Espectrometria de Lente Térmica: Teoria e Aplicações

Gláucia Grüninger Gomes Costa

Tese apresentada ao Instituto
de Física de São Carlos, da
Universidade de São Paulo,
para obtenção do título de
Doutor em Ciências: Física
Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Tomaz Catunda

São Carlos – 2005

Costa, Gláucia Grüninger Gomes

“Espectrometria de lente térmica em sólidos: teoria e aplicações.”

Gláucia Grüninger Gomes Costa – São Carlos, 2005

Tese (Doutorado) – Área de Física Aplicada do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo

2005 - Páginas: 120

Orientador: Prof. Dr. Tomaz Catunda

1. Lente Térmica; 2. Espectrometria; 3. Difração; 4. Difração de Fraunhofer;
5. Difração de Fresnel

I. Título

À minha família

Aos meus amigos

Agradecimentos

Ao CNPq pelo suporte financeiro da minha pesquisa.

Ao Prof. Tomaz Catunda pela orientação e amizade durante todo este período.

Aos amigos Acácio, Juraci, Sandro, Viviane, Samuel, Andréa, Dione, Tânia, Daniel, Alessandra, Ariane, André, Josimar, Carlos, Djalmir, Renato, Heitor, Rui, Arnaldo, Anderson e Cacau pela amizade, incentivo e cooperação.

Às secretárias do departamento, aos funcionários amigos da oficina mecânica e do Laboratório de Ensino e também as bibliotecárias do Instituto pelo pronto atendimento, sempre com muita simpatia e eficiência.

Índice

Lista de Figuras	i
Resumo	vi
Abstract	vii
 Capítulo 1 - Introdução	 1
 Capítulo 2 - Difração e a Integral de Difração de Fresnel-Kirchhoff	 3
2.1. Difração e a Integral de Difração de Fresnel Kirchhoff	3
2.2. Integral de Difração de Fresnel-Kirchhoff	4
2.2.1 Abertura (Fenda Simples) e Obstáculo Retangulares	8
2.2.2 Abertura e Obstáculo Circulares	12
2.3. Aplicações da Integral de Difração de Fresnel-Kirchhoff	15
2.3.1 Propagação de um feixe Gaussiano	16
2.3.2 Laser de diodo	17
2.3.3 Módulo Experimental	20
2.3.4 Abertura (Fenda Simples) e Obstáculo Retangulares	22
2.3.5 Abertura e Obstáculo Circulares	29
2.3.6 Lentes	42
 Capítulo 3 - Teoria da Lente Térmica Radial	 48
3.1. Espectroscopia Fototérmica	48
3.1.1 Espectroscopia de Lente Térmica	49
3.2. Distribuição de Temperatura	50
3.3. Cálculo da distância focal da Lente Térmica	52
3.4. O modelo de Lente Térmica Radial Parabólico	55
3.4.1. Propagação de um feixe Gaussiano e seus parâmetros	56
3.5. O modelo Aberrante de Lente Térmica Radial	63
3.5.1 Lente Térmica Radial com Feixe Único	63

3.5.2 Comparação entre os modelos de Lente Térmica Parabólico e Aberrante de Feixe Único.....	69
3.5.3 Modelo Aberrante de Lente Térmica Radial com Feixe Dois Feixes.....	71
Capítulo 4 - Lente Térmica Radial no Regime de θ grande	77
4.1. AutoModulação Transversal de Fase.....	77
4.1.1 Formação de Anéis.....	82
4.2. Módulo Experimental.....	84
Capítulo 5 - Conclusões e Perspectivas	91
Anexo 1 - Integral de Difração de Fresnel-Kirchhoff em Coordenadas Cilíndricas.....	93
Anexo 2 - Campo através de uma Abertura Retangular no plano de observação.....	96
Anexo 3 - Cálculo por uma Lente.....	99
Anexo 4 - Cálculo da Expressão do Termo Fonte $\dot{\mathbf{q}}(r)$ para a L. T. Radial.....	102
Anexo 5 - Cálculo da Expressão da Distribuição da Temperatura para a L.T. Radial.....	104
Anexo 6 - Cálculo da Expressão da Fase devida à L.T. Radial.....	107
Anexo 7 - Cálculo da Integral relativa ao Campo no Detector devido à L. T. Radial.....	110
Anexo 8 - Cálculo da Integral relativa ao Campo no Detector devido à L. T. Radial no Regime de θ grande.....	115
Referência Bibliográfica –	117

LISTAS DE FIGURAS

Figura.2-1 Campo difratando-se no plano (1) e observado no plano (2) (Figura retirada de [47]).....	4
Figura 2-2 Padrão de difração de uma fenda de largura 2a . (a) A área sombreada corresponde à sombra geométrica da fenda e as linhas tracejadas delimitam a largura do feixe difratado na aproximação de Fraunhofer, ou seja, no campo distante. (b) A área sombreada, como em (a), corresponde à sombra geométrica da fenda, as linhas tracejadas à largura do padrão de Fraunhofer, no campo distante e as curvas sendo os padrões de difração obtidos nas posições em que se encontram as setas na parte (a) da figura, e que correspondem aos números de Fresnel $N_F = 10, 1, 0,5$ e $0,1$ (Figura retirada da referência [35]).....	6
Figura 2-3 Enésima zona de Fresnel, com dimensão a_N , distante $d + N \lambda/2$ do ponto de observação P . $N_F = n$ representa o número de zonas (anéis ou faixas) que estão sendo exibidas pela abertura. (Figura modificada de [15]).....	7
Figura 2-4 Fenda de largura 2a muito menor que o comprimento 2b (Figura modificada de [3]).....	8
Figura 2-5 Simulação da Intensidade (I) pelo ângulo θ (o qual fornece a posição no plano de observação) de uma fenda simples na aproximação de Fraunhofer, onde se utilizou 2b = 0,2mm e $\lambda = 650\text{nm}$. Em destaque a parte relativa às franjas formadas, e os mínimos de intensidade que ocorrem em $\pm v \lambda/2b$, com $v = 1, 2, 3, \dots$	9
Figura 2-6 Simulação da Intensidade pelo ângulo θ de uma fenda simples, na aproximação de Fresnel, onde se utilizou 2a = 0,2mm e $\lambda = 650\text{nm}$	11
Figura 2-7 Borda reta por onde ocorre a difração e o padrão observado, onde abaixo de A temos apenas a região de sombra geométrica, sem iluminação, entre A e B temos a região de difração da borda e além C se observa o padrão de franjas que ocorre pela interferência entre as ondas secundárias e a frente de onda que não é difratada..	12
Figura 2-8 Abertura Circular de raio a (Figura modificada de [3]).....	13
Figura 2-9 Simulação do gráfico da Intensidade versus θ , no plano de observação, de uma abertura circular de raio a = 0,5 mm , usando-se uma fonte de luz com $\lambda = 650\text{nm}$. Em destaque se observa as franjas de difração e dois dos mínimos que ocorrem em: 7,9 10⁻⁴ e 1,44 10⁻³	14
Figura 2-10 Simulação da Intensidade versus raio (r₂), no plano de observação, de uma abertura circular de raio a = 0,5 mm , onde se utilizou um laser com $\lambda = 650\text{nm}$. Observando que dependendo da posição temos o centro claro ou escuro, ou seja, um mínimo ou um máximo sendo formado. Também é fornecido o número de Fresnel, N_F , correspondente e a distância, d , ao anteparo.....	15
Figura 2-11 Propagação de um feixe laser Gaussiano no modo TEM_{00} , pelo campo próximo e campo distante em relação à origem do sistema (Figura modificada de [34]).....	16
Figura 2-12 Feixe de Laser Gaussiano no modo TEM_{00} , onde se observa o raio do feixe, w(z)	17
Figura 2-13 Laser de semicondutor e suas característica [42].....	18

Figura 2-14 Sistema utilizado para a medida da divergência do feixe emitido pelo laser <i>pointer</i>	19
Figura 2-15 Medida da divergência segundo os modos transversos paralelo e perpendicular, que foram ajustados por uma Gaussiana.....	20
Figura 2-16 (a) Elementos difratores utilizados nos experimentos; (b) detalhe da placa contendo os elementos difratores orifícios e obstáculos retangulares e circulares.....	21
Figura 2-17 (a) Esquema da montagem experimental para o estudo da difração; (b) Elementos utilizados na montagem experimental para o estudo da difração.....	21
Figura 2-18 Curvas obtidas através dos dados experimental e simulado teoricamente da Intensidade versus y_2 , na aproximação de Fresnel, de uma fenda de abertura $2a = 0,2\text{mm}$, com o anteparo colocado à $d = 8,8\text{ cm}$ e o comprimento de onda do laser “pointer” sendo de $\lambda = 650\text{ nm}$	23
Figura 2-19 Padrão de Difração de uma fenda simples transladada para próxima ao laser <i>pointer</i> , com as fotos tiradas pela câmara <i>Watec</i> , e o gráfico da Intensidade pela distância. Utilizou-se um laser <i>pointer</i> com $\lambda = 650\text{nm}$, uma fenda de $0,2\text{mm}$ de abertura, e o anteparo estava distante de $0,8\text{cm}$ à $51,3\text{cm}$	24
Figura 2-20 Intensidade versus y_2 , na aproximação de Fresnel, de uma borda, onde se utilizou $d = 50\text{ cm}$ e $\lambda = 650\text{ nm}$, que serviu de ajuste para um padrão experimental que foi fotografado de uma lâmina de barbear.....	25
Figura 2-21 Padrão de Difração de uma borda reta (lâmina de barbear) transladada para próxima ao laser <i>pointer</i> , com as fotos tiradas pela câmara <i>Watec</i> , e o gráfico da Intensidade pela distância. Utilizamos um laser <i>pointer</i> de $\lambda = 650\text{nm}$ e o anteparo estava distante de $0,8\text{cm}$ à $51,3\text{cm}$	27
Figura 2-22 Padrão de Difração de um obstáculo retangular, um fio, transladado para próxima ao laser <i>pointer</i> , com as fotos tiradas pela câmara <i>Sony</i> , e o gráfico da intensidade pela distância. Utilizamos um laser <i>pointer</i> de $\lambda = 650\text{nm}$, um obstáculo retangular de $0,2\text{mm}$ de abertura, e o anteparo estava distante de $0,8\text{cm}$ à $51,3\text{cm}$	28
Figura 2-23 Curvas da Intensidade versus y_2 , relativas ao dado experimental e à simulação, na aproximação de Fresnel, de uma abertura circular de raio $a = 0,25\text{mm}$, com o anteparo colocado à distância $d = 1,53\text{ cm}$ e o comprimento de onda do laser <i>pointer</i> sendo $\lambda = 650\text{ nm}$	29
Figura 2-24 Padrão de Difração de uma abertura circular, transladada para próxima ao laser <i>pointer</i> , e o gráfico da Intensidade pela distância, com as fotos tiradas pela câmara <i>Watec</i> . Utilizamos um laser <i>pointer</i> de $\lambda = 650\text{nm}$, uma abertura circular com raio de $0,5\text{mm}$, e o anteparo estava distante de $0,8\text{cm}$ à $51,3\text{cm}$	31
Figura 2-25 Padrão de Difração de uma abertura circular, transladada para próxima ao laser <i>pointer</i> , e o gráfico da Intensidade pela distância, com as fotos tiradas pela câmara <i>Watec</i> . Utilizamos um laser <i>pointer</i> de $\lambda = 650\text{nm}$, uma abertura circular com raio de $0,25\text{mm}$, e o anteparo estava distante de $0,8\text{cm}$ à $51,3\text{cm}$	33

- Figura 2-26** Padrão de Difração de uma abertura circular, transladada para próxima ao laser *pointer*, e o gráfico da Intensidade pela distância, com as fotos tiradas pela câmara *Watec*. Utilizamos um laser *pointer* de $\lambda = 650\text{nm}$, uma abertura circular com raio de $0,125\text{mm}$, e o anteparo estava distante de $0,8\text{cm}$ à $51,3\text{cm}$35
- Figura 2-27** Padrão de Difração de um obstáculo circular, ou seja, do Ponto de Poisson, transladada para próxima ao laser *pointer*, e o gráfico da Intensidade pela distância, com as fotos tiradas pela câmara *Watec*. Utilizamos um laser *pointer* de $\lambda = 650\text{nm}$, um obstáculo circular com raio de $0,5\text{mm}$, e o anteparo estava distante de $0,8\text{cm}$ à $51,3\text{cm}$37
- Figura 2-28** Padrão de Difração de um obstáculo circular, ou seja, do Ponto de Poisson, transladada para próxima ao laser *pointer*, e o gráfico da Intensidade pela distância, com as fotos tiradas pela câmara *Watec*. Utilizamos um laser *pointer* de $\lambda = 650\text{nm}$, um obstáculo circular com raio de $0,25\text{mm}$, e o anteparo estava distante de $0,8\text{cm}$ à $51,3\text{cm}$39
- Figura 2-29** Padrão de Difração de um obstáculo circular, ou seja, do Ponto de Poisson, transladada para próxima ao laser *pointer*, e o gráfico da Intensidade pela distância, com as fotos tiradas pela câmara *Watec*. Utilizamos um laser *pointer* de $\lambda = 650\text{nm}$, um obstáculo circular com raio de $0,125\text{mm}$, e o anteparo estava distante de $0,8\text{cm}$ à $51,3\text{cm}$41
- Figura 2-30** Esquema de propagação de uma onda por uma lente convergente.....42
- Figura 2-31** Esquema de propagação de uma onda por uma lente divergente.....43
- Figura 2-32** Esquema de propagação de uma onda por uma lente plano-convexa.....43
- Figura 2-33** Intensidade de uma lente plano-convexa em função do seu raio a (cm), considerando-se $\lambda = 650\text{nm}$, $d = f = 10\text{cm}$, com f sobre o eixo e $\left(8R^2f\right)^{-1} \approx 5 \times 10^{-4} \text{cm}^{-3}$ 45
- Figura 2-34** Comparação da Intensidade entre uma lente perfeita e uma lente que apresenta aberração esférica, tomando-se $\lambda = 650\text{nm}$, $d = f = 10 \text{ cm}$, com f sobre o eixo e $\left(8R^2f\right)^{-1} \approx 5 \times 10^{-4} \text{cm}^{-3}$. Em destaque está-se mostrando que aproximadamente até um raio de $0,4\text{cm}$ a lente com e sem aberração coincidem, assim, após esse valor de raio as aberrações começam a aparecer.....46
- Figura 2-35** Comparação do perfil de Intensidade entre uma lente perfeita e uma lente que demonstra aberração esférica, tomando-se $\lambda = 650\text{nm}$, $d = f = 10\text{cm}$, $\left(8R^2f\right)^{-1} \approx 5 \times 10^{-4} \text{cm}^{-3}$ e $\left(16R^4f\right)^{-1} \approx 9 \times 10^{-1} \text{cm}^{-5}$ 47
- Figura 3-1** Distribuição de Temperatura para a LT com relação à posição normalizada, para diversos valores de (t/t_c) , simulado pelo programa Mathematica, onde se observa a forma parabólica das curvas, próximas ao eixo.....52
- Figura 3-2** Gráfico de F/F_∞ versus t/t_c , simulado pelo programa Mathematica, onde se observa que a distância focal da LT se aproxima rapidamente da distância focal dessa lente no estado estacionário.....55

Figura 3-3 Sistema óptico para a análise do efeito da LT.....	57
Figura 3-4 Dependência da Intensidade com a posição para a LT segundo o modelo parabólico, simulado pelo programa Mathematica, com $\theta = 0.01$	60
Figura 3-5 Dependência da Intensidade com o tempo (normalizado) para a LT segundo o modelo parabólico, onde $\theta = 0.01$ e $v = 1$	61
Figura 3-6 Difração entre a LT e o Detector (Figura modificada de [33]).....	63
Figura 3-7 Variação de fase relativa à coordenada radial, que consiste da parte devida ao caminho óptico do feixe gaussiano ($\Delta\Phi_G$) e da parte devida ao gradiente do índice de refração induzido pelo aquecimento da amostra ($\Delta\Phi_{LT}$). (Figura modificada de [33]).....	64
Figura 3-8 Distribuição de fase no plano de entrada da amostra, onde a variação de fase é apenas devida à curvatura de fase do feixe gaussiano. (Figura modificada de [28]).....	65
Figura 3-9 A dependência da Intensidade com a posição normalizada, para o modelo de LT aberrante de feixe único, onde $\theta = 0.01$	68
Figura 3-10 Dependência da Intensidade com o tempo normalizado para a LT segundo o modelo aberrante de Feixe único, onde $\theta = 0.01$ e $v \cong 1,73$	68
Figura 3-11 Comparação entre as curvas de LT parabólica e aberrante de feixe único dependente com a posição, onde $\theta = 0,01$	69
Figura 3-12 Comparação entre as curvas de LT parabólica e aberrante de feixe único dependente com o tempo, onde $\theta = 0.01$, $V_{\text{Parabólico}} = 1$ e $V_{\text{Aberrante}} = 1,73$	70
Figura 3-13 Simulação de ajuste do modelo de LT parabólica pelo aberrante.....	70
Figura 3-14 Feixes de lasers de excitação e de prova passando por uma amostra que sofre o efeito de LT, agindo sobre o feixe de prova.....	71
Figura 3-15 A dependência da Intensidade com a posição, para a LT, segundo o modelo aberrante de dois feixes, onde: $\theta = 0,01$, $m = 46$	75
Figura 3-16 A dependência da Intensidade com o tempo para a LT, segundo o modelo aberrante de feixe duplo, $\theta = 0,01$, $m = 4$, $v = 1,73$	76
Figura 4.1 Simulação para o centro do feixe, da Intensidade normalizada em função de θ , para o arranjo de feixe único ($m=1$) e dois feixes ($m=46$), com $v = \pm 1,73$	79
Figura 4-2 Simulação da Intensidade pela posição $V = z/z_c$, comparando-se os valores obtidos com e sem aproximação na expressão da Intensidade, para valores diferentes de θ , tomando-se por base os limites de validade da aproximação (Tabela 2), para arranjos experimentais de um feixe e de dois feixes. As curvas tracejadas representam a expressão com aproximação e a linha reta, sem aproximação.....	80
Figura 4-3 Dependência da Intensidade com o tempo para a LT de feixe único e de dois feixes, onde $v \cong 1,73$, onde a curva tracejada é obtida através da expressão com aproximação e a curva cheia com a expressão sem aproximação.....	81
Figura 4.4 (a) Simulação da Intensidade em função da posição para diferentes tempos, após o início do aquecimento da amostra, tomando-se $v = 1,73$, $\theta = 10$, $m = 1$	83

- Figura 4.4** (b) Simulação da Intensidade em função da posição para diferentes tempos, após o início do aquecimento da amostra, tomando-se $v = \pm 1,73$, $\theta = 10$, $m = 46$84
- Figura 4.5** Arranjo experimental utilizado para a LT utilizada para se fazer as fotos dos anéis.....85
- Figura 4.6** Amplitude do sinal de LT (em módulo) pela Potência, para os materiais Soda-Lime e Zblan(Co)86
- Figura 4.7** Dependência da Intensidade com o tempo para a Soda-Lime e zblan.....86
- Figura 4.8** Intensidade versus y_2 do Padrão de Anéis, onde $v = 2,7$, $\theta = -4,8$ e $m=46$. Para a parte (a) $t/t_c \cong 0.347$ e para (b) $t/t_c \cong 277$. A curva em preto é o padrão obtido na foto e a em vermelho o padrão obtido pela simulação87
- Figura 4.9** Fotos do Padrão de Anéis cujo filme foi realizado com câmara digital Sony *Digital Still Camera DSC-F707*, e o gráfico da Intensidade pela distância, na formação de uma lente Divergente para diferentes tempos.....88
- Figura 4.10** Fotos do Padrão de Anéis cujo filme foi realizado com câmara digital Sony *Digital Still Camera DSC-F707*, e o gráfico da Intensidade pela distância, na formação de uma lente Convergente para diferentes tempos.....90

Resumo

Neste trabalho propomos o estudo da Espectrometria de Lente Térmica, sua teoria e aplicações, visto ser uma técnica de alta sensibilidade e que permite a medida das propriedades termo-ópticas dos materiais, como a difusividade térmica (D), a condutividade térmica (k), desvio do caminho óptico pela temperatura (ds/dT) - para materiais sólidos - ou a variação do índice de refração em relação à temperatura (dn/dT) - para líquidos e gases. Para isso inicialmente fizemos um estudo da teoria da difração. Valendo-se da Integral de Difração de Fresnel Kirchhoff obtivemos a expressão analítica da intensidade de um feixe de laser, difratado por diversos elementos ópticos (aberturas e obstáculos circular e retangular, por exemplo), tanto para o regime da difração de Fresnel, quanto da difração de Fraunhofer. Ainda no estudo da difração propusemos um arranjo experimental muito simples, utilizando-se um laser *pointer* sem a lente colimadora, permitindo que se obtenha, com grande facilidade, os padrões de difração no campo próximo, o que é difícil nas montagens tradicionais.

Na sequência fizemos uma revisão dos modelos de Lente Térmica tradicionalmente utilizados, modelos parabólico e aberrante. E, na comparação que realizamos entre eles, verificamos que pelos resultados obtidos através de simulações, com o modelo parabólico se apresenta em grande desacordo ($>50\%$) com os obtidos com o modelo aberrante. Desta forma, concluímos que os dados da literatura obtidos na década de 70 e que ainda são utilizados, merecem ser revistos.

Por fim, notamos na literatura um crescente interesse em lasers de alta potência, principalmente pelos bombeados por lasers de diodo. Desta forma fizemos um estudo valendo-se do modelo aberrante de Lente Térmica sob o regime de θ grande, no qual procuramos verificar o limite de validade dos modelos de L.T. utilizados, observando o surgimento de fenômeno da aberração esférica, juntamente com as estruturas de anéis.

Abstract

In this work we have proposed the study of Thermal Lens Spectrometry, its theory and applications, because it is a highly sensitive technique that allows the measure of the thermo-optical properties of the materials, as the thermal diffusivity (D), the thermal conductivity (k), the change of optical path length with temperature (ds/dT), for solid materials or the change of refractive index with temperature (dn/dT), for liquids and gases. Initially we studied the diffraction theory. We utilized the Fresnel Kirchhoff Diffraction Integral to obtain the analytic expression of the beam laser intensity, whose was diffracted for several optical elements, so much for the regime of the Fresnel diffraction as the regime of the Fraunhofer diffraction. Continuing in the study of the diffraction we proposed a very simple experimental apparatus where we used a laser pointer without the collimator lens, allowing that it was obtained with great facility the Fresnel diffraction patterns, which are difficult to observe in the common experimental apparatus. In the sequence, we made a revision of the models of Thermal Lens traditionally used, parabolic and aberrant models. And, in the comparison that we accomplished among them, we verified that for the results obtained through simulations, with the parabolic model it comes in great disagreement ($>50\%$) with obtained them with the aberrant model. This way, we concluded that literature's data obtained in the 70th and they are still used, they must be reviewed. Finally, we noticed in the literature a growing interest in high power lasers. This way we made a study where we used the aberrant model of Thermal Lens under the regime of great θ , in which we look for to verify the limit of validity of the used models, observing the appearance of the spherical aberration together with the rings structure.

Capítulo 1 Introdução

A Espectrometria de Lente Térmica tem demonstrado ser uma técnica de grande relevância, visto a sua alta sensibilidade nas medidas das principais propriedades termo-ópticas dos materiais como: difusividade térmica (D), condutividade térmica (k), desvio do caminho óptico com a temperatura (ds/dT), para materiais sólidos, ou a variação do índice de refração em relação à temperatura (dn/dT), para materiais líquidos ou gasosos. Propriedades essas de grande importância na caracterização de materiais, visto a possibilidade das aplicações tecnológicas desses materiais.

No intuito de melhorar a sensibilidade desta técnica de medida, alguns modelos teóricos e experimentais têm sido desenvolvidos, com arranjos utilizando feixe único ou dois feixes. Mas esses modelos são elaborados considerando a aproximação que o elemento de fase inserido pela Lente Térmica (LT), que é proporcional à potência da lente e que por sua vez é proporcional à potência de excitação do laser, deve ser muito pequeno. Porém, com o crescente estudo de lasers de alta potência, surge a necessidade da verificação do limite de validade dos modelos existentes, observando o surgimento de anéis, devido à auto-focalização e auto-defocalização térmica, na ausência de convecção.

Para que possamos chegar ao estudo dessa última análise, o trabalho foi dividido em três partes.

