**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

GUILHERME DE GUZZI BAGNATO

**Determinação da distribuição de momento em
superfluidos atômicos aprisionados: regimes
turbulento e não turbulento**

São Carlos

2013

GUILHERME DE GUZZI BAGNATO

Determinação da distribuição de momento em superfluidos atômicos aprisionados: regimes turbulento e não turbulento

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa
de Pós-graduação em Física do Instituto de Física
de São Carlos da Universidade de São Paulo, para a
obtenção do título de Mestre em Ciência.

Área de Concentração: Física Aplicada

Opção: Física Computacional

Orientador: Dra. Kilvia Mayre Farias

Versão Corrigida

(Versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos

2013

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

de Guzzi Bagnato, Guilherme
Determinação da distribuição de momento em
superfluidos atômicos aprisionados: regimes
turbulento e não turbulento / Guilherme de Guzzi
Bagnato; orientadora Kilvia Mayre Farias - versão
corrigida -- São Carlos, 2013.
113 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Física Aplicada Computacional) -- Instituto de Física
de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2013.

1. Turbulência quântica. 2. Condensação de Bose-
Einstein. 3. Lei de escala. I. Mayre Farias, Kilvia,
orient. II. Título.

À minha família, em especial
ao meu avô Neurivaldo
e à minha avó Maria José.

AGRADECIMENTOS

A toda minha família, em especial: Aos meus pais, Fernando e Lislane, pelo amor incondicional e eterno incentivo aos estudos, aos meus irmãos, Gabriel e Gabriela, pelos amorosos atritos que só os irmão sabem resolver, ao meu avô Nelson, por sempre proporcionar conversas interessantes, à minha avó Therezinha, por ser tão presente em minha vida.

Ao meu amor Heloisa, pela confiança e respeito que temos um pelo outro. Sem ela esta dissertação pareceria um grande rascunho, obrigado pela revisão sintática e ortográfica.

Ao meu primo e professor, Vanderlei, por me dar a oportunidade de fazer parte da família Grupo de Óptica e nunca recusar uma ideia ou um conselho e sempre promover os melhores e mais populares eventos do IFSC.

A Kilvia, que desde minha iniciação científica é minha orientadora, sempre disposta a dar conselhos e sugerir melhorias, obrigado pela oportunidade.

A Mônica, por manter a sala de portas abertas para sanar todas as minhas dúvidas com uma paciência ímpar, e também por me lembrar na segunda-feira que sexta-feira 13:00 hora tem seminário.

Ao time BEC1: Gustavo, Pedro, Rodrigo, Áttis e Abasalt pelo companheirismo diário, pelos cafés no meio da tarde, pelas discussões filosóficas e claro, por todo aprendizado de vida adquirido.

Ao Emanuel, por me entregar os capítulos corrigidos em menos de 24 horas e pelo conhecimento que me transmitiu durante o período final deste trabalho.

Ao Sérgio, por dar o primeiro passo deste trabalho e por estar sempre de cabeça aberta para novas ideias.

Aos amigos de sala: Rafael, Franklin e Edwin, sempre presentes nas horas certas para ajudas diversas.

Ao time BEC2: Jorge, Freddy, por me ensinarem muito de física e culturas mexicana e colombiana e à Patrícia, pela sua alegria dramática e discussões cinematográficas.

Aos teóricos Ednilson e Kyle, por serem fundamentais no desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos de graduação, Tiago, Gules, Lucas, Fernando (Fefe), Fred, Denis, César, Felipe (Monte), Thomas, Maria Luiza e Fernando, pelas frequentes discussões que não falam de nada e que não levam a lugar nenhum, mas que são indispensáveis.

Aos muitos amigos de São Carlos, em primeiro lugar minhas desculpas, porque ser físico custa muitos finais de semana e feriados, em segundo, vocês são insubstituíveis.

A todo apoio técnico: LAT, LIEPO, Evaldo e oficina mecânica que são fundamentais para o bom funcionamento de todos os experimentos.

Ao Italo da gráfica, por ter impresso esta dissertação em um curto espaço de tempo.

Ao Evaldo da vidraria, pela ajuda com as células de vidro.

Às secretárias, Isabel, Benê e Cristiane, por simplificarem as complicadas burocracias.

À Universidade de São Paulo e ao Instituto de Física de São Carlos, por me darem o privilégio de estudar em um dos melhores centros acadêmicos do mundo.

Ao CNPq, que me financiou desde a iniciação científica até o término deste trabalho de mestrado.

*“Tenha coragem de seguir o seu próprio coração e a sua intuição.
Eles de alguma maneira já sabem o que você realmente quer se tornar.
Todo o resto é secundário.”*
— STEVE JOBS

RESUMO

BAGNATO, G. G. **Determinação da distribuição de momento em superfluidos atômicos aprisionados: regimes turbulento e não turbulento.** 2013. 113 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

A turbulência clássica é um fenômeno de natureza caótica, mas de difícil estudo por ser constituída pela fusão e superposição de vórtices aleatórios, dificultando sua descrição matemática. A turbulência quântica (TQ), embora também caótica, é composta por vórtices quantizados, que favorecem o controle experimental e sua definição teórica. Embora a evidência experimental da TQ tenha sido obtida em sistemas de He líquido, sua caracterização em condensados de Bose-Einstein (BEC) ainda não foi totalmente realizada. Neste trabalho, estudamos a distribuição de momento em BECs expandidos em tempo de voo, nos regimes convencional e turbulento. Para a produção experimental da amostra quanticamente degenerada, utilizamos a técnica do resfriamento evaporativo em átomos de ^{87}Rb , previamente resfriados em uma armadilha puramente magnética do tipo QUIC. A turbulência quântica foi produzida no sistema através de um par de bobinas de excitação capaz de produzir uma perturbação oscilatória na nuvem previamente condensada. O diagnóstico da amostra aprisionada é feito por imagem de absorção durante expansão livre da nuvem. Durante a expansão, tanto a nuvem condensada quanto a turbulenta, alcançaram um valor assintótico no *aspect ratio*, indicando uma evolução isotrópica. A partir deste resultado, elaboramos um método teórico capaz de determinar a projeção isotrópica da distribuição de momento, baseado na imagem produzida experimentalmente. Através de argumentos de simetria e de uma transformada integral, recuperamos a densidade de momento tridimensional da projeção, para então determinar o espectro de energia cinética da nuvem, observando uma lei de escala para um estreito intervalo de momento. A lei de escala já foi prevista teoricamente para sistemas quânticos e medida para o He superfluido, mas pela primeira vez foi evidenciada em um BEC. Desta forma, os resultados corroboram a existência da turbulência quântica em uma amostra quanticamente degenerada, introduzindo os BECs como candidatos alternativos ao He líquido superfluido no estudo deste fenômeno.

Palavras-chave: Turbulência quântica. Condensação de Bose-Einstein. Lei de escala.

Abstract

BAGNATO, G. G. **Determination of momentum distribution in a superfluid atomic trap: turbulent and non-turbulent regimes.** 2013. 113 p. Dissertation (Master) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

Classical turbulence is a chaotic phenomenon that requires labored work, because of its merging and overlapping of random vortices nature, which hinders its mathematical description. Quantum turbulence (QT), although chaotic, is comprised of quantized vortices that favor the experimental control and its theoretical definition. Although experimental evidence of QT has been proved in liquid helium systems, its characterization in Bose-Einstein condensates (BEC) has not been fully accomplished. In this work, we studied the momentum distribution of expanding turbulent and non-turbulent BEC. For experimental achievement of the quantum degenerated sample, we used evaporative cooling in rubidium atoms, previously cooled in a QUIC trap. Quantum turbulence was produced through a pair of excitation coils capable of producing an oscillatory perturbation in the cloud previously condensed. The diagnosis of the trapped sample is done by absorption image during free expansion of the cloud. During the expansion, both clouds achieved a asymptotic value of the aspect ratio, indicating an isotropic evolution. From this result, we have developed a theoretical method able to determine the projection of the isotropic distribution of momentum, based on the image produced experimentally. Through symmetry arguments and an integral transformation, we recovered the tridimensional momentum distribution of the projection and then determined the kinetic energy spectrum of the cloud, observing a scaling power law for a narrow range of momenta. The scaling law has been theoretically predicted for quantum systems and has been proved to liquid helium superfluid, but, in this work, was for the first time evidenced in a BEC. Thus, the results support the existence of quantum turbulence in our quantum degenerated sample, introducing the BECs as potential candidates besides liquid helium superfluid for the study of this phenomenon.

Keywords: Quantum turbulence. Bose–Einstein condensation. Scale power law.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 2.1 - Esquema ilustrando o escoamento de água dentro de um cilindro à medida que R_e é aumentado. 43
- Figura 2.2 - Gráfico do espectro de energia para diferentes escoamentos turbulentos com diferentes condições de contorno (jatos de água, tubulações, dutos e oceanos), evidenciando a universalidade da lei de Kolmogorov (43). . . 44
- Figura 2.3 - Simulação que representa o processo de reconexão de vórtices. (a) Inicialmente dois vórtices com direções bem definidas se aproximam e (b) interagem entre si, (c) posteriormente ocorre uma reconexão e (d) dois novos vórtices com direções diferentes são gerados. 48
- Figura 2.4 - Esquema do processo dissipativo em superfluidos turbulentos. Uma grande quantidade de energia é injetada no sistema, gerando vários vórtices. Em seguida, ocorre uma sucessão de reconexões destes vórtices produzindo um grande emaranhado. Assim, excitação das ondas de *Kelvin* são produzidas e, finalmente, a energia é dissipada na forma de fônons e excitações térmicas. 49
- Figura 2.5 - (a) Esquema ilustrativo da geração da TQ em BEC aprisionado através da rotação da nuvem em duas direções perpendiculares. (b) Gráfico do espectro de energia cinética do BEC turbulento. Os pontos correspondem a simulação numérica e a linha se refere a lei de Kolmogorov. . . . 50

Figura 3.1 - Esquema simplificado do sistema de vácuo mostrando as duas câmaras de aprisionamento, tubo de transferência, saídas de bombeamento e entrada para <i>dispensers</i>	53
Figura 3.2 - Comparação entre os tempos de vida na armadilha magnética com a utilização de <i>dispensers</i> e com a técnica LIAD	54
Figura 3.3 - Esquema óptico da preparação dos feixes, mostrando os três lasers e os principais componentes ópticos	56
Figura 3.4 - Estrutura de níveis do ^{87}Rb relevantes ao experimento juntamente com as frequências utilizadas	57
Figura 3.5 - Curva de carga e descarga do MOT2. O tempo de carga fornece uma estimativa do fluxo de átomos transferidos enquanto o tempo de descarga permite uma estimativa da qualidade do vácuo.	60
Figura 3.6 - Esquema de funcionamento do bombeamento óptico dentro da estrutura hiperfina.	62
Figura 3.7 - Configuração QUIC utilizada para gerar um campo harmônico (a) Visão 3D. (b) Plano xy com as distâncias envolvidas.	63
Figura 3.8 - Gráfico do perfil espacial de campo magnético para vários valores de corrente.	64
Figura 3.9 - Esquema de obtenção da imagem de absorção normalizada a partir de três imagens independentes.	66
Figura 3.10 - Ilustração do resfriamento evaporativo: (a) distribuição original de velocidades a uma dada temperatura T_1 , (b) retirada seletiva de partículas abaixo de um valor crítico v_e e (c) retermalização da distribuição a uma nova temperatura $T_2 < T_1$	68

Figura 3.11 - Esquema ilustrativo dos sub-níveis Zeeman a medida que a amostra é resfriada.	68
Figura 3.12 - Evolução da temperatura e do número de átomos à medida que o resfriamento evaporativo avança.	70
Figura 3.13 - Evolução do perfil de densidade da nuvem atômica. O perfil muda claramente de uma distribuição gaussiana (gráfico preto) para um perfil Thomas-Fermi (gráfico azul), passando pela composição bimodal (gráfico verde) caracterizando a CBE.	71
Figura 3.14 - Expansão da nuvem atômica em diferentes TOFs para amostras (a) térmica e (b) condensada	72
Figura 3.15 - (a) Esquema ilustrativo mostrando a posição das bobinas de excitação. (b) Simulação das linhas de equipotenciais da superposição do campo de excitação ao campo de aprisionamento.	73
Figura 3.16 - Densidade óptica das nuvens condensadas mediante excitações oscilatórias após 15ms de TOF. Inicialmente uma quantidade distinguível de vórtices forma-se no BEC a medida que aumentamos os parâmetros de excitação. Dada certa combinação dos parâmetros amplitude de excitação e tempo de oscilação alcançamos o regime turbulento.	74
Figura 3.17 - (a) Densidade óptica das nuvens térmica, BEC e BEC turbulento para três tempos de expansão. (b) Evolução do <i>aspect ratio</i> como função do tempo de expansão para os diferentes tipos de nuvem.	76
Figura 4.1 - Simulação da expansão dos raios da nuvem condensada. Os valores das frequências, utilizadas nesta simulação, são relativos ao nosso experimento, ou seja, $\omega_p = 2\pi \times 210$ Hz e $\omega_x = 2\pi \times 24$ Hz, assim como o número de átomos, $N = 2 \times 10^5$	81

- Figura 4.2 - (a) Comparação entre os *aspect ratio* no regime normal e turbulento em função do parâmetro adimensional $\tau = \omega_p t_{tof}$. Enquanto no BEC vemos a inversão do *aspect ratio*, a amostra turbulenta alcança rapidamente um valor constante menor que a unidade. (b) Evolução dos raios da amostra turbulenta à medida que aumentamos o tempo de expansão. Diferentemente do condensado, os dois raios se expandem na mesma proporção, devido à grande pressão ao longo a direção axial. 86
- Figura 5.1 - (a) Balanço energético para uma nuvem condensada. Neste caso, a energia de interação é rapidamente convertida em energia cinética, que por este motivo alcança um valor assintótico em poucos milisegundos. (b) Comparação entre os três termos energéticos em um regime turbulento. Apesar de menor, a energia de interação, também vai a zero rapidamente se comparada a energia provinda dos vórtices. 89
- Figura 5.2 - Esquema ilustrativo da obtenção de $g(k')$. A área escurecida indica a região que será somada para um dado raio $k' = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ 92
- Figura 5.3 - (a) Esquema da expansão isotrópica no espaço de momento. (b) A integral ao longo de um eixo implica que o módulo do momento linear bidimensional, k' , será formado pelo módulo de vários momento tridimensionais, k 93
- Figura 5.4 - (a) Imagem do condensado puro que utilizamos nos cálculos. (b) Perfil axial de densidade, juntamente com o ajuste gráfico da equação (5.10) para $\rho = \rho_0$. (c) Perfil de densidade radial ajustado graficamente pela mesma equação, mas com $x = x_0$ 97
- Figura 5.5 - Imagens de amostras turbulentas obtidas em 15 ms de tempo de voo. Diferentemente do BEC temos aqui um conjunto de estruturas irregulares distribuídas por toda nuvem, o que resulta em uma expansão isotrópica para elevados tempos de expansão. 98

Figura 5.6 - Algoritmo para o cálculo da distribuição $n'(k')$. Primeiramente, carrega-se a imagem gerada experimentalmente (I), em seguida determina-se o centro de massa da distribuição para centralização dos eixos cartesianos. Feito isso, o programa entra em um laço, que para cada valor k' é criada uma máscara (M) a fim de selecionar um anel de diâmetro $\delta k'$. Posteriormente, esta nova matriz é multiplicada ponto a ponto com a imagem e o resultado é somado, gerando $g(k')$. Em seguida, divide-se $g(k')$ por k' , determinando $n'(k')$. Quando todos os pontos da matriz experimental foram percorridos a distribuição é normalizada e seu gráfico é gerado. . 101

Figura 5.7 - Projeção da distribuição de momento para a nuvem condensada, apresentada em um gráfico dilog. Conforme o número de onda aumenta, a distribuição cai suavemente até atingir o valor nulo. O eixo da abscissa foi escalado pelo número de onda associado ao *healing length* da nuvem turbulenta e a normalização foi feita de acordo com a equação (5.16). . . 102

Figura 5.8 - Gráfico da projeção da densidade de momento para as nuvens turbulentas da figura 5.5. 102

Figura 5.9 - Média das três medidas de $n'(k')$ no regime turbulento. Identificamos uma dependência de $\alpha_1 = 0$ na região de baixos números de onda, enquanto que entre k_ξ e k_ρ observamos uma inclinação com coeficiente angular $\alpha_2 = -1,99 \pm 0,17$. Devido às bordas das nuvens turbulentas, a região para $k > k_\rho$ não representa nenhum efeito físico. 102

Figura 5.10 - Gráfico comparativo das projeções das distribuições de momento para os regimes turbulento e não turbulento. A presença da energia cinética dos vórtices dilui a amostra turbulenta, reduzindo o valor máximo cerca de uma década ao mesmo tempo que aumenta o maior número de onda. 104

- Figura 5.11 - Distribuição de momento tridimensional, $n(k)$, para a nuvem condensada. Assim como em sua projeção, a densidade de momento cai suavemente à medida que o número de onda cresce. Aqui também escalamos o eixo da abscissa com k_ξ e normalizamos este resultado de acordo com a equação (5.32). 105
- Figura 5.12 - Distribuição de momento tridimensional apresentada em um gráfico $\log$, obtida através da transformada inversa de Abel da média de $n'(k')$. No intervalo entre k_ξ e k_ρ , evidenciamos uma lei de potências, caracterizada pelo comportamento linear com inclinação de $\beta_2 = -2,99 \pm 0,26$. 106
- Figura 5.13 - Gráfico do espectro de energia cinética obtido através da equação 5.6. Na região compreendida entre k_ξ e k_ρ observamos uma lei de escala com coeficiente $\gamma_2 = -0,99 \pm 0,26$ 107

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>TC</i>	Turbulência Clássica.
<i>TQ</i>	Turbulência Quântica.
<i>Re</i>	Número de Reynolds.
<i>BEC</i>	<i>Bose-Einstein Condensate</i> (Condensado de Bose-Einstein).
<i>CBE</i>	Condensação de Bose-Einstein.
<i>LED</i>	<i>Light Emitting Diode</i> (Diodo emissor de luz).
<i>LIAD</i>	<i>Light-Induced Atom desorption</i> (Adsorção Atômica Induzida por Luz).
<i>MOT</i>	<i>Magnetic-Optical trap</i> (Armadilha Magneto-Óptica).
<i>MOT1</i>	MOT produzido na primeira câmara de vácuo.
<i>MOT2</i>	MOT produzido na segunda câmara de vácuo.
<i>AOM</i>	<i>Acousto-Optic Modulator</i> (Modulador Acusto-Óptico).
<i>VCO</i>	<i>Voltage-Controlled Oscillator</i> (Oscilador Controlado por Tensão).
<i>QUIC</i>	<i>Quadrupole-Ioffe Configuration</i> (Configuração Quadrupolo-Ioffe).
<i>RF</i>	Rádio frequência.
<i>CCD</i>	<i>Charge Coupled Device</i> (Dispositivo de Carga Acoplada).
<i>TOF</i>	<i>Time Of Flight</i> (Tempo de voo).
<i>OD</i>	<i>Optical Density</i> (Densidade Óptica).

