**Modelo computacional baseado em técnicas Wavelets
para relacionar imagens digitais obtidas em diferentes
escalas e resoluções**

Edson Roberto Minatel

Tese apresentada ao Instituto
de Física de São Carlos, da
Universidade de São Paulo,
para obtenção do título de
Doutor em Ciências, sub-área:
Física Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Estevão Cruvinel

São Carlos – 2003

USP/IFSC/SBI

8-2-001558

IFSC-USP SERVIÇO DE BIBLIOTECA
INFORMAÇÃO

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS
FÍSICA COMPUTACIONAL

**MODELO COMPUTACIONAL BASEADO EM
TÉCNICAS WAVELETS PARA RELACIONAR
IMAGENS DIGITAIS OBTIDAS EM DIFERENTES
ESCALAS E RESOLUÇÕES**

Edson Roberto Minatel*

*Tese apresentada ao Instituto de Física de
São Carlos, da Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para a obtenção
do título de Doutor em Ciências, sub-área:
Física Computacional.*

Orientador:
Prof. Dr. Paulo Estevão Cruvinel

São Carlos
2003

* Este trabalho contou com o apoio financeiro da Fapesp e CNPq.

Minatel, Edson Roberto

“Modelo computacional baseado em técnicas Wavelets para relacionar imagens digitais em diferentes escalas e resoluções.”

Edson Roberto Minatel – São Carlos, 2003

Tese (Doutorado) – Área de Física Computacional da Universidade de São Paulo, 2003 - Páginas: 152

Orientador: Prof. Dr. Paulo Estevão Cruvinel

1. Processamento Digital de Imagens; Wavelets; Meios porosos; Tomografia Computadorizada; Sub-Pixel; Vetorização;

I. Título

IFSC**UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO****Instituto de Física de São Carlos**

Av. Trabalhador São-carlense, 400
Caixa Postal 369
13560-970 - São Carlos - SP - Brasil

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE EDSON
ROBERTO MINATEL APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS,
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 03-10-2003.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Paulo Estevão Cruvinel (Orientador e Presidente) – EMBRAPA

Prof. Dr. Nelson Delfino D'Ávila Mascarenhas – UFSCar

Prof. Dr. Roberto Marcondes César Júnior – IME/USP

Prof. Dr. Valentin Obac Roda – EESC/USP

Prof. Dr. Luiz Gonçalves Neto – EESC/USP

Dedicatória

Sempre acreditei que a base consolidada no passado e as expectativas futuras são o combustível de toda minha motivação pessoal e profissional. Assim, dedico este trabalho à memória de minha avó Rosa e à minha filha Débora.

Resumo

É apresentado o desenvolvimento de um modelo computacional que visa relacionar imagens digitais obtidas em diferentes escalas e resoluções com aplicação de Wavelets. Seu desenvolvimento encontra-se no contexto multidisciplinar e situa-se na intersecção das linhas de pesquisa de áreas da Física, da Matemática e da Computação. Desta forma, optou-se na implementação por uma abordagem computacional dos estudos, com aplicação em imagens digitais provenientes da reconstrução de dados de tomografia computadorizada de Raios-X. Resultados indicam que a implementação do modelo computacional desenvolvido tem sua funcionalidade comprovada, uma vez que os atributos vetoriais dos objetos considerados para análise (poros) foram mantidos estáveis em diferentes resoluções estudadas. O modelo foi implementado em linguagem de programação C++ com uso de orientação a objetos e organizado em classes. Adicionalmente, sua aplicação é viabilizada para diversas plataformas computacionais no que tange a sistemas operacionais e processadores. Do ponto de vista científico, o sistema resultante, além de ser uma ferramenta importante no estudo de meios porosos através de imagens de tomografia computadorizada por Raios-X, contribui com métodos inovadores que fazem uso de Wavelets e são aplicados na suavização de bordas por técnica sub-pixel, na otimização de desempenho e no processamento de dados para interpolação.

Abstract

This work consists of the development of a computational model aimed at relating digital images obtained on different scales and resolutions to the application of Wavelets. The development of this model lies within a multidisciplinary context, at the intersection of the research lines of areas of Physics, Mathematics and Computation. The choice of these studies therefore fell on a computational approach, with the application of digital images originating from the reconstruction of computerized tomographic X-ray data. The results of the implementation of the computational model developed here confirm the model's functionality, since the vectorial attributes of the objects utilized for our analysis (pores) remained stable under different resolutions. The model was implemented in the C++ programming language using object orientation, and the model's methods were organized into classes based on their application on different computational platforms, from the standpoint of operational systems and processors. In the scientific point of view, the resulting system is an important tool in the porous means researches using computerized tomography by X-rays and it has exclusive methods. These methods use Wavelets and they have application in edge smoothing processes by sub-pixel technique, in optimizing processing time and in data processing for interpolation.

Agradecimento especial

Agradeço à minha esposa Sueli pela compreensão, pela tolerância, pelo apoio incondicional, pelos sacrifícios, por compartilhar os seus sonhos, por motivar os meus sonhos, por sempre ajudar na busca de concretizar nossos sonhos, pela cumplicidade, por abrir mão inúmeras vezes de seus anseios pessoais, enfim, pelo amor.

Agradecimentos

Este trabalho não teria sido concluído se não houvesse a contribuição de muitas pessoas e instituições. Agradeço de forma especial:

- Ao Prof.Dr. Paulo E. Cruvinel pela orientação séria, pela amizade, pela motivação constante e pelo exemplo de vida. Agradeço também à sua esposa Miriam, e aos seus filhos Paula e André que cederam muitas das suas horas sempre que preciso;
- Aos meus pais, Pedro e Silvia, pelo apoio incondicional em todas as fases de minha educação;
- Ao Instituto de Física de S. Carlos pela oportunidade e em especial a Wladerez pela competência e simpatia;
- À Embrapa Instrumentação Agropecuária e a todos seus integrantes, pelo apoio e agradável convívio;
- Ao Prof.Dr. Marcos Luiz Mucheroni pela motivação inicial e constante incentivo à pesquisa e ao Prof.Dr. Rangaraj M. Rangayyan pelo apoio científico;
- À empresa Ablevision pelo apoio e motivação à pesquisa;
- Aos amigos que contribuíram direta ou indiretamente para esse desenvolvimento.
- À Fapesp pelo apoio científico e financeiro através do processo 99/01015-2.

Prefácio

O uso de imagens digitais provenientes de tomografia computadorizada em aplicações na agricultura foi discutido inicialmente em 1981 por físicos e engenheiros eletrônicos da Fundação Educacional de Barretos (FEB), da Universidade de Campinas (Unicamp) e da Universidade de São Paulo (USP). Essa discussão realizada com o Dr. Sérgio Mascarenhas, físico do Instituto de Física da USP de São Carlos (IFSC), originou um projeto multidisciplinar para o desenvolvimento de um novo método e um novo equipamento. Como resultado desse projeto, que contou com a parceria entre a USP e Unicamp com as universidades italianas de Trieste e de Roma, duas teses de doutorado foram elaboradas produzindo pioneiras contribuições. Essas contribuições introduziram, em 1983, o uso da tomografia médica de Raios-X em estudos dos sistemas água-solo-planta-atmosfera. Em 1985 um tomógrafo de Raios-X e raios γ automatizado e de baixo custo foi projetado e desenvolvido inteiramente no Brasil pela mesma equipe de pesquisadores objetivando aplicações multidisciplinares e especialmente aplicações na agricultura [CRUVINEL-1987]. Em 1994, a Embrapa Instrumentação Agropecuária apresentou estudos com tomografia de dupla energia, um tomógrafo portátil e resultados de tomografias com Raios-X e ressonância magnética foram obtidos confirmando simulações da teoria da passagem de um líquido por um meio poroso.

Problemas de grande importância tanto para a agricultura quanto para a engenharia geotécnica foram estudados como é o caso do comportamento de solos expansivos e colapsantes sob diferentes condições de compactação e de umidade. Esses problemas foram estudados em 1995 em trabalho conjunto entre a Embrapa Instrumentação Agropecuária e as universidades federais do Mato Grosso e de Pelotas e das escolas Técnica Federal de Mato Grosso e de Engenharia de São Carlos (USP). Desde sua criação, o tomógrafo da Embrapa Instrumentação Agropecuária foi aprimorado no que diz respeito tanto ao *hardware* quanto aos algoritmos de reconstrução e visualização das imagens. Como resultados deste histórico

de pesquisas originou-se uma expressiva gama de imagens digitais obtidas em diversas escalas e diferentes resoluções provenientes dos equipamentos de tomografia desenvolvidos. [MINATEL-1997,1998] [POSADAS-1994] [CAÇÃO-1994] [BUENO-1995] [CRESTANA-1990].

Neste contexto, a motivação deste trabalho de doutorado se deu pela constatação da demanda de métodos ou ferramentas computacionais que relacionassem imagens obtidas em escalas e resoluções diferentes a partir sistemas de imageamento. Por outro lado, este trabalho de doutorado é organizado em 4 capítulos que, com o intuito de otimizar sua leitura e compreensão, são brevemente descritos a seguir:

No **Capítulo 1** são descritos os principais aspectos físicos envolvidos no contexto da formação de imagens por Raios-X e são apresentados fundamentos sobre meios porosos e tomografia computadorizada.

No **Capítulo 2** são abordados os fundamentos matemáticos utilizados no desenvolvimento do trabalho. Nele são também apresentados os conceitos e fundamentos do Processamento Digital de Imagens.

No **Capítulo 3** é apresentado o modelo desenvolvido com uso de fluxogramas e de pseudocódigos de forma modular e com progressivo nível de detalhamento. Em alguns processos apresentados faz-se uso de imagens que ilustram os resultados esperados.

No **Capítulo 4** são apresentados os resultados da aplicação do modelo implementado em linguagem de programação C++. Imagens provenientes da tomografia computadorizada por Raios-X em diferentes resoluções serviram de entrada para o modelo e uma discussão dos resultados numéricos foi realizada embasando as conclusões gerais.

Sumário

Página de rosto.....	i
Ficha catalográfica.....	ii
Dedicatória.....	iii
Resumo.....	iv
Abstract.....	v
Agradecimento especial.....	vi
Agredecimentos.....	vii
Prefácio.....	viii
Sumário.....	x
Lista de figuras.....	xii
Lista de tabelas.....	xx
1. Meios porosos e a Tomografia de Raios-X.	1
1.1. Meios porosos.....	2
1.1.1. Classificação de poros	7
1.1.2. Métodos de medida de porosidade	9
1.1.3. Porosidade em solos	11
1.2. Tomografia Computadorizada.....	13
1.2.1. Seleção da energia.....	15
1.2.2. Detector de Raios-X	16
1.2.3. Eficiência	17
1.2.4. Resolução em energia.....	17
1.2.5. Resolução de tempo.....	17
1.2.6. A formação de imagens a partir de projeções e os principais problemas relativos à reconstrução.....	17
1.2.7. Algoritmos para reconstrução bi e tridimensional.....	23
1.2.8. Retroprojeção filtrada	26
2. Fundamentos matemáticos e o processamento de imagens digitais	34
2.1. Definições adotadas.....	35
2.1.1. Definição de Escala.....	35

2.1.2. Definição de Resolução.....	35
2.2. Processamento de Imagens Digitais	35
2.2.1. Resolução Espacial de Amostragem.....	38
2.2.1.1. Resolução Espacial de Amostragem como seqüências bidimensionais.....	38
2.2.1.2. No contexto do Processamento Digital de Imagens.....	43
2.2.2. Limiarização (Threshold)	44
2.2.3. Regiões de interesse	45
2.2.4. Cópia de imagens.....	45
2.2.5. Rotulação	45
2.2.6. Convolução no domínio espacial.....	45
2.2.7. Detecção de bordas	46
2.2.8. Transformações escalares	46
2.2.9. Imagem Vetorial x Imagem Raster	46
2.2.10. Classificação de imagens digitais em função de escala e resolução	47
2.3. Wavelets	48
2.3.1. Análise de Multiresolução, Decomposição e Composição	57
2.3.2. Algoritmo de interpolação por B-Wavelets.....	61
3. Desenvolvimento do modelo.....	64
3.1. Fase de extração de atributos.....	66
3.2. Fase de classificação	67
3.3. Processamentos envolvidos.....	67
3.3.1. Segmentação	68
3.3.2. Adequar escala e resolução aos padrões	69
3.3.2.1. Zoom Out (redução).....	74
3.3.2.2. Zoom In (aproximação)	75
3.3.2.3. Suavização por Sub-Pixel usando B-Wavelets	77
3.3.2.4. Usando Wavelets na vetorização.....	89
3.3.3. Extração de atributos e classificação	93
4. Resultados e Conclusões.....	95
4.1. Aplicação em imagem de Tomografia por Raios-X	96
4.1.1. Avaliação dos resultados obtidos com o ensaio do phantom heterogêneo	116

4.1.2. Imagens de amostras de meios porosos (solos)	117
4.1.3. Avaliação de desempenho usando otimização por Wavelets.....	138
4.1.3.1. Para o processo sem otimização por Wavelets:	138
4.1.3.2. Para o processo com otimização por Wavelets:	139
4.1.4. Conclusões.....	142
4.1.5. Proposta de desenvolvimentos futuros.....	144
Referencias Bibliográficas.....	145

Lista de Figuras

Figura 1.1: Estimação do (Representative Elementary Volume) pelo incremento do volume da amostra de solo até que a porosidade seja independente da posição onde está centrado.	5
Figura 1.2: Texturas da superfície e do subsolo de solos do centro da Europa em termos de porosidade no início do século 20.	6
Figura 1.3: Dependência da porosidade do conteúdo de água q em solos encharcados. Quatro domínios são definidos em [HAINES-1923] e modificados em [YULE-1980].	7
Figura 1.4: Diagrama de blocos de tomógrafo desenvolvido por [CRUVINEL-1987].	16
Figura 1.5: Exemplo de tomografia por transmissão.	19
Figura 1.6: Esquema de um tomógrafo por Raios-X.	20
Figura 1.7 : Duas projeções paralelas de um objeto matematicamente expresso por $f(x,y)$	20
Figura 1.8: Projeção paralela de $f(x,y)$ para a transformada de Radon.	21
Figura 1.9 : Novos eixos de coordenadas (t,s,z) gerados pela rotação de (x,y,z) sobre o eixo z por um ângulo q	22
Figura 1.10 : Correspondência entre espaço real e espaço recíproco como base para o Teorema das secções de Fourier.	24
Figura 2.1: Representação gráfica de uma seqüência bidimensional.	39

Figura 2.2 : (a) imagem com 240 colunas por 180 linhas; (b) 120x90; (c) 60x45; (d) 40x30.....	44
Figura 2.3: Ilustração do processo bidimensional padrão de Transformação ou Decomposição Wavelets. A imagem original tem suas linhas processadas até o nível máximo definido e as colunas são processadas posteriormente até o mesmo nível.	55
Figura 2.4 : Processo bidimensional Não-Padrão de Transformação ou Decomposição Wavelets. A imagem original tem suas linhas e colunas processadas em seqüência.....	56
Figura 2.5 : Decomposição por wavelet;	60
Figura 2.6: Composição por wavelet;	61
Figura 2.7 : Exemplo de interpolação e aproximação por B-Wavelets.	61
Figura 3.1: Visão geral do sistema implementado.....	65
Figura 3.2 : Fase de extração de atributos. Atributos inerentes às imagens são extraídos e armazenados em um banco de dados normalizados.....	66
Figura 3.3 : Fluxograma da Fase de classificação onde se observa o uso da base de dados gerada na Fase 1 para classificação da imagem entrada.....	67
Figura 3.4 : Imagem gerada por tomografia onde os coeficientes de atenuação são representados em escalas de tons de cinza. Pixel valor 0 = coeficiente de atenuação de valor 0.000 e os pixels de valor 255 representam 1.050	69
Figura 3.5: Fluxograma do algoritmo de adequação da imagem entrada para a mesma escala e resolução da imagem definida como padrão.....	70
Figura 3.6 : A marcação externa representa o tamanho da imagem padrão de entrada. A imagem com mesma escala e resolução de 320x240 foi adequada a este tamanho.....	71
Figura 3.7 : A imagem com mesma escala e resolução de 640x480 foi adequada ao tamanho padrão. Houve perda de parte da imagem.	71
Figura 3.8 : A imagem de entrada teve suas dimensões aumentadas proporcionalmente de forma a ter a mesma escala da imagem padrão. Houve descarte de parte da imagem.....	72
Figura 3.9 : A imagem de entrada teve suas dimensões reduzidas proporcionalmente de forma a ter a mesma escala da imagem padrão.....	73

Figura 3.10 : A imagem de entrada teve suas dimensões aumentadas (zoom in) de forma a ter a mesma escala da imagem padrão.	73
Figura 3.11 : A imagem de entrada teve suas dimensões reduzidas (zoom out) objetivando adequá-la à mesma escala da imagem padrão.	74
Figura 3.12 : Fluxo de dados para o processamento de redução (zoom out) de uma imagem.....	74
Figura 3.13 : Processo de Zoom In com suavização por sub-pixel usando B-Wavelets.....	76
Figura 3.14 : Imagem (a) submetida a aproximações (“zoom in”) mantendo-se suas características iniciais. A imagem (a) possui 256x256pixels; (b) 512x512; (c) 768x768; (d) 1024x1024.....	77
Figura 3.15 : Fluxograma da série de processamentos necessários para a aplicação da técnica sub-Pixel por B-Wavelets.....	78
Figura 3.16 : (a) imagem binarizada contendo todos os poros. (b) imagem de um único poro.....	78
Figura 3.17 : Processamento para segmentar uma imagem de N poros em N sub-imagens de um poro.....	79
Figura 3.18 : Processo de vetorização dos pontos para interpolação.	81
Figura 3.19: Processo de interpolação dos poros por B-Wavelets.....	83
Figura 3.20 : Remontagem da imagem dos poros.....	85
Figura 3.21 : (a) imagem de poro com aproximação onde se pode observar o efeito de serrilhamento. (b) imagem das bordas da imagem (a). (c) imagem das bordas sobreposta à imagem interpolada. (d) imagem resultante com suavização do efeito de serrilhamento.	86
Figura 3.22 : Processo de vetorização das imagens dos poros.	87
Figura 3.23 : Fluxo de dados do processo para achar círculos inscritos usando-se correlação por FFT.	87
Figura 3.24 : Processo de correlação no domínio da frequência de duas imagens;.....	88
Figura 3.25: Pseudocódigo da FFT unidimensional.	89
Figura 3.26: Pseudocódigo da FFT bidimensional.	89
Figura 3.27 : Processo de vetorização otimizado por Wavelets.	90
Figura 3.28: pseudocódigo para a implementação da Transformada	

Wavelets de uma imagem bidimensional.	91
Figura 3.29: pseudocódigo para a implementação da Transformada Wavelets unidimensional baseada na função básica wavelet Haar.	91
Figura 3.30: pseudocódigo para a implementação da Transformada Wavelets Inversa de uma imagem bidimensional.....	92
Figura 3.31: pseudocódigo para a implementação da Transformada Wavelets Inversa unidimensional baseada na função básica wavelet Haar..	92
Figura 4.1: Diagrama esquemático da distribuição de Ca, P, Al, e Plexiglass na composição do phantom estudado.....	96
Figura 4.2 : Phantom heterogêneo reconstruído por retroprojeção filtrada. (Imagem em 256 níveis de cinza).....	97
Figura 4.3 : Imagem original do phantom heterogêneo na resolução 81x81 pixels (CORPO25.IMG).	99
Figura 4.4: Imagem do phantom heterogêneo rearranjada para de 81x81 para a resolução padrão de 400x400 pixels.....	100
Figura 4.5: Imagem do phantom heterogêneo (CORPO25.IMG) submetida a filtro tipo “threshold” com valor 110 segmentando alguns poros.	100
Figura 4.6: Imagem do phantom heterogêneo (CORPO25.IMG) segmentada após processamento por filtro laplaciano, tendo suas bordas destacadas..	101
Figura 4.7: Imagem do phantom heterogêneo (CORPO25.IMG) após os processamentos de vetorização das conexões 90 graus, pré-processamento por Wavelets Haar e interpolação por B-Wavelets.	101
Figura 4.8: Imagem do phantom (CORPO25.IMG) representado apenas pelo resultado da interpolação B-Wavelets.	102
Figura 4.9: Imagem do phantom heterogêneo (CORPO25.IMG) suavizada e reconstituída.....	102
Figura 4.10: Imagem do phantom heterogêneo (CORPO25.IMG) com o resultado da vetorização em destaque.....	103
Figura 4.11 : Imagem original do phantom heterogêneo na resolução 49x49 pixels (CORPO37.IMG).	103
Figura 4.12: Imagem do phantom heterogêneo (CORPO37.IMG) rearranjada de 49x49 pixels para a resolução padrão de 400x400.	104
Figura 4.13: Imagem do phantom heterogêneo (CORPO37.IMG) submetida	

a filtro tipo “threshold” com valor 110.	104
Figura 4.14: Imagem do phantom heterogêneo (CORPO37.IMG) após processamento por filtro laplaciano com suas bordas destacadas.....	105
Figura 4.15: Imagem do phantom (CORPO37.IMG) após os processamentos de vetorização das conexões 90 graus, pré-processamento usando Wavelets Haar e interpolação por B-Wavelets.....	105
Figura 4.16: Imagem do phantom heterogêneo (CORPO37.IMG) representado apenas pelo resultado da interpolação.....	106
Figura 4.17: Imagem do phantom (CORPO37.IMG) suavizada e reconstituída.....	106
Figura 4.18: Imagem do phantom (CORPO37.IMG) com o resultado da vetorização.	107
Figura 4.19 : Imagem original do phantom heterogêneo na resolução 25x25 pixels (CORPO75.IMG).	107
Figura 4.20: Imagem do phantom heterogêneo (25x25) rearranjada para a resolução padrão de 400x400 pixels.	108
Figura 4.21: Imagem do phantom heterogêneo (25x25) submetida a filtro tipo “threshold” com valor 110 segmentando alguns poros.	108
Figura 4.22: Imagem do phantom heterogêneo (25x25) segmentada após processamento por filtro laplaciano e tendo suas bordas destacadas.	109
Figura 4.23: Imagem do phantom heterogêneo (25x25) após os processamentos de vetorização das conexões 90 graus, pré-processamento usando Wavelets Haar e interpolação por B-Wavelets.	109
Figura 4.24: Imagem do phantom heterogêneo (25x25) representado apenas pelo resultado da interpolação B-Wavelets.	110
Figura 4.25: Imagem do phantom heterogêneo (25x25) suavizada e reconstituída	110
Figura 4.26: Imagem do phantom heterogêneo suavizada com o resultado da vetorização em destaque.	111
Figura 4.27 : Imagem original do phantom heterogêneo na resolução 13x13 pixels (CORPO15.IMG).	111
Figura 4.28: Imagem do phantom heterogêneo (13x13) rearranjada para a resolução padrão de 400x400 pixels.	112

Figura 4.29: Imagem do phantom heterogêneo (13x13) submetida a filtro tipo "threshold" com valor 110 segmentando alguns poros.....	112
Figura 4.30: Imagem do phantom heterogêneo (13x13) segmentada após processamento por filtro laplaciano e tendo suas bordas destacadas.	113
Figura 4.31: Imagem do phantom heterogêneo (13x13) após os processamentos de vetorização das conexões 90 graus, pré-processamento usando Wavelets Haar e interpolação por B-Wavelets.	113
Figura 4.32: Imagem do phantom heterogêneo (13x13) representado apenas pelo resultado da interpolação B-Wavelets.	114
Figura 4.33: Imagem do phantom heterogêneo (13x13) reconstituída.	114
Figura 4.34: Imagem do phantom heterogêneo (13x13) suavizada com o resultado da vetorização em destaque.....	115
Figura 4.35 : Imagem de amostra de solo reconstruída por retroprojeção filtrada. (Imagem em 256 níveis de cinza).....	117
Figura 4.36 : Imagem original de amostra de solo na resolução 22x22 pixels (SOLO.IMG).	119
Figura 4.37: Imagem da amostra de solo rearranjada de 22x22 para a resolução padrão de 400x400 pixels.	119
Figura 4.38: Imagem de amostra de solo (SOLO.IMG) submetida a filtro tipo "threshold" com valor 110 segmentando alguns poros.....	120
Figura 4.39: Imagem de amostra de solo (SOLO.IMG) segmentada após processamento por filtro laplaciano, tendo suas bordas destacadas.	120
Figura 4.40: Imagem do amostra de solo (SOLO.IMG) após os processamentos de vetorização das conexões 90 graus, pré-processamento por Wavelets Haar e interpolação por B-Wavelets.	121
Figura 4.41: Imagem de amostra de solo (SOLO.IMG) representada apenas pelo resultado da interpolação B-Wavelets.	121
Figura 4.42: Imagem de amostra de solo (SOLO.IMG) suavizada e reconstituída, tendo apenas o maior poro destacado.....	122
Figura 4.43: Imagem de poro em amostra de solo (SOLO.IMG) com o resultado da vetorização em destaque.....	122
Figura 4.44 : Gráfico de distribuição das quantidades pelos tamanhos de raios dos círculos inscritos, em pixels, resultantes da vetorização.....	123

