**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

FERNANDO VERNAL SALINA

**Métodos híbridos para reconstrução tomográfica
de imagens usando POCS e teoria da estimação**

São Carlos
2011

FERNANDO VERNAL SALINA

Métodos híbridos para reconstrução tomográfica de imagens usando POCS e teoria da estimação

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Doutor em Ciência.

Área de Concentração: Física Aplicada

Opção: Física Computacional

Orientador: Prof. Dr. Nelson Delfino d'Ávila Mascarenhas

Co-orientador: Prof. Dr. Alberto Tannús

Versão Corrigida

(versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos

2011

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação IFSC/USP

Salina, Fernando Vernal

Métodos híbridos para reconstrução tomográfica de imagens usando POCS e teoria da estimação./Fernando Vernal Salina; orientador Nelson Delfino d'Avila Mascarenhas, co-orientador Alberto Tannus – Versão Corrigida -- São Carlos, 2011.

135 p.

Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Física - Área de concentração: Física Aplicada) – Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo.

1. POCS. 2. Reconstrução tomográfica. 3. Teoria da estimação. 4. Tomografia computadorizada. I. Título.

DEDICATÓRIA

*Aos meus pais,
André e Tereza.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, pois através d'Ele tudo é possível.

Ao Professor Nelson Mascarenhas, pela orientação, amizade, paciência e principalmente pela oportunidade oferecida para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores Paulo Cruvinel e Alberto Tannús pela cooperação e ajuda.

À minha família pelo incentivo e carinho.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física de São Carlos.

Aos colegas e companheiros de seminários do Grupo de Arquitetura e Processamento de Imagem da UFSCar (GAPIS/DC/UFSCar), principalmente ao Murilo pelas idéias e apoio ao trabalho.

Aos amigos Ângelo, Paulo Henrique, Cristiano e Walter Britto pelo constante apoio.

A FINEP pelo projeto FINEP-RECOPE n° 77.97.0575.00.

À FAPESP pelo projeto temático n° 2002/07153-2.

A todas as pessoas que contribuíram para que esse trabalho pudesse ser realizado.

*“Não existe caminho para a felicidade...
A felicidade é o caminho!”*
— MAHATMA GANDHI (1869 - 1948)

RESUMO

SALINA, F. V. **Métodos híbridos para reconstrução tomográfica de imagens usando POCS e teoria da estimação.** 2007. 135 f. Tese (Doutorado) – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

Nesta tese é apresentado um novo método de reconstrução de imagens, por tomografia de transmissão, de projeções sujeitas a ruído na contagem de fótons. O método de reconstrução selecionado utiliza a técnica POCS (*Projections Onto Convex Sets*). A estimação das projeções originais a partir das observações ruidosas se dá por meio de quatro métodos: a) estimação utilizando o critério MAP (*Maximum a Posteriori*); b) filtragem nos coeficientes *wavelets* das projeções ruidosas; c) aplicação do filtro de Wiener pontual e d) aplicação do filtro de Goodman-Belsher. É apresentado o resultado da reconstrução após a estimação das projeções, mostrando o *ISNR* (*Improvement Signal-to-Noise Ratio*) entre as imagens reconstruídas, a partir das projeções ruidosas, com a técnica POCS, estimando as projeções e sem a realização da estimação. Foram utilizados, para reconstrução tomográfica, projeções de corpos de prova obtidos por meio de simulação e também projeções obtidas experimentalmente no minitomógrafo do CNPDIA-EMBRAPA. O uso de estimação sobre as projeções ruidosas mostrou-se eficaz para melhorar a relação sinal-ruído na imagem final, pois esse pré-processamento faz com que os conjuntos impostos pelas projeções sejam mais restritivos. Deve-se observar que a melhoria das imagens obtidas com o uso de filtragem das projeções é obtida com uma relação custo-benefício bastante baixa, pois a maior parte do custo computacional está na fase de reconstrução das imagens.

Palavras-chave: POCS. Reconstrução Tomográfica. Teoria da Estimação. Tomografia Computadorizada.

ABSTRACT

SALINA, F. V. **Hybrid methods for tomographic image reconstruction using POCs and estimation theory**. 2007. 135 f. Tese (Doutorado) – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

In this thesis is presented a new method for image reconstruction, by transmission tomography, for projections under noise in the counting of photons. The selected method of reconstruction uses the POCS (*Projections Onto Convex Sets*) technique. The estimation of the original projections from the noisy projections observed is performed through four methods: a) estimation using the MAP (*Maximum a Posteriori*) criteria; b) through of filtering of the *wavelets* coefficients of the noisy projections; c) using the pointwise Wiener filter and d) using the Goodman-Belsher filter. We present the result of reconstruction after projection estimation, showing the *ISNR (Improvement Signal-to-Noise Ratio)* between the reconstructed images on noisy projections, using POCS technique after the estimated projections and without this estimation. We use, for tomographic reconstruction, test body projections obtained through simulation and also projections obtained experimentally in the minitomograph scanner of CNPDIA-EMBRAPA. The use of estimation on noisy projections demonstrated to be efficient in improving the signal-noise ratio in the final image, since this pre-processing makes the sets that projections more restrictive. We should observe that the use of projection filtering is obtained with a cost-benefit ratio rather low, since the largest part of the computational effort is in the image reconstruction phase.

