo (sem *backreaction*). As equações lineares do campo escalar são

$$\frac{1}{r^2}(r^2 N \phi')' + (\alpha \mathcal{R} + \gamma \mathcal{G})\phi = 0, \quad (6.20)$$

onde a explícita forma dos termos de *Gauss Bonnet* e do escalar de Ricci, respectivamente, para o RNADS soluções são

$$\mathcal{G} = \frac{8}{3}\Lambda^2 + \frac{2}{r^8}(42r^2 M^2 - 24r M Q^2 + 5Q^4) \quad , \quad \mathcal{R} = 4\Lambda \quad (6.21)$$

6.3.1 O limite de Breitenlohner-Freedman e as restrições de parâmetros

Como já foi dito, um espaço-tempo assintoticamente AdS em $(d+1)$ -dimensões com raio $l = \sqrt{-d(d-1)/(2\Lambda)}$ possui instabilidade clássica para um campo escalar real e massivo com equação $(\square - m^2)\phi = 0$ se a massa m está abaixo do limite Breitenlohner-Freedman (BF) para $m^2 < m_{BF}^2 = -d^2/4l$, ou seja, neste regime um campo escalar se formará. Em nosso caso, a massa é dada por um termo efetivo, tal que, $m^2 \equiv m_{eff}^2 = -(\alpha \mathcal{R} + \gamma \mathcal{G})$, isto é, nós esperamos que no aAdS em $(d+1)$ -dimensões um campo escalar não-trivial se forme,

$$\alpha \mathcal{R} + \gamma \mathcal{G} = 4\alpha\gamma + \gamma \mathcal{G} \geq \frac{d^2}{4l^2} = -\frac{d\Lambda}{2(d-1)} \quad (6.22)$$

Requerendo que este espaço aAdS em $(3+1)$ -dimensões seja estável com respeito a formação do campo escalar, ou seja, que assintoticamente recupere o espaço-tempo puramente AdS, nós obtemos as seguintes restrições nos parâmetros quando usamos as

formas assintóticas dos tensores de curvatura

$$4\alpha\Lambda + \frac{8}{3}\gamma\Lambda^2 \leq \frac{9}{4l^2} \quad (6.23)$$

Uma rápida inspeção da equação (6.14) demonstra que o requerimento de $\Delta \geq 0$ é exatamente a equação 6.23.

Por outro lado, gostaríamos que um campo escalar não-trivial se formasse próximo ao horizonte do buraco negro e efetivamente é o que mostraremos a seguir, ou seja, demonstraremos que a equação 6.22 é cumprida próximo ao horizonte de eventos dos buracos negros escalarizados. Observe, porém, que a escalarização de buracos negros para $\alpha > 0$, $\gamma = 0$ é impossível devido ao argumento acima.

6.3.2 Sobre a Numérica

A equação 6.20 deve ser resolvida numericamente, uma vez que - até onde sabemos - nenhuma solução analítica para esta equação existe para valores genéricos de α e γ . Escolhemos $\phi_- = 0$ para todos os nossos cálculos. Além disso, podemos escolher $\phi(r_-) = 1$, bem como, $r_h = 1$, sem perder a generalidade. A última condição fixa a massa M em termos de Q e γ . Discutiremos apenas os casos com $\Lambda > -3$, a fim de garantir que o raio do AdS $l = \sqrt{-\Lambda/3}$ seja maior do que o raio do horizonte de eventos r_h .

6.3.3 Fixando a dimensão do operador dual

Nas aplicações da dualidade *gauge/gravidade* muitas vezes é útil fixar a dimensão do operador dual, isto corresponde a fixando λ_+ , fixar Δ . Nós podemos então expressar a temperatura de Hawking (eq. 6.18) em termos de λ_+ e Q^2 , como segue

$$2\pi T_H = \frac{[(3 - \lambda_+)\lambda_+ + 12\alpha]r_h^4 + 4(2r_h^2 - Q^2)\gamma}{8\gamma r_h^3} \quad (6.24)$$

onde

$$\gamma = -\frac{12\alpha + \lambda_+(3 - \lambda_+)}{8\Lambda}. \quad (6.25)$$

Investigamos este caso para $\alpha = 0, \gamma > 0$ para os quais λ_+ pode ser escolhido dentro do intervalo $\lambda_+ \in [\frac{3}{2} : 3]$. Note que não podemos alcançar $\lambda_+ = 3$, porque isso exigiria ou $\gamma = 0$, no qual o campo escalar seria sempre trivial devido a existência do teorema de *no*

hair, ou $\Lambda = 0$, caso em que o espaço-tempo é assintoticamente plano e o campo escalar cai como $\sim 1/r$.

Nosso resultado para vários valores fixos dentro do intervalo de λ_+ são mostrados na Figura 20. Nós encontramos que Q^2 é uma função decrescente de $-\Lambda$ (ou equivalentemente decresce com o raio l do AdS) - independentemente dos valores de λ_+ . O maior valor possível de $-\Lambda$ no qual cada ramo individual é alcançado na solução de $Q = 0$, ou seja, quando o fundo é fornecido pela solução de Schwarzschild-Anti-de Sitter (SAdS). Em outras palavras: para que os buracos negros carregados em aAdS se tornem escalarizados, temos que escolher o raio de AdS maior (em comparação com o raio do horizonte) do que para um buraco negro aAdS não-carregado. Quanto maior a carga Q , maior teremos de escolher l para obter a escalarização.

Figura 20 – A figura demonstra valores de Q^2 em dependência de $-\gamma/3 = 1/l^2$ para os quais soluções não-triviais da equação 6.20 existem para vários valores fixos de λ_+ , isto é, a dimensão do operador dual na fronteira conforme com $\alpha = 0$.

Fonte: Elaborada pela autora.

Quando diminuimos λ_+ , nós encontramos que para um valor fixo da carga Q , temos que aumentar $-\Lambda$ (diminuir l) para que o buraco negro se torne escalarizado, ou seja, quanto menor a dimensão do operador dual no limite conforme, menor temos que escolher o raio (l) do AdS (em comparação ao raio do horizonte) a fim de encontrar campos escalares não-triviais. Na Tabela I, damos os valores para $-\Lambda = 3$ (ou equivalentemente l), bem como o valor correspondente de γ^* para os quais soluções não-triviais da equação 6.20

* veja⁽⁸⁾.

existem no *background* para $Q = 0$ em dependência de λ . Para estes valores, o campo escalar se comporta como na equação 6.13 com $\phi_- \equiv 0$.

λ_+	$-\Lambda/3$	ℓ	γ	ϕ_+
2.97	0.0172	7.625	0.216	9.380
2.90	0.0504	4.454	0.240	3.535
2.50	0.2000	2.236	0.260	1.249
2.00	0.3860	1.610	0.216	0.917
1.50	0.5900	1.302	0.159	0.816

Figura 21 – Valores de $-\Lambda$, l e γ em dependência de λ_+ para os quais valores não-triviais da equação 6.20 existem no *background* das soluções de Schwarzschild-Anti-de Sitter (SAdS), ou seja, para $Q = 0$ e $\alpha = 0$.

Fonte: Elaborada pela autora.

Usando a terminologia da dualidade *gauge/dualidade*, podemos então interpretar ϕ_+ como o valor esperado do operador dual correspondente com dimensão λ_+ . Na Figura 22 mostramos o valor de $(\phi_+)^{1/\lambda_+}$ na dependência da temperatura de Hawking T_H do buraco negro, que é igual à temperatura da teoria de campo dual na fronteira AdS. Descobrimos que para todos os λ_+ fixos que estudamos, $(\phi_+)^{1/\lambda_+}$ aumenta com a diminuição da temperatura, o que é equivalente ao aumento da carga Q . Na verdade, os ramos mostrados aqui começam em $Q = 0$ (grande T_H) e terminam na solução extrema com $T_H = 0$. Nós encontramos que - exceto para $\lambda_+ = 2.97$, ou seja, um valor de λ_+ próximo ao valor limite de $\lambda_+ = 3$ - o mais acentuado aumento de $(\phi_+)^{1/\lambda_+}$ acontece aproximadamente ao mesmo T_H .

Figura 22 – Valores do valor esperado do operador dual com dimensão λ_+ , $(\phi_+)^{1/\lambda_+}$, sobre a fronteira em função da temperatura de Hawking T_H .

Fonte: Elaborada pela autora.

6.4 Incluindo a *backreaction*

Com o conhecimento dos parâmetros para os quais existem soluções não-triviais para equação 6.20, podemos tratar o problema totalmente com *backreaction* e construir buracos negros espontaneamente escalarizados como soluções para o conjunto de equações diferenciais não-lineares acopladas 6.9. Na verdade, enquanto $\phi|_{r=r_h} \equiv \phi_h$ é fixo no problema linearizado, agora ele pode ser variado continuamente e é um parâmetro livre. Portanto, escolhemos o conjunto de parâmetros $(\Lambda, \alpha, \gamma)$ para o qual existe uma solução para 6.20 (novamente escolhendo $r_h = 1$) e construímos numericamente um ramo de soluções caracterizado por ϕ_h .

Nossos resultados numéricos indicam que $\phi_h \in [0, \tilde{\phi}_h]$. Enquanto a temperatura de Hawking T_H , a massa M e a carga elétrica Q dependem muito fracamente de ϕ_h , nós observamos que a derivada da função métrica σ - que já não é mais trivialmente igual à unidade - no horizonte, $\partial_r \sigma(r_h)$, diverge quando $\phi_h \rightarrow \tilde{\phi}_h$ indicando que o ramo de buracos negros espontaneamente escalarizados tende a uma solução singular. Igualmente, o escalar de Ricci $\mathcal{R}$ (veja 6.7) e o termos de GB $\mathcal{G}$ (veja 6.8) divergem no horizonte. Nossos resultados numéricos indicam que alcançamos esta solução singular antes de atingirmos o limite extremo com $T_H = 0$. O fato de buracos negros com forte curvatura não poderem ser escalarizados para gerar buracos negros regulares com cabelo foi recentemente discutido e nossos resultados indicam que isso também é verdade no aAdS. Em outras palavras: o acoplamento não-mínimo entre a curvatura e o campo escalar não permite encontrar um buraco negro extremo e espontaneamente escalarizado. Na verdade, isso é mostrado na Figura 23 (esquerda) para $\alpha = 0, \gamma = 0.3$ e diferentes dimensões fixas do operador dual λ_+ (ou valores equivalentes diferentes de Λ). No limite $\phi_h \rightarrow 0$ as soluções tendem para a solução RNAdS com $\phi(r) \equiv 0$ e $\sigma(r) \equiv 1$. Aumentando ϕ_h desde zero, a solução se torna (ao menos numericamente conhecida) um buraco negro carregado com cabelo escalar para o qual $\partial_r \sigma(r_h)$ aumenta. O valor de ϕ_+ também aumenta com o aumento de ϕ_h , veja Figura 23 (direita). Descobrimos que quanto maior λ_+ , maior é ϕ_+ para um dado valor de ϕ_h .

Figura 23 – A esquerda, nós mostramos as derivadas da função métrica $\sigma(r)$ no horizon, $\partial_r \sigma(r_h)$, em dependência do valor do campo escalar no horizonte de eventos, ϕ_r , para buracos negros espontaneamente escalarizados incluindo *backreaction*, $\gamma = 0.3$ e diferentes valores de λ_+ . Também mostramos o valor do condensado ϕ_+ na dependência de ϕ_h para essas soluções à direita (com a mesma codificação de cores da esquerda).

Fonte: Elaborada pela autora.

6.4.1 Transição de fase holográfica

No caso sem *backreaction*, o campo escalar, eq. (6.20), é linear e assim o valor do campo escalar $\phi(r)$ não tem significado físico, Figura 22. Porém com a inclusão da *backreaction* nosso modelo descreve uma transição de fase holográfica, porém a diferença entre nosso modelo e os modelos para supercondutores holográficos na literatura, é que nesses modelos a equação para o campo escalar é não-linear devido ao mínimo acoplamento com o campo de gauge $U(1)$ num *background* fixo.

Assim quando resolvemos todo o conjunto de equações não-lineares, nós encontramos que o modelo no *bulk* pode ser interpretado como a descrição dual da transição de fase de um sistema quântico fortemente acoplado que "vive" na fronteira do AdS. Isso é mostrado na Figura 24 (esquerda), onde damos o valor adimensional do condensado $\phi_+^{1/\lambda_+}/T_c$ em dependência da temperatura $T \equiv T_H$, que agora interpretamos como a temperatura da teoria de campo dual e, portanto, omitimos o índice "H". Perto da temperatura crítica $T = T_c$, a curva do condensado mostra o comportamento típico na teoria de Ginzburg-Landau $(\phi_+)^{1/\lambda_+} \sim \sqrt{1 - T/T_c}$, que sinaliza uma transição de fase de segunda ordem em $T = T_c$. Aumentando a dimensão do operador λ_+ , o valor do condensado aumenta a uma determinada temperatura T .

Também estudamos o comportamento do condensado sobre dependência dos valores

do campo de gauge $U(1)$ na fronteira AdS, ou seja, sobre a dependência do potencial químico μ . Nossos resultados são mostrados na Figura 24 (direita). Para $\mu \geq \mu_c$, descobrimos que existem condensados não-triviais e, novamente, descobrimos que aumentando a dimensão do operador aumentamos o valor do condensado para um valor fixo de μ . A transição de fase descrita, no entanto, não pode ser estendida completamente a $T = 0$ devido aos motivos mencionados acima. Em vez disso, encontramos que abaixo de uma dada temperatura (e acima de um determinado potencial químico) o valor do condensado se torna constante, ou seja, é praticamente independente da temperatura (potencial químico), ao diminuir (aumentar) ainda mais.

Figura 24 – A figura da esquerda representa o condensado adimensional $\phi_+^{1/\lambda_+}/T_c$ em dependência da temperatura T dividido pela temperatura T_c , enquanto a figura da direita representa o condensado adimensional $\phi_+^{1/\lambda_+}/\mu_c$ em dependência do potencial químico μ dividido pelo potencial químico μ_c ; para buracos negros escalarizados com *backreaction* $\gamma = 0.3$ e vários valores de λ_+ .

Fonte: Elaborada pela autora.

Vamos mencionar que em nosso estudo numérico, tivemos de fixar $r_h = 1$, o que significa que a entropia do buraco negro $\mathcal{S} = \pi r_h^2$ é constante. Nas aplicações da dualidade *gauge/gravidade*, muitas vezes é mais interessante estudar o caso da carga fixa Q . Desse modo, nossos dados podem ser facilmente transformados para este último caso usando a escala de simetria (eq. 6.15) que deixa λ_+ inalterado. As quantidades relevantes (denotadas por um chapéu, $\hat{Q}$) são então,

$$\hat{T}_H = QT_H, \quad \hat{\phi}_\pm = \frac{\phi_\pm}{Q^{\lambda_\pm}}, \quad \hat{\gamma} = \frac{\gamma}{Q^2}, \quad \hat{\mu} = \frac{\mu}{Q}. \quad (6.26)$$

onde temos que excluir o caso $Q = 0$. Uma vez que o caso sem carga é importante em nosso

estudo e a escalarização acontece devido ao não-mínimo acoplamento (em contraste com, por exemplo, estudos de supercondutores holográficos, onde a presença do campo de gauge $U(1)$ é essencial para o campo escalar minimamente acoplado se formar), apresentamos nossos resultados aqui para a entropia S fixa do buraco negro.

Devido ao fato de que o campo escalar em nosso modelo é real, as aplicações de nossos resultados são transições de fase que envolvem parâmetros de ordem de valor real, em vez de valor complexo. Exemplos são a diferença entre a densidade do líquido e a densidade do gás em uma transição de fase líquido-gás, a diferença nas concentrações em líquidos binários ou a magnetização em ímãs uniaxiais. Uma vez que a correspondência AdS/CFT é aplicada para descrever transições de fase quântica em vez de transições térmica e de um lado e acoplamento forte em vez de cenários de acoplamento fraco do outro, a questão que permanece é se tais transições aparecem na natureza. Um exemplo é a investigação de transições de fase quântica de gás líquido em fluidos bosônicos, como discutido recentemente.¹¹¹ Visto que ${}^4\text{He}$ é conhecido por ser um sistema de forte interação, seria interessante comparar nossos resultados com aqueles obtidos por meio de outras abordagens.

7 SUPERCONDUTORES HOLOGRÁFICOS NÃO-BALANCEADOS

Neste capítulo nós apresentamos o modelo teórico para um supercondutor holográfico em $(2+1)$ - dimensões que possui interação entre suas fases e que pode ser balanceado ou não-balanceado.