Figura 4.45 : Imagem original de amostra de solo na resolução 22x22 pixels (U3.IMG).....	124
Figura 4.46: Imagem da amostra de solo (U3.IMG) rearranjada de 22x22 para a resolução padrão de 400x400 pixels.	124
Figura 4.47: Imagem de amostra de solo (U3.IMG) submetida a filtro tipo “threshold” com valor 110 segmentando alguns poros.....	124
Figura 4.48: Imagem de amostra de solo (U3.IMG) segmentada após processamento por filtro laplaciano, tendo suas bordas destacadas.	125
Figura 4.49: Imagem do amostra de solo (U3.IMG) após os processamentos de vetorização das conexões 90 graus, pré-processamento por Wavelets Haar e interpolação por B-Wavelets.....	125
Figura 4.50: Imagem de amostra de solo (U3.IMG) representada apenas pelo resultado da interpolação B-Wavelets.	126
Figura 4.51: Imagem de amostra de solo (U3.IMG) suavizada e reconstituída.....	126
Figura 4.52: Imagem de poro em amostra de solo (U3.IMG) com o resultado da vetorização em destaque.	127
Figura 4.53: Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poro segmentado da amostra de solo (U3.IMG).	128
Figura 4.54 : Imagem original de amostra de solo na resolução 22x22 pixels (U6.IMG).....	128
Figura 4.55: Imagem da amostra de solo (U6.IMG) rearranjada de 22x22 para a resolução padrão de 400x400 pixels.....	128
Figura 4.56: Imagem de amostra de solo (U6.IMG) submetida a filtro tipo “threshold” com valor 110 segmentando alguns poros.....	129
Figura 4.57: Imagem de amostra de solo (U6.IMG) segmentada após processamento por filtro laplaciano, tendo suas bordas destacadas.	129
Figura 4.58: Imagem do amostra de solo (U6.IMG) após os processamentos de vetorização das conexões 90 graus, pré-processamento por Wavelets Haar e interpolação por B-Wavelets.....	130
Figura 4.59: Imagem de amostra de solo (U6.IMG) representada apenas pelo resultado da interpolação B-Wavelets.	130
Figura 4.60: Imagem de amostra de solo (U6.IMG) suavizada e	

reconstituída, tendo apenas o maior poro destacado.....	131
Figura 4.61: Imagem de poro em amostra de solo (U6.IMG) com o resultado da vetorização em destaque.	131
Figura 4.62: Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poro segmentado da amostra de solo (U6.IMG).	132
Figura 4.63 : Imagem original de amostra de solo na resolução 22x22 pixels (U9.IMG).....	132
Figura 4.64: Imagem da amostra de solo rearranjada de 22x22 para a resolução padrão de 400x400 pixels (U9.IMG).	133
Figura 4.65: Imagem de amostra de solo (U9.IMG) submetida a filtro tipo “threshold” com valor 110 segmentando alguns poros.....	133
Figura 4.66: Imagem de amostra de solo (U9.IMG) segmentada após processamento por filtro laplaciano, tendo suas bordas destacadas.	134
Figura 4.67: Imagem do amostra de solo (U9.IMG) após os processamentos de vetorização das conexões 90 graus, pré-processamento por Wavelets Haar e interpolação por B-Wavelets.....	134
Figura 4.68: Imagem de amostra de solo (U9.IMG) representada apenas pelo resultado da interpolação B-Wavelets.	135
Figura 4.69: Imagem de amostra de solo (U9.IMG) suavizada e reconstituída, tendo apenas o maior poro destacado.....	135
Figura 4.70: Imagem de poro em amostra de solo (U9.IMG) com o resultado da vetorização em destaque.	136
Figura 4.71: Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poro segmentado da amostra de solo (U9.IMG).	137
Figura 4.72: Gráfico com os histogramas sobrepostos das distribuições dos raios das amostras de solo. Seqüência1 indica os resultados de SOLO.IMG; Seqüência 2 de U3.IMG; Seqüência 3 de U9.IMG e Seqüência 4 de U6.IMG.	137

Lista de Tabelas

Tabela 1.1: Variação da porosidade e da densidade de amostras de solos minerais.....	6
Tabela 2.1: Processo de decomposição por Wavelets em várias resoluções.....	53
Tabela 4.1: Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poros segmentados do phantom heterogêneo.	103
Tabela 4.2 : Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poros segmentados do phantom heterogêneo 49x49.	107
Tabela 4.3 : Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poros segmentados do phantom heterogêneo 25x25.	111
Tabela 4.4 : Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poros segmentados do phantom heterogêneo 13x13.	115
Tabela 4.5 : Valores das colunas (Cx), linhas (Lx) e raios (Rx) em função das colunas, linhas e raios da imagem de maior resolução (C1, L1 e R1). A função E é dada por $E(a,b) = (b-a)/a$	116
Tabela 4.6 : Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poro segmentado da amostra de solo (SOLO.IMG).	123
Tabela 4.7 : Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poro segmentado da amostra de solo (U3.IMG).	127
Tabela 4.8 : Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poro segmentado da amostra de solo (U6.IMG).	132
Tabela 4.9 : Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poro segmentado da amostra de solo (U9.IMG).	136

1. Meios porosos e a Tomografia de Raios-X.

Neste capítulo são descritos os principais aspectos físicos envolvidos no contexto da formação de imagens por Raios-X e são apresentados fundamentos sobre meios porosos e tomografia computadorizada.

1.1. Meios porosos

Um “poro” pode ser objetivamente definido como sendo a parte do solo que não é preenchida pela parte sólida. A forma, o tamanho e a origem dos poros determinam a classificação de sistemas de solos porosos. Nesse contexto, pode-se afirmar que todos os processos de transporte e armazenamento de líquidos ou gases ocorrem em meios porosos.

A porosidade do solo é determinada pelo volume relativo dos poros e equacionada da seguinte forma:

$$P = \frac{V_p}{V_T}$$

Equação 1.1

onde V_p é o volume dos poros e V_T o volume total da amostra de solo. Quando a Equação 1.1 é multiplicada por 100, obtém-se o valor de P como porcentagem. A relação entre o volume dos poros V_p e a parte sólida do volume de solo V_s é dada por

$$e = \frac{V_p}{V_s}$$

Equação 1.2

com relações mútuas entre P e e sendo

$$P = \frac{e}{(1+e)} \text{ e } e = \frac{P}{(1-P)}$$

Equação 1.3

A relação apresentada em Equação 1.3 é mais apropriada que a da porosidade se o termo de referência V_T não for constante como por exemplo no barro quando ele sofre inchação ou encolhimento.

O tamanho de V_T deve ser definido de forma apropriada e pode ser

obtido pelo seguinte tratamento teórico. Observando-se a Figura 1.1 assume-se que, quando V_T é suficientemente pequeno ($V_T < V_p$) e centrado em um poro, $P = 1$. Quando V_T é centrado na fase sólida e suficientemente pequeno ($V_T < V_s$), $P = 0$. Quando V_T tem seu valor aumentado, observa-se a situação na qual $V_T = (V_p + \delta V_s)$ ou $V_T = (V_s + \delta V_p)$ e a porosidade não é 1 nem 0. Centrando V_T na fase sólida, o valor de P é aproximadamente um pouco acima de zero. Com um incremento gradual em V_T obtém-se primeiro um gradativo decremento de P (centrado em um poro) ou um incremento gradual de P (centrado na fase sólida) até que ambos valores coincidam. Antes que essa coincidência ocorra, uma oscilação de P pode existir. Nesse estágio de incremento de V_T quando a porosidade é independente da centralização inicial de V_T , nos temos determinado o *REV* (*Representative Elementary Volume*) [BEAR-1968, 1969, 1972].

Esse volume final de V_T é chamado por Corey [COREY-1963,1977,1985] como Volume Mínimo de um Elemento de Referência. Se $V_T = REV$, transladando o centro de V_T não se altera o valor de P . O conceito de *REV* é um importante método de determinação prática da porosidade bem como a aplicação da teoria de fluxo potencial para a descrição do fluxo de água em solos. Solos sem desenvolvimento estrutural tem um *REV* em torno de 100 cm^3 ou menos. Devido ao *REV* de solos agregados depender do tamanho e forma de seus (peds), seu valor pode ser uma ou mais ordens de magnitude maiores.

A porosidade do solo manifesta um grande escopo de valores variando entre 0.3 a mais de 0.9. No entanto, na maioria dos solos minerais, P se encontra entre 0,4 e 0,6. Alguns solos orgânicos tem seus valores de P ultrapassando 0,9. A porosidade depende da composição, textura e estrutura do solo. A estrutura do solo é influenciada por conter matéria orgânica, a quantidade de agentes de cimentamento inorgânico, o gênese do solo e seu horizonte e mais recentemente, pelas atividades humanas.

Teoricamente, o mais denso agrupamento de partículas esféricas de mesmo tamanho, $P = 0,26$. Embora esse valor seja algumas vezes tido como a mínima porosidade teórica de areia, até mesmo solos arenosos são misturas de partículas de vários tamanhos e formas. Hartge reviu misturas secundárias e terciárias de partículas com diversas formas e tamanhos [HARTGE-1978].

No caso de areias não são aplicáveis modelos geométricos dos arranjos de partículas para o estudo de porosidade.

Com um incremento do conteúdo de barro a porosidade do solo decai, devido principalmente a grande probabilidade de agregação do solo. Para solos não intensivamente cultivados, os valores médios de porosidade no Horizonte-A e subsolo são mostrados versus textura na Figura 1.2. A porosidade do Horizonte-A encontra seu valor máximo em solos argilosos devido a condições ótimas de agregação.

No barro, a tendência para o “empastamento” leva a um desprezível decremento de P . Os dados para o gráfico foram pesquisados por Janota em 1924 e foram analisados por Kutílek em 1978 [KUTÍLEK-1962 a 1994]. O uso de maquinário pesado, aplicação de fertilizantes em grande quantidade e a redução de material orgânico nos solos – características específicas da agricultura intensiva dos tempos modernos – reduziram a agregação e aumentaram a compactação do solo. Dessa forma, a porosidade da maioria dos solos cultiváveis não depende da textura do solo.

A variação dos valores de porosidade encontrada nas quatro maiores categorias de texturas de solos minerais, de acordo com Schachtschabel é dada na Tabela 1.1. Exceto para solos barrocos, a textura não influencia significativamente a porosidade. Em solos barrocos originados por lavas vulcânicas os quais são classificados como Andosols, a porosidade tem valores extremos entre 0,7 e 0,8. [SCHACHTSCHABEL-1984]

Figura 1.1: Estimação do *REV* (*Representative Elementary Volume*) pelo incremento do volume da amostra de solo V_T até que a porosidade seja independente da posição onde V_T está centrado.

Figura 1.2: Texturas da superfície e do subsolo de solos do centro da Europa em termos de porosidade P no início do século 20.

Tipo do solo	Porosidade P (%)	Densidade ρ_T ($g \cdot cm^3$)
Arenoso	56 – 36	1.16 – 1.70
Sedimentoso	56 – 39	1.26 – 1.61
Barroso	55 – 30	1.20 – 1.85
Argiloso	70 – 35	0.88 – 1.72

Tabela 1.1: Variação da porosidade e da densidade de amostras de solos minerais.

Em alguns solos barrosos e argilosos, P depende do conteúdo de água na terra θ já que o solo “incha” quando molhado e “encolhe” quando seco. Em cada solo P aumenta com θ como mostrado na Figura 1.3. Esta relação é linear para valores altos de θ . Para valores baixos de θ , P muda de forma não-linear com θ .

No perfil do solo, a porosidade máxima normalmente ocorre no topo do horizonte A_0 . A distribuição da porosidade na profundidade do solo depende do desenvolvimento do perfil desse solo. Por exemplo, no horizonte Bt de solo aluvial material acumulado causa um decremento na porosidade. Ou, a redução de óxido de ferro e a destruição da estrutura em horizontes hidromórficos G conduzem a uma diminuição abrupta da porosidade.

Figura 1.3: Dependência da porosidade P do conteúdo de água θ em solos encharcados. Quatro domínios são definidos em [HAINES-1923] e modificados em [YULE-1980].

A porosidade em solos orgânicos é maior que em solos minerais e alcança valores máximos em baixo pântano altamente decomposto. Com o aumento de substâncias minerais a porosidade decai em solos orgânicos.

1.1.1. Classificação de poros

De acordo com [COREY-1977], a classificação de poros em solos poderia seguir as leis da hidrostática e hidrodinâmica e adotariam três categorias:

Poros sub microscópicos – são tão pequenos que formam clusters com moléculas de água para formar partículas fluidas ou caminhos contínuos de fluxo de água. As leis da mecânica dos fluidos não são aplicáveis pois a convecção não existe nesses poros. Poros inclusos nessa categoria são freqüentemente ignorados.

Poros capilares – quando a forma da interface entre o ar e a água é determinada pela configuração dos poros ou pelas forças sobre a interface. A interface ar-água resultante é chamada de meniscos capilares. O fluxo de água nesses poros é considerado com sendo laminar e dominante em solos.

Macroporos (Poros não-capilares) – poros de tamanho que não permite a formação dos meniscos capilares. A forma da interface entre ar e água é considerada planar, e portanto, forças capilares são nulas. O fluxo de água dentro de cada poro pode ser na forma de um filme movendo-se sobre todas as irregularidades do muro induzido pela rugosidade e forma, ou em alguns casos, fluxos turbulentos quando os poros contêm consideravelmente mais água. A forma dos macroporos é geralmente imaginada como tubular ou planar. A forma tubular é originada pela ação da fauna do solo (como minhocas) ou causadas depois da ação de raízes das plantas. Poros planares tem a forma de rachaduras e fissuras devidas principalmente às mudanças de volume da terra quando ela seca [BEVEN-1982].

Embora o volume relativo dos macroporos ser muito pequeno, ele pode ter grande impacto relativo ao fluxo de água e seus constituintes dissolvidos em um perfil de solo.

Na literatura de ciência e física de solos os poros capilares na segunda categoria são freqüentemente subdivididos de acordo com critérios da hidrostática bem como por aspectos práticos da agricultura. Poros contendo água abaixo do ponto de “murchamento” permanente de plantas são designados com poros finos. Os poros com água entre o ponto de murchamento e capacidade do campo são poros médios. São chamados de poros grandes os poros que estão acima da capacidade do campo.

Outras subdivisões de poros em solos são normalmente baseadas em particulares pressões hidráulicas e raios de poros equivalentes. O tamanho dos poros podem ser definidos por dois aspectos: i) O máximo raio de uma esfera inscrita no poro. A definição é aplicável somente a poros onde os três

principais eixos são de tamanhos aproximados. Ou, a poros tendo forma tubular e os raios dos círculos inscritos são dados com raios dos poros. Para ambos, a visualização dos poros é requerida. ii) A igualdade do comportamento de um parâmetro hidráulico em um modelo de capilares segue a definição de raios equivalentes em solos reais.

Em ciência de solos, dois termos são usados para descrever a porosidade do solo – porosidade primária e porosidade secundária. A porosidade primária denota o volume relativo dos poros devido à forma e tamanho de partículas primárias. A porosidade secundária denota a ação de outros fatores como a forma tubular de poros depois da passagem de raízes de plantas, ou fissuras resultantes da secagem do solo que incham e encolhem. Dessa forma, [KATCHINSKI-1965] define a porosidade agregada P_A e a porosidade inter-agregada P_B em termos da porosidade média de agregados individuais $\overline{P_I}$ como

$$P_A = \frac{\overline{P_I}(1 - P)}{1 - \overline{P_I}}$$

Equação 1.4

e

$$P_B = P - P_A$$

Equação 1.5

respectivamente. Os termos poros intrapedal e poros interpedal são algumas vezes utilizados para P_A e P_B , respectivamente.

1.1.2. Métodos de medida de porosidade

Métodos de medida de porosidade são baseados na determinação de V_p e V_T como definido anteriormente. O *método da densidade* vem da seguinte expressão:

$$P = \frac{\rho_s - \rho_T}{\rho_s}$$

Equação 1.6

onde $\rho_s [= m_s \cdot V_s^{-1} (g \cdot cm^{-3})]$ é a densidade média das partículas sólidas do solo, $\rho_T [= m_s \cdot V_T^{-1} (g \cdot cm^{-3})]$ a densidade da amostra de solo, m_s a massa da fase sólida do solo (usualmente tida como o peso do solo seco a 105°C para solos minerais), V_s o volume da parte sólida medida e V_T o volume do núcleo de amostragem ou o volume da água deslocada quando o agregado é coberto com parafina e submergido em água. Em solos pedregosos, V_T é medido pelo volume do preenchimento graduado de areia no buraco de cada amostra de solo obtida para secagem ou umedecimento. Valores de ρ_s para solos minerais variam de 2.6 a 2.7 $g \cdot cm^{-3}$, a densidade do quartzo que é normalmente um dos principais constituintes da maioria dos solos. Na maioria dos solos orgânicos como nos pântanos, valores de ρ_s abrangem uma grande variação entre 0.2 para cerca de 1.0 $g \cdot cm^{-3}$. Para esses solos orgânicos, o valor de ρ_s geralmente decresce a medida que o nível de decomposição da matéria orgânica aumenta.

Métodos ópticos são usados quando os poros do solo são visíveis. Esta visualização é alcançada pelo preenchimento dos poros com um material inicialmente fluido que se torna subsequenteemente sólido. A matriz-solo resultante é então fixada em regiões de partículas de solos e um material contrastante demarca regiões do espaço dos poros. Finas regiões da matriz fixada de solo subsequenteemente produzidas revelam que a área dos poros A_p , medida com técnicas de microfotografia, é relacionada com a área total examinada A_T . A porosidade é estimada por se assumir a igualdade dos arranjos bi e tridimensionais que leva a

$$\frac{A_p}{A_T} = \frac{V_p}{V_T}$$

Equação 1.7

Para medir A_p , é usado o método das secantes ou o método Monte Carlo. O princípio do método é aplicado para a descrição do sistema de macroporos. Os macroporos impregnados são contados através da análise de imagens [RINGROSE-1984].

Nos *métodos volumétricos*, procedimentos para medida do volume do líquido de preenchimento dos poros apresentam-se como os mais simples para se obter um valor de V_p . Este conceito simples apresenta dificuldades práticas como quando há a presença de bolhas de ar, alterações do solo quando ele passa por processo de secagem, mudanças de volume da matriz de solo causadas pela secagem ou molhamento. Se um líquido não solúvel em água é usado, como mercúrio, o arranjo resultante não permite que sejam usadas determinadas pressões. Outra alternativa para o método volumétrico é a medida da pressão do gás com o solo seco antes e depois do contato com o conhecido volume desse gás. A lei de Boyle-Mariotte é usada para calcular V_p . As mudanças de volume que acompanham a completa secagem do solo são atributos que tornam esse método desvantajoso.

Métodos indiretos são baseados na medida de propriedades físicas particulares do solo dependendo sobretudo da densidade ou porosidade da amostra. Eles são vantajosos pela rapidez em se estimar a mudança de P no espaço e no tempo. Por exemplo, a resistência mecânica do solo medida por penetrômetros fornece informações sobre a variação de P se o conteúdo de água no solo for constante. Os valores de referência de P poderiam ser conhecidos em um determinado ponto ou tempo. A atenuação da radiação Gamma e métodos de espalhamento fornecem dados muito mais precisos.

1.1.3. Porosidade em solos

Nos solos, os poros variam em forma e em tamanho e manifestam uma típica treliça interconectada para cada tipo de solo, solo horizonte, atividade biológica e atividade humana. Os tamanhos reais dos poros, sua

continuidade e suas formas são visualizados microscopicamente em finas secções de solos [KUBIENA-1970, WILDING-1984]. A Tomografia Computadorizada (CT) [CRESTANA-1986, STEUDE-1994, CRUVINEL-1987,1990], a Ressonância Magnética Nuclear (NMR) [LIU-1994] e Estéreo Radiografias por Raios-X [TOKUNAGA-1988] permitem uma nova abordagem na análise de redes tridimensionais de poros.

A CT e NMR produzem imagens de fatias com finita espessura de uma amostra de solo. Se há um suficiente número de sucessivas fatias na direção do eixo perpendicular, uma imagem tridimensional pode ser obtida. Dessa forma, como ambas essas técnicas são não-invasivas e não prejudicam a integridade do solo, podem ser aplicadas repetidas vezes para obtenção de medidas em um mesmo pedaço em análise.

A CT utiliza fontes de alta energia de Raios-X com o raio sendo detectado após passar através do plano do corpo do solo. Este método é descrito neste trabalho com detalhes abaixo. A resolução de um equipamento médico típico de CT que utiliza baixa energia de Raios-X é na ordem de décimos de milímetros. O elemento de volume (voxel) dos CT médicos estão em torno de 0.5 mm^3 . Devido à fase sólida dos solos atenuarem os Raios-X de forma mais intensa que o corpo humano, para análise de solo são recomendadas energias maiores para gerar menores voxels. CT industriais têm voxels na ordem de 0.01 mm^3 . Um típico CT *synchrotron* com resolução de μm^3 pode ser usado para se estudar finíssimas camadas e meniscos em solos [SPANNE-1994].

Espectroscópios-NMR e técnicas de imageamento utilizam potentes magnetos para reorientar os núcleos dos átomos desemparelhados com prótons e nêutrons. Os átomos desprendem energia após removido o campo magnético. Na prática, os núcleos emitem um pulso magnético que permitem medir o sinal de radio frequência característico daquele átomo. O sinal é relacionado com o Hidrogênio presente na água contida na amostra de solo em análise. Devido a grande sensibilidade da NMR a muitos núcleos de

momento angular não zero do *spin*, um indesejável ruído acompanha a detecção do Hidrogênio. Partículas ferro-magnéticas são causas de outras anomalias inerentes ao processo. NMR é usada principalmente para a detecção de poros preferenciais, suas continuidades e para medidas da velocidade dos fluxos através dos poros. A resolução do NMR é de décimos de mm.

A forma e a distribuição dos poros nos solos podem também ser quantificadas pela aplicação da Teoria dos Fractais e por métodos quantitativos de Estereometria.

1.2. Tomografia Computadorizada

Os princípios físicos que norteiam a tomografia de transmissão estabelecem que quando um feixe de Raio-X monoenergético de energia E_0 e intensidade N_0 atravessa uma corpo-amostra, o feixe de saída (recebido pelo detector) é dado por:

$$N = N_0 e^{-\mu s}$$

Equação 1.8

para amostras não homogêneas, o feixe de saída é dado aproximadamente por:

$$N = N_0 e^{-\int \mu(s) ds}$$

Equação 1.9

Na Equação 1.9, S representa a coordenada espacial e μ é o coeficiente de atenuação da amostra, no ponto considerado, atravessada pela radiação.

O advento dos computadores incentivou o desenvolvimento de algoritmos de reconstrução [GAARDER-1972] criando a Tomografia Computadorizada (*CT-Computerized Tomography*).

Comparações entre técnicas de reconstrução de imagens

tomográficas por computador foram feitas [DEHNERT-1973] procurando a melhor solução para uma determinada aplicação. Como exemplo de técnica de reconstrução de imagens tomográficas pode-se citar a reconstrução com uso de *Fast Fourier Transform* (FFT)[COOLEY-1965] [SHEPP-1974].

Os estudos destas técnicas levaram ao desenvolvimento de algoritmos computacionais sofisticados que reconstroem uma imagem a partir de projeções tomográficas e também filtram os dados de forma a amenizar artefatos e ruídos provenientes de diversas fontes como do equipamento de aquisição dos dados (tomógrafo) [KALENDER-1988, GLICK-1989, BOULFELFEL-1994].

Atualmente, reconstruir uma imagem a partir de projeções, de forma a inspecionar o interior de um objeto/corpo de forma não destrutiva, tem sido uma prática muito difundida na área da visualização científica.

No estudo de solos a tomografia computadorizada se tornou um novo método de investigação de sua composição físico-química. Estes estudos foram introduzidos por Petrovic [PETROVIC-1982], Hainsworth e Aylmores [HAINSWORTH-1983][AYLMORE-1993] e por Crestana [CRESTANA-1986].

Um tomógrafo de primeira geração com o tubo de Raios-X ou fonte de Raios- γ e o respectivo detector fixo. A amostra em estudo é transladada e girada de forma conveniente para a obtenção das projeções atenuadas de um feixe de radiação em diversas posições.

Além da fonte e do detector de Raios-X ou γ , existem como componentes desse sistema um conjunto de colimadores cilíndricos de vários diâmetros, um sistema eletrônico para detecção e contagem da radiação (cadeia nuclear), uma mesa para o posicionamento e movimentação das amostras e um microcomputador destinado ao controle, aquisição e processamento dos dados provenientes do sistema. A cadeia nuclear consiste em um detector de cristal cintilador (NaI(Tl)),

fotomultiplicadora, fonte de alimentação da fotomultiplicadora de alta tensão, amplificador, analisador multicanal e temporizador/contador. Dois motores de passo compõem a mesa mecânica e são responsáveis pelo posicionamento relativo da amostra em estudo.

Esses motores de passo são utilizados, portanto, para a rotação e translação da mesa sobre a qual está a amostra e são controlados por um microcomputador através de uma interface dedicada. A inicialização e a definição das coordenadas de posição da mesa tomográfica são determinadas por dispositivo optoeletrônico acoplado ao sistema.

O feixe colimado de radiação, ou seja, o feixe com abertura de iluminação radioativa de diâmetro controlado pelo dispositivo colimador, incide e atravessa a amostra posicionada sobre a mesa. Esse feixe é atenuado, novamente colimado e detectado pela cadeia nuclear. Os colimadores determinam a resolução desejada para o processo de tomografia. O conjunto de colimadores do minitomógrafo permite que resoluções espaciais de 1 a 6 mm² por pixel. A Figura 1.4 ilustra esquematicamente os componentes do minitomógrafo.