Inicialmente, no Capítulo 2, fizemos um estudo do fenômeno da difração sofrida por um feixe luminoso ao atravessar um elemento óptico. Nessa análise uma poderosa ferramenta matemática, a Integral de Difração de Fresnel-Kirchhoff (IDFK), é utilizada para o estudo da modificação gerada no perfil de intensidade desse mesmo feixe no campo de observação, podendo ele estar no campo próximo – difração de Fresnel, ou no campo distante – difração de Fraunhofer. Para a observação experimental dos padrões de difração dos elementos ópticos utilizados, propomos um arranjo experimental de baixo custo, utilizando simplesmente um laser *pointer* e o elemento difrator, sem a sua lente colimadora. Esse arranjo experimental nos permite a visualização dos padrões de difração tanto no campo próximo como no campo distante, o que não é tão fácil de efetuar-se com os arranjos experimentais clássicos, onde se utilizam lasers de HeNe.

Na seqüência de nosso estudo, no Capítulo 3, é apresentada uma revisão do estudo da Lente Térmica, segundo o modelo parabólico, obtido através da matriz de transferência de raios, e o modelo aberrante, que é um pouco mais complexo e foi obtido pela aplicação da IDFK, sendo que este último modelo será demonstrado tanto para o arranjo experimental de feixe único, como para o de dois feixes. Por meio desse estudo é proposta uma comparação entre esses modelos, através de uma análise dos resultados obtidos levando à verificação da diferença existente entre eles.

Mas esses modelos são desenvolvidos tomando-se que o elemento de fase inserido pela LT é muito pequeno como observado anteriormente, assim, no Capítulo 4, levando-se em consideração o crescente interesse em lasers de alta potência, abordamos o estudo da Lente Térmica, tanto para feixe único como para dois feixes, sob o regime de Potência de Lente (θ) grande. Neste regime, começa-se a observar o surgimento da aberração esférica e por consequência o aparecimento de anéis, que são prejudiciais ao desenvolvimento de tais lasers. Neste estudo são feitas algumas comparações entre os regimes de θ pequeno ($\theta \ll 0,1$), e de θ grande ($\theta \gg 0,1$), podendo-se assim verificar o limite para o qual os modelos de LT utilizados atualmente são válidos.

No Capítulo 5, encerrando o trabalho, é apresentada uma conclusão final e os possíveis trabalhos a serem desenvolvidos.

DIFRAÇÃO E A INTEGRAL DE DIFRAÇÃO DE FRESNEL-KIRCHHOFF

(Fotos Ilustrativas sobre o Capítulo)

Capítulo 2 Difração e a Integral de Difração de Fresnel-Kirchhoff

Neste capítulo será apresentado o estudo da difração sofrida por um feixe luminoso ao atravessar um elemento óptico. Verificaremos a modificação gerada no perfil de intensidade desse feixe no campo de observação, que tanto pode estar no campo próximo – difração de Fresnel – como no campo distante – difração de Fraunhofer. Este estudo terá como principal ferramenta matemática a Integral de Difração de Fresnel-Kirchhoff (IDFK), a qual servirá de base para a construção do modelo que visa o estudo da Lente Térmica Radial, conteúdo do próximo capítulo.

2.1 Difração e a Integral de Difração de Fresnel Kirchhoff

A Óptica Geométrica prediz que ao se colocar um obstáculo ou uma abertura diante de uma fonte pontual, observa-se em um anteparo a formação de uma sombra, ou seja, um contorno bem definido desse objeto. Mas, em uma análise mais detalhada dessa sombra, verifica-se a existência de franjas claras e escuras que não encontram explicações nessa Teoria Corpuscular.

Grimaldi [1][2][3], em 1665, foi o primeiro a descrever o fenômeno do desvio da luz de sua propagação retilínea, o qual denominou difração, mas não conseguiu explicá-lo. Born e Wolf [2] esclareceram, então, que “... *Os problemas de difração estão entre os mais difíceis encontrados na Óptica. As soluções que, de certo modo, podem ser vistas como rigorosas são muito raras na teoria*”.

Em 1678, Christiaan Huygens propôs o, atualmente, conhecido Princípio de Huygens [2][3][4] o qual estabelece que, cada ponto de uma frente de onda primária serve de fonte de ondículas esféricas secundárias, tal que a frente de onda primária em um tempo posterior se torna a envoltória das ondículas, determinando a forma e a direção da onda, quando esta se distancia de sua fonte.

Apenas em 1818 foi que Fresnel, através de uma explicação intuitiva, propôs que o princípio de Huygens [1][2][3][4][6][7] poderia ser entendido como um fenômeno de interferência, resultando assim no denominado princípio de Huygens-Fresnel. E em 1882, Kirchhoff inseriu uma base matemática sólida neste princípio, observando que o

mesmo poderia ser visto como uma consequência da equação de onda. Mas, deve-se estar atento que mesmo a teoria de Kirchhoff é uma aproximação válida para pequenos comprimentos de onda.

2.2 Integral de Difração de Fresnel-Kirchhoff

Para o estudo dos padrões de difração dos diversos elementos difratores utilizaremos um campo monocromático se propagando num meio dielétrico.

Figura.2-1 Campo difratando-se no plano (1) e observado no plano (2) (Figura retirada de [47])

Vamos considerar que este campo elétrico se difrate numa abertura finita Σ , descrito pelas coordenadas (x_1, y_1) , pertencente a um plano infinito S , e que a uma distância $(z+d)$ se encontra o plano de observação de coordenadas (x_2, y_2) (Figura 2-1). Segundo o princípio de Huygens-Fresnel, a amplitude complexa $E(x_2, y_2)$ num ponto P_2 é dada pela contribuição do campo E_S de todos os pontos P_1 componentes de Σ , que pode ser descrita matematicamente pela IDFK:

$$E(x_2, y_2) = \frac{i}{\lambda} \iint_S \frac{\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{d}_{01})}{d_{01}} \cos(\hat{n} \cdot \vec{d}_{01}) E_S(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (2-1)$$

onde: λ = comprimento de onda, d_{01} = distância entre P_1 e P_2 e $\hat{n}$ = vetor normal à superfície Σ .

Para a eficácia dessa integral, duas aproximações para pequenos ângulos devem ser consideradas. A primeira delas é que a fonte de luz deve estar localizada centralmente em relação à abertura, de forma que $\cos(\hat{n} \cdot \vec{d}_{01}) \cong 1$, com precisão de 5% para ângulos menores que 18° [47]. A segunda é que a distância d deve ser muito maior

que a maior dimensão linear da abertura Σ , ou seja, $\mathbf{d} \gg \mathbf{r}_1$, onde $\mathbf{r}_1^2 = \mathbf{x}_1^2 + \mathbf{y}_1^2$, e assim, no denominador da integral: $\mathbf{d}_{01} \approx \mathbf{d}$. Entretanto, na exponencial essa aproximação não é mais válida, visto que $\mathbf{k}$ é muito grande, da ordem de 10^5 cm^{-1} para a luz visível. Dessa forma, a IDFK pode ser escrita como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) = \frac{i}{\lambda \mathbf{d}} \iint_S \exp(-i \mathbf{k} \cdot \vec{\mathbf{d}}_{01}) \mathbf{E}_S(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \, d\mathbf{x}_1 \, d\mathbf{y}_1 \quad (2-2)$$

No estudo da difração que ocorre em diversos elementos ópticos, como aberturas e obstáculos quer sejam circulares quer sejam retangulares, a primeira observação a ser feita é em relação ao campo em que se deseja trabalhar, ou seja, se o estudo acontece no campo próximo - difração de Fresnel - ou no campo distante - difração de Fraunhofer.

Se o estudo for realizado no campo próximo, a aproximação a ser utilizada é a de Fresnel. Nesta aproximação, ao se calcular a distância $\mathbf{d}_{01}$, todas as distâncias radiais, tanto do plano da abertura como do plano de observação, devem ser consideradas (Anexo 1), e assim, a IDFK dada pela Equação (2-2) torna-se (Equação A1-5):

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) = \frac{i}{\lambda \mathbf{d}} \exp[-i \xi] \iint_S \exp \left[-i \mathbf{k} \mathbf{d} \left(\frac{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{y}_1^2}{2 \mathbf{d}^2} - \frac{\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_2 \mathbf{y}_1}{\mathbf{d}^2} \right) \right] \mathbf{E}_S(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \, d\mathbf{x}_1 \, d\mathbf{y}_1 \quad (2-3)$$

$$\text{onde: } \xi = \mathbf{k} \mathbf{d} \left(1 + \frac{\mathbf{x}_2^2 + \mathbf{y}_2^2}{2 \mathbf{d}^2} \right)$$

Mas, se o estudo ocorrer no campo distante, a aproximação a ser utilizada é a de Fraunhofer. Nesta aproximação, como $\mathbf{d} \gg \mathbf{r}_1$, os termos quadráticos que aparecem, devido ao plano da abertura, quando da aproximação de Fresnel, se tornam desprezíveis e a IDFK para este caso é dada por (Equação A1-7):

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) = \frac{i}{\lambda \mathbf{d}} \exp[-i \xi] \iint_S \exp \left[i \mathbf{k} \left(\frac{\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_2 \mathbf{y}_1}{\mathbf{d}} \right) \right] \mathbf{E}_S(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \, d\mathbf{x}_1 \, d\mathbf{y}_1 \quad (2-4)$$

A evolução do padrão de difração em função da distância $\mathbf{d}$, passando do campo próximo ao distante, onde podemos observar a existência de franjas (máximos e mínimos), pode ser visto na Figura 2-2.

Figura 2-2 Padrão de difração de uma fenda de largura $2a$. (a) A área sombreada corresponde à sombra geométrica da fenda e as linhas tracejadas delimitam a largura do feixe difratado na aproximação de Fraunhofer, ou seja, no campo distante. (b) A área sombreada, como em (a), corresponde à sombra geométrica da fenda, as linhas tracejadas à largura do padrão de Fraunhofer, no campo distante e as curvas sendo os padrões de difração obtidos nas posições em que se encontram as setas na parte (a) da figura, e que correspondem aos números de Fresnel $N_F = 10, 1, 0,5$ e $0,1$ (Figura retirada da referência [35])

Essas franjas foram explicadas intuitivamente por Fresnel, através do fenômeno de difração. Para isso ele propôs as denominadas zonas de Fresnel (Figura 2-3), que nada mais são do que a divisão de uma frente de onda em zonas (anéis), que possuem áreas iguais, cujos raios variam de $\lambda/2$, assim, a contribuição de uma zona sempre estará fora de fase com a sua precedente.

Tomando-se uma abertura circular de raio a , sobre a qual incide uma frente de ondas planas, o número de zonas exibidas através dela é traduzido pelo denominado Número de Fresnel (N_F). Supondo-se que nessa abertura são exibidas n zonas (Figura 2-3), ou seja, o Número de Fresnel $N_F = n$, a n -ésima zona, distante d do ponto de observação possuirá um raio a_n dado por:

$$a_n = \sqrt{P_2 Q} + n \frac{\lambda}{2} \quad (2-5)$$

Como, pela Figura 2-3, a_n deve obedecer à condição:

$$a_n^2 = (d + n \lambda/2)^2 - d^2 \quad (2-6)$$

e, sendo $\lambda \ll d$, temos:

$$a_n^2 = n \lambda d \Rightarrow N_F = n = a_n^2 / \lambda d \quad (2-7)$$

Desta forma, o Número de Fresnel para essa abertura fica determinado pela Equação (2-7) de onde notamos que ele pode variar tanto com o raio (a) quanto com o comprimento de onda (λ) como com a distância (d) ao anteparo. Portanto, podemos estabelecer que para o campo próximo – difração de Fresnel – N_F é grande e para o campo distante – difração de Fraunhofer – N_F é pequeno.

Figura 2-3 Enésima zona de Fresnel, com raio a_n , distante $d + n \lambda/2$ do ponto de observação P . $N_F = n$ representa o número de zonas (anéis ou faixas) que estão sendo exibidas pela abertura. (Figura modificada de [15])

Na Figura 2-2 observamos um elemento difrator com abertura $2a$ sendo iluminada por uma luz laser de comprimento de onda λ , e estando distante d de um anteparo que pode se deslocar. Supondo que: $2a = 0,2\text{mm}$ e $\lambda = 650\text{nm}$, temos que $N = 10$ corresponde a uma distância do anteparo-elemento difrator $d = 0,15\text{cm}$; $N = 5$ corresponde a $d = 0,31\text{cm}$; $N = 1$ corresponde a $1,5\text{cm}$; $N = 0,5$ corresponde a $d = 3,1\text{cm}$; e, $N = 0,1$ corresponde a $d = 15\text{cm}$. Observamos (Figura 2-2(b)) que para $N = 0,5$ as bordas da sombra geométrica coincidem com a largura do padrão de Fraunhofer. Essa largura pode ser calculada através do ângulo de difração $\text{sen } \theta_d = 2(\lambda / 2a)$, ou seja, para $\theta \ll 1$ a largura do padrão é dada por $\Delta x = 2 d (\lambda / 2a)$.

No estudo dos padrões de difração, Fresnel [38] observou que, se A é a amplitude total no ponto de observação P_2 , ela deve ser obtida pela soma da contribuição de todas as A_n amplitudes das n zonas. Como zonas consecutivas estão fora de fase, as contribuições das amplitudes se apresentarão com sinais opostos. Desta forma, a amplitude resultante será oscilante, com máximos e mínimos, fornecendo um padrão formado por franjas claras e escuras.

Supondo que uma abertura circular tenha raio $a = 0,025\text{cm}$, por onde se faz incidir uma luz laser de comprimento de onda $\lambda = 650\text{nm}$, esteja a uma distância do anteparo $d = 4,80\text{cm}$, o número de Fresnel correspondente será $N_F = 2$, significando que duas zonas estão expostas na abertura, e a intensidade apresentada será **zero**, visto que como as zonas estão fora de fase suas amplitudes se cancelarão, e no anteparo se verá um centro escuro, um ponto de mínimo. O mesmo ocorrerá quando $d = 2,30\text{cm}$ que corresponde a $N_F = 4$. E entre essas duas distâncias o centro se apresentará claro visto que $N_F = 3$, e na soma das amplitudes é diferente de **zero**, e no anteparo se verá um centro claro, um ponto de máximo. Desta forma, ao se deslocar o elemento difrator, sempre que N_F resultar par o centro se apresentará escuro e sempre que for ímpar se apresentará claro.

Este é o tipo de padrão que obteremos nas Aberturas e Obstáculos Retangulares ou Circulares, que veremos nos próximos tópicos.

2.2.1 Abertura (Fenda Simples) e Obstáculo Retangulares

Figura 2-4 Fenda de largura $2a$ muito menor que o comprimento $2b$ (Figura modificada de [3]).

Uma fenda (Figura 2-4) nada mais é do que uma abertura retangular no plano S , que possui um comprimento $2b$ muito maior que sua largura $2a$, sendo assim, apenas os elementos em y são de interesse, e a forma da IDFK, para o seu estudo, dada pela Equação (2-2) se reduzirá a:

$$E(y_2) = \frac{i}{\lambda} \int_{y_1} \frac{\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{d}_{01})}{d_{01}} E_S(y_1) dy_1$$

Se $E_S(y_1)$ for constante sobre toda a fenda e se estivermos observando o perfil de difração no campo distante, ou seja, segundo a difração de Fraunhofer, o campo, no plano de observação, terá a sua forma dada pela Equação (2-4) que deve ser resolvida em apenas uma dimensão, cuja solução é (Equação (A2-11)):

$$E(y_2) = 2b C \frac{\text{sen}(k \theta b)}{(k \theta b)} \quad (2-8)$$

onde: $C = i \frac{E_S(y_1)}{\lambda d} \exp[-i\xi]$ e $\theta = y_2 / d$

Como a intensidade é dada pelo módulo ao quadrado do campo e utilizando-se a definição matemática da função $\text{sinc } \gamma = \text{sen}^2 \gamma / \gamma^2$, o padrão de difração terá sua Intensidade dada por:

$$I = I_0 \text{sinc}^2(k \theta b) \quad (2-9)$$

A Figura 2-5 mostra a simulação, feita com o programa Mathematica, da intensidade versus θ gerada por uma fenda, usando a Equação (2-9), podendo-se também observar em destaque a parte relacionada às franjas de difração, onde os mínimos se apresentam em múltiplos inteiros de $\lambda / 2b$.

Figura 2-5 Simulação da Intensidade (I) pelo ângulo θ (o qual fornece a posição no plano de observação) de uma fenda simples na aproximação de Fraunhofer, onde se utilizou $2b = 0,2\text{mm}$ e $\lambda = 650\text{nm}$. Em destaque a parte relativa às franjas formadas, e os mínimos de intensidade que ocorrem em $\pm v \lambda / 2b$, com $v = 1, 2, 3, \dots$

Se o estudo for feito segundo a aproximação para o campo próximo, ou seja, segundo a difração de Fresnel, a IDFK a ser utilizada é dada pela Equação (2-3), que deve ser resolvida em uma dimensão.

Sendo $E_S(y_1)$ constante sobre toda a fenda, o perfil de difração do campo, no plano de observação, será dado por (Equação (A2-15)):

$$E(y_2) = C_1 \left\{ \text{Erfi} \left[\sqrt{\frac{ik}{2d}} (-b - y_2) \right] - \text{Erfi} \left[\sqrt{\frac{ik}{2d}} (b - y_2) \right] \right\} \quad (2-10)$$

onde: $C_1 = \sqrt{\frac{i\pi d}{2k}} C \exp \left[\frac{ik}{2d} (y_2^2) \right]$ e $\text{Erfi}[z]$ é a função erro complexa (Equação (A2-13))

A Intensidade, para este tipo de difração, é dada por (Anexo 2):

$$I = I_0 \left| \text{Erfi} \left[\sqrt{\frac{ik}{2d}} (-b - y_2) \right] - \text{Erfi} \left[\sqrt{\frac{ik}{2d}} (b - y_2) \right] \right|^2 \quad (2-11)$$

Na Figura 2-6 temos a simulação da intensidade versus y_2 gerada por uma fenda, segundo a Equação (2-11). Através da análise dos padrões mostrados nessa Figura podemos observar alguns aspectos interessantes. Primeiro notamos a existência de uma simetria em todos os padrões. Uma segunda observação é que quando o anteparo está próximo ao elemento difrator, a largura do padrão corresponde exatamente à largura da abertura, e internamente aparecem oscilações, sendo que o centro pode ser um máximo ou um mínimo. Essa intensidade máxima ou mínima, que nas fotos correspondem a claro ou escuro, são explicadas através da teoria de zonas de Fresnel. Quando o número de zonas de Fresnel exibidas pela abertura é ímpar, a soma das amplitudes resultará num valor finito, e o padrão se apresentará com um máximo no centro, e quando o número de zonas for par a soma será zero, visto que as zonas se apresentam fora de fase, o padrão terá um mínimo em seu centro, como visto anteriormente. Uma outra observação é que para uma grande distância, comparada ao tamanho da abertura, o padrão se apresenta com um pico central ladeado de picos de menores intensidades, que é igual ao obtido na aproximação de Fraunhofer (Figura 2.5), desta forma podemos afirmar que a difração de Fraunhofer é apenas um caso especial da difração de Fresnel, quando esta é trabalhada a grandes distâncias.

Figura 2-6 Simulação da Intensidade pelo ângulo θ de uma fenda simples, na aproximação de Fresnel, onde se utilizou $2a = 0,2\text{mm}$ e $\lambda = 650\text{nm}$.

Um caso interessante na aproximação de Fresnel é o de uma fenda com bordas móveis em que a abertura pode tender ao infinito, e quando isso ocorre temos a denominada borda reta (Figura 2-7).

Figura 2-7 Borda reta por onde ocorre a difração e o padrão observado, onde abaixo de A temos apenas a região de sombra geométrica, sem iluminação, entre A e B temos a região de difração da borda e além C se observa o padrão de franjas que ocorre pela interferência entre as ondas secundárias e a frente de onda que não é difratada.

Pela Figura 2-7 observamos que o padrão de difração produzido pela borda inclui a luz que penetra na região de sombra geométrica e um padrão de franjas externas a essa região, pois de acordo com o princípio de Huygens, a borda ao ser alcançada pela luz incidente torna-se uma fonte de ondas secundárias que interferirão com essa luz incidente e produzirão o padrão de difração no anteparo. A diferença entre o máximo e mínimo da intensidade vai diminuindo com a distância até chegar a uma intensidade uniforme. A Intensidade deste padrão pode ser obtida aplicando-se a IDFK, através da Equação (2-3), onde o campo no plano de observação deverá ter um de seus limites de integração levado ao infinito.

2.2.2 Abertura e Obstáculo Circulares

Vamos supor uma frente de ondas, se propagando na direção $\mathbf{z}$, incidindo no plano difratante S , que contém uma abertura circular Σ de raio $\mathbf{a}$, como mostra a Figura 2-8.

Para o estudo da intensidade obtida no plano de observação, pela simetria existente no problema, a IDFK que será utilizada deve estar em coordenadas cilíndricas (Anexo 1).

Figura 2-8 Abertura Circular de raio **a** (Figura modificada de [3])

Se o campo na abertura, $\mathbf{E}_s(\mathbf{r}_1)$ for constante, e o estudo se der no campo distante – difração de Fraunhofer – a equação a ser estudada é (Equação (A1-14)):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_2) = \frac{ik\mathbf{E}(\mathbf{r}_1)}{d} \exp[-i\xi] \int_0^a \mathbf{J}_0\left(\frac{k\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2}{d}\right) \mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_1 \quad (2-12)$$

onde: $\mathbf{J}_0(\mathbf{z})$ é a função de Bessel de ordem zero (Equação (A1-11)).

Desta forma, o campo no plano de observação é dado por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_2) = \frac{ik}{d} \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) \exp[-i\xi] \frac{J_1\left(\frac{k\mathbf{r}_2}{d}\right)}{\left(\frac{k\mathbf{r}_2}{d}\right)} \quad (2-13)$$

onde: $\mathbf{J}_1(\mathbf{z})$ é a função de Bessel de ordem 1.

E a Intensidade encontrada será:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 \left(\frac{J_1\left(\frac{k\mathbf{r}_2}{d}\right)}{\left(\frac{k\mathbf{r}_2}{d}\right)} \right)^2 \quad (2-14)$$

O padrão de difração para uma abertura circular, simulado pelo programa Mathematica, é dado na Figura 2-9, onde observamos que é simétrico em relação ao eixo ótico, dessa forma o máximo central, que representa a imagem da abertura circular,

será um círculo de luz chamado **Disco de Airy**, cujo primeiro mínimo ocorre em $\theta = 1,22\lambda / 2a$.

Figura 2-9 Simulação do gráfico da Intensidade versus θ , no plano de observação, de uma abertura circular de raio $a = 0,5 \text{ mm}$, usando-se uma fonte de luz com $\lambda = 650 \text{ nm}$. Em destaque se observa as franjas de difração e dois dos mínimos que ocorrem em: $7,9 \cdot 10^{-4}$ e $1,44 \cdot 10^{-3}$.

Ao estudarmos a abertura circular segundo a aproximação de Fresnel - campo próximo -, com o campo nessa abertura, $E_S(\mathbf{r}_1)$, constante, utilizamos a Equação (2-3) em coordenadas cilíndricas, ou seja (Equação (A1-13)):

$$E(\mathbf{r}_2) = \frac{ik}{d} \exp(-i\xi) \int_0^\infty \exp\left[-ik \frac{r_1^2}{2d}\right] J_0\left(\frac{k r_1 r_2}{d}\right) E_S(\mathbf{r}_1) r_1 dr_1 \quad (2-15)$$

que não possui uma solução analítica.

A simulação do padrão de difração para a abertura circular é mostrada na Figura 2-10, onde a análise a ser feita para os padrões mostrados é a mesma que foi efetuada para a abertura retangular.

Figura 2-10 Simulação da Intensidade versus raio (r_2), no plano de observação, de uma abertura circular de raio $a = 0,5 \text{ mm}$, onde se utilizou um laser com $\lambda = 650 \text{ nm}$. Observando que dependendo da posição temos o centro claro ou escuro, ou seja, um mínimo ou um máximo sendo formado. Também é fornecido o número de Fresnel, N_F , correspondente e a distância, d , ao anteparo.

2.3 Aplicações da Integral de Difração de Fresnel-Kirchhoff

A IDFK é um poderoso método para o estudo da difração que ocorre em diversos elementos ópticos, quer sejam aberturas ou obstáculos de formas circulares ou

retangulares, como visto anteriormente. Da mesma forma, podemos dizer que, experimentalmente, o laser *pointer* é um poderoso e facilitador componente na obtenção dos padrões de difração. Nesta secção pretendemos demonstrar experimentalmente o fenómeno da difração enfatizando as diferenças entre os regimes de Fresnel e Fraunhofer. Para isto utilizaremos lasers de semiconductor que são de muito baixo custo. Mostraremos que estes lasers, quando utilizados sem a lente colimadora, são muito apropriados para demonstrar os principais aspectos do fenómeno de difração.

2.3.1 Propagação de um feixe Gaussiano

A Figura 2-11 mostra a propagação de um feixe gaussiano no espaço livre.

Figura 2-11 Propagação de um feixe laser Gaussiano no modo TEM_{00} , pelo campo próximo e campo distante em relação à origem do sistema (Figura modificada de [34]).