Para a criação do cenário com espécies supercondutoras não-balanceadas, usamos dois campos de gauge (A_μ, a_μ) . Alguns destes modelos já foram estudados na literatura,⁴⁴ mas a diferença está em que nós incluímos a interação com o parâmetro ϵ entre os dois campos de gauge $U(1)$ podendo constituir uma direta interação entre as forças motrizes elétrica e de spin para o sistema, além de nosso modelo ter como pano de fundo um buraco negro Schwarzschild-planar no *bulk* do AdS. Para a criação do cenário para parâmetros de múltiplas ordens, inserimos dois campos escalares (ϕ, ξ) afim de analisar suas competições e melhoramento ao adicionarmos constante de acoplamento adicional λ entre os campos inspirados na literatura.^{43,45}

O tipo de interação que estamos usando aqui foi discutido em um contexto muito diferente anteriormente, a saber, no contexto do acoplamento do Modelo Padrão da física de partículas a um "setor escuro"^{112,113} através de uma interação direta de dois poências medidores $U(1)$. Aqui, estamos usando esse tipo de interação em um novo contexto, o contexto *AdS/CFT*.

7.1 O modelo

O modelo que estamos estudando é dado pela seguinte ação,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + 16\pi G \mathcal{L}_m) \quad (7.1)$$

onde R é o escalar de Ricci, G a constante de Newton, $\Lambda = -3/\ell^2 < 0$ a constante cosmológica e ℓ o raio do AdS. A lagrangiana da matéria $\mathcal{L}_m$ é dada por

$$\mathcal{L}_m = -D_\mu \phi (D^\mu \phi)^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - D_\mu \xi (D^\mu \xi)^* - \frac{1}{4} H_{\mu\nu} H^{\mu\nu} - V(\phi, \xi) + \frac{\epsilon}{2} F_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \quad (7.2)$$

com as derivadas covariantes $D_\mu \phi = \nabla_\mu \phi - ie_1 A_\mu \phi$, $D_\mu \xi = \nabla_\mu \xi - ie_2 a_\mu \xi$ e os tensores de força do campo eletromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $H_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$, onde A_μ e a_μ são dois potenciais de gauge $U(1)$ com constantes de acoplamento e_1 e e_2 , respectivamente, e ϵ o termo o acoplamento entre ambos. Aqui ϕ e ξ são campos escalares complexos, a priori, com potencial,

$$V(\phi, \xi) = m_\phi^2 \phi \phi^* + m_\xi^2 \xi \xi^* + \lambda \phi \phi^* \xi \xi^* . \quad (7.3)$$

onde m_ϕ e m_ξ denotam as massas dos campos ϕ e ξ , respectivamente e λ denota o acoplamento entre estes dois campos.

Nós assumimos a estaticidade das soluções e assumimos que todos os campos dependem apenas da coordenada r , o que pode ser interpretado como uma escala de energia com $r \rightarrow \infty$, ou seja, a fronteira do AdS correspondente ao regime UV da teoria quântica de campos dual.

Assim, o Ansatz para os campos nas coordenadas planas t, r, x, y lê-se como:

$$A_\mu dx^\mu = A_t(r) dt \quad , \quad a_\mu dx^\mu = a_t(r) dt \quad , \quad \phi = \phi(r) \quad , \quad \xi = \xi(r) \quad (7.4)$$

e a métrica é dada por

$$ds^2 = -N\sigma^2 dt^2 + \frac{1}{N} dr^2 + r^2 (dx^2 + dy^2) \quad (7.5)$$

com $N \equiv N(r)$ e $\sigma \equiv \sigma(r)$.

As componentes não-nulas do tensor energia-momento são dadas através de

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \quad (7.6)$$

assim,

$$\rho = -T_t^t = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 + V(\phi, \xi) \quad , \quad p_r = T_r^r = -\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 - V(\phi, \xi) \quad , \quad (7.7)$$

$$p_\theta^\theta = T_\theta^\theta = \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 - V(\phi, \xi) \quad , \quad p_\varphi^\varphi = T_\varphi^\varphi = \sin^2 \theta p_\theta^\theta \quad (7.8)$$

onde

$$\mathcal{T}_1 = \frac{1}{2\sigma^2} (A_t'^2 + a_t'^2 - 2\epsilon A_t' a_t') \quad , \quad \mathcal{T}_2 = N(\phi'^2 + \xi'^2) \quad , \quad \mathcal{T}_3 = \frac{1}{N\sigma^2} (e_1^2 A_t^2 \phi^2 + e_2^2 a_t^2 \xi^2) \quad (7.9)$$

Note que requeremos $\epsilon < 1$ para termos certeza de que ρ seja positivo definido. As duas combinações adequadas das componentes da equação de Einstein, então, são

$$\frac{N\sigma'}{r\sigma} = 8\pi G (\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3) \quad (7.10)$$

e

$$-\frac{1}{r^2} (N + rN') + \frac{3}{\ell^2} = 8\pi G (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 + V) \quad (7.11)$$

enquanto as equações de movimento para os campos escalar e de gauge são

$$(\sigma N r^2 \phi')' = -\frac{e_1^2 A_t^2}{N\sigma^2} \phi + m_\phi^2 \phi + \lambda \phi \xi^2 \quad , \quad (7.12)$$

$$(\sigma N r^2 \xi')' = -\frac{e_2^2 a_t^2}{N\sigma^2} \xi + m_\xi^2 \xi + \lambda \xi \phi^2 \quad , \quad (7.13)$$

$$\left(\frac{r^2 A_t'}{\sigma} \right)' = \frac{2r^2}{N\sigma^2(1-\epsilon^2)} (e_1^2 A_t \phi^2 + \epsilon e_2^2 a_t \xi^2) \quad , \quad (7.14)$$

$$\left(\frac{r^2 a_t'}{\sigma} \right)' = \frac{2r^2}{N\sigma^2(1-\epsilon^2)} (e_2^2 a_t \xi^2 + \epsilon e_1^2 A_t \phi^2) \quad . \quad (7.15)$$

7.1.1 Condições da Fronteira

Para encontrar uma solução explícita das equações de movimento, temos que fixar as condições de contorno apropriadas. Estamos interessados na formação de cabelo no buraco negro planar de Schwarzschild no AdS com horizonte em $r = r_h$ tal que $N(r_h) = 0$. Para que os campos de matéria sejam regulares no horizonte r_h , precisamos impor que,

$$A_t(r_h) = 0 \quad , \quad \phi'(r_h) = \frac{m_\phi^2 \phi + \lambda \phi \xi^2}{N'} \Big|_{r=r_h} \quad (7.16)$$

e

$$a_t(r_h) = 0 \quad , \quad \xi'(r_h) = \frac{m_\xi^2 \xi + \lambda \xi \phi^2}{N'} \Big|_{r=r_h} \quad . \quad (7.17)$$

No limite conforme, que é um plano bidimensional, os campos escalares têm o seguinte comportamento:

$$\phi(r \gg 1) = \frac{\phi_-}{r^{\lambda_-}} + \frac{\phi_+}{r^{\lambda_+}} \quad , \quad \xi(r \gg 1) = \frac{\xi_-}{r^{\tilde{\lambda}_-}} + \frac{\xi_+}{r^{\tilde{\lambda}_+}} \quad , \quad (7.18)$$

onde

$$\lambda_{\pm} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \ell^2 m_{\phi}^2} \quad , \quad \tilde{\lambda}_{\pm} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \ell^2 m_{\xi}^2} \quad . \quad (7.19)$$

Os campos de gauge $U(1)$ decaem com segue,

$$A_t(r \gg 1) = \mu_{\phi} - \frac{\rho_{\phi}}{r} \quad , \quad a_t(r \gg 1) = \mu_{\xi} - \frac{\rho_{\xi}}{r} \quad . \quad (7.20)$$

onde, de acordo com as relações 3.21 e 3.22 os potenciais químicos são lidos como $\mu_{\phi} = \mu$ e $\mu_{\xi} = \delta\mu$, ou seja, o potencial químico desequilibrado está diretamente associado a componente temporal do vetor de campo a_{μ} . Ainda, as densidades de cargas são dadas ρ_{ϕ} e ρ_{ξ} , respectivamente.

Nós escolhemos $m_{\phi}^2 = m_{\xi}^2 = -2/\ell^2$. Ambas escolhas estão bem acima do limite de Breitenlohner-Freedmanem que $m_{BF}^2 = -9/(4\ell^2)$ garante a estabilidade da fronteira conforme. Além disso, definimos $\phi_- = 0$ e $\xi_- = 0$, tal que os respectivos decaimentos para os campos escalares são

$$\phi(r \gg 1) = \frac{\phi_+}{r^2} \quad , \quad \xi(r \gg 1) = \frac{\xi_+}{r^2} \quad (7.21)$$

e assim ϕ_+ e ξ_+ podem ser interpretados como os valores esperados de operadores de dimensão dois na teoria de campos quântica na fronteira.

7.1.2 Soluções sem os campos escalares

Definindo $\phi = \xi \equiv 0$ implica que $\sigma \equiv 1$ a equação de campo gauge-gravidade restante pode ser resolvida para dar uma solução Reissner-Nordström com carga modificada. As soluções para as equações do campo de gauge são

$$A_t(r) = \mu_{\phi} - \frac{\rho_{\phi}}{r} \quad , \quad a_t(r) = \mu_{\xi} - \frac{\rho_{\xi}}{r} \quad , \quad (7.22)$$

enquanto (7.11) gera

$$N(r) = \frac{r^2}{\ell^2} - \frac{M}{r} + 8\pi G \left(\frac{\rho_\phi^2}{r^2} + \frac{\rho_\xi^2}{r^2} - 2\epsilon \frac{\rho_\phi \rho_\xi}{r^2} \right), \quad (7.23)$$

onde M é um constante de integração.

7.1.3 Resultados: campos de gauge dinâmicos

Aqui, estaremos interessados no *probe* limite, ou seja, no caso em que os campos de matéria não reagem de volta na métrica. Iremos ainda assumir que os campos de gauge são dinâmicos, ou seja, vamos corrigir apenas o fundo gravitacional e não os campos de gauge. Neste caso, a equação de Einstein no vácuo incluindo uma constante cosmológica negativa leva à seguinte solução

$$\sigma(r) \equiv 1, \quad N(r) = \frac{r^2}{\ell^2} - \frac{M}{r} \quad (7.24)$$

onde M corresponde a massa da solução. Este é espaço-tempo planar de Schwarzschild-Anti-de Sitter (pSAdS). O horizonte do buraco negro é determinado pela equação $N(r_h) = 0$. Utilizando isto, temos de (7.24)

$$N(r) = \frac{r^2}{\ell^2} \left(1 - \frac{r_h^3}{r^3} \right), \quad N'(r) = \frac{1}{\ell^2} \left(2r + \frac{r_h^3}{r^2} \right) \quad (7.25)$$

e a temperatura Hawking do buraco negro,

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{N'|_{r=r_h}}{4\pi} = \frac{3r_h}{4\pi\ell^2}, \quad (7.26)$$

onde nós temos usado que a gravidade superficial κ de um buraco negro estático é dada por

$$\kappa^2 = -\frac{1}{4}(g^{tt}g^{ij}\partial_i g_{tt}\partial_j g_{tt})|_{r=r_h}. \quad (7.27)$$

As equações de movimento (7.12) - (7.15) foram resolvidas numericamente. No sentido de reduzir o número de acoplamentos no modelo, podemos usar a invariância do mesmo em determinados sob dada reescala. Em primeiro lugar, existe uma invariância sob

o seguinte reescalonamento de coordenadas:

$$r \rightarrow \ell r \quad , \quad m_\phi \rightarrow \frac{m_\phi}{\ell} \quad , \quad m_\xi \rightarrow \frac{m_\xi}{\ell} \quad , \quad e_1 \rightarrow \frac{e_1}{\ell} \quad , \quad e_2 \rightarrow \frac{e_2}{\ell} \quad , \quad \lambda \rightarrow \frac{\lambda}{\sqrt{\ell}} \quad (7.28)$$

os quais nos permite definir $\ell \equiv 1$. Note que podemos reescalar $r_h \rightarrow \ell r_h$ e assim $T_H \rightarrow T_H/\ell$. Além disso, há uma invariância sob o reescalonamento dos campos escalar e de gauge, tal que

$$\phi \rightarrow \frac{\phi}{e_1} \quad , \quad \xi \rightarrow \frac{\xi}{e_1} \quad , \quad A_t \rightarrow \frac{A_t}{e_1} \quad , \quad a_t \rightarrow \frac{a_t}{e_1} \quad (7.29)$$

o que nos permite definir $e_1 \equiv 1$ sem perda de generalidade.

7.2 Coexistência de duas ordens supercondutoras

Como dito anteriormente a supercondutividade em alta temperatura envolve mecanismos de interação eletrônicas mais complexos e mais fortemente correlacionados do que os estado BCS, embora estes estados ainda possam estar presentes. Na verdade verifica-se que nestes sistemas supercondutores existe o surgimento de diferentes transições associadas a diferentes parâmetros de ordem, a exemplo temos o surgimento de uma ordem magnética competindo com uma ordem supercondutora em materiais que sofrem a transição ferromagnético-supercondutor.

Podemos encarar nosso modelo como um material supercondutor do tipo-s com duas fases, cuja primeira é dual ao campo escalar ϕ carregado em relação ao gauge A_μ e não carregado em relação ao gauge a_μ e cuja segunda é dual ao campo escalar ξ carregado em relação ao gauge a_μ e não carregado em relação ao gauge A_μ . Permitir que o sistema tenha esse dois campos escalares, ou seja, dois parâmetros de ordem associados ao operador dual na fronteira é o que torna nosso sistema como dito na literatura "*multi-band*". Agora a construção da não-homogeneidade para nós estará em promover a diferença entre potenciais químicos e/ou entre as densidade de cargas do mesmo.

A primeira descrição dos resultados segue com o foco na competição e/ou melhoramento das fases devido a presença dos dois parâmetros de ordem associados ao sistema e por isso nos concentramos em tornar o sistema não-homogêneo promovendo a diferença explícita entre as densidade de cargas, tal que, para $\rho_\phi = \rho_\xi$, os supercondutores são ditos

Figura 25 – Exemplo da coexistência dos condensados para a presença dos campos escalares ϕ (vermelho) e ξ (azul) para $T < T_c$. Note que a curva em ξ (azul) é interrompida para valores de temperatura que estão abaixo de seus valores de condensação devido a técnica que utilizamos para a varredura do sistema, veja secção (7.5.1).

Fonte: Elaborada pela autora.

balanceados, enquanto para $\rho_\phi \neq \rho_\xi$, são ditos **não-balanceados**.

Assim a Figura 25 mostra que duas fases distintas surgem no sistema devido a formação dos cabelos associados valores não-nulos para os campos escalares ϕ (azul) e ξ (vermelho) próximo ao horizonte de evento para $\lambda = 0$ e $\epsilon = 0$. Isto pode ser interpretado na teoria da fronteira como a formação de duas ordens supercondutoras coexistindo no mesmo sistema.

Como a condensação para os campos ϕ e ξ são equivalentes, nós utilizaremos apenas umas das curvas, neste caso vamos utilizar o campo ϕ para a nossa análise. Considerando $\epsilon = 0$ estamos interessados em saber quanto a presença de λ influencia o acoplamento entre ϕ e ξ . Nas Figuras 28 e 29 podemos analisar a diferença entre a construção dos modelos balanceados e não-balanceados para diferentes valores de λ .

Na Fig. 28 o sistema é dito balanceado, o que significa que as densidades de cargas do sistema são iguais, ou seja, $\rho_\phi = \rho_\xi$, enquanto na Fig. 29 o sistema é dito não-balanceado, onde as densidades de cargas são diferentes, tal que, $\rho_\phi \neq \rho_\xi$. Podemos perceber que para o sistema balanceado a temperatura crítica T_c do sistema permanece inalterada, tendo todas as curvas condensando na mesma temperatura crítica. A curva sólida preta em ambas curvas detona a situação em que $\lambda = 0$ a partir da qual podemos visualizar duas distintas regiões em função de λ . Quando $\lambda > 0$, curvas verdes e azuis, a interação entre os condensados é atrativa, de modo que, as amplitudes do condensado

Figura 26 – Balanceado com $\epsilon = 0.0$ Figura 27 – Não-balanceado com $\epsilon = 0.0$

Fonte: Elaborada pela autora.

são atenuadas, porém quando $\lambda < 0$, curvas em tons de vermelho e laranja, a interação é repulsiva e uma nova fase surge no sistema.

Para o caso não-balanceado podemos perceber o mesmo comportamento do condensado quanto a presença de λ no sistema, vamos encontrar duas regiões a partir de $\lambda = 0$ em que percebemos competições e ou melhoramento das fases até o surgimento de uma nova fase, porém agora, também temos em adição a modificação da temperatura crítica. Quando $\lambda > 0$ a temperatura crítica é baixada no sistema, enquanto que quando $\lambda < 0$ os valores da temperatura crítica aumentam no sistema.

