**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

Silvio José Vitor Ferreira

**Modelo computacional para geração de multidões e
avaliação de desempenho de estimadores de multidão
baseados em textura**

São Carlos

2019

Silvio José Vitor Ferreira

**Modelo computacional para geração de multidões e
avaliação de desempenho de estimadores de multidão
baseados em textura**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Aplicada
Opção: Física Computacional

Orientador: Prof. Dr. Luciano da Fontoura Costa

Versão corrigida
(Versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos
2019

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ferreira, Silvio José Vitor

Modelo computacional para geração de multidões e avaliação de desempenho de estimadores de multidão baseados em textura / Silvio José Vitor Ferreira; orientador Luciano da Fontoura Costa - versão corrigida -- São Carlos, 2019.
55 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada Computacional) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2019.

1. Modelagem de multidão. 2. Renderização de multidão. 3. Análise de multidão. 4. Análise de textura. 5. Qualidade de estimação. I. Costa, Luciano da Fontoura, orient. II. Título.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Dr. Luciano da Fontoura Costa pela orientação e pelo apoio acadêmico, fundamentais para a realização deste trabalho.

Agradeço também a minha família, em especial minha mãe Maria da Penha Vitor Ferreira, meu pai Altair Donizete Ferreira e minha companheira Beatriz Helena Pereira pelo suporte afetivo e motivacional.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro para a realização desta pesquisa através do processo nº 130583/2016-2.

RESUMO

FERREIRA, S. J. V. **Modelo computacional para geração de multidões e avaliação de desempenho de estimadores de multidão baseados em textura.** 2019. 55p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

Métodos de estimação de multidão buscam determinar a quantidade de pessoas em uma imagem ou vídeo. Estes conceitos e técnicas tem sido sistematicamente explorados e desenvolvidos recentemente, com aplicações diversas em áreas como supervisão e segurança. Embora exista uma grande quantidade de bases de dados de imagens disponíveis para desenvolvimento e validação de métodos de estimação, são necessários novos estudos que avaliem sistematicamente o efeito das variáveis de obtenção das imagens no desempenho dos métodos de estimação. A proposta deste trabalho foi desenvolver um modelo computacional para a geração automática de imagens sintéticas de multidões e avaliar o desempenho de métodos de estimação de multidão baseados em textura nessas imagens. O ambiente virtual computacional é composto por um cenário tridimensional onde diversos modelos de pessoas são distribuídos em um plano. A distribuição de modelos, suas características, a distância e a direção da visão da câmera foram sistematicamente variados e as imagens obtidas foram analisadas por três métodos de estimação de multidão baseados em textura. A estimativa da medida foi derivada a partir do conjunto dos métodos e, em seguida, derivou-se uma estimativa para cada método. Os resultados indicaram que as condições de melhor estimação, em geral, foram com a câmera acima da multidão, multidões distribuídas uniformemente e indivíduos heterogêneos. Também foi encontrado que a precisão da estimação é menor quanto maior o número de pessoas, quanto mais distante está a câmera, quanto mais varia a densidade de multidão sobre a superfície e quanto mais paralelo está o ângulo de visão da câmera em relação ao horizonte. Por fim, um dos três métodos apresentou desempenho de estimação maior em multidões homogêneas quando analisados em separado. A abordagem computacional proposta neste estudo mostrou-se adequada para a avaliação e comparação de medidas de estimação de multidão e pode ser expandida e refinada para incluir novos parâmetros em trabalhos futuros.

Palavras-chave: Modelagem de multidão. Renderização de multidão. Análise de multidão. Análise de textura. Qualidade de estimação.

ABSTRACT

FERREIRA, S. J. V. **Computational model for crowd generation and performance evaluation of crowd texture-based measurements.** 2019. 55p.

Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

Crowd estimation methods seek to determine the number of people in an image or video. These concepts and techniques have been systematically explored and developed recently, with diverse applications in areas such as surveillance and safety. Although several databases are currently available for development and validation of estimation methods, further studies are needed to systematically evaluate the effects of imaging variables on the performance of estimation methods. This work proposal was to develop a computational model for automatic generation of synthetic crowd images and to evaluate the performance of texture-based crowd estimation methods in these images. The computational virtual environment is composed of a three-dimensional scenario where several models of people are distributed in a plane. The distribution of models, their characteristics, the distance and the direction of camera view were systematically varied and the images obtained were analyzed by three texture-based crowd estimation methods. The estimate of the measurement was derived from the set of methods and, afterwards, an estimate was derived for each method. The results indicated that the best estimation conditions, in general, were with the camera above the crowd, uniformly distributed crowds and heterogeneous individuals. It has also been found that the estimation accuracy is lower the larger the number of people, the farther the camera is, the greater the variation in crowd density over the surface and the more parallel the camera's viewing angle to the horizon. Finally, one of the three methods presented higher estimation performance in homogeneous crowds when analyzed separately. The computational approach proposed in this study was proved adequate to evaluate and compare crowd estimation measures and it can be expanded and refined to include new parameters in future work.

Keywords: Crowd modelling. Crowd rendering. Crowd analysis. Texture analysis. Measurement quality.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Amostra de imagens em diferentes perspectivas dos <i>datasets</i> PETS2009 e UCSD. As imagens de (a) até (h) são exemplos do <i>dataset</i> PETS2009 e as imagens de (i) até (l) representam exemplos do <i>dataset</i> UCSD.	19
Figura 2 – Procedimento desenvolvido neste estudo para a geração de imagens de multidões e análise do desempenho da estimação.	23
Figura 3 – Representação do ambiente computacional tridimensional.	24
Figura 4 – Imagens dos modelos utilizados na geração das multidões.	25
Figura 5 – Exemplos das imagens de multidões obtidas por meio da simulação descrita neste trabalho. A primeira linha contém exemplos DU e MHo. A segunda linha contém exemplos DU e MHe. A terceira linha contém exemplos DN e MHo. A quarta linha contém exemplos DN e MHe.	27
Figura 6 – Exemplos de imagens de multidão com diferentes densidades.	28
Figura 7 – Representação gráfica da máscara utilizada para a geração de uma MCNC.	30
Figura 8 – Exemplos de multidões e suas respectivas MCNC em representação gráfica para os parâmetros $D = 1$ e $\Theta = 0$	30
Figura 9 – Exemplos de multidões e seus respectivos espectros de Fourier em representação gráfica.	32
Figura 10 – Representação gráfica do cálculo dos atributos a partir de M_f de imagens. A imagem (a) representa o procedimento de partição radial para calcular $S_r(r_1, r_2)$, enquanto que (b) representa o procedimento de partição angular para calcular $S_\phi(\phi_1, \phi_2)$	34
Figura 11 – Representação do procedimento <i>box counting</i> utilizado neste trabalho em uma imagem de multidão. (a) é a imagem original, (b) e (c) são as 2 primeiras partições de contagem e (d) é o gráfico $\ln N(L) = D_f(-\ln L + \ln L_{max})$ com o coeficiente angular D_f calculado.	35
Figura 12 – Exemplos de gráficos do estimador C_{P1} em função do número de pessoas da multidão para as quatro configurações do parâmetro d	38
Figura 13 – Exemplos de gráficos das variáveis de interesse e curvas de suavizações realizadas para a obtenção de Q	39
Figura 14 – Resultados de $Q(n_p)$ para alguns valores de θ	41
Figura 15 – Resultados de $Q(\theta)$ para alguns valores de n_p	42
Figura 16 – Resultados de $Q(n_p)$ para diferentes distribuições (DU e DN) e homogeneidades (MHo e MHe). Para cada n_p foi calculada a média para todos os valores de θ	44

Figura 17 – Resultados de $Q(\theta)$ para diferentes distribuições (DU e DN) e homogeneidades (MHo e MHe). Para cada θ foi calculada a média para todos os valores de n_p	45
Figura 18 – Resultados de $Q(n_p)$ para alguns valores de θ para seus respectivos estimadores.	46
Figura 19 – Resultados de $Q(\theta)$ para alguns valores de n_p para seus respectivos estimadores.	47
Figura 20 – Resultados de $Q(n_p)$ para diferentes distribuições (DU e DN) e homogeneidades (MHo e MHe). Para cada n_p foi calculada a média para todos os valores de θ	49
Figura 21 – Resultados de $Q(\theta)$ para diferentes distribuições (DU e DN) e homogeneidades (MHo e MHe). Para cada θ foi calculada a média para todos os valores de n_p	50

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AE	Análise Espectral
DN	Distribuição Normal
DU	Distribuição Uniforme
FSG	Filtro de Savitzki-Golay
MCNC	Matriz de Coocorrência em Níveis de Cinza
MHe	Multidão Heterogênea
MHo	Multidão Homogênea
PCA	<i>Principal Component Analysis</i> (Análise de Componentes Principais)
PETS2009	<i>Performance Evaluation of Tracking and Surveillance 2009</i>
TF	Transformada de Fourier
UCSD	<i>University of California San Diego</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

