**Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos**

Thomas Kauê Dal'Maso Peron

Sincronização explosiva em redes complexas

São Carlos
2013

Thomas Kauê Dal'Maso Peron

Sincronização explosiva em redes complexas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Aplicada

Opção: Física Computacional

Orientador: Francisco Aparecido Rodrigues

Versão corrigida

(Versão original disponível na unidade que aloja o programa)

São Carlos
2013

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Dal Maso Peron, Thomas Kauê
Sincronização explosiva em redes complexas /
Thomas Kauê Dal Maso Peron; orientador Francisco
Rodrigues - versão corrigida -- São Carlos, 2013.
127 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Física Aplicada Computacional) -- Instituto de Física
de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2013.

1. Redes complexas. 2. Sincronização. 3. Sistemas
dinâmicos. 4. Transições de fase. I. Rodrigues,
Francisco, orient. II. Título.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço ao Prof. Dr. Francisco Aparecido Rodrigues pela orientação neste mestrado, sempre mostrando muita receptividade às novas ideias que por ventura surgiram no decorrer destes dois anos. Agradeço também ao Prof. Dr. Luciano da Fontoura Costa pela colaboração, espaço em seu grupo e pela coorientação informal durante o mestrado.

Aos professores do IFSC, pela valiosa formação que tive no curso de Física Computacional.

Agradeço à minha mãe, Eunice Maria Dal'Maso, não só pelo esforço, confiança e incentivo contínuo, mas também por, desde muito cedo, ter ajudado a despertar o meu interesse por ciência e música e a admirar a profissão de docente. Com certeza, sem estes ensinamentos não estaria onde estou.

Aos amigos de Cuiabá-São Carlos, Vinícius e Rodrigo pelas interessantes e hilárias conversas que sempre tivemos. Ao Vinícius Heisenberg pelo companheirismo nos últimos anos.

Ao também amigo de Cuiabá e, por muito tempo, colega de grupo, João Luiz, pelo incentivo, sugestões e pelas várias discussões acerca de nossas pesquisas. Ao César, amigo e colega de laboratório, pelas inúmeras conversas sobre os mais diversos assuntos e pelas eventuais ajudas, o que tornou o ambiente de trabalho extremamente agradável.

Aos colegas do grupo do ICMC e do IFSC.

Aos amigos dos cursos de Física e Física Computacional.

Meus profundos agradecimentos à Alessandra, pelo incentivo e apoio durante este mestrado. Sem ela, esta dissertação ainda teria sido escrita, mas eu, com certeza, teria sorrido demasiadamente menos.

Por fim, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro (processo 2011/02601-6), essencial para o desenvolvimento desta pesquisa.

“The scientist does not study nature because it is useful to do so. He studies it because he takes pleasure in it, and he takes pleasure in it because it is beautiful. If nature were not beautiful it would not be worth knowing, and life would not be worth living. I am not speaking, of course, of the beauty which strikes the senses, of the beauty of qualities and appearances. I am far from despising this, but it has nothing to do with science. What I mean is that more intimate beauty which comes from the harmonious order of its parts, and which a pure intelligence can grasp.”

— HENRI POINCARÉ

RESUMO

PERON, T. K. D. M. *Sincronização explosiva em redes complexas*. 2013. 125 p. Dissertação (Mestrado em ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

Processos de sincronização são observados em uma imensa quantidade de sistemas físicos, biológicos, químicos, tecnológicos e sociais. Tais sistemas podem ser descritos e modelados utilizando a teoria das redes complexas, de forma que o completo entendimento da emergência do comportamento coletivo nestes sistemas complexos só é alcançado por teorias que englobam a interação entre seus elementos. Nesta dissertação, estudamos a emergência de transições de fase de primeira-ordem na sincronização de osciladores acoplados através de estruturas heterogêneas e não-triviais. Utilizando teorias de campo médio, obtemos a expressão analítica do acoplamento crítico necessário para a ocorrência de sincronização explosiva em redes livre-escala. Além disso, estudamos o comportamento de tais transições na presença de atrasos temporais e verificamos que é possível elevar o grau de sincronismo dos osciladores quando a interação se dá de forma não-instantânea. Os resultados obtidos contribuem para um melhor entendimento da relação entre topologia e dinâmica em redes.

Palavras-chave: Redes complexas. Sincronização. Sistemas dinâmicos. Transições de fase.

ABSTRACT

PERON, T. K. D. M. *Explosive synchronization in complex networks*. 2013. 125 p. Dissertação (Mestrado em ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

Synchronization processes are observed in many physical, biological, chemical, technological and social systems. These systems can be described and modelled through the theory of complex networks, in a way that the full comprehension of the emergence of collective behavior in these complex systems will only be achieved by theories that encompass the interaction of its elements. In this thesis, we study the emergence of first-order phase transitions in the synchronization of oscillators coupled through heterogeneous and non-trivial structures. By using mean-field theories, we obtain an analytical expression for the critical coupling necessary for the occurrence of explosive synchronization in scale-free networks. Furthermore, we study the behavior of such transitions in the presence of time delays, verifying that is possible to enhance the synchronization level of the oscillators when the interaction is non-instantaneous. The obtained results contribute for the better understanding of the interplay between topology and dynamics in networks.

Keywords: Complex networks. Synchronization. Dynamical systems. Phase transitions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - (a) Um exemplo de um grafo aleatório de Erdős e Rényi. (b) Distribuição de conexões para uma rede com $N = 10.000$ vértices com $\langle k \rangle = 10$	36
Figura 2.2 - (a) Um exemplo de rede gerada através do modelo Barabási-Albert. (b) Distribuição de conexões para uma rede com $N = 10.000$ vértices e com $\langle k \rangle = 10$	38
Figura 2.3 - O modelo de configuração. Cada vértice possui um número dado de links não conectados igual ao grau desejado. Então par de links são escolhidos ao acaso e são conectados (linha pontilhada).	41
Figura 4.1 - Transição de fase de segunda-ordem observada tanto em topologias triviais quanto complexas.	66
Figura 4.2 - Diagramas de sincronização $r(\lambda)$ para diferentes redes construídas de acordo com o modelo descrito em (1).(a) $\alpha = 1$ (ER), (b) $\alpha = 0.6$, (c) $\alpha = 0.2$ e (d) $\alpha = 0$ (BA). Figura adaptada de (2). . . .	67
Figura 4.3 - (a) Diagramas de sincronização $r(\lambda)$ para quatro redes livre-escala construídas a partir do modelo configuracional. Todas as redes possuem distribuição de grau $P(k) \sim k^{-\gamma}$ com $\gamma = 2.4, 2.7, 3.0$ e 3.3 , com $N = 1 \cdot 10^3$ nós. Os passos de incremento foram escolhidos como sendo $\delta\lambda = 0.02$. (b) Diagramas de sincronização para o caso sem correlação entre frequências naturais e grau dos nós ($\omega_i \neq k_i$), mas escolhendo $g(\omega) \sim \omega^{-\gamma}$. Figura adaptada de (2). . . .	68
Figura 5.1 - Distribuição das fases ϕ como função do grau k para o modelo de rede (a) ER e (b) BA. Ambas as redes possuindo $N = 3 \times 10^3$ e grau médio $\langle k \rangle = 6$	74
Figura 5.2 - Diagramas de sincronização para as redes do modelo ER com (a) $\langle k \rangle = 6$ e (b) $\langle k \rangle = 8$	75
Figura 5.3 - Diagramas de sincronização para as redes contruídas através do modelo BA com (a) $\langle k \rangle = 6$ e (b) $\langle k \rangle = 8$	76
Figura 5.4 - Diagramas de sincronização para os modelos configuracionais com distribuição $P(k) \sim k^{-\gamma}$:(a) $\gamma = 2.4$ (b) $\gamma = 2.6$ (c) $\gamma = 2.8$ e (d) $\gamma = 3.0$, com propagação crescente do acoplamento λ com passos de $\delta\lambda = 0.02$. Todas as redes possuem $N = 1 \times 10^3$ e $\langle k \rangle = 8$. . .	77
Figura 5.5 - Diagrama de sincronização $r(\lambda)$ para redes livre-escala construídas de acordo com o modelo BA com $N = 1 \times 10^3$ e grau médio $\langle k \rangle = 6$	80

Figura 5.6 - Figura ilustrativa da aproximação para redes estrela utilizada. . .	81
Figura 5.7 - Diagramas de sincronização $r(\lambda)$ para redes estrelas sendo (a) $K = 60$ e (b) $K = 80$	82
Figura 5.8 - Comparação da sincronização explosiva observada em redes estrela para os tamanhos $K = 60, 70, 80$ e 90 para $\tau = 2.4$. O gráfico inscrito mostra as mesmas redes para o caso em que $\tau = 0$	83
Figura 5.9 - Frequência média Ω como função do <i>delay</i> τ para redes estrela com (a) $K = 60$ e (b) $K = 80$	84
Figura 5.10 - Diagramas de sincronização $r(\lambda)$ para (a) $K = 60$ e (b) $K = 80$. . .	85
Figura 5.11 - Curvas teóricas e numéricas da frequência Ω como função de τ utilizando $\lambda = 1$ para os casos (a) $K = 60$ e (b) $K = 80$	86
Figura 5.12 - Diagramas de sincronização para a rede estrela com $K = 80$ nós periféricos e a estimativa teórica para o acoplamento crítico λ_c para diferentes valores de τ	87
Figura A.1 - As redes complexas podem ser representadas por matrizes de adjacência. Em (a) temos uma rede não-dirigida e em (b) uma rede dirigida. No caso (a), os elementos a_{ij} da matriz são iguais a 1 se há uma ligação entre os vértices i e j e iguais a zero, caso contrário. Já no caso (b), os elementos da matriz a_{ij} são iguais a 1 se existe uma conexão dirigida do vértice i para o vértice j	110
Figura A.2 - Exemplo de duas redes formadas por 10 vértices e 15 arestas. Enquanto que na rede sem peso (a), o vértice 1 é um hub porque concentrar grande parte das conexões ($k_1 = 8$), na rede (b), o vértice 6 é um hub por possuir ligações com maior intensidade (a intensidade da ligação é representada pela largura da aresta). . .	111
Figura A.3 - Ilustração esquemática de três situações onde o coeficiente de aglomeração tem diferentes valores. Em (a) é apresentado um exemplo de clique, onde todos os vértices estão conectados entre si. Neste caso, $cc_i = 1$. Na figura (b), $cc_i = 3/10$. Já em (c) $cc_i = 0$, pois seus vizinhos não possuem conexões entre si.	112

LISTA DE ABREVIATURAS

<i>ER</i>	<i>Erdős e Rényi</i>
<i>BA</i>	<i>Barabási e Albert</i>
<i>WS</i>	<i>Watts e Strogatz</i>
<i>EEG</i>	<i>Eletroencefalografia (electroencephalography)</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

N	Número de nós da rede.
L	Número de arestas da rede.
$G_{N,L}$	Grafo definido pelo conjunto dos vértices V conectados pelas arestas do conjunto E .
$G_{N,p}$	Grafo definido pelo conjunto dos vértices V conectados de acordo com uma probabilidade p .
$\mathcal{A}$	Matriz de adjacência que define o grafo.
a_{ij}	Elementos da matriz de adjacência.
k_i	Grau do vértice i .
$P(k)$	Distribuição de conexões da rede.
$P(k' k)$	Probabilidade de um dado vértice de grau k' seja conectado a um nó de grau k .
ℓ	Média do comprimento dos menores caminhos do grafo.
C	Coefficiente de aglomeração médio.
$q(k)$	Probabilidade de uma aresta escolhida aleatoriamente seja conectada a um vértice de grau k .
$\langle k \rangle$	Grau médio da rede.
θ_i	Fase do oscilador i .
ϕ_i	Fase do oscilador i calculada de acordo com o referencial girante.
ω_i	Frequência natural de oscilação do nó i .
r	Parâmetro de coerência do sistema.
ψ	Fase média de oscilação do sistema.
Ω	Frequência média de oscilação do sistema.
λ	Acoplamento entre os osciladores no modelo de Kuramoto.
$\lambda_c^{(K)}$	Acoplamento crítico necessario para a emergência de sincronização parcial no modelo de Kuramoto no grafo completamente conectado.

λ_c	Acoplamento critico necessário para emergência de sincronização no modelo de Kuramoto em redes complexas.
ρ	Densidade de osciladores.
g	Distribuição de frequência.
τ	Atraso temporal presente nas conexões do modelo de Kuramoto.
K	número de nós periféricos na rede estrela.
ϕ_H	Fase do nó central da rede estrelada calculada em relação ao referencial girante.

SUMÁRIO

1	Introdução	p. 21
1.1	Objetivos	p. 28
1.2	Organização dos capítulos	p. 29
2	Redes Complexas	p. 31
2.1	Redes do mundo real	p. 31
2.2	Modelos de redes aleatórias	p. 34
2.2.1	Modelo de Erdős-Rényi	p. 34
2.2.2	Modelo Barabási-Albert	p. 37
2.2.3	Modelo de Configuração	p. 40
3	Sincronização	p. 43
3.1	Definição	p. 43
3.2	Sincronização em sistemas reais	p. 44
3.2.1	Sincronização em sistemas neuronais	p. 44
3.2.2	Vagalumes	p. 46
3.2.3	Sincronização de ciclos menstruais	p. 47
3.2.4	Outros exemplos	p. 47
3.3	O Modelo de Kuramoto	p. 48
3.4	Aplicações do Modelo de Kuramoto	p. 54
3.4.1	Redes de Junções de Josephson	p. 55
3.4.2	Oscilação de densidades de carga	p. 56
3.4.3	Osciladores químicos	p. 57
3.4.4	Redes neurais	p. 58
4	Sincronização em Redes Complexas	p. 61
4.1	Modelo de Kuramoto em Redes Complexas	p. 61
4.2	Teoria de campo médio	p. 63

4.3	Sincronização Explosiva em Redes Livre-Escala	p.66
5	Resultados e discussões	p.71
5.1	Determinação do acoplamento crítico - $g(\omega) = P(k)$	p.71
5.2	Sincronização explosiva na presença de atrasos temporais	p.78
6	Conclusão	p.89
6.1	Outros trabalhos	p.92
	REFERÊNCIAS	p.95
	Apêndice A – Medidas Topológicas de Redes Complexas	p.109
A.1	Medidas de Redes Complexas	p.109
	Apêndice B – Artigos publicados	p.115

1 Introdução

Muitos sistemas no mundo real possuem a importante característica de apresentar tendências de atingir consenso rítmico em comportamento coletivo, ou, em outras palavras, a tendência de sincronizar. O fenômeno de sincronização é largamente observado em sistemas biológicos assim como em sistemas tecnológicos e sociais. Sincronização é usualmente entendida como a capacidade de objetos de diferentes naturezas formarem um grupo de operação comum devido à interação entre os mesmos. O fato de vários objetos tenderem a atingir ordem e harmonia em seu comportamento, o que é uma característica de fenômenos de sincronização, é a manifestação natural da capacidade de auto-organização observada em diversos sistemas na natureza (3–6).

Processos de sincronização podem ser encontrados em física, química, engenharia, ciências da vida, economia e sistemas sociais, ocorrendo em sistemas compostos por centenas, ou até milhares, de elementos acoplados. Exemplos de sistemas biológicos conhecidos por apresentarem comportamento síncrono incluem populações de vagalumes (7–8), células marca-passo no coração (9–10), secreção de insulina pelo pâncreas (11), emissão de som de forma uníssona por grilos (12), células no intestino de mamíferos (13), atividade rítmica no cérebro devido ao disparo síncrono de um grande grupo de neurônios (14–15), sincronização durante crises epiléticas (16), grupos de mulheres cujo ciclo menstrual se torna sincronizado (17) ou em dinâmicas populacionais (18–19). Do ponto de vista de engenharia, podemos citar que o comportamento coletivo de conjuntos de lasers e geradores de energia são de importância prática (20–21). A emergência de comportamento coletivo nestes sistemas permite a geração de uma potência muito maior, quando comparada a um dispositivo de laser isolado. Sincronização de conjuntos de osciladores de microondas (22) e junções supercondutoras

de Josephson (23–24) são também assuntos de intensa pesquisa. Em mecânica há também diversos exemplos onde processos de sincronização podem ser aplicados, como na construção de dispositivos vibro-técnicos (5) e controle de robôs (25). Em sistemas de comunicação é empregada na estabilização da frequência de geradores (26). De fato, a construção de sistemas mais modernos e complexos de rádio seria impraticável sem fazer uso de sincronização. Além disso, diversos sistemas de segurança e eficientes sistemas de comunicação são baseados em sincronização de sistemas caóticos (27–28). Aplicações também incluem oscilações químicas em reações de Belousov-Zhabotinsky (29).

Historicamente, análises sistemáticas de fenômenos de sincronização foram iniciadas com o seguinte problema. Suponha um sistema oscilatório (i.e., um sistema que exibe um movimento oscilatório auto-sustentado na ausência de influências externas). Suponha então que a este sistema seja acoplado uma força periódica externa. Como resultado, é possível que este sistema apresente a mesma frequência de oscilação. Este fenômeno é chamado de *sincronização externa*.

Dois ou mais sistemas oscilatórios diferentes com parâmetros ligeiramente diferentes podem oscilar com a mesma frequência quando fracamente acoplados. Esta *sincronização mútua* foi primeiramente observada no Século 17 pelo físico holandês Christian Huygens, quando observou dois relógios de pêndulo, fixados a uma haste de madeira comum, oscilando de maneira síncrona. Mesmo quando esta sincronia era perturbada, o movimento síncrono entre dois pêndulos era restabelecido após certo tempo. Em suas próprias palavras (3)

While I was forced to stay in bed for a few days, and made observations on my two clocks of the new workshop, I noticed a wonderful effect that nobody could have thought of before. The two clocks, while hanging [on the wall] side by side with a distance of one or two feet between, kept in pace relative to each other with a precision so high that the two pendula always swung together, and never varied [...] when I made the pendula swing at differing paces, I found that half an hour later, they always returned to synchronism and kept it constantly afterwards, as long as I let them go.

Dessa forma, Huygens não só forneceu uma descrição exata, mas também uma

brilhante e qualitativa explicação do fenômeno de sincronização mútua. Huygens corretamente entendeu que a conformidade de ritmos era devido ao contato através da parede em que os relógios estavam fixados. Utilizando a terminologia moderna, os dois relógios sincronizaram devido ao *acoplamento* através da parede.

Do ponto de vista matemático, a emergência de comportamento coletivo em uma população de osciladores foi estudada primeiramente por Wiener (30–31), o qual especulou que processos de sincronização eram responsáveis pela geração de ritmos alfa no cérebro. Entretanto, a abordagem matemática proposta Wiener, baseada em análise de Fourier, revelou ser um beco sem saída (31). Foi então, em 1967, que Winfree propôs em seu primeiro artigo uma análise muito mais frutífera para tratar processos de sincronização matematicamente (32). Em seu trabalho, Winfree formulou o problema em termos de uma grande população de osciladores de fase interagentes. Como formulado, o problema seria a princípio intratável, porém Winfree reconheceu intuitivamente que, caso considerasse o acoplamento entre os osciladores fraco, muitas simplificações poderiam ser feitas no modelo. Utilizando tais simplificações analíticas e simulações numéricas, Winfree descobriu que a população de osciladores podia exibir o análogo a uma transição de fase, i.e., o sistema constituído pelo conjunto de osciladores transicionava de um estado característico para outro, neste caso, de um estado assíncrono para o estado síncrono da dinâmica.

Estas características mostradas pelo modelo proposto em (32) causaram grande impressão em Kuramoto, o qual reconheceu a contribuição dada por Winfree no estudo de fenômenos coletivos, como podemos observar neste trecho do artigo escrito com seu aluno Nishikawa (33):

(...) Prigogine's concept of time order (34), which refers to the spontaneous emergence of rhythms in nonequilibrium open systems, found its finest example in this transition phenomenon (...). It seems that much of fresh significance beyond physiological relevance could be derived from Winfree's important finding (in 1967) after our experience of the great advances in nonlinear dynamics over the last two decades.

Em 1975, Kuramoto apresentou seu primeiro artigo (35) sobre fenômenos de sin-

cronização, consistindo nos primeiros resultados exatos sobre o que hoje chamamos de modelo de Kuramoto. Nos anos que se seguiram, outros trabalhos foram publicados dedicados ao refinamento do modelo, gerando também outros questionamentos (33, 36–38).

O modelo de Kuramoto mostrou ser a abordagem de maior sucesso em descrever a emergência de comportamento coletivo em sistemas complexos. Apesar de ser sido proposto de modo a descrever qualitativamente estes fenômenos, podemos encontrar aplicações do modelo em diversos contextos diferentes, como, por exemplo, em sistemas biológicos, químicos e físicos (23, 39–42). De fato, o modelo de Kuramoto é simples o suficiente para ser matematicamente tratável, mas ao mesmo tempo complexo para ser não trivial.

Porém, apesar de o modelo de Kuramoto ter conseguido descrever a emergência de sincronização em sistemas complexos, a proposta inicial do modelo consistia em descrever uma população de osciladores de fase completamente conectada, i.e., cada oscilador sentiria o mesmo padrão de interações. Entretanto, estes padrões de conexões, onde todos os elementos do sistema estão conectados a todos os outros elementos, é difícil de imaginar em um sistema real.

Em 1998, Watts e Strogatz apresentaram um modelo simples de estrutura de rede, originalmente com o objetivo de gerar um padrão de conectividade para o problema de sincronização do canto de grilos. Curiosamente, este trabalho acabou não gerando uma nova contribuição para a teoria de sincronização, mas sim contribuindo para o começo da teoria moderna de redes complexas (43). Começando com uma rede regular, os autores mostraram que adicionando um pequeno número de ligações aleatórias era possível reduzir as distâncias médias entre os componentes drasticamente. Esta característica, conhecida como o efeito de pequeno-mundo (*small world effect*), foi primeiramente relatada por Milgram (44), examinando o menor caminho médio em redes de contatos sociais de pessoas nos Estados Unidos. Atualmente, este fenômeno é detectado em muitos outros sistemas naturais e artificiais. A Internet e a *World Wide Web* são

dois exemplos clássicos destes sistemas e talvez os sistemas mais conhecidos a serem modelados por redes, provavelmente devido ao fato de que a própria definição destes sistemas seja impossível de ser feita sem usarmos o termo “rede”. Outros exemplos de sistemas que podem ser modelados por redes podem ser encontrados em diversas áreas do conhecimento humano, indo desde sistemas de comunicação a sistemas biológicos: reações metabólicas, interações de proteínas, redes de transmissão de energia, cadeias alimentares, circuitos eletrônicos, rotas aéreas, relações sexuais entre grupo de pessoas, etc.

Uma rede é uma coleção de entidades, chamados de nós ou vértices. Conexões entre vértices são usualmente chamadas arestas. Tendo feitas estas definições, a modelagem de um sistema real em termos de uma rede se torna imediata. Por exemplo, a Internet pode ser modelada como uma coleção de vértices, que são os roteadores, conectados por arestas que são conexões físicas existentes. Entretanto, a representação de um sistema por rede não é única, dependendo do nível de abstração que usamos. A Internet poderia também ser considerada como uma coleção de subredes, as quais poderiam ser compostas por diversos computadores conectados entre si. As duas representações são válidas e dependem das propriedades a serem estudadas. No caso da *World Wide Web*, páginas são vértices e arestas são *hyperlinks* (URLs) que apontam de uma página para a outra. Reações metabólicas em células são representadas por substratos químicos (como ATP, ADP ou H_2O) e arestas são representadas pelas reações químicas que estes substratos participam em conjunto. Redes sociais são constituídas por pessoas ou grupo de pessoas (vértices) que se relacionam através de alguma relação de amizade. Dessa forma, todo e qualquer tipo de sistema complexo constituído por elementos discretos que possuem alguma relação de similaridade ou interação podem, de alguma maneira, serem representados e modelados por redes complexas.

Apesar de o uso de redes como ferramenta para modelagem de sistemas reais ter ganhado grande atenção apenas na última década, diversos resultados hoje utilizados pela teoria de redes complexas são oriundos da teoria de grafos, uma das grandes

áreas da matemática discreta. Em 1736, Leonard Euler resolveu o famoso problema das pontes de Königsberg (45), um problema que, apesar de natureza ingênua, permitiu o desenvolvimento de conceitos importantes em geometria em que distâncias não são relevantes, ou mais precisamente, topologia. Naquele tempo Königsberg (uma cidade da antiga Prússia, hoje com o nome de Caliningrado) possuía sete pontes, dispostas entre vertentes do rio Pregel, dividindo a cidade em duas partes. O problema era encontrar um caminho que atravessasse todas as pontes sem repetir nenhuma. A abordagem adotada por Euler foi então transformar as ilhas de Königsberg em pontos (vértices) conectados por arestas que representavam as pontes. Euler observou que quando um ponto é visitado durante o percurso, para que não se repita nenhuma aresta, tal vértice deve possuir uma aresta de chegada e uma aresta de saída; dessa forma o número de arestas de cada vértice deve ser par. Esta afirmação deve ser verdadeira para todos os vértices do grafo, podendo haver exceções para no máximo dois vértices, o ponto de partida e o de chegada. A solução deste problema é considerada o início da teoria de grafos.

Muitos problemas de otimização tornaram-se problemas clássicos em teoria de grafos. Um exemplo disso é o problema do cacheiro viajante, no qual dado um número de cidades e o custo da viagem entre cada cidade, o problema consiste em encontrar a rota de menor custo que visite cada cidade, retornando à cidade inicial. Uma formulação equivalente é tratar o problema como um grafo com pesos (veja Apêndice A), onde os vértices representam as cidades e as ligações entre as cidades as arestas deste grafo, sendo que o peso das arestas é dado pela distância entre cada vértice. A solução equivalente deste problema é então encontrar o ciclo Hamiltoniano* do grafo de menor custo (o peso do caminho é a soma dos pesos das arestas percorridas). Caminhos e ciclos hamiltonianos recebem este nome devido a William Rowan Hamilton, o qual em 1856 inventou o *icosian game*, problema que envolve encontrar um ciclo hamiltoniano no grafo de um dodecaedro (46). Apesar de serem considerados jogos matemáticos, estes problemas possuem importância prática em áreas como transporte e logística.

* Caminho fechado no grafo que visita cada vértice apenas uma vez.

Outro problema famoso da teoria de grafos é o Teorema das Quatro Cores. O problema tem sua origem em 1852, quando Francis Guthrie, enquanto tentava colorir o mapa da Inglaterra, notou que apenas quatro cores eram suficientes. O Teorema das Quatro cores afirma que qualquer mapa geográfico pode ser colorido com no máximo quatro cores de modo que nenhuma região adjacente receba a mesma cor (duas regiões são ditas adjacentes se compartilham uma fronteira). Formulando o problema em termos de grafos, cada região no mapa é substituída por um vértice do grafo, e dois vértices são conectados por uma aresta se, e somente se, duas regiões compartilham uma fronteira. O teorema então afirma que vértices de qualquer grafo planar[†] podem ser coloridos com até quatro cores, de modo que não existam vértices vizinhos com a mesma cor. Somente em 1977, o Teorema das Quatro Cores foi provado (47).

Para resolver estes e outros problemas, matemáticos desenvolveram diversos termos e conceitos fundamentais em teoria de grafos. Entretanto, foi somente no século XX que a teoria de grafos teve o seu grande avanço. Matemáticos, que até então estavam interessados apenas em problemas de otimização, passaram então a analisar topologias geométricas mais complexas, utilizando métodos estatísticos para determinar propriedades estruturais de grafos de grande escala. Na década de 1950, os matemáticos húngaros Paul Erdős e Alfréd Rényi estudaram exaustivamente o modelo conhecido na literatura como grafo aleatório (48). O modelo, introduzido por Solomonoff e Rapoport (49) e mais tarde redefinido por Erdős e Rényi (50), guiou o estudo moderno de redes décadas depois. Erdős e Rényi demonstraram em uma série de artigos que muitas propriedades estruturais de grafos aleatórios são exatamente solúveis no limite de grandes grafos. Estes resultados marcaram o início da teoria moderna de grafos (51–52).