1.2.1. Seleção da energia

É conveniente o uso de baixa energia de photons para se trabalhar na região fotoelétrica e para se ter um melhor contraste na aplicação com solos porque o coeficiente de atenuação é extremamente sensível a variações pequenas do número atômico. No entanto, algumas vezes isso é impossível dada a correlação entre uma boa imagem e o produto μx . De fato, da Equação 1.8, onde o produto é muito alto, o termo $e^{-\mu x}$ é extremamente pequeno e o desvio padrão é muito alto. Portanto a imagem obtida é de baixa qualidade. Por outro lado, se μx é muito pequeno, então $N \cong N_0$ isto proporciona um contraste baixo.

Figura 1.4: Diagrama de blocos de tomógrafo desenvolvido por [CRUVINEL-1987].

Do ponto de vista teórico, a melhor condição de resolução é obtida quando $\mu x = 2$. Por outro lado sob o ponto de vista com experimentos práticos, a melhor condição é obtida quando $\mu x = 1/6$.

Por exemplo, no caso da água ou de uma amostra biológica de formato cilíndrico de 5 cm de diâmetro tem-se μ variando na faixa de $1/5$ a $6/5$ o que corresponde a coeficientes de atenuação variando na faixa de 0.2 a 1.2 cm^{-1} que correspondem a energias de 17 KeV a 60 KeV. Esta faixa de energias é correspondente à região fotoelétrica. A escolha da energia é, portanto, livre. Mas, depende da amostra no que tange espessura e composição.

1.2.2. Detector de Raios-X

O detector de Raios-X é um instrumento que colhe informações sobre a radiação que incide sobre ele. Ele pode ser caracterizado pelo tipo de radiação que é capaz de detectar e por diversos parâmetros como a resolução de energia, eficiência e resolução de tempo.

1.2.3. Eficiência

Quando N_0 fótons de energia E_0 entram no detector, e N deles interagem com os átomos deste detector e são detectados, a razão N/N_0 define intrinsecamente a sua eficiência. A eficiência em baixas energias (menores que 5 KeV) é limitada pela absorção na entrada da janela do detector e dos materiais (ar) entre a fonte e detector. A eficiência em altas energias é limitada pela espessura do detector sendo proporcional a $1 - e^{-\mu_d x}$ onde μ_d é o coeficiente de atenuação do material do detector na energia incidente e X_d a espessura do detector.

1.2.4. Resolução em energia

Um dos mais importantes parâmetros de um detector é sua capacidade de distinguir fótons de energias próximas. Este parâmetro é chamado de resolução em energia e é normalmente expresso como a largura de um pico (ΔE) a meia altura. Este valor está fundamentalmente conectado à qualidade das imagens obtidas.

1.2.5. Resolução de tempo

Um parâmetro extremamente importante de um detector, especialmente para tomografia, é o intervalo de tempo entre o momento que um fóton entra no corpo do detector, e a entrada de outro fóton sem que haja interferência entre eles. A resolução de tempo determina a máxima taxa de contagem aceitável de uma fonte de radiação.

1.2.6. A formação de imagens a partir de projeções e os principais problemas relativos à reconstrução

Sintetizando, denomina-se Tomografia a ação de iluminar um objeto em várias direções e armazenar os dados. Cada dado armazenado é na realidade uma média de alguns parâmetros inerentes do caminho de propagação do raio de iluminação.

As projeções podem ser provenientes de diversas fontes como, por exemplo, do tradicional Raio-X, dos Raios- γ , da ressonância magnética e do

ultra-som. Com os Raios-X, por exemplo, um corpo é iluminado pelos raios que se propagam em linhas retas. Com base na intensidade emitida pela fonte de Raios-X e na intensidade captada por um detector na outra extremidade da reta de propagação, pode-se determinar o peso da atenuação devido ao objeto que se faz presente entre a fonte e o detector. Este peso da atenuação é um dado crucial para o processo de reconstrução, o qual possibilita deter um mapa de coeficientes de atenuação linear da secção transversal do objeto.

Esse mapa de coeficientes é representado através de pixels (ou de voxels) cujos valores são dados pelos chamados números CT (Computerized Tomography - Tomografia Computadorizada). Esses números são normalizados em função do coeficiente de atenuação da água μ_{H_2O} . Em outras palavras define-se os números CT por:

$$NumerosCT = \frac{\mu - \mu_{H_2O}}{\mu_{H_2O}} \times 1000$$

Equação 1.10

onde μ é o coeficiente de atenuação nos pixels da imagem do corpo analisado.

Com esse número é possível a obtenção de um mapa de coeficientes de atenuação, o que permite uma análise mais detalhada do corpo em estudo. Em Medicina convencionou-se que, para o número CT igual a 0 (zero), a área estudada pelo processo de tomografia é formada por água. Se positivo, o corpo possui elementos com coeficiente de atenuação mais altos que o da água. Se negativo, mais baixos.

No auxílio ao diagnóstico médico, assim como no estudo de solos, destaca-se a tomografia computadorizada. Na CT, os dados da tomografia são armazenados e processados em computadores que, através de algoritmos apropriados para a reconstrução [GORDON-1974, LEWITT-1983], fornecem a imagem da secção transversal do objeto.

Esses algoritmos, do ponto de vista matemático e computacional, determinam como reconstituir um objeto $f(x,y)$ a partir dos dados armazenados de suas projeções em diversas direções, conforme ilustra a Figura 1.5. [CROWTHER-1970] [CORMAK-1973] [HOUNSFIELD-1973] [BUDINGER-1974] [CHO-1974] [CHO-1975]

Como exemplo de modalidades de obtenção de imagens médicas através de emissão radioativa pode-se citar a *Positron Emission Tomography* (PET), a *Single Photon Emission Tomography* (SPECT) e a *X-Ray Computerized Tomography*. Essas modalidades utilizam princípios físicos para a extração da informações in vivo que são substancialmente diferentes do ponto de vista operacional. Todas as três modalidades, no entanto, são baseadas em métodos por integrações lineares o que possibilita que através de uma operação inversa, se obtenha a reconstrução das imagens.

Figura 1.5: Exemplo de tomografia por transmissão.

Para a discussão sobre reconstrução são necessárias as definições de alguns termos e a compreensão de alguns conceitos gerais sobre tomografia. O objetivo do processo de reconstrução de imagens tomográficas é, a partir de um objeto tridimensional $f(x,y,z)$, a obtenção de uma fatia representada por $f(x,y,0)$ de forma não destrutiva ou não invasiva, ou seja, a partir da reconstrução de suas projeções. Os dados necessários

para a reconstrução de $f(x,y,0)$ são na realidade um conjunto de integrais ao longo dos raios que atravessam o objeto. A Figura 1.6 apresenta esquematicamente os raios pelos segmentos de reta.

Figura 1.6: Esquema de um tomógrafo por Raios-X.

Representado pela linha AB na Figura 1.6, encontra-se o raio que parte de uma fonte A e é detectado em B. A função de integração do objeto ao longo do raio é uma integral de linha. Cada integral de linha dos raios paralelos à $\overline{AB}$ forma uma projeção paralela. Na Figura 1.6 a fonte e o detector juntos são movidos seguindo as linhas L e L', respectivamente, para montar uma projeção paralela. As linhas L e L' formam um ângulo θ como o eixo x.

Figura 1.7 : Duas projeções paralelas de um objeto matematicamente expresso por $f(x,y)$.

Usa-se assim a notação $P_\theta(t)$ para representar a projeção naquele ângulo. A posição do detector sobre a linha L é representada pela variável t . Na Figura 1.7 são mostradas algumas projeções paralelas formadas em diferentes ângulos. Com a repetição das projeções em θ para $0 < \theta < \pi$ obtém-se a transformada de Radon do objeto. A transformada inversa de Radon fornece a imagem reconstruída do objeto [RADON-1917, KAK-1986].

Se uma fonte de Raios-X é usada, a integral na linha $\overline{AB}$ é equivalente à integral de linha que possibilita obter o coeficiente de atenuação do objeto. Portanto o algoritmo de reconstrução que usa projeções obtidas por Raios-X reconstrói a função de atenuação do objeto. No caso de ultra-som, a imagem representa tecidos que rebatem as ondas de ultra-som. O tempo de um pulso de ultra-som da fonte até o detector é armazenado na integral de linha. O tempo de propagação através do tecido está diretamente relacionado com a integral de linha do índice de refração do objeto. Quando um algoritmo de reconstrução é aplicado nas projeções por ultra-som, o resultado é uma imagem baseada no índice de refração dos tecidos do objeto. Na Figura 1.8 tem-se esquematizado o procedimento para a obtenção da transformada de Radon [KAK-1986].

Figura 1.8: Projeção paralela de $f(x,y)$ para a transformada de Radon.

O raio AB na Figura 1.8 no plano $z=0$ pode ser expresso matematicamente por

$$t_1 = x \cos \theta + y \sin \theta$$

Equação 1.11

onde t_1 é a distância perpendicular da origem até a linha. Com o uso desta equação do raio, a integral do raio é dada por:

$$P_{\theta}(t_1) = \int_{\text{raio } AB} f(x, y, 0) dx dy = \int_{-y_m - x_m}^{y_m x_m} f(x, y, 0) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t_1) dx dy$$

Equação 1.12

Girando-se o eixo das coordenadas x sobre o eixo z por um ângulo θ , o eixo t é formado e a projeção pode ser escrita por

$$P_{\theta}(t_1) = \int_{-s_m}^{s_m} f(t_1, s, 0) ds$$

Equação 1.13

onde $t = x \cos \theta + y \sin \theta$ e $s = -x \sin \theta + y \cos \theta$.

Com $P_{\theta_i}(t)$ sendo uma função de t representando a projeção paralela com ângulo θ_i . Para θ contínuo, a função $P_{\theta}(t)$ é a transformada de Radon de $f(x, y, 0)$. As projeções dadas foram obtidas paralelamente à rotação no eixo x e nomeadas por t . A Figura 1.9 ilustra os novos eixos de coordenadas.

Figura 1.9 : Novos eixos de coordenadas (t, s, z) gerados pela rotação de (x, y, z) sobre o eixo z por um ângulo θ .

No caso tridimensional um raio pode ser descrito pela intersecção de dois planos, ou seja, uma vez que $t_1 = x \cos \theta + y \sin \theta$, nas coordenadas (t, s', r) tem-se

$$r_1 = -(-x \sin \theta + y \cos \theta) \sin \gamma + z \cos \gamma$$

Equação 1.14

Este novo sistema de coordenadas é obtido por duas rotações dos eixos (x, y, z) . A primeira rotação a mesma do caso bidimensional, com o ângulo θ com o eixo z , resultando no eixo (t, s, z) mostrado na Figura 1.9. A segunda rotação é do ângulo γ com o novo eixo t , resultando em (t, s', r) . Estas equações podem ser representadas com uso da notação matricial, na forma:

$$\begin{bmatrix} t \\ s' \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Equação 1.15

Uma projeção paralela tridimensional pode ser representada por

$$P_{\theta, \gamma}(t_1, r_1) = \int_{-s_m}^{s_m} f(t_1, s', r_1) ds'$$

Equação 1.16

A projeção resultante é agora bidimensional e é obtida pela integração das linhas paralelas no eixo s' . Assim a integral de linha pode ser matematicamente expressa na forma apresentada.

1.2.7. Algoritmos para reconstrução bi e tridimensional

O Teorema de Fourier para a secção tomográfica é a base das técnicas de reconstrução para a maioria dos algoritmos de reconstrução [TELLO-1986]. A Transformada de Fourier de uma projeção paralela de uma imagem $g(x, y)$ tomada de um ângulo θ é equivalente para a fatia de uma transformada

bidimensional de $g(x,y)$, $G(\omega_1, \omega_2)$, subtendendo-se um ângulo θ com o eixo. Em outras palavras, a Transformada de Fourier de $P_\theta(t)$ fornecem os valores de $G(\omega_1, \omega_2)$ sobre a linha BB mostrada na Figura 1.10.

Figura 1.10 : Correspondência entre espaço real e espaço recíproco como base para o Teorema das secções de Fourier.

Neste teorema a Transformada de Fourier unidimensional da função $g(x,y)$ é matematicamente relacionada com sua Transformada de Fourier bidimensional.

O teorema diz que se diferentes projeções são armazenadas em diferentes posições ao redor do objeto, o objeto da Transformada de Fourier pode ser gerado. Se todas as projeções forem obtidas o objeto pode ser reconstruído diretamente pela inversão de Fourier. Na realidade a reconstrução não é feita desta maneira e sim algoritmos de retroprojeções filtradas são usados para a reconstrução por causa de suas grandes precisões e facilidade de implementação. O Teorema de Fourier para a secção tomográfica pode ser provado de forma que dado $G(\omega_1, \omega_2)$ como sendo a Transformada de Fourier da imagem $g(x,y)$, podendo ser

implementada por

$$G(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy$$

Equação 1.17

e sua inversa por:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega_1, \omega_2) e^{j2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2$$

Equação 1.18

Em seguida, considera-se os valores de $G(\omega_1, \omega_2)$ sobre a linha $\omega_2 = 0$ no plano (ω_1, ω_2) . Da Equação 1.17, $G(\omega_1, 0)$ é expresso como:

$$\begin{aligned} G(\omega_1, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j\omega_1 x} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dy \right] e^{-j\omega_1 x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(t) e^{-j\omega_1 t} dt = S_0(\omega_1) \end{aligned}$$

Equação 1.19

A Equação 1.18 é resultante de $P_\theta(t) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dy \right)$, com $\theta = 0$ e $t=x$.

Pode-se observar que $S_\theta(\omega)$ é a transformada de Fourier da projeção $P_\theta(t)$. O resultado $G(\omega_1, 0) = S_0(\omega_1)$ implica que a transformada de Fourier da projeção calculada perpendicular ao eixo y , $S_0(\omega_1)$, é igual a transformada de Fourier do objeto sobre o eixo ω_1 . O resultado pode ser expandido para obter um resultado similar para θ diferente de zero. Para tanto, gira-se os eixos de coordenadas (x, y) por um ângulo θ para formar o eixo t e s .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix}$$

Equação 1.20

Assim, a partir da Equação 1.18 em termos de t e s , onde $g(t,s)$ representa a função do objeto no sistema de coordenadas alterado, chegando-se a:

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t,s) ds e^{-j\omega t} dt$$

Equação 1.21

Transcrevendo para as coordenadas (x,y)

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) ds e^{-j(xw \cos \theta + yw \sin \theta)} dx dy = G(w \cos \theta, w \sin \theta)$$

Equação 1.22

Com o uso conveniente de coordenadas polares (ω, θ) pode-se obter $G(\omega, \theta)$ de forma que:

$$G(\omega, \theta) = S_{\theta}(w)$$

Equação 1.23

A Transformada de Fourier da projeção $P_{\theta}(t)$ corresponde no domínio da frequência os valores de $G(\omega_1, \omega_2)$ sobre a linha BB (eixo u).

1.2.8. Retroprojeção filtrada

O algoritmo para reconstrução por retroprojeção filtrada é um dos algoritmos mais utilizado em aplicações que usam fontes não difrativas. Alguns fatores contribuíram para a ampla divulgação deste algoritmo: sua precisão, sua rapidez e sua facilidade de implementação. [BUENO-1996][CAÇÃO-1994]

O algoritmo descrito a seguir é na realidade uma derivação do teorema das secções de Fourier. Este algoritmo tem uma implementação diferente do que o teorema básico sugere. Para iniciar a derivação se faz necessário o uso de coordenadas polares (ω, θ) no plano (ω_1, ω_2) com mostrado na Equação 1.24 :

$$\begin{aligned}
g(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty G(\omega, \theta) e^{j\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^\infty G(\omega, \theta) e^{j\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta + \int_0^\pi \int_0^\infty G(\omega, \theta + 180^\circ) \times e^{j\omega(x \cos(\theta + 180^\circ) + y \sin(\theta + 180^\circ))} \omega d\omega d\theta
\end{aligned}$$

Equação 1.24

Usando-se $G(\omega, \theta + 180^\circ) = G(-\omega, \theta)$ e $t = x \cos \theta + y \sin \theta$ na Equação 1.24 pode-se escrever $g(x, y)$ com a ajuda do teorema de secções de Fourier e a expressão para t em termos de x e y , ou seja:

$$g(x, y) = \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^\infty G(\omega, \theta) |\omega| e^{j\omega t} d\omega \right] d\theta = \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^\infty S(\omega) |\omega| e^{j\omega t} d\omega \right] d\theta$$

Equação 1.25

Para construir (Equação 1.25) em sua forma filtrada retroprojetada é necessário separar a equação em duas operações diferentes. A primeira é a filtragem dos dados de projeção para cada ângulo θ , como se segue:

$$Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^\infty S_\theta(\omega) |\omega| e^{j\omega t} d\omega$$

Equação 1.26

Depois as “projeções filtradas” são retroprojetadas para se obter a função objeto

$$g(x, y) = \int_0^\pi Q_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta$$

Equação 1.27

A filtragem descrita em (Equação 1.26) seria fisicamente impossível se não fosse pelo fato que as projeções serem praticamente limitadas em banda para a máxima frequência de W radianos/segundo. Dada a propriedade do teorema de Nyquist, o valor de W será utilizado como frequência de amostragem ω_s como

$$2W \leq \omega_s = 2\pi / \tau$$

Equação 1.28

Se os dados de projeção descritos na Equação 1.29 são amostrados com um intervalo de amostragem τ , os dados amostrados não sofreriam por erros de *aliasing*. Por fazer a limitação por banda, a Equação 1.29 pode ser expressa como o uso de funções de transferências de filtros, $H(\omega)$, como se segue:

$$H(\omega) = \begin{cases} |\omega|, & |\omega| < W \\ 0, & \text{outros} \end{cases}$$

Equação 1.29

A substituição de $H(\omega)$ na Equação 1.29 fornece

$$Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\theta(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Equação 1.30

O impulso resposta do filtro, $h(t)$, é obtido pela transformada inversa de Fourier $H(\omega)$ como descrito a seguir com o uso da Equação 1.28:

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\tau^2} \left[\frac{\text{sen}(2\pi t / 2\tau)}{2\pi t / 2\tau} \right] - \frac{1}{4\tau^2} \left[\frac{\text{sen}(\pi t / 2\tau)}{\pi t / 2\tau} \right]^2 \end{aligned}$$

Equação 1.31

Versão amostrada do impulso resposta, o qual se conhece por filtragem digital de dados amostrados de projeções, é dado por:

$$h(n\tau) = \begin{cases} 1/4\tau^2, & n = 0 \\ 0, & n = \text{par} \\ -1/n^2\pi^2\tau^2, & n = \text{impar} \end{cases}$$

Equação 1.32

Por uso do teorema da convolução, a Equação 1.30 pode ser escrita como:

$$Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(\zeta) h(t - \zeta) d\zeta$$

Equação 1.33

que é implementado na forma discreta por

$$Q_{\theta}(n\tau) = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n\tau - k\tau) P_{\theta}(k\tau)$$

Equação 1.34

Na atual implementação cada projeção é finita, dando uma versão truncada da Equação 1.34 como sendo

$$Q_{\theta}(n\tau) = \tau \sum_{k=0}^{N-1} h(n\tau - k\tau) P_{\theta}(k\tau), \quad n=0,1,2,\dots,N-1$$

Equação 1.35

onde $P_{\theta}(k\tau) = 0$ para $k < 0$ e $k > N-1$. Esta filtragem dos dados de projeção pode ser conseguida pela convolução discreta no domínio espacial ou como uma multiplicação no domínio da frequência. Nesta discussão usar-se-á o método no domínio da frequência, o qual é mais rápido que a convolução no domínio espacial devido ao uso de algoritmos para FFT. O próximo problema encontrado é na natureza periódica do filtro implementado no domínio da frequência. Pode-se observar que a convolução no espaço na Equação 1.34 é aperiódico. A implementação no domínio da frequência sofreria interferências devido a intersecções entre períodos. Para eliminar este problema associado ao uso de algoritmo FFT para computar a convolução, as seqüências de dados $P_{\theta}(n\tau)$ e $h(n\tau)$ são completados com zeros (ZP) antes de serem transformados pela transformada de Fourier. Se um elemento de projeção n é completado com zeros para torná-lo com $2N-1$ elementos, ele pode ser mostrado sem interferências por interperíodos. Normalmente o preenchimento com zeros é necessário para deixar seqüências de dados por potência de 2 se algoritmos de FFT por potência de 2 são usados.

A implementação no domínio da frequência, sob forma de equação, pode ser expressa como:

$$Q_{\theta}(n\tau) = \tau \times IFFT\{FFT[P_{\theta}(n\tau)comZP] \times FFT[h(n\tau)comZP]\}$$

Equação 1.36

onde FFT e IFFT são as Transformadas Rápidas de Fourier e sua inversa, respectivamente, e ZP é o preenchimento por zero, o que adicionalmente à multiplicidade de 2 também suaviza o efeito *aliasing*

O passo seguinte no algoritmo de reconstrução é a retroprojeção das projeções filtradas que tem sua aproximação discretizada por:

$$\hat{g}(x,y) = \frac{\pi}{K} \sum_{i=1}^K Q_{\theta_i}(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i)$$

Equação 1.37

onde K ângulos θ_i são os valores discretos de θ para cada $P_{\theta}(t)$ conhecido.

Cada ponto (x,y) no processo de retroprojeção e que estejam sobre plano de reconstrução na linha t possui o valor $Q_{\theta_i}(t)$. A adição de cada valor de $Q_{\theta_i}(t)$ no ponto (x,y) com i variando de 1 até K constitui o valor do ponto em uma escala de π/K . O valor de $Q_{\theta_i}(t)$ é uma constante sobre a linha LM e cada ponto no plano de reconstrução que tem o valor de $Q_{\theta_i}(t)$ é a ele adicionado. Em outras palavras, a imagem da reconstrução é gerada pela soma de todos os valores t de $Q_{\theta_i}(t)$, para cada valor θ_i , projetados e multiplicados por π/K . Quando o valor de t calculado não corresponde a algum dos valores de t na função discretizada $Q_{\theta_i}(t)$, há a necessidade de interpolação. Uma interpolação linear é suficiente em muitos casos.

A obtenção de imagens tomográficas com qualidade está diretamente relacionada com o bom conhecimento das características dos equipamentos de aquisição, ou seja, do tomógrafo e de seus princípios de funcionamento.

Antes de iniciado o processo de aquisição das projeções, fatores de ajuste são determinados para uma melhor obtenção dos dados. Esses fatores variam de equipamento para equipamento e do tipo de corpo estudado e suas características físicas. Por exemplo, em uma seleção de fatores de ajuste que possibilite a obtenção do máximo de detalhes

possíveis geralmente reduz a visibilidade de diferenças sutis em tecidos “moles”.

A qualidade da imagem na aquisição depende também o perfeito balanço entre fatores como a exposição do paciente, o aquecimento do tubo de Raios-X e do tempo de aquisição.

Em comparação com outras técnicas como a da radiografia por Raios-X a tomografia computadorizada geralmente possui maior contraste e maior sensibilidade. Entretanto, produz mais ruídos e artefatos. Na tomografia computadorizada cada atributo anatômico do corpo em estudos é mostrado diretamente e não é superposto sobre outros objetos. Isso permite que seja melhorado o contraste de áreas de interesse sem a interferência de estruturas com alto coeficiente de atenuação.

Escalas equalizadas podem ser implementadas de forma a trabalhar o contraste, permitindo a melhor visualização de tecidos/corpos mais homogêneos, ou seja, com menor variação de contraste. [PRATT-1991]

Outro fator presente no processo de aquisição tomográfica é a presença de fatores de borramento. Esses fatores pode ser originados de diversas formas como:

- largura do raio de amostragem;
- intervalo dos raios de amostragem;
- o tamanho dos pixels e dos voxels;
- filtros de suavização usados na reconstrução.

A largura do raio de amostragem é um dos mais significantes fatores que originam o borramento em uma imagem tomográfica e que limita a boa visualização de detalhes na mesma. A largura do raio é tecnicamente conhecida como abertura de amostragem - *sampling aperture*. Todos os detalhes menores que a largura do raio são borrados no seu processo de medida. A abertura do detector é um dos dois fatores que influenciam na

largura do raio. Um detector de pequena abertura produz um raio estreito com conseqüente baixo nível de borramento e melhores detalhes. Essa abertura do detector é ajustada com o uso de colimadores.

Outro fator que influencia na largura do raio é a fonte de Raios-X. Dois fatores associados com a fonte influenciam a largura do raio: (1) o tamanho do feixe e (2) o movimento durante o intervalo de cada medida. Uma relação ótima para uma adequada aquisição de imagens é quando a abertura do detector é igual a abertura do feixe.

O intervalo de amostragem, ou seja, a distância entre raios adjacentes, influencia na obtenção de detalhes. Se muito distantes, os detalhes entre um raio e outro são perdidos e ocorre efeito de aliasing na imagem reconstruída.

O tamanho dos pixels e voxels influencia na resolução da imagem resultante da reconstrução. Quanto maior for o número de pixels (voxels), no entanto, pode ocorrer também o aparecimento de ruídos. O uso de filtros de suavização na tentativa de redução de ruídos pode gerar também efeitos de borramento com substancial redução na visibilidade de detalhes. Esses ruídos são gerados de diversas fontes.

Pode-se resumir, ou classificar, os ruídos de um sistema de tomografia em quatro partes:

- Ruído quântico - Esse ruído se dá pela natureza estatística de emissão e de recepção de fótons;
- Ruído do detector - ruídos causados pela flutuação da temperatura e de interferências externas;
- Ruídos Pós-detector - também causados pelos motivos do ruído do detector;
- Ruídos de reconstrução - diretamente relacionados com o método de reconstrução envolvido.