E	Espaço cartesiano da simulação
x, y, z	Coordenadas do espaço cartesiano da simulação
O	Origem
P	Plano da simulação
M_p	Matriz de posições
x', y'	Coordenadas da matriz M_p
S	Espaço esférico da simulação
d, ϕ, θ	Coordenadas esféricas da simulação
K	Coroa esférica da simulação
C	Câmera da simulação
d_1, d_2, d_3, d_4	Distâncias da câmera ao centro da multidão
m	Ordem da matriz M_p
μ	Média
σ	Desvio padrão
n_p	Número de pessoas da multidão
n_{max}	Número máximo de pessoas da multidão
M, N	Dimensões da imagem
I	Imagem
M_C	Matriz de coocorrência
i, j	Coordenadas da matriz M_C
D	Parâmetro de distância da M_C
Θ	Parâmetro de direção da M_C
l	Intensidade do pixel
l_{max}	Intensidade máxima do pixel

P_{M_C}	Função densidade de probabilidade conjunta de M_C
S_c	Parâmetro de contraste
S_e	Parâmetro de energia
S_s	Parâmetro de entropia
S_h	Parâmetro de homogeneidade
f	Função
$\hat{f}$	Transformada de Fourier de f
u, v	Coordenadas no espaço de frequências
$\hat{I}$	Transformada de Fourier de I
$M_{\hat{I}}$	Magnitude de $\hat{I}$
S_r	Parâmetro de soma no intervalo radial
S_ϕ	Parâmetro de soma no intervalo angular
A	Conjunto
N	Numero de distintas formas de A
R	Fator de escala fractal
D_f	Dimensão fractal
L	Tamanho da caixa
L_{max}	Tamanho da máximo da caixa
C_{P1}	Primeira componente principal
M_t	Matriz de transformação
$\vec{\alpha}, \vec{\beta}$	Vetores de atributos
COV	Covariância
M_{COV}	Matriz de covariância
G_m	Variação preservada
Q	Qualidade

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	DESENVOLVIMENTO E METODOLOGIA	23
2.1	Simulação computacional de multidão	24
2.2	Medidas de estimação de multidão baseadas em textura	27
2.2.1	Matriz de coocorrência em níveis de cinza	29
2.2.2	Análise espectral	31
2.2.3	Dimensão fractal	33
2.3	Análise de dados	36
2.3.1	Análise de componentes principais	36
2.3.2	Qualidade da medida	38
3	RESULTADOS E DISCUSSÃO	41
3.1	Efeito das variáveis da multidão na estimação por medidas baseadas em textura	42
3.2	Comparação de estimadores de multidão baseados em textura	46
4	CONCLUSÃO	51
	REFERÊNCIAS	53

1 INTRODUÇÃO

O crescimento populacional e a concentração cada vez maior de pessoas nos grandes núcleos urbanos fez com que o fenômeno das multidões se transformasse em paisagens cotidianas, principalmente nas grandes metrópoles. Por essa razão, o fenômeno das multidões vem despertando o interesse acadêmico de sociólogos, urbanistas, psicólogos, engenheiros e cientistas da computação.

Em termos gerais, uma multidão é definida como um conjunto de objetos que apresentam uma distribuição e dinâmica espacialmente e/ou temporalmente coerente.¹ Nessa área, os objetos em questão quase sempre são pessoas. O interesse científico e acadêmico no estudo das multidões é motivado na necessidade prática de auxiliar na tomada de decisões corretas e rápidas para cada contexto de interesse.² Resultados das pesquisas nessa área podem ajudar na criação de sistemas de monitoramento capazes de detectar eventos potencialmente perigosos para a segurança das pessoas em um local, auxiliar na construção de ambientes que diminuam a ocorrência desses eventos, permitir um melhor manejo de multidões em situações de risco e otimizar a utilização de espaço público. Além disso, a automatização de tarefas desempenhadas tradicionalmente por humanos pode propiciar vários benefícios, incluindo melhor acurácia, rapidez, repetibilidade, e operação livre de fadiga.

As pesquisas da área de multidões são focadas na determinação do número de pessoas, dinâmica de multidões, influências de variáveis ambientais, rastreamento de alvos e detecção de eventos.³ Do ponto de vista computacional, o itinerário de pesquisa envolve extrair medidas quantitativas das cenas e aplicá-las em modelos matemáticos ou estatísticos que forneçam uma classificação, caracterização ou identificação de um evento.¹

Na área de estimação de multidões, o foco do estudo está na determinação da quantidade de indivíduos, seja por contagem direta ou por estimação indireta. Na abordagem direta, técnicas computacionais de segmentação e detecção de objetos são mais utilizadas e a estimação é feita pela contagem direta dos indivíduos detectados. Essa abordagem encontra dificuldades em condições com altas densidades de pessoas e muita oclusão. Por outro lado, abordagens indiretas se baseiam na medida de atributos visuais como intensidade de pixels e padrões de textura, auxiliados por modelos estatísticos e de classificação como redes neurais para obtenção da estimação.⁴ Técnicas indiretas vêm proporcionando resultados mais robustos do que os encontrados em abordagens diretas na estimação de multidões com muitos indivíduos.²

Muitas das técnicas empregadas na estimação de multidão consistem em aplicações e combinações de métodos já desenvolvidos em áreas de visão computacional, computação

gráfica e inteligência artificial. Em uma sequência de trabalhos, Marana e colaboradores utilizam diversas técnicas de análise de textura para classificar diferentes densidades de pedestres em imagens capturadas em uma estação de trens em Londres.^{5, 6, 7, 8} Nesses trabalhos os autores utilizaram de métodos de Matriz de Coocorrência em Níveis de Cinza (MCNC), Análise Espectral (AE) e Dimensão Fractal (DF) para compor seu vetor de atributos e, em seguida, redes neurais, classificadores Bayesianos e ajuste de funções para classificar imagens, obtendo taxa de acertos de 70% até 95% em cinco categorias que variavam de baixas até altas densidades de pessoas. Chan e Vasconcelos aplicaram regressão Bayesiana para contar pessoas em multidões com uma série de medidas de atributos visuais incluindo medidas de segmentação, forma, área, perímetro, bordas e textura.⁹ Lamba e Nain utilizaram técnicas de textura, como Análise de Fourier e Transformada de Wavelet, aliadas a técnicas de detecção de objetos como Histograma de Gradientes Orientados para contagem e Transformada de Atributos Invariante a Escala em uma abordagem de fragmentação das imagens e posterior tratamento de descontinuidades por Campo Aleatório de Markov, de modo que obtiveram erros mais baixos de estimação em relação a outros trabalhos para 4 diferentes *datasets* públicos de pedestres, especialmente para altas densidades de pessoas.¹⁰

Apesar da evolução das metodologia e técnicas, ainda remanescem dificuldades na estimação quando há oclusão de partes das pessoas, distorções de perspectiva, sombras, reflexos, outros objetos, variações na densidade de indivíduos e existência de vazios ao longo do espaço.²

O desenvolvimento de medidas de estimativa muitas vezes são validados por meio da utilização de *datasets* públicos. Se, por um lado, a escolha de *datasets* públicos permite a comparação de resultados de estimativas entre diferentes trabalhos e permite a visualização da evolução das estimativas com o refinamento das técnicas, por outro, os resultados podem ficar restritos em função de parâmetros e limitações impostas pelo *dataset*.

Em uma recente revisão de literatura com 83 trabalhos de análise de multidão, Zitouni e colaboradores constataram que entre as 14 ocorrências de trabalhos de estimação de pessoas, 5 utilizaram dados privados, 5 utilizaram o *dataset* da *University of California San Diego* (UCSD) e 3 utilizaram o *dataset Performance Evaluation of Tracking and Surveillance* 2009 (PETS2009).¹ Na [Figura 1](#), observamos que ambos os *datasets* são formados por cenas reais de pedestres caminhando em calçadas de campi universitários. Observa-se que estes *datasets* não apresentam imagens capturada diretamente acima das multidões. Além disso, não há um número de pessoas exaustivo para um intervalo, por exemplo de 1 até 20. Por fim, alguns pontos das imagens nunca receberão pedestres, enquanto outros serão priorizados pela trajetória das pessoas. Esses exemplos sugerem que as condições e parâmetros de captura e de multidão em que as técnicas de estimação estão sendo validadas em grande parte dos estudos, apesar de realista, não esgotam a

quantidade e amplitude de parâmetros em que multidões podem ser representadas em uma imagem. Além disso, esses *datasets* não permitem uma abordagem em que permita realizar um estudo sistemático do efeito de uma variável específica de captura ou da multidão no resultado da estimação.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

(g)

(h)

(i)

(j)

(k)

(l)

Figura 1 – Amostra de imagens em diferentes perspectivas dos *datasets* PETS2009 e UCSD. As imagens de (a) até (h) são exemplos do *dataset* PETS2009 e as imagens de (i) até (l) representam exemplos do *dataset* UCSD.