Durante os últimos anos, dois desenvolvimentos simultâneos produziram o grande aumento no interesse pela pesquisa de redes. Primeiro, a emergência da ciência de sistemas complexos como uma disciplina interdisciplinar ligando ramos da física, biologia, química e ciências sociais. Uma definição comum de “sistema complexos”

[†] Um grafo que pode ser definido em um plano de modo que não haja intersecção de arestas.

trata-se de um sistema consistindo de diversas unidades interagentes, cujo comportamento coletivo não pode ser explicado pelo comportamento individual de cada unidade. Como então um sistema complexo consiste em unidades interagentes, a teoria de redes fornece a estrutura necessária para descrever tais sistemas. A segunda razão para o grande interesse na área de redes é, ao mesmo tempo, a grande quantidade de dados adquiridos de diversos sistemas, juntamente com o aumento do poder computacional, o que fez com que as investigações se tornassem praticáveis, explorando questões que não podiam ser abordadas antes. Dessa forma, apesar de a teoria de grafos ter originado a teoria de redes complexas, esta teoria trata apenas de aspectos topológicos de grafos, enquanto a análise por redes complexas é orientada a fornecer novas ferramentas capazes de descrever a estrutura de sistemas complexos reais e processos dinâmicos que ocorrem nestas estruturas. Dessa forma, a análise de processos de sincronização sofreu grandes avanços em descrever a dinâmica de sistemas reais, graças ao melhor entendimento da topologia de redes complexas, mas também contribuiu para um melhor entendimento de propriedades emergentes em sistemas reais descritos por redes.

1.1 Objetivos

Implícito no estudo da função de redes complexas, é a ideia de que estas estruturas sustentam processos dinâmicos. Desta forma, juntamente com o estudo das propriedades estruturais, houve um aumento crescente no interesse da relação entre dinâmica e estrutura de redes complexas (53). Este interesse é muito bem motivado, uma vez que sistemas complexos biológicos, sociais e tecnológicos são inerentemente dinâmicos. Neste contexto, fenômenos dependentes do tempo estão intimamente relacionados com a performance do sistema, como exemplificado por fluxo de tráfico em redes (54–55), falhas em cascata (56–57), percolação (58–59) e sincronização de osciladores acoplados (3, 60).

Este trabalho é dedicado ao estudo da sincronização de osciladores de fase acoplados em redes complexas. Mais especificamente, investigamos o modelo recentemente introduzido na literatura que levou à primeira observação de transições descontínuas de sincronização em redes complexas (2). Tal modelo consiste em considerar cada vértice da rede como um oscilador de Kuramoto, mas com a peculiar característica de que cada nó possui como frequência natural seu próprio grau, incorporando uma correlação microscópica entre as propriedades estruturais e dinâmicas do sistema. Neste trabalho, calculamos o acoplamento crítico necessário para a emergência da sincronização em redes complexas considerando o modelo proposto em (2), resultado inédito até então na literatura. Além disso, generalizamos o modelo em (2) para a inclusão de atrasos temporais (*delays*) na interação das fases dos osciladores, verificando que, ao contrário da noção intuitiva, o comportamento síncrono entre as unidades da rede é elevado quando a interação entre os osciladores se dá de forma não instantânea.

1.2 Organização dos capítulos

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No Capítulo 2 iremos descrever as propriedades estatísticas observadas em redes reais e introduzir os principais modelos teóricos de geração de redes utilizados para simular processos dinâmicos em topologias complexas. No Capítulo 3 iremos apresentar em detalhes o fenômeno de sincronização, citando exemplos da emergência de comportamento coletivo em sistemas reais. Ainda no mesmo capítulo, apresentamos o modelo de Kuramoto em topologia totalmente conectada e sua solução via campo-médio, seguido de exemplos de aplicação do modelo. No Capítulo 4, mostramos como generalizar o modelo de Kuramoto em redes complexas e como adaptar os cálculos de campo médio. Também neste capítulo apresentamos o fenômeno, recentemente observado na literatura, correspondente à observação de transições descontínuas em sincronização de redes livre-escala. Por fim, no Capítulo 5 apresentamos os resultados obtidos referentes à determinação do

acoplamento crítico e à generalização do modelo para a inclusão de atrasos temporais, seguido de nossas conclusões.

2 Redes Complexas

Neste capítulo iremos revisar algumas das principais características topológicas e dinâmicas de redes complexas, mostrando exemplos de algumas das classes de redes mais estudadas na literatura, i.e., redes tecnológicas, sociais, de informação e biológicas. Em particular, iremos discutir a organização e a emergência de propriedades livre-escala nestes sistemas. Ainda neste capítulo, iremos discutir propriedades topológicas dos modelos estocásticos de formação de redes mais conhecidos. Tais modelos são úteis no estudo de redes reais, por servirem como modelos nulos na análise de propriedades estatísticas destes sistemas, além de serem utilizados como topologia no estudo de processos dinâmicos em redes complexas, que é o assunto desta dissertação.

2.1 Redes do mundo real

O estudo de redes foi iniciado pela motivação de se tentar entender diversos tipos de sistemas complexos reais. Graças ao grande número de base de dados disponíveis, é possível ter acesso a dados precisos sobre a organização de sistemas complexos, tais como, Internet, reações metabólicas, redes de colaborações entre cientistas, entre outros. Dispondo destas informações, uma questão natural a se fazer é sobre a estrutura que estes sistemas possuem. Ou ainda, se é possível que estes apresentem propriedades em comum. Além disso, dado que estes sistemas são de natureza completamente distintas, é possível que os mecanismos intrínsecos de cada um deles leve a formação de topologias de redes completamente diferentes?

A Internet talvez seja a rede complexa mais popular. Esta rede é constituída por

roteadores, que representam os vértices, ligados por conexões físicas, que representam as arestas. Faloutsos *et al.* (61), Pastor-Satorras *et al.* (62) e Vázquez (63), entre muitos outros, estudaram diferentes aspectos da topologia da Internet. Os dados coletados demonstram que o número médio de conexões dos vértices aumenta visivelmente conforme a Internet cresce, um fenômeno chamado de crescimento acelerado. Além disso, a distribuição de probabilidade do número de conexões segue aproximadamente uma lei de potência *, i.e.,

$$P(k) \sim k^{-\gamma}, \quad (2.1)$$

caracterizada pelo expoente γ , que para o caso da Internet é em torno de $\gamma \simeq 2.5$ (62).

Entretanto, apesar do grande número de trabalhos devotados ao estudo da topologia da Internet, outras redes tecnológicas, como redes de transmissão de energia (64–65) e redes de malhas ferroviárias (66), rodoviárias (67–68) e aeroportos (65), ainda não foram completamente estudadas. Redes de distribuição de energia podem ser descritas como redes nas quais os vértices podem ser geradores ou consumidores conectados por linhas de alta transmissão, que correspondem às arestas. Watts e Strogatz (43) mostraram que tais redes possuem uma distribuição de conexões seguindo uma lei exponencial e apresentam um número elevado de ciclos de ordem três. Assim como nas redes de distribuição de energia, Sen *et al.* (68) mostraram que redes de malha ferroviária possuem também distribuições de conexões com decaimento exponencial.

Padrões de amizades entre indivíduos (69), relações entre empresas (70), e redes de contatos sexuais (71) são típicos exemplos de conexões de pessoas ou grupos de indivíduos dispostos em uma rede social. Estudos tradicionais de redes sociais sofrem constantemente de problemas relacionados à falta de acurácia, subjetividade e a pouca amostragem dos dados (59). Com algumas poucas exceções de alguns estudos, como por exemplo o famoso estudo realizado por Milgram (44), a coleta de dados é usu-

* Redes cuja distribuição de grau segue aproximadamente uma lei de potência são chamadas de “livre-escala” na literatura de redes. Funções livre-escala são todas aquelas que satisfazem $f(cx) = bf(x)$, sendo c e b constantes, i.e., todas aquelas que possuem a mesma forma após um processo de mudança de escala. Entretanto, as únicas funções que satisfazem esta propriedade de mudança de escala são funções lei de potência. Dessa forma, as expressões “livre-escala” e “lei de potência” serão tratados como sinônimos ao longo da dissertação.

almente feita por participantes diretos, através do uso de questionários e entrevistas. Embora muito esforço tenha sido feito de modo a eliminar fontes de inconsistência, é geralmente aceito a presença de certos tipos de erros em estudos de amostragem de redes sociais. Devido a estes problemas, muitos pesquisadores têm estudado justamente a amostragem de redes sociais (59). Um dos tipos mais confiáveis de base de dados são as redes de colaborações. Exemplos clássicos de tais redes: redes de colaborações de atores (43, 72–73), onde cada ator é um vértice, que se conectam através de uma aresta caso tenham atuado em um mesmo filme; diversas redes de coautoria de artigos científicos (74–77), onde dois indivíduos são conectados caso sejam coautores em um mesmo artigo. A distribuição de conexões de redes de coautoria é sabida seguir uma lei de potência com um corte exponencial na forma (75)

$$P(k) \propto k^{-\gamma} e^{-k/\tau}, \quad (2.2)$$

onde γ e τ são constantes. A distribuição de grau de outras redes de colaboração também parece seguir distribuições na forma de lei de potência (59). Além disso, tais redes apresentam valores altos para o coeficiente de aglomeração e baixos valores para a média do comprimento dos menores caminhos entre os vértices (74–77)

Outra classe de redes amplamente estudada são as biológicas. Um exemplo destas redes são as redes de interação de proteínas. Estudos mostram que certas redes de proteína possuem distribuição de conexões na forma $P(k) \sim (k + A)^{-\gamma} \exp[(k + A)/B]$ (78). Além de redes de proteínas, diversas redes metabólicas pertencentes a diferentes organismos foram estudados, constatando-se que a distribuição de conexões também segue uma lei de potência, com expoentes γ variando de 2.0 a 2.4 (79). Curiosamente, a média do comprimento dos menores caminhos destas redes foi encontrada ser aproximadamente igual para todos os organismos estudados ($\ell \simeq 3.3$) (79).

Assim como a Internet, a *World Wide Web* também tem sido extensivamente estudada. Por ser uma rede de citações, trata-se de uma rede direcionada, sendo então caracterizada por duas distribuições de conexões: $P_{in}(k) \sim k_{in}^{-\gamma_{in}}$ e $P_{out}(k) \sim k_{out}^{-\gamma_{out}}$ (80–

84). Estudos realizados em diferentes subdomínios verificaram que $\gamma_{in} \simeq 2.1$ e $\gamma_{out} \sim 2.4 - 2.7$. Além disso, através do uso de um *web crawler*, pesquisadores foram capazes de mapear a topologia da *World Wide Web*, mostrando que, apesar do enorme número de vértices ($N \sim 10^9$), a média do comprimento dos menores caminhos é $\ell \approx 20$, apresentando o fenômeno *small-world* (80, 81, 83). Por outro lado, medidas de transitividade indicam que o coeficiente de aglomeração médio, $C \sim 0.1$, é muito maior do que o observado em grafos aleatórios (81).

Finalmente, ressaltamos que muitas propriedades de diversas redes reais estão sumarizadas em diversos artigos de revisão. Revisões mais extensas como em (85–87) e também artigos de revisão mais breves como em (88–89), além de diversos livros sobre o assunto (59, 90–93).

2.2 Modelos de redes aleatórias

2.2.1 Modelo de Erdős-Rényi

Durante os anos de 1951 e 1952, os matemáticos Ray J. Solomonoff e Anatol Rapoport publicaram uma série de artigos no periódico *Bulletin of Mathematical Biophysics* (49, 94), onde introduziram pela primeira vez o conceito de grafo aleatório e a notação $G_{N,p}$, que indica o ensemble estatístico de redes G , com os seguintes parâmetros fixos: o número N de nós e a probabilidade p de que dois nós sejam conectados.

Na segunda metade da década de 1950 os matemáticos Paul Erdős e Alfréd Rényi introduziram um outro modelo de grafo aleatório e estabeleceram a Teoria de Grafos como uma importante área na matemática (50, 95). O grafo aleatório de Erdős-Rényi, ou simplesmente modelo ER, trata-se de um ensemble estatístico onde os membros deste conjunto são todos os grafos possíveis construídos a partir de N nós e L arestas. Este modelo de grafo aleatório também é conhecido como modelo $G_{N,L}$. A ideia por

trás deste modelo é construir um conjunto de grafos cujos membros são todos os grafos possíveis de serem construídos que satisfazem as condições do número de nós N e número L de arestas fixados. Além disso, os modelos $G_{N,p}$ e $G_{N,L}$ são análogos aos ensembles canônicos e grande-canônicos da física estatística tradicional, tornando-se equivalentes conforme $N \rightarrow \infty$. De fato, no limite de grandes redes ($N \rightarrow \infty$), os dois modelos se tornam equivalentes se definirmos $p = L / [N(N-1)/2]$. Neste caso, os modelos $G_{N,p}$ e $G_{N,L}$ são definidos como “grafos aleatórios clássicos” ou simplesmente como “grafos aleatórios”. Além disso, o termo “Modelo Erdős-Rényi” muitas vezes é usado para fazer referência aos modelos $G_{N,p}$ e $G_{N,L}$ simultaneamente.

Tendo definido os modelos clássicos de grafos aleatórios podemos então calcular propriedades estatísticas relacionadas a estas estruturas. Uma das medidas mais fundamentais trata-se da distribuição $P(k)$ de conexões da rede. No modelo $G_{N,p}$, um dado vértice no grafo é conectado com os outros $N-1$ vértices independentemente com probabilidade p . Logo, a probabilidade de estar conectado a um conjunto particular de k vértices e não estar conectado aos outros é dado simplesmente por $p^k (1-p)^{N-1-k}$. Porém há $\binom{N-1}{k}$ maneiras de escolher k outros vértices, e portanto a probabilidade total de ser conectado a exatos k outros vértices é dado por:

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}, \quad (2.3)$$

que é a distribuição binomial. Muitas vezes, estamos interessados em estudar as propriedades de redes grandes, de modo que podemos assumir N muito grande. Neste caso, para quando $N \rightarrow \infty$, podemos escrever:

$$\ln \left[(1-p)^{N-1-k} \right] = (N-1-k) \ln \left(1 - \frac{\langle k \rangle}{N-1} \right) \quad (2.4)$$

$$\simeq -(N-1-k) \frac{\langle k \rangle}{N-1} \simeq -\langle k \rangle, \quad (2.5)$$

sendo $\langle k \rangle = 2L/N = p(N-1)$ o número médio de conexões na rede e L o número de arestas. Exponenciando ambos os lados obtemos que $(1-p)^{N-1-k} = e^{-\langle k \rangle}$ no limite

Figura 2.1 – (a) Um exemplo de um grafo aleatório de Erdős e Rényi. (b) Distribuição de conexões para uma rede com $N = 10.000$ vértices com $\langle k \rangle = 10$.

que em N é grande. Também para N grande temos:

$$\binom{N-1}{k} = \frac{(N-1)!}{(N-1-k)!k!} \simeq \frac{(N-1)^k}{k!}, \quad (2.6)$$

e portanto a Eq. 2.3 fica:

$$P(k) = \frac{(N-1)^k}{k!} p^k e^{-\langle k \rangle} = \frac{(N-1)^k}{k!} \left(\frac{\langle k \rangle}{N-1} \right)^k e^{-\langle k \rangle} = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}, \quad (2.7)$$

no limite para N grande. A eq. 2.7 nada mais é que a distribuição de Poisson. Portanto, a distribuição da conectividade dos grafos aleatórios de Erdős e Rényi tendem à distribuição de Poisson. Na Figura 2.1 é mostrado um exemplo de um grafo aleatório.

Outra medida de grande interesse quando se trata da caracterização da topologia é a média do comprimento dos menores caminhos ℓ entre dois vértices da rede (veja Apêndice A), pois trata-se da distância característica da topologia. Podemos estimar a ordem do menor caminho médio ℓ de redes aleatórias através de argumentos simples. Dado o grau médio $\langle k \rangle$ de um grafo, o número de n -ésimos vizinhos de um dado nó cresce conforme $\langle k \rangle^n$. Dessa forma, como ℓ é o menor caminho médio entre quaisquer nós do grafo em questão, temos então que $\langle k \rangle^\ell \sim N$. Logo, obtemos que

$$\ell \sim \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle} \quad (2.8)$$

para a separação média entre os nós de um grafo aleatório clássico. Curiosamente, Eq. 2.8 fornece boas estimativas para a média do comprimento dos menores caminhos de redes reais. Suponha que cada pessoa em média tenha em torno de 1×10^3 amizades e considerando a população mundial como sendo $N = 6 \times 10^9$, obtemos que $\ell \cong 3.3$, o que é próximo de valores empíricos obtidos pelo experimento de Milgram e muitos outros (44, 96–97).

2.2.2 Modelo Barabási-Albert

Em 1999 Barabási e Albert publicaram o primeiro trabalho no qual se propõe um modelo de formação de redes com o objetivo de explicar a topologia livre-escala de redes reais como, por exemplo, a *World Wide Web* (80), redes de colaboração (77), redes de interação de proteínas (78) e redes metabólicas (79). A ideia por trás deste modelo consiste em crescer a rede adicionando nós de modo a conectá-los aos vértices mais densamente conectados previamente na rede.

O modelo de Barabási-Albert (BA) produz redes não direcionadas de acordo com o seguinte procedimento. O processo de formação da rede inicia-se com uma dada configuração inicial de nós e arestas, fato que não tem influência na topologia final da rede, uma vez que seja considerado redes com um grande número de nós. O processo de formação de redes é baseado então nos seguintes passos:

1. *Crescimento*: Iniciando-se com um pequeno número de vértices N_0 , a cada passo é adicionado um vértice com m ($m \leq N_0$) arestas que se conectam com vértices já presentes na rede.
2. *Ligação preferencial*: O novo vértice, que vai ser adicionado à rede, tende a se conectar com os vértices mais conectados, ou seja, a probabilidade de um vértice

Figura 2.2 – (a) Um exemplo de rede gerada através do modelo Barabási-Albert. (b) Distribuição de conexões para uma rede com $N = 10.000$ vértices e com $\langle k \rangle = 10$.

j , presente na rede, ser escolhido é proporcional a sua conectividade,

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow j}(n+1) = \frac{k_j(n)}{\sum_{u=1}^{m+n-1} k_u(n)}, \quad (2.9)$$

sendo n o tempo e o número de vértices adicionados à rede.

Como cada novo nó possui m arestas, o grau médio da rede será $\langle k \rangle = 2m$. É importante notar que a probabilidade de selecionar um nó de grau k no tempo t deste processo é dada por $k/(2mt)$, de modo que no limite em que $t \rightarrow \infty$ obtem-se uma rede com distribuição de grau seguindo uma lei de potência $P(k) \propto k^{-\gamma}$, sendo $\gamma = 3$ (98). Evidentemente, trata-se apenas de uma lei de potência particular, com um expoente γ fixo. Entretanto, o principal resultado deste modelo é mostrar que o mecanismo de ligação preferencial de acordo com o grau dos nós é essencial para a formação de redes com topologias livre-escala. Na Figura 2.2 mostramos um exemplo de rede gerado através do modelo BA e a distribuição de conexões para uma rede composta por N vértices.

É possível mostrar que para $m = 1$, redes geradas através do modelo BA resultam em grafos do tipo árvore, i.e., com coeficiente de aglomeração nulo (Veja Apêndice A); enquanto redes geradas para $m > 1$ possuem estrutura local semelhante a grafos do

tipo árvore[†], dada que a rede seja suficientemente grande. Para $m > 1$, o coeficiente de aglomeração tende a zero no limite de grande redes ($t = N \rightarrow \infty$) na forma (99):

$$C \sim (m - 1) \frac{(\ln N)^2}{N}. \quad (2.10)$$

Como esperado, redes geradas através do modelo BA seguem o paradigma do fenômeno de pequeno mundo, mas, curiosamente, com comportamento diferente para $m = 1$ e $m > 1$. Mais especificamente, a média do comprimento dos menores caminhos ℓ entre os nós possui dependência com N de acordo com (100):

$$\ell(m = 1) \sim \ln N \text{ e } \ell(m > 1) \sim \frac{\ln N}{\ln \ln N}. \quad (2.11)$$

Note que a presença de ciclos de ordem três, mesmo que pequena, muda completamente a dependência da média do comprimento dos menores caminhos ℓ com o tamanho da rede.

Além do modelo de Barabási e Albert, muitos outros foram propostos para aperfeiçoá-lo, de forma a permitir maior flexibilidade no valor de γ , que é igual a três quando $N \rightarrow \infty$ no modelo de Barabási e Albert (92), e um coeficiente de aglomeração próximo do encontrado em redes reais. Amaral *et al.* (65) generalizaram o modelo de Barabási e Albert demonstrando que o mecanismo de ligação preferencial pode ser limitado por três fatores básicos: (i) *idade dos vértices*: alguns vértices tendem a não receber mais conexões a partir de um certo tempo, mas continuam contribuindo para a formação da estrutura da rede; (ii) *custo da adição de novas arestas e capacidade limitada*: em algumas redes, os vértices podem não receber ligações devido ao alto custo que tais conexões podem gerar ou devido à sua capacidade limitada de gerenciar novos *links*; (iii) *filtragem de informações*: as conexões podem se limitar aos vértices mais semelhantes (101). Assim, a ligação entre os vértices, ao invés de ser regulada pela eq. 2.9, segue a seguinte lei,

[†] Baixa probabilidade de ocorrência de ciclos de ordem três.

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow j}(n+1) = \frac{k_j(n)f(k_j(n), n, j, \dots)}{\sum_{u=1}^{m+n-1} k_u(n)f(k_u(n), n, u, \dots)}, \quad (2.12)$$

onde $f(k_u(n), n, u, \dots)$ é uma função de custo, que pode depender da conectividade do vértice j , de sua idade e de outros fatores limitantes.

Para permitir maior variação no coeficiente da lei de potência γ , Dorogovtsev *et al.* (102) propuseram um modelo com ligação preferencial da forma:

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow j}(n+1) = \frac{k_j(n) + k_0}{\sum_{u=1}^{m+n-1} (k_u(n) + k_0)}, \quad (2.13)$$

com $-m < k_0 < \infty$. Neste caso, $\gamma = 3 + k_0/m$, ou seja γ pode variar de 2 até ∞ . Quando $k_0 = 0$, obtém-se o modelo de Barabási e Albert.

Outra generalização do modelo de livre escala foi proposta por Krapivky *et al.* (103). Neste caso, os vértices são conectados por uma probabilidade de conexão não-linear, da forma

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow j}(n+1) = \frac{k_j(n)^\alpha}{\sum_{u=1}^{m+n-1} k_u(n)^\alpha}. \quad (2.14)$$

2.2.3 Modelo de Configuração

É possível transformar o modelo de grafo aleatório discutido na Seção 2.2.1 em um modelo muito mais flexível para a geração de redes, modificando-o de modo que os graus dos vértices não sejam mais restritos a possuir uma distribuição de conexões do tipo Poisson. De fato, é possível modificar o modelo de modo que uma dada rede possua distribuição de conexões arbitrária.

O modelo aleatório generalizado mais amplamente estudado é o modelo de configuração. O modelo de configuração é um modelo aleatório com uma dada sequência de grau, i.e., o número exato do grau de cada vértice no grafo é mantido fixo, ao invés

Figura 2.3 – O modelo de configuração. Cada vértice possui um número dado de links não conectados igual ao grau desejado. Então par de links são escolhidos ao acaso e são conectados (linha pontilhada).

de termos meramente uma distribuição de probabilidade de onde os graus dos vértices são escolhidos, o que por sua vez fixa o número de arestas na rede. Suponha que especificamos o grau k_i de cada vértice na rede $i = 1 \dots N$. Podemos criar uma rede aleatória da seguinte maneira: damos a cada vértice i um total de k_i arestas, mas desconectamos a outros vértices, como mostra a Figura 2.3. Há então um total de $\sum_i k_i = 2L$ *links* desconectados, sendo L a quantidade total de *links* quando a rede conectada. A seguir, escolhemos dois *links* ao acaso, com distribuição de probabilidade uniforme, e os conectamos um a um, como indicado pela linha tracejada na Figura 2.3. Continuamos com o processo até que as $2m - 2$ arestas desconectadas sejam enfim conectadas. O resultado final é uma rede em que cada vértice possui exatamente o grau desejado.

O modelo aleatório generalizado é utilizado como modelo nulo, gerando uma rede aleatória com uma distribuição de grau $P(k)$ arbitrária. O modelo de configuração, proposto por Bender e Canfield é uma maneira de gerar este tipo de grafo (59). Além desta maneira, é possível utilizar um método de reconexão (*rewiring method*) (104) para fazer com que uma rede mantenha uma determinada distribuição de grau, mas possua características de um grafo aleatório. Este modelo é de grande importância, principalmente quando se deseja verificar se alguma propriedade de uma dada rede é um efeito puramente aleatório ou está associada com a função de uma dada rede, conforme ob-

servado no caso dos motivos, que são subgrafos que aparecem em redes reais, mas cuja ocorrência é pouco provável em redes respectivas geradas pelo modelo aleatório generalizado.

Uma propriedade fundamental no modelo de configuração, e que será usada no decorrer deste trabalho, é a probabilidade $q(k)$ de que uma dada aresta escolhida aleatoriamente em um grafo gerado de acordo com o modelo configuracional esteja conectada a um nó de grau k . Para calcular tal propriedade, considere uma rede não-direcionada de N nós. Seja o número de nós com um dado grau $k = 0, 1, 2, \dots$, dado por $N(k)$. Dessa forma $N = \sum_k N(k)$, e a frequência de ocorrência de nós com grau k dada pela razão $N(k)/N$. O grau total da rede (o dobro do número de arestas presentes na rede) é dado por $\sum_k kN(k) = N \langle k \rangle$. Claramente, $N(k)$ nós de grau k possuem $kN(k)$ arestas do total $N \langle k \rangle$. Logo, a frequência com que uma aresta escolhida aleatoriamente esteja conectada a nó de grau k nada mais é do que $kN(k)/N \langle k \rangle$. Em outras palavras, selecione uma aresta aleatoriamente, escolha aleatoriamente um dos nós conectados nesta aresta, a probabilidade deste nó possuir k conexões é igual a $kN(k)/N \langle k \rangle$. Formulando em termos da distribuição do grau $P(k)$ temos então que a probabilidade $q(k)$ é dada então por

$$q(k) = \frac{kP(k)}{\langle k \rangle}. \quad (2.15)$$

Este resultado é válido para toda a classe de redes que não possuem correlação de grau, i.e., que apresentam coeficiente de assortatividade nulo (Veja Apêndice A). Também para redes sem correlação de grau, a probabilidade $q(k)$ é similar a probabilidade $P(k'|k) = k'P(k')/\langle k \rangle$ de um dado vértice de grau k' seja conectado a um nó de grau k .

3 Sincronização

Mencionamos anteriormente alguns exemplos de fenômenos de sincronização que podem ser encontrados em diversos campos da ciência. Neste capítulo iremos definir com mais precisão o que é sincronização e como se dá a emergência deste fenômeno, salientando a diferença com outro fenômeno muito conhecido na física, a ressonância. Além disso, iremos apresentar alguns exemplos de sincronização em sistemas reais e introduzir o modelo de Kuramoto, mostrando algumas de suas aplicações.

3.1 Definição

É definido como sincronização a dinâmica de ajuste de ritmos de objetos oscilatórios devido ao acoplamento entre estes objetos. Como no exemplo observado por Huygens, os relógios de pêndulo sincronizaram suas frequências devido ao acoplamento gerado pela parede comum em que estavam conectados. Estes objetos são considerados como *osciladores auto-sustentados*, i.e., osciladores que possuem uma fonte interna de energia transformando-a em movimento oscilatório e que, quando isolados, continuam a produzir o seu próprio ritmo até que esta fonte de energia acabe. Exemplos de sistemas oscilatórios auto-sustentados são circuitos eletrônicos usados para geração de radio-frequências, lasers, osciladores químicos de Belousov-Zhabotinsky, marcapassos artificiais utilizados em doenças cardíacas e muitos outros sistemas naturais e artificiais (3).