Na tomografia computadorizada existe também o problema da ocorrência de artefatos presentes na imagem da reconstrução. Como exemplo pode-se citar os seguintes artefatos e sua prováveis fontes:

- Riscos, traços, listras - causados pela movimentação do corpo, por objetos com grandes coeficientes de atenuação, pelo aliasing;
- Efeito “taça” - feixe desregulado;
- Anéis - detector desbalanceado;
- Falta de centralização - movimentos do corpo durante a aquisição;
- Efeito de volume parcial - movimentos do corpo durante a aquisição.

Os problemas inerentes à aquisição são, em sua maioria, tratados com o uso maciço da combinação de técnicas do processamento de imagens e sinais como:

- Filtragem - redução de ruídos;
- Restauração - recuperação de dados deslocados e/ou distorcidos;
- Equalização de histogramas - melhoramento do contraste;
- Interpolação - estimação de dados a partir dos dados existentes;
- Técnicas de anti-aliasing - usados para minimizar efeito “escada”.

2. Fundamentos matemáticos e o processamento de imagens digitais

Neste capítulo são abordados os fundamentos matemáticos utilizados no desenvolvimento do trabalho. Nele são também apresentados os conceitos e fundamentos do Processamento Digital de Imagens.

2.1. Conceitos adotados

Antes da apresentação do modelo computacional proposto, considerou-se importante apresentar os conceitos básicos adotados de escala, resolução e Wavelets.

2.1.1. Conceito de Escala

Escala é a relação de dimensões entre a imagem e objeto representado nessa imagem. Em imagens digitais pode-se dizer que é o tamanho do pixel exibido.

2.1.2. Conceito de Resolução

Resolução é o grau de detalhamento na representação de um objeto em uma imagem discretizada, ou seja, é o número de pixels usados para representar um objeto na imagem.

2.2. Processamento de Imagens Digitais

O processamento digital de imagens está embasado no estudo e uso de ferramentas matemáticas que aplicadas em seqüências lógicas permitem que imagens tenham suas características originais trabalhadas de forma geral. O escopo de técnicas de processamento digital de imagens é extremamente rico do ponto de bibliográfico e de aplicações. [BURGER-1989][GONZALEZ-1987][PRATT-1991] Desta forma, a seguir são mostradas, de forma objetiva, apenas as técnicas usadas no contexto deste trabalho.

Uma imagem digital pode ser descrita como uma função bidimensional $f(x,y)$, onde x e y representam as coordenadas espaciais horizontais e verticais respectivamente e o valor de f para algum ponto (x,y) é um valor de uma escala de níveis de intensidade luminosa.

Matematicamente uma imagem pode ser representada por uma matriz de duas dimensões onde cada elemento da matriz contém o valor de uma escala que representa o nível de intensidade naquele ponto.

Cada elemento desta matriz-imagem é comumente denominado como *pixel*, mas pode ser chamado também como *image element*, *picture element* ou *pel*. O Processamento de imagens pode ser segmentado em alguns passos fundamentais, ou seja:

- 1 – Aquisição da imagem;
- 2 – Processamento;
- 3 – Representação;
- 4 – Armazenamento;

Na etapa de aquisição das imagens, é feita a captura e a discretização das imagens. A forma de captura pode variar significativamente, por exemplo, pode-se usar uma câmera de vídeo que transmite um sinal analógico de uma determinada cena que é discretizado por um conversor analógico/digital. Outro método muito difundido é o uso de Scanners que consistem em matrizes foto-sensíveis que percorrem uma superfície reproduzindo-a digitalmente. Como se percebe a aquisição se resume em, com o uso de algum tipo de sensor, representar diferenças de intensidades que compõem uma imagem. Estes sensores podem ser sensíveis a luz visível, sensíveis a Raios-X, raios gama, infravermelho, ultrassom, campos magnéticos, calor, entre outros.

Neste trabalho o processo de aquisição dos dados obtidos por tomografia de Raios-X.

Na etapa de processamento é feito o controle de como as imagens serão armazenadas e/ou exibidas, além da aplicação e das combinações de técnicas do Processamento Digital de Imagens. Nessa etapa são aplicadas transformações sobre os dados capturados na etapa anterior que trabalham e até mesmo formam as imagens. Um exemplo de transformação é o de

reconstrução de imagens bi e tridimensionais os quais são discutidos nesse trabalho. Outro exemplo de processamento é na suavização (“*smoothing*”) das imagens digitais. Esse processo consiste na redução do efeito de “serrilhamento” inerente às imagens representadas na forma discreta. Constitui-se ainda como um desafio no desenvolvimento de técnicas no Processamento de Imagens a adequação de técnicas que viabilizem suavização de bordas. Na literatura da área os principais trabalhos foram apresentados enfocando técnicas, como por exemplo, suavização polinomial, suavização por convolução com filtros uniformes, suavização por Fourier, suavização por Transformadas Wavelets Haar, suavização gaussiana, suavização por médias, por filtro “*Kuwahara*” conforme reportado no trabalho dos autores [STOCKHAM-1972, SERRA-1982, GIARDINA-1988, HEIJMANS-1994, YOUNG-2003].

A representação da imagem é feita através de algum dispositivo de saída como através de monitores de vídeo, impressoras, *plotters*, fotos, entre outros. O armazenamento das imagens é a etapa onde os dados das imagens são transformados em arquivos que podem ser guardados em algum dispositivo de entrada e saída. Essa etapa é importante não apenas por possibilitar com que estas imagens possam estar sempre disponíveis mas também por facilitar etapas de processamento com recursos de gerenciamento de memória do computador utilizando princípios de memória virtual.

Do ponto de vista matemático, uma função bidimensional $f(x,y)$ pode representar uma imagem, lembrando que x e y são as coordenadas da imagem, teoricamente pode conter os valores dados pelo intervalo:

$$0 < f(x,y) < \infty$$

Equação 2.1

Como $f(x,y)$ é uma representação de uma energia, ela deve conter um valor maior que zero e finito.

Uma imagem normalmente captada pelo olho humano possui dois componentes: a intensidade luminosa $i(x, y)$ e o componente de reflectância $r(x, y)$ do objeto de cena. Com isso $f(x, y)$ pode ser descrita como:

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

Equação 2.2

O componente de intensidade deve estar em um intervalo de forma a ser maior que zero e menor que finito, e o componente de reflectância dever estar entre o intervalo (0,1). Quanto menor $r(x, y)$ diz-se que há maior absorção de luz e quanto maior, maior reflectância. Na prática estes valores nunca são alcançados na forma analógica.

2.2.1. Resolução Espacial de Amostragem

De forma a se definir Resolução Espacial de Amostragem, são apresentados os fundamentos matemáticos de seqüências bidimensionais [OPPENHEIM-1975] seguidos de abordagem do ponto de vista do Processamento Digital de Imagens [PRATT-1991, GONZALEZ-1987].

2.2.1.1. Resolução Espacial de Amostragem como seqüências bidimensionais

Uma seqüência bidimensional é uma função de duas variáveis inteiras e pode assumir a forma representada pela Figura 2.1. Como no caso unidimensional, a seqüência bidimensional define seqüências de amostragens impulso unitárias, de passos unitários, de exponenciais, e de senoidais. Uma seqüência bidimensional de amostragem $\delta(m, n)$ pode ser definida como:

$$\delta(m, n) = \begin{cases} 0, & m, n \neq 0 \\ 1, & m = n = 0 \end{cases}$$

Figura 2.1: Representação gráfica de uma seqüência bidimensional.

A seqüência bidimensional de passos unitários $u(m,n)$ é unitária no primeiro quadrante do plano (m,n) e zero nos outros, ou seja:

$$u(m,n) = \begin{cases} 0, & m \geq 0, n \geq 0 \\ 1, & \text{outro} \end{cases}$$

Uma seqüência bidimensional exponencial é da forma $a^m b^n$ e uma seqüência bidimensional senoidal é da forma:

$$A \cos(\omega_0 m + \phi) \cos(\omega_1 n + \theta)$$

Uma seqüência separável é a que pode ser expressa como um produto de seqüências unidimensionais, isto é, $x(m,n)$ é separável se ela pode ser expressa na forma:

$$x(m,n) = x_1(m)x_2(n)$$

As seqüências de amostragem, de passo unitário, exponenciais e senoidais são todas separáveis. Um exemplo de uma seqüência que não é separável é dado a seguir:

$$x(m,n) = \cos(\omega_0 mn)$$

Como no caso unidimensional, uma seqüência bidimensional arbitrária pode ser expressa como uma combinação linear de amostras unitárias deslocadas como:

$$x(m,n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(k,r) \delta(m-k, n-r)$$

Com base nesta equação, um sistema linear bidimensional pode ser descrito em termos de sua resposta às amostras unitárias deslocadas. Especificamente com $y(m, n) = T[x(m, n)]$, onde $T[]$ é a transformação para um sistema linear,

$$y(m, n) = T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(k, r) \delta(m - k, n - r) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(k, r) T[\delta(m - k, n - r)]$$

com $h_{k,r}(m, n)$ denotando um sistema que responde a $\delta(m - k, n - r)$, ou seja,

$$y(m, n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(k, r) h_{k,r}(m, n)$$

Equação 2.3

A linearidade imposta ao sistema $h_{k,r}(m, n)$ dependerá de quatro variáveis, k, r, m e n . No entanto, ela é útil para impor condições adicionais de invariância a deslocamentos. A classe de sistemas bidimensionais invariantes a deslocamentos é caracterizada pela propriedade que se $y(m, n)$ é a resposta de $x(m, n)$, então $y(m - k, n - r)$ é a resposta para $x(m - k, n - r)$. Neste contexto, se $h(m, n)$ é resposta para $\delta(m, n)$, então $h(m - k, n - r)$ é a resposta de $\delta(m - k, n - r)$. No caso, Equação 2.3 torna-se:

$$y(m, n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(k, r) h(m - k, n - r)$$

Equação 2.4

A Equação 2.4 é a convolução de um sistema bidimensional linear não variante a deslocamento. Pela substituição das variáveis na Equação 2.4, obtém-se a expressão alternativa:

$$y(m, n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(k, r) x(m - k, n - r)$$

Equação 2.5

Portanto, como no caso unidimensional, a operação de convolução de

duas seqüências é comutativo, ou melhor, a ordem que a convolução ocorre não é importante. Isso implica, dentre outras coisas, que a resposta de uma amostra unitária de uma combinação em cascata de sistemas lineares invariantes a deslocamentos independe da ordem que são calculadas.

Um sistema linear bidimensional invariante a deslocamentos é considerado estável se e somente se:

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} |h(k, r)| < \infty$$

Equação 2.6

Um sistema é dito como sendo causal se quando duas entradas $x_1(m, n)$ e $x_2(m, n)$ são iguais para $(m < m_1, n < n_1)$ então as saídas correspondentes $y_1(m, n)$ e $y_2(m, n)$ são iguais para $(m < m_1, n < n_1)$. Para um sistema linear invariante a deslocamentos, a causalidade implica que a resposta unitária de amostragem é zero para $(m < 0, n < 0)$. Por outro lado, se a resposta unitária de amostragem for zero para $(m < 0, n < 0)$, então o sistema é causal. Uma importante subclasse de um sistema bidimensional invariante a deslocamentos ocorre quando as suas entradas e saídas satisfazem uma equação da forma:

$$\sum_{k=0}^{M_1} \sum_{r=0}^{N_1} a_{kr} y(m-k, n-r) = \sum_{k=0}^{M_2} \sum_{r=0}^{N_2} b_{kr} x(m-k, n-r)$$

Equação 2.7

onde, por linearidade, impõe-se que se $x(m, n) = 0$ para todo m e n então $y(m, n) = 0$ também para todo m e n . A Equação 2.7 pode representar um sistema causal ou não causal. Se se assumir que seja um sistema causal, a equação E pode ser expressa como uma relação de recursão, ou seja:

$$y(m, n) = \frac{1}{a_{00}} \left\{ \sum_{k=0}^{M_2} \sum_{r=0}^{N_2} b_{kr} x(m-k, n-r) - \sum_{k=0}^{M_1} \sum_{r=0 \text{ (} k, r \neq 0 \text{ simult.)}}^{N_1} a_{kr} y(m-k, n-r) \right\}$$

Equação 2.8

Por exemplo, se $x(m, n) = 0$ para $(m < 0, n < 0)$, então, como

resultado da causalidade, $y(m, n) = 0$ para $(m < 0, n < 0)$. Isto gera um conjunto de condições iniciais para uso da Equação 2.8.

Para sistemas bidimensionais invariantes a deslocamentos, a resposta de um exponencial complexo da forma $e^{j\omega_1 m} e^{j\omega_2 n}$ é um exponencial complexo das mesmas freqüências complexas. Especificamente, com

$$x(m, n) = e^{j\omega_1 m} e^{j\omega_2 n}$$

então da convolução,

$$y(m, n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(k, r) e^{j\omega_1 m} e^{j\omega_2 n} e^{-j\omega_1 k} e^{-j\omega_2 r} = H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) e^{j\omega_1 m} e^{j\omega_2 n}$$

onde

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(k, r) e^{-j\omega_1 k} e^{-j\omega_2 r}$$

Equação 2.9

A $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ é uma freqüência de resposta de um sistema bidimensional. Ela é uma função contínua de ω_1 e ω_2 e é uma função periódica de cada uma das variáveis no período 2π . Pode-se mostrar que se $h(m, n)$ é separável, então $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ também é separável e pode ser expressa pela forma:

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = H_1(e^{j\omega_1}) H_2(e^{j\omega_2})$$

A seqüência $h(m, n)$ pode ser gerada da resposta de freqüência da relação:

$$h(m, n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) e^{j\omega_1 m} e^{j\omega_2 n} d\omega_1 d\omega_2$$

Equação 2.10

Mais genericamente, pode-se definir a transformada de Fourier bidimensional de uma seqüência $x(m, n)$ como

$$X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m, n) e^{-j\omega_1 m} e^{-j\omega_2 n}$$

Equação 2.11

com sua inversa dada por

$$x(m, n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) e^{j\omega_1 m} e^{j\omega_2 n} d\omega_1 d\omega_2$$

Equação 2.12

Pela aplicação da transformada da Equação 2.11 na convolução, segue que a transformada de Fourier da entrada e da saída de um sistema bidimensional invariante ao deslocamento é relacionado por:

$$Y(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = H_1(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$$

Equação 2.13

2.2.1.2. No contexto do Processamento Digital de Imagens

Pode-se definir Resolução Espacial como sendo o número de sub-divisões (elementos) verticais e horizontais que uma imagem digital possui. Matematicamente, pode-se representar como sendo o número de linhas ou de colunas de uma matriz-imagem. A Resolução Espacial esta diretamente relacionada com a qualidade da representação de uma imagem. Quanto maior a Resolução Espacial melhor a representação de detalhes de uma cena. Em outras palavras, dada a função bidimensional $F(x, y)$ representando a luminância, intensidade fotométrica ou outro parâmetro relevante de uma imagem física, a imagem amostrada é dada por:

$$f(x, y) = F(x, y) \delta(x, y)$$

Equação 2.14

onde $\delta(x, y)$ é a função de amostragem espacial impulso unitária.

A condição que deve ser respeitada para amostrar adequadamente uma imagem é dada pela extensão da amostragem unidimensional. Essa condição segue o teorema de Nyquist que estabelece que a frequência de amostragem deva ser, no mínimo, igual a duas vezes o componente de maior frequência encontrado no sinal.

A escolha adequada dessa frequência de amostragem possibilita que efeitos como o *aliasing* sejam minimizados. Esse *aliasing* causa o efeito de serrilhamento em curvas contidas em uma imagem. Quanto maior a frequência de amostragem, menor será o efeito de *aliasing*.

Na Figura 2.2 representa-se como a variação da Resolução Espacial influencia na representação de uma imagem.

Figura 2.2 : (a) imagem com 240 colunas por 180 linhas; (b) 120x90; (c) 60x45; (d) 40x30.

2.2.2. Limiarização (*Threshold*)

Muito usada em segmentação de imagens, a limiarização – *threshold* – consiste em alterar o valor dos pixels em função de um valor limiar. A técnica consiste na aplicação da seguinte equação:

$$f(j,k) = \begin{cases} 1 & \text{para } f(j,k) \geq \text{Limiar} \\ 0 & \text{para } f(j,k) < \text{Limiar} \end{cases}$$

Equação 2.15

2.2.3. Regiões de interesse

Os chamados ROIs (*Regions Of Interest*) são, na prática, sub-imagens de uma imagem original. O uso de ROIs é aplicável em otimizações computacionais tanto do ponto de vista da alocação de memória quanto do uso do processador.

2.2.4. Cópia de imagens

Uma imagem é copiada para outra imagem quando para cada pixel da imagem cópia é atribuído o valor do pixel correspondente da imagem original. Ou seja:

$$f^{cópia}(j,k) = f(j,k)$$

Equação 2.16

2.2.5. Rotulação

A rotulação é semelhante ao processo de limiarização (threshold) no entanto cada conjunto de pixel de um determinado valor é atribuído um valor único (rótulo). Esse processamento é usado quando se deseja agrupar valores de pixels em um índice.

$$f(j,k) = \begin{cases} 0 & 0 \leq f(j,k) < cor1 \\ 1 & cor1 \leq f(j,k) < cor2 \\ 2 & cor2 \leq f(j,k) < cor3 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Equação 2.17

2.2.6. Convolução no domínio espacial

O processo de convolução consiste na aplicação da seguinte equação sobre as imagens digitais a serem convoluídas. Dadas as imagens $f(x,y)$ e $g(x,y)$, a convolução é dada por:

$$f(x, y) \circ g(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) g(x + m, y + n)$$

Equação 2.18

2.2.7. Detecção de bordas

A detecção de bordas realça desníveis bruscos de intensidade dos pixels. O processamento é dado pela convolução da imagem com, por exemplo, um filtro Laplaciano.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Equação 2.19

Ou:

$$H = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Equação 2.20

2.2.8. Transformações escalares

O processo de transformação de escala de uma imagem consiste em redimensionar – alterar número de linhas e colunas – aumentando ou diminuindo a grade de amostragem.

2.2.9. Imagem Vetorial x Imagem Raster

Uma imagem é sempre representada como definido na Equação 2.14. No entanto a forma como ela é armazenada em memória ou trabalhada computacionalmente pode variar. Duas dessas variações são definidas como “imagens do tipo raster” e “imagens do tipo vetorial”. A imagem raster é representada na forma de pixels, onde cada pixel recebe um valor e está

alocado em um espaço cartesiano definido.

A imagem vetorial, por sua vez, é armazenada na forma de conjuntos de parâmetros matemáticos os objetos representados nesta imagem. Por exemplo, um círculo vetorial é representado pelo seu centro cartesiano e seu raio. Um retângulo pode ser representado de forma vetorial pelas coordenadas do seu canto superior esquerdo e coordenadas do canto inferior direito. Ou ainda, este mesmo retângulo pode ser representado pelo seu centro cartesiano e os valores de largura e altura.

Uma vantagem da imagem vetorial é que os objetos nela representados podem ser trabalhados matematicamente sem considerar a discretização. Desta forma os cálculos são muito mais precisos. Outra vantagem é a sensível redução do espaço armazenado em memória. No entanto a qualidade de representar imagens fica limitada às ferramentas disponíveis para remontar a imagem vetorial pois para exibi-la nos dispositivos digitais convencionais, os objetos que ela representa devem ser previamente remontados em uma imagem raster.

2.2.10. Classificação de imagens digitais em função de escala e resolução

Duas imagens digitais podem ser classificadas, segundo critério adotado para este trabalho, em função da escala e da resolução de amostragem utilizada.

Dessa forma podem assumir os seguintes casos:

Caso 1 – Escalas iguais e resoluções iguais

Caso 2 – Escalas diferentes e resoluções iguais

Caso 3 – Escalas iguais e resoluções diferentes

Caso 4 – Escalas diferentes e resoluções diferentes

O caso ideal para uma correlação mais precisa e com custo computacional menor é, evidentemente, o Caso 1 pois não há necessidade de processamentos de adequação.

2.3. Wavelets

Uma imagem pode ser representada como um sinal bidimensional. Assim, o processamento de imagens é na realidade uma extensão natural do processamento de sinais. Ferramentas matemáticas e computacionais foram desenvolvidas e servem como base para a análise dos componentes frequenciais de imagens.

Fourier em 1822 descreveu uma função matemática conhecida como Séries de Fourier. A partir destas séries desenvolveram-se as Transformadas de Fourier e suas Transformadas Inversas dadas por integrais na forma analógica. Com o advento do processamento digital estas transformadas foram escritas na forma discretizada. Procurando uma melhor eficiência computacional desenvolveu-se, a partir daí, a Transformada Rápida de Fourier sob a forma de algoritmos. O algoritmo para Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform - FFT*) é um método para se calcular a Transformada de Fourier de uma série de N pontos de dados complexos em aproximadamente $(N \log_2 N)$ operações. Quando este algoritmo foi descrito por Cooley e Tukey [COOLEY-1965] em 1965, ele foi considerado como novo pelos pesquisadores que acreditavam que a análise de Fourier até então calculada com N^2 operações poderia ser reduzida por um fator usando a simetria de funções trigonométricas.

Programas de computador, na época, necessitavam centenas de horas para calcular um método com N^2 operações. No entanto, em resposta ao artigo de Cooley e de Tukey, Rudnick [RUDNICK-1966], da Scripps Institution of Oceanography, La Jolla, California, descreveu um programa de computador que também necessitava de $(N \log_2 N)$ e foi

baseada em um método publicado por Danielson e Lanczos [DANIELSON-1942]. É interessante que o artigo de Danielson-Lanczos descreveu um método em problemas de espalhamento de Raios-X que é uma área na qual, por muitos anos desde 1942, ignorou a transformadas de Fourier.

Danielson e Lanczos se referenciam a Runge [RUNGE-1903 , RUNGE-1905] como fonte inspiradora de seu método. Estes artigos e notas de aula de Runge e König [RUNGE-1924] descrevem um procedimento em termos de series de seno e cosseno. A grande ênfase, no entanto, foi na economia computacional, a qual seria fornecida pela simetria das funções senos e cossenos. Em uma seção relativamente curta de Runge e König [RUNGE-1924] foi mostrado como poderia ser usada a propriedade de periodicidade de funções seno-cosseno para se obter uma análise de Fourier de $2N$ -pontos de duas sucessivas análises de N -pontos. Em outras palavras, se as séries a serem transformadas são de tamanho N e N é uma potência de 2, as séries podem ser divididas em $\log_2 N$ sub-séries e este algoritmo pode ser aplicado para calcular a Transformada de Fourier finita em $\log_2 N$ operações de duplas sucessivas. O número de cálculos resultantes no algoritmo de duplas sucessivas é proporcional a $N \log_2 N$ por N^2 . O uso das simetrias somente reduzem o fator proporcionalmente enquanto o algoritmo de duplas sucessivas substituir N^2 por $N \log_2 N$. Esta distinção não foi importante para os valores de N usados na época de Runge e König. No entanto com o advento dos computadores fazendo uso de grandes valores para N , o método $N \log_2 N$ pode ser melhor explorado.

O algoritmo para Transformada Rápida de Fourier de Cooley e Tukey [COOLEY-1965] é mais geral possibilitando que valores de N não necessariamente sejam em potência de 2. Então, se dois fatores de N são usados, e $N = r \times s$, os dados são colocados em uma matriz retangular com r -colunas e s -linhas e uma Transformada bidimensional é feita com uma operação de deslocamento de fase entre as transformações em duas dimensões. O resultado é o cálculo em $N(r+s)$ operações ao invés de N^2 .

Para a situação de N ser potência de 2, o método de Cooley e Tukey é essencialmente o algoritmo de duplas sucessivas mencionado anteriormente e necessita justamente de $N \log_2 N$ operações. Aplicações desse algoritmo foram publicadas em [COOLEY-1967a, COOLEY-1967b, COOLEY-1969a, COOLEY-1969b].

Outro algoritmo conhecido para FFT foi desenvolvido pelo Prof. L.H. Thomas da IBM Watson Scientific Computing Laboratory [THOMAS-1963], Nova Iorque em meados da década de 60. O algoritmo de Thomas difere dos demais por: 1) os fatores de N devem ser mutuamente primos; 2) o cálculo é para análise de Fourier multidimensional sem a ocorrência de deslocamentos de fase ou “twiddle factors”; e 3) a correspondência entre os índices unidimensionais e os multidimensionais diferem dos outros algoritmos. O algoritmo de Thomas é conhecido como “Prime Factor algorithm”.

Por outro lado, vários pesquisadores [YONGSHENG-1993, SOUZA-1993, MARAR-1996, BERTOLUZZA-2000] como matemáticos e engenheiros têm mostrado grande interesse no que é chamado de “Análise Wavelets”. Estudos sobre as potencialidades desta ferramenta matemática aplicadas ao processamento de imagens e à computação gráfica [STOLLNITZ-1995a, STOLLNITZ-1995b] estão sendo realizados assim como sua possível aplicação na reconstrução de dados tomográficos [SAHINER-1993a, SAHINER-1993b, MINATEL-1997]. Assim como na Análise de Fourier podem-se distinguir dois importantes tópicos matemáticos em Análise Wavelets: A Integral Transformada Wavelet e as Séries Wavelets.

A Integral Transformada Wavelets, ou simplesmente Transformada Wavelets, é definida como o produto interno de dilatações de uma simples função ψ , chamada de “Wavelet mãe”. E as séries Wavelets são análogas às séries de Fourier porém sobre a função mãe ψ .

Uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ é chamada uma “Wavelet” ortogonal, se a

família $\{\psi_{j,k}\}$ como definido em $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$ para $j, k \in \mathbb{Z}$, é uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, isto é

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \cdot \delta_{k,m} \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z}$$

Equação 2.21

e toda $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser escrita como

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(x)$$

Equação 2.22

onde a convergência das séries em $L^2(\mathbb{R})$ é dada por

$$\lim_{M_1, N_2, M_2, N_2 \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{j=-M_2}^{N_2} \sum_{k=-M_1}^{N_1} c_{j,k} \psi_{j,k} \right\|_2 = 0$$

Equação 2.23

As séries representadas na Equação 2.22 são análogas às Séries de Fourier e são chamadas Séries wavelets. Também como em Fourier os Coeficientes Wavelets são definidos por

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$$

Equação 2.24

Define-se a Integral de Transformação como

$$(W_\psi f)(b, a) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

Equação 2.25

onde os coeficientes Wavelets são dados por:

$$c_{j,k} = (W_{\psi} f)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right)$$

Equação 2.26

A Transformada Wavelet Bidimensional é uma ferramenta matemática que pode ser representada pela convolução de uma função quadrado integrável $f(x,y)$ com “dilatações” de uma função básica wavelet $\psi(x,y)$ em escalas diferentes [CHUI-1992a, SOUZA-1993] conforme ilustra a equação:

$$\begin{aligned} (W_{2^j} f)(x, y) &= f(x, y) \bullet \psi_{2^j}(x, y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z_1, z_2) \psi_{2^j}(x - z_1, y - z_2) dz_1 dz_2 \end{aligned}$$

Equação 2.27

onde

$$\psi_{2^j}(x, y) = 2^{-j} \psi(2^{-j} x, 2^{-j} y)$$

Equação 2.28

A Transformada Wavelet possui propriedades de localidade que habilitam a implementação de métodos em regiões de interesse. Basta para isso respeitar-se a escala adotada.

Como exemplo de função básica wavelets pode ser citada a seguinte variação bidimensional da função Haar $\psi_H(x, y)$ que é dada por:

$$\psi_H(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x, y < 1/2 \\ -1 & \text{para } 1/2 \leq x, y < 1 \\ 0 & \text{outros} \end{cases}$$

Equação 2.29

Os algoritmos apresentados nos próximos itens para a transformada Wavelet bidimensional são derivados de decomposições unidimensionais. Para uma melhor compreensão do processo bidimensional de decomposição

faz-se uso da descrição da decomposição unidimensional com os seguintes exemplos numéricos.

Dado o vetor formada por cinco pixels com os seguintes valores:

7	5	2	8	9	5	3	3
---	---	---	---	---	---	---	---

Consegue-se uma imagem com menor resolução através da aplicação de uma média tomada par a par sobre a imagem anterior. Tem-se assim a seguinte imagem:

6	5	7	3
---	---	---	---

Observa-se uma excessiva perda de informações nesta operação de média. Essas informações perdidas são fundamentais para uma posterior recuperação da imagem original. Para essa recuperação faz-se necessário o armazenamento dos *coeficientes de detalhes* originários do processo de média.

Os *coeficientes de detalhes* podem ser obtidos armazenando-se os valores das diferenças entre o valor médio e os valores dos pixels envolvidos nesse cálculo. Toma-se o primeiro par do exemplo dado acima, os valores 7 e 5. O valor da média é 6. Percebe-se que $6 + 1 = 7$ e $6 - 1 = 5$. Portanto o coeficiente de detalhe necessário para a recuperação dos dados originais (primeiro par) tem o valor 1.

Para o segundo par, analogamente, pode-se chegar ao coeficiente de detalhe (-3) pois $5 + (-3) = 2$ e $5 - (-3) = 8$. Com esse processo obtém-se a seguinte tabela:

Resolução	Médias	Coeficientes de detalhes
8	7 5 2 8 9 5 3 3	
4	6 5 7 3	1 -3 2 0
2	5,5 5	0,5 2
1	5,25	0,25

Tabela 2.1: Processo de decomposição por Wavelets em várias resoluções

A Transformada Wavelet - Decomposição Wavelet - da imagem 7 5 2 8 9 5 3 3 baseada na wavelet Haar é dada pela seqüência de números reais:

5,25	0,25	0,5	2	1	-3	2	0
------	------	-----	---	---	----	---	---

Essa seqüência é composta pelo último elemento do processo de médias (5,25) e pela seqüência dos coeficientes de detalhes (0,25; 0,5; 2; 1; -3; 2 e 0).

Esse processo, também chamado de *filter bank* pode ser generalizado para outros tipos de wavelets [STOLLNITZ-1995a, STOLLNITZ-1995b]. Neste trabalho adotou-se a Wavelet Haar devido ao baixo custo computacional envolvido no processamento de seus algoritmos de composição e decomposição. Esse baixo custo computacional é devido a pouca complexidade da implementação da Wavelet Haar em relação a outras wavelets [SAHINER-1993a, SAHINER-1993b].

Assim como a Transformada de Fourier, a Transformada Wavelet pode ser estendida para duas dimensões a partir de transformadas unidimensionais. A Transformada ou Decomposição Padrão é dada pelo processamento unidimensional completo primeiramente das linhas da imagem seguido pelo processamento completo das colunas da imagem resultante [CHUI-1992a, CHUI-1992b, SAHINER-1993a, SAHINER-1993b]. A Figura 2.3 ilustra esse processo de decomposição. Nesta figura as imagens estão identadas de forma que os passos de decomposição das linhas ocorrem seguindo a ordem vertical e a decomposição das colunas na ordem horizontal.

Por outro lado, chama-se de Transformada ou Decomposição Não-Padrão [SAHINER-1993a, SAHINER-1993b] a decomposição bidimensional dada pelo processamento de decomposições de uma dimensão entre linhas e colunas alternadamente. A Figura 2.4 ilustra esse processo. A identificação segue a da Figura 2.3

Figura 2.3: Ilustração do processo bidimensional padrão de Transformação ou Decomposição Wavelets. A imagem original tem suas linhas processadas até o nível máximo definido e as colunas são processadas posteriormente até o mesmo nível.

Figura 2.4 : Processo bidimensional Não-Padrão de Transformação ou Decomposição Wavelets. A imagem original tem suas linhas e colunas processadas em seqüência.

2.3.1. Análise de Multiresolução, Decomposição e Composição

Na análise de multiresolução, do ponto de vista matemático, uma wavelet gera uma decomposição por soma diretas do $L^2(\mathbb{R})$. Para cada $j \in \mathbb{Z}$ considera-se os sub-espços de $L^2(\mathbb{R})$:

$$V_j = \dots + W_{j-2} + W_{j-1}, j \in \mathbb{Z}$$

Equação 2.30

Esses sub-espços têm as seguintes propriedades:

- (1°) $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$;
- (2°) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$;
- (3°) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;
- (4°) $V_{j+1} = V_j + W_j, j \in \mathbb{Z}$;
- (5°) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, j \in \mathbb{Z}$.

Equação 2.31

Entretanto, nos espços complementares tem-se $W_j \cap W_l = \{0\}, j \neq l$.

Resumidamente pode-se dizer que, se o sub-espço de referência V_0 é gerado por uma única função $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ para $j=0$ em $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$ então todos os sub-espços V_j são também gerados pelo mesmo ϕ para qualquer j .

Considera-se assim que uma seqüência $\{V_j\}$ é gerada por uma função de escala ϕ e a seqüência de sub-espços $\{W_j\}$ é gerada por uma wavelet ψ . Neste caso, pela propriedade (2°) cada função f em $L^2(\mathbb{R})$ pode ser aproximada por uma $f_N \in V_N$ para N sendo qualquer número inteiro.

Como $V_j = V_{j-1} + W_{j-1}$, f_N possui uma única decomposição:

$$f_N = f_{N-1} + g_{N-1},$$

Equação 2.32

onde $f_{N-1} \in V_{N-1}$ e $g_{N-1} \in W_{N-1}$. Esse processo pode ser repetido de forma a se obter para N elementos:

$$f_N = g_{N-1} + g_{N-2} + \dots + g_{N-M} + f_{N-M}$$

Equação 2.33

onde $f_j \in V_j$ e $g_j \in W_j$ para algum j , e M é escolhido de forma que f_{N-M} seja suficientemente suavizado. A decomposição única na Equação 2.33 é chamada de “Decomposição Wavelet”. f_{N-M} contém os “valores de média” e g os “coeficientes de detalhes”.

A decomposição pode obedecer a um critério de parada como quando f atinge um valor mínimo pré-determinado. Esse processo pode ser descrito na forma de algoritmos. Para isso, considere-se novamente uma função de escala $\phi \in V_0$ e uma wavelet $\psi \in W_0$ que estejam em V_1 desde que V_1 seja gerado por $\phi_{1,k}(x) = 2^{1/2} \phi(2x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim existem duas seqüências $\{p_k\}$ e $\{q_k\}$ pertencentes ℓ^2 . Lembra-se que ℓ^2 denota o espaço de todas as seqüências bi-infinitas quadrado somáveis. Desta forma obtém-se a “relação entre suas escalas” dada pela função escala mostrada na Equação 2.34 e a função wavelet na Equação 2.35.

$$\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x - k)$$

Equação 2.34

$$\psi(x) = \sum_k q_k \phi(2x - k)$$

Equação 2.35

para todo número real x

Por outro lado, desde que $\phi(2x)$ e $\phi(2x-1)$ são pertencentes a $V_1 = V_0 + W_0$, existem quatro seqüências $\{a_{-2k}\}$, $\{b_{-2k}\}$, $\{a_{1-2k}\}$ e $\{b_{1-2k}\}$ com $k \in \mathbb{Z}$ de maneira a se obter:

$$\phi(2x) = \sum_k [a_{-2k}\phi(x-k) + b_{-2k}\psi(x-k)]$$

Equação 2.36

$$\phi(2x-1) = \sum_k [a_{1-2k}\phi(x-k) + b_{1-2k}\psi(x-k)]$$

Equação 2.37

para $x \in \mathbb{R}$. Essas duas equações podem ser unidas em uma única representação como Equação 2.38 que é conhecida na literatura como “relação de decomposição de ϕ e ψ ”.

$$\phi(2x-l) = \sum_k [a_{l-2k}\phi(x-k) + b_{l-2k}\psi(x-k)], l \in \mathbb{Z}$$

Equação 2.38

Tem-se assim duas seqüências únicas $(\{p_k\}, \{q_k\})$ e $(\{a_k\}, \{b_k\})$. Elas são únicas pelo fato da soma direta $V_1 = V_0 + W_0$. Essas seqüências são usadas nos algoritmos de decomposição e composição sendo $\{p_k\}$ e $\{q_k\}$ chamadas de “seqüências de composição (ou reconstrução)” e $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ de “seqüências de decomposição”.

De maneira a descrever esses algoritmos lembra-se que para $f_j \in V_j$ e $g_j \in W_j$ tem-se as séries únicas:

$$\begin{cases} f_j(x) = \sum_k c_k^j \phi(2^j x - k) \\ \text{com } C^j = \{c_k^j\} \in \ell^2 \end{cases}$$

Equação 2.39

e

$$\begin{cases} g_j(x) = \sum_k d_k^j \psi(2^j x - k) \\ \text{com } D^j = \{d_k^j\} \in \ell^2 \end{cases}$$

Equação 2.40

onde intencionalmente foram eliminados os coeficientes $2^{j/2}$ para se escrever $\phi(2^j x - k)$ e $\psi(2^j x - k)$ ao invés de $\phi_{j,k}$ e $\psi_{j,k}$ para eliminar a desnecessária multiplicação por $\sqrt{2}$.

Os algoritmos de decomposição e composição mostrados na Equação 2.41 e na Equação 2.42 a seguir, representam f_i e g_i pelas seqüências C^j e D^j .

$$\begin{cases} c_k^{j-1} = \sum_l a_{l-2k} c_l^j \\ d_k^{j-1} = \sum_l b_{l-2k} c_l^j \end{cases}$$

Equação 2.41

$$c_k^j = \sum_l [p_{k-2l} c_l^{j-1} + q_{k-2l} d_l^{j-1}]$$

Equação 2.42

A Figura 2.5 e a Figura 2.6 ilustram o processo de Decomposição e Composição por Wavelets respectivamente.

Figura 2.5 : Decomposição por wavelet;

Figura 2.6: Composição por wavelet;

2.3.2. Algoritmo de interpolação por B-Wavelets

A interpolação por B-wavelets determina os valores intermediários entre uma sequência de pontos conhecida. Diferentemente da aproximação, a interpolação não apenas desloca a curva gerada sob a influência dos pontos conhecidos, como também faz com que essa curva passe por esses pontos.

A Figura 2.7 ilustra essa diferença:

Figura 2.7 : Exemplo de interpolação e aproximação por B-Wavelets.

Para descrever a interpolação faz-se necessária uma discussão sobre o método de aproximação, seus problemas e suas soluções computacionais. Seja f uma função de aproximação Spline de ordem m e com passo $\mu = 2^{-j_0}Z$ dada por:

$$f(\mu) = \sum_{i=0}^N a_i B(N\mu - i)$$

Equação 2.43

onde N é o número de pontos conhecidos.

De forma a otimizar o processo de cálculo, implementa-se a função

$B(x)$, também chamada de função de “*blending*”, da seguinte maneira:

$$B(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(2+x)^3 & -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{1}{6}(4-6x^2-2x^3) & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{6}(4-6x^2+2x^3) & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{6}(2-x)^3 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & 2 \leq |x| \end{cases}$$

Equação 2.44

A implementação direta desta somatória fornece os valores intermediários da aproximação. No entanto, para os pontos inicial e final para $m=4$, por exemplo, tem-se os valores:

$$f(0) = \frac{2}{3}a_0 + \frac{1}{6}a_1 \neq a_0$$

Equação 2.45

e

$$f(1) = \frac{2}{3}a_N + \frac{1}{6}a_{N-1} \neq a_N$$

Equação 2.46

Para solucionar esse problema, nesta implementação, adotou-se o uso dos chamados “pontos fantasmas”. Essa técnica consiste em considerar um ou mais valores antes do ponto inicial e depois do final.

Foram adicionados dois pontos fantasmas no início e dois no final da sequência conhecida. Esses valores foram ajustados de forma dinâmica para que a curva a ser gerada pela função B-wavelet passasse pelos pontos inicial e final.

Esses pontos têm seus valores obedecendo a regra : $a_{-1} = 2a_0 - a_1$ e $a_{-2} = 2a_{-1} - a_0$ para os pontos iniciais e $a_{N+1} = 2a_N - a_{N-1}$ e $a_{N+2} = 2a_{N+1} - a_N$ para os pontos finais.

A função mostrada na Equação 2.43 fica da seguinte forma:

$$f(\mu) = \sum_{i=-2}^{N+2} a_i B(N\mu - i)$$

Equação 2.47

Para a implementação da interpolação, ao invés da simples aproximação, usa-se uma função muito próxima da função de aproximação. Essa função é dada por:

$$f(\mu) = \sum_{i=-2}^{N+2} A_i N_m(N\mu - i)$$

Equação 2.48

A idéia básica é usar a seqüência de pontos A_i no lugar de a_i . Essa seqüência é dada pela multiplicação das matrizes: $A = M^{-1}a$, onde A é o vetor (seqüência) a ser encontrado, a é o conjunto de pontos conhecidos com os pontos fantasmas e M é uma matriz $N+3 \times N+3$ dada por:

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{N}{2} & 0 & \frac{N}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{N}{2} & 0 & \frac{N}{2} \end{bmatrix}$$

Equação 2.49

3. Desenvolvimento do modelo.

Neste capítulo é apresentado o modelo desenvolvido com uso de fluxogramas e pseudocódigos de forma modular com progressivo nível de detalhamento. Em alguns processos apresentados faz-se uso de imagens que ilustram os resultados esperados.

O modelo computacional implementado correlaciona as imagens de diferentes escalas e resoluções através do estudo de atributos matemáticos.

Nesse contexto definiu-se que a operação em alto nível do sistema em duas fases:

Fase 1: Extração de atributos

Fase 2: Classificação

O fluxograma mostrado pela Figura 3.1 ilustra uma visão geral do sistema implementado onde se observa que a fase de extração de atributos gera um banco de dados que será posteriormente consultado pela fase de classificação.

Figura 3.1: Visão geral do sistema implementado.

Uma descrição de cada uma dessas fases e seus processamentos são expostos a seguir.

3.1. Fase de extração de atributos

Nesta fase, imagens de meios porosos conhecidos têm suas imagens obtidas por meio de imageamento não invasivo por tomografia por Raios-X e γ e submetidas a análise do sistema. Nessa inserção de dados, são informados parâmetros relevantes como a escala adotada e a resolução de amostragem utilizada de forma a se obter a série de atributos como, por exemplo, a densidade (número de poros por unidade de medida), a mediana (distribuição dos raios dos círculos inscritos) e o desvio padrão os quais serão usados na classificação desses meios. Os dados para classificação são então armazenados em banco de dados. Os processamentos ilustrados na Figura 3.2 e que compõem esta fase são individualmente explicados após apresentação da fase de classificação pois ambos possuem pontos em comum.

Figura 3.2 : Fase de extração de atributos. Atributos inerentes às imagens são extraídos e armazenados em um banco de dados normalizados.

3.2. Fase de classificação

Nesta fase uma imagem de meio poroso a ser caracterizado é fornecida ao sistema. O sistema, por sua vez, efetua os processamentos necessários, consultando a base de dados normalizados gerada pela Fase 1 e, comparando os dados com faixas pré-estabelecidas de tolerância, classifica o meio poroso em uma das classes aprendidas ou informa quando ele não se enquadra em nenhuma. A Figura 3.3 mostra os processamentos envolvidos na Fase 2.

Figura 3.3 : Fluxograma da Fase de classificação onde se observa o uso da base de dados gerada na Fase 1 para classificação da imagem entrada.

3.3. Processamentos envolvidos

Como se pode observar na Figura 3.2 e depois na Figura 3.3 as fase de extração de atributos e a de reconhecimento possuem em comum os módulos “Segmentação”, “Adequar escala e resolução”, “Vetorização” e “Calcular atributos”. A seguir esses módulos são explicados individualmente.

3.3.1. Segmentação

Neste módulo são processadas as imagens de forma a adequá-las ao formato de entrada para algoritmo que se segue, destacando o que deve ser considerado como poro do que não é poro.

Na literatura existem várias técnicas de segmentação de imagens [GONZALEZ-1987, PRATT-1991]. Por outro lado, a escolha da técnica a ser usada deve considerar a maneira como o objeto a ser segmentado (destacado) é representado na imagem. Assim, considerando-se que nas imagens deste estudo, cada pixel representa uma atenuação dos Raios-X ou γ , a escala de cinza foi usada para representar de forma linear cada coeficiente de atenuação.

Na Figura 3.4 é mostrada uma imagem proveniente de tomografia onde o pixel de valor 0 representa o coeficiente de atenuação 0.000 cm^{-1} e o pixel de valor 255 representa 1.050 cm^{-1} . Os pixels de valores intermediários representam de forma linear os coeficientes de atenuação no escopo.

Um poro não preenchido pode ser analogamente comparado a um espaço vazio onde um feixe de Raios-X não sofre atenuações ou, quando preenchido, assume o valor da atenuação causada pelo material de seu preenchimento. Portanto o poro é representado em uma imagem, como a mostrada na Figura 3.4, como sendo conjuntos de pixels de valores definidos. Na prática, considerando os parâmetros da formação de imagens de tomografia com seus ruídos e outros problemas, consideram-se os valores dentro de uma faixa de tolerância.

A segmentação neste caso é, portanto, dada pela aplicação de um filtro do tipo limiar ("*threshold*") que fornece uma imagem binária onde os poros são representados pelo pixel 1 e os demais pixels são 0.

Figura 3.4 : Imagem gerada por tomografia onde os coeficientes de atenuação são representados em escalas de tons de cinza. Pixel valor 0 = coeficiente de atenuação de valor 0.000 cm^{-1} e os pixels de valor 255 representam 1.050 cm^{-1} .

O processamento do filtro “*threshold*” é relativamente simples do ponto de vista computacional como ilustrado no pseudocódigo a seguir:

```

Img = imagem a ser filtrada pelo threshold.
NC = Número de colunas da imagem;
NL = Número de linhas da imagem;
Limiar = valor entre 0 e 255 para limiarização;
Img2 = imagem de saída com NC colunas e NL linhas;
for C = 1 to NC do:
for L = 1 to NL do:
begin:
    if Img[C,L] < Limiar
        then Img2[C,L] = 0;
        else Img2[C,L] = 255;
end.

```

3.3.2. Adequar escala e resolução aos padrões

O modelo desenvolvido usa padrões de escala e de resolução definido empiricamente aos quais as imagens de entrada devem ser previamente adequadas. Para essa adequação foi desenvolvido algoritmo que, em suma, objetiva deixar as imagens com a mesma relação pixel/unidade de medida adotada como padrão. Desta forma obtém-se uma normalização dos dados (atributos) a serem posteriormente armazenados. O fluxograma mostrado na Figura 3.5 ilustra o algoritmo.

Figura 3.5 : Fluxograma do algoritmo de adequação da imagem entrada para a mesma escala e resolução da imagem definida como padrão.

Para ilustrar o funcionamento deste algoritmo optou-se por utilizar a imagem *Baby-Ed* que permite uma melhor visualização das transformações a serem realizadas em relação às imagens de meios porosos, pois contém conhecidos pontos de referência. Os módulos para *Zoom In* e *Zoom Out* contidos neste processamento são descritos em detalhes após a apresentação dos possíveis casos de imagens entrada.

Os seguintes casos podem ocorrer em função das imagens entradas:

- Caso 1 – Escalas iguais e resoluções iguais
- Caso 2 – Escalas diferentes e resoluções iguais
- Caso 3 – Escalas iguais e resoluções diferentes
- Caso 4 – Escalas diferentes e resoluções diferentes

Cada caso é apresentado a seguir:

Caso 1 – Escalas iguais e resoluções iguais

Nesse caso a imagem já se encontra adequada para o formato de entrada

do sistema. Opcionalmente, preenche-se com zeros ou corta-se a imagem para adequá-la a um tamanho (número de linhas e colunas) padrão.

Exemplo 1: Uma imagem entrada tem a mesma escala e resolução da imagem padrão. No entanto, essa imagem tem 320 colunas por 240 linhas e os números de colunas e linhas padrões são ambos 512. A imagem resultante terá 512 colunas x 512 linhas com o preenchimento de 192 colunas e 272 linhas com zeros.

Figura 3.6 : A marcação externa representa o tamanho da imagem padrão de entrada. A imagem com mesma escala e resolução de 320x240 foi adequada a este tamanho.

Exemplo 2: A imagem entrada tem 640 colunas e 480 linhas na mesma escala e mesma resolução. A imagem resultante eliminará 128 colunas e preencherá com zeros 32 linhas de forma a ter 512 colunas por 512 linhas.

Figura 3.7 : A imagem com mesma escala e resolução de 640x480 foi adequada ao tamanho padrão. Houve perda de parte da imagem.

Caso 2 – Escalas diferentes e resoluções iguais

A imagem entrada tem o mesmo número de pixels, no entanto tem escalas diferentes. A imagem resultante deve “estender” ou “encolher” a imagem entrada de forma a adequar as escalas, ou seja, deve considerar a relação padrão de pixels/unidade de medida.

Exemplo 1: Uma imagem entrada tem 512 x 512 pixels que correspondem a 20 mm (1: 0,0390) e a relação padrão é 1:0,0195. A imagem de entrada foi “esticada” e apenas uma sub-imagem desta é analisada (copiada para a imagem resultante). Ilustrado na Figura 3.8.

Figura 3.8 : A imagem de entrada teve suas dimensões aumentadas proporcionalmente de forma a ter a mesma escala da imagem padrão. Houve descarte de parte da imagem.

Exemplo 2: Uma imagem entrada tem 512 colunas por 512 linhas, porém essas 512 colunas correspondem a 5 mm (1: 0,0097, 1 pixel = 0,0097 mm). A relação padrão é 1:0,0195. Nesse caso, deve-se adequar a imagem entrada reduzindo-a para a escala adotada multiplicando o número de linhas e colunas individualmente por um fator, no caso 0,5, e preenchendo com zeros para adequar a resolução espacial padrão.

Figura 3.9 : A imagem de entrada teve suas dimensões reduzidas proporcionalmente de forma a ter a mesma escala da imagem padrão.

Caso 3 – Escalas iguais e resoluções diferentes

A imagem entrada tem a mesma escala, porém resoluções diferentes. Nesse caso, adequando-se a relação pixel/unidade de medida (pixel/mm) tem-se a adequação. A Figura 3.10 ilustra esse caso.

Figura 3.10 : A imagem de entrada teve suas dimensões aumentadas (*zoom in*) de forma a ter a mesma escala da imagem padrão.

Caso 4 – Escalas diferentes e resoluções diferentes

Da mesma forma que os demais casos, para adequar imagens com diferentes escalas e diferentes resoluções, basta adequar suas relações pixels/mm. Pode-se encontrar exemplo ilustrado na Figura 3.11.

Figura 3.11 : A imagem de entrada teve suas dimensões reduzidas (*zoom out*) objetivando adequá-la à mesma escala da imagem padrão.

Nos casos acima descritos observou-se a aplicação de processamentos nas imagens de aproximação (*Zoom In*) e redução (*Zoom Out*). Apesar de diferentes técnicas serem aplicáveis nestes processos, os procedimentos adotados são expostos a seguir:

3.3.2.1. Zoom Out (redução)

Neste processamento (ilustrado pela Figura 3.12) a imagem entrada sofre um transformação de escala em suas dimensões.

Figura 3.12 : Fluxo de dados para o processamento de redução (*zoom out*) de uma imagem.