Em ambas curvas para baixos valores negativos iniciais de λ a transição não se parece com uma transição de segunda ordem, porém a medida que esses valores negativos crescem o surgimento de uma nova fase é estabelecido no que se parece com uma transição de segunda ordem, porém agora para valores $T > T_c$.

7.3 Influência de ϵ sobre λ

Uma vez analisada a influência de λ na condensação dos campos escalares ϕ e ξ , nos é interessante analisar quanto ϵ , o acoplamento entre os campos de gauge, pode competir ou melhorar a condensação de algum dos campos, talvez suprimi-la e/ou ainda modificar a temperatura crítica do sistema.

7.3.1 Supercondutores balanceados

Figura 28 – Balanceado com $\lambda = 0.0$ Figura 29 – Balanceado com $\epsilon = 0.0$

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 30 – Balanceado com $\epsilon = -0.5$ Figura 31 – Balanceado com $\epsilon = 0.5$

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 32 – Balanceado com $\epsilon = -0.9$ Figura 33 – Balanceado com $\epsilon = 0.9$

Fonte: Elaborada pela autora.

Na Fig. 28 temos $\lambda = 0$ para diferentes valores de ϵ no sistema. A curva preta representa o valor em que $\epsilon = 0$ e a partir desta podemos perceber que existem duas distintas regiões de atuação de ϵ . Quando $\epsilon > 0$ (curvas verdes e azuis), as amplitudes de condensação são atenuadas, enquanto para valores em que $\epsilon < 0$ (curvas em tons vermelhos e laranja), a amplitude do condensado é aumentada. Assim podemos perceber que ϵ competem ou melhoram a condensação dos campos escalares à depender dos valores utilizados.

Quando incorporamos o acoplamento λ para os campos escalares juntamente com ϵ o acoplamento para os campos de gauge surge uma competição entre ambos. Valores negativos de ϵ sob λ não causam muita diferença no sistema, tendo o acoplamento λ caráter dominante, mas a medida que ϵ se torna positivo este passa a dominar o sistema destruindo a diferença entre as fases surgidas pela presença de λ levando o sistema a praticamente um único valor de condensação, veja Figura 33.

7.3.2 Supercondutores não-balanceados

Figura 34 – Não-balanceado com $\lambda = 0.0$ Figura 35 – Não-balanceado com $\epsilon = 0.0$

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 36 – Não-balanceado com $\epsilon = -0.5$ Figura 37 – Não-balanceado com $\epsilon = 0.5$

Fonte: Elaborada pela autora..

Figura 38 – Não-balanceado com $\epsilon = -0.9$ Figura 39 – Não-balanceado com $\epsilon = 0.9$

Fonte: Elaborada pela autora.

Novamente, o comportamento do sistema para os supercondutores não-balanceados é análogo ao caso balanceado. Na Fig. 34 temos $\lambda = 0$ para diferentes valores de ϵ no sistema. A curva preta representa o valor em que $\epsilon = 0$ e a partir desta podemos perceber a existência das duas distintas regiões de atuação de ϵ . Quando $\epsilon > 0$ (curvas verdes e azuis), como antes, as amplitudes de condensação são atenuadas, enquanto para valores em que $\epsilon < 0$ (curvas em tons vermelhos e laranja), as amplitude são aumentadas. Podemos perceber que a presença de ϵ também confere ao caso não-balanceado a condensação para diferentes valores de temperatura crítica, onde a medida que $\epsilon > 0$ existe uma diminuição acentuada da temperatura crítica do sistema.

Quando incorporamos o acoplamento λ entre os campos no sistema o mesmo comportamento para o caso não-balanceado também é observado. Existe uma competição entre λ e ϵ atuando diretamente nas amplitudes do condensado e na formação de novas fases. Valores negativos de ϵ sob λ não causam muita diferença no sistema, como antes, mantendo λ o caráter dominante na condensação, mas a medida que ϵ se torna positivo sua influência passa dominar o sistema destruindo a diferença entre as fases surgidas pela presença de λ levando o sistema a praticamente um único valor de condensação, porém acompanhado ainda de uma diferença entre valores na temperatura crítica, veja Figura 39.

7.4 Análise de ϵ no sistema

É interessante entender como ϵ influencia as densidade de carga e os potenciais químicos para os casos balanceados e não-balanceados. Nas curvas baixo consideramos $\lambda = 0$ e utilizamos os valores de $\epsilon = -0.9, 0, 0.9$ para a análise,

7.4.1 Supercondutores balanceados

Figura 40 – Balanceado com $\epsilon = 0.9$ e $\lambda = 0.0$.

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 41 – Balanceado com $\epsilon = 0.0$ e $\lambda = 0.0$.

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 42 – Balanceados com $\epsilon = -0.9$ e $\lambda = 0.0$.

Fonte: Elaborada pela autora.

Podemos perceber que existe uma pequena influência nas densidades de carga e potenciais químicos do sistema para valores ϵ , sendo este dominante quando ϵ é bastante positivo como mostrado na Figura 40 em contraste a Figura 42, o que corrobora as curvas de condensação apresentadas.

7.4.2 Supercondutores não-balanceados

Figura 43 – Não-balanceado com $\epsilon = 0.9$ e $\lambda = 0.0$.

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 44 – Não-balanceado com $\epsilon = 0.0$ e $\lambda = 0.0$.

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 45 – Não-balanceado com $\epsilon = -0.9$ e $\lambda = 0.0$.

Fonte: Elaborada pela autora.

Podemos perceber que valores ϵ influenciam bastante as densidades de carga e os potenciais químicos do sistema. Quando ϵ se torna muito negativo a característica não-homogênea do sistema vigora, Figura 45, porém quando ϵ é bastante positivo sua dominância leva o sistema não-balanceado quase a se aproximar de um sistema balanceado de modo que $\rho_\phi \simeq \rho_\xi$ e $\mu_\phi \simeq \mu_\xi$ como mostrado na Figura 43, o que corrobora aos resultados da condensação visto anteriormente, Fig. 39.

7.5 Fase LOFF

Como discutido na secção 3.2.1, em situações favoráveis como nos supercondutores a base de cupratos, cuja supercondutividade ocorre em planos, a aplicação de um campo magnético externo ao material supercondutor permite que a interação Zeeman deste campo com o spin eletrônico da corrente condutora tenha um caráter dominante, de modo que, pode-se criar uma situação em que um potencial químico desequilibrado $\delta\mu$ surja no sistema podendo ser identificado como a própria aplicação do campo ($\delta\mu = H_z\mu_B$). Se pertirmos em nosso modelo, que o segundo campo de gauge a_μ seja interpretado como este campo aplicado ao sistema, podemos associar diretamente a seguinte expressão $\delta\mu = \mu_\xi = \mu_2$ e, assim, nos perguntar se nesta situação de supercondutividade não-homogênea a quebra espontânea das simetrias no sistema poderia favorecer o surgimento da fase LOFF. Em analogia a Fig. 14 analisamos esta possibilidade na Fig. 46 para valores de $\epsilon = -0.9$ e $\epsilon = 0.9$ e $\lambda = 0$.

Figura 46 – Supercondutores não-balanceado com $\epsilon = -0.9$ e $\epsilon = 0.9$, respectivamente, no plano $(T/T_c, \mu_2)$. As curvas demonstram que não há sinal da formação de uma fase LOFF.

Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que μ_2 na Figura 46 representa o potencial químico desequilibrado μ_ξ . Como nenhuma das curvas cortam o eixo para algum valor de μ_2 , não pudemos identificar

a formação da fase LOFF em ambas situações.

7.5.1 Sobre a numérica

Da análise numérica que fazemos aqui, os dados são os seguintes: consideramos $r_h = 1.0$, $L = 1$, de modo que, $m^2 = -2$, garantindo a estabilidade do AdS_4 dentro do limite de Breitenlohner-Freedman. Para mostrar o comportamento do condensado foi estudado o comportamento de ϕ_+ e ξ_+ em função da temperatura, onde $\phi_+ = \langle \mathcal{O} \rangle$ e $\xi_+ = \langle \mathcal{P} \rangle$ representam os operadores duais na teoria da fronteira do AdS.

Para construirmos as soluções para diferentes valores de ψ_+ e ξ_+ fizemos varreduras em soluções do tipo $\rho_\phi = \rho(\phi_+)$ e $\rho_\xi = \rho(\xi_+)$. Isso permite construir o sistema não-balanceado criando uma diferença direta nos valores de varredura para ϕ_+ e ξ_+ de modo que na Figura 25 o condensado para o campo ξ (curva azul) é interrompido para valores de temperatura que estão abaixo de seus valores de condensação. Como as densidades de cargas não são fixas em nosso sistema, no intuito de que os dados fiquem similares a literatura, assumimos a seguinte normalização: $X/\sqrt{(\rho_\phi + \rho_\xi)}$, onde $X = \phi$ ou $X = \xi$ ou $X = T$, dependendo da curva; de modo que, o condensado possa ser interpretado como uma varredura realizada variando a temperatura e mantendo as densidades de carga fixa a cada conjunto, e por isso em nossos gráficos as entidades analisadas recebem um asterisco.

8 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O projeto de doutorado aqui apresentado teve como objetivo o estudo e a construção de diagramas de transição de fase para modelos do tipo condutor/supercondutor em diferentes situações físicas. No primeiro caso estudamos a formação de supercondutores com inclusão da *backreaction* e longe do limite de grandes N com a inserção dos termos de *Gauss Bonnet* com constante de acoplamento α negativa. Pudemos notar que a medida que α se torna mais negativo a temperatura crítica aumenta, enquanto a amplitude de condensação diminui. Inserindo a *backreaction* no sistema, notamos que a temperatura crítica tende a diminuir embora ainda permaneça positiva para todos os valores de α , de modo que, quando os valores da *backreaction* são mais acentuados, o condensado varia mais amplamente com α . Estes resultados ainda não foram publicados, mas estão sendo preparados para este fim.

No segundo modelo estudamos a escalarização espontânea de um buraco negro esfericamente simétrico, estático e assintoticamente Anti-de Sitter (aAdS) em um modelo de gravidade escalar-tensorial num acoplamento não-mínimo da forma $\phi^2(\alpha\mathcal{R} + \gamma\mathcal{G})$ e descobrimos que quando incluída a *backreaction* do espaço-tempo em consideração, a escalarização do buraco negro é dupla a descrição de uma transição de fase em um sistema quântico fortemente acoplado, ou seja, que corresponde a uma transição de fase holográfica. Este artigo já está publicado⁽⁴²⁾.

No terceiro e último caso estudamos o modelo de duas bandas supercondutoras para um supercondutor não-homogêneo e analisamos a competição entre os acoplamento de ambas situações físicas. Para criar um modelo de duas bandas foi inserido dois campos escalares distintos, ϕ e ξ no sistema e uma constante de acoplamento λ entre ambos, enquanto para a criação de um modelo não-homogêneo além do gauge A_μ inserimos um outro gauge a_μ e um acoplamento ϵ entre ambos. A competição entre as fases devido a presença de λ permite que para valores de $\lambda < 0$ uma nova fase surja no sistema a partir de $T > T_c$, além de permitir uma clara distinção entre supercondutores balanceados e não-balanceados com a modificação da temperatura crítica para estes últimos. Quando passamos a incorporar ϵ ao sistema, notamos que para valores suficientemente positivos sua influência passa a ser dominante e este é capaz de suprimir o surgimento desta nova

fase para ambos supercondutores (balanceados e não-balanceados), porém não é capaz de suprimir a diferença da temperatura crítica entre o supercondutores não-balanceados.

As perspectivas deste trabalho são incorporar ao último modelo estudado transições de fase em $T = 0$ no intuito de se obter o diagrama de fase completo do modelo incluindo a transição isolante-supercondutor, além de expandir o modelo introduzindo a backreaction do espaço-tempo e os termos de Gauss-bonnet para entender se esta nova transição pode ser suprimida. Pretendemos ainda fazer uma análise da energia de Gibbs do sistema a fim de entendermos melhor esta nova fase surgida.

Todos os modelos deste trabalho tem suas soluções construídas numericamente através do software *Fortran* utilizando o pacote *Colsys*.¹¹⁴

REFERÊNCIAS

- 1 POLCHINSKI, J. **String theory**: superstring theory and beyond. Cambridge: Cambridge University press, 1998. v. 2.
- 2 GREENE, B. **O universo elegante**: supercordas, dimensões ocultas e a busca da teoria definitiva. São Paulo: Companhia das Letras, 2001.
- 3 BECKER, K.; BECKER, M.; SCHWARZ, J. H. **String theory and M-theory**: a modern introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- 4 RICKLES, D. **A brief history of string theory**: from dual models to m-theory. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2014.
- 5 SHOMER, A. **A pedagogical explanation for the non-renormalizability of gravity**. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/0709.3555.pdf>>. Acesso em: 22 fev. 2021.
- 6 ROVELLI, C. **Notes for a brief history of quantum gravity**. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0006061.pdf>>. Acesso em: 22 fev. 2021.
- 7 HARTNOLL, S. A. Lectures on holographic methods for condensed matter physics. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 26, n. 22, p. 224002, 2009.
- 8 MALDACENA, J. The large-n limit of superconformal field theories and supergravity. **International journal of theoretical physics**, Springer, v. 38, n. 4, p. 1113–1133, 1999.
- 9 NĀSTASE, H. **Introduction to the AdS/CFT correspondence**. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.
- 10 ALTLAND, A.; SIMONS, B. D. **Condensed matter field theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- 11 HOOFT, G. 't. A planar diagram theory for strong interactions. In: BREZIN E.; WADIA, S. R. (Ed.). **The large N expansion in quantum field theory and statistical physics**: From spin systems to 2-dimensional gravity. Singapore: World Scientific, 1993. p. 80–92.
- 12 AMMON, M.; ERDMENGER, J. **Gauge/gravity duality**: foundations and applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.
- 13 SUSSKIND, L. The world as a hologram. **Journal of Mathematical Physics**, AIP, v. 36, n. 11, p. 6377–6396, 1995.
- 14 BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. **Physical Review D**, APS, v. 7, n. 8, p. 2333, 1973.
- 15 HAWKING, S. W. Black holes and thermodynamics. **Physical Review D**, APS, v. 13, n. 2, p. 191, 1976.
- 16 NATSUUME, M. **AdS/CFT duality user guide**. New York: Springer, 2015. (Lectures notes in physics, v. 903.).

- 17 BRODSKY, S. J.; TÉRAMOND, G. F. de. Ads/cft and light-front qcd. In: ZICHICHI, A. (Ed.). **Search for the “totally unexpected” in the LHC era**. Singapore: World Scientific, 2010. p. 139–183.
- 18 SACHDEV, S. What can gauge-gravity duality teach us about condensed matter physics? **Annual Review of Condensed Matter Physics**, Annual Reviews, v. 3, n. 1, p. 9–33, 2012.
- 19 GUBSER, S. S. Breaking an abelian gauge symmetry near a black hole horizon. **Physical Review D**, APS, v. 78, n. 6, p. 065034, 2008.
- 20 NOMURA, Y.; SANCHES, F.; WEINBERG, S. J. Flat-space quantum gravity in the ads/cft correspondence. **Physical Review D**, APS, v. 93, n. 6, p. 064049, 2016.
- 21 ROCHA, J. V. Evaporation of large black holes in ads: coupling to the evaporon. **Journal of High Energy Physics**, IOP Publishing, v. 2008, n. 08, p. 075, 2008.
- 22 POLCHINSKI, J. The black hole information problem. In: **New Frontiers in Fields and Strings**: Tasi 2015 proceedings of the 2015 theoretical advanced study institute in elementary particle physics. Singapore: World Scientific, 2017. p. 353–397.
- 23 AHARONY, O. et al. Large n field theories, string theory and gravity. **Physics Reports**, Elsevier, v. 323, n. 3-4, p. 183–386, 2000.
- 24 CAI, R. et al. Introduction to holographic superconductor models. **Science China Physics, Mechanics & Astronomy**, Springer, v. 58, n. 6, p. 1–46, 2015.
- 25 HARTNOLL, S. A.; HERZOG, C. P.; HOROWITZ, G. T. Holographic superconductors. **Journal of High Energy Physics**, IOP Publishing, v. 2008, n. 12, p. 015, 2008.
- 26 AMMON, M. Gauge/gravity duality applied to condensed matter systems. **Fortschritte der Physik**, Wiley Online Library, v. 58, n. 11-12, p. 1123–1250, 2010.
- 27 BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. Theory of superconductivity. **Physical Review**, APS, v. 108, n. 5, p. 1175, 1957.
- 28 BEDNORZ, J. G.; MÜLLER, K. A. Possible high t_c superconductivity in the ba-la-cu-o system. **Zeitschrift für Physik B: condensed matter**, Springer, v. 64, n. 2, p. 189–193, 1986.
- 29 HARTNOLL, S. A.; HERZOG, C. P.; HOROWITZ, G. T. Building a holographic superconductor. **Physical Review Letters**, APS, v. 101, n. 3, p. 031601, 2008.
- 30 HERZOG, C. P. Lectures on holographic superfluidity and superconductivity. **Journal of Physics A: mathematical and theoretical**, IOP Publishing, v. 42, n. 34, p. 343001, 2009.
- 31 BREITENLOHNER, P.; FREEDMAN, D. Z. Stability in gauged extended supergravity. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 144, n. 2, p. 249–281, 1982.
- 32 HOROWITZ, G. T.; WAY, B. Complete phase diagrams for a holographic superconductor/insulator system. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2010, n. 11, p. 11, 2010.