Keywords: POCS. Tomographic Reconstruction. Estimation Theoretic. Computadorized Tomography.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - (a) Geometria de fonte-detetor de feixes de raios paralelos e (b) geometria de fonte-detetor de feixe de raios em leque.	37
Figura 2.2 - Geometria e arquitetura dos tomógrafos de (a) primeira geração, (b) segunda geração, (c) terceira geração e (d) quarta geração.	38
Figura 2.3 - Esquema simplificado de um tomógrafo de primeira geração (1)	39
Figura 2.4 - Diagrama de bloco do minitomógrafo do CNPDIA.	40
Figura 2.5 - Relação entre coordenadas retangulares x-y e sistemas de coordenadas s-t.	42
Figura 2.6 - Na tomografia de transmissão, uma seção transversal 2-D de um objeto 3-D é penetrada por uma série de raios paralelos ou divergentes.	43
Figura 2.7 - Modelo Linear de degradação.	44
Figura 2.8 - Modelo usado em reconstrução tomográfica da imagem $f(x,y)$, onde as projeções são descritas pela integral de linha $g(t, \theta)$	45
Figura 2.9 - Modelo discretizado para reconstrução de imagens de tomografia de transmissão.	46
Figura 2.10 - Modelo discretizado para reconstrução de imagens de tomografia de transmissão.	50
Figura 2.11 - O método ART é ilustrado para o caso de dois hiperplanos.	51
Figura 3.1 - Modelo estatístico da aquisição de projeções com ruído de Poisson. . . .	55
Figura 3.2 - Sinal manhattan skyline: (a) sinal original, (b) sinal com ruído Poisson.	56
Figura 3.3 - Redução do ruído utilizando MAP com densidade <i>a priori</i> gaussiana. . .	57
Figura 3.4 - Redução do ruído utilizando MAP com densidade <i>a priori</i> chi-quadrado.	58
Figura 3.5 - Redução do ruído utilizando MAP com densidade <i>a priori</i> gama.	59
Figura 3.6 - Redução do ruído utilizando o Filtro de Wiener pontual.	61

Figura 3.7 - Redução do ruído utilizando o Filtro de Goodman-Belsher.	62
Figura 3.8 - Aninhamento entre os espaços com diferentes níveis de resolução. . . .	64
Figura 3.9 - Espaço da função de escala e função <i>wavelet</i>	65
Figura 3.10 - Processo de análise composto pela aplicação do banco de filtros.	66
Figura 3.11 - Processo de síntese composto pela aplicação do banco de filtros.	66
Figura 3.12 - <i>Wavelets</i> ortonormais: (a) a função de escala de Haar e (b) a função <i>wavelet</i> em termos da função de escala.	67
Figura 3.13 - Famílias de <i>wavelets de Daubechies</i> : (a) <i>wavelet</i> primária DB2, (b) função de escala DB2, (c) <i>wavelet</i> primária DB3, (d) função de escala DB3, (e) <i>wavelet</i> primária DB4 e (f) função de escala DB4.	70
Figura 3.14 - <i>Thresholding</i> : (a) <i>hard-thresholding</i> e (b) <i>soft-thresholding</i>	72
Figura 3.15 - <i>Hard-thresholding</i> utilizando as famílias <i>wavelets</i> : (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4.	73
Figura 3.16 - <i>Soft-thresholding</i> utilizando as famílias <i>wavelets</i> : (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4.	73
Figura 4.1 - (a) Reta l e uma reta perpendicular à l passando por um ponto arbitrário x ; (b) figura bidimensional com círculos centrados em y , somente um disco toca o disco D em um ponto, representado por y^*	76
Figura 4.2 - Representação geométrica da convergência do método POCS sequencial.	78
Figura 4.3 - Comportamento do algoritmo de POCS (a) sequencial e (b) paralelo quando não há interseção entre os conjuntos convexos.	78
Figura 4.4 - Em conjuntos não convexos a solução pode convergir para (a) um <i>trap</i> ou para (b) a interseção, dependendo da estimativa inicial.	79
Figura 4.5 - Os pontos projetados em C_{nc} nas proximidades de x_T convergem para x_T	79
Figura 4.6 - <i>Trap</i> repulsivo.	80
Figura 4.7 - (a) l_1 e l_2 tem uma interseção (b) l_1 e l_2 são coincidentes, ou seja, possuem infinitas soluções (c) l_1 e l_2 são paralelas, não possuindo nenhuma interseção.	80