Uma imagem com NC colunas e NL linhas é rearranjada para novas dimensões NC2 colunas e NL2 linhas. Evidentemente há perdas nos detalhes da imagem. No entanto suas novas dimensões são adequadas por atenderem a relação padrão entre a resolução e a medida da imagem.

Transformação de escala

A transformação de escala na imagem é processada pelo algoritmo abaixo descrito, onde se observa que a imagem original (Img) é copiada para a nova imagem (Img2) com novas dimensões. Como as colunas e linhas são transformadas simultaneamente pelo mesmo fator, a imagem resultante é proporcional à imagem original.

```
Img = imagem a ser transformada.  
NC = Número de colunas da imagem;  
NL = Número de linhas da imagem;  
Fator = fator multiplicador;  
NC2 = NC * Fator;  
NL2 = NL * Fator;  
Img2 = Nova imagem com NC2 colunas e NL2 linhas;  
  
for C2 = 1 to NC2 do:  
  for L2 = 1 to NL2 do:  
    begin:  
      C = C2/Fator;  
      L = L2/Fator;  
      Img2[C2,L2] = Img[C,L];  
    end.
```

3.3.2.2. Zoom In (aproximação)

Neste processamento (ilustrado pela Figura 3.13) a imagem entrada, como no processo de *Zoom Out*, sofre uma transformação de escala em suas dimensões. Uma imagem com NC colunas e NL linhas é rearranjada para novas dimensões NC2 colunas e NL2 linhas.

Neste caso, a imagem resultante apresenta um problema inerente às amostras discretizadas: a perda de detalhes em baixas resoluções. Esse problema é caracterizado por um efeito de “serrilhamento” nas bordas e pode causar distorções nos resultados da análise. Por isso, adicionalmente é aplicado um processamento de suavização por sub-pixel.

Figura 3.13 : Processo de *Zoom In* com suavização por sub-pixel usando B-Wavelets.

A imagem mostrada na Figura 3.14 representa um meio poroso onde os poros foram destacados (segmentados) com filtro do tipo *threshold*. Os poros são representados pela cor preta e o branco é a cor usada para ilustrar o que não é poro.

Nessa figura pode-se observar o efeito de serrilhamento ocasionado pelo aumento da escala que é prejudicial ao processo de correlação porque distorce a representação dos poros. A imagem (a) desta figura (Figura 3.14)

originalmente possui 256x256 pixels. Depois de submetida à transformação de escala, ela passou a ter em (d) 1024x1024 pixels tendo preservado suas características originais.

Figura 3.14 : Imagem (a) submetida a aproximações (“zoom in”) mantendo-se suas características iniciais. A imagem (a) possui 256x256pixels; (b) 512x512; (c) 768x768; (d) 1024x1024.

O uso de Wavelets nesse caso mostra-se aplicável. Desta forma, foi implementado, usando método de interpolação por B-Wavelets um algoritmo para estimar sub-pixels objetivando a minimização do efeito de “serrilhamento”.

3.3.2.3. Suavização por Sub-Pixel usando B-Wavelets

A técnica desenvolvida consiste em se efetuar uma sequência de processamentos na imagem aproximada e binarizada. O fluxograma mostrado na Figura 3.15 resume essa série de processamentos os quais serão descritos mais abaixo.

Figura 3.15 : Fluxograma da série de processamentos necessários para a aplicação da técnica sub-Pixel por B-Wavelets.

Entrada :

Imagem binária resultante do processamento anterior.

Processamento 1 :

Segmentar a imagem resultante da aproximação dos N poros em N sub-imagens contendo conseqüentemente apenas um poro cada.

Figura 3.16 : (a) imagem binarizada contendo todos os poros. (b) imagem de um único poro.

Figura 3.17 : Processamento para segmentar uma imagem de N poros em N sub-imagens de um poro.

No exemplo ilustrado pela Figura 3.16 podem ser observados todos os poros na imagem (a) e uma sub-imagem de apenas um poro na imagem (b). O processamento segue o fluxograma mostrado na Figura 3.17.

O método para essa segmentação dos poros em sub-imagens individuais é baseado na técnica de rotular cada conjunto adjacente de pixels com uma determinada cor e depois copiar apenas os elementos dessa cor para uma imagem diferente. O pseudocódigo a seguir ilustra esse método:

Img = imagem binarizada do meio poroso, onde 0 é preto e representa os poros e 1 é branco e representa o que não é poro.

NC = Número de colunas da imagem;

NL = Número de linhas da imagem;

Passo 1:

Rótulo = 1;

for C = 1 **to** NC **do**:

for L = 1 **to** NL **do**:

begin:

```

P = pixel na posição [C,L];
if P = 0
    then: pintar todos os pixels adjacentes de valor
    Rótulo; Incrementar valor de Rótulo;
end;

Passo 2:
for X = 1 to Rótulo do:
    ImgPoro[X] = Imagem de um poro rotulado com valor X. Essa
    imagem tem tamanho NCxNL e é preenchida com 1s;
    for C = 1 to NC do:
    for L = 1 to NL do:
    begin:
        P = pixel na posição [C,L] da Img;
        if P = X then: ImgPoro[X] = P;
    end.

```

Processamento 2 :

Sobre cada sub-imagem, aplicar um filtro de detecção de bordas, como o filtro laplaciano. Para isso basta se efetuar uma convolução de uma máscara 3x3 com a imagem em processamento. O pseudo-código a seguir ilustra esta convolução.

```

Img = imagem a ser processada;
Img2 = imagem resultante (bordas);
NC = Número de colunas da imagem;
NL = Número de linhas da imagem;


$$H = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ matriz 2D da máscara Laplaciano;}$$


NCK = 3; (número de colunas do filtro)
NLK = 3; (número de linhas do filtro)
for C = 1 to (NC-NCK) do:
for L = 1 to (NL-NLK) do:
begin 1:
    Soma = 0;
    for CK = 1 to NCK do:
    for LK = 1 to NLK do:
    begin 2:
        Soma = Soma + Img[C,L]*H[CK,LK];
    end 2;
    Img2[C,L] = Soma*1/(NCK*NLK);
end 1;

```

Processamento 3 :

A imagem das bordas é analisada e um banco de dados é gerado contendo os pontos centrais de cada segmento de reta encontrado na imagem. Esse banco de dados servirá de entrada de dados vetoriais para a interpolação dos dados.

Figura 3.18 : Processo de vetorização dos pontos para interpolação.

O banco de dados para interpolação gerado pelo processamento mostrado na Figura 3.18 , na realidade, contém os pontos de junção das retas (conexões em 90 graus). Para a interpolação se deve ainda processar esses dados para se obter os pontos médios entre cada ponto ordenado do vetor.

Por exemplo, se o vetor armazenado tiver as seguintes coordenadas:

X	10	10	12	12	14	14
Y	10	13	13	15	15	10

Os dados para interpolação serão:

X	10	11	12	13	14	10
Y	11,5	13	14	15	12,5	11,5

Os valores não inteiros serão aproximados após a interpolação.

A Transformada Wavelet Haar é aplicável neste caso. O processamento consiste na obtenção dos coeficientes de médias dos pontos entrados em uma transformada de ordem 1. O que na prática retorna o ponto médio e pode ser computacionalmente otimizado na forma implementada e mostrada no pseudo-código abaixo:

```
N = número de pontos a serem processados;
PIn[N] = array com os pixels das conexões 90 graus;
POut[N] = array com os pixels dos centros;

for P = 1 to (N-1) do:
begin
    E1 = PIn[P].X; // Colunas do ponto
    E2 = PIn[P+1].X; // Linhas do ponto

    if (E1=E2)
        POut[P].Y=0.5*(PIn[P].Y+ PIn[P+1].Y); // coef. Média TW
        Haar;
    else
        POut[P].X=0.5*(PIn[P].X+ PIn[P+1].X); // coef. Média TW
        Haar;
end.
```


Processamento 4 :

Com base nos dados armazenados no arquivo gerado pelo processamento anterior, aplica-se algoritmo de interpolação por B-Wavelets entre os pontos médios de cada reta encontrada conforme ilustrado na Figura 3.19. O pseudocódigo abaixo ilustra a sequência de comandos do algoritmo para processamento da interpolação por B-Wavelets.

Figura 3.19: Processo de interpolação dos poros por B-Wavelets.

Interpolação por B-Wavelets

```

NE = número de pontos;
NEF = NE + 4 = num. pontos mais "pontos fantasmas";
NI = num. pontos a serem interpolados;
NP = NE*NI; // número total de pontos;
m = ordem da B-wavelet;
WMK(m, k) =  $N_m(k)$ ;
B(k) =  $B(\tau)$ ;

// ENTRADA DE PONTOS REAIS (COLUNAS)
for z1 = 2 to NE-2 do
  AR[z1] = pontos para interpolação (colunas);

  {CÁLCULO DOS PONTOS "FANTASMAS"}
  AR[2] := 2*AR[3]-AR[4];
  AR[1] := 2*AR[2]-AR[3];
  AR[NE+1] := 2*AR[NE]-AR[NE-1];
  AR[NE+2] := 2*AR[NE+1]-AR[NE];

```

```

{DETERMINA VALORES DA MATRIZ M}
for x := 1 to NE do
begin
    M[x,1] := 0;
    M[x,NE+2] := 0;
end;

M[1,1] := -NE/2;
M[3,1] := +NE/2;
M[NE+2,NE+2] := +NE/2;
M[NE, NE+2] := -NE/2;

for y := 2 to NE+1 do
    for x := 1 to NE+2 do
        begin
            M[x,y] := WMK(m, (x-y+2));
        end;

{EFETUA INVERSÃO DA MATRIZ M}
Inverte_Matriz(MA, INV, NE+2);      {INV =  $M^{-1}$ }

{MULTIPLICA O VETOR AR PELA MATRIZ INV}
Multiplica_Matriz(INV, AR, AP , NE+2);  {AP = AR*INV}

z2 = 0;
for K := NI*3 to NI*(NE-2) do {IGNORA DADOS "FANTASMAS"}
begin
    {EFETUA INTERPOLAÇÃO UNIDIMENSIONAL}
    z2 := z2 + 1;
    Valor_Interpolado := 0;
    for I := 1 to NE do
        Valor_Interpolado := Valor_Interpolado +
                                AR[I]*B(NE*K/NP-I);
    PInt[z2] := Valor_Interpolado;
    end;
end;

{ENTRADA DE PONTOS REAIS (LINHAS)}

for z1 = 2 to NE-2 do    AR[z1] = pontos para interpolação
(linhas);
...

```

Processamento 5 :

Preenche-se e copia-se esta imagem para uma outra imagem, conforme a Figura 3.20, contendo todos os poros, que servirá de entrada para a análise.

Figura 3.20 : Remontagem da imagem dos poros.

A Figura 3.21 ilustra resumidamente os resultados do processo de interpolação. A imagem (a) da Figura 3.21 é do poro extraído e mostrado na Figura 3.16(b) após ser processado pelo método de aproximação (*Zoom In*) descrito anteriormente.

Figura 3.21 : (a) imagem de poro com aproximação onde se pode observar o efeito de serrilhamento. (b) imagem das bordas da imagem (a). (c) imagem das bordas sobreposta à imagem interpolada. (d) imagem resultante com suavização do efeito de serrilhamento.

Vetorização

A vetorização definida para esta etapa consiste em se reconhecer e se marcar os círculos inscritos nos poros contidos nas imagens analisadas, armazenando os valores referentes às coordenadas cartesianas e os respectivos raios em um vetor de dados. Esse processo é realizado correlacionando-se a imagem de entrada com padrões circulares. Os pontos de maior correlação são então armazenados em disco conforme ilustrado no fluxograma da Figura 3.22.

O método de reconhecimento de círculos inscritos é baseado em técnica por correlação no domínio da frequência desenvolvido em [CRUVINEL, 1999] e resumido pela Figura 3.23.

O padrão a ser reconhecido no algoritmo é um círculo de raio valor Raio. O processo de correlação da imagem se dá no domínio da frequência com uso de Transformadas Rápidas de Fourier (FFT) e é ilustrado na Figura 3.24.

Figura 3.22 : Processo de vetorização das imagens dos poros.

Figura 3.23 : Fluxo de dados do processo para achar círculos inscritos usando-se correlação por FFT.

A Figura 3.25 e Figura 3.26 ilustram respectivamente os pseudocódigos usados nos processamentos das Transformadas Rápidas de Fourier Unidimensional (FFT 1D) e Bidimensional (FFT 2D).

Figura 3.24 : Processo de correlação no domínio da freqüência de duas imagens;

PSEUDOCÓDIGO DA FFT UNIDIMENSIONAL (FFT 1D)

Entrada : vetor $x_0(k)$. Este vetor é complexo, com suas partes real e imaginária, e indexado por $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Se os dados são reais, a parte imaginária deve ser nula. O valor de N é uma potência de 2.

FFT1D($x(k)$):

1. Declaração e inicialização de variáveis;

$N2 = N/2$

for $l = 0$ **to** α **do**

for $i = 0$ **to** $N2$ **do**

$m = \text{INT}(K/2^\alpha)$; // valor inteiro de $K/2^\alpha$

$p = \text{bit-reverso de } m$;

2. calcular Treal e Timag com $W^p * x(k+N2)$;

$x(k+N2).\text{Real} = x(k).\text{Real} - T\text{Real}$;

$x(k+N2).\text{Imag} = x(k).\text{Imag} - T\text{Imag}$;

$x(k).\text{Real} = x(k).\text{Real} + T\text{Real}$;

$x(k).\text{Imag} = x(k).\text{Imag} + T\text{Imag}$;

$k = k+1$;

end for;

$k = k+N2$;

```

if k >= N then
    k = 0;
    alfa = alfa - 1;
    N2 = INT(N2/2)
end if;
end for

3. Rearranjar vetor por bit-reverso;
end FFT1D;

```

Figura 3.25: Pseudocódigo da FFT unidimensional.

PSEUDOCÓDIGO DA FFT BIDIMENSIONAL (FFT 2D)

Entrada : Matriz $x(kk, ll)$. Esta matriz é complexa, com suas partes real e imaginária, e indexada por $kk = 0, 1, 2, \dots, N-1$ e $ll = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Se os dados são reais, a parte imaginária deve ser nula. O valor de N é uma potência de 2.

FFT2D($x(kk, ll)$):

1. Declaração e inicialização de variáveis;

```

for i = 0 to N-1 do
for j = 0 to N-1 do X(j) = x(i, j);
FFT1D(X(j)); //Calculo da FFT unid. das linhas
for j = 0 to N-1 do x(i, j)=X(j);
end for

for i = 0 to N-1 do
for j = 0 to N-1 do X(j) = x(j, i);
FFT1D(X(j)); //Calculo da FFT unid. das linhas
for j = 0 to N-1 do x(i, j)=X(j);
end for

```

Figura 3.26: Pseudocódigo da FFT bidimensional.

3.3.2.4. Usando Wavelets na vetorização

Como visto, o processo de vetorização é baseado em correlações. Mesmo usando FFT, o custo computacional é alto. Neste contexto, o uso de Wavelets mostra-se adequado na otimização do processamento, aproveitando as características multiescalares das distribuições dos poros nas imagens em estudo. O processo otimizado é mostrado na Figura 3.27 e consiste em se processar a correlação em imagens de tamanhos pequenos. O reconhecimento dos círculos inscritos é realizado em faixas de raios determinados (até 16 pixels) sobre a mesma imagem transformada por

Wavelets. O processamento se estende até um valor tolerado e previamente definido atribuído a variável R_{tol} .

Figura 3.27 : Processo de vetorização otimizado por Wavelets.

Transformada 2D Wavelet Haar

A transformada bidimensional usando Wavelet Haar tem seus processos de Decomposição e Composição mostrados respectivamente na Figura 3.28 e a Figura 3.30. Pode-se observar que esses processos bidimensionais são compostos pela combinação dos processos unidimensionais da Figura 3.29 e da Figura 3.31.


```
procedure ImageDecomposition
parameters:
Image : Imagem quadrada a ser transformada;
Size : número de linhas/colunas;
Steps : número de decomposições;
begin
h := Size;
Cont := 0;
while (h > 1) and (Cont < Steps) do
    ROWS TRANSFORM
    Decomposition1D;
    COLUMNS TRANSFORM
    Decomposition1D;
    h = h div 2;
    Cont = Cont + 1;
end;
end procedure.
```

Figura 3.28: pseudocódigo para a implementação da Transformada Wavelets de uma imagem bidimensional.

```
procedure Decomposition1D
parameters:
Array : vetor a ser transformado;
Size : número de linhas;
begin
ArrayAux := Array1D;
for IND = 1 to Size div 2 do
    ArrayAux[IND] = (Array[2*IND-1] + Array[2*IND]) / 2;
    ArrayAux[h/2+IND] =
        (Array[2*IND-1] - Array[2*IND]) / 2;
end;
Array := ArrayAux;
end procedure.
```

Figura 3.29: pseudocódigo para a implementação da Transformada Wavelets unidimensional baseada na função básica wavelet Haar.

```

procedure ImageComposition
parameters:
Image : Imagem quadrada a ser transformada;
Size : número de linhas/colunas;
Steps : número de decomposições;
begin
h = Size div 2^Passos-1;
while (h <= Size) do
    ROWS TRANSFORM
    Composition1D;
    COLUMNS TRANSFORM
    Composition1D;
    h = h * 2;
end;
end procedure.

```

Figura 3.30: pseudocódigo para a implementação da Transformada Wavelets Inversa de uma imagem bidimensional.

```

procedure Composition1D
parameters:
Array : vetor a ser transformado;
Size : número de linhas;
begin
ArrayAux := Array;
h = Size div 2;
for IND = 1 to h do
    ArrayAux[2*IND-1]=Array[IND]+Array[h+IND];
    ArrayAux[2*IND]=Array[IND]-Array[h+IND];
end;
Array := ArrayAux;
end procedure.

```

Figura 3.31: pseudocódigo para a implementação da Transformada Wavelets Inversa unidimensional baseada na função básica wavelet Haar.

Corrigir dados em função da escala

Para se corrigir os dados em função da escala, basta multiplicar-se o raio encontrado por 2 a cada decomposição bidimensional por Transformada Wavelets aplicada a imagem em estudo.

3.3.3. Extração de atributos e classificação

O processo de classificação é uma etapa muito importante para a aplicação do modelo em experimentos reais. No entanto, dada a sua complexidade, concluiu-se que o módulo de classificação deverá ser estudado com mais afinco por pesquisadores da Computação juntamente com os da Agronomia (Ciências do Solo) em trabalhos futuros.

Os parâmetros armazenados no banco de dados devem ser escolhidos tendo em vista que eles serão usados para classificar o meio poroso em estudo. Para isso devem representar atributos que permitam a classificação.

Como exemplo de atributos que podem ser usados na classificação de meios porosos, lista-se:

- Densidade (DE) – número de poros por milímetro quadrado;
- Mediana (ME) – valor do raio mediano dos raios inscritos nos poros reconhecidos;
- Desvio padrão (SD) – dos raios inscritos dos poros reconhecidos;

Associado a cada campo existe um outro campo que determina a tolerância usada para se assumir um dado como sendo da classe ID.

Desta forma, o banco de dados teria os seguintes campos:

ID (int)	DESC (Text)	DE (float)	DETol (float)	ME (float)	METol (float)	SD (float)	SDTol (float)
001*	Areia*	20,5*	10	12,3*	10	15,5*	10
002*	Argila*	100*	10	5*	10	15,5*	10
...							

(*dados fictícios para ilustração da composição dos campos do banco de dados.)

A classificação pode ser realizada, na sua forma mais simples, comparando-se os atributos obtidos da imagem do meio porosos em testes com os atributos armazenados no bando de dados. Uma interface mostraria

na forma de, por exemplo, porcentagens o quanto aquele meio poroso se correlaciona com os previamente estudados.

```
N = número de classes armazenadas no banco de dados;  
DELida = Densidade obtida da imagem em estudos  
for id = 1 to N do:  
begin:  
  DEBD[id] = Densidade da classe i do banco de dados;  
  Correlação[id] = DELida/DEBD[i];  
end.
```

O algoritmo pode comparar os campos, como exemplificado no pseudocódigo acima, para o caso da densidade. Quando mais próximo do valor da Correlação[id] se aproximar do valor 1 (um) maior será a probabilidade do meio poroso em estudos ser classificado com sendo da classe representada por *id*.

4. Resultados e Conclusões

Neste capítulo são apresentados resultados do processamento do modelo computacional desenvolvido e as conclusões.

4.1. Aplicação em imagem de Tomografia por Raios-X

De forma a comprovar a aplicabilidade do modelo computacional em imagens reais de tomografia computadorizada por Raios-X, fez-se uso de um phantom heterogêneo.

Adicionalmente é apresentada uma sequência de imagens resultantes do processamento de dados reconstruídos de uma amostra de solo, a qual se caracteriza como sendo um meio poroso.

Quanto ao phantom heterogêneo, o mesmo possui 6 cm de diâmetro e contém 5 diferentes coeficientes de atenuação linear em uma mesma energia considerada. A Figura 4.1 ilustra a distribuição para *Ca*, *P*, *Al* e água no cilindro de *Plexiglass*.

Figura 4.1: Diagrama esquemático da distribuição de *Ca*, *P*, *Al*, H_2O e *Plexiglass* na composição do phantom estudado.

Para a obtenção da imagem tomográfica os seguintes parâmetros foram utilizados:

- Translação total : 6 cm;
- Passo linear : 0,1 cm;
- Rotação total : 180°;
- Passo de rotação : 3°;
- Número médio de fótons em feixe livre : 10.000;
- Tempo por passo linear: 10s;
- Energia : 60 keV;

A reconstrução foi obtida pelo método de retroprojeção filtrada. A Figura 4.2 ilustra uma imagem do phantom reconstruída em 256 níveis de cinza de representação.

Figura 4.2 : Phantom heterogêneo reconstruído por retroprojeção filtrada. (Imagem em 256 níveis de cinza).

O modelo foi aplicado e as imagens de cada etapa são mostradas a seguir respectivamente para imagens obtidas nas resoluções 81x81, 49x49, 25x25 e 13x13 pixels. A paleta de tons de cinza representam o mesmo escopo de coeficientes de atenuação linear (em cm⁻¹) para todo o conjunto de imagens do phantom heterogêneo ensaio.

A resolução definida como padrão foi de 400 colunas por 400 linhas (400x400 pixels), e a escala se mantém constante em todos as

reconstruções, pois são do mesmo objeto (phantom).

A seguir são apresentados os estudos de casos que ilustram os resultados dos processamentos sobre as imagens digitais ensaiadas. Assim, essas seqüências seguem as seguintes etapas:

1. **Imagens originais** – Figura 4.3, Figura 4.11, Figura 4.19 e Figura 4.27 mostram as imagens originais reconstruídas respectivamente nas resoluções 81x81, 49x49, 25x25 e 13x13. Seus tamanhos representam proporcionalmente suas reais dimensões.
2. **Imagens com escalas e resoluções adequadas** – na Figura 4.4, Figura 4.12, Figura 4.20 e Figura 4.28 são mostradas as imagens rearranjadas para a escala e resolução padrão, no caso, de 400x400 pixels.
3. **Imagens após processo de segmentação** – nesta etapa de análise foi aplicado filtro “*threshold*” com valor 110 nas imagens mostradas pela Figura 4.5, Figura 4.13, Figura 4.21 e Figura 4.29. Alguns poros são segmentados, sendo destacados das imagens. Após este processamento, conforme resultados pode-se notar um excessivo e progressivo efeito de serrilhamento.
4. **Imagens após detecção de bordas** – Nesta etapa do processamento de convolução no domínio espacial com filtro tipo Laplaciano sobre as imagens segmentadas foram geradas as imagens das bordas conforme ilustradas pelas Figura 4.6, Figura 4.14, Figura 4.22 e Figura 4.30.
5. **Imagens resultantes da suavização do efeito de serrilhamento (técnica Sub-Pixel)** – Figura 4.7, Figura 4.15,

Figura 4.23 e Figura 4.31 ilustram resultados do processo de suavização. Foram processadas as funções de vetorização das conexões 90 graus, seguidas do pré-processamento por Wavelets Haar e da interpolação bidimensional por B-Wavelets.

6. **Imagens reconstituídas** – Figura 4.8, Figura 4.16, Figura 4.24 e Figura 4.32 ilustram somente o resultado da interpolação por B-Wavelets. São processados preenchimentos de forma a reconstituir as imagens que são respectivamente apresentadas em Figura 4.9, Figura 4.17, Figura 4.25 e Figura 4.33.
7. **Imagens vetorizadas em função de círculos inscritos** – nesta etapa, o processamento de vetorização localiza círculos inscritos e não sobrepostos sobre a imagem de entrada. Figura 4.10, Figura 4.18, Figura 4.26 e Figura 4.34 ilustram os círculos inscritos reconhecidos e marcados em destaque.
8. **Imagens na forma de dados vetoriais** – como resultados dos processamentos são geradas as tabelas rotuladas, conforme ilustram Tabela 4.1, Tabela 4.2, Tabela 4.3 e Tabela 4.4, as quais mostram os dados das coordenadas cartesianas dos círculos reconhecidos e seus respectivos raios na unidade pixel.

Figura 4.3 : Imagem original do phantom heterogêneo na resolução 81x81 pixels (CORPO25.IMG).

Figura 4.4: Imagem do phantom heterogêneo rearranjada para de 81x81 para a resolução padrão de 400x400 pixels.

Figura 4.5: Imagem do phantom heterogêneo (CORPO25.IMG) submetida a filtro tipo "threshold" com valor 110 segmentando alguns poros.

Figura 4.6: Imagem do phantom heterogêneo (CORPO25.IMG) segmentada após processamento por filtro laplaciano, tendo suas bordas destacadas.