O feixe laser gaussiano no modo fundamental, se propagando na direção z , tem a amplitude de seu campo [30][31][32], próxima ao eixo óptico, dada por:

$$E(r, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[-i \left(-\frac{2\pi z}{\lambda} + \phi \right) - r^2 \left(\frac{1}{w^2(z)} - \frac{i\pi}{\lambda R(z)} \right) \right] \quad (2-16)$$

onde: λ é o comprimento de onda (cm); ϕ é variação de fase adicional que depende de z

de acordo com: $\tan \phi = \frac{\lambda z}{\pi w_0^2}$; o termo quadrático (r^2) da fase é determinado pelo raio

de curvatura do feixe R , $\left(-\frac{\pi i}{\lambda R} \right)$; $w(z)$ é o raio do feixe no qual a amplitude do campo

cai para $1/e$ (Figura 2-12), e w_0 é o valor mínimo desse raio. $w(z)$ é dado por:

$$w^2(z) = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right] = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{z}{z_c} \right)^2 \right] \quad (2-17)$$

Figura 2-12 Feixe de Laser Gaussiano no modo TEM₀₀, onde se observa o raio do feixe, $w(z)$

e, $R(z)$ é o raio de curvatura da frente de onda, de fase constante, que é dado por

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] = z \left[1 + \left(\frac{z_c}{z} \right)^2 \right] \quad (2-18)$$

onde z_c é a distância confocal, definida por:

$$z_c = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (2-19)$$

Pela Figura (2-11), a origem da frente de onda está localizada na cintura do feixe, onde o raio deste é w_0 , assim, através da Equação (2-18), o raio de curvatura $R(z)$ se torna infinito, logo, neste ponto a frente de onda é plana, e, a sua curvatura se torna mais intensa à distância $\pm z_c$ do centro.

Em uma região central, denominada campo próximo, com um comprimento $2z_c$, a secção transversal do feixe se mantém aproximadamente constante, mas quando $z \gg z_c$, ou seja, no campo distante, o raio do feixe, w , aumenta com a propagação de forma linear, tornando a divergência, θ , aproximadamente constante, assim:

$$\theta \equiv \tan^{-1} \left(\frac{w}{z} \right) = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (2-20)$$

2.3.2 Laser de diodo

O laser utilizado em nossos experimentos, foi um laser *pointer*, que é um laser de semicondutor, de fácil manuseio e aquisição além de ter um baixo custo. Visto que

[37] seu índice de refração é alto ($n \sim 3.5$), a própria refletividade de sua interface semiconductor/ar ($R \sim 0,30$) é suficiente para que haja a ação laser, a qual necessita que a emissão laser se propague numa pequena região em ambos os modos transversos paralelo e perpendicular (Figura 2.13). Como as dimensões transversais da região ativa são comparáveis ao comprimento de onda de emissão, esse tipo de laser possui uma forte divergência, θ .

Figura 2-13 Laser de semiconductor e suas características [42]

O laser *pointer* foi utilizado sem a sua lente colimadora, atuando assim como uma fonte pontual emitindo ondas esféricas. No intuito de caracterizá-lo, inicialmente medimos o seu comprimento de onda através do *Monochromator Mod. 82-410 – Jarrel Ash*, e encontramos: $\lambda=650\text{nm}$. Depois, para obtermos a sua divergência e, conseqüentemente, o seu raio tanto no modo transversal paralelo como perpendicular, montamos o sistema mostrado na Figura 2-14.

Figura 2-14 Sistema utilizado para a medida da divergência do feixe emitido pelo laser *pointer*.

Esse sistema é constituído de uma base metálica, sobre a qual existe um disco giratório que possui uma escala graduada em graus. Sobre esse disco foi fixado um fotodetector de silício ligado a um multímetro. O laser *pointer* foi mantido fixo e suspenso sobre o disco através de um parafuso que o prende à base metálica, mas era possível rotacionar o laser a fim de se fazer as medidas em ambas as direções, paralela e perpendicular, do modo transverso. Essa montagem permitiu que se fizesse uma varredura do feixe medindo a tensão grau a grau e o gráfico obtido para a Intensidade pela divergência (em graus e em radianos), tanto para o modo transverso paralelo como para o perpendicular é mostrado na Figura 2-15. O ajuste, da curva obtida, foi feito por uma gaussiana, e permitiu que se encontrasse a divergência no modo transverso paralelo sendo $\theta_{//} = 0.11 \text{ rad}$ e no modo transverso perpendicular $\theta_{\perp} = 0.5 \text{ rad}$. Utilizando-se as Equações (2-17), (2-18) e (2-20), e sabendo-se que os dados experimentais usados foram: $\lambda = 650 \text{ nm}$ e $z = 3 \text{ cm}$ (z é a distância do feixe de laser ao fotodetector) obtemos que os raios dos feixes são: $w_{0//} = 1,88 \mu\text{m}$, $w_{0\perp} = 0,42 \mu\text{m}$, $w_{//} = 0,329 \text{ cm}$ e $w_{\perp} = 1,5 \text{ cm}$.

Figura 2-15 Medida da divergência segundo os modos transversos paralelo e perpendicular, que foram ajustados por uma Gaussiana.

2.3.3 Módulo Experimental

Os experimentos realizados, para a verificação dos padrões de difração, constaram de um trilho óptico, pinos deslizantes, diversos elementos difratores (Figura 2-16), uma fonte de luz, ou seja, um laser *pointer* (*Key Chain Laser – Made in China*) sem a lente colimadora, de comprimento de onda $\lambda = 650\text{nm}$ e um anteparo.

Como elementos difratores foram utilizados uma placa de vidro contendo aberturas e obstáculos retangulares e circulares (Figura 2-16 (b)) e uma lâmina de barbear. Esses elementos foram fixados em pinos deslizantes colocados em um trilho óptico (Figura 2-17(a))

Figura 2-16 (a) Elementos difratores utilizados nos experimentos; (b) detalhe da placa contendo os elementos difratores: orifícios e obstáculos retangulares e circulares.

Como anteparo, para captura do padrão de difração obtido, foi utilizado, diretamente, uma câmara *Watec 902H* – Japan, sem sua lente focalizadora, em conjunto com uma placa de aquisição *Matrox – Meteor II*, placa esta com módulo de leitura *RS-170*, que já transfere, diretamente, a foto para o computador, a fim de que possam ser trabalhadas. Também foi usada uma câmara digital *Sony Digital Still Câmera DSC-F707* para a aquisição dos padrões. Neste caso os padrões foram fotografados, por transmissão, através de um papel vegetal, que serviu como anteparo de visualização.

Figura 2-17 (a) Esquema da montagem experimental para o estudo da difração; (b) Elementos utilizados na montagem experimental para o estudo da difração.

Todos os padrões coletados nesses experimentos foram obtidos colocando o elemento difrator, inicialmente, junto à fonte de luz (laser *pointer*), e depois o transladando para próximo ao anteparo.

Essa forma de realizarmos os experimentos difere dos observados em diversos livros textos e artigos [16][17][18][19][20], pela facilidade de demonstração em sala de aula, visto a necessidade de uma pequena distância para se poder observar os padrões de difração, em contraposição às grandes distâncias necessárias para os experimentos usuais; pelos poucos e baratos elementos necessários para a montagem (Figura 2-17 (a)), em contraposição à necessidade de diversos elementos como lentes microscópicas, lentes de grande distância focal, diafragma, filtros espaciais, laser de He-Ne, etc. Além disso, através dessa montagem conseguimos observar os padrões de difração tanto para o campo distante, como para com o campo próximo, o que não ocorre quando utilizamos outro tipo de laser, como por exemplo, com o laser de He-Ne, que normalmente se consegue observar apenas os padrões de difração no campo distante. Cabe ressaltar que também não é necessária uma sala totalmente escurecida para se realizar os experimentos.

2.3.4 Abertura (Fenda Simples) e Obstáculo Retangulares

Para o experimento com a abertura e o obstáculo retangulares, a montagem utilizada é a descrita na Figura 2-17, e o elemento difrator foi a fenda e o fio, respectivamente, que se encontram na placa da Figura (2-16(b)). Em ambos os casos, o elemento difrator foi transladado, progressivamente, do laser *pointer* para próximo ao anteparo.

Os padrões de difração relativos a uma fenda, como visto anteriormente, podem ser obtidos através da IDFK, usando a Equação (2-11) para o campo próximo e a Equação (2-9) para o campo distante. Assim, na Figura 2-18 temos as curvas, relativas ao dado experimental e à simulação da Equação (2-11) feita com o programa Mathematica, da Intensidade versus y_2 onde se observa uma boa coerência entre elas.

Figura 2-18 Curvas obtidas através dos dados experimental e simulado teoricamente da Intensidade versus y_2 , na aproximação de Fresnel, de uma fenda de abertura $2a = 0,2\text{mm}$, com o anteparo colocado à $d = 8,8\text{ cm}$ e o comprimento de onda do laser “pointer” sendo de $\lambda = 650\text{ nm}$.

Na Figura 2-19 podem ser vistos os padrões obtidos para uma fenda simples de **0,2 mm** de largura, que foram fotografados através de uma câmara *Watec*, bem como o gráfico da intensidade pela distância de cada padrão.

z (cm)	N _F	Foto do Padrão de uma Fenda	Intensidade do padrão de difração
3,5	0.44	(foto com intensidade saturada)
13,5	0.11

Figura 2-19 Padrão de Difração de uma fenda simples transladada para próxima ao laser *pointer*, com as fotos tiradas pela câmara *Watec*, e o gráfico da Intensidade pela distância. Utilizou-se um laser *pointer* com $\lambda = 650\text{nm}$, uma fenda de $0,2\text{mm}$ de abertura, e o anteparo estava distante de $0,8\text{cm}$ à $51,3\text{cm}$.

No caso de uma fenda móvel em que a abertura tende ao infinito, o elemento difrator nada mais é que uma borda reta. Esse elemento também pode ser estudado através da IDFK dada pela Equação (2-11), onde se levou um dos limites da integral

para o infinito. As curvas com os dados experimental e o simulado pela teoria da intensidade versus y_2 está mostrada na Figura 2-20, onde se observa a concordância entre elas.

Figura 2-20 Intensidade versus y_2 , na aproximação de Fresnel, de uma borda, onde se utilizou $d = 50\text{ cm}$ e $\lambda = 650\text{ nm}$, que serviu de ajuste para um padrão experimental que foi fotografado de uma lâmina de barbear.

Na Figura 2-21 pode-se observar os padrões obtidos para uma borda reta, que no caso foi uma lâmina de barbear, utilizando a montagem proposta na Figura (2-17) e que também foi transladada do laser em direção ao anteparo.

z (cm)	Foto do Padrão da Lâmina de Barbear	Intensidade do padrão de difração
1,3

Figura 2-21 Padrão de Difração de uma borda reta (lâmina de barbear) transladada para próxima ao laser *pointer*, com as fotos tiradas pela câmara *Watec*, e o gráfico da Intensidade pela distância. Utilizamos um laser *pointer* de $\lambda = 650\text{nm}$ e o anteparo estava distante de **0,8cm** à **51,3cm**.

No estudo do obstáculo retangular, utilizamos o fio que está contido na placa de vidro, mostrada na Figura 2-16(b). O padrão de difração, que foi fotografado por transmissão usando uma folha de papel vegetal como anteparo pela câmera *Sony*, bem como o gráfico da intensidade pela posição podem ser vistos na Figura 2-22.

Figura 2-22 Padrão de Difração de um obstáculo retangular, um fio, transladado para próxima ao laser *pointer*, com as fotos tiradas pela câmera *Sony*, e o gráfico da intensidade pela distância. Utilizamos um laser *pointer* de $\lambda = 650\text{nm}$, um obstáculo retangular de $0,2\text{mm}$ de abertura, e o anteparo estava distante de $0,8\text{cm}$ à $51,3\text{cm}$

2.3.5 Abertura e Obstáculo Circulares

Nos experimentos com aberturas e obstáculos circulares, utilizamos os pontos e furos, respectivamente, constantes da placa de vidro (Figura 2-16 (b)), montados sobre o trilho óptico, segundo o esquema dado na Figura (2-16 (a)), onde se pode deslocar o elemento difrator, afastando-o do laser *pointer*.

Vimos, anteriormente, que podemos obter os padrões de difração relativos a elementos ópticos circulares através da IDFK dada pela Equação (2-15), para o campo próximo, e Equação (2-14), para o campo distante. Desta forma, na Figura 2-23 temos as curvas da Intensidade versus y_2 , obtidas experimentalmente e pela simulação feita com o programa Mathematica da Equação (2-15), onde se pode observar uma boa concordância entre os resultados.

Figura 2-23 Curvas da Intensidade versus y_2 , relativas ao dado experimental e à simulação, na aproximação de Fresnel, de uma abertura circular de raio $a = 0,25\text{mm}$, com o anteparo colocado à distância $d = 1,53\text{ cm}$ e o comprimento de onda do laser *pointer* sendo $\lambda = 650\text{ nm}$.

Na Figura 2-24 temos as fotos, obtidas com a câmera *Watec*, bem como as intensidades dos padrões obtidos para uma abertura circular de raio $0,5\text{mm}$, que foi deslocada de $0,8\text{cm}$ à $51,3\text{cm}$ do laser *pointer* em direção ao anteparo.

z (cm)	N_F	Foto do Padrão de uma Abertura Circular	Intensidade do padrão de difração
1,3	29,6
3,3	11,6
5,3	7,3

Figura 2-24 Padrão de Difração de uma abertura circular, transladada para próxima ao laser *pointer*, e o gráfico da Intensidade pela distância, com as fotos tiradas pela câmera *Watec*. Utilizamos um laser *pointer* de $\lambda = 650\text{nm}$, uma abertura circular com raio de **0,5mm**, e o anteparo estava distante de **0,8cm** à **51,3cm**.

Na Figura 2-25 estão exibidas as fotos, tiradas pela câmera *Watec*, e as Intensidades dos padrões de difração obtidos para uma abertura de raio **0,25mm**, que foi deslocada de **0,8 cm** à **51,3cm** do laser em direção ao anteparo

z (cm)	N	Foto do Padrão de uma Abertura Circular	Intensidade do padrão de difração
1,3	7,4
3,3	2,95
5,3	1,81
7,3	1,32

Figura 2-25 Padrão de Difração de uma abertura circular, transladada para próxima ao laser *pointer*, e o gráfico da Intensidade pela distância, com as fotos tiradas pela câmera *Watec*. Utilizamos um laser *pointer* de $\lambda = 650\text{nm}$, uma abertura circular com raio de **0,25mm**, e o anteparo estava distante de **0,8cm** à **51,3cm**.

Na Figura (2-26) apresentamos as fotos, obtidas com a câmera *Watec*, e as Intensidades dos padrões de difração obtidas para a abertura circular de raio **0,125mm**, e que foi deslocada do laser *pointer* para o anteparo.

3,3	0,72
5,3	0,45
7,3	0,33

Figura 2-26 Padrão de Difração de uma abertura circular, transladada para próxima ao laser *pointer*, e o gráfico da Intensidade pela distância, com as fotos tiradas pela câmara *Watec*. Utilizamos um laser *pointer* de $\lambda = 650\text{nm}$, uma abertura circular com raio de **0,125mm**, e o anteparo estava distante de **0,8cm** à **51,3cm**.

Nas Figuras (2-24), (2-25) e (2-26) observa-se que as fotos dos padrões apresentam centros claros e escuros, conforme a posição que se encontra o anteparo. Este fenômeno tem sua explicação dada através das zonas de Fresnel, apresentada no Tópico 2-2.

No estudo dos obstáculos circulares foram utilizados os pontos constantes da placa de vidro (Figura 2-16(b)), seguindo a montagem fornecida na Figura (2-17(a)), onde o elemento difrator pode ser deslocado entre o laser *pointer* e o anteparo, que no caso foi utilizada a câmara *Watec*.

Na Figura 2-27 observa-se tanto a foto como o gráfico referente à intensidade do padrão de difração de um obstáculo circular de raio **a = 0,5mm** que foi transladado entre **0,8** à **51,3cm** do laser *pointer*.

z (cm)	Foto do Padrão de um Obstáculo Circular	Intensidade do padrão de difração
1,3
3,3
5,3
7,3

Figura 2-27 Padrão de Difração de um obstáculo circular, ou seja, do Ponto de Poisson, transladada para próxima ao laser *pointer*, e o gráfico da Intensidade pela distância, com as fotos tiradas pela câmara *Watec*. Utilizamos um laser *pointer* de $\lambda = 650\text{nm}$, um obstáculo circular com raio de **0,5mm**, e o anteparo estava distante de **0,8cm** à **51,3cm**.

A Figura (2-28) mostra as fotos e os gráficos da intensidade do padrão de difração de um obstáculo circular de raio **0,25mm** que foi deslocado entre o laser *pointer* e o anteparo, a máquina *Watec*.

z (cm)	Foto do Padrão de um Obstáculo Circular	Intensidade do padrão de difração
1,3
3,3
7,3

Figura 2-28 Padrão de Difração de um obstáculo circular, ou seja, do Ponto de Poisson, transladada para próxima ao laser *pointer*, e o gráfico da Intensidade pela distância, com as fotos tiradas pela câmara *Watec*. Utilizamos um laser *pointer* de $\lambda = 650\text{nm}$, um obstáculo circular com raio de $0,25\text{mm}$, e o anteparo estava distante de $0,8\text{cm}$ à $51,3\text{cm}$.

Na Figura (2-29) encontra-se as fotos e os gráficos da intensidade do padrão de difração referentes a um obstáculo circular de raio $0,125\text{mm}$ que foi deslocado entre o laser *pointer* e o anteparo, a máquina *Watec*.

z (cm)	Foto do Padrão de um Obstáculo Circular	Intensidade do padrão de difração
1,3
3,3
5,3

Figura 2-29 Padrão de Difração de um obstáculo circular, ou seja, do Ponto de Poisson, transladada para próxima ao laser *pointer*, e o gráfico da Intensidade pela distância, com as fotos tiradas pela câmara *Watec*. Utilizamos um laser *pointer* de $\lambda = 650\text{nm}$, um obstáculo circular com raio de $0,125\text{mm}$, e o anteparo estava distante de $0,8\text{cm}$ à $51,3\text{cm}$.

Nas Figuras (2-27), (2-28) e (2-29) observamos em todos os padrões que o centro sempre se apresenta brilhante, diferentemente da abertura circular. Esse

fenômeno é denominado de Ponto de Poisson. É interessante se fazer, aqui, um breve comentário sobre a importância histórica deste experimento.

Fresnel, em 1818, apresentou para a Academia de ciências de Paris, sua teoria da difração. Poisson, que era membro da comissão julgadora, percebeu que através da aplicação dessa teoria, no centro da sombra de um disco opaco existiria um ponto luminoso, o que lhe parecia absurdo, levando-o a desclassificar o trabalho. Arago, que também era membro da comissão julgadora, realizou o experimento e demonstrou a existência deste ponto luminoso. Desde então esse ponto luminoso foi denominado de Ponto de Poisson ou Ponto de Arago [9][10][11][12]. Este é o experimento considerado como aquele que conseguiu comprovar a natureza ondulatória da luz.

2.3.6 Lentes

Um outro elemento óptico muito importante e que também pode ser estudado através da IDFK são as Lentes, cujo funcionamento se baseia na mudança de direção que a luz sofre ao incidir sobre a superfície de delimitação entre dois meios com diferentes índices de refração. Elas produzem o efeito de atrasar a propagação da onda incidente de um valor que depende do índice de refração do material e das coordenadas do ponto de incidência (x, y) na lente por essa onda.

Figura 2-30 Esquema de propagação de uma onda por uma lente convergente

Na Figura 2-30 notamos uma frente de onda plana incidindo sobre uma lente. Observamos que na região (1) todos os pontos da frente de onda estão no ar, logo, com a mesma velocidade. A onda começa a incidir na lente, segundo os pontos (x_0, y_0) , que estão sobre a linha tracejada, enquanto que os outros pontos (x, y) ainda estão no ar.

Desta forma, nota-se que os últimos a incidirem serão os primeiros a saírem, e assim, a onda refratada se torna convergente, convergindo para o foco dessa lente. Na Figura 2-31 observamos uma lente divergente, onde os pontos da frente de onda que estão mais próximos ao eixo óptico serão os últimos a penetrarem e a saírem desta, assim a frente de onda se torna divergente.

Figura 2-31 Esquema de propagação de uma onda por uma lente divergente

Vamos considerar, para esse estudo, uma lente plano convexa como a mostrada na Figura 2-32. Para esse tipo de lente, onde um de seus raios é infinito, a distância focal determinada pela equação dos fabricantes (Equação (A3-1)), resulta:

$$f = \frac{R}{n_0 - 1} \quad (2-21)$$

Figura 2-32 Esquema de propagação de uma onda por uma lente plano-convexa

Sobre essa lente incide uma frente de ondas planas possuindo um campo E_0 . Essa frente de ondas, então, sofrerá um distúrbio que é traduzido como um atraso de

fase ($\Delta\phi$) que está relacionado à variação do caminho óptico do meio e, desta forma, após a lente apresenta um campo dado por:

$$E_S(z) = E_0 \exp(-ikz) \exp(-i\Delta\phi) \quad (2-22)$$

O atraso de fase ($\Delta\phi$) está relacionado à variação do caminho óptico do meio (Equação (A3-2)) que por sua vez se relaciona com a espessura da lente l (Equação (A3-5)) e que pode ser escrito como:

$$\Delta\phi(r) = kS = kn_0 l - k(n_0 - 1) \left[\frac{r^2}{2R} - \frac{r^4}{8R^3} - \frac{r^6}{16R^5} \right] \quad (2-23)$$

Desta forma, o campo após a lente será (Equação (A3-9))

$$E_S(r_1) = D_0 \exp \left\{ ik \left[\frac{r_1^2}{2f} - \frac{r_1^4}{8R^2 f} - \frac{r_1^6}{16R^4 f} \right] \right\} \quad (2-24)$$

onde: $D_0 = C_0 \exp[ikn_0]$

Para estudarmos o campo em um ponto P_2 , no plano de observação, distante d , vamos aplicar a IDFK (Equação (2-2)), mas em Coordenadas Cilíndricas, a qual leva em consideração a simetria existente no problema:

$$E(r_2) = \frac{i}{\lambda d} \exp[-i\xi] \int_0^a \exp \left[-ik \frac{r_1^2}{2d} \right] 2\pi J_0 \left(\frac{kr_1 r_2}{d} \right) E_S(r_1) r_1 dr_1 \quad (2-25)$$

Considerando uma lente de diâmetro $2a$, de acordo com a Equação (2-28) podemos aproximar E_S por uma onda esférica, quando $a \ll R$. Neste caso:

$$E_S(r_1) = C_0 \exp \left[ik \left(\frac{r_1^2}{2f} \right) \right] \quad (2-26)$$

assim, a integral a ser estudada é:

$$E(r_2) = \frac{ik}{d} C_0 \exp[-i\xi] \int_0^a \exp \left[-ik \frac{r_1^2}{2} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{f} \right) \right] J_0 \left(\frac{kr_1 r_2}{d} \right) r_1 dr_1 \quad (2-27)$$

Ao colocarmos o plano de observação no foco, ou seja, $f = d$, a exponencial, que está no integrando, se torna 1, desta forma, a intensidade que se encontra é igual a de uma abertura circular, como visto pela Equação (2-12), ou seja uma lente perfeita funciona como se fosse uma abertura circular de raio a , assim essa lente também terá intensidade máxima no centro do padrão de difração. Desta forma, ao fazermos o estudo axialmente ($r_2 = 0$):

$$E(r_2 = 0) = \frac{ik}{d} C_0 \exp[-i\xi] \int_0^a r_1 dr_1 = \frac{ik}{d} C_0 \exp[-i\xi] \frac{a^2}{2} \propto a^2$$

Mas, em lentes é normal que ocorram aberrações, sendo a esférica, o tipo mais comum, assim, nesse caso, o campo logo após a lente, dado pela Equação (2-24), será levado em consideração potências de ordem 4 (r_1^4), ou seja

$$E_s(r_1) = C_0 \exp \left[\frac{ikr_1^2}{2f} \left(1 - \frac{r_1^2}{4R^2} - \frac{r_1^4}{4R^4} \right) \right] \quad (2-28)$$

desta forma, o campo no plano de observação é dado por:

$$E(r_2) = \frac{ik}{d} C_0 \exp[-i\xi] \int_0^a \exp \left[ik \left(r_1^2 \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{f} \right) - \frac{r_1^4}{8R^2 f} \right) \right] J_0 \left(\frac{kr_1 r_2}{d} \right) r_1 dr_1 \quad (2-29)$$

Se esse plano de observação, como considerado anteriormente, estiver no plano focal da lente ($d = f$), o campo observado se torna então:

$$E(r_2) = \frac{ik}{d} C_0 \exp[-i\xi] \int_0^a \exp \left[ik \frac{r_1^4}{8R^2 f} \right] J_0 \left(\frac{kr_1 r_2}{d} \right) r_1 dr_1 \quad (2-30)$$

A Intensidade encontrada no plano de observação será dada por: $I = |E(r_2)|^2$, cujo perfil de intensidade observado é visto na Figura (2-33).