- 33 BRIHAYE, Y.; HARTMANN, B. Holographic superfluid/fluid/insulator phase transitions in 2+1 dimensions. **Physical Review D**, APS, v. 83, n. 12, p. 126008, 2011.
- 34 HOROWITZ, G. T.; ROBERTS, M. M. Holographic superconductors with various condensates. **Physical Review D**, APS, v. 78, n. 12, p. 126008, 2008.
- 35 BARCLAY, L. et al. Gauss-bonnet holographic superconductors. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2010, n. 12, p. 29, 2010.
- 36 MERMIN, N. D.; WAGNER, H. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-or-two-dimensional isotropic heisenberg models. **Physical Review Letters**, APS, v. 17, n. 22, p. 1133, 1966.
- 37 GREGORY, R.; KANNO, S.; SODA, J. Holographic superconductors with higher curvature corrections. **Journal of High Energy Physics**, IOP Publishing, v. 2009, n. 10, p. 010, 2009.
- 38 BRIHAYE, Y.; HARTMANN, B. Holographic superconductors in 3+1 dimensions away from the probe limit. **Physical Review D**, APS, v. 81, n. 12, p. 126008, 2010.
- 39 SIANI, M. Holographic superconductors and higher curvature corrections. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2010, n. 12, p. 35, 2010.
- 40 GREGORY, R. Holographic superconductivity with gauss-bonnet gravity. **Journal of Physics: conference series**, IOP Publishing, v. 283, n. 1, p. 012016, 2011.
- 41 BRIHAYE, Y.; HARTMANN, B. Stability of gauss-bonnet black holes in anti-de sitter space-time against scalar field condensation. **Physical Review D**, APS, v. 84, n. 8, p. 084008, 2011.
- 42 BRIHAYE, Y. et al. Scalarization of asymptotically anti-de sitter black holes with applications to holographic phase transitions. **Physical Review D**, APS, v. 101, n. 12, p. 124016, 2020.
- 43 MUSSO, D. Competition/enhancement of two probe order parameters in the unbalanced holographic superconductor. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2013, n. 6, p. 83, 2013.
- 44 BIGAZZI, F. et al. Unbalanced holographic superconductors and spintronics. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2012, n. 2, p. 78, 2012.
- 45 MUSSO, D. **Minimal model for an unbalanced holographic superconductor**. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1304.6118.pdf>>. Acesso em: 22 fev. 2021.
- 46 LARKIN, A.; OVCHINNIKOV, Y. N. Nonuniform state of superconductors. **Soviet Physics-JETP**, v. 20, n. 3, p. 762–762, 1965.
- 47 FULDE, P.; FERRELL, R. A. Superconductivity in a strong spin-exchange field. **Physical Review**, APS, v. 135, n. 3A, p. A550, 1964.
- 48 CLOGSTON, A. M. Upper limit for the critical field in hard superconductors. **Physical Review Letters**, APS, v. 9, n. 6, p. 266, 1962.

- 49 CHARMOUSIS, C. Introduction to anti de sitter black holes. In: PAPANTONOPOULOS, E. (Ed.). **From gravity to thermal gauge theories: the ads/cft correspondence**. Berlin: Springer, 2011. p. 3–26.
- 50 SOKOŁOWSKI, L. M. The bizarre anti-de sitter spacetime. **International Journal of Geometric Methods in Modern Physics**, World Scientific, v. 13, n. 09, p. 1630016, 2016.
- 51 MARTINON, G. **Gravitational systems in asymptotically anti-de Sitter space-times**. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1707.00952.pdf>>. Acesso em: 22 jul. 2021.
- 52 GARCIA, J. **Curso de relatividad general: la frontera de anti de sitter**. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=hk4GUW9Xm-A&t=2860s>>. Acesso em: 22 jul. 2021.
- 53 WISEMAN, T. **Introduction to the AdS-CFT conjecture from a GR perspective: lecture 3**. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=kMuPN-15zKg>>. Acesso em: 20 mar. 2021.
- 54 M.C.ESCHER. **E85 by M.C.Escher**. Disponível em: <http://www.josleys.com/show_gallery.php?galid=325>. Acesso em: 02 feb. 2021.
- 55 THO, N. P. K. **Geodesics in the (anti-) de Sitter spacetime**. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1605.05046.pdf>>. Acesso em: 20 jan. 2021.
- 56 CALVO, R. M. **Geometry of (Anti-) De Sitter space-time**. Disponível em: <<http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/125099/1/Monge%20Calvo%20Ricard.pdf>>. Acesso em: 20 jan. 2021.
- 57 WITTEN, E. **Anti de Sitter space and holography**. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/hep-th/9802150.pdf>>. Acesso em: 20 jan. 2021.
- 58 ZWIEBACH, B. **A first course in string theory**. Cambridge: Cambridge University press, 2004.
- 59 FAVPNG. **AdS/CFT correspondence: spacetime conformal**. Disponível em: <https://favpng.com/png_view/space-anti-de-sitter-space-ads-cft-correspondence-spacetime-conformal-field-theory-png/GYC5CUHt>. Acesso em: 21 jul. 2021.
- 60 HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. Asymptotically anti-de sitter spaces. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 98, n. 3, p. 391–424, 1985.
- 61 ASHTEKAR, A.; MAGNON, A. Asymptotically anti-de sitter space-times. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 1, n. 4, p. L39, 1984.
- 62 BROWN, J. D.; CREIGHTON, J.; MANN, R. B. Temperature, energy, and heat capacity of asymptotically anti-de sitter black holes. **Physical Review D**, APS, v. 50, n. 10, p. 6394, 1994.
- 63 HOROWITZ, G. T. **Black holes in higher dimensions**. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

- 64 BLAU, M. **Lecture notes on general relativity**. Disponível em: <<http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf>>. Acesso em: 22 jul. 2020.
- 65 MCGREEVY, J. Holographic duality with a view toward many-body physics. **Advances in High Energy Physics**, Hindawi, v. 2010, 2010. DOI: 10.1155/2010/723105.
- 66 FOKEEVA, N. P. **Imbalanced holographic superconductors**. 2011. 126 p. Tese (Doutorado), Università degli studi di Firenze, Firenze, 2011.
- 67 HAWKING, S. W. Black hole explosions? **Nature**, Nature Publishing Group, v. 248, n. 5443, p. 30–31, 1974.
- 68 KUBO, R. Statistical-mechanical theory of irreversible processes. i. general theory and simple applications to magnetic and conduction problems. **Journal of the Physical Society of Japan**, The Physical Society of Japan, v. 12, n. 6, p. 570–586, 1957.
- 69 BEZERRA, V. A. Racionalidade, consistência, reticulação e coerência: o caso da renormalização na teoria quântica do campo. **Scientiae Studia**, SciELO Brasil, v. 1, p. 151–181, 2003.
- 70 QUALLS, J. D. **Lectures on conformal field theory**. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1511.04074.pdf>>. Acesso em: 22 jul. 2021.
- 71 ZAFFARONI, A. Introduction to the ads-cft correspondence. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 17, n. 17, p. 3571, 2000.
- 72 MOORE, G.; SEIBERG, N. Classical and quantum conformal field theory. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 123, n. 2, p. 177–254, 1989.
- 73 PAPANTONOPoulos, E. **From gravity to thermal gauge theories: the ads/cft correspondence**. Berlin: Springer Science & Business Media, 2011. v. 828.
- 74 GUBSER, S. S.; KLEBANOV, I. R.; POLYAKOV, A. M. Gauge theory correlators from non-critical string theory. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 428, n. 1-2, p. 105–114, 1998.
- 75 ZAAENEN, J. et al. **Holographic duality in condensed matter physics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.
- 76 HOROWITZ, G. T. Introduction to holographic superconductors. In: PAPANTONOPoulos, E. (Ed.). **From gravity to thermal gauge theories: the ads/cft correspondence**. Berlin: Springer, 2011. p. 313–347.
- 77 MEDEIROS, E. R. F. **Efeitos induzidos por uma corda cósmica na dinâmica relativística e na polarização do vácuo de campos de matéria**. 2014. 182 p. Tese (Doutorado), Centro de Ciencias Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014, 2014.
- 78 SACHDEV, S.; KEIMER, B. **Quantum criticality**. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1102.4628.pdf>>. Acesso em: 22 jul. 2021.
- 79 HOFFMAN, J. **Correlated Electron Materials**. Disponível em: <<https://hoffman.physics.harvard.edu/materials/materials.php>>. Acesso em: 21 jun. 2021.

- 80 SALINAS, S. R. **Introdução a física estatística**. São Paulo: Edusp, 1997. (Acadêmica, v. 9).
- 81 REICHL, L. E. **A modern course in statistical physics**. New York: John Wiley & Sons, 2016.
- 82 ALMEIDA, S. R. de. **Transições de fases quânticas em sistemas de spins em redes de baixa dimensionalidade**. 2015. 140 p. Tese (Doutorado), Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.
- 83 GINZBURG, V. L. On superconductivity and superfluidity (what i have and have not managed to do), as well as on the 'physical minimum' at the beginning of the xxi century (december 8, 2003). **Physics-Uspekhi**, IOP Publishing, v. 47, n. 11, p. 1155, 2004.
- 84 ONNES, H. K. The resistance of pure mercury at helium temperatures. **Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden**, b, v. 120, 1911.
- 85 ONNES, H. K. The liquefaction of helium. **Koninklijke Nederlandse Akademie von Wetenschappen, Proceedings**, v. 11, p. 1908–1909, 1908.
- 86 MAESTRO, A. G. D. **Superconductor-metal quantum phase transition in ultra-narrow Wires**. 2008. 192 p. Tese (Doutorado), Department of Physics, Harvard University, Cambridge, 2008.
- 87 GINZBURG, V. L.; LANDAU, L. D. On the theory of superconductivity. In: GINZBURG, V. L. (Ed.). **On superconductivity and superfluidity**. Berlin: Springer, 2009. p. 113–137.
- 88 ABRIKOSOV, A. A. The magnetic properties of superconducting alloys. **Journal of Physics and Chemistry of Solids**, Elsevier, v. 2, n. 3, p. 199–208, 1957.
- 89 BAGGIOLI, M.; GOYKHMAN, M. Phases of holographic superconductors with broken translational symmetry. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2015, n. 7, p. 35, 2015.
- 90 CASALBUONI, R.; NARDULLI, G. Inhomogeneous superconductivity in condensed matter and qcd. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 76, n. 1, p. 263, 2004.
- 91 ZWIERLEIN, M. W. et al. Fermionic superfluidity with imbalanced spin populations. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 311, n. 5760, p. 492–496, 2006.
- 92 CASALBUONI, R. **Lecture notes on superconductivity: Condensed matter and qcd**. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1810.11125.pdf>>. Acesso em: 22 fev. 2021.
- 93 WHEELER, J. A.; FORD, K. **Geons, black Holes, and quantum foam**. New York: Norton, 1991.
- 94 BEKENSTEIN, J. D. **Black hole hair: twenty-five years after**. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9605059.pdf>>. Acesso em: 22 jul. 2021.
- 95 BALASUBRAMANIAN, V.; KRAUS, P.; LAWRENCE, A. Bulk versus boundary dynamics in anti-de sitter spacetime. **Physical Review D**, APS, v. 59, n. 4, p. 046003, 1999.

- 96 KLEBANOV, I. R.; WITTEN, E. **AdS/CFT correspondence and symmetry breaking**. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/hep-th/9905104.pdf>>. Acesso em: 22 jul. 2021.
- 97 NISHIOKA, T.; RYU, S.; TAKAYANAGI, T. Holographic superconductor/insulator transition at zero temperature. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2010, n. 3, p. 1–23, 2010.
- 98 BOULWARE, D. G.; DESER, S. String-generated gravity models. **Physical Review Letters**, APS, v. 55, n. 24, p. 2656, 1985.
- 99 CAI, R.-G. Gauss-bonnet black holes in ads spaces. **Physical Review D**, APS, v. 65, n. 8, p. 084014, 2002.
- 100 PRESTON, A. W.; MORRIS, T. R. Cosmological back-reaction in modified gravity and its implications for dark energy. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2014, n. 09, p. 017, 2014.
- 101 PATRICK, S. et al. Backreaction in an analogue black hole experiment. **Physical Review Letters**, APS, v. 126, n. 4, p. 041105, 2021.
- 102 THORNE, K. S.; MISNER, C. W.; WHEELER, J. A. **Gravitation**. San Francisco: Freeman, 2000.
- 103 ACHUCARRO, A.; GREGORY, R.; KUIJKEN, K. Abelian higgs hair for black holes. **Physical Review D**, APS, v. 52, n. 10, p. 5729, 1995.
- 104 BABICHEV, E.; CHARMOUSIS, C.; LEHÉBEL, A. Asymptotically flat black holes in horndeski theory and beyond. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2017, n. 04, p. 027, 2017.
- 105 SOTIRIOU, T. P.; ZHOU, S.-Y. Black hole hair in generalized scalar-tensor gravity: an explicit example. **Physical Review D**, APS, v. 90, n. 12, p. 124063, 2014.
- 106 SALGADO, M.; SUDARSKY, D.; NUCAMENDI, U. Spontaneous scalarization. **Physical Review D**, APS, v. 58, n. 12, p. 124003, 1998.
- 107 HORNDESKI, G. W. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. **International Journal of Theoretical Physics**, Springer, v. 10, n. 6, p. 363–384, 1974.
- 108 CHARMOUSIS, C. From lovelock to horndeski’s generalized scalar tensor theory. In: PAPANTONOPoulos, E. (Ed.). **Modifications of Einstein’s theory of gravity at large distances**. Berlin: Springer, 2015. p. 25–56.
- 109 MINAMITSUJI, M.; IKEDA, T. Scalarized black holes in the presence of the coupling to gauss-bonnet gravity. **Physical Review D**, APS, v. 99, n. 4, p. 044017, 2019.
- 110 BRIHAYE, Y.; HARTMANN, B. Spontaneous scalarization of charged black holes at the approach to extremality. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 792, p. 244–250, 2019.
- 111 ZWERGER, W. Quantum-unbinding near a zero temperature liquid–gas transition. **Journal of Statistical Mechanics: theory and experiment**, IOP Publishing, v. 2019, n. 10, p. 103104, 2019.

- 112 HARTMANN, B.; ARBABZADAH, F. Cosmic strings interacting with dark strings. **Journal of High Energy Physics**, IOP Publishing, v. 2009, n. 07, p. 068, 2009.
- 113 VACHASPATI, T. Dark strings. **Physical Review D**, APS, v. 80, n. 6, p. 063502, 2009.
- 114 ASCHER, U.; CHRISTIANSEN, J.; RUSSELL, R. D. Colsys: A collocation code for boundary-value problems. In: CHILDS, B. et al. (Ed.). **Codes for boundary-value problems in ordinary differential equations**. Berlin: Springer, 1979. p. 164–185.

Apêndices

APÊNDICE A – EXPERIÊNCIA PROFISSIONAL ADQUIRIDA DURANTE O DOUTORADO

A aluna teve a oportunidade de visitar a Universidade Carl Von Ossietzky University of Oldenburg no total de seis meses em duas ocasiões diferentes: (out/2019-jan/2020) e (nov/2020-fev/2021) participando do grupo Researching Training Group (RTG) Models-of-Gravity liderado pela profa. Dra. Jutta Kunz.

Nestas ocasiões teve a oportunidade também de palestrar em duas instituições sendo,

- A primeira palestra em um Colloquium que faz parte do grupo RGT na University of Hannover na Alemanha em (04.12.19) sob o título de "Holographic Superconductors in $3 + 1$ dimensions away from the probe limit". Esta palestra é referente ao Capítulo 5 desta tese, cujo conteúdo está em preparo para divulgação de pequeno artigo com os resultados.
- Sendo a segunda palestra ministra em (07.01.2021) no Flatlight Group na Côte d'Azur-CRHEA-CNRS na França sob o título: The roots to Holographic Superconductors.

