

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

**ALDO GOMES PEREIRA**

**Um estudo histórico da evolução do conceito de  
potencial vetor no eletromagnetismo clássico**

São Carlos - SP  
2009



**ALDO GOMES PEREIRA**

**Um estudo histórico da evolução do conceito de  
potencial vetor no eletromagnetismo clássico**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Física Aplicada  
Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Cibelle Celestino Silva

São Carlos - SP  
2009

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTES TRABALHOS, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação IFSC/USP

Pereira, Aldo Gomes

Um estudo histórico da evolução do conceito de potencial vetor no eletromagnetismo clássico./Aldo Gomes Pereira; orientadora Cibelle Celestino Silva -- São Carlos, 2009.

134 p.

Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Física - Área de concentração: Física Aplicada) – Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo.

1. História da física. 2. James Clerk Maxwell. 3. Potencial vetor.  
.4. Eletromagnetismo. I. Título.



## FOLHA DE APROVAÇÃO

Aldo Gomes Pereira

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências. Área de Concentração: Física Aplicada.

Aprovado em: 28/05/2009

### Comissão Julgadora

Profa. Dra. Cibelle Celestino Silva

Instituição: IFSC/USP

Assinatura Cibelle C. Silva

Prof. Dr. João José Caluzi

Instituição: UNESP

Assinatura J. J. Caluzi

Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano

Instituição: IFSC/USP

Assinatura Reg-J-Napolitano

## **DEDICATÓRIA**

À Helena de Fátima Gomes, minha mãe,  
José Alcides Rodrigues Pereira, meu pai  
e Elizabete Rodrigues Pereira, minha tia.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço minha mãe, Helena, que mesmo estando longe sempre esteve em meus pensamentos. Ao meu pai, por valorizar a minha curiosidade sobre as coisas. A minha irmã, por tudo o que ela sempre representa na minha vida.

Agradeço à Professora Cibelle pela paciência e trabalho em me ensinar efetivamente um pouco da “verdadeira” História da Ciência.

Aos colegas de grupo pela convivência frutífera, pelas discussões e pela atenção. Em especial à Nilva pela leitura incansável deste trabalho e principalmente pelas sugestões esclarecedoras.

À Veridiana, por seu amor, carinho e paciência que me ajudaram a manter a tranquilidade durante esses últimos anos e à sua família pelo suporte nos momentos difíceis.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES. E a todos que de alguma forma, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Torna-te aquilo que és.

Nietzsche

## RESUMO

Atualmente o potencial vetor é geralmente tratado no eletromagnetismo clássico como um artifício para o cálculo dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sem um significado claro. No entanto, quando foi proposto na metade do século XIX, ele possuía um significado físico claro e desempenhava um papel central para Faraday, Maxwell e outros físicos britânicos. Um dos objetivos deste trabalho é entender como se deu esta mudança na interpretação do conceito de potencial vetor. Para isto foi realizado um estudo histórico analisando as diferentes interpretações para este conceito partindo dos trabalhos de Faraday sobre indução eletromagnética, em que propôs o conceito de estado eletrotônico. Analisamos as contribuições de William Thomson que fortemente inspiraram Maxwell a sugerir diferentes interpretações para o conceito em trabalhos publicados ao longo de cerca de duas décadas até a publicação do *Treatise on Electricity and Magnetism* em 1873. No final do século XIX a interpretação dada por Maxwell ao conceito de potencial vetor começou a ser questionada por vários físicos. Uma das questões envolvidas neste processo foi a realidade das grandezas físicas. Nomes como Heaviside, Hertz e outros defendiam que as grandezas dotadas de realidade física na teoria eletromagnética eram os campos elétrico e magnético e não o potencial vetor. Com essa nova visão desenvolveram uma nova teoria eletromagnética próxima da que conhecemos atualmente. No entanto, este processo não foi linear e aceito acriticamente. Ao longo do século XX foram publicados trabalhos propondo uma interpretação física para o potencial vetor, ainda no contexto clássico. O estudo histórico aqui desenvolvido priorizou a abordagem desenvolvida na Grã-Bretanha

Palavras-chave: História da física. Eletromagnetismo. Potencial vetor. James Clerk Maxwell.

## ABSTRACT

Currently the vector potential generally is considered in the classical electromagnetic theory as an artifice for the calculation of the fields  $\vec{E}$  and  $\vec{B}$  without a clear physical meaning. However, when it was proposed in the mid-nineteenth century, it used to have a clear physical meaning and played a central role for Faraday, Maxwell and other British physicists. One of the goals of this dissertation is to understand how the meanings attributed to the vector potential changed along years. In order to answer to this question, we developed a historical study analyzing the different interpretations for this concept starting with the works of Faraday on electromagnetic induction, where he introduced the concept of electrotonic state. We analyzed the contributions of William Thomson that inspired strongly Maxwell to suggest different interpretations for the concept in works published along the next two decades until the publication of the *Treatise on Electricity and Magnetism* in 1873. In the end of the nineteenth century Maxwell's interpretations for the vector potential began to be questioned by several physicists. One of the issues involved in this questioning was the reality of the physical quantities. People as Heaviside, Hertz and others defended that electric and magnetic fields, not the vector potential, were quantities endowed with physical reality. With this new approach they developed a new electromagnetic theory closer to the currently accepted. Nevertheless, this process was not linear and uncritically accepted. Throughout the twentieth century papers and books were published defending a physical interpretation for the vector potential considering a classical context for the electromagnetic theory. The historical study developed here focused the developments in Great-Britain although some mentions to Continental physics are made.

Keywords: History of physics. James Clerk Maxwell. Vector potential. Electromagnetic theory.

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	11
2	<b>PANORAMA DA FÍSICA E DO ELETROMAGNETISMO NA GRÃ-BRETANHA NO SECULO XIX</b> .....	16
2.1	INTRODUÇÃO .....	16
2.2	O ÉTER E A EXPLICAÇÃO MECÂNICA DOS FENÔMENOS FÍSICOS .....	19
2.3	O ÉTER COMO UM SÓLIDO ELÁSTICO .....	21
2.4	A DESCOBERTA DO ELETROMAGNETISMO .....	24
2.5	A DESCOBERTA DE FARADAY E O ÉTER ELÉTRICO .....	25
2.6	THOMSON E AS ANALOGIAS FÍSICAS .....	27
2.7	JAMES CLERK MAXWELL .....	29
3	<b>ORIGEM DO CONCEITO DE POTENCIAL VETOR NA GRÃ-BRETANHA: FARADAY E THOMSON</b> .....	31
3.1	O ESTADO ELETROTÔNICO E A DESCOBERTA DA INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA .....	31
3.2	ORIGEM DO CONCEITO DE POTENCIAL VETOR EM WILLIAN THOMSON .....	35
4	<b>DESENVOLVIMENTO DO CONCEITO DE POTENCIAL VETOR EM MAXWELL</b> .....	41
4.1	INTRODUÇÃO.....	41
4.2	<i>INTENSIDADE ELETROTÔNICA</i> .....	42
4.2.1	A INTENSIDADE ELETROTÔNICA E A AÇÃO À DISTÂNCIA .....	51
4.3	<i>MOMENTO REDUZIDO</i> .....	54
4.4	<i>MOMENTO ELETROMAGNÉTICO</i> .....	62
4.5	OS QUATÉRNIONS E O NOME “ <i>POTENCIAL VETOR</i> ” .....	69

<b>5 OS MAXWELLIANOS E AS NOVAS ABORDAGENS PARA O POTENCIAL VETOR</b> .....	79
5.1 INTRODUÇÃO.....	79
5.2 HEAVISIDE E A ELIMINAÇÃO DO POTENCIAL VETOR .....	82
5.2.1 REFORMULANDO AS EQUAÇÕES DE MAXWELL.....	88
5.3 HERTZ E O POTENCIAL VETOR .....	92
5.4 O ENCONTRO DE BATH .....	96
<b>6 O POTENCIAL VETOR EM ALGUNS LIVROS TEXTO DE ELETROMAGNETISMO</b> .....	103
6.1 INTRODUÇÃO .....	103
6.2 SOBRE UM POSSÍVEL SIGNIFICADO FÍSICO PARA O POTENCIAL VETOR NO ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO .....	106
6.3 O POTENCIAL VETOR COMO UM SIMPLES ARTIFÍCIO DE CÁLCULO NOS LIVROS TEXTOS .....	115
<b>7 CONCLUSÃO</b> .....	120
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	126
<b>APÊNDICE A</b> .....	130

## 1 Introdução

Quando foi introduzido na metade de século XIX, o potencial vetor possuía um significado físico bastante diferente do atribuído a ele hoje em dia. Ao lado dos campos elétrico e magnético ele era parte fundamental da teoria eletromagnética. No entanto, da forma como é introduzido pelos livros texto e ensinado atualmente, seu significado físico é raramente discutido no contexto do eletromagnetismo clássico e uma grande ênfase é dada para sua importância matemática. O objetivo deste trabalho é entender como se deu esta transformação ao longo do século XIX e início do século XX por meio de um estudo pautado na análise de fontes primárias e secundárias.

Para isso, é necessário conhecer o contexto da física da época, em especial o eletromagnetismo no século XIX. O Capítulo dois faz um estudo histórico contextualizando como os físicos britânicos pensavam e explicavam os fenômenos eletromagnéticos.

Nesta época, a mecânica e suas aplicações eram um campo de pesquisa bastante desenvolvido. Os físicos britânicos buscavam explicações mecânicas para uma grande variedade de fenômenos, inclusive para os fenômenos eletromagnéticos, baseados em conceitos como força, velocidade, aceleração e nas leis de Newton. Dentro deste espírito, o éter seria considerado como base para todos os fenômenos físicos que eram interpretados como alterações mecânicas do éter. Além de ser o meio que sustentaria a propagação da luz, o éter tinha outras funções, tais como explicar os fenômenos elétricos e magnéticos como “campos” existentes neste éter (SILVA, 2002). No Capítulo dois será realizado um panorama geral destas teorias de éter, e suas relações com as explicações mecânicas dos fenômenos físicos.

Em termos gerais, a física era bem diferente da atual, em vários sentidos. A forma de explicar os fenômenos eletromagnéticos, de acordo com os britânicos, era pautada por uma visão mecanicista do mundo e as interações entre os corpos eram mediadas por um meio intermediário entre estes corpos. Este meio, quando no caso do espaço livre, era o éter. Neste éter residia o campo de forças, que podiam ser elétrica ou magnética. Assim como o campo de velocidades num fluido propaga-se neste fluido ou o campo de forças de um sólido propaga-se neste sólido, o campo de forças elétrica e magnética propagava-se no éter.

O éter, dentro da visão mecanicista, foi usado para explicar fenômenos como, por exemplo, o surgimento de correntes na indução eletromagnética e a propagação da luz. A noção de campos localizados no éter substituiu a noção de fluidos imponderáveis elétricos que emanavam de um corpo para outro intermediando a ação entre estes corpos. Com os olhos de hoje, a hipótese de um éter talvez pareça infundada, desnecessária e até mesmo ingênua, mas o estudo histórico revela a importância deste conceito para a formação da teoria de campos da forma que conhecemos hoje (DORAN, 1975).

O termo “*potencial vetor*” foi introduzido pela primeira vez com este nome numa carta de Maxwell para um amigo, Peter Guthrie Tait (1831-1901). O conceito, entretanto, é mais antigo e suas origens estão nos trabalhos de Michael Faraday (1791 - 1867) e Willian Thomson (1824 - 1907) (BORK, 1967; ROCHE, 1990).

Baseados nestas teorias de éter, e dentro de uma visão “mecanicista” do eletromagnetismo, no Capítulo três será visto como Faraday elaborou hipóteses sobre a constituição da matéria e posteriormente introduziu o conceito de *estado eletrotônico* para explicar a indução eletromagnética. Será visto também como Thomson, utilizando analogias com um sólido elástico para explicar as propriedades das forças eletromagnéticas, introduziu o conceito de potencial vetor, porém ainda, sem relação direta com o eletromagnetismo. Faraday associava o conceito de estado eletrotônico (potencial vetor) a tensões adquiridas no

meio ou nos condutores, enquanto que Thomson associava o potencial vetor às soluções de equações que representavam rotações no meio.

Com a descoberta da lei da indução eletromagnética em 1831, Michael Faraday, procurando uma explicação inicial para o fenômeno, supôs a hipótese da existência de um “estado” assumido pelos circuitos que faziam parte do experimento. A este estado Faraday deu o nome de “Estado Eletrotônico” (FARADAY, 1965, § 60)<sup>1</sup>.

Ao contrário de Faraday, Thomson não procurou inicialmente elaborar nenhuma hipótese sobre a constituição da matéria. Ele preferia fazer analogias entre os conceitos oriundos da mecânica e relacioná-los ao eletromagnetismo. O conceito de potencial vetor em Thomson surgiu em 1847 relacionado a uma analogia entre um “sólido elástico” e os fenômenos eletromagnéticos. Como será visto no Capítulo três, dentro desta analogia surge um vetor<sup>2</sup> cujas componentes eram semelhantes às componentes do potencial vetor produzido por um dipolo magnético (THOMSON, 1847).

Um significado físico para o potencial vetor foi concretizado por Maxwell, em 1861, no artigo “*On Physical lines of force*”. Neste artigo, Maxwell concebeu um modelo mecânico na tentativa de explicar como se dava a propagação das interações eletromagnéticas entre os corpos no éter e atribuiu ao conceito de potencial vetor o significado de “*momento reduzido*”. Esta evolução do significado físico do potencial vetor nos trabalhos de Maxwell será detalhada no Capítulo quatro.

A partir da segunda metade do século XIX, físicos como Heinrich Rudolf Hertz (1854-1894) e Oliver Heaviside (1850-1925) passaram a questionar a atribuição de um

---

<sup>1</sup>O trabalho, *Experimental researches in electricity* de Faraday é um conjunto de artigos publicados em três volumes. Nestes artigos, Faraday classifica os assuntos por parágrafos, que são numerados desde o primeiro artigo até o último. Mantém-se nessa dissertação, a mesma classificação usada por Faraday por acreditar que uma futura consulta, por parte do leitor, seja bem mais simples. Então quando escrever, por exemplo, (§ 60) estou me referindo ao parágrafo sessenta, e assim por diante.

<sup>2</sup> Thomson não utilizava notação vetorial.

significado físico ao potencial vetor. Para estes físicos as forças elétrica e magnética<sup>3</sup> eram grandezas dotadas de realidade física na teoria de Maxwell. Por isso propuseram o abandono dos potenciais e escreveram as equações do eletromagnetismo na forma que conhecemos hoje em função somente das forças elétrica e magnética.

Já o Capítulo cinco mostra como Heaviside e Hertz, eliminaram o conceito de potencial vetor das equações fundamentais do eletromagnetismo. O objetivo principal deste Capítulo cinco é entender como se deu esta mudança e quais os principais argumentos utilizados por estes físicos para esta mudança de interpretação. De acordo com Hertz e Heaviside as grandezas de interesse na teoria de Maxwell seriam os campos elétrico e magnético e não os potenciais, que eles viam como grandezas “*parasitas*”, “*obscuras*” e de “*natureza indeterminada*”. Este Capítulo apresenta também quais foram os principais motivos que levaram estes físicos a pensarem desta forma.

Com a eliminação do potencial vetor como grandeza fundamental no eletromagnetismo ele passou a ser usado na teoria eletromagnética da forma que se conhece atualmente: como um artifício de cálculo, cuja introdução é útil em alguns casos, mas destituído de significado físico.

Com o objetivo de compreender como as visões de Hertz e Heaviside sobre o potencial vetor acabaram por predominar, no Capítulo seis, foram analisados alguns livros texto e artigos, publicados no início do século XX. Na segunda metade do século XX, as discussões envolvendo um possível significado físico para o potencial vetor no eletromagnetismo clássico foram retomadas por alguns autores (CALKIN, 1966, 1979; FEYNMAN, 1964; SEMON, 1996; GINGRAS, 1980; ROCHE, 1990; KONOPINSKI, 1978, 1981).

---

<sup>3</sup> O termo campo elétrico e magnético só passou a existir como conhecemos hoje após a descoberta da carga elétrica no final do século XIX.

Como evidência de que as interpretações de Heaviside e Hertz não predominaram de imediato, em 1904, Joseph John Thomson (1856 - 1940), publicou um artigo no qual ele retoma a interpretação original de Maxwell de que o potencial vetor pode ser interpretado como o momento do campo que pode ser transferido para uma carga elétrica colocada em uma região de campo eletromagnético (THOMSON J, 1904, 1911; KONOPINSKI, 1978, 1981).

No entanto, por meio de alguns exemplos retirados de alguns livros texto atuais, tenta-se mostrar que esta “nova” interpretação para o conceito parece não ter mudado a forma como ele é ensinado nos cursos de eletromagnetismo, continuando ainda hoje a asserção que se tornou famosa entre os estudantes de física: de que o potencial vetor não possui nenhum tipo de significado físico dentro do eletromagnetismo clássico.

Apesar de discutir apenas brevemente, pois esse não é o objetivo da dissertação, menciono o papel do potencial vetor na mecânica quântica no chamado efeito Aharonov-Bohm no Capítulo seis e sete.

Não é objetivo deste trabalho, defender por uma ou outra interpretação física, mas sim esclarecer por meio de um estudo histórico o significado de um conceito físico. Considera-se que foi dado um grande passo se um estudante, ou mesmo um professor, após a leitura deste trabalho, pensar sobre o potencial vetor como algo a mais do que simplesmente um vetor cujo rotacional obtém-se o campo magnético.

Além do interesse historiográfico por si só, estudos como estes podem ser úteis em situações de ensino ao evidenciar que conceitos físicos usados hoje foram, muitas vezes, desenvolvidos em um contexto totalmente diferente e com significados diferentes. Obviamente não se propõe uma volta ao passado, mas sim fazer um novo olhar mais abrangente e que pode ser útil no ensino do eletromagnetismo no nível universitário.

## **2 Panorama da física e do eletromagnetismo na Grã-Bretanha no século XIX**

### **2.1 Introdução**

Para se entender melhor o eletromagnetismo do século XIX é necessário contextualizar a física neste período, entendendo como os físicos pensavam e construíam teorias e modelos para explicar os fenômenos eletromagnéticos, Este será o foco principal deste Capítulo.

No século XIX existiam duas abordagens para tratar os fenômenos eletromagnéticos: a de campo e a de ação à distância. A abordagem de campo era usada pelos físicos britânicos e a de ação à distância principalmente pelos franceses e alemães. Para os britânicos a interação entre os fenômenos eletromagnéticos se dava por intermédio do campo de forças eletromagnéticas. Este campo de forças era pensado como um espaço no qual a força é definida em cada ponto, e uma teoria de campo é qualquer teoria que permite calcular os valores dessas forças. Essa definição poderia admitir ainda as teorias de ação à distância. No entanto, teorias de campo consideram a ação entre dois objetos separados como sendo mediadas por um campo existente no espaço entre os objetos (SILVA, 2002). A existência independente do campo pode ser entendida como a noção de que o campo contém em si mesmo a capacidade de ação, segundo Faraday ele contém o “poder”, ou segundo Thomson, o “efeito mecânico”. Como será visto no Capítulo três, a capacidade de mediar a ação deve ser entendida como a ação se propagando entre os “elementos contíguos” do campo. Para a abordagem de ação à distância não importava as propriedades do meio ou as características do meio.

Teorias de força podem ser chamadas de teorias de campo quando tratam as partes de um sistema de força não independentemente, mas sim como participantes de um todo, e consideram que a interação se dá entre as partes vizinhas, rejeitando a ação direta à distância. O termo “campo” é usado em um sentido amplo, significando a introdução de entidades físicas ou matemáticas no espaço existente entre forças elétricas e magnéticas. As linhas de campo de Faraday são o primeiro conceito preciso da idéia de campo. Thomson foi o primeiro a introduzir em 1847 o conceito de campo acompanhado por um formalismo matemático e procurar sua fundamentação em uma teoria dinâmica de éter (SILVA, 2002).

Uma forma de pensamento que se consolidou entre os físicos ao longo do século XIX, especialmente os britânicos, foi a utilização de modelos mecânicos para a explicação dos fenômenos eletromagnéticos. O uso de analogias com fenômenos conhecidos, como o movimento dos fluidos, também era uma estratégia comum na época.

A teoria dos fluidos imponderáveis, correntemente usada no século XVIII, supunha a existência de um tipo de fluido para cada fenômeno físico. Para as interações elétricas, por exemplo, existia o conceito de fluido elétrico. Este era oriundo das idéias de Willian Gilbert (1544 - 1604) sobre a existência de “humores” exalados pelos corpos ao serem atritados. Stephen Gray (1666 - 1736) mostrou que a “virtude elétrica” de um tubo de vidro era transferida a outros corpos de tal modo a dotá-los da mesma propriedade de atração de corpos leves como o tubo de vidro fazia quando friccionado. Esta virtude atrativa podia ser levada a corpos que estivessem a muitos metros de distância do tubo (WHITTAKER, 1973, p. 42). Após a descoberta de Gray, não era mais possível acreditar que o eflúvio elétrico estivesse inseparavelmente conectado aos corpos dos quais eles eram exalados por fricção. Tornou-se necessário admitir que essas emanções tinham uma existência independente e podiam ser transferidas de um corpo para outro. Dessa forma elas passaram a ser chamadas de *fluidos elétricos* e vistas como uma das substâncias constituintes do universo.

No início do século XIX, os físicos começaram a criticar o uso destes fluidos imponderáveis. Franz Ulrich Theodor Aepinus (1724 - 1802), por exemplo, num trabalho de 1759, começou a abandonar a teoria de um fluido elétrico como enunciada por Gray substituindo-a por uma teoria de ação à distância. Benjamin Thompson, posteriormente Conde Rumford (1753 - 1814) rejeitou, em 1798, a teoria do calor como um fluido imponderável argumentando que ela não poderia explicar a geração de calor por fricção. Em vez disso, ele elaborou uma teoria que explicava os efeitos do calor por meio da interação entre o movimento das partículas do corpo e o éter vizinho permeando todo o ambiente (HARMAN, 1982, p. 19).

O abandono gradual, no início do século XIX, destes fluidos imponderáveis também contribuiu para a maior utilização de explicações dos fenômenos físicos por meio de alterações mecânicas do éter, pois trouxe à tona a questão de como as interações ocorriam no meio entre os corpos, dando origem ao surgimento da teoria de campo por Faraday e outros.

De acordo com Harman (1982, p. 2), a física no início do século XIX passou por quatro desenvolvimentos cruciais no processo de unificação e utilização de modelos mecânicos na explicação dos fenômenos físicos, sendo eles:

- A ênfase dada por Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827) na matematização e na formulação de uma visão de mundo físico unificada teve um importante impacto no desenvolvimento subsequente das teorias físicas;
- A publicação da teoria matemática do calor de Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), em 1822, uniu o estudo do calor dentro do contexto da análise matemática previamente aplicada somente aos problemas da mecânica. Baseado nos trabalhos de Fourier, Willian Thomson começou a explorar as analogias matemáticas e físicas entre as leis do calor e da eletricidade e paralelamente as associações entre a mecânica das partículas e os meios fluidos e elásticos.

- Augustin Jean Fresnel (1788 - 1827) trouxe a ótica para o contexto da visão mecânica da natureza ao supor que a luz era propagada pelas vibrações de um éter mecânico. Por volta de 1830, a teoria ondulatória da luz era aceita pela maioria dos físicos que exploravam uma variedade de teorias matemáticas e físicas numa tentativa de obter uma teoria mecânica coerente para a ótica.

- A formulação da lei da conservação da energia na década de quarenta do século XIX contribuiu para a unificação dos fenômenos físicos, relacionando calor, luz, eletricidade e magnetismo dentro de um panorama de explicação mecânica dos fenômenos.

No início do século XIX, os físicos exploraram a interconexão da luz com o calor e da eletricidade com o magnetismo. Os experimentos de Hans Christian Oersted (1777 - 1851) e Faraday estabeleceram a conexão entre as forças elétricas e magnéticas, contribuindo assim, para justificar a doutrina da convertibilidade dos “poderes” ou “forças”.

## **2.2 O éter e a explicação mecânica dos fenômenos físicos**

A física britânica no início do século XIX caracterizou-se por assumir a existência do éter como meio para veicular a propagação da luz. Esta postura entre os físicos deveu-se principalmente ao estabelecimento da teoria ondulatória da luz na primeira metade do século XIX<sup>4</sup>. Não é objetivo deste Capítulo, analisar os detalhes destas discussões, mas sim, discutir alguns dos principais modelos mecânicos para o éter eletromagnético. Para isso, inicialmente

---

<sup>4</sup> Os debates envolvendo as teorias corpusculares e ondulatória da luz duraram várias décadas e já existem bons trabalhos a respeito do assunto (WHITTAKER, 1973; BUCHWALD, 1989).

serão discutidos brevemente como os avanços no estudo da ótica ondulatória foram importantes para o desenvolvimento do eletromagnetismo na Grã-Bretanha.

Thomas Young (1773 - 1829) é um dos principais nomes relacionado ao desenvolvimento da teoria ondulatória da luz em detrimento da teoria corpuscular de Newton e Laplace, que supunham que a luz era transmitida por meio da emissão de partículas de um corpo para outro. Young defendeu, em 1808, a hipótese ondulatória da luz em analogia com o som. Concluiu que da mesma forma que o som necessita de um meio para se propagar assim seria a luz, sendo o meio para propagação da luz o éter luminoso. Young explicou o fenômeno da interferência da luz usando a analogia do aumento ou diminuição das ondas do mar quando estas se encontram em determinados pontos de profundidades diferentes no mar. A este fenômeno Young deu o nome de *interferência* e quando aplicado às ondas luminosas seria interferência da luz (WHITTAKER, 1973, p. 102).

A teoria da luz proposta por Augustin Jean Fresnel (1788 - 1827) contribuiu para o abandono da teoria de que a transmissão da luz se dava por meio de um fluido luminoso. Rejeitando a teoria corpuscular da luz no início do século XIX, Fresnel escreveu sobre a suspeita de que a luz e o calor estavam conectados com as vibrações de um fluido. Por volta de 1821, independente de Young, Fresnel propôs que a propagação da luz se dá num meio elástico: o éter luminoso. Fresnel anteviu uma física unificada cujos fenômenos eram explicados baseados nas propriedades mecânicas deste éter luminoso, visto por ele como uma forma comum de matéria (HARMAN, 1982).

Tanto Young quanto Fresnel propuseram uma teoria ondulatória da luz semelhante ao som, ou seja: eram ondas longitudinais. Em 1808, a descoberta do fenômeno da polarização por Etienne Louis Malus (1775 - 1812), levantou algumas dúvidas quanto à legitimidade da teoria ondulatória. Como as ondas sonoras não se “polarizam”, as ondas luminosas também não poderiam se polarizar, uma vez que a teoria ondulatória supunha que elas eram ondas

longitudinais. Para resolver este problema Young propôs que as ondas luminosas seriam transversais, ou seja, vibrações perpendiculares ao sentido do movimento. Com a hipótese da transversalidade das ondas luminosas o fenômeno da polarização poderia ser prontamente explicado. Fresnel, porém, deparou-se com um problema ainda maior. O éter, suposto até então um fluido, não poderia suportar a propagação de ondas transversais, pois um fluido, não possui resistência perpendicular à direção de propagação.

Apesar de o estudo das propriedades do éter não ser o interesse inicial de Fresnel, ele propôs, baseado nos trabalhos de George Gabriel Stokes (1819-1903) sobre sólidos elásticos, um éter com a propriedade de rigidez transversal (WHITTAKER, 1973, p. 114-115).

### **2.3 O éter como um sólido elástico**

Ao longo de todo século XIX era consenso geral entre os físicos britânicos a existência de um éter permeando todo o espaço. O que não era consenso nesta época era como seria este éter e suas principais propriedades. Era inadmissível supor que a luz emitida pelo Sol chegaria à Terra através de um espaço vazio, ou que dois corpos eletrizados poderiam agir “à distância” sem a intermediação de um meio entre eles<sup>5</sup>.

Com a suposição da transversalidade da propagação da luz o éter passou a adquirir a propriedade de resistir a distorções em sua forma, tornando-se um “sólido elástico”. Os físicos britânicos começaram a propor modelos de éter que explicassem a propagação da luz e suas propriedades. Já eram conhecidas, no início do século XIX, algumas propriedades da luz como refração, reflexão, polarização, difração, condições de contorno na incidência entre

---

<sup>5</sup> Para alguns físicos continentais dois corpos eletrizados poderiam agir à distância sem a preocupação de como o meio poderia influenciar em tal ação. Este tipo de abordagem foi adotada por André Marie Ampère (1775 - 1836) e Wilhelm Eduard Weber (1804 - 1891).

dois meios, entre outras. Os modelos de éter elaborados tinham que possuir características que explicassem todos estes fenômenos.

A hipótese de um éter com propriedades de um sólido elástico esbarrou em um problema inicial bem simples: como era possível ter um éter “rígido” para permitir a propagação da luz, mas ao mesmo tempo um éter fluido para permitir que os planetas orbitem em torno do sol num movimento contínuo sem nunca serem freados ou perturbados?

Uma das soluções apresentadas para este problema foi proposta por Stokes ao comparar o éter a substâncias como o piche que, embora rígidos suportando vibrações elásticas, são suficientemente fluidos para permitir que outros corpos passem por ele. Assim, o éter seria considerado como uma substância que tanto poderia se comportar como um sólido elástico, para transmitir as vibrações da luz, como um fluido para o progressivo e lento movimento dos planetas.

Stokes utilizou um modelo dinâmico de explicação dos fenômenos relacionados ao éter. Supôs um éter formado por partículas, mas evitou formular qualquer teoria molecular a respeito da constituição do éter. Esta teoria dinâmica era baseada no formalismo proposto Joseph Louis Lagrange (1736-1813) em seu trabalho *Mécanique Analytique* de 1788. Este método de representação mecânica da natureza era formulado tentando evitar especulações a respeito da estrutura íntima da matéria. Os teóricos que seguiram esta linha de raciocínio argumentavam que era impossível elaborar um modelo mecânico único para representar um determinado fenômeno físico. Neste sentido, a principal contribuição de Stokes para a noção britânica de éter foi “a concepção de um éter como sendo uma substância contínua ontologicamente diferente de qualquer tipo de matéria. A concepção de transmissão de “tensões” ou “forças” através de um meio contínuo como uma possível alternativa à transmissão de forças à distância” (DORAN, 1975, p. 160).

Deve-se a Augustine-Louis Cauchy (1789-1857) o desenvolvimento de um método de estudar diretamente as propriedades elásticas da matéria mostrando que as vibrações de um sólido isotrópico são determinadas por equações diferenciais. Da solução destas equações Cauchy obteve as propriedades de propagação da luz neste meio sólido e elástico. Apesar de obter alguns princípios da ótica, Cauchy não explicou o significado físico das condições de contorno utilizadas. A grande contribuição de Cauchy foi derivar as principais leis da ótica por meio de equações diferenciais de acordo com a ontologia de explicação mecânica dos fenômenos físicos, ou seja, a dedução de equações baseadas em princípios mecânicos. Grande parte destas soluções foram obtidas paralelamente por Siméon-Denis Poisson (1781-1840) que determinou os possíveis movimentos do sólido elástico mediante a incidência de luz e obteve soluções harmônicas no tempo e no espaço.