Tendo definido o que é o processo de sincronização, é importante ressaltar a diferença entre sincronização e ressonância. Para isso, iremos utilizar como exemplo um sistema similar ao pêndulo de relógio. Suponha que um pêndulo se movimenta livre-

mente em relação ao eixo horizontal possuindo um ímã preso em sua extremidade. O pêndulo não é um sistema oscilatório auto-sustentado e não oscila continuamente. Quando sujeito à uma condição inicial, o pêndulo inicia seu movimento, porém sua amplitude de oscilação decai devido à ação de forças de atrito. A frequência natural f_0 é determinada pela geometria do pêndulo e, para pequenas oscilações, não depende da amplitude. Uma das soluções para o movimento do pêndulo não decair, é colocar na sua proximidade um eletroímã alimentado por uma corrente elétrica de frequência f . Dessa forma, o pêndulo se movimenta sob ação de um campo magnético. Entretanto, o movimento do pêndulo só será oscilatório se a frequência f for próxima de f_0 , caso contrário, a amplitude do movimento será insignificante. Este é o fenômeno que conhecemos como ressonância. Após o efeito transiente, o pêndulo irá oscilar com a frequência f do campo magnético. Caso esta frequência varie, a frequência do pêndulo também irá variar. Este caso não pode ser considerado como sincronização pois um dos objetos interagentes não possui um ritmo próprio. Se desacoplarmos os dois objetos, por exemplo, colocando uma placa de metal entre eles, o movimento do pêndulo irá decair, após efeito transiente inicial. Portanto, processos de sincronização são devidos exclusivamente à interação entre osciladores auto-sustentados, i.e., osciladores que possuem ritmos próprios mesmo quando não acoplados a outros osciladores.

3.2 Sincronização em sistemas reais

3.2.1 Sincronização em sistemas neuronais

O estudo de sincronização de grandes conjuntos de neurônios tornou-se um importante problema em neurociência. De fato, fenômenos de sincronização são relacionados a diversos fenômenos fundamentais em neurociência (veja, por exemplo, (105–106)). Por exemplo, há indícios de que sincronização é um mecanismo fundamental para o processamento e comunicação entre diferentes áreas do cérebro. Resultados de

experimentos com animais indicam que sincronização de atividade neuronal no córtex visual aparenta ser responsável pelo reconhecimento de padrões visuais (3). Além disso, há evidências de que sincronização de atividade oscilatória no córtex sensorio-motor é responsável pela integração e coordenação de informações relacionadas ao controle motor (107).

Sincronização também é o mecanismo pelo qual ritmos vitais para o funcionamento de organismos são mantidos, como por exemplo, a respiração. Koshiya e Smith (108) mostraram que este ritmo é gerado por uma rede de neurônios marcapasso sinapticamente acoplados localizados no tronco cerebral. É possível desacoplar os neurônios através de medicamentos, neste caso, os neurônios mantêm o seu comportamento rítmico, porém se comportam de forma assíncrona. Apesar de controlar funções vitais no cérebro humano, processos de sincronização também estão ligados diretamente com certas patologias neurológicas como epilepsia (109) e mal de Parkinson (110).

A oscilação de neurônios, quando dada de forma síncrona, pode resultar em grandes flutuações em sinais de eletroencefalografia (EEG)*. Análises espectrais de sinais EEG mostram que neurônios podem sincronizar em diversas bandas de frequências diferentes (de 2 a 60 Hz) (106). Comportamento síncrono em populações de neurônios também é mostrado ser uma resposta típica a diferentes estímulos: visual (112), olfativo (113) e tátil (114).

Outro tipo de sincronização de neurônios foi observado por Stern *et al.* (115), onde o autor observou a variação do potencial de membranas de neurônios de animais anestesiados *in vivo*. Mais precisamente, foi observado que o potencial assume valores entre limites muito bem definidos com decaimentos síncronos. Padrões similares foram observados por Elson *et al.* (116), através de um experimento com dois neurônios acoplados do gânglio estômago-gástrico da lagosta.

Em (115), os autores também mostraram que pequenas flutuações no comporta-

* Eletroencefalografia (EEG) é o registro da atividade elétrica ao longo da superfície encefálica. EEG mede flutuações na voltagem resultadas do fluxo de corrente iônica entre os neurônios do cérebro (111).

mento síncrono em células corticais em sinais de EEG podem ser induzidas devido ao nível de anestesia no organismo. Mais precisamente, conforme o nível de anestesia se torna menor, os disparos de neurônios do córtex se tornam mais sincronizados. Dessa forma, nota-se que a presença de anestesia desacopla os osciladores e, portanto, leva ao decréscimo no ritmo de disparos dos neurônios observados nos sinais de EEG.

3.2.2 Vagalumes

Vagalumes fornecem um dos exemplos mais famosos de fenômenos de sincronização na natureza. Por exemplo, em algumas regiões do sudeste da Ásia é possível observar milhares de vagalumes machos da espécie *Pteroptyx malacca* agrupados emitindo luz de forma uníssona de modo a atrair fêmeas. Certamente, este processo de emissão síncrona de luz não é iniciado de forma repentina, i.e., os indivíduos da população não tem conhecimento a priori sobre a frequência com a qual todos os outros de indivíduos emitem luz, mas tal processo é fruto do ajuste de ritmos entre os vagalumes (3).

Hanson (117) estudou este efeito experimentalmente (veja também, por exemplo, (7–8)) estimulando vagalumes com emissões periódicas de luz. Para um intervalo de períodos de oscilação próximos ao período de oscilação natural dos vagalumes (em torno de 0.9 segundos), os vagalumes foram capazes de ajustar sua frequência com o estímulo periódico. Entretanto, caso o estímulo seja emitido com frequência muito mais baixa ou muito mais alto comparada à frequência natural dos vagalumes, a sincronização era perdida.

3.2.3 Sincronização de ciclos menstruais

McClintock (107) conduziu um curioso, e muito detalhado, estudo sobre ciclos menstruais de 135 mulheres, todas com idade entre 17-22 anos que compartilhavam o mesmo dormitório em uma universidade. O estudo mostrou um aumento de sincronia no começo dos ciclos durante o ano acadêmico (Setembro-Abril). Este estudo confirmou observações indiretas anteriores sobre o efeito de grupos sociais na sincronização de ciclos menstruais, fato que está de acordo com experimentos realizados utilizando ratos que demonstram que tais grupos influenciam no funcionamento do sistema endócrino (107). Em particular, foi demonstrado que a dispersão dos tempos dos ciclos menstruais dentro de diferentes grupos de amigos decresce durante o ano acadêmico. O estudo ainda indica a existência de algum processo psicológico interpessoal em humanos que afeta o tempo dos ciclos. Se o mecanismo por trás deste fenômeno é devido a presença de feromônios[†] ou outro processo, ainda é uma questão em aberto.

3.2.4 Outros exemplos

Existem muitos outros exemplos biológicos onde há emergência de comportamento síncrono, tais como a oscilação síncrona de secreção de hormônios, variação da temperatura corporal e do número de linfócitos com o ciclo circadiano (3). Além disso, outras importantes funções fisiológicas estão ligadas a processos de sincronização, como a regulação de insulina pelo sistema endócrino e a atividade elétrica síncrona no intestino de mamíferos (3).

Manifestações de processos de sincronização também podem ser encontradas em sistemas químicos. Osciladores químicos podem ser acoplados através de um meio comum, onde a concentração de um reagente depende da reação de cada oscilador influ-

[†] Feromônios são substâncias aromáticas produzidas por animais e humanos que influenciam o comportamento sexual e outras funções relacionadas ao organismo.

enciando todas as outras reações. Um exemplo de tal acoplamento é dado por Vanag *et. al.* (118), que estudaram a dinâmica da fotosensibilidade da reação de Belousov-Zhabotinsky disposta em uma fina camada sujeita a iluminação em função da concentração média de um dos reagentes. Para uma interação suficientemente grande, dependendo das condições iniciais, os autores observaram a emergência de diferentes estados síncronos caracterizados por diferentes padrões espaciais na reação.

Nas próximas seções iremos mostrar mais exemplos de sistemas reais cuja principal característica é a emergência espontânea de comportamento coletivo, apresentando o tratamento matemático para a modelagem de tais sistemas através do modelo de Kuramoto.

3.3 O Modelo de Kuramoto

Como visto na Seção 3.2, processos de sincronização executam um papel fundamental na dinâmica de diversos sistemas reais. Uma vez tendo observado estes fenômenos, o próximo passo em direção ao completo entendimento de tais sistemas é o desenvolvimento de modelos matemáticos que possam vir a explicar como se dá a emergência do comportamento coletivo. Pesquisas em fenômenos de sincronização se concentram principalmente em verificar os principais mecanismos responsáveis pelo comportamento síncrono coletivo entre os membros de uma população. Naturalmente, é de se esperar que para atingir sincronia é necessário haver interação entre os elementos. Porém, há diferentes maneiras de se abordar tal problema do ponto de vista matemático.

Suponha que a atividade rítmica de cada elemento é descrita em termos de uma variável física que evolui no tempo. Uma das maneiras de modelar a emergência de comportamento coletivo deste sistema é supor que quando esta variável atinge um certo limite, ela emite um pulso que é transmitido para vizinhança. A seguir, a variável é reinicializada e o ciclo se repete. Essencialmente, tal comportamento é similar

a de um oscilador. Assumindo que este ciclo possui um certo período, é conveniente introduzir o conceito de *fase*. O efeito deste pulso emitido é alterar o estado atual dos vizinhos, modificando seus períodos, aumentando ou diminuindo. Apesar deste cenário que acabamos de descrever aparenta, a princípio, ser intuitivo, direto e fácil de modelar, a sua natureza discreta e não-linear acarreta importantes complicações matemáticas (119). Enquanto o tratamento matemático de um sistema constituído apenas de alguns elementos acoplados, cuja dinâmica é baseada em pulsos, possa ser realizado através do formalismo de sistemas dinâmicos (120), o tratamento se torna muito mais complicado quando o sistema é constituído por muitos elementos.

Entretanto, existe outro cenário em que processos de sincronização têm sido extensivamente estudados. Tal cenário consiste em descrever osciladores cujo movimento se restringe a amplitudes constantes, i.e., *osciladores de fase*. (121). O estado de cada oscilador pode então ser descrito apenas através de um parâmetro, a fase, tendo seu movimento restrito a pequenas perturbações em uma órbita fechada de amplitude fixa (35). Além disso, note que esta suposição implica que o acoplamento de um oscilador com os outros membros da população afeta somente a sua fase, não alterando sua amplitude. A primeira formulação matemática de osciladores de fase com o objetivo de descrever processos de sincronização foi feita por Winfree (32), propondo que a fase θ_i do i -ésimo oscilador evolui de acordo com

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \left(\sum_{j=1}^N X(\theta_j) \right) Z(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

onde ω_i é frequência natural do oscilador i . Cada oscilador j exerce uma influência nos demais osciladores através da função $X(\theta_j)$ e a resposta com que o oscilador i reage a tal acoplamento é levada em conta no modelo através da função $Z(\theta_i)$. Usando simulações numéricas e aproximações analíticas, Winfree descobriu que a população de osciladores descrita pelas Eqs. 3.1 poderia exibir o análogo temporal a uma transição de fase (32). Quando a variação das frequências naturais é grande comparada ao acoplamento, o sistema se comporta de uma forma incoerente, com cada oscilador evoluindo de acordo com a sua própria frequência natural. Porém, conforme a varia-

ção das frequências naturais é decrescida, a incoerência da população permanece até um certo valor limite, quando um aglomerado de osciladores subitamente entra em sincronia.

O modelo proposto por Winfree chamou a atenção de Kuramoto, que mostrou através de métodos perturbativos que para qualquer sistema de osciladores de fase fracamente acoplados, as equações de movimento podem assumir a seguinte forma universal (6),

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i), i = 1, \dots, N, \quad (3.2)$$

onde Γ_{ij} é a função de interação entre os osciladores i e j . Apesar da redução das Eqs. 3.1 para as Eqs. 3.2 ser uma grande simplificação no modelo, a análise destas equações ainda era uma tarefa difícil de se realizar. Assim como Winfree, Kuramoto reconheceu que a análise via campo-médio seria muito mais tratável do ponto de vista matemático. Então, Kuramoto propôs o caso igualmente ponderado através de um acoplamento senoidal em uma topologia completamente conectada:

$$\Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) = \frac{\lambda}{N} \sin(\theta_j - \theta_i). \quad (3.3)$$

Dessa forma, o modelo de Kuramoto (6, 35–36) consiste em um conjunto de N osciladores acoplados, onde a fase do i -ésimo oscilador, denotada por $\theta_i(t)$, evolui de acordo com a dinâmica:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (i = 1, \dots, N), \quad (3.4)$$

onde o fator $1/N$ é incorporado para garantir o bom comportamento do modelo no limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$, ω_i é a frequência natural do oscilador i , e λ é a constante de acoplamento.

A dinâmica coletiva de toda a população de osciladores é medida a partir do parâmetro de ordem macroscópico (6),

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)}, \quad 0 \leq r(t) \leq 1, \quad (3.5)$$

que irá medir a coerência do conjunto de osciladores e o termo $\psi(t)$ é a fase média. Os casos $r \simeq 1$ e $r \simeq 0$ descrevem os limites em que todos os osciladores estão em fase ou estão se movendo de forma incoerente, respectivamente. Multiplicando a eq. 3.5 por $e^{-i\theta_i}$ e igualando a parte imaginária, temos:

$$r \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (3.6)$$

de modo que podemos reescrever a Eq. 3.4 como

$$\frac{d\theta_i(t)}{dt} = \omega_i + \lambda r \sin[\psi(t) - \theta_i(t)] \quad (i = 1, \dots, N). \quad (3.7)$$

Nesta forma, o caráter de campo médio do modelo se torna evidente. Cada oscilador aparenta estar desacoplado dos demais osciladores, embora eles estejam interagindo, mas apenas através das grandezas de campo médio r e ψ . Mais especificamente, a fase θ_i tende a se aproximar da fase média ψ , ao invés de se aproximar da fase de qualquer outro indivíduo da população de osciladores. Este processo estabelece um mecanismo cíclico entre acoplamento e coerência: conforme a população se torna mais coerente, r cresce e, logicamente, maior é o acoplamento efetivo λr , cujo efeito é recrutar mais osciladores para o conjunto de osciladores síncronos (119, 121).

As soluções da Eq. 3.7 exibem dois tipos comportamentos distintos, dependendo do valor de ω_i relativo a λr . Os osciladores com $|\omega_i| \leq \lambda r$ se aproximam, no estado estacionário ($d\theta_i/dt = 0$), de

$$\omega_i = \lambda r \sin \theta_i, \quad (3.8)$$

onde $|\theta_i| \leq \frac{1}{2}\pi$. Estes osciladores são os que estão “presos” a uma frequência Ω . Os osciladores que possuem $|\omega_i| > \lambda r$ são chamados de osciladores que estão à “deriva”. Seja então $\rho(\theta, \omega, t)d\theta$ a fração de osciladores com frequência natural ω com fases entre θ e $\theta + d\theta$ no tempo t . Podemos reescrever o parametro de ordem (Eq. 3.5) no limite de muitos osciladores como uma média sobre as fases e frequências dada por (119, 121)

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega, t) g(\omega) d\theta d\omega, \quad (3.9)$$

onde $g(\omega)$ é a distribuição de frequências naturais dos osciladores. Para encontrar uma expressão para a evolução temporal de $\rho(\theta, \omega, t)$ devemos notar que esta satisfaz a seguinte equação de continuidade (119, 121):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} (v\rho) = 0, \quad (3.10)$$

sendo v_θ a velocidade angular instantânea de cada oscilador dada por

$$v(\theta, t, \omega) = \omega + \lambda r \sin(\psi - \theta). \quad (3.11)$$

Note ainda que a distribuição $\rho(\theta, \omega, t)$ é normalizada de acordo com

$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \omega, t) d\theta = 1. \quad (3.12)$$

O sistema de Eqs. 3.9- 3.12 possui a solução trivial dada por $\rho = 1/2\pi$ e $r = 0$, correspondendo a uma distribuição angular uniforme dos osciladores no intervalo $[-\pi, \pi]$. Portanto, os osciladores movem suas fases incoerentemente e a solução trivial é chamada de *solução incoerente*. Para valores altos do acoplamento λ é esperado que o sistema possua sincronização global, de forma que todos os osciladores venham a ter a mesma fase, levando a $r = 1$. Para um acoplamento finito, um menor grau de sincronização $0 < r < 1$ deverá ocorrer. Um oscilador qualquer que se move com velocidade $v = \omega - \lambda r \sin(\theta - \psi)$ se tornará preso para um ângulo tal que $\omega = \lambda r \sin(\theta)$ (Eq. 3.8). Logo, sincronização parcial será obtida quando parte dos osciladores estarão presos a uma fase fixa enquanto outros osciladores estarão se movimentando sem sincronia. Portanto, a solução estacionária da Eq. 3.10 será dada por (119, 121):

$$\rho(\theta, \omega) = \begin{cases} \delta \left[\theta - \arcsin \left(\frac{\omega}{\lambda r} \right) \right] & \text{if } \frac{|\omega|}{\lambda r} \leq 1 \\ \frac{C}{|\omega - \lambda r \sin \theta|} & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.13)$$

onde δ é função delta de Dirac e C é a constante de normalização determinada pela condição Eq. 3.12, dada por

$$C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 + (\lambda r)^2}. \quad (3.14)$$

Com as expressões para a distribuição ρ é possível calcular (119, 121) o parâmetro de

ordem no estado de sincronização parcial utilizando as Eqs. 3.9 e 3.13,

$$r = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{|\omega| \leq \lambda r} e^{i\theta} \delta \left[\theta - \arcsin \left(\frac{\omega}{\lambda r} \right) \right] g(\omega) d\theta d\omega + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega| > \lambda r} e^{i\theta} \frac{Cg(\omega)}{|\omega - \lambda r \sin \theta|} d\theta d\omega. \quad (3.15)$$

Assumindo que a distribuição de frequências $g(\omega)$ seja simétrica, $g(\omega) = g(-\omega)$, e juntamente com a relação $\rho(\theta + \pi, -\omega) = \rho(\theta, \omega)$, veremos que o segundo termo da Eq. 3.15 é zero. Logo, o primeiro termo é simplesmente

$$r = \int_{|\omega| < \lambda r} \cos \left[\arcsin \left(\frac{\omega}{\lambda r} \right) \right] g(\omega) d\omega = \int_{|\omega| < \lambda r} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\lambda r} \right)^2} g(\omega) d\omega = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta g(\lambda r \sin \theta) \lambda r \cos \theta d\theta, \quad (3.16)$$

i.e.,

$$r = \lambda r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(\lambda r \sin \theta) d\theta \quad (3.17)$$

A Eq. 3.17 admite a solução $r = 0$, para qualquer valor de λ . Isso corresponde ao estado completamente incoerente com $\rho(\theta, \omega) = 1/2\pi$ para todo θ, ω . Para $r \neq 0$ temos

$$1 = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(\lambda r \sin \theta) d\theta, \quad (3.18)$$

que tendendo $r \rightarrow 0^+$ obtemos o valor para o acoplamento crítico necessário para emergência de sincronização,

$$\lambda_c^{(K)} = \frac{2}{\pi g(0)}. \quad (3.19)$$

A Eq. 3.19 e os argumentos necessários para a sua derivação foram feitos primeiramente por Y. Kuramoto (35). Considerando como exemplo a distribuição de frequências $g(\omega)$ como uma Lorentziana,

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2}, \quad (3.20)$$

é possível obter o resultado exato (35–36)

$$r = \sqrt{1 - \frac{\lambda_c}{\lambda}}, \quad (3.21)$$

para todo $\lambda \geq \lambda_c$. Foi mostrado que esse resultado apresenta uma boa concordância

com simulações numéricas (38, 122). Para qualquer distribuição $g(\omega)$ unimodal e par, expandindo o termo $g(\lambda r \sin \theta)$ da Eq. 3.17 em potências de λr obtemos

$$g(\lambda r \sin \theta) \approx g(0) + g'(0)\lambda r \sin \theta + \frac{1}{2}g''(0)(\lambda r \sin \theta)^2. \quad (3.22)$$

Uma vez que $g(\omega)$ é assumida possuir um pico local centrado em zero, $g'(0) = 0$, dessa forma

$$g(\lambda r \sin \theta) \approx g(0) + \frac{1}{2}g''(0)(\lambda r \sin \theta)^2. \quad (3.23)$$

Substituindo de volta na Eq. 3.17, obtemos

$$r = \lambda r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \left[g(0) + \frac{1}{2}g''(0)(\lambda r \sin \theta)^2 \right] d\theta. \quad (3.24)$$

Realizando a integral e fazendo uso da Eq. 3.19, obtemos

$$1 = \lambda \left[g(0) \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda^3 r^2 g''(0)}{2} \frac{\pi}{8} \right] = \frac{\lambda}{\lambda_c^{(K)}} + \frac{\pi \lambda^3 r^2 g''(0)}{16}. \quad (3.25)$$

Multiplicando a equação anterior por $\lambda_c^{(K)}$ e assumindo $\lambda \approx \lambda_c^{(K)}$:

$$\lambda_c^{(K)} = \lambda + \lambda_c^{(K)} \frac{\pi [\lambda_c^{(K)}]^2 r^2 g''(0)}{16}. \quad (3.26)$$

Resolvendo em termos do parâmetro r , obtemos

$$r \approx \sqrt{\frac{-16(\lambda - \lambda_c^{(K)})}{\pi [\lambda_c^{(K)}]^4 g''(0)}} \sim (\lambda - \lambda_c^{(K)})^{1/2}, \quad (3.27)$$

conforme $\lambda \rightarrow \lambda_c^{(K)}$

3.4 Aplicações do Modelo de Kuramoto

A grande adaptabilidade e aplicabilidade do modelo de Kuramoto permite que este seja aplicado em diversos contextos como em física, biologia e química. Nesta seção mostraremos alguns dos exemplos mais relevantes de aplicações do modelo de

Kuramoto discutidos na literatura nos últimos anos.

3.4.1 Redes de Junções de Josephson

Junções de Josephson são dispositivos supercondutores capazes de gerar oscilações de voltagem com alta frequência, tipicamente no intervalo de $10^{10} - 10^{12}$ Hz (39). Tais sistemas são transdutores naturais de voltagem e frequência, possuindo aplicações em circuitos analógicos e digitais, detecção de radiação infravermelha de galáxias distantes e até como magnetômetros.

Um grande número N de junções de Josephson podem ser conectadas de modo a gerar uma potência de saída grande. Fato que ocorre devido à potência ser proporcional a V^2 , que é proporcional ao número de elementos N da rede, sendo V o potencial ao que o sistema esta submetido, uma vez que os elementos estejam em sincronia (123). Junções de Josephson quando acopladas em paralelo apresentam acoplamento do tipo primeiros vizinhos. Em contrapartida, quando acopladas em série exibem topologia de conexões correspondente a um grafo completamente conectado. As equações de movimento para as junções são dadas por (39)

$$\frac{\hbar C_j}{2e} \ddot{\phi}_j + \frac{\hbar}{2er_j} \dot{\phi}_j + I_j \sin \phi_j + \dot{Q} = I_B, j = 1, \dots, N \quad (3.28)$$

e para o restante do circuito

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = \frac{\hbar}{2e} \sum_{k=1}^N \dot{\phi}_k, \quad (3.29)$$

onde ϕ representa a diferença de fase entre as funções de onda associadas a cada supercondutor, Q é a carga, I_j é a corrente crítica da j -ésima junção, C_j a capacitância e r_j a resistência; I_B a corrente de bias, enquanto R , L e C denotam a resistência, indutância e capacitância do circuito. Note que para $\dot{Q} = 0$ as Eqs. 3.28 são desacopladas, i.e., as diferenças de fase ϕ entre as junções evoluem independentemente. É possível mostrar que, dado que o acoplamento entre as junções seja baixo, o sistema descrito

pelas Eqs. 3.28 e 3.29 pode ser completamente descrito por uma sistema de osciladores de Kuramoto acoplados em uma topologia completamente conectada. Para isso, é necessário definir novas variáveis de acordo com (119)

$$\theta_j = \frac{\omega_j \hbar}{er_j} \frac{1}{\sqrt{I_B^2 - I_j^2}} \arctan \left(\frac{I_j - I_B \tan \frac{\phi_j}{2}}{\sqrt{I_B^2 - I_j^2}} \right), \quad (3.30)$$

sendo

$$\omega_j = \frac{2er_j}{\hbar} \left(I_B^2 - I_j^2 \right)^{1/2}. \quad (3.31)$$

As variáveis θ_j são definidas como fases “naturais” de oscilação das junções, uma vez que as fases θ_j descrevem rotações uniformes na ausência de acoplamento ($\dot{Q} = 0$) (119). Finalmente, utilizando esta transformação para os ângulos naturais θ e seguindo o procedimento presente em (23, 24, 40), Eq. 3.29 leva a

$$\dot{\theta}_j = \omega_j + \frac{\lambda}{N} \sum_{k=1}^N \sin(\theta_k - \theta_j + \alpha), \quad (3.32)$$

onde os parâmetros λ e α dependem dos parâmetros intrínsecos r_j , I_j , I_B , R , L e C das junções. Analisando a Eq. 3.32, vemos que trata-se de uma generalização do modelo de Kuramoto (Eq. 3.4) devido à presença da fase $\alpha \neq 0$. Tal generalização foi estudada Sakaguchi e Kuramoto (37) e por Sakaguchi *et. al.* (124), onde foi observado que valores $\alpha > 0$ resulta no aumento do acoplamento crítico necessário para a emergência de sincronização parcial no sistema.

3.4.2 Oscilação de densidades de carga

Strogatz *et. al.* e Marcus *et. al.* propuseram e analisaram modelos relacionados ao modelo de Kuramoto afim de modelar o transporte de ondas de densidade de carga (41, 42, 125) em metais e supercondutores unidimensionais. Uma importante consideração é a de que ondas de densidade de carga são aprisionadas por impurezas nos materiais quando o campo elétrico aplicado é nulo, tornando-se livres a partir de um certo valor crítico para a amplitude do campo elétrico. O modelo proposto em (41)

é descrito pelas equações

$$\dot{\theta}_i = E - h \sin(\theta_i - \alpha_i) + \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (3.33)$$

onde θ_j são as fases dos osciladores, α_i os ângulos iniciais, E o campo elétrico aplicado e λ o acoplamento entre os osciladores.

Naturalmente, a análise das Eqs. 3.33 é similar ao modelo de Kuramoto tradicional. Para valores pequenos de E/h e λ/h , existem ondas estacionárias que estão presas aos valores α_i . Fixando-se λ/h , conforme a razão E/h aumenta, o estado estacionário perde estabilidade e o estado de corrente elétrica não-nula emerge a partir de uma amplitude crítica E_c do campo elétrico, calculada analiticamente por Strogatz *et.al.* (42). Devemos notar ainda que o sistema dado pelas Eqs. 3.33 pode ser reescrito de forma análoga ao modelo de Kuramoto na presença de um campo externo (119). Mais precisamente, definindo novas variáveis como $\Theta_i = \theta_i - \alpha_i$ e substituindo na Eq. 3.33, obtemos

$$\dot{\Theta}_i = E - h \sin \Theta_i + \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\Theta_j + \Theta_i + \alpha_{ij}), \quad (3.34)$$

onde $\alpha_{ij} = \alpha_j - \alpha_i$. Note que todos osciladores neste caso evoluem com a mesma frequência natural E e com $h \sin \Theta$ executando o papel de campo externo.

3.4.3 Osciladores químicos

A existência de osciladores químicos é largamente conhecida, especialmente as reações de Belousov-Zhabotinsky e modelos como o de Brusselator e Oregonator. Estes modelos são descritos em termos de equações não-lineares de reação-difusão, que podem possuir soluções periódicas e apresentar diferentes padrões espaço-temporais para conjuntos de parâmetros apropriados (3).

A relação entre osciladores químicos e osciladores de fase tem sido alvo de discussão durante muitos anos. Em 1975, Marek e Stuchl (126) acoplaram dois sistemas de reação de Belousov-Zhabotinsky utilizando diferentes conjuntos de parâmetros, ob-

servando diferentes padrões de oscilação. Cada reação ocorria em diferentes compartimentos, porém havendo troca de matéria através de um orifício que conectava as duas reações. Os autores observaram sincronização de fase quando as frequências de oscilação dos dois reatores eram próximas. Para grandes diferenças de frequências, o sistema apresentava longos intervalos de pequena variação na diferença entre as fases. Estas observações foram qualitativamente explicadas em (127), onde o autor considerou dois osciladores lineares de fase planares fracamente acoplados. Além disso, um oscilador possuía um termo de perturbação de mesma ordem do acoplamento. Dessa forma, via cálculo perturbativo, o autor mostrou que as fases dos osciladores evoluem de acordo com o modelo de Kuramoto. Além disso, os resultados presentes em (127) foram estendidos de modo a generalizar o modelo considerando N osciladores (128). Adicionando pequenas perturbações nas equações de movimento de cada oscilador, o modelo passava a ser descrito pelo seguinte conjunto de equações (128):

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= F(x_i, y_i) + \frac{\epsilon}{N} \sum_j [K(d_{ij})x_j + \sigma_i f(x_i, y_i)] \\ \dot{y}_i &= G(x_i, y_i) + \frac{\epsilon}{N} \sum_j [K(d_{ij})y_j + \sigma_i g(x_i, y_i)], \quad (i = 1, \dots, N),\end{aligned}\quad (3.35)$$

onde K é a função de acoplamento entre os osciladores i e j , que é função da distância d_{ij} que separa os osciladores. F , G correspondem às funções de evolução intrínsecas das grandezas x_i e y_i , respectivamente, e f e g funções perturbativas correspondentes a evolução das grandezas x_i e y_i , sendo σ_i o parâmetro de imperfeição aleatório. Em (128) o autor mostra que as equações de movimento dadas pelas Eqs. 3.35 são reduzidas à formas análogas a Eq. 3.4, mostrando que o modelo de Kuramoto descreve de forma natural sistemas de osciladores químicos fracamente acoplados.