SUMÁRIO

1	Introdução	27
2	Condensação de Bose-Einstein e Turbulência	31
2.1	Gás de Bose não Interagente	31
2.1.1	Potencial Tipo Caixa	32
2.1.2	Potencial Harmônico	34
2.2	Gás de Bose fracamente interagente	37
2.2.1	A equação de Gross-Pitaevskii	38
2.2.2	A aproximação de Thomas-Fermi	40
2.3	Turbulência	42
2.3.1	Fluidos Clássicos	42
2.3.2	Fluidos Quânticos	45
3	Produção Experimental de um BEC Turbulento	52
3.1	Sistema de Vácuo e Fontes Atômicas	53
3.2	O Sistema de Lasers	55
3.3	Armadilha Magneto-Óptica (MOT)	57
3.4	Transferência Atômica entre os dois MOTs	59
3.5	Transferência de Átomos do MOT2 para Armadilha Magnética	59

3.6	Armadilha Magnética	62
3.7	Imagem por Absorção	65
3.8	Resfriamento Evaporativo e a CBE	67
3.9	Excitações no BEC	71
4	Expansão Livre em Tempo de Voo	77
4.1	Nuvem Térmica	77
4.2	Nuvem Condensada	78
4.3	Nuvem Turbulenta	82
5	Método de Obtenção da Distribuição de Momento	87
5.1	O Espectro de Energia Cinética	87
5.2	Determinação da Distribuição de Momento a partir de Imagens em TOF	90
5.3	A Transformada de Abel	93
5.4	Medidas e Resultados	96
6	Conclusões	110
	REFERÊNCIAS	112

1 Introdução

Processos turbulentos são regimes de escoamento de natureza caótica e estocástica. Eles estão presentes na formação do campo magnético terrestre, produzido por movimentos turbulentos de ferro fundido no núcleo do planeta (1) e no fluxo sanguíneo, devido a distribuição não uniforme das hemácias (2). Apesar de sua importância, não temos uma compreensão clara dos processos que envolvem a turbulência nos fluidos clássicos (TC).

Os primeiros estudos qualitativos da TC foram desenvolvidos no século XV por Leonardo da Vinci, que estudou o fenômeno dos vórtices ao analisar o efeito das águas fluindo ao encontro de pilares de uma ponte, provocando uma série de diferentes circulações (3). Desde da Vinci, muitos físicos estudaram o mecanismo da formação do fluxo turbulento e grande parte deles colocou em dúvida a resolução deste problema.

Alguns avanços importantes foram feitos nas décadas de 1940 e 1950, tendo como pioneiro Andrey N. Kolmogorov (4, 5). Baseado nos trabalhos de Richardson sobre cascatas de energia (6), Kolmogorov descreveu estatisticamente a turbulência em fluidos incompressíveis incorporando conceitos de universalidade e lei de potências no espectro de energia de um fluido turbulento. O espectro de Kolmogorov foi confirmado experimental e numericamente para elevados números de Reynolds, mas analiticamente este modelo apresenta grande complexidade, uma vez que as cascatas de Richardson não são bem determinadas classicamente.

A grande dificuldade no estudo da TC se deve à sua natureza caótica, pequenas alterações iniciais podem levar a mudanças notáveis no escoamento do fluido, e no fato deste regime apresentar superposições e fusões de vórtices, originando novas circulações com características indeterminadas. Desta forma, torna-se muito difícil analisar a turbulência em um fluido

clássico, já que um controle bem definido dos parâmetros experimentais não é possível. Em fluidos quânticos, no entanto, a turbulência é mais simples, uma vez que os vórtices são objetos quantizados.

A turbulência quântica (TQ) foi primeiramente prevista por Feynman (7) e descrita como o aparecimento de um conjunto desordenado de linhas de vórtices quantizados, ou emaranhamento de vórtices. Esta ideia foi reforçada por uma série de experimentos desenvolvidos por Vinen (8–10) e confirmada numericamente mais tarde por Schwarz (11). Posteriormente, ela foi observada experimentalmente em ambos os isótopos do He (12, 13) e tornou-se um importante e ativo campo de pesquisa (14–16).

A partir de 1995, com a produção experimental de condensados de Bose–Einstein (BEC) (17–19) houve uma revolução na física de átomos frios. Duas décadas depois a produção e caracterização experimental da TQ em gases atômicos aprisionados tornou-se uma realidade (20–22). Teoricamente, esse sistema apresenta uma dinâmica mais simples se comparado ao He, o que simplifica significativamente os modelos matemáticos e facilita o desenvolvimento de simulações computacionais (23–25). Assim, a condensação de Bose–Einstein (CBE) transformou-se em uma alternativa atraente ao He líquido, uma vez que há um grande controle e precisão nos parâmetros experimentais do gás condensado.

Em nosso laboratório, os estados turbulentos são gerados através de excitações oscilatórias de campo magnético. A variação dos parâmetros de excitação controla a dinâmica da amostra até a formação da turbulência. Para excitações fracas, ocorre o aparecimento de vórtices quantizados (26–28) e, à medida que aumentamos a excitação, um emaranhamento de vórtices é gerado, produzindo a TQ (29). As análises das amostras são feitas com técnicas de processamento de imagem, uma vez que os dados são imagens digitais obtidas pelo processo de absorção de fótons. Elas permitem determinar as características físicas fundamentais (número de átomos, temperatura, densidade) e outras não triviais como propriedades termodinâmicas (30) e modos coletivos (31).

No capítulo 2, introduziremos conceitos teóricos, que são usualmente tratados em livros–

texto, sobre a CBE. Inicialmente descreveremos o gás de Bose não interagente confinado em dois potenciais distintos: o tipo caixa e o harmônico. Feito isso, introduziremos o efeito das interações neste modelo, o que nos levará a equação de Gross-Pitaevskii e a aproximação de Thomas-Fermi. Ao término, abordaremos alguns conceitos sobre as turbulências clássica e quântica, discutindo suas diferenças e similaridades.

O capítulo 3 descreve a produção experimental do BEC, sua caracterização e como foi produzida a TQ. Primeiramente, apresentaremos o sistema de vácuo com as fontes de átomos. Em seguida será discutido o sistema de laser e o processo de preparação dos feixes de luz que serão utilizados. Com isso, mostraremos como é feito o primeiro aprisionamento da amostra gasosa, o aprisionamento magneto-óptico (MOT), e sua transferência para uma câmara de alto vácuo onde será feita uma nova transferência para a armadilha magnética. Feito isso, detalharemos o diagnóstico por imagem de absorção, o processo de resfriamento evaporativo e finalmente a forma como é feita a excitação da amostra quanticamente degenerada.

A seguir, capítulo 4, faremos uma abordagem teórica da expansão em tempo de voo (TOF). Para a distribuição térmica, utilizaremos uma descrição semi-clássica para relacionar os raios expandidos. Já no gás de bósons degenerado, a dependência temporal dos raios será determinada através das equações hidrodinâmicas. No superfluido turbulento, também usaremos as expressões hidrodinâmicas, mas com o auxílio do formalismo Lagrangiano encontraremos equações diferenciais para os comprimentos característicos da expansão.

Por fim, no capítulo 5, utilizamos os resultados da expansão em tempo de voo para determinar o espectro de energia cinética do condensado turbulento a partir da densidade no espaço de momento. A obtenção desta densidade não é feita de maneira direta, portanto mostraremos o processo alternativo que desenvolvemos a partir do resultado gerado experimentalmente. Feito isso, mostraremos as medidas que foram realizadas para condensados no regime turbulento e não turbulento e discutiremos os resultados e conclusões.

2 *Condensação de Bose-Einstein e Turbulência*

Neste capítulo, introduziremos a teoria da condensação de Bose-Einstein (CBE) presente nos livros-texto tradicionais de física estatística (32). A seguir, aprofundaremos a discussão ao adicionarmos o efeito das interações neste sistema quântico, tornando o modelo mais realístico (33–36). Ao término do capítulo, apresentaremos ideias introdutórias para um bom entendimento da TC (3, 37) e com base nos trabalhos teóricos (23, 38–40) mostraremos conceitos fundamentais da TQ.

2.1 Gás de Bose não Interagente

Em um sistema de N bósons, o fenômeno da CBE ocorre quando abaixo de certa temperatura, uma fração finita desses bósons ocupam o estado fundamental de uma única partícula. Para entendermos como este fenômeno ocorre, precisamos analisar a estatística das partículas.

Um gás com N bósons confinados em um potencial externo $U(\mathbf{r})$, tal que a energia do i -ésimo estado é ϵ_i , obedece a função distribuição de Bose,

$$f_{BE}(\epsilon_i) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}, \quad (2.1)$$

aqui definimos $\beta = 1/k_B T$ onde k_B é a constante de Boltzmann, T a temperatura do gás e μ o potencial químico.

O número total de partículas no sistema é a soma da ocupação $f_{BE}(\epsilon_i)$ sobre todos os esta-

dos. Escrevendo em termos da fugacidade ($\zeta = \exp(\beta\mu)$) teremos,

$$N = \sum_i f_{BE}(\varepsilon_i) = \sum_i \frac{1}{\zeta^{-1} e^{\beta\varepsilon_i} - 1}. \quad (2.2)$$

Esta soma deve ser efetuada sobre todos os estados de energias ε_i do sistema, considerando a respectiva degenerescência g_i de cada nível, ou seja

$$N = \sum_{\varepsilon_i} \frac{g_i}{\zeta^{-1} e^{\beta\varepsilon_i} - 1}. \quad (2.3)$$

Podemos tratar esse sistema como um contínuo de estados energéticos, se considerarmos que o espaçamento entre os níveis de energia é muito menor que $k_B T$, escala típica de energia do sistema. Neste caso podemos substituir a soma da equação (2.3) por uma integral e a degenerescência dos estados g_i pela densidade de estados, resultando respectivamente em

$$N = N_0 + \int_0^\infty f_{BE}(\varepsilon) \rho(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (2.4)$$

$$\rho(\varepsilon) = \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \int \sqrt{\varepsilon - U(\mathbf{r})} d^3r, \quad (2.5)$$

onde separamos o termo N_0 , referente a população do estado fundamental ($\varepsilon = 0$) pois $\rho(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e, portanto $N_0 \rightarrow 0$. Em geral a população do estado fundamental é muito pequena, exceto na CBE quando este valor torna-se macroscópico.

Para resolvermos a equação (2.4) precisamos conhecer explicitamente a forma do potencial $U(\mathbf{r})$ em que os bósons são confinados. A seguir resolveremos o problema para dois casos específicos: um potencial tipo caixa e um potencial harmônico.

2.1.1 Potencial Tipo Caixa

Vamos considerar um sistema de partículas livres aprisionadas em uma caixa tridimensional de volume V . Utilizando a equação (2.5) é fácil mostrar que a densidade de estados é dada por

$$\rho(\varepsilon) = V \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \sqrt{\varepsilon}. \quad (2.6)$$

Uma vez determinada a densidade de estado é possível calcular a densidade n do gás utilizando as equações (2.3) e (2.4)

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{V} \frac{\zeta}{1-\zeta} + \frac{g_{3/2}(\zeta)}{\lambda_{dB}^3} = n_0 + n_{th}, \quad (2.7)$$

onde n_0 e n_{th} são as densidades de partículas nos estados fundamental e excitado, respectivamente.

Escrevemos a equação anterior em função de dois parâmetros importantes: comprimento de onda térmico de de Broglie (2.8) e a função de Bose (2.9), com $z = \zeta$ e $\alpha = 3/2$

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \quad (2.8)$$

$$g_\alpha(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^\alpha}. \quad (2.9)$$

Agora, se adicionarmos mais partículas no sistema mantendo T e V constantes, ocorrerá um aumento na densidade total, n , do gás. Se n aumenta, de acordo com a equação (2.7) o potencial químico, também aumenta. Como $f_{BE}(\epsilon)$ deve ser sempre positivo, μ não pode ser maior que zero (para partículas bosônicas). Então quando $\mu \rightarrow 0$ a fugacidade $\zeta \rightarrow 1$, desta forma ocorre a ocupação máxima do estado excitado, dado por

$$n_{th}^{max} = \frac{g_{3/2}(1)}{\lambda_{dB}^3}. \quad (2.10)$$

Assim, se continuarmos adicionando partículas ao gás, a população do estado excitado não poderá mais aumentar e o estado fundamental começará a ficar macroscopicamente populado. Este é o fenômeno da CBE.

Observe que a equação (2.10) é a condição que delimita a ocupação máxima dos estados excitados, tornando-se o parâmetro para a transição de fase, dado por

$$n_{th}^{max} \lambda_{dB}^3 \approx 2,612... \quad (2.11)$$

Em vez de aumentar o número de partículas a T e V constantes, pode-se também redu-

zir a temperatura para alcançar a condensação. Neste caso, a equação (2.11) pode ser usada para se obter uma expressão para a temperatura crítica, tal que, abaixo dela ocorre a ocupação macroscópica do estado fundamental. Desta foram encontra-se

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi m k_B} \left(\frac{n}{g_{3/2}(1)} \right)^{2/3}. \quad (2.12)$$

Finalmente, utilizando as equações (2.7), (2.11) e (2.12), podemos encontrar uma expressão para a fração de bósons no estado fundamental em função da temperatura

$$\frac{n_0}{n} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}. \quad (2.13)$$

Apesar desse tratamento ser válido, experimentalmente não é possível atingir o estado condensado em um potencial confinante com as condições de contorno de um potencial tipo caixa. Tipicamente os potenciais utilizados para produção de um condensado de Bose-Einstein (BEC) são harmônicos.

2.1.2 Potencial Harmônico

Vamos considerar um gás ideal de Bose confinado em um potencial harmônico anisotrópico tridimensional, dado por

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (2.14)$$

onde ω_i é a frequência do oscilador na i -ésima direção.

Como estamos tratando partículas idênticas e desprezando a interação átomo-átomo, a Hamiltoniana deste sistema é relativamente simples e consiste na soma das Hamiltonianas de uma partícula. Desta forma, os níveis de energia são

$$\varepsilon(n_x, n_y, n_z) = \left(n_x + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_z. \quad (2.15)$$

Aplicando a equação (2.5), é fácil mostrar que encontraremos uma densidade de estados para o potencial harmônico dada por

$$\rho(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z}. \quad (2.16)$$

Substituindo a equação (2.16) na equação (2.4) e resolvendo a integral obteremos uma expressão para o número de átomos no estado excitado,

$$N_{th} = N - N_0 = g_3(\zeta) \left(\frac{k_B T}{\hbar \bar{\omega}} \right)^3, \quad (2.17)$$

onde $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ é a média geométrica das frequências da armadilha.

Neste caso a degenerescência quântica ocorrerá quando o potencial químico aproxima-se da energia do estado fundamental: $\mu \rightarrow (\omega_x + \omega_y + \omega_z)\hbar/2$. Para simplificar, vamos definir a energia do estado fundamental como zero e considerar o ponto crítico quando $\mu \rightarrow 0$. Assim, a saturação da população do estado excitado será

$$N_{th}^{max} = N - N_0 = g_3(1) \left(\frac{k_B T}{\hbar \bar{\omega}} \right)^3. \quad (2.18)$$

Supondo que no ponto crítico $N_0 \ll N$ obtemos a temperatura crítica através da equação anterior

$$T_c = \frac{\hbar \bar{\omega}}{k_B} \left[\frac{N}{g_3(1)} \right]^{1/3} \approx 0,94 \frac{\hbar \bar{\omega}}{k_B} N^{1/3}. \quad (2.19)$$

Utilizando a temperatura crítica podemos encontrar a população do estado fundamental como função da temperatura,

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3. \quad (2.20)$$

Esta equação mostra que a população do estado fundamental no potencial harmônico ocorre mais rapidamente do que no potencial tipo caixa.

Distribuição semi-clássica

A mudança abrupta da densidade espacial comprova experimentalmente o aparecimento do CBE. Agora, calcularemos esta densidade a medida que nos aproximamos do ponto crítico.

Através da mecânica quântica, descrevemos o perfil de densidade espacial da seguinte forma,

$$n_{th}(\mathbf{r}) = \sum_{\varepsilon=0}^{\infty} f(\varepsilon) |\phi_{\varepsilon}(\mathbf{r})|^2, \quad (2.21)$$

onde f_{ε} é o número de ocupação do estado ε , para os quais a função de onda é $\phi_{\varepsilon}(\mathbf{r})$. Em geral, tal descrição é complicada pois exige o conhecimento da função de onda dentro do potencial confinante. No entanto, para altas temperaturas o espaçamento entre os níveis de energia é muito pequeno se comparado as escalas de energia sobre o qual o potencial de aprisionamento varia ($k_B T \gg \hbar \omega_{x,y,z}$). Podemos, desta forma, realizar um tratamento semi-clássico para resolver esse problema.

Semi-classicamente, a função de distribuição, $f(\varepsilon)$, representa o número de ocupação médio dos estados quânticos,

$$f[\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})] = \frac{1}{e^{\beta[\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - \mu]} - 1}, \quad (2.22)$$

onde

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \quad (2.23)$$

é a energia cinética de uma partícula livre sujeita a um potencial externo, dado pela equação (2.14).

Nesse regime, o número de partículas em uma célula do espaço de fase é

$$dN = (2\pi\hbar)^{-3} f(\varepsilon) d\mathbf{p} d\mathbf{r}, \quad (2.24)$$

ou seja, para encontrarmos a densidade total da fração térmica do gás ($T \geq T_c$) no espaço das posições basta integrarmos sobre o espaço de momento

$$n_{th}(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} f(\varepsilon) = \frac{1}{\lambda_{dB}^3} g_{3/2}[z(\mathbf{r})], \quad (2.25)$$

onde $z(\mathbf{r}) = \zeta e^{-\beta U(\mathbf{r})}$, λ_{dB} é o comprimento de onda térmico de de Broglie (2.8) e $g_{3/2}[z(\mathbf{r})]$ a função de bose (2.9).

Considerando novamente a energia do estado fundamental como zero e o ponto crítico quando $\mu \rightarrow 0$, encontramos a densidade no ponto crítico,

$$n_{th}^{max} \lambda_{dB}^3 \approx 2,612... \quad (2.26)$$

mesmo resultado obtido para transição de fase no potencial tipo caixa, equação (2.11).

De maneira análoga, podemos determinar a distribuição de momento da nuvem térmica integrando a equação (2.24) no espaço das posições

$$n_{th}(\mathbf{p}) = \int \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi\hbar)^3} f(\varepsilon) = \frac{\bar{a}_{ho}^6}{(\hbar\lambda_{dB})^3} g_{3/2}[z(\mathbf{p})], \quad (2.27)$$

tal que $\bar{a}_{ho} = \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$ é o comprimento generalizado do oscilador, $\bar{\omega} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$ é a frequência média de oscilação do potencial confinante e $z(\mathbf{p}) = \zeta e^{-\beta \mathbf{p}^2/2m}$.