A participação no grupo RGT ainda conta com a publicação futura de um artigo entre a profa. Dra. Betti Hartmann, a profa. Dra. Jutta Kunz e a aluna intitulado: "(Un)balanced holographic superconductors with electric and spin motive force coupling", que está em preparo e cujo conteúdo abarca o capítulo 7 desta tese.

A.1 Publicações

A.1.1 Concluídas

A aluna tem uma publicação realizada em 2019 e intitulada: "Scalarization of asymptotically anti-de Sitter black holes with applications to holographic phase transitions", cuja descrição dos resultado foi brevemente realizada no capítulo 6 desta tese.⁴²

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.124016>

A.1.2 Em andamento

- "Holographic Superconductors in $3 + 1$ dimensions away from the probe limit with negative constant", (capítulo 5).
- "(Un)balanced holographic superconductors with electric and spin motive force coupling", (capítulo 7).

A.2 Palestras

Em 2018 a aluna participou da II Semana de Estudo de Física do Instituto Federal de São Paulo, IFSP/Votuporanga como pesquisadora convidada para palestrar sobre o título: Introdução aos Supercondutores Holográficos.

E também em 2019 a aluna participou da XIX Semana de Estudo de Física da UNESP/Bauru como pesquisador convidado para palestrar sob o título: Construindo um Supercondutor Holográfico.

A.3 Coorientação de TCC

Em 2019 a aluna desenvolveu um trabalho de coorientação para trabalho de conclusão de curso (TCC) intitulado: "Estudo de Geodésicas na solução de Schwarzschild" com o aluno Eduardo Albacete e o Prof. Dr. Josimar Fernando da Silva no Instituto Federal de São Paulo, IFSP/Votuporanga. O trabalho segue apresentado em anexo.

Anexos

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DE SÃO PAULO – CAMPUS VOTUPORANGA**

Eduardo Albacete

**ESTUDO DE GEODÉSICAS NA SOLUÇÃO
DE SCHWARZSCHILD**

VOTUPORANGA-SP

2019

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DE SÃO PAULO – CAMPUS VOTUPORANGA**

Eduardo Albacete

**ESTUDO DE GEODÉSICAS NA SOLUÇÃO DE
SCHWARZSCHILD**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como requisito parcial para a obtenção do
título de Licenciado em Física.

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP

Orientador: Prof. Dr. Josimar Fernando da Silva

Coorientador: Prof^a. Ma. Nathália Pio Aprile

VOTUPORANGA-SP

2019

FICHA CATALOGRÁFICA

A325e Albacete, Eduardo 1998-
Estudo de geodésicas de Schwarzschild/ Eduardo Albacete –
Votuporanga, 2019.
42 p. : il. color.; 29,8 cm.
Bibliografia: p. 41-42.

Orientador: Josimar Fernando da Silva
Coorientador: Nathália Pio Aprile
Trabalho de Conclusão de Curso (Física) – Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, 2019.

1. Relatividade (Física). 2. Gravitação. 3. Ondas gravitacionais.
4. Equações. I. Título.

CDD – 530.11

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DE SÃO PAULO – CAMPUS VOTUPORANGA**
Eduardo Albacete

**ESTUDO DE GEODÉSICAS NA SOLUÇÃO DE
SCHWARZSCHILD**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como requisito parcial para a obtenção do
título de Licenciado em Física.

Trabalho aprovado. **VOTUPORANGA-SP**, 13 de novembro de 2019:

Prof. Dr. Josimar Fernando da Silva
Orientador

Prof.ª Ma. Nathália Pio Aprile
Instituto de Física de São Carlos - USP
Arguidor 1

Prof. Dr. Márcio Constâncio Junior
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia - Campus Votuporanga
Arguidor 2

VOTUPORANGA-SP
2019

*Dedico este trabalho aos meus pais e
ao meu namorado Ednei.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, que sempre me apoiou durante meus estudos, e forneceu as condições necessárias para minha formação acadêmica. Em segundo momento agradeço a Prof^a. Ma. Nathália Pio Aprile por exercer um papel fundamental no desenvolvimento dessa pesquisa como minha co-orientadora, e também, por sempre ter auxiliado durante meu primeiro contato com o tema, disponibilizando parte do seu tempo para me orientar periodicamente.

Agradeço, por fim, o Prof^o. Dr. Josimar Fernando da Silva, que mesmo não sendo da área, aceitou ser meu orientador institucional, me encorajando a desenvolver o raciocínio perante ao trabalho de conclusão de curso semanalmente, agradeço também pela grande ajuda na utilização do *software* Mathematica.

*“Geometria diz a matéria como se mover,
e matéria diz a geometria como se curvar”.*
(Misner; Wheller; Thorne, tradução nossa)

Resumo

Atualmente é perceptível o interesse em solucionar problemas em aberto na área de gravitação, principalmente após a descoberta de ondas gravitacionais pelo LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) - que comprovou, assim, mais um dos aspectos propostos pela Teoria da Relatividade Geral, possibilitando novas hipóteses a serem estudadas. As equações que descrevem o espaço-tempo curvo, próprias da Relatividade Geral, resultam em uma série de soluções, no qual, a mais simples, descreve o campo gravitacional externo a um corpo esfericamente simétrico no vácuo conhecida como solução de Schwarzschild. Neste trabalho foi desenvolvido o estudo de geodésicas através da análise do potencial efetivo na solução de Schwarzschild, tanto para as partículas do *timelike* (partículas com massa) quanto para as partículas *null* (partículas não massivas) diferenciado-se da função do potencial efetivo para o caso de uma partícula massiva sujeita ao potencial Newtoniano. As curvas apresentadas neste trabalho, foram produzidas utilizando o *software* Wolfram Mathematica e foram estipulados diferentes valores de momento angular L das partículas, afim de se estabelecer um parâmetro de comparação. Para partículas *timelike* as curvas do potencial efetivo, clássico e relativístico, evidenciaram comportamento semelhante no limite $r \rightarrow \infty$ e importantes diferenças nos limite de $r \rightarrow 0$, quando comparadas. Quanto ao estudo de partículas *null*, o gráfico no limite de $r \rightarrow \infty$ apresentou um comportamento de potencial constante, semelhante ao caso das partículas massivas.

Palavras-chave: Relatividade geral. Geodésicas em Schwarzschild. Solução de Schwarzschild.

Abstract

The interest in solving open problems in the area of gravity is noticeable today, especially after the discovery of gravitational waves by the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) - which proved one of the aspects proposed by the General Relativity Theory. new hypotheses to be studied. The equations describing curved spacetime, characteristic of General Relativity, result in a series of solutions, the simplest of which describes the gravitational field external to a spherically symmetrical body in a vacuum known as Schwarzschild's solution. In this work, the study of geodesics was developed through the analysis of the effective potential in the Schwarzschild solution for both the timelike particles (mass particles) as for the particles null (non-massive particles) differentiated from the effective potential function for the case of a massive particle subject to Newtonian potential. The curves presented in this work were produced using the software Wolfram Mathematica and were set for different angular momentum values L in order to establish a comparison parameter. For time-type particles the effective, classical and relativistic potential curves showed similar behavior. For time-type particles the curves of the effective, classical and relativistic potentials showed similar behavior in the $r \rightarrow \infty$ boundary and important differences in the $r \rightarrow 0$ boundary when compared. As for the light-particle study, the $r \rightarrow \infty$ plot showed a constant potential behavior, similar to the case of massive particles.

Keywords: General relativity. Geodesics in Schwarzschild. Schwarzschild solution.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Referencial submetido a um campo gravitacional homogêneo.	15
Figura 2	– Referencial submetido a uma aceleração constante.	16
Figura 3	– Referencial com aceleração nula.	17
Figura 4	– Referencial em queda livre sobre a influência de aceleração, devido a presença de um campo gravitacional homogêneo (referencial não inercial).	18
Figura 5	– Representações do vetor $\vec{X}$ nas formas covariante e contravariante, em um sistema de coordenadas não ortogonal.	20
Figura 6	– Decomposição de um vetor deslocamento $\vec{ds}$ em termos de vetores de base em um plano tangente ao ponto p de uma superfície.	22
Figura 7	– Transporte paralelo de um vetor $\vec{V}$, sobre uma curva fechada em um espaço curvo. Enfatizando tanto a posição inicial, quanto a posição final.	25
Figura 8	– Representação da simetria esférica em uma superfície parametrizada em 2d	31
Figura 9	– Gráfico do potencial efetivo no limite Newtoniano e para a solução de Schwarzschild com diferentes $L = 3M$. Para a solução de Schwarzschild percebemos a tendência da partícula cair em direção ao buraco negro.	37
Figura 10	– Gráfico do potencial para a solução Newtoniana e de Schwarzschild com diferentes valores para o momento angular ($L > \sqrt{12}M$) para partícula massiva.	38
Figura 11	– Gráfico do potencial para a solução de Schwarzschild com diferentes valores para o momento angular (L) para partículas sem massa.	39

Lista de abreviaturas e siglas

WEP	<i>Weak Equivalence Principle</i>
EEP	<i>Einstein Equivalence Principle</i>
LIGO	<i>Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory</i>

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	BASES MATEMÁTICAS PARA RELATIVIDADE GERAL	15
2.1	Princípio da Equivalência	15
2.2	Tensores	18
2.3	Espaços Curvos	24
2.3.1	Geodésicas	24
2.3.2	Tensor de Riemann	26
2.3.3	Tensor Momento-Energia	28
2.3.4	Equações de Einstein	29
3	SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD	31
3.1	Geodésicas no espaço-tempo de Schwarzschild	34
3.1.1	Partículas massivas, $\epsilon = -1$	36
3.1.2	Partículas sem massa, $\epsilon = 0$	39
4	CONCLUSÃO	40
	REFERÊNCIAS	41

1 Introdução

Em meados de 2016, desenvolveu-se um número considerável de pesquisas na área de gravitação em decorrência da detecção de ondas gravitacionais, em 2015, pelo LIGO, resultado da fusão de dois buracos negros (ABBOTT et al., 2016). O detector responsável pelo experimento consistia em um interferômetro capaz de detectar, pela primeira vez, as ondas gravitacionais, previstas pela Relatividade Geral um século antes, (EINSTEIN, 1918). Essa detecção instigou muitos físicos a voltarem seus olhos, novamente, à teoria da Relatividade, observando questões que ainda não são totalmente claras para a comunidade científica.

Um dos modelos mais conhecidos sobre a gravitação foi proposto por Isaac Newton no final do século XVII. Newton, desenvolveu suas ideias em uma obra intitulada *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (NEWTON, 1687), que se tornou uma das obras mais influentes no desenvolvimento da Física. Apesar de determinar o comportamento da força gravitacional, Newton não soube identificar a natureza desta força. Para Newton, a força gravitacional representava a ação mútua exercida pelos corpos devido a sua massa de forma instantânea, ou seja, uma maçã cai no chão porque a Terra a atrai em direção a seu centro enquanto a maçã atrai a Terra.

Para a Relatividade Geral, a gravidade não se trata de uma força propriamente dita, mas a manifestação da curvatura do espaço-tempo devido à presença de uma massa, conforme afirma o físico John Wheeler na famosa frase "*Geometry tells matter how to move, and matter tells geometry how to curve.*" (MISNER; WHEELER.; THORNE, 2017, p. 130). Vale evidenciar que, a Lei da gravitação universal de Newton, não está errada para o contexto que foi proposta, mas é tida como teoria limite à teoria da Relatividade para baixas velocidades.

A órbita do planeta Mercúrio exemplifica o sucesso da Relatividade Geral frente à teoria Newtoniana. Mercúrio descreve uma trajetória peculiar ao redor do Sol, cuja órbita se desloca em alguns arcos de ângulo conforme o planeta completa seu movimento de translação conhecida como a precessão do periélio (CARROLL, 2019). A teoria da gravitação de Newton era incapaz de prever essa diferença de arco devido a precessão, de modo que, só possível o cálculo correto apenas com o surgimento da teoria da Relatividade

Geral. É importante evidenciar, que, mesmo frente ao êxito da Relatividade Geral, ainda há fenômenos não explicados pela mesma, como por exemplo, as flutuações da órbita da Lua (MARTINS, 1998).

A construção da Teoria da Relatividade de Einstein foi engendrada durante 10 anos: desde o nascimento da teoria da Relatividade Restrita, em 1905, até o surgimento da Relatividade Geral, em 1915. Nesse período de tempo, tentou-se abarcar e generalizar conceitos que pudessem fazer jus à concepção de invariância limite de velocidades de um sistema físico, conforme se mostrara no final do século XIX.

Einstein indagou-se sobre as propriedades e características da luz. No intuito de explorar movimentos relativos, ele inferiu que, para que dois observadores concordassem quanto à simultaneidade de um determinado evento num dito referencial inercial, espaço e tempo deveriam apresentar alterações quando medidos (EINSTEIN, 1905). Assim, estabelece uma nova entidade como palco dos acontecimentos físicos, o espaço-tempo, em que se generalizam as dimensões do nosso espaço incluindo o tempo, de maneira que este, agora maleável, pode ser distorcido (contraído ou dilatado).

Na tentativa de generalizar esses conceitos para referenciais não inerciais e no intuito de que a Física pudesse ser descrita sem qualquer referencial privilegiado, Einstein concebe a relação entre aceleração e gravidade, dito por ele próprio como o pensamento mais feliz de sua vida (ISAACSON, 2007). Para chegar a tal conclusão, realizou uma série de experimentos mentais (*gedankenexperiment*) indagando quanto à natureza da gravidade (BLAU, 2018). Ele considerou, por vezes, uma pessoa no interior de uma caixa selada, com dimensões razoáveis, impossibilitando que o indivíduo soubesse do que acontecia no ambiente externo à caixa e o submeteu a situações especiais, o que resultou na elaboração do *Princípio da Equivalência*, conceito que formaliza, de fato, como a gravidade e a aceleração são equivalentes em determinados limites.

Para descrever a Teoria da Relatividade Geral como curvatura do espaço-tempo, necessita-se da abordagem da Geometria Diferencial, tendo como elemento fundamental a utilização da álgebra tensorial. Neste trabalho, introduziremos, brevemente, alguns conceitos necessários à utilização dessas entidades tensoriais, embora não nos tenhamos detido em seus aspectos fundamentais, focando nossa atenção de maneira mais qualitativa, na descrição das equações de campo de Einstein. Essas equações possuem caráter não-linear, cuja primeira solução analítica foi proposta por Karl Schwarzschild em 1916 (SCHWARZSCHILD, 1916), que propõe uma solução para um corpo simetricamente es-

férico, estático, no vácuo. Neste trabalho, propusemo-nos a caracterizar essa solução com o auxílio da bibliografia adequada a fim de compreender quais aspectos matemáticos e físicos relevantes estão envolvidos no estudo das geodésicas para partículas testes com e sem massa.

Aqui, em vez de nos atentarmos às equações de movimento, analisamos, em analogia, a gravitação de Newton, o potencial efetivo, no qual as partículas testes do *timelike* (partículas com massa) e *null* (partículas não massivas) estão sujeitas. Verificaremos que a Relatividade Geral insere um novo termo ao potencial, demonstrando que a Mecânica Newtoniana pode ser vista como limite dela mesma.

Quanto à disposição desta monografia, no capítulo 2 fizemos uma breve introdução da matemática e dos conceitos teóricos que permeiam o desenvolvimento da Relatividade Geral. Embora este seja um trabalho de conclusão de curso, julgamos que, num primeiro contato com a Relatividade Geral, os aspectos físicos e didáticos dos conceitos envolvidos além do caminho da aprendizagem do aluno é que devem ser melhor estruturados para, depois, apenas estruturar-se um melhor diálogo com a matemática envolvida, mais especificamente, no que concerne à teoria de campos e geodésicas.

No capítulo 3, realizamos a descrição da métrica de Schwarzschild e, a partir dessa descrição, das equações de movimento para, depois, elaborar-se o potencial efetivo. Uma vez calculado o potencial efetivo, no qual as partículas teste *timelike* e *null* estão sujeitas, pudemos arguir sobre o comportamento delas.

Neste trabalho, consideraremos as constantes $c = G = 1$, processo conhecido por geometrização das unidades¹, apresentando omissões convenientes das constantes c e G em Relatividade Geral.

¹ Mais detalhes, Apêndice F (WALD, 2010).

2 Bases Matemáticas para Relatividade Geral

2.1 Princípio da Equivalência

Durante o desenvolvimento da Relatividade Restrita, Einstein fez alguns experimentos mentais que possuíram um papel fundamental na construção da Relatividade Geral, no qual apresentou ideias sobre a universalidade das interações gravitacionais com o ambiente, formalizado pelo **Princípio da Equivalência**, que se ramifica em outros princípios, segundo (CASOLA; LIBERATI; SONEGO, 2015).