Os trabalhos de Cauchy e Poisson foram especialmente influentes entre os britânicos, estimulando investigações acerca das propriedades mecânicas da luz e da estrutura mecânica do éter. Uma nova geração de cientistas e filósofos, entre eles, John Herschel (1792 - 1871), William Whewell (1794 - 1866) e George Biddell Airy (1801 - 1892), todos adeptos da teoria ondulatória da luz no início do século XIX, introduziram a matemática analítica do continente no ensino de Cambridge (HARMAN, 1982, p. 25).

Em um trabalho publicado em 1838, George Green (1793-1841) adotou uma explicação dinâmica para as ações do éter derivando também alguns princípios da ótica. Desta maneira, ele fez uma crítica ao trabalho de Cauchy sobre uma possível estrutura molecular do éter. Para Green, o uso de princípios dinâmicos gerais apoiados pela razão e matemática sofisticada seria um guia mais fiel para se chegar aos princípios fundamentais da física do que o uso de modelos de realidade que às vezes não são aqueles adotados verdadeiramente pela natureza. Ele enfatizou ainda, a distância existente entre a realidade física e os modelos utilizados para representá-la (HARMAN, 1982, p. 26).

Assim, várias teorias de éter foram apresentadas naquela época e cada uma delas propondo propriedades mecânicas ao éter a fim de explicar os fenômenos óticos existentes. A busca pela explicação dos fenômenos óticos por meio da construção de modelos mecânicos estendeu-se por todo o século XIX, e com as descobertas de Oersted e Faraday no campo do eletromagnetismo estes modelos mecânicos começaram a se estender também para o campo do eletromagnetismo, como será mostrado na próxima seção.

## **2.4 A descoberta do eletromagnetismo**

Em 1820, o físico dinamarquês Hans Christian Oersted (1777 - 1851) adepto da busca pela unificação das “forças da natureza”, num movimento liderado pelos físicos e filósofos alemães, conhecido como *Naturphilosophie*, descobriu a conexão entre eletricidade e magnetismo. Esta conexão era procurada por Oersted desde o início de suas pesquisas científicas. As idéias que levaram Oersted a acreditar na unificação das forças da natureza eram de origem filosófica. Ele acreditava que o universo era um todo orgânico, como um ser vivo, e dotado de uma alma viva geradora de forças naturais. Essa concepção metafísica o levou à idéia de uma unidade íntima entre eletricidade, calor, magnetismo e luz, muito antes de suas descobertas experimentais. No entanto, ele não possuía boas evidências empíricas para justificar sua visão. De que modo era possível mostrar que o magnetismo era um efeito derivado da eletricidade? (MARTINS, 1986)

Em 1820, utilizando uma fonte galvânica ligada a um fio e uma agulha magnética capaz de girar livremente em torno de seu centro, Oersted realizou experimentos que o levaram a identificar a interação entre o fio e a agulha magnética. Ao repetir este experimento, em várias orientações diferentes tanto do fio quanto da agulha, ele se certificou

que a agulha sempre se posicionava em direções aproximadamente perpendiculares ao fio<sup>6</sup>, a não ser quando se colocava a agulha perpendicular ao fio, caso em que a agulha não se movia (DARRIGOL, 2000, p. 5). Destes experimentos, Oersted concluiu que este novo fenômeno não era simplesmente mais um tipo de interação entre forças de atração ou repulsão como no caso da gravitação ou da eletrostática, mas sim um tipo de interação que se dava por meio do que ele intitulou de “*vórtices*” criados em torno do fio, e que agiam ou exerciam algum tipo de interação antes desconhecida<sup>7</sup>.

Logo após a descoberta desse fenômeno, alguns físicos britânicos começaram a investigar a recém criada ciência do eletromagnetismo, propondo teorias baseadas em modelos mecânicos para explicar essa nova interação. Dentro deste contexto, a suposição do éter como o meio intermediando as interações eletromagnéticas foi mais do que natural.

## 2.5 A descoberta de Faraday e o éter elétrico

Em 1831, a ciência do eletromagnetismo foi surpreendida por outra descoberta fundamental feita por Michael Faraday (1791 - 1867): a indução eletromagnética. Vale ressaltar que Faraday, assim como Oersted, acreditava na unificação e convertibilidade das “*forças*”<sup>8</sup> da natureza. Como será visto no Capítulo três, Faraday tentou explicar a nova descoberta usando inicialmente o conceito de “*tensões*” adquiridas pelas partículas da matéria, introduzindo posteriormente o conceito de linhas de força associadas à noção de campo. Os motivos principais que o levaram a acreditar na existência de um meio para intermediar as ações eletromagnéticas foram (HESSE, 1961, p. 199):

---

<sup>6</sup> Posteriormente Ampère verificou que a agulha não tomava a direção perpendicular ao fio devido à influência do magnetismo terrestre.

<sup>7</sup> Para um estudo detalhado desta descoberta e os detalhes envolvidos na argumentação veja Martins 1986 e Silva 2006.

<sup>8</sup> Faraday, nesta época, não distinguia entre os conceitos de força e energia.

- A indução de cargas elétricas entre condutores separados por um meio isolante depende quantitativamente da natureza do meio;
- Se o isolante é cortado e suas partes separadas, cargas opostas aparecerão nas duas superfícies separadas;
- As linhas de indução são curvas, como ilustrado na centelha de uma descarga elétrica e por experimentos mostrando como a força numa esfera carregada devido a um isolante carregado é afetada pela presença deste.

A preocupação principal de Faraday era explicar como se dava a transmissão de forças elétricas entre os corpos. Para isso, ele construiu inicialmente um modelo baseado na transmissão de forças elétricas por meio das partículas contíguas do meio.

Em meio isolante os efeitos da indução elétrica propagavam-se por suas próprias partículas, cada uma destas agindo como um pequeno condutor polarizado. Para Faraday a transmissão de forças na indução eletrostática se daria pela disposição adquirida pelas partículas do meio, denominada por ele de “tensão eletrotônica”. Esta tensão seria adquirida quando as partículas se polarizavam e seria liberada quando as partículas voltassem à sua posição de relaxamento no material. Esta tensão seguida de relaxação proporcionaria, segundo Faraday, a transmissão de forças entre os corpos.

Analisando a distribuição espacial da força elétrica, por exemplo, com limalha de ferro, Faraday desenvolveu o conceito de linhas de força para representar a distribuição destas forças. Vale ressaltar, porém, que o conceito de linhas de força foi usado por Faraday, neste contexto, apenas para representar geometricamente a disposição das partículas polarizadas do corpo ou do meio que se encontrava no estado de tensão, Faraday ainda usou o conceito de estado de tensão como principal explicação para as interações entre os corpos

eletrizados. Assim, a transmissão de forças é explicada pelo conceito de estado eletrotônico e mediada pela ação de partículas contíguas do meio (HARMAN, 1982, p. 75).

Posteriormente, Faraday começou a pensar na possibilidade de que a transmissão de forças poderia ser regida pelo conceito de linhas de força e não pela ação de partículas contíguas. Essa idéia fica clara num trabalho de 1846 no qual ele especula sobre a possibilidade da transmissão de forças ser representada pelas vibrações das linhas de força. Desta forma, as linhas de força, que permeariam todo o espaço, representariam a interação entre substâncias materiais. A partir deste momento, Faraday deixa de utilizar as linhas de força como uma representação geométrica do campo dando a elas um caráter físico (POCOVI; FINLEY, 2002). Como será mostrado no próximo Capítulo, esta nova interpretação das linhas de força magnética contribuiu para que Faraday abandonasse o conceito de estado eletrotônico.

Apesar de Faraday não ter elaborado nenhum modelo mecânico específico de éter, sua idéia inicial de transmissão de forças por partículas contíguas e posteriormente o papel desempenhado pelas linhas de força, abriram caminhos para que o desenvolvimento de modelos mecânicos para o éter eletromagnético, desenvolvidos por Thomson, Maxwell e outros, contribuíssem para a unificação da ótica e da teoria eletromagnética na segunda metade do século XIX.

## **2.6 Thomson e as analogias físicas**

Os primeiros trabalhos de Thomson sobre eletricidade exploraram a analogia entre fluxo de calor e eletricidade, uma abordagem claramente influenciada pela leitura do trabalho de Joseph Fourier (1768-1830), *Théorie analytique de la chaleur*, publicado em 1822, e dos trabalhos de Faraday. Os trabalhos de Fourier chamaram a atenção de alguns físicos

britânicos por serem geométricos e pouco especulativos, agradando, assim, as inclinações pragmáticas e ilustrativas dos filósofos naturais britânicos. Fourier deduziu a lei da troca de calor derivando uma equação diferencial a partir da suposição de fluxo de calor através de uma superfície. A teoria de Fourier era especialmente atraente, pois não especulava sobre as propriedades íntimas da matéria. Fourier enfatizou a relação entre quantidade de calor atravessando uma superfície por unidade de tempo com a taxa da variação da temperatura através da superfície. Em linguagem moderna isto pode ser expresso dizendo que o gradiente de temperatura era responsável pelo fluxo de calor através da superfície (SILVA, 2002).

Thomson fez uma analogia entre a transmissão de forças elétricas através de partículas contíguas do meio elétrico e a transmissão de calor através de partículas contíguas do corpo.

Em sua analogia entre eletrostática e fluxo de calor, Thomson não se preocupou em entender fisicamente o que ocorre no espaço entre os condutores. Ele pretendia simplesmente mostrar como a analogia poderia conectar duas interpretações possíveis, as de Coulomb de ação à distância e as de Faraday. A analogia com o fluxo de calor sugeriu novos teoremas e manteve alguns aspectos geométricos do modelo de partículas contíguas de Faraday, enquanto que a analogia com tensões em um meio elástico ofereceu uma representação mecânica das forças elétricas e magnéticas. Segundo Thomson estas analogias poderiam ser consideradas como pontos de partida para as analogias mecânicas mais realísticas podendo resultar em uma teoria física para a propagação das forças elétricas e magnéticas (SILVA, 2002).

Thomson, entretanto, não tentou, nesta época, elaborar nenhum tipo de modelo mecânico que descrevesse a transmissão de forças elétricas no meio. Assim como Fourier, ele apenas preocupou-se em enfatizar os limites de uma representação matemática na descrição de fenômenos físicos. No entanto, ele deixou claro que a descrição matemática dos

fenômenos de calor era uma evidência que seria possível encontrar um modelo mecânico baseado no conceito de partículas contíguas do meio. Como será visto no próximo Capítulo, Thomson também fez uma analogia entre os fenômenos elétricos e a mecânica dos sólidos elásticos, analogia essa que introduziu, pela primeira vez na Grã-Bretanha, o conceito de potencial vetor no eletromagnetismo.

## **2.7 James Clerk Maxwell**

Assim como Thomson, Maxwell também era adepto do uso de analogias mecânicas para o eletromagnetismo, seguindo a tradição matemática de Cambridge no século XIX.

Em seus estudos sobre eletromagnetismo, Maxwell usou o tratamento formal de meios materiais contínuos aprendidos principalmente com Thomson. Para ele, relacionar o eletromagnetismo com uma teoria de éter era importante, pois lhe parecia fundamental a existência de modelos mecânicos adequados para explicar os fenômenos físicos. As abordagens de Maxwell e Thomson de como tratar a física eram muito semelhantes. Ambos atribuíam um papel central para a geometria na expressão das idéias físicas e matemáticas e tinham um grande domínio da matemática e interesse em problemas teóricos. Ambos tinham uma visão geral sobre os aspectos experimentais da física. Maxwell, no entanto, também se interessava pela parte filosófica dos aspectos relacionados à construção dos modelos mecânicos em eletromagnetismo (SILVA, 2002).

Em 1854, Maxwell definiu as linhas de força como linhas tangentes à força que age em um pólo magnético ou uma unidade de carga. Seguindo Gauss e Thomson, ele também usou os conceitos de superfícies equipotenciais normais às linhas de força, expressando a geometria entre força elétrica e potencial elétrico.

Em seus primeiros trabalhos sobre eletromagnetismo, Maxwell desenvolveu uma teoria eletromagnética baseada no uso de analogias e na construção de modelos mecânicos para explicar as interações entre os fenômenos eletromagnéticos.

Os papéis desempenhados pelo conceito de potencial vetor no eletromagnetismo do século XIX devem ser entendidos no contexto geral da física britânica, exposto brevemente neste Capítulo.

## 3 Origem do conceito de potencial vetor na Grã-Bretanha:

### Faraday e Thomson

#### 3.1 O estado eletrotônico e a descoberta da indução eletromagnética

O termo “potencial vetor” usado hoje em dia foi introduzido por Maxwell em 1871, mas as origens do conceito são encontradas nos trabalhos de Faraday. Neste Capítulo serão discutidas as contribuições de Faraday e Thomson para o desenvolvimento do conceito, bem como as interpretações a ele atribuídas.

Faraday começou suas pesquisas em eletricidade por volta de 1821, influenciado pelas recentes descobertas de Oersted entre a relação da eletricidade com o magnetismo. Nesta época Faraday trabalhava nos laboratórios da *Royal Institution of Great Britain* a convite do químico Humphry Davy (1778 - 1829). Suas pesquisas, desde sua admissão em 1812 até 1821, foram basicamente no ramo da química. A descoberta de Oersted abriu um novo campo de investigações que atraiu a atenção de Faraday.

Utilizando argumentos de simetria Faraday pensou que se o “estado de corrente” de um condutor tivesse a propriedade de produzir um “poder magnético” então, o efeito recíproco deveria existir, ou seja, o poder magnético, deveria induzir corrente elétrica em um condutor. Em novembro de 1825, Faraday realizou experimentos com dois fios condutores e lineares. O primeiro fio foi conectado a uma bateria e seu poder magnético, segundo Faraday, deveria produzir uma corrente elétrica no segundo fio próximo. Ele tentou três configurações diferentes: um par de fios paralelos, um fio reto (como o indutor) com um helicoidal e um fio helicoidal (no papel de indutor) em torno de um fio reto. Entretanto, Faraday não encontrou nenhum indício apreciável de indução de corrente elétrica nos fios.

Apenas em agosto de 1831, talvez influenciado pelos experimentos com eletromagnetos realizados por Joseph Henry (1797 - 1878) e Gerritt Moll (1785 - 1838), Faraday desenvolveu um novo equipamento que multiplicava o efeito da corrente produzida por espiras por meio da utilização de um núcleo de ferro em forma de anel, aumentando assim, o seu efeito magnético (figura 3.1). O núcleo de ferro proporcionava um aumento do poder magnético que se transmitia entre o circuito primário até o secundário (DARRIGOL, 2000, p. 32).



**Figura 3.1.** Bobinas utilizadas por Faraday na descoberta da indução eletromagnética.

Ao conectar o circuito secundário a um galvanômetro e o primário a uma bateria Faraday (1965, § 28) notou que:

[...] o galvanômetro é imediatamente afetado num grau muito maior do que em experimentos anteriores. Mas, embora o contato permanecesse ligado, o efeito não é permanente, pois a agulha do galvanômetro volta para sua posição inicial rapidamente, como se fosse indiferente ao efeito constante produzido pelo equipamento eletromagnético. Quando quebramos o contato com a bateria, a agulha é novamente defletida, mas agora em direção contrária à do exemplo anterior.

Este trecho marca a descoberta da indução eletromagnética por Faraday. Nesta época, ele não tinha introduzido ainda o conceito de linhas de força magnética e a sua primeira explicação para o fenômeno foi baseado no conceito de “tensões” ou um “estado de tensão”, assumido pelas partículas do circuito secundário quando da passagem da corrente no circuito primário.

Inicialmente Faraday pensou que o efeito seria produzido de forma análoga à indução eletrostática. Neste fenômeno as partículas do condutor fazem um breve deslocamento que, na linguagem de Alessandro Volta (1745 - 1827), adquirem um estado de “*tensão*”, daí Faraday cunhar o nome de *indução eletro-voltaica* para o fenômeno (ROCHE, 1990, p.145).

De acordo com Faraday, quando se liga um circuito primário este induz uma corrente no circuito secundário que dura enquanto a corrente no primário estiver aumentando. Atingido o valor constante da corrente no primário, o secundário, apesar de não possuir mais uma corrente induzida, estaria num estado de “*tensão*” ou “*eletrotônico*”, no qual as partículas deste estão alinhadas e na mesma direção da corrente induzida inicial. Ao desligar o primário o estado de tensão é liberado por meio da produção de uma corrente induzida agora no sentido contrário da corrente indutora inicial, nas palavras de Faraday (1965, § 60):

[...] enquanto o fio está sujeito à indução eletro-voltaica ou indução magneto-elétrica, ele parece estar num estado peculiar; pois ele resiste à formação de corrente elétrica, ao passo que, se ele estivesse em condições comuns, tal corrente seria produzida; e quando deixado sem influência ele tem o poder de originar uma corrente, um poder que o fio não possui sob circunstâncias comuns. Esta condição elétrica da matéria não tem sido reconhecida até agora, mas provavelmente ela exerce importante influência em muitos dos fenômenos produzidos por correntes de eletricidade. Por razões que aparecerão imediatamente (§ 71), eu tenho, depois de pedir o conselho de alguns amigos, me aventurado a chamar este novo estado de “estado eletrotônico”.

É interessante notar que o termo “estado eletrotônico”, como Faraday deixou claro no trecho acima, parece não ter sido de sua autoria. Embora não tenha confessado, o termo pode ter sido originário de um amigo de Faraday, o médico Whitlock Nicholl (1786 - 1838) (ROSS, 1961, p. 191). Segundo o *Oxford English Dictionary*, no vocabulário médico do século XIX, um *estado tônico* é um estado de tensão. Como Faraday pensava sobre a indução como um estado de tensão produzida nos circuitos, isto explica a escolha do nome. O termo estado eletrotônico é utilizado em algumas áreas da neurociência até hoje (ROCHE, 1990, p. 145).

Independente da real origem do termo, o importante é a forma como Faraday interpretava o fenômeno observado. Para ele, a passagem da corrente no circuito primário

causa uma tensão nas partículas do secundário, levando ao surgimento do estado eletrotônico neste circuito. A corrente induzida é originária da existência de um “poder condutor” existente no secundário e da “força propulsiva” momentânea exercida sobre as partículas do circuito secundário durante a formação do estado eletrotônico. Assim, a corrente elétrica induzida é considerada como proveniente da criação e dissolução do estado eletrotônico (HEIMANN, 1971a, pp. 235-257).

Faraday não explicou a origem do estado eletrotônico, mas partiu do princípio que ele estaria associado às partículas da matéria. Alguns meses após a introdução do estado eletrotônico, ele abandonou este conceito e passou a explicar o fenômeno da indução eletromagnética por meio do conceito de linhas de força muito semelhante à forma como é estudado atualmente. Isso fica claro na seguinte passagem (FARADAY, 1965, § 231):

[...] a lei pela qual a corrente induzida surge em corpos que se movem relativo a ímãs, é dependente da intersecção das curvas magnéticas pelo metal (§ 114), sendo assim mais precisa e definida (§ 217, § 220, § 224) e mesmo aplicada ao caso do primeiro artigo (§ 26); e por deixar claro os fenômenos produzidos, é desnecessário supor a existência daquela condição peculiar que anteriormente aventurei-me a chamar de estado eletrotônico.

Faraday atribuiu ao conceito de “linhas de força” diferentes significados ao longo dos anos. Em alguns momentos atribuiu às linhas de força existência física e em outros eram apenas representações geométricas para indicar a direção do alinhamento das partículas polarizadas quando submetidas às ações magnéticas (POCOVI; FINLEY, 2002).

Apesar de abandonar a idéia de um estado eletrotônico, a concepção de que um estado de tensão é adquirido pelas partículas do corpo foi mantida por Faraday, que o chamou de estado de polarização. De fato, Faraday utilizou em grande parte de sua vida estes dois modos de representação: linhas de força e a polarização das partículas<sup>9</sup>.

A utilização do conceito de linhas de força, junto com o conceito de estado eletrotônico, permite-nos enumerar algumas características que associam o estado

---

<sup>9</sup> A evolução do conceito de estado eletrotônico e linhas de força, na teoria de Faraday, pode ser encontrada no *Experimental researches in electricity*, parágrafos 1114, 1661, 1729, 1733 e 3269.

eletrotônico ao conceito de potencial vetor, posteriormente introduzido por Maxwell. O estado eletrotônico possuía direção e sentido que, segundo Faraday, era perpendicular ao campo magnético local e paralelo à corrente que o produziu, uma vez que o estado de polarização das partículas do circuito secundário era paralelo à corrente inicial que a produziu. O estado se estende em todo o meio em torno das fontes de corrente e na própria corrente, ele é criado e destruído de acordo com a criação e destruição do campo magnético. Por meio destas características podemos perceber muito das características qualitativas do conceito de potencial vetor (ROCHE, 1990, p. 145).

### **3.2 Origem do conceito de potencial vetor em Willian Thomson**

Como foi visto no Capítulo anterior, Thomson elaborou uma analogia entre a propagação de calor e os fenômenos eletrostáticos, porém esta analogia não deixava claro qual era a natureza das ações eletrostáticas. A analogia com o calor não dava nenhuma informação sobre a natureza íntima das ações elétricas. Já Faraday acreditava que as forças elétricas e magnéticas propagavam-se por meio de tensões no meio. Ele não tentou, no entanto, elaborar ou explicar estas tensões em termos de um modelo mecânico (DARRIGOL, 2000, p. 126).

Em seu trabalho de 1847, “*On a mechanical representation of electric, magnetic, and galvanic forces*”, Thomson concebeu uma nova analogia entre a propagação de forças e os estados de equilíbrio de um sólido elástico que, segundo ele, permitiria penetrar mais profundamente na natureza dos fenômenos. Nesta mesma época, Stokes havia terminado um estudo sobre a elasticidade dos sólidos e Faraday descoberto o fenômeno da rotação magneto-ótica (KNUDSEN, 1985, p. 157).

O trabalho de Stokes era baseado numa nova abordagem para estudar a mecânica dos meios contínuos, utilizando-se de elementos diferenciais de volume de determinado fluido e analisando como se dava qualquer tipo de “movimento instantâneo” deste elemento. Com este método Stokes deduziu sua famosa equação para os fluidos viscosos (DARRIGOL, 2000, p. 126).

Utilizando a mesma abordagem de Stokes, Thomson foi capaz de descrever as tensões em um sólido elástico baseado em tensões e rotações sofridas por elementos infinitesimais deste. Ele utilizou, ainda, uma correspondência entre força elétrica e deslocamento elástico. As forças magnéticas eram análogas à rotação diferencial de um elemento do sólido. Estas forças eram vistas como forças que “tendiam” a produzir movimentos de rotação nas superfícies dos elementos de volume escolhido.

As equações de equilíbrio de um sólido elástico, na notação do artigo de 1847, foram escritas como:

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0 \quad (3.6)$$

e

$$\nabla^2 \alpha \cdot dx + \nabla^2 \beta \cdot dy + \nabla^2 \gamma \cdot dz = df, \quad (3.7)$$

$\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  representam as projeções sobre os três eixos cartesianos de um deslocamento infinitesimal de um ponto  $(x,y,z)$  do sólido. A equação (3.6) representa a condição de incompreensibilidade do sólido e a (3.7) uma diferencial completa. Segundo Thomson, “qualquer expressão para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sujeita à condição (3.7), e que satisfaça (3.6), representará um estado interior do corpo, que pode ser produzido pela ação de forças em suas superfícies” (THOMSON, 1847, pp. 76-80).

Ao resolver estas equações, Thomson encontrou três soluções envolvendo as quantidades  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ : uma para o caso elétrico outra para o caso magnético e outra para o

caso “galvânico”. No caso magnético, Thomson supôs a existência de uma diferencial da forma:

$$\left(\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy}\right)dx + \left(\frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dz}\right)dy + \left(\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx}\right)dz = d\left(\frac{lx + my + nz}{r^3}\right). \quad (3.8)$$

Que é satisfeita por:

$$\alpha = \frac{mz - ny}{r^3}, \quad \beta = \frac{nx - lz}{r^3} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{ly - mx}{r^3}, \quad (3.9)$$

e que também satisfaz (3.6) e anula os coeficientes de (3.7). As grandezas  $l$ ,  $m$  e  $n$  são os cossenos diretores do eixo de polarização de um ímã colocado na origem numa direção arbitrária. Vale ressaltar que, todas as equações do eletromagnetismo eram escritas nesta época em componentes cartesianas, pois a descrição vetorial do eletromagnetismo só apareceu no final do século XIX com Maxwell e outros (SILVA, 2002).

Como a equação (3.9) satisfaz as equações (3.6) e (3.7), segundo Thomson, “deslocamentos expressos desta forma podem ser produzidos pela aplicação de forças externas” (THOMSON, 1847). Mas quais seriam estas forças externas?

Para Thomson pode-se supor que a quantidade entre parênteses do lado direito de (3.8) representa um potencial no ponto  $(x,y,z)$ , devido a um pequeno ímã, de momento unitário, colocado na origem do sistema de coordenadas, com seu eixo de polarização decomposto nas direções  $l$ ,  $m$  e  $n$ . Mas, se esta quantidade é um potencial, então os coeficientes de (3.8) representam a força externa sobre este ponto, que de acordo com Thomson (1847, p. 79), são:

$$X = \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy}, \quad Y = \frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dz} \quad \text{e} \quad Z = \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx}. \quad (3.10)$$

As componentes  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  foram interpretadas por Thomson como forças que tendem a produzir rotações diferenciais de uma unidade de magnetismo localizada no ponto  $(x,y,z)$  em torno de cada eixo coordenado.

Assim, de acordo com Thomson, foi possível encontrar a força magnética exercida em uma unidade de magnetismo localizada no ponto  $(x,y,z)$ , devido a um ímã localizado na origem, pelas grandezas  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , e das operações descritas em (3.10). Mas as operações descritas em (3.10), em linguagem moderna, permitem obter o campo magnético<sup>10</sup> por meio do rotacional do potencial vetor. Em outras palavras, de acordo com a analogia de Thomson as componentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  seriam as componentes do potencial vetor  $\vec{A}$ . De acordo com (3.10), da condição (3.6), e usando notação vetorial moderna os resultados obtidos por Thomson podem ser escritos como:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \text{ e } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (3.11)$$

A segunda relação de (3.11) é o que se chama hoje de calibre de Coulomb. Mas para Thomson (e também para Stokes), essa relação representava a condição de incompressibilidade de um sólido elástico.

Outro ponto interessante pode ser encontrado ao se escrever as equações (3.9) em notação vetorial moderna:

$$\vec{A} = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (3.12)$$

Sendo que  $\vec{m}$  é o “momento magnético” do ímã localizado na origem. Comparando (3.12) com o potencial vetor produzido por um dipolo magnético localizado na origem dado por (FEYNMAN, 1964, v. 2, p. 14-5):

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (3.13)$$

Percebe-se que, com exceção dos termos constantes, há uma semelhança entre o potencial vetor produzido por um ímã e o de um dipolo magnético (que é, na verdade, um pequeno circuito de corrente). Por argumentos completamente distintos – sem usar o conceito de

---

<sup>10</sup> Thomson não usava a palavra campo magnético como usamos atualmente e sim “campo de forças” que poderiam ser de origem elétrica, magnética, galvânica.

potencial vetor -, Thomson (1851, p. 270) relacionou o campo magnético produzido por um pequeno ímã em barra ao campo magnético produzido por um circuito de corrente.

As grandezas encontradas por Thomson (equações (3.9)) eram equivalentes ao potencial vetor já encontrado por Gauss em 1834<sup>11</sup> relacionado à indução de correntes; porém Thomson chegou a ele independentemente de Gauss e nem mesmo tomou consciência da identificação desta grandeza com a encontrada por Gauss. Tanto Thomson quanto Gauss não associaram a esta quantidade qualquer tipo de significado físico (WHITTAKER, 1973, p. 242). Enquanto que a introdução do conceito de potencial vetor para os continentais esteve associada à indução eletromagnética, para Thomson, este conceito foi introduzido em relação ao magnetismo estacionário. Dado que Thomson era um adepto da explicação mecânica dos fenômenos magnéticos é possível que ele esperasse encontrar um significado mecânico para este conceito. No entanto, parece que ele nunca esteve satisfeito com nenhum modelo mecânico de sua autoria para explicar os fenômenos eletromagnéticos (ROCHE, 1990, p. 150).

A analogia entre sólido elástico e as ações elétricas e magnéticas representou uma grande descoberta para Thomson, pois, foi possível representar as forças elétricas e magnéticas por estados mecânicos num sólido, de acordo com a sua intenção de descrever os fenômenos eletromagnéticos por meio de processos mecânicos ocorridos no éter. No artigo de 1847, Thomson sugeriu explicitamente que as forças magnéticas tinham um caráter “rotatório”, ou seja, para produzir rotações no meio. Isto estava de acordo com a descoberta de Faraday de 1845 do fenômeno da rotação magneto-ótica, que apontava fortemente em direção a uma relação entre a teoria magnética e a teoria de propagação da luz através de um sólido elástico. Thomson salientou ainda que as analogias tomadas no artigo eram para serem

---

<sup>11</sup> Veja apêndice.

usadas com cautela, como é possível ver numa carta enviada a Faraday nesta época (THOMSON apud KNUDSEN, 1985, p. 158):

[...] O que eu tenho escrito é simplesmente um esboço de uma analogia matemática. Eu não me aventurei, em qualquer parte, fazê-la a origem de uma nova teoria de propagação das forças elétrica e magnética, que, se vier algum dia a se estabelecer, se mostrará como um resultado necessário da conexão entre as forças elétricas e magnéticas, e deixará claro como um fenômeno de magnetismo puro e estático se origina da eletricidade em movimento ou de uma massa inerte, tal como um ímã. Se tal teoria for descoberta, ela também, quando usada em conexão com a teoria ondulatória da luz, explicará com certeza, o efeito do magnetismo em luz polarizada.

A analogia, apesar de ser sugestiva de grandes descobertas que estão por vir, não faz com que Thomson elabore uma teoria física do eletromagnetismo. Thomson não formulou uma explicação física das forças elétricas e magnéticas baseado em sua analogia, nem aprofundou ou tomou consciência da identificação de seu método para calcular a força magnética por meio das grandezas  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , com as mesmas grandezas, obtidas alguns anos antes, pelos continentais.

Em seu artigo de 1851, “*A mathematical theory of magnetism*”, Thomson voltou a utilizar as grandezas  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , porém agora, chamando-as de  $F$ ,  $G$ , e  $H$ . Neste artigo, Thomson utiliza as grandezas  $F$ ,  $G$ , e  $H$  com o mesmo significado do artigo de 1847: em relação com a distribuição de magnetização de um corpo, porém ainda como um conceito arbitrário destituído de qualquer significado ou relação com a indução eletromagnética (THOMSON, 1851, p. 283). Coube, então, ao ainda jovem Maxwell, inspirado pelas idéias de Thomson e Faraday, desenvolver uma teoria física do eletromagnetismo e dar um significado mecânico ao conceito de potencial vetor, como será mostrado no próximo Capítulo.