Fonte: CHAN; VASCONCELOS;¹¹ FERRYMAN; SHAHROKNI.¹²

Para o desenvolvimento de bases de dados que supram as demandas descritas acima

de modo sistemático e eficiente, pode ser sugerida a utilização da simulação computacional. Técnicas de simulação computacional de fenômenos se expandiram para todas as áreas de pesquisa e do conhecimento nas última décadas. Essas abordagens fazem o uso do poder de processamento de computadores, a partir da tradução de fenômenos físicos, biológicos e sociais em algoritmos matemáticos capazes de descrever o modelo teórico e obter resultados que permitam interpretações a respeito do comportamento do sistema desejado.¹³ Pode-se considerar, hoje, que a simulação computacional possui um *status* equivalente e complementar aos da teoria e da experimentação em ciências, sendo capaz de realizar a experimentação virtual de modelos teóricos ou auxiliar na modelagem teórica de um fenômeno a partir de dados reais.

Na área de simulação computacional de multidões identifica-se dois grandes campos que concentram grande parte dos esforços acadêmicos. O primeiro foca na simulação da dinâmica dos indivíduos, de modo a obter uma previsão da trajetória e do comportamento dos indivíduos e da multidão em fluxos contínuos e eventos.¹ O desenvolvimento das simulações nesta abordagem são baseadas em modelos teóricos como dinâmica de fluidos, interações de força e sistemas complexos, assim como em algoritmos derivados de dados experimentais e heurísticas de estudos sociais auxiliado por técnicas de inteligência artificial e reconhecimento de padrões.¹⁴ O segundo campo está intimamente relacionado com a área de computação gráfica e o seu objetivo é a produção de mídias (figuras, vídeos, ambientes interativos e jogos) com foco no realismo visual e no desempenho de renderização em tempo real.¹⁵

Observa-se que a utilização de métodos de renderização de multidões pode proporcionar uma metodologia sistemática para a geração de material em um ambiente controlado. Pode-se visar duas vantagens nesse tipo de abordagem. Em primeiro lugar, pode-se realizar a geração um conjunto homogêneo e neutro de multidões no que diz respeito a variáveis e parâmetros. Em segundo lugar, pode-se gerar conjuntos de dados específicos que permitam a avaliação sistemática do efeito da variação de um ou mais parâmetros no resultado de medidas. É neste contexto que insere-se a motivação deste trabalho.

Sendo assim, almejou-se alcançar dois objetivos principais com este estudo. O primeiro foi conceber e implementar uma simulação computacional de um ambiente de multidão que permita a produção de imagens sintéticas. Nessa simulação, deve-se ser capaz de gerar multidões de pessoas a partir de modelos tridimensionais, variando parâmetros como número e características dos indivíduos, distribuição espacial da multidão e localização e direção de visão da câmera. O segundo objetivo foi validar a utilização dessas imagens geradas, realizando dois experimentos. No primeiro experimento foi avaliado o efeito dos diversos parâmetros de multidão na acurácia da estimação utilizando um conjunto medidas de texturas. Já no segundo experimento foi efetuada uma comparação entre as diferentes técnicas de estimação de multidão do conjunto anterior. Espera-se que este procedimento

ofereça uma abordagem válida, útil e complementar ao uso de *datasets* de multidões reais em estudos sobre estimação de densidade de multidões e contagem de indivíduos.

Essa dissertação segue apresentado a concepção e implementação do modelo computacional de geração de imagens. Em seguida, são detalhadas as técnicas de estimação de multidões baseadas em textura utilizadas para exemplificar o modelo. Após, é descrita a metodologia de avaliação e comparação de medidas de multidão. Por fim, relata-se e discute-se o resultado de experimentos de estimação que exemplifiquem e validem a abordagem de modelagem proposta.

2 DESENVOLVIMENTO E METODOLOGIA

Neste capítulo, apresenta-se o procedimento realizados na construção do ambiente computacional para a geração de multidões e o procedimento de análise das imagens geradas.

Figura 2 – Procedimento desenvolvido neste estudo para a geração de imagens de multidões e análise do desempenho da estimativa.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na [Figura 2](#), pode-se observar um diagrama da abordagem adotada neste trabalho. A pesquisa envolve o escopo da computação gráfica, para a criação das imagens de multidões, e do processamento de imagens, responsável pelas técnicas de análise que fornecem as medidas de multidão. A primeira parte do estudo envolve a criação de um ambiente gráfico virtual (a) para a geração de uma multidão a partir de diversos modelos de indivíduos. Este programa recebe um conjunto de parâmetros de entrada, envolvendo variáveis da câmera, multidão e indivíduos e retorna um conjunto de imagens de multidões correspondentes (b). A partir dessas imagens foi aplicado um conjunto de técnicas de processamento de imagens para obter atributos (c) cujos valores permitem realizar estimativa das diversas multidões geradas e, em seguida, verifica-se o desempenho dessas estimativas por meio de metodologia de análise (d) que permita uma avaliação e uma comparação adequada entre diferentes medidas. No final, é esperado que os resultados forneçam indicações de melhorias que podem ser aplicadas em diversas fases do modelo, seja na inclusão ou a mudança do intervalo de uma variável ou ainda o aprimoramento das técnicas de extração e análise das imagens, visando a obtenção de resultados de estimativa mais satisfatórios em função dos objetivos de pesquisa.

2.1 Simulação computacional de multidão

Um ambiente gráfico computacional tridimensional é composto, basicamente, por objetos descritos virtualmente em relação a um sistema de coordenadas e pela câmera.¹⁶ A câmera, baseada em princípios físicos da propagação de luz e da visão biológica, gera a representação visual dos objetos a partir de parâmetros como localização, perspectiva e ângulo de abertura. Nosso modelo se inicia definindo o espaço, a câmera e as restrições de ambos em função das variáveis escolhidas para o estudo.

Figura 3 – Representação do ambiente computacional tridimensional.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O ambiente da simulação é definido dentro de um sistema de coordenadas cartesiano tridimensional $E(x, y, z)$ no espaço XYZ e um ponto $O(0, 0, 0)$ que define a origem (vide Figura 3). Neste espaço definimos um plano $P(x, y)$ em $z = 0$. Este plano vai representar a superfície onde serão inseridos os modelos da multidão. Nesta superfície representaremos uma matriz quadrada finita $M_p(x', y')$ centrada na origem. Cada elemento (x', y') de M_p determina um ponto (x, y) no plano P , equidistantes entre si e cujo intervalo foi selecionado para minimizar a ocorrência de colisão entre os modelos no momento da renderização. Em suma, cada conjunto de indivíduos que compõe uma multidão são designados nas células de M_p que, por sua vez, determina as coordenadas no plano P em que os indivíduos são renderizados.

Agora, definimos um sistema de coordenadas esférico $S(d, \phi, \theta)$ com origem no mesmo ponto O . Neste espaço, definimos uma coroa esférica $K(d, \theta)$ fixa em $\phi = 0$. A câmera $C(d, \theta)$ do sistema será posicionada na coroa K , sempre apontando para um ponto

focal em O e sua posição poderá variar de acordo com as restrições estabelecidas pelos parâmetros de estudo.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

Figura 4 – Imagens dos modelos utilizados na geração das multidões.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os objetos, que serão posicionados em P por meio da matriz M_p , são modelos tridimensionais representando indivíduos. Esses modelos foram obtidos em bases de dados abertas e livres na internet. Cada um dos modelos já possui pré-determinados seus formatos, propriedades de materiais e texturas (vide Figura 4). Também foi utilizada uma combinação de iluminação global e uma fonte de luz posicionada em $(0, 0, \infty)$ para compor a cena. Ao final da renderização do cenário, uma imagem de resolução 500×500 pixels é gerada.

Esta simulação computacional foi desenvolvida a fim de receber um conjunto de parâmetros de entrada, renderizar o cenário e retornar uma imagem. Neste trabalho, cinco variáveis foram selecionadas e individualmente manipuladas para obter os conjuntos de imagens. Estas variáveis são apresentadas e brevemente discutidas a seguir.

As primeiras duas variáveis foram a distância d e ângulo θ da câmera. A posição da câmera influencia diretamente o resultado de uma estimação de multidão, pois ela afeta três aspectos relevantes para uma tarefa de estimação: a distância dos indivíduos, a perspectiva da multidão e a oclusões que podem vir a ocorrer.³ Sendo assim, foi determinado

um conjunto de quatro distâncias $d = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$, selecionadas de modo a produzir configurações de multidões com todos os indivíduos dentro da visão da câmera para M_p de ordem $m = \{5, 10, 15, 20\}$, respectivamente. Já o ângulo θ variou dentro da seguinte sequência de valores $\theta = \{0^\circ, 5^\circ, \dots, 85^\circ\}$.

Em seguida, definiu-se três variáveis de propriedades da multidão. A primeira foi a distribuição de indivíduos na M_p . A fim de obter um conjunto de dados neutros, foi determinada a alocação aleatória dos modelos na M_p . Essa alocação aleatória ocorreu de acordo com uma das seguintes distribuições probabilísticas: Distribuição Uniforme (DU) e Distribuição Normal (DN). Essas distribuições foram selecionadas pois produzem multidões com diferentes densidades e métodos de estimação se comportam diferentemente frente a variação de densidade em uma multidão.¹⁰ O parâmetro DU gera multidões com uma única densidade de indivíduos ao longo de todo o plano, enquanto que DN gera uma multidão com densidade decrescente a partir do ponto central μ . Para a alocação dos indivíduos conforme DN determinamos que μ seria selecionado aleatoriamente entre os elementos de M_p e fixamos $3\sigma = m$ de cada respectiva M_p .