Ao integrarmos as equações (2.25) e (2.27) a seguinte condição de normalização deve ser satisfeita

$$\int n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int n(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = N. \quad (2.28)$$

2.2 Gás de Bose fracamente interagente

Nos condensados de Bose-Einstein a densidade atômica é muito elevada, tornando as interações atômicas responsáveis pelos efeitos mais interessantes relacionados tanto à transição de fase quanto à dinâmica da nuvem condensada. Entretanto, estas nuvens podem ser ditas diluídas, uma vez que a distância entre as partículas é muito maior que o alcance típico das interações entre os átomos. Desta forma, o efeito dominante das interações são as colisões entre dois átomos dentro da nuvem atômica.

Este sistema físico é descrito pela equação de Gross-Pitaevskii, derivada do Hamiltoniano

de muitos corpos com a aproximação de campo médio.

2.2.1 A equação de Gross-Pitaevskii

O Hamiltoniano de muitos corpos que descreve um sistema de N bósons interagentes confinados em um potencial externo $U(\mathbf{r}, t)$ é dado por

$$\begin{aligned} H = & \int d^3\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}, t) \right) \psi(\mathbf{r}) \\ & + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ é o potencial de interação entre dois átomos e $\psi(\mathbf{r})$ e $\psi^\dagger(\mathbf{r})$ são os operadores de campo que são definidos como

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) b_{\mathbf{k}}, \quad (2.30)$$

$$\psi^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) b_{\mathbf{k}}^\dagger, \quad (2.31)$$

onde o vetor $\mathbf{k}$ indica o estado da partícula e $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ a função de onda da partícula no estado $\mathbf{k}$. Os operadores $b_{\mathbf{k}}$ e $b_{\mathbf{k}}^\dagger$ são, respectivamente, os operadores de criação e aniquilação de bósons que satisfazem as seguintes regras de comutação

$$[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (2.32)$$

$$[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}] = [b_{\mathbf{k}}^\dagger, b_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0. \quad (2.33)$$

Já os operadores de campo (2.30) e (2.31) obedecem as seguintes relações de comutação

$$[\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.34)$$

$$[\psi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}')] = [\psi^\dagger(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')] = 0. \quad (2.35)$$

Com estas relações de comutação, basta substituir o Hamiltoniano da equação (2.29) na

equação de Heisenberg para obtermos a função de onda que descreve o condensado

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= [\Psi(\mathbf{r}, t), H] \\ &= \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U(\mathbf{r}, t) + \int d^3 \mathbf{r}' \psi^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}', t) \right] \Psi(\mathbf{r}, t) . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Devido as baixas energias dos átomos em estudo, a forma do potencial $V(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ envolve apenas o espalhamento de ondas-s (41). Desta forma

$$V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = g \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (2.37)$$

onde g é a interação efetiva entre os átomos, que está relacionada com a massa do átomo m e o comprimento de espalhamento a através da expressão

$$g = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a. \quad (2.38)$$

Agora, vamos considerar que o gás de bósons esteja a temperatura zero. Neste caso, a maioria dos bósons estará no estado fundamental do potencial, ou seja, a maioria das partículas estarão no estado $\mathbf{k} = 0$. Desta forma os operadores de campo (2.30) e (2.31) podem ser aproximados para

$$\psi(\mathbf{r}) \approx \Psi_0(\mathbf{r}) b_0, \quad (2.39)$$

$$\psi^\dagger(\mathbf{r}) \approx \Psi_0^*(\mathbf{r}) b_0^\dagger. \quad (2.40)$$

Finalmente aplicando as equações (2.37), (2.38), (2.39) e (2.40) na equação (2.36), obtemos a equação de Gross-Pitaevskii dependente do tempo (2.41) para a função de onda condensada

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U(\mathbf{r}, t) + g |\Psi_0(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi_0(\mathbf{r}, t), \quad (2.41)$$

tal que a densidade espacial por partículas é dada por

$$n(\mathbf{r}, t) = |\Psi_0(\mathbf{r}, t)|^2, \quad (2.42)$$

e a função de onda satisfaz a seguinte condição de normalização

$$\int |\Psi_0(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} = N. \quad (2.43)$$

Repare que se o termo não linear da equação (2.41) fosse nulo ($g = 0$), encontraríamos a equação de Schrödinger. Assim como na equação de Schrödinger, se o potencial externo for independente do tempo, $U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r})$ podemos obter a equação de Gross-Pitaevskii independente do tempo substituindo a função de onda por $\Psi_0(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})e^{-i\mu t/\hbar}$, onde μ é potencial químico,

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U(\mathbf{r}) + g|\phi(\mathbf{r})|^2 \right] \phi(\mathbf{r}) = \mu \phi(\mathbf{r}). \quad (2.44)$$

2.2.2 A aproximação de Thomas-Fermi

Na equação (2.44), quando a energia de interação é dominante no sistema ($gn(\mathbf{r}) \gg \hbar\omega_{x,y,z}$), a função de onda aprisionada é simplificada desprezando o termo cinético, muito menor que o termo de interação. Este tratamento é conhecido como aproximação de Thomas-Fermi e resulta na densidade espacial

$$n(\mathbf{r}) = |\phi(\mathbf{r})|^2 = \begin{cases} \frac{1}{g}[\mu - U(\mathbf{r})] & , \text{ se } \mu > U(\mathbf{r}) \\ 0 & , \text{ se } \mu \leq U(\mathbf{r}). \end{cases} \quad (2.45)$$

No caso de um potencial harmônico típico (2.14), a nuvem toma a forma de uma parábola invertida, com densidade de pico dada por $n_0 = \mu/g$ e tamanho dado pela relação,

$$R_i = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_i^2}}, \quad (2.46)$$

obtida pela condição de contorno $U(\mathbf{r}) = \mu$.

Através da condição de normalização, equação (2.43), relacionamos o potencial químico

com o número total de partículas. Para o potencial harmônico encontramos

$$N = \frac{8\pi}{15} \left(\frac{2\mu}{m\bar{\omega}^2} \right)^{3/2} \frac{\mu}{g}. \quad (2.47)$$

Utilizando as equações (2.46), (2.47) e conhecendo a forma do potencial, podemos reescrever a equação (2.45) na forma normalizada,

$$n_c(\mathbf{r}) = \frac{15N}{8\pi} \frac{1}{R_x R_y R_z} \left(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{r_i^2}{R_i^2}, 0 \right). \quad (2.48)$$

A notação $(\alpha(x, y, z), 0)$ substitui função de *Heaviside* e implica que a função $n_c(\mathbf{r})$ é nula a partir dos pontos onde $\alpha(x, y, z) < 0$.

Finalmente, isolando μ na equação (2.47),

$$\mu = \frac{\hbar\bar{\omega}}{2} \left(\frac{15Na}{\bar{a}_{ho}} \right)^{2/5}, \quad (2.49)$$

e utilizando a definição $\mu = \partial E / \partial N$ encontramos a energia por partícula

$$\frac{E}{N} = \frac{5\mu}{7}. \quad (2.50)$$

É possível mostrar também que, na aproximação de Thomas-Fermi, a energia de interação por partícula é dada por

$$\frac{E_{int}}{N} = \frac{2\mu}{7}. \quad (2.51)$$

A aproximação de Thomas-Fermi, embora muito simples, proporciona uma das principais assinaturas da condensação: a fração térmica possui um perfil de densidade Gaussiano, mas com a diminuição da temperatura abaixo do ponto crítico começa-se a observar uma distribuição parabólica (perfil Thomas-Fermi), indicando a presença da fração condensada.

2.3 Turbulência

Para introduzirmos conceitos básicos sobre turbulência, vamos dividi-la em duas classes distintas: a que ocorre em fluidos clássicos e a que ocorre em superfluidos.

2.3.1 Fluidos Clássicos

A dinâmica de um fluido clássico é descrita pela equação de Navier-Stokes através de um campo de velocidades $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$, dado por

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.52)$$

onde ρ é a densidade do fluido, P a pressão e $\nu = \eta/\rho$ é definido como a viscosidade cinética com η sendo a viscosidade.

Os termos do lado esquerdo estão relacionados com a aceleração do fluido, enquanto os do lado direito descrevem o gradiente de pressão, $-\nabla P/\rho$, e o efeito da viscosidade, $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$. Tomando a razão das magnitudes dos termos, $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ e $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ encontraremos um parâmetro adimensional conhecido como número de Reynolds (R_e). Quando R_e é grande, as forças viscosas não são capazes de alterar as variações no campo de velocidades e, com isso, os efeitos não lineares dominam o escoamento. À medida que o R_e aumenta, mais complexidade é introduzida ao sistema através do aparecimento crescente do número de vórtices, tornando o escoamento caótico e caracterizando o início da turbulência. A figura 2.1 ilustra a evolução do escoamento de água dentro de um cilindro a medida que o R_e aumenta (42).

Nos fluidos clássicos, a evolução da turbulência é explicada através das cascatas de Richardson. Esta diz que, no regime turbulento, grandes vórtices são instáveis e transformam-se em turbilhões menores. Os turbilhões menores sofrem o mesmo processo de decaimento, conservando a energia e gerando circulações ainda menores. Este processo é auto-sustentado até

Figura 2.1 – Esquema ilustrando o escoamento de água dentro de um cilindro à medida que Re é aumentado.

que a menor escala atingida pelos vórtices é da ordem de $Re \sim 1$. Neste ponto, a viscosidade do fluido predomina e a energia é dissipada na forma de calor sem formar novos vórtices.

Andrey N. Kolmogorov propôs que essas cascatas de Richardson possuem uma estrutura universal para determinada região de escalas onde o sistema é localmente homogêneo e isotrópico, chamada de faixa inercial. Pela teoria de Kolmogorov, o limite superior desta faixa é dado $k_K = (\epsilon/\nu^3)^{1/4}$, onde ϵ é a taxa com que a energia é injetada no sistema, e o inferior k_D corresponde a maior escala do sistema. Neste regime inercial, $k_D \ll k \ll k_K$, a lei de Kolmogorov para o espectro de energia é

$$E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3}, \quad (2.53)$$

onde C é uma constante adimensional e k é o número de onda obtido pela transformada de Fourier do campo de velocidades.

O espectro de Kolmogorov apresenta algumas características importantes como a universalidade (a energia cinética não depende das condições de contorno ou da natureza do fluido) e a auto-similaridade da turbulência ao longo de todas as escalas dentro da faixa inercial, característica típica de um sistema livre de escala. O gráfico da figura 2.2 mostra a evidência experimental da lei de Kolmogorov para diferentes fluidos com diferentes condições de contorno, provando seu caráter universal (43).

Figura 2.2 – Gráfico do espectro de energia para diferentes escoamentos turbulentos com diferentes condições de contorno (jatos de água, tubulações, dutos e oceanos), evidenciando a universalidade da lei de Kolmogorov (43).

2.3.2 Fluidos Quânticos

A descrição teórica da TQ em amostras condensadas é feita através da evolução dinâmica da equação de Gross-Pitaevskii dependente do tempo (2.41), reescrita com a densidade atômica e com um campo de velocidades.

Para entendermos este campo de velocidades precisamos derivar a equação da continuidade. Para isso, multiplicamos a equação (2.41) por $\Psi_0^*(\mathbf{r}, t)$ e subtraímos o complexo conjugado da expressão resultante, assim obtendo

$$\frac{\partial |\Psi_0|^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\frac{\hbar}{2mi} (\Psi_0^* \nabla \Psi_0^* - \Psi_0 \nabla \Psi_0^*) \right] = 0. \quad (2.54)$$

Substituindo a equação (2.42) nesta última expressão encontramos a equação da continuidade,

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) n(\mathbf{r}, t)] = 0, \quad (2.55)$$

onde a velocidade do condensado é definida por

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} \frac{(\Psi_0^* \nabla \Psi_0^* - \Psi_0 \nabla \Psi_0^*)}{|\Psi_0|^2}. \quad (2.56)$$

A fim de encontrarmos uma expressão mais simples para a velocidade, podemos escrever a função de onda na forma

$$\Psi_0(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} e^{i\phi(\mathbf{r}, t)}, \quad (2.57)$$

onde $\phi(\mathbf{r}, t)$ é uma fase complexa.

Aplicando a definição (2.57) na equação (2.56) encontramos o campo de velocidades do condensado,

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi(\mathbf{r}, t). \quad (2.58)$$

Como a velocidade do condensado é descrita por um fluxo potencial, gradiente de uma quantidade escalar, sua vorticidade será,

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \times \nabla \phi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.59)$$

isto é, o campo de velocidades é irrotacional, a menos que a fase da função de onda tenha uma singularidade. Portanto, os movimentos do superfluido quântico são muito mais restritos do que os dos fluidos clássicos.

Desta forma, a circulação em um caminho fechado deve satisfazer

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi l \frac{\hbar}{m} = \frac{lh}{m}, \quad (2.60)$$

onde $d\mathbf{l}$ é o um elemento de caminho e l um inteiro. A equação (2.60) nos diz que somente circulações quantizadas são permitidas e, portanto, os únicos possíveis fluxos de rotação devem assumir a forma de vórtices quantizados. Qualquer movimento de rotação do superfluido quântico é mantido somente por esses vórtices quantizados. Estes são irregularidades topológicas no BEC caracterizados por um núcleo de diâmetro inversamente proporcional ao valor de pico da densidade espacial do condensado e relacionado ao comprimento de espalhamento, equação (2.38), através da equação

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{8n_0\pi a}}, \quad (2.61)$$

que é conhecida como *healing length*, uma escala característica dos gases ultrafrios (33). O valor de ξ para o ^4He , por exemplo, é da ordem de poucos angstroms enquanto nos BECs este valor passa para alguns microns. Desta forma, o estudo de excitações topológicas em gases bosônicos se torna mais interessante, pois o diâmetro dos vórtices é maior.

O sistema de transporte de energia neste regime é equivalente ao que apresentamos na TC, pois também é baseado nas cascatas de Richardson, ou seja, grandes circulações não são estáveis e quebram-se em rotações menores, conservando a energia. Ao atingir certa escala, a energia é dissipada na forma de calor. Mas aqui o mecanismo de dissipação não é trivial como nos fluidos clássicos, uma vez que a viscosidade não existe e, em amostras condensadas experimentais quase puras, a fração térmica (não superfluida) corresponde a uma parcela irrisória do gás.

Para explicar esse mecanismo que advém de efeitos quânticos e não possui equivalente clássico, utilizamos o conceito de reconexões de vórtices. A ideia desta hipótese é simples: Quando dois vórtices com direções bem definidas se aproximam ocorre uma interação entre

Figura 2.3 – Simulação que representa o processo de reconexão de vórtices. (a) Inicialmente dois vórtices com direções bem definidas se aproximam e (b) interagem entre si, (c) posteriormente ocorre uma reconexão e (d) dois novos vórtices com direções diferentes são gerados.

eles e, por conseguinte uma reconexão. Depois disso dois novos vórtices retorcidos e com orientação diferente são gerados. A figura 2.3 mostra uma simulação que exemplifica este processo (44). Se o superfluido contém uma grande densidade de vórtices, reconexões ocorrem com alta frequência e rapidamente um grande emaranhado de vórtice é formado. Este esquema de turbulência era o que Feynman imaginava na década de cinquenta.

Com o número contínuo de reconexões, uma deformação helicoidal que se propaga ao longo da linha de vórtices, conhecida como ondas de *Kelvin*, pode ser gerada. Quando a fração térmica é muito maior que a fração superfluida, as ondas *Kelvin* são amortecidas pela viscosidade do fluido provocando a dissipação da energia. Para baixas temperaturas, quando a parte superfluida domina a parte térmica, este amortecimento não acontece, mas as ondas de *Kelvin* atingem frequências suficientemente altas para irradiar fônons, que em última instância, podem dissipar energia. A figura 2.4 exemplifica todo o processo de formação e dissipação da TQ que inicia-se com as cascatas de Richardson e termina com a dissipação de energia por meio da emissão de fônons (44).

Agora que introduzimos a definição de vórtices, e o transporte e dissipação de energia nos fluidos quânticos, apresentaremos conceitos teóricos da TQ em BECs baseado no trabalho de Makoto Tsubota (39). Este trabalho resume-se a simulações computacionais da dinâmica da equação de Gross-Pitaevskii, com um potencial estático combinado a um campo magnético girante. O mecanismo da formação do estado turbulento consiste na rotação da armadilha em duas direções ortogonais, como ilustra a figura 2.5(a), de tal forma que os vórtices são criados

Figura 2.4 – Esquema do processo dissipativo em superfluidos turbulentos. Uma grande quantidade de energia é injetada no sistema, gerando vários vórtices. Em seguida, ocorre uma sucessão de reconexões destes vórtices produzindo um grande emaranhado. Assim, excitação das ondas de *Kelvin* são produzidas e, finalmente, a energia é dissipada na forma de fônons e excitações térmicas.

perpendicularmente e proporcionam o emaranhamento entre eles.

Uma vez resolvida a equação de Gross-Pitaevskii, pode-se determinar a energia deste sistema para encontrar o espectro de energia cinética. Desta forma, se R_{TF} é o raio de Thomas-Fermi, equação (2.46), e ξ o *healing length*, os resultados numéricos mostram que existe uma faixa inercial no intervalo $2\pi/R_{TF} < k < 2\pi/\xi$, ou seja, a energia cinética $E_{kin}(k)$ satisfaz o espectro de Kolmogorov, como mostrado no gráfico da figura 2.5(b)

Figura 2.5 – (a) Esquema ilustrativo da geração da TQ em BEC aprisionado através da rotação da nuvem em duas direções perpendiculares. (b) Gráfico do espectro de energia cinética do BEC turbulento. Os pontos correspondem a simulação numérica e a linha se refere a lei de Kolmogorov.

Este resultado notável mostra que a lei de Kolmogorov também é satisfeita em gases quân-

ticos aprisionados. A única diferença encontrada entre os fluidos quântico e clássico é o valor da constante C . Enquanto para a TC temos $C \approx 1,5$ para a TQ em BEC aprisionados o valor é de $C \approx 0,25$. Lei de potências deste tipo já foram evidenciadas também em modelos bidimensionais de Gross-Pitaevskii (45) e um tratamento teórico mais detalhes para este tipo de sistema pode ser encontrado na referência (46).

3 *Produção Experimental de um BEC Turbulento*

Em nossos laboratórios, o estudo experimental da condensação de Bose-Einstein começou com o trabalho de doutorado de Kilvia Magalhães (47), onde 10^3 átomos foram detectados em um condensado composto por átomos de Sódio. Apesar da importância deste trabalho, o sistema era pouco reprodutível e não permitiu muitos estudos. Posteriormente, um novo sistema foi montado para atingir a degenerescência quântica com átomos de Rubídio. Com o sucesso deste, foi possível excitar o BEC para observação de vórtices e evidenciar, pela primeira vez, a TQ em amostras condensadas. O sistema experimental que utilizamos até hoje é praticamente o mesmo, portanto descreveremos sucintamente este experimento com base na tese de doutorado de Emanuel Henn (48), trabalho que originou esse sistema.