Figura 2-33 Intensidade de uma lente plano-convexa em função do seu raio a (cm), considerando-se $\lambda = 650\text{nm}$, $d = f = 10\text{cm}$, com f sobre o eixo e $\left(8R^2 f\right)^{-1} \approx 5 \times 10^{-4} \text{cm}^{-3}$.

Da figura 2-34 observamos que para essa lente estudada aproximadamente 40% de seu diâmetro não afeta o feixe de luz com aberrações.

Figura 2-34 Comparação da Intensidade entre uma lente perfeita e uma lente que apresenta aberração esférica, tomando-se $\lambda = 650\text{nm}$, $d = f = 10\text{ cm}$, com f sobre o eixo e $(8R^2f)^{-1} \approx 5 \times 10^{-4}\text{ cm}^{-3}$. Em destaque está-se mostrando que aproximadamente até um raio de 0,4cm a lente com e sem aberração coincidem, assim, após esse valor de raio as aberrações começam a aparecer.

Ao levarmos em conta os termos de mais altas ordens para a aberração, o campo após a lente é dado pela Equação (2-24), gerando, assim, um campo no plano de observação dado por:

$$E(r_2) = \frac{ik}{d} C_0 \exp[-i\xi] \int_0^a \exp\left[-ik \frac{r_1^2}{2d}\right] \exp\left[\frac{ik r_1^2}{2f} \left(1 - \frac{r_1^2}{4R^2} - \frac{r_1^4}{4R^4}\right)\right] J_0\left(\frac{k r_1 r_2}{d}\right) r_1 dr_1 \quad (2-32)$$

Se tomarmos, novamente, o plano de observação sobre o plano focal da lente ($d = f$), o campo será:

$$E(r_2) = \frac{ik}{d} C_0 \exp[-i\xi] \int_0^a \exp\left[-ik \left(\frac{r_1^4}{8R^2f} + \frac{r_1^6}{16R^4f}\right)\right] J_0\left(\frac{k r_1 r_2}{d}\right) r_1 dr_1 \quad (2-33)$$

O perfil de intensidade encontrado para um feixe se propaga por uma lente que possui aberrações de mais altas ordens, pode ser visto na Figura 2-35. Nela podemos observar a formação dos anéis de difração.

Figura 2-35 Comparação do perfil de Intensidade entre uma lente perfeita e uma lente que demonstra aberração esférica, tomando-se $\lambda = 650\text{nm}$, $d = f = 10\text{cm}$, $(8R^2f)^{-1} \approx 5 \times 10^{-4} \text{cm}^{-3}$ e $(16R^4f)^{-1} \approx 9 \times 10^{-1} \text{cm}^{-5}$

Capítulo 3 Teoria da Lente Térmica Radial

Neste Capítulo será apresentado o estudo da Lente Térmica Radial (LT), segundo o modelo parabólico, obtido através da matriz de transferência de raios, e o modelo aberrante, obtido pela IDFK, sendo que este último modelo será demonstrado tanto para o arranjo experimental de feixe único, como para o de feixe duplo.

3.1 Espectroscopia Fototérmica

A espectroscopia fototérmica [22][23] é formada por um grupo de técnicas de alta sensibilidade, que permitem medir a absorção óptica e as propriedades térmicas dos materiais, além de apresentar as características de ser não destrutiva.

O princípio básico utilizado, neste tipo de espectroscopia, está fundamentado na variação que ocorre no estado térmico do material, ou seja, na variação dos parâmetros termodinâmicos, pois a energia luminosa absorvida reverte-se em aquecimento e conseqüentemente, os sinais obtidos são diretamente dependentes da absorção da luz. Desta forma, essas técnicas são consideradas como de análise indireta da absorção óptica, pois não medem diretamente a absorção da luz que excita a amostra, mas sim, o efeito que a absorção óptica tem sobre essa amostra. É essa natureza de medida indireta, que torna a espectroscopia fototérmica mais sensível que os métodos de transmissão. O fator de aumento (*Enhancement Factor*) é definido como a razão do sinal obtido através da espectroscopia fototérmica pelo obtido através da espectroscopia de transmissão convencional [24]. Esse fator de aumento depende tanto das propriedades termo-ópticas da amostra, quanto da fonte de luz utilizada para excitação desta amostra. Como a potência da fonte de luz e o comprimento de onda podem ser variados, pode-se obter um maior fator de aumento, mesmo em amostras cujas propriedades termo-ópticas não contribuam para esse aumento.

Com o advento da luz laser que possui alta potência e pureza espectral, a espectroscopia fototérmica teve seus resultados muito melhorados. Visto que, como a variação da temperatura que ocorre na amostra é proporcional à potência do laser de

excitação, e o sinal obtido é proporcional a essa variação da temperatura, quanto maior a potência do laser incidente na amostra, maior será o sinal resultante. Mas, a variação da temperatura também é inversamente proporcional ao volume sobre o qual a luz é absorvida, e como a coerência espacial da fonte laser permite que a luz seja focalizada em pequenos volumes, limitados por difração, assim quanto menor o volume, maior é a variação da temperatura, o que também leva a um maior sinal resultante.

Dentre as técnicas pertencentes à espectroscopia fototérmica temos: a espectroscopia fotoacústica, de interferometria foto piroelétrica, fotodeflexão, de lente fototérmica etc. Esta última, também denominada apenas de espectroscopia de Lente Térmica e que é o objeto de estudo deste capítulo.

3.1.1 Espectroscopia de Lente Térmica

O efeito de LT foi inicialmente observado por Leite et al.[25] e Gordon et al.[26] quando em um estudo do espectro Raman, colocaram amostras de líquidos orgânicos em um ressonador de um laser de HeNe. Inesperadamente, eles observaram transientes de potência, variações nos modos e oscilações do tipo relaxação com constante de tempo que era da ordem de segundos, que atribuíram ao efeito de uma lente induzida pelo perfil de índice de refração do líquido.

Leite et al. e Gordon et al. propuseram um embasamento para a formulação de um modelo denominado parabólico. Eles apenas determinaram a distância focal da LT, visto estarem interessados em comprovar o efeito de lente. Hu e Whinnery [27] foram os primeiros a, realmente, proporem um modelo (parabólico) para o efeito, onde determinaram a intensidade medida no campo distante. Logo depois, Sheldon [28] propôs o modelo denominado aberrante, de feixe único, em que eram consideradas as aberrações da lente formada. Shen [29] foi um dos que propuseram o modelo aberrante utilizando dois feixes, onde um feixe é utilizado para excitar a amostra, fazendo surgir o efeito de lente, e o outro serve para provar esse efeito.

Podemos sintetizar a formação do efeito de lente térmica, notando que ele ocorre quando uma amostra, ao ser iluminada por um feixe de laser Gaussiano no modo TEM₀₀, absorve essa radiação, gerando calor que se difunde radialmente ocasionando uma variação

no índice de refração da amostra, a qual passa a ter características de uma lente, e a agir sobre o feixe de prova, distorcendo sua frente de onda, ou seja, modificando sua divergência. Essa distorção da frente de onda é medida como a variação relativa da luz transmitida por um diafragma, colocado à frente de um detector, e sua análise fornece a medida da absorção óptica e das propriedades térmicas de interesse.

Assim, para o desenvolvimento dos modelos para LT, inicialmente devemos determinar a distribuição de temperatura que ocorre na amostra, visto que irá modificar o índice de refração, que acarretará uma fase adicional ao campo do feixe de prova a qual modificará a Intensidade que é medida no centro do feixe, por meio de um detector.

3.2 Distribuição de Temperatura

A distribuição de temperatura em uma amostra é gerada pela absorção da energia do feixe de laser que a aquece, e é encontrada, através da resolução da equação de difusão de calor no estado não estacionário [30][31]:

$$\rho c_p \frac{\partial \Delta T(r,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \Delta T(r,t)}{\partial r^2} + \dot{q}(r) \quad (3-1)$$

onde: r é a coordenada radial da amostra, em relação ao eixo óptico, k é a condutividade térmica do material, c_p é o calor específico do material, ρ é a densidade do material,

$\left(k \frac{\partial^2 \Delta T(r,t)}{\partial r^2} \right)$ é o termo que representa o efeito de difusão térmica; e, $\dot{q}(r)$ é o termo

fonte (Equação (A4-7)).

Se o feixe de laser for ligado em $t'=0$, a distribuição de temperatura será (Equação (A5-2)):

$$\Delta T(r,t) = \int_0^t \int_0^\infty Q(r') G(r,r',t') dt' dr' \quad (3-2)$$

onde: $Q(r')$ é a fonte de calor distribuída, a qual fornece a taxa de geração de calor e $G(r,r',t')$ é a função de Green.

A fonte de calor, $Q(r')$, medida em (cal/cm s), é dada por:

$$Q(r') dr' = \frac{2 P \alpha}{\pi w^2} \exp\left[\frac{-2 r'^2}{w^2}\right] (2\pi r') dr' \quad (3-3)$$

onde: w é o raio do feixe de laser, P (Watt) a potência do feixe e α (cm^{-1}) coeficiente linear de absorção óptica do meio.

A função de Green, que segundo Carslaw e Jaeger[31][32], para esse caso, representa a temperatura no ponto r , no tempo t , de uma fonte cilíndrica instantânea, que está em r' no tempo $t'=0$, em um meio infinito, é dada por:

$$G(r, r', t) = \frac{1}{4\pi k t} \exp\left[-\frac{(r^2 + r'^2)}{4 D t}\right] I_0\left(\frac{r r'}{2 D t}\right) \quad (3-4)$$

onde: I_0 é a função de Bessel modificada do primeiro tipo e de ordem zero; $D = \frac{k}{\rho c_p}$ é a difusividade do material ($\text{cm}^2 \text{seg}^{-1}$).

A distribuição de temperatura [26][28][33], então, se apresenta como:

$$\Delta T(r, t) = \frac{P \alpha}{\pi w^2 k} \int_0^t \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{4 D t'}\right]}{t'} dt' \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{8 D t' + w^2}{4 D t' w^2}\right) r'^2\right] I_0\left(\frac{r r'}{2 D t'}\right) r' dr' \quad (3-5)$$

cuja solução encontrada é (Anexo 5):

$$\Delta T(r, t) = \frac{P \alpha}{4\pi k} \left[\text{Ei}\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) - \text{Ei}\left(-\frac{2r^2}{8Dt + w^2}\right) \right] \quad (3-6)$$

onde: Ei representa a função integral exponencial (Equação (A5-8)).

Mas, também podemos obter a distribuição de temperatura em função do tempo característico da LT, que é dado por:

$$t_c = \frac{w^2}{4D} \quad (3-7)$$

desta forma, ela se torna:

$$\Delta T(r, t) = \frac{P \alpha}{4\pi k} \left[\text{Ei}\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) - \text{Ei}\left(-\frac{2r^2}{w^2} \left(1 + \frac{2t}{t_c}\right)\right) \right] \quad (3-8)$$

Fazendo-se uma expansão de Ei em série (Equação (A5-12)), obtemos:

$$\Delta T(r,t) = \frac{P \alpha}{4 \pi k} \left[\ln \left(1 + \frac{2t}{t_c} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m m!} \left(-\frac{2r^2}{w^2} \right)^m \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{2t}{t_c} \right)^m} \right) \right]$$

que, tomando-se até segunda potência de r obtemos:

$$\Delta T(r,t) = \frac{P \alpha}{4 \pi k} \left[\ln \left(1 + \frac{2t}{t_c} \right) - \frac{2r^2}{w^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{t_c}{2t}} \right) \right] \quad (3-9)$$

Essa distribuição de temperatura está mostrada na Figura (3-1), como função do raio para diversos valores de t/t_c . Próximo ao eixo, pode-se aproximar o perfil de temperatura por uma parábola.

Figura 3-1 Distribuição de Temperatura para a LT com relação à posição normalizada, para diversos valores de (t/t_c) , simulado pelo programa Mathematica, onde se observa a forma parabólica das curvas, próximas ao eixo.

3.3 Cálculo da distância focal da Lente Térmica

A focalização ou defocalização de raios luminosos podem ser obtidas por meio de uma lente. Assim, quando uma frente de ondas planas incidir sobre ela, inicialmente todos os seus raios estão em fase, mas ao se propagarem através dela, os raios que estão mais próximos ao eixo óptico da lente serão retardados em relação aos que passam próximos à

borda. Assim, na saída se obtém uma frente de ondas esféricas com um raio de curvatura que coincide com a distância focal da lente.

Se o elemento óptico envolvido for uma LT, a focalização ou defocalização estará fundamentada na variação que ocorre do índice de refração do material que produz essa lente. Desta forma, um feixe de laser gaussiano no modo TEM_{00} , ao passar por uma amostra que se comporta como uma LT, sofre um desvio angular $\theta(\mathbf{r})$ dado por[22]:

$$\theta(\mathbf{r}) = \frac{1}{n_0} \int_0^L \frac{dn(\mathbf{r})}{dr} ds \quad (3-10)$$

onde: $n(\mathbf{r})$ é o índice de refração que possui uma dependência radial e r é a distancia axial.

Supondo-se que os raios que excitam a amostra são aproximadamente paralelos à normal a essa amostra, pode-se usar a aproximação paraxial: $\tan \theta \cong \theta$ e assim, o desvio angular se relacionará com a distância focal (F) da lente por:

$$\tan \theta(\mathbf{r}) = \frac{r}{F} \Rightarrow \theta(\mathbf{r}) \equiv \frac{r}{F} \quad (3-11)$$

Quando um feixe de laser incide sobre uma amostra, é absorvido na forma de calor, gerando uma distribuição de temperatura $\Delta T(\mathbf{r}, t)$, que apresenta um perfil gaussiano. Essa distribuição de temperatura acarreta uma distribuição de índice de refração que também apresenta um perfil gaussiano. Desta forma, aproximando o índice de refração por uma parábola,[2][27]:

$$n(\mathbf{r}, t) = n_0 + \delta n \frac{r^2}{w^2} \quad (3-12)$$

onde: n_0 é o índice de refração na temperatura inicial, δn é uma pequena variação do índice de refração.

Fazendo-se a derivada primeira em relação a r , do perfil de índice de refração e substituindo na Equação (3-10), obtemos:

$$\theta(\mathbf{r}) = \frac{1}{n_0} \frac{2rL}{w^2} \delta n \quad (3-13)$$

Comparando-se as Equações (3-11) e (3-13), a distância focal será:

$$\frac{1}{F(t)} = \frac{1}{n_0} \frac{2L}{w^2} \delta n \quad (3-14)$$

Para uma pequena perturbação no índice de refração, o índice de refração total é dado por:

$$n(r, t) = n_0 + \delta n = n_0 + \frac{dn}{dT} \delta T(r, t) \quad (3-15)$$

Fazendo-se a expansão em série de Maclaurin de $\delta T(r, t)$, observando-se que a primeira derivada representa o gradiente de temperatura o qual é nulo no centro, a distribuição da temperatura apresentará um perfil parabólico, logo, para uma pequena variação da temperatura pode-se escrever:

$$\delta T(r, t) = \delta T_0 + \frac{r^2}{2} \frac{d^2 \delta T(r, t)}{dr^2} \quad (3-16)$$

Efetuada-se a segunda derivada da Temperatura que é dada pela Equação (3-9) e substituindo-se o resultado da Equação (3-16) na Equação (3-15), temos:

$$n(r, t) = n_0 + \left(\frac{dn}{dT} \right) \frac{P \alpha}{2 \pi k} \frac{r^2}{w^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{t_c}{2t}} \right) \quad (3-17)$$

que, ao se comparar com a Equação (3-12), obtemos:

$$\delta n = \left(\frac{dn}{dT} \right) \frac{P \alpha}{2 \pi k} \left(\frac{1}{1 + \frac{t_c}{2t}} \right) \quad (3-18)$$

Substituindo o valor de δn na Equação (3-14) determinamos que a distância focal é dada por:

$$\frac{1}{F(t)} = \frac{P \alpha L}{\pi k n_0 w^2} \left(\frac{dn}{dT} \right) \left[\frac{1}{1 + \frac{t_c}{2t}} \right] \quad (3-19)$$

Definindo-se a potência da LT como:

$$\theta = \frac{P \alpha l \left(\frac{dn}{dT} \right)}{\lambda k} \quad (3-20)$$

podemos escrever a distância focal, com dependência temporal, como sendo:

$$F(t) = \frac{\pi w^2}{\theta \lambda} \left[1 + \frac{t_c}{2t} \right] \quad (3-21)$$

E, a distância focal da LT no estado estacionário $F(\infty)$ será:

$$F(\infty) = \frac{\pi w^2}{\theta \lambda} \quad (3-22)$$

desta forma, a distância focal da LT pode ser reescrita como:

$$F(t) = F(\infty) \left[1 + \frac{t_c}{2t} \right] \quad (3-23)$$

Observamos da Figura 3-2, que mostra a relação $F/F(\infty)$ por t/t_c , que $F(t)$ se aproxima de $F(\infty)$ rapidamente, assim a variação da distância focal está de acordo com o tempo característico t_c de construção da LT.

Figura 3-2 Gráfico de F/F_∞ versus t/t_c , simulado pelo programa Mathematica, onde se observa que a distância focal da LT se aproxima rapidamente da distância focal dessa lente no estado estacionário

3.4. O modelo de Lente Térmica Parabólico

O modelo de Lente Térmica Parabólico, que foi estudado principalmente por Leite et al [25], Gordon et al [26] e Hu e Whinnery [27], usa como aproximação uma distribuição de índice de refração parabólico na lente formada, ou seja, ela age como uma lente fina sem aberrações.

O traçado dos raios é um método embasado na óptica geométrica paraxial, que basicamente está fundamentada em duas aproximações. A primeira [2] é trabalhar no limite em que o comprimento de onda tende a zero ($\lambda \rightarrow 0$), podendo-se, assim, desprezá-lo.

Desta forma, considera-se toda a energia sendo transportada ao longo dos raios de luz, que obedecem ao Princípio de Fermat, isto é, percorrem trajetórias que levam o menor tempo de propagação. A segunda é considerar apenas os raios que permaneçam próximos ao eixo, com inclinações suficientemente pequenas, de modo a se poder usar aproximações de primeira ordem, ou seja, $\theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta$, isto é, $\theta < 0.3 \text{ rad}$. Esta aproximação faz com que se deixe de ter informações dos efeitos de terceira ordem, como as aberrações esféricas, coma, astigmatismo, curvatura de campo e distorção.

As modificações ocorridas nas características do feixe, ao se propagar por algum sistema óptico, podem ser, assim, estudadas através de relações lineares, que são facilmente tratadas pelo método da matriz transferência de raios, ou seja, através da Óptica Matricial [34][35].

3.4.1 Propagação de um feixe Gaussiano e seus parâmetros

Como visto no Capítulo 2, um feixe gaussiano pode ser descrito através de seus parâmetros $w(z)$, $R(z)$ e $\theta(z)$, que representam o raio do feixe, o raio de curvatura da frente de onda e o ângulo de divergência do feixe, respectivamente. Mas é interessante que se descreva esse feixe em termos de um parâmetro de curvatura complexo, $q(z)$, de forma que o coeficiente de r^2 , na Equação (2-16) pode ser reescrito como:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \quad (3-24)$$

onde, $q(z)$ na cintura do feixe ($z = 0$) é:

$$q(z=0) = \left(\frac{i \lambda}{\pi w_0^2} \right)^{-1} = i z_c \quad (3-25)$$

Quando um feixe gaussiano de parâmetro de curvatura complexo q_1 incide em uma lente fina, de distância focal F , pode-se determinar o parâmetro de curvatura complexo de saída q_2 , aplicando-se a **Regra ABCD**, definida pela Óptica Matricial [34][35][36][37][38], assim:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (3-26)$$

Desta forma, os parâmetros $R_2(z)$ e $w_2^2(z)$, do feixe gaussiano, podem ser escritos como:

$$R(z) = \frac{A^2 z_c^2 + B^2}{A C z_c^2 + B D} \quad (3-27)$$

$$w^2(z) = \frac{\lambda}{\pi} \left[\frac{A^2 z_c^2 + B^2}{(A D - B C) z_c^2} \right] \quad (3-28)$$

Como o determinante da matriz transferência de raios tem a propriedade de ser unitário, e tomando o valor de z_c (Equação (2-19)), o valor de $w^2(z)$ é dado por:

$$w^2(z) = w_0^2 \left[A^2 + \frac{B^2}{z_c^2} \right] \quad (3-29)$$

Figura 3-3 Sistema óptico para a análise do efeito da LT.

Uma montagem básica utilizada para a análise do efeito da LT (Figura (3-3)) sobre um feixe laser gaussiano tem a origem do sistema colocada sobre a cintura do feixe (w_0); a amostra colocada a uma distância z da origem, onde o feixe terá um raio w_1 ; e, o detector colocado a uma distância d da amostra, onde o raio, nesse ponto, é w_2 . O feixe gaussiano, assim, inicialmente se propaga no espaço livre, incide na amostra, sofrendo a influência da LT formada e volta a se propagar no espaço livre, desta forma, o sistema de matrizes de transferência de raios [34][35][36][37][38] montado para estudar essa propagação será o produto da matriz translação $T = \begin{bmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ para o espaço entre a amostra e o detector,

pela matriz refração $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$ para a lente formada, e novamente pela matriz $\mathbf{T}$ para o espaço entre a origem e a amostra. Deve-se observar que, no produto, as matrizes devem ser dispostas no sentido oposto de propagação do feixe gaussiano, assim:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-30)$$

Os elementos de matriz encontrados para esse sistema são:

$$\mathbf{A} = 1 - \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{F}(\mathbf{t})} \quad (3-31)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{z} - \frac{\mathbf{z} \mathbf{d}}{\mathbf{F}(\mathbf{t})} + \mathbf{d} \quad (3-32)$$

$$\mathbf{C} = -\frac{1}{\mathbf{F}(\mathbf{t})} \quad (3-33)$$

$$\mathbf{D} = -\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{F}(\mathbf{t})} + 1 \quad (3-34)$$

Substituindo-se os valores de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ na Equação (3-29), e observando que o efeito relativo da lente térmica sobre o raio do feixe, w_2 , é maximizado no campo distante, ou seja, quando $\mathbf{d} \rightarrow \infty$, desta forma esse raio é dado por:

$$w_2^2(\mathbf{z}) = w_0^2 \mathbf{d}^2 \left[\left(-\frac{1}{\mathbf{F}(\mathbf{t})} \right)^2 + \frac{1}{z_c^2} \left(1 - \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{F}(\mathbf{t})} \right)^2 \right] \quad (3-35)$$

Mas, a detecção do efeito da lente térmica é efetuada através da medida da intensidade do feixe, realizada no campo distante e no eixo do feixe, que ocorre em um tempo da ordem de milisegundos a segundos. Como a intensidade no centro do feixe ($\mathbf{r} = \mathbf{0}$) é dada por (Equação (A.4-5)):

$$\mathbf{I} = \frac{2\mathbf{P}}{\pi w_2^2} \quad (3-36)$$

a sua variação está diretamente relacionada à variação relativa de w_2^2 no plano do detector, ou seja:

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta w_2^2}{w_2^2} \quad (3-37)$$

Analisando, inicialmente, a dependência temporal, observando que $F(0) = \infty$, a variação relativa do raio do feixe é dada por:

$$\frac{\Delta w_2^2}{w_2^2} = -\frac{2z}{F(\infty)\left(1 + \frac{tc}{2t}\right)} + \frac{z_c^2 + z^2}{F^2(\infty)\left(1 + \frac{tc}{2t}\right)^2} \quad (3-38)$$

Sendo $F(\infty)$ dado, segundo o modelo parabólico, pela Equação (3-22), o raio do feixe pela Equação (2-17) e a distância confocal pela Equação (2-19), a variação relativa da intensidade do feixe é:

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta w_2^2}{w_2^2} = \theta \left(\frac{2z z_c}{z^2 + z_c^2} \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{tc}{2t}\right)} + \left(\theta \left(\frac{z_c^2}{z^2 + z_c^2} \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{tc}{2t}\right)} \right)^2 \quad (3-39)$$

Desta forma, utilizando o parâmetro V que está associado à posição geométrica do feixe, e que é definido por:

$$V = \frac{z}{z_c} \quad (3-40)$$

a variação relativa da intensidade do feixe em termos de θ pode ser escrita como:

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\theta}{\left(1 + \frac{tc}{2t}\right)} \left(\frac{2V}{1 + V^2} \right) + \frac{\theta^2}{\left(1 + \frac{tc}{2t}\right)^2} \left(\frac{1}{1 + V^2} \right) \quad (3-41)$$

como θ , normalmente, é pequeno, pode-se desprezar os termos de ordem θ^2 assim, a variação relativa da intensidade será:

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\theta}{\left(1 + \frac{tc}{2t}\right)} \left(\frac{2V}{1 + V^2} \right) \quad (3-42)$$

e, a variação da intensidade antes, $I(t=0)$, e após, $I(t=\infty)$, a formação da lente térmica, em relação à posição, é encontrada:

$$\frac{\Delta I}{I} = \theta \left(\frac{2V}{1+V^2} \right) \quad (3-43)$$

O interesse nos experimentos de lente térmica está em se obter a maximização do sinal, assim há necessidade de se saber a posição em que se deve colocar a amostra. Para isso basta derivar a Equação (3-43) em relação à V e igualar a zero, encontrando-se assim:

$$V = \pm 1 \Rightarrow z = \pm z_c \quad (3-44)$$

Na Figura 3-4, o gráfico de $\frac{\Delta I}{I}$, simulado pela Equação (3-43), fornece uma curva anti-simétrica que pode ser explicada através do efeito de uma lente térmica divergente [25]. Observando a Figura 3-3, quando essa amostra for colocada antes da origem do sistema, que é tomada como a posição da cintura do feixe, atuará sobre o feixe de laser diminuindo sua convergência, assim quando o mesmo se propagar após a cintura, terá sua divergência, também, diminuída; e quando essa amostra for colocada após a origem do sistema ela fará com que a divergência do feixe aumente.