3.4.4 Redes neurais

Osciladores de fase podem ser usados como unidades elementares em modelos de processamento de informação neurais. Este fato pode ser aceito como uma consequên-

cia natural de evidências experimentais como as discutidas na Seção 3.2.1. Uma das modelagens de sistemas neuronais utilizando osciladores de fase mais bem sucedidas é o modelo proposto por Schuster e Wagner (129), cujo principal objetivo era a emergência de oscilações de neurônios no córtex visual. O modelo consiste em uma distribuição espacial de conexões entre neurônios, de forma que localmente os neurônios sejam densamente conectados mas com probabilidade não-nula de possuírem conexões de longo alcance. Outra característica fundamental do modelo é a definição da medida de atividade dos neurônios em função da taxa de disparos média que depende da evolução de toda a população, fato que permite descrever a dinâmica do sistema em termos de uma única equação de campo-médio, semelhante ao modelo de Kuramoto (119). No caso do modelo proposto por Schuster e Wagner, o módulo do acoplamento depende da atividade dos próprios neurônios, sendo tal característica fundamental para oscilações síncronas na população.

Sompolinsky *et. al.* aperfeiçoaram e estenderam as ideias presentes em (129) em uma série de artigos (130–132), propondo um modelo similar e muito mais elaborado para as sinapses entre neurônios. Nestes trabalhos, os autores consideraram um modelo de Kuramoto com acoplamento efetivo entre os osciladores dado por $K_{ij}(r, r') = V(r)W(r, r')V(r')$, onde V é o módulo médio de atividade da célula pré-sináptica e pós-sináptica e $W(r, r')$ corresponde a arquitetura específica das conexões, i.e., o termo proporcional a distribuições de conexões espaciais entre os neurônios. Com estas características, o modelo apresentado em (130–132) possui um comportamento dinâmico extremamente rico, apresentando resultados que concordam de maneira surpreendente com os experimentos, o que fez com que este modelo se tornasse referência em muitos outros estudos similares (119).

4 Sincronização em Redes Complexas

Apesar de o modelo de Kuramoto ter provado ser bem sucedido em descrever o processo de emergência de sincronização espontânea em diversos sistemas complexos (3, 121, 133), o modelo descrito pelas Eqs. 4.1 é baseado na premissa de que todo oscilador possui o mesmo padrão de conexões. Entretanto, é difícil imaginar que o padrão de conexões em que todos os elementos de um sistema estão conectados entre si seja observado em sistemas reais (43, 134). Além disso, em sistemas em que o número de componentes seja suficientemente grande, tal padrão de conexões vai de encontro com restrições físicas como minimização de energia e a observação rara de conexões de longo alcance em sistemas macroscópicos (60).

Neste capítulo iremos mostrar como adaptar o modelo de Kuramoto em topologias não triviais, bem como, apresentar tratamentos analíticos para estudar a emergência de sincronização espontânea nestes sistemas.

4.1 Modelo de Kuramoto em Redes Complexas

Para formular o problema em topologias complexas, é necessário reformular (60) a Eq. 3.4 para incluir a conectividade da rede:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \sum_j \lambda_{ij} a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (4.1)$$

onde λ_{ij} é a força do acoplamento entre dois osciladores e a_{ij} são os elementos da matriz de adjacência. A partir da eq. 4.1 pode-se calcular o parâmetro de ordem macroscópico

para diferentes topologias (60). O modelo original de Kuramoto é recuperado quando temos $a_{ij} = 1, \forall i \neq j$.

O primeiro problema quando definimos o modelo de Kuramoto em redes complexas trata-se de como definir a interação entre os osciladores de forma apropriada. No modelo original, em um grafo completamente conectado, (Eq. 3.4), o termo de acoplamento no lado esquerdo da Eq. 4.1 é uma grandeza intensiva, uma vez que a dependência com o número de osciladores se cancela graças à escolha $\lambda_{ij} = \lambda/N$. Esta definição é essencial para a análise do sistema no limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$ na topologia completamente conectada. Entretanto, escolhendo-se $\lambda_{ij} = \lambda/N$ como termo de acoplamento nas equações do modelo de Kuramoto em redes complexas torna as equações de movimento dependentes de N . Dessa forma, no limite termodinâmico, o acoplamento entre os osciladores tende a zero exceto para os nós que possuem grau k que seja da ordem de N . Note que a existência destes nós só é possível em redes com distribuição de conexões que seguem uma lei de potência (135), i.e., $P(k) \sim k^{-\gamma}$ com $\gamma > 2$.

Outra maneira de definirmos o acoplamento entre os osciladores consiste em considerar $\lambda_{ij} = \lambda/k_i$, onde k_i é o grau do nó i , de forma que λ_{ij} irá conter a heterogeneidade da distribuição de conexões da rede. Apesar de tal definição ter conseguido explicar como a heterogeneidade das conexões pode suprimir a sincronização em uma rede de osciladores (136), a inclusão de termos proporcionais a k_i no acoplamento leva a acoplamentos assimétricos entre os osciladores, i.e., se $k_i \neq k_j$ então $\lambda_{ij} \neq \lambda_{ji}$.

A escolha $\lambda_{ij} = \lambda/C(\mathcal{N})$ pode, aparentemente, ser a escolha mais apropriada para o acoplamento dos osciladores em uma dada rede $\mathcal{N}$. A constante $C(\mathcal{N})$ pode, em princípio, ser uma grandeza relacionada a qualquer medida topológica da rede $\mathcal{N}$, como por exemplo o grau médio $\langle k \rangle$ ou o grau máximo $k_{\max}$ existente na rede. A razão física desta escolha nada mais é do que realizar um ajuste na escala temporal da dinâmica de acordo com os parâmetros da rede. Entretanto, exceto para o caso em que $\lambda_{ij} = \lambda/k_{\max}$, outras escolhas para a constante $C(\mathcal{N})$ não evitam problemas no

limite em que $N \rightarrow \infty$. Portanto, dada duas redes A e B com $k_{\max} = k_A$ e $k_{\max} = k_B$, respectivamente, de modo a fazermos comparações significativas entre a sincronização das duas redes, as equações de movimento (Eq. 4.1) devem corresponder as mesmas escalas temporais, i.e., $\lambda_{ij} = \lambda_A/k_A = \lambda_B/k_B = \lambda$. Com esta formulação em mente, a Eq. 4.1 é reduzida para

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \lambda \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.2)$$

independentemente da topologia especificada da rede. Isto permite o estudo da dinâmica das Eqs. 4.2 em diferentes topologias, comparando os resultados de modo a investigar apropriadamente a relação entre topologia e a sincronização dos dois sistemas.

4.2 Teoria de campo médio

Muitos trabalhos recentes (137–141) estudaram de forma teórica sincronização em redes complexas constituídas de osciladores acoplados. Tais abordagens analíticas preveem que para redes livre-escala com expoentes $\gamma \leq 3$ o acoplamento crítico λ_c torna-se nulo conforme $N \rightarrow \infty$, contrariando a princípio simulações numéricas em redes BA, aparentemente devido ao tamanho finito das redes (60). T. Ichinomiya (139) obteve a primeira estimativa para o acoplamento crítico λ_c via campo médio para redes sem correlação de grau. Neste trabalho o autor considera $\lambda_{ij} = \lambda$ na Eq. 4.1 e, para o estudo analítico, toma o limite no contínuo. Para isso é definido $\rho(k, \omega; t, \theta)$ como sendo a densidade de osciladores com fase θ no tempo t , para uma dada frequência ω e grau k , normalizada como

$$\int_0^{2\pi} \rho(k, \omega; t, \theta) d\theta = 1. \quad (4.3)$$

Assumindo que não há correlação de grau na rede, a probabilidade de que uma aresta escolhida aleatoriamente esteja conectada a um nó de grau k , frequência ω , e

fase θ no instante t será (139):

$$\frac{kP(k)g(\omega)\rho(k,\omega;t,\theta)}{\langle k \rangle}, \quad (4.4)$$

onde $\langle k \rangle$ é o grau médio da rede. Portando, $\rho(k,\omega;t,\theta)$ irá obedecer a equação de continuidade (139), isto é,

$$\frac{\partial \rho(k,\omega;t,\theta)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\rho(k,\omega;t,\theta) \left(\omega + \frac{\lambda k \int d\omega' \int dk' \int d\theta' g(\omega') P(k') k' \rho(k',\omega';t,\theta') \sin(\theta - \theta')}{\langle k \rangle} \right) \right]. \quad (4.5)$$

Para encontrar soluções via campo médio da Eq. 4.5 é necessário introduzir o parâmetro de ordem

$$re^{i\psi} = \frac{1}{\langle k \rangle} \int d\omega \int dk \int d\theta g(\omega) P(k) k \rho(k,\omega;t,\theta) e^{i\theta}. \quad (4.6)$$

Este parâmetro de ordem é diferente do definido na Eq. 3.5, utilizado em trabalhos considerando redes *small-world* (64, 142). O parâmetro de ordem definido na Eq. 4.6 corresponde a $re^{i\psi(t)} = \sum_i k_i e^{i\theta_i} / \sum_i k_i$ (141), onde k_i é o grau do nó i . Entretanto, a partir da Eq. 4.5, a escolha da Eq. 4.6 aparenta ser a mais natural como campo médio para redes aleatórias (139).

Inserindo a Eq. 4.6 na Eq. 4.5 obtemos

$$\frac{\partial \rho(k,\omega;t,\theta)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \theta} \{ \rho(k,\omega;t,\theta) [\omega + \lambda k r \sin(\psi - \theta)] \}. \quad (4.7)$$

No regime independente do tempo

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{ \rho(k,\omega;t,\theta) [\omega + \lambda k r \sin(\psi - \theta)] \} = 0, \quad (4.8)$$

admitindo como soluções (139)

$$\rho(k,\omega;\theta) = \begin{cases} \delta \left[\theta - \arcsin \left(\frac{\omega}{\lambda k r} \right) \right] & \text{if } \frac{|\omega|}{\lambda k r} \leq 1 \\ \frac{C(k,\omega)}{|\omega - \lambda k r \sin \theta|} & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.9)$$

onde $C(k,\omega)$ é o fator de normalização. É possível notar que ρ depende de λ e k , logo, o produto λk corresponde ao acoplamento entre os osciladores na rede e o campo médio.

Ademais, note que a densidade ρ presente na Eq. 4.9 é similar ao caso completamente conectado (Eq. 3.13), com a diferença de possuir o termo k , devido à conectividade local dos vértices. Tendo em mãos as soluções de ρ através da Eq. 4.9, é possível calcular o parâmetro de ordem r através da Eq. 4.6. Para isso, basta dividir a integral entre a contribuição dos osciladores síncronos ($|\omega| \leq \lambda kr$) e a contribuição dos osciladores assíncronos ($|\omega| > \lambda kr$),

$$\begin{aligned} \int d\omega \int dk \int d\theta g(\omega) k P(k) \rho(k, \omega; \theta) e^{i\theta} &= \int dk \int d\theta \left(\int_{-\lambda kr}^{\lambda kr} d\omega + \int_{-\infty}^{-\lambda kr} d\omega + \int_{\lambda kr}^{\infty} d\omega \right) \\ &\times g(\omega) k P(k) \rho(k, \omega; \theta) e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A contribuição da integral para $\omega < -\lambda kr$ e $\omega > \lambda kr$ é 0, se considerarmos $g(\omega) = g(-\omega)$, pois

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{-\lambda kr} d\omega + \int_{\lambda kr}^{\infty} d\omega \right) g(\omega) \rho(k, \omega; \theta) e^{i\theta} &= \int_{\lambda kr}^{\infty} g(\omega) e^{i\theta} \\ &\times C(k, \omega) \left(\frac{1}{\omega - \lambda kr \sin \theta} + \frac{1}{\omega + \lambda kr \sin \theta} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

A integral do lado direito da Eq. 4.11 em θ é igual a 0. Portanto, Eq. 4.10 é equivalente a

$$r = \frac{1}{\langle k \rangle} \int dk \int_{-\lambda kr}^{\lambda kr} d\omega g(\omega) k P(k) \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\lambda kr} \right)^2} \times \exp \left[i \arcsin \left(\frac{\omega}{\lambda kr} \right) \right]. \quad (4.12)$$

Se assumirmos $\arcsin(\omega / \lambda kr)$ esta entre $[-\pi/2, \pi/2]$, obtemos

$$\begin{aligned} r \int dk k P(k) &= \int dk \int_{-\lambda kr}^{\lambda kr} d\omega g(\omega) k P(k) \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\lambda kr} \right)^2} \\ &= \int dk \int_{-1}^1 d\omega' k P(k) g(\lambda kr \omega') \sqrt{1 - \omega'^2} \times \lambda kr \\ &= \lambda r \int dk k^2 P(k) \int_{-1}^1 d\omega' g(\lambda kr \omega') \sqrt{1 - \omega'^2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para $r \neq 0$, obtém-se

$$\int dk k P(k) = \lambda \int dk k^2 P(k) \int_{-1}^1 d\omega' g(\lambda kr \omega') \sqrt{1 - \omega'^2}, \quad (4.14)$$

Figura 4.1 – Transição de fase de segunda-ordem observada tanto em topologias triviais quanto complexas.

que por fim, tendendo $r \rightarrow 0^+$, leva à condição para a sincronização da rede dada por

$$\lambda_c = \frac{2}{\pi g(0)} \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}. \quad (4.15)$$

O resultado da Eq. 4.15 revela que o acoplamento crítico λ_c para a sincronização de redes aleatórias é nada mais que o acoplamento crítico correspondente ao resultado para um grafo completamente conectado, reescalado pela razão entre o primeiro e o segundo momento $\langle k \rangle / \langle k^2 \rangle$ da distribuição de grau $P(k)$. Em outras palavras, este resultado afirma que o acoplamento crítico depende fortemente da topologia do grafo. Em particular, $\lambda_c \rightarrow 0$ se o segundo momento $\langle k^2 \rangle$ divergir, o que é o caso para redes livre-escala com $\gamma \leq 3$. Curiosamente, a dependência apresentada na Eq. 4.15 possui a mesma forma funcional de pontos críticos de outros processos dinâmicos em redes complexas, como percolação e propagação de epidemias (86, 135, 143). Estes resultados implicam que as propriedades críticas de muitos processos dinâmicos em redes complexas são essencialmente determinadas pela topologia do grafo, não importando se a dinâmica é não-linear ou não.

4.3 Sincronização Explosiva em Redes Livre-Escala

Assim como no modelo de Kuramoto clássico, que considera um grafo totalmente conectado, transições de fase em sincronização em topologias complexas são observa-

Figura 4.2 – Diagramas de sincronização $r(\lambda)$ para diferentes redes construídas de acordo com o modelo descrito em (1). (a) $\alpha = 1$ (ER), (b) $\alpha = 0.6$, (c) $\alpha = 0.2$ e (d) $\alpha = 0$ (BA). Figura adaptada de (2).

das como sendo contínuas e de segunda-ordem (135). Fig. 4.1 ilustra a curva típica da dependência do parâmetro de ordem r como função do acoplamento λ . Entretanto, recentemente, foi observado que de fato transições de fase descontínuas do parâmetro r podem ser observadas em redes complexas (2). Transições de fase descontínuas já foram observadas anteriormente no estudo de percolação explosiva em redes aleatórias (144) e em redes livre-escala (145–146).

Em (2), os autores consideraram o modelo de Kuramoto em redes complexas, dada pela Eq. 4.1 onde $\lambda_{ij} = \lambda$, porém com uma particularidade adicional: a frequência natural de cada nó i é dada pelo próprio grau k_i , de modo que a Eq. 4.1 se torna

$$\frac{d\theta_i}{dt} = k_i + \lambda \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i). \quad (4.16)$$

Para ilustrar como se dá a dependência do parâmetro de ordem r com o acoplamento λ nesta situação, em (2), os autores calcularam numericamente os diagramas $r = r(\lambda)$ incrementando e decrementando o acoplamento λ adiabaticamente. Mais especificamente, o parâmetro r foi calculado para $\lambda_0, \lambda_0 + \delta\lambda, \dots, \lambda_0 + n\delta\lambda$, e da mesma forma para um acoplamento inicial $\lambda_0 + n\delta\lambda$ decrescendo até λ_0 por decrementos $\delta\lambda$. De modo a analisar de forma sistemática o comportamento global dos osciladores em di-

Figura 4.3 – (a) Diagramas de sincronização $r(\lambda)$ para quatro redes livre-escala construídas a partir do modelo configuracional. Todas as redes possuem distribuição de grau $P(k) \sim k^{-\gamma}$ com $\gamma = 2.4, 2.7, 3.0$ e 3.3 , com $N = 1 \cdot 10^3$ nós. Os passos de incremento foram escolhidos como sendo $\delta\lambda = 0.02$. (b) Diagramas de sincronização para o caso sem correlação entre frequências naturais e grau dos nós ($\omega_i \neq k_i$), mas escolhendo $g(\omega) \sim \omega^{-\gamma}$. Figura adaptada de (2).

ferentes topologias, em (2) foram consideradas redes construídas a partir do modelo de redes descrito em (1). Este modelo permite a construção de redes com o mesmo grau médio $\langle k \rangle$, gerando redes do tipo ER ou BA de acordo com um único parâmetro $\alpha \in [0, 1]$. Para $\alpha = 1$ a rede gerada trata-se de uma rede ER com distribuição de grau dada por uma distribuição de Poisson; já para $\alpha = 0$ resulta em redes livre-escala com $P(k) \sim k^{-3}$. Valores intermediários de $\alpha \in (0, 1)$ ajustam a heterogeneidade da rede, crescendo conforme α varia de $\alpha = 1$ a $\alpha = 0$. Fig. 4.2 mostra os resultados obtidos para redes geradas através do modelo descrito em (1) para diferentes valores de α . Para a rede ER ($\alpha = 1$), o diagrama de sincronização apresenta transição de fase contínua de segunda-ordem, como observado para outras escolhas de $g(\omega)$, com as curvas das diferentes propagações do acoplamento λ sobrepostas. Porém, o resultado mais notável é o observado para as redes BA ($\alpha = 0$), que exibe uma transição de fase de primeira-ordem. Para o caso de propagação crescente do acoplamento, o parâmetro de ordem permanece $r \simeq 0$ até um certo valor λ_c assumindo valor $r \simeq 1$, quando aproximadamente toda a rede está sincronizada. Além do mais, a curva correspondente à propagação decrescente do acoplamento também apresenta uma transição de fase abrupta, indo do estado coerente para o estado incoerente. Vale ainda notar que as propagações crescentes e decrescentes de λ possuem valores diferentes para o acoplamento crítico, caracterizando a presença de histerese no sistema, ao contrário do observado nas redes ER.

A fim de investigar com mais detalhes tais efeitos, em (2) os autores calcularam os diagramas de sincronização, considerando redes construídas a partir do modelo configuracional (147) com distribuições de grau na forma $P(k) \sim k^{-\gamma}$, considerando duas situações: caso em que $g(\omega) = P(k)$ e o caso em que a correlação entre estrutura e dinâmica é quebrada, porém mantendo $g(\omega) \sim \omega^{-\gamma}$. Os gráficos apresentados na Fig. 4.3(b) mostram que todas as transições passam a ser de segunda ordem quando a correlação entre $g(\omega)$ e $P(k)$ é quebrada, recuperando o comportamento usual de sincronização em redes complexas. Este resultado leva à conclusão de que transições de primeira ordem surgem devido à correlação positiva entre a distribuição de frequências naturais e a distribuição de grau dos nós de redes do tipo livre-escala (2).

No Capítulo 5 mostramos análises complementares deste modelo, onde calculamos o acoplamento crítico e verificamos a influência de atrasos temporais.

5 Resultados e discussões

Embora sincronização explosiva tenha sido observada em redes livre-escala, expressões que descrevem o acoplamento crítico ainda não foram determinadas. De fato, apenas para redes do tipo estrela (apenas um nó conectado com K vizinhos) sabe-se precisamente o acoplamento crítico necessário para atingir o estado completamente síncrono (2). Neste trabalho, estimamos o acoplamento crítico λ_c para a sincronização de redes aleatórias considerando o caso em que as frequências naturais estão positivamente correlacionadas com a distribuição de grau ($g(\omega) = P(k)$). Nossos resultados, obtidos via campo médio, apresentam boa concordância com simulações numéricas, tanto para redes aleatórias ER quanto para redes livre-escala construídas a partir do modelo BA e através do modelo configuracional (147). Ainda nesta seção, apresentamos também os resultados relacionados à sincronização de osciladores com a presença de atrasos (*delays*) temporais na interação entre as fases dos nós, considerando também $g(\omega) = P(k)$. Mais precisamente, mostramos que, ao contrário da noção intuitiva, é possível atingir o estado síncrono para menores valores do acoplamento λ quando há a presença de *delays* nas conexões. Os resultados desses dois trabalhos foram publicados no periódico *Physical Review E* (148–149).

5.1 Determinação do acoplamento crítico - $g(\omega) = P(k)$

Novamente, considere N osciladores acoplados cujas equações de movimento de suas fases sejam dadas pela Eq. 4.16. De forma semelhante a Ichinomiya (139), definimos a densidade $\rho = \rho(k; \theta, t)$ como sendo a densidade de nós que possuem grau k e

fase θ num dado instante t , normalizada de acordo com

$$\int_0^{2\pi} \rho(k; \theta, t) d\theta = 1. \quad (5.1)$$

De forma semelhante à Eq. 4.4, a probabilidade de que uma aresta escolhida aleatoriamente esteja conectada a um nó de grau k e fase θ no instante t é dada por

$$\frac{kP(k)\rho(k; \theta, t)}{\langle k \rangle}. \quad (5.2)$$

Tomando o limite do contínuo na aproximação de campo médio usando Eq. 5.2, obtemos

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = k + \lambda k \int dk' \int d\theta' \frac{k' P(k')}{\langle k \rangle} \rho(k', \theta', t) \sin(\theta - \theta'). \quad (5.3)$$

O parâmetro de ordem é definido de forma similar à Eq. 4.6, isto é,

$$re^{i\psi(t)} = \frac{1}{\langle k \rangle} \int dk \int d\theta k P(k) \rho(k, \theta; t) e^{i\theta}, \quad (5.4)$$

onde $\psi(t)$ é a fase de oscilação média dos nós. Considerando Eq. 5.4, é possível reescrever a Eq. 5.3 em termos do parâmetro de ordem, resultando em

$$\frac{d\theta}{dt} = k + \lambda k r \sin(\psi - \theta). \quad (5.5)$$

De forma a deixar as equações de movimento em função de parâmetros conhecidos da rede, estabelecemos o referencial girante $\psi(t) = \Omega t$, onde Ω é a frequência média de oscilação da rede. No caso do presente modelo, i.e., $g(\omega) = P(k)$, a frequência média é igual ao grau médio da rede, $\Omega = \langle k \rangle$ (2). Com esta troca de variável, medem-se as fases dos osciladores a partir de um referencial que gira com velocidade angular Ω . Definindo a nova variável como sendo $\phi(t) \equiv \theta(t) - \psi(t)$ e substituindo na Eq. 5.5 obtemos

$$\frac{d\phi}{dt} = (1 - \lambda r \sin \phi) k - \langle k \rangle. \quad (5.6)$$

Nós podemos redefinir a densidade de osciladores em termos da nova variável ϕ ,

i.e., $\rho = \rho(k; \phi, t)$. Esta densidade deve satisfazer então a seguinte equação

$$\frac{\partial \rho(k; \phi, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \phi} \{v_\phi \rho(k; \phi, t)\} = 0, \quad (5.7)$$

onde v_ϕ é dada pela Eq. 5.6. Como estamos interessados na análise do estado estacionário do sistema, devemos procurar soluções independentes do tempo para a Eq. 5.7, que serão dadas de forma semelhante à Eq. 4.9:

$$\rho(k, \phi) = \begin{cases} \delta\left(\phi - \arcsin\left[\frac{1}{\lambda r} \left(\frac{k - \langle k \rangle}{k}\right)\right]\right) & \text{se } \frac{|k - \langle k \rangle|}{k} \leq \lambda r, \\ \frac{A(k)}{|(k - \langle k \rangle) - \lambda k r \sin \phi|} & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.8)$$

A primeira solução da Eq. 5.8 é relativa ao estado síncrono, correspondendo aos osciladores que estão acoplados com o campo médio. Em contrapartida, o segundo termo é a densidade dos osciladores que não estão acoplados. Logo, para calcularmos as integrais na Eq. 5.3, devemos reescrevê-las em termos da variável ϕ e separar a contribuição dos osciladores síncronos e assíncronos,

$$\langle k \rangle r = \int \left[\int_{\frac{|k - \langle k \rangle|}{k} \leq \lambda r} dk + \int_{\frac{|k - \langle k \rangle|}{k} > \lambda r} dk \right] P(k) k \rho(k, \phi) e^{i\phi} d\phi. \quad (5.9)$$

Escrevendo explicitamente a segunda integral na Eq. 5.9 e notando que $\rho(k, \phi)$ é π -periódica em ϕ , obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_{\langle k \rangle / (1 - \lambda r)}^\infty P(k) k \frac{\sqrt{(k - \langle k \rangle)^2 - k^2 \lambda^2 r^2}}{2\pi (k - \langle k \rangle - k \lambda r \sin \phi)} \cos \phi dk d\phi \\ & + \int_0^{2\pi} \int_{k_{\min}}^{\langle k \rangle / (1 + \lambda r)} P(k) k \frac{\sqrt{(k - \langle k \rangle)^2 - k^2 \lambda^2 r^2}}{2\pi (\langle k \rangle - k + k \lambda r \sin \phi)} \cos \phi dk d\phi = 0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde $k_{\min}$ é o mínimo grau da rede. Portanto, a única contribuição não-nula é devido aos osciladores acoplados com o campo médio:

$$\langle k \rangle r = \int_{\langle k \rangle / (1 + \lambda r)}^{\langle k \rangle / (1 - \lambda r)} \exp \left[i \arcsin \left(\frac{1}{\lambda r} \left(\frac{k - \langle k \rangle}{k} \right) \right) \right] k P(k) dk. \quad (5.11)$$

Da parte imaginária da Eq. 5.11 obtemos

$$\int_{\langle k \rangle / (1 + \lambda r)}^{\langle k \rangle / (1 - \lambda r)} k P(k) \frac{1}{\lambda r} \left(\frac{k - \langle k \rangle}{k} \right) dk = 0, \quad (5.12)$$

Figura 5.1 – Distribuição das fases ϕ como função do grau k para o modelo de rede (a) ER e (b) BA. Ambas as redes possuindo $N = 3 \times 10^3$ e grau médio $\langle k \rangle = 6$.