Figura 4.8 - (a) As sucessivas projeções convergem para a solução do sistema, (b) a projeção converge para a solução mais próxima da estimação inicial e (c) como não existe solução as projeções ficam oscilando entre dois valores.	83
Figura 4.9 - ((a) as sucessivas projeções convergem para a solução do sistema, (b) a projeção converge para a solução mais próxima da estimação inicial e (c) como não existe solução as projeções convergem para a solução dos mínimos quadrados.	84
Figura 4.10 - (a)Phantom Sheep-Logan, (b) reconstrução com retroprojeção filtrada, (c) reconstrução utilizando POCS paralelo e (d) reconstrução utilizando POCS sequencial	87
Figura 5.1 - O método proposto consiste em filtrar as projeções antes de utilizar o algoritmo de reconstrução.	89
Figura 5.2 - <i>Phantom</i> Shepp-Logan: (a) original e (b) ruidoso.	91
Figura 5.3 - Reconstrução do <i>phantom</i> ruidoso simulado com filtragem das projeções ruidosas com o critério MAP com densidade <i>a priori</i> : (a) gaussiana, (b) chi-quadrado, (c) gama e (d) beta	91
Figura 5.4 - Reconstrução do <i>phantom</i> ruidoso simulado com redução de ruído nas projeções utilizando o <i>hard-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i> usando as famílias: (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4.	92
Figura 5.5 - Reconstrução do <i>phantom</i> ruidoso simulado com redução de ruído nas projeções utilizando o <i>soft-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i> usando as famílias: (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4.	93
Figura 5.6 - Reconstrução do <i>phantom</i> ruidoso simulado com filtragem de ruído nas projeções utilizando os filtros de (a) Wiener e (b) Goodman-Belsher . . .	93

Figura 5.7 - (a) *Phantom* de Shepp-Logan de tamanho 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo com estimação das projeções utilizando o critério MAP com densidades *a priori* (c) gaussiana, (d) chi-quadrado, (e) beta e (f) gama. Redução de ruído nas projeções utilizando *hard-thresholding* nos coeficientes *wavelets* utilizando as famílias *wavelets* (g) Haar, (h) DB2, (i) DB3 e (j) DB4. Filtragem nas projeções utilizando (k) o filtro de Wiener e o (l) filtro de Goodman-Belsher. 95

Figura 5.8 - (a) *Phantom* de Shepp-Logan de tamanho 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo precedida da aplicação do *soft-thresholding* nos coeficientes *wavelets* das projeções utilizando as famílias *wavelets* (c) Haar, (d) DB2, (e) DB3 e (f) DB4. 96

Figura 5.9 - Ilustração do corte transversal dos Phantoms experimentais (a) homogêneo, (b) simétrico e (c) assimétrico. 97

Figura 5.10 - *Phantom* homogêneo: (a) imagem ideal, reconstruída a partir das projeções obtidas com 20 segundos de exposição por raio; (b) imagem ruidosa reconstruída a partir das projeções obtidas com 3 segundos de exposição por raio 98

Figura 5.11 - Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com estimação das projeções livres de ruído utilizando o critério MAP utilizando as densidades de probabilidades *a priori* (a) gaussiana, (b) chi-quadrado, (c) beta e (d) gama. 99

Figura 5.12 - Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com filtragem nos coeficientes *wavelets* utilizando: *Hard-thresholding* nos coeficientes *wavelets* das famílias (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4; *Soft-thresholding* nos coeficientes *wavelets* das famílias (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4. 100

Figura 5.13 - Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com a aplicação nas projeções dos filtros de (a) Wiener e (b) Goodman-Belsher. 101

Figura 5.14 - (a) *Phantom* homogêneo de dimensão 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo com estimação das projeções utilizando o critério MAP com densidades *a priori* (c) gaussiana, (d) chi-quadrado, (e) beta e (f) gama. Redução de ruído nas projeções utilizando *hard-thresholding* nos coeficientes *wavelets* utilizando as famílias *wavelets* (g) Haar, (h) DB2, (i) DB3 e (j) DB4. Filtragem nas projeções utilizando (k) o filtro de Wiener e o (l) filtro de Goodman-Belsher. 102

Figura 5.15 - (a) *Phantom* homogêneo de dimensão 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo precedida da aplicação do *soft-thresholding* nos coeficientes *wavelets* das projeções utilizando as famílias *wavelets* (c) Haar, (d) DB2, (e) DB3 e (f) DB4. 103

Figura 5.16 - *Phantom* simétrico: (a) imagem ideal, reconstruída a partir das projeções obtidas com 20 segundos de exposição por raio; (b) imagem ruidosa reconstruída a partir das projeções obtidas com 3 segundos de exposição por raio. 104