Em segundo lugar, foi variado o número de pessoas $n_p = \{1, 2, 3, \dots, n_{max}\}$, onde n_{max} é o máximo de elementos de cada respectiva matriz M_p para DU $\{25, 100, 225, 400\}$. Para DN, os valores variaram até $0.75n_{max}$, pois observa-se que para altos valores de n_p a alocação da distribuição normal se aproxima de uma alocação circular muito densa e perdemos a característica motivadora da utilização deste parâmetro que é variação de densidade de multidão no espaço.

Por fim, foi variado aquilo que chamaremos de homogeneidade da multidão. A homogeneidade representa o quanto os modelos de indivíduos são semelhantes entre si. Essa variável foi concebida pois é possível encontrar casos em que os indivíduos de uma multidão são muito semelhantes, como em contextos uniformizados (quartéis e escolas), enquanto que há contextos em que os indivíduos das multidões são diversos (ruas e estádios). Neste caso, determinamos apenas 2 parâmetros: Multidão Homogênea (MHo) e Multidão Heterogênea (MHe). As multidões MHo são compostas apenas pelo modelo (a) da Figura 4 e todo o restante dos parâmetros do modelo são iguais e constantes. Já as multidões MHe são compostas por uma alocação ordenada e sequencial dos modelos e os parâmetros de dimensão na direção z e no plano xy foram variados aleatoriamente em um intervalo 10% acima e abaixo de um valor padrão.

Finalmente, a partir de todas as variáveis estabelecidas acima, foi feita uma permutação entre todas as condições e parâmetros descritos acima e geramos 5 imagens para cada uma dessas permutações. Exemplos do material gerado pela simulação podem ser observados na Figura 5. As imagens foram geradas em cores (RGB), porém as análises propostas neste trabalho utilizaram versões convertidas em tons de cinza das multidões geradas.

Figura 5 – Exemplos das imagens de multidões obtidas por meio da simulação descrita neste trabalho. A primeira linha contém exemplos DU e MHo. A segunda linha contém exemplos DU e MHe. A terceira linha contém exemplos DN e MHo. A quarta linha contém exemplos DN e MHe.

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.2 Medidas de estimação de multidão baseadas em textura

A análise de imagens é uma ampla área de estudo cujo foco está na produção de métodos capazes de descrever, classificar e prever características de imagens. Um dos

descritores mais informativos e relevantes em análise de imagens é a textura. A textura não possui uma definição única e rígida, de modo que alguns dos seus aspectos dependem tanto da área, quanto da aplicação desejada.¹⁷ No que diz respeito a este trabalho, podemos definir a textura como uma função da variação espacial de intensidade dos pixels.¹⁸ Do ponto de vista perceptual podemos descrever uma textura de acordo com características locais de suavidade, regularidade e granularidade em uma superfície. A análise de textura provou ser uma ferramenta muito versátil, com aplicação que incluem detecção de objetos e pessoas, segmentação de imagens, controle de qualidade industrial, análise de imagens médicas, sensoriamento remoto de locais e vegetações e, finalmente, análise e estimação de multidões, que é o foco deste trabalho.¹⁹

Figura 6 – Exemplos de imagens de multidão com diferentes densidades.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se que imagens de multidões de diferentes tamanhos produzem diferentes padrões de texturas (vide Figura 6). Multidões com baixo número de pessoas apresenta um padrão granular grosso com pouca variação na intensidade dos pixels, enquanto que imagens de multidões com alto número de pessoas apresenta um padrão granular fino e muita variação de intensidade.⁵ Esta correlação entre padrões de textura e densidades de multidões motivou a aplicação de técnicas de análise de textura para a de estimação de multidões com relevante grau de sucesso.^{2, 3, 7, 20}

Por essa razão, foi proposta a utilização de medidas de multidão baseadas em textura para analisar o conjunto de imagens gerada pelo simulador de multidão. Foram selecionadas três diferentes técnicas derivadas de abordagens distintas, a fim de avaliar de maneira ampla a acurácia das medidas e, em um segundo momento, determinar o desempenho relativo de cada medida em função de cada parâmetro de multidão.

2.2.1 Matriz de coocorrência em níveis de cinza

Uma das características mais relevantes de uma textura é a distribuição espacial de valores de pixel. Porém, observou-se que a distribuição espacial de pixels em uma textura não são independentes, ou seja, eles apresentam algum nível de correlação. Isso significa que um valor de pixel em uma região da imagem ocorre com mais frequência em função dos valores na sua proximidade. Deste modo, é possível obter um descritor capaz de caracterizar padrões locais e a sua variação em função de intervalos e direções definidas. Essa observação levou Haralick a formular a abordagem da MCNC, que se tornou uma das mais conhecidas e utilizadas técnicas da área de análise de textura.²¹ Posteriormente, esta abordagem foi aplicada em análise de multidão também fornecendo relevante contribuição.^{5, 6, 7, 20, 22} Apesar de ser um método muito eficaz, seu custo computacional é muito alto pois depende do cálculo de muitos parâmetros por pixel de cada imagem.¹⁷

O procedimento básico deste método envolve a obtenção de uma matriz de probabilidade de ocorrência condicional de valores de pixels para uma dada imagem. Assumindo uma imagem de tamanho $M \times N$ como a função $I(x, y)$ de valores de níveis de cinza e sendo $I_1 = (x_1, y_1)$ e $I_2 = (x_2, y_2)$ intensidades dos respectivos pixels, definimos $M_C(i, j|D, \Theta)$ como:

$$M_C(i, j|D_1, \Theta_1) = \#\{(I_1, I_2) \in M \times N | D(I_1, I_2) = D_1, \Theta(I_1, I_2) = \Theta_1, I_1 = i, I_2 = j\} \quad (2.1)$$

onde i e j são valores de níveis de cinza de I , D_1 é a distância e Θ_1 é a direção entre os pixels. Em outras palavras, $M_C(i, j|D, \Theta)$ representa a quantidade de pares de pixels com valores i e j , respectivamente, sendo j o valor do pixel a uma distância de D pixels na direção Θ em relação ao pixel com valor i .

Para este trabalho foi utilizado o procedimento padrão na literatura da área, gerando M_C para os parâmetros $D = 1$ e $\Theta = \{0, 45, 90, 135\}$, totalizando 4 matrizes por imagem. O procedimento de extração de dados para a MCNC pode ser visualizado a partir de uma máscara conforme representada na [Figura 7](#) que percorre $I(x, y)$ para cada ponto no intervalo $x = \{1, 2, \dots, M - 1\}$ e $y = \{1, 2, \dots, N - 1\}$ contando a ocorrência dos respectivos pares de intensidade de pixels.

Na [Figura 8](#), pode-se observar o exemplo de algumas imagens e suas respectivas

		0° j_1	45° j_2	
		i	90° j_3	
			135° j_4	

Figura 7 – Representação gráfica da máscara utilizada para a geração de uma MCNC.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 8 – Exemplos de multidões e suas respectivas MCNC em representação gráfica para os parâmetros $D = 1$ e $\Theta = 0$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

matrizes representadas graficamente. Nota-se que matrizes com baixas densidades de pessoas tendem a ter os valores concentrados em pequenas regiões e na diagonal principal, enquanto que matrizes com alta densidade de pessoas tendem a apresentar valores mais distribuídos ao longo matriz. Para quantificar algumas propriedades da distribuição dos valores na MCNC realizamos o cálculo de quatro medidas por matriz, conforme metodologia estabelecida na literatura.^{5, 20, 21, 22} Para uma imagem I composta por pixels de intensidade $l = \{0, 1, 2, \dots, l_{max}\}$ e $P_{MC}(i, j|D, \Theta)$ uma função de densidade de probabilidade conjunta dos respectivos $M_C(i, j|D, \Theta)$, calcula-se:

- Contraste:

$$S_c(D, \Theta) = \sum_{i=0}^{l_{max}} \sum_{j=0}^{l_{max}} (i - j)^2 M_C(i, j|D, \Theta) \quad (2.2)$$

O contraste é uma medida que capta a magnitude de diferenças locais da imagem. Quanto maior a magnitude, maior o contraste.

- Energia:

$$S_e(D, \Theta) = \sum_{i=0}^{l_{max}} \sum_{j=0}^{l_{max}} M_C(i, j|D, \Theta)^2 \quad (2.3)$$

A energia indica a granularidade de uma textura. Quanto mais granular, menor seu valor.

- Entropia:

$$S_s(D, \Theta) = \sum_{i=0}^{l_{max}} \sum_{j=0}^{l_{max}} -P_{M_C}(i, j|D, \Theta) \log P_{M_C}(i, j|D, \Theta) \quad (2.4)$$

A entropia reflete a complexidade da textura. Quanto mais distribuído os valores em M_C , maior a entropia.

- Homogeneidade:

$$S_h(D, \Theta) = \sum_{i=0}^{l_{max}} \sum_{j=0}^{l_{max}} \frac{M_C(i, j|D, \Theta)}{1 + (i - j)^2} \quad (2.5)$$

A homogeneidade representa a uniformidade local da textura. Quanto mais uniforme, maior o valor.