Figura 5.2 – Diagramas de sincronização para as redes do modelo ER com (a) $\langle k \rangle = 6$ e (b) $\langle k \rangle = 8$.

e da parte real,

$$\langle k \rangle r = \int_{\langle k \rangle / (1 + \lambda r)}^{\langle k \rangle / (1 - \lambda r)} k P(k) \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2 r^2} \left(\frac{k - \langle k \rangle}{k} \right)^2} dk. \quad (5.13)$$

Realizando a seguinte troca de variável $x = (k - \langle k \rangle) / \lambda r$, Eq. 5.13 fica

$$\langle k \rangle r = \lambda r \int_{-\langle k \rangle / (1 + \lambda r)}^{\langle k \rangle / (1 - \lambda r)} P(\lambda r x + \langle k \rangle) (\lambda r x + \langle k \rangle) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\lambda r x + \langle k \rangle} \right)^2} dx. \quad (5.14)$$

Para $r \neq 0$ e tendendo $r \rightarrow 0^+$, temos que

$$\langle k \rangle = \lambda \int_{-\langle k \rangle}^{\langle k \rangle} P(\langle k \rangle) \langle k \rangle \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\langle k \rangle} \right)^2} dx, \quad (5.15)$$

o que nos leva à seguinte expressão para o acoplamento crítico

$$\lambda_c = \frac{2}{\pi \langle k \rangle P(\langle k \rangle)}. \quad (5.16)$$

Portanto, o acoplamento crítico apresenta uma dependência inversa com o grau médio da rede $\langle k \rangle$ e $P(\langle k \rangle)$. Essa dependência é muito diferente da observada para outras escolhas de $g(\omega)$. Por exemplo, se $g(\omega)$ é simétrica em torno de um máximo local ω_0 , o acoplamento crítico será dado pela Eq. 4.15, ou seja, irá depender da razão $\langle k \rangle / \langle k^2 \rangle$ e, como discutido anteriormente, para redes livre-escala com $P(k) \sim k^{-\gamma}$ sendo $\gamma \leq 3$, conforme $N \rightarrow \infty$, temos que $\langle k \rangle / \langle k^2 \rangle \rightarrow 0$. Em contrapartida, para o caso em que

Figura 5.3 – Diagramas de sincronização para as redes contruídas através do modelo BA com (a) $\langle k \rangle = 6$ e (b) $\langle k \rangle = 8$.

$g(\omega) = P(k)$ este efeito não deve ser observado no limite de redes grandes, uma vez que o acoplamento crítico depende apenas do grau médio $\langle k \rangle$ da rede. Note ainda que no regime de um grafo completamente conectado e considerando $g(\omega)$ descorrelacionada com a topologia, temos que na Eq. 5.16 $\langle k \rangle \rightarrow N - 1$ e $P(\langle k \rangle) \rightarrow g(\bar{\omega})$, onde $\bar{\omega}$ é a frequência média. Dessa forma, através da Eq. 5.16 é possível recuperar o resultado

$$\lambda_c^{(K)} = \frac{2}{\pi g(\bar{\omega})} \frac{1}{N - 1}, \quad (5.17)$$

consistindo no mesmo resultado para o acoplamento crítico no limite do grafo completamente conectado através de $\lambda_c = [2 / \pi g(\bar{\omega})] [\langle k \rangle / \langle k^2 \rangle]$.

Afim de verificar a validade da Eq. 5.8 e 5.16 nós consideramos simulações numéricas. Como calculado em (2), incrementamos o valor do acoplamento λ adiabaticamente e para cada valor $\lambda_0, \lambda_0 + \delta\lambda_0, \dots, \lambda_0 + \delta\lambda$, evoluímos as equações de movimento dadas pela Eq. 4.16, calculando a coerência r no estado estacionário, com incrementos de $\delta\lambda = 0.02$. Fig. 5.1 mostra a dispersão das fases ϕ como função do grau k para redes ER e BA, com $N = 3 \times 10^3$ e $\langle k \rangle = 6$. Na Fig. 5.1(a) podemos notar que para $\lambda = 2.0$ o sistema começa a apresentar sincronização parcial dos nós, sugerindo que o acoplamento crítico está entre $\lambda = 0.3$ e $\lambda = 2.0$. Note ainda que para $\lambda = 10.0$, os resultados numéricos estão em boa concordância com a solução teórica. Na Fig. 5.1(b)

Figura 5.4 – Diagramas de sincronização para os modelos configuracionais com distribuição $P(k) \sim k^{-\gamma}$: (a) $\gamma = 2.4$ (b) $\gamma = 2.6$ (c) $\gamma = 2.8$ e (d) $\gamma = 3.0$, com propagação crescente do acoplamento λ com passos de $\delta\lambda = 0.02$. Todas as redes possuem $N = 1 \times 10^3$ e $\langle k \rangle = 8$

podemos observar o mesmo comportamento para a rede BA, conforme o acoplamento λ se torna maior, as fases se aproximam da solução teórica, especialmente para os nós de grau elevado.

Uma vez que verificamos a validade da Eq. 5.8, estimamos numericamente o valor do acoplamento crítico λ_c . Para isso, consideramos um conjunto de N_{net} redes, $\{N_1, N_2, \dots, N_{net}\}$, todas com o mesmo número de nós N e mesmo grau médio. Então, estimamos o acoplamento crítico λ_c como uma média sobre este conjunto, calculada através da Eq. 5.16. A Fig. 5.2 mostra o parâmetro de coerência r como função do acoplamento λ para redes ER com $N = 1 \times 10^3$, 2×10^3 e 3×10^3 nós, considerando $\langle k \rangle = 6$ e $\langle k \rangle = 8$. Para cada valor de N calculamos λ_c como uma média sobre um conjunto de redes possuindo mesmos valores de N e $\langle k \rangle$, obtendo $\langle k \rangle$ e N , tal que $\lambda_c^{(N=1000)} \cong 0.65$, $\lambda_c^{(N=2000)} \cong 0.65$ e $\lambda_c^{(N=3000)} \cong 0.66$ para as redes ER com $\langle k \rangle = 6$. Para as redes com $\langle k \rangle = 8$, obtemos $\lambda_c \cong 0.57$ para todos os valores de N . Como podemos ver na Fig. 5.2, o acoplamento crítico λ_c não depende extensivamente do número

de nós N da rede, uma vez que o acoplamento crítico na Eq. 5.16 depende apenas do grau médio $\langle k \rangle$. Repetindo o mesmo procedimento anterior para estimar o acoplamento crítico para as redes BA, obtemos os valores $\lambda_c^{(N=1000)} \cong 1.51$, $\lambda_c^{(N=2000)} \cong 1.51$ and $\lambda_c^{(N=3000)} \cong 1.52$, para as redes com $\langle k \rangle = 6$, e $\lambda_c^{(N=1000)} \cong 1.54$, $\lambda_c^{(N=2000)} \cong 1.44$ and $\lambda_c^{(N=3000)} \cong 1.45$, para as redes com $\langle k \rangle = 8$. Todos os resultados apresentam uma boa concordância com a simulação numérica, como podemos ver na Fig. 5.3. Além disso, Fig. 5.4 mostra a sincronização explosiva para redes livre-escala com distribuição na forma $P(k) \sim k^{-\gamma}$, construídas a partir do modelo configuracional (147) com $\gamma = 2.4, 2.6, 2.8$, e 3.0 e $\langle k \rangle = 8$. Note que o valor acoplamento crítico para o modelo configuracional com $\gamma = 3.0$ é o mesmo observado para as redes BA de grau médio $\langle k \rangle = 8$, resultado o qual concorda com a Eq. 5.16, uma vez que λ_c depende apenas de $\langle k \rangle$ e $P(\langle k \rangle)$.

5.2 Sincronização explosiva na presença de atrasos temporais

Uma das mais naturais e bem motivadas extensões do modelo de Kuramoto trata-se da análise de sincronização quando a interação entre as fases dos osciladores não se dá de forma instantânea, mas sim através de atrasos temporais (*delays*). Em redes biológicas, sinais elétricos são propagados ao longo de axônios com uma velocidade finita. Dessa forma, atrasos temporais devido à transmissão são elementos naturais em qualquer abordagem teórica que envolva a modelagem de sistemas onde há comunicação e processamento da informação entre os agentes. Em geral, o comportamento se torna muito mais rico do ponto de vista dinâmico, revelando ser muitas vezes surpreendente. É natural pensarmos que a presença de *delay* tende a quebrar a coerência ou até mesmo tornar mais difícil a interação entre as unidades de uma população, mas isso não é necessariamente verdade. Um importante exemplo tem sido a intensa pesquisa sobre sincronização de sistemas caóticos nos últimos anos (150). De fato, tem

tido provado que o acoplamento via *delay* é um elemento chave para a predição e o controle da evolução temporal de osciladores caóticos acoplados através da sincronização de suas dinâmicas (3). Em sistemas excitáveis, o comportamento é semelhante. Diversos trabalhos têm mostrado que a presença de *delay* tende a favorecer a existência de comportamento síncrono em redes de osciladores do tipo integra-e-dispara (151).

A generalização do modelo de Kuramoto para o caso em que há a presença de *delays* entre as conexões se dá de forma natural. O conjunto de N equações que descrevem a evolução das fases dos osciladores é agora dada por:

$$\frac{d\theta_i(t)}{dt} = \omega_i + \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \sin [\theta_j(t - \tau) - \theta_i(t)], \quad (5.18)$$

onde a fase do nó i no instante t dada por $\theta_i(t)$ irá interagir com a fase do nó j calculada por uma defasagem τ , i.e., $\theta_j(t - \tau)$. O modelo de Kuramoto em grafo completamente conectado foi extensamente estudado, tanto numericamente quanto teoricamente, através de teorias de campo médio (152–154). Foi provada a existência de regiões no espaço de fase (λ, τ) nas quais as soluções síncronas para a dinâmica são estáveis, outras em que a sincronia dos osciladores é proibida e ainda regiões em que os estados coerentes e incoerentes coexistem. Todos esses regimes também foram comprovados numericamente (153, 155).

Em redes complexas, entretanto, o modelo de Kuramoto com a inclusão de *delays* temporais ainda não foi completamente investigado, tendo apenas alguns estudos considerando apenas o regime de pequenas oscilações (156–157). Portanto, a fim de aprimorar o modelo analisado na seção anterior e torná-lo mais próximo de sistemas reais, propomos estudar o modelo de Kuramoto em redes complexas no regime em que a distribuição de frequências esteja totalmente correlacionada com a distribuição do grau, i.e., $g(\omega) = P(k)$. Para isso, a Eq. 4.16 se torna agora

$$\frac{d\theta_i(t)}{dt} = k_i + \lambda \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin [\theta_j(t - \tau) - \theta_i(t)]. \quad (5.19)$$

Como uma primeira abordagem, investigamos o comportamento da dinâmica em re-

Figura 5.5 – Diagrama de sincronização $r(\lambda)$ para redes livre-escala construídas de acordo com o modelo BA com $N = 1 \times 10^3$ e grau médio $\langle k \rangle = 6$.

des livre-escala construídas a partir do modelo BA, para analisarmos o efeito que *delays* temporais possam vir a causar em sistemas que apresentam transições de primeira-ordem. Fig. 5.5 mostra o diagrama de sincronização $r(\lambda)$ calculado considerando uma rede BA com parâmetro $N = 1 \times 10^3$ nós e grau médio $\langle k \rangle = 6$. Utilizando a mesma metodologia, incrementamos novamente o acoplamento λ por quantidades $\delta\lambda = 0.02$ ($\lambda_0, \lambda_0 + \delta\lambda, \dots, \lambda_0 + n\delta\lambda$) e calculamos o parâmetro de ordem r . Fig. 5.5 mostra que a presença de *delay* permite que a rede apresente sincronização parcial para valores menores do acoplamento, comparado ao caso em que $\tau = 0$. Além disso, é interessante observar que o sistema apresenta diferentes transições de fase para cada valor de τ adotado. Por exemplo para $\tau = 1.0$, a transição é de primeira-ordem, enquanto para $\tau = 0.3$, r cresce linearmente com λ e nenhuma transição de fase é verificada. Curiosamente, alguns valores de τ (por exemplo $\tau = 0.1$ e $\tau = 2.0$) retomam o comportamento normal de sincronização de uma rede composta por osciladores de Kuramoto de frequências naturais aleatórias (60, 158).

Com o objetivo de investigar o efeito de τ nas redes BA, consideramos uma rede não-direcionada do tipo estrela como uma aproximação, por possuir uma propriedade em comum às redes livre-escala, que é a presença de nós altamente conectados, de-

Figura 5.6 – Figura ilustrativa da aproximação para redes estrela utilizada.

nominados *hubs*. Uma rede estrela é um caso especial de uma árvore, *i.e.*, consiste de um nó central conectado com K outros nós, denominados de nós *folha* ou nós periféricos. A Fig. 5.6 exemplifica a aproximação utilizada. Logo, para uma rede estrela com $N = K + 1$ nós, os nós periféricos possuem grau $k_i = 1 (i = 1, \dots, K)$ e o nó central possui grau $k_H = K$. Usando esta aproximação estudamos a influências dos *hubs* (nós com altas frequências) sobre os nós vizinhos, dos quais se espera que possuam baixas frequências, uma vez que o coeficiente de aglomeração médio (*average cluster coefficient*) tende à zero nas redes BA (135, 159). Assim como no trabalho de Gardeñes *et.al* (2), consideramos a frequência natural de cada nó como sendo seu próprio grau. Estabelecendo o referencial girante considerando a fase média de oscilação como sendo $\psi(t) = \psi(0) + \Omega t$, sendo Ω a frequência média de oscilação das redes, definimos as novas variáveis como sendo $\phi_i(t) = \theta_i(t) - \Omega t$ para os nós periféricos e $\phi_H(t) = \theta_H - \Omega t$ para o nó central. Estas definições nos permitem reescrever a Eq. 5.19 como o conjunto de equações dado por:

$$\dot{\phi}_H = (\omega_H - \Omega) + \lambda \sum_{j=1}^K \sin [\phi_j(t - \tau) - \phi_H(t) - \Omega\tau], \quad (5.20)$$

$$\dot{\phi}_i = (\omega - \Omega) + \lambda \sin [\phi_H(t - \tau) - \phi_i(t) - \Omega\tau] \quad (i = 1, \dots, K), \quad (5.21)$$

onde usamos $\psi(0) = 0$ sem perda de generalidade. O parâmetro de ordem pode ser

Figura 5.7 – Diagramas de sincronização $r(\lambda)$ para redes estrelas sendo (a) $K = 60$ e (b) $K = 80$.

escrito então como sendo

$$re^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\theta_j(t)} = \frac{e^{i\theta_H(t)} + \sum_{j=1}^K e^{i\theta_j(t-\tau)}}{K+1}. \quad (5.22)$$

Multiplicando ambos os lados da Eq. 5.22 por $e^{-i\theta_H(t)}$, tomando a parte imaginária e escrevendo em termos das variáveis ϕ_H e ϕ_i , podemos reescrever a Eq. 5.20 como

$$\dot{\phi}_H = (\omega_H - \Omega) - \lambda r(K+1) \sin \phi_H(t). \quad (5.23)$$

Impondo o regime estacionário $\dot{\phi}_H = 0$ obtemos

$$\sin \phi_H(t) = \frac{(\omega_H - \Omega)}{\lambda r(t)(K+1)}. \quad (5.24)$$

O resultado obtido na Eq. 5.24 é o mesmo resultado verificado em (2) para a fase do nó central. Podemos ainda reescrever a Eq. 5.21 no regime estacionário ($\dot{\phi}_i = 0$) obtendo

$$\sin \phi_H(t - \tau) \cos [\phi_i(t) + \Omega\tau] - \cos \phi_H(t - \tau) \sin [\phi_i(t) + \Omega\tau] = \frac{\Omega - \omega}{\lambda}, \quad (5.25)$$

e resolvendo para $\cos [\phi_i(t) + \Omega\tau]$ temos que:

$$\cos [\phi_i(t) + \Omega\tau] = \frac{(\Omega - \omega) \sin \phi_H(t - \tau)}{\lambda} \pm \frac{\sqrt{[1 - \sin^2 \phi_H(t - \tau)] [\lambda^2 - (\omega - \Omega)^2]}}{\lambda}. \quad (5.26)$$

Para o caso em que $\tau = 0$ obtemos o mesmo resultado verificado em (2) para a fase dos nós periféricos. A Eq. 5.26 é válida somente para $\lambda \geq |\omega - \Omega|$, o que leva a um acoplamento crítico $\lambda_c = |\omega - \Omega|$ para a existência da solução síncrona, i.e., o estado comple-

Figura 5.8 – Comparação da sincronização explosiva observada em redes estrela para os tamanhos $K = 60, 70, 80$ e 90 para $\tau = 2.4$. O gráfico inscrito mostra as mesmas redes para o caso em que $\tau = 0$.

tamente síncrono da rede só pode ser atingido para $\lambda \geq \lambda_c$. O valor de λ_c surge como uma condição para a existência das soluções síncronas (Eq. 5.24 e 5.26). Abordagens em que o acoplamento crítico é derivado através de critério de estabilidade podem ser encontradas, por exemplo, em (160), onde os autores consideraram redes constituídas por neurônios de Hindmarsh-Rose que interagem através de acoplamento difusivo com *delays* constante. Abordagens similares podem ser encontradas em (161–163).

É também importante ressaltar que o valor do acoplamento crítico λ_c depende de τ , uma vez que a frequência média Ω também depende (*i.e.*, $\Omega = \Omega(\tau)$). Quando $\tau = 0$, o resultado $\Omega = 2K/(K + 1)$ verificado em (2) é recuperado. Além disso, é possível mostrar que a fase dos nós periféricos e fase do nó central obedecem a seguinte relação

$$\delta\phi(\tau) = \phi_H(t - \tau) - \phi_i(t) = -\frac{\pi}{2} + \tau\Omega(\tau). \quad (5.27)$$

A equação acima mostra que a diferença $\delta\phi$ entre as fases dos nós depende diretamente do *delay* τ , o que significa que é possível ajustar τ de modo a obter diferentes acoplamentos entre as fases dos nós folha e o nó central.

De modo a entendermos melhor como a presença de *delays* está relacionada com a sincronização dos osciladores, na Fig. 5.7 apresentamos os diagramas de sincronização

Figura 5.9 – Frequência média Ω como função do *delay* τ para redes estrela com (a) $K = 60$ e (b) $K = 80$.

para as redes estrelas. Comparando os resultados apresentados nas Figs. 5.7 e 5.8 (gráfico inscrito), podemos ver que de fato a presença de *delays* melhora a sincronização das redes. Notavelmente, a Fig. 5.7 mostra que as redes estrela apresentam o mesmo comportamento observado em redes livre-escala na presença de *delay* (veja Fig. 5.5). Mais especificamente, dependendo do valor de τ , as redes estrelas sofrem diferentes transições de fase. É interessante notar também que, como em Yeung *et.al.* (153), uma bifurcação subcrítica de Hopf do estado incoerente é observada para $\tau = 1$. Além disso, uma bifurcação supercrítica de Hopf para $\tau = 2$ é verificada na Fig. 5.5, para as redes BA.

Analisamos a dependência da frequência média Ω com o *delay* τ , de modo a entender como o acoplamento crítico λ_c das redes estrela está variando com τ . A Fig. 5.9 mostra a frequência média Ω como função de τ . É interessante notar que a escolha particular para a distribuição de frequências $g(\omega) = P(k)$ gera uma dependência de $\Omega(\tau)$ diferente da observada em trabalhos anteriores considerando o modelo de Kuramoto em um grafo completamente conectado (154), onde os autores verificaram que a frequência Ω depende inversamente do *delay* τ . Esta figura mostra ainda uma dependência oscilatória entre Ω e τ , fato que explica o comportamento diferente nas curvas de sincronização exibidas pelas redes livre-escala e estrela, diferentemente do caso em que não há a presença de *delays* (veja Fig. 5.5 e 5.7). Nestas figuras, podemos observar que o valor de λ necessário para atingir o estado síncrono possui uma dependência

Figura 5.10 – Diagramas de sincronização $r(\lambda)$ para (a) $K = 60$ e (b) $K = 80$.

intrínseca com τ . Por exemplo, na Fig. 5.5 $\lambda_c(\tau = 1.0) < \lambda_c(\tau = 0.3) < \lambda_c(\tau = 1.5)$, enquanto na Fig. 5.7, $\lambda_c(\tau = 1.0) < \lambda_c(\tau = 0.3) < \lambda_c(\tau = 2.0)$.

Dada tal dependência oscilatória entre Ω e τ , é possível então determinar o valor de τ que torna as redes estrelas mais suscetíveis a emergência de sincronização. Mais especificamente, é possível encontrar o valor de τ que eleva o grau de sincronização das redes, mantendo o estado estável no limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$. Da mesma forma, determinamos o valor de τ que produz o maior valor para o acoplamento crítico λ_c , a partir da expressão $\lambda_c = |\omega - \Omega|$. Portanto enquanto baixas diferenças entre as frequências levam a baixos valores de λ_c , elevando o nível de sincronização da rede, diferenças altas entre as frequências levam a maiores valores de λ_c , perturbando a sincronização da rede. Com o objetivo de exemplificar estes casos extremos, Fig. 5.10 mostra o diagrama de sincronização para valores de τ escolhidos de acordo com Fig. 5.9. Para $\tau = 2.4$, o sistema apresenta o menor valor possível para a frequência Ω , de modo que a rede sofre uma transição de fase de primeira-ordem para o estado síncrono. Não obstante, para $\tau = 0.2$, não há transição de fase e o parâmetro r cresce até que o estado síncrono seja atingido.

Note que se o valor do delay τ é escolhido de forma que um alto valor para λ_c seja observado, uma transição de primeira-ordem é observada. Além disso, diferentemente do caso em que $\tau = 0$ (2), a dependência do acoplamento crítico λ_c com o número de nós K é perdida. Mais especificamente, em (2) os autores verificaram que a estabilidade do estado assíncrono ($r \approx 0$) cresce conforme $K \rightarrow \infty$, enquanto aqui observamos que

Figura 5.11 – Curvas teóricas e numéricas da frequência Ω como função de τ utilizando $\lambda = 1$ para os casos (a) $K = 60$ e (b) $K = 80$.

a transição para o estado síncrono não depende extensivamente com K .

Analizamos a dependência da frequência média $\Omega = \Omega(\tau)$, supondo o regime em que todos os nós em uma rede estrela com $N = K + 1$ nós estejam evoluindo suas fases com a mesma frequência Ω , i.e., $\theta_H(t) = \Omega t$ para o nó central e $\theta_i(t) = \Omega t$ ($i = 1, 2, \dots, K$) para os nós periféricos. Substituindo estas soluções na Eq. 5.20 e 5.21 e escrevendo um sistema de $K + 1$ equações, temos que:

$$\begin{aligned}
 \Omega &= K + \lambda \sum_{j=1}^K \sin(-\Omega\tau) \text{ (nó central)} \\
 \Omega &= 1 - \lambda \sin(\Omega\tau) \text{ (nó 1)} \\
 \Omega &= 1 - \lambda \sin(\Omega\tau) \text{ (nó 2)} \\
 &\vdots \\
 \Omega &= 1 - \lambda \sin(\Omega\tau) \text{ (nó } K\text{)}.
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

A frequência média Ω das redes estrelas deve satisfazer todas as Eqs. 5.29. Somando todas as equações no sistema obtemos:

$$\Omega = \frac{2K}{K+1} [1 - \lambda \sin(\Omega\tau)]. \tag{5.29}$$

De acordo com (164), o estado síncrono ($\theta_H(t) = \Omega t, \theta_i(t) = \Omega t$) é linearmente estável se, e somente se,

$$\cos(\Omega\tau) > 0, \tag{5.30}$$

Figura 5.12 – Diagramas de sincronização para a rede estrela com $K = 80$ nós periféricos e a estimativa teórica para o acoplamento crítico λ_c para diferentes valores de τ .

o que significa que o produto $\Omega\tau$ deve estar no intervalo

$$2n\pi - \frac{\pi}{2} < \Omega\tau < 2n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.31)$$

Considerando $\Omega\tau \rightarrow \Omega\tau - n\pi$ na Eq. 5.29, na Fig. 5.11 mostramos as soluções da Eq. 5.29 para diferentes valores de n . Observe que estas soluções correspondem à frequência média mostrada na Fig. 5.9. Como podemos notar na figura, há uma excelente concordância entre os resultados teóricos e simulados. Ademais, uma vez que sabemos exatamente como a frequência média Ω depende de τ , é possível então determinar o acoplamento crítico para as redes estrela através da expressão $\lambda_c = |\omega - \Omega|$ reescrevendo a Eq. 5.29, utilizando a Eq. 5.31, apenas em termos de λ_c e τ . Fig. 5.12 mostra os resultados obtidos para o acoplamento crítico λ_c para diferentes valores de τ para a rede estrela com $K = 80$ nós, mostrando uma ótima concordância com os valores teóricos de λ_c e os dados numéricos.

Os resultados apresentados para as redes estrelas nos dão pistas para a dinâmica local em redes livre-escala. Mais especificamente, no regime em que não há a presença de *delays* temporais, a interação entre dois nós i e j de mesmo grau conectados a um

hub comum no estado síncrono ($\theta_i(t) = \theta_j(t) = \Omega t$) é $\sin(\theta_j - \theta_i) = 0$, formando desta forma uma rede estrela, localmente. Similarmente, na presença de *delay*, as interações entre dois nós idênticos i e j no estado síncrono será $\sin(\theta_j(t - \tau) - \theta_i(t)) = \sin(-\Omega\tau)$, o que significa que dois nós idênticos irão interagir somente através de uma constante. Portanto, em uma rede livre-escala, considerando os nós conectados a *hubs*, é esperado que a frequência média Ω siga a mesma dependência de τ como as redes estrelas na Fig. 5.11, o que razoável de se esperar, uma vez que os efeitos de τ sobre os diagramas de sincronização para as redes livre-escala e estrela são similares, comparando as Fig. 5.5 e 5.7.

6 Conclusão

O fenômeno de sincronização é intrínseco em diferentes sistemas complexos dinâmicos. Em muitos sistemas biológicos, sincronização é essencial para o seu funcionamento e, de acordo com a variedade de aplicações apresentadas neste trabalho, é uma abstração para muitos outros processos em diferentes contextos. Dessa forma, como o objetivo final no estudo da dinâmica de sistemas complexos é a formulação de modelos que venham a explicar a emergência de comportamento coletivo nestes sistemas, não só aspectos intrínsecos da dinâmica devem ser levados em conta, mas sim aspectos topológicos que descrevem o padrão de interações entre os elementos no sistema. Neste último quesito, a teoria de redes complexas forneceu novas ferramentas para descrever a topologia de sistemas complexos, trazendo novas perspectivas para o estudo de sistemas dinâmicos. De fato, como argumentado nesta dissertação, o estudo de processos de sincronização sofreu grandes avanços graças à teoria de redes, mas ao mesmo tempo contribuiu para o melhor entendimento de propriedades emergentes envolvidos na formação de sistemas descritos por redes complexas.

Este cenário fez com que muitos trabalhos na literatura tivessem como foco o estudo da influência da topologia de redes complexas no comportamento de processos dinâmicos ocorrendo nestas estruturas ou, em outras palavras, como a dinâmica do sistema é afetada pelo padrão de conexões. Em particular, mostramos nesta dissertação que a dinâmica do modelo de Kuramoto é diretamente afetada pela heterogeneidade das conexões da rede, quando comparado ao caso do grafo completamente conectado. Mais especificamente, o acoplamento crítico λ_c para a emergência de sincronização no sistema é reescalado pelo fator $\langle k \rangle / \langle k^2 \rangle$, sendo $\langle k^n \rangle$ o n -ésimo momento da distribuição do número de conexões $P(k)$ da rede. Este resultado traz novas implicações para

sincronização do sistema, como por exemplo, para redes livre escala com expoentes $\gamma \leq 3$, $\lambda_c \rightarrow 0$ conforme $N \rightarrow \infty$; uma vez que o segundo momento $\langle k^2 \rangle$ da distribuição de conexões diverge (60).

Entretanto, apesar destes e outros resultados obtidos, a relação entre estrutura e dinâmica na sincronização de redes complexas ainda não é completamente entendida (60). Uma prova disso é o fenômeno recentemente observado na literatura por Gardeñez *et. al.* (2) e estudado nesta dissertação. Neste modelo, é assumido que a frequência natural de cada vértice é igual ao seu grau, impondo dessa forma uma correlação microscópica entre a estrutura local dos vértices e sua dinâmica intrínseca. Esta modelagem levou à primeira observação de transições de fase descontínuas em redes livre-escalas, fenômeno o qual foi mostrado ser devido exclusivamente à correlação entre a estrutura da rede e a dinâmica local de cada vértice (2).