Figura 4.7: Imagem do phantom heterogêneo (CORPO25.IMG) após os processamentos de vetorização das conexões 90 graus, pré-processamento por Wavelets Haar e interpolação por B-Wavelets.

Figura 4.8: Imagem do phantom (CORPO25.IMG) representado apenas pelo resultado da interpolação B-Wavelets.

Figura 4.9: Imagem do phantom heterogêneo (CORPO25.IMG) suavizada e reconstituída.

Figura 4.10: Imagem do phantom heterogeneo (CORPO25.IMG) com o resultado da vetorização em destaque.

Id	Coluna	Linha	Raio
001	115	199	62
002	199	282	53
003	199	114	53

Tabela 4.1: Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poros segmentados do phantom heterogeneo.

Figura 4.11 : Imagem original do phantom heterogeneo na resolução 49x49 pixels (CORPO37.IMG).

Figura 4.12: Imagem do phantom heterogêneo (CORPO37.IMG) rearranjada de 49x49 pixels para a resolução padrão de 400x400.

Figura 4.13: Imagem do phantom heterogêneo (CORPO37.IMG) submetida a filtro tipo “*threshold*” com valor 110.

Figura 4.14: Imagem do phantom heterogêneo (CORPO37.IMG) após processamento por filtro laplaciano com suas bordas destacadas.

Figura 4.15: Imagem do phantom (CORPO37.IMG) após os processamentos de vetorização das conexões 90 graus, pré-processamento usando Wavelets Haar e interpolação por B-Wavelets.

Figura 4.16: Imagem do phantom heterogêneo (CORPO37.IMG) representado apenas pelo resultado da interpolação.

Figura 4.17: Imagem do phantom (CORPO37.IMG) suavizada e reconstituída.

Figura 4.18: Imagem do phantom (CORPO37.IMG) com o resultado da vetorização.

Id	Coluna	Linha	Raio
001	115	199	60
002	199	280	55
003	198	114	52

Tabela 4.2 : Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poros segmentados do phantom heterogêneo 49x49.

Figura 4.19 : Imagem original do phantom heterogêneo na resolução 25x25 pixels (CORPO75.IMG).

Figura 4.20: Imagem do phantom heterogêneo (25x25) rearranjada para a resolução padrão de 400x400 pixels.

Figura 4.21: Imagem do phantom heterogêneo (25x25) submetida a filtro tipo "threshold" com valor 110 segmentando alguns poros.

Figura 4.22: Imagem do phantom heterogêneo (25x25) segmentada após processamento por filtro laplaciano e tendo suas bordas destacadas.

Figura 4.23: Imagem do phantom heterogêneo (25x25) após os processamentos de vetorização das conexões 90 graus, pré-processamento usando Wavelets Haar e interpolação por B-Wavelets.

Figura 4.24: Imagem do phantom heterogêneo (25x25) representado apenas pelo resultado da interpolação B-Wavelets.

Figura 4.25: Imagem do phantom heterogêneo (25x25) suavizada e reconstituída.

Figura 4.26: Imagem do phantom heterogêneo suavizada com o resultado da vetorização em destaque.

Id	Coluna	Linha	Raio
001	119	198	58
002	198	277	53
003	199	114	50

Tabela 4.3 : Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poros segmentados do phantom heterogêneo 25x25.

Figura 4.27 : Imagem original do phantom heterogêneo na resolução 13x13 pixels (CORPO15.IMG).

Figura 4.28: Imagem do phantom heterogêneo (13x13) rearranjada para a resolução padrão de 400x400 pixels.

Figura 4.29: Imagem do phantom heterogêneo (13x13) submetida a filtro tipo "threshold" com valor 110 segmentando alguns poros.

Figura 4.30: Imagem do phantom heterogêneo (13x13) segmentada após processamento por filtro laplaciano e tendo suas bordas destacadas.

Figura 4.31: Imagem do phantom heterogêneo (13x13) após os processamentos de vetorização das conexões 90 graus, pré-processamento usando Wavelets Haar e interpolação por B-Wavelets.

Figura 4.32: Imagem do phantom heterogêneo (13x13) representado apenas pelo resultado da interpolação B-Wavelets.

Figura 4.33: Imagem do phantom heterogêneo (13x13) reconstituída.

Figura 4.34: Imagem do phantom heterogêneo (13x13) suavizada com o resultado da vetorização em destaque.

Id	Coluna	Linha	Raio
001	132	199	55
002	198	280	46
003	200	115	47

Tabela 4.4 : Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poros segmentados do phantom heterogêneo 13x13.

4.1.1. Avaliação dos resultados obtidos com o ensaio do phantom heterogêneo

Observando-se os valores obtidos com o ensaio do phantom heterogêneo, tem-se que o número de círculos inscritos se manteve estável no valor 3, ou seja, o objeto pode ser representado na forma vetorial por 3 círculos.

A Tabela 4.5 mostra que a distribuição espacial dos centros dos círculos inscritos, assim como os seus respectivos raios mantiveram-se dentro de uma tolerância de 15%, com média aritmética dos erros em 1.2%.

	C1	C2	E(C2,C1)	C3	E(C3,C1)	C4	E(C4,C1)
ID1	115	115	0.0000	119	-0.0348	132	-0.1478
ID2	199	199	0.0000	198	0.0050	198	0.0050
ID3	199	198	0.0050	199	0.0000	200	-0.0050
	L1	L2	E(L2,L1)	L3	E(L3,L1)	L4	E(L4,L1)
ID1	199	199	0.0000	198	0.0050	199	0.0000
ID2	282	280	0.0071	277	0.0177	280	0.0071
ID3	114	114	0.0000	114	0.0000	115	-0.0088
	R1	R2	E(R2,R1)	R3	E(R3,R1)	R4	E(R4,R1)
ID1	62	60	0.0323	58	0.0645	55	0.1129
ID2	53	55	-0.0377	53	0.0000	46	0.1321
ID3	53	52	0.0189	50	0.0566	47	0.1132

Tabela 4.5 : Valores das colunas (Cx), linhas (Lx) e raios (Rx) em função das colunas, linhas e raios da imagem de maior resolução (C1, L1 e R1). A função E é dada por $E(a,b) = (b-a)/a$.

4.1.2. Imagens de amostras de meios porosos (solos)

Um conjunto de quatro amostras não deformadas de latossolo vermelho distrófico coletadas em perfil de solo em diferentes profundidades (5cm, 25cm, 30cm e 37cm) na forma de um cubo (15x15x15cm), tiveram suas imagens tomográficas adquiridas a partir dos seguintes parâmetros:

- Translação total : 8 cm;
- Passo linear : 0,2 cm;
- Rotação total : 180°;
- Passo de rotação : 4.5°;
- Número médio de fótons em feixe livre : 10.000;
- Tempo por passo linear: 10s;
- Energia : 60 keV;

Os ensaios foram realizados em um tomógrafo computadorizado dedicado à Ciência do Solo, localizado na Embrapa Instrumentação Agropecuária, S. Carlos, SP, em energia de 60keV com fonte de ^{241}Am (Amerício).

A Figura 4.35 ilustra a distribuição dos níveis de cinza em função dos coeficientes de atenuação.

Figura 4.35 : Imagem de amostra de solo reconstruída por retroprojeção filtrada. (Imagem em 256 níveis de cinza).

Mantendo-se a mesma ordem adotada para os estudos com o phantom heterogêneo, as imagens de amostras de solo resultantes dos processamentos são apresentadas na sequência apresentada abaixo:

1. **Imagens originais** – Nas figuras de legenda Figura 4.36, Figura 4.45, Figura 4.54 e Figura 4.63 são mostradas as imagens originais reconstruídas e todas na resolução 22x22.
 2. **Imagens com escalas e resoluções adequadas** – Figura 4.37, Figura 4.46, Figura 4.55 e Figura 4.64 ilustram as imagens rearranjadas para a escala e resolução padrão de 400x400 pixels.
 3. **Imagens após processo de segmentação** – aplicado-se filtro “*threshold*” com valor 110 nas imagens mostradas por Figura 4.38, Figura 4.47, Figura 4.56 e Figura 4.65. Poros são destacados nas imagens.
 4. **Imagens após detecção de bordas** – o processamento de filtro tipo Laplaciano sobre as imagens gerou as imagens das bordas ilustradas por: Figura 4.39, Figura 4.48, Figura 4.57 e Figura 4.66.
 5. **Imagens resultantes da suavização do efeito de serrilhamento (técnica Sub-Pixel)** – Figura 4.40, Figura 4.49, Figura 4.58 e Figura 4.67 ilustram imagens resultantes do processo de suavização. Foram processadas as funções de vetorização das conexões 90 graus, seguidas do pré-processamento por Wavelets Haar e da interpolação bidimensional por B-Wavelets.
 6. **Imagens reconstituídas** – Figura 4.41, Figura 4.50, Figura 4.59 e Figura 4.68 contém somente o resultado da interpolação por B-Wavelets. São processados preenchimentos de forma a reconstituir as imagens que são respectivamente representadas pela Figura 4.42, Figura 4.51, Figura 4.60 e Figura 4.69.
-

7. **Imagens vetorizadas em função de círculos inscritos** – o processamento de vetorização é realizado e os resultados mostrados em Figura 4.43, Figura 4.52, Figura 4.61 e Figura 4.70 onde se tem os círculos inscritos destacados.
8. **Imagens na forma de dados vetoriais** – As tabelas rotuladas de Tabela 4.6, Tabela 4.7, Tabela 4.8 e Tabela 4.9 contém respectivamente os dados das coordenadas cartesianas dos círculos reconhecidos e seus raios em pixels.

Figura 4.36 : Imagem original de amostra de solo na resolução 22x22 pixels (SOLO.IMG).

Figura 4.37: Imagem da amostra de solo rearranjada de 22x22 para a resolução padrão de 400x400 pixels.

Figura 4.38: Imagem de amostra de solo (SOLO.IMG) submetida a filtro tipo “threshold” com valor 110 segmentando alguns poros.

Figura 4.39: Imagem de amostra de solo (SOLO.IMG) segmentada após processamento por filtro laplaciano, tendo suas bordas destacadas.

Figura 4.40: Imagem do amostra de solo (SOLO.IMG) após os processamentos de vetorização das conexões 90 graus, pré-processamento por Wavelets Haar e interpolação por B-Wavelets.

Figura 4.41: Imagem de amostra de solo (SOLO.IMG) representada apenas pelo resultado da interpolação B-Wavelets.

Figura 4.42: Imagem de amostra de solo (SOLO.IMG) suavizada e reconstituída, tendo apenas o maior poro destacado.

Figura 4.43: Imagem de poro em amostra de solo (SOLO.IMG) com o resultado da vetorização em destaque.

Id	Coluna	Linha	Raio
001	333	101	34
002	285	174	32
003	286	61	25
004	360	221	25
005	177	160	24
006	304	309	24
007	350	162	22
008	251	232	22
009	356	271	21
010	242	273	18
011	354	33	16
012	283	122	15
013	284	375	15
014	320	31	14
015	331	338	14
016	192	290	13
017	315	364	10
018	209	117	9
019	246	371	8

Tabela 4.6 : Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poro segmentado da amostra de solo (SOLO.IMG).

A Figura 4.44 ilustra o histograma da distribuição de poros por tamanho de raio identificado na primeira amostra de solo analisada.

Figura 4.44 : Gráfico de distribuição das quantidades pelos tamanhos de raios dos círculos inscritos, em pixels, resultantes da vetorização.

Figura 4.45 : Imagem original de amostra de solo na resolução 22x22 pixels (U3.IMG).

Figura 4.46: Imagem da amostra de solo (U3.IMG) rearranjada de 22x22 para a resolução padrão de 400x400 pixels.

Figura 4.47: Imagem de amostra de solo (U3.IMG) submetida a filtro tipo “threshold” com valor 110 segmentando alguns poros.

Figura 4.48: Imagem de amostra de solo (U3.IMG) segmentada após processamento por filtro laplaciano, tendo suas bordas destacadas.

Figura 4.49: Imagem do amostra de solo (U3.IMG) após os processamentos de vetorização das conexões 90 graus, pré-processamento por Wavelets Haar e interpolação por B-Wavelets.

Figura 4.50: Imagem de amostra de solo (U3.IMG) representada apenas pelo resultado da interpolação B-Wavelets.

Figura 4.51: Imagem de amostra de solo (U3.IMG) suavizada e reconstituída.

Figura 4.52: Imagem de poro em amostra de solo (U3.IMG) com o resultado da vetorização em destaque.

Id	Coluna	Linha	Raio
001	239	54	31
002	316	163	28
003	275	293	24
004	308	57	20
005	140	65	20
006	53	71	19
007	71	196	19
008	59	362	19
009	131	353	18
010	177	171	16
011	351	354	11
012	118	26	10
013	316	245	9
014	153	263	9

Tabela 4.7 : Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poro segmentado da amostra de solo (U3.IMG).

A Figura 4.53 ilustra o histograma da distribuição de poros por tamanho de raio identificado na segunda amostra de solo analisada.

Figura 4.53: Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poro segmentado da amostra de solo (U3.IMG).

Figura 4.54 : Imagem original de amostra de solo na resolução 22x22 pixels (U6.IMG).

Figura 4.55: Imagem da amostra de solo (U6.IMG) rearranjada de 22x22 para a resolução padrão de 400x400 pixels.

Figura 4.56: Imagem de amostra de solo (U6.IMG) submetida a filtro tipo "threshold" com valor 110 segmentando alguns poros.

Figura 4.57: Imagem de amostra de solo (U6.IMG) segmentada após processamento por filtro laplaciano, tendo suas bordas destacadas.

Figura 4.58: Imagem do amostra de solo (U6.IMG) após os processamentos de vetorização das conexões 90 graus, pré-processamento por Wavelets Haar e interpolação por B-Wavelets.

Figura 4.59: Imagem de amostra de solo (U6.IMG) representada apenas pelo resultado da interpolação B-Wavelets.

Figura 4.60: Imagem de amostra de solo (U6.IMG) suavizada e reconstituída, tendo apenas o maior poro destacado.

Figura 4.61: Imagem de poro em amostra de solo (U6.IMG) com o resultado da vetorização em destaque.

Id	Coluna	Linha	Raio
001	246	227	139
002	126	82	44
003	100	339	42
004	71	260	37
005	92	132	16
006	75	191	12
007	11	11	12
008	45	45	10

Tabela 4.8 : Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poro segmentado da amostra de solo (U6.IMG).

A Figura 4.62 ilustra o histograma da distribuição de poros por tamanho de raio identificado na terceira amostra de solo analisada.

Figura 4.62: Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poro segmentado da amostra de solo (U6.IMG).

Figura 4.63 : Imagem original de amostra de solo na resolução 22x22 pixels (U9.IMG).

Figura 4.64: Imagem da amostra de solo rearranjada de 22x22 para a resolução padrão de 400x400 pixels (U9.IMG).

Figura 4.65: Imagem de amostra de solo (U9.IMG) submetida a filtro tipo "threshold" com valor 110 segmentando alguns poros.

Figura 4.66: Imagem de amostra de solo (U9.IMG) segmentada após processamento por filtro laplaciano, tendo suas bordas destacadas.

Figura 4.67: Imagem do amostra de solo (U9.IMG) após os processamentos de vetorização das conexões 90 graus, pré-processamento por Wavelets Haar e interpolação por B-Wavelets.

Figura 4.68: Imagem de amostra de solo (U9.IMG) representada apenas pelo resultado da interpolação B-Wavelets.

Figura 4.69: Imagem de amostra de solo (U9.IMG) suavizada e reconstituída, tendo apenas o maior poro destacado.

Figura 4.70: Imagem de poro em amostra de solo (U9.IMG) com o resultado da vetorização em destaque.

Id	Coluna	Linha	Raio
001	243	104	74
002	149	313	70
003	82	180	65
004	87	68	44
005	347	303	30
006	51	339	28
007	267	198	23
008	332	357	22
009	162	36	21
010	37	259	19
011	306	269	9

Tabela 4.9 : Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poro segmentado da amostra de solo (U9.IMG).

A Figura 4.71 ilustra o histograma da distribuição de poros por tamanho de raio identificado na quarta amostra de solo analisada.

Figura 4.71: Distribuição dos centros e raios resultantes da vetorização dos poro segmentado da amostra de solo (U9.IMG).

A Figura 4.72 mostra gráfico com superposições dos histogramas das imagens SOLO.IMG, U3.IMG, U6.IMG e U9.IMG. Pode-se observar a variação da distribuição do tamanho e quantidade dos poros nas amostras de solo ensaiadas.

Figura 4.72: Gráfico com os histogramas sobrepostos das distribuições dos raios das amostras de solo. Seqüência1 indica os resultados de SOLO.IMG; Seqüência 2 de U3.IMG; Seqüência 3 de U9.IMG e Seqüência 4 de U6.IMG.

4.1.3. Avaliação de desempenho usando otimização por Wavelets

Para cálculo do ganho em tempo de processamento no processo de vetorização usando-se Wavelets, os seguintes custos computacionais são assumidos em número de iterações:

Custo computacional:

FFT (Transformada Rápida de Fourier)	$N \log_2 N$
IFFT (Inversa da FFT)	$N \log_2 N$
Varredura em todos os pixels	N^2
Transformada Wavelets	N^2
Processo "Achar círculos inscritos"	$3 * N \log_2 N + 2 * N^2$

Assume-se ainda, objetivando-se uma comparação, que sejam identificadas raio de tamanho 1 ao 128 pixels ($M=128$). O tamanho da imagem em processamento é de 1024x1024 pixels ($N=1024$).

4.1.3.1. Para o processo sem otimização por Wavelets:

O número de iterações (NI) no caso otimizado é dado por M vezes o Processo "Achar círculos inscritos", desta forma:

FFT (Transformada Rápida de Fourier)	10.240
IFFT (Inversa da FFT)	10.240
Varredura em todos os pixels	1.048.576
Processo "Achar círculos inscritos"(ACI)	2.127.872
$NI = M * ACI$	272.367.616

4.1.3.2. Para o processo com otimização por Wavelets:

Para cobrir o mesmo escopo de 128 tamanhos de raios o algoritmo otimizado processa os seguintes cálculos:

Processamento 1

Na primeira etapa o número de linhas e colunas da imagem se mantém inalterado. Para cobrir o escopo inicial de 16 diferentes raios é necessária a aplicação de 16 vezes o processo de “Achar círculos inscritos” (ACI) o que totaliza pouco mais de 34 milhões de iterações conforme mostrado pela tabela abaixo.

$N = 1024$ (número de colunas e linhas)

$M = 16$ (número de raios reconhecidos)

FFT (Transformada Rápida de Fourier)	10.240
IFFT (Inversa da FFT)	10.240
Varredura em todos os pixels	1.048.576
Processo “Achar círculos inscritos”(ACI)	2.127.872
NI = M*ACI	34.045.952

Processamento 2:

O algoritmo de otimização, após processados os 16 primeiros raios, efetua uma transformada Wavelets Haar na imagem original, o que equivale, para uma imagem de 1024x1024pixels aproximadamente 1 milhão de iterações. Sobre os coeficientes de detalhes da imagem transformada, que agora possui 512 colunas por 512 linhas é processado o 8 vezes o ACI, o que equivale a varrer os raios de valores 16 a 32 pixels. A tabela abaixo contabiliza o custo computacional deste processamento, o que equivale a 5,3 milhões de operações.

$N = 512$ (número de colunas e linhas)

$M = 8$ (número de raios reconhecidos)

Transformada Wavelets (TW)	1.048.576
FFT (Transformada Rápida de Fourier)	4.608
IFFT (Inversa da FFT)	4.608
Varredura em todos os pixels	262.144
Processo "Achar círculos inscritos"(ACI)	538.112
$NI = M*ACI+TW$	5.353.472

Processamento 3:

Para o reconhecimento dos raios equivalentes ao escopo do raio 32 ao 64, são necessários, segundo a aplicação do algoritmo de otimização, oito vezes o processamento ACI sobre imagem de 256x256 pixels mais uma transformada Wavelets (TW) sobre a imagem de 512x512. Isso totaliza (vide tabela abaixo) pouco mais de 1 milhão de iterações.

$N = 256$ (número de colunas e linhas)

$M = 8$ (número de raios reconhecidos)

Transformada Wavelets (TW)	262.144
FFT (Transformada Rápida de Fourier)	2.048
IFFT (Inversa da FFT)	2.048
Varredura em todos os pixels	65.536
Processo "Achar círculos inscritos"(ACI)	137.216
$NI = M*ACI+TW$	1.359.872

Processamento 4:

Finalizando o reconhecimento dos raios de 64 a 128, são necessários mais 8 vezes o ACI e uma TW, considerando que agora a imagem possui uma resolução de 128x128 pixels, resultantes dos processamento da

Transformada Wavelet anterior. A tabela abaixo mostra os respectivos valores.

$N = 128$ (número de colunas e linhas)

$M = 8$ (número de raios reconhecidos)

Transformada Wavelets (TW)	65.536
FFT (Transformada Rápida de Fourier)	896
IFFT (Inversa da FFT)	896
Varredura em todos os pixels	16.384
Processo "Achar círculos inscritos"(ACI)	35.456
$NI = M*ACI+TW$	349.184

Após o *Processamento 4* o escopo de 128 raios foi totalizado ($16+2*8+4*8+8*8$). Desta forma somando-se os resultados e comparando-os tem-se:

Algoritmo	Número de iterações
Não otimizado (A)	272.367.616
Otimizado (B)	41.108.480
Ganho computacional $[100-(B/A*100)]$	84,09%

Recalculando-se o custo computacional do algoritmo sem otimização para o mesmo número de raios efetivamente reconhecidos pelo algoritmo otimizado, ou seja, 40 raios ($16 + 8 + 8 + 8$), o resultado da comparação passa a ter os valores descritos na tabela a seguir.

Algoritmo	Número de iterações
Não otimizado (A)	85.114.880
Otimizado (B)	41.108.480
Ganho computacional $[100-(B/A*100)]$	51,70%

4.1.4. Conclusões

Em face aos resultados obtidos, as seguintes conclusões parciais podem ser enumeradas:

1. *Quanto à organização da implementação do modelo* – implementou-se o modelo computacional em linguagem de programação C++ orientada a objetos o que permitiu que todas as etapas do processamento e suas funções fossem organizadas em métodos contidos em classes. Dessa forma obteve-se um conjunto utilizável de ferramentas em múltiplas plataformas computacionais;
 2. *Quanto à suavização por sub-pixel* – a suavização do efeito de serrilhamento realizada pelo método de interpolação usando-se B-Wavelets mostrou-se adequada aos propósitos do modelo, pois pré-processa a imagem de entrada de forma a permitir uma vetorização representativa em função dos círculos inscritos;
 3. *Quanto à vetorização por círculos inscritos* – dadas às características morfológicas dos poros, e pelo fato de ser baseada em uma técnica de cálculo de porosidade, a vetorização por círculos inscritos mostrou-se adequada;
 4. *Quanto ao pré-processamento dos dados para interpolação usando Transformada Wavelets Haar (TW)* – o resultado da vetorização das conexões 90 graus fornecem as coordenadas cartesianas das intersecções entre duas retas perpendiculares e são tratados de forma a adequá-los pela TW Haar permitindo o passo posterior de interpolação;
 5. *Quanto aos ensaios com phantom heterogêneo reconstruído em diferentes resoluções* – as imagens processadas geraram, a partir da aplicação do modelo, resultados que foram apresentados na Tabela 4.5. A análise destes resultados permite concluir que a estrutura dos
-

poros foram mantidas, podendo-se representá-los a partir de 3 círculos. Os valores mostram ainda que os raios encontrados assim como as coordenadas cartesianas dos seus centros mantiveram-se com um erro médio de 1,2%. Esse erro é baixo considerando-se que a variação das resoluções foi da ordem de 6 vezes;

6. *Quanto aos ensaios com meios porosos (solos)* – o modelo computacional uma vez aplicado em imagens de tomografia computadorizada de amostras de solos, conforme resultados apresentados nas figuras Figura 4.36, Figura 4.45, Figura 4.54 e Figura 4.63 ilustram a potencialidade do método para análise de amostras reais de meios porosos. Pode-se observar a possibilidade de se calcular os raios inscritos e se visualizar a distribuição dos raios e centros de cada círculo encontrado, o que permite a obtenção de parâmetros de interesse para a área de Física de Solos;
7. *Quanto ao ganho computacional* – foi calculado, com base em número de iterações, o custo computacional da aplicação do modelo sem otimização e com o processo otimizado. Para uma imagem de 1024x1024pixels o ganho computacional máximo foi da ordem de 84%. Esse ganho é diretamente proporcional ao tamanho da imagem de entrada;
8. *Quanto ao uso de Wavelets* – o uso de Wavelets Haar no pré-processamento dos dados para interpolação e no algoritmo de otimização de desempenho no processamento de vetorização por círculos inscritos e da B-Wavelets na interpolação dos dados para suavização mostrou-se adequada e se caracterizou como uma das contribuições originais da pesquisa desenvolvida.

Finalmente, como conclusão geral, tem-se que o desenvolvimento desta pesquisa viabilizou a geração de um modelo computacional para relacionar imagens digitais em diferentes escalas e resoluções, se apresentando como

um método de auxílio à tomada de decisões em processos que envolvam o estudo de meios porosos.