Ao final do procedimento, o vetor de atributos de cada imagem recebe um total de 16 valores de contribuição do método de MCNC.

2.2.2 Análise espectral

Uma imagem $I(x, y)$ representa a relação de intensidade de pixels ao longo do espaço $M \times N$. Pode-se observar que imagens de diferentes texturas apresentam uma correlação com mudança no padrão de variação de intensidade de pixels.^{5, 6} O procedimento de AE é capaz de produzir um novo conjunto de dados que explicita esta informação. A AE parte do princípio que a variação de intensidade dos pixels de uma imagem é análoga a variação de um sinal no tempo. Por meio de uma operação matemática chamada Transformada de Fourier (TF), podemos calcular um novo conjunto de dados de I em função da frequência espacial em que as intensidades variam ao longo de $M \times N$.

A TF de uma função $f(x)$ contínua unidimensional é definida como:

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx \quad (2.6)$$

onde $\hat{f}$ é a função transformada de f com seu domínio nos números complexos, portanto possuindo parte real $Re[\hat{f}(u)]$ e imaginária $Im[\hat{f}(u)]$ e u é a frequência espacial. Como a nossa $I(x, y)$ é formada por pixels discretos limitados em $M \times N$, utilizamos a versão discreta bidimensional da TF, dada por:

$$\hat{I}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_0^{M-1} \sum_0^{N-1} I(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} \quad (2.7)$$

O valor de $\hat{I}$ para a análise de textura pode ser apreciada pelo cálculo da magnitude $M_{\hat{I}}$, calculada por:

$$M_{\hat{I}}(u, v) = \sqrt{Re[\hat{I}(u, v)]^2 + Im[\hat{I}(u, v)]^2} \quad (2.8)$$

e por fim, deslocamos as frequências baixas dos cantos para o centro.

Figura 9 – Exemplos de multidões e seus respectivos espectros de Fourier em representação gráfica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O resultado desse procedimento para algumas imagens de multidão podem ser observados na [Figura 9](#). É possível verificar que em multidões de baixa densidade, os maiores valores de magnitude $M_{\hat{I}}$ se concentram no centro da imagem, enquanto que multidões de alta densidade os valores de magnitude estão mais distribuídos.

A fim de extrair um conjunto de atributos que representem as observações feitas anteriormente, considere $M_{\hat{f}}(r, \phi)$ na sua forma polar. Podemos definir:

$$S(r) = \sum_{\phi=0}^{\pi} M_{\hat{f}}(r, \phi) \quad (2.9)$$

que corresponde a soma de todos os valores de $M_{\hat{f}}$ a uma distância r do centro, e

$$S(\phi) = \sum_{r=1}^R M_{\hat{f}}(r, \phi) \quad (2.10)$$

correspondendo a soma de todos os valores de $M_{\hat{f}}$ em uma direção ϕ , onde R é a distância do centro a borda da imagem e geralmente assume o valor $\frac{N}{2}$ para uma imagem $N \times N$.

Ao invés de realizar essa soma para todos estes valores, selecionamos 8 intervalos iguais para r variando de 0 a $\frac{N}{2}$ e 16 intervalos iguais para ϕ variando de 0 a π e definiremos cada um desses cálculos como um atributo da imagem. Sendo assim, para cada par r_1 e r_2 :

$$S_r(r_1, r_2) = \sum_{r=r_1}^{r_2} S(r) \quad (2.11)$$

e para cada par ϕ_1 e ϕ_2 :

$$S_{\phi}(\phi_1, \phi_2) = \sum_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} S(\phi) \quad (2.12)$$

Os procedimentos descritos acima podem ser visualizados na [Figura 10](#). Ao final, teremos 8 atributos correspondentes aos intervalos radiais de S_r e 16 atributos correspondentes aos intervalos angulares S_{ϕ} .

2.2.3 Dimensão fractal

Há uma grande gama de fenômenos naturais que exibem comportamento semelhantes em diferentes níveis de escala. Fenômenos desta natureza têm sido descritos e abordados na ciência por leis de potência. Entretanto, características como a auto similaridade tendem a ser de difícil tratamento via geometria Euclidiana.²³ Nesse contexto, desenvolveu-se a pesquisa sobre fractais, que são objetos geométricos que apresentam auto similaridade em diferentes níveis de escala. Essa abordagem expandiu a fronteira da descrição, classificação e interpretação de formas complexas e produziu um grande número de técnicas aplicáveis em problemas de análise de imagens e textura.^{24, 25}

A fim de quantificar a propriedade de auto similaridade de um fractal, lança-se mão do conceito de DF. Dado um conjunto fechado A em um espaço Euclidiano, o conjunto

Figura 10 – Representação gráfica do cálculo dos atributos a partir de M_f de imagens. A imagem (a) representa o procedimento de partição radial para calcular $S_r(r_1, r_2)$, enquanto que (b) representa o procedimento de partição angular para calcular $S_\phi(\phi_1, \phi_2)$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A é dito auto similar se A for composto de N formas distintas de si mesmo e cada uma reduzida em um fator de R . Sendo assim, definimos DF como:

$$D_f = \frac{\log N}{\log \frac{1}{R}} \quad (2.13)$$

Portanto, D_f é uma medida de proporcionalidade entre N objetos auto similares e a sua escala R em um fractal. Deste modo, quanto maior for a D_f de um objeto ou imagem, maior é a sua complexidade.¹⁷ No caso de multidões, D_f costuma apresentar uma relação linear com o número de indivíduos.⁸

Como as formas de um fractal na natureza e em aplicações práticas é apenas estatisticamente auto similar, foi necessário o desenvolvimento de algoritmos para a estimação de D_f . Um dos procedimentos mais utilizados, e que foi aplicado neste trabalho, é o chamado *box counting* (vide Figura 11). Nessa abordagem, dividimos a imagem em uma grade de caixas de tamanho L e contamos o número de caixas contendo bordas de objetos na imagem. Então repetimos o procedimento para sucessivos valores menores de L . Por fim, D_f é dado pelo coeficiente angular da seguinte curva:

$$\ln N(L) = D_f(-\ln L + \ln L_{max}) \quad (2.14)$$

onde $N(L)$ é o número de caixas contadas para caixas de tamanho L e L_{max} é o maior valor de L .

Figura 11 – Representação do procedimento *box counting* utilizado neste trabalho em uma imagem de multidão. (a) é a imagem original, (b) e (c) são as 2 primeiras partições de contagem e (d) é o gráfico $\ln N(L) = D_f(-\ln L + \ln L_{max})$ com o coeficiente angular D_f calculado.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste procedimento, as imagens de multidão foram previamente pré processadas por meio de um filtro de detecção de bordas cujo resultado é um contorno binário. Para obter o contorno das imagens foi utilizado o algoritmo de Canny* com o parâmetro do filtro Sobel ajustado para núcleos de tamanho 3, 5 e 7.

Deste modo, ao final do procedimento, obteve-se 3 atributos de DF para cada

* Uma descrição do funcionamento do algoritmo de Canny pode ser encontrada em CANNY.²⁶

imagem.

2.3 Análise de dados

Ao final do procedimento de extração de atributos, obtêm-se um vetor de atributos com 43 medidas para cada uma das imagens analisadas. Entretanto, esses dados não fornecem diretamente uma representação da estimação do número de indivíduos em uma cena. Para isso, deve-se derivar um estimador a partir dos atributos obtidos. O procedimento de obtenção deste estimador de multidões baseou-se em duas hipóteses.

A primeira hipótese é de que os atributos devem apresentar um grande grau de correlação entre si. Essa hipótese advém da constatação que todas as metodologias extraem atributos que descrevem propriedades de textura e são capazes de produzir detecção e classificações com alto grau de precisão.^{18, 19} A segunda hipótese é que, mais do que texturas, esses atributos devem estar altamente correlacionados com o número de pessoas da imagem. Essa hipótese sustenta-se na constatação de que os procedimentos de análises adotados forneceram bons resultados de classificação e estimação de multidões na literatura, conforme já discutido anteriormente.^{8, 9}

Espera-se que uma combinação dos atributos extraídos nos forneça uma variável capaz de realizar a estimação das multidões. Assim, foi proposto a aplicação do procedimento de Análise de Componentes Principais (PCA) e definiu-se a Primeira Componente Principal C_{P1} como este estimador. Em seguida, definiu-se uma medida capaz de descrever o desempenho do estimador obtido em função da quantidade de pessoas na imagem. Por meio desta medida, esperou-se determinar os parâmetros de multidão para os quais este conjunto de medidas sejam mais eficientes, assim como comparar o poder de estimação de cada método.

2.3.1 Análise de componentes principais

PCA é uma técnica utilizada para mapear um conjunto de dados a partir de um espaço de atributos n -dimensional em um novo sistema de coordenadas em que cada eixo seja uma combinação linear da contribuição dos atributos originais.²⁷ Os eixos desse novo sistema de coordenadas são apresentados em ordem decrescente de variação dos dados. Deste modo, pode-se descartar eixos que não contenham uma representação significativa da variação dos dados.²⁸

Em suma, o método PCA envolve encontrar uma matriz de transformação M_t tal que:

$$\vec{\beta} = M_t \vec{\alpha} \quad (2.15)$$

em que $\vec{\alpha}$ é o conjunto de dados original e $\vec{\beta}$ é o conjunto de dados no novo sistema de coordenadas.