Apesar de o fenômeno observado em (2) ter motivado outros trabalhos sobre o assunto (165–167), o modelo possuía resultados analíticos apenas para redes do tipo estrela, carecendo de resultados para redes com estrutura não trivial. Neste trabalho obtemos a primeira expressão analítica para o acoplamento crítico no modelo de Gardeñez *et. al.*, resultado inédito na literatura até então. Mostramos ainda que, diferentemente do caso em que a distribuição de frequências $g(\omega)$ é unimodal e par, em que o acoplamento crítico λ_c tende a desaparecer para redes livre-escala conforme $N \rightarrow \infty$, considerando o caso $\omega_i = k_i$ o acoplamento crítico não sofre variações significantes. Mais precisamente, a expressão obtida para o acoplamento crítico em que $g(\omega) = P(k)$ não depende da razão $\langle k \rangle / \langle k^2 \rangle$, mas sim, apenas do grau médio $\langle k \rangle$ e $P(\langle k \rangle)$. A princípio, a partir deste resultado redes com mesmo grau médio $\langle k \rangle$ e distribuição de grau $P(k)$ devem apresentar o mesmo acoplamento crítico, fato que é observado comparando as figuras 5.3 e 5.4. Mais especificamente, a rede construída a partir do modelo configuracional com distribuição de conexões dada por $P(k) \sim k^{-\gamma}$, com $\gamma = 3$, possui o mesmo valor para o acoplamento crítico (Fig. 5.4(c)) comparado com o obtido para redes geradas através do modelo BA (Fig. 5.3(b)), resultado o qual está de acordo com

a expressão encontrada para λ_c , uma vez que ambas as redes possuem $\langle k \rangle = 8$. Além disso, não foi verificado para a propagação crescente do acoplamento λ uma dependência extensiva do acoplamento crítico λ_c com o número de nós das redes N . Tal dependência de λ_c com N foi, entretanto, observada em (2) para a sincronização de redes estrelas.

Para diversas aplicações de sincronização em sistemas reais, o acoplamento entre as unidades interagentes ocorre através de atrasos temporais, devido à velocidade finita da propagação da informação através das conexões. Portanto, além dos resultados relativos à obtenção do acoplamento crítico, generalizamos o modelo apresentando em (2) de modo a incluir atrasos temporais nas conexões entre os vértices da rede. Analisando redes livre-escala, constatamos um comportamento dinâmico totalmente distinto do observado na ausência de atrasos, observando tanto transições de fase contínuas quanto descontínuas dependendo dos diferentes valores de atrasos τ adotados. Verificamos ainda que a inclusão de atrasos no modelo de Kuramoto em redes complexas para $g(\omega) = P(k)$ permite elevar o nível de sincronização das redes, quando comparado ao caso em que não há a presença de atrasos. Isto é, uma dada rede pode apresentar um valor para o parâmetro de ordem r maior na presença de atrasos temporais comparada com a sincronização da mesma rede na ausência de atrasos para um mesmo valor de acoplamento λ , como podemos observar na Fig. 5.5. Curiosamente, até mesmo para pequenos valores de τ , é possível observar uma redução drástica do acoplamento crítico λ_c nas redes livres-escala construídas através do modelo BA. Para investigar este comportamento, utilizamos a aproximação para redes estrelas, obtendo para o acoplamento crítico a expressão $\lambda_c = |\omega - \Omega|$, fato que explica o comportamento apresentado pelas redes estrelas devido à dependência peculiar da frequência média Ω com τ (Fig. 5.11).

Sumarizando, os resultados apresentados nesta dissertação contribuem para uma melhor compreensão do fenômeno de sincronização explosiva recentemente introduzido na literatura por Gardeñez *et.al.* (2), fornecendo a primeira expressão teórica para

o acoplamento crítico λ_c necessário para a emergência de tal fenômeno. Além disso, realizamos a extensão do modelo para a inclusão de atrasos temporais, mostrando que ao contrário da noção intuitiva, o nível de sincronização do sistema pode ser elevado graças à interação não instantânea entre os osciladores. O próximo passo no estudo do fenômeno de sincronização explosiva é o cálculo do acoplamento crítico para a sincronização de redes complexas na presença de atrasos utilizando teorias de campo médio, considerando topologias não triviais, como por exemplo redes livre-escala, trabalho o qual já está em fase de desenvolvimento. Além disso, outra possível extensão do modelo, é o estudo da sincronização de redes de osciladores que apresentam valores não-nulos de assortatividade, o que não é o caso de redes construídas através do modelo ER e BA.

Os resultados apresentados na Seção 5.1 resultaram em um artigo publicado no periódico *Physical Review E* com o título “*Determination of the critical coupling of explosive synchronization transitions in scale-free networks by mean-field approximations*” (149) e o resultados relativos à Seção 5.2 resultaram no artigo “*Explosive synchronization enhanced by time-delayed coupling*” (148), também publicado no periódico *Physical Review E*.

6.1 Outros trabalhos

Além dos trabalhos ligados à sincronização de redes complexas apresentados nesta dissertação, realizamos também estudos dedicados a redes complexas construídas através de dados mercado financeiro. Investigamos primeiramente a emergência de comportamento coletivo na evolução de preços de ativos financeiros, culminando em artigo publicado no periódico *Europhysics Letters* (168) e em seguida, estudamos a evolução temporal das correlações entre preços de ações utilizando o formalismo de redes complexas, onde verificamos que durante crises financeiras tais redes se tornam menos robustas perante remoção aleatória de seus nós. Este último estudo resultou em um artigo publicado no periódico *Chaos: An interdisciplinary Journal of Nonlinear Sci-*

ence (169).

REFERÊNCIAS

- 1 GÓMEZ-GARDENES, J.; MORENO, Y. From scale-free to Erdős-Rényi networks. *Physical Review E*, v. 73, n. 5, p. 056124, 2006.
- 2 GÓMEZ-GARDENES, J. et al. Explosive synchronization transitions in scale-free networks. *Physical Review Letters*, v. 106, n. 12, p. 128701, Mar. 2011.
- 3 PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M.; KURTHS, J. *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- 4 BLEKHMANN, I. *Synchronization of dynamical systems*. Moscow: Nauka, 1971.
- 5 BLEKHMANN, I. *Synchronization in science and technology*. New York: American Society of Mechanical Engineers, 1988.
- 6 KURAMOTO, Y. *Chemical oscillations, waves, and turbulence*. Berlin: Springer Verlag, 1984.
- 7 BUCK, J. Synchronous rhythmic flashing of fireflies II. *Quarterly Review of Biology*, v. 63, n. 3, p. 265–289, 1988.
- 8 BUCK, J.; BUCK, E. Synchronous fireflies. *Scientific American*, v. 234, n. 5, p. 74–85, 1976.
- 9 PESKIN, C. *Mathematical aspects of heart physiology*. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, 1975.
- 10 MICHAELS, D.; MATYAS, E.; JALIFE, J. Mechanisms of sinoatrial pacemaker synchronization: a new hypothesis. *Circulation Research*, v. 61, n. 5, p. 704–714, 1987.
- 11 SHERMAN, A.; RINZEL, J.; KEIZER, J. Emergence of organized bursting in clusters of pancreatic beta-cells by channel sharing. *Biophysical Journal*, v. 54, n. 3, p. 411–425, 1988.
- 12 WALKER, T. Acoustic synchrony: two mechanisms in the snowy tree cricket. *Science*, v. 166, n. 3907, p. 891–894, 1969.

- 13 DIAMANT, N.; BORTOFF, A. Nature of the intestinal low-wave frequency gradient. *American Journal of Physiology*, v. 216, n. 2, p. 301–307, 1969.
- 14 HOPPENSTEADT, F.; IZHIKEVICH, E. *Weakly connected neural networks*. New York: Springer Verlag, 1997.
- 15 SINGER, W. Synchronization of cortical activity and its putative role in information processing and learning. *Annual Review of Physiology*, v. 55, n. 1, p. 349–374, 1993.
- 16 WONG, R. et al. Cellular basis of neuronal synchrony in epilepsy. *Advances in Neurology*, v. 44, p. 583–592, 1986.
- 17 MCCLINTOCK, M. Menstrual synchrony and suppression. *Nature*, v. 229, n. 24, p. 1, 1971.
- 18 BLASIUS, B.; HUPPERT, A.; STONE, L. Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological systems. *Nature*, v. 399, n. 6734, p. 354–359, 1999.
- 19 POSTNOV, D.; BALANOV, A.; MOSEKILDE, E. Synchronization phenomena in an array of population dynamic systems. *Advances in Complex Systems*, v. 1, n. 02n03, p. 181–202, 1998.
- 20 JIANG, Z.; MCCALL, M. Numerical simulation of a large number of coupled lasers. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 10, n. 1, p. 155–163, 1993.
- 21 TANGUY, Y. et al. Synchronization and clustering in a multimode quantum dot laser. *Physical Review Letters*, v. 96, n. 5, p. 53902, 2006.
- 22 YORK, R.; COMPTON, R. Quasi-optical power combining using mutually synchronized oscillator arrays. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, v. 39, n. 6, p. 1000–1009, 1991.
- 23 WIESENFELD, K.; COLET, P.; STROGATZ, S. Synchronization transitions in a disordered Josephson series array. *Physical Review Letters*, v. 76, n. 3, p. 404–407, 1996.
- 24 WIESENFELD, K.; COLET, P.; STROGATZ, S. Frequency locking in Josephson arrays: connection with the Kuramoto model. *Physical Review E*, v. 57, n. 2, p. 1563, 1998.
- 25 RODRIGUEZ-ITURBE, I.; RINALDO, A. *Fractal river basins: chance and self-organization*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

- 26 LINDSEY, W.; SIMON, M. *Phase-locked loops and their application*. New York: IEEE Press, 1978.
- 27 PECORA, L.; CARROLL, T. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, v. 64, n. 8, p. 821–824, 1990.
- 28 DMITRIEV, A.; PANAS, A. *Dynamical chaos: new information carriers for communication systems*. Moscow: Fizmatlit, 2002.
- 29 KAPRAL, R.; SHOWALTER, K. *Chemical waves and patterns*. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, 1995.
- 30 WIENER, N. *Nonlinear problems in random theory*. Cambridge: MIT Press, 1958.
- 31 WIENER, N. *Cybernetics: or the control and communication in the animal and the machine*. Cambridge: MIT Press, 1961.
- 32 WINFREE, A. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of Theoretical Biology*, v. 16, n. 1, p. 15–42, 1967.
- 33 KURAMOTO, Y.; NISHIKAWA, I. Statistical macrodynamics of large dynamical systems. case of a phase transition in oscillator communities. *Journal of Statistical Physics*, v. 49, n. 3, p. 569–605, 1987.
- 34 GLANSDORFF, P.; PRIGOGINE, I. *Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1971.
- 35 KURAMOTO, Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In: *International symposium on mathematical problems in theoretical physics*. New York: Springer, 1975. p. 420–422.
- 36 KURAMOTO, Y. Cooperative dynamics of oscillator community. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, v. 79, p. 223–240, 1984.
- 37 SAKAGUCHI, H.; KURAMOTO, Y. A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entrainment. *Progress of Theoretical Physics*, v. 76, n. 3, p. 576–581, 1986.
- 38 KURAMOTO, Y.; NISHIKAWA, I. *Cooperative dynamics in complex physical systems*. Berlin: Springer, 1989.
- 39 JOSEPHSON, B. D. Coupled superconductors. *Reviews of Modern Physics*, v. 36, n. 1, p. 216–220, Jan. 1964.

- 40 SWIFT, J.; STROGATZ, S.; WIESENFELD, K. Averaging of globally coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 55, n. 3, p. 239–250, 1992.
- 41 STROGATZ, S. H. et al. Simple model of collective transport with phase slippage. *Physical Review Letters*, v. 61, n. 20, p. 2380–2383, Nov. 1988.
- 42 STROGATZ, S. et al. Collective dynamics of coupled oscillators with random pinning. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 36, n. 1, p. 23–50, 1989.
- 43 WATTS, D.; STROGATZ, S. Collective dynamics of small-world networks. *Nature*, v. 393, n. 6684, p. 440–442, 1998.
- 44 MILGRAM, S. The small world problem. *Psychology today*, v. 2, n. 1, p. 60–67, 1967.
- 45 EULER, L. Solutio problematics ad geometrian situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, v. 8, p. 128–140, 1736.
- 46 HAMILTON, W. Letter to John T. Graves' On the Icosian' (17th october 1856). In: HALBERSTAM H.; INGRAM, R. (Ed.). *Mathematical papers: algebra*. Cambridge: Cambridge University Press, 1967. v. 3, p. 612–625.
- 47 APPEL, K.; HAKEN, W. Every planar map is four colorable. Part I: Discharging. *Illinois Journal of Mathematics*, v. 21, n. 3, p. 429–490, 1977.
- 48 BOLLOBÁS, B. *Random graphs*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- 49 SOLOMONOFF, R.; RAPOPORT, A. Connectivity of random nets. *Bulletin of Mathematical Biology*, v. 13, n. 2, p. 107–117, 1951.
- 50 ERDOS, P.; RENYI, A. On random graphs. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, v. 6, n. 290–297, p. 156, 1959.
- 51 BOLLOBÁS, B. *Modern graph theory*. New York: Springer-Verlag, 1998.
- 52 HARARY, F. *Graph theory*. Michigan: Perseus Books Group, 1995.
- 53 BARRAT, A.; BARTHLEMY, M.; VESPIGNANI, A. *Dynamical processes on complex networks*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- 54 GUIMERA, R.; AMARAL, L. Modeling the world-wide airport network. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, v. 38, n. 2, p. 381–385, 2004.

- 55 BARRAT, A. et al. The architecture of complex weighted networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 101, n. 11, p. 3747, 2004.
- 56 WATTS, D. A simple model of global cascades on random networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 99, n. 9, p. 5766, 2002.
- 57 MOTTER, A. Cascade control and defense in complex networks. *Physical Review Letters*, v. 93, n. 9, p. 98701, 2004.
- 58 CALLAWAY, D. S. et al. Network robustness and fragility: percolation on random graphs. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 25, p. 5468–5471, Dec. 2000.
- 59 NEWMAN, M. E. J. *Networks: an introduction*. Oxford: Oxford University Press, 2010.
- 60 ARENAS, A. et al. Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, v. 469, n. 3, p. 93–153, 2008.
- 61 FALOUTSOS, M.; FALOUTSOS, P.; FALOUTSOS, C. On power-law relationships of the Internet topology. *Computer Communication Review*, v. 29, n. 4, p. 251–262, 1999.
- 62 PASTOR-SATORRAS, R.; VÁZQUEZ, A.; VESPIGNANI, A. Dynamical and correlation properties of the Internet. *Physical Review Letters*, v. 87, n. 25, p. 258701, 2001.
- 63 VÁZQUEZ, A.; PASTOR-SATORRAS, R.; VESPIGNANI, A. Large-scale topological and dynamical properties of the Internet. *Physical Review E*, v. 65, n. 6, p. 66130, 2002.
- 64 WATTS, D. *Small world: the dynamics of networks between order and randomness*. Princeton: Princeton University Press, 1999.
- 65 AMARAL, L. et al. Classes of small-world networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 97, n. 21, p. 11149, 2000.
- 66 LATORA, V.; MARCHIORI, M. Is the Boston subway a small-world network? *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 314, n. 1, p. 109–113, 2002.
- 67 KALAPALA, V. et al. Scale invariance in road networks. *Physical Review E*, v. 73, n. 2, p. 026130, Feb. 2006.
- 68 SEN, P. et al. Small-world properties of the indian railway network. *Physical Review E*, v. 67, n. 3, p. 036106, 2003.

69 RAPOPORT, A.; HORVATH, W. A study of a large sociogram. *Behavioral Science*, v. 6, n. 4, p. 279–291, 1961.

70 DAVIS, G.; GREVE, H. Corporate elite networks and governance changes in the 1980s. *The American Journal of Sociology*, v. 103, n. 1, p. 1–37, 1997.

71 LILJEROS, F. et al. The web of human sexual contacts. *Nature*, v. 411, n. 6840, p. 907–908, 2001.

72 NEWMAN, M.; STROGATZ, S.; WATTS, D. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. *Physical Review E*, v. 64, n. 2, p. 026118, 2001.

73 ALBERT, R.; BARABÁSI, A. Topology of evolving networks: local events and universality. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 24, p. 5234–5237, 2000.

74 NEWMAN, M. The structure of scientific collaboration networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 98, n. 2, p. 404–409, 2001.

75 NEWMAN, M. Scientific collaboration networks I. Network construction and fundamental results. *Physical Review E*, v. 64, n. 1, p. 016131, 2001.

76 NEWMAN, M. Scientific collaboration networks II. Shortest paths, weighted networks, and centrality. *Physical Review E*, v. 64, n. 1, p. 016132, 2001.

77 BARABÁSI, A. et al. On the topology of the scientific collaboration networks. *Physica A*, v. 311, p. 590–614, 2002.

78 JEONG, H. et al. Lethality and centrality in protein networks. *Nature*, v. 411, n. 6833, p. 41–42, 2001.

79 JEONG, H. et al. The large-scale organization of metabolic networks. *Nature*, v. 407, n. 6804, p. 651–654, 2000.

80 ALBERT, R.; JEONG, H.; BARABÁSI, A. Internet: diameter of the world-wide web. *Nature*, v. 401, n. 6749, p. 130–131, 1999.

81 ADAMIC, L.; HUBERMAN, B. Power-law distribution of the world wide web. *Science*, v. 287, n. 5461, p. 2115–2115, 2000.

82 BARABÁSI, A.; ALBERT, R.; JEONG, H. Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world-wide web. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 281, n. 1, p. 69–77, 2000.

- 83 BRODER, A. et al. Graph structure in the web. *Computer Networks*, v. 33, n. 1, p. 309–320, 2000.
- 84 KLEINBERG, J. et al. The web as a graph: measurements, models, and methods. *Computing and Combinatorics*, p. 1–17, 1999.
- 85 DOROGOVTSSEV, S.; MENDES, J. Evolution of networks. *Advances in Physics*, v. 51, n. 4, p. 1079–1187, 2002.
- 86 NEWMAN, M. Structure and function of complex networks. *SIAM Review*, v. 45, n. 2, 2003.
- 87 ALBERT, R.; BARABÁSI, A. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, v. 74, n. 1, p. 47–97, 2002.
- 88 STROGATZ, S. Exploring complex networks. *Nature*, v. 410, n. 6825, p. 268–276, 2001.
- 89 HAYES, B. Graph theory in practice: Part I. *American Scientist*, v. 88, n. 1, p. 9–13, 2000.
- 90 NEWMAN, M.; BARABASI, A.; WATTS, D. *The structure and dynamics of networks*. Princeton: Princeton University Press, 2011.
- 91 PASTOR-SATORRAS, R.; VESPIGNANI, A. *Evolution and structure of the Internet: a statistical physics approach*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- 92 MENDES, J.; DOROGOVTSSEV, S.; IOFFE, A. *Evolution of networks: from biological nets to the internet and WWW*. Oxford: Oxford University Press, 2003.
- 93 BORNHOLDT, S.; SCHUSTER, H.; WILEY, J. *Handbook of graphs and networks*. Weinheim: Wiley Online Library, 2003.
- 94 SOLOMONOFF, R. An exact method for the computation of the connectivity of random nets. *Bulletin of Mathematical Biology*, v. 14, n. 2, p. 153–157, 1952.
- 95 ERDŐS, P.; RÉNYI, A. On the evolution of random graphs. *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézet Közleteményei*, v. 5, p. 17–61, 1960.
- 96 DODDS, P.; MUHAMAD, R.; WATTS, D. An experimental study of search in global social networks. *Science*, v. 301, n. 5634, p. 827–829, 2003.
- 97 TRAVERS, J.; MILGRAM, S. An experimental study of the small world problem. *Sociometry*, p. 425–443, 1969.

- 98 BARABÁSI, A.; ALBERT, R.; JEONG, H. Mean-field theory for scale-free random networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 272, n. 1, p. 173–187, 1999.
- 99 BOLLOBÁS, B.; RIORDAN, O. Mathematical results on scale-free random graphs. In: BORNHOLDT, S.; SCHUSTER, H.; WILEY, J. (Ed.). *Handbook of graphs and networks*. Weinheim: Wiley-VCH, 2002. p. 1–34.
- 100 BOLLOBÁS, B.; RIORDAN, O. The diameter of a scale-free random graph. *Combinatorica*, v. 24, n. 1, p. 5–34, 2004.
- 101 MOSSA, S. et al. Truncation of power law behavior in scale-free network models due to information filtering. *Physical Review Letters*, v. 88, n. 13, p. 138701, 2002.
- 102 DOROGOVTSSEV, S.; MENDES, J.; SAMUKHIN, A. Structure of growing networks with preferential linking. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 21, p. 4633–4636, 2000.
- 103 KRAPIVSKY, P.; REDNER, S.; LEYVRAZ, F. Connectivity of growing random networks. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 21, p. 4629–4632, 2000.
- 104 MILO, R. et al. On the uniform generation of random graphs with prescribed degree sequences. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/condmat/0312028>>. Acesso em: Dez. 2012.
- 105 SINGER, W.; GRAY, C. Visual feature integration and the temporal correlation hypothesis. *Annual Review of Neuroscience*, v. 18, n. 1, p. 555–586, 1995.
- 106 SINGER, W. Striving for coherence. *Nature*, v. 397, n. 4, p. 391–393, 1999.
- 107 MACKAY, W. Synchronized neuronal oscillations and their role in motor processes. *Trends in Cognitive Sciences*, v. 1, n. 5, p. 176–183, 1997.
- 108 KOSHIYA, N.; SMITH, J. Neuronal pacemaker for breathing visualized in vitro. *Nature*, v. 400, n. 6742, p. 360–363, 1999.
- 109 MORMANN, F. et al. Epileptic seizures are preceded by a decrease in synchronization. *Epilepsy Research*, v. 53, n. 3, p. 173–185, 2003.
- 110 TASS, P. et al. Detection of $n : m$ phase locking from noisy data: Application to magnetoencephalography. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 15, p. 3291–3294, Oct. 1998.
- 111 NIEDERMEYER, E.; SILVA, F. da. *Electroencephalography: basic principles, clinical applications, and related fields*. Philadelphia: Lippincott Williams & Wilkins, 2004.

- 112 GRAY, C. et al. Oscillatory responses in cat visual cortex exhibit inter-columnar synchronization which reflects global stimulus properties. *Nature*, v. 338, n. 6213, p. 334–337, 1989.
- 113 STOPFER, M. et al. Impaired odour discrimination on desynchronization of odour-encoding neural assemblies. *Nature*, v. 390, n. 6655, p. 70–73, 1997.
- 114 STEINMETZ, P. et al. Attention modulates synchronized neuronal firing in primate somatosensory cortex. *Nature*, v. 404, n. 6774, p. 131–133, 2000.
- 115 STERN, E. et al. Membrane potential synchrony of simultaneously recorded striatal spiny neurons in vivo. *Nature*, v. 394, n. 6692, p. 475–477, 1998.
- 116 ELSON, R. et al. Synchronous behavior of two coupled biological neurons. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 25, p. 5692–5695, 1998.
- 117 HANSON, F. et al. Comparative studies of firefly pacemakers. *Federation proceedings*, v. 37, n. 8, p. 2158, 1978.
- 118 VANAG, V. et al. Oscillatory cluster patterns in a homogeneous chemical system with global feedback. *Nature*, v. 406, n. 6794, p. 389–391, 2000.
- 119 ACEBRÓN, J. et al. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Reviews of Modern Physics*, v. 77, n. 1, p. 137, 2005.
- 120 STROGATZ, S. *Nonlinear dynamics and chaos with applications to physics, chemistry and engineering*. Cambridge: Westview Press, 2000.
- 121 STROGATZ, S. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 143, n. 1, p. 1–20, 2000.
- 122 SAKAGUCHI, H. Cooperative phenomena in coupled oscillator systems under external fields. *Progress of Theoretical Physics*, v. 79, p. 39–46, 1998.
- 123 DUZER, T.; TURNER, C. *Principle of superconducting devices and circuits*. New Jersey: Prentice Hall, 1981.
- 124 SAKAGUCHI, H.; SHINOMOTO, S.; KURAMOTO, Y. Local and global self-entrainments in oscillator lattices. *Progress of Theoretical Physics*, v. 77, n. 5, p. 1005–1010, 1987.
- 125 MARCUS, C. M.; STROGATZ, S. H.; WESTERVELT, R. M. Delayed switching in a phase-slip model of charge-density-wave transport. *Physical Review B*, v. 40, n. 8, p. 5588–5592, Sept. 1989.

- 126 MAREK, M.; STUHL, I. Synchronization in two interacting oscillatory systems. *Biophysical Chemistry*, v. 3, n. 3, p. 241–248, 1975.
- 127 NEU, J. Coupled chemical oscillators. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 37, n. 2, p. 307–315, 1979.
- 128 NEU, J. Large populations of coupled chemical oscillators. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 38, n. 2, p. 305–316, 1980.
- 129 SCHUSTER, H.; WAGNER, P. A model for neuronal oscillations in the visual cortex. *Biological Cybernetics*, v. 64, n. 1, p. 77–82, 1990.
- 130 SOMPOLINSKY, H.; GOLOMB, D.; KLEINFELD, D. Global processing of visual stimuli in a neural network of coupled oscillators. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 87, n. 18, p. 7200–7204, 1990.
- 131 SOMPOLINSKY, H.; GOLOMB, D.; KLEINFELD, D. Cooperative dynamics in visual processing. *Physical Review A*, v. 43, n. 12, p. 6990–7011, June 1991.
- 132 GRANNAN, E.; KLEINFELD, D.; SOMPOLINSKY, H. Stimulus-dependent synchronization of neuronal assemblies. *Neural computation*, v. 5, n. 4, p. 550–569, 1993.
- 133 STROGATZ, S. *Sync: the emerging science of spontaneous order*. New York: Hyperion, 2003.
- 134 BARABASI, A. *Linked: how everything is connected to everything else and what it means*. London: Plume, 2003.
- 135 BOCCALETTI, S. et al. Complex networks: structure and dynamics. *Physics Reports*, v. 424, n. 4-5, p. 175–308, 2006.
- 136 MOTTER, A.; ZHOU, C.; KURTHS, J. Network synchronization, diffusion, and the paradox of heterogeneity. *Physical Review E*, v. 71, n. 1, p. 016116, 2005.
- 137 RESTREPO, J.; OTT, E.; HUNT, B. Onset of synchronization in large networks of coupled oscillators. *Physical Review E*, v. 71, n. 3, p. 036151, 2005.
- 138 RESTREPO, J.; OTT, E.; HUNT, B. Emergence of synchronization in complex networks of interacting dynamical systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 224, n. 1, p. 114–122, 2006.
- 139 ICHINOMIYA, T. Frequency synchronization in a random oscillator network. *Physical Review E*, v. 70, n. 2, p. 026116, Aug. 2004.

- 140 ICHINOMIYA, T. Path-integral approach to dynamics in a sparse random network. *Physical Review E*, v. 72, n. 1, p. 016109, 2005.
- 141 LEE, D. Synchronization transition in scale-free networks: clusters of synchrony. *Physical Review E*, v. 72, n. 2, p. 026208, 2005.
- 142 HONG, H.; CHOI, M. Y.; KIM, B. J. Synchronization on small-world networks. *Physical Review E*, v. 65, n. 2, p. 026139, Jan. 2002.
- 143 DOROGOVTSSEV, S.; GOLTSEV, A.; MENDES, J. Critical phenomena in complex networks. *Reviews of Modern Physics*, v. 80, n. 4, p. 1275, 2008.
- 144 ACHLIOPTAS, D.; D'SOUZA, R.; SPENCER, J. Explosive percolation in random networks. *Science*, v. 323, n. 5920, p. 1453–1455, 2009.
- 145 RADICCHI, F.; FORTUNATO, S. Explosive percolation in scale-free networks. *Physical Review Letters*, v. 103, n. 16, p. 168701, 2009.
- 146 CHO, Y. et al. Percolation transitions in scale-free networks under the achlioptas process. *Physical Review Letters*, v. 103, n. 13, p. 135702, 2009.
- 147 MOLLOY, M.; REED, B. A critical point for random graphs with a given degree sequence. *Random Structures & Algorithms*, v. 6, n. 2-3, p. 161–180, 1995.
- 148 PERON, T. K. D.; RODRIGUES, F. A. Explosive synchronization enhanced by time-delayed coupling. *Physical Review E*, v. 86, n. 1, p. 016102, July 2012.
- 149 PERON, T. K. D.; RODRIGUES, F. A. Determination of the critical coupling of explosive synchronization transitions in scale-free networks by mean-field approximations. *Physical Review E*, v. 86, n. 5, p. 056108, Nov. 2012.
- 150 BOCCALETTI, S. et al. The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, v. 366, n. 1-2, p. 1–101, 2002.
- 151 GERSTNER, W. Rapid phase locking in systems of pulse-coupled oscillators with delays. *Physical Review Letters*, v. 76, n. 10, p. 1755–1758, 1996.
- 152 LUZYANINA, T. Synchronization in an oscillator neural network model with time-delayed coupling. *Network: Computation in Neural Systems*, v. 6, n. 1, p. 43–59, 1995.
- 153 YEUNG, M.; STROGATZ, S. Time delay in the Kuramoto model of coupled oscillators. *Physical Review Letters*, v. 82, n. 3, p. 648–651, 1999.