4.1.5. Proposta de desenvolvimentos futuros

- Estudo da resolução ótima para representar classes de meios porosos.
 - Estudar os melhores métodos de classificação para serem usados com o banco de dados gerado pelo sistema.
 - Descrição de contornos com diversas técnicas a exemplo de interpolação polinomial.
-

Referências Bibliográficas

- [AYLMORE-1993] AYLMORE, L.A.G. "Use of computer-assisted tomography in studying water movement around plant roots." *Advances in Agronomy*, San Diego, v.49, p.1-52, 1993.
- [BEAR-1968] Bear, J., D. Zaslavsky and L. Irmay. 1968. *Physical Principles of Water Percolation and Seepage*. UNESCO-Paris.
- [BEAR-1969] Bear, J. 1969. Hydrodynamic dispersion. In: R.J.M. De Wiest (Ed.): *Flow through porous media*, Academic Press, New York and London.
- [BEAR-1972] Bear, J. 1972. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Elsevier Science., New York. Bear, J. and Y. Bachmat 1967 A generalized theory of hydrodynamic dispersion in porous media. *Proc. Intl. Assoc. Sci. Hydrol. Symp. Haifa*, publ. No.72.
- [BERTOLUZZA-2000] Bertoluzza, S; Canuto, C; Urban, "On the adaptive computation of integrals of wavelets", *Applied Numerical Mathematics*, 34, pp. 13-38, 2000.
- [BEVEN-1982] Beven, K. and P. Germann. 1982. Macropores and water flow in soils. *Water Resour. Res.* 18:1311-1325.
- [BOULFELFEL-1994] - BOULFELFEL, D.; RANGAYAN, R.M.; HAHN, L.J.; KUDUVALLI, G.R., "Two-Dimensional Restoration of Single Photon Emission Computed Tomography Images Using the Kalman Filter", *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v.13, n.1, p.102-108, 1994.
- [BUDINGER-1974] - BUDINGER, T.F.; GULLBERG, G.T., "Three Dimensional Reconstruction in Nuclear Emission Imaging", *IEEE Transactions on Nuclear Science*, v.NS-21, n.3, p.2-20, June 1974.
- [BUENO-1995] - BUENO, J.M., "Reconstrução e Visualização Tridimensional de Imagens Tomográficas Baseada no uso de Transformada Rápida de Fourier", São Carlos, USP, Tese de Mestrado, 130 páginas, 1995.
- [BURGER-1989] - BURGER, P., GILLIES, D., "Interactive Computer Graphics - Functional, Procedural and Device-Level Methods", Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [CAÇÃO-1994] - CAÇÃO, G.R., "Desenvolvimento de um algoritmo para a reconstrução tridimensional para imagens de um minitomoógrafo baseado no método de reconstrução algébrica modificado e interpolação", São Carlos, SP, UFSCar, Depto. Computação, Tese de Mestrado, 122 páginas, 1994.
- [CHO-1974] - CHO, Z.H., "General Views on 3D Image Reconstruction and Computerized Transverse Axial Tomography", *IEEE Transactions on Nuclear Science*, v.NS-21, p.44-71, Jun. 1974.
- [CHO-1975] - CHO, Z.H.; CHAN, J.K., "A comparative study of 3-D Image Reconstruction Algorithm with Reference to Number of Projections and Noise Filtering", *IEEE Transactions on Nuclear Science*, v.NS-22, p.344-363, Feb.1975.
- [CHUI-1992a] - CHUI, C.K., "An introduction to Wavelets", Academic Press- 1992.

- [CHUI-1992b] - CHUI, C.K., "Wavelets : A Tutorial in Theory and Applications", Academic Press- 1992.
- [COOLEY-1965] - COOLEY, J.W.; TUKEY, J.W. "An algorithm for Machine Calculation of Complex Fourier Series", Math. of Computational, v.19, p. 297-301, 1965.
- [COOLEY-1967a] - COOLEY, J.W.; LEWIS, P.A.W.; WELCH, P.D. "Application of the Fast Fourier Transform to computation of Fourier Integrals, Fourier Series, and Convolution Integrals", IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, v.AV-15, n.2, p.79-84, Jun., 1967.
- [COOLEY-1967b] - COOLEY, J.W.; LEWIS, P.A.W.; WELCH, P.D. "Historical Notes on the Fast Fourier Transform", IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, v.AV-15, n.12, p.76-79, Jun., 1967.
- [COOLEY-1969a] - COOLEY, J.W.; GARDIN, R.L.; RADER, C.M.; BOGERT, B.P.; STOCKHAM JR., T.G. "The 1968 Arden House Workshop on Fast Fourier Transform Processing", IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, v.17, n.2, p.66-76, Jun., 1969.
- [COOLEY-1969b] - COOLEY, J.W.; LEWIS, P.A.W.; WELCH, P.D. "The Fast Fourier Transform and Applications", IEEE Transactions on Education, v.12, p.27-34, 1969.
- [COREY-1963] Corey, J.C., D.R. Nielsen and J.W. Biggar. 1963. Miscible displacement in saturated and unsaturated sandstone. Soil Sci. Soc. Am. Proc. 27:258-262.
- [COREY-1977] Corey, A.T. 1977. Mechanics of Heterogeneous Fluids in Porous Media. Water Resour. Publ., Fort Collins, Colorado.
- [COREY-1985] Corey, A.T. and A. Klute. 1985. Application of the potential concept to soil water equilibrium and transport. Soil Sci. Soc. Am. J. 49:3-11.
- [CORMACK-1973] - CORMACK, A.M., "Reconstruction of Densities from their Projections, with Applications in Radiological Physics", Phys. Med. Biol., v.18, n.2, p.195-207, 1973.
- [CRESTANA-1985] CRESTANA, S.; MASCARENHAS, S. POZZI-MUCELLI, R. S. "Static and dynamical three dimensional studies of water in soil using computed tomography scanning". Soil Science, Baltimore, v.140, n.5, p.326-32, 1985.
- [CRESTANA-1986a] CRESTANA, S. "A Tomografia Computadorizada com um novo método para estudos da física da água no solo", São Carlos, USP, Tese de Doutorado, 140 páginas, 1986.
- [CRESTANA-1986b] CRESTANA, S.; CESAREO, R.; MASCARENHAS, S. "Using a computed miniscanner in soil science." Soil Science, Baltimore, v.142, n.1, p.56-61, 1986.
- [CRESTANA-1988] CRESTANA, S.; MASCARENHAS, S.; CESAREO, R.; CRUVINEL, P.E. "Soil research opportunities using X-ray and gamma-ray computed tomography techniques". In: RUIDOSO INTERNATIONAL CONFERENCE, Ruidoso, Novo México, May 1988. Proceedings... Ruidoso: s.n. 1988. p.121-128.
- [CRESTANA-1990a] CRESTANA, S.; KAUTEN, R.; NIELSEN, D.R. "Microtomografia de ressonância magnética nuclear para investigações não-destrutivas em engenharia de alimentos e agricultura". In: ENCONTRO NACIONAL SOBRE ESCOAMENTO EM MEIOS POROSOS-ENEMP, 18, Nova Friburgo-RJ, out. 1990. Nova Friburgo: Colégio Anchieta, 1990. v.2, p.689-698.
- [CRESTANA-1990b] CRESTANA, S.; NIELSEN, D.R. "Investigações não-destrutivas de sistemas porosos multifásicos através de microtomografia de raios-X, gama e ressonância

- magnética nuclear (RMN)". In: ENCONTRO NACIONAL SOBRE ESCOAMENTO EM MEIOS POROSOS-ENEMP, 18, Nova Friburgo-RJ, out. 1990. Nova Friburgo: Colégio Anchieta, 1990. v.2, p.699-710.
- [CRESTANA-1992] CRESTANA, S.; CRUVINEL, P.E.; VAZ, C.M.P.; CESAREO, R.; MASCARENHAS, S.; REICHARDT, K. "Calibração e uso de um tomógrafo computadorizado em ciência do solo." Revista Brasileira de Ciência do Solo, Campinas, v.16, n.2, p.161-167, maio/ago. 1992.
- [CRESTANA-1996] CRESTANA, S.; CRUVINEL, P.E. "Tomografia: do hospital à lavoura." Ciência Hoje, Rio de Janeiro, v.21, n.121, p.20-24, 1996.
- [CROWTHER-1970] - CROWTHER, R.A.; DeROSIER, D.J; KLUG, A., "The Reconstruction of a Three-Dimensional structure from projections and its applications to electron microscopy", Proc. Roy. Soc. Lond. A317, p.319-340, 1970.
- [CRUVINEL-1987] - CRUVINEL, P.E., "X and γ -rays computerized minitomorphy scanner for multidisciplinary use", Ph.D. thesis, University of Campinas, Brazil, 1987.
- [CRUVINEL-1990a] CRUVINEL, P.E., CESAREO, R., CRESTANA, S.; MASCARENHAS, S., "X and Gamma-rays computerized minitomograph scanner for soil science", IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, V.39, N.5, p.745-750, October, 1990.
- [CRUVINEL-1996a] CRUVINEL, P.E.; CRESTANA, S. Opportunities and use of digital signal processors in tomography scanners dedicated to agriculture. In: WORKSHOP BRASILEIRO DE ARQUITETURAS ALTERNATIVAS USANDO DSPs, São Carlos-SP, ago. 1996. Anais São Carlos: UFSCar, 1996. p.93-97
- [CRUVINEL-1996b] CRUVINEL, P.E.; CRESTANA, S. The use of a TMS320C40 in X and γ rays computerized minitomorphy scanner (MTC) dedicated to agriculture. In: ANNUAL TMS320 EDUCATORS CONFERENCE, 6, Houston, Texas, USA, Aug. 1996. Proceedings, Houston: Texas Instruments, 1996. não paginado.
- [CRUVINEL-1999] CRUVINEL, P.E.; VIEIRA, S.R., CRESTANA, S.; MINATEL, E.R.; MUCHERONI, M.L.; TORRE, A.N.; "Image processing in automated measurements of raindrop size and distribution", Elsevier, Computer and Electronics in Agriculture, 23 (1999) 205-217.
- [DANIELSON-1942] - DANIELSON, G.C.;LANCZOS,C. "Some improvements in practical Fourier analysis and their application to X-ray scattering from liquids", J. Franklin Inst., v.233, p.365-380 and 435-452, April, 1942.
- [DEHNERT-1973] - DEHNERT, J.; BOYD, D., "A Comparison Study of Some Computer Reconstruction techniques", Jul. 1973.
- [DELESSE-1848] Delesse, A. 1848. Procédé mécanique pour déterminer la composition des roches. Ann. Mines 13:379-388.
- [FREDRICH, J.T., MENDÉZDEZ, B. & WONG, T.F.; "Imaging the pore structure of geomaterials", Science, 268, 276-279 - 1995
- [GAARDER-1972] - GAARDER, N.T.; HERMAN, G.T., "Algorithms for Reproducing Objects From Their X-Rays", Computer Graphics and Image Processing, p.97-106, 1972.
- [GIARDINA-1988] GIARDINA,R.C. and DOUGHERTY,E.R; "Morphological Methods in Image and Signal Processing", Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall. 321 – 1988.

- [GLICK-1989] - GLICK, S.J.; KING, M.A.; PENNEY, B.C., "Characterization of Modulation Transfer Function of Discrete Filtered Backprojection", IEEE Transactions on Medical Imaging, v.8, n.2, p.203-213, Jun. 1989.
- [GONZALEZ-1987] - "Digital Image Processing", Addison-Wesley Publishing Company, 1987
- [GORDON-1974] - GORDON, R., "A Tutorial on ART (Algebraic Reconstruction Techniques)", IEEE Transactions on Nuclear Science, v.NS-21, p.78-93, 1974.
- [GORDON-1975] - GORDON, R., "Three-Dimensional Reconstruction from Projections: A Review of Algorithms", p.111-151,
- [HAINES-1923] Haines, W.B. 1923. The volume changes associated with variations of water content in soil. J. Agric. Sci. 13:293-310.
- [HAINSWORTH-1983] - HAINSWORTH, J.M.; AYLMOORE, L.A.G., "The use of the computed-assisted tomography to determine spatial distribution of soil water content", Aust. Journal Soil Res. n.21, p.1435-1443, 1983.
- [HEIJMANS-1994] HEIJMANS, H.J.A.M., "Morphological Image Operators", Advances in Electronics and and Electron Phisics. Academic Press, Boston – 1994.
- [HOUNSFIELD-1973] HOUNSFIELD, G.N., "Computerized Transverse Axial Scanning (Tomography): Part I. Description of System", British Journal of Radiology, n.46, p.1016-1022, 1973.
- [JANOTA-1924] Janota, R. 1924. Advances in Soil Reclamation (in Czech). Proceedings, Nfinistry of Agriculture, No. 34, Prague.
- [JENSSEN-1988] JENSSEN, P.D., & HEYERDAHL, P.H.; "Soil column descriptions from X-ray computed tomography density images", Soil Science, 146, pp.106-107 - 1988
- [KAK-1986] KAK, A.C.; ROBERTS, B.A., "Reconstruction from Projections: Applications in Computerized Tomography", Handbook of Pattern Recognition, Academic Press, Chap. 27, p.649-693, 1986.
- [KALENDER-1988] KALENDER, W.A.; KLOTZ, E.; KOSTARIDOU, L. "An Algorithm for Noise Supression in Dual Energy CT Material Density Images", IEEE Transactions on Medical Imaging, v.7, n.3, p.218-224, Sep. 1988.
- [KATCHINSKI-1965] Katchinski, N.A. 1965. Soil physies (in Russian). Vysshaya Shkoia (College Publishers), Moscow.
- [KUBIENA-1970] Kubiena, W.L. 1970. Micromorphological Features of Soil Geography. Rutgers Univ. Press, Brunswick, New Jersey.
- [KUTÍLEK-1962A] Kutílek, M. 1962a. Hygroscopic soil water (in Czech). Vodohosp. Cas. 10:11-29 and 156-173.
- [KUTÍLEK-1962B] Kutílek, M. 1962b. A new method for determination of the soil specific surface (in Czech). Rostlinná v@roba (Piant Production) 33:767-772.
- [KUTÍLEK-1963] Kutílek, M. 1963. The influente of soil colloids on the value of the contact angle and on the capillary rise of water in soils. Proc. 5 Congr. ICID, Tokyo, p. 1785-1790.
- [KUTÍLEK-1964] Kutílek, M. 1964. The filtration of water in soils in the region of the laminar flow. Trans. Sth Congress of Soil Sci., ISSS, Bucarest, U:45-51.

- [KUTÍLEK-1969] Kutílek, M. 1969. Influence of clay minerals upon the statics and dynamics of soil water (in Czech). Research Report, Technická Univ., Prague.
- [KUTÍLEK-1972] Kutílek, M. 1972. Non-Darcian flow of water in soils-laminar region. In: Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media. Elsevier, Amsterdam, p. 327-340.
- [KUTÍLEK-1973] Kutílek, M. 1973. The influence of clay minerals and exchangeable cations on soil moisture potential. In: A. Hadas, D. Swartzendruber, P.E. Rijtema, M. Fuchs and B.
- [KUTÍLEK-1994] KUTÍLEK, M.; NIELSEN, D.R.; "Soil Hydrology", Die Deutsche Bibliothek, 1994.
- [LEWITT-1983] LEWITT, R.M., "Reconstruction Algorithms: Transform Methods", Proceedings of the IEEE, v.71, n.3, Mar. 1983.
- [LIMA-2002] LIMA, P.C.; "Wavelets: Teoria, Algoritmos e Aplicações", Apostila de curso, Depart. Matemática – ITEX – UFMG – Fev. 2002
- [LIU-1994] Liu, J.-Wen Y., Sam T.S. Wong and L.J. Waldron. 1994. The application of NMR imaging to studying the effect of plant roots on preferential water flow in soil. In: ASA Tomography Workshop 1992, in press.
- [MARAR-1996] MARAR, J.F., "Wavelets Polinomiais: Uma Família de Funções Splines para Aplicações em Processamento de Imagens", Anais do SIBGRAPI'96, p.305-312, 1996.
- [MILLER-1956] MILLER, E.E.; MILLER, R.D., "Physical theory for capillary flow phenomena", J. Appl. Phys. 27:324-332, 1956.
- [MINATEL-1997] MINATEL, E.R.; CRUVINEL, P.E.; "Digital Image Filtering with Adaptive Technique and Wavelet Transforms applied in Scientific Visualization by means of Virtual Reality", Workshop sobre Realidade Virtual, Universidade Federal de São Carlos, Outubro, 1997.
- [MINATEL-1997b] MINATEL, E.R.; "Desenvolvimento de Algoritmo para Reconstrução e Visualização Tridimensional de Imagens Tomográficas com uso de Técnicas Freqüenciais e Wavelets", São Carlos, UFSCar, Tese de Mestrado, 148 páginas - 1997.
- [MINATEL-1998a] MINATEL, E.R.; CRUVINEL, P.E.; "Three-dimensional reconstruction and Visualization of Tomographic Images System using Frequential Techniques and Wavelets", SIBGRAPI'98 proceedings/IEEE Computer Society, p. 38-45, IMPA, Rio de Janeiro, October, 1998.
- [MINATEL-1998b] MINATEL, E.R.; CRUVINEL, P.E.; "Reconstrução e Visualização de Dados de Tomografia Aplicada ao Estudo de Solos usando B-Wavelets", II SIAGRO - Simpósio Nacional de Instrumentação Agropecuária, EMBRAPA- Instrumentação Agropecuária, São Carlos, Dezembro, 1998.
- [OPPENHEIN-1974] OPPENHEIN, B.E., "More Accurate Algorithms for Iterative 3-Dimensional Reconstruction", IEEE Transactions on Nuclear Science, v.NS-21, p.72-77, Jun. 1974.
- [OPPENHEIM-1975] OPPENHEIM, A.V.; SCHAFER, R.W.; "Digital Signal Processing", Prentice Hall, 1975.
- [PETROVIC-1982] PETROVIC, A.M.; SIEBERT, J.E.; RIEKE, P.E., "Soil bulk analysis in three-dimensions by computed tomographic scanning", Soil Sci. Soc. Am. J. , n.46, p.445-450, 1982.

- [POSADAS-1990] POSADAS, D.A. "Estudo da cinética de fusão e de congelamento da água em um meio poroso não-saturado: experimentação e simulação". São Carlos: USP-IFQSC, 1990. Dissertação Mestrado.
- [POSADAS-1994] POSADAS, D.A., TANNUS, A., LOTUFO, R.A., PANEPUCCI, H.C. & CRESTANA, S.; "3D wetting from instabilities in layered soils investigated by NMR and X-rays tomography", Transactions of 15th International Congress of Soil Science, Vo. 2b, Acapulco, pp 195-196 - 1994.
- [POSADAS-1996] POSADAS, D.A.; TANNUS, A.; PANEPUCCI, H.; CRESTANA, S. "Magnetic resonance imaging as a non-invasive technique for investigating 3-D preferential flow occurring within stratified soil samples." Computers and Electronics in Agriculture, Amsterdam, v.14, n.4, p.255-267, 1996.
- [PRATT-1991] PRATT, W.K., "Digital Image Processing", JohnWiley & Sons, Inc., 2nd edition, 1991.
- [RADON-1917] RADON, J., "On the determination of functions from their integrals along Certain Manifolds", Ber.Saechs. Akad. Wiss. Leipzig Math. Phys., v.60, p.262-277, 1917.
- [RINGROSE-1984] Ringrose-Voase, A. and P. Bullock. 1984. The measurement of soli structural parameters by image anaiysis. In: J. Bouma and P.A.C. Raats (Eds.): Proceedings of the ISSS Symposium on Water and Solute Movement in Heavy Clay Soil. ILPI Publication 37, Wageningen, p. 350-3,54.
- [ROSIWAL-1898] Rosiwal, A. 1898. Über geometrische Cesteinsanalysen. Verha.ndi. Geol. Reichsam, Wien, p. 143-175.
- [RUDNICK-1966] RUDNICK, P. "Note on the calculation of Fourier series", Mathematics of Computation, Providence, v.20, p.429-430, June 1966.
- [RUNGE-1903] RUNGE, C., Zeit. für Math. und Physics, v.48, p.443, 1903.
- [RUNGE-1905] RUNGE, C., Zeit. für Math. und Physics, v.53, p.117, 1905.
- [RUNGE-1924] RUNGE,C; KÖNIG,H., "Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften" Vorlesungen iiber Numerisches Rechnen, v.11, Belin: Junlius Springer, 1924.
- [SAHINER-1993a] SAHINER, B. and YAGLE, A.E., "On the use of Wavelets in inverting the Radon Transform", IEEE , p.1129-1131, 1993.
- [SAHINER-1993b] SAHINER, B. and YAGLE, A.E., "Image Reconstruction from Projections under Wavelets Constraints", IEEE Transactions in Signal Processing, v.41, n.41, p.3579-3584, Dec. 1993.
- [SCHACHTSCHABEL-1984] Schachtschabel, P., H.P. Blume, K.H. Hartge, U. Schwertmann, C. Brümmer and M. Renger. 1984. Lehrbuch der Bodenkunde, 11. Auflage. Enke, Stuttgart.
- [SCHEIDEGGER-1954] Scheidegger, A.E. 1954. Statistical hydrodynamics in porous media. J. Appi. Phys. 25:994.
- [SERRA-1982] SERRA,J.; "Image Analysis and Mathematical Morphology", Academic Press, London – 1982.
- [SHEPP-1974] - SHEPP, L.A.; LOGAN, B.F., "The Fourier Reconstruction of a Head Section", IEEE Transactions on Nuclear Science, v.NS-21, p.21-43, Jun. 1974.

- [SOUZA-1993] SOUZA, G.S de, "An Introduction to Wavelets", Presented at MAA Biloxi, MS, March 5-6, 1993.
- [SPANNE-1994] Spanne, P., K.W. Jones, L.D. Prunty and S.H. Anderson. 1994. Potential applications of synchrotron computed microtomography to soil science. In: S.H. Anderson and J.W. Hopmans (eds.): Tomography of Soil-Water- Root Processes. SSSA Special Publ. No. 36, ASA and SSSA, Madison, Wisconsin, p. 43-57.
- [SPANNE-1994] SPANNE, P., THOVERT, J.F., JACQUIN, C.J., LINDQUIST, W.B., JONES, K.W. & ADLER, P.M.; "Synchrotron computed microtomography of porous media" Topology and transport, Physical Review Letters, 73, 2001-2004 - 1994.
- [STEUDE-1994] Steude, J., F. Hopkins and J. Anders. 1994 Industrial X-ray computed tomography applied to soil research. In: S.H. Anderson and J.W. Hopmans (eds.): Tomography of Soil-Water-Root Processes. SSSA Special Publ. No. 36, ASA and SSSA, Madison, Wisconsin, p. 43-57.
- [STOCKHAM-1972] STOCKHAM, T.G., "Image Processing in the Context of a Visual Model", Proc. IEEE, 60: p828-842 - 1972
- [STOLLNITZ-1995a] STOLLNITZ, E.J., DeROSE, T.D., SALESIN, D.H., "Wavelets for Computer Graphics : A Primer, Part 1" - IEEE Computer Graphics and Applications, p.76-84, May.1995.
- [STOLLNITZ-1995b] STOLLNITZ, E.J., DeROSE, T.D., SALESIN, D.H., "Wavelets for Computer Graphics : A Primer, Part 2" - IEEE Computer Graphics and Applications, p.73-85, Jul.1995.
- [TELLO-1986] - TELLO, R.; MANN, R.W.; ROWELL, D; "Scheme for Three Dimensional of Surfaces from CT and MRI Images of the Human Body", IEEE, p.216-219, 1986.
- [THOMAS-1963] THOMAS, L.H. "Using a computer to solve problems in physics", Application of Digital Computers. Boston, Mass.: Ginn, 1963.
- [TILLOTSON-1984] TILLOTSON, P.M.; NIELSEN, D.R.; "Scale factor in soil science", Soil Sci. Soc. Am. J. 48:953-959, 1984.
- [TOKUNAGA-1988] Tokunaga, K.I. 1988. X-ray stereoradiographs using new contrast media on soil macropores. Soil Sci. 146:199-206.
- [UNSER-2000] Unser, M; Blu, T; "Fractional Splines and Wavelets", SIAM Review, Vol. 42, N.1, pp 43-67, 2000.
- [VOGEL-1991] VOGEL, T.; ČÍSLEROVÁ, M.; HOPMANS, J.W.; "Porous media with linearly variable hydraulic properties", Water Resour. Res. 27:2735-2741, 1991.
- [WARRICK-1977] WARRICK, A.W., MULLEN, G.J., NIELSEN, D.R.; "Scaling field properties using a similar media concept", Water Resour. Res. 13:355-362, 1977.
- [WICKERHAUSER-1994] WICKERHAUSER, M.L.; "Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software", IEEE Press – EUA – 1994.
- [WILDING-1984] WILDING, L.P. AND C.T. HALLMARK. 1984. Development of structural and microfabric properties in shrinking and swelling clays. In: J. Bouma and P.A.C. Raats: Water and Solute Movement in Heavy Clay Soils. ISSS Symp. Proceedings of the ISSS Symposium on Water and Solute Movement in Heavy Clay Soils. International Institute for Land Reclamation and Improvement (ILRI) Publication 37, Wageningen, p. 1- is.

[YONGSHENG-1993] - YONGSHENG, H., "Applications of Wavelets in Harmonic Analysis and Signal Analysis", Presented at MAA Biloxi, MS, March 5-6, 1993.

[YOUNG-2003] – YOUNG, I.T.; GERBRANDS, J.J.; VAN VLIET, L.J.; "Image Processing Fundamentals", <http://www.ph.tn.tudelft.nl/Courses/FIP/noframes/ftp.html>, Pattern Recognition Group, Dept of Imaging Science and Technology, Faculty of Applied Sciences, The Netherlands, 2003.

[YULE-1980] Yule, D.F. and J.T. Ritchie. 1980. Soil shrinkage relationships of Texas vertisols: Small cores. Soil Sci. Soc. Am. J. 44:1285-1291.