Figura 5.17 - Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com estimação das projeções livres de ruído utilizando o critério MAP utilizando as densidades de probabilidades *a priori* (a) gaussiana, (b) chi-quadrado, (c) beta e (d) gama. 105

Figura 5.18 - Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com filtragem nos coeficientes *wavelets* utilizando: *Hard-thresholding* nos coeficientes *wavelets* das famílias (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4; *Soft-thresholding* nos coeficientes *wavelets* das famílias (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4. 106

Figura 5.19 - Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com a aplicação nas projeções dos filtros de (a) Wiener e (b) Goodman-Belsher. 106

Figura 5.20 - (a) *Phantom* simétrico de dimensão 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo com estimação das projeções utilizando o critério MAP com densidades *a priori* (c) gaussiana, (d) chi-quadrado, (e) beta e (f) gama. Redução de ruído nas projeções utilizando *hard-thresholding* nos coeficientes *wavelets* utilizando as famílias *wavelets* (g) Haar, (h) DB2, (i) DB3 e (j) DB4. Filtragem nas projeções utilizando (k) o filtro de Wiener e o (l) filtro de Goodman-Belsher. 108

Figura 5.21 - (a) *Phantom* Simétrico de dimensão 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo precedida da aplicação do *soft-thresholding* nos coeficientes *wavelets* das projeções utilizando as famílias *wavelets* (c) Haar, (d) DB2, (e) DB3 e (f) DB4. . . 109

Figura 5.22 - *Phantom* assimétrico: (a) imagem ideal, reconstruída a partir das projeções obtidas com 20 segundos de exposição por raio; (b) imagem ruidosa reconstruída a partir das projeções obtidas com 3 segundos de exposição por raio. 110

Figura 5.23 - Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com estimação das projeções livres de ruído utilizando o critério MAP utilizando as densidades de probabilidades *a priori* (a) gaussiana, (b) chi-quadrado, (c) beta e (d) gama. 110

Figura 5.24 - Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com filtragem nos coeficientes *wavelets* utilizando: *Hard-thresholding* nos coeficientes *wavelets* das famílias (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4; *Soft-thresholding* nos coeficientes *wavelets* das famílias (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4. 111

Figura 5.25 - Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com a aplicação nas projeções dos filtros de (a) Wiener e (b) Goodman-Belsher. 111

Figura 5.26 - (a) <i>Phantom</i> assimétrico de dimensão 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo com estimação das projeções utilizando o critério MAP com densidades <i>a priori</i> (c) gaussiana, (d) chi-quadrado, (e) beta e (f) gama. Redução de ruído nas projeções utilizando <i>hard-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i> utilizando as famílias <i>wavelets</i> (g) Haar, (h) DB2, (i) DB3 e (j) DB4. Filtragem nas projeções utilizando (k) o filtro de Wiener e o (l) filtro de Goodman-Belsher.	113
Figura 5.27 - (a) <i>Phantom</i> assimétrico de dimensão 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo precedida da aplicação do <i>soft-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i> das projeções utilizando as famílias <i>wavelets</i> (c) Haar, (d) DB2, (e) DB3 e (f) DB4.	114
Figura B.1 - Sinal com amplitude 10: (a) sinal original, (b) sinal sujeito ao ruído de Poisson e (c) ruído no domínio de Anscombe.	133
Figura B.2 - Sinal com amplitude 100: (a) sinal original, (b) sinal sujeito ao ruído de Poisson e (c) ruído no domínio de Anscombe.	134
Figura B.3 - Sinal com amplitude 1.000: (a) sinal original, (b) sinal sujeito ao ruído de Poisson e (c) ruído no domínio de Anscombe.	134
Figura B.4 - Sinal com amplitude 10.000: (a) sinal original, (b) sinal sujeito ao ruído de Poisson e (c) ruído no domínio de Anscombe.	134