## 4 Desenvolvimento do conceito de potencial vetor em Maxwell

### 4.1 Introdução

Maxwell começou seus estudos de eletricidade e magnetismo por volta de 1845 com o professor James Forbes (1809 - 1868) na Universidade de Edinburgo, sendo fortemente influenciado pela tradição vitoriana que buscava construir modelos que fossem uma descrição real do mundo físico. Foi nesta época que Maxwell teve seu primeiro contato com os trabalhos de Faraday e Thomson. Posteriormente estudou Ampère e Kirchoff e por último Neumann e Weber. Todas estas leituras fizeram com que ele tomasse certa antipatia das teorias elétricas continentais, como, por exemplo, o conceito de ação à distância no eletromagnetismo (DARRIGOL, 2000, p. 138).

A explicação dos fenômenos eletromagnéticos baseados em modelos mecânicos alcançou seu ápice na teoria de Maxwell. Dentro deste contexto é que se insere o surgimento do significado físico do conceito de potencial vetor: a busca de um significado mecânico para o conceito de estado eletrotônico introduzido em 1831 por Faraday.

Em uma carta de 1835 para Thomson, Maxwell descreveu seu interesse pelo conceito de estado eletrotônico de Faraday, e expôs algumas das idéias que anos depois iriam se constituir no artigo de 1856 “*On Faraday’s lines of force*”<sup>12</sup>. (MAXWELL apud BORK, 1967, p. 211):

[...] Eu pretendo aplicar a estes fatos as noções de Faraday sobre o conceito de estado eletrotônico. Eu tenho trabalhado muito com idéias matemáticas e acredito ter conseguido muitas verdades e resultados relacionados com o conceito de estado eletrotônico. Um dos resultados já obtidos é que ele reduz em apenas um princípio não somente a atração de correntes e a indução de correntes, mas também a atração de corpos eletrificados, sem qualquer suposição adicional.

---

<sup>12</sup> A carta completa se encontra em LARMOR, J. *Origins of Clerk Maxwell’s electrical ideas as described in familiar letters to William Thomson*. Cambridge: Cambridge University Press, 1937.

Neste trecho Maxwell deixou claro sua intenção de trabalhar com o conceito de estado eletrotônico (futuramente potencial vetor) em eletromagnetismo, principalmente pelo fato de um único conceito explicar fenômenos distintos “sem qualquer suposição adicional”. O conceito de estado eletrotônico, de acordo com ele, poderia explicar tanto a indução eletrostática quanto a eletromagnética reduzindo assim, o número de suposições para a explicação de dois conceitos aparentemente diferentes. Isto evidencia a busca de Maxwell por explicações e teorias unificadas uma tendência em total acordo com a física britânica deste início de século XIX.

Ao ler o *Experimental Researches in Electricity and Magnetism* de Faraday, Maxwell ficou bastante impressionado com o conceito de linhas de força magnética. No entanto, no uso destas linhas de força ele foi cauteloso. Como será visto na próxima seção o uso do conceito de linhas de força para explicar a indução eletromagnética remetia ao conceito de ação à distância em alguns casos. Maxwell parecia não estar muito satisfeito com esse resultado, sendo este um dos motivos para que ele insistisse na utilização do conceito de *intensidade eletrotônica* no seu artigo de 1856.

## **4.2 Intensidade eletrotônica**

O artigo de 1856 “*On Faraday’s lines of force*” foi uma tentativa de unir os conceitos empíricos de Faraday e a matemática descritiva de Thomson<sup>13</sup>. Neste artigo, Maxwell elaborou um projeto que se baseou na descrição dos fenômenos eletromagnéticos por meio de analogias físicas. Ele salientou a importância do uso de tais analogias para o eletromagnetismo, mas também, preocupou-se com a limitação do seu uso, tanto que logo no

---

<sup>13</sup> Todos os artigos de Maxwell utilizados nesta dissertação são do livro da Dover de 1965. MAXWELL, J. C. *The scientific papers of James Clerk Maxwell*. Editado por Willian Davidson Niven. New York: Dover, 1965. v. 1-2

início ele definiu o que seria uma analogia física sob seu ponto de vista (MAXWELL, 1965, p. 156, v. 1):

[...] Por analogia física eu entendo aquela parte de uma teoria que é parcialmente similar entre as leis de uma ciência e outra, que faz com que uma ilustre a outra. Assim todas as ciências matemáticas são fundadas em relações entre leis físicas e leis de números, tal que o principal objetivo das ciências exatas é reduzir os problemas da natureza a determinações de quantidades por operações com números.

Vale ressaltar que a analogia física utilizada por Maxwell neste artigo foi semelhante à utilizada por Thomson entre fluxo de calor e a distribuição de eletricidade de um corpo discutida na Seção 2.6, mas com algumas diferenças. Maxwell trocou a analogia entre calor e eletricidade pela de calor e “*fluido incompressível imaginário*”, que, segundo ele, seria mais fiel já que “o calor não é visto nem mesmo como uma substância”. Além disso, ele também tratou dos casos em que o material é anisotrópico, ao contrário de Thomson que tratou da descrição dos fenômenos, em grande parte, de materiais isotrópicos.

Nessa analogia, Maxwell descreveu o movimento uniforme de um fluido incompressível e imponderável através de um meio resistivo com fontes e sorvedouros. Ele dividiu o fluido em “tubos” unitários, nos quais uma unidade de volume deste fluido atravessa uma determinada área por unidade de tempo. Essa configuração de tubos definiria completamente o fluxo de fluido, pois a direção dos tubos é a mesma que o movimento do fluido. Enquanto que o inverso de sua secção determinam a sua velocidade, ou seja, quanto maior a secção transversal da área na qual o fluido passa menor a sua velocidade. Maxwell assume ainda, que a resistência do meio é proporcional à velocidade do fluido. Como o movimento é uniforme e o fluido não possui massa, ele concluiu que a velocidade é proporcional ao gradiente de pressão, assim como ocorre com o fluxo de calor de Fourier que é proporcional ao gradiente de temperatura (DARRIGOL, 2000, p. 143). Considerando a fonte de fluido em um determinado ponto do fluido, a velocidade e a pressão em uma determinada distância  $r$  da fonte foram escritas por Maxwell como  $v = \frac{1}{4\pi r^2}$  e  $p = \frac{1}{4\pi r}$ .

Para se entender a introdução do conceito de estado eletrotônico na teoria de Maxwell no artigo de 1856, é importante salientar a distinção feita por Maxwell na classificação das grandezas eletromagnéticas. Maxwell fazia a distinção entre grandezas que representavam *quantidades* e outras que representavam *intensidades*<sup>14</sup>. *Quantidades* para Maxwell estavam associadas ao conceito de “fluxo” de alguma coisa. No caso magnético tinha relação com o fluxo magnético, que para Maxwell, representava o número de linhas magnéticas que passam numa determinada área transversal a estas linhas. Em notação moderna equivale ao que chamamos hoje de campo magnético e representamos pela letra  $\vec{B}$ <sup>15</sup>.

Se pensarmos numa “linha magnética” como sendo fechada, a *intensidade* magnética total, de acordo com Maxwell, era representada pela soma dos elementos longitudinais desta linha (integral de linha, em linguagem moderna). Maxwell chamou esta grandeza de *intensidade* da força magnética e as linhas a ela associadas de *linhas de força magnética*. Atualmente usamos a letra  $\vec{H}$  para esta grandeza.

Entretanto, o conceito central desta dissertação só aparece na segunda parte do artigo de 1856, intitulada “*On Faraday’s electrotonic state*”, onde Maxwell descreveu o fenômeno da indução como descoberto por Faraday e a explicação dele para esse fenômeno por meio do conceito de estado eletrotônico.

Nesta parte do artigo Maxwell definiu a quantidade de corrente elétrica como sendo o que se conhece hoje por densidade de corrente elétrica  $\vec{J}$ <sup>16</sup>, utilizando a notação  $a_2$ ,  $b_2$  e  $c_2$  para as suas componentes. As letras gregas  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  e  $\gamma_2$  denotavam a *intensidade* da força eletromotriz, que é semelhante ao conceito atual de campo elétrico,  $\vec{E}$ . Para o magnetismo,

<sup>14</sup> Esta distinção teve sua origem nos trabalhos de Fourier e Faraday (WISE, 1979, p. 1311).

<sup>15</sup> A distinção entre quantidade e fluxo neste artigo de Maxwell não é muito clara. O símbolo que usamos atualmente para fluxo magnético é  $\Phi$ , de acordo com as equações deste artigo o termo *quantidade* é refere-se ao campo magnético  $\vec{B}$ .

<sup>16</sup> Maxwell só vai utilizar a notação vetorial no *Treatise* e mesmo assim muito pouco. Nos três artigos citados ao longo deste Capítulo, Maxwell escreveu suas equações na forma de componentes cartesianas. Ao longo de todo o Capítulo o uso de componentes refere-se à notação de Maxwell e o uso de vetores à notação moderna.

Maxwell usou os símbolos  $a_1$ ,  $b_1$  e  $c_1$  para a *quantidade* de “indução magnética” ou “corrente magnética”, que de acordo com suas equações, equivale ao conceito atual de campo magnético,  $\vec{B}$ . Para a *intensidade* magnética Maxwell usou os símbolos  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  e  $\gamma_1$ , que correspondem ao que atualmente é indicado pela letra  $\vec{H}$ . A Tabela 4.1 apresenta de forma resumida essas *quantidades* e *intensidades* com os símbolos usados por Maxwell (vetores representam notação moderna e as componentes cartesianas a notação de Maxwell).

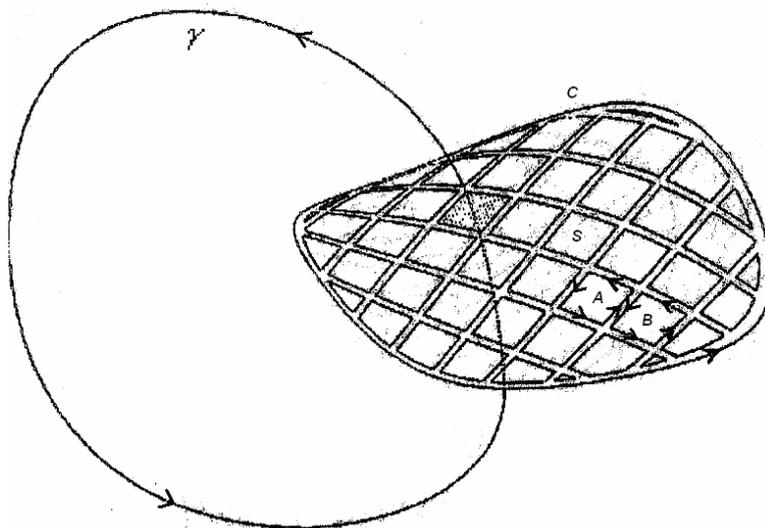
**Tabela 4.1** - Relação entre grandezas elétricas e magnéticas de acordo com o artigo de 1856.

	Intensidade	Quantidade
Eletrotônica	$\vec{A} = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$	—
Magnética	$\vec{H} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$	$\vec{B} = (a_1, b_1, c_1)$
Elétrica	$\vec{E} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$	$\vec{J} = (a_2, b_2, c_2)$

Como foi mencionado, nesta época Maxwell, já conhecia os trabalhos dos físicos continentais, principalmente os de Ampère. Mesmo não gostando da abordagem dos elementos de corrente e da abordagem de ação à distância, alguns resultados obtidos nestes trabalhos foram úteis para o desenvolvimento da teoria de Maxwell.

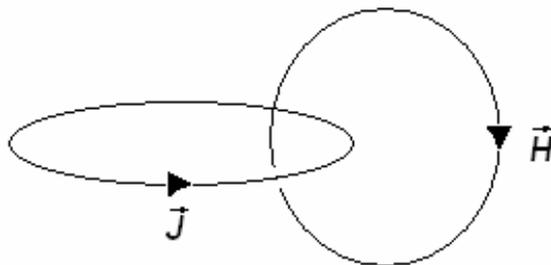
Ampère havia mostrado que se dividirmos uma superfície em áreas elementares e fizermos com que correntes fluam na borda destas áreas, todas no mesmo sentido, o efeito produzido num ponto externo à superfície será o mesmo produzido por uma casca uniformemente magnetizada (coincidente com a superfície onde flui a corrente) com magnetização normal à sua superfície. Como cada corrente formando os pequenos circuitos anulam as correntes internas, logo sobrarão somente uma corrente percorrendo a linha externa da superfície. Assim, o efeito magnético de uma casca magnetizada uniformemente é

equivalente ao efeito produzido pela corrente que flui em torno de uma superfície semelhante à casca magnetizada (Figura 4.1).



**Figura 4.1.** As correntes pertencentes a lados adjacentes, por exemplo, os quadrados *A* e *B* na figura, cancelam-se, restando apenas a corrente externa na curva *C*. O efeito magnético produzido num ponto da curva  $\gamma$ , de acordo com Ampère, é o mesmo seja a superfície *C* uniformemente magnetizada ou dotada apenas de uma corrente em sua borda (DARRIGOL, 2000, p. 142).

Maxwell concluiu a partir deste resultado que “A *intensidade* total da força magnetizadora de uma curva fechada passando através e abraçando uma corrente fechada é constante e, portanto, pode-se medir, por meio da intensidade da força magnetizadora, a *quantidade* de corrente desta curva fechada” (MAXWELL, 1965, p. 194, v. 1). Esta parte é semelhante à lei circuital de Ampère. No entanto, Maxwell a obteve partir de um raciocínio, já utilizado por Faraday, envolvendo o conceito de curvas fechadas que mutuamente se “abraçam” (Figura 4.2) (WISE, 1979, p. 1313).



**Figura 4.2.** Curvas que se abraçam. De acordo com Wise (1979) esta foi uma analogia utilizada por Maxwell na dedução da lei circuital de Ampère.

Esta analogia das curvas que se abraçam, foi importante, pois, como será visto logo abaixo, ela sugere uma reciprocidade entre *quantidades* e *intensidades*.

Maxwell calculou a quantidade de corrente elétrica que passa numa área diferencial  $dydz$  e obteve as três componentes desta corrente em função das derivadas espaciais das componentes da força magnetizadora, que em termos matemáticos equivale a:

$$a_2 = \frac{d\beta_1}{dz} - \frac{d\gamma_1}{dy}, \quad b_2 = \frac{d\gamma_1}{dx} - \frac{d\alpha_1}{dz} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{d\alpha_1}{dy} - \frac{d\beta_1}{dx}, \quad (4.1)$$

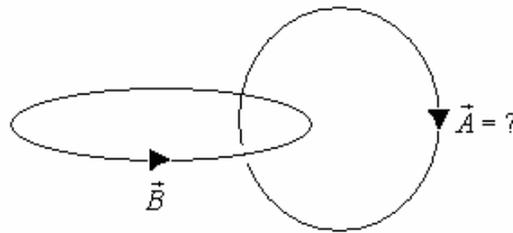
$a_2$ ,  $b_2$  e  $c_2$  são as componentes da *quantidade* de corrente elétrica e  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  e  $\gamma_1$  as componentes da *intensidade* da força magnetizadora. Esta equação escrita em notação vetorial moderna fica  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$ .

De acordo com Maxwell, a soma da *intensidade* magnética em torno de uma curva fechada é medida pela *quantidade* de corrente que passa através desta curva (MAXWELL, 1965, p. 206, v. 1). Podemos escrever esta afirmação em notação moderna como ( $C$  e  $S$  referem-se à Figura 4.1):

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} \propto \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad (4.2)$$

nesta equação  $d\vec{l}$  é o elemento de comprimento e  $d\vec{A}$  o elemento de área do circuito fechado.

De acordo com Wise (1979) a analogia representada na Figura 4.2 sugeriu a Maxwell uma reciprocidade entre as grandezas magnéticas e elétricas. Se uma *quantidade* elétrica produz uma *intensidade* magnética, seria possível uma *quantidade* magnética produzir uma *intensidade* elétrica? Ou, em linguagem moderna: já que uma quantidade de corrente elétrica  $\vec{J}$  produz uma intensidade magnética  $\vec{H}$ , seria possível que uma quantidade magnética  $\vec{B}$  produzisse uma intensidade elétrica, digamos  $\vec{A}$ ? (Figura 4.3).



**Figura 4.3.** Tentativa de Maxwell de elaborar um teorema recíproco ao teorema descrito por pela equação (4.2) das curvas que se abraçam.

Maxwell sempre procurou representar as grandezas eletromagnéticas da forma mais simétrica possível. Sendo assim, uma consequência imediata da equação (4.2) é supor a existência de um teorema recíproco, dizendo que: a *quantidade* magnética total através de qualquer superfície é medida pela *intensidade* de algo que flui em torno desta superfície.

Seria natural Maxwell supor que este “algo” fosse uma corrente de tal forma que a estrutura da equação (4.2) fosse mantida. No entanto, Maxwell sabia que esta reciprocidade não estava correta, pois a quantidade magnética depende do tamanho e da forma da superfície transversal que a envolve e não somente da corrente. Além disso, o uso “corrente em torno da superfície” não pode ser a intensidade de corrente somada em cada elemento de comprimento em torno desta superfície, pois a quantidade magnética não possui relação

direta com a intensidade da corrente ou com algum tipo de tensão em torno da superfície, e sim de sua variação (WISE, 1979, p. 1315).

Ao longo do artigo de 1856, ele descobriu uma forma de consolidar a idéia de Faraday das curvas que se abraçam em um novo tipo de raciocínio metafórico com a introdução de uma nova intensidade elétrica. Este foi o ponto crucial para o nascimento do conceito de potencial vetor na teoria de Maxwell.

A Equação (4.2) estabelece que a soma da quantidade de corrente que passa através de qualquer superfície é igual à soma da intensidade magnética em torno desta superfície ou do contorno da superfície. Ao escrever as equações (4.1), Maxwell deduz como consequência destas, a relação (MAXWELL, 1965, p. 195, v. 1):

$$\frac{da_2}{dx} + \frac{db_2}{dy} + \frac{dc_2}{dz} = 0, \quad (4.3)$$

que ele chamou de equação da continuidade para correntes fechadas. Podemos escrever esta relação em notação vetorial moderna como  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ . Assim, matematicamente falando (numa linguagem moderna), é possível escrever  $\vec{J}$  como o rotacional de um vetor, por exemplo,  $\vec{H}$ , já que a única condição matemática para isto é que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ .

Pensando em termos de *quantidades* e *intensidades*, assim como Maxwell, e com a Figura (4.3) em mente, já que a *quantidade* magnética satisfaz uma condição análoga a equação (4.3), então podemos escrevê-la como o rotacional de uma *intensidade* elétrica. Para que a simetria seja completa, é necessário supor a existência da *intensidade* de algo semelhante a uma corrente, mas sem as propriedades de uma corrente em sentido usual, e com a propriedade de produzir tensões longitudinais ao longo de suas partes devido às linhas da *quantidade* magnética.

Como foi visto no Capítulo anterior, já existia uma *intensidade*, desde Faraday, que supria todas as propriedades requeridas pela simetria das curvas que se abraçam: ela dependia

da *quantidade* magnética local, era criada e destruída de acordo com a criação e destruição desta *quantidade* magnética, era perpendicular à *quantidade* magnética e caracterizava-se por criar tensões no meio circundante, ou seja, o estado eletrotônico. Maxwell, então, associou esta *intensidade* ao estado eletrotônico de Faraday, pois a única condição matemática para que ela exista é que a *quantidade* magnética comporte-se como um fluxo contínuo e fechado, ou seja,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  (condição já sabida por Maxwell), obtendo assim, que esta *quantidade* pudesse ser expressa como o rotacional da *intensidade* eletrotônica, ou seja,  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  (WISE, 1979, p. 1315).

Desta forma, Maxwell denominou esta grandeza de *intensidade eletrotônica*, devido às suas propriedades e semelhanças com o conceito antes introduzido por Faraday para explicar a indução eletromagnética. Esta nova grandeza supria todas as necessidades necessárias para a introdução de uma relação recíproca a equação (4.2). Com isso, Maxwell foi capaz de enunciar uma lei adicional de forma precisa e conseguir a reciprocidade e simetria das curvas que se abraçam mutuamente (MAXWELL, 1965, p. 206, v. 1):

[...] A *intensidade* eletrotônica total em torno do contorno de um elemento de superfície mede a *quantidade* de indução magnética que passa através desta superfície, ou, em outras palavras, o número de linhas de força magnética que passam através desta superfície.

Esta lei pode ser expressa matematicamente, numa notação moderna, como:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \propto \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad (4.4)$$

sendo  $\vec{A}$  a *intensidade* eletrotônica, cujas componentes Maxwell escreveu como:  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  e  $\gamma_0$ . A partir da equação (4.4) é possível encontrar a relação entre *intensidade* eletrotônica e a força eletromotriz produzida pela ação de ímãs ou correntes<sup>17</sup>. Lembrando que, pela lei da indução de Faraday, podemos escrever:

<sup>17</sup> Maxwell encontrou estas relações utilizando leis oriundas do trabalho “*Conservation of Force*” de Hermann Von Helmholtz (1821 - 1894) (MAXWELL, 1965, p. 204, v. 1). Aqui é usado o mesmo método de Darrigol utilizando notação vetorial moderna (DARRIGOL, 2000, p. 146).

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad (4.5)$$

e substituindo a integral do lado direito pela integral da equação (4.4), obtém-se:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}, \quad (4.6)$$

note que as integrais são feitas sobre a mesma curva, logo pode-se obter a relação  $\vec{E} = -d\vec{A}/dt$ . Maxwell (1965, p. 204, v. 1) obteve, a menos de uma constante, as mesmas relações, que em sua notação foram:

$$\alpha_2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\alpha_0}{dt}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\beta_0}{dt} \text{ e } \gamma_2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\gamma_0}{dt}. \quad (4.7)$$

As equações (4.7) relacionam a lei da indução de Faraday com a noção de estado eletrotônico.

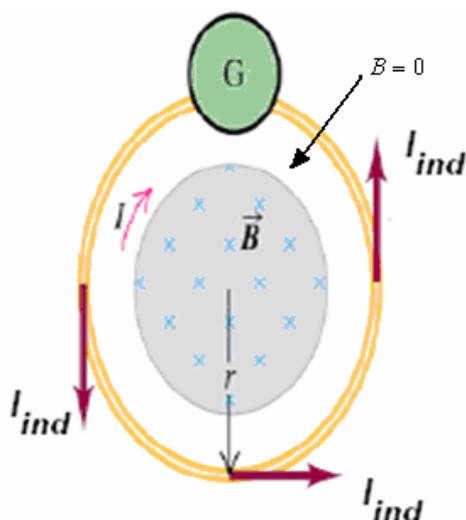
### 4.2.1 A intensidade eletrotônica e a ação à distância

Vimos acima que a idéia das curvas que mutuamente se abraçam sugeriu a Maxwell uma ilustração para interpretar a reciprocidade entre as grandezas elétricas e magnéticas. A introdução da intensidade eletrotônica completou esta reciprocidade e, como veremos abaixo, resolveu parcialmente a questão da ação à distância na indução eletromagnética.

Numa carta de Maxwell para Thomson de 1854, Maxwell expressou originalmente o efeito da indução produzido por circuitos da seguinte forma (MAXWELL apud WISE, 1979, p. 1315):

[...] A força eletromotriz ao longo de uma linha [a intensidade motora que tende a produzir uma corrente ao longo desta linha] é medida pelo número de linhas de força magnética que cortam aquela linha por unidade de tempo. Portanto, a força eletromotriz em torno de um dado circuito depende do decréscimo do número de linhas de força magnética que passam através do circuito por unidade de tempo.

Há um problema neste enunciado que foi reconhecido por Faraday bem antes de Maxwell. Como é possível uma quantidade magnética, simplesmente passando através do circuito, afetar a força eletromotriz no próprio circuito? Por exemplo, imagine um solenóide que possui uma corrente elétrica variável e que, portanto, induz uma força eletromotriz num circuito próximo, como mostrado na Figura 4.4.



**Figura 4.4.** Exemplo de ação à distância utilizando o primeiro enunciado de Maxwell da lei da indução de Faraday.

De acordo com Maxwell, a ação elétrica é mediada pelo campo. Como o campo magnético é nulo fora do solenóide (supondo um solenóide ideal) não seria possível aparecer uma corrente induzida no circuito exterior e a explicação do fenômeno, de acordo com a passagem acima, remete irremediavelmente ao conceito de ação à distância (LORENZO; DONCEL, 1996). Maxwell também reconheceu este problema e numa carta da mesma época falou a respeito do seu desconforto com o uso do conceito de linhas de força em relação a correntes fechadas (MAXWELL, 1990):

[...] Esta lei, embora simples e geral para tornar inteligível todos os fenômenos da indução em circuitos fechados, contém o conceito artificial do número de linhas de força passando através do circuito exercendo uma influência física sobre ele. Seria melhor se nós pudéssemos evitar, no enunciado desta lei, o uso deste conceito artificial.

Vale lembrar que o raciocínio utilizado por Faraday para introduzir o conceito de estado eletrotônico foi justamente para resolver problemas de ação à distância.

Além de proporcionar uma simetria entre os campos, por meio da imagem das curvas que se abraçam, as equações (4.7) resolvem ainda, de acordo com Maxwell (1965, p. 203, v. 1), o problema da ação à distância na indução eletromagnética, pois:

[...] nós obtemos agora, com as funções  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  e  $\gamma_0$  os meios de evitar a consideração da quantidade de indução magnética que *passa através* do circuito. Em vez deste método artificial nós usamos um mais natural que é considerar a corrente com referência a quantidades existindo no mesmo espaço que ela própria. A estas funções, eu dou o nome de funções eletrotônicas, ou componentes da intensidade eletrotônica.

A intenção de Maxwell é claramente encontrar por meio das equações (4.7) quantidades que determinam os efeitos da indução elétrica num ponto particular, não em termos de um circuito fechado e do comportamento das linhas de indução magnética dentro do circuito, mas usando somente funções no mesmo ponto no qual a indução é procurada.

Então, neste artigo de 1856, a primeira aparição do conceito de potencial vetor esteve relacionada ao conceito de estado eletrotônico de Faraday. Esta identificação é possibilitada por meio da passagem acima ou das equações (4.7), que são semelhantes às usadas hoje em dia para o cálculo do campo elétrico por meio da variação temporal do potencial vetor.

Dentro do programa de explicações mecânicas dos fenômenos eletromagnéticos, Maxwell esperava conceber uma interpretação mecânica para o conceito de estado eletrotônico. Porém, ele não conseguiu este objetivo no artigo de 1856. Maxwell declarou sua insatisfação em relação ao simples uso de “símbolos matemáticos” para descrever uma grandeza tão importante para ele que era o estado eletrotônico. No final da primeira parte do artigo de 1856, Maxwell deixou claro suas intenções para um projeto futuro, que veio a se conceber em 1861, “Através de um estudo cuidadoso das leis dos sólidos elásticos e do movimento dos fluidos viscosos, eu espero descobrir um método de formar uma concepção

mecânica deste estado eletrotônico adaptado a um tipo de raciocínio geral” (MAXWELL, 1965, p. 188, v. 1). Este projeto veio a se concretizar em 1861 no artigo “*On physical lines of force*”, no qual Maxwell estabeleceu um modelo mecânico para explicar a transmissão das interações eletromagnéticas no éter.

### **4.3 Momento reduzido**

Como foi visto no Capítulo 2, os físicos britânicos procuraram relacionar as grandezas eletromagnéticas à grandezas mecânicas. Geralmente isto era feito a partir de um modelo mecânico desenvolvido para explicar os fenômenos eletromagnéticos envolvidos, e com isso era feita uma associação entre as grandezas eletromagnéticas e mecânicas. Por exemplo, Thomson associou, em seu modelo de sólido elástico, o potencial elétrico à pressão num fluido. Maxwell associou a resistência de um fluido à capacidade indutiva de um dielétrico, e assim por diante. Era de se esperar que Maxwell procurasse um análogo mecânico para a sua nova intensidade eletrotônica. Este objetivo foi realizado no seu artigo “*On physical lines of force*”, publicado na *Philosophical Magazine* em 1861.

Neste artigo, Maxwell desenvolveu um modelo mecânico capaz de explicar as ações elétricas e magnéticas que ocorrem no éter eletromagnético. Maxwell não tinha dúvidas de que o magnetismo envolvia movimentos vorticais no éter. Sendo assim, ele deduziu as equações do campo eletromagnético baseado nos conceitos de “vórtices moleculares” e “idle wheels”<sup>18</sup>. Esse pensamento foi influenciado em parte pelas análises feitas por Thomson do efeito descoberto por Faraday – o efeito magneto ótico.

---

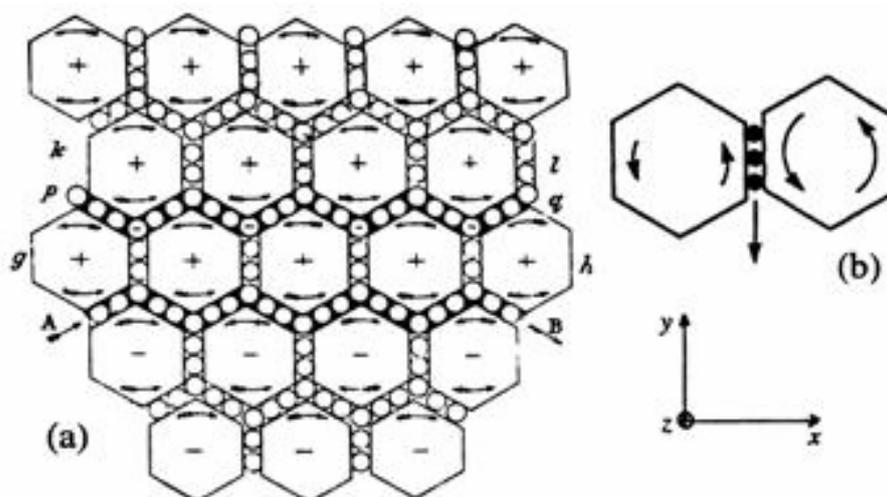
<sup>18</sup> Idle wheels ou pequena esferas tinham um sentido análogo às esferas utilizadas em rolimãs.

A analogia usada no artigo anterior das curvas que se abraçam não podia ser abandonada neste modelo de vórtices. Nesta analogia, Maxwell, assim como Faraday, visualizava as linhas de força magnética dotadas de forças laterais que se repeliam e forças longitudinais que se atraíam. Maxwell, então, supôs a existência de vórtices fluidos em torno das linhas de força magnética. A força centrífuga destes vórtices implicaria numa pressão maior na direção perpendicular às linhas de força magnética do que ao longo destas, ou seja, longitudinalmente a estas linhas. Isto é equivalente a uma pressão isotrópica – perpendicular à direção das linhas combinada com uma tensão ao longo das linhas. Assim, Maxwell recuperou o conceito de Faraday de que as linhas de força magnética se repelem lateralmente e sofrem tensões longitudinais (DARRIGOL, 2000, p. 150).