- 154 CHOI, M. et al. Synchronization in a system of globally coupled oscillators with time delay. *Physical Review E*, v. 61, n. 1, p. 371, 2000.
- 155 KIM, S.; PARK, S.; RYU, C. Multistability in coupled oscillator systems with time delay. *Physical Review Letters*, v. 79, n. 15, p. 2911, 1997.
- 156 EGUÍLUZ, V. et al. Structural and functional networks in complex systems with delay. *Physical Review E*, v. 83, n. 5, p. 056113, 2011.
- 157 PÉREZ, T.; EGUÍLUZ, V.; ARENAS, A. Phase clustering in complex networks of delay-coupled oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, n. 21, p. 025111, 2011.
- 158 MORENO, Y.; PACHECO, A. Synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks. *Europhysics Letters*, v. 68, p. 603, 2004.
- 159 COSTA, L. et al. Characterization of complex networks: a survey of measurements. *Advances in Physics*, v. 56, n. 1, p. 167–242, 2007.
- 160 STEUR, E.; NIJMEIJER, H. Synchronization in networks of diffusively time-delay coupled (semi-) passive systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, v. 58, n. 99, p. 1–1, 2011.
- 161 LEHNERT, J. et al. Loss of synchronization in complex neuronal networks with delay. *Europhysics Letters*, v. 96, p. 60013, 2011.
- 162 ENGLERT, A. et al. Synchronization of chaotic networks with time-delayed couplings: an analytic study. *Physical Review E*, v. 83, n. 4, p. 046222, 2011.
- 163 HEILIGENTHAL, S. et al. Strong and weak chaos in nonlinear networks with time-delayed couplings. *Physical Review Letters*, v. 107, n. 23, p. 234102, 2011.
- 164 EARL, M. G.; STROGATZ, S. H. Synchronization in oscillator networks with delayed coupling: a stability criterion. *Physical Review E*, v. 67, n. 3, p. 036204, Mar. 2003.
- 165 LEYVA, I. et al. Explosive first-order transition to synchrony in networked chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, v. 108, n. 16, p. 168702, 2012.
- 166 CHEN, H. et al. Explosive synchronization transitions in complex neural network. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1204.1816>>. Acesso em: Dez. 2012.
- 167 LEYVA, I. et al. Explosive transitions to synchronization in networked phase oscillators. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1212.0404>>. Acesso em: Dez. 2012.

168 PERON, T. D.; RODRIGUES, F. Collective behavior in financial markets. *Europhysics Letters*, v. 96, p. 48004, 2011.

169 PERON, T. D.; COSTA, L. da F.; RODRIGUES, F. The structure and resilience of financial market networks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 22, n. 1, p. 013117–013117, 2012.

170 NEWMAN, M. Assortative mixing in networks. *Physical Review Letters*, v. 89, n. 20, p. 208701, 2002.

171 ONNELA, J. et al. Intensity and coherence of motifs in weighted complex networks. *Physical Review E*, v. 71, n. 6, p. 65103, 2005.

172 LATORA, V.; MARCHIORI, M. Efficient behavior of small-world networks. *Physical Review Letters*, v. 87, n. 19, p. 198701, 2001.

173 GIRVAN, M.; NEWMAN, M. Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 99, n. 12, p. 7821, 2002.

APÊNDICE A – Medidas Topológicas de Redes Complexas

A.1 Medidas de Redes Complexas

Formalmente, uma rede complexa é composta por vértices e arestas. Em termos computacionais, ela pode ser armazenada através de uma lista de conexões ou matrizes de adjacência. No caso da lista, apenas os pares de vértices (i, j) que possuem ligações são armazenados. Já no caso da matriz de adjacência $\mathbf{A}$, se dois vértices i e j estão ligados, a entrada a_{ij} na matriz será igual a 1 e igual a 0, caso contrário. A Figura A.1 mostra um exemplo de mapeamento de uma rede não-dirigida e de uma dirigida em matrizes de adjacência. Quando as conexões na rede possuem peso, a lista tem um terceiro elemento relacionado à intensidade das ligações, (i, j, w_{ij}) . Além disso, ao invés da matriz de adjacência é utilizada uma matriz de pesos $\mathbf{W}$, que armazena os pesos das ligações entre os vértices, dados pelas entradas w_{ij} na matriz. Neste trabalho utilizamos medidas topológicas em termos do armazenamento usando matrizes de adjacência.

Uma medida básica para caracterização da estrutura de redes é dada pela média do número de conexões entre os vértices, denominada conectividade média $\langle k \rangle$. A conectividade de um dado vértice i para uma rede não-dirigida é dada por:

$$k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}. \quad (\text{A.1})$$

Figura A.1 – As redes complexas podem ser representadas por matrizes de adjacência. Em (a) temos uma rede não-dirigida e em (b) uma rede dirigida. No caso (a), os elementos a_{ij} da matriz são iguais a 1 se há uma ligação entre os vértices i e j e iguais a zero, caso contrário. Já no caso (b), os elementos da matriz a_{ij} são iguais a 1 se existe uma conexão dirigida do vértice i para o vértice j .

E a conectividade média:

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N k_j. \quad (\text{A.2})$$

Se as conexões na rede possuem intensidade, é utilizada a *força* do vértice, s_i , ao invés da conectividade, que é calculada por:

$$s_i = \sum_{j=1}^N w_{ij}. \quad (\text{A.3})$$

A respectiva medida global é a *força média* da rede,

$$\langle s \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i. \quad (\text{A.4})$$

Estas medidas, apesar de simples, podem ser usadas na identificação de *hubs* (vértices altamente conectados) e para quantificar a densidade de conexões. A Figura A.2 nos mostra um exemplo do uso dessas medidas para identificar um *hub*.

Um grande número de redes reais são correlacionadas no sentido que a probabilidade de um vértice com grau k esteja conectado com um outro vértice com grau k' dependa de k (135). Nesse caso, pode-se utilizar o conceito de probabilidade condicional $P(k'|k)$, sendo definida como a probabilidade que uma aresta de um nó com grau k se conecte com um nó de grau k' . Desse modo, a probabilidade condicional é dada por:

$$P(k'|k) = \frac{\langle k \rangle P(k|k')}{kP(k)} \quad (\text{A.5})$$

Figura A.2 – Exemplo de duas redes formadas por 10 vértices e 15 arestas. Enquanto que na rede sem peso (a), o vértice 1 é um hub porque concentra grande parte das conexões ($k_1 = 8$), na rede (b), o vértice 6 é um hub por possuir ligações com maior intensidade (a intensidade da ligação é representada pela largura da aresta).

Observe que $\sum_{k'} P(k'|k) = 1$. O grau médio dos vizinhos é dado por

$$k_{nn}(k) = \sum_{k'} k' P(k'|k). \quad (\text{A.6})$$

Caso não ocorra correlação, $k_{nn}(k)$ é independente de k (170). Quando $k_{nn}(k)$ é uma função crescente em k , vértices com alto grau tendem a se conectarem entre si, estas redes são classificadas como assortativas, caso $k_{nn}(k)$ for decrescente em k , vértices com alto grau tendem a se conectarem com vértices que possuam baixo grau, disassortativas. Outra maneira de determinar a correlação de grau é considerando o coeficiente de correlação de Pearson nos extremos de uma aresta (170):

$$r = \frac{(1/M) \sum_{j>i} k_i k_j a_{ij} - [(1/M) \sum_{j>i} (1/2)(k_i + k_j) a_{ij}]^2}{(1/M) \sum_{j>i} (k_i^2 + k_j^2) a_{ij} - [(1/M) \sum_{j>i} (1/2)(k_i + k_j) a_{ij}]^2}, \quad (\text{A.7})$$

onde M é o número total de arestas. Caso $r > 0$ a rede é assortativa, caso $r < 0$, a rede é disassortativa e para $r = 0$ não há correlação entre o grau dos vértices.

Outra medida básica para a caracterização de uma rede é o chamado coeficiente de aglomeração (*clustering coefficient*), que mede a razão entre o número de arestas entre os vizinhos de um dado vértice i , denotado por e_i , e o número máximo possível de arestas entre seus vizinhos, que é dado por $k_i(k_i - 1)/2$. Em termos da matriz de adjacência,

Figura A.3 – Ilustração esquemática de três situações onde o coeficiente de aglomeração tem diferentes valores. Em (a) é apresentado um exemplo de clique, onde todos os vértices estão conectados entre si. Neste caso, $cc_i = 1$. Na figura (b), $cc_i = 3/10$. Já em (c) $cc_i = 0$, pois seus vizinhos não possuem conexões entre si.

o coeficiente de aglomeração é calculado por (43):

$$cc_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)} = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N a_{ij}a_{jm}a_{mi}}{k_i(k_i - 1)}. \quad (\text{A.8})$$

A Figura A.3 mostra um exemplo do cálculo do coeficiente de aglomeração de uma rede.

De maneira similar, uma possível definição do coeficiente de aglomeração para uma rede com peso é a seguinte,

$$cc_i^w = \frac{1}{s_i(k_i - 1)} \sum_{j>m} \frac{w_{ij} + w_{im}}{2} a_{ij}a_{im}a_{jm}. \quad (\text{A.9})$$

Onnela *et al.* propuseram uma versão (171) para o coeficiente de aglomeração para redes com peso baseado no conceito de intensidade de subgrafos, definidos como a média geométrica dos pesos de um subgrafo, resultando em:

$$cc_i^w = \frac{1}{k_i(k_i - 1)} \sum_{j,k} (\hat{w}_{ij}\hat{w}_{ik}\hat{w}_{jk})^{1/3}. \quad (\text{A.10})$$

Na eq. A.10 os pesos dos *links* são normalizados pelo máximo peso da rede, $\hat{w}_{ij} = w_{ij}/\max(w)$ e a contribuição de cada triângulo de nós depende de todos os pesos da rede. Logo, triângulos em que o peso é igual a $\max(w)$ contribuem em uma unidade para a soma, enquanto triângulos tendo um link com um peso desprezível irá ter uma contribuição desprezível para o coeficiente de aglomeração.

Para caracterizar a estrutura de redes iremos também calcular o chamado o comprimento médio dos menores caminhos (*shortest path length*) entre dois vértices, que é dado por:

$$\ell = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} d_{ij}, \quad (\text{A.11})$$

onde d_{ij} é o comprimento do menor caminho (43) que liga os vértices i e j , que nada mais é do que o menor número de arestas que separa os dois vértices. Um problema na definição de ℓ é que se há vértices desconectados seu valor diverge. Uma possibilidade para evitar tal problema foi proposta por Latora e Marchiori (172), que introduziram uma medida chamada *eficiência global*, cujo cálculo é realizado da seguinte forma,

$$E = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \frac{1}{d_{ij}}. \quad (\text{A.12})$$

Essa medida é um indicador da capacidade de tráfego de uma rede. O recíproco da eficiência global é a *média harmônica do menor caminho médio*,

$$h = \frac{1}{E}, \quad (\text{A.13})$$

que evita o problema da divergência que ocorre com a Eq. A.11. Portanto, a média harmônica do menor caminho médio é uma medida mais apropriada para redes que possuam componentes desconectados.

Nas redes, quanto maior o número de caminhos em que um vértice ou aresta participa, maior é a importância de tal vértice ou aresta para a rede. Deste modo, assumindo que as interações seguem os menores caminhos entre dois vértices, é possível quantificar a importância de um vértice ou aresta em termos do grau de intermediação (*betweenness centrality*) (173) definida como:

$$B_u = \sum_{ij} \frac{\sigma(i, u, j)}{\sigma(i, j)}, \quad (\text{A.14})$$

onde $\sigma(i, u, j)$ é o número de menores caminhos entre os vértices i e j que passam através do vértice ou aresta u , $\sigma(i, j)$, é o número total de menores caminhos entre i e j , e a soma é feita sobre todos os pares i e j .

O espectro de uma rede corresponde ao conjunto de autovalores $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, N)$ da sua matriz de adjacência $\mathbf{A}$. A densidade espectral de uma rede é definida como (159):

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_i \delta(\lambda - \lambda_i), \quad (\text{A.15})$$

onde $\delta(x)$ é a função delta de Dirac e ρ aproxima-se para uma função contínua conforme $N \rightarrow \infty$. Os autovalores e os autovetores associados de uma rede são relacionados ao diâmetro, o número de ciclos e propriedades de conectividade de uma rede (159).

Há muitas outras medidas topológicas e dinâmicas para caracterização de redes complexas sumarizadas em livros e artigos de revisão (veja, por exemplo, (59, 135, 159)).

APÊNDICE B – Artigos publicados

Determination of the critical coupling of explosive synchronization transitions in scale-free networks by mean-field approximations

Thomas Kauê Dal'Maso Peron

Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, Av. Trabalhador São Carlense 400, Caixa Postal 369, CEP 13560-970, São Carlos, São Paulo, Brazil

Francisco A. Rodrigues*

Departamento de Matemática Aplicada e Estatística, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 668, 13560-970 São Carlos, São Paulo, Brazil

(Received 25 April 2012; published 12 November 2012)

An explosive synchronization can be observed in scale-free networks when Kuramoto oscillators have natural frequencies equal to their number of connections. The present paper reports on mean-field approximations to determine the critical coupling of such explosive synchronization. It has been verified that the equation obtained for the critical coupling has an inverse dependence on the network average degree. This expression differs from those whose frequency distributions are unimodal and even. In this case, the critical coupling depends on the ratio between the first and second statistical moments of the degree distribution. Numerical simulations were also conducted to verify our analytical results.

DOI: [10.1103/PhysRevE.86.056108](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.056108)

PACS number(s): 89.75.Hc, 89.75.Kd

I. INTRODUCTION

The synchronization of coupled oscillators has been intensively investigated because of its ubiquity in the real world [1,2]. When a collection of oscillators is coupled as a network, a synchronous state emerges [2,3]. Such an onset of coherent collective behavior has been verified between neurons in the central nervous system, communication networks, power grids, social interactions, animal behavior, ecosystems, and circadian rhythm [2].

The level of synchronization of a system is the consequence of a combination of the type of oscillators, the connectivity organization, the time-delay, and the interaction function [1,2]. Particularly, the network topology has a strong influence on the value of the critical coupling [4–8] and on the stability of the fully synchronized state [2,9–11]. For instance, Watts and Strogatz [12] verified that the decrease in the average shortest path length in small-world networks allows a more efficient coupling, enhancing the synchronization level. In addition, Nishikawa *et al.* [11] suggested that networks with a homogeneous degree distribution are more synchronizable than heterogeneous ones.

The network structure is important not only to enhance the level of synchronization, but also to permit the occurrence of phase transitions. Many works have verified second-order phase transitions in networks of Kuramoto oscillators [2]. Recently, Gardeñes *et al.* [13] showed that a first-order nonequilibrium synchronization transition can be observed in scale-free networks. They suggested that this event is a consequence of a positive correlation between the heterogeneity of the connections and the natural frequencies of the oscillators [13]. First-order phase transitions were also obtained experimentally and numerically by considering a network of Rössler units [14]. Indeed, such phenomenon has

been attracting the interest of many researchers of complex networks (e.g., Refs. [14–16]).

Although the explosive synchronization has been observed in scale-free networks, the analytical expression that describes the critical coupling has not been determined yet. The present paper addresses this problem by considering mean-field approximations.

II. EXPLOSIVE SYNCHRONIZATION

The Kuramoto model considers a set of N oscillators coupled by the sine of their phase differences and phase oscillators at arbitrary frequencies [17]. Each oscillator is characterized by its phase $\theta_i(t)$, $i = 1, \dots, N$. In complex networks, each oscillator i obeys an equation of motion defined as

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \lambda \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

where λ is the coupling strength, ω_i is the natural frequency of oscillator i , and A_{ij} are the elements of the adjacency matrix A , so that $A_{ij} = 1$ when nodes i and j are connected and $A_{ij} = 0$ otherwise. The general Kuramoto model considers a random distribution of the natural frequencies and phases according to a specific distribution $g(\omega)$ [1,2]. In most of the cases, the frequency distributions are unimodal and symmetric around a mean value ω_0 [2].

Here, we considered a modified version of the Kuramoto model as proposed by Gardeñes *et al.* [13]. More specifically, the natural frequency ω_i of node i was assigned to be equal to its node degree k_i , i.e., $\omega_i = k_i$. Therefore, we have $g(\omega) = P(k)$, in which $P(k)$ is the degree distribution. This choice for the frequency distribution leads to the explosive synchronization in scale-free networks [13]. When the positive correlation between the network structure and dynamics is broken, a first-order transition is no longer observed, whereas a second-order transition occurs [13].

*francisco@icmc.usp.br

III. MEAN FIELD APPROACH

In order to analyze the interplay between structure and dynamics in the Gardeñes *et al.* model, we considered the mean-field approach proposed by Ichinomiya [18]. First, we characterized the network according to its degree distribution $P(k)$ and introduced the density of the nodes with phase θ at time t for a given degree k , denoted by $\rho(k; \theta, t)$, which is normalized according to

$$\int_0^{2\pi} \rho(k; \theta, t) d\theta = 1. \quad (2)$$

The continuum limit of Eq. (1) is taken by considering the absence of degree correlation between the nodes in the network. Observe that this is a typical assumption in mean-field approximation [1]. In this regime, the probability that a random edge is attached to a node with degree k and phase θ at time t is given as

$$\frac{k P(k) \rho(k; \theta, t)}{\langle k \rangle}, \quad (3)$$

where $\langle k \rangle$ is the network average degree. Replacing $\omega_i = k_i$ in Eq. (1) and taking the continuum limit in the mean-field approach using Eq. (3), we obtained

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = k + \lambda k \int dk' \int d\theta' \frac{k' P(k')}{\langle k \rangle} \rho(k'; \theta', t) \sin(\theta' - \theta). \quad (4)$$

The order parameter, which quantifies the synchronization level of the network, is defined as [18,19]

$$r e^{i\psi(t)} = \frac{1}{\langle k \rangle} \int dk \int d\theta k P(k) \rho(k; \theta, t) e^{i\theta}, \quad (5)$$

where $0 \leq r \leq 1$ and $\psi(t)$ is the average phase of the oscillators.

Multiplying Eq. (5) by $e^{-i\theta'}$, taking the imaginary part and including it in Eq. (4), we obtained

$$\frac{d\theta}{dt} = k + \lambda k r \sin(\psi - \theta), \quad (6)$$

which is Eq. (4) written in terms of the order parameter.

In order to define the equations of motion in function of known parameters of the network, we set a reference rotating frame $\psi(t) = \Omega t$, where Ω is the average frequency of the network. In the present model, i.e., $g(\omega) = P(k)$, the average frequency is equal to the network average degree ($\Omega = \langle k \rangle$) [13]. Defining a new variable as $\phi(t) \equiv \theta(t) - \psi(t)$ and replacing it in Eq. (6), we obtained

$$\frac{d\phi}{dt} = (1 - \lambda r \sin \phi) k - \langle k \rangle. \quad (7)$$

The density of oscillators ρ can be redefined in terms of the new variable ϕ , i.e., $\rho = \rho(k; \phi, t)$. This density of oscillators must satisfy the continuity equation [18]

$$\frac{\partial \rho(k; \phi, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \phi} [v_\phi \rho(k; \phi, t)] = 0, \quad (8)$$

where $v_\phi = \frac{d\phi}{dt}$. Since we were interested in the analysis of the steady state of the system, we obtained the time-independent

solutions of Eq. (8), i.e.,

$$\rho(k; \phi) = \begin{cases} \delta(\phi - \arcsin[\frac{1}{\lambda r}(\frac{k - \langle k \rangle}{k})]) & \text{if } \frac{|k - \langle k \rangle|}{k} \leq \lambda r, \\ \frac{A(k)}{|(k - \langle k \rangle) - \lambda k r \sin \phi|} & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (9)$$

where $\delta(\cdot)$ is the Dirac delta function and $A(k)$ is the normalization factor. The first solution refers to the synchronous state, i.e., $\frac{d\phi}{dt} = 0$, corresponding to the oscillators entrained by the mean field. On the other hand, the second solution is the density of the nonentrained oscillators, i.e., $\rho(k; \phi) \sim \frac{1}{|v_\phi|}$ [3,18]. Thus, to compute the integrals in Eq. (5), we have redefined it in terms of variable ϕ and separated the contributions of entrained and nonentrained oscillators

$$\langle k \rangle r = \int \left(\int_{\frac{|k - \langle k \rangle|}{k} \leq \lambda r} dk + \int_{\frac{|k - \langle k \rangle|}{k} > \lambda r} dk \right) \times P(k) k \rho(k; \phi) e^{i\phi} d\phi. \quad (10)$$

Rewriting the second integral in Eq. (10) and noting that $\rho(k; \phi)$ is π periodic in ϕ , we obtained

$$\int_0^{2\pi} \int_{\langle k \rangle / (1 - \lambda r)}^\infty P(k) k \frac{\sqrt{(k - \langle k \rangle)^2 - k^2 \lambda^2 r^2}}{2\pi (k - \langle k \rangle - k \lambda r \sin \phi)} e^{i\phi} dk d\phi + \int_0^{2\pi} \int_{k_{\min}}^{\langle k \rangle / (1 + \lambda r)} P(k) k \frac{\sqrt{(k - \langle k \rangle)^2 - k^2 \lambda^2 r^2}}{2\pi (\langle k \rangle - k + k \lambda r \sin \phi)} e^{i\phi} dk d\phi = 0$$

where $k_{\min}$ is the minimum degree in the network. Thus, only the contribution of the oscillators entrained in the mean-field is accounted in the summation of Eq. (10):

$$\langle k \rangle r = \int_{\langle k \rangle / (1 + \lambda r)}^{\langle k \rangle / (1 - \lambda r)} \exp \left\{ i \arcsin \left[\frac{1}{\lambda r} \left(\frac{k - \langle k \rangle}{k} \right) \right] \right\} k P(k) dk. \quad (11)$$

From the imaginary part of Eq. (11), we obtained

$$\int_{\langle k \rangle / (1 + \lambda r)}^{\langle k \rangle / (1 - \lambda r)} k P(k) \frac{1}{\lambda r} \left(\frac{k - \langle k \rangle}{k} \right) dk = 0, \quad (12)$$

and from the real part,

$$\langle k \rangle r = \int_{\langle k \rangle / (1 + \lambda r)}^{\langle k \rangle / (1 - \lambda r)} k P(k) \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2 r^2} \left(\frac{k - \langle k \rangle}{k} \right)^2} dk. \quad (13)$$

Considering $x = (k - \langle k \rangle) / \lambda r$, we obtained

$$\langle k \rangle r = \lambda r \int_{-\langle k \rangle / (1 + \lambda r)}^{\langle k \rangle / (1 - \lambda r)} P(\lambda r x + \langle k \rangle) (\lambda r x + \langle k \rangle) \times \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\lambda r x + \langle k \rangle} \right)^2} dx. \quad (14)$$

For $r \neq 0$ and letting $r \rightarrow 0^+$,

$$\langle k \rangle = \lambda \int_{-\langle k \rangle}^{\langle k \rangle} P(\langle k \rangle) \langle k \rangle \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\langle k \rangle} \right)^2} dx, \quad (15)$$

we achieved the critical coupling

$$\lambda_c = \frac{2}{\pi \langle k \rangle P(\langle k \rangle)}. \quad (16)$$

Therefore, the critical coupling presents an inverse dependence on the average network degree and $P(\langle k \rangle)$. This dependence is very different from that observed when other types of frequency distribution $g(\omega)$ are taken into account. For instance, if $g(\omega)$ is symmetric in relation to a single local maximum ω_0 (e.g., $\omega_0 = 0$), the critical coupling is given as [18,19]

$$\lambda_c^{(0)} = \frac{2}{\pi g(0)} \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}. \quad (17)$$

Thus, for scale-free networks with $P(k) \sim k^{-\gamma}$, where $\gamma \leq 3$, as $N \rightarrow \infty$ the critical coupling $\lambda_c^{(0)}$ become smaller, since the ratio $\langle k \rangle / \langle k^2 \rangle$ diverges. On the other hand, in the case of $g(\omega) = P(k)$ this effect for large networks should not be observed when $N \rightarrow \infty$, once the critical coupling depends only on the average degree $\langle k \rangle$ of the network. Note that in the regime of the fully connected graph and considering $g(\omega)$ not correlated with the network topology, in Eq. (16) we have $\langle k \rangle \rightarrow N - 1$ and $P(\langle k \rangle) \rightarrow g(\bar{\omega})$, where $\bar{\omega}$ is the average frequency. In this case, it is recovered the result $\lambda_c^{(K)} = \frac{2}{\pi g(\bar{\omega})} \frac{1}{N-1}$ which is the same critical coupling in the fully connected graph limit, i.e., $\lambda_c = [2/\pi g(\bar{\omega})][\langle k \rangle / \langle k^2 \rangle]$.

IV. NUMERICAL ANALYSIS

A numerical simulation was considered in order to check the validity of Eqs. (9) and (16). We took into account networks generated by (i) the Barabási-Albert (BA) model, which are characterized by a distribution of connections following a power law [20], (ii) the configuration model, which allows to generate networks with a given degree sequence [21], and (iii) the random graphs of Erdős-Rényi (ER). We increased the coupling strength λ adiabatically and computed the stationary value of the global coherence r for each value $\lambda_0, \lambda_0 + \delta\lambda, \dots, \lambda_0 + n\delta\lambda$, with increments $\delta\lambda = 0.02$, as in Ref. [13]. Figure 1 shows the dispersion of phases ϕ as a function of the node's degree k for a BA network with $N = 10^3$ nodes and $\langle k \rangle = 6$. As we can see, for $\lambda = 2.0$ the system starts to present a partial synchronization, suggesting that the critical coupling is between $\lambda = 1.0$ and $\lambda = 2.0$. Note that for $\lambda = 4.0$, the numerical results of phases ϕ are in good agreement with the theoretical solutions, especially for the highly connected nodes. Figure 2 presents the dependence of phases ϕ on degree k for an Erdős-Rényi (ER) network with $N = 10^3$ and $\langle k \rangle = 6$. As in Fig. 1, we observed the same behavior for the ER network; as coupling λ becomes higher, the phases approach the theoretical solution. Therefore, our results suggest that the solution of $\rho(k; \phi)$, given by Eq. (9), is valid.

Once the validity of Eq. (9) had been verified, we estimated the critical coupling considering numerical data. An ensemble of N_{net} networks, $\{N_1, N_2, \dots, N_{\text{net}}\}$, with the same number of nodes N and same average degree was considered. Then, the critical coupling λ_c was estimated as an average over this ensemble by Eq. (16). Figure 3 shows the coherence diagram of r as function of λ for ER networks with $N = 10^3, 2 \times 10^3$, and 3×10^3 nodes considering $\langle k \rangle = 6$ and $\langle k \rangle = 8$. For each value of N we averaged the critical coupling λ_c over an ensemble

FIG. 1. (Color online) Distribution of the phases ϕ as a function of the degree k for a BA network with $N = 3 \times 10^3$ nodes and average degree $\langle k \rangle = 6$. The value of r considered in each theoretical curve (solid line) is calculated using the discrete form of Eq. (5), i.e., $r e^{i\psi(t)} = \sum_i k_i e^{i\phi_i(t)} / \sum_i k_i$, at the given coupling λ .

of networks with the same values of $\langle k \rangle$ and N , obtaining $\lambda_c^{(N=1000)} \cong 0.65$, $\lambda_c^{(N=2000)} \cong 0.65$, and $\lambda_c^{(N=3000)} \cong 0.66$ for the ER networks with $\langle k \rangle = 6$. For networks with $\langle k \rangle = 8$, we obtained $\lambda_c \cong 0.57$ for all values of N .