Figura 3-4 Dependência da Intensidade com a posição para a LT segundo o modelo parabólico, simulado pelo programa Mathematica, com $\theta = 0.01$.

Sendo a amostra localizada em $V = 1$, ou seja, $z = z_c$, a dependência da Intensidade com o tempo, para a LT Parabólica, é mostrada segundo a Figura 3-5.

Figura 3-5 Dependência da Intensidade com o tempo (normalizado) para a LT segundo o modelo parabólico, onde $\theta = 0.01$ e $\nu = 1$.

Para obtermos a máxima sensibilidade, portanto, devemos colocar a amostra a uma distância confocal da cintura do feixe, ou seja: $z = z_c$. Quando isto ocorre, a variação relativa da intensidade do feixe é dada por:

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{P(2,303) \left(\frac{dn}{dT} \right) A}{\lambda k} \quad (3-45)$$

de onde observamos que essa variação relativa da intensidade é proporcional à absorbância A , ou seja:

$$\frac{\Delta I}{I} = 2,303 E A \quad (3-46)$$

onde: E é o fator de aumento.

Da Lei de Beer [38][39], para pequenas absorbâncias, temos que a medida da absorção da luz por transmitância fornece um sinal, cuja variação relativa da intensidade é:

$$\frac{\Delta I}{I} = 2,303 A \quad (3-47)$$

Ao se comparar a variação relativa da intensidade do sinal de LT, com a obtida pela Lei de Beer, podemos obter o aumento de sensibilidade que ocorre, e que pode ser expresso através do Fator de *Enhancement* E , que é dado por:

$$E = \frac{P \left(\frac{dn}{dT} \right)}{\lambda k} \quad (3-48)$$

Observamos que pela expressão de **E**, esse fator de aumento de sensibilidade é função dos parâmetros relacionados com o feixe de laser: potência (**P**) e comprimento de onda (**λ**); e dos parâmetros relacionados à amostra: a variação do índice de refração em relação à temperatura (**dn/dT**) e condutividade térmica (**k**). Assim, ao se utilizar um feixe de laser de mais alta potência, pode-se obter uma maximização de **E** e, conseqüentemente, a medida de absorção com mais alta sensibilidade.

Para amostras sólidas, temos que considerar não apenas a variação do índice de refração, mas também da espessura da amostra, devido à dilatação térmica. Portanto, para amostras sólidas, devemos utilizar a variação de caminho ótico com a temperatura, **ds / dT**, ao invés de **dn / dT**

Valores tabelados (Tabela 1) mostram que os líquidos e gases, em sua maioria, possuem **dn/dT** negativo, devido à diminuição na densidade na região iluminada, e a lente formada provocará divergência do feixe de laser. Para os sólidos podemos ter valores tanto positivos quanto negativos.

Tabela 1 – Propriedades Termo-Ópticas (**dn/dT**, **ds/dT**, **k**) e Fator de *Enhancement* (**E**) pela Potência (**P**) em diversos meios à 293K [43][44][45]

Líquidos				
	k (mW / cm K)	dn/dT (10 ⁻⁵ K ⁻¹) (λ _p = 632.8 nm)	ds/dT (10 ⁻⁶ K ⁻¹) (λ _p = 632.8 nm)	E / P
Água Pura	6.0 [43]	- 9.9 [43]	-	260
Etileno Glicol	2.5 [43]	- 26.0 [43]	-	1640
Etanol	1.67 [44]	- 39 [44]	-	3680 [44]
Sólidos				
BK7	11.1 [43]	0.143 [45]	6.03	9
Silica (SiO ₂)	14 [43]	1.19 [43]	12.1	14
Gases				
Ar	0,26	-0,0927	-	1,35 10 ⁻²
Argônio	0,173	-0,0894	-	1,9 10 ⁻²

3.5 O modelo Aberrante de Lente Térmica Radial

3.5.1 Lente Térmica Radial com Feixe Único

Como já foi visto anteriormente, a LT é gerada quando um feixe de laser Gaussiano no modo TEM_{00} (Figura 3-3) incide sobre uma amostra, a qual absorve essa radiação, se aquecendo e, assim, sofrendo uma distribuição de temperatura que, por consequência, gera uma distribuição em seu índice de refração. Esta distribuição no índice de refração faz com que a amostra passe a agir como uma lente sobre o próprio feixe que a gerou, afetando a intensidade deste, ou seja, o campo do feixe de laser que, ao se propagar através da amostra, pode ser tratado como se sofresse difração e, portanto, ser estudado pela Teoria de difração de Fresnel.

Segundo o Princípio de Huygens-Fresnel, o campo $\mathbf{E}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{d})$ em um ponto no campo distante, $\mathbf{d}$ (Figura 3-6), ou seja, no plano do detector, é dado pela soma infinitesimal das ondas esféricas que emergem de todos os pontos do plano da amostra, e que pode ser descrita pela IDFK dada pela (Equação 2-1):

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{d}, t) = \frac{i}{\lambda} \iint_S \frac{\exp(-i \vec{k} \cdot \vec{d}_{01})}{d_{01}} \cos(\hat{n} \cdot \vec{d}_{01}) \mathbf{E}_S(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, z, t) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{y}_1 \quad (3-49)$$

onde: $\mathbf{E}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{d}, t)$ é o campo no detector, no campo distante; $\mathbf{E}_S(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, z, t)$ o campo no plano da amostra; $\cos(\hat{n} \cdot \vec{d}_{01})$ o fator de obliquidade.

Figura 3-6 Difração entre a LT e o Detector (Figura modificada de [33])

Seguindo as mesmas aproximações feitas no Tópico 2.2, para o estudo do efeito da LT no centro do feixe, a expressão do campo a ser estudado é dado pela Equação (2.2), que em coordenadas polares pode ser escrita como:

$$E(r_2, d, t) = A_1 \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} E_S(r, z, t) \exp\left(-i \frac{\pi r^2}{\lambda d}\right) r dr d\theta \quad (3-50)$$

onde: $A_1 = \frac{i}{\lambda d} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} d\right)$

O feixe de laser pode ser considerado como uma frente de onda esférica com raio de curvatura R e uma distribuição gaussiana de amplitude de campo dada por:

$$E_S(r, z) = A_2 \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \quad (3-51)$$

onde: A_2 é a amplitude do campo e w é o raio do feixe.

Ao passar pela LT, o feixe de laser sofre sua influência, apresentando assim duas variações de caminho óptico, uma relativa ao feixe gaussiano e a outra relativa à própria lente térmica, correspondendo às variações de fase, $\Delta\Phi_G$ e $\Delta\Phi_{LT}$, respectivamente (Figura 3-7 e 3-8).

Figura 3-7 Variação de fase relativa à coordenada radial, que consiste da parte devida ao caminho óptico do feixe gaussiano ($\Delta\Phi_G$) e da parte devida ao gradiente do índice de refração induzido pelo aquecimento da amostra ($\Delta\Phi_{LT}$). (Figura modificada de [33]).

Figura 3-8 Distribuição de fase no plano de entrada da amostra, onde a variação de fase é apenas devida à curvatura de fase do feixe gaussiano. (Figura modificada de [28]).

Pela figura (3-8) temos que:

$$l^2 = R^2 + r^2 \quad (3-52)$$

Fazendo-se uma expansão binomial da raiz quadrada e observando que $R \gg r$, a fase encontrada é:

$$2 \frac{\pi}{\lambda} l = 2 \frac{\pi}{\lambda} R + \frac{\pi r^2}{\lambda R} \quad (3-53)$$

onde: $\Delta\Phi_G = \frac{\pi r^2}{\lambda R}$ é a variação de fase ou atraso de fase devido ao feixe gaussiano.

Ao passar pela LT o feixe sofre um distúrbio traduzido como um atraso de fase adicional ($\Delta\Phi_{LT}$) que está relacionado à variação do caminho óptico do meio.

Sendo l o comprimento da amostra, o comprimento de caminho óptico no centro do feixe é definido por: $S_0 = n_0 l$, e a variação do caminho óptico, que fornece a diferença de fase radial devida à LT é:

$$\Delta S_{LT}(r,t) = l [n(r,t) - n(0,t)] \quad (3-54)$$

Através da Equação (3-15) pode-se calcular $n(r,t)$ e $n(0,t)$ em função da distribuição de temperatura, de forma que:

$$\Delta S_{LT}(r,t) = l \frac{dn}{dT} [\Delta T(r,t) - \Delta T(0,t)] \quad (3-55)$$

Fazendo-se o cálculo da diferença das distribuições de temperatura e usando o valor de θ , dado pela Equação (3-20), a variação de fase devido ao efeito de LT é dada por (Equação (A6-14)):

$$\frac{2\pi}{\lambda} \Delta S_{LT}(r,t) = \frac{\theta}{2} \int_1^{\tau_1} (1 - e^{-2g\tau}) \frac{d\tau}{\tau} \quad (3-56)$$

onde:

$$\tau = \frac{1}{\frac{2t'}{t_c} + 1} \quad (3-57)$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\frac{2t}{t_c} + 1} \quad (3-58)$$

$$g = \left(\frac{r}{w_p} \right)^2 \quad (3-59)$$

Assim, o campo no plano da amostra dado pela Equação (3-51), deve ser modificado para incluir a diferença de fase total, resultando em:

$$E_S(r, z, t) = A_2 \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{r^2}{R} + 2 \Delta S_{LT}(r, t)\right)\right] \quad (3-60)$$

e, portanto, no detector, se apresenta como:

$$E(d, t) = 2\pi A_1 \int_0^\infty A_2 \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{r^2}{R} + 2 \Delta S_{LT}(r, t)\right)\right] \exp\left(-i \frac{\pi}{\lambda} \frac{r^2}{d}\right) r dr \quad (3-61)$$

cujas solução (Anexo 7) é:

$$E(d, t) = \frac{A_3}{1+V^2} \left\{ 1 - \tan^{-1} \left[\frac{2V(\tau_1-1)}{V^2+3+6\tau_1} \right] - \frac{V\theta}{4} \ln \left(\frac{(1+2\tau_1)^2+V^2}{9+V^2} \right) \right\} - \frac{iA_3}{1+V^2} \left\{ V \left[1 - \frac{\theta}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2V(\tau_1-1)}{V^2+3+6\tau_1} \right] \right] + \frac{\theta}{4} \ln \left(\frac{(1+2\tau_1)^2+V^2}{9+V^2} \right) \right\} \quad (3-62)$$

onde: $V = \frac{z}{z_c}$ e $A_3 = \frac{ikA_2}{d} \exp[-i\xi]$ (Equações (A7-12) e (A7-4))

Desprezando-se os termos de maior ordem em θ , a intensidade encontrada é:

$$I(z, t) = \frac{A_3^2}{1+V^2} \left\{ 1 - \frac{\theta}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2V(\tau_1-1)}{V^2+3+6\tau_1} \right] \right\}^2 \quad (3-63)$$

substituindo-se τ_1 , pela Equação (3-58), a intensidade torna-se:

$$I(z,t) = I_0 \left\{ 1 + \frac{\theta}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2V}{V^2 + 3 + (9 + V^2) \left(\frac{t_c}{2t} \right)} \right] \right\}^2 \quad (3-64)$$

onde: $I_0 = \frac{A_3}{1 + V^2}$ a intensidade no instante $t = 0$.

Observamos que a intensidade do feixe é dependente da posição da amostra e do tempo. A dependência com a posição ocorre através de V , logo, ao se variar V , se variará a curvatura da frente de onda na amostra e ocorrerá a variação na Intensidade. Assim, a LT mede diretamente a variação do comprimento de caminho óptico do feixe de prova com relação à variação da temperatura, que fará com que surja uma variação de fase adicional. Desta forma, podemos concluir que, quanto maior for a variação de fase adicional, mais forte é o sinal da LT.

Os experimentos com LT possuem a propriedade de alta sensibilidade e para que se tenha uma maximização do efeito é necessário que se saiba a posição em que a amostra deva ser colocada. Para tanto se deve conhecer a variação fracional total da Intensidade, em relação ao tempo:

$$\frac{[I(0) - I(\infty)]}{I(\infty)} = \frac{1}{1 + \theta \tan^{-1} \left[\frac{2V}{3 + V^2} \right]} - 1 \quad (3-65)$$

Derivando-se essa expressão, em relação à V e igualando-se a zero, encontramos que o sinal é maximizado quando:

$$V = \pm \sqrt{3} \quad (3-66)$$

ou seja, como $V = z / z_c$, temos que: $z = \pm \sqrt{3} z_c$

Na simulação feita com a Equação (3-64), com $t \rightarrow \infty$, obtemos uma curva anti-simétrica (Figura 3-9), característica do efeito de LT e que demonstra a dependência do efeito com a posição da amostra.

Figura 3-9 A dependência da Intensidade com a posição normalizada, para o modelo de LT aberrante de feixe único, onde $\theta = 0.01$.

Sendo a amostra localizada em $z = \sqrt{3} z_c$, a Equação (3-61), simulada na Figura (3-10), mostra a existência da dependência temporal da formação da LT.

Figura 3-10 Dependência da Intensidade com o tempo normalizado para a LT segundo o modelo aberrante de Feixe único, onde $\theta = 0.01$ e $v \cong 1,73$.

3.5.2 Comparação entre os modelos de Lente Térmica Parabólico e Aberrante de Feixe Único

Neste estudo da Teoria de Lente Térmica Radial, propusemos uma comparação entre os modelos de Lente Térmica Parabólico e o Aberrante.

Uma comparação que realizamos entre os modelos de LT Parabólico e Aberrante para feixe único, pode ser vista na Figura (3-11), onde se observa a dependência da Intensidade ($I(\infty)/I(0)$) com a posição normalizada (z/z_c), e de onde conclui-se que o modelo parabólico mostra uma variação na intensidade maior que o modelo aberrante.

Figura 3-11 Comparação entre as curvas de LT parabólica e aberrante de feixe único dependente com a posição, onde $\theta = 0,01$.

Outra comparação possível se faz em relação à dependência da Intensidade ($I(t)/I(0)$) com o tempo (t), para os modelos de lente térmica parabólico e aberrante de feixe único (Figura 3-12). Nesta comparação, observamos que o modelo parabólico mostra uma variação na intensidade maior que o modelo aberrante.

Figura 3-12 Comparação entre as curvas de LT parabólica e aberrante de feixe único dependente com o tempo, onde $\theta = 0.01$, $V_{\text{Parabólico}} = 1$ e $V_{\text{Aberrante}} = 1,73$

Na Figura 3-13, foi feita uma simulação, onde foi gerado o modelo aberrante e foi ajustado pelo modelo parabólico. Verificamos que, para que o modelo parabólico se ajustasse ao aberrante, dois dados foram de interesse, o valor de t_c que observamos ser 59% maior que o aberrante e o valor da potência da LT (θ) que observamos ser 46% menor, assim, com esses dados podemos dizer que o erro gerado pelo modelo parabólico, em relação ao aberrante, é grande.

Figura 3-13 Simulação de ajuste do modelo de LT parabólica pelo aberrante.

Através dessas comparações podemos observar que o modelo aberrante de feixe único se mostra muito mais sensível que o modelo parabólico, levando-nos a observar que os dados, na literatura, que foram obtidos através do modelo parabólico devem ser revistos.

3.5.3 Modelo Aberrante de Lente Térmica com Dois Feixes

O efeito de LT pode ser observado segundo um arranjo experimental em que se utiliza dois feixes de lasers gaussianos no modo TEM₀₀. Um deles, o denominado feixe de excitação, é o responsável pelo aquecimento da amostra (Figura 3-14), e assim pela distribuição de temperatura que ela sofre e conseqüentemente pelo surgimento de uma distribuição no índice de refração. Esta distribuição no índice de refração faz com que a amostra passe a se comportar como uma lente fina sobre um segundo feixe de laser, denominado feixe de prova, que tem sua distribuição de intensidade afetada e que é observada no detector.

Figura 3-14 Feixes de lasers de excitação e de prova passando por uma amostra que sofre o efeito de LT, agindo sobre o feixe de prova.

Com desenvolvimento análogo ao item 3.2, a distribuição de temperatura devida ao feixe de excitação é dada por (Equação (A5-7)):

$$\Delta T(r, t) = \frac{2 P_e \alpha D}{\pi k} \int_0^t \exp\left(\frac{-2 r^2}{8 D t' + w_e^2}\right) \frac{dt'}{8 D t' + w_e^2} \quad (3-67)$$

onde o índice e, na potência e no raio do feixe, corresponde ao feixe de excitação.

Essa distribuição de temperatura acarretará uma variação de fase, que o feixe de prova sofre devido ao efeito da LT, e que é dada por (Equação (A6-4)):

$$\frac{2\pi}{\lambda_p} \Delta S_{LT}(r, t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} l \frac{dn}{dT} [\Delta T(r, t) - \Delta T(0, t)] \quad (3-68)$$

cujos resultados são (Equação (A6-13)) :

$$\frac{2\pi}{\lambda_p} \Delta S_{LT}(g, t) = \frac{\theta}{2} \int_1^\tau [1 - \exp(-2mg\tau)] \frac{d\tau}{\tau} \quad (3-69)$$

onde o índice p refere-se ao feixe de prova.

Mas, o feixe de prova, também está submetido à variação de fase, $\Delta\Phi_G$, devida ao feixe gaussiano, que é dada pela Equação (3-53)

$$2 \frac{\pi}{\lambda_p} l = 2 \frac{\pi}{\lambda_p} R_p + \frac{\pi r^2}{\lambda_p R_p} \quad (3-70)$$

onde: $\frac{\pi r^2}{\lambda_p R_p}$ é o atraso de fase.

Assim, o campo do feixe de prova, no plano da amostra, é dado por:

$$E_S(r, t) = A_2 \exp\left(-\frac{r^2}{w_p^2}\right) \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda_p} \left(\frac{r^2}{R} + 2 \Delta S_{LT}(r, t)\right)\right] \quad (3-71)$$

Substituindo a Equação (3-71) na (3-50), o campo no plano detector é:

$$E(z, d, t) = A_3 \int_0^\infty \exp\left[-ik \frac{r^2}{2d}\right] \exp\left[-\frac{r^2}{w_p^2}\right] \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda_p} \left(\frac{r^2}{R} + 2 \Delta S_{LT}(r, t)\right)\right] r dr \quad (3-72)$$

que pode ser reescrito em termos da variável $g = \left(\frac{r}{w_p}\right)^2$, resultando:

$$E(z, d, t) = A_3 \int_0^\infty \exp\left\{-g - i \left[\frac{\pi w_p^2 g}{\lambda_p} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{d}\right) + 2 \frac{\pi}{\lambda_p} \Delta S_{LT}(g, t) \right]\right\} dg \quad (3-73)$$

Utilizando as Equações (2-17) e (2-18), e fazendo-se a mudança de variável:

$$V = \frac{z}{z_c} \quad (3-74)$$

Encontramos a seguinte identidade para o primeiro termo da fase do campo, considerando-se que $d \gg z$:

$$ig \left[\frac{\pi w_p^2}{\lambda_p} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{d} \right) \right] = ig V \quad (3-75)$$

Desta forma, o campo no plano detector, torna-se:

$$E(z, d, t) = A_3 \int_0^\infty \exp(-g - ig V) \exp\left(-i 2 \frac{\pi}{\lambda_p} \Delta S_{LT}(g, t)\right) dg \quad (3-76)$$

Em experimentos de LT, a variação de fase satisfaz a relação: $2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta S_{LT}(g, t) \ll 1$; assim, podemos efetuar a aproximação:

$$\exp\left(-i 2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta S_{LT}(g, t)\right) \approx 1 - i 2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta S_{LT}(g, t) \quad (3-77)$$

Desta forma, o campo no plano detector torna-se:

$$E(z, d, t) = A_3 \int_0^\infty \left[1 - i 2 \frac{\pi}{\lambda_p} \Delta S_{LT}(g, t) \right] \exp[-(1 + i V)g] dg \quad (3-78)$$

Substituindo-se a variação de fase devida à LT, $\Phi_{LT}(g, t)$, dada pela Equação (3-69), e usando-se a variável m , definida como:

$$m = \left(\frac{w_p}{w_e} \right)^2 \quad (3-79)$$

onde m fornece a razão quadrática entre as cinturas do feixe de prova e de excitação, o campo será dado por:

$$E(z, d, t) = A_3 \int_0^\infty \exp(-g - ig V) \left\{ 1 - i \frac{\theta}{2} \int_1^\tau (1 - \exp(-2gm\tau)) \frac{d\tau}{\tau} \right\} dg \quad (3-80)$$

que integrado primeiro em g e depois em τ (Anexo 7), resulta em:

$$\begin{aligned}
E_P(z, d, t) = & \frac{A_3}{1+V^2} \left\{ 1 - \frac{\theta}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{2mV(\tau_1 - 1)}{2m\tau_1(1+2m) + [1+2m+V^2]} \right] - \right. \\
& + \frac{V\theta}{4} \ln \left[\frac{V^2 + [1+2m\tau_1]^2}{(1+2m)^2 + V^2} \right] \left. \right\} - i \frac{A_2}{1+V^2} \left\{ \frac{\theta}{4} \ln \left[\frac{V^2 + [1+2m\tau_1]^2}{(1+2m)^2 + V^2} \right] + \right. \\
& + V \left[1 - \frac{\theta}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{2mV(\tau_1 - 1)}{2m\tau_1(1+2m) + [1+2m+V^2]} \right] \right] \left. \right\}
\end{aligned} \quad (3-81)$$

Como $I = |E|^2$, desprezando os termos de ordem maior que θ^2 , a Intensidade do feixe de prova no detector é dada por:

$$I(z, d, t) = I_0 \left\{ 1 - \frac{\theta}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{2mV(\tau_1 - 1)}{2m\tau_1(1+2m) + [1+2m+V^2]} \right] \right\}^2 \quad (3-82)$$

Substituindo-se τ_1 (Equação (3-58)) a intensidade torna-se:

$$I(z, d, t) = I_0 \left\{ 1 + \frac{\theta}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{2mV}{\left[(1+2m)^2 + V^2 \right] \frac{t_c}{2t} + [1+2m+V^2]} \right] \right\}^2 \quad (3-83)$$

Desta forma a variação fracional da intensidade com relação ao tempo, é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{[I(t) - I(\infty)]}{I(\infty)} = & \frac{1 + \theta \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{2mV}{\left[(1+2m)^2 + V^2 \right] \frac{t_c}{2t} + [1+2m+V^2]} \right]}{1 + \theta \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{2mV}{1+2m+V^2} \right]} - 1
\end{aligned} \quad (3-84)$$

A variação fracional total da Intensidade pode ser encontrada fazendo-se $t = 0$, assim:

$$\frac{[I(0) - I(\infty)]}{I(\infty)} = \frac{1}{1 + \theta \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{2mV}{1+2m+V^2} \right]} - 1 \quad (3-85)$$

Os experimentos de LT possuem a propriedade de alta sensibilidade e para que se tenha uma maximização do efeito é necessário que se saiba a posição em que a amostra deva ser colocada. Para tanto, se deve derivar a Equação (3-85) em relação à V e igualar a zero, como foi feito no caso de um único feixe. Ao se fazer isso encontramos que o sinal é maximizado quando:

$$V = \pm \sqrt{1 + 2m} \quad (3-86)$$

Como V dado pela Equação (3-74), temos que: $z = \pm \sqrt{1 + 2m} z_c$

Observamos que para o caso de $m = 1$, onde temos o feixe de prova e de excitação com raios iguais, $z = \pm \sqrt{3} z_c$, recaindo no caso do problema de feixe único.