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Características das gerações de tomógrafos.	39
Tabela 5.1 - ISNR da reconstrução com filtragem nas projeções utilizando o critério MAP com diferentes densidades de probabilidades <i>a priori</i>	91
Tabela 5.2 - ISNR da reconstrução com a utilização do <i>hard-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i> das projeções utilizando diferentes famílias <i>wavelets</i> . .	92
Tabela 5.3 - ISNR da reconstrução com a utilização do <i>soft-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i> das projeções utilizando diferentes famílias <i>wavelets a priori</i>	93
Tabela 5.4 - ISNR da reconstrução tomográfica, do phantom Shepp-Logan com dimensão 50X50, utilizando POCS e filtragem nas projeções.	94
Tabela 5.5 - ISNR da reconstrução tomográfica, do phantom Homogêneo com dimensão 100X100, utilizando POCS e filtragem nas projeções.	99
Tabela 5.6 - ISNR da reconstrução tomográfica, do <i>phantom</i> Homogêneo com dimensão 50X50, utilizando POCS e filtragem nas projeções.	104
Tabela 5.7 - ISNR da reconstrução tomográfica, do <i>phantom</i> simétrico com dimensão 100X100, utilizando POCS e filtragem nas projeções.	107
Tabela 5.8 - ISNR da reconstrução tomográfica, do <i>phantom</i> simétrico com dimensão 50X50, utilizando POCS e filtragem nas projeções.	109
Tabela 5.9 - ISNR da reconstrução tomográfica, do <i>phantom</i> assimétrico com dimensão 100X100, utilizando POCS e filtragem nas projeções.	112
Tabela 5.10 - ISNR da reconstrução tomográfica, do <i>phantom</i> assimétrico com dimensão 50X50, utilizando POCS e filtragem nas projeções.	115

LISTA DE ABREVIATURAS

<i>MAP</i>	Maximum a Posteriori
<i>TA</i>	Transformada de Anscombe
<i>POCS</i>	Projections onto Convex Sets
<i>ISNR</i>	Improvement Signal-to-Noise Ratio
<i>DWT</i>	Discrete Wavelet Transform
<i>IDWT</i>	Inverse Discrete Wavelet Transform
<i>MOSP</i>	Method of Sequential Projections
<i>MOPP</i>	Method of Parallel Projections
<i>WaRD</i>	Wavelet-based Regularized Deconvolution

SUMÁRIO

.....	
1	Introdução 31
2	Tomografia Computadorizada 35
2.1	Considerações Iniciais 35
2.2	Princípios da Tomografia Computadorizada 36
2.2.1	Tomografia de Transmissão 36
2.2.2	Minitomógrafo desenvolvido no CNPDIA-EMBRAPA 38
2.2.3	Modelo Matemático de Reconstrução 41
2.2.4	A Transformada de Radon 44
2.3	Modelo de Discretização para o Problema de Tomografia Computadorizada..... 46
2.4	Algoritmos de Reconstrução Tomográfica 47
2.4.1	Aplicação Direta da Transformada de Fourier 47
2.4.2	Método de Retroprojeção Simples 48
2.4.3	Reconstrução por Retroprojeção Filtrada 49
2.4.4	Algoritmos de Reconstrução Algébrica 49
2.5	Considerações Finais..... 53
3	Redução de Ruído 55
3.1	Considerações Iniciais 55
3.2	Estimação Usando o Critério de <i>Maximum a Posteriori</i> - MAP 56
3.2.1	Estimador MAP com densidade <i>a priori</i> gaussiana 57

3.2.2	Estimador MAP com densidade <i>a priori</i> chi-quadrado	58
3.2.3	Estimador MAP com densidade <i>a priori</i> gama	58
3.2.4	Estimador MAP com densidade <i>a priori</i> beta.....	59
3.3	Transformada de Anscombe	60
3.4	Filtro de Wiener Pontual	60
3.5	Filtro Linear de Goodman-Belsher	61
3.6	Filtragem de ruído utilizando <i>Wavelet</i>	63
3.6.1	Análise de Multiresolução	64
3.6.2	<i>Wavelet</i> Haar	66
3.6.3	<i>Wavelets</i> de Daubechies	68
3.6.4	Transformada <i>Wavelet</i> do Sinal Ruidoso	69
3.6.5	<i>Thresholding</i>	71
3.7	Considerações Finais.....	74
4	Projeções em Conjuntos Convexos (POCS - Projections onto Convex Sets)	75
4.1	Considerações Iniciais	75
4.2	Projeção.....	75
4.3	Algoritmo de POCS.....	77
4.3.1	Comportamento do algoritmo POCS.....	77
4.4	Conjuntos Convexos e Conjuntos não Convexos	78
4.5	O Uso de POCS para solução de equações lineares	80
4.5.1	Projetores	81
4.5.2	Comportamento do Algoritmo.....	83
4.6	Conjuntos de Restrições Convexos.....	84
4.6.1	Conjunto de Restrição de Suporte Finito	85
4.6.2	Conjunto de Restrição de Não Negatividade.....	85
4.6.3	Conjunto de Restrição de Amplitude Limitada	85

4.6.4	Conjunto de Imagens com Pontos Conhecidos	86
4.7	Comparação entre o algoritmo de POCS e Retroprojeção filtrada	86
4.8	Considerações Finais.....	88
5	Método Proposto	89
5.1	Considerações Iniciais	89
5.2	Algoritmo	89
5.3	Resultados	90
5.3.1	Phantom Simulado	90
5.3.2	<i>Phantoms</i> Reais	97
5.4	Considerações Finais.....	114
6	Conclusão.....	117
6.1	Considerações Iniciais	117
6.2	Contribuições.....	117
6.3	Limitações	118
6.4	Trabalhos Futuros.....	118
	Referências.....	119
	Apêndice A – Desenvolvimento dos estimadores MAP	125
A.1	Estimador com densidade <i>a priori</i> gaussiana	125
A.2	Estimador com densidade <i>a priori</i> gama	126
A.3	Estimador com densidade <i>a priori</i> chi-quadrado	128
A.4	Estimador com densidade <i>a priori</i> beta.....	128
	Apêndice B – Transformada de Anscombe	133

1 INTRODUÇÃO

Em muitos problemas de processamento de imagem, tal como reconstrução tomográfica, as observações são modeladas como um sinal ruidoso. Muitas vezes assume-se que o ruído é um processo gaussiano branco, porém, em problemas físicos, os dados armazenados não podem ser modelados como um ruído gaussiano, mas como um processo de Poisson.

Em reconstrução tomográfica de imagens, o sinal capturado está sujeito a um ruído de Poisson devido à baixa contagem de fótons. O tempo de exposição de um corpo à radiação está diretamente ligado à contagem de fótons obtida pelo tomógrafo. Quanto menor a contagem de fótons, mais ruidosas serão as projeções capturadas. Nas referências (2, 3) é proposto um método que mantém o compromisso entre métodos puramente estatísticos e o da retroprojeção filtrada. Esses métodos são implementados inicialmente pela filtragem do ruído Poisson presente nas projeções, seguida pelo algoritmo de retroprojeção filtrada.

Métodos de reconstrução tomográfica baseados em POCS (*Projections onto Convex Sets*) consideram restrições sobre todos os conjuntos de possíveis soluções, permitindo assim a utilização de conhecimento *a priori*, por meio do uso de restrições convexas. Tais métodos são apresentados na referência (4). O método de POCS paralelo obtém melhor resultado que o POCS seqüencial na presença de ruído pois, não havendo interseção entre os conjuntos de restrições, o POCS paralelo converge para uma solução, enquanto o método seqüencial altera ciclicamente entre os conjuntos de restrição (4). Uma discussão sobre a convergência para os métodos POCS é fornecida nas referências (5, 6).

Em 1996, Bhumkar et al.(7) apresentam alguns conjuntos convexos utilizados na reconstrução tomográfica a partir de projeções ruidosas. A técnica, utilizando POCS seqüencial e paralelo é denominada, no trabalho referenciado, como MOSP (*Method of Sequential Projections*) e MOPP (*Method of Parallel Projections*). Posteriormente 8 propuseram um método de regularização nas projeções utilizando um conjunto de restrição baseado na utilização de uma imagem de referência. Esses conjuntos melhoraram consideravelmente as imagens reconstruídas.

Malgouyres(9), em 2002 descreve a utilização de conjuntos convexos para filtrar os coeficientes *wavelets* de uma imagem ruidosa, sendo necessário, porém, que o ruído seja aditivo. Esse modelo requer conhecimento *a priori* da imagem para que todas as estruturas sejam preservadas, podendo ocorrer uma suavização excessiva caso os conjuntos não sejam adequados à imagem.

O método de filtragem dos coeficientes *wavelets* tem sido alvo de estudo na literatura. Zhong, Ning e Conover(10) apresentam um método de redução de ruído aplicado à imagem tomográfica reconstruída a partir de projeções com feixe de raio em leque, em 2004. O método baseia-se na detecção de singularidades nos coeficientes *wavelets*.

Neelamani, Choi e Baraniuk(11) mostram um método do filtro inverso regularizado aplicado aos coeficientes *wavelets*, denominado WaRD (*Wavelet-based regularized Deconvolution*). Hou, Tian e Liu(12) expõem um algoritmo similar, utilizando informações estatísticas sobre o sinal para estimar os parâmetros (variância do ruído nas escalas *wavelets*) para utilização do filtro de Wiener nos coeficientes *wavelets*. Esses métodos foram aplicados as imagens que possuem ruído gaussiano aditivo com média nula.

Um método de regularização nos coeficientes *wavelets* é apresentado por Kalifa, Laine e Esser(13) no qual as projeções estimadas são reconstruídas com o algoritmo de retroprojeção filtrada, as quais produziram resultados superiores aos do método de reconstrução que não utilizou essa regularização.

Boubchir e Fadili(14) apresentam um método de filtragem dos coeficientes *wavelets*, para o ruído aditivo gaussiano, utilizando o critério MAP para estimar os coeficientes *wavelets* livres de ruído. Esse método (para casos específicos) é equivalente à aplicação do *universal hard-thresholding*.

A filtragem do ruído, dependente de sinal, utilizando o critério MAP (*Maximum a Posteriori*) apresenta bons resultados para imagens sujeitas a esse tipo de ruído, conforme apresentado por Liu, Freeman e Kang(15). As informações estatísticas sobre o ruído permitem filtrar o sinal de maneira a otimizar a entropia do sinal resultante (16). A estimação MAP aplicada às projeções, em tomografia computadorizada, pode produzir melhores resultados na imagem resultante, conforme apresentado por Wang et al.(17) e Rivière, Bian e Vargas(18).

Filtrar as projeções ruidosas antes da reconstrução possibilita gerar melhores resultados, pois a estimação dessas projeções tornam seus valores mais próximos dos valores esperados. Aliado à estimação, um método de reconstrução que incorpora algum conhecimento *a priori* da imagem possibilita a produção de resultados ainda melhores.

No capítulo 2, serão apresentadas as bases da tomografia computadorizada, esquematizado o tomógrafo utilizado para a coleta de dados e apresentados métodos de reconstrução tomográfica.

No capítulo 3 serão apresentados os métodos para estimação do sinal original, dada uma observação ruidosa. Serão abordados os métodos de estimação MAP com densidades *a priori* gaussiana, chi-quadrado, beta e gama. É abordada, neste capítulo, a filtragem dos coeficientes *wavelets* das projeções, bem como a utilização do filtro de Wiener pontual e o filtro de Goodman-Belsher.

O capítulo 4 contém a apresentação dos algoritmos POCS, e, ao final do capítulo uma comparação entre a reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo, POCS sequencial e Retroprojeção Filtrada.

O capítulo 5 é destinado à descrição do algoritmo proposto, bem como à análise dos resultados gerados pelo método de reconstrução abordado.

As conclusões gerais e perspectivas para trabalhos futuros são abordadas no capítulo 6.

O Anexo A mostra o desenvolvimento dos estimadores MAP. Esses estimadores foram desenvolvidos a partir dos métodos apresentados por Furuie(19) e Santos(20). O Anexo B apresenta o comportamento do ruído de Poisson, presente no sinal, no domínio de Anscombe.

2 TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA

2.1 Considerações Iniciais

A tomografia computadorizada produz uma imagem que representa um corte perpendicular do corpo, o que é de grande interesse em muitas aplicações, principalmente no diagnóstico médico, tendo em vista que permite aos médicos visualizarem órgãos internos com precisão. A primeira aplicação médica utilizava raios X para formar as imagens de tecidos, tendo por base seu coeficiente de atenuação. Atualmente, essas imagens também têm sido geradas a partir de radioisótopos, ultrassom e ressonância magnética, sendo o parâmetro para reconstrução da imagem diferente em cada um desses casos.

As aplicações de tomografia não ficam restritas somente à área médica. Alguns pesquisadores têm utilizado esta técnica para mapear recursos presentes no solo, gerando imagens com testes não destrutivos. O aspecto inovador apresentado pela Tomografia Computadorizada é a possibilidade da reconstrução de uma imagem a partir de suas projeções, sendo que a projeção em um dado ângulo é a integral da imagem na direção especificada pelo ângulo. A projeção é a medida da energia transmitida quando um objeto é irradiado em um dado ângulo.

Do ponto de vista matemático, a solução para o problema da reconstrução de uma função a partir de seus dados de projeção foi proposta por Radon em 1917 (21), embora somente na década de 70 Hounsfield tenha inventado o primeiro tomógrafo (22), utilizando raios X, invenção pela qual recebeu o prêmio Nobel em 1979. Ele dividiu o prêmio com Allan Cormack que, em 1963 contribuiu de maneira relevante para o desenvolvimento de algoritmos para reconstrução tomográfica (23). Radon descobriu as bases matemáticas para reconstrução de um corpo a partir de suas projeções, porém, apenas mediante infinitas projeções de um corpo. Cormack, por outro lado, propôs a reconstrução de um corpo com base em um número finito de projeções.

Depois da invenção de Hounsfield, a tomografia computadorizada por transmissão ob-

teve grandes avanços, principalmente no desenvolvimento dos algoritmos para reconstrução. Hounsfield empregou a técnica de reconstrução algébrica, que será descrita na seção 2.4.4 na página 49, e reconstruiu uma imagem de tamanho 80×80 *pixels*. Em 1971, foi proposto o algoritmo de convolução e retroprojeção, primeiramente desenvolvido por Ramachandran e Lakshminarayanan (24), sendo aprimorado posteriormente por Shepp e Logan (25). Esses dois algoritmos reduzem consideravelmente o tempo de processamento para reconstrução e a imagem produzida é numericamente mais precisa. Como resultado, fabricantes comerciais de tomógrafos iniciaram a construção de um sistema capaz de reconstruir imagens de 256×256 e 512×512 com maior precisão (26).

Neste capítulo, serão apresentados os princípios da tomografia computadorizada, sendo mostrados alguns algoritmos de reconstrução tomográfica, tal como a aplicação direta da transformada de Fourier, os algoritmos de retroprojeção e retroprojeção filtrada, bem como o algoritmo de reconstrução algébrica.

2.2 Princípios da Tomografia Computadorizada

A tomografia por transmissão consiste basicamente em irradiar o objeto a partir de várias direções, armazenando para cada direção as intensidades transmitidas e as recebidas. Para isso, é utilizado um feixe de radiação colimado, o qual define planos verticais tão finos quanto o próprio feixe. A intensidade emitida e a recebida são armazenadas, definindo assim uma vista longitudinal do corpo. Por meio do uso de vários feixes colimados paralelos definem-se vários planos verticais, obtendo-se perfis em várias posições angulares. Esses valores armazenados podem, então, ser processados para formarem uma matriz em que cada ponto representa a função coeficiente de atenuação linear, a qual poderá ser montada, ponto a ponto, segundo uma escala de tons ou intensidades de pontos nos *pixels* (*picture element*).

2.2.1 Tomografia de Transmissão

Tomógrafo de transmissão é a máquina que captura dados para a construção da imagem. Ela consiste basicamente em um emissor como, por exemplo, um emissor de raios X, e um receptor que captura a intensidade com que o raio chega ao destino; tais entidades serão chamadas doravante de fonte-detetor. Existem muitas geometrias de fonte-detetor, sendo que as mais usadas são as do tipo de feixe de raios paralelos e feixes de raios em leque, mostrados nas Figuras 2.1.a e 2.1.b, respectivamente. Observa-se que a geometria de feixe de raios em leque é a mais rápida (27).

Figura 2.1 – (a) Geometria de fonte-detetor de feixes de raios paralelos e (b) geometria de fonte-detetor de feixe de raios em leque.

Além da fonte e do detetor um tomógrafo possui um sistema para a obtenção da imagem, dados capturados pelo detetor, uma mesa tomográfica, na qual se posiciona o material, e um sistema de movimentação para captura dos diferentes perfis angulares.

Em menos de quatro anos depois da introdução da tomografia computadorizada, surgiram quatro gerações de tomógrafos. Essa rápida evolução foi motivada, fundamentalmente, pela tentativa da melhoria do projeto mecânico do tomógrafo, para que se pudesse produzir uma tomografia em menor tempo e que se proporcionasse melhor controle sobre os movimentos do paciente, na tomografia médica (28).

No tomógrafo de primeira geração (Figura 2.2.a), o tubo de raios X, colimador e detetor são partes de um corpo comum, tal que o tubo de raios X e o detetor se movem, em sincronia, em lados opostos do paciente ou objeto da tomografia. Esse tipo de tomógrafo usa um único feixe de raio X colimado para fazer a tomografia. Nesse tipo de aparelho, são tomadas sequências de medidas, até que se atinja o final do movimento de translação e, então, opera-se uma rotação de um certo grau e o movimento de translação se repete. Todo o processo é repetido para um ângulo θ compreendido entre zero e π ($0 \leq \theta < \pi$).

No Tomógrafo de segunda geração (Figura 2.2.b) foram colocados vários detetores lado a lado, e cada detetor recebe um feixe de radiação ao mesmo tempo, diminuindo assim o tempo da tomografia. Dessa maneira, o tempo de obtenção de dados de uma seção foi diminuído de acordo com o número de detetores empregados. Mesmo assim, o tempo de obtenção de dados era grande e os esforços para reduzir o tempo de tomografia resultaram nos tomógrafos de terceira geração.

No tomógrafo de terceira geração (Figura 2.2.c) não era mais necessário fazer o movimento

Figura 2.2 – Geometria e arquitetura dos tomógrafos de (a) primeira geração, (b) segunda geração, (c) terceira geração e (d) quarta geração.

de translação do tubo de raios X e dos detetores, pois o número de detetores era suficiente para a coleta dos dados de toda uma projeção com o tubo de raios X em uma única posição.

Nos tomógrafos de quarta geração (Figura 2.2.d), vários detetores foram colocados lado a lado até formarem um anel ao redor do corpo em estudo. Esses detetores são fixos e o tubo de raios X rotaciona dentro do anel de detetores e ao redor do corpo. Nos tomógrafos de quarta geração, a redução do tempo de tomografia estava mais limitada à saída do tubo de raio-X do que pelo modelo do tomógrafo.

Para se reduzir o tempo de tomografia para milionésimos de segundo, foi proposto um novo modelo, em que vários tubos de raios X são colocados ao redor do paciente e do lado de fora do anel de detetores. Esse tipo de tomógrafo reduziu ainda mais o tempo de tomografia (28).

A tabela 2.1 (29) apresenta as particularidades de cada geração de tomógrafo.

2.