Figure 4 shows the coherence diagram for the BA networks. Using the same procedure described above to estimate the critical coupling, we obtained the values $\lambda_c^{(N=1000)} \cong 1.51$, $\lambda_c^{(N=2000)} \cong 1.51$, and $\lambda_c^{(N=3000)} \cong 1.52$ for networks with $\langle k \rangle = 6$. For networks with $\langle k \rangle = 8$, we obtained $\lambda_c^{(N=1000)} \cong 1.44$, $\lambda_c^{(N=2000)} \cong 1.44$, and $\lambda_c^{(N=3000)} \cong 1.45$. These values are in good agreement with the results of numerical simulation. Also, Fig. 5 shows the explosive synchronization in scale-free networks with degree distribution $P(k) \sim k^{-\gamma}$ constructed using the configurational model [21] with $\gamma = 2.4, 2.6, 2.8$, and 3.0 and $\langle k \rangle = 8$. Note that the critical coupling for the configurational model with $\gamma = 3.0$ is the same as observed for the BA networks with the same average degree. This result agrees with Eq. (16), since λ_c depends only on $\langle k \rangle$ and $P(\langle k \rangle)$.

In order to determine the dependence of the critical coupling λ_c on the network size N and to compare the theoretical and

FIG. 2. (Color online) Distribution of the phases ϕ as a function of the degree k for a ER network with $N = 3 \times 10^3$ nodes and average degree $\langle k \rangle = 6$. The value of r considered in each theoretical curve (solid line) is calculated using the discrete form of Eq. (5), i.e., $r e^{i\psi(t)} = \sum_i k_i e^{i\theta_i(t)} / \sum_i k_i$, at the given coupling λ .

numerical results more precisely, we considered finite-size effects. For the ER networks, we assumed the following scaling form of the order parameter [22–24],

$$r = N^{-\alpha} F[(\lambda - \lambda_c) N^\beta], \quad (18)$$

FIG. 3. Synchronization diagram for ER networks with forward continuation of the coupling strength λ with steps of $\delta\lambda = 0.02$. The networks have $N = 10^3$, 2×10^3 , and 3×10^3 and the same average degree (a) $\langle k \rangle = 6$ and (b) $\langle k \rangle = 8$. Each point is an average over 30 networks. The error bars have the size of the points.

FIG. 4. Synchronization diagram for BA networks with forward continuation of the coupling strength λ with steps of $\delta\lambda = 0.02$. The networks have $N = 10^3$, 2×10^3 , and 3×10^3 and the same average degree (a) $\langle k \rangle = 6$ and (b) $\langle k \rangle = 8$. Each point is an average over 30 networks. The error bars have the size of the points.

where F is the scaling function. We estimated the scaling parameters α and β through the scaling plots of $r N^\alpha$ against $(\lambda - \lambda_c) N^\beta$ by adjusting the parameters α and β considering different values of N in order to collapse them. Figure 6 shows the scaling plots of the order parameter r for several network sizes. As we can see, the data collapse satisfactorily for $\alpha \sim 0.02$ and $\beta \sim 0.07$ for networks with $\langle k \rangle = 6$. For networks with $\langle k \rangle = 8$, we obtained $\alpha \sim 0.02$ and $\beta \sim 0.05$. Thus, the critical coupling does not suffer significant variations with the network size.

Therefore, in contrast to the case where the frequency distribution $g(\omega)$ is unimodal and even, in which the critical coupling tends to vanish as $N \rightarrow \infty$, the consideration $\omega_i = k_i$ implies that the critical coupling does not suffer significant variations. This fact can be observed in Fig. 4. In addition, we have not verified that for the forward continuations of λ , the critical coupling increases extensively with the number of nodes. This result was obtained in Ref. [13], where authors considered a star network as an approximation of scale-free networks. Therefore, although star networks exhibit the first

FIG. 5. Coherence diagrams for configurational models with degree distribution $P(k) \sim k^{-\gamma}$: (a) $\gamma = 2.4$ (b) $\gamma = 2.6$ (c) $\gamma = 2.8$, and (d) $\gamma = 3.0$, with forward continuation of the coupling strength λ with steps of $\delta\lambda = 0.02$.

FIG. 6. (Color online) Scaling plot of r for ER networks with (a) $\langle k \rangle = 6$ and (b) $\langle k \rangle = 8$.

order phase transition, the critical coupling does not have the same behavior as verified in scale-free networks.

V. CONCLUSIONS

The analysis proposed here helps to understand the recently observed phenomena of explosive synchronization in scale-free networks. The obtained expression for the critical coupling does not depend on the ratio $\langle k \rangle / \langle k^2 \rangle$, as observed in the case that $g(\omega)$ is symmetric. Indeed, the obtained critical coupling has an inverse dependence with the network average degree, $\langle k \rangle$ and $P(\langle k \rangle)$.

ACKNOWLEDGMENTS

F.A.R. acknowledges CNPq (305940/2010-4) and FAPESP (2010/19440-2) for the financial support given to this research. T.K.D.M.P. acknowledges Fapesp for the support provided. The authors also acknowledge Angela C. P. Giampetro, who provided useful comments on the text.

- [1] A. Barrat, M. Barthélemy, and A. Vespignani, *Dynamical Processes on Complex Networks* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
- [2] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, and C. Zhou, *Phys. Rep.* **469**, 93 (2008).
- [3] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Vol. 12 (Cambridge University Press, Cambridge, 2003).
- [4] Y. Moreno and A. F. Pacheco, *Europhys. Lett.* **68**, 603 (2004).
- [5] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, and C. Pérez-Vicente, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 114102 (2006).
- [6] C. Zhou and J. Kurths, *Chaos* **16**, 015104 (2006).
- [7] J. Gómez-Gardeñes, Y. Moreno, and A. Arenas, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 034101 (2007).
- [8] J. Gómez-Gardeñes, Y. Moreno, and A. Arenas, *Phys. Rev. E* **75**, 066106 (2007).
- [9] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2109 (1998).
- [10] M. Barahona and L. M. Pecora, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 054101 (2002).
- [11] T. Nishikawa, A. E. Motter, Y. C. Lai, and F. C. Hoppensteadt, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 014101 (2003).
- [12] D. Watts and S. Strogatz, *Nature (London)* **393**, 440 (1998).
- [13] J. Gómez-Gardeñes, S. Gómez, A. Arenas, and Y. Moreno, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 128701 (2011).
- [14] I. Leyva, R. Sevilla-Escoboza, J. M. Buldú, I. Sendiña-Nadal, J. Gómez-Gardeñes, A. Arenas, Y. Moreno, S. Gómez, R. Jaimes-Reátegui, and S. Boccaletti, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 168702 (2012).
- [15] T. K. D. M. Peron and F. A. Rodrigues, *Phys. Rev. E* **86**, 016102 (2012).
- [16] H. Chen, F. Huang, C. Shen, and Z. Hou (2012), arXiv:1204.1816.
- [17] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. P. Vicente, F. Ritort, and R. Spigler, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 137 (2005).
- [18] T. Ichinomiya, *Phys. Rev. E* **70**, 026116 (2004).
- [19] J. G. Restrepo, E. Ott, and B. R. Hunt, *Phys. Rev. E* **71**, 036151 (2005).
- [20] A.-L. Barabási and R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999).
- [21] M. Newman, *Networks: An Introduction* (Oxford University Press, New York, 2010).
- [22] H. Hong, H. Park, and L. H. Tang, *Phys. Rev. E* **76**, 066104 (2007).
- [23] D.-S. Lee, *Phys. Rev. E* **72**, 026208 (2005).
- [24] H. Hong, M. Y. Choi, and B. J. Kim, *Phys. Rev. E* **65**, 026139 (2002).

Explosive synchronization enhanced by time-delayed coupling

Thomas Kauê Dal'Maso Peron

Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, Avenida Trabalhador São Carlense 400, Caixa Postal 369, CEP 13560-970, São Carlos, São Paulo, Brazil

Francisco A. Rodrigues*

Departamento de Matemática Aplicada e Estatística, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo-Campus de São Carlos, Caixa Postal 668, 13560-970 São Carlos, São Paulo, Brazil

(Received 7 November 2011; published 6 July 2012)

This paper deals with the emergence of explosive synchronization in scale-free networks by considering the Kuramoto model of coupled phase oscillators. The natural frequencies of oscillators are assumed to be correlated with their degrees, and a time delay is included in the system. This assumption allows enhancing the explosive transition to reach a synchronous state. We provide an analytical treatment developed in a star graph, which reproduces results obtained in scale-free networks. Our findings have important implications in understanding the synchronization of complex networks since the time delay is present in most real-world complex systems due to the finite speed of the signal transmission over a distance.

DOI: [10.1103/PhysRevE.86.016102](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.016102)

PACS number(s): 89.75.Hc, 02.10.Ox, 05.45.Xt

Synchronization is an emerging collective phenomenon present in science, nature, social life, and engineering [1–3]. When a large population of oscillators is coupled, with slightly different natural frequencies, a synchronous state emerges, and those oscillators run at an identical frequency [1,4]. For instance, experimental studies have verified that neurons in the central nervous system synchronize their oscillatory responses [5]. Similarly, the emergence of synchronization has also been observed among electrochemical oscillators [6]. Indeed, the onset of synchronization has been verified in circadian rhythm, communication networks, power grids, social interactions, cortical networks, and ecology [4].

Kuramoto proposed a mathematically tractable model to explain the emergence of collective synchronization [7]. His model considers oscillators coupled by the sine of their phase differences and phase oscillators at arbitrary frequencies [7,8]. Therefore, considering a networked topology, each oscillator i obeys an equation of motion defined as

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \lambda \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

where λ is the coupling strength, ω_i is the natural frequency of oscillator i [generally distributed according to some function $g(\omega)$], and A_{ij} are the elements of the adjacency matrix A , which represents the topology of a complex network. More specifically, elements $A_{ij} = 1$ if two nodes i and j are connected, whereas, $A_{ij} = 0$, otherwise, see Ref. [9]. In the Kuramoto model, each node tries to oscillate independently at its own frequency, whereas, its direct neighbors tend to synchronize it to all the other oscillators. It has been verified that coupling strengths higher than a determined threshold λ_c produce the onset of synchronization [4].

The level of synchronization of the whole system is measured by the macroscopic complex order parameter [4],

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)}, \quad (2)$$

where $0 \leq r(t) \leq 1$ measures the phase coherence of populations. When $r(t) = 1$, the system reaches the complete synchronous state, and when $r(t) = 0$, it reaches an asynchronous state.

The Kuramoto model has been analyzed considering some modifications, such as different types of coupling functions and frequency distributions [4] in order to enhance the synchronization level. Some modifications of this model also allow observing first-order phase transitions. For instance, Gómez-Gardeñes *et al.* [10] investigated the Kuramoto model in complex networks by defining the natural frequencies of each node i as its degree k_i , i.e., $\omega_i = k_i$. In contrast to the canonical choice for the frequency distribution, they observed a first-order phase transition to the synchronous state in scale-free networks, showing that this effect is due to the positive correlation between the nodes frequencies and the network topology.

The Kuramoto model has also been modified to include time delay (e.g., Refs. [11–14]). Time delay is observed in communication systems due to the finite speed of the signal transmission over a distance. For instance, the transmission of signals through unmyelinated axons presents an 80-ms delay for propagation through a cortical network [15]. As verified by Dhamala *et al.* [16], the time delay can enhance the network synchronization. They studied neural synchrony by taking into account the Hindmarsh-Rose neurons and observed that an extended region of stable synchronous activity could be achieved with low coupling strengths only if the delay was included in the system. The contribution of the time delay to network synchronization was also verified by Pérez *et al.* [13]. The authors incorporated a time delay in the Kuramoto model and verified that it was possible to obtain

*francisco@icmc.usp.br

FIG. 1. (Color online) Coherence diagram $r(\lambda)$ for the BA model with $N = 1000$ and $\langle k \rangle = 6$.

a perfect synchronization in directed networks by relating the topology of the network and the phases and frequencies of the oscillators.

In the current paper, we took into account the analyses by Gómez-Gardeñes *et al.* [10] and Choi *et al.* [12]. We considered the natural frequencies of each node i as its degree $\omega_i = k_i$ and included a time delay in the Kuramoto model. Therefore, the set of equations of motion for N coupled oscillators is defined as

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \lambda \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin[\theta_j(t - \tau) - \theta_i(t)]. \quad (3)$$

Note that the phase of node i interacts with the phase of node j with a time delay τ .

We analyzed this modified Kuramoto model [Eq. (3)] in Barabási-Albert (BA) networks [17]. Figure 1 shows the synchronization diagram $r(\lambda)$ taking into account a scale-free topology with $N = 10^3$ and $\langle k \rangle = 6$. As performed in Ref. [10], we increased the value of λ adiabatically and computed the stationary value of the global coherence r for each value $\lambda_0, \lambda_0 + \delta\lambda, \dots, \lambda_0 + n\delta\lambda$. Figure 1 shows that the presence of a time delay in the phase interactions allows reaching the synchronous state with smaller couplings than without time delay. In addition, it is interesting to observe that the system presents different phase transitions for each time delay τ adopted. For instance, for $\tau = 1.0$, the transition is of first order, whereas, for $\tau = 0.3$, r increases almost linearly with λ , and no phase transition is verified.

In order to locally investigate the effect of the time delay on BA networks, an undirected star graph was considered as an approximation of the scale-free topology. A star graph is a special type of tree, i.e., a central node connected with K leaves. Thus, for a star network with $N = K + 1$ nodes, the peripheral node has degree $k_i = 1$ ($i = 1, \dots, K$), and the central node has $k_H = K$ connections. By using this approximation, we studied the influence of hubs (nodes with higher frequencies $\omega_H = k_H$) on neighbor nodes, which are expected to have lower frequencies since the average clustering coefficient tends to zero in BA networks [18,19].

We considered the natural frequencies of each node equal to its respective degree. Setting the rotated frame with the average phase $\psi(t) = \psi(0) + \Omega t$, where Ω is the average frequency of the system, we defined the new variables as $\phi_i = \theta_i - \Omega t$ for the peripheral nodes and $\phi_H = \theta_H - \Omega t$ for the hub. These definitions allowed rewriting Eq. (3) into the set of equations given by

$$\dot{\phi}_H = (\omega_H - \Omega) + \lambda \sum_{j=1}^K \sin[\phi_j(t - \tau) - \phi_H(t) - \Omega\tau], \quad (4)$$

$$\dot{\phi}_i = (\omega_i - \Omega) + \lambda \sin[\phi_H(t - \tau) - \phi_i(t) - \Omega\tau], \quad (5)$$

where we set $\psi(0) = 0$ without loss of generality. The global parameter defined in Eq. (2) can be rewritten into

$$r e^{i\psi(t)} = \frac{e^{i\theta_H(t)} + \sum_{j=1}^K e^{i\theta_j(t-\tau)}}{K+1}. \quad (6)$$

Multiplying both sides of Eq. (6) by $e^{-i\theta_H(t)}$, taking the imaginary part, and writing in terms of phases ϕ_H and ϕ_i , we can rewrite Eq. (5) as

$$\dot{\phi}_H = (\omega_H - \Omega) - \lambda r(K+1) \sin \phi_H(t). \quad (7)$$

Imposing the phase locked solution, i.e., $\dot{\phi}_H = 0$, we obtained

$$\sin \phi_H(t) = \frac{(\omega_H - \Omega)}{\lambda r(t)(K+1)}. \quad (8)$$

Note that this is the same result verified in Ref. [10] for the hub's phase. We can rewrite Eq. (5) in the phase locked regime as

$$\begin{aligned} \sin \phi_H(t - \tau) \cos[\phi_i(t) + \Omega\tau] \\ - \cos \phi_H(t - \tau) \sin[\phi_i(t) + \Omega\tau] = \frac{\Omega - \omega_i}{\lambda}, \end{aligned} \quad (9)$$

and solving for $\cos[\phi_i(t) + \Omega\tau]$, we obtain

$$\begin{aligned} \cos[\phi_i(t) + \Omega\tau] = \frac{(\Omega - \omega_i) \sin \phi_H(t - \tau)}{\lambda} \\ \pm \frac{\sqrt{[1 - \sin^2 \phi_H(t - \tau)][\lambda^2 - (\omega_i - \Omega)^2]}}{\lambda}. \end{aligned} \quad (10)$$

Note that, when the time delay vanishes, $\tau = 0$, the same result verified in Ref. [10] for the peripheral node's phases is recovered. Equation (10) is valid only for $\lambda \geq |\omega_i - \Omega|$, which leads to the critical coupling $\lambda_c = |\omega_i - \Omega|$ for the existence of the synchronous solution, i.e., the fully synchronized state can only appear for $\lambda \geq \lambda_c$. Therefore, the value of λ_c is a condition for the existence of the synchronous solutions [Eqs. (8) and (10)]. Approaches in which the critical couplings are derived through a stability criterion can be found, for instance, in Ref. [20] where the authors considered a network of Hindmarsh-Rose neurons that interact via diffusive coupling with constant time delays. Similar approaches were considered in Refs. [21–23].

It is also important to stress that the value of λ_c depends on the time delay τ once the average frequency also depends on it [i.e., $\Omega = \Omega(\tau)$]. When $\tau = 0$, the result $\Omega = 2K/(K+1)$, verified in Ref. [10], is recovered. Moreover, from Eq. (10), it is straightforward to show that, at the critical coupling ($\lambda = \lambda_c$),

FIG. 2. (Color online) Coherence diagram $r(\lambda)$ for a star network composed of (a) $K = 60$ and (b) $K = 80$ leaves.

we obtain $\cos[\phi_i(t) + \Omega\tau] = \sin \phi_H(t - \tau)$. In this case, the phases of the peripheral nodes and the hub obey the following condition:

$$\delta\phi(\tau) = \phi_H(t - \tau) - \phi_i(t) = -\frac{\pi}{2} + \tau\Omega(\tau). \quad (11)$$

The above equation shows that the difference between the phases of peripheral nodes depends directly on the time delay τ , which means that it is possible to tune the time delay in order to obtain different phase couplings between the peripheral nodes and the hub.

In order to obtain insight on how the presence of the time delay τ is related to the onset of synchronization, we constructed the synchronization diagram for the star networks as shown in Fig. 2. Comparing the results presented in Figs. 2 and 5 (inset), we can see that the time delay enhances the network synchronization. The values of K were selected by taking into account the expected degree for a hub in a scale-free network of $N = 10^3$ as we considered the star graph an approximation of a BA network. Remarkably, Fig. 2 shows that star graphs present the same behavior observed in the scale-free network in the presence of a time delay (see Fig. 1). More specifically, depending on the value of τ , the star networks undergo different synchronization transitions. It is interesting to note that, like in Yeung and Strogatz [11], a subcritical Hopf bifurcation of the incoherent state at $\tau = 1$ is observed and, in addition, a supercritical Hopf bifurcation at $\tau = 2$ is verified in Fig. 1 for the BA networks.

This fact is due to the dependence of the mean frequency Ω on τ , i.e., $\Omega = \Omega(\tau)$. We analyzed such dependence in order to understand how the critical coupling λ_c varies for different time delays. Figure 3 shows the mean frequency Ω as a function of τ . It is interesting to note that the particular choice of the frequency distribution $g(\omega) = P(k)$ leads to a dependence on $\Omega(\tau)$ that is different than that verified in

FIG. 3. (Color online) Average frequency Ω as a function of time delay τ for star networks composed of (a) $K = 60$ and (b) $K = 80$ leaves.

FIG. 4. (Color online) Coherence diagram $r(\lambda)$ for star networks composed of (a) $K = 60$ and (b) $K = 80$ leaves.

Ref. [12] in which the authors found that the frequency Ω depends inversely on the time delay τ for the Kuramoto model with all-to-all connectivity. Figure 3 shows an oscillatory dependence between Ω and τ , which explains the different behavior of the synchronization diagrams displayed by the scale-free and star networks in contrast to the case without time delay [10] (see Figs. 1 and 2). In these figures, we can see that the value of λ , to reach the onset of synchronization, has an intrinsic dependency with τ . For instance, in Fig. 1, $\lambda_c(\tau = 1.0) < \lambda_c(\tau = 0.3) < \lambda_c(\tau = 1.5)$, whereas, in Fig. 2, $\lambda_c(\tau = 1.0) < \lambda_c(\tau = 0.3) < \lambda_c(\tau = 2.0)$.

Given this oscillatory dependence between Ω and τ , we determined the value of τ that makes the star networks more susceptible to the emergence of the onset of synchronization. More specifically, we found a time delay value that enhances the network synchronization level while keeping the state stable in the thermodynamic limit $K \rightarrow \infty$. We also determined a value of time delay that yields the maximum value of critical coupling, i.e., a time delay that decreases the synchronization level. From Eq. (10), we obtained $\lambda_c = |\omega - \Omega|$. Therefore, lower differences between these frequencies lead to lower values of λ_c , enhancing the network synchronization. On the other hand, higher differences lead to higher λ_c , disturbing the network synchronization. In order to examine those extreme cases, Fig. 4 shows the coherence diagram for time delays

FIG. 5. (Color online) Comparison of the explosive synchronization observed in star networks with sizes $K = 60, 70, 80$, and 90 for the time delay of $\tau = 2.4$. The inset shows the same star networks but for the case with $\tau = 0$.

FIG. 6. (Color online) Theoretical and numerical curves for the frequency Ω as a function of τ with $\lambda = 1.0$ for the cases (a) $K = 60$ and (b) $K = 80$. The discrete points correspond to the data shown in Fig. 3.

chosen according to Fig. 3. For instance, for the time delay of $\tau = 2.4$, the system presents the lowest possible frequency in such a way that the network undergoes a first-order transition to the synchronous state. Nevertheless, for the time delay of $\tau = 0.2$, no phase transition is observed, and the order parameter r is increased until the synchronous state has been reached.

Note that, if the time delay τ is set in order to establish a higher critical coupling λ_c , a first-order phase transition is observed. Also, different from the case in which $\tau = 0$ [10], the dependence of the critical coupling λ_c with the number of nodes is lost. More specifically, in Ref. [10], the authors showed that the stability of the unlocked state ($r \approx 0$) increased as $K \rightarrow \infty$, whereas, here, we observed that the transition to the synchronous state did not depend extensively on K (see Fig. 5).

In order to analyze the frequency dependency $\Omega = \Omega(\tau)$ more deeply, we supposed that all nodes in the star network were evolving with the same average frequency Ω , i.e., $\theta_H(t) = \Omega t$ for the hub and $\theta_i(t) = \Omega t$ ($i = 1, 2, \dots, K$) for the leaf nodes. Substituting these solutions in Eqs. (4) and (5) and writing a system of $K + 1$ equations, we obtain

$$\begin{aligned} \Omega &= K + \lambda \sum_{j=1}^K \sin(-\Omega\tau) \quad (\text{hub}), \\ \Omega &= 1 - \lambda \sin(\Omega\tau) \quad (\text{node 1}), \\ \Omega &= 1 - \lambda \sin(\Omega\tau) \quad (\text{node 2}), \\ &\vdots \\ \Omega &= 1 - \lambda \sin(\Omega\tau) \quad (\text{node } K). \end{aligned}$$

The average frequency Ω of the star networks must satisfy all these equations. Summing all the equations in the system, we obtain

$$\Omega = \frac{2K}{K+1} [1 - \lambda \sin(\Omega\tau)]. \quad (12)$$

According to Ref. [24], the synchronized state $[\theta_H(t) = \theta_i(t) = \Omega t]$ is linearly stable, if and only if,

$$\cos(\Omega\tau) > 0, \quad (13)$$

which means that the product $\Omega\tau$ must be in the range,

$$2n\pi < \Omega\tau < (2n+1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Thus, considering $\Omega\tau \rightarrow \Omega\tau - n\pi$ in Eq. (12), Fig. 6 shows the solutions of Eq. (12) for different values of n . Observe that these solutions correspond to the average frequency shown in Fig. 3. Therefore, we verified good agreement between theoretical and simulated results. Furthermore, once we know exactly how the average frequency Ω depends on τ , it is possible to determine the critical coupling for the star networks through the expression $\lambda_c = |\omega - \Omega|$ and with Eq. (14) by rewriting Eq. (12) just in terms of λ_c and τ . Figure 7 displays the results obtained for the critical couplings λ_c for different values of τ for the star network with $K = 80$ leaves, showing a perfect agreement between the theoretical values of λ_c and the numerical data.

These obtained results for the star networks help to understand the local dynamics in scale-free networks. More specifically, in the absence of time delay, the interaction between two nodes i and j with the same degree connected to a hub in the synchronized state $[\theta_i(t) = \theta_j(t) = \Omega t]$ is

FIG. 7. (Color online) Synchronization diagrams for a star network with $K = 80$ leaves and theoretical estimation for the critical coupling λ_c for each time delay displayed.

$\sin(\theta_j - \theta_i) = 0$, forming a local star network. Similarly, in the presence of time delay, the interaction between two identical nodes i and j in the synchronized state is $\sin[\theta_j(t - \tau) - \theta_i] = \sin(-\Omega\tau)$, which means that identical nodes interact just through a constant. Therefore, in a scale-free network, considering the nodes connected to hubs, we expect that the average frequency Ω follows the same dependency on τ as the star networks in Fig. 6. This fact is reasonable since the effect of τ on the coherence diagrams for the scale-free and star networks is similar (see Figs. 1 and 2).

In conclusion, the analysis performed here helps to understand the recent model proposed in Ref. [10] by considering a time delay. Depending on the value of the time delay, it is

possible to observe a first-order phase transition with a smaller coupling than verified in Ref. [10]. Therefore, the inclusion of a time delay in the Kuramoto model whose natural frequencies are equal to the degree of the nodes allows enhancing the explosive transition to reach a synchronous state.

We would like very much to thank the two anonymous referees who helped improve the paper. F. A. Rodrigues would like to acknowledge CNPq (Grant No. 305940/2010-4) and FAPESP (Grant No. 2010/19440-2) for the financial support given to this research. T. K. D. M. Peron would like to acknowledge Fapesp for the sponsorship provided. The authors also acknowledge A. C. P. Giampetro for assistance.

-
- [1] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001), Vol. 12.
 - [2] S. H. Strogatz, *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order* (Hyperion, New York, 2003).
 - [3] S. Nadis, *Nature (London)* **421**, 780 (2003).
 - [4] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, and C. Zhou, *Phys. Rep.* **469**, 93 (2008).
 - [5] C. M. Gray, P. König, A. K. Engel, and W. Singer, *Nature (London)* **338**, 334 (1989).
 - [6] I. Z. Kiss, Y. Zhai, and J. L. Hudson, *Science* **296**, 1676 (2002).
 - [7] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. Pérez Vicente, F. Ritort, and R. Spigler, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 137 (2005).
 - [8] Y. Moreno and A. F. Pacheco, *Europhys. Lett.* **68**, 603 (2004).
 - [9] L. D. F. Costa, O. N. Oliveira Jr., G. Travieso, F. A. Rodrigues, P. R. Villas Boas, L. Antiquiera, M. P. Viana, and L. E. Correa Rocha, *Adv. Phys.* **60**, 329 (2011).
 - [10] J. Gómez-Gardeñes, S. Gómez, A. Arenas, and Y. Moreno, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 128701 (2011).
 - [11] M. K. S. Yeung and S. H. Strogatz, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 648 (1999).
 - [12] M. Y. Choi, H. J. Kim, D. Kim, and H. Hong, *Phys. Rev. E* **61**, 371 (2000).
 - [13] T. Pérez, V. M. Eguíluz, and A. Arenas, *Chaos* **21**, 025111 (2011).
 - [14] V. M. Eguíluz, T. Pérez, J. B.-Holthofer, and A. Arenas, *Phys. Rev. E* **83**, 056113 (2011).
 - [15] E. R. Kandel, J. H. Schwartz, and T. M. Jessell, *Principles of Neural Science* (McGraw-Hill, New York, 2000).
 - [16] M. Dhamala, V. K. Jirsa, and M. Ding, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 074104 (2004).
 - [17] A.-L. Barabási and R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999).
 - [18] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.-U. Hwang, *Phys. Rep.* **424**, 175 (2006).
 - [19] L. D. F. Costa, F. A. Rodrigues, G. Travieso, and P. R. Villas Boas, *Adv. Phys.* **56**, 167 (2007).
 - [20] E. Steur and H. Nijmeijer, *IEEE Trans. Circuits Syst.* **58**, 1358 (2011).
 - [21] J. Lehnert, T. Dahms, P. Hövel, and E. Schöll, *Europhys. Lett.* **96**, 60013 (2011).
 - [22] A. Englert, S. Heiligenthal, W. Kinzel, and I. Kanter, *Phys. Rev. E* **83**, 046222 (2011).
 - [23] S. Heiligenthal, T. Dahms, S. Yanchuk, T. Jüngling, V. Flunkert, I. Kanter, E. Schöll, and W. Kinzel, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 234102 (2011).
 - [24] M. G. Earl and S. H. Strogatz, *Phys. Rev. E* **67**, 036204 (2003).