O primeiro princípio, conhecido por princípio fraco (*Weak Equivalence Principle*, WEP), diz que, "a massa inercial de um corpo (m_i) é igual a massa gravitacional (m_g) para qualquer objeto". A massa inercial possibilita um paralelo com a mecânica clássica de Newton, tratando-se da resistência para colocar um corpo em movimento; enquanto a massa gravitacional, é a massa de um corpo sujeito a influência gravitacional. Assim, duas maneiras de exemplificar o WEP estão dadas a seguir:

- A situação (1) consiste em um sistema fechado em repouso, uma caixa que impossibilita o contato com o ambiente externo, sujeita a um campo gravitacional constante. Dentro dessa caixa há uma pessoa segurando dois objetos de mesma massa e mesmas dimensões, representados pela Figura 1.

Figura 1 – Referencial submetido a um campo gravitacional homogêneo.

Fonte: BLAU, 2018 (p. 23).

- A situação (2) trata-se de um sistema similar ao (1) aonde altera-se apenas

o referencial em que o sistema foi submetido. Em (2), existe, ao invés de um campo gravitacional constante, apenas a ação de uma aceleração constante, perpendicular à caixa, no sentido para cima, representada na Figura 2.

Figura 2 – Referencial submetido a uma aceleração constante.

Fonte: BLAU, 2018 (p. 22).

Analisando ambos os casos percebe-se: em (1), que o indivíduo se sente pressionado ao fundo da caixa devido a presença do campo gravitacional constante e que, por isso, quando solta os dois corpos estes caem ao chão; em (2), que o indivíduo também se sente pressionado ao fundo da caixa, mas agora devido a ação da aceleração constante perpendicular à caixa e que, por isso mesmo, ao soltar os dois corpos, estes também cairão ao chão. Logo vemos, nestes casos, como a aceleração constante se comporta de maneira análoga a um campo gravitacional constante, de modo que, para o indivíduo dentro da caixa não é possível distinguir entre as situações (1) e (2), ou seja, entre os efeitos gravitacionais contantes e os efeitos de aceleração constante. Essa situação, portanto, afirma a relação proposta pelo WEP, em que as massas gravitacional e inercial são iguais².

Essa relação de igualdade entre as massas, propicia uma importante característica referente a natureza universal da gravidade, diz-se que, qualquer massa possui a capacidade de influenciar outro corpo gravitacionalmente, independente da sua natureza física, pois ambos são equivalentes. Segundo (MCMAHON; ALSING, 2005), tal princípio surge a partir da combinação de dois princípios, sendo eles: toda matéria obedece o campo gravitacional, de que está sujeita, percorrendo o mesmo caminho, independente do tipo de sua massa ou composição inercial; a equivalência entre energia e matéria pela Relativi-

² Vale ressaltar, que ambas massas, gravitacional e inercial, já haviam sido submetidas em testes experimentais em uma balança de torção, afim de evidenciar alguma diferença. Entre 1889 e 1922, Eötvös obteve a relação $m_i/m_g = 1$ com margem de erro de $< 10^{-8}$, assim como afirma Nusseinzweig (2013).

dade Especial, que determina importante papel na relação entre geometria e energia na Relatividade Geral.

Como a massa, segundo (BLAU, 2018), nada mais é do que a manifestação da energia e do momento de um corpo, Einstein, buscou uma forma de generalizar o WEP, permitindo aplicabilidades em outros contextos. Definiu-se portanto o *Einstein Equivalence Principle* (EEP), que enuncia: "Em regiões muito pequenas do espaço, as leis da Física se assemelham às da relatividade especial; tornando-se impossível detectar a existência de um campo gravitacional por meio de experimentos realizados localmente." (CARROLL, 2019, p. 50 tradução nossa). Tal princípio, pode ser exemplificado, considerando um átomo de hidrogênio, cuja massa, por ser muitas ordens de grandeza menor em relação a Terra, gera uma interação tão fraca que se torna desprezível, impossibilitando a detecção da gravidade em tais escalas.

Outro experimento mental que pode ser utilizado para reforçar os conceitos do WEP consiste em, ainda, imaginar-se o mesmo indivíduo das situações anteriores em duas novas situações. Na situação (3) imagina-se o sistema solto em algum lugar do espaço, livre da ação de forças, assim, indivíduo e objetos flutam quando este os solta, Figura 3. Já em (4), representado pela Figura 4, imaginamos o indivíduo da situação (2) que estava sob a presença de um campo gravitacional homogêneo, agora em queda livre. Pra ficar mais intuitivo, podemos imaginar que a caixa é um elevador e neste exemplo o cabo foi cortado por alguém fora da caixa. Nesta situação, qualquer indivíduo se sentiria desprovido da sensação da força peso em seu referencial próprio, onde ao soltar os objetos eles se manteriam na posição inicial em relação ao indivíduo, de modo que tanto o indivíduo quanto aos objetos soltos são acelerados na mesma fração de tempo.

Figura 3 – Referencial com aceleração nula.

Fonte: BLAU, 2018 (p. 22).

As situações (3) e (4) evidenciam um ponto crucial nesta análise, no referencial

do observador em queda livre (4), não apenas ele flutuará em queda livre, mas também todos os outros objetos nesse mesmo referencial, devido a igualdade entre massa inercial e massa gravitacional, de modo que, o indivíduo não poderia distinguir entre estar em queda livre ou flutuando no espaço, obedecendo assim, as leis usuais do movimento na ausência da gravidade.

Figura 4 – Referencial em queda livre sobre a influência de aceleração, devido a presença de um campo gravitacional homogêneo (referencial não inercial).

Fonte: BLAU, 2018 (p. 24).

2.2 Tensores

Como afirmamos na Introdução, a gravidade está diretamente ligada à geometria. Tal afirmação nos convida à questão mais importante no estudo da Relatividade Geral: o fato de que a dinâmica da gravitação nada mais é do que a capacidade do próprio espaço-tempo em curvar-se diante da presença de matéria/energia e responder a essa nova geometria (BLAU, 2018). Essa curvatura, então, é dada por um tensor métrico e, portanto, o estudo de tensores faz-se necessário. Uma maneira intuitiva de se começar qualquer estudo é utilizando ferramentas que já nos são conhecidas. Assim, para uma breve introdução sobre a álgebra tensorial, partiremos do estudo de vetores. Como em Relatividade, geralmente, estamos interessados em um determinado evento visto por diferentes observadores, importa analisarmos as transformações entre sistemas de coordenadas.

Em qualquer sistema de coordenadas em que exista linearidade entre os elementos de um diferencial de comprimento ds , é possível escrever as equações de transformação entre seus elementos de base. O sistema a ser utilizado para ilustrar tal transformação é o

seguinte: considera-se como elementos de base do sistema original os infinitesimais $(dx, dy$ e $dz)$, transformados para um novo sistema $(d\bar{x}, d\bar{y}$ e $d\bar{z})$. Porém, antes de realizar essa transformação entre os elementos de base, segundo McMahon e Alsing (2005), podemos reescrever ambas as componentes da base citada $(dx, dy$ e $dz)$, sendo explícita por dx alterando apenas os índices ($i = 1, j = 2$ e $k = 3$) que aparecem no canto superior direito em cada componente, responsável por caracterizar cada elemento dessa base, no qual agora, pode ser representada $(dx^i, dx^j$ e $dx^k)$. Vale ressaltar que, tais índices não necessariamente correspondem a base canônica como conhecemos.

A transformação de base, segundo (EINSTEIN RELATIVELY EASY, 2017), é realizada seguindo as definições da álgebra linear, no qual se baseia na construção de um somatório envolvendo a componente original e a respectiva componente do vetor tangente, em cada item que há de ser escrita em termos de uma nova base.

Representamos todas as componentes em um formato matricial, para que, possamos em seguida, generalizar o sistema. Utilizaremos agora as componentes das bases propostas anteriormente, dx^i e $d\bar{x}^i$, equação (2.1).

$$\begin{pmatrix} d\bar{x}^i \\ d\bar{x}^j \\ d\bar{x}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^i} & \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} & \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \\ \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} & \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^j} & \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} \\ \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} & \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} & \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^i \\ dx^j \\ dx^k \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Em que a matriz métrica, composta pelas derivadas parciais na equação (2.1), poder ser chamada de **Matriz Jacobiana**, responsável por possibilitar a mudança de base de dx para $d\bar{x}$.

Assim, visto pelo sistema novo, as transformações para determinado elemento, podem agora ser representado pela equação (2.2),

$$d\bar{x}^i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j \Rightarrow d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j, \quad (2.2)$$

em que essa relação nada mais é do que a matriz jacobiana da transformação entre o sistema sem barra e o com barra. Pela **Convenção de Einstein**, retiramos o somatório da equação (2.2), pois já fica implícito em tal notação, que há um somatório entre os índices de forma generalizada, Walecka (2007).

Agora, na tentativa de ilustrar essas ideias, consideraremos, inicialmente, um sistema de coordenadas cujos eixos X e Y não sejam perpendiculares um ao outro. É possível projetarmos um vetor $\vec{X}$ aos eixos coordenados, tanto paralela quanto perpendi-

cularmente. Uma vez que o sistema de coordenadas é não-ortogonal, a distinção entre as projeções se tornam evidentes, recebendo a nomenclatura de **contravariante** para as componentes projetadas paralelamente aos eixos e **covariante** para as componentes projetadas perpendicularmente aos eixos de coordenadas³, Figura 5.

Figura 5 – Representações do vetor $\vec{X}$ nas formas covariante e contravariante, em um sistema de coordenadas não ortogonal.

Fonte: Próprio autor.

As componentes contravariantes de $\vec{X}$ são descritas pelos vetores base $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ dado por (2.3),

$$\vec{X} = X^i \vec{e}_i, \quad (2.3)$$

enquanto as componentes covariantes de $\vec{X}$ são descritas pelos vetores base $\vec{e}^1$ e $\vec{e}^2$ dado pela equação (2.4),

$$\vec{X} = X_i \vec{e}^i. \quad (2.4)$$

Estabelecidos os conceitos de transformações entre dois sistemas de coordenadas, munidos de um espaço vetorial e as ideias de vetores covariantes e contravariantes, fica mais intuitivo estabelecer uma lei de transformação entre as componentes de um vetor, de seu sistema original para seu sistema transformado em cada uma das projeções covariante e contravariante citadas anteriormente. Assim, as componentes de vetores contravariantes

³ Podemos descrever a mesma relação para componentes contravariantes e covariantes de um vetor, descrevendo sistema de coordenadas ortogonais utilizando uma base recíproca, (WALECKA, 2007).

se transformam segundo a equação (2.5),

$$\bar{V}^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu, \quad (2.5)$$

enquanto que as componentes de vetores covariantes se transformam como em (2.6),

$$\bar{V}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} V_\nu. \quad (2.6)$$

Uma vez entendida tais transformações, podemos compreender a entidade tensorial a partir delas. Um tensor genérico é composto pelos índices (m, n) , em que as componentes m se transformam como as componentes contravariantes de um vetor e as componentes n se transformam como as componentes covariantes de um vetor. A ordem ou o *rank* do tensor é a soma total desses índices, de maneira que, escalares, que são invariante sob transformações de coordenadas, representam um tensor de ordem nula, enquanto vetores, que se transformam como em (2.5) e (2.6), representam um tensor de ordem 1. Assim, um tensor contravariante de *rank* 2 consiste, basicamente, em um tensor que só possui $(2, 0)$ índices e se transformam de maneira dada pela equação (2.7).

$$\bar{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{X}^\mu}{\partial X^\sigma} \frac{\partial \bar{X}^\nu}{\partial X^\gamma} T^{\sigma\gamma}. \quad (2.7)$$

Já um tensor covariante de *rank* 2, com índices $(0, 2)$ se transforma como na equação (2.8).

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \frac{\partial X^\sigma}{\partial \bar{X}^\mu} \frac{\partial X^\gamma}{\partial \bar{X}^\nu} T_{\sigma\gamma}. \quad (2.8)$$

A generalização desse tensor contendo ambas as componentes, contravariantes e covariantes, está representada pela equação (2.9).

$$\bar{T}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} = \frac{\partial \bar{X}^{\mu_1}}{\partial X^{\sigma_1}} \cdots \frac{\partial \bar{X}^{\mu_k}}{\partial X^{\sigma_k}} \frac{\partial X^{\gamma_1}}{\partial \bar{X}^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial X^{\gamma_l}}{\partial \bar{X}^{\nu_l}} T^{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_l}. \quad (2.9)$$

Um dos tensores que desempenha papel fundamental na Relatividade é um tensor de *rank* 2, do tipo $(0, 2)$ e simétrico, conhecido como tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Sua simetria é decorrente da invariância sob dada permutação de seus índices μ e ν , de modo que, se mantém uma igualdade sem a alteração do sinal do tensor, segue essa propriedade descrita pelas expressões abaixo, que, também, admite a inversa desse tensor métrico, sendo do tipo $(2, 0)$:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad \text{e} \quad g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$$

Esse tensor possui várias utilidades, uma delas serve para se determinar a distância entre dois pontos, ou em outras palavras, um elemento de linha, que caracteriza um determinado espaço, curvo ou plano. Uma das formas de construir o tensor métrico, segundo Walecka (2007), é assimilando o produto escalar entre dois vetores de base (tangentes a um ponto de um determinado espaço), constituintes pela decomposição de um vetor $d\vec{s}$, que pode ser expresso por meio de uma combinação linear representada pela equação (2.10), Figura 6.

Figura 6 – Decomposição de um vetor deslocamento $d\vec{s}$ em termos de vetores de base em um plano tangente ao ponto p de uma superfície.

Fonte: WALECKA, J. p. 10.

$$d\vec{s} = \vec{e}_1 dq^1 + \vec{e}_2 dq^2. \quad (2.10)$$

Ao multiplicar o vetor deslocamento $d\vec{s}$ por ele mesmo, obtemos a relação:

$$ds^2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 (dq^1)^2 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 (dq^2)^2 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 dq^1 dq^2 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 dq^2 dq^1, \quad (2.11)$$

que pode ter suas coordenadas generalizadas em uma expressão mais reduzida, muito utilizada em Relatividade Geral, que será discutida mais a frente nesta seção.

Em Relatividade, o tensor métrico e sua inversa podem ser utilizados para subir e descer índices por meio de contrações, (CARROLL, 2019). Segue um exemplo, no qual contraímos os índices ν e λ , comuns entre as métricas, resultando em um escalar, chamado por delta de Kronecker, que assume um valor igual a 1 ao considerar a igualdade entre σ e μ :

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g_{\sigma\lambda} g^{\lambda\mu} = \delta_{\sigma}^{\mu}. \quad (2.12)$$

Através do tensor métrico, podemos definir o “elemento de linha” para um espaço qualquer, diferindo o formato da métrica. Para a Relatividade Geral, definimos o

invariante quadrado de um elemento de linha pela equação⁴ a seguir, que pode ser construída com base na equação (2.11), descrita pela métrica $g_{\mu\nu}$ que pode alterar seu formato relativo a dado espaço em questão:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.13)$$

Outra forma de representar o tensor métrico é através da métrica, evidenciando o produto escalar entre cada componente dos vetores de base, segue um exemplo dessa representação de n dimensões para esse tensor:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Para um elemento de linha em coordenadas esféricas no espaço Eclidiano, existem 3 dimensões, representada pela equação (2.15),

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Rightarrow ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.15)$$

com sua respectiva matriz métrica, representada a seguir:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\phi} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi r} & g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Na manipulação de tensores, com a utilização do tensor métrico, também é possível abaixar ou subir índices de um tensor a partir de contração entre índices iguais. Conforme demonstra a equação (2.17),

$$D^\lambda E_\lambda = g^{\lambda\rho} D_\rho g_{\lambda\sigma} E^\sigma = \delta_\sigma^\rho D_\rho E^\sigma = D_\sigma E^\sigma. \quad (2.17)$$

Segundo (BLAU, 2018), ao realizar uma diferenciação em um tensor, há uma propriedade que necessita ser levada em consideração, que seria a natureza do espaço que se estuda, podendo estar localizada no espaço Minkowski (espaço plano), ou no espaço não Euclidiano (espaço curvo). Dessa forma, tomando as expressões (2.18) como exemplo,

⁴ A convenção de Einstein aplica-se neste exemplo, por também representar um somatório entre os índices.

no lado esquerdo trata-se do espaço plano em apenas um grau de liberdade, enquanto que no lado direito utiliza-se o operador ∇ para generalizar o espaço curvo.

$$\partial_\mu S^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad \nabla_\mu S^{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

No caso generalizado para espaços curvos, a utilização do operador nabla recebe o nome de **Derivada Covariante**, representada pela equação (2.19), que parte da regra de Leibniz para a diferenciação de um produto, aplicada a um vetor de base ordinária V^μ contravariante, ver (WALD, 2010). O termo Γ é conhecido como um coeficiente de conexão e será discutido mais adiante.

$$\nabla_\rho V^\mu = \partial_\rho V^\mu + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu V^\lambda. \quad (2.19)$$

A derivada covariante também pode ser aplicada para um vetor covariante, definido como a seguir:

$$\nabla_\rho V_\mu = \partial_\rho V_\mu - \Gamma_{\rho\lambda}^\mu V_\lambda. \quad (2.20)$$

As conexões Γ que apareceram na Derivada Covariante são chamadas **Símbolo de Christoffel** e possuem um importante papel na Relatividade Geral, pois possibilitam a mudança de um vetor de um espaço vetorial para outro. A partir do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, é possível associar conexões entre pontos do espaço, no qual em conjunto, atuam como um mapa. “Em outras palavras, a conexão define um caminho específico para manter um tensor constante (sobre determinado caminho ou trajetória)” (CARROLL, 2019, p. 103 tradução nossa). A equação (2.21) representa a descrição dos símbolos de Christoffel em função das primeiras derivadas da métrica:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left[\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial X^\mu} + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial X^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial X^\lambda} \right]. \quad (2.21)$$

Vale se atentar ao fato de que, por mais que haja tensores na definição dos símbolos de Christoffel, estes não podem ser chamados de tensores, pois não se transformam segundo a regra estabelecida de acordo com a equação (2.9) (MCMAHON; ALSING, 2005).