Em geral, para atingirmos a condensação de Bose-Einstein (CBE) é necessário que as amostras atômicas estejam à temperaturas da ordem de 100 nK e densidades superiores a 10^{13} cm^{-3} . Para atingir tais valores, aprisionamos inicialmente átomos de ^{87}Rb em uma armadilha magneto-óptica (MOT) dentro de uma câmara de vácuo. Feito isso, um feixe laser transfere continuamente esses átomos aprisionados para uma segunda câmara, de alto vácuo, onde um segundo MOT é formado.

Uma vez carregado este segundo MOT, os átomos são transferidos para uma armadilha puramente magnética, onde ocorre o resfriamento evaporativo, que resultará na criação do BEC. Para excitar essa amostra, um campo magnético quadrupolar oscilante é usado e dependendo das condições de oscilação temos a criação de vórtices e formação da TQ.

Figura 3.1 – Esquema simplificado do sistema de vácuo mostrando as duas câmaras de aprisionamento, tubo de transferência, saídas de bombeamento e entrada para *dispensers*

3.1 Sistema de Vácuo e Fontes Atômicas

Nossa fonte de átomos de ^{87}Rb é um conjunto de *dispensers*, filamentos metálicos contendo ^{87}Rb que, ao receber uma determinada corrente elétrica, libera parte destes átomos na forma de vapor. A figura 3.1 mostra uma visão geral do sistema de vácuo.

A primeira câmara é feita de *pyrex* (tipo de vidro resistente ao calor e a produtos químicos) e é mantida a uma pressão da ordem de 3×10^{-9} Torr. Ela tem a forma de um balão e possui oito janelas, por onde entram seis feixes de MOT: Um de transferência, um para realização da imagem e duas saídas com flanges metálicas. Uma dessas saídas conecta-se ao tubo de transferência que liga as duas câmaras, enquanto a outra se liga a uma bomba iônica e à fonte de átomos.

A conexão entre as duas células é feita pelo tubo de transferência, composto por três partes: A primeira é composta por um tubo rígido de 4 mm de diâmetro e 13 cm de comprimento por onde os átomos entram; A segunda, por sua vez, é um tubo flexível de aço inox com 6 mm de diâmetro e 20 cm de comprimento, que absorve qualquer possível torque entre as partes do sistema, evitando tensões mecânicas sobre as células de vidro. A terceira, a saída dos átomos, assim como a primeira, é um tubo rígido de 6 cm de comprimento por 6mm de diâmetro.

A célula de alto vácuo é feita de quartzo e mantida a uma pressão de 5×10^{-11} Torr. Esta possui 7 cm de comprimento, uma seção quadrada interna de $30 \times 30 \text{ mm}^2$ e é conectada à parte flexível do tubo de transferência, onde é colocada outra bomba iônica, uma bomba de sublimação de titânio e um medidor de vácuo. Esta configuração é necessária para manter o alto vácuo na região onde o BEC será formado, evitando ao máximo as perdas por colisões com o vapor de fundo.

Figura 3.2 – Comparação entre os tempos de vida na armadilha magnética com a utilização de *dispensers* e com a técnica LIAD

Para melhorar a qualidade do vácuo e ao mesmo tempo aumentar a carga dos MOTs, desligam-se os *dispensers*, quando a primeira célula estiver saturada de vapor de rubídio, e ligam-se LEDs azuis ($\lambda \approx 400 \text{ nm}$). Este processo, chamado *Light-Induced Atom Desorption* (LIAD), utiliza LEDs como fonte alternativa de átomos por removerem os átomos adsorvidos na superfície interna da câmara (49, 50). Na figura 3.2 é possível ver a eficiência desta técnica através do tempo de vida dos átomos na armadilha magnética.

Desta forma, o modo operacional do sistema requer algumas horas com os *dispensers* ligados, saturando a primeira câmara, para depois desligá-los e empregar o LIAD. Com isso, é possível operar o sistema por cerca de seis horas contínuas, quando novamente precisamos ligar os *dispensers*.

3.2 O Sistema de Lasers

Em experimentos de física atômica, a luz laser é de fundamental importância, pois através dela controla-se o resfriamento, aprisionamento atômico e se produz o resultado final na forma de uma imagem. Para geração de todos os feixes são utilizados três lasers de diodo de alta potência, e para atingirmos as frequências necessárias, faz-se o uso de dez moduladores acusto-óticos (AOM). A figura 3.3 ilustra o aparato experimental com os principais componentes ópticos.

Dos três lasers utilizados, o primeiro (Toptica - DLX110), *Repumping*, é responsável pelo rebombeio de ambos os MOTs e por um dos feixes de bombeamento óptico ($1 \rightarrow 2$). O segundo (Toptica - DLX110L), *Cooling 1*, produz os feixes necessários apenas para o aprisionamento do MOT1. O terceiro (Toptica - DLX110L), *Cooling 2*, além de gerar a luz de aprisionamento do MOT2, também gera o feixe de transferência (*Push*), o feixe de imagem (*Probe*) e o outro feixe de bombeamento óptico ($2 \rightarrow 2$).

Para determinarmos as frequências de aprisionamento e rebombeio, utilizamos uma célula com vapor de rubídio onde empregamos a técnica de absorção saturada (51). Com esta, localizamos as transições hiperfinas do átomo de ^{87}Rb e estabilizamos os lasers na linha apropriada. A figura 3.4 mostra a estrutura hiperfina do ^{87}Rb na transição $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ com as frequências de sintonia dos feixes.

Com o *Repumping*, o *Cooling 1* e o *Cooling 2* devidamente estabilizados em suas respectivas linhas, alteramos suas frequências no decorrer do experimento usando AOMs. Estes são constituídos por um cristal que recebe uma radiação de radiofrequência em uma frequência específica que é adicionada ou subtraída à frequência do laser no momento em que ele o atravessa. O controle dos AOMs é feito por um sistema de VCO (*voltage-control oscillator*).

Figura 3.3 – Esquema óptico da preparação dos feixes, mostrando os três lasers e os principais componentes ópticos

Figura 3.4 – Estrutura de níveis do ^{87}Rb relevantes ao experimento juntamente com as frequências utilizadas

3.3 Armadilha Magneto-Óptica (MOT)

As armadilhas magneto-ópticas (em inglês MOT – Magneto Optical Trap) são produzidas a partir de uma técnica que combina a ação de campo magnético inhomogêneo no espaço com a força de pressão de radiação exercida pela luz nos átomos (52, 53). O MOT tem sido o principal instrumento de trabalho de amostras ultrafrias, não só como estágio de pré-resfriamento em experimentos de condensação, mas também no estudo de colisões atômicas e no estudo da interação da luz com a matéria, por exemplo.

Neste experimento existem dois MOTs, um em cada câmara. O primeiro (MOT1) tem sua parte óptica formada por três feixes de luz retro-refletidos que dão origem a três pares de feixes contra-propagantes. A parte magnética deste é composta por um par de bobinas anti-Helmholtz, responsável pela produção de um campo quadrupolar que gera um gradiente de 20 G/cm, e por três pares de bobinas Helmholtz (bobinas de compensação), que contribuem no posicionamento do MOT1 para futuramente ser transferido para outra câmara.

O segundo MOT (MOT2) é mais delicado, e por isso os seis feixes são independentes,

garantindo um melhor balanço de potência, polarização e alinhamento. Assim como no MOT1, os campos magnéticos são gerados por um par de bobinas anti-Helmholtz para o confinamento espacial e três pares de bobinas Helmholtz para compensação de campos magnéticos espúrios, como o campo terrestre, na região de aprisionamento.

Com relação às frequências de aprisionamento, ambos os MOTs são sintonizados a cerca de -20 MHz da transição $5S_{1/2}(F=2) \rightarrow 5P_{3/2}(F=3)$ e o rebombeio é sintonizado na transição $5S_{1/2}(F=1) \rightarrow 5P_{3/2}(F=2)$, pois os átomos que decaem para o estado $F=1$ não interagem mais com o laser e precisam ser re-bombeados para o estado $F=2$, dando continuidade ao processo de resfriamento. Estes dois feixes de luz, aprisionamento e rebombeio são alinhados colinearmente, formando os feixes de luz do MOT.

Neste sistema de duplo MOT, objetivamos um MOT2 com muitos átomos e com uma rápida taxa de carregamento. Para que isso ocorra, todos os parâmetros do MOT1 são ajustados (alinhamento, posição do feixe de *push*, campos magnéticos e potência dos feixes) visando uma melhora no carregamento. Posteriormente os mesmos parâmetros do MOT2 são ajustados para atingir um grande número de átomos e garantir uma boa transferência para armadilha magnética.

3.4 Transferência Atômica entre os dois MOTs

Os átomos do MOT1 são transportados continuamente pelo feixe de transferência (feixe de *push*) com uma potência de $800 \mu\text{W}$. Ele é sintonizado na mesma frequência da luz de aprisionamento, apresenta polarização circular e é levemente focalizado a 1cm antes da primeira armadilha. Esta focalização é fundamental para uma boa transferência uma vez que ela deve atingir o MOT1 com uma grande intensidade, para empurrar mais átomos, e chegar ao MOT2 com um diâmetro maior, e por conseguinte, menor intensidade, afim de não perturbá-lo.

Como o *push* é sintonizado na mesma frequência dos feixes de aprisionamento, ocorre

um desequilíbrio de forças nesta direção, proporcionando o deslocamento dos átomos frios do MOT1 para o MOT2. Tipicamente, quanto mais reduzida pelo efeito do *push*, for a primeira armadilha, mais átomos estão sendo transferidos, e quanto melhor o equilíbrio entre os feixes de aprisionamento, *push* e campos magnéticos, melhor será o carregamento, implicando na rápida formação do MOT2.

Uma curva de carregamento típica é mostrada na figura 3.5. Observe que, em 40 s, cerca de 5×10^8 átomos são aprisionados no MOT2, o que nos permite estimar uma taxa de transferência da ordem de 1×10^7 átomos/s. Repare também que a partir dos 50 s o *push* é desligado e o MOT2 decai com um tempo característico de aproximadamente 20 s. Este tempo é um bom indicativo da qualidade do vácuo dentro da câmara, pois quanto maior o valor, menos colisões estão ocorrendo entre os átomos aprisionados e os não aprisionados.

Figura 3.5 – Curva de carga e descarga do MOT2. O tempo de carga fornece uma estimativa do fluxo de átomos transferidos enquanto o tempo de descarga permite uma estimativa da qualidade do vácuo.

3.5 Transferência de Átomos do MOT2 para Armadilha Magnética

Da sequência temporal do experimento, está é a etapa mais crítica. A armadilha magnética, assim como o MOT, é uma armadilha robusta que permite acumular um grande número de átomos. Mas diferentemente da armadilha magneto-óptica, a armadilha magnética não resfria os átomos, apenas os confina. Desta forma, qualquer fonte de luz espúria ressonante pode induzir perdas, comprometendo significativamente o avanço do experimento.

A grande dificuldade desta transferência está no fato de que o MOT e a armadilha magnética têm volumes de captura muito diferentes. Com isso, o sucesso desta etapa consiste em uma compressão do volume da armadilha juntamente com o rápido desligamento (alguns milissegundos) da luz do MOT e posterior bloqueio de qualquer luz espalhada. Para que esse processo seja realizado com sucesso, algumas etapas devem ser respeitadas.

Primeiramente ajustamos o volume do MOT2, comprimindo-o durante 9 ms. Para isso, alteramos a luz de aprisionamento deixando-a mais longe da frequência de ressonância da transição atômica, de modo que esta seja alterada de seus -20 MHz originais para -60 MHz, e sua potência para cerca de $1/5$ do seu valor inicial. Essas alterações diminuem fortemente a taxa de espalhamento de fótons e faz com que os átomos se acumulem no centro da armadilha.

O segundo processo é conhecido como resfriamento sub-Doppler. Neste processo o campo magnético é desligado, o que permite que a nuvem se expanda livremente durante 4ms e atinja uma temperatura abaixo do limite Doppler, que para o ^{87}Rb é de aproximadamente $146 \mu\text{K}$, obtendo uma nuvem com temperatura da ordem de $50 \mu\text{K}$ ou menos.

A última etapa deste processo é conhecida como bombeamento óptico, responsável por levar todos os átomos a um único estado magneticamente aprisionável. No MOT temos átomos distribuídos entre todos os sub-níveis Zeeman do estado $5S_{1/2}(F=1)$ e do $5S_{1/2}(F=2)$, porém, nem todos são magneticamente aprisionáveis, apenas os estados $|1, -1\rangle$, $|2, 1\rangle$ e $|2, 2\rangle$ (53). O

estado que usamos para o aprisionamento é o $F = 2$ com $m_F = 2$. Logo, precisamos levar todos os átomos a esse estado.

Para iniciar o bombeamento óptico, o laser de aprisionamento é desligado e 1ms depois, o laser de rebombeio também, fazendo com que os átomos acumulem-se preferencialmente no estado hiperfino $F = 2$. Em seguida, um dos pares de bobinas de compensação aplica um campo magnético homogêneo de cerca de 1 G na direção da gravidade, abrindo as degenerescências dos subníveis Zeeman para os pulsos de bombeamento óptico que vêm a seguir.

Estes pulsos são circularmente polarizados de forma a promover preferencialmente transições do tipo $|F, m_F\rangle \rightarrow |F, m_F + 1\rangle$. Como já mostrado na figura 3.4, a transição do feixe de bombeamento óptico $1 \rightarrow 2$ é $5S_{1/2}(F = 1) \rightarrow 5P_{3/2}(F = 2)$ e bombeamento óptico $2 \rightarrow 2$ é $5S_{1/2}(F = 2) \rightarrow 5P_{3/2}(F = 2)$, de modo que, após alguns ciclos de absorção e emissão, os átomos se encontram no estado desejado, o $|2, 2\rangle$. A figura 3.6 ilustra esquematicamente o funcionamento do bombeamento óptico.

Figura 3.6 – Esquema de funcionamento do bombeamento óptico dentro da estrutura hiperfina.

Certa de 90% dos átomos são efetivamente bombeados para o estado $|2, 2\rangle$, enquanto o restante distribui-se entre os outros estados Zeeman. Para conseguirmos essa eficiência, o feixe $1 \rightarrow 2$ fica ligado por $90 \mu s$ enquanto o $2 \rightarrow 2$ permanece por $60 \mu s$, para então darmos continuidade ao processo de resfriamento dentro da armadilha magnética.

Figura 3.7 – Configuração QUIC utilizada para gerar um campo harmônico (a) Visão 3D. (b) Plano xy com as distâncias envolvidas.

3.6 Armadilha Magnética

O campo magnético desta armadilha é produzido pelas próprias bobinas do quadrupolo do MOT2. Uma vez que os átomos foram transferidos, uma corrente de 9 A é aplicada nas bobinas gerando um gradiente de campo magnético de aproximadamente 60 G/cm, confinando novamente a nuvem atômica. Posteriormente, aumentamos a corrente para 25 A em 500 ms, formando um gradiente radial de 165 G/cm. Vale ressaltar que nesse estágio toda luz é barrada, pois pode induzir transições de spin nos átomos para estados não-aprisionáveis.

Como o campo quadrupolar gerado pelas bobinas anti-Helmholtz é linear e apresenta um valor nulo no centro da armadilha, teremos um efeito conhecido como transições Majorana. Esta faz os átomos mudarem seu estado de spin e consequentemente escaparem da armadilha. Isto ocorre preferencialmente quando os átomos estão frios e acumulam-se nas regiões de baixo campo, tornando-se um impedimento à CBE.

Para solucionar este problema, diversas estratégias foram criadas (19, 54, 55). A que utilizamos neste experimento é a configuração do tipo QUIC (*Quadrupole and Ioffe Configuration*) (56). Nesta, adicionamos uma bobina, chamada Ioffe, perpendicularmente ao eixo de simetria do quadrupolo, gerando assim, um campo extra que anula a singularidade e produz um novo perfil de campo magnético, agora na forma harmônica, como mostra a figura 3.7.

A corrente na Ioffe é aumentada lentamente, levando 800 ms para chegar ao valor máximo

de 20 A (80% da corrente nas bobinas de quadrupolo), quando atingimos um campo magnético com curvatura da ordem de 144 G/cm^2 e bias de 1 G. Neste estágio os átomos terão se deslocado cerca de 7 mm em direção à bobina de Ioffe e o potencial confinante próximo ao mínimo será harmônico, dado por

$$U_{\text{ext}}(x, y, z) = U_0 + \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (3.1)$$

onde U_0 é o bias, $\omega_x = 2\pi \times 24 \text{ Hz}$ e $\omega_y = \omega_z = 2\pi \times 210 \text{ Hz}$. Como $\omega_y = \omega_z$, esta armadilha apresenta simetria axial (*cigar-shape traps*), podendo ser reescrito em coordenadas cilíndricas da seguinte forma

$$U_{\text{ext}}(x, y, z) = U_0 + \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_\rho^2 \rho^2). \quad (3.2)$$

Na figura 3.8 mostramos um corte do potencial magnético na direção x (eixo da Ioffe). Repare que o ajuste de corrente, na configuração QUIC, é muito sensível, assim como o seu posicionamento junto às bobinas do quadrupolo, de forma que um erro de 1 mm é o suficiente para não formação do potencial desejado.

Figura 3.8 – Gráfico do perfil espacial de campo magnético para vários valores de corrente.

Aqui já estamos com cerca de 2×10^8 átomos frios com uma temperatura da ordem de $100 \mu\text{K}$ em um ambiente de alto vácuo. Nessas condições, estamos aptos a realizar a última etapa do resfriamento, o resfriamento evaporativo. Entretanto, antes de descrevê-lo explicaremos como

funciona a técnica de produção de imagem pois ela é necessária tanto na avaliação da eficiência do resfriamento evaporativo como na observação da CBE.

3.7 Imagem por Absorção

Todos os métodos usados para extrair informações de amostras ultrafrias são baseados na interação destas com a luz (36). Em nosso experimento, o diagnóstico é feito por meio de imagens de absorção, na qual um feixe ressonante (*probe*) incide na amostra sintonizado em uma das transições atômicas. No nosso caso, utilizamos a transição $5S_{1/2}(F=2) \rightarrow 5P_{3/2}(F=3)$. Os átomos, ao interagirem com o *probe*, espalham alguns fótons deixando uma sombra no feixe. Este, ao passar por um sistema de lentes capaz de amplificar seu tamanho, permite visualizar a sombra na forma de uma imagem proporcional à densidade atômica.

A imagem de absorção normalizada é composta por três imagens, expandidas alguns milissegundos em tempo de voo (TOF), e captadas através de uma câmera CCD de alta resolução (*pixelfly qe*). A primeira imagem consiste no *probe* com a sombra produzida pelos átomos, a segunda contém o feixe sem os átomos e a terceira é basicamente uma imagem de *background*, que representa a luz de fundo presente no experimento. A junção dessas três imagens compõem a imagem de absorção normalizada através da aritmética ilustrada na figura 3.9.

Matematicamente, o processo de absorção é descrito pela lei de Beer-Lambert, onde a intensidade $I(x, y)$ do feixe que caminha ao longo da direção z através de um meio absorssivo de densidade $n(x, y, z)$ é dada por

$$I(x, y) = I_0(x, y)e^{-\sigma_0 \int n(x, y, z) dz}, \quad (3.3)$$

neste caso, $n(x, y, z)$ é a distribuição de densidade da nuvem atômica, σ_0 é a seção de choque de absorção de fótons e $I_0(x, y)$ é a intensidade incidente do *probe*.

A partir da equação (3.3) obtemos a densidade óptica (OD), que por ser definida pela densi-

Figura 3.9 – Esquema de obtenção da imagem de absorção normalizada a partir de três imagens independentes.

dade atômica, é um parâmetro de ligação entre o resultado experimental e a física que estamos interessados, ou seja, é uma grandeza muito importante para a grande maioria das análises.

$$OD(x,y) = \sigma_0 \int n(x,y,z)dz = -\ln \frac{I(x,y)}{I_0(x,y)}. \quad (3.4)$$

Como $OD(x,y)$ extraído da imagem normalizada é proporcional à densidade integrada na direção z , podemos calcular o número de átomos presente na nuvem atômica realizando uma integral no plano xy , como mostra a equação (3.5)

$$N = \frac{1}{\sigma_0} \int OD(x,y) dx dy. \quad (3.5)$$

Como o $OD(x,y)$ é um parâmetro discreto extraído da imagem normalizada, a integral resume-se a um simples somatório,

$$N = \frac{A}{\sigma_0} \sum_{x,y} OD(x,y), \quad (3.6)$$

onde A é o quadrado do tamanho do *pixel* da câmera dividido pela magnificação imposta pelo sistema de lentes. Neste experimento, o tamanho do pixel é $6,45 \mu\text{m}$ e a magnificação 1,4.

A temperatura da amostra é obtida através da amostra expandida, uma vez que a expansão em TOF é consequência da ação da gravidade sobre os átomos. Desta forma, através do

princípio de equipartição de energia teremos

$$\frac{1}{2}k_B T = \frac{1}{2}mv_{rms}^2 \quad (3.7)$$

onde m é a massa dos átomos e v_{rms} é a velocidade quadrática média.

Os átomos térmicos desta nuvem possuem um perfil gaussiano, como descrito na seção 2.1, portanto, a velocidade quadrática média corresponderá a taxa de variação do raio da gaussiana em função do TOF. Para um TOF suficientemente grande ($\sim 10\text{ms}$), podemos desprezar o raio inicial da nuvem e reescrever a equação (3.7) da seguinte forma

$$T = \frac{m}{k_B} \left(\frac{\sigma}{t} \right)^2, \quad (3.8)$$

onde σ é o raio da distribuição gaussiana obtido por ajuste gráfico e t o tempo de voo.

3.8 Resfriamento Evaporativo e a CBE

De maneira simplificada, o resfriamento evaporativo consiste na remoção seletiva dos átomos mais quentes da distribuição de velocidades atômicas com a utilização de rádio frequência (RF), de modo que a nuvem termalize a uma temperatura mais baixa do que a inicial, como mostra a figura 3.10 (57, 58). A limitação deste processo é a permanência dos átomos na armadilha tempo suficiente para que a termalização ocorra. Este tempo é definido pela taxa de colisões elásticas dentro da amostra, responsáveis por redistribuírem a energia, e pela taxa de colisões com átomos não aprisionados, responsáveis pela retirada indevida de átomos da amostra.

Os átomos aprisionados na armadilha magnética tem a separação dos seus sub-níveis Zeeman dependente da posição em que se encontram (figura 3.11). Átomos mais quentes alcançam regiões de campo magnético mais intensas, de modo que os átomos mais energéticos terão uma separação dos sub-níveis Zeeman maior do que os átomos menos energéticos. Assim, se aplicarmos uma rampa decrescente de RF podemos induzir uma transição nos átomos mais quentes sem afetar os mais frios, diminuindo a temperatura da amostra atômica.

Figura 3.10 – Ilustração do resfriamento evaporativo: (a) distribuição original de velocidades a uma dada temperatura T_1 , (b) retirada seletiva de partículas abaixo de um valor crítico v_e e (c) retermalização da distribuição a uma nova temperatura $T_2 < T_1$

Figura 3.11 – Esquema ilustrativo dos sub-níveis Zeeman a medida que a amostra é resfriada.

Figura 3.12 – Evolução da temperatura e do número de átomos à medida que o resfriamento evaporativo avança.

Para produção da RF no sistema experimental, utilizamos uma antena circular de diâmetro 2,6 cm feita com um fio de cobre de 0,7 mm de diâmetro. Esta é posicionada entre a célula de vácuo do MOT2 e a bobina inferior do quadrupolo da armadilha magnética. A RF é produzida por um gerador de onda (Stanford DS345) acoplado à antena juntamente com um resistor de 50Ω em série com o circuito.

O ajuste da rampa de evaporação é feito pela observação da evolução dos átomos frios em expansão livre por meio da imagem de absorção após 10ms de tempo de voo. Para otimizarmos o processo ao máximo, a varredura de RF é dividida em vários segmentos lineares, dos quais controlamos o valor inicial e final, taxa de varredura e potência da RF. Quando um segmento é otimizado, outro é adicionado à varredura, iniciando-se na frequência final do anterior. A taxa de varredura é normalmente diminuída a cada segmento adicionado, permitindo aos átomos mais tempo de termalização. A figura 3.12 mostra a evolução do resfriamento da nuvem, assim como o número de átomos, à medida que otimizamos cada segmento da varredura.

A CBE só pode ser obtida a partir do uso desta técnica de resfriamento que permite atingirmos temperaturas da ordem de dezenas de nK. Ao final do resfriamento evaporativo, conseguimos amostras condensadas puras com cerca de 2×10^5 átomos no estado fundamental do potencial, a uma temperatura crítica de aproximadamente 100 nK.

Nesta situação, além da densidade do espaço de fases ser maior que a temperatura crítica, quando a situação da equação (2.11) é alcançada, também observamos a mudança abrupta do perfil de densidade da nuvem que deixou de conter apenas átomos térmicos (perfil gaussiano) e passou a apresentar também uma fração condensada (perfil de Thomas-Fermi), caracterizando uma distribuição bimodal, como mostra a figura 3.13.

Figura 3.13 – Evolução do perfil de densidade da nuvem atômica. O perfil muda claramente de uma distribuição gaussiana (gráfico preto) para um perfil Thomas-Fermi (gráfico azul), passando pela composição bimodal (gráfico verde) caracterizando a CBE.

Além da distribuição bimodal, outra assinatura marcante da condensação é a expansão anisotrópica na nuvem. Uma nuvem clássica, quando liberada da armadilha, possui o formato do potencial confinante. No entanto, à medida que se expande livremente, acaba por atingir uma distribuição isotrópica de densidade, figura 3.14(a). Já na amostra condensada, a expansão proporciona um alongamento preferencial em uma das direções, figura 3.14(b). Este comportamento diferenciado ocorre devido ao domínio da energia de interação, uma vez que, durante a expansão, o potencial não existe mais e a energia cinética é muito reduzida.

Como nossos estudos são baseados em imagens de absorção de nuvens expandidas em TOF, a expansão anisotrópica tem influência direta na distribuição de velocidades e com isso seu estudo torna-se fundamental e será tratado com detalhes no próximo capítulo.

Figura 3.14 – Expansão da nuvem atômica em diferentes TOFs para amostras (a) térmica e (b) condensada

3.9 Excitações no BEC

Com uma boa reprodutibilidade na produção experimental do BEC, podemos finalmente excitá-lo para geração da TQ. Uma vez produzido na armadilha magnética, antes do TOF, o BEC é submetido a campos magnéticos oscilantes que transformam a armadilha em uma "máquina de lavar atômica", ou seja, uma grande quantidade de momento angular é transferida para a nuvem condensada. Este campo extra é gerado por um par de bobinas anti-Helmholtz que se superpõe ao campo da armadilha magnética, equação (3.2).

As bobinas de excitação são posicionadas no eixo da bobina de Ioffe com um ângulo de desalinhamento, θ_0 , de aproximadamente 5° , como mostra a figura 3.15(a) e a corrente oscilatória

Figura 3.15 – (a) Esquema ilustrativo mostrando a posição das bobinas de excitação. (b) Simulação das linhas de equipotenciais da superposição do campo de excitação ao campo de aprisionamento.

que as atravessa possui a seguinte forma

$$I = I_0(1 - \cos(\Omega t)), \quad (3.9)$$

onde Ω é a frequência de excitação.

A descrição matemática exata do campo extra é complexa, mas através de algumas aproximações é possível determinarmos um campo resultante (44). Na figura 3.15(b) temos as linhas equipotenciais do campo total para diferentes tempos, mostrando que a excitação gera uma combinação de rotação, translação e deformação nos átomos quando variamos os parâmetros da excitação.

A figura 3.16 mostra resultados experimentais que obtivemos por meio desta técnica de excitação. À medida que a amplitude e/ou o tempo de excitação aumentam, um número crescente de vórtices aparece nas amostras condensadas (28). Com certa combinação dos parâmetros (29) o número de circulações cresce rapidamente e com orientações diferentes ao longo de toda amostra condensada. Neste ponto não é mais possível distinguir um vórtice de outro, caracterizando uma configuração emaranhada de vórtices, o que constitui a presença da TQ.

Um importante indicativo de que alcançamos o regime turbulento pode ser notado na dinâmica da expansão livre da nuvem. A maneira de quantificar esta expansão é através do *aspect ratio*, que nada mais é do que a razão entre a largura da nuvem pelo seu comprimento. Como mostrado na figura 3.14, a nuvem térmica apresenta um crescimento isotrópico, fazendo seu

Figura 3.16 – Densidade óptica das nuvens condensadas mediante excitações oscilatórias após 15ms de TOF. Inicialmente uma quantidade distinguível de vórtices forma-se no BEC a medida que aumentamos os parâmetros de excitação. Dada certa combinação dos parâmetros amplitude de excitação e tempo de oscilação alcançamos o regime turbulento.

Figura 3.17 – (a) Densidade óptica das nuvens térmica, BEC e BEC turbulento para três tempos de expansão. (b) Evolução do *aspect ratio* como função do tempo de expansão para os diferentes tipos de nuvem.

aspect ratio tender a unidade a medida que o tempo de expansão aumenta. No BEC ocorre a inversão do *aspect ratio*, ou seja, ele começa abaixo da unidade e depois de um certo tempo ultrapassa este valor. No BEC turbulento esta medida permanece constante durante toda a expansão. Este efeito diferenciado é associado à presença de muitos vórtices na amostra, que evoluem segundo um modelo hidrodinâmico que será explorado detalhadamente no próximo capítulo. A figura 3.17(b) mostra o gráfico comparativo com as medidas experimentais do *aspect ratio*.

Toda a sequência experimental pode ser resumida em: Carregamos os átomos em uma primeira câmara através de uma armadilha magneto-óptica; transferimos a nuvem aprisionada para uma segunda câmara de altíssimo vácuo onde novamente ocorre um aprisionamento magneto-

óptico. Em seguida, ocorre outra transferência, mas agora para uma armadilha magnética onde os átomos serão resfriados abaixo da temperatura crítica por meio do resfriamento evaporativo. Depois o campo de excitação é ligado para deformar o campo magnético presente na armadilha gerando a turbulência quântica. Finalmente, os átomos são soltos da armadilha e, após uma expansão livre que dura em torno de 10 a 20 ms, uma imagem por absorção é produzida.

4 *Expansão Livre em Tempo de Voo*

Para compreendermos a expansão em tempo de voo de uma amostra aprisionada, analisaremos três situações distintas. Inicialmente, estudaremos a expansão da nuvem semi-clássica acima do ponto crítico da condensação, como desenvolvido no livro-texto de Christopher Pethick (33) e no artigo de Wolfgang Ketterle (36). Feito isso, analisaremos a evolução da nuvem condensada através de teorias hidrodinâmicas desenvolvidas por Yvan Castin (59) e por Mônica Caracanhas (60) em sua dissertação de mestrado. Também utilizando os trabalhos de Mônica Caracanhas (61, 62), apresentaremos a dinâmica da amostra turbulenta, também com uma abordagem hidrodinâmica, mas utilizando o formalismo de Euler-Lagrange para derivar as equações diferenciais.

4.1 Nuvem Térmica

Para descrever a densidade espacial de uma nuvem térmica ($T > T_c$) em TOF, utilizaremos o tratamento semi-clássico, como na seção 2.1.2. Quando a armadilha é desligada, os átomos aprisionados expandem balisticamente e as partículas individuais se movem de acordo com as equações de movimento,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad (4.1)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0. \quad (4.2)$$

Com isso, se definirmos como $t = 0$ o momento que o potencial harmônico foi desligado, a

função de distribuição dada pela equação (2.22) assume a seguinte forma,

$$f(\mathbf{r} - \mathbf{p}t/m) = \zeta e^{-\beta[p^2/2m + U(\mathbf{r} - \mathbf{p}t/m)]} \quad (4.3)$$

e a distribuição espacial é obtida pela integral da equação (2.25), resultando em

$$n_{th}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\lambda_{dB}^3} \prod_i \left(\frac{1}{1 + \omega_i^2 t^2} \right) g_{3/2} \left(\zeta \exp \left[\frac{-\beta m}{2} \sum_i i^2 \left(\frac{\omega_i^2}{1 + \omega_i^2 t^2} \right) \right] \right). \quad (4.4)$$

Para $t = 0$, a equação (4.4) resume-se à solução da equação (2.25). Se considerarmos a armadilha com simetria axial ($\omega_y = \omega_z = \omega_\rho$) e tomarmos o limite para tempos suficientemente longos ($t \gg \omega_x^{-1}, \omega_\rho^{-1}$) teremos,

$$n_{th}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\lambda_{dB}^3} g_{3/2} \left(\zeta \exp \left[\frac{-\beta m(x^2 + \rho^2)}{2t^2} \right] \right). \quad (4.5)$$

Neste limite, as dimensões da nuvem não dependerão mais das frequências da armadilha, o que torna essa expansão isotrópica.

Para altas temperaturas, quando estamos longe da temperatura de transição ($m[x^2 + \rho^2]/2t^2 \gg \mu$), uma boa aproximação consiste em utilizarmos apenas o primeiro termo da função de Bose ($g_{3/2}(z) \approx z$), assim a densidade espacial corresponderá a uma distribuição gaussiana dada por,

$$n_{th}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\lambda_{dB}^3} \zeta \exp \left[\frac{-\beta m(x^2 + \rho^2)}{2t^2} \right], \quad (4.6)$$

onde os tamanhos característicos da expansão são dados por

$$\sigma_x = \sigma_\rho = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} t. \quad (4.7)$$

Como estes tamanhos são iguais, o *aspect ratio*, neste regime, será unitário.

4.2 Nuvem Condensada

O modelo utilizado para descrever a dinâmica do condensado baseia-se na equação de Gross-Pitaevskii dependente do tempo (2.41). Para demonstrar as equações dinâmicas, vamos

considerar novamente a função de onda, Ψ_0 , composta por uma amplitude e uma fase,

$$\Psi_0(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} e^{i\phi(\mathbf{r}, t)} \quad (4.8)$$

e a velocidade em termos da fase definida por,

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi(\mathbf{r}, t). \quad (4.9)$$

As equações de movimento do condensado escritas em termos da velocidade e da densidade podem ser obtidas substituindo a função de onda da equação (4.8) na equação (2.41) e posteriormente, separando as partes real e imaginária do resultado encontrado. Da parte imaginária encontramos a equação da continuidade,

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) n(\mathbf{r}, t)] = 0, \quad (4.10)$$

e da parte real determinamos a equação de Euler,

$$m \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} m v(\mathbf{r}, t)^2 + U(\mathbf{r}) + g n(\mathbf{r}, t) - \frac{\hbar^2}{2m \sqrt{n(\mathbf{r}, t)}} \nabla^2 \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} \right) = 0. \quad (4.11)$$

As duas últimas equações são chamadas de equações hidrodinâmicas, e são equivalentes à equação de Gross-Pitaevskii dependente do tempo. O penúltimo termo da equação (4.11) está relacionado com a pressão interna do gás devido a interação repulsiva entre as moléculas e o último termo é conhecido como pressão quântica. Este descreve as forças devido às variações espaciais na amplitude da função de onda.

A densidade espacial do condensado, $n_c(\mathbf{r})$, assume a forma de uma parábola invertida dada pela equação (2.48). Baseado nesta densidade, assumiremos os seguintes *ansatz* a fim de obter equações para a evolução temporal dos raios R_i da nuvem quântica,

$$n_c(\mathbf{r}, t) = n_c(t) \left(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{r_i^2}{R_i(t)^2} \right), \quad (4.12)$$

$$v_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \alpha_i(t) r_i. \quad (4.13)$$

Por meio da equação da continuidade juntamente com a condição de normalização, encon-

tramos $\alpha_i(t) = \dot{R}_i(t)/R_i(t)$, onde $\dot{R}_i(t)$ indica a derivada temporal de $R_i(t)$. A equação de Euler fornecerá então a equação que descreve a evolução do raio em cada direção,

$$\frac{\partial^2 R_i(t)}{\partial t^2} = -\omega_i^2 R_i(t) + \frac{15N\hbar^2 a}{m^2} \left(R_i(t) \prod_{j=1}^3 R_j(t) \right)^{-1}. \quad (4.14)$$

O primeiro termo do lado direito desta expressão está relacionado à geometria da armadilha e o segundo com a interação efetiva entre os átomos do condensado. Com este *ansatz*, o perfil de densidade (equação (4.12)) é mantido na expansão, sendo reescalado no tempo através de R_i . Para obtermos os valores dos raios iniciais da nuvem condensada (2.46), basta substituírmos $\ddot{R}_i(t) = 0$ na equação (4.14).

Uma boa maneira de simplificarmos esta equação é através da parametrização dos raios, $R_i(t) = b_i(t)R_i(0)$. Para uma armadilha harmônica na configuração *cigar shape* definimos $\lambda = \omega_x/\omega_\rho \ll 1$ e com isso determinamos duas equações acopladas para os coeficientes paramétricos,

$$\frac{\partial^2 b_x(t)}{\partial t^2} = -\lambda^2 b_x(t) + \frac{\lambda^2}{b_x(t)^2 b_\rho(t)^2}, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial^2 b_\rho(t)}{\partial t^2} = -b_\rho(t) + \frac{1}{b_x(t) b_\rho(t)^3}. \quad (4.16)$$

Vamos considerar que em $t = 0$ ocorre o desligamento total da armadilha, assim desprezamos o primeiro termo de ambas as equações, já que não temos mais o potencial confinante agindo no sistema. Portanto as duas equações anteriores assumirão a seguinte forma

$$\frac{\partial^2 b_x(t)}{\partial t^2} = \frac{\lambda^2}{b_x(t)^2 b_\rho(t)^2}, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial^2 b_\rho(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{b_x(t) b_\rho(t)^3}. \quad (4.18)$$

Como estamos tratando de uma armadilha anisotrópica ($\omega_x \ll \omega_\rho$), inicialmente o raio da amostra na direção axial varia muito pouco, então, em primeira ordem de λ , podemos considerar $b_x(t) = 1$. Feito isso, a solução da equação diferencial para o parâmetro radial será

$$b_\rho(\tau) = \sqrt{1 + \tau^2}. \quad (4.19)$$

Agora, substituindo a função $b_\rho(\tau)$ na equação (4.17) encontramos o parâmetro axial

$$b_x(\tau) = 1 + \lambda^2 \left[\tau \arctan(\tau) - \ln(\sqrt{1 + \tau^2}) \right]. \quad (4.20)$$

Nas duas equações anteriores, τ assume o valor de $\omega_p t_{tof}$. Deste modo, determinamos a evolução temporal do *aspect ratio* da nuvem condensada pela razão dos raios expandidos,

$$\frac{R_\rho(\tau)}{R_x(\tau)} = \frac{\lambda \sqrt{1 + \tau^2}}{1 + \lambda^2 \left[\tau \arctan(\tau) - \ln(\sqrt{1 + \tau^2}) \right]}. \quad (4.21)$$

O gráfico da figura 4.1 compara a evolução dos raios parametrizados. Enquanto o tamanho do gás na direção de maior confinamento (radial) aumenta rapidamente como consequência do efeito repulsivo, na direção de fraco confinamento (axial) a expansão é lenta, indicando que o comprimento da nuvem, neste eixo, pouco se altera. Para tempos longos, o *aspect ratio*, equação (4.21), atinge um valor assintótico de $2/\pi\lambda$.

Figura 4.1 – Simulação da expansão dos raios da nuvem condensada. Os valores das frequências, utilizadas nesta simulação, são relativos ao nosso experimento, ou seja, $\omega_p = 2\pi \times 210$ Hz e $\omega_x = 2\pi \times 24$ Hz, assim como o número de átomos, $N = 2 \times 10^5$.

4.3 Nuvem Turbulenta

A expansão diferenciada do condensado turbulento está associada à presença de um emaranhado aleatório de vórtices. Para demonstrar esse comportamento, introduziremos a contribuição dos vórtices nas equações hidrodinâmicas através do formalismo Lagrangiano, a fim de encontrar as equações dinâmicas para os raios dessa nuvem.

No formalismo Lagrangiano temos o funcional dado por

$$\mathcal{L} = \int d^3r \left[i\frac{\hbar}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - \varepsilon[\psi] \right], \quad (4.22)$$

onde a densidade Hamiltoniana, $\varepsilon[\psi]$, para este sistema apresenta, respectivamente, um termo cinético, um componente que depende do potencial confinante e o termo de interação,

$$\varepsilon[\psi] = \frac{\hbar^2 |\nabla \psi|^2}{2m} + U(\mathbf{r}, t) |\psi|^2 + \frac{1}{2} g |\psi|^4, \quad (4.23)$$

e a função de onda ψ depende dos parâmetros variacionais, é normalizada pela unidade e satisfaz a relação $\Psi_0(\mathbf{r}, t) = \sqrt{N} \psi(\mathbf{r}, t)$.

A função teste que usaremos é composta pela função de Thomas-Fermi (2.48), modulada por duas fases complexas. A primeira, S , é relativa aos vórtices aleatórios e a segunda, ϕ (parametrizada pelo parâmetro β_j), referente a expansão total da nuvem turbulenta. Assim teremos

$$\Psi_0(\mathbf{r}, t) = \frac{15N}{8\pi R_x R_y R_z} e^{iS(\mathbf{r}, t)} \left(\prod_{j=1}^3 e^{i\beta_j m r_j^2 / 2\hbar} \right) \left(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{r_i^2}{R_i^2}, 0 \right)^{1/2}. \quad (4.24)$$

Note que a fase S , satisfaz a condição de quantização dos vórtices. Portanto, aplicando a equação (4.9), teremos um campo de velocidades linear, $u_j = \beta_j x_j$, uma vez que $\phi = \beta_j m r_j^2 / 2\hbar$.

Inserindo a equação (4.24) na equação (4.22) e resolvendo a integral, ficamos com

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{Nm}{14} \sum_{j=1}^3 \left(R_j^2 \dot{\beta}_j \right) - \frac{Nm}{14} \sum_{j=1}^3 \left(R_j^2 \beta_j^2 \right) - \frac{Nm}{2} \langle v_0^2 \rangle \\ & - \frac{Nm}{2} \langle \delta v^2 \rangle - \frac{15}{7} \frac{\hbar^2 a N^2}{m} \frac{1}{R_x R_y R_z}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

O primeiro termo surge da derivada temporal do funcional, o segundo corresponde à energia cinética da expansão, o terceiro e o quarto são energias cinéticas associados ao gradiente da fase ∇S (conhecido como *vortex flow*), e o último termo refere-se à energia de interação. Aqui, v_0 é o movimento local do centro de massa, induzido pela vorticidade e δv uma velocidade adicional associada a cada vórtice. Estes dois termos de velocidade são relacionados com S pela equação,

$$v_0 + \delta v_0 = \frac{\hbar}{m} \nabla S. \quad (4.26)$$

O termo energético relacionado à velocidade $\langle v_0 \rangle$ é apenas uma constante e não influenciará a dinâmica da expansão. Por outro lado, a energia cinética provinda da velocidade individual dos vórtices, $\langle \delta v_0 \rangle$, será responsável pelo termo de emaranhamento dos vórtices. Por simplicidade, reescreveremos este termo cinético para um regime turbulento isotrópico.

Para uma distribuição aleatória de vórtices, com separação efetiva entre cada linha de vórtice dada por l , teremos a seguinte energia,

$$E_{vort} = \frac{\pi N \hbar^2}{m} L \ln \left(\frac{l}{\xi} \right), \quad (4.27)$$

onde L é o tamanho médio das linhas de vórtices por unidade de volume. Na equação (4.27), podemos reescrever de forma conveniente o argumento da função logarítmica e a densidade L .

Sabemos de (61), que para uma expansão isotrópica, L é inversamente proporcional a $\bar{R}^2 = (R_x^2 + R_y^2 + R_z^2)$, ou seja,

$$E_{vort} = \frac{\pi N \hbar^2}{m} \frac{L_0 \bar{R}_0^2}{\bar{R}^2} \ln \left(\frac{l}{\xi} \right), \quad (4.28)$$

com L_0 sendo o valor inicial da densidade turbulenta das linhas de vórtices. Considerando que o comprimento total de linhas de vórtices é L^T e a dimensão característica da expansão da nuvem $\bar{R}$, podemos tomar a razão $L^T / \bar{R}$ como sendo aproximadamente igual ao número de vórtices da nuvem N_v . Desta forma, reescrevendo L_0 em termos do volume inicial V_0 , ficaremos com

$$L_0 = \frac{L_0^T}{V_0} = \frac{\bar{R}_0 N_v}{V_0}. \quad (4.29)$$

A razão l/ξ , argumento da função logarítmica presente na equação (4.28), pode ser aproxi-

mada para seu valor inicial l_0/ξ_0 , uma vez que a variação do logaritmo no tempo é muito suave. A distância entre as linhas de vórtices l_0 é descrita por $(\hbar/m\Omega_0)^{1/2}$ onde, na aproximação de Thomas-Fermi, a vorticidade média Ω_0 obedece a relação de Feynman $\Omega_0 = (\hbar/m)(\pi N_v/A_0)$. Assim $l_0 = (A_0/\pi N_v)^{1/2}$ e portanto

$$\frac{l_0}{\xi_0} = \left(8a \frac{N}{N_v} \frac{A_0}{V_0} \right)^{1/2}, \quad (4.30)$$

lembrando que ξ_0 é o *healing length* e foi definido na equação (2.61).

Outra estimativa conhecida para a densidade inicial das linhas de vórtices é dada por (63)

$$L_0 = \frac{1}{l_0^2} = \frac{\pi N_v}{A_0}. \quad (4.31)$$

Comparando as duas expressões para L_0 , equações (4.29) e (4.31), encontramos,

$$\frac{A_0}{V_0} = \frac{\pi}{R_0}, \quad (4.32)$$

e com isso determinamos o argumento da função logarítmica, expressão (4.30), em termos de parâmetros conhecidos.

Desta forma, substituindo as equações (4.29) e (4.30) na expressão (4.28), ficaremos com o potencial efetivo,

$$U_{vort} = \frac{\pi \hbar^2}{2m} \frac{N_v \bar{R}_0^3}{V_0} \ln \left(8\pi \frac{aN}{N_v \bar{R}_0} \right) \frac{1}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \quad (4.33)$$

Com este novo potencial podemos reescrever o funcional da equação (4.25), substituindo o termo energético referente a $\langle \delta v^2 \rangle$, assim encontrando

$$\mathcal{L} = -\frac{Nm}{14} \sum_{j=1}^3 \left(R_j^2 \dot{\beta}_j \right) - \frac{Nm}{14} \sum_{j=1}^3 \left(R_j^2 \beta_j^2 \right) - NU(R_x, R_y, R_z), \quad (4.34)$$

onde

$$\begin{aligned} U(R_x, R_y, R_z) &= \frac{m}{2} \langle v_0^2 \rangle + \frac{15}{7} \frac{\hbar^2 a N}{m} \frac{1}{R_x R_y R_z} \\ &+ \frac{\pi \hbar^2}{2m} \frac{N_v \bar{R}_0^3}{V_0} \ln \left(8\pi \frac{aN}{N_v \bar{R}_0} \right) \frac{1}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Figura 4.2 – (a) Comparação entre os *aspect ratio* no regime normal e turbulento em função do parâmetro adimensional $\tau = \omega_p t_{\text{tof}}$. Enquanto no BEC vemos a inversão do *aspect ratio*, a amostra turbulenta alcança rapidamente um valor constante menor que a unidade. (b) Evolução dos raios da amostra turbulenta à medida que aumentamos o tempo de expansão. Diferentemente do condensado, os dois raios se expandem na mesma proporção, devido à grande pressão ao longo a direção axial.

Finalmente, através das equações de Euler–Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_j} = 0, \quad (4.36)$$

encontramos as equações dinâmicas para os raios da nuvem atômica turbulenta,

$$\ddot{R}_i = 15 \frac{\hbar^2 a}{m^2} \frac{N}{R_i^2 R_j R_k} + 7\pi \frac{\hbar^2}{m^2} \frac{N_v \bar{R}_0^3}{V_0} \ln \left(8\pi \frac{aN}{N_v \bar{R}_0} \right) \frac{R_i}{(R_i^2 + R_j^2 + R_k^2)^2} \quad (4.37)$$

O primeiro termo da equação (4.37) corresponde à interação da amostra em TOF e o segundo representa o fluxo de velocidades dos vórtices, responsável pela geração da turbulência. Para tempos longos, quando os raios já estão bem expandidos, o termo de vórtice domina rapidamente o termo de interação, levando o *aspect ratio* para um valor assintótico inferior a unidade, figura 4.2(a).

Resolvendo numericamente a equação (4.37) para nossos parâmetros experimentais ($\omega_y = \omega_z = \omega_p = 2\pi \times 210$ Hz, $\omega_x = 2\pi \times 24$ Hz, $N = 2 \times 10^5$ átomos e $a = 5$ nm) e utilizando $N_v = 8\pi Na / (e\bar{R}_0)$ para maximizar o coeficiente do termo relacionado aos vórtices, encontramos o gráfico da figura 4.2(b). Este gráfico mostra que a inclusão do termo de vórtices nas equações dinâmicas, altera significativamente a expansão axial (se comparado com o BEC, figura 4.1). A

explicação por trás deste fenômeno é devido a uma orientação preferencial das linhas de vórtices na região mais confinada (plano yz), exercendo mais pressão ao longo da direção x (axial).

5 *Método de Obtenção da Distribuição de Momento*

O estudo das amostras expandidas nos revelou que a partir de um determinado tempo de voo os raios crescem linearmente, o que leva o *aspect ratio* a um valor assintótico. Baseado neste resultado, analisaremos o balanço energético das nuvens atômicas e chegaremos à relação entre o espectro de energia cinética e a densidade de momento. Como discutido no capítulo 2, este espectro de energia apresenta um comportamento peculiar tanto para turbulência clássica, quanto para quântica. Nesta última, a comprovação experimental não é trivial, já que a medida obtida é resultado da integração espacial da densidade atômica. Entretanto, explorando a simetria da expansão, desenvolvemos um método alternativo para determinar esta densidade e, consequentemente, recuperar o espectro de energia.

5.1 O Espectro de Energia Cinética

No capítulo anterior, a descrição do sistema turbulento foi feita através da função Lagrangeana do condensado puro com a adição de um potencial efetivo que descreve o emaranhado de vórtices. Por meio desta Lagrangeana, analisaremos o balanço energético das nuvens condensada e turbulenta à medida que evoluímos o tempo de expansão.

Na equação (4.34), identificamos a energia do conjunto de vórtices (E_{vort}), a energia cinética

da expansão (E_k) e a de interação (E_{int}), que na configuração *cigar shape*, serão,

$$E_{vort} = \frac{\pi \hbar^2 N}{2m} \frac{N_v \bar{R}_0^3}{V_0} \ln \left(8\pi \frac{aN}{N_v \bar{R}_0} \right) \frac{1}{R_x^2 + 2R_\rho^2}, \quad (5.1)$$

$$E_{kin} = \frac{Nm}{14} \left(\dot{R}_x^2 + 2\dot{R}_\rho^2 \right), \quad (5.2)$$

$$E_{int} = \frac{15}{7} \frac{\hbar^2 a N^2}{m} \frac{1}{R_x R_\rho^2}, \quad (5.3)$$

Para o BEC, os raios R_x e R_ρ das equações (5.2) e (5.3) evoluem temporalmente segundo a equação (4.14) e a energia E_{vort} é nula, já que neste caso o sistema não contém vórtices. No condensado turbulento, estes raios são determinados pela equação (4.37). Para que a energia do sistema, na expansão em TOF, seja conservada, a seguinte relação deve ser satisfeita,

$$E_{kin} = E_{int} + E_{vort}. \quad (5.4)$$

Figura 5.1 – (a) Balanço energético para uma nuvem condensada. Neste caso, a energia de interação é rapidamente convertida em energia cinética, que por este motivo alcança um valor assintótico em poucos milissegundos. (b) Comparação entre os três termos energéticos em um regime turbulento. Apesar de menor, a energia de interação, também vai a zero rapidamente se comparada a energia provida dos vórtices.

Assim, simulando numericamente a evolução temporal dessas componentes energéticas, encontramos os gráficos mostrados na figura 5.1. A figura 5.1(a) mostra o balanço energético da nuvem condensada. Como era de se esperar, logo que a armadilha magnética é desligada ($t = 0$), o sistema apresenta uma grande energia de interação, proporcional a $1/R_x R_\rho^2$, que é convertida rapidamente em energia cinética. Com isso, esta última atingirá um valor assintótico em poucos milissegundos. Já na amostra turbulenta, figura 5.1(b), o processo é diferenciado.

Inicialmente, a energia relacionada à turbulência é cerca de dez vezes maior que a energia de interação, consequência do elevado número de vórtices, e vai a zero com $1/R^2$. Adicionalmente, a componente de interação, neste caso, é menor se comparada ao BEC, já que a nuvem turbulenta é mais diluída. Contudo, a energia cinética também atingirá o valor assintótico, mas em um tempo maior.

Neste trabalho, todos os dados experimentais foram feitos em 15 ms de tempo de voo, então, de acordo com a figura 5.1(a), temos que a energia presente na amostra condensada é toda cinética. Já no caso turbulento, apesar da energia dos vórtices ainda contribuir para a dinâmica da nuvem, ela constitui aproximadamente 7% da energia total do sistema, ou seja, 93% da energia é contribuição cinética. Assim sendo, consideramos que a energia total das nuvens aqui obtidas são exclusivamente cinética de expansão, podendo ser escrita na forma integral como a energia cinética individual dos átomos ($\hbar^2 k^2/2m$), multiplicada pela distribuição no espaço dos momento e expandida no determinado tempo de voo t ,

$$E_T = \int n(\mathbf{k}, t) \frac{\hbar^2 k^2}{2m} d^3 \mathbf{k}, \quad (5.5)$$

esta equação é conhecida como segundo momento e o integrando é chamado de espectro de energia cinética (35),

$$E(\mathbf{k}) = n(\mathbf{k}, t) \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (5.6)$$

5.2 Determinação da Distribuição de Momento a partir de Imagens em TOF

Imediatamente após o desligamento do potencial magnético para realização da imagem em TOF, a posição dos átomos no regime turbulento, em um conhecido instante t_0 , é dada por,

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_{int} t_0 + \mathbf{v}_{vort} t_0, \quad (5.7)$$

onde $\mathbf{v}_{int}$ é a velocidade média devido às interações atômicas e $\mathbf{v}_{vort}$, o deslocamento adicional dos átomos, gerado pela presença da turbulência (para o regime não turbulento $\mathbf{v}_{vort} = 0$). Depois desta expansão inicial, onde as forças de interação e de vórtices são relevantes, a nuvem se deslocará com uma velocidade de expansão $\mathbf{v}_{kin}$, de forma que,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_{int}t_0 + \mathbf{v}_{vort}t_0 + \mathbf{v}_{kin}(t - t_0). \quad (5.8)$$

Porém, de acordo com os gráficos da figura 5.1, para $t \gg t_0$ ($t \sim 15\text{ms}$) consideramos que a energia cinética é dominante no sistema, tal que $\mathbf{v}_{kin}t \gg \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_{int}t_0 + \mathbf{v}_{vort}t_0$. Portanto, nesta situação, a posição das nuvens turbulenta e não turbulenta será determinada puramente pela velocidade de expansão, que pode ser escrita na forma,

$$\mathbf{r} = \frac{\hbar t}{m} \mathbf{k}, \quad (5.9)$$

uma vez que $\mathbf{v}_{kin} = \frac{\hbar \mathbf{k}}{m}$.

A partir da equação (5.9), concluímos que as nuvens atômicas não apresentam uma direção preferencial de expansão para altos tempos de voo. Esta equação mostra também que por meio da imagem de absorção expandida em TOF determinamos a distribuição dos átomos no espaço de momento multiplicando o espaço de posições pelo fator $m/\hbar t$.

Ao produzirmos esta imagem de absorção em um determinado TOF, integramos a densidade espacial da nuvem expandida em uma direção, reduzindo sua dimensionalidade e compactando a informação proveniente do eixo de integração. Portanto, se tomarmos o eixo y como a direção de integração e aplicarmos a equação (3.4) para o perfil Thomas-Fermi (4.12), obtemos a projeção da densidade espacial da nuvem condensada,

$$n'_c(x, \rho) = n'_c(0) \left[1 - \left(\frac{x - x_0}{R_x} \right)^2 - \left(\frac{\rho - \rho_0}{R_\rho} \right)^2, 0 \right]^{3/2}, \quad (5.10)$$

onde $n'_c(0)$ é a densidade de pico e, x_0 e ρ_0 são as coordenadas do centro de massa da distribuição, definidas por

$$x_0 = \frac{1}{N} \int \int x n'(x, \rho) dx d\rho, \quad (5.11)$$

$$\rho_0 = \frac{1}{N} \int \int \rho n'(x, \rho) dx d\rho. \quad (5.12)$$

Apesar da função teste (4.24) explicar a dinâmica do condensado turbulento, na prática, esta função de onda não é bem definida. Entretanto, como o resultado experimental é proporcional à densidade da amostra integrada em uma direção, podemos obter uma distribuição de momento, $n'(|\mathbf{k}'| = k')$ explorando a isotropia da expansão.

Figura 5.2 – Esquema ilustrativo da obtenção de $g(k')$. A área escurecida indica a região que será somada para um dado raio $k' = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$.

Dada uma imagem de absorção, definimos a função $g(k')$ como o número de átomos compreendidos entre k' e $k' + \delta k'$, pictoricamente representada pela região escurecida da figura 5.2, com $k'^2 = k_x^2 + k_z^2$. Matematicamente, esta função corresponde à soma dos valores da densidade dentro de um anel de espessura $\delta k'$, ou seja,

$$g(k') = 2\pi \int_{k'}^{k' + \delta k'} n'(k') k' dk', \quad (5.13)$$

com $g(k')$ normalizado pelo número total de átomos da amostra (3.6),

$$\int g(k') dk' = N. \quad (5.14)$$

Considerando a espessura do anel suficientemente pequena ($\delta k' \ll k'$), tal que a variação

da densidade de momento dentro desta faixa seja suave, da equação (5.13) obtemos,

$$n'(k') \approx C \frac{g(k')}{k'} \quad (5.15)$$

onde a constante C pode ser determinada numericamente pela normalização,

$$\int n'(k') k' dk' = N. \quad (5.16)$$

Como estamos interessados em determinar o espectro de energia cinética, precisamos recuperar a distribuição de momento tridimensional $n(k)$ a partir da projeção $n'(k')$. Para isso utilizamos uma ferramenta matemática conhecida como Transformada de Abel.

5.3 A Transformada de Abel

A distribuição de momento $n'(k')$ foi construída a partir de uma expansão esfericamente simétrica, figura 5.3(a), o que implica em muitos vetores de onda tridimensionais ao longo da direção de integração, contribuindo para um vetor de onda bidimensional, como ilustrado na figura 5.3(b). Através deste vínculo, podemos obter uma distribuição de momento tridimensional, $n(k)$, a partir de nosso modelo bidimensional.

Do processo de imagem por absorção, temos que (3.4)

$$n'(k') = \int_{-\infty}^{\infty} n(k) dk_y, \quad (5.17)$$

onde $k^2 = k_y^2 + k'^2$. Pela simetria esférica, nosso sistema apresenta dois vínculos,

$$k' = k \sin \theta, \quad (5.18)$$

$$k_y = k \cos \theta, \quad (5.19)$$

com θ o ângulo polar referente ao eixo k_y da figura 5.3. Diferenciando estes vínculos para

Figura 5.3 – (a) Esquema da expansão isotrópica no espaço de momento. (b) A integral ao longo de um eixo implica que o módulo do momento linear bidimensional, k' , será formado pelo módulo de vários momento tridimensionais, k .

encontrarmos dk_y em função de dk , ficamos com

$$dk_y = dk \cos \theta - d\theta k \sin \theta, \quad (5.20)$$

$$dk' = dk \sin \theta + d\theta k \cos \theta. \quad (5.21)$$

Na equação (5.17) estamos integrando ao longo de k_y , com k' fixo, portanto, $dk' = 0$. Desta forma, manipulando as equações (5.20) e (5.21) encontramos,

$$dk_y = \frac{dk}{\cos \theta} = \frac{k dk}{\sqrt{k^2 - k'^2}}. \quad (5.22)$$

Substituindo (5.22) em (5.17) e utilizando a paridade da função $n(k)$, ficamos com

$$n'(k') = 2 \int_{k'}^{\infty} \frac{n(k)k}{\sqrt{k^2 - k'^2}} dk. \quad (5.23)$$

A equação (5.23) é conhecida como transformada de Abel da função $n(k)$ (64). Entretanto, desejamos obter o integrando desta equação. Então, aplicando o teorema da convolução (65) e assumindo que $n'(k')$ vai a zero mais rapidamente do que $1/k$, encontramos sua transformada inversa,

$$n(k) = -\frac{1}{\pi} \int_k^{\infty} \frac{dn'(k')}{dk'} \frac{dk'}{\sqrt{k'^2 - k^2}}. \quad (5.24)$$

A transformada de Abel é limitada a problemas com simetria axial, mas possui importantes aplicações em diversas áreas da ciência. Na medicina por exemplo, ela é utilizada em algoritmos para reconstruir imagens de tomografia por raio-X (66). No contexto de átomos frios, esta técnica também é utilizada para reconstruções de densidades a partir de imagens por absorção (67–69).

Além da necessidade de simetria, outro fator limitante neste método é a necessidade de um sinal com baixo ruído, pois a presença da derivada amplifica significativamente o erro experimental. Com o intuito de eliminar este contratempo, normalmente utilizam-se filtros gaussianos para suavizar o resultado da derivada. Aqui, ao invés de realizarmos a filtragem, reescrevemos a transformada inversa sem a presença da mesma, ficando com,

$$n(k) = \frac{1}{\pi} \int_k^\infty \frac{n'(k) - n'(k')}{(k'^2 - k^2)^{3/2}} k' dk'. \quad (5.25)$$

Para verificarmos que as equações (5.24) e (5.25) são equivalentes, devemos manipula-las com cuidado, pois quando k' aproxima-se de k , o denominador de ambas diverge. A fim de contornar esse empecilho, alteramos o limite inferior de integração para $k' = k + \varepsilon$. Assim, se integrarmos por partes a equação (5.24) ficaremos com a igualdade,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_{k+\varepsilon}^\infty \frac{dn'(k')}{dk'} \frac{dk'}{(k'^2 - k^2)^{1/2}} = & + \frac{n'(k + \varepsilon)}{\pi} \frac{1}{[(k + \varepsilon)^2 - k^2]^{1/2}} \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{k+\varepsilon}^\infty \frac{k'n'(k')}{(k' - k^2)^{3/2}} dk'. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Na equação (5.25), podemos separar a integral em dois termos,

$$n(k) = \frac{1}{\pi} \int_{k+\varepsilon}^\infty \frac{k'n'(k)}{(k'^2 - k^2)^{3/2}} dk' - \frac{1}{\pi} \int_{k+\varepsilon}^\infty \frac{k'n'(k')}{(k'^2 - k^2)^{3/2}} dk'. \quad (5.27)$$

Resolvendo o primeiro e reescrevendo o segundo utilizando a relação (5.26), encontramos

$$\begin{aligned} n(k) = & \frac{n'(k)}{\pi} \frac{1}{[(k + \varepsilon)^2 - k^2]^{1/2}} - \frac{1}{\pi} \int_{k+\varepsilon}^\infty \frac{dn'(k')}{dk'} \frac{dk'}{(k'^2 - k^2)^{1/2}} \\ & - \frac{n'(k + \varepsilon)}{\pi} \frac{1}{[(k + \varepsilon)^2 - k^2]^{1/2}}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

se agruparmos o primeiro com o terceiro termo, teremos

$$n(k) = \frac{[n'(k) - n'(k + \varepsilon)]}{\pi[(k + \varepsilon)^2 - k^2]^{1/2}} - \frac{1}{\pi} \int_{k+\varepsilon}^{\infty} \frac{dn'(k')}{dk'} \frac{dk'}{(k'^2 - k^2)^{1/2}}. \quad (5.29)$$

Tomando o limite para $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} n(k) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{[n'(k) - n'(k + \varepsilon)]}{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{[(k + \varepsilon)^2 - k^2]^{1/2}} \right\} \\ &- \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{k+\varepsilon}^{\infty} \frac{dn'(k')}{dk'} \frac{dk'}{(k'^2 - k^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

identificamos no primeiro termo, a derivada da função $n'(k')$ no ponto k , multiplicada por uma função que vai zero, quando ε tende a zero, já que o limite do produto é o produto dos limites.

No segundo termo, o limite da integral resultará na equação (5.24), mostrando que esta é equivalente à expressão (5.25),

$$n(k) = -\frac{1}{\pi} \int_k^{\infty} \frac{dn'(k')}{dk'} \frac{dk'}{(k'^2 - k^2)^{1/2}}. \quad (5.31)$$

Assim como o $n'(k')$, se integrarmos a grandeza $n(k)$ em todo espaço, recuperamos o número total de átomos,

$$4\pi \int n(k) k^2 dk = N \quad (5.32)$$

5.4 Medidas e Resultados

As medidas realizadas para a determinação das distribuições de momento das nuvens turbulentas e, conseqüentemente, do seu espectro de energia cinética, foram feitas a partir dos seguintes resultados experimentais. Primeiramente, utilizamos um BEC praticamente puro (figura 5.4(a)), expandido durante 15 ms em tempo de voo, com aproximadamente 2×10^5 átomos (medidos através da equação (3.6)) a uma temperatura de 100 nK (via equação (3.8)), sendo $R_x = 24,01 \mu\text{m}$ e $R_\rho = 32,7 \mu\text{m}$ os raios de Thomas-Fermi, obtidos através dos perfis mostrados nas figuras 5.4(b) e 5.4(c). Este dado foi usado para fins comparativos, pois no regime de

Thomas-Fermi, além do conhecimento das grandezas fundamentais, também sabemos o perfil de densidades e como deve se comportar a distribuição de momento.

Figura 5.4 – (a) Imagem do condensado puro que utilizamos nos cálculos. (b) Perfil axial de densidade, juntamente com o ajuste gráfico da equação (5.10) para $\rho = \rho_0$. (c) Perfil de densidade radial ajustado graficamente pela mesma equação, mas com $x = x_0$.

Figura 5.5 – Imagens de amostras turbulentas obtidas em 15 ms de tempo de voo. Diferentemente do BEC temos aqui um conjunto de estruturas irregulares distribuídas por toda nuvem, o que resulta em uma expansão isotrópica para elevados tempos de expansão.

As outras medidas foram imagens de amostras condensadas no regime turbulento, também expandidas 15 ms em TOF, com número de onda relativo ao eixo menor, dado por, $k_\rho = 1,50 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ e para o eixo maior $k_x = 3,01 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$. Diferentemente da nuvem condensada tradicional, não temos fórmulas fechadas para calcular o número de átomos nesta situação. Entretanto, como as condições experimentais, antes da excitação, são sempre as mesmas, assumimos que estes condensados turbulentos possuem a mesma quantidade de partículas do BEC puro descrito anteriormente.

Da mesma forma que não conseguimos determinar precisamente o número de átomos e a temperatura, também não é possível obtermos de forma direta o *healing length* (equação (2.61)), pois esta escala característica da turbulência quântica depende da densidade de pico da amostra *in situ*. Porém, podemos calcular esta densidade para uma nuvem condensada livre de vórtices, combinando as expressões (2.38) e (2.49),

$$n_c(0) = \frac{\mu}{g} = \frac{\hbar\bar{\omega}}{2} \left(\frac{15Na}{\bar{a}_{ho}} \right)^{2/5} \frac{m}{4\pi\hbar^2 a}. \quad (5.33)$$

Realizando os cálculos e substituindo este valor na equação (2.61), encontramos o *healing length* de aproximadamente $\xi_c = 0,1 \mu\text{m}$, que corresponde ao número de onda $k_{\xi_c} = 6,23 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$. Como o número de átomos é o mesmo para as amostras turbulenta e não turbulenta, relacionamos as densidades de pico da seguinte forma,

$$n_c(0)V_c(0) = n_{tb}(0)V_{tb}(0), \quad (5.34)$$

onde $n_{tb}(0)$ corresponde à densidade de pico da nuvem turbulenta *in situ* e $V_{tb}(0)$ o seu volume. Assim, combinando (5.34) com (2.61) encontramos uma forma de estimar o *healing length* da amostra turbulenta,

$$\xi_{tb} = \xi_c \sqrt{\frac{V_{tb}(0)}{V_c(0)}}. \quad (5.35)$$

Para estimarmos a razão dos volumes *in situ*, recorremos ao resultado apresentado na figura 4.2(b). Neste, temos a evolução temporal dos raios da nuvem, que para $t = 15 \text{ ms}$ de TOF vale

$$R_\rho = 60 \mu\text{m}, \quad (5.36)$$

$$R_x = 105 \mu\text{m}, \quad (5.37)$$

e em $t = 0$, da referência (62) tiramos,

$$R_\rho = 2,65 \mu\text{m}, \quad (5.38)$$

$$R_x = 51,33 \mu\text{m}. \quad (5.39)$$

Desta forma, calculando o volume do elipsóide $V = \frac{4}{3}\pi R_\rho^2 R_x$, obtemos a taxa de crescimento

do volume do condensado turbulento,

$$V_{tb}(15ms) = 1050,00 V_{tb}(0), \quad (5.40)$$

e também, a seguinte razão,

$$V_{tb}(15ms) = 77,00 V_c(15ms). \quad (5.41)$$

Com o mesmo raciocínio, através das equações de (4.19) e (4.20) determinamos a relação entre os volumes da nuvem condensada,

$$V_c(15ms) = 529,25 V_c(0). \quad (5.42)$$

Substituindo, a expressão (5.41) em (5.42), teremos

$$V_{tb}(15ms) = 4,10 \times 10^4 V_c(0), \quad (5.43)$$

que combinada com a equação (5.40), resulta na razão desejada,

$$\frac{V_{tb}(0)}{V_c(0)} = 39,05, \quad (5.44)$$

e portanto, podemos estimar o *healing length* da nuvem turbulenta (5.35),

$$\xi_{tb} = 6,23 \xi_c = 0,623 \mu m. \quad (5.45)$$

Assim, no espaço dos momento, este valor vale $k_{\xi_{tb}} = k_{\xi} = 1 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$.

Uma vez descritas as principais características dos nossos dados experimentais, estamos prontos para determinar a projeção da distribuição de momento. O cálculo desta grandeza foi feito através de um simples *script* desenvolvido no software Matlab versão 7.9(R2009b). Primeiramente, este *script* carrega a imagem de absorção (na forma matricial) gerada experimentalmente, para encontrar a densidade óptica (3.4). Em seguida, é determinado o centro de massa da imagem para a centralização dos eixos cartesianos. Feito isso, uma nova imagem é criada para selecionar uma fatia com espessura $\delta k'$, funcionando como uma máscara: Se a coordenada (k'_x, k'_y) estiver dentro de um anel de espessura $\delta k'$ é atribuído 1 à matriz e zero, caso contrário.

Figura 5.6 – Algoritmo para o cálculo da distribuição $n'(k')$. Primeiramente, carrega-se a imagem gerada experimentalmente (I), em seguida determina-se o centro de massa da distribuição para centralização dos eixos cartesianos. Feito isso, o programa entra em um laço, que para cada valor k' é criada uma máscara (M) a fim de selecionar um anel de diâmetro $\delta k'$. Posteriormente, esta nova matriz é multiplicada ponto a ponto com a imagem e o resultado é somado, gerando $g(k')$. Em seguida, dividi-se $g(k')$ por k' , determinando $n'(k')$. Quando todos os pontos da matriz experimental foram percorridos a distribuição é normalizada e seu gráfico é gerado.

rio. Depois disso, ocorre uma multiplicação ponto a ponto entre as matrizes densidade óptica e máscara, resultando nos pontos do OD que estão no intervalo entre k' e $k' + \delta k'$. Uma vez selecionados, estes pontos são somados para obtenção da função $g(k')$ (5.13), que em seguida é dividida por k' para obtenção de $n'(k')$ (5.15). Esta operação é efetuada até que todos os pontos da imagem inicial tenham sido percorridos, para finalmente ser feita a normalização (5.16). Na figura (5.6) apresentamos o fluxograma deste processo.

A figura 5.7 mostra o resultado obtido para a nuvem condensada da figura 5.4(a). Para pequenos valores de k' , observamos uma distribuição aproximadamente constante seguida por uma suave queda que vai a zero, conforme nos aproximamos do número de onda proveniente dos raios de Thomas-Fermi. Este comportamento não revela nenhuma lei de escala, mas é característico da distribuição de Thomas-Fermi integrada em uma direção (5.10).

Figura 5.7 – Projeção da distribuição de momento para a nuvem condensada, apresentada em um gráfico dilog. Conforme o número de onda aumenta, a distribuição cai suavemente até atingir o valor nulo. O eixo da abscissa foi escalado pelo número de onda associado ao *healing length* da nuvem turbulenta e a normalização foi feita de acordo com a equação (5.16).

Figura 5.8 – Gráfico da projeção da densidade de momento para as nuvens turbulentas da figura 5.5.

Figura 5.9 – Média das três medidas de $n'(k')$ no regime turbulento. Identificamos uma dependência de $\alpha_1 = 0$ na região de baixos números de onda, enquanto que entre k_ξ e k_p observamos uma inclinação com coeficiente angular $\alpha_2 = -1,99 \pm 0,17$. Devido às bordas das nuvens turbulentas, a região para $k > k_p$ não representa nenhum efeito físico.

Na figura 5.8, mostramos a projeção da distribuição de momento para nuvens condensadas no regime turbulento. Pode-se notar que o comportamento do $n'(k')$ na turbulência é muito diferente do BEC regular, não sendo possível evidenciar um perfil Thomas-Fermi nessa distribuição. Apesar de ambas as amostras possuírem o mesmo número de átomos, o gás turbulento apresenta uma energia cinética adicional proveniente do emaranhado de vórtices, resultando em uma nuvem mais diluída e, portanto o valor máximo da distribuição de momento diminui cerca de uma década, enquanto o maior número de onda aumentará significativamente, como mostra a figura 5.10.

Além disso, essa distribuição de momento turbulenta apresenta duas regiões onde identificamos uma lei de escalas do tipo,

$$n'(k') \propto (k')^\alpha. \quad (5.46)$$

Através de ajustes lineares dos valores médios (gráfico da figura 5.9), obtivemos o valor do coeficiente α . Para o intervalo inicial, que se inicia em baixos momentos e se estende até o valor de k_ξ , encontramos uma dependência de $\alpha_1 = 0$, mostrando uma fraca relação entre os números

Figura 5.10 – Gráfico comparativo das projeções das distribuições de momento para os regimes turbulento e não turbulento. A presença da energia cinética dos vórtices dilui a amostra turbulenta, reduzindo o valor máximo cerca de uma década ao mesmo tempo que aumenta o maior número de onda.

de onda. Entretanto, na região seguinte identificamos uma potência de $\alpha_2 = -1,99 \pm 0,17$ para um estreito intervalo de momento, compreendidos entre k_ξ e k_ρ . Imediatamente após este regime, a densidade de momento vai rapidamente a zero, pois estamos no intervalo de momento entre k_ρ e k_x , dimensões-limite da nuvem turbulenta. Desta forma, esta região é resultado da assimetria da amostra e não representa um efeito físico.

Com a projeção $n'(k')$ determinada, podemos recuperar a densidade de momento $n(k)$ através da equação (5.25), que, quando aplicada à projeção de momento do BEC (figura 5.7), retorna o resultado apresentado na figura (5.11). Como era de se esperar, a distribuição $n(k)$ pouco se altera em comparação ao $n'(k')$, já que essa também satisfaz a equação de Thomas-Fermi (70).

Antes de aplicarmos a transformada inversa de Abel para a distribuição turbulenta, estimamos o seu resultado para as regiões que apresentam uma lei de escala. Para isso, substituímos a

Figura 5.11 – Distribuição de momento tridimensional, $n(k)$, para a nuvem condensada. Assim como em sua projeção, a densidade de momento cai suavemente à medida que o número de onda cresce. Aqui também escalamos o eixo da abscissa com k_ξ e normalizamos este resultado de acordo com a equação (5.32).

expressão (5.46) na equação (5.24), ficando com

$$n(k) \propto -\frac{\alpha}{\pi} \int_k^\infty \frac{(k')^{\alpha-1}}{\sqrt{k'^2 - k^2}} dk', \quad (5.47)$$

ou, na forma mais conveniente,

$$n(k) \propto -\frac{\alpha}{\pi} \int_k^\infty \frac{(k')^{\alpha-2}}{[1 - (k/k')^2]^{1/2}} dk'. \quad (5.48)$$

Para resolver esta integral, utilizamos a transformação trigonométrica $k' = k \sec \varphi$, que resulta em

$$n(k) \propto -k^{\alpha-1} \frac{\alpha}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(\cos \varphi)^\alpha} = C(\varphi) k^\beta, \quad (5.49)$$

onde $\beta = \alpha - 1$, para $\alpha < 0$. Portanto, a aplicação da transformada inversa de Abel implica em uma nova lei de escala para a distribuição $n(k)$, diminuída por um fator 1, com relação à projeção $n'(k')$.

De fato, resolvendo numericamente a equação (5.25) para a projeção turbulenta (gráfico da figura 5.8), obtemos a prevista lei de escala $\beta_2 = -2,99 \pm 0,26$, na região entre k_ξ e k_p , como mostra o gráfico da figura 5.12. Para a primeira região ($k < k_\xi$), mesmo sem a presença da

Figura 5.12 – Distribuição de momento tridimensional apresentada em um gráfico dilog, obtida através da transformada inversa de Abel da média de $n'(k')$. No intervalo entre k_ξ e k_ρ , evidenciamos uma lei de potências, caracterizada pelo comportamento linear com inclinação de $\beta_2 = -2,99 \pm 0,26$.

derivada na transformada, o ruído experimental cresceu significativamente, não traduzindo de forma eficiente o $n(k)$ neste intervalo, embora a mudança de comportamento nas proximidades de k_ξ seja evidente.

A partir do resultado de $n(k)$, aplicamos a equação (5.6) para determinar o espectro de energia cinética do condensado turbulento. Para esta grandeza, a lei de potências na região entre k_ξ e k_ρ é alterada por um fator dois no coeficiente β_2 , ou seja, $\gamma_2 = -0,99 \pm 0,26$, como mostra a figura 5.13. Devido às limitações intrínsecas do método utilizado para determinar este espectro de energia, como a assimetria da nuvem e a dispersão no $n(k)$ após a transformada de Abel, não conseguimos observar o transporte de energia, oriundo das cascatas de Richardson, para baixos valores de k ($< k_\xi$), como também não identificamos a faixa dissipativa. Entretanto a presença da lei de escala γ_2 é uma assinatura incontestável da turbulência e ainda não havia sido observada experimentalmente em amostras turbulentas quanticamente degeneradas.

Embora a determinação do coeficiente γ_2 nos induza a comparações com o espectro de energia de Kolmogorov, apresentado na figura 2.5(b), algumas peculiaridades devem ser consideradas. As simulações numéricas são feitas à temperatura zero, em armadilhas quadradas,

Figura 5.13 – Gráfico do espectro de energia cinética obtido através da equação 5.6. Na região compreendida entre k_ξ e k_ρ observamos uma lei de escala com coeficiente $\gamma_2 = -0,99 \pm 0,26$.

suficientemente grandes para reduzirem ao máximo o efeito das bordas. Em contrapartida, temos um potencial quadrupolar que produz um condensado turbulento de tamanho e temperatura finitos, o que implica respectivamente em variações abruptas de densidade e na interação do fluido quântico com uma componente térmica.

6 Conclusões

A realização experimental da Condensação de Bose–Einstein em gases atômicos é um experimento complexo, pois exige um grande conhecimento de física de átomos frios, eletrônica, computação e programação, dentre outras áreas. Porém, uma vez atingida a condensação, o sistema é altamente estável e reproduzível, tornando-o ideal para o estudo de diversos fenômenos, inclusive a turbulência quântica. Neste trabalho, apresentamos e caracterizamos todas as etapas de aprisionamento e resfriamento que resultou em um Condensação de Bose-Einstein com aproximadamente 2×10^5 átomos de ^{87}Rb à temperatura de 100 nK, registrado por imagem de absorção. Adicionamos uma perturbação oscilatória para introduzir momento angular na amostra condensada, resultando no aparecimento de vórtices e formação da turbulência quântica. A partir do resultado experimental e baseado nas consequências da expansão em tempo de voo, elaboramos um modelo teórico capaz de determinar a projeção isotrópica da distribuição de momento. Utilizando argumentos de simetria e a transformada inversa de Abel, recuperamos o perfil da distribuição de momento tridimensional da projeção, o que possibilitou a obtenção do espectro de energia cinética da nuvem turbulenta.

O cálculo numérico para obtenção da projeção da distribuição de momento foi feito por meio de um *script* de *Matlab*. O resultado proporcionou a evidência de uma lei de potências na nuvem turbulenta para duas regiões distintas. A primeira, compreendida entre baixos números de onda (k') e o *healing length* no espaço dos momento (k_ξ), apresentou um coeficiente linear $\alpha_1 = 0$, indicando uma fraca dependência entre os k' s. A segunda foi localizada em um estreito intervalo, que se inicia em k_ξ e termina no número de onda relativo ao eixo menor da amostra (k_p), revelando um coeficiente angular $\alpha_2 = -1,99 \pm 0,17$. Com a aplicação da transformada

inversa de Abel, o coeficiente α_2 foi diminuído por um fator 1 e devido ao ruído experimental intrínseco deste método, não conseguimos extrair informações relevantes da primeira região. Esse processo mostrou, na região entre k_ξ e k_p , uma lei de escala com coeficiente de inclinação unitário no espectro de energia cinética da amostra turbulenta, comprovando a existência deste fenômeno em nossa amostra quanticamente degenerada.

Apesar de encontrarmos esta lei de escalas, o coeficiente encontrado diverge do valor teórico ($-5/3 \approx -1,66$). Contudo, nosso sistema apresenta algumas peculiaridades que tornam a diferença compreensível. Devido às dificuldades teóricas, as simulações do espectro de energia são feitas com armadilhas quadradas (suficientemente grande para reduzir o efeito das bordas) e condensados ideais, ou seja, à temperatura zero. Em nosso experimento, o condensado apresenta tamanho finito (gerando variações abruptas de densidade), temperatura diferente de zero (proporcionando interações entre componente térmica e condensada) e é produzido em armadilhas harmônicas (originando uma amostra assimétrica e inhomogênea). Também não conseguimos estudar o transporte de energia, oriundos das cascatas de Richardson, devido ao ruído experimental propagado nos cálculos, assim como não observamos a região dissipativa do espectro, pelo fato de nossas amostras não serem completamente simétricas.

O estudo experimental da turbulência quântica é uma área crescente de pesquisa, com os principais trabalhos desenvolvidos em sistemas de He líquido superfluido. Os resultados aqui obtidos introduzem o condensado de Bose-Einstein como uma legítima alternativa ao He líquido para investigação dos fenômenos turbulentos, assim como motiva futuras pesquisas tanto na área experimental como na teórica para um melhor entendimento desse regime caótico.

REFERÊNCIAS

1 MERRILL, R. T.; MCELHINNY, M. W.; MCFADDEN, P. *The magnetic field of the earth*. San Diego, Calif.: Academic Press, 1998.

2 COULTER, N. A.; PAPPENHEIMER, J. R. Development of turbulence in flowing blood. *American Journal of Physiology*, v. 159, n. 2, p. 401–408, 1949.

3 FRISCH, U. *Turbulence*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

4 KOLMOGOROV, A. N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 13, n. 01, p. 82–85, Apr. 1962.

5 KOLMOGOROV, A. N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, v. 30, p. 301–305, 1941.

6 RICHARDSON, L. F. The supply of energy from and to atmospheric eddies. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: mathematical and physical sciences*, v. 97, n. 686, p. 354–373, 1920.

7 FEYNMAN, R. Application of quantum mechanics to liquid helium. *Progress in Low Temperature Physics*, v. 1, p. 17–53, 1955.

8 VINEN, W. F. Mutual friction in a heat current in liquid helium ii. iii. theory of the mu-

tual friction. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: mathematical and physical sciences*, v. 242, n. 1231, p. 493–515, 1957.

9 VINEN, W. F. Mutual friction in a heat current in liquid helium ii. ii. experiments on transient effects. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: mathematical and physical sciences*, v. 240, n. 1220, p. 128–143, 1957.

10 VINEN, W. F. Mutual friction in a heat current in liquid helium ii. iv. critical heat currents in wide channels. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: mathematical and physical sciences*, v. 243, n. 1234, p. 400–413, 1958.

11 SCHWARZ, K. W. Three-dimensional vortex dynamics in superfluid ^4He : homogeneous superfluid turbulence. *Physical Review B*, American Physical Society, v. 38, n. 4, p. 2398–2417, Aug. 1988.

12 DONNELLY, R. J. *Quantized vortices in helium II*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

13 BRADLEY, D. I. et al. Decay of pure quantum turbulence in superfluid $^3\text{He-B}$. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 96, p. 035301, Jan. 2006.

14 DONNELLY, R. J.; SWANSON, C. E. Quantum turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 173, p. 387–429, Nov. 1986.

15 VINEN, W. Turbulence in a superfluid. *Journal of Low Temperature Physics*, Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers, v. 121, n. 5-6, p. 367–376, 2000.

16 VINEN, W. F. Classical character of turbulence in a quantum liquid. *Physical Review B*, American Physical Society, v. 61, n. 2, p. 1410–1420, Jan. 2000.

17 ANDERSON, M. H. et al. Observation of Bose–Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, v. 269, n. 5221, p. 198–201, 1995.

18 DAVIS, K. B. et al. Bose–einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 75, n. 22, p. 3969–3973, Nov. 1995.

19 BRADLEY, C. C. et al. Evidence of Bose–Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 75, n. 9, p. 1687–1690, Aug. 1995.

20 HENN, E. A. L. et al. Emergence of turbulence in an oscillating Bose–Einstein condensate. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 103, n. 4, p. 045301, July 2009.

21 SEMAN, J. A. et al. Turbulence in a trapped Bose–Einstein condensate. *Journal of Physics: conference series*, v. 264, n. 1, p. 012004, 2011.

22 SEMAN, J. et al. Route to turbulence in a trapped Bose-Einstein condensate. *Laser Physics Letters*, WILEY-VCH Verlag, v. 8, n. 9, p. 691–696, 2011.

23 KOBAYASHI, M.; TSUBOTA, M. Quantum turbulence in a trapped Bose–Einstein condensate. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 76, n. 4, p. 045603, Oct. 2007.

24 BERLOFF, N. G.; SVISTUNOV, B. V. Scenario of strongly nonequilibrated Bose–Einstein condensation. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 66, n. 1, p. 013603, July 2002.

25 PARKER, N. G.; ADAMS, C. S. Emergence and decay of turbulence in stirred atomic bose–einstein condensates. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 95, n. 14, p. 145301, Sept. 2005.

26 HENN, E. A. L. et al. Generation of vortices and observation of quantum turbulence in an oscillating Bose-Einstein condensate. *Journal of Low Temperature Physics*, v. 158, n. 3-4, p. 435–442, 2009.

27 HENN, E. A. L. et al. Observation of vortex formation in an oscillating trapped Bose-Einstein condensate. *Physical Review A*, v. 79, n. 4, p. 043618, 2009.

28 SEMAN, J. A. et al. Three-vortex configurations in trapped Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, v. 82, n. 3, p. 033616, 2010.

29 SHIOZAKI, R. F. et al. Transition to quantum turbulence in finite-size superfluids. *Laser Physics Letters*, v. 8, n. 5, p. 393–397, 2011.

30 ROMERO-ROCHIN, V. et al. Observation of Bose-Einstein condensation in an atomic trap in terms of macroscopic thermodynamic parameters. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 85, n. 2, p. 023632, Feb. 2012.

31 TAVARES, P. E. S. et al. Out-of-phase oscillation between superfluid and thermal components for a trapped bose condensate under oscillatory excitation. *Laser Physics Letters*, v. 10, n. 4, p. 045501, 2013.

32 HUANG, K. *Introduction to statistical physics*. 2nd ed. New York: Taylor & Francis, 2002. 290 p.

33 PETHICK, C. J.; SMITH, H. *Bose-Einstein condensation in dilute gases*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 569 p.

34 DALFOVO, F. et al. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Review of Modern Physics*, American Physical Society, v. 71, n. 3, p. 463–512, Apr. 1999.

35 COURTEILLE, P. W.; BAGNATO, V. S.; YUKALOV, V. I. Bose–Einstein condensation of trapped atomic gases. *Laser Physics Review*, v. 11, n. 6, p. 650–800, 2011.

36 KETTERLE, W.; DURFEE, D. S.; KURN, S. D. M. Bose–Einstein condensation in atomic gases (proceedings of the international school of physics “enrico fermi,” course cxl). IOS Press, 1999.

37 DAVIDSON, P. A. *Turbulence: an introduction for scientists and engineers*. Cambridge: Oxford University Press, USA, 2004.

38 VINEN, W.; NIEMELA, J. Quantum turbulence. *Journal of Low Temperature Physics*, Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers, v. 128, n. 5-6, p. 167–231, 2002.

39 TSUBOTA, M. Quantum turbulence-from superfluid helium to atomic Bose–Einstein condensates. *Journal of Physics: condensed matter*, v. 21, n. 16, p. 164207, 2009.

40 KOBAYASHI, M.; TSUBOTA, M. Kolmogorov spectrum of quantum turbulence. *Journal of the Physical Society of Japan*, The Physical Society of Japan, v. 74, n. 12, p. 3248–3258, 2005.

41 SAKURAI, J. J. *Modern quantum mechanics*. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1994. 500 p.

42 BOHR, T. et al. *Dynamical systems approach to turbulence*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

43 SADDOUGH, S. G. Local isotropy in complex turbulent boundary layers at high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 348, p. 201–245, Setp. 1997.

44 SEMAN, J. A. *Study of Excitations in a Bose–Einstein Condensate*. 2011. 189 p. Tese (Doutorado em Ciências) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

45 NAZARENKO, S.; ONORATO, M. Freely decaying turbulence and Bose-Einstein condensation in gross-pitaevski model. *Journal of Low Temperature Physics*, Springer US, v. 146, n. 1-2, p. 31–46, 2007.

46 NOWAK, B.; SEXTY, D.; GASENZER, T. Superfluid turbulence: nonthermal fixed point in an ultracold bose gas. *Physical Review B*, American Physical Society, v. 84, n. 2, p. 020506, July 2011.

47 MAGALHÃES, K. M. F. *Obtenção da Degenerescência Quântica em Sódio Aprisionado*. 2004. 102 p. Tese (Doutorado em Ciências) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

48 HENN, E. A. L. *Produção experimental de excitações topológicas em um condensado de Bose–Einstein*. 2008. 126 p. Tese (Doutorado em Ciências) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

49 KLEMP, C. et al. Ultraviolet light-induced atom desorption for large rubidium and potassium magneto-optical traps. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 73, p. 013410, Jan. 2006.

50 TELLES, G. et al. Light-induced atomic desorption for loading a sodium magneto-optical trap. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 81, p. 032710, Mar. 2010.

51 PRESTON, D. W. Doppler-free saturated absorption: laser spectroscopy. *American Journal of Physics*, AAPT, v. 64, n. 11, p. 1432–1436, 1996.

52 PRITCHARD, D. E. et al. Light traps using spontaneous forces. *Physical Review Letters*, v. 57, n. 3, p. 310–313, 1986.

53 METCALF, H. J.; STRATEN, P. *Laser cooling and trapping*. New York: Springer-Verlag Inc., 1999. 323 p.

54 PETRICH, W. et al. Stable, tightly confining magnetic trap for evaporative cooling of neutral atoms. *Physical Review Letters*, v. 74, n. 17, p. 3352–3355, 1995.

55 MEWES, M. O. et al. Bose–Einstein condensation in a tightly confining dc magnetic trap. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 3, p. 416–419, 1996.

56 ESSLINGER, T.; BLOCH, I.; HÄNSCH, T. Bose–Einstein condensation in a quadrupole-Ioffe-configuration trap. *Physical Review A*, v. 58, n. 4, p. R2664–R2667, 1998.

57 KETTERLE, W.; DRUTEN, N. Evaporative cooling of trapped atoms. *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, Academic Press, New York, v. 37, p. 181–236, 1996.

58 HENN, E. A. L. et al. Evaporation in atomic traps: a simple approach. *American Journal of Physics*, AAPT, v. 75, n. 10, p. 907–910, 2007.

59 CASTIN, Y.; DUM, R. Bose–einstein condensates in time dependent traps. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 77, n. 27, p. 5315–5319, Dec. 1996.

60 CARACANHAS, M. *Interações em Condensados de Bose–Einstein: Temperatura finita e Gás dipolar*. 2010. 96 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

61 CARACANHAS, M. et al. Self-similar expansion of the density profile in a turbulent Bose-Einstein condensate. *Journal of Low Temperature Physics*, Springer US, v. 166, n. 1-2, p. 49–58, 2012.

62 CARACANHAS, M. et al. Self-similar expansion of a turbulent Bose-Einstein condensate: a generalized hydrodynamic model. *Journal of Low Temperature Physics*, Springer US, v. 170, n. 3-4, p. 133–142, 2013.

63 SCHWARZ, K. W. Three-dimensional vortex dynamics in superfluid ^4He : Line-line and line-boundary interactions. *Physical Review B*, American Physical Society, v. 31, p. 5782–5804, May 1985.

64 BRACEWELL, R. *The Fourier transform and its applications*. 3rd. ed. Boston: McGraw-Hill, 1999.

65 ARFKEN, G.; WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. 6th. ed. New York: Academic Press, 2005.

66 GORDON, R.; BENDER, R.; HERMAN, G. T. Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography. *Journal of Theoretical Biology*, v. 29, n. 3, p. 471–476, Dec. 1970.

67 OZERI, R. et al. Direct observation of the phonon energy in a Bose-Einstein condensate by tomographic imaging. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 88, n. 22, p. 220401, May 2002.

68 BUGGLE, C. et al. Interferometric determination of the s and d -wave scattering amplitudes in ^{87}Rb . *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 93, n. 17, p. 173202, Oct. 2004.

69 THOMAS, N. R. et al. Imaging of s and d partial-wave interference in quantum scattering

of identical bosonic atoms. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 93, n. 17, p. 173201, Oct. 2004.

70 NOWAK, B. et al. Nonthermal fixed points, vortex statistics, and superfluid turbulence in an ultracold Bose gas. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 85, p. 043627, Apr. 2012.