Para concretizar seu modelo, Maxwell procurou algum tipo de mecanismo capaz de transferir o movimento elétrico entre condutores no fenômeno da indução eletromagnética. Apesar de valorizar o trabalho dos continentais, era inconcebível, para ele, que esta interação entre condutores fosse por meio de ação à distância. Maxwell já tinha lido alguns livros sobre o assunto como, por exemplo, o livro de Willian John Macquorn Rankine (1820 - 1872), *Applied mechanics* de 1858. Seu conhecimento de alguns trabalhos de mecânica envolvendo máquinas, como rodas dentadas e alavancas o levaram a utilizar analogias com estes sistemas mecânicos (DARRIGOL, 2000, p. 150). O modelo que ele buscava deveria englobar o fato de que vórtices adjacentes devem girar no mesmo sentido. No entanto, se eles estão em contato e girando em torno de eixos paralelos – representados pelas linhas de força - eles girariam em sentidos opostos, como ocorre com os sistemas mecânicos. A dificuldade de resolver este problema foi elucidada na seguinte parte de seu trabalho (MAXWELL, 1965, p. 468):

[...] Eu tenho tido grande dificuldade em conceber a existência de vórtices num meio que, lado a lado, gire no mesmo sentido em torno de eixos paralelos. Pois as partes contíguas de vórtices consecutivos devem girar em sentidos opostos; é difícil entender como é possível que o movimento de uma parte do meio possa coexistir, e mesmo produzir, um movimento oposto em outra parte deste meio em contato com ele.

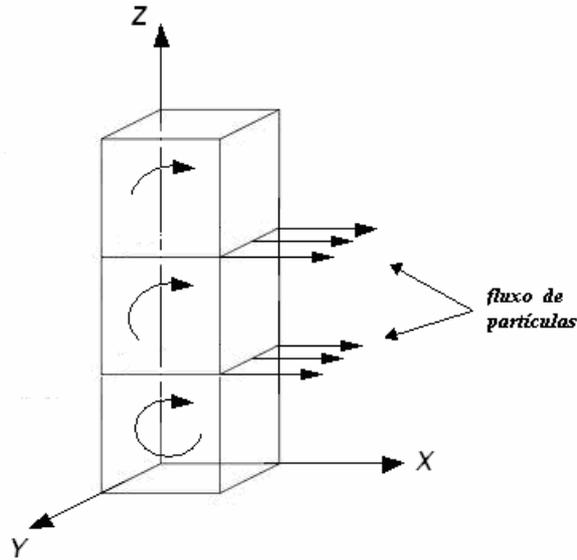
Para resolver este problema Maxwell supôs a existência de “idle wheels” – um conceito já usado em mecânica nesta época, que possibilita o movimento no mesmo sentido de rodas dentadas ou vórtices adjacentes. Ele representou o meio no qual se dava o movimento dos vórtices como tendo propriedades elétricas e magnéticas, constituído de células, um éter celular, descrito como se fosse uma colméia e os vórtices, de formato hexagonal<sup>19</sup>, girando em torno do próprio eixo (figura 4.5.(a)).



**Figura 4.5.** Modelo mecânico representado pelos vórtices e idle wheels (DARRIGOL, 2000, p. 150).

Como a velocidade angular de vórtices adjacentes é diferente, as esferas entre os vórtices adquirem, além de um movimento de rotação, um movimento translacional (fig. 4.5.(b)). Surge então um fluxo de partículas, que como será visto, Maxwell associou à corrente elétrica. Para ilustrar, supondo que os vórtices possuem formato cúbico, podemos calcular o fluxo de partículas devido aos seus movimentos (Figura 4.6).

<sup>19</sup> Os vórtices eram elásticos, logo eles poderiam ser representados sob o formato hexagonal, circular ou cúbico, por exemplo.



**Figura 4.6.** Cálculo do fluxo de partículas no modelo de vórtices.

Para encontrar o fluxo de partículas na direção  $x$ , por exemplo, calcula-se o número de partículas que atravessam uma área diferencial  $\Delta y \Delta z$  por unidade de tempo. Se  $\rho$  é o número de partículas por unidade de área então o número total de partículas na área  $\Delta y \Delta z$  no instante  $\Delta t$  é  $\rho \Delta y \Delta z$ . O fluxo de partículas que atravessa a área  $\Delta y \Delta z$ , por unidade de tempo, pode então ser escrito como  $\rho \Delta y \Delta z / \Delta t$ . Supondo – assim como Maxwell fez – que a velocidade das partículas é a metade da velocidade vortical em torno do eixo  $y$ , logo  $\Delta x / \Delta t = \Delta \beta / 2$ , sendo  $\Delta \beta$  a velocidade do vórtice em torno do eixo  $y$ . Logo o valor procurado pode ser dado por  $-\frac{\rho \Delta \beta}{2 \Delta z}$ , e o sinal negativo representa o sentido adotado por Maxwell para a rotação dos vórtices.

Somando a quantidade de fluxo referente à velocidade vortical em torno de  $z$ , e tomando o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtém-se  $p = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right)$  (TRICKER, 1966, p. 116). O uso do mesmo raciocínio para as outras componentes do fluxo, leva às três relações encontradas por

Maxwell (1965, p. 471) para as componentes da quantidade de corrente e à intensidade das linhas que giram em torno deste fluxo, baseado no modelo de vórtices moleculares:

$$p = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right), \quad q = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) \quad \text{e} \quad r = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right).$$

(4.8)

A menos das constantes, as equações (4.8), são semelhantes às (4.1), encontradas por Maxwell em 1856, que relacionam a quantidade de corrente e a intensidade da força magnetizadora. Maxwell associa então, as partículas “*idle wheels*” à quantidade de corrente elétrica no seu modelo de vórtices.

O passo seguinte de Maxwell foi realizar uma análise dinâmica na estrutura dos vórtices. A ação das esferas produz em cada vórtice um torque resultante em torno do eixo  $z$ , que pode ser escrito como  $\partial E_y / \partial x - \partial E_x / \partial y$  (figura 4.5.(b)). Neste caso,  $E_y$  e  $E_x$  são as componentes das forças que as esferas exercem nos vórtices que estão no plano  $xy$ . De acordo com Maxwell o movimento de translação das esferas em torno dos vórtices é produzido por esta força, que foi associada à força eletromotriz (MAXWELL, 1965, p. 476, v. 1).

De acordo com a dinâmica do movimento rotacional, o torque produzido por esta força deveria ser igual à derivada temporal do momento angular da célula, que estaria associado à rotação dos vórtices, sendo proporcional (em notação moderna) a  $\mu \vec{H}$ , sendo  $\mu$  a capacidade indutiva magnética e  $\vec{H}$  a intensidade da força magnetizadora. Além disso, pelo princípio da ação e reação o torque exercido pelas esferas nos vórtices deveria ser igual e oposta à derivada temporal do momento angular produzido pelos vórtices, o que leva para as relações entre força eletromotriz e força magnetizadora mostradas a seguir (MAXWELL, 1965, p. 475, v. 1):

$$\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} = \mu \frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} = \mu \frac{d\beta}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} = \mu \frac{d\gamma}{dt}. \quad (4.9)$$

Aqui Maxwell mudou a notação em relação ao artigo de 1856, *On Faraday's lines of force*. Em vez de usar  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  e  $\gamma_2$  para as componentes da força eletromotriz, Maxwell usou  $P$ ,  $Q$  e  $R$ . E em vez de  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  e  $\gamma_1$  para as componentes da intensidade da força magnética, ele usa  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . As equações (4.9) podem ser escritas em notação vetorial moderna como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (4.10)$$

Integrando ambos os lados da equação (4.10) numa superfície qualquer, utilizando o teorema integral de Stokes e a relação  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ <sup>20</sup> encontramos a relação entre *intensidade* eletrotônica e força eletromotriz:  $\vec{E} = -\frac{d\vec{A}}{dt}$ . Maxwell utiliza o mesmo processo usado aqui, porém em notação de componentes cartesianas e com mudança na notação em relação ao artigo de 1856. Para as componentes da *intensidade* eletrotônica ele usou as letras  $F$ ,  $G$  e  $H$ . Assim, podemos escrever os resultados obtidos por Maxwell (1965, p. 476, v. 1) como:

$$P = \frac{dF}{dt}, \quad Q = \frac{dG}{dt} \quad \text{e} \quad R = \frac{dH}{dt}, \quad (4.11)$$

Esta mudança de notação tanto para a força eletromotriz como para a *intensidade* eletrotônica, pode ser devida à leitura do trabalho de Thomson de 1851, *A mathematical theory of Magnetism*, que utilizou a notação  $F$ ,  $G$ ,  $H$  num contexto matemático semelhante ao apresentado aqui.

A condição  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  utilizada por Maxwell na dedução da equação (4.11) aparece tanto no artigo de Thomson de 1847 como no de 1851. No entanto, Maxwell parece ter usado

---

<sup>20</sup> Maxwell atribuiu esse teorema a Stokes contido na obra “*On the dynamical theory of diffraction*” de 1849. A relação  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$  já havia sido deduzida por Maxwell no artigo de 1856.

a relação do trabalho de Stokes de 1849. Esta condição, hoje em dia chamada de calibre de Coulomb, é usada como um artifício matemático para obter certos tipos de solução para a equação de ondas envolvendo  $\vec{A}$ , ao contrário de Maxwell que lhe atribuiu um significado físico, como será visto na seção 4.5.

O objetivo de Maxwell, enunciado no final do artigo de 1856, parece agora estar bem próximo de ser alcançado. Após a dedução das equações (4.11) Maxwell (1965, p. 476, v. 1) escreveu:

[...] Nós temos agora determinado três quantidades,  $F$ ,  $G$  e  $H$  das quais nós podemos determinar  $P$ ,  $Q$  e  $R$  por meio da consideração de como as primeiras variam em relação ao tempo. Num artigo anterior eu tenho tido razões para considerar as quantidades  $F$ ,  $G$  e  $H$  como as componentes daquilo que Faraday tinha conjecturado existir, e tinha chamado de estado eletrotônico. Naquele artigo eu deduzi as relações matemáticas entre o estado eletrotônico e as linhas de força magnética, como expresso nas Equações (55), e também as relações entre estado eletrotônico e a força eletromotriz expressas nas equações (58). Nós vamos agora nos aventurar a interpretar estas quantidades de um ponto de vista mecânico<sup>21</sup>.

Maxwell descreveu, então, o funcionamento do seu modelo de vórtices e esferas. Ou melhor, o “funcionamento” desta “máquina” de vórtices rotatórios dando uma interpretação mecânica para a indução eletromagnética e o papel representado pelas linhas de força magnética na indução. Neste modelo Maxwell descreveu o surgimento da corrente induzida e da força eletromotriz por meio da troca de tensões provocadas pelas alterações de velocidade entre as partículas e vórtices. As alterações de velocidade são provocadas por alterações na quantidade de movimento de uma partícula ou sistema.

Para entender este modelo, suponha que na Figura 4.5.(a) a linha  $AB$  represente uma corrente elétrica indo de  $A$  para  $B$ . A linha de vórtices  $gh$  acima de  $AB$  será colocada em movimento no sentido anti-horário. Supondo que a linha de vórtices  $kl$  esteja em repouso quando a corrente  $AB$  é iniciada, então a camada de partículas – esferas menores na figura representadas por  $pq$  – serão colocadas em movimento pela linha de vórtices  $gh$ . Como esta

---

<sup>21</sup> As equações (55) e (58) às quais ele se refere são – numa notação moderna:  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$  e  $\vec{E} = -\frac{d\vec{A}}{dt}$ .

camada de partículas está livre para se mover, elas girarão no sentido horário ao mesmo tempo, que transladam da direita para a esquerda, ou seja, na direção oposta da corrente que as originou formando assim uma corrente induzida. Supondo que exista uma resistência no meio as esferas menores atuarão sobre a linha de vórtices  $kl$  até que a velocidade dos vórtices seja tal que iguale a velocidade tangencial das partículas. Neste momento as partículas possuirão somente movimento de rotação pura e a corrente induzida cessa. Se a corrente inicial  $AB$  for desligada todo o processo se repete em forma inversa produzindo uma corrente induzida agora em sentido oposto à corrente induzida inicial (MAXWELL, 1965, p. 477, v. 1).

O movimento giratório adquirido pelos vórtices e as Equações (4.11) sugeriram a Maxwell outra analogia interessante. Para ele, a força eletromotriz num dado ponto é obtida pela derivada temporal das componentes da *intensidade* eletrotônica no mesmo ponto. Como, pela segunda lei de Newton, a força em determinado ponto é determinada pela derivada temporal do momento neste ponto, Maxwell associou as componentes da *intensidade* eletrotônica a algum tipo de momento localizado no meio, ao qual ele chamou de “*momento reduzido*”.

Assim, as componentes  $F$ ,  $G$  e  $H$ , corresponderiam ao “*impulso*” que agiria no eixo de uma roda de uma máquina se a velocidade com que ela gira fosse adquirida instantaneamente estando ela inicialmente em repouso (MAXWELL, 1965, p. 478, v. 1).

Comparando a equação (4.11) (em notação vetorial) com a segunda lei de Newton esta analogia permite fazer a associação de  $\vec{F}$  a  $\vec{E}$  e  $\vec{p}$  a  $\vec{A}$ , ou  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{d\vec{A}}{dt}$ <sup>22</sup>. Nas palavras de Maxwell (1965, p. 479, v. 1):

---

<sup>22</sup> Neste artigo Maxwell usou o sinal positivo na relação entre  $\vec{E}$  e  $\vec{A}$ , no trabalho de 1856 o sinal negativo. No artigo de 1856 ele deduz as equações (4.11) usando o teorema da conservação da energia de Helmholtz, aqui

[...] O impulso de uma máquina pode ser calculado em qualquer parte do mecanismo, e deve ser chamado de *momento reduzido* da máquina naquele ponto. Ao variar o movimento desta máquina, a força em qualquer parte, devida à variação deste movimento, pode ser encontrada diferenciando o momento reduzido em relação ao tempo, assim, para encontrarmos a força eletromotriz num sistema de vórtices por meio do estado eletrotônico devemos realizar o mesmo processo.

Desta forma, Maxwell encontrou um análogo mecânico para o estado eletrotônico de Faraday chamando-o de momento reduzido do sistema de vórtices, e a variação desta grandeza num determinado ponto permite calcular a força que age neste dado ponto. Esta foi a primeira interpretação mecânica dada por Maxwell ao conceito de potencial vetor. Como será visto no restante do Capítulo esta interpretação foi se transformando e adquirindo novos significados.

#### **4.4 *Momento eletromagnético***

O conceito de momento reduzido do artigo de 1861 estava atrelado ao modelo mecânico elaborado por Maxwell. O artigo de 1861, baseado no modelo de vórtices moleculares, levantou a preocupação sobre o status e validade de seu modelo. Um dos resultados do artigo de 1861, a determinação da velocidade com a qual os processos eletromagnéticos se propagam, baseava-se em propriedades do meio como, por exemplo, o formato dos vórtices ou a elasticidade do meio. Tendo em vista que Maxwell considerava este resultado um dos mais importantes de sua obra ele queria “tirar da teoria eletromagnética da luz todas as suposições desnecessárias” (MAXWELL apud DARRIGOL, 2000, p. 155).

---

baseado em seu modelo mecânico. No artigo de 1865 e em seu livro de 1873 Maxwell voltou a usar o sinal negativo.

Embora ele enfatizasse a importância heurística de introduzir conceitos como os “idle wheels” para obter uma explicação mecânica para o funcionamento dos vórtices, havia um perigo de se confundir a hipótese com a realidade. Não existe, em princípio, um limite para o número de modelos mecânicos que podem ser propostos como hipóteses.

Maxwell acreditava que seu momento reduzido era um conceito exato para explicar o fenômeno da indução eletromagnética entre correntes. No entanto, a sua interpretação baseada em vórtices e idle wheels parecia não ser muito coerente com a realidade física.

Para contornar alguns problemas deste tipo, Maxwell adotou uma nova abordagem para tratar os principais fenômenos da teoria eletromagnética, publicando em 1865 o artigo *A dynamical theory of electromagnetic field*, na *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*.

Em vez de procurar construir leis baseado nos conceitos de força e deduzir a lei da indução de correntes utilizando o teorema da conservação da energia, como nos trabalhos anteriores, Maxwell adotou um método – baseado nas leis da mecânica Lagrangeana - de obter a lei da indução e, a partir desta, deduzir as forças de repulsão e atração entre as correntes elétricas. Maxwell conseguiu assim reformular sua teoria sem a utilização de qualquer modelo mecânico específico descrevendo a interação entre correntes elétricas em termos puramente eletromagnéticos (MAXWELL, 1965, p. xxi).

Maxwell abandonou a analogia mecânica de um éter celular, tendo agora, uma teoria física do campo. A formulação de uma representação física do campo não exclui, de acordo com ele, a possibilidade da existência de um modelo mecânico para o eletromagnetismo, porém, este modelo, seja qual for estaria longe de ser alcançado pela teoria eletromagnética da época.

Maxwell assumiu que os fenômenos eletromagnéticos eram produzidos pelo movimento das partículas da matéria e que a ação elétrica era transmitida por mecanismos

capazes de uma variedade complexa de movimentos. Ao descrever essa nova abordagem, ele comentou (MAXWELL, 1965, p. 527, v. 1):

[...] A teoria que eu proponho deve, portanto, ser chamada de *Campo Eletromagnético*, porque ela tem relação com o espaço nas vizinhanças dos corpos em estado elétrico ou magnético, e ela deve ser chamada *Teoria Dinâmica*, pois ela assume que neste espaço vizinho dos corpos eletrizados e magnetizados, há matéria em movimento, pela qual os fenômenos eletromagnéticos são observados.

Ainda segundo Maxwell (1965, p. 527, v. 1), “O campo eletromagnético é aquela parte do espaço que contém e está na vizinhança dos corpos em estado elétrico ou magnético”.

Embora ele tenha abandonado qualquer tentativa de elaborar um modelo mecânico para descrever este mecanismo, ele continuou a empregar termos mecânicos para as quantidades eletromagnéticas, que eram segundo ele, “*ilustrativos*” e não “*explicativos*” (MAXWELL, 1965, p. 563, v. 1):

[...] Eu tive, numa ocasião anterior, tentado descrever um tipo particular de movimento e um tipo particular de tensão, descrito de forma a explicar os fenômenos observados. No presente artigo eu evitei qualquer hipótese deste tipo; e em usar palavras como, momento elétrico, elasticidade elétrica, em referência aos fenômenos conhecidos da indução de correntes e a polarização de dielétricos, eu pretendo simplesmente guiar a mente do leitor ao fenômeno mecânico, que o ajudará a entender o correspondente fenômeno elétrico. Todas as frases no presente artigo são para serem consideradas como ilustrativas, e não explicativas.

Perceba que nesta nova abordagem, a ação elétrica entre os corpos se dá por meio do campo, que é o repositório de energia do sistema. O complicado mecanismo ocorrido no éter para a transmissão das interações entre os corpos está sujeito às leis da dinâmica e o campo é representado dinamicamente como transformações de energia ocorridas no éter.

Enquanto que algumas quantidades eletromagnéticas, citadas acima, são meramente ilustrativas, Maxwell deixou claro que quando está falando sobre considerações de energia ele quer ser entendido literalmente, uma vez que “toda energia é a mesma energia seja ela mecânica ou eletromagnética”. Como a energia é independente da classe de fenômenos estudados, esta abordagem seria o meio mais seguro de se trabalhar com os fenômenos eletromagnéticos. Assim, “a energia dos fenômenos eletromagnéticos pode ser dividida entre

energia cinética e potencial e a transmissão das ações no meio se dá pela troca de uma em outra” (MAXWELL, 1965, p. 529, v. 1).

Supondo que o campo eletromagnético é constituído de matéria em movimento, o enfoque *dinâmico* para estudar os fenômenos eletromagnéticos não se preocupa com o *mecanismo* interno das forças, tensões e pressões ocorridas entre esta matéria, mas sim com a simples troca de energia entre as partes desta. Como será explicado na próxima seção, Maxwell aprofundou o uso desta abordagem com a utilização da mecânica lagrangeana no seu livro de 1873.

Dentro deste novo contexto, é natural que Maxwell tenha buscado novas interpretações para o *momento reduzido* introduzido num contexto totalmente mecânico para explicar a indução eletromagnética.

O conceito de momento reduzido, obtido na seção anterior, ainda é levantado em algumas partes desse artigo de 1865, mas agora, com o nome de *momento eletromagnético*. Entretanto, a mudança do enfoque mecânico para um enfoque mais dinâmico, baseado no conceito de campo eletromagnético, não alterou substancialmente a interpretação física desse conceito que, a partir de agora, é essencialmente independente de qualquer modelo mecânico e pode servir como um alicerce para a nova teoria dinâmica do campo magnético.

A mudança no nome pode ser devida à nova interpretação de Maxwell sobre a dinâmica dos fenômenos que ocorrem no campo. Maxwell ainda vê a relação entre força eletromotriz e *momento eletromagnético* como se fosse uma equação mecânica. A razão de mudança do momento eletromagnético dá o valor da força eletromotriz num ponto, assim como a razão de mudança do momento mecânico dá o valor da força mecânica num determinado ponto (BORK, 1967, p. 215).

Na terceira parte do artigo de 1865, intitulada “*General equations of the electromagnetic field*” Maxwell resumiu as relações envolvendo momento eletromagnético e

força eletromotriz. Logo no início, ele discute a respeito das componentes  $F$ ,  $G$  e  $H$ , que representam o momento eletromagnético no campo devido a quaisquer sistemas de ímãs ou correntes.

Na interpretação dada nesta seção,  $F$  é o impulso total da força eletromotriz na direção  $x$  que é gerada pela remoção de ímãs ou correntes do campo, ou seja, se  $P$  é a força eletromotriz na direção  $x$  em qualquer ponto em qualquer instante durante a remoção do sistema, então:

$$F = \int P dt . \quad (4.12)$$

Esta equação é semelhante à equação mecânica envolvendo impulso e força. Logo, a parte da força eletromotriz que depende do movimento de ímãs ou correntes no campo, ou sua alteração de intensidade é dada por  $P$ ,  $Q$  e  $R$  (MAXWELL, 1965, p. 555, v. 1):

$$P = -\frac{dF}{dt}, \quad Q = -\frac{dG}{dt} \quad \text{e} \quad R = -\frac{dH}{dt} . \quad (4.13)$$

A definição dada acima de impulso será a mesma que aparecerá no *A Treatise on electricity and magnetism*, publicado em 1873. A principal diferença entre (4.11) e (4.13) é a introdução do sinal negativo em (4.13), que não é bem esclarecido por Maxwell.

Além disso, Maxwell também calculou o momento eletromagnético de um circuito por meio da integral em torno do circuito, ou seja:

$$\int \left( F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds , \quad (4.14)$$

$ds$  é o elemento de comprimento do circuito. Na interpretação de Maxwell, esta integral indica “o número de linhas de força magnética que passa através deste circuito, cuja variação mede a força eletromotriz total no circuito”. Escrevendo as relações (4.13) em notação vetorial moderna, ou seja, escrevendo  $\vec{E} = (P, Q, R)$  e  $\vec{A} = (F, G, H)$  e integrando ambos os lados em torno de uma curva fechada  $C$ , obtemos:

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_C \vec{A} \cdot d\vec{l} . \quad (4.15)$$

Usando o teorema de Stokes que associa uma integral de linha a uma de superfície no lado direito de (4.15) e substituindo  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ , obtemos exatamente o teorema enunciado por Maxwell acima em forma matemática:

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} . \quad (4.16)$$

É interessante notar que ao mencionar que o responsável pela força eletromotriz em torno do circuito é a variação do número de linhas de força magnética Maxwell não levanta novamente o problema do artigo de 1856 relacionado à ação a distância como mostrado no exemplo do solenóide da figura 4.4. No entanto, ele deixou claro que o conceito aqui nomeado de *momento eletromagnético* é o mesmo usado por Faraday com o nome de estado eletrotônico: “Este momento eletromagnético é o mesmo conceito que o Professor Faraday colocou o nome de estado eletrotônico” (MAXWELL, 1965, p. 556, v. 1).

Nesta nova abordagem baseado no conceito de energia Maxwell calculou, então, a energia cinética de um sistema de circuitos de corrente elétrica obtendo a equação (MAXWELL, 1965, p. 562, v. 1):

$$E = \frac{1}{8\pi} \sum \left\{ F \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) + G \left( \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) + H \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) \right\} dV , \quad (4.17)$$

que, a menos das unidades, pode ser escrita numa notação vetorial moderna como:

$$E = \frac{1}{2} \int \vec{J} \cdot \vec{A} dV . \quad (4.18)$$

Esta expressão foi muito importante para Maxwell, pois ela determinava que a energia do meio era regida pelas mudanças ocorridas na corrente elétrica e no momento eletromagnético.

Como será visto no próximo Capítulo, a Equação (4.18) suscitou diversas críticas, principalmente por Heaviside, sobre quais grandezas eram responsáveis pelas transformações de energia do meio: a corrente elétrica e o momento eletromagnético ou os campos elétrico e magnético.

Percebe-se, então, que neste artigo de Maxwell o momento eletromagnético possuiu um significado físico dentro do contexto da física do século XIX, já que a determinação das equações básicas do eletromagnetismo esteve sempre relacionada a este conceito. Inclusive, também no final da terceira parte do artigo de 1865, quando Maxwell introduziu as 20 variáveis da teoria eletromagnética, o potencial vetor – lá momento eletromagnético -, é a primeira grandeza a ser descrita, como ilustrado abaixo (Figura 4.7).

For	Electromagnetic Momentum .....	F	G	H
"	Magnetic Intensity .....	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
"	Electromotive Force .....	P	Q	R
"	Current due to true conduction .....	p	q	r
"	Electric Displacement .....	f	g	h
"	Total Current (including variation of displacement) .....	p'	q'	r'
"	Quantity of free Electricity .....	e		
"	Electric Potential .....	$\psi$		

**Figura 4.7.** As 20 variáveis eletromagnéticas segundo Maxwell em seu artigo de 1865. O momento eletromagnético, representado aqui por  $F$ ,  $G$  e  $H$ , é uma das principais grandezas eletromagnéticas.

A apreciação do conceito de potencial vetor em sua próxima obra, o “*Treatise on electricity and magnetism*”, ocupará o mesmo status como nas obras anteriores, mas agora, além da interpretação de momento eletromagnético ele vai adquirir o status de um “potencial”. Esta nova mudança de nome, como será mostrado, deu-se principalmente devido a leitura, por Maxwell, dos trabalhos de Peter Guthrie Tait (1831 - 1901) sobre os quatérnions.

## 4.5 Os quatérnions e o nome “potencial vetor”

Do ponto de vista matemático, os artigos de 1856 à 1865 tinham um aspecto comum: todas as equações eram expressas em forma de componentes, Maxwell não usava ainda a notação vetorial. O que começou a mudar por volta de 1867, com a publicação do *Elementary treatise on quaternions* de Peter Guthrie Tait (1831 - 1901)<sup>23</sup>.

Neste mesmo ano, Maxwell começou a trabalhar num livro que reunia praticamente todo o conhecimento da teoria eletromagnética da época. Além de apresentar suas próprias idéias sobre a teoria eletromagnética, amplamente influenciada pelas de Faraday, Maxwell sentiu-se na necessidade de escrever um livro que pudesse ser usado nas universidades, principalmente na Universidade de Cambridge, como um guia para alunos e professores na aprendizagem e ensino da teoria eletromagnética. Nesta época, existiam poucos livros com tal propósito. Alguns eram meras descrições de experimentos, com suposições demasiadamente empíricas, outros exageradamente matemáticos sem relação alguma com a parte experimental envolvendo os fenômenos eletromagnéticos. Sendo assim, Maxwell publicou em 1873 o livro *A Treatise on electricity and magnetism*, entre outros motivos, para sanar a escassa literatura existente na época sobre a teoria eletromagnética.

Para se entender a nova mudança de nome de momento eletromagnético do artigo de 1865 para potencial vetor agora em 1873, bem como o porquê do nome “potencial” será apresentado abaixo um breve resumo sobre os principais aspectos da álgebra quaterniônica.

A álgebra dos quatérnions foi inventada em 1843, por Willian Rowan Hamilton (1805 - 1865), mas as suas aplicações físicas foram desenvolvidas principalmente por Tait a partir

---

<sup>23</sup> Para saber mais sobre o desenvolvimento do formalismo vetorial usado atualmente e sobre os formalismos usados por Maxwell veja Capítulo 3 de SILVA 2002.

de 1860. Tait dedicou trinta e seis anos de sua vida à divulgação e desenvolvimento da análise dos quatérnions. Entre 1865 e 1901 escreveu oito livros sobre o assunto, desenvolvendo novos teoremas e aplicações físicas para a teoria. Foi através de Tait que Maxwell se interessou pelos quatérnions como pode ser visto por meio de suas correspondências (SILVA, 2002, p. 71).

Os quatérnions são formados por quatro números: um escalar e três componentes de um vetor, que formam uma álgebra não comutativa. Podemos representá-los simbolicamente por  $q = a + ix + jy + kz$ , em que  $a$  representa a parte escalar do quatérnion e  $x$ ,  $y$  e  $z$  as componentes da parte vetorial e  $i$ ,  $j$  e  $k$  vetores unitários. A teoria dos quatérnions contém as leis da álgebra vetorial, incluindo as operações usuais de soma de vetores, os produtos escalares e vetoriais, o operador  $\nabla$ , os teoremas de Gauss e Stokes na forma vetorial e funções lineares vetoriais. As semelhanças entre quatérnions e vetores são grandes, mas existem algumas diferenças importantes. Por exemplo, para os quatérnions, se  $i$ ,  $j$  e  $k$  representam vetores unitários da parte vetorial de um quatérnion, então valem as seguintes propriedades:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j \quad \text{e} \quad ij = -ji = k. \quad (4.19)$$

Diferente das mesmas operações vetoriais usadas atualmente, onde  $i^2 = j^2 = k^2 = 1$  em vez de  $-1$ . A aplicação do operador  $\nabla$  a um quatérnion também é diferente da operação atual para vetores, pois ela retorna uma parte escalar mais uma parte vetorial. A multiplicação do operador  $\nabla$  por um quatérnion é realizada usando as propriedades usuais de distribuição respeitando as propriedades (4.19). Por exemplo, se escrevermos  $q = a + iF + jG + kH$ , então a operação  $\nabla q$  resulta em:

$$\nabla q = \left( i \frac{da}{dx} + j \frac{da}{dy} + k \frac{da}{dz} \right) - \left( \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \right) + \left( \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) i + \left( \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) j + \left( \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) k \quad (4.20)$$

Ou seja, a aplicação do operador nabla sobre um quatérnion produz um outro quatérnion, possuindo uma parte escalar e outra vetorial.