2.3 Espaços Curvos

2.3.1 Geodésicas

Uma forma de visualizar aplicações dos símbolos de Christoffel ou conexões é a partir do conceito conhecido como *Transporte Paralelo* ao longo de uma curva. Segundo

(BLAU, 2018), este conceito é baseado em uma mudança da posição de um vetor entre dois pontos de determinada curva, sem a perda de suas propriedades e levando em consideração a curvatura do espaço em que a trajetória é delimitada, de maneira que, arrasta-se o vetor a uma distância infinitesimal entre esses dois pontos.

Olhando para um vetor em duas dimensões, a título de representação, segundo (WALECKA, 2007), considerando uma curva fechada L sobre uma superfície não plana, do tipo representada pela Figura 7, podemos supor que um vetor será transportado ao longo desta curva se mantendo constante. Ao compararmos a posição final com a posição inicial do vetor, os mesmos formam um ângulo θ , o que de fato não se esperaria se o transporte paralelo ocorresse em uma superfície plana.

Figura 7 – Transporte paralelo de um vetor $\vec{V}$, sobre uma curva fechada em um espaço curvo. Enfatizando tanto a posição inicial, quanto a posição final.

Fonte: <https://www.gregegan.net/INCANDESCENCE/Schwarzschild/Schwarzschild.html>.
Acesso em 22. out. 2019.

Assim, em analogia ao que se esperaria do transporte paralelo de um vetor numa superfície plana, define-se que o Transporte Paralelo de um vetor numa superfície curva deva ser nulo, representado pela equação (2.22),

$$\frac{D}{d\lambda} V^\mu = 0 \quad (2.22)$$

onde $D/d\lambda$ trata-se de uma representação reduzida de uma **Derivada Direcional Covariante**:

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu. \quad (2.23)$$

A partir da equação (2.22), aplicada a um vetor tangente $dx^\mu/d\lambda$ à curva x^μ , a condição do transporte paralelo, resulta, portanto, na equação da geodésica:

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0, \quad (2.24)$$

que caracteriza aspectos importantes deste trabalho.

A ideia mais fundamental aqui é a tentativa de comparação entre vetores. Num espaço plano, a priori, é bem simples a construção algébrica para se comparar vetores em diferentes pontos do espaço, ou transportá-los paralelamente, porque os vetores são elementos do espaço tangente definidos em cada ponto do espaço. Num espaço curvo, isto não é tão simples. Na construção algébrica esta comparação não será única, porque num espaço curvo os vetores não estão no mesmo espaço tangente em cada ponto do espaço, de maneira que o transporte paralelo dependerá do caminho do transporte. A maneira de construir esta comparação será impondo que os tensores analisados fiquem sob o mesmo plano tangente, e portanto, impondo a equação (2.22).

Assim, geodésicas são definidas como sendo o percurso sem aceleração, no qual um dado tensor tangente a uma curva é transportado paralelamente ao longo da mesma, Schutz (1985), generalizando a ideia de ‘linha reta’ no espaço plano ou menor caminho que uma partícula possa seguir neste espaço, pois, neste contexto, uma linha reta será tida como o caminho no qual um vetor paralelamente transportado será o próprio vetor tangente a esta curva. Necessariamente, vemos que esta construção dependerá dos símbolos de Christoffel, pois são eles que asseguram que geodésicas e o caminho mais curto seguido por um tensor coincidam (CARROLL, 2019).

A equação da geodésica por se tratar do caminho mais curto percorrido pela partícula exibe propriedades análogas a equação de Euler-Lagrange (2.26) (BLAU, 2018), de modo que podemos escrever:

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (2.25)$$

tal que,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (2.26)$$

2.3.2 Tensor de Riemann

A partir da Derivada Covariante, podemos obter informações quanto a curvatura de um determinado espaço. O tensor utilizado em Relatividade Geral para tal, é chamado

Tensor de Riemann ou **Tensor de Curvatura**. Para defini-lo é necessário, primeiramente, tomarmos a **segunda derivada covariante** para um campo vetorial, em relação a coordenada μ , representada pela equação (2.27) (MCMAHON; ALSING, 2005),

$$\nabla_\mu \nabla_\nu V^\sigma = \nabla_\mu \left(\partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\rho\nu}^\sigma V^\rho \right), \quad (2.27)$$

e depois tomarmos a segunda derivada covariante relativa à coordenada ν , equação (2.28) representada a seguir,

$$\nabla_\nu \nabla_\mu V^\sigma = \nabla_\nu \left(\partial_\mu V^\sigma + \Gamma_{\rho\mu}^\sigma V^\rho \right). \quad (2.28)$$

A diferença entre as equações (2.27) e (2.28) fornece a exata definição do Tensor de Riemann $R^\mu{}_{\nu\sigma\lambda}$, no qual podemos fazer analogia, novamente com a Figura 7. No ponto P, existem duas posições distintas para um vetor, a posição inicial, e, a posição final após ser transportado paralelamente em uma curva fechada, descrita pelos pontos (PRQ). Essa diferença entre a segunda derivada de uma derivada covariante, nos fornece um método de se obter um tensor que mensura a curvatura de um espaço,

$$\nabla_\mu \nabla_\nu V^\sigma - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\sigma = \left(\partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma + \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\lambda\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \right) V^\lambda \Rightarrow$$

$$\nabla_\mu \nabla_\nu V^\sigma - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\sigma = R^\mu{}_{\nu\sigma\lambda} V^\lambda. \quad (2.29)$$

O tensor de Riemann é, formalmente a subtração entre a equação (2.27) e a equação (2.28), representada em (2.29). Com este tensor podemos saber, de fato, quanto equivale à curvatura, ponto a ponto de uma curva.

Outras particularidades a cerca do tensor de Riemann estão disponíveis a seguir:

- O tensor de curvatura por mais que seja construído por elementos não tensoriais, é de realmente um tensor, cujas propriedades de transformação podem ser checadas. A expressão também é válida para qualquer conexão, pertencente a determinada métrica, (CARROLL, 2019).
- O número de tensores de Riemann válidos, não nulos, é representado com base no número (n) de dimensões de determinada métrica, aplicada na relação: $n^2(n^2 - 1)/12$ segundo (MCMAHON; ALSING, 2005).

O tensor de Riemann, como qualquer outro tensor, pode ser contraído com o índice superior e o segundo índice inferior representados pela letra λ , em uma configuração do

tipo representado pela expressão (2.30), que resulta em uma entidade tensorial, abarcando a mesma propriedade quanto mensurar curvaturas. Essa contração tensorial recebe o nome de **Tensor de Ricci**.

$$R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} = R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}. \quad (2.30)$$

“O tensor de Ricci associado com a conexão de Christoffel é automaticamente simétrico, consequência da simetria do tensor de Riemann.” (CARROLL, 2019, p. 129 tradução nossa). Essa simetria, significa que seus índices, μ e ν podem ser permutados, como representado na equação (2.31):

$$R_{(\mu\nu)} \Rightarrow R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (2.31)$$

Existe um escalar que também pode ser utilizado na definição de espaços curvos, que é determinado a partir da contração do tensor de Ricci na forma escalar, contraído por um tensor métrico inverso $g^{\mu\nu}$ de mesmos índices, conforme equação (2.32).

$$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}. \quad (2.32)$$

Essas definições quanto a curvatura de um determinado espaço são de extrema importância no estudo da Relatividade Geral, que baseia todo seu desenvolvimento em tais princípios da geometria diferencial. Partindo de relações matemáticas discutidas na referência (BLAU, 2018), generaliza-se outra grandeza tensorial a partir do tensor de Ricci e o escalar de curvatura, chamado de **Tensor de Einstein**, equação (2.33).

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (2.33)$$

Essa nova notação, auxilia quanto a uma generalização, de não só apenas para uma coordenada do espaço, mas para todas de uma vez, possibilitando a caracterização de uma única grandeza para a descrição da curvatura da variedade trabalhada. Outra característica importante a ressaltar, é quanto a simetria do tensor de Einstein, devido à simetria do tensor de Ricci e ao tensor métrico presente em sua composição (CARROLL, 2019).

2.3.3 Tensor Momento-Energia

Em Relatividade Geral, faz-se o uso, de um tensor específico que contém informações importantes sobre todas as formas de matéria, fornecendo densidade de energia,

densidade de momento e pressão mensuradas a partir de algum ou vários observadores nesse evento (MISNER; WHEELER.; THORNE, 2017). Este tensor é chamado de **Tensor Momento-Energia**, sendo linear e simétrico.

Nesta etapa é importante definir algumas características, envolvendo o momento P^μ , descrito pela equação (2.34), que vem, a ser necessário, para a construção do Tensor Momento-Energia. Onde a componente U^μ é tida como o vetor tangente, parametrizado no tempo próprio τ , conhecido por *quadri-velocidade*. O momento P^μ recebe um nome semelhante, sendo *quadri-momento*,

$$P^\mu = mU^\mu. \quad (2.34)$$

Assim, defini-se Tensor Momento-Energia como na equação (2.35), onde ρ representa a densidade de energia e p a pressão (MISNER; WHEELER.; THORNE, 2017),

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}. \quad (2.35)$$

2.3.4 Equações de Einstein

Baseando-se no teorema da divergência, equação em termos de um campo ou força, é possível determinar uma equação de maneira semelhante à 1ª equação de Maxwell do eletromagnetismo, $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, para a gravitação, uma vez que, a força gravitacional é conservativa, tal que: $\nabla \cdot \vec{\mathcal{G}} = -4\pi G\rho$, onde G representa a constante gravitacional universal, ρ trata-se da densidade de matéria do corpo e $\vec{\mathcal{G}}$ o vetor campo gravitacional.

Do eletromagnetismo sabemos que para um campo elétrico $\vec{E}$, existe um potencial elétrico V associado:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad (2.36)$$

de forma que tal condição também deve se equivaler para o campo gravitacional $\vec{\mathcal{G}}$. Substituindo a aceleração gravitacional $\vec{\mathcal{G}}$, pela equação do potencial, análoga ao campo elétrico,

$$\vec{\mathcal{G}} = -\vec{\nabla}\Phi, \quad (2.37)$$

tal que Φ representa o potencial gravitacional, se obtém uma equação diferencial conhecida como Equação de Poisson (2.38):

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (2.38)$$

A partir da equação de Poisson, podemos, segundo (CARROLL, 2019), através de algumas relações de proporcionalidade e extrapolações teóricas, construir uma equação de caráter tensorial para a gravidade. Como em (2.38) ρ será descrito pelo Tensor Momento-Energia $T_{\mu\nu}$, podemos descrever o potencial gravitacional Φ , através do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ permitindo inferir certa relação entre essas quantidades dada pela equação (2.39),

$$\left[\nabla^2 g\right]_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}. \quad (2.39)$$

Ressalta-se que no lado esquerdo existe apenas indícios da existência de um tensor do tipo (0,2) para manter a proporção com o lado direito. Ao aplicar o D’Alambertiano $\nabla^\mu \nabla_\mu = \square$ na métrica $g_{\mu\nu}$, resultaria automaticamente em zero devido sua propriedade fundamental, porém, isso não pode acontecer já que no lado direito considerou-se que não seja um termo nulo. De acordo com (CARROLL, 2019), existe um tensor que é diferente de zero e constituído por derivadas de primeira e segunda ordem de tensores métricos, tratando-se do Tensor de Riemann $R^\mu{}_{\nu\sigma\lambda}$, descrito em (2.30). Porém, a fim de manter a proporcionalidade na equação tensorial, podemos substituir o tensor de Riemann pelo tensor de Einstein, uma vez que, este, traz o tensor de Ricci a contração do Riemann. Assim a equação (2.40) representa a nova relação de proporcionalidade, em que κ representa uma constante arbitrária.

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.40)$$

Tomando-se o limite Newtoniano, observamos que $\kappa = 8\pi G$, (BLAU, 2018), tal que, a equação (2.41) é conhecida como **Equação de Campo de Einstein para Relatividade Geral**. Essa equação é tida como uma equação diferencial parcial de natureza não-linear, que possibilita algumas soluções analíticas.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.41)$$

Essa equação realiza a descrição de um campo gravitacional no espaço-tempo, ela relaciona geometria e matéria, pois o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ descreve toda a geometria do espaço-tempo, informando como matéria deve-se mover, enquanto que, o tensor de Energia-Momento $T_{\mu\nu}$ diz a geometria como esta deve se curvar, (MISNER; WHEELER.; THORNE, 2017).

3 Solução de Schwarzschild

A primeira solução analítica das equações da Relatividade Geral foi descrita pelo físico alemão Karl Schwarzschild (1916). Essa solução descreve o campo gravitacional do lado de fora de um corpo, como uma estrela, em que se supõe o caso mais simples quanto sua descrição: o espaço vazio, independência temporal e simetria esférica (MCMAHON; ALSING, 2005). Uma vez que essa solução é descrita no vácuo, ou seja, sem nenhuma matéria e energia presentes, consideramos a condição a seguir para solucionar a equação de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3.1)$$

Figura 8 – Representação da simetria esférica em uma superfície parametrizada em 2d

Fonte: <https://www.physicsforums.com/insights/schwarzschild-metric-part-1-gps-satellites/>. Acesso em 03. set. 2019.

Nosso objetivo nesta seção é reescrever a métrica que gera tal solução. Uma vez que esperamos recuperar a métrica de Minkowski no limite de r muito grande, quer dizer, muito distante do corpo. Partimos da solução da métrica de Minkowski com simetria esférica (3.2). Para independência temporal, consideramos que seja possível a mudança $dt \rightarrow -dt$ de maneira que os termos cruzados envolvendo a coordenada dt sejam nulos. Supomos a métrica estática impondo que cada componente não dependa do tempo. A fim de obter simetria esférica, consideramos que nenhuma direção angular seja preferida, de maneira que os termos cruzados envolvendo $d\theta$ e $d\phi$ sejam nulos:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.2)$$

onde consideramos $c = 1$ devido a geometrização das unidades, e $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$.

Segundo Carroll (2019), sem alterar a natureza da métrica, é possível multiplicar todos os termos por coeficientes separáveis, desde que sejam apenas funções da coordenada radial (r), preservando, assim, a assinatura da métrica $(-, +, +, +)$, já que os coeficientes de funções exponenciais garantem funções positivas. Cada termo consiste em uma função distinta das demais, sendo elas $\alpha(r)$, $\beta(r)$ e $\gamma(r)$, resultando em:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + e^{2\gamma(r)}r^2d\Omega^2. \quad (3.3)$$

Definindo uma nova coordenada ($\bar{r}$), representada por

$$\bar{r} = e^{\gamma(r)}r, \quad (3.4)$$

e diferenciando essa nova coordenada $\bar{r}$ em ambos os lados, obtém-se a equação a seguir:

$$d\bar{r} = \left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right)e^{\gamma}dr. \quad (3.5)$$

Substituindo $\bar{r}$ e $d\bar{r}$ na métrica definida em (3.3), obtemos a equação:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(\bar{r})}dt^2 + \left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2}e^{2\beta(\bar{r})-2\gamma(\bar{r})}d\bar{r}^2 + \bar{r}^2d\Omega^2. \quad (3.6)$$

Ao redefinirmos

$$\left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2}e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} \longrightarrow e^{2\beta(r)}, \quad (3.7)$$

então apenas trocando a nomenclatura das coordenadas $\bar{r}$ para r , nossa métrica fica:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (3.8)$$

Note que, ao fazermos essa mudança de índices em que trocamos as coordenadas com barra pelas sem barra, a função exponencial $2\gamma(r)$ não precisou ser assumida igual 1 no intuito de recuperar a métrica de Minkowski para grandes r , de maneira que a equação (3.8) se mantenha genérica quanto à equação (3.3).