Inicialmente, obtêm-se a matriz de covariâncias M_{COV} de $\vec{\alpha}$. A covariância entre duas variáveis α_1 e α_2 do conjunto α é definida por:

$$COV(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_{1i} - \bar{\alpha}_1)(\alpha_{2i} - \bar{\alpha}_2)}{n - 1} \quad (2.16)$$

em que n é o número de atributos dos dados, $\bar{\alpha}_1$ é a média dos α_1 e $\bar{\alpha}_2$ é a média dos α_2 . Portanto M_{COV} é uma matriz $n \times n$ da covariância de cada variável possível do conjunto de dados $\vec{\alpha}$:

$$M_{COV} = \begin{bmatrix} COV(\alpha_1, \alpha_1) & COV(\alpha_1, \alpha_2) & \dots & \vdots \\ COV(\alpha_2, \alpha_1) & COV(\alpha_2, \alpha_2) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & COV(\alpha_n, \alpha_n) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Sendo M_{COV} uma matriz real, quadrada e simétrica, é possível obter um conjunto de autovalores $\vec{\lambda}$ e um conjunto de autovetores $\vec{w}$. Por fim, ordenamos os autovalores $\vec{\lambda}$ de modo que $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ e montamos M_t dispondo cada respectivo autovetor de $\vec{w}$ conforme ordenação dos autovalores:

$$M_t = \begin{bmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vdots \\ \vec{w}_n \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

e assim obtemos o nosso novo conjunto $\vec{\beta}$.

Quando se aplica o PCA, é possível estimar a quantidade de variação preservada pela projeção. Isto é obtido calculando a soma relativa:

$$G_m = 100 \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \quad (2.19)$$

em que m é o número de componentes selecionados e n o total de componentes dos dados. Quando G_m é próximo de 100, que corresponde ao seu valor máximo, pode-se dizer que as m características são capazes de representar a quase totalidade da variação original dos dados.

Figura 12 – Exemplos de gráficos do estimador C_{P1} em função do número de pessoas da multidão para as quatro configurações do parâmetro d .

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.3.2 Qualidade da medida

Na Figura 12 podemos observar o C_{P1} obtido ao final do procedimento de PCA para alguns valores de d . Conforme a suposição feita anteriormente há uma correlação entre o nosso estimador e o número de pessoas. Entretanto, observa-se a tendência do estimador perder a sua capacidade de diferenciar o tamanho de multidão para altos valores de n_p conforme os dados se aproximam de uma assíntota. Para quantificar esse comportamento, busca-se uma definição capaz de relacionar a variação de C_{P1} e a dispersão dos dados.

Portanto, define-se a qualidade $Q(n)$:

$$Q(n) = \frac{\dot{X}(n)}{\sigma(n)} \quad (2.20)$$

onde $\dot{X}(n)$ é a derivada de $X(n)$, $\sigma(n)$ é uma medida de dispersão dos dados ao

longo de $X(n)$ e n é uma variável independente. No caso deste trabalho, utilizou-se o desvio padrão como σ .

Figura 13 – Exemplos de gráficos das variáveis de interesse e curvas de suavizações realizadas para a obtenção de Q .

Fonte: Elaborada pelo autor.

No contexto de X ser um estimador de uma variável n , a medida Q quantifica o quanto X é capaz de prever corretamente n conforme a inclinação de X e o parâmetro σ varia. Por exemplo, quando Q cresce, significa que a proporção entre a variação do estimador e a dispersão aumentou, permitindo que o estimador X consiga discriminar com mais acurácia 2 valores de n para um dado intervalo. Por outro lado, quando Q diminui o estimador reduziu sua capacidade de diferenciar entre 2 valores de n .

Para calcular Q , realizou-se o procedimento que está ilustrado na [Figura 13](#). Primeiro, obteve-se a $\overline{C_{P1}}$ e $\sigma_{C_{P1}}$ para cada n_p a partir dos dados derivados de 5 imagens de iguais parâmetros que foram geradas. Em seguida, aplicou-se o Filtro de Savitzki-Golay

(FSG)[†] para suavizar a curva média a fim de evitar picos no cálculo da derivada $\overline{\dot{C}_{P1}}$. Então, calculou-se numericamente $\overline{\dot{C}_{P1}}$ e também aplicou-se FSG. Por fim, calculou-se Q multiplicando ponto a ponto $\overline{\dot{C}_{P1}}$ e $\frac{1}{\sigma_{C_{P1}}}$ conforme a definição e aplicou-se FSG a fim de resultar em uma tendência mais bem definida. Ao final do processo, obteve-se uma curva $Q(n_p)$ para cada um dos conjuntos de parâmetros das imagens geradas.

[†] O FSG realiza a suavização da curva por meio de uma convolução por mínimos quadrados lineares a partir de polinômios de baixo grau em sucessivos subconjuntos dos dados, vide GORRY.²⁹

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo, apresenta-se o resultado de dois experimentos realizados a fim de validar o uso da simulação computacional e metodologia de análise desenvolvidas no presente trabalho. No primeiro experimento, o foco foi explorar o efeito das variáveis no poder de estimação do conjunto de medidas baseadas em textura propostas. Já o segundo experimento foi planejado de maneira a permitir a comparação entre as 3 medidas, explorando a contribuição que cada medida oferece para a estimativa, assim como suas respectivas interações com os parâmetros das multidões.

(a) Parâmetros d_1 , DU e MH0

(b) Parâmetros d_2 , DU e MH0

(c) Parâmetros d_3 , DU e MH0

(d) Parâmetros d_4 , DU e MH0

Figura 14 – Resultados de $Q(n_p)$ para alguns valores de θ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

No total, foram geradas e analisadas mais de 235 mil imagens de multidões compreendendo todos os parâmetros e variáveis definidos no modelo computacional. Dada a quantidade de dados obtidos, as análises serão apresentadas para alguns recortes de

parâmetros e, exceto quando especificado, estas análises podem ser generalizadas para o restante dos valores visto o comportamento semelhante observado nos resultados analisados.

3.1 Efeito das variáveis da multidão na estimação por medidas baseadas em textura

Neste experimento utilizamos as três medidas apresentadas (MCNC, AE e DF) para compor o nosso vetor de atributos. O estimador obtido C_{P1} , que é a primeira componente principal do resultado do PCA, apresentou variação preservada $G_1 = 81,3$. A literatura indica que $G_m > 70$ é uma boa taxa de variação preservada para utilização em análises.²⁸ Com esse valor, sugere-se que a grande parte da informação relevante do conjunto de medidas foi preservada, de modo que o baixo poder de estimação que possamos encontrar deriva mais da limitação do conjunto de medidas do que de perdas acarretadas pela redução de dimensionalidade do espaço de atributos transformado.

(a) Parâmetros d_1 , DU e MHO

(b) Parâmetros d_2 , DU e MHO

(c) Parâmetros d_3 , DU e MHO

(d) Parâmetros d_4 , DU e MHO

Figura 15 – Resultados de $Q(\theta)$ para alguns valores de n_p .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 14, apresentamos os resultados de Q em função de n_p para os deter-

minados valores de θ e d . Para todos os parâmetros, observou-se que a curva $Q(n_p)$ é decrescente e boa parte desta queda está concentrada em valores baixos de n_p . Isto significa que as medidas baseadas em texturas apresentam um bom resultado para multidões de baixa densidade, e o seu poder de estimação decresce rapidamente com o aumento da densidade. Este é um comportamento esperado dado que a estimação de multidões de alta densidade é mais desafiadora para a maioria dos métodos, de modo que estes dados apenas reproduzem a dificuldade de estimar multidões com maior número de indivíduos, mesmo considerando que medidas indiretas, como a de textura, apresentem bons resultados para esta condição.²

Um segundo ponto a constatar é que a queda do poder de estimação ocorre para todos os valores de d e θ , porém com intensidades diferentes. Em primeiro lugar, o poder de estimação $Q(n_p)$ sempre é mais preservado para θ menores, indicando que imagens capturadas por cima da multidão geram estimações melhores. Isso ocorre pois uma multidão observada por cima apresenta uma menor probabilidade de oclusão das informações visuais e distorção causada por efeitos de perspectiva. Além do mais, vale destacar que essa perspectiva privilegia a cabeça, que é a região visualmente mais informativa de um indivíduo para tarefas de análise e estimação de multidões.¹⁰

Por fim, ainda na [Figura 14](#), observamos que o valor de $Q(n_p)$ é sempre maior para menores valores de d . Quanto maior a distância da captura, menor a resolução das informações visuais e, conseqüentemente, menor o poder da estimação. Este efeito pode ser visto com mais clareza também nos gráficos apresentados na [Figura 15](#), em que fixamos alguns valores de n_p a fim de observar com mais clareza o efeito de θ e d . Pode-se constatar que o nosso poder de estimação, confirmando as observações anteriores, é maior para distâncias d menores e θ baixos.