A álgebra vetorial que usamos atualmente foi desenvolvida por Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903) e Oliver Heaviside (1850 - 1925) na última década do século XIX. Segundo estes autores o método dos quatérnions era demasiado complicado e baseava-se em algumas hipóteses contraditórias e obscuras, entre elas, o fato de os quatérnions não formarem uma álgebra não comutativa (SILVA, 2002, p. 62).

Maxwell entrou em contato com a teoria dos quatérnions por meio de Tait, com a leitura do livro *Elementary treatise on quatérnions* de 1867. Entretanto, Maxwell não aplicou completamente o método em seu novo trabalho de 1873, por ainda ter algumas ressalvas quanto ao seu uso. Aliás, isso é mostrado claramente em uma resposta de Maxwell a uma carta de Tait, na qual ele diz que não iria usar os quatérnions diretamente em sua obra, apenas suas idéias, por achar que nem ele e nem o público estariam suficientemente maduros para isso (SILVA, 2002, p. 77).

Em uma carta escrita em 23 de janeiro de 1871 para Tait, Maxwell usou pela primeira vez o termo “*potencial vetor*”. Um trecho específico da carta fala sobre a introdução do conceito (MAXWELL apud BORK, 1967, p. 216):

[...] Nós sabemos que a equação  $\nabla^2 E = x$  com a condição  $E = 0$  quando  $x \rightarrow \infty$  possui a solução  $E = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{x}{r} d(\text{volume})$  integrada sobre todo o espaço. Isto é verdade seja  $x$  um escalar ou um vetor e  $E$  um escalar ou um vetor respectivamente. Portanto, se ele é uma função vetorial podemos expressar  $\sigma$  como  $\sigma = \nabla T$  e encontrar  $T$  da equação  $\nabla^2 T = \nabla \sigma$ . Como  $\nabla \sigma$  é parte escalar ( $=m$ ) e parte vetor ( $=\alpha$ ) então, se  $P$  é o potencial de  $m$  e  $L M N$  os constituintes do potencial vetor de  $\alpha$  então  $T$  é expresso por uma equação da forma  $T = P + iL + jM + kN$ .

No *Treatise on electricity and magnetism* de 1873 Maxwell desenvolveu melhor o significado deste conceito. As idéias apresentadas no *Treatise* são semelhantes às do artigo *A dynamical theory of electromagnetic field* de 1865. Maxwell faz a representação das

quantidades eletromagnéticas por meio de símbolos destituídos de um modelo mecânico explícito usando métodos matemáticos e abordagens físicas influenciadas pelos trabalhos de Thomson e Tait.

O *Treatise* é dividido em Capítulos, como qualquer outro livro, porém a introdução dos tópicos nos Capítulos é feita por artigos. O artigo 405, intitulado “*The vector potential of magnetic induction*”, é a primeira menção explícita do conceito no livro. Neste artigo, Maxwell diz que é possível calcular a indução magnética através de uma curva fechada por um processo dependendo somente da natureza da curva e não envolvendo processos que dependam da construção de uma superfície formada sobre esta curva. Ele infere que isto é possível desde que encontremos um vetor  $U^{24}$  relacionado à indução magnética  $B$ , de tal forma que a integral de linha de  $U$ , ao longo da curva fechada, seja igual à integral de superfície de  $B$  sobre toda a superfície fechada ligada à curva anterior (MAXWELL, 1954, p. 29, v. 2). A relação encontrada por Maxwell para as componentes de  $U$ , que ele chamou de  $F$ ,  $G$  e  $H$ , e as componentes de  $B$ ,  $a$ ,  $b$  e  $c$ , são:

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \quad b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \quad \text{e} \quad c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}. \quad (4.21)$$

Maxwell concluiu: “O vetor  $U$ , cujas componentes são  $F$ ,  $G$  e  $H$ , é chamado de *potencial vetor da indução magnética*”. Ele não faz referências aos trabalhos anteriores ou nomes anteriores. No mesmo artigo, Maxwell calculou o potencial vetor de um dipolo magnético e generalizou a fórmula para o caso de um ímã qualquer. Apesar de Maxwell não esclarecer explicitamente a mudança de nome, a introdução das operações quaterniônicas, dá uma pista para esta mudança.

É importante ressaltar que a palavra *potencial* era usada nesta época somente na forma de potencial escalar, ou energia potencial. No livro *Treatise on Natural Philosophy* de

---

<sup>24</sup> Maxwell utilizou letras góticas alemãs, usarei ao longo do Capítulo as mesmas letras que Maxwell, porém na mesma fonte do texto desta dissertação.

Thomson e Tait de 1867, o conceito é atribuído a Laplace num contexto gravitacional e o nome à Green num trabalho de 1828<sup>25</sup>. Thomson sempre deixou claro a “imensa importância do conceito de potencial”, mesmo sem mencionar qualquer forma vetorial de potencial. Um ponto interessante, porém, é que foi Thomson quem introduziu matematicamente o conceito de potencial vetor no trabalho de 1847 *On a mechanical representation of electric, magnetic, and galvanic forces*.

O uso de potenciais era comum no século XIX na gravitação, mecânica dos fluidos e teoria eletromagnética. Na gravitação, por exemplo, a atração em qualquer ponto devida a uma dada distribuição de massa podia ser expressa como a força que agiria numa massa pontual posta em qualquer ponto sob a influência desta distribuição de massa. De acordo com a teoria dos potenciais, esta força pode ser expressa em termos do potencial gravitacional  $V$ , que obedece a equação de Laplace ou Poisson dependendo de a massa pontual estar no espaço vazio, ou em pontos onde há uma densidade de massa qualquer. Assim, tanto a força de atração quanto o potencial, são funções do campo e a relação entre ambos é  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ .

Maxwell usou este significado de potencial explicitamente no *Treatise*, como por exemplo, no artigo 406 que fala da possibilidade de calcular a *intensidade* da força magnética por meio de seu potencial escalar magnético utilizando a relação  $H = -\nabla V$ <sup>26</sup>. Mas, como  $V$  é um quatérnion, ele pode possuir uma parte escalar e uma vetorial (neste caso ele possui apenas a parte escalar). É bom salientar que esta equação não é lida como “ $H$  é o gradiente  $V$ ”, mas sim como “ $H$  é o produto do operador quaterniônico de Hamilton,  $\nabla$ , por um quatérnion  $V$ ”, onde, nesta afirmação, estão incluídas todas as propriedades quaterniônicas envolvidas.

---

<sup>25</sup> GREEN, G. *Mathematical Papers of the Late George Green*. Editado por Ferrers, N. M. Cambridge: Cambridge University Press, 1871. p. 1-83.

<sup>26</sup> É bom lembrar que isto só é possível se tivermos regiões livres de correntes, ou seja, em que o rotacional de  $H$  seja nulo. Mesmo nestes casos não é possível sempre determinar um potencial escalar magnético que seja único (GRIFFITHS, 1999, p. 239).

Mas se, por exemplo,  $U$  for um vetor puro, ou seja, um quatérnion com a parte escalar nula, com componentes vetoriais  $F$ ,  $G$  e  $H$ ? Neste caso, fazendo o produto quaterniônico do operador  $\nabla$  pelo quatérnion  $U$ , e usando as propriedades (4.19) e o resultado de (4.20), obtemos:

$$B = -\left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}\right) + \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)i + \left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right)j + \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right)k, \quad (4.22)$$

$B$  é o quatérnion indução magnética e  $i, j, k$  vetores unitários.

A parte escalar do quatérnion  $B$  em (4.22) é nula ou, usando uma linguagem atual, devido à condição  $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$ , condição usada tanto no *Treatise*, quanto no artigo de 1861. Então o que sobra é a parte vetorial de (4.22) que, nesse caso, nada mais é do que, em linguagem moderna,  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{U}$ . Assim, ao usar o operador  $\nabla$  para obter a indução magnética a partir do quatérnion  $U$ , que é a operação usual nesta época para encontrar a força por meio de um potencial qualquer, Maxwell deduziu que a indução magnética  $B$  pode ser escrita como o rotacional de seu potencial *vetor*, como fica claro nesta passagem (MAXWELL, 1954, p. 31-32, v. 2):

[...] Nós vimos que a força magnética  $H$  pode ser encontrada de seu potencial escalar magnético  $V$  pela aplicação do operador de Hamilton  $\nabla$ , tal que nós podemos escrever  $H = -\nabla V$ , esta equação é verdadeira, tanto dentro quanto fora de ímãs. Da presente investigação parece que a indução magnética  $B$  pode ser calculada por meio de seu potencial vetor  $U$  pela aplicação do mesmo operador, e o resultado é verdadeiro tanto dentro quanto fora dos ímãs. A aplicação deste operador a uma função vetorial produz, em geral, uma quantidade escalar e uma vetorial. A parte escalar, no entanto, que nós temos chamados de convergência da função vetorial, neste caso satisfaz a condição solenoidal

$$\frac{dF}{d\xi} + \frac{dG}{d\eta} + \frac{dH}{d\zeta} = 0.$$

Nós podemos, portanto, escrever a relação entre a indução magnética e seu potencial vetor como  $B = \nabla U$ , que pode ser expressa em palavras, dizendo que a indução magnética é o *rotacional* de seu potencial vetor.

Desta passagem vê-se que o novo nome deriva indiretamente da utilização da notação quaterniônica. Em geral, na álgebra quaterniônica,  $B = \nabla U$  e  $B = \nabla \times U$  não são iguais. Esta igualdade depende da condição auxiliar que estabelecemos para  $U$ .

O artigo 540 do *Treatise* mostra claramente sua concepção sobre o status do conceito de estado eletrotônico em sua teoria (MAXWELL, 1954, p. 187, v. 2):

[...] A concepção de tal quantidade, cuja mudança, e não sua magnitude absoluta, a indução de correntes depende, ocorreu a Faraday num estágio inicial de seu *Researches* (§ 60). Ele observou que o circuito secundário, quando em repouso num campo eletromagnético que permanece com intensidade constante, não mostra nenhum efeito elétrico, ao passo que, se o mesmo estado do campo for repentinamente produzido, surgirá uma corrente. Da mesma forma que, se o circuito primário é removido do campo, ou a força magnética abolida, surgirá uma corrente em sentido oposto. Faraday, portanto, reconheceu no circuito secundário, quando dentro do campo magnético, uma ‘condição peculiar da matéria’, a qual ele deu o nome de Estado Eletrotônico. Ele encontrou posteriormente que podia dispensar esta idéia por considerações fundamentadas nas linhas de força magnética (§ 242), mas em suas pesquisas posteriores (§ 3269), ele diz, “De novo e de novo a idéia de um estado eletrotônico tem feito parte de meus pensamentos”.

A história inteira desta idéia na mente de Faraday, como mostrada em seu *Researches*, é um estudo notável. Por meio de experimentos, guiados pela intensa aplicação do pensamento, mas sem a ajuda de cálculos matemáticos, ele foi levado a reconhecer a existência de alguma coisa, que nós sabemos ser uma quantidade matemática, e que deve ter o status de uma quantidade fundamental da teoria eletromagnética. Mas como ele foi levado a este conceito por um caminho puramente experimental, ele atribuiu a esta grandeza uma existência física, e a supôs como uma peculiar condição da matéria, embora ele estivesse preparado a abandonar a teoria tão logo pudesse explicar os fenômenos por alguma forma mais familiar de pensamento.

Esta passagem é interessante para se entender o significado atribuído por Maxwell ao potencial vetor por dois motivos. Primeiro, ele deixou claro a importância do conceito de estado eletrotônico que posteriormente se tornaria o potencial vetor em sua teoria. Segundo, Maxwell usou uma distinção entre uma grandeza matemática e uma física, que no futuro serviria de argumento de ataque para os inimigos do conceito de potencial vetor. Não ficou claro o que Maxwell quis dizer com esta dicotomia, mas era visível no contexto, que usar a expressão “quantidade matemática” para o conceito de potencial vetor não era uma crítica ao uso de potenciais, já que ele não descarta a possibilidade de que o potencial vetor também tenha um significado físico (BORK, 1967, p. 220; ROCHE, 1990, p. 157).

Uma nova mudança de nome para o potencial vetor apareceu no artigo 590, que agora é chamado de *momento eletrocinético*, semelhante à definição usada no artigo de 1865. Depois de calcular o *momento eletrocinético* de um circuito secundário integrando o potencial vetor, Maxwell (1954, p. 232, v. 2) expressou o significado de  $U$  neste contexto:

[...] O vetor  $U$  representa em direção e magnitude a integral temporal da força eletromotriz que uma partícula no ponto  $x, y$  e  $z$  sentiria se a corrente primária fosse repentinamente desligada. Nós podemos, portanto, chamá-lo de *Momento Eletrocinético* no ponto  $x, y$  e  $z$ . Ele é idêntico à quantidade que nós investigamos no artigo 405 sob o nome de potencial vetor da indução magnética.

Como será visto no Capítulo seis, esta definição para o potencial vetor (momento eletrocinético) é um forte argumento usado por alguns físicos do século XX em favor de um significado físico para o potencial vetor.

Outro uso do potencial vetor foi no artigo 617, onde Maxwell calculou o potencial vetor de uma distribuição de correntes em analogia ao potencial escalar de uma distribuição de cargas. Para entender melhor esse cálculo é preciso lembrar que, em eletrostática, a equação de Poisson para uma distribuição de cargas é dada por  $\nabla^2\phi = -4\pi\rho(\vec{r})$ , sendo  $\phi$  o potencial elétrico e  $\rho(\vec{r})$  a densidade de cargas. Da mesma forma, usando a condição solenoidal para o potencial vetor, é possível escrever uma equação análoga para o caso de uma distribuição de correntes  $\nabla^2U = -4\pi\mu C$  (notação de Maxwell), em que  $U$  é o *potencial vetor da corrente elétrica*,  $\mu$  a capacidade indutiva magnética e  $C$  a quantidade de corrente elétrica total (hoje densidade de corrente  $\vec{J}$ ).

Maxwell escreveu a solução desta equação na notação dos quatérnions como:

$$U = \mu \iiint \frac{C}{r} dx dy dz . \quad (4.23)$$

A Equação (4.23) é ligeiramente diferente da mesma equação usada atualmente com o mesmo propósito. Maxwell utilizou a corrente total  $C$ , ou seja, a soma da corrente de condução mais a corrente de deslocamento, pois segundo ele, tanto a corrente de condução quanto a de deslocamento contribuem para o campo magnético e para o potencial vetor. No entanto, George Francis Fitzgerald (1851 - 1901) mostrou em 1882 (FITZGERALD apud

ROCHE, 1990, p. 154) que a corrente de deslocamento não contribui para a intensidade do campo magnético nem para o potencial vetor<sup>27</sup>.

Outro problema da Equação (4.23) é que ela só é válida para a condição  $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$ . Apesar de ter conhecimento do trabalho dos continentais, em especial os de Lorenz, que já havia encontrado outra condição válida para o potencial vetor, Maxwell insiste em usar, ao longo de toda sua obra, a condição  $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$ .

Como salienta Roche (1990, p. 154), para Maxwell, a escolha  $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$  era um tipo de conveniência matemática aliada ao fato de que para ele a não escolha deste calibre daria origem a “soluções não transversais do campo e, portanto, originaria ondas eletromagnéticas sem existência física” (MAXWELL, 1965, p. 580-2, v. 1).

Neste contexto, um novo nome é dado ao potencial vetor. Agora, torna-se o *potencial vetor da corrente elétrica*, nome justificado devido as analogias entre o potencial escalar e o potencial vetor para o caso de uma distribuição de correntes. Isto é expresso no artigo 617 (MAXWELL, 1954, p. 256, v. 2):

[...] Nós devemos, portanto, adotar como definição de  $U$  que ele é o potencial vetor da corrente elétrica tendo a mesma relação com a corrente elétrica que o potencial escalar tem com a matéria com a qual ele é um potencial, e obtido por um processo similar de integração.

Nesta passagem é possível identificar que Maxwell interpretou o potencial vetor analogamente ao potencial escalar para a distribuição de cargas e o método de calculá-lo é o mesmo. Este método matemático de calcular o potencial vetor por meio da distribuição de corrente é usado até hoje nos livros de eletromagnetismo, porém como já citado acima, a corrente usada para o cálculo do potencial vetor é apenas a corrente de condução.

Ao agrupar as principais quantidades do eletromagnetismo, num Capítulo sobre unidades, Maxwell escreveu as unidades do potencial vetor como  $[LM/eT]$ , sendo  $L$

<sup>27</sup> FITZGERALD, G. F. A note on Mr J J Thomson's investigation of the electromagnetic action of a moving sphere. *Philosophical Magazine*, v. 13, p. 302- 305, 1882.

comprimento,  $M$  a massa,  $e$  a quantidade de eletricidade e  $T$  o tempo. Ou seja, o potencial vetor possuía unidade de momento por unidade de carga, que como será mostrado no Capítulo seis, é um dos argumentos utilizados por alguns autores para interpretá-lo como o momento eletromagnético em alguns casos.

Em suma, foi mostrado neste Capítulo que Maxwell atribuiu uma importância especial ao conceito de potencial vetor, pois ele faz parte das principais equações, e é uma das três grandezas mais importantes do eletromagnetismo juntamente com a indução magnética e a força eletromotriz (campo elétrico). Em nenhuma parte da obra, pelo que foi pesquisado, Maxwell utilizou o potencial vetor como um simples artifício de cálculo, como é usado atualmente por alguns autores, ver Tabela 6.1. Como foi visto, ele estava totalmente de acordo com o contexto da física vitoriana e sempre buscou atribuir significados mecânicos às grandezas eletromagnéticas.

As mudanças na interpretação do conceito de potencial vetor a partir do construído por Maxwell até o aceito atualmente não foi simples e nem descontínua. Para se entender como se deu este processo, é importante conhecer as principais contribuições de Oliver Heaviside (1850 - 1925) e Heinrich Rudolf Hertz (1857 - 1894) para a teoria de Maxwell, como será apresentado no próximo Capítulo.

## 5 Os maxwellianos<sup>28</sup> e as novas abordagens para o potencial vetor

### 5.1 Introdução

No final do século XIX alguns físicos, entre eles Oliver Heaviside (1850 - 1925) e Heinrich Rudolf Hertz (1857 - 1894), passaram a questionar fortemente o status de grandeza fundamental atribuída por Maxwell ao potencial vetor. Eles se dedicaram a construir uma teoria eletromagnética enfatizando os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  e eliminando os potenciais das equações principais do eletromagnetismo. Antes deles, no entanto, alguns trabalhos importantes foram publicados utilizando abordagens que minimizaram a importância do potencial vetor. Estes trabalhos foram publicados num contexto em que um dos principais problemas era identificar a localização e o comportamento da energia nas ondas eletromagnéticas transmitidas e recebidas.

George Francis Fitzgerald (1851 - 1901), por exemplo, no artigo *On the Electromagnetic Theory of the Reflection and Refraction of Light* enviado à *Royal Society* em 1878, desenvolveu um método de descrever a reflexão e refração entre dois meios não condutores baseando-se na teoria eletromagnética de Maxwell e na teoria de éter de James MacCullagh (1809 - 1847). MacCullagh havia realizado um importante trabalho em 1839, quando mostrou que os fenômenos da reflexão, refração e polarização, poderiam ser deduzidos partindo de uma forma particular da função Lagrangeana do éter<sup>29</sup>.

Outro trabalho que minimizou a relevância do potencial vetor no final do século XIX foi apresentado à *Royal Society* por John Henry Poynting (1852 - 1914) em 1883 e publicado

---

<sup>28</sup> Após a publicação do *Treatise on electricity and magnetism* em 1873 e alguns trabalhos anteriores por Maxwell, um grupo formado principalmente por físicos ingleses, entre eles Fitzgerald, Lodge, Heaviside e Hertz desenvolveram e modificaram algumas das idéias de Maxwell. Este grupo foi chamado por Heaviside de “Maxwellianos”.

<sup>29</sup> Para mais detalhes sobre este trabalho e a teoria de McCullagh veja HUNT, 1991, cap. 4.

em 1884 na *Philosophical Transactions* sob o título *On the transfer of energy in the electromagnetic field*.

Em 1880, Poynting foi nomeado professor de física em Birmingham, onde começou um profundo estudo da teoria de Maxwell, em particular sobre a questão de como a energia era distribuída no campo eletromagnético. Poynting sabia que se levamos a conservação da energia a sério e a aplicarmos não apenas globalmente, mas em cada região do espaço contendo um campo eletromagnético e a cada momento no tempo, a lei da conservação da energia implicaria na continuidade da energia e conseqüentemente a possibilidade de traçar o “caminho” seguido pela energia em cada ponto do campo. Como o campo eletromagnético podia armazenar energia e transportá-la de um ponto a outro no espaço?

Poynting começou a estudar este problema pelas equações de Maxwell para as densidades de energia elétrica e magnética, que, numa notação moderna, podem ser escritas como  $\frac{1}{2}\epsilon\vec{E}^2$  e  $\frac{1}{2}\mu\vec{H}^2$ . Ele calculou como estas grandezas se alteram dentro de um volume específico e descobriu que a taxa na qual a energia entra em uma determinada região, sendo armazenada nesta região ou dissipada como calor, depende exclusivamente dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ . O vetor que localiza e direciona o fluxo desta energia, hoje conhecido como vetor de Poynting, é dado em notação moderna, por  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  (POYNTING, 1884). Este trabalho foi importante, pois relacionou o fluxo das ondas eletromagnéticas apenas aos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ .

Ao estudar este artigo, Fitzgerald percebeu sua importância e discutiu a questão da propagação das ondas eletromagnéticas usando um modelo mecânico próprio para o éter. Neste modelo a força magnética era representada por rotações locais semelhante ao modelo de vórtices de Maxwell e a força elétrica, ou *tensão dielétrica*, era representada por um mecanismo elástico que conectava os vórtices (DARRIGOL, 2000, p. 185). Fitzgerald notou que as equações do *Treatise* de Maxwell implicavam na propagação instantânea do potencial

escalar  $\varphi$ . Isso acontece devido à condição escolhida por Maxwell para o divergente do potencial vetor, que era  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ <sup>30</sup>.

Em seu modelo mecânico, Fitzgerald concluiu que não poderia haver nenhuma grandeza no eletromagnetismo que se propagasse instantaneamente. Ao invés de usar  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , ele usou  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -d\varphi/dt$ , que já era usado pelos continentais chegando a uma equação de onda para o potencial escalar (HUNT, 1991, p. 118):

$$\nabla^2 \varphi - \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0. \quad (5.1)$$

Com esta condição, Fitzgerald resolveu o problema relacionado à propagação instantânea de  $\varphi$ , e como será visto mais abaixo a discussão sobre a propagação de  $\varphi$  foi levantada novamente em 1888, culminando em um ataque à propagação do próprio potencial vetor.

É interessante notar que mesmo dando ênfase à utilização dos potenciais para alguns propósitos, Fitzgerald tinha em mente que os potenciais seriam “coadjuvantes” para encontrar as verdadeiras grandezas dotadas de interesse físico e por possuírem relevância experimental e observacional: os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ . Para Fitzgerald os potenciais são “malabarismos de cálculo” que, às vezes, obscurecem a realidade física de como a energia é localizada e propagada num campo eletromagnético (FITZGERALD apud HUNT, 1991, p. 118).

Como será visto abaixo Heaviside já estava trabalhando neste mesmo sentido ao rebaixar o status do potencial vetor de “grandeza fundamental” na teoria de Maxwell para “parasita” e “metafísico” dentro de sua teoria.

---

<sup>30</sup> Na realidade esta questão não é tão simples assim, envolvendo, entre outras coisas, questões de causalidade. Para mais detalhes veja BRILL, GOODMAN, 1967.

## 5.2 Heaviside e a eliminação do potencial vetor

Foi a partir dos trabalhos de Heaviside que as críticas ao conceito de potencial vetor se tornaram sistemáticas, culminando na interpretação atual de que ele não possui significado físico na teoria eletromagnética clássica, servindo apenas para o auxílio matemático de cálculo do campo eletromagnético.

Para se entender o papel desempenhado por Heaviside para esta visão, é fundamental conhecermos alguns aspectos biográficos que falam muito a respeito de sua maneira de encarar a física e a matemática de seu tempo. O contexto da época com a intensa busca por melhorias no sistema de comunicação telegráfica também direcionou as pesquisas de Heaviside. Ele começou a trabalhar como telegrafista em 1868, primeiro como operador e posteriormente como “eletricista”, realizando trabalhos tanto na área teórica quanto prática. Ele trabalhou em telegrafia grande parte de sua vida, sem ter tido uma formação científica propriamente dita e raramente freqüentava os círculos acadêmicos e universitários da época. O trabalho como telegrafista foi para ele o único laboratório tecnológico que freqüentava. Nesta época, as salas onde trabalhavam os telegrafistas eram como laboratórios científicos, onde se fazia pesquisa científica na área da eletricidade no próprio local de trabalho. Frequentemente surgiam problemas de ordem prática, envolvendo a instalação de cabos oceânicos ou problemas de transmissão de dados, que exigiam do telegrafista criatividade e habilidades matemáticas (HUNT, 1991, p. 123).

Heaviside era um homem prático e o seu principal objetivo ao estudar profundamente a teoria de Maxwell, em particular o seu *Treatise on Electricity on Magnetism* de 1873, era descobrir um modo de melhorar os sinais elétricos em cabos submarinos e outros problemas de sua época (HUNT, 1991, p. 49). Heaviside era um matemático, num determinado

momento e um físico em outro, mas a todo tempo, um telegrafista (SUMPNER, 1932, p. 837).

O estudo minucioso do *Treatise* fez com que Heaviside se tornasse um especialista em teoria eletromagnética. Ao longo das décadas de 80 e 90 do século XIX, publicou uma dezena de artigos sobre a transmissão de dados em cabos telegráficos num pequeno jornal semanal de Londres chamado “*The Electrician*”. O *The Electrician* era um jornal comercial cujos artigos eram de caráter técnico e de negócios, mas devido à crescente necessidade de novas descobertas na área elétrica, em fins do século XIX, eram publicados diversos artigos na área científica, em especial teoria eletromagnética.

Assim como Fitzgerald, Heaviside desejava descobrir como localizar e descrever a distribuição de energia no campo eletromagnético. Para isso, ele considerou em sua teoria que as únicas grandezas de interesse físico eram os campos, e não os potenciais como pensava Maxwell. Segundo ele, os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  têm primazia, pois “representam a propagação do estado físico de uma onda eletromagnética através do espaço, enquanto que os potenciais não são físicos, mas, metafísicos” (HEAVISIDE, 1970, p. 483, v. 2).

Como foi visto no Capítulo quatro, para Maxwell o potencial vetor desempenhava um papel muito importante na teoria eletromagnética, pois explicava como as forças elétrica e magnética se propagavam no éter. Heaviside rejeitava amplamente essa visão. Ao longo de seu trabalho encontram-se várias partes aludindo a esta idéia, por exemplo, no artigo “*The general solutions of Maxwell’s electromagnetic equations in a homogeneous isotropic medium, especially in regard to the derivation of special solutions, and the formulae for plane waves*”, publicado em 1889 na *Philosophical Magazine*: “o potencial vetor  $\vec{A}$  e seu parasita escalar  $\psi$ , causa, às vezes, complexidades e confusões; logo, por razões práticas, é melhor excluí-los por completo, ou usá-los simplesmente como funções auxiliares” (HEAVISIDE, 1970, p. 482, v. 2).

Num trecho sobre a propagação dos potenciais, do mesmo trabalho, ele ilustrou a sua concepção sobre estas grandezas e o papel delas na teoria eletromagnética (HEAVISIDE, 1970, p. 483, v. 2):

[...] Em relação ao modo como consideramos as quantidades eletromagnéticas, eu tenho consistentemente chegado à conclusão, desde janeiro de 1885, de que a questão sobre a propagação dos potenciais vetor  $\vec{A}$  e escalar  $\psi$ , se levada adiante, provou ser de natureza metafísica. Nós nos familiarizamos, experimentalmente, não com os potenciais, mas com forças, e formulamos os fatos observados utilizando o menor número de hipóteses, em termos da força elétrica  $\vec{E}$  e magnética  $\vec{H}$ . No desenvolvimento de Maxwell, da visão de Faraday,  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  representam verdadeiramente o estado do meio em todo o espaço (é o mesmo raciocínio se utilizarmos os respectivos fluxos, mas, menos conveniente em geral). Admitindo isto, é perfeitamente óbvio que em qualquer caso de propagação, como é um estado físico que se propaga, são  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  que se propagam.

Esta citação mostra que, para Heaviside, os campos elétrico e magnético são as grandezas que possuem uma realidade física, pois estas podem ser medidas e utilizadas em experimentos para observação de “fatos”, pois são as únicas que representam um “estado físico do campo” representado por meio de suas propagações.

Ao contrário de Fitzgerald, Heaviside não utilizou nenhum tipo de modelo mecânico, preferindo seguir uma via mais direta ao modificar as próprias equações de campo de Maxwell. Seguindo a mesma via de Poynting, porém independente deste, Heaviside foi guiado pelo princípio de que o fluxo de energia no campo “quando vai de um ponto a outro, atravessa o meio intermediário entre estes pontos” (HEAVISIDE apud HUNT, 1991, p. 119). Investigando como a energia se propaga no campo eletromagnético ele encontrou que as equações que descreviam as transformações de energia no campo não continham o potencial vetor, sendo assim, era melhor descartá-lo ou utilizá-lo como simples artifício de cálculo.

O interesse na investigação de como a energia se propaga veio de seus trabalhos sobre eletromagnetismo envolvendo telegrafia. Numa análise final, o que se propaga ao longo de um fio telegráfico é a energia. A transmissão limpa desta energia, sem distorção e perda excessiva, é o principal objetivo da telegrafia. Antes de Heaviside estudar o problema, na

década de 1880, muito pouco se sabia sobre como os fios transmitiam e controlavam o fluxo de energia em circuitos telegráficos.

A representação do fluxo de energia em função dos campos e não dos potenciais começou a ser discutido por Heaviside entre 1883 e 1884, numa série de pequenos artigos que posteriormente foram reunidos num artigo principal intitulado “*The energy of electric currents*” e publicados no *The Electrician*. Neste trabalho, Heaviside explicitou as vantagens de escrever a energia no campo magnético devido a correntes utilizando o campo magnético para expressá-la, e não o potencial vetor (HEAVISIDE, 1970, p. 249, v. 2):

[...] Evidentemente, então, a expressão  $\sum \frac{1}{2} AC$  não localiza a energia devidamente. Note também que, embora o total seja positivo, a porção referente a  $\frac{1}{2} AC$  em qualquer unidade de volume particular, pode ser positiva ou negativa, dependendo da direção da corrente e do potencial vetor. Nós devemos, portanto, descartar a idéia de que  $\frac{1}{2} AC$  representa a energia por unidade de volume ou a densidade de energia. Mas nós temos a forma  $\sum \frac{B^2}{8\pi}$  à disposição. Ela é idêntica à quantidade  $\sum \frac{1}{2} AC$ , mas indica uma distribuição diferente de energia.[...]