Para encontrarmos as soluções $\alpha(r)$, $\beta(r)$, vamos aplicar as equações de Einstein, a partir da consideração feita nesse capítulo, (3.1). Para isso, escrevemos os símbolos de

Christoffel não nulos (3.9), encontrados para cada coordenada da métrica (3.8):

$$\begin{aligned}\Gamma_{rt}^t &= \partial_r \alpha(r) & \Gamma_{rr}^r &= \partial_r \beta(r) & \Gamma_{tt}^r &= \partial_r \alpha(r) e^{2\alpha(r)-2\beta(r)} \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-2\beta(r)} & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r e^{-2\beta(r)} \sin^2 \theta & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cot \theta\end{aligned}\quad (3.9)$$

Dos símbolos de Christoffel podemos escrever os tensores de Ricci. Assim, os tensores de Ricci não nulos são:

$$\begin{aligned}R_{tt} &= e^{2\alpha-2\beta} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] \\ R_{rr} &= -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \beta \partial_r \alpha + \frac{2}{r} \partial_r \beta \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta} [r (\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1 \\ R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Como a solução de Schwarzschild é tomada para $R_{\mu\nu} = 0$, no vácuo, temos:

$$R_{\mu\nu} = R_{tt} + R_{rr} + R_{\theta\theta} + R_{\phi\phi} = 0. \quad (3.11)$$

Para satisfazer a relação (3.11), é necessário condicionar as componentes R_{tt} e R_{rr} para se anularem, equação (3.12), já que, em partes, possuem uma semelhança considerável em seus termos, diferindo em um fator exponencial, $e^{2\alpha-2\beta}$, e uma derivada parcial referente a função $\beta(r)$.

$$R_{tt} + R_{rr} = 0 \quad \text{se} \quad e^{2\beta-2\alpha} R_{tt} + R_{rr} = 0, \quad (3.12)$$

de modo que,

$$\alpha = -\beta. \quad (3.13)$$

Tomando a próxima componente do tensor de Ricci, $R_{\theta\theta} = 0$, temos:

$$R_{\theta\theta} = 0 \Rightarrow e^{-2\beta} [r (\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1 = 0, \quad (3.14)$$

e substituindo a condição final, $(\alpha = -\beta)$ em (3.14):

$$e^{2\alpha} [r (-\partial_r \alpha - \partial_r \alpha) - 1] + 1 = 0 \Rightarrow e^{2\alpha} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right). \quad (3.15)$$

O valor (R_s) trata-se de uma constante. Substituindo essas relações na equação (3.8), obtém-se a equação (3.16):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.16)$$

Para a determinação da constante R_s , existe uma associação que pode ser feita baseando-se na soma entre duas métricas, discutido na seção **Equações de Einstein** por (CARROLL, 2019): no limite de um campo fraco, a componente de uma métrica, g_{tt} , ao redor de um ponto com massa possibilita recuperar a equação Newtoniana. A componente da métrica associada a tal condição está representada em (3.17).

$$g_{tt} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (3.17)$$

Dessa forma, por inspeção determina-se que a constante R_s deva ser igual a $2M$. Essa constante também pode ser enunciada como sendo Raio de Schwarzschild. Sem a geometrização das constantes, o raio de Schwarzschild é dado por $R_s = 2GM/c^2$. Substituindo R_s em (3.16), resulta na solução final da equação de Einstein que se esperava, caracterizada como estática, simétrica e válida no vácuo, definida por **Solução de Schwarzschild**, (3.18):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.18)$$

3.1 Geodésicas no espaço-tempo de Schwarzschild

Definindo a densidade de Lagrangeana, Mureika (2019) discute a possibilidade de igualar essa densidade de Lagrangeana com uma constante, conhecida por termo de normalização, que nos dá $\epsilon = -1$ para partículas massivas, $\epsilon = 0$ para partículas sem massa, igualmente apresentado por Blau (2018):

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \epsilon. \quad (3.19)$$

O termo de normalização ϵ , é construído a partir da noção entre o produto escalar entre quadri-vetores para ambos os casos, *timelike* e *null*. Segundo (MISNER; WHEELER.; THORNE, 2017), para partículas massivas, partimos do formalismo do quadrimomento relativístico, deixando implícito o produto entre os quadri-vetores:

$$P^2 = m^2 U^2 \longrightarrow U^2 = U^\mu U^\nu g_{\mu\nu} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} g_{\mu\nu} = -(u^0)^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2, \quad (3.20)$$

no qual substituímos os quadrivetores u^0 e u^i ($i = 1, 2$ e 3), assim como feito por Misner, Wheeler. e Thorne (2017) para um referencial de Lorentz:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad \text{e} \quad u^i = \frac{v^i}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (3.21)$$

Que resulta, portanto:

$$U^2 = -\frac{1}{1-v^2} + \frac{v^2}{1-v^2} = -1, \quad (3.22)$$

em que $v^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$.

Quanto as partículas sem massa, o quadrimomento para tal configuração, consiste em um vetor nulo, (MUREIKA, 2019). Que por fim, resulta na configuração do tipo:

$$W^2 = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.23)$$

Ao aplicarmos a solução de Schwarzschild na densidade de Lagrangeana, (CHANDRASEKHAR, 2002), teremos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right]. \quad (3.24)$$

Escrevendo a equação de Euler-Lagrange para as coordenadas t e ϕ ,

$$\frac{dP_t}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \frac{dP_\phi}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (3.25)$$

podemos perceber que, em ambas as situações, a Lagrangeana não tem dependência das coordenadas t e ϕ , levando à conclusão de que os momentos generalizados P_t e P_ϕ são constantes do movimento, que representam a Energia e o Momento angular respectivamente (MARTINS, 1999). Como o momento angular é conservado, o movimento das partículas se restringe a um plano bidimensional, de modo que podemos considerar, no intuito de facilitar a análise, o ângulo ($\theta = \pi/2$), Blau (2018). Assim, as equações do movimento podem ser descritas como:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} = E, \quad r^2 \dot{\phi} = L, \quad \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \ddot{r} + M \frac{\dot{r}}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} - r \dot{\phi}^2 = 0. \quad (3.26)$$

Como $\mathcal{L} = \epsilon$, podemos reescrever (3.24) como:

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = \epsilon. \quad (3.27)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $(1 - 2M/r)$, dividindo por 2 e substituindo pelas relações obtidas anteriormente para energia e momento angular, temos a seguinte relação:

$$\frac{E^2 + \epsilon}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2} + \epsilon \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3}, \quad (3.28)$$

com

$$E_{eff} = \frac{E^2 + \epsilon}{2}, \quad (3.29)$$

consistindo na energia efetiva,

$$V_{eff} = \epsilon \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3}, \quad (3.30)$$

como sendo o potencial efetivo, que nos possibilita reescrever (3.28) como:

$$E_{eff} = \frac{\dot{r}^2}{2} + V_{eff}. \quad (3.31)$$

Para compreender as trajetórias das partículas ao redor desse corpo massivo e esférico, é mais simples o estudo através do potencial efetivo do que o estudo das equações de trajetória dadas em (3.26), uma vez que já é conhecido da Mecânica Newtoniana este tipo de abordagem. Assim, da equação (3.30) temos que o primeiro termo consiste no potencial Newtoniano típico de uma força central ($\epsilon = -1$), enquanto o segundo termo surge da contribuição do momento angular da partícula, como esperados na Mecânica Newtoniana (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002), sendo constituintes do potencial efetivo clássico, equação (3.32),

$$V_{eff.c} = \epsilon \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2}. \quad (3.32)$$

A diferença, agora, está no terceiro termo de (3.30), que surge da contribuição dada pela Relatividade Geral ao estudo do movimento celeste. Vale notar que essa solução é exata e não uma aproximação de potências de r (CARROLL, 2019).

3.1.1 Partículas massivas, $\epsilon = -1$

Da condição de órbita circular temos $dV_{eff}/dr = 0$, de modo que:

$$Mr^2 - L^2r + 3ML^2 = 0, \quad (3.33)$$

E

$$r_{\pm} = \frac{L^2}{2M} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{L^2}} \right). \quad (3.34)$$

em que r_+ representa uma órbita circular estável (ponto de mínimo), enquanto r_- representa uma órbita circular instável (ponto de máximo).

Da equação (3.34) vemos que existem dois tipos de movimentos diferentes entre os valores de $L/M < \sqrt{12}$ e $L/M > \sqrt{12}$. Assim Considerando $L < \sqrt{12}M$ a curva não exibe pontos críticos de modo que não existem órbitas definidas para estes valores de momento angular, assim que qualquer partícula num estado ligado $L < \sqrt{12}M$ será atraída pelo corpo e continuará caindo, neste caso, como sabemos, cairá para o horizontes de eventos de Schwarzschild definido em $r = 2M$ e extrapolado na curva abaixo, Figura 9.

Figura 9 – Gráfico do potencial efetivo no limite Newtoniano e para a solução de Schwarzschild com diferentes $L = 3M$. Para a solução de Schwarzschild percebemos a tendência da partícula cair em direção ao buraco negro.

Fonte: Próprio autor.

Já para $L/M > \sqrt{12}$ teremos órbitas definidas em que além da órbita circular (estável e instável), temos da equação (3.31) mais outros dois tipos de órbitas:

- Se $E_{eff} > 0$ a órbita descrita pela partícula será hiperbólica. Neste caso a partícula vinda do infinito, sente o potencial e retorna ao infinito.
- Se $E_{eff} < 0$ a órbita descrita pela partícula será elíptica. Dizemos que o estado é ligado com os pontos de periélio e afélio.

Na Figura 10 está representado o gráfico do potencial efetivo para uma partícula massiva descrita pela equação (3.30), em linhas contínuas, enquanto que, as linhas tracejadas são relativas a representação do gráfico do potencial efetivo clássico, equação (3.32), ambas com três valores distintos para o momento angular $L = 4M, 6M$ e $8M$,

Figura 10 – Gráfico do potencial para a solução Newtoniana e de Schwarzschild com diferentes valores para o momento angular ($L > \sqrt{12}M$) para partícula massiva.

Fonte: Próprio autor.

A partir da análise dos dois gráficos no limite de $r \rightarrow \infty$, podemos perceber que ambas as curvas, tanto do potencial efetivo relativístico, quanto do potencial efetivo clássico, convergem em um mesmo valor do potencial, que de certa forma, valida a Relatividade Geral em alguns aspectos que já são conhecidos da teoria Clássica.

Já em limites de $r \rightarrow 0$, é suficiente para indicar algumas diferenças entre dois aspectos distintos da gravitação. A partir dos gráficos com linhas tracejadas da Figura 10, para o potencial efetivo clássico, podemos perceber que, para r muito pequeno, a curva explode para $+\infty$, para ambos os valores do momento angular, tal comportamento, decorre do segundo termo da equação do potencial efetivo clássico (3.32), (BLAU, 2018), que para valores de momento angular $L > 0$ forma uma barreira de reflexão decorrente da atração repulsiva desta componente $L^2/2r^2$ sobrepondo-se a componente $-M/r$ atrativa a medida que L aumenta. Assim, nesse limite, a partícula vinda do infinito é replida de volta ao infinito.

Ao analisarmos o mesmo limite de $r \rightarrow 0$, para o potencial efetivo correspondente a solução da Relatividade Geral, abarcamos todos os detalhes da discussão acima para diferente tipos de órbitas diferindo apenas no tamanho da barreira de potencial, conforme L aumenta. Além de que as curvas relativísticas tendem à $-\infty$, devido a presença do terceiro termo $-ML^2/r^3$ da equação (3.30) que define o comportamento do potencial neste limite.

3.1.2 Partículas sem massa, $\epsilon = 0$

Considerando novamente a equação do potencial efetivo relativístico (3.30) porém com $\epsilon = 0$ para partículas sem massa, obteremos:

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3}, \quad (3.35)$$

em que construímos as curvas para este potencial com alguns valores para o momento angular, representados na Figura 11.

Figura 11 – Gráfico do potencial para a solução de Schwarzschild com diferentes valores para o momento angular (L) para partículas sem massa.

Fonte: Próprio autor.

Inicialmente é possível reconhecer que em limites de $r \rightarrow \infty$, o potencial tende a zero. Quanto a pequenos valores de r , podemos perceber uma característica única que difere dos gráficos para partículas com massa, Figura 11, sendo a não existência de um ponto de mínimo local, exibindo apenas um ponto de máximo.

Para a determinação desse ponto de máximo analisamos $dV_{eff}/dr = 0$, resultando no raio crítico igual a:

$$-L^2r + 3ML^2 = 0 \Rightarrow r = 3M. \quad (3.36)$$

Esse ponto de máximo, como conhecemos, é independente do valor atribuído a L , resultará em um ponto comum para qualquer curva que analisemos.

4 Conclusão

Neste trabalho, abordamos alguns conceitos de Relatividade Geral que fundamentam o raciocínio lógico para o estudo das geodésicas na solução de Schwarzschild.

Inicialmente havia dois termos na energia potencial clássica, no qual, um trata-se da componente gravitacional e o outro é devido uma contribuição da ação de uma força de inércia, de caráter angular. Percebemos que, quanto maior for o momento angular, menor será a ação do contrabalanço na componente gravitacional da energia, dificultando a existência de órbitas estáveis no limite Newtoniano.

A Relatividade Geral, adicionou um novo termo, possibilitando um ajuste quanto a visualização nas proximidades de um corpo massivo, $r \rightarrow 0$, contribuindo no aparecimento de um ponto de máximo, que não existia para o potencial efetivo clássico. Quanto à limites de $r \rightarrow \infty$, ambas curvas coincidem.

Para partículas sem massa, foi possível obter um ponto de máximo generalizado para todas as curvas, que também consiste em um ponto de órbita circular instável $r = 3M$.

Como perspectivas futuras após a realização trabalho de conclusão de curso, esperamos estender nossa análise de geodésicas aos espaços-tempos de Schwarzschild-Anti de Sitter e Schwarzschild-de Sitter e também, realizar o cálculo das órbitas que não foi feito.

Referências

- ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 116, p. 061102, feb 2016.
- BLAU, M. *Lecture notes on general relativity*. Institute of Theoretical Physics - University of Bern: Albert Einstein center for fundamental physics, 2018.
- CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity*. United Kingdom: Cambridge University Press, 2019.
- CASOLA, E. D.; LIBERATI, S.; SONEGO, S. Nonequivalence of equivalence principles. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers (AAPT), v. 83, n. 1, p. 39–46, Jan 2015.
- CHANDRASEKHAR, S. *The mathematical theory of black holes*. Oxford: Oxford University Press, 2002. (Oxford classic texts in the physical sciences).
- EINSTEIN, A. On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen der Physik*, v. 17, n. 891, p. 891–921, jun 1905.
- EINSTEIN, A. On gravitational waves. *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften*, jan 1918.
- EINSTEIN RELATIVELY EASY. *Introduction to tensors*. 2017. Disponível em: <<http://einsteinrelativelyeasy.com/index.php/general-relativity/54-introduction-to-tensors>>. Acesso em: 15 out. 2019.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical mechanics*. 3. ed. [S.l.]: Addison Wesley, 2002.
- ISAACSON, W. *Einstein: sua vida, seu universo*. São Paulo: Companhia das Letras, 2007.
- MARTINS, A. S. Simetrias e leis de conservação na mecânica clássica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Rio de Janeiro, v. 21, n. 1, mar. 1999.
- MARTINS, R. A. The search for gravitational absorption in the early twentieth century. *The expanding worlds of general relativity*, Boston: Birkhäuser, v. 7, p. 3 – 44, 1998.
- MCMAHON, D.; ALSING, P. *Relativity demystified*. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2005. (Demystified).
- MISNER, C.; WHEELER., J. A.; THORNE, K. *Gravitation*. [S.l.]: Princeton university press, 2017.
- MUREIKA, J. R. *Schwarzschild orbits – particles and photons, PHYS 471*. Department of physics - Loyola Marymount University, 2019. Disponível em: <<http://jmureika.lmu.build/PHYS471/InClass/SchwarzschildOrbits.pdf>>. Acesso em: 19 nov. 2019.

NEWTON, I. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. [S.l.]: William Dawson & Sons Ltd., London, 1687.

NUSSEINZVEIG, H. M. *Curso de física básica 1: mecânica*. 5. ed. Rua Pedroso Alvarenga, São Paulo: Blucher, 2013.

SCHUTZ, B. F. *A first course in general relativity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1985.

SCHWARZSCHILD, K. On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1916, p. 189–196, 1916.

WALD, R. *General relativity*. USA: University of Chicago Press, 2010.

WALECKA, J. D. *Introduction to general relativity*. College of William and Mary, USA: World Scientific, 2007.