Na simulação feita com a Equação (3-83), obtivemos uma curva anti-simétrica (Figura (3-15)), característica do efeito de LT e que demonstra a dependência do efeito com a posição.

Figura 3-15 A dependência da Intensidade com a posição, para a LT, segundo o modelo aberrante de dois feixes, onde: $\theta = 0,01$, $m = 46$

Sendo a amostra localizada em $z = \sqrt{1 + 2m} z_c$, a Equação (3-84), simulada na Figura (3-16), mostra a existência da dependência temporal da formação da LT.

Figura 3-16 A dependência da Intensidade com o tempo para a LT, segundo o modelo aberrante de feixe duplo, $\theta = 0,01$, $m = 4$, $v = 1,73$.

TEORIA DA LENTE TÉRMICA RADIAL

<i>LENTE CONVERGENTE</i>	<i>LENTE DIVERGENTE</i>

Fotos realizadas e cedidas pelo Dr. Sandro Marcio Lima - UFMT

(Fotos Ilustrativas sobre o Capítulo)

Capítulo 4 Lente Térmica Radial no Regime de θ grande

No desenvolvimento dos modelos de Lente Térmica Radial de feixe único e de dois feixes, estudados anteriormente, foi feita uma aproximação para o elemento de fase, $[\exp(-i \Delta\Phi_{LT}) \sim 1 - i \Delta\Phi_{LT}]$, onde $\Delta\Phi_{LT} \propto \theta$, fazendo com que a intensidade encontrada fosse válida apenas para valores de $\theta \ll 0,1$. Neste capítulo vamos estudar esses modelos sem levar em conta essa aproximação, de onde verificaremos que para valores de $\theta \gg 0,1$ as aberrações aparecem, levando a uma modificação da intensidade central, revelando assim, o surgimento de anéis.

4.1 AutoModulação Transversal de Fase

No capítulo anterior vimos que, o efeito de LT ocorre quando uma amostra, ao ser iluminada por um feixe de laser Gaussiano no modo TEM₀₀, absorve essa radiação, gerando calor que se difunde radialmente e ocasiona uma variação no índice de refração da amostra, que passa a ter características de lente, distorcendo a frente de onda e modificando a divergência do feixe de prova.

A LT formada, possui uma distância focal, $F(t)$, que no caso estacionário ($t = \infty$) (Equação(3-22)), depende da variação do índice de refração em relação à temperatura, dn/dT . Assim, quando esse coeficiente for positivo, a lente terá foco positivo (lente convergente), implicando que a diferença de caminho óptico é maior na região central, em relação às bordas, e assim, o feixe de laser ao passar pelo meio sofrerá o efeito de auto-focalização. Mas, quando dn/dT for negativo, a lente terá foco negativo (lente divergente), logo, a diferença de caminho óptico será maior nas bordas, e o feixe ao passar pelo meio sofrerá o efeito de auto-defocalização. Desta forma, se esta variação de fase for grande ($\theta \gg 1$), será a responsável pelo aparecimento de anéis de interferência no padrão da luz transmitida.

O efeito de auto-focalização e auto-defocalização térmica é observado na variação da divergência e na distribuição de intensidade do feixe, mas apenas no campo distante, visto que o diâmetro do feixe não varia significativamente na saída do meio. E conforme ocorra uma elevação na potência de excitação, a aberração devida à LT começa a surgir e o número de anéis aumenta, conjuntamente. Mas a elevação dessa

potência acarreta no aumento de θ (potência da LT) (Equação (3-20)), fazendo com que a aproximação $[\exp(-i \Delta\Phi_{LT}) \sim 1 - i \Delta\Phi_{LT}]$ (Equação(3-77)) utilizada não seja mais válida.

Para obtermos as informações do efeito de Automodulação de Fase no plano de observação, vamos utilizar a IDFK dada pela Equação (A8-3):

$$E(r_2) = A_3 \int_0^\infty J_0\left(\frac{k r r_2}{d}\right) \exp\left[-\frac{r^2}{w_p^2}\right] \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{r^2}{d} + \frac{r^2}{R_p}\right) \exp(-i \Delta\Phi_{LT}(r, t))\right] r dr \quad (4-1)$$

onde a variação de fase devida à LT, $\Delta\Phi_{LT}$, (Equação (A8-9)) é dada por:

$$\Delta\Phi_{LT}(g, t) = \frac{\theta}{2} \left(\text{Ei}(-2\rho^2 m \tau) + \text{Ei}(-2\rho^2 m) + \ln(\tau) \right) \quad (4-2)$$

Assim, o campo, sem aproximação, a ser estudado é (A8-10):

$$E(\rho_2) = A_4 \int_0^\infty J_0\left(\frac{k w_p \rho_2}{d} \rho\right) \exp\left[-\rho^2(1 + i V) - i \frac{\theta}{2} \left(\text{Ei}(-2\rho^2 m \tau) + \text{Ei}(-2\rho^2 m) + \ln(\tau) \right)\right] \rho d\rho \quad (4-3)$$

e a intensidade obtida no detetor será:

$$I(r_2) = |E(r_2)|^2 \quad (4-4)$$

Um primeiro ponto a ser analisado é quanto ao limite de validade da aproximação feita para o termo de fase devida à LT. Para isso vamos fazer o estudo da Intensidade, no estado estacionário ($t \rightarrow \infty$), e no centro do feixe ($r_2 = 0$).

A Figura 4.1 mostra o resultado da simulação feita da Intensidade normalizada versus θ (potência da LT). Nela temos a comparação entre as curvas obtidas para a intensidade calculada com e sem a aproximação para o termo da fase. Essa simulação foi feita para o arranjo experimental de LT de feixe único ($m=1$) e de dois feixes ($m=46$), considerando duas posições $v = \pm 1,73$.

Figura 4.1 Simulação para o centro do feixe, da Intensidade normalizada em função de θ , para o arranjo de feixe único ($m=1$) e dois feixes ($m=46$), com $v = \pm 1,73$.

Analisando a curva para $m = 1$ e $v = 1,73$ constatamos que o resultado com aproximação reproduz o resultado sem aproximação, com um erro menor que 1% se $\theta < 0,5$. A diferença é menor que 10% para $\theta < 1,5$. Analogamente, para os outros casos ilustrados na Figura 4.1, a Tabela 2 mostra o intervalo de validade da aproximação $\theta(1\%)$ e $\theta(10\%)$. Observamos que quando se está no arranjo de feixe único e a amostra colocada em $v = 1,73$, os valores de θ são maiores, tanto para a aproximação de 1% como para 10%, em relação aos valores obtidos quando $v = -1,73$. E, o mesmo ocorre para o arranjo de dois feixes.

Tabela 2 Análise dos valores encontrados para θ na simulação para o arranjo de LT de feixe único e de dois feixes

	m=1		m=46	
	v = 1,73	v = - 1,73	v = 1,73	v = - 1,73
$\theta (<1\%)$	0,50	0,30	0,70	0,20
$\theta (<10\%)$	1,5	0,80	1,3	0,50

Tomando-se por base esses valores, foi feita uma outra simulação, para verificar o que ocorre com a Intensidade do sinal em relação à posição. Nessa simulação, que foi obtida através do campo dado pela Equação (4-3), tomando-se $t \rightarrow \infty$. Obtivemos curvas anti-simétricas (Figura 4-2), característica do efeito de LT e que demonstra a dependência do efeito com a posição da amostra. Verifica-se uma concordância com os dados obtidos na comparação anterior, observando os valores de θ obtidos na Tabela 2.

Figura 4-2 Simulação da Intensidade pela posição $V = z/z_c$, comparando-se os valores obtidos com e sem aproximação na expressão da Intensidade, para valores diferentes de θ , tomando-se por base os limites de validade da aproximação (Tabela 2), para arranjos experimentais de um feixe e de dois feixes. As curvas tracejadas representam a expressão com aproximação e a linha reta, sem aproximação.

Observamos nas curvas da Figura 4-2, que a forma da curva começa a se diferenciar entre a obtida pela expressão com e sem aproximação conforme se aumenta θ , ou seja a potência do laser de excitação, gerando um deslocamento dessa curva.

A dependência temporal da formação da LT de feixe único e de dois feixes pode ser observada na Figura 4-3, levando-se em consideração o limite de validade visto na Tabela 2. Há uma concordância com os dados obtidos nas comparações anteriores, observando os valores de θ da Tabela 2.

Figura 4-3 Dependência da Intensidade com o tempo para a LT de feixe único e de dois feixes, onde $v \cong 1,73$, onde a curva tracejada é obtida através da expressão com aproximação e a curva cheia com a expressão sem aproximação.

4.1.1 Formação de Anéis

Como visto anteriormente, quando não levamos em consideração a aproximação para o elemento de fase, a natureza aberrante da LT se revela. Com isso, na observação no campo distante há o surgimento de anéis.

As aberrações que surgem na LT podem ser comparadas ao efeito da aberração esférica em uma lente fina. Essas aberrações são consideradas no termo de fase $\Delta\Phi_{LT}(\mathbf{r})$, que segundo a Equação (A6-4), observamos que ele é proporcional à variação de Temperatura $\Delta T(\mathbf{r})$, assim, fazendo-se a expansão:

$$\Delta\Phi_{LT}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} (\mathbf{r}/\mathbf{w})^2 + \mathbf{c} (\mathbf{r}/\mathbf{w})^4 + \mathbf{d} (\mathbf{r}/\mathbf{w})^6 + \dots (\mathbf{r}/\mathbf{w})^n \quad (4-5)$$

onde, o termo de segunda ordem, desta expansão, introduzirá apenas uma alteração na curvatura do feixe. Mas como no caso da aberração esférica (Tópico 2.3.4), as aberrações aparecem devido aos termos de ordem superiores.

No capítulo anterior, vimos que a aproximação da LT por uma lente fina, equivale a tomar apenas o termo em $\mathbf{r}^2$ na expansão feita na Equação (4-5), o que é muito deficiente. Ou seja, o modelo parabólico não consegue descrever muito bem a amplitude do sinal, bem como a resposta transiente da LT.

Tomando-se o modelo aberrante, e utilizando-se a Equação (4-3) para o campo, onde não se tem a expansão para o elemento de fase, no estudo da distribuição de intensidade transversal, pelo raio em diferentes $\mathbf{t}/\mathbf{t}_c$, após o aquecimento ter se iniciado, é possível se observar o surgimento de anéis. Este fato pode ser observado na Figura 4-4(a), onde se fez uma simulação para um experimento de LT de feixe único e na Figura 4-4(b), onde se fez uma simulação para o experimento de dois feixes. Observamos que o tempo necessário para a formação desses anéis, para o experimento de feixe único, é muito menor que para o de dois feixes.

Figura 4.4(a) Simulação da Intensidade em função da posição para diferentes tempos, após o início do aquecimento da amostra, tomando-se $v = 1,73$, $\theta = 10$, $m = 1$

Figura 4.4(b) Simulação da Intensidade em função da posição para diferentes tempos, após o início do aquecimento da amostra, tomando-se $v = \pm 1,73$, $\theta = 10$, $m = 46$

4.2 Módulo Experimental

Alguns experimentos foram realizados, com o intuito de se observar a formação dos anéis.

O arranjo experimental utilizado (Figura 4-5) foi o de LT de dois feixes contrapropagantes, no modo descasado.

Figura 4.5 Arranjo experimental utilizado para a LT utilizada para se fazer as fotos dos anéis

Para esse arranjo, o feixe de excitação utilizado foi um laser de Argônio ($\lambda_e = 514,5\text{nm}$) e para o feixe de prova um laser de HeNe ($\lambda_p = 632,8\text{nm}$), cujos parâmetros experimentais encontram-se na Tabela 3.

Tabela 3. Parâmetros experimentais da LT utilizada para obtenção dos dados experimentais.

z_{op} (distância focal do feixe de prova)	20,50 cm
z_{oe} (distância focal do feixe de excitação)	5,1 cm
w_{op} (raio do feixe de prova na cintura)	100 μm
w_{oe} (raio do feixe de excitação na cintura)	34,35 μm
$m = (w_p / w_e)^2$	46
z_1	11,8 cm
$V = z/z_{cp}$	2,7

Para a verificação da formação dos anéis, diversas potências foram utilizadas em dois materiais, Silicato com Ferro (Soda-Lime) cujo valor do sinal normalizado pela potência é de $\theta / P = 8 \text{ W}^{-1}$, e zblan (0,5% Co) onde $\theta / P = 2,32 \text{ W}^{-1}$.

A curva da amplitude do sinal de LT pela potência (Figura 4-6), nos fornece a região de linearidade existente entre o sinal e a potência aplicada. Para o Silicato com Ferro, observamos que o sinal se mantém linear até uma potência de **300mW**, o que concorda com a Figura (4-1(c)), onde se observa que para esse sinal de $\sim 0,7$ corresponde naquela figura a um $\theta \sim 0,8$ que está no limite de validade para uma boa concordância entre as expressões com e sem a aproximação na fase.

Figura 4.6 Amplitude do sinal de LT (em módulo) pela Potência, para os materiais Soda-Lime e Zblan(Co)

A Figura 4-7 nos mostra a dependência temporal da Intensidade para os dois materiais utilizados, onde na parte (a) temos um material (soda-lime) de $ds/dT > 0$, que foi analisado na configuração da Figura (4-6), com $V = 2,3$ e na parte (b) um material (zblan) de $ds/dT < 0$, na mesma configuração.

Figura 4.7 Dependência da Intensidade com o tempo para a Soda-Lime e zblan.

Os padrões de formação de anéis podem ser vistos nas Figuras 4.9 e 4.10 onde se observa a formação de uma lente Divergente e Convergente, respectivamente. Esses padrões foram obtidos através de um filme com o arranjo experimental mostrado na Figura 4.5. Esse filme foi trabalhado segundo o programa *Virtual Dub*, onde obtivemos as fotos quadro a quadro. Esses padrões mostram concordância com os obtidos na simulação, como podem ser vistos na Figura 4.8.

Figura 4.8 Intensidade versus y_2 do Padrão de Anéis, onde $v = 2,7$, $\theta = -4,8$ e $m=46$. Para a parte (a) $t/t_c \cong 0.347$ e para (b) $t/t_c \cong 277$. A curva em preto é o padrão obtido na foto e a em vermelho o padrão obtido pela simulação

Figura 4.9 Fotos do Padrão de Anéis cujo filme foi realizado com câmara digital Sony *Digital Still Camera DSC-F707*, e o gráfico da Intensidade pela distância, na formação de uma lente Divergente para diferentes tempos.

Figura 4.10 Fotos do Padrão de Anéis cujo filme foi realizado com câmara digital Sony *Digital Still Camera DSC-F707*, e o gráfico da Intensidade pela distância, na formação de uma lente Convergente para diferentes tempos.

Capítulo 5 Conclusão e Perspectivas

Neste trabalho foi feito o estudo da Espectrometria de Lente Térmica, visto a sua relevância para a caracterização de materiais e com a qual o grupo tem larga experiência.

Iniciamos, no Capítulo 2, uma análise discutindo o fenômeno de difração, obtendo através do uso da IDFK a expressão para a Intensidade no campo de observação dos padrões de difração de alguns elementos ópticos. Foi discutido os regimes de campo próximo (Fresnel) e campo distante (Fraunhofer), exemplificando com aberturas e obstáculos retangulares e circulares, onde pudemos, também, observar o fenômeno do Ponto de Poisson, fenômeno esse de interesse histórico, por ter sido um dos experimentos que comprovaram a natureza ondulatória da luz. Os perfis de intensidade tiveram suas simulações realizadas através do programa *Mathematica*. Na parte experimental, para a visualização do fenômeno da difração, propusemos um arranjo experimental, onde usamos apenas um laser de diodo de baixo custo e o elemento difrator. Este laser foi utilizado sem a lente colimadora, fornecendo, assim, uma frente de onda muito apropriada para o estudo de difração de Fresnel. Tradicionalmente, as demonstrações para esse regime de campo próximo são muito complexas exigindo, por exemplo, a filtragem espacial de um laser de HeNe, onde se necessita de objetivas de microscópio, suportes com ajuste x-y, projeção em longas distâncias, etc. Desta forma, consideramos que a contribuição dada neste tópico foi a montagem apresentada, que é original e possui grande aplicação didática. Por exemplo, ela nos permite demonstrar a evolução da sombra nítida para o regime de difração.

No Capítulo 3 discutimos os modelos teóricos tradicionalmente usados no tratamento da LT, enfatizando principalmente os modelos parabólico e aberrante. No modelo parabólico, obtido através da matrizes de raios, a LT é aproximada por um perfil de fase parabólico (termo em r^2) desprezando os termos de ordem superior. Enquanto que o modelo aberrante, muito mais complexo, foi obtido utilizando a IDFK. Reproduzimos os resultados analíticos obtidos no caso de feixe único por Sheldon [28] e para o feixe duplo por Shen et.al [29]. Por meio desse estudo, a colaboração por nós dada foi mostrar que a aproximação usada no modelo parabólico não é satisfatória mesmo para baixos valores de θ . Na comparação que fizemos, os resultados obtidos pelo modelo parabólico estão em grande desacordo ($>50\%$) com o modelo aberrante,

tanto no valor de t_c como em θ . Assim, observamos que dados da literatura obtidos na década de 70, através do modelo parabólico, e que ainda são utilizados, merecem ser revistos.

Levando-se em consideração o crescente interesse em lasers de alta potência, no Capítulo 4, fizemos um estudo da LT, segundo o modelo aberrante, no caso em que o elemento de fase devido à LT (θ) é grande, ou seja, a aproximação $[\exp(i\theta) \sim 1 + i\theta]$ deixa de ser válida. Neste caso, os cálculos da IDFK precisam ser feitos numericamente pois não se conhece ainda uma expressão analítica para o problema. Inicialmente averiguamos o intervalo de validade do regime de θ pequeno, onde o sinal de LT é proporcional a θ . Depois apresentamos cálculos do perfil de intensidade do feixe de prova, $I(r_2)$, no campo distante. Observamos o aparecimento de anéis neste perfil, no caso $\theta \gg 1$. Finalmente mostramos alguns resultados experimentais obtidos com materiais com $ds/dT > 0$ e $ds/dT < 0$ (vidros ZBLAN e soda lime, respectivamente).

A partir deste trabalho alguns problemas de interesse surgiram. Primeiro um estudo para se obter uma expressão analítica para a L.T. em regime de θ grande, analisando melhor o aspecto dos anéis que surgem. Outro trabalho de interesse está relacionado ao desenvolvimento de um modelo para L.T. Linear, que poderá ser utilizada para o estudo de materiais uniaxiais. Para ela, primeiro se deve estabelecer uma expressão analítica para a Temperatura, onde devemos obter a função de Green que represente apropriadamente a temperatura da fonte e, a seguir, com o uso da IDFK, encontrar uma expressão analítica para a Intensidade.

Anexo 1 - Integral de Difração de Fresnel-Kirchhoff em Coordenadas Cilíndricas

A IDFK, em coordenadas cartesianas, é dada por (Equação (2-2)):

$$E(x_2, y_2) = \frac{i}{\lambda} \iint_S \frac{\exp(-i \vec{k} \cdot \vec{d}_{01})}{d_{01}} E_S(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (A1-1)$$

Para a resolução desta integral, observamos que se a distância $\mathbf{d}$ é muito maior que a maior dimensão linear da abertura Σ (Figura 2-1), ou seja, $\mathbf{d}_{01} \gg \mathbf{r}$, para o denominador podemos fazer a aproximação $\mathbf{d}_{01} \approx \mathbf{d}$. Mas, para o expoente esta aproximação não é mais válida, visto que $\mathbf{k}$ é muito grande ($\mathbf{k} \sim 10^5 \text{ cm}^{-1}$). Desta forma, usamos a aproximação de Fresnel para o campo próximo:

$$d_{01} = \left[d^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right]^{1/2} = d \left[1 + \left(\frac{x_2 - x_1}{d} \right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{d} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (A1-2)$$

$$\text{Pela expansão em série de Taylor: } (1 + x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots \quad (A1-3)$$

$$d_{01} = d \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x_2 - x_1}{d} \right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{d} \right)^2 \right] \right\} = d \left[1 + \frac{1}{2d^2} (x_2^2 + y_2^2 + x_1^2 + y_1^2 - 2x_2x_1 - 2y_2y_1) \right] \quad (A1-4)$$

Substituindo (A1-4) no expoente de (A1-1), obtemos a IDFK para o campo próximo, ou seja, para a difração de Fresnel:

$$E(x_2, y_2) = \frac{i}{\lambda d} \exp[-i \xi] \iint_S \exp \left[-ikd \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2d^2} - \frac{x_2x_1 + y_2y_1}{d^2} \right) \right] E_S(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (A1-5)$$

$$\text{onde: } \xi = kd \left(1 + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2d^2} \right)$$

Se o interesse for estudar o que ocorre no campo distante, devemos utilizar a aproximação de Fraunhofer, onde $\mathbf{d} \gg \mathbf{r}_1$, e a expressão (A1-4) torna-se:

$$\mathbf{d}_{01} = \mathbf{d} \left(- \frac{\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_1 + y_2 y_1}{d^2} \right) \quad (\text{A1-6})$$

e a IDFK para o campo distante, ou seja, para a difração de Fraunhofer é dada por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_2, y_2) = \frac{i}{\lambda d} \exp[-i\xi] \iint_S \exp \left[i \mathbf{k} \left(\frac{\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_1 + y_2 y_1}{d} \right) \right] \mathbf{E}_S(\mathbf{x}_1, y_1) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{y}_1 \quad (\text{A1-7})$$

Nos problemas em que existe simetria cilíndrica, ou circular, onde a amplitude do campo incidente em $\mathbf{S}$ é dada por $\mathbf{E}_S(\mathbf{x}_1, y_1) = \mathbf{E}_S(\mathbf{r}_1)$, com $\mathbf{r}_1^2 = \mathbf{x}_1^2 + y_1^2$ e em $\mathbf{P}$ é dado por $\mathbf{E}(\mathbf{x}_2, y_2) = \mathbf{E}(\mathbf{r}_2)$, com $\mathbf{r}_2^2 = \mathbf{x}_2^2 + y_2^2$, devemos utilizar a equação (A-1) em coordenadas cilíndricas.

As coordenadas cartesianas se relacionam com as coordenadas cilíndricas através de:

$$x_1 = r_1 \cos \phi \Rightarrow x_1^2 = r_1^2 \cos^2 \phi \rightarrow dx_1 = \cos \phi dr_1 - r_1 \sin \phi d\phi$$

$$y_1 = r_1 \sin \phi \Rightarrow y_1^2 = r_1^2 \sin^2 \phi \rightarrow dy_1 = \sin \phi dr_1 + r_1 \cos \phi d\phi$$

$$x_2 = r_2 \cos \theta$$

$$y_2 = r_2 \sin \theta$$

$$x_1^2 + y_1^2 = r_1^2 \cos^2 \phi + r_1^2 \sin^2 \phi = r_1^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = r_1^2$$

$$x_2^2 + y_2^2 = r_2^2 \cos^2 \theta + r_2^2 \sin^2 \theta = r_2^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r_2^2$$

$$\begin{aligned} x_1 x_2 + y_1 y_2 &= r_1 \cos \phi r_2 \cos \theta + r_1 \sin \phi r_2 \sin \theta = \\ &= r_1 r_2 (\cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta) = \\ &= r_1 r_2 \cos(\phi - \theta) \end{aligned}$$

A equação (A1-5) torna-se, assim:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, \theta) = \frac{i}{\lambda d} \exp[-i\xi] \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp \left[-i \mathbf{k} d \left(\frac{r_1^2}{2d^2} - \frac{r_1 r_2 \cos(\phi - \theta)}{d^2} \right) \right] \mathbf{E}_S(r_1, \phi) r_1 dr_1 d\phi \quad (\text{A1-8})$$

Podemos reescrever o campo como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, \theta) = \frac{i}{\lambda d} \exp[-i\xi] \int_0^\infty \left[\int_0^{2\pi} \exp \left[-i \mathbf{k} d \frac{r_1 r_2 \cos(\phi - \theta)}{d^2} \right] d\phi \right] \exp \left[-i \mathbf{k} \frac{r_1^2}{2d} \right] \mathbf{E}_S(r_1, \phi) r_1 dr_1 \quad (\text{A1-9})$$

Fazendo a seguinte substituição na integral em ϕ :

$$u = \frac{kr_1 r_2}{d} \text{ e } v = \phi - \theta \Rightarrow dv = d\phi$$

obtemos, para essa integral:

$$\Phi = \left[\int_0^{2\pi} \exp[-i u \cos v] dv \right] \quad (\text{A1-10})$$

que corresponde à função de Bessel de ordem zero, $J_0(u)$, multiplicada por 2π :

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[-i u \cos v] dv \quad (\text{A1-11})$$

A equação (A1-10), então, torna-se:

$$\Phi = 2\pi J_0(u)$$

Assim (A1-9) pode ser escrita como:

$$E(r_2) = \frac{i}{\lambda d} \exp[-i \xi] \int_0^\infty \exp\left[-ik \frac{r_1^2}{2d}\right] 2\pi J_0(u) E_S(r_1) r_1 dr_1 \quad (\text{A1-12})$$

Como k é definido por: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

então:

$$E(r_2) = \frac{ik}{d} \exp[-i \xi] \int_0^\infty \exp\left[-ik \frac{r_1^2}{2d}\right] J_0\left(\frac{kr_1 r_2}{d}\right) E_S(r_1) r_1 dr_1 \quad (\text{A1-13})$$

A equação (A1-13) é a IDFK em Coordenadas Cilíndricas para a aproximação de Fresnel.

Se o interesse estiver no campo distante, difração de Fraunhofer, devemos utilizar a Equação (A1-7), que ao se usar as transformações para coordenadas cilíndricas pode ser escrita como:

$$E(r_2) = \frac{ik}{d} \exp(-i \xi) \int_0^\infty J_0(u) E_S(r_1) r_1 dr_1 \quad (\text{A1-14})$$

que é a IDFK em Coordenadas Cilíndricas, para a aproximação de Fraunhofer.

Anexo 2 – Campo através de uma Abertura Retangular no plano de observação

No estudo da Abertura Retangular (Figura 2-4), de comprimento $2b$ e largura $2a$, vamos utilizar a IDFK em coordenadas cartesianas, que é dada por (Equação (2-2)):

$$E(x_2, y_2) = \frac{i}{\lambda} \iint_S \frac{\exp(-i k d_{01})}{d_{01}} E_S(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (A2-1)$$

Como visto no Anexo 1, se o estudo for no campo distante – difração de Fraunhofer, a IDFK é dada por:

$$E(x_2, y_2) = \frac{i}{\lambda d} \exp[-i \xi] \iint_S \exp\left[ik \left(\frac{x_2 x_1 + y_1 y_2}{d}\right)\right] E_S(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (A2-2)$$

Sendo $E_S(x_1, y_1)$ constante sobre toda a abertura, a Equação (A2-2) pode ser reescrita como:

$$E(x_2, y_2) = \frac{i E_S(x_1, y_1)}{\lambda d} \exp[-i \xi] \iint_S \exp\left[ik \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{d}\right)\right] dx_1 dy_1 \quad (A2-3)$$

Separando as duas integrais da Equação (A2-3):

$$E(x_2, y_2) = \frac{i E_S(x_1, y_1)}{\lambda d} \exp[-i \xi] \int_{-a}^a \exp\left[ik \frac{x_1 x_2}{d}\right] dx_1 \int_{-b}^b \exp\left[ik \frac{y_1 y_2}{d}\right] dy_1 \quad (A2-4)$$

e nomeando:
$$C = i \frac{E_S(x_1, y_1)}{\lambda d} \exp[-i \xi] \quad (A2-5)$$

A Equação (A2-4) pode ser reescrita como:

$$E(x_2, y_2) = C \int_{-a}^a \exp\left[ik \frac{x_1 x_2}{d}\right] dx_1 \int_{-b}^b \exp\left[ik \frac{y_1 y_2}{d}\right] dy_1 \quad (A2-6)$$

Primeiro, vamos estudar a integral em x .

Pela Figura (2-4), observamos que:

$$x_2 = d \sin \alpha \quad (A2-7)$$

Usando a aproximação para pequenos ângulos: $\sin \alpha \cong \alpha$ temos que:

$$x_2 = d \alpha \Rightarrow \alpha = x_2 / d \quad (A2-8)$$

assim a integral em x pode ser reescrita como:

$$X = \int_{-a}^a \exp\left(\frac{ik x_2 x_1}{d}\right) dx_1 = \int_{-a}^a \exp(ik \alpha x_1) dx_1$$

fazendo-se a substituição: $u = k \alpha$

$$X = \int_{-a}^a \exp(iu x_1) dx_1 = \frac{e^{iua} - e^{-iua}}{iu} = \frac{2i \operatorname{sen}(ua)}{iu} = 2a \frac{\operatorname{sen}(ua)}{(ua)}$$

resulta:

$$X = 2a \frac{\operatorname{sen}(k \alpha a)}{k \alpha a}$$

Similarmente podemos resolver a equação em y , obtendo-se para ela:

$$Y = 2b \frac{\operatorname{sen}(k \theta b)}{k \theta b}$$

onde:

$$\theta = y_2 / d \quad (A2-9)$$

Desta forma, o campo no plano de observação, para a difração de Fraunhofer – campo distante -, é dado por:

$$E(x_2, y_2) = 4abC \frac{\operatorname{sen}(k \alpha b)}{(k \alpha b)} \frac{\operatorname{sen}(k \theta b)}{(k \theta b)} \quad (A2-10)$$

Como uma fenda nada mais é do que uma abertura retangular onde o comprimento é muito maior que a sua largura, o campo no plano de observação para ela, segundo a difração de Fraunhofer, é dado por:

$$E(y_2) = 2bC \frac{\operatorname{sen}(k \theta b)}{(k \theta b)} \quad (A2-11)$$

Se o estudo for segundo o campo próximo – difração de Fresnel, a IDFK é dada por (Equação A1-5):

$$E(x_2, y_2) = \frac{i}{\lambda d} \exp[-i\xi] \iint_S \exp\left[-ikd \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2d^2} - \frac{x_2 x_1 + y_1 y_2}{d^2} \right)\right] E_S(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (A2-12)$$

Sendo $E_S(x_1, y_1)$ constante sobre toda a abertura, tomando a mudança de variável dada pela Equação (A2-5) e separando as duas integrais, temos:

$$E(x_2, y_2) = C \int_{-a}^a \exp\left[-\frac{ik}{d} \left(\frac{x_1^2}{2} - x_2 x_1\right)\right] dx_1 \int_{-b}^b \exp\left[-\frac{ik}{d} \left(\frac{y_1^2}{2} - y_1 y_2\right)\right] dy_1$$

Estudando primeiro a integral em x :

$$X = \int_{-a}^a \exp\left[-\frac{ik}{d} \left(\frac{x_1^2}{2} - x_2 x_1\right)\right] dx_1$$

sua solução é dada por:

$$X = \sqrt{\frac{i\pi d}{2k}} \exp\left[\frac{ik x_2^2}{2d}\right] \left\{ \text{Erfi}\left[\sqrt{\frac{ik}{2d}}(-a - x_2)\right] - \text{Erfi}\left[\sqrt{\frac{ik}{2d}}(a - x_2)\right] \right\}$$

com a função erro complexa, **Erfi** definida por :

$$\text{Erfi}[z] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp[t^2] dt \quad (\text{A2-13})$$

Similarmente, a resolução para a integral em y , tem por solução:

$$Y = \sqrt{\frac{i\pi d}{2k}} \exp\left[\frac{ik y_2^2}{2d}\right] \left\{ \text{Erfi}\left[\sqrt{\frac{ik}{2d}}(-b - y_2)\right] - \text{Erfi}\left[\sqrt{\frac{ik}{2d}}(b - y_2)\right] \right\}$$

O campo no plano de observação será:

$$E(x_2, y_2) = \frac{i\pi d}{2k} C \exp\left[\frac{ik}{2d} (x_2^2 + y_2^2)\right] \left\{ \text{Erfi}\left[\sqrt{\frac{ik}{2d}}(-a - x_2)\right] - \text{Erfi}\left[\sqrt{\frac{ik}{2d}}(a - x_2)\right] \right\} \cdot \left\{ \text{Erfi}\left[\sqrt{\frac{ik}{2d}}(-b - y_2)\right] - \text{Erfi}\left[\sqrt{\frac{ik}{2d}}(b - y_2)\right] \right\} \quad (\text{A2-14})$$

Para a fenda, o campo no plano de observação segundo a difração de Fresnel é dado por:

$$E(y_2) = C_1 \left\{ \text{Erfi}\left[\sqrt{\frac{ik}{2d}}(-b - y_2)\right] - \text{Erfi}\left[\sqrt{\frac{ik}{2d}}(b - y_2)\right] \right\} \quad (\text{A2-15})$$

$$\text{onde: } C_1 = \sqrt{\frac{i\pi d}{2k}} C \exp\left[\frac{ik}{2d} (y_2^2)\right]$$

Anexo 3 – Campo por uma Lente

Lente é um elemento óptico que tem como uma de suas características básicas a distância focal. Se a lente for plano convexa, onde um de seus raios é infinito, para determinarmos a sua distância focal devemos aplicar a equação dos fabricantes:

$$\frac{1}{f} = (n_o - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \text{ que para esse tipo de lente resulta:}$$

$$f = \frac{R}{n_o - 1} \quad (\text{A3-1})$$

Para que se possa encontrar o campo no plano de observação de um feixe de luz que se propaga por essa lente, visto a simetria existente, vamos utilizar a IDFK em coordenadas cilíndricas, dada pela Equação (2-5). Mas, para a sua resolução, devemos saber o campo logo após essa lente. Para determiná-lo devemos inicialmente conhecer o caminho ótico que o raio de luz descreve, para então podermos saber a variação de fase imposto a ele.

Sendo o caminho ótico (S) de um raio luminoso descrito por:

$$S = l + l_1 (n_o - 1) \quad (\text{A3-2})$$

e, sabendo-se que a espessura da lente ($l_1(r)$), conforme a Figura (2-32), é dada por:

$$l_1(r) = l - R(1 - \cos \theta) \quad (\text{A3-3})$$

onde: R = raio de curvatura da lente e

$$\cos \theta = \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{1/2} \cong 1 - \frac{r^2}{2R^2} + \frac{r^4}{8R^4} - \frac{r^6}{16R^6} \quad (\text{A3-4})$$

Considerando que estamos trabalhando no campo distante: $d \gg R$ podemos escrever a espessura da lente como sendo:

$$l_1(r) = l - \left[\frac{1}{2} \frac{r^2}{R} - \frac{1}{8} \frac{r^4}{R^3} + \frac{1}{16} \frac{r^6}{R^5} \right] \quad (\text{A3-5})$$

Desta forma, a variação de fase devida à lente será:

$$\Delta\phi(r) = kS = kn_o l - k(n_o - 1) \left[\frac{r^2}{2R} - \frac{r^4}{8R^3} + \frac{r^6}{16R^5} \right] \quad (\text{A3-6})$$

Como o campo após a lente é dado por:

$$E_S(z) = E_0 \exp[-ikz] \exp[-i\Delta\phi] \quad (A3-7)$$

onde:

$$\exp[-i\Delta\phi] = C_0 \exp \left\{ ik(n_0 - 1) \left[\frac{r^2}{2R} - \frac{r^4}{8R^3} - \frac{r^6}{16R^5} \right] \right\} \quad (A3-8)$$

$$C_0 = E_0 \exp[-i k z]$$

Desta forma, o campo após a lente, usando o valor da distância focal da lente (f), será:

$$E_S(r_1) = D_0 \exp \left\{ ik \left[\frac{r_1^2}{2f} - \frac{r_1^4}{8R^2f} - \frac{r_1^6}{16R^4f} \right] \right\} \quad (A3-9)$$

onde: $D_0 = C_0 \exp[i k n_0]$

E o campo num ponto P_2 do plano de observação é dado pela resolução da IDFK (Equação (2-25)):

$$E(r_2) = \frac{i2\pi}{\lambda d} D_0 \exp[-i\xi] \int_0^a \exp \left(-ik \frac{r_1^2}{2d} \right) J_0 \left(\frac{k r_1 r_2}{d} \right) \exp \left\{ ik \left[\frac{r_1^2}{2f} - \frac{r_1^4}{8R^2f} - \frac{r_1^6}{16R^4f} \right] \right\} r_1 dr_1 \quad (A3-10)$$

Ao estudarmos uma lente for perfeita, o campo terá apenas o termo de r_1^2 , assim, a equação a ser resolvida é:

$$E(r_2) = \frac{ik}{d} D_0 \exp[-i\xi] \int_0^a \exp \left[-ik \frac{r_1^2}{2} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{f} \right) \right] J_0 \left(\frac{k r_1 r_2}{d} \right) r_1 dr_1 \quad (A3-11)$$

Se o plano de observação estiver no foco da lente, temos que $f = d$ e a exponencial no integrando se torna 1 , assim a equação se torna:

$$E(r_2) = \frac{ik}{d} D_0 \exp[-i\xi] \int_0^a J_0 \left(\frac{k r_1 r_2}{d} \right) r_1 dr_1 \quad (A3-12)$$

Mas a integral (A3-12) tem por solução:

$$\int_0^a J_0 \left(\frac{k r_1 r_2}{d} \right) r_1 dr_1 \sim \frac{J_1 \left(\frac{k a r_2}{d} \right)}{\left(\frac{k a r_2}{d} \right)} \quad (A3-13)$$

Logo, o campo no plano de observação é dado por:

$$E(r_2) = \frac{ik}{d} D_0 \exp[-i\xi] \frac{J_1\left(\frac{kar_2}{d}\right)}{\left(\frac{kar_2}{d}\right)} \quad (A3-14)$$

Se a lente em estudo tiver a ocorrência de aberração esférica, o campo logo após a lente é dado por:

$$E_S(r_1) = D_0 \exp\left\{\frac{ikr_1^2}{2f} \left[1 - \frac{r_1^2}{4R^2} - \frac{r_1^4}{4R^4}\right]\right\} \quad (A3-15)$$

assim, o campo no plano de observação será:

$$E(r_2) = \frac{ik}{d} D_0 \exp[-i\xi] \int_0^a \exp\left[ik\left(r_1^2\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{f}\right) - \frac{r_1^4}{8R^2f}\right)\right] J_0\left(\frac{kr_1r_2}{d}\right) r_1 dr_1 \quad (A3-16)$$

Se o plano de observação, como no caso de uma lente perfeita, estiver no plano focal da lente, $d = f$, o campo observado a ser resolvido é:

$$E(r_2) = \frac{ik}{d} D_0 \exp[-i\xi] \int_0^a \exp\left[ik\frac{r_1^4}{8R^2f}\right] J_0\left(\frac{kr_1r_2}{d}\right) r_1 dr_1 \quad (A3-17)$$

Ao levarmos em conta os termos de mais altas ordens para a aberração, o campo no plano de observação a ser estudado é dado por:

$$E(r_2) = \frac{ik}{d} D_0 \exp[-i\xi] \int_0^a \exp\left[-ik\frac{r_1^2}{2d}\right] \exp\left[\frac{ikr_1^2}{2f}\left(1 - \frac{r_1^2}{4R^2} - \frac{r_1^4}{4R^4}\right)\right] J_0\left(\frac{kr_1r_2}{d}\right) r_1 dr_1 \quad (A3-18)$$

Observando-se que o plano de observação está colocado no plano focal da lente, onde $d = f$, o campo, agora a ser resolvido será:

$$E(r_2) = \frac{ik}{d} D_0 \exp[-i\xi] \int_0^a \exp\left[-ik\left(\frac{r_1^4}{8R^2f} + \frac{r_1^6}{16R^4f}\right)\right] J_0\left(\frac{kr_1r_2}{d}\right) r_1 dr_1 \quad (A3-19)$$

Anexo 4 – Cálculo da Expressão do Termo Fonte $\dot{q}(r)$ para a Lente Térmica Radial

Um campo de um feixe de laser, com um perfil gaussiano no modo **TEM₀₀** [Referência], é dado por:

$$E(r) = E_0 \exp \left[\frac{-2r^2}{w_e^2} \right] \quad (A4-1)$$

onde: $E_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w}$; w é o raio do feixe (cm); e , r é a distância ao eixo (cm).

Assim, a intensidade, **I(r)**, do feixe ao sair da amostra, é encontrada:

$$I(r) = |E(r)|^2 = I_0 \exp \left[\frac{-2r^2}{w_e^2} \right] \quad (A4-2)$$

onde: **I₀(r)** é a intensidade do feixe na entrada da amostra em **r**.

Sendo a potência do feixe, **P** (Watt), no campo distante, definida por:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I \, dA \quad (A4-3)$$

substituindo-se a Intensidade do feixe:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} I_0 \exp \left[\frac{-2r^2}{w_e^2} \right] 2\pi r \, dr = \frac{\pi w_e^2}{2} I_0 \quad (A4-4)$$

onde,

$$I_0 = \frac{2P}{\pi w_e^2} \quad (A4-5)$$

Dessa forma, sabendo-se a medida de **I₀**, a distribuição da intensidade do feixe de laser torna-se:

$$I(r) = \frac{2P}{\pi w_e^2} \exp \left[\frac{-2r^2}{w_e^2} \right] \quad (A4-6)$$

O termo fonte $\dot{q}(\mathbf{r})$, que representa o aquecimento devido ao calor gerado pelo feixe laser, ou seja, o fluxo de energia por unidade de comprimento e por unidade de tempo, a uma distância $\mathbf{r}$ do eixo em um meio de coeficiente de absorção α (cm^{-1}) é dado por:

$$\dot{q}(\mathbf{r}') = \alpha I(\mathbf{r}) = \frac{2 P \alpha}{\pi w_e^2} \exp\left[\frac{-2 \mathbf{r}^2}{w_e^2}\right] \quad (\text{A4-7})$$

onde: w_e é $1/e^2$ do raio do feixe de laser que abrange ($1 - e^{-2} = 0,86$) da potência total desse feixe.

Desta forma, a fonte de calor distribuída, que fornece a taxa de geração de calor por unidade de comprimento da amostra, de espessura unitária entre $\mathbf{r}'$ e $\mathbf{r}' + d\mathbf{r}'$ é dada por:

$$Q(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \dot{q}(\mathbf{r}') 2\pi \mathbf{r}' d\mathbf{r}' = \frac{2 P \alpha}{\pi w_e^2} \exp\left[\frac{-2 \mathbf{r}^2}{w_e^2}\right] (2\pi \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{A4-8})$$

Anexo 5 – Cálculo da Expressão da Distribuição da Temperatura para a Lente Térmica Radial

A equação de difusão de calor no estado não estacionário [25] é dada por:

$$\rho c_p \frac{\partial \Delta T(r,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \Delta T(r,t)}{\partial r^2} + \dot{q}(r) \quad (A5-1)$$

sob a condição: $r < \infty$, $\Delta T(r,0) = 0$,

onde: k é a condutividade térmica do material ($\text{cal seg}^{-1} \text{cm}^{-1} \text{K}^{-1}$), c_p é o calor específico do material ($\text{J g}^{-1} \text{K}^{-1}$), ρ é a densidade do material (g cm^{-3}), $\left(k \frac{\partial^2 \Delta T(r,t)}{\partial r^2} \right)$ o termo que

representa o efeito de difusão térmica; e, $\dot{q}(r)$ ($\text{cal cm}^{-3} \text{seg}^{-1}$) o termo fonte (A4-7)

A solução para a equação de difusão de calor, quando um feixe de laser for ligado em $t'=0$, para uma fonte distribuída, é dada por:

$$\Delta T(r,t) = \int_0^t \int_0^\infty Q(r') G(r,r',t') dt' dr' \quad (A5-2)$$

A expressão da fonte de calor distribuída, que fornece a taxa de geração de calor por unidade de comprimento da amostra, entre r' e $r' + dr'$ é dada por (A4-8):

$$Q(r') dr' = \dot{q}(r') 2\pi r' dr' = \frac{2 P \alpha}{\pi w^2} \exp\left[-\frac{2 r'^2}{w^2}\right] (2\pi r') dr' \quad (A5-3)$$

e a Função de Green, que, segundo Carslaw e Jaeger[31][32], traduz a temperatura numa distância r , no tempo t , de uma fonte cilíndrica instantânea, que está em r' no tempo $t'=0$, em um meio infinito, e é dada por:

$$G(r,r',t) = \frac{1}{4\pi k t} \exp\left(-\frac{(r^2 + r'^2)}{4 D t}\right) I_0\left(\frac{r r'}{2 D t}\right) \quad (A5-4)$$

onde: I_0 é a função de Bessel modificada do primeiro tipo e de ordem zero; $D = \frac{k}{\rho c_p}$ é a

difusividade do material ($\text{cm}^2 \text{seg}^{-1}$).

Substituindo as expressões da fonte de calor distribuída e da Função de Green, a distribuição de temperatura se apresenta como [26][28] :

$$\Delta T(r,t) = \frac{P \alpha}{\pi w^2 k} \int_0^t \exp\left[-\frac{r^2}{4Dt'}\right] \frac{dt'}{t'} \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{8Dt' + w^2}{4Dt' w^2}\right) r'^2\right] I_0\left(\frac{r r'}{2Dt'}\right) r' dr' \quad (A5-5)$$

Sendo [50][51][52]:

$$\int_0^\infty I_0(ar') \exp(-p^2 r'^2) r' dr' = \frac{1}{2p^2} \exp\left(\frac{a^2}{4p^2}\right) \quad (A5-6)$$

onde: $a = \frac{r}{2Dt'}$ e $p^2 = \frac{8Dt' + w^2}{4Dt' w^2}$

a distribuição de temperatura se torna:

$$\Delta T(r,t) = \frac{2 P \alpha D}{\pi k} \int_0^t \exp\left(\frac{-2r^2}{8Dt' + w^2}\right) \frac{dt'}{8Dt' + w^2} \quad (A5-7)$$

Ao se utilizar a mudança de variável: $u = \frac{1}{8Dt' + w^2}$, temos:

$$\Delta T(r,t) = \frac{-P \alpha}{4 \pi k} \int_{w^{-2}}^{(8Dt' + w^2)^{-1}} \exp(-2r^2 u) \frac{du}{u}$$

onde [45][46][47]:

$$Ei(a) = -\int_a^\infty \frac{\exp(-x)}{x} dx \quad (A5-8)$$

com **Ei** sendo a função integral exponencial.

Desta forma, a distribuição de temperatura resulta:

$$\Delta T(r,t) = \frac{P \alpha}{4\pi k} \left[Ei\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) - Ei\left(-\frac{2r^2}{8Dt + w^2}\right) \right] \quad (A5-9)$$

A Lente Térmica leva um tempo característico, t_c , para a sua formação, e que é dado por:

$$t_c = \frac{w^2}{4D} \quad (A5-10)$$

desta forma, a distribuição da temperatura, em termos deste tempo, é dada por:

$$\Delta T(r,t) = \frac{P \alpha}{4\pi k} \left[\text{Ei} \left(-\frac{2r^2}{w^2} \right) - \text{Ei} \left(-\frac{2r^2}{w^2} \frac{1}{1 + \frac{2t}{tc}} \right) \right] \quad (\text{A5-11})$$

Mas a função Integral Exponencial (**Ei**) pode ser escrita na forma de uma série:

$$\text{Ei}(-x) = C + \ln(-x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m m!} \quad (\text{A5-12})$$

assim, com essa aproximação, a distribuição de temperatura pode ser escrita como:

$$\Delta T(r,t) = \left[\ln \left(1 + \frac{2t}{tc} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m m!} \left(-\frac{2r^2}{w^2} \right)^m \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{2t}{tc} \right)^m} \right) \right] \quad (\text{A5-13})$$

que, ao se expandir **r** até segunda potência obtém-se:

$$\Delta T(r,t) = \frac{P \alpha}{4\pi k} \left[\ln \left(1 + \frac{2t}{tc} \right) - \frac{2r^2}{w^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{2t}{tc}} \right) \right] \quad (\text{A5-14})$$

Anexo 6 – Cálculo da Expressão da Fase devida à Lente Térmica Radial

A variação de fase radial do feixe de prova, $\Delta\Phi_{LT}$ é devida ao efeito de Lente Térmica, induzido pelo feixe de laser de excitação, sobre amostra. Ao passar pela Lente Térmica o feixe de prova sofre um atraso de fase adicional que depende da coordenada radial r , e está relacionado à variação do caminho óptico do meio.

Sendo o caminho óptico definido por: $S_0 = n_0 l$, onde l é o comprimento da amostra a variação do caminho óptico, que fornece a fase devida à Lente Térmica é:

$$\Delta S_{LT}(r,t) = l [n(r,t) - n(0,t)] \quad (A6-1)$$

Mas, a distribuição da temperatura acarreta uma variação do índice de refração dada por:

$$n(r,t) = n_0 + \frac{dn}{dT} \Delta T(r,t) \quad (A6-2)$$

Calculando-se $n(r,t)$ e $n(0,t)$ em função da distribuição de temperatura, temos que:

$$\Delta S_{LT}(r,t) = l \frac{dn}{dT} [\Delta T(r,t) - \Delta T(0,t)] \quad (A6-3)$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{2\pi}{\lambda}$, encontramos o atraso de fase adicional:

$$\Delta\Phi_{LT} = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta S_{LT}(r,t) = \frac{2\pi}{\lambda} l \frac{dn}{dT} [\Delta T(r,t) - \Delta T(0,t)] \quad (A6-4)$$

Porém, a distribuição de temperatura, encontrada para a Lente Térmica Radial, é dada pela Equação (A5-9):

$$\Delta T(r,t) = \frac{2 P_e \alpha}{\pi k} \int_0^t \exp \left(\frac{-2 r^2}{8 D t' + w_e^2} \right) \frac{dt'}{8 D t' + w_e^2} \quad (A6-5)$$

onde o índice e indica ser relativo ao feixe de excitação.

Como a Lente Térmica possui um tempo característico para a sua formação, t_c , dado pela Equação (A5-10)

$$t_c = \frac{w^2}{4D} \quad (A6-6)$$

encontramos:

$$\Delta T(r,t) = \frac{2 P_e \alpha D}{\pi w_e^2 k} \int_0^t \exp \left(\frac{-2 \frac{r^2}{w_e^2}}{\frac{2t'}{t_c} + 1} \right) \frac{dt'}{t_c} \quad (A6-7)$$

Usando as variáveis: **m**, que é o grau de casamento dos feixes de prova e de excitação, e **g**, dadas por:

$$m = \left(\frac{w_p}{w_e} \right)^2 \quad (A6-8)$$

$$g = \left(\frac{r}{w_p} \right)^2 \quad (A6-9)$$

achamos uma distribuição de temperatura dada por:

$$\Delta T(g,t) = \frac{2 P_e \alpha D}{\pi w_e^2 k} \int_0^t \exp \left[- \left(\frac{2mg}{1 + \frac{2t'}{t_c}} \right) \right] \frac{dt'}{1 + \frac{2t'}{t_c}} \quad (A6-10)$$

Sendo, θ definido pela Equação (3-20) como:

$$\theta = - \frac{P_e \alpha L \left(\frac{dn}{dT} \right)}{\lambda_p k} \quad (A6-11)$$

substituindo os valores de $\Delta T(r,t)$ e θ na Equação (A6-4), e fazendo a mudança de variável:

$$\tau = \frac{1}{\frac{2t'}{t_c} + 1} \quad \text{e} \quad \tau_1 = \frac{1}{\frac{2t}{t_c} + 1} \quad (A6-12)$$

a variação de fase devida ao efeito de Lente Térmica Radial, para um arranjo experimental de dois feixes é dada por:

$$\frac{2\pi}{\lambda_p} \Delta S_{LT}(g,t) = \frac{\theta}{2} \int_1^{\tau_1} (1 - \exp(-2mg\tau)) \frac{d\tau}{\tau} \quad (A6-13)$$

Se o arranjo experimental for de feixe único, temos que **m** = 1, assim, a variação de fase se torna:

$$\frac{2\pi}{\lambda_p} \Delta S_{LT} (g,t) = \frac{\theta}{2} \int_1^{\tau_1} (1 - \exp(-2 g \tau)) \frac{d\tau}{\tau} \quad (A6-14)$$

Anexo 7 – Cálculo da Integral relativa ao Campo no Detector devido à Lente Térmica Radial

Para calcularmos o campo no detector, vamos fazer uso da IDFK, para tanto devemos resolver a Integral (A3-11):

$$E(r_2) = \frac{ik}{d} \exp \left[-ikd \left(1 + \frac{r_2^2}{2d^2} \right) \right] \int_0^\infty \exp \left[-ik \frac{r^2}{2d} \right] J_0 \left(\frac{kr r_2}{d} \right) E_S(r) r dr \quad (A7-1)$$

onde, o campo no plano da amostra, $E_S(r,t)$ é dado pela Equação (3-71),

$$E_S(r,t) = A_2 \exp \left[-\frac{r^2}{w_p^2} \right] \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{r^2}{R} + 2 \Delta S_{LT}(r_1, t) \right) \right] \quad (A7-2)$$

onde o índice **p** indica ser o feixe de prova, sendo que no experimento de feixe único o feixe de prova e o feixe de excitação é o mesmo.

Desta forma, a integral a ser resolvida é:

$$E(r_2) = A_3 \int_0^\infty J_0 \left(\frac{kr r_2}{d} \right) \exp \left[-ik \frac{r^2}{2d} \right] \exp \left[-\frac{r^2}{w_p^2} \right] \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{r^2}{R_p} + 2 \Delta S_{LT}(r, t) \right) \right] r dr \quad (A7-3)$$

$$\text{onde: } A_3 = \frac{ikA_2}{d} \exp \left[-ikd \left(1 + \frac{r_2^2}{2d^2} \right) \right] \quad (A7-4)$$

Como se está estudando no centro do feixe ou seja: $r_2 = 0$, a integral se transforma em:

$$E(r_2) = A_3 \int_0^\infty \exp \left[-ik \frac{r^2}{2d} \right] \exp \left[-\frac{r^2}{w_p^2} \right] \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{r^2}{R_p} + 2 \Delta S_{LT}(r, t) \right) \right] r dr \quad (A7-5)$$

Utilizando-se a variável definida no Anexo 6 (Equação A6-9)

$$g = \left(\frac{r_1}{w_p} \right)^2 \quad (A7-6)$$

a integral se torna:

$$\mathbf{E}(\mathbf{t}) = A_3 \int_0^\infty \exp \left\{ -g - i \left[\frac{\pi w_p^2 g}{\lambda} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{d} \right) + 2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta S_{LT}(\mathbf{g}, \mathbf{t}) \right] \right\} d\mathbf{g} \quad (\text{A7-7})$$

Substituindo-se, no termo de fase, as variáveis:

$$w^2(\mathbf{z}) = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda \mathbf{z}}{\pi w_0^2} \right)^2 \right] \quad (\text{A7-8})$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda \mathbf{z}} \right)^2 \right] \quad (\text{A7-9})$$

$$z_c = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (\text{A7-10})$$

obtemos:

$$i \left[\frac{\pi w_p^2 g}{\lambda} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{d} \right) \right] = i g \left[\frac{z}{z_c} + \frac{z}{d} \left(\frac{z}{z_c} + \frac{z_c}{z} \right) \right] \quad (\text{A7-11})$$

Mas o detector está situado no campo distante, assim $d \gg z$, e desta forma, o termo:

$$\frac{z}{d} \left(\frac{z}{z_c} + \frac{z_c}{z} \right) \approx 0.$$

Utilizando o parâmetro V , que é associado à posição geométrica do feixe, e definido por:

$$V = \frac{z}{z_c} \quad (\text{A7-12})$$

o termo de fase torna-se:

$$i \left[\frac{\pi w_p^2 g}{\lambda} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{d} \right) \right] = i g V \quad (\text{A7-13})$$

e o campo no detector é dado por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{t}) = A_3 \int_0^\infty \exp(-g - i g V) \exp \left(-i 2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta S_{LT}(\mathbf{g}, \mathbf{t}) \right) d\mathbf{g} \quad (\text{A7-14})$$

Como: $2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta S_{LT}(\mathbf{g}, \mathbf{t}) \ll 1$, podemos efetuar a seguinte aproximação:

$$\exp\left(-i 2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta S_{LT} (g, t)\right) \approx 1 - i 2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta S_{LT} (g, t) \quad (A7-15)$$

onde $2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta S_{LT} (g, t)$ é dada pela Equação (A6-13):

$$\frac{2\pi}{\lambda_p} \Delta S_{LT} (r, t) = \frac{\theta}{2} \int_1^{\tau_1} (1 - \exp(-2 m g \tau)) \frac{d\tau}{\tau} \quad (A7-16)$$

Sendo m , o grau de casamento dos feixes de prova e de excitação, dado por (A6-8):

$$m = \left(\frac{w_p}{w_e} \right)^2 \quad (A7-17)$$

a integral de difração torna-se:

$$E(t) = A_3 \int_0^{\infty} \exp(-g - i g V) \left\{ 1 - i \frac{\theta}{2} \int_1^{\tau_1} (1 - \exp(-2 g m \tau)) \frac{d\tau}{\tau} \right\} dg$$

onde τ_1 é dado por (Equação (3-58)):

$$\tau_1 = \frac{1}{\frac{2t}{t_c} + 1}$$

Abrindo-se as integrais, podemos reescrever o campo como::

$$E(t) = A_3 \int_0^{\infty} \exp[-g(1 + i V)] dg - i \frac{\theta}{2} \int_1^{\tau_1} \left(\int_0^{\infty} \exp[-g(1 + i V)] dg \right) \frac{d\tau}{\tau} + i \frac{\theta}{2} \int_1^{\tau_1} \left(\int_0^{\infty} \exp[-g(1 + 2 m \tau + i V)] dg \right) \frac{d\tau}{\tau} \quad (A7-18)$$

Como [50][51][52]:

$$\int_0^{\infty} \exp[-g(1 + i V)] dg = \frac{1}{1 + i V} \quad (A7-19)$$

$$\int_0^{\infty} \exp[-g(1 + 2 m \tau + i V)] dg = \frac{1}{1 + 2 m \tau + i V} \quad (A7-20)$$

integrando-se primeiramente em u , encontramos:

$$E(t) = \frac{A_3}{1 + i V} \left(1 - i \frac{\theta}{2} \int_1^{\tau_1} \frac{d\tau}{\tau} \right) + i \frac{\theta}{2} A_3 \int_1^{\tau_1} \frac{d\tau}{\tau (1 + i V + 2 m \tau)} \quad (A7-21)$$

Mas, a integral: $\int_1^{\tau_1} \frac{d\tau}{\tau (1 + i V + 2 m \tau)}$, para ser realizada, deve ser re-escrita como

$$\int_1^{\tau_1} \frac{1}{1 + i V} \left[\frac{1}{\tau} - \frac{2 m}{1 + i V + 2 m \tau} \right] d\tau, \text{ assim, temos que:}$$

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{A_3}{1 + i V} - i \frac{\theta}{2} \frac{A_3}{1 + i V} \int_1^{\tau_1} \frac{2 m}{1 + 2 m \tau + i V} d\tau \\ E(t) &= \frac{A_3}{1 + i V} - i \theta \frac{A_3}{1 + i V} \left[\int_1^{\tau_1} \frac{1 + 2 m \tau}{(1 + 2 m \tau)^2 + V^2} d\tau - i V \int_1^{\tau_1} \frac{1}{(1 + 2 m \tau)^2 + V^2} d\tau \right] \end{aligned} \quad (A7-22)$$

Usando-se as seguintes relações [50][51][52]:

$$\int_a^b \frac{x dx}{x^2 + V^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + V^2) \Big|_a^b \quad (A7-23)$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 + V^2} = \left[\frac{1}{V} \tan^{-1} \left(\frac{x}{V} \right) \right]_a^b \quad (A7-24)$$

$$\tan^{-1} X - \tan^{-1} Y = \tan^{-1} \left(\frac{X - Y}{1 + XY} \right) \quad (A7-25)$$

o campo encontrado no detector é:

$$\begin{aligned} E_P(t) &= \frac{A_2}{1 + V^2} \left\{ 1 - \frac{\theta m}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{2 m V (\tau_1 - 1)}{2 m \tau_1 (1 + 2 m) + [1 + 2 m + V^2]} \right] - \right. \\ &\quad \left. + \frac{V \theta}{4} \ln \left[\frac{V^2 + [1 + 2 m \tau_1]^2}{(1 + 2 m)^2 + V^2} \right] \right\} - i \frac{A_2}{1 + V^2} \left\{ \frac{\theta}{4} \ln \left[\frac{V^2 + [1 + 2 m \tau_1]^2}{(1 + 2 m)^2 + V^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + V \left[1 - \frac{\theta m}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{2 m V (\tau_1 - 1)}{2 m \tau_1 (1 + 2 m) + [1 + 2 m + V^2]} \right] \right] \right\} \end{aligned} \quad (A7-26)$$

Para o arranjo de feixe único temos $m = 1$, assim o campo será:

$$\begin{aligned}
 E(t) = & \frac{A_3}{1+V^2} \left\{ 1 - \frac{\theta}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2V(\tau_1-1)}{V^2+3+6\tau_1} \right] - \frac{V\theta}{4} \ln \left(\frac{(1+2\tau_1)^2+V^2}{9+V^2} \right) \right\} - \\
 & - \frac{iA_3}{1+V^2} \left\{ V \left[1 - \frac{\theta}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2V(\tau_1-1)}{V^2+3+6\tau_1} \right] \right] + \frac{\theta}{4} \ln \left(\frac{(1+2\tau_1)^2+V^2}{9+V^2} \right) \right\}
 \end{aligned} \quad (A7-27)$$

A Intensidade observada no plano detector será dada por:

$$I_P(t) = I_0 \left\{ 1 - \frac{\theta}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{2mV(\tau_1-1)}{2m\tau_1(1+2m)+[1+2m+V^2]} \right] \right\}^2 \quad (A7-28)$$

Substituindo-se τ_1 (Equação (3-58)) a intensidade torna-se:

$$I_P(t) = I_0 \left\{ 1 + \frac{\theta}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{2mV}{\left[(1+2m)^2 + V^2 \right] \frac{t_c}{2t} + [1+2m+V^2]} \right] \right\}^2 \quad (A7-29)$$

Anexo 8 - Cálculo da Integral relativa ao Campo no Detector devido à Lente Térmica Radial no Regime de θ grande

Para calcularmos o campo no detector, vamos fazer uso da Integral de Difração de Fresnel-Kirchhoff, para tanto devemos resolver a Integral (A1-3):

$$E(r_2) = \frac{ik}{d} \exp \left[-ikd \left(1 + \frac{r_2^2}{2d^2} \right) \right] \int_0^\infty \exp \left[-ik \frac{r^2}{2d} \right] J_0 \left(\frac{kr r_2}{d} \right) E_S(r) r dr \quad (A8-1)$$

onde o campo no plano da amostra, $E_S(r,t)$ é dado pela Equação (3-71),

$$E_S(r,t) = A_2 \exp \left[-\frac{r^2}{w_p^2} \right] \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{r^2}{R_p} + 2 \Delta S_{LT}(r,t) \right) \right] \quad (A8-2)$$

Desta forma, a integral a ser resolvida é:

$$E(r_2) = A_3 \int_0^\infty J_0 \left(\frac{kr r_2}{d} \right) \exp \left[-ik \frac{r^2}{2d} \right] \exp \left[-\frac{r^2}{w_p^2} \right] \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{r^2}{R_p} + 2 \Delta S_{LT}(r,t) \right) \right] r dr \quad (A8-3)$$

onde: $A_3 = \frac{ikA_2}{d} \exp \left[-ikd \left(1 + \frac{r_2^2}{2d^2} \right) \right]$

Utilizando-se a variável (Equação A6-9):

$$\rho = \left(\frac{r_1}{w_p} \right) \quad (A8-4)$$

o campo pode ser re-escrito como:

$$E(r_2) = A_4 \int_0^\infty J_0 \left(\frac{kw_p r_2}{d} \rho \right) \exp \left[-g - i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{w_p^2}{2d} \rho^2 + \frac{w_p^2}{R_p} \rho^2 + 2 \Delta S_{LT}(r_1,t) \right) \right] \rho d\rho \quad (A8-5)$$

onde: $A_4 = \frac{A_3 w_p^2}{2}$

Sendo(A7-13):

$$i \left[\frac{\pi w_p^2 \rho^2}{\lambda_p} \left(\frac{1}{R_p} + \frac{1}{d} \right) \right] = i \rho^2 V \quad (A8-6)$$

o campo se torna:

$$E(r_2) = A_4 \int_0^\infty J_0\left(\frac{k w_p r_2}{d} \rho\right) \exp\left[-\rho^2(1+iV) - i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta S_{LT}(\rho, t)\right] \rho d\rho \quad (A8-7)$$

Como a diferença de fase devido à Lente Térmica é dada pela Equação (3-69)

$$\frac{2\pi}{\lambda} \Delta S_{LT}(\rho, t) = \frac{\theta}{2} \int_1^{\tau_1} \left(1 - e^{-2\rho^2 m \tau}\right) \frac{d\tau}{\tau} \quad (A8-8)$$

onde m é dado por (A6-8).

Resolvendo a integral temos:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \Delta S_{LT}(\rho, t) = \frac{\theta}{2} \left(Ei(-2\rho^2 m \tau) + Ei(-2\rho^2 m) + \ln(\tau) \right) \quad (A8-9)$$

O campo resulta:

$$E(r_2) = A_4 \int_0^\infty J_0\left(\frac{k w_p r_2}{d} \rho\right) \exp\left[-\rho^2(1+iV) - i \frac{\theta}{2} \int_1^{\tau_1} \left(1 - e^{-2\rho^2 m \tau}\right) \frac{d\tau}{\tau}\right] \rho d\rho \quad (A8-10)$$

A Intensidade será dada por:

$$I = |E(r_2, t)|^2 \quad (A8-11)$$

Para o tempo $t = 0$, τ_1 definido por (Equação (3-58)) é $\tau_1 = 1$, a intensidade será:

$$I_0 = \frac{(A_4)^2}{4(1+V^2)} \exp\left[-\frac{2}{1+V^2} \left(\frac{\pi r_2 w_{op}}{\lambda_p d}\right)^2\right] \quad (A8-12)$$

Referências Bibliográficas

1. F.A.Jenkins e H.E.White, *Fundamentals of Optics*, N.York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1957
2. M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics*, New York: Pergamon Press, 1959
3. J.R.Meyer-Arendt, *Introduction to Classical and Modern Optics*, London: Prentice-Hall International Inc., 1972
4. E. Hecht e A. Zajac, *Optics*, London: Addison-Wesley Publishing Company, 1979.
5. J.E.Harvey e J. L. Forgham, The spot of Arago: New relevance for an old phenomenon, *Am, J, Phys.*, **52(3)**, 243, March, 1984
6. P.Tipler, *Física para cientistas e engenheiros*. R.Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1995.
7. F.E.Lytle, An Introduction to Diffraction. Part I: The Near Field, *Applied Spectroscopy*, **53 (6)**, 212A, 1999
8. F.E.Lytle, An Introduction to Diffraction. Part I: The Near Field, *Applied Spectroscopy*, **53(7)**, 262A, 1999
9. G.E.Sommargren, H.J.Weaver, Diffraction of light by an opaque sphere. 1: Description and properties of the diffraction pattern, *Applied Optics*, **29(31)**, 1581, 1 November, 1990
10. G.E.Sommargren, H.J.Weaver, Diffraction of light by an opaque sphere. 2: Image Formation and resolution considerations, *Applied Optics*, **31(10)**, 1385, 1 April, 1992
11. P.M.Rinard, Large-scale diffraction patterns from circular objects, *American Journal of Physics*, **44(1)**, January, 70, 1976
12. A. Kolodziejczyk, Z. Jaroszewicz, R.Henao, O. Quintero, An experimental apparatus for white light imaging by means of a spherical obstacle, *Am. J. Phys.*, **70(2)**, 169, February 2002.
13. F.L.Pedroti e L.S.Pedrotti, *Introduction to Optics*, N.Jersey: Prentice-Hall, 1987.
14. M.V.Klein, *Optics*, N.York: John Wiley & Sons, Inc., 1970
15. R.C.T.Costa, *Uma Breve História da Ótica Clássica*, (apostila de curso)

16. P.A.Young, A Student Experiment in Fresnel Diffraction, *Am.J.Phys.*, **32(5)**,367, May, 1964.
17. P.E.Klingsporn, Fraunhofer diffraction patterns from apertures illuminated with nonparallel light, *Am.J.Phys.*, **47(2)**, 147, February, 1979.
18. T.W.Mayes and B.F.Melton, Fraunhofer diffraction of visible light by a narrow slit, *Am.J.Phys.*, **62(5)**, 397, May, 1994.
19. J. van der Gracht, Simple method for demonstrating Fraunhofer diffraction, *Am.J.Phys.*, **62(10)**, 934, October, 1994.
20. D.S.Burch, Fresnel diffraction by a circular aperture, *Am.J.Phys.*, **53(3)**, 255, March, 1985.
21. E.A.Hovenac, Fresnel diffraction by a spherical obstacles, *Am.J.Phys.*, **57(1)**, 79, January, 1989.
22. S.E.Bialkowski, *Photothermal Spectroscopy Methods for Chemical Analysis*, 1996, New York: John Wiley & Sons Inc.
23. N.J.Dovich, Thermo-optical spectrophotometries in analytical chemistry, *CRC Critical Reviews in Analytical Chemistry*, **17**, 357, 1987.
24. J.M.Harris, N.J.Dovich, Thermal Lens Calorimetry, *Analytical Chemistry*, **52**, 695A, May, 1980
25. R.C.Leite, R.S. Moore,J.R.Whinnery, Low Absorption Measurements By Means Of Thermal Lens Effect Using He-Ne Laser (Absorption 10^{-3} To 10^{-5} cm^{-1} Stimulated Raman Scattering E-T), *Appl.Phys.Lett.* **5**, 141, 1964
26. J. P.Gordon, R. C. Leite, R. S. Moore, S. P. S. Porto, J. R. Whinnery. J., Long-Transient Effects in Lasers with Inserted Liquid Samples, *Appl. Phys*, **36** , 3 , January, 1965
27. C. Hu, J. R. Whinnery, New Thermooptical Measurement Method and a Comparasion with other methods, *Appl. Opt*, **12**, 72, 1973
28. S. J. Sheldon, L. V. Knight, J. M. Thorne, Laser-induced thermal lens effect: a new theoretical model *Appl. Opt*, **21**, 1663, 1982.
29. J. Shen, Theoretical Modelling of Photothermal Lens Spectrometry and Its Experimental Applications, *Tese de Doutorado*, Manchester, 1993

30. F.P.Incropera e D.P.Dewitt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 4^a ed, Wiley, 1966.
31. H.S.Carslaw e J.C.Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2^a ed., Oxford: Oxford University Press, 1959.
32. H.S.Carslaw e J.C.Jaeger, *Operational Methods in Applied Mathematics*, 1^a ed., Oxford: Oxford University Press, 1941.
33. F. Jürgensen, W. Schröer, Studies on the diffraction image of a thermal lens, *Applied Optics*, **34**, 41, January, 1995
34. A. Gerrard, J.M.Burch, *Introduction to Matrix Methods in Optics*, 1975, London: John Wiley & Sons Inc.
35. A.Yariv e P. Yeh, *Optical Waves in Crystals: Propagation and Control of Laser Radiation*, N.York: Wiley-Interscience Publication, 1984
36. A.Yariv, *Quantum Electronics*, N.York: John Wiley & Sons Inc, 1975
37. A.E.Siegman, *Lasers*, Califórnia: University Science Books, 1986
38. H.L.Fang e R.L. Swofford, in *Ultrasensitive Laser Spectroscopy*, editado por D.S.Kliger, New York: Academic, Cap. 3, pp 176-232, 1983
39. M.S.Baptista, Métodos Analíticos Ultrasensíveis: Lente Térmica e Técnicas Correlatas, *Química Nova*, **22**, 565- 573, 1999.
40. H. Kogelnik, On the propagation of Gaussian beams of light through lenslike media including those with a loss or gain variation, *Applied Optics*, Vol.4, Issue 12, 1562, December , 1965.
41. H. Kogelnik, T.Li, Laser Beam and Resonators, *Proc. I.E.E.E.*, Vol.54, Issue 10, 1312, October, 1966; *Applied Optics*, **5(10)**, 1550, October 1966.
42. T.Catunda, A. Pataia, A. Romero, J.Sartori, L.A.O.Nunes, Laser de semiconductor Visível: um Instrumento Didático de Baixo Custo, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **20(3)**, Set., 1998
43. D. N. Nikogosyan, *Properties of Optical and Laser-Related Materials – A Handbook*, N.York: John Wiley & Sons Ltd., 1997.
44. T. Imasaka, and N. Ishibashi, Thermal lens Spectrophotometry, *Trends in analytical chemistry*, 1,273 (1982).

45. T. Izumitani, and H. Toratani, Temperature Coefficient of Electronic Polarizability in Optical Glasses, *Journal of Non-Crystalline Solids* , **40**, 611, 1980.
46. S.M.Lima, Aplicações da Técnica de Lente Térmica em Materiais Ópticos, *Dissertação de Mestrado*, São Carlos, 1999
47. T.Catunda, Conjugação de Fase e Modulação Transversal de Fase em Cristais Dopados com Cr^{+3} , *Tese de Doutorado*, São Carlos, 1989
48. S.M.Lima, Espectroscopia de Lente Térmica e de Lente de População em sólidos dopados com íons Terras-raras, *Tese de Doutorado*, São Carlos, 2003
49. V. Pilla, Espectroscopia Fototérmica e não-linear em cristais fluoretos e polímeros, *Tese de Doutorado*, São Carlos, 2001
50. A.P.Prudnikov, *Integrals and Séries*, V. 1 e 2, N.York: Gordon and Beach Science Publishers, 1986
51. I.S.Gradshteyn e I.M.Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, 4ed., N.York: Academic Press, 1965
52. W.Gröbner e N. Hofreiter, *Integraltafel*, V. 1 e 2, N.York: SpringerVerlag, 1975