Há um aspecto importante que a [Figura 15](#) permite destacar. Observa-se em todos os casos que $Q(\theta)$ oscila nos primeiros valores e a partir de $\theta = 25$ as curvas apresentam uma trajetória decrescente. Portanto, a partir dessas observação podemos sugerir que uma imagem obtida em uma perspectiva de θ até 25° permite, via de regra, uma melhor estimação da multidão.

(a) Parâmetro d_1 (b) Parâmetro d_2 (c) Parâmetro d_3 (d) Parâmetro d_4

Figura 16 – Resultados de $Q(n_p)$ para diferentes distribuições (DU e DN) e homogeneidades (MHo e MHe). Para cada n_p foi calculada a média para todos os valores de θ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 16 apresenta resultados para a curva $Q(n_p)$ para os diferentes parâmetros de distribuição e homogeneidade dos indivíduos. O primeiro aspecto a observar, é que o comportamento em função de n_p é semelhante para todos os parâmetros. Porém, a distribuição da multidão gerou um comportamento diferente para a curvas nos n_p iniciais. Multidões distribuídas uniformemente, apesar de partirem de um $Q(n_p)$ mais baixo, mantiveram o seu poder de estimativa por mais tempo. Esta constatação pode ser feita observando cruzamentos que as curvas realizaram em todos no início dos gráficos. Este fenômeno é condizente com a literatura, visto que a distribuição uniforme gera multidões com densidades constantes, que são mais precisas para estimar, especificamente com medidas de textura.¹⁰ Este mesmo resultado pode ser visto na Figura 17, desta vez em função de θ .

(a) Parâmetro d_1 (b) Parâmetro d_2 (c) Parâmetro d_3 (d) Parâmetro d_4

Figura 17 – Resultados de $Q(\theta)$ para diferentes distribuições (DU e DN) e homogeneidades (MHo e MHe). Para cada θ foi calculada a média para todos os valores de n_p .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ainda na Figura 17, observamos que para ambas as distribuições, e em todos os d ,

nossa estimaco é mais precisa para multides heterogneas. Em multides heterogneas há uma maior quantidade de informao visual disponível. Este acréscimo de informao visual pde ser aproveitado por medidas de textura e, por consequência, resultou no aumento de discriminabilidade nas multides heterogneas.

3.2 Comparaco de estimadores de multido baseados em textura

(a) Parâmetros d_1 , DU e MHo

(b) Parâmetros d_2 , DU e MHo

(c) Parâmetros d_3 , DU e MHo

(d) Parâmetros d_4 , DU e MHo

Figura 18 – Resultados de $Q(n_p)$ para alguns valores de θ para seus respectivos estimadores.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste experimento, cada um dos conjuntos de atributos de cada estimador de textura foi analisado pelo PCA separadamente, de modo que obteve-se três estimadores. As variaes preservadas para cada análise foram $G_1 = 86,4$ para MCNC, $G_1 = 90,9$ para AE e $G_1 = 99,5$ para DF. Os valores altos se justificam por se tratar da medidas que so concebidas e processadas em uma mesma abordagem, portanto é esperado que seus atributos apresentem um grau maior de correlao entre si. O objetivo deste experimento é verificar o poder de estimaco relativo de cada medida frente aos parâmetros das multides.

Na Figura 18 já pode-se observar três conjuntos de comportamentos de curvas, correspondentes a cada uma das medidas. Em primeiro lugar, observa-se que a AE apresenta um desempenho maior que as outras curvas no início de n_p , ou seja, é um estimador muito eficiente para determinar multidões com baixa densidade de indivíduos. Isto ocorre pois a AE capta com bastante precisão picos de variações de frequência espacial e estas ocorrem, com mais probabilidade, exatamente quando temos uma multidão de poucos indivíduos bem distribuídos.

Figura 19 – Resultados de $Q(\theta)$ para alguns valores de n_p para seus respectivos estimadores.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Um segundo ponto a se destacar, diz respeito ao estimador baseado em MCNC. Observamos que suas curvas permanecem relativamente constante ao longo de todo n_p , de modo que após a rápida queda das curvas de AE, esta é a medida que possui maior poder de estimação. Para altas densidades de multidões, uma medida capaz de captar informações relacionadas aos padrões de distribuição das informações visuais pode ser

mais significativos para a estimação, ao contrário da AE, mais eficiente na determinação de picos de variações dos padrões.

Por fim, ainda na [Figura 18](#), observamos que a contribuição da DF só é relevante para poucos indivíduos e, a partir de um certo valor de n_p , seu poder de estimação é muito baixo. Quando a densidade de pessoas alcança um certo valor, os contornos da multidão ao longo da imagem preenchem as caixas em proporções semelhantes, dificultando a diferenciação das multidões. Por esta razão, credita-se o baixo desempenho de estimação mais à metodologia de cálculo de DF, que neste estudo foi o *box counting*, do que a uma limitação na utilização do conceito de DF para tarefas de estimação.

Na [Figura 19](#) temos a comparação das medidas para alguns valores baixos de n_p . Uma relação importante que podemos observar neste caso é o comportamento dessas curvas em função de d . Para d baixo, as curvas se entrelaçam de modo que o poder de estimação de todas as medidas são relativamente iguais. Conforme d cresce, observamos o surgimento de um padrão, que se consolida em d_4 , tal qual a estimação de AE se torna a melhor, seguida por DF e, então, MCNC. Este comportamento sugere que todas as medidas são relevantes para pequenas distâncias, dado que é o caso em que dispõe-se de maior informação visual. Entretanto, conforme afastamos a câmera da multidão, a medida baseada em AE apresentou um desempenho mais robusto em relação ao MCNC. Uma observação, é que nestes valores de n_p a multidão ainda é pequena o suficiente para não derrubar a qualidade do estimador DF, como vimos anteriormente, e por isso ainda observa-se ele acima de MCNC.

Uma última observação a ser feita a respeito deste conjunto de gráficos, principalmente em d_3 e d_4 , é que MCNC e DF mantêm seu poder de estimação relativamente constante em relação a θ e só observamos uma queda a partir de $\theta = 65$, enquanto que o estimador de AE já apresenta uma tendência de queda na qualidade a partir de $\theta = 25$. Isso significa que a discriminabilidade da medida baseada em MCNC e em DF são mais resistentes à mudanças de perspectiva da multidão do que a medida baseada AE.

A [Figura 20](#) reproduz os resultados que já discutimos anteriormente. O que podemos enfatizar é que em todas as medidas e para todos os parâmetros, Q permaneceu sempre maior para multidões DU, salvo alguns ruídos. Esse é um comportamento de todas as medidas baseadas em texturas analisadas. Elas apresentam melhores estimativas para multidões com densidades constantes.

(a) Parâmetros d_1 , MHo (b) Parâmetros d_1 , MHe (c) Parâmetros d_4 , MHo (d) Parâmetros d_4 , MHe

Figura 20 – Resultados de $Q(n_p)$ para diferentes distribuições (DU e DN) e homogeneidades (MHo e MHe). Para cada n_p foi calculada a média para todos os valores de θ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, a [Figura 21](#) apresenta uma mudança no padrão que se formou na [Figura 19](#), com a troca da ordem dos estimadores MCNC e DF, dado que este cálculo inclui resultados para valores altos de n_p . Além disso, corrobora-se novamente que as medidas foram muito mais precisas nas multidões DU, em relação a DN. Ademais, constata-se uma diferença importante entre as medidas: o estimador baseado em MCNC apresentou valores maiores na curva de Q para MHo, enquanto que o inverso foi observado para os outros estimadores e para o estimador combinado do experimento anterior. Isto ocorre pois indivíduos iguais apresentam padrões visuais semelhantes e que são reproduzidos ao longo da imagem, uma característica que favorece uma estimativa baseada em MCNC. Esta tendência pode ser aproveitada, por exemplo, na composição de um estimador de multidão direcionada para avaliação de multidões em contextos de maior homogeneidade aumentando o peso dos atributos de MCNC.

(a) Parâmetros $d = 1$, DU (b) Parâmetros $d = 1$, DN (c) Parâmetros $d = 4$, DU (d) Parâmetros $d = 4$, DN

Figura 21 – Resultados de $Q(\theta)$ para diferentes distribuições (DU e DN) e homogeneidades (MHo e MHe). Para cada θ foi calculada a média para todos os valores de n_p .

Fonte: Elaborada pelo autor.

4 CONCLUSÃO

Análise de multidões é uma área de pesquisa que foi bastante desenvolvida nos últimos anos devido às suas diversas aplicações, que incluem a detecção, manejo e prevenção de situações de risco que envolvam um grande número de pessoas. Embora várias bases de dados encontrem-se disponíveis contendo imagens de multidões para a realização de estudo, existe ainda a necessidade de considerar-se variações controladas dos parâmetros envolvidos na captura das imagens permitindo uma avaliação mais sistemática e completa do efeito da escolha destes parâmetros na precisão respectivamente obtida.

Neste trabalho foi desenvolvida uma abordagem computacional para gerar imagens de multidões permitindo variações sistemáticas de diversos parâmetros como: número, distribuição de posições e homogeneidade dos indivíduos, assim como a distância e a direção de visão da câmera. Essas imagens sintéticas foram analisadas a partir de um conjunto de medidas de textura com o objetivo de avaliar a precisão dessas medidas e relacioná-las com as variações de parâmetros das imagens de multidões. Também foi comparado o desempenho das medidas entre si.