Maxwell já havia escrito a energia devido a correntes como  $\frac{1}{2} A \cdot C$ , em que  $A$  é o potencial vetor e  $C$  a densidade de corrente (MAXWELL, 1954, p. 273, v. 2). Porém, como apontou Heaviside, esta forma de expressar a energia contém sérios problemas. Um deles é o fato de que a energia, em qualquer ponto, depende não apenas da corrente neste ponto, mas também do potencial vetor neste ponto. O potencial vetor, por sua vez, depende do estado do sistema inteiro e não apenas do estado naquele ponto. A inconsistência está no fato de que a energia, seja potencial ou cinética, em um determinado ponto do campo, dependerá dos deslocamentos ou movimentos considerados naquele ponto e não do estado do sistema inteiro (HEAVISIDE, 1970, p. 249, v. 1).

No entanto, existe outra quantidade que expressa a energia magnética do campo dependendo somente de grandezas pertencentes àquele ponto do campo que é  $B^2/8\pi$ .

Heaviside preferiu utilizar esta equação, pois ela “expressa o fato de que a energia em qualquer ponto do campo depende somente do quadrado da força magnética naquele ponto, e não do estado de todo o resto do sistema” (HEAVISIDE, 1970, p. 249, v. 1).

Estudando a transferência de energia e utilizando a equação  $B^2/8\pi$ , Heaviside foi capaz de localizar e dimensionar a energia no campo, chegando, de forma independente, ao mesmo teorema que Poynting havia chegado em 1884.

Com a descoberta da fórmula do fluxo de energia, Heaviside passou a ter um princípio físico para guiá-lo pelos dos labirintos da teoria eletromagnética, uma vez que acreditava na primazia de  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ . Segundo Heaviside, “depois disso eu fiz mais em uma semana do que em todos os anos anteriores”, disse ele mais tarde para Hertz (O’HARA, PRICHA, 1987, p. 67).

Um trabalho que exerceu grande influência na reformulação das equações de Maxwell por Heaviside foi o *The treatise on natural philosophy*, de Thomson e Tait publicado em 1867. A influência deste livro nos trabalhos de Heaviside foi grande, em particular o chamado *princípio da atividade*<sup>31</sup>. Este princípio, diz que a taxa na qual uma força adiciona energia em um sistema é o produto desta força aplicada pela velocidade do ponto no qual ela age. Assim, uma força  $\vec{F}$  agindo sobre uma massa  $m$  movendo-se com velocidade  $\vec{v}$  irá adicionar sobre essa massa energia na razão  $\vec{F} \cdot \vec{v}$ , que é a taxa na qual a energia cinética  $T = \frac{1}{2}mv^2$  aumenta.

Heaviside via o princípio da atividade como o melhor guia para descrever as transformações locais de energia. Esta abordagem diferia da utilizada pelos britânicos nesta época, que preferiam descrever os fenômenos eletromagnéticos baseados na mecânica lagrangeana (HUNT, 1991, p. 123).

---

<sup>31</sup> Apesar de no *Treatise*, Thomson e Tait trabalharem com os métodos lagrangeanos e o princípio da ação mínima, a leitura de Heaviside do *Treatise* é focada no *princípio da atividade* (HUNT, 1991, p. 123).

A utilização do princípio da atividade necessita de equações que contenham as forças que atuam no sistema. Heaviside passou, então, a procurar um método de reformular as equações contidas no *Treatise* de Maxwell, retirando os potenciais e usando apenas as forças elétricas e magnéticas. De acordo com Heaviside (1970, p. 93, v. 2):

[...] este fato levou-me a remodelar as equações de Maxwell em alguns aspectos particulares e muito importantes [...] produzindo importantes simplificações, e trazendo para a visão imediata algumas analogias muito úteis, que estavam escondidas nas equações de Maxwell pela intervenção do potencial vetor. Isto feito, a equação da atividade é derivada de duas conexões: entre força elétrica e corrente magnética e entre força magnética e corrente elétrica, numa maneira análoga a  $\vec{F} \cdot \vec{v} = \dot{T}$ , trabalhando diretamente com forças do sistema.

Nesta parte podemos ver o que Heaviside pensava a respeito dos potenciais na teoria eletromagnética. As forças elétricas e magnéticas eram os objetos diretos de estudo e da observação direta dos fenômenos eletromagnéticos. No seu livro “*Electromagnetic Theory*”, publicado em três volumes entre os anos de 1891 e 1912, Heaviside expressou o desconforto trazido pelo potencial vetor na teoria de Maxwell, que segundo ele, é destituído completamente de qualquer tipo de significado físico, servindo apenas para auxílio de cálculo (HEAVISIDE, 1971, p. 383, v. 1):

[...] O leitor que toma conhecimento do método clássico [referindo-se ao método de Maxwell] de tratar o campo eletromagnético em termos do potencial vetor e escalar ficará impressionado pela diferença de procedimento e idéias envolvidos. No presente método nós estamos, do início ao fim, em contato com quantidades que possuem significado físico (ao contrário de funções matemáticas de natureza indeterminada, que são os potenciais vetor e escalar), e utilizando leis que conectam os em forma extremamente simples.

Para Heaviside os campos são as grandezas mais importantes do eletromagnetismo. Ao invés de usar grandezas de “natureza indeterminada”, como os potenciais, ele usou os campos, que são para ele as grandezas que expressam de forma simples e compacta as leis do eletromagnetismo.

Os potenciais seriam vestígios de uma teoria de ação à distância do eletromagnetismo, eles eram “funções vetoriais que não possuem nenhuma semelhança com os verdadeiros vetores que representam o estado físico do campo” (HEAVISIDE, 1971, p. 127, v. 1). Uma

vez descartados estes vetores, Heaviside explicou a Hertz que (O'HARA, PRICHA, 1987, p. 58):

[...] muito da metafísica desaparece. Além disto, problemas que eram inicialmente obscuros e não manipuláveis quando expressos em função dos potenciais, podem agora ser facilmente resolvidos. Condições de contorno são, agora, auto-evidentes e os trabalhos de cálculos são mais simples e claros. Importantes propriedades que eram anteriormente escondidas da visão pela intervenção dos potenciais, são agora facilmente reconhecidas.

### 5.2.1 Reformulando as equações de Maxwell

A busca de aplicações do eletromagnetismo a problemas práticos da época contribuíram para a reformulação das equações de Maxwell da forma que foram escritas no *Treatise on electricity and magnetism* para uma forma mais simétrica e compacta com a notação vetorial proposta por Heaviside.

Quando Maxwell publicou o *Treatise* em 1873, suas equações correspondiam a vinte quantidades que lembram muito pouco o que chamamos hoje de equações de Maxwell (tabela 5.1).

**Tabela 5.1** – Comparação entre as notações de Maxwell, usada no *Treatise*, e a de Heaviside para as principais equações do eletromagnetismo. Maxwell usava a letra  $V$  e  $S$  antes do operador nabla. Este uso representava a parte vetorial e escalar de um produto quaterniônico respectivamente. A notação de Heaviside é muito semelhante à atual com exceção de que ele não usava a flecha acima das letras para representar um vetor e sim o próprio vetor em negrito. Este uso ainda é muito corrente nos livros de eletromagnetismo atuais.

Maxwell		Heaviside
Notação cartesiana	Notação dos quatérnions	Notação vetorial
$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz},$ $b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx},$ $c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}.$	$\mathfrak{B} = V \nabla \mathfrak{A},$	$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0.$	$S \nabla \mathfrak{B} = 0.$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$P = c \frac{dy}{dt} - b \frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx},$ $Q = a \frac{dz}{dt} - c \frac{dx}{dt} - \frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy},$ $R = b \frac{dx}{dt} - a \frac{dy}{dt} - \frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz}.$	$\mathfrak{C} = V \mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla \Psi.$	$\vec{E} = V \vec{u} \vec{B} - \dot{\vec{A}} - \text{grad} \psi$
$4 \pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz},$ <p>equations</p> $4 \pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx},$ $4 \pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy},$	$4 \pi \mathfrak{C} = V \nabla \mathfrak{H}.$	$\vec{C} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$
$\rho = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}.$	$e = S \nabla \mathfrak{D}.$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$

Heaviside realizou um procedimento muito simples (HEAVISIDE, 1970, p. 447, v. 1, HUNT, 1991, p. 124). Maxwell havia escrito em seu *Treatise* a relação entre as forças elétricas e magnéticas e os potenciais (Tabela 5.1), que numa notação moderna escreve-se:

$$\vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \text{grad}\psi . \quad (5.2)$$

Tomando o rotacional de ambos os lados, obtemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (-\dot{\vec{A}}) - \vec{\nabla} \times (\text{grad}\phi) . \quad (5.3)$$

Mas o rotacional de qualquer gradiente de uma função vetorial é nulo. Logo podemos escrever:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{\nabla} \times \vec{A} , \quad (5.4)$$

Em que a ordem de derivação foi trocada de lugar. Usando  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu\vec{H}$  obtemos:

$$-\vec{\nabla} \times \vec{E} = \mu\dot{\vec{H}} . \quad (5.5)$$

A Equação (5.5) representa uma das “equações de Maxwell”. A equação representando a relação entre força elétrica e distribuição de cargas Heaviside escreveu como  $\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon\vec{E}) = \rho$  e para a força magnética  $\vec{\nabla} \cdot (\mu\vec{H}) = 0$ . Estas duas equações já estavam contidas no *Treatise* de Maxwell como pode ser visto pela Tabela 5.1, Heaviside apenas reescreveu-as em notação vetorial. A última equação envolvendo a força magnética e a corrente total (soma da corrente de condução mais a corrente de deslocamento) também já estavam contidas no *Treatise*. Heaviside apenas combinou as relações  $\vec{C} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$  e  $\vec{C} = k\vec{E} + \varepsilon\dot{\vec{E}}$ , obtendo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = k\vec{E} + \varepsilon\dot{\vec{E}} . \quad (5.6)$$

Heaviside publicou o trabalho contendo estas “novas” equações em 1885 no *The electrician*. Um dos fatores que contribuíram fortemente para a visão de que os campos, e não os potenciais, são as grandezas de interesse na teoria eletromagnética foi a dedução por Heaviside de que o fluxo de energia no campo poderia ser descrito plenamente pelas forças

elétricas e magnéticas. Isto o motivou a procurar uma versão para as equações de Maxwell que fosse descrita sem a utilização dos potenciais.

A forma como Maxwell havia deixado suas equações no *Treatise*, em forma de componentes cartesianas e com a utilização dos potenciais como grandezas fundamentais, expressava, segundo Heaviside, confusão e assimetrias que, com a obtenção das novas equações, foram extinguidas por completo da teoria eletromagnética. A este método Heaviside deu o nome de “*método duplex*”. Reunindo as equações (5.5) e (5.6) e as duas outras condições auxiliares as equações de Maxwell, deduzidas por Heaviside, podem ser escritas (na ausência de fontes) como:

$$\vec{\nabla} \cdot \varepsilon \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \mu \vec{H} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (5.7)$$

Estas quatro equações extremamente simples e simétricas em relação aos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , contêm o pré-requisito necessário para o tratamento da propagação das ondas eletromagnéticas em função das grandezas que Heaviside acreditava serem as grandezas dotadas de significado físico na teoria eletromagnética. Heaviside considerou esta formulação uma de suas contribuições fundamentais para o eletromagnetismo, enfatizando em toda a sua obra a importância do abandono dos potenciais, principalmente pelo fato destes não possuírem um significado físico claro.

Heaviside foi o primeiro a afirmar que a simetria destas equações poderia ser interpretada como conceito fundamental da teoria eletromagnética. Seus artigos posteriores, em sua maioria, foram uma campanha pela adoção destas equações mostrando sua aplicabilidade para solução de diversos problemas práticos e teóricos, antes de difícil tratamento utilizando a abordagem dos potenciais. Isto contribuiu para que diversos físicos começassem a usar os métodos de Heaviside e, como será visto no próximo Capítulo, os livros texto no início do século XX começaram a trazer a teoria de Maxwell utilizando os

campos elétrico e magnético como grandezas fundamentais do eletromagnetismo e os potenciais como grandezas auxiliares destituídas de significado físico sendo utilizados apenas para o cálculo dos campos.

### **5.3 Hertz e o potencial vetor**

Assim como Heaviside, Hertz também deduziu em 1884 equações para o campo eletromagnético abandonando o conceito de potenciais como grandezas fundamentais no eletromagnetismo. Porém, as motivações para realizar tal feito foram diferentes no caso de Hertz. Enquanto que Heaviside foi influenciado por motivos de ordem prática, Hertz, de certa forma, por motivos teóricos e filosóficos.

Hertz começou seus estudos em física por volta de 1878 na Universidade de Munique, onde passou um ano estudando disciplinas de matemática por meio da leitura de autores como Lagrange, Laplace e Poisson. Hertz reunia o que era necessário para ser um físico de renome na Alemanha de 1870: um profundo conhecimento matemático aliado à resolução de problemas físicos de ordem prática (MCCORMMACH, 1981).

Após um ano estudando em Munique, como era de costume na Alemanha, Hertz desejava continuar seus estudos em outros ambientes acadêmicos, decidindo-se por Berlim. Uma decisão importante, pois foi em Berlim que começou a trabalhar sob a influência de Hermann von Helmholtz (1821 - 1894), sem dúvida um dos nomes mais importantes da ciência na Alemanha no final do século XIX.

Em 1880, ele começou a trabalhar como assistente no laboratório de Helmholtz desenvolvendo alguns trabalhos experimentais de grande importância, obtendo o respeito e a admiração deste. Apesar do trabalho com Helmholtz trazer-lhe grandes vantagens (o ambiente científico de Berlim era propício à produção científica devido o contato com

grandes nomes da física da época), Hertz almejava o cargo de professor universitário. Para isso era necessário passar pelo cargo de *Privatdozent*,<sup>32</sup> mas como a Universidade de Berlim já possuía uma quantidade exagerada de *Privatdozents*, Hertz não possuía grandes chances nesta universidade.

Em 1883, sob a indicação de Gustav Robert Kirchhoff (1824 - 1887), Hertz obteve o cargo de *Privatdozent* na Universidade de Kiel. Esta estada não durou muito, pois Kiel não possuía laboratório de física e os trabalhos experimentais de Hertz tiveram que esperar mais um pouco. Nesta época, Hertz aprofundou os estudos em trabalhos teóricos produzindo três artigos, entre os quais o mais importante foi sobre o eletromagnetismo de Maxwell. Nesta época ele também teve contato com a leitura de alguns filósofos, entre eles Immanuel Kant (1724 - 1804) e Ernst Mach (1838 - 1916) (MCCORMMACH, 1981).

Neste período em Kiel, com a leitura e aprofundamento de trabalhos teóricos, principalmente os trabalhos de Maxwell, Hertz começou a sua busca pela unificação de alguns conceitos da teoria eletromagnética. Influenciado pela busca da unidade das forças da natureza, assim como Oersted<sup>33</sup>, Hertz procurou unificar os conceitos de força elétrica produzida por cargas eletrostáticas e por campos magnéticos variáveis.

Como foi visto no Capítulo 1, o eletromagnetismo nesta época, era uma teoria que ainda estava sendo construída e seus fundamentos estavam longe de serem alcançados. A teoria tinha se desenvolvido nos últimos cinquenta anos desde Oersted e existiam dois segmentos que se desenvolveram quase que independentemente. A teoria eletromagnética desenvolvida no continente, cujos nomes mais proeminentes na Alemanha eram Franz Ernst

---

<sup>32</sup> Cargo comum nas universidades européias, particularmente nos países germânicos, ocupado por quem almejava a posição de professor universitário permanente.

<sup>33</sup> No início do século XIX, os físicos que defendiam o modo de pensar baseado no *Naturphilosophie* eram definidos como uma comunidade de pessoas distintas da comunidade “normal” de físicos tradicionais da época. Eles eram intitulados “filósofos da natureza”, e defendiam que o *dualismo* era o princípio fundamental da física e da química. As influências do *Naturphilosophie* na descoberta do eletromagnetismo podem ser encontradas em MARTINS, 1986.

Neumann (1798 - 1895) e Wilhem Weber (1804 - 1891), supunha que a interação eletromagnética entre os corpos era à distância e realizada instantaneamente. Para os britânicos, em contrapartida, a interação eletromagnética se dava através de um meio e levava tempo propagando-se com velocidade finita. Apesar das duas teorias possuírem uma base matemática já estabelecida e darem previsões experimentais semelhantes, havia aspectos fundamentais para serem resolvidos.

Quando foi trabalhar no laboratório de Helmholtz, em 1878, Hertz se integrou ao projeto que buscava decidir experimentalmente entre a teoria dos britânicos e a teoria eletromagnética dos continentais.

A decisão entre as duas teorias eletromagnéticas estava alicerçada na realização de algum experimento que pudesse decidir de vez qual estava “correta”. Com este intuito Helmholtz, propôs para a *Academia de Ciências de Berlim* em 1879 um prêmio para quem resolvesse um problema relacionado ao comportamento de circuitos de corrente aberta e comprovasse experimentalmente algumas das previsões da teoria de Maxwell. De acordo com a teoria de Maxwell, a mudança na polarização dielétrica produziria efeitos eletromagnéticos mensuráveis da mesma forma que as correntes convencionais produzem. Helmholtz procurava um teste experimental da existência destes efeitos, ou inversamente, a produção de ondas eletromagnéticas por meio da polarização elétrica. Hertz não estudou o problema de início por considerar que as condições no laboratório de Helmholtz não fossem das melhores (MCCORMMACH, 1981).

A mudança de Hertz para Kiel em 1883 foi fundamental, pois, a ausência de laboratórios, fez com que ele aprofundasse seus estudos teóricos sobre a teoria de Maxwell. Hertz chegou à conclusão de que o problema levantado por Helmholtz poderia ser resolvido não com experimentos com correntes abertas, mas sim em experimentos relacionados às correntes fechadas. Nesta época, Hertz mostrou que as equações de Maxwell eram

compatíveis com as suposições teóricas de ambas as teorias eletromagnéticas: britânica e continental. Ao contrário, as equações da teoria continental não eram. Ele concluiu que se fosse para escolher entre as equações de Maxwell e as equações das outras teorias, as equações de Maxwell seriam preferíveis. Porém, Hertz não partilhava a mesmas idéias de Maxwell sobre a propagação dos efeitos eletromagnéticos, pois, assim como Helmholtz e muitos continentais, preferia o conceito de ação à distância (MCCORMMACH, 1981).

No trabalho de 1884, sobre o eletromagnetismo de Maxwell, Hertz propôs que a força elétrica gerada por um campo magnético variável seria idêntica, em sua natureza, à força elétrica devida a cargas eletrostáticas. Por um raciocínio de aproximações sucessivas, alicerçado no conceito de ação à distância, ele foi capaz de chegar às mesmas equações que Heaviside havia chegado em 1884 (WHITTAKER, 1973, p. 321). Considerando as variações de corrente originadas num sistema contendo apenas correntes, ele obteve as equações (em notação moderna):

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{s} \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (5.8)$$

$\vec{E}$  e  $\vec{H}$ <sup>34</sup> são as forças elétrica e magnética respectivamente e  $\vec{s}$  é a densidade de corrente elétrica.

Em 1885, Hertz mudou-se para a *Technische Hochschule* na cidade de Karlsruhe. Nesta escola técnica com excelentes laboratórios Hertz retomou seu trabalho experimental. Numa série de experimentos realizados entre 1886 e 1888, Hertz detectou o surgimento de ondas eletromagnéticas oriundas de descargas elétricas entre dois condutores próximos.

Ele publicou seus resultados em 1888 no *Annalen der Physik* sob o título *Ueber elektrodynamische Wellen in Luftraume und deren Reflexion*. O experimento consistiu na reflexão de ondas eletromagnéticas produzidas por correntes oscilantes nas paredes de seu laboratório. Hertz observou o padrão de interferência produzido por estas ondas estacionárias,

---

<sup>34</sup> Hertz não usava notação vetorial, ele escreveu as equações em componentes.

cujos nós e ventres ele podia analisar com um detector. Ele conseguiu calcular um comprimento de onda para estas ondas de aproximadamente nove metros, valor que estava de acordo com a expectativa teórica da época. Estes experimentos foram análogos aos experimentos realizados com som, luz e ondas produzidas em cordas. Eles permitiram a Hertz mostrar que a propagação das forças eletromagnéticas se dava através de um meio, o éter, e com uma velocidade de propagação finita. Nos meses subsequentes Hertz mostrou que estas ondas eletromagnéticas poderiam ser refletidas, refratadas, difratadas e polarizadas da mesma forma que a luz, confirmando completamente as predições da teoria de Maxwell.

Esta foi uma descoberta surpreendente em vários sentidos. No sentido em que está sendo analisado nesta dissertação, a descoberta das ondas eletromagnéticas contribuiu ainda mais para a diminuição do uso de potenciais na teoria de Maxwell. Quando os Maxwellianos, entre eles Lodge, Fitzgerald e Heaviside, começaram a estudar a teoria de Maxwell um dos questionamentos levantados por estes autores era sobre a importância dada aos potenciais por Maxwell. Um dos problemas levantados pela teoria de Maxwell era sobre a propagação do potencial escalar. A descoberta de Hertz contribuiu para aquecer ainda mais a discussão sobre a propagação dos potenciais.

## **5.4 O encontro de Bath**

A descoberta de Hertz e suas conseqüências para a teoria de Maxwell foram amplamente debatidas num encontro realizado na cidade de Bath na Grã-Bretanha em 1888. Neste encontro, promovido pela British Association of Science, foram discutidas as novas descobertas relacionadas à teoria de Maxwell, entre elas a propagação dos potenciais e o abandono do conceito de potencial vetor.

A discussão sobre a propagação dos potenciais centrou-se no potencial escalar. Desde Maxwell, o potencial escalar propagava-se instantaneamente devido à escolha do calibre de Coulomb para o potencial vetor. Como foi visto, Fitzgerald tentou resolver este impasse escolhendo um calibre próximo ao que conhecemos hoje por calibre de Lorentz. No entanto, isto não atenuou a discussão sobre a propagação do potencial escalar. Com a descoberta das ondas eletromagnéticas e a reformulação das equações de Maxwell por Hertz e Heaviside, a discussão sobre a propagação do potencial escalar desapareceu completamente, pois agora não restavam dúvidas de que o que se propagava eram os campos elétrico e magnético. O uso do potencial escalar começou a ser completamente desnecessário, segundo os Maxwellianos (HUNT, 1991, p. 165).

A discussão sobre a propagação do potencial vetor  $\vec{A}$  parece não ter se aprofundado muito no encontro de 1888. Porém, quando Lodge publicou o resumo sobre as discussões envolvendo a propagação do potencial escalar, Heaviside, que não esteve presente no encontro em Bath, argumentou exasperadamente que a extinção do conceito de potencial escalar não era o suficiente. Em uma carta para Lodge, datada de 9 de outubro de 1888, Heaviside declarou que seu objetivo não era “*simplesmente assassinar o potencial escalar de Maxwell  $\psi$ , mas também, aquele maravilhoso monstro de três pernas com um parasita escalar em suas costas, o assim chamado, momento eletrocinético em um ponto!*” (HEAVISIDE apud HUNT, 1991, p. 166).

Como foi visto no Capítulo quatro, *momento eletrocinético* era um dos nomes que Maxwell dava para o potencial vetor no seu *Treatise*. Heaviside, claramente, não era adepto do uso de potenciais. Em outubro de 1888, ele enviou uma nota para a *Philosophical Magazine*, intitulada “*On the metaphysical nature of the propagation of potentials*”, em que ele explica todo o desenvolvimento sobre a propagação dos potenciais de acordo com a sua teoria. Como explicitado na Seção 5.3, Heaviside tinha motivos de sobra para acreditar na

propagação dos campos em detrimento dos potenciais. A reformulação das equações de Maxwell propostas por ele em 1885, associada aos experimentos de Hertz sobre ondas eletromagnéticas, fez com que a discussão sobre a propagação dos potenciais simplesmente desaparecesse para Heaviside, pois “*esta discussão passou a ser de caráter puramente metafísico, dado que todos os fenômenos observados dependem unicamente das forças elétrica e magnética e não dos potenciais*” (HEAVISIDE, 1970, p. 483, v. 2). Esta visão dos potenciais como simples artifício matemático começou a ganhar adesão depois de 1888 e tornou-se, a partir de então, uma das principais mudanças propostas pelos Maxwellianos na teoria de Maxwell.

A partir deste momento, a teoria de Maxwell começou a despontar em relação às outras teorias do eletromagnetismo. Certo que o conceito de ação à distância não fazia mais parte da teoria eletromagnética, e procurando uma teoria consistente com a ação de partículas contíguas do meio, Hertz procurou extinguir, assim como Heaviside, os últimos resquícios do conceito de ação à distância da teoria de Maxwell. Um destes resquícios, segundo ele, era o conceito de potencial vetor.

Acreditando que as equações de Maxwell que haviam sido deduzidas por ele em 1884 eram as verdadeiras equações fundamentais do eletromagnetismo, Hertz publicou um trabalho teórico em 1890 enfatizando os motivos desta escolha por meio de argumentos teóricos e experimentais. Em vez de propor os mesmos argumentos usados na dedução de 1884, ou mesmo deduzi-las com o uso de algum modelo mecânico, Hertz preferiu agora usar as simetrias existentes entre a força elétrica  $\vec{E}$  e a força magnética  $\vec{H}$  no éter e eliminar totalmente o potencial vetor das equações fundamentais (HERTZ, 1962, p. 201):

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{H}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \text{ e } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0. \quad (5.9)$$

Em que  $c$  é a velocidade da luz, e as equações estão escritas em notação vetorial moderna. A importância das equações de Maxwell, como escritas por ele e Heaviside, mostra-se na

famosa frase contida na introdução de seu livro, *Electric Waves* de 1893, para a questão sobre “o que é a teoria de Maxwell?” Hertz responde, “A teoria de Maxwell é o sistema de equações de Maxwell” (HERTZ, 1962, p. 21).

A descoberta das ondas eletromagnéticas contribuiu para consolidar a teoria de Maxwell escrita em função das grandezas fundamentais  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ ; com isso a discussão a respeito da propagação dos potenciais foi perdendo vigor no final do século XIX.

O sentimento de Hertz acerca dos potenciais aparece em algumas partes de sua obra, onde se identifica a semelhança entre sua postura e a de Heaviside em relação ao uso do potencial vetor. No livro *Electric Waves* encontra-se o seguinte trecho (HERTZ, 1962, p. 196):

[...] Como uma idéia matemática de natureza rudimentar eu devo mencionar a predominância do potencial vetor nas equações fundamentais. Na construção da minha nova teoria o potencial serve apenas como material provisório; quando da introdução dos potenciais, as forças à distância, que apareciam descontinuamente em pontos particulares, foram trocadas por magnitudes que em cada ponto no espaço eram determinadas utilizando somente condições em pontos vizinhos. Mas depois que aprendemos a ver as forças como magnitudes do tipo mencionado anteriormente, não há objeção em usá-las em vez dos potenciais, a menos que alguma vantagem matemática seja ganha no uso dos potenciais. E não parece para mim que qualquer vantagem é alcançada pela introdução do potencial vetor nas equações fundamentais; ainda mais quando nós esperamos encontrar nestas equações relações entre as quantidades físicas que são verdadeiramente observadas, e não entre quantidades que servem apenas para cálculo.

Hertz acusou o potencial vetor como um dos resquícios que mantém a teoria eletromagnética sob os ditames da ação à distância. No entanto, como vimos no Capítulo 4 não era esta a visão de Maxwell e tampouco as razões que o levaram a introduzir esta grandeza, muito pelo contrário, ele estava de fato preocupado com uma explicação física e mecânica para a questão da indução eletromagnética, visando evitar a ação à distância.

No trecho acima Hertz, mencionou o porquê da introdução na física do conceito de potencial, mas não deixou claro em qual teoria, provavelmente ele se referiu à introdução dos potenciais na teoria gravitacional. Tendo em vista o motivo pelos quais os potenciais foram introduzidos na teoria da gravitação, esta afirmação é fundamentada. Quando calculamos a

força num determinado ponto do espaço usando uma função potencial, estamos supondo que este espaço possui uma propriedade de “potencialidade”. Se colocarmos uma carga elétrica neste ponto do espaço esta propriedade de potencialidade fará com que atue sobre esta carga uma força instantânea devida a esta propriedade de potencialidade (HESSE, 1961, p. 196).

Em 1888, com a produção das ondas eletromagnéticas, Hertz apresentou um forte argumento para acreditar na realidade física dos campos elétricos e magnéticos. Estes possuem, a partir de agora, duas propriedades que os caracterizam como entidades dotadas de realidade física, a saber: se propagam com velocidade finita de propagação e têm a capacidade de armazenar energia (como haviam suspeitado Poynting, Heaviside, Fitzgerald, e outros).

A descoberta de que os campos propagavam-se com velocidade finita favoreceu a aceitação das funções potenciais encontradas por Ludwig Lorenz (1829 – 1891), em vez da função encontrada por Maxwell que predizia a velocidade infinita para o potencial escalar utilizando o calibre de Coulomb ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ), como vimos anteriormente. Além disso, as funções de Lorenz eram mais simples do que as de Maxwell, pois estas eram encontradas integrando somente sobre a corrente de condução e não sobre todo o espaço, como as funções de Maxwell.

As funções de Lorenz receberam grande suporte quando, em 1897, o matemático italiano Túlio Levi Civita (1873 - 1941) demonstrou que as equações de Hertz-Heaviside (hoje conhecidas como equações de Maxwell) podiam ser deduzidas com a utilização dos potenciais retardados de Lorenz. Em 1906, o holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853 - 1928) demonstrou que as equações de Maxwell, da forma como escrita por Heaviside e Hertz, levavam aos potenciais retardados de Lorenz, desde que a condição

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (5.10)$$

fosse satisfeita, em que  $\vec{A}$  é o potencial vetor,  $\phi$  o escalar,  $c$  a velocidade da luz.

Em 1903, Lorentz mostrou o que iria ser um dos principais argumentos contra a atribuição de um significado físico para o potencial vetor: o fato de que o calibre escolhido para os potenciais, em alguns casos, não alteram o valor dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Contudo, como a maioria dos físicos continentais, Lorentz utilizou o potencial vetor apenas como uma grandeza auxiliar sem nenhum tipo de significado físico (ROCHE, 1990, p. 155).

O conjunto de fatores e influências discutidas em Heaviside e em Hertz, de caráter prático aliados a fatores teóricos, contribuiu para que as equações de Hertz-Heaviside e, conseqüentemente, a “nova” teoria de Maxwell, começassem a ser utilizadas como parte fundamental da teoria eletromagnética. O potencial vetor, útil em alguns casos, passou a ser considerado um artifício de cálculo, utilizado desta forma hoje em dia, em grande parte dos livros textos de eletromagnetismo.

Na última década do século XIX havia uma tendência a se desprezar a ênfase dada por Maxwell à interpretação física do potencial vetor como uma grandeza responsável pela propagação dos efeitos físicos através de tensões no éter ou no meio dielétrico considerado. No entanto, ao contrário do que Heaviside afirmava em suas colocações eloqüentes acerca do uso de potenciais no eletromagnetismo, esta questão não estava resolvida.

No início do século XX, Joseph John Thomson (1856 - 1940) publicou alguns trabalhos retomando a interpretação dada por Maxwell ao potencial vetor em seu artigo de 1865: a de momento eletromagnético. Como será visto no Capítulo 6, esta interpretação foi evoluindo ao longo do século XX, ocasionando a publicação de vários trabalhos que discutiram esta “nova” interpretação para potencial vetor.

Neste Capítulo foi visto que ao afirmar que os potenciais não possuem significado físico, Heaviside está utilizando uma estratégia para convencer seus leitores que muitas vezes não consultavam a obra completa de Maxwell. A estratégia de Heaviside consistia na

apresentação de suas idéias de forma muito mais clara e direta que a feita por Maxwell, o formalismo vetorial usado era mais limpo e direto que o de componentes usado por Maxwell. Heaviside, ainda, relacionava suas idéias com exemplos de aplicações de interesse da época. Além disso, o estilo agressivo e de certa forma, humorado de se referir aos autores que criticava, também contribuiu para uma maior aceitação de suas idéias. Este mesmo tipo de estratégia e estilo foi usado por Heaviside na disputa travada com Tait entre o formalismo vetorial e o formalismo quaterniônico também no final do século XIX (SILVA, 2002).

## 6 O potencial vetor em alguns livros texto de eletromagnetismo

### 6.1 Introdução

Como foi visto no Capítulo anterior, Hertz, Heaviside e outros acreditavam na realidade dos campos e não dos potenciais. Isso os levou a modificarem, reescreverem e reinterpretarem as equações de Maxwell na forma como são conhecidas atualmente.

Para Hertz e Heaviside, os potenciais eram de natureza indeterminada e destituídos de significado físico, obtendo um status de grandezas meramente auxiliares no contexto desta “nova” teoria de Maxwell. Amparados pelas descobertas experimentais da época, os Maxwellianos e também os continentais, bem antes destes, aderiram ao movimento de eliminação dos potenciais. Neste Capítulo será visto como alguns livros texto de eletromagnetismo, escritos ao longo do século XX, abordaram a questão do potencial vetor adotando diferentes posturas. Os livros foram escolhidos por trazerem posições distintas com relação ao potencial vetor: autores que defendem o potencial vetor apenas como um artifício matemático de cálculo ou não discutem sobre uma interpretação física e aqueles que defendem algum tipo de significado físico (Tabela 6.1).

Tabela 6.1 – Como o conceito de potencial vetor é apresentado em alguns livros texto de eletromagnetismo. Autores como Rohrlich defendem a artificialidade do potencial vetor a qualquer custo, enquanto que, autores como Konopinski defendem o extremo oposto: um significado físico explícito para  $\vec{A}$  dentro do eletromagnetismo clássico.

<b>Autores que defendem um significado físico para <math>\vec{A}</math></b>	<b>Autores que defendem o uso de <math>\vec{A}</math> como um simples artifício Matemático ou não discutem um possível significado físico</b>
J.J. Thomson, <i>Electricity and Matter</i> , 1904	H. A. Lorentz, <i>Lectures on theoretical physics</i> , 1931
R. P. Feynman, <i>The Feynman lectures on physics</i> , 1964	F. Rohrlich, <i>Classical charged particles: foundations of their theories</i> , 1965
E. J. Konopinski, <i>Electromagnetic fields and relativistic particles</i> , 1981	R. R. John; J. M. Frederick; W. C. Robert, <i>Foundations of electromagnetic theory</i> , 1979
J. Frenkel, <i>Princípios de eletrodinâmica clássica</i> , 2005	J. D. Jackson, <i>Classical electrodynamics</i> , 1999
E. G. Cullwick, <i>The Fundamentals of Electromagnetism</i> , 1966	D. J. Griffiths, <i>Introduction to electrodynamics</i> , 1999

Classificar uma grandeza como física ou matemática não é tarefa simples (O'RAHILLY, 1965; HESSE, 1961). Tais questões envolvem o status da teoria eletromagnética clássica hoje em dia como uma teoria física. Há, sem dúvida alguma, uma sólida fundamentação experimental da teoria que é constantemente testada diretamente e indiretamente em milhares de pesquisas e aplicações tecnológicas do eletromagnetismo. No entanto, algumas das leis básicas são difíceis de testar diretamente, muitos conceitos do eletromagnetismo são pouco entendidos e há importantes questões sem soluções na fundação

matemática da teoria eletromagnética (ROHRLICH, 1965, p. 2). Tudo isso sugere que é necessário ter algum cuidado ao propormos alguns tipos de explicações na teoria eletromagnética.

Ao longo da história, os físicos sempre trabalharam com fórmulas matemáticas aliadas a análise experimental proporcionando a introdução de grandezas matemáticas para auxiliar a interface entre teoria e experimentação. Algumas destas grandezas, eventualmente, adquirem uma interpretação física, enquanto que outras não, e outras permanecem com um status de incerteza quanto a sua interpretação (ROCHE, 1990, p. 158).

Por exemplo, o potencial de velocidades em hidrodinâmica e as funções lagrangianas são vistas como simples artifícios matemáticos. A energia potencial adquiriu um significado físico em eletrostática, enquanto que o potencial vetor e o potencial eletrostático permanecem com um status físico incerto. No entanto, como salienta Roche (1990), há certo consenso em admitir que para dotarmos uma grandeza física de significado físico, esta deve estar amparada por evidências experimentais aliadas a uma função matemática em uma teoria. A análise feita neste Capítulo sobre o status do potencial vetor nos livros texto será baseada neste consenso.

O objetivo deste Capítulo, em suma, é entender os principais argumentos usados por alguns físicos, autores de livros texto de eletromagnetismo, que os levaram a atribuir um significado físico ao potencial vetor nos seus respectivos livros ou artigos, e quais os principais argumentos daqueles que adotam a visão oposta, ou seja, de que o potencial vetor não possui significado físico, sendo apenas uma ferramenta matemática<sup>35</sup>.

---

<sup>35</sup> Toda a discussão é feita dentro do contexto do eletromagnetismo clássico. No entanto, sabemos que um dos motivos que fizeram com que a discussão a respeito do potencial vetor fosse retomada pela comunidade científica, foi a descoberta do efeito Aharonov-Bohm em 1959.

## 6.2 Sobre um possível significado físico para o potencial vetor no eletromagnetismo clássico

No início do século XX pouco se falou a respeito da interpretação física do conceito de potencial vetor nos livros texto ou mesmo nos artigos científicos da época (ROCHE, 1990; BORK, 1967). Porém, um livro digno de nota é o de Joseph John Thomson (1856 - 1940), *Electricity and Matter*, publicado em 1904, cuja edição utilizada nesta dissertação data de 1911. Neste livro, que é um conjunto de notas de aula de um curso que J. J. Thomson ministrou na Universidade de Yale em 1903, aparece o conceito de potencial vetor associado a uma interpretação física. Neste mesmo ano Thomson publicou o artigo *On momentum in the electric field* na *Philosophical Magazine* defendendo a mesma posição exposta em seu livro.

Thomson estava a par das discussões sobre o abandono do significado físico do potencial vetor. Em seu livro mostrou que a grandeza  $\frac{1}{4\pi c} \vec{E} \times \vec{B}$ , que representa a densidade de momento do campo eletromagnético, reduz-se ao potencial vetor de Maxwell (multiplicado pela carga) em alguns casos, concluindo então que (THOMSON apud ROCHE, 1990, p. 156):

[...] Portanto nós vemos que o potencial vetor em qualquer ponto é o momento devido à força magnética produzida pelo sistema que deu origem ao potencial vetor e o campo elétrico devido a uma carga unitária naquele ponto. Nós atribuímos, assim, uma interpretação física ao potencial vetor, e vemos que em vez de ser simplesmente uma ferramenta analítica de cálculo, ele representa uma importante propriedade do sistema.

Thomson calculou o *momento de interação* de uma carga ao se deslocar de um ponto a outro num campo magnético, identificando o resultado à mesma quantidade que Maxwell chamou de potencial vetor devido a um ímã (THOMSON, 1911, p. 21).

Foi realizada uma pesquisa no *Physics Abstract* a procura de artigos que discutissem sobre uma possível interpretação física para o potencial vetor nesta época. Porém, parece que

somente na segunda metade do século XX começaram a surgir alguns artigos e livros retomando a visão de J. J. Thomson (ROCHE, 1990).

No seu famoso livro *The Feynman lectures on physics* de 1964, Richard P. Feynman (1918 - 1988), discute sobre um possível significado físico para o potencial vetor. Segundo Feynman o problema em determinar se o potencial vetor é ou não real reside em determinarmos o que é um campo real. De acordo com Feynman um indício de realidade física para o campo magnético é que ele exerce força em uma carga se movendo na região de interação deste campo. Mas esta definição, segundo Feynman (1964, p. 15-7, v. 2), não faz muito sentido, pois:

[...] Nós não sentimos que o campo magnético seja real de alguma forma; nós não podemos, por exemplo, por a mão em uma região de campo magnético e senti-lo passando através de nossas mãos. Além disso, o valor do campo magnético não é muito definido; é possível escolhermos um sistema de coordenadas movendo-se com certa velocidade, e fazermos que o campo magnético, em determinado ponto seja nulo.

Feynman caracteriza um “campo” como uma definição puramente matemática, em que um campo real é visto como uma função matemática que nós usamos para evitar a idéia de ação à distância. Se temos uma partícula carregada num ponto  $P$ , ela é afetada por outras cargas localizadas numa certa distância de  $P$ . Um modo de descrever a interação entre as cargas é dizendo que as outras cargas criam algum tipo de condição – seja lá o que for esta condição -, na vizinhança de  $P$ . Se nós conhecemos esta condição, descrita pelos campos elétrico e magnético no ponto  $P$ , então é possível determinar completamente o comportamento da partícula sem referência alguma ao tipo de “condição” à qual a carga está submetida. Assim, segundo Feynman, um “campo real” é um conjunto de números que especificamos de tal forma que o que acontece num determinado ponto depende somente de números naquele ponto. Nós não precisamos saber o que está acontecendo em outras partes do sistema. É nestes termos que é feita a discussão de Feynman a respeito da realidade física do potencial vetor.

Com relação ao fato do potencial vetor não ser único, devido a diferentes escolhas do calibre, Feynman diz que “isto não tem nada a ver com a questão de realidade da forma que é discutida” (FEYNMAN, 1964, p. 15-7, v. 2). Por exemplo, de acordo com Feynman é possível alterar “relativamente” o campo magnético, assim como o elétrico e o próprio potencial vetor, como mencionado anteriormente para o caso de referenciais que se movem. O que importa, para Feynman, é discutir se o potencial vetor é “real” para descrever efeitos magnéticos ou se ele é simplesmente uma ferramenta matemática.

A introdução do potencial vetor como função auxiliar para o cálculo do campo magnético, segundo Feynman, não é legitimada, pois há vários casos em que o cálculo do campo magnético por meio de sua definição integral é bem mais simples do que usar o potencial vetor. Somente em poucos casos o uso do potencial vetor seria indispensável para o cálculo do campo magnético. Segundo Feynman, a introdução do potencial vetor teria interesse físico de extrema significância, ele não estaria apenas relacionado à energia de correntes, mas também, seria tão real quanto os campos elétricos e magnéticos no sentido de produzir efeitos magnéticos. De acordo com Feynman (1964, p. 15-8, v. 2):

[...] Em mecânica clássica é claro que nós podemos escrever a força sobre uma partícula carregada como  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ , tal que, dadas as forças, tudo sobre o movimento da partícula é determinado. Em qualquer região onde  $\vec{B} = 0$ , mesmo se  $\vec{A}$  for diferente de zero, tal como no exterior de um solenóide, não há nenhum efeito perceptível de  $\vec{A}$ . Portanto, por um longo tempo, acreditou-se que  $\vec{A}$  não era um “campo real”.

Feynman não dá nenhum exemplo no qual podemos realmente assumir que  $\vec{A}$  possui uma interpretação física no eletromagnetismo clássico. No entanto, ele descreve o papel de  $\vec{A}$  na mecânica quântica, em que ele possui um significado físico explícito como “a grandeza responsável pela mudança de fase na função de onda do elétron em regiões onde não existe campo magnético, mas apenas potencial vetor, como é caso da parte externa de um solenóide ideal”. Este efeito, descoberto em 1959, por Yakir Aharonov (1932 -) e David Bohm (1917 -

1992), hoje conhecido como efeito Aharonov-Bohm (AHARONOV; BOHM, 1959), é usado atualmente como o principal argumento em favor de um significado físico para o potencial vetor na mecânica quântica (WU; YANG, 2006).

No entanto o caso em que queremos discutir um possível significado para o potencial vetor é no eletromagnetismo clássico; neste sentido um livro excelente que discute um exemplo em que  $\vec{A}$  possui uma interpretação física, é o livro de Emil Jan Konopinski (1911 - 1990) de 1981, *Electromagnetic fields and relativistic particles*. Konopinski foi um dos físicos a participarem do Projeto Manhattan e trabalhou juntamente com Enrico Fermi (1901 - 1954) na construção do primeiro reator nuclear durante a segunda guerra mundial.

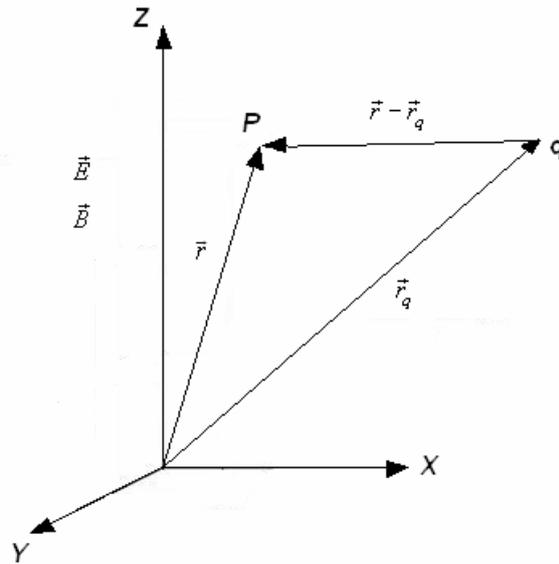
Assim, como J. J. Thomson, Konopinski mostrou que a grandeza que representa o momento do campo eletromagnético reduz-se ao potencial vetor quando consideramos a interferência ou interação dos campos produzida por uma carga dentro da região de campo. Esta interpretação é um dos pontos altos em favor de um significado físico para  $\vec{A}$  atualmente dentro do eletromagnetismo clássico. A linha de raciocínio para se chegar a esta conclusão não é difícil de mostrar. Usando a mesma notação de Konopinski, podemos escrever o momento resultante em um campo eletromagnético como<sup>36</sup>:

$$\vec{P}(t) = \int_V dV \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{4\pi c}. \quad (6.1)$$

Se colocarmos uma carga  $q$  numa determinada posição deste campo (Figura 6.1) ela produzirá no ponto  $P$  um campo elétrico  $\vec{E}_q$ , de tal forma que neste ponto o campo elétrico total é  $\vec{E} + \vec{E}_q$ .

---

<sup>36</sup> Todas as equações utilizadas nesta seção estão no sistema Gaussiano de unidades.



**Figura 6.1.** Carga  $q$  colocada dentro de uma região de campo eletromagnético.

O sistema conterà uma densidade de momento dada por:

$$\vec{g} = (\vec{E} + \vec{E}_q) \times \frac{\vec{B}}{4\pi c} \quad (6.2)$$

que também pode ser escrita como:

$$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c} \vec{E} \times \vec{B} + \frac{1}{4\pi c} \vec{E}_q \times \vec{B}. \quad (6.3)$$

A segunda parte desta soma Konopinski e outros (CALKIN, 1966, 1978, GINGRAS, 1979) classificam como sendo a parte responsável pela interferência no momento total do campo, pois ela toma valores diferentes para diferentes posições  $\vec{r}_q$  da carga  $q$ . Integrando a segunda parte da equação (6.3) num determinado volume  $V$ , colocando  $\vec{E}_q = -\vec{\nabla}\phi_q$  e usando a identidade vetorial  $\vec{\nabla} \times (\phi_q \vec{B}) = \phi_q (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \phi_q)$ , obtemos:

$$\vec{P}_q(\vec{r}_q) = \frac{1}{4\pi c} \int_V \phi_q (\vec{\nabla} \times \vec{B}) dV - \frac{1}{4\pi c} \int_V \vec{\nabla} \times (\phi_q \vec{B}) dV, \quad (6.4)$$

$\vec{P}_q(\vec{r}_q)$  representa o momento do campo disponível para transferir movimento à carga  $q$  situada em  $\vec{r}_q$ . A segunda integral da equação (6.4) pode ser trocada por meio da relação

$\int_V \vec{\nabla} \times (\phi_q \vec{B}) dV = \int_S d\vec{S} \times \phi_q \vec{B}$ , e como temos que escolher uma superfície no “infinito” para englobarmos todo o momento disponível no campo, esta integral anula-se<sup>37</sup>.

Portanto, substituindo  $\phi_q = q/|\vec{r} - \vec{r}_q|$  que é o potencial eletrostático da carga  $q$  no ponto  $P$  da figura 6.1, e  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{r})$  que é a lei de Ampère para o caso magnetostático,

escrevemos (6.4) como:

$$\vec{P}_q = \frac{q}{c} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} dV. \quad (6.5)$$

A integral acima é justamente o potencial vetor produzido por uma distribuição de correntes  $\vec{J}(\vec{r})$ , logo a equação (6.5) fica:

$$\vec{P}_q(\vec{r}_q) = \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}_q). \quad (6.6)$$

Logo, a quantidade  $\frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}_q)$  representa, de acordo com Konopinski (1978, 1981, p. 159) e outros, o momento do campo disponível para produzir movimento à carga  $q$ . Da mesma forma que a quantidade  $q\phi$  é a energia potencial, assim  $\frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}_q)$ , serve como o “*momento potencial*” para movimentos da carga  $q$ . Konopinski (1981, p. 159) revela por que ele considera importante atribuir um significado físico para  $\vec{A}$ , dentro deste contexto, pois:

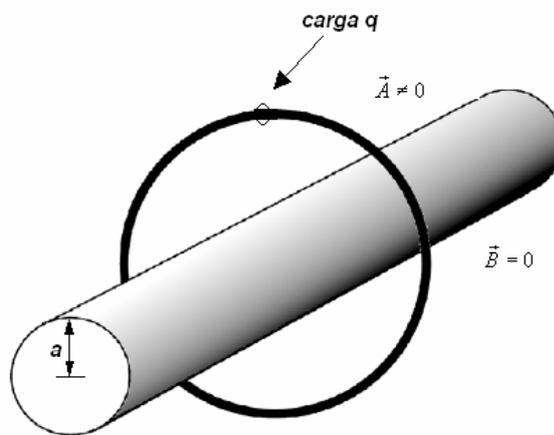
[...] A interpretação física do potencial vetor encontrada aqui requer uma ênfase especial por que tem sido persistentemente dito, por alguns autores, que o vetor  $\vec{A}$  não possui significado físico. O resultado é que a descrição potencial, por meio de  $\phi$  e  $\vec{A}$ , dos campos eletromagnéticos, é tão significativa quanto as descrições por meio de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Enquanto que  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  descrevem um campo em termos de forças que o campo pode exercer sobre a matéria carregada,  $\phi$  e  $\vec{A}$  descrevem o mesmo campo em termos de energia e momento que todo o campo deixa disponível para a matéria.

---

<sup>37</sup> A grandeza  $\phi_q \vec{B}$  cai mais rápido para zero do que “ $d\vec{S}$ ” fazendo com que a integral no infinito se anule.

Um exemplo dado por ele de uma situação em que é crucial reconhecer a efetividade física do potencial vetor é em regiões onde  $\vec{B} = 0$ , mas  $\vec{A} \neq 0$  calculado em algum tipo de calibre.

Como no exemplo dado acima por Feynman, isto acontece quando temos um solenóide cilíndrico infinito, cujo fluxo magnético em seu interior é  $\Phi = \pi a^2 (4\pi nI/c)$ ,  $a$  é o raio  $n$  o número de voltas por comprimento,  $I$  a corrente e  $c$  a velocidade da luz (Figura 6.2).



**Figura 6.2.** Solenóide infinito carregando uma corrente  $I$ . O campo  $\vec{B}$  é nulo em seu exterior, mas o potencial vetor não.

O potencial vetor externo ao solenóide possui apenas componente azimutal e pode ser calculado por meio da relação entre fluxo e campo magnético:

$$\Phi = \oint d\vec{S} \cdot \vec{B} = \oint d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \oint d\vec{r} \cdot \vec{A} \quad (6.7)$$

Como  $A = A_\phi(s)$  é constante ao longo de qualquer círculo de raio constante  $s$  externo ao solenóide, então  $\Phi = 2\pi s A(s)$  para qualquer  $s > a$ . Logo:

$$A_\phi(s > a) = \frac{2\pi a^2 nI}{cs}, \quad (6.8)$$

consistente com  $\vec{B} = 0$ , pois o rotacional da equação (6.8) é nulo,  $s$  representa a distância do ponto onde calculamos  $A_\varphi$  ao eixo do solenóide. De acordo com a interpretação dada acima o potencial vetor possui momento dirigido azimutalmente em torno do solenóide e pode transferir este momento para qualquer carga  $q$  colocada numa posição  $\vec{r}_q$  externa ao solenóide. Esta transferência de momento pode ser detectada colocando-se um anel de massa desprezível, sem atrito, em torno do solenóide e deixando a carga  $q$  deslizar em torno deste anel livremente (Figura 6.2). Se fizermos o momento do campo  $\frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}_q)$  ser reduzido a zero, interrompendo a corrente  $I$ , será transferido momento para a carga  $q$  fazendo com que ela se movimente. A taxa de decréscimo de  $I$  pode ser feita suficientemente devagar para que não ocorram efeitos de auto-indução no solenóide e para que um equilíbrio quase-estático seja atingido a cada momento (KONOPINSKI, 1978, p. 159). Logo a Equação (6.8) permanece válida para todo tempo ( $t \geq 0$ ) e há uma taxa de transferência de momento do campo para o movimento da carga dada por:

$$F = \frac{dp_\varphi}{dt} = qE = -\frac{q}{c} \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = -\frac{2\pi qa^2 n \dot{I}}{c^2 s}. \quad (6.9)$$

Integrando a Equação (6.9) do início  $u(t=0)=0$  e  $I(0) \neq 0$  produzimos um momento observável, dado por:

$$mu(t \rightarrow \infty) = \frac{2\pi qa^2 n I(0)}{c} = \frac{qA(0)}{c}. \quad (6.10)$$

Este é o momento ganho pela partícula durante a mudança “adiabática” da corrente no solenóide de seu valor inicial até zero.

Na formulação lagrangeana do eletromagnetismo, podemos escrever o momento canônico de uma partícula não relativística, devido a um campo externo, como

$\vec{p} = m\vec{u} + q\vec{A}/c$ , em que  $\vec{u}$  é a velocidade da partícula. Se derivarmos em relação ao tempo, e substituirmos a Equação (6.8), obtém-se para a componente  $\varphi$ :

$$\frac{dp_\varphi}{dt} = m\dot{u}_\varphi + \frac{2\pi a^2 n \dot{I}}{cs}, \quad (6.11)$$

e como há conservação do momento em relação ao ângulo azimutal, pois  $\dot{p}_\varphi = 0$ <sup>38</sup>, temos:

$$m\dot{u}_\varphi = -\frac{2\pi a^2 n \dot{I}}{cs}. \quad (6.12)$$

Esta relação é exatamente igual à Equação (6.9) e mostra o fato de que a  $\vec{p} = m\vec{u}$  não expressa corretamente o momento do sistema partícula + campo, e sim  $\vec{p} = m\vec{u} + q\vec{A}/c$ , pois temos que somar o termo  $q\vec{A}/c$  para descrever corretamente a conservação do momento do sistema (KONOPINSKI, 1978, SEMON; TAYLOR, 1996, p. 1366).

Toda esta forma de calcular o momento adquirido pela partícula, já era conhecido pelos físicos nos aceleradores de elétrons do tipo *bétatron*. No entanto, o cálculo é baseado no conceito de fluxo magnético. Todas as hipóteses usadas acima são utilizadas no cálculo, inclusive o decréscimo “lento” da corrente, que Konopinski chama de “*aproximação adiabática*” e os resultados obtidos são os mesmos, porém, com uma interpretação em que a função do potencial vetor é simplesmente desprezada.

Outro livro que faz menção a um possível significado para potencial vetor é o livro de E. G. Cullwick de 1966, *The Fundamentals of Electromagnetism*. Apesar de não apresentar a mesma interpretação que Konopinski e outros, Cullwick, após abordar o conceito de potencial vetor, menciona alguns dos problemas em relação à sua interpretação e traça um histórico da origem do conceito entre os continentais e os britânicos, em especial, Faraday, Maxwell e Willian Thomson. No entanto, de acordo com ele, o potencial vetor tem somente

---

<sup>38</sup> Na formulação lagrangeana  $\frac{d}{dt}\left(m\vec{u} + \frac{q}{c}\vec{A}\right) = -q\vec{\nabla}\left(\phi - \frac{u}{c}\cdot\vec{A}\right)$  e como  $A_\varphi$  é constante ao longo do círculo considerado o gradiente do lado direito é nulo fazendo com que  $\dot{p}_\varphi = 0$ .

duas utilizações na teoria elétrica moderna. Uma tradicionalmente utilizada hoje em dia, para determinar a configuração do campo magnético de correntes estacionárias onde o cálculo direto de  $\vec{B}$  não é possível devido à simetria do problema. A outra no cálculo de campos elétricos induzidos devido a um circuito que possui correntes de alta frequência, como por exemplo, antenas de rádio e a energia radiada nas ondas eletromagnéticas. Cullwick menciona que, nestes casos, o uso dos potenciais retardados é essencial (CULLWICK, 1966, p. 285).

No âmbito nacional um livro digno de nota é o do físico Josif Frenkel de 2005, *Princípios de eletrodinâmica clássica*, que ao escrever a componente  $i$  do momento canônico de uma partícula relativística como  $P_i = \gamma m v_i + (q/c) A_i$ , fala que “A parcela  $qA_i/c$  representa o momento armazenado no campo que pode ser transferido à partícula, da mesma forma que  $q\phi$  representa a energia potencial da partícula no campo” (FRENKEL, 2005, p. 356). Ou seja, a mesma interpretação dada por Konopinski e outros.

### 6.3 O potencial vetor como um simples artifício de cálculo nos livros texto

A outra abordagem analisada e que atualmente predomina nos livros e cursos de eletromagnetismo atuais: a de que o potencial vetor é apenas um artifício de cálculo destituído de qualquer significância física. Os textos mais clássicos usados em cursos de eletromagnetismo atualmente adotam esta abordagem (GRIFFITHS, 1999; REITZ; MILFORD, 1979; JACKSON, 1999).

Para Lorentz e os continentais, o potencial vetor possuía apenas utilidade matemática. Em seu livro *Lectures on theoretical physics*, de 1931, Lorentz utilizou o conceito de potencial vetor para deduzir o que ele chamou de *primeira equação de Maxwell* (LORENTZ,

1931, p. 47, v. 3): “Introduzindo um vetor *auxiliar*  $\vec{F}$ , cujas componentes são  $F_x = ki \int \frac{dx_1}{r}$ ,  $F_y = ki \int \frac{dy_1}{r}$  e  $F_z = ki \int \frac{dz_1}{r}$ , chamado de potencial vetor nós obtemos a relação  $\vec{H} = \text{rot}\vec{F}$ ”.

Em Capítulos posteriores, Lorentz descreveu o papel dos potenciais na teoria eletromagnética, mas parece não mencionar nenhuma possibilidade de atribuirmos um significado físico para este conceito dentro da teoria eletromagnética clássica. Pelo termo usado na citação acima “vetor *auxiliar*  $\vec{F}$ ” vemos que Lorentz usou o conceito de potencial vetor apenas como um artifício matemático. Lorentz parece não discutir a possibilidade do conceito possuir um significado físico. Sendo assim, ele poderia ser enquadrado entre os físicos que não discutiram sobre o papel de  $\vec{A}$  no eletromagnetismo clássico.

Talvez a asserção mais incisiva sobre a artificialidade dos potenciais encontra-se no livro *Classical Charged Particles* de F. Rohrlich. Ele utiliza o mesmo tipo de argumento usado anteriormente por Heaviside. Após a introdução do conceito de potencial vetor, Rohrlich (1965, p. 65-66) comenta:

[...] Estas funções, conhecidas como *potenciais*, não possuem nenhum significado físico e são introduzidas unicamente com o propósito de simplificação matemática das equações. Os campos elétrico e magnético é que são medidos diretamente, enquanto que os potenciais não podem ser medidos; certas combinações de derivadas espaciais e temporais destes potenciais é que são mensuráveis e equivalentes aos campos elétrico e magnético.

Comentando sobre a arbitrariedade da escolha dos calibres para os potenciais,

Rohrlich acrescenta:

[...] Segue imediatamente que se nós expressarmos a teoria em termos dos potenciais em vez dos campos, a teoria terá invariância de calibre como uma propriedade de simetria adicional. Esta propriedade, no entanto, não existe, isto é, não pode ser definida, a menos que os potenciais sejam introduzidos. Consequentemente, a invariância de calibre não tem significado físico, mas deve ser satisfeita para todas as quantidades *observáveis* garantindo e assegurando que a arbitrariedade na escolha de  $\vec{A}$  e  $\phi$  não afete os valores dos campos.

Rohrlich utiliza um argumento, que hoje é um dos mais fortes, em favor da interpretação matemática do potencial vetor: a teoria de calibre. A liberdade para escolher ou modificar os potenciais vetor e escalar com a condição de que os valores de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  fiquem inalterados pelo processo, é chamado de “princípio da invariância de calibre”. As especificações adicionais requeridas para se estabelecer  $\vec{A}$  e  $\phi$  mais precisamente, determinam o “calibre” destas funções (JACKSON, 1999, p. 240). Tais especificações são selecionadas por conveniência matemática e sugerem fortemente, até mesmo impondo, que  $\vec{A}$  e  $\phi$  não são mais do que funções arbitrárias e auxiliares que utilizamos para o cálculo dos vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Logo  $\vec{A}$  e  $\phi$  não possuem nenhum significado físico.

As escolhas mais importantes para os calibres são os de Lorenz e de Coulomb. No calibre de Coulomb, em regiões onde não há fontes, obtemos uma equação de onda para o potencial vetor. Uma equação de onda sugere a propagação de  $\vec{A}$  com velocidade finita, neste caso, a velocidade da luz. No entanto, como salienta Jackson (1999, p. 242):

[...] É bem conhecido que os distúrbios eletromagnéticos propagam-se com velocidade finita. O potencial vetor, de acordo com o calibre de Coulomb, satisfaz uma equação de onda que implica em sua propagação com velocidade finita  $c$ . À primeira vista é embaraçoso ver como um comportamento *não-físico* é evitado. Uma observação preliminar é que são os campos, e não os potenciais, que nos interessam aqui.

Realmente o fato de um campo vetorial se propagar com velocidade finita não é condição para se admitir um significado físico para este campo, e neste caso existem explicações para esta aparente confusão relacionada ao calibre de Coulomb (BRILL; GOODMAN, 1967).

Logo Rohrlich, assim como Jackson, usam como argumento principal contra a realidade física dos potenciais a arbitrariedade na escolha dos calibres para estas grandezas e o fato destas grandezas não poderem ser medidas diretamente em algum tipo de experimento. Dois dos livros textos mais usados atualmente nos cursos tradicionais de eletromagnetismo, *Introduction to electrodynamics* e *Foundations of electromagnetic theory*, dos autores

Griffiths e Reitz & Milford respectivamente, tratam do conceito de potencial vetor como simples artifício matemático. Griffiths, no entanto, apesar de não discutir, pondera que a interpretação do potencial vetor não é simples, pois, “uma vez que a força magnética não realiza trabalho,  $\vec{A}$  não admite uma interpretação física simples em termos da energia potencial por unidade de carga como é admitido para o potencial escalar (em alguns contextos ele pode ser interpretado como o momento por unidade de carga)” (GRIFFITHS, 1999, p. 236). No Capítulo sobre *Potenciais e Campos*, Griffiths volta a discutir o conceito no âmbito da teoria de calibres, no entanto não há menção ou discussão sobre uma possível interpretação física de  $\vec{A}$ , mas salienta a importância da teoria dos potenciais no âmbito da teoria da relatividade especial (GRIFFITHS, 1999, p. 421).

Reitz, no entanto, não discute no seu livro qualquer tipo de interpretação física para  $\vec{A}$ . Ele compara a importância do potencial vetor em relação ao escalar na afirmação (REITZ, 1979, p. 176):

[...] Para evitar uma falsa impressão, isto é, que o potencial vetor seja tão útil quanto o potencial eletrostático no cálculo de campo simples, deve-se observar que não há essencialmente casos em que  $\vec{A}$  possa ser calculado de forma fechada simples. O longo fio reto dá um resultado infinito para  $\vec{A}$  quando usamos a equação de  $\vec{A}$  em função da corrente. A espira circular envolve integrais elípticas, e assim por diante.

Segundo Reitz, a principal utilidade do potencial vetor é em aproximações envolvendo o cálculo do campo magnético e em problemas que tratam de radiação eletromagnética (REITZ, 1979, p. 177).

Sem dúvida alguma a discussão sobre o significado físico ou não do conceito de potencial vetor é bem mais extensa do que mencionado acima. Não foi analisado, por exemplo, o papel desempenhado pelo conceito dentro da mecânica quântica, no efeito Aharonov-Bohm. O estudo realizado procurou entender como se deu a mudança de interpretação para o conceito desde Maxwell até hoje, dentro do eletromagnetismo clássico. Neste sentido podemos, talvez correndo o risco de simplificação, polarizar a discussão em

duas “correntes” de pensamento: aqueles que defendem um significado físico para o potencial vetor dentro do eletromagnetismo clássico (KONOPINSKI, 1978, 1981); aqueles que, ou simplesmente não discutem essa possibilidade (GRIFFITHS, 1999), ou defendem incisivamente a utilização dos potenciais como simples artifício de cálculo (ROHRLICH, 1965).

## 7 Conclusão

Este trabalho estudou um conjunto de idéias envolvendo o desenvolvimento do conceito de potencial vetor na teoria eletromagnética do século XIX, dando ênfase à teoria desenvolvida na Grã-Bretanha. Foram analisados diferentes trabalhos publicados ao longo do século XIX e início do século XX buscando entender as diferentes interpretações atribuídas ao conceito de potencial vetor. Além destes trabalhos, alguns livros publicados na segunda metade do século XX também foram analisados. A pesquisa foi desenvolvida no contexto do eletromagnetismo clássico. Discutiu-se em detalhes os diferentes nomes e interpretações dadas ao potencial vetor considerando o contexto da física da época.

No Capítulo dois foi traçado um panorama da física no século XIX dando ênfase aos aspectos relacionados ao desenvolvimento da teoria eletromagnética. Como foi visto neste Capítulo, uma das ferramentas heurísticas mais importantes usadas pelos físicos britânicos para o estudo do eletromagnetismo foi o uso de analogias mecânicas. Estas analogias foram desenvolvidas inicialmente por Willian Thomson pelo estudo de modelos de “sólido elástico” e, posteriormente, por Maxwell no seu modelo de vórtices moleculares. Estes modelos mecânicos supunham a existência de um éter permeando o meio entre os corpos carregados. A interação eletromagnética entre estes corpos se dava por meio de tensões lineares e rotacionais ocorridas no éter. Em 1861, Maxwell deduziu que a velocidade destas interações era a mesma velocidade de propagação da luz, unindo assim, a teoria eletromagnética à ótica.

Um dos principais defensores de que as interações eletromagnéticas se davam através de um meio foi Faraday. Foi visto no Capítulo três que com a descoberta da indução eletromagnética em 1831, Faraday explicou o fenômeno supondo que as partículas dos circuitos envolvidos entravam em um estado de tensão, ao qual ele chamou de “estado

eletrotônico”. Este conceito foi fundamental para a interpretação dada posteriormente por Maxwell ao que chamamos hoje de potencial vetor.

Em 1847, Thomson publicou um artigo no qual ele descreveu os fenômenos eletromagnéticos por meio de uma analogia com um sólido elástico. A força magnética foi representada por uma força que tendia a produzir rotações infinitesimais em um determinado volume de seu sólido elástico. De acordo com Thomson esta força magnética poderia ser obtida por meio das grandezas  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , que hoje lembram as componentes do potencial vetor. As operações matemáticas para obtenção da força magnética, dentro desta analogia com um sólido elástico, lembram muito a relação atual  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , porém, Thomson não deu um nome nem qualquer tipo de interpretação para as grandezas  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  relacionada ao eletromagnetismo.

A associação entre as grandezas descobertas por Thomson no seu artigo de 1847, e a explicação inicial de Faraday para a indução eletromagnética por meio de seu estado eletrotônico, foi descoberta por Maxwell em 1856. Ao usar os conceitos de *quantidade* e *intensidade* para as grandezas eletromagnéticas, foi visto no Capítulo quatro como Maxwell descobriu a mesma equação proposta por Thomson em 1847 e a relação entre intensidade eletrotônica e força eletromotriz.

O estado eletrotônico, deixado de lado por Faraday, passa a fazer parte da teoria eletromagnética. Dentro da perspectiva de representar os fenômenos eletromagnéticos por modelos mecânicos, Maxwell publicou um artigo em 1861, que tentava explicar como se propagavam as interações eletromagnéticas no éter. Como foi visto no Capítulo quatro, o estado eletrotônico teve uma interpretação física clara neste modelo mecânico: ele representava o *momento reduzido* das “engrenagens” que constituíam este modelo de vórtices.

Pelo estudo dos métodos lagrangeanos, muito em voga na Grã-Bretanha na segunda metade do século XIX, Maxwell começou a mudar o enfoque na apresentação de sua teoria eletromagnética. No artigo de 1865 e posteriormente no seu livro *Treatise on electricity and magnetism* de 1873, Maxwell sistematizou a sua teoria eletromagnética adotando um enfoque lagrangeano não se atendo a nenhum tipo de modelo mecânico específico. Maxwell considerou que se podemos escrever a lagrangeana de um sistema, então é possível elaborarmos um modelo mecânico para este sistema. Dentro deste novo enfoque Maxwell reinterpretou o conceito de *momento reduzido* agora como *momento eletromagnético* e por fim, ele criou o nome *potencial vetor*. Como foi visto no Capítulo quatro este nome surgiu devido ao produto do operador quatérniônico  $\nabla$  e o momento eletromagnético. O conceito que se tornou potencial vetor no livro de 1873, teve um papel fundamental na teoria de Maxwell. As equações fundamentais do eletromagnetismo envolviam o conceito de potencial vetor, sendo este visto por ele como uma grandeza tão importante quanto os campos elétrico e magnético.

No entanto, apesar de usar um pouco da teoria dos quatérnions para escrever suas equações, Maxwell não sistematizou este uso na sua teoria. Muitas das previsões teóricas e experimentais da teoria de Maxwell começaram a ser encontradas na segunda metade do século XIX. Grande parte destas descobertas foram feitas por um grupo de físicos, que alguns autores modernos intitulam de *maxwellianos*, ou seja, os continuadores da teoria de Maxwell.

Entre estes físicos estão Heaviside e Hertz. Uma das grandes contribuições de Heaviside para a teoria eletromagnética foi a sistematização e simplificação no uso de vetores e a obtenção das equações de Maxwell na forma que conhecemos hoje com a utilização dos campos elétrico e magnético em detrimento dos potenciais vetor e escalar.

Como foi visto no Capítulo cinco, Heaviside “abominava” o uso do potencial vetor dentro da teoria eletromagnética de acordo com a interpretação de Maxwell. Para ele o

potencial vetor era apenas um artifício de cálculo, não possuindo nenhum tipo de significado físico. Assim como Heaviside, Hertz reinterpretou a teoria de Maxwell obtendo equações semelhantes às obtidas por Heaviside. A descoberta da propagação das ondas eletromagnéticas por Hertz, em 1888, contribuiu para o abandono no uso de potenciais na teoria eletromagnética. De acordo com esta descoberta o que se propaga são os campos elétrico e magnético e não os potenciais. A discussão sobre a propagação dos potenciais, originada nesta mesma época foi aos poucos se extinguindo. A arbitrariedade na escolha das funções potenciais com a obtenção dos mesmos campos elétrico e magnético contribuiu para questionar a possibilidade dos potenciais possuírem algum tipo de existência física. A natureza física dos campos passou a ser encarada como um dos dogmas da teoria eletromagnética no final do século XIX, e o potencial vetor passou a ser sistematicamente usado como hoje.

No início do século XX a interpretação dada por Maxwell ao potencial vetor foi completamente marginalizada e poucos autores ainda discutiram sobre um significado físico para este conceito. Entre eles pode-se citar J. J. Thomson que deu a mesma interpretação dada por Maxwell: a de momento eletromagnético. Na segunda metade do século XX começaram a surgir trabalhos, entre eles livros e artigos, questionando a arbitrariedade do potencial vetor na teoria eletromagnética clássica. Feynman, por exemplo, apesar de não discutir o significado do potencial vetor na teoria eletromagnética clássica, criticou severamente os argumentos usados pelos físicos para dotarem os campos magnético e elétrico de realidade física. Segundo Feynman admitir a realidade dos campos implica em admitir a realidade do potencial vetor, não importando quais argumentos utilizamos para isso. No entanto, Feynman discutiu detalhadamente o papel desempenhado pelo potencial vetor dentro da mecânica quântica no efeito Aharonov-Bohm, em que o conceito possui, segundo ele, um significado físico.

Um significado físico para o potencial vetor no eletromagnetismo clássico foi amplamente discutido por Konopinski em 1978 e 1981. Ao escrever a densidade de momento do campo eletromagnético considerando uma carga  $q$  dentro deste campo, Konopinski mostrou que o potencial vetor pode ser visto como o *momento do campo disponível para produzir movimento à carga  $q$* . No entanto, a interpretação dada por Konopinski e outros (CALKIN, 1966, 1978, GINGRAS, 1979) sobre este “novo olhar” para o conceito de potencial vetor, parece não ter contribuído para uma mudança na forma como ele é abordado nos livros texto de eletromagnetismo, muito menos para a forma como ele é ensinado nas aulas de eletromagnetismo. O principal argumento usado em favor de uma interpretação matemática para o potencial vetor, hoje em dia, é o fato de ele não ser univocamente determinado. Segundo estes autores, pelo princípio da invariância de calibre, podemos sempre escolher “arbitrariamente” valores diferentes do potencial vetor e obtermos os mesmos valores para os campos elétrico e magnético.

Ao término de um curso de eletromagnetismo, geralmente feito no sexto e sétimo semestre dos cursos de física, os estudantes possuem um entendimento considerável dos campos elétrico e magnético e do potencial escalar, no entanto o entendimento que possuem, do conceito de potencial vetor é simplesmente operacional, usando-o apenas como um artefato matemático para expressar o campo magnético  $\vec{B}$  por meio da relação  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . Os estudantes geralmente não possuem idéia alguma sobre o que  $\vec{A}$  realmente é, muito menos alguma visão sobre o que  $\vec{A}$  se parece ou como utilizá-lo nos casos mais simples. Mesmo após a realização de um curso de eletromagnetismo, na pós-graduação, quando em contato com a formulação lagrangeana do eletromagnetismo, muitos estudantes ainda não conseguem dizer muito sobre o potencial vetor, a não ser que ele é um vetor cujo rotacional dá o campo magnético.

Percebeu-se com a realização deste trabalho que há muito para ser dito sobre o conceito de potencial vetor além desta interpretação operacional ensinada atualmente. Dado a importância do conceito em física moderna (supercondutividade, efeito Aharonov-Bohm, junções Josephson, etc) e as questões problemáticas relacionadas à sua interpretação no eletromagnetismo clássico, este estudo histórico contribui também para ajudar os estudantes a entenderem mais profundamente o conceito de potencial vetor, além da simples forma operacional dada nos cursos de eletromagnetismo.

Não se tentou ao longo do trabalho mostrar que a visão de Maxwell, J. J. Thomson ou de Konopinski, é sempre válida, ou mesmo de interesse prático evidente. Em vez disso, buscou-se mostrar que outra visão para  $\vec{A}$  é possível além da visão tradicional abordada pela maioria dos livros textos e cursos de eletromagnetismo. Além disso, conhecer um pouco melhor como teorias importantes foram desenvolvidas é importante para que se conheça um pouco melhor como se dá a construção do conhecimento científico, ou seja, de forma nem um pouco linear, e com o uso de argumentos nem sempre tidos como científicos (por exemplo, a argumentação de Heaviside).

Ao mostrar que é possível atribuir um significado físico para  $\vec{A}$ , pretende-se ir além de uma noção puramente abstrata para o conceito, contribuindo para que os estudantes tenham o conhecimento da importância do conceito em alguns casos de interesse físico que, geralmente, não são mencionados nos livros texto. Todos estes exemplos poderiam ser discutidos num curso de eletromagnetismo, que com certeza, contribuiriam para que os estudantes adquirissem um entendimento mais profundo dos conceitos mais abstratos do eletromagnetismo.

## Referências

- AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in quantum theory. *The Physical Review*, v. 115, n. 3, p. 485-491, 1959.
- BORK, A. M. Maxwell and the vector potential. *Isis*, v. 58, n. 2, p. 210-222, 1967.
- BRILL, O. L.; GOODMAN, B. Causality in the Coulomb gauge. *American Journal of Physics*, v. 35, n. 9, p. 832-837, 1967.
- BUCHWALD, J. Z. *Rise of the wave theory of light: optical theory and experiment in the early nineteenth century*. Chicago : University of Chicago Press, 1989.
- CALKIN, M. G. Comments on what the electromagnetic vector potential describes. *American Journal of Physics*, v. 47, n. 1, p. 118, 1979.
- CALKIN, M. G. Linear momentum of quasi-static electromagnetic fields. *American Journal of Physics*, v. 34, n. 10, p. 921-925, 1966.
- CULLWICK, E. G. *The fundamentals of electromagnetism*. Cambridge: Cambridge University Press, 1966.
- DARRIGOL, O. *Electrodynamics from Ampere to Einstein*. Oxford: Oxford University Press, 2000.
- DORAN, B. G. Origins and consolidation of field theory in nineteenth-century Britain: from the mechanical to the electromagnetic view of nature. In: MCCORMMACH, R. *Historical studies in the physical sciences*. Princeton: University Press, 1975. v. 6. p. 134-260.
- FARADAY, M. *Experimental researches in electricity*. New York: Dover Publications, 1965. v. 1-3.
- FEYMAN, R. P. *The Feynman lectures on physics*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing, 1964. v. 2.
- FITZGERALD, G. F. On a episode in the life of J. *BA Report*, p. 755 – 757, 1890.
- FRENKEL, J. *Princípios de eletrodinâmica clássica*. São Paulo: Edusp, 2005.
- FURIÓ, C.; GUIASOLA, J. Difficulties in learning the concept of electric field. *Science Education*, v. 82, n. 4, p. 511-526, 1998.
- GINGRAS, Y. Comments on what the electromagnetic vector potential describes. *American Journal of Physics*, v. 48, n. 1, p. 84, 1980.
- GRIFFITS, D. J. *Introduction to electrodynamics*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1999.
- HARMAN, P. M. *Energy, force, and matter: the conceptual development of nineteenth-century physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

- HARMAN, P. M. *The scientific letters and papers of James Clerk Maxwell*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. v. 1.
- HEAVISIDE, O. *Electrical papers*. New York: Chelsea Publishing Company, 1970. v. 1-2.
- HEAVISIDE, O. *Electromagnetic theory*, New York: Chelsea Publishing Company, 1971. v. 1-3.
- HEIMANN, P. M. Faraday's theories of matter and electricity. *The British Journal for the History of Science*, v. 5, n. 3, p. 235-257, 1971a.
- HERTZ, H. R. *Electric waves*. New York: Dove Publications, 1962.
- HESSE, M. B. *Forces and fields: the concept of action at a distance in the history of physics*. New York: Philosophical Library, 1961.
- HUNT, J. B. *The maxwellians*. Ithaca and London: Cornell University Press, 1991.
- JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. New York: John Wiley & Sons, 1999.
- JOHN, R. R.; FREDERICK, J. M.; ROBERT, W. C. *Fundamentos da teoria eletromagnética*. Rio de Janeiro: Campus, 1979.
- KNUDSEN, O. Mathematics and physical reality in William Thomson's electromagnetic theory. In: HARMAN, P. M. *Wranglers and physicists: studies on Cambridge physics in the 19<sup>th</sup> century*. Manchester: Manchester University Press, 1985. p. 149-179.
- KONOPINSKI, E. J. *Electromagnetic fields and relativistic particles*. New York: McGraw-Hill, 1981.
- KONOPINSKI, E. J. What the electromagnetic vector potential describes?. *American Journal of Physics*, v. 46, n. 5, p. 499-502, 1978.
- LORENTZ, H. A. *Lectures on theoretical physics*. London: The Macmillan Company, 1931. v. 3. p. 47.
- LORENZO, J. A.; DONCEL, M. G. The electrotonic state, a metaphysical device for Maxwell too?. *European Journal of Physics*, v. 17, n.1, p. 6-10, 1995.
- MCCORMMACH, R. Heinrich Rudolf Hertz. In: SCRIBNER, C. *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's Sons, 1981. v. 6. p. 340 – 350.
- MARTINS, R. A. Oersted e a descoberta do eletromagnetismo. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, n. 10, p. 89 – 114, 1986.
- MAXWELL, J. C. A Dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions*, v. 155, p. 459-512, 1865.
- \_\_\_\_\_. *A treatise on electricity and magnetism*. New York: Dover, 1954. v.1-2.

\_\_\_\_\_. On Faraday's lines of force. *Cambridge Philosophical Transactions*, v.10, p. 27-83, 1856.

\_\_\_\_\_. *The scientific papers of James Clerk Maxwell*. Edited by William Davidson Niven. New York: Dover, 1965. v. 1-2.

O'HARA, J. G.; PRICHA, W. *Hertz and the Maxwellians*. London: Peter Peregrinus, 1987.

O'RAHILLY, A. *Electromagnetic theory: a critical examination of fundamentals*. New York: Dover Publications, 1965. v. 1-2.

POCOVI, C. M.; FINLEY, F. Lines of force: Faraday's and students' views. *Science & Education*, v. 11, n. 5, p. 459-474, 2002.

POYNTING, J. H. On the transfer of energy in the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, v. 175, p. 343-361, 1884.

ROCHE, J. J. A critical study of the vector potential. In: ROCHE, J. J. *Physicists look back: studies in the history of physics*. Oxford: Oxford Linacre College, 1990. p. 144-168.

ROHRLICH, F. *Classical charged particles: foundations of their theories*. New York: Addison-Wesley, 1965.

ROSS, S. Faraday consults the scholars: the origins of the terms of electrochemistry. *Notes and Records of the Royal Society of London*, v.16, n. 2, p. 187-220, 1961.

SEMON, M. D.; TAYLOR, J. R. Thoughts on the magnetic vector potential. *American Journal of Physics*, v. 64, n. 11, p. 1361-1369, 1996.

SILVA, C. C. *Da força ao tensor: evolução do conceito físico e da representação matemática do campo eletromagnético*. 2002. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Gleb Wataguin, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

SILVA, C. C. *Estudos de história e filosofia das ciências: subsídios para aplicação no ensino*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

SUMPNER, W. E. The work of Oliver Heaviside. *Institution of Electrical Engineers*, v. 71, p. 837 – 51, 1932.

THOMSON, J. J. *Electricity and matter*. London: Constable and Company, 1911.

THOMSON, J. J. On momentum in the electric field. *Philosophical Magazine*, v. 8, p. 331-356, 1904.

THOMSON, W. On a mechanical representation of electric, magnetic, and galvanic forces. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, v. 2, p. 61-64, 1847.

THOMSON, W. A mathematical theory of Magnetism. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, v. 141, p. 243-285, 1851.

TRICKER, R. A. R. *The contributions of Faraday & Maxwell to electrical science*. Great Britain: Pergamon Press, 1966.

WHITTAKER, S. E. *A history of the theories of aether and electricity*. New York: Humanities Press, 1973. v.1.

WISE, N. M. The mutual embrace of electricity and magnetism. *Science*, v. 203, n. 4387, p. 1310-1318, 1979.

WU, A. C. T.; YANG, C. N. Evolution of the concept of the vector potential in the description of the fundamentals interactions. *International Journal of Modern Physics A*, v. 21, n. 16, p. 3235-3277, 2006.

## Apêndice A

### Alguns aspectos do desenvolvimento do conceito de potencial vetor no continente<sup>39</sup>

Após a descoberta do eletromagnetismo por Oersted em 1820, os físicos continentais (principalmente franceses e alemães) procuraram descrever o novo fenômeno utilizando o conceito de ação à distância. Era inadmissível para eles a aparente assimetria do fenômeno, pois desde Newton, as forças que atuam entre os corpos eram representadas por retas que ligam estes corpos<sup>40</sup>. No caso eletromagnético a força parecia atuar perpendicularmente à reta que une os dois corpos. Não aceitando a aparente quebra de simetria envolvida nos fenômenos eletromagnéticos, André Marie Ampère (1775 - 1836) desenvolveu uma teoria baseada na força exercida por elementos de corrente. De acordo com Ampère, o magnetismo seria um tipo de fenômeno secundário, causado por correntes elétricas fechadas, invisíveis, na superfície dos ímãs (AMPÈRE apud MARTINS, 1986, p. 106).

Guiado pela idéia de que o fenômeno principal seria interação entre correntes elétricas, Ampère deduziu uma equação da força atuando entre elementos de corrente. Esta equação satisfazia os requisitos para uma teoria de ação à distância baseada em forças que atuavam entre a linha que liga os corpos. Neste modelo Ampère transferiu a visão de Oersted do campo que gira em torno do fio para as correntes invisíveis existentes dentro dos ímãs.

Com a descoberta da indução eletromagnética em 1831, os físicos continentais tentaram descrever o fenômeno matematicamente utilizando a abordagem de Ampère dos elementos de corrente. Em 1835 ao estudar a abordagem de força entre elementos de corrente

---

<sup>39</sup> Este apêndice foi baseado em Roche (1990) sem a consulta de fontes primárias.

<sup>40</sup> Para mais detalhes sobre as questões de assimetrias envolvidas no experimento de Oersted, veja SILVA 2006 e MARTINS 1986.

de Ampère, o físico alemão Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) descobriu uma função matemática muito semelhante à função conhecida hoje por potencial vetor. Ele encontrou que a força eletromotriz induzida era dada pela variação com o tempo desta função matemática.

De acordo com Gauss (apud ROCHE, 1990, p. 148):

[...] A lei da indução (descoberta às 7 horas, 23 de janeiro, 1835, ao acordar)  
 1. O poder de produzir eletricidade, que é determinado em  $P$  por um elemento de corrente  $\gamma$ , numa distância  $P = r$ , é, durante  $dt$ , a diferença nos valores  $\gamma/r$  correspondentes aos instantes  $t$  e  $t + dt$ , dividido por  $dt$ , onde  $\gamma$  é para ser considerado tendo tamanho e direção. Isto pode ser expresso por:

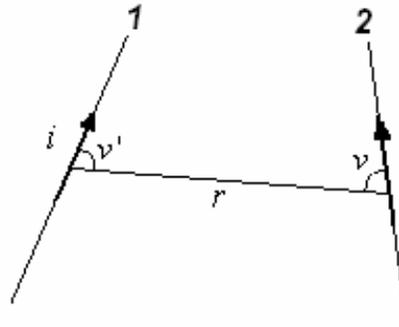
$$-\frac{d}{dt}(\gamma/r).$$

Gauss ainda descobriu que uma operação semelhante ao rotacional, aplicado a esta função, produzia a intensidade magnética local. Ele não atribuiu nenhum tipo de significado físico a esta função considerando-a simplesmente como uma quantidade auxiliar. O trabalho de Gauss só foi publicado em 1867, quando Maxwell já tinha publicado dois artigos sobre eletromagnetismo onde o conceito de potencial vetor já tinha sido estabelecido dentro de sua teoria, como foi visto no Capítulo quatro.

Em 1852 Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887) descobriu uma função semelhante ao potencial vetor, independentemente dos trabalhos de Gauss. Ele se baseou nos trabalhos de Wilhelm Eduard Weber (1804 – 1891) sobre a força entre elementos de correntes. Esta força deduzida por Weber em 1846 tinha as mesmas conseqüências que a de Ampère em alguns casos. No entanto, a força de Weber continha dois termos adicionais: um dependente da derivada primeira da distância mútua entre as partículas em relação ao tempo, ou seja, da velocidade entre as partículas, e outro da derivada segunda. A partir desta força Weber chegou numa equação para a força eletromotriz induzida em um circuito secundário de comprimento  $\alpha$  devida a uma mudança de corrente  $i$  em um circuito primário de comprimento  $\alpha'$  (WEBER apud ROCHE, 1990, p. 148):

$$fem = -\frac{1}{2} \frac{\alpha\alpha'}{r} a \cos v \cos v' \frac{di}{dt}, \quad \text{A.1}$$

$a$  é uma constante de proporcionalidade,  $\nu$  e  $\nu'$  são os ângulos entre os elementos de comprimento dos circuitos e a linha unindo-os (Figura 3.2).



**Figura 3.2.** Representação dos elementos da *fem* entre dois circuitos.

Escrevendo A.1 em componentes cartesianas Kirchhoff descobriu que a *fem* induzida por unidade de comprimento no circuito secundário é igual à variação com o tempo de uma certa função vetorial, de componentes  $U$ ,  $V$ ,  $W$ , muito parecida com o potencial vetor conhecido atualmente. Ele também encontrou que a *fem* resultante por unidade de comprimento ou, em terminologia moderna, a componente  $x$  da intensidade do campo elétrico, era dada por (KIRCHHOFF apud ROCHE, 1990, p. 148):

$$u = -2k \left( \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right), \quad \text{A.2}$$

O mesmo sendo válido para as componentes  $y$  e  $z$ . Kirchhoff também mostrou que:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial t}, \quad \text{A.3}$$

relação parecida com a condição de Lorentz usada atualmente no eletromagnetismo.

No entanto, esta condição não tinha o mesmo significado que o atual. Para Kirchhoff esta condição era uma consequência de sua definição integral do potencial vetor, ou seja, uma condição auxiliar destituída de qualquer significado físico. Kirchhoff atribuiu um significado físico para o potencial escalar. Sendo assim, poderia ser que o potencial vetor

adquirisse algum tipo de significado físico nas mãos dele, mas isso não ocorreu (ROCHE, 1990, p. 149).

Outra contribuição digna de nota para o conceito de potencial vetor no continente foi dada por Ludwig Lorenz (1829 - 1891). Estudando a propagação de distúrbios elásticos através de um sólido, Lorenz introduziu funções escalares e vetoriais “retardadas” matematicamente semelhantes aos conceitos de potencial vetor e escalar, em 1861<sup>41</sup>. Em 1867 ele aplicou uma abordagem similar para o eletromagnetismo, tratando o espaço como um meio de baixa condutividade e aplicando as idéias de Kirchhoff sobre a indução eletromagnética. Lorenz, no entanto, utilizou densidades de carga e correntes dependentes do tempo enquanto que Kirchhoff havia usado valores estacionários. O físico dinamarquês obteve a seguinte relação para a componente  $x$  da função potencial retardada (LORENZ apud ROCHE, 1990, p. 149):

$$\alpha = \iiint \frac{dx' dy' dz'}{r} u' \left( t - \frac{r}{a} \right), \quad \text{A.4}$$

sendo o mesmo para as componentes  $\beta$  e  $\gamma$ . A grandeza  $u'$  é a densidade de corrente retardada, ou seja, a densidade de corrente no instante que a onda eletromagnética deixa a fonte. A quantidade entre parênteses é o tempo retardado  $t_r = t - r/a$ , e  $a$  a velocidade de propagação da onda. Lorenz também obteve a relação entre as funções escalar e vetorial retardadas semelhante à relação obtida anteriormente por Kirchhoff:

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} = -2 \left( \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right). \quad \text{A.5}$$

A menos das unidades esta relação é igual à conhecida atualmente por calibre de Lorentz.

---

<sup>41</sup> O conceito de potencial escalar e potencial vetor retardados refere-se ao conceito de tempo retardado. Quando as fontes de carga e corrente possuem dependência temporal, ou seja, não são estáticas, os potenciais, num ponto localizado numa distância  $r$  das fontes, dependem do tempo de trânsito da informação, que neste caso, está associado à velocidade  $c$  das ondas eletromagnéticas por  $r/c$ . As integrais envolvidas no cálculo dos potenciais são feitas no tempo em que a “mensagem” deixa as fontes, ou seja, no tempo retardado, explicando assim, o nome de potenciais retardados.

É importante salientar que nem Kirchhoff, Lorenz ou Gauss relacionaram o conceito de potencial vetor ao magnetismo estacionário (como Thomson) ou atribuíram algum tipo de significado mecânico para ele. Como foi visto no Capítulo dois o eletromagnetismo no continente usava a abordagem de ação à distância. Dentro desta visão os físicos continentais não elaboravam modelos mecânicos para a explicação dos fenômenos eletromagnéticos. Sendo assim, o potencial vetor permaneceu como um artifício de cálculo dentro da abordagem continental para o eletromagnetismo.