Foi constatado que a estimação do número de pessoas nas imagens geradas tende a ser mais precisa quando a câmera é posicionada acima da multidão. Também foi observado que a precisão decresce rapidamente com o aumento do número de pessoas nas imagens. Outro aspecto notado é que, no geral, multidões compostas por indivíduos heterogêneos possibilitam uma melhor estimativa em relação a multidões compostas por indivíduos homogêneos. Todavia, quando consideradas em separado, a técnica de MCNC apresentou resultado melhor para indivíduos homogêneos, ao contrário das abordagens AE e DF que apresentaram resultados melhores para indivíduos heterogêneos. Por fim, foi constatado que a multidão distribuída uniformemente foi mais precisamente estimada do que a multidão distribuída conforme uma distribuição normal, corroborando a ideia que a estimação de multidões com densidades homogêneas ao longo do espaço é mais precisa para estimadores baseados em textura.

Em suma, observa-se que resultados de estimação de multidões obtidas através da simulação computacional foram capazes de corroborar alguns resultados já encontrados na literatura para imagens reais e possibilitou um refinamento maior na análise em função do controle de variáveis que esta abordagem permite. Isto foi particularmente importante para comparar os diferentes estimadores, visto que foi encontrada uma interação entre a qualidade da estimação do método de MCNC e a homogeneidade da multidão. Avalia-se também como positiva a aproximação entre a simulação e a análise de multidões, visto que muito dos avanços na área se sustentam em análises de *datasets*, enquanto a simulação para geração de imagens pode ser integrada de modo a complementar e refinar os procedimentos

e resultados obtidos nesses trabalhos.

Espera-se que a abordagem computacional descrita nesse trabalho possa ser ampliada e refinada em trabalhos posteriores. Pode-se incluir novos parâmetros que permitam um maior controle e amplitude de multidões que podem ser geradas, como por exemplo com a adição de objetos no cenário, adição de diferentes fontes de iluminação, utilização de variadas distribuições de indivíduos e refinamento dos procedimentos de renderização dos modelos de pessoas. O método de análise também pode ser ampliado incorporando técnicas de classificação e reconhecimento de padrões, assim como pode ser refinado utilizando técnicas mais avançadas de regressão. Além disso, novas medidas podem ser incorporadas diretamente na metodologia proposta, seja para fins de comparação ou para complementação de um estimador. Por fim, pode-se realizar uma comparação mais sistemática com resultados obtidos a partir de *datasets*, de maneira a validar o modelo e complementar os resultados já alcançados na literatura.

REFERÊNCIAS

- 1 ZITOUNI, M.; BHASKAR, H.; DIAS, J.; AL-MUALLA, M. Advances and trends in visual crowd analysis: a systematic survey and evaluation of crowd modelling techniques. **Neurocomputing**, v. 186, p. 139–159, 2016. doi:10.1016/j.neucom.2015.12.070.
- 2 SALEH, S.; SUANDI, S.; IBRAHIM, H. Recent survey on crowd density estimation and counting for visual surveillance. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 41, p. 103–114, 2015. doi:10.1016/j.engappai.2015.01.007.
- 3 ZHAN, B.; MONEKOSSO, D.; REMAGNINO, P.; VELASTIN, S.; XU, L. Crowd analysis: a survey. **Machine Vision and Applications**, v. 19, n. 5, p. 345–357, 2008.
- 4 AZIZ, M.; NAEEM, F.; ALIZAI, M.; KHAN, K. Automated solutions for crowd size estimation. **Social Science Computer Review**, v. 36, n. 5, p. 610–631, 2018. doi:10.1177/0894439317726510.
- 5 MARANA, A.; VELASTIN, S.; COSTA, L.; LOTUFO, R. **Estimation of crowd density using image processing**. 1997. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=637252>>. Acesso em: 23 jan. 2019.
- 6 _____. Automatic estimation of crowd density using texture. **Machine Vision and Applications**, v. 28, n. 3, p. 165–175, 1998.
- 7 MARANA, A.; COSTA, L.; LOTUFO, R.; VELASTIN, S. **On the efficacy of texture analysis for crowd monitoring**. 1998. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=722773>>. Acesso em: 23 jan. 2019.
- 8 _____. Estimating crowd density with minkowski fractal dimension. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACOUSTICS, SPEECH, AND SIGNAL PROCESSING, 1999, Phoenix. **Proceedings...** Phoenix: IEEE, 1999.
- 9 CHAN, A.; VASCONCELOS, N. Counting people with low-level features and bayesian regression. **IEEE Transactions On Image Processing**, v. 21, n. 2, p. 2160–2177, 2012. doi:10.1109/TIP.2011.2172800.
- 10 LAMBA, S.; NAIN, N. A texture based mani-fold approach for crowd density estimation using gaussian markov random field. **Multimedia Tools and Applications**, 2018. doi:10.1007/S11042-017-5554-4.
- 11 CHAN, A.; VASCONCELOS, N. Modeling, clustering, and segmenting video with mixtures of dynamic textures. **IEEE Transactions On Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. 30, n. 5, p. 909–926, 2008.
- 12 FERRYMAN, J.; SHAHROKNI, A. Pets2009: dataset and challenge. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON PERFORMANCE EVALUATION OF TRACKING AND SURVEILLANCE, 20., 2009, Snowbird. **Proceedings...** Snowbird: IEEE, 2009.

- 13 EDMONDS, B.; HALES, D. Computational simulation as theoretical experiment. **Journal of Mathematical Sociology**, v. 29, p. 209–232, 2005. doi:10.1080/00222500590921283.
- 14 ZHANG, X.; YU, Q.; YU, H. Physics inspired methods for crowd video surveillance and analysis: a survey. **IEEE ACCESS**, v. 6, p. 66816–66830, 2018. doi:10.1109/ACCESS.2018.2878733.
- 15 BEACCO, A.; PELECHANO, N.; ANDÚJAR, C. A survey of real-time crowd rendering. **Computer Graphics Forum**, v. 35, n. 8, p. 32–50, 2016. doi:10.1111/cgf.12774.
- 16 ANGEL, E. **Interactive computer graphics: a top-down approach with OpenGL**. Massachusetts: Addison Wesley Longman, 2000.
- 17 CHEN, C.; PAU, L.; WANG, P. **Handbook of pattern recognition and computer vision**. Massachusetts: World Scientific Publishing Company, 1993.
- 18 PRATZ-MONTALBÁN, J.; JUAN, A.; FERRER, A. Multivariate image analysis: a review with applications. **Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems**, v. 107, p. 1–23, 2011. doi:10.1016/j.chemolab.2011.03.002.
- 19 ARMI, L.; FEKRI-ERSHAD, S. Texture image analysis and texture classification methods - a review. **International Online Journal of Image Processing and Pattern Recognition**, v. 2, n. 1, p. 1–29, 2019.
- 20 WANG, B.; BAO, H.; YANG, S.; LOU, H. Crowd density estimation based on texture feature extraction. **Journal of Multimedia**, v. 8, n. 4, p. 331–337, 2013. doi:10.4304/jmm.8.4.331–337.
- 21 HARALICK, R. Statistical and structural approaches to texture. **Proceedings of the IEEE**, v. 64, n. 5, p. 786–804, 1979.
- 22 YANG, J.; LI, J.; HE, Y. Crowd density and counting estimation based on image textural feature. **Journal of Multimedia**, v. 9, n. 10, p. 1152–1159, 2014. doi:10.4304/jmm.9.10.1152–1159.
- 23 LOPES, R.; PETROUNI, N. Fractal and multifractal analysis: a review. **Medical Image Analysis**, v. 13, p. 634–649, 2009. doi:10.1016/j.media.2009.05.003.
- 24 AI, T.; ZHANG, R.; ZHOU, H.; PEI, J. Box-counting methods to directly estimate the fractal dimension of a rock surface. **Applied Surface Science**, v. 314, p. 610–621, 2014. doi:10.1016/j.apsusc.2014.06.152.
- 25 BACKES, A.; CASANOVA, D.; BRUNO, O. Color texture analysis based on fractal descriptors. **Pattern Recognition**, v. 45, p. 1984–1992, 2012. doi:10.1016/j.patcog.2011.11.009.
- 26 CANNY, J. A computational approach to edge detection. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. 8, n. 6, p. 679 – 698, 1986.
- 27 JOLLIFFE, I.; CADIMA, J. Principal component analysis: a review and recent developments. **Philosophical Transactions of The Royal Society A: mathematical, physical and engineering sciences**, v. 374, 2016. doi:10.1098/RSTA.2015.0202.

- 28 GEWERS, F.; FERREIRA, G.; ARRUDA, H.; SILVA, F.; COMIN, C.; AMANCIO, D.; COSTA, L. **Principal component analysis: a natural approach to data exploration**. 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1804.02502v1>>. Acesso em: 19 jun. 2018.
- 29 GORRY, P. General least-squares smoothing and differentiation by the convolution (savitzky-golay) method. **Analytical Chemistry**, v. 62, n. 6, p. 570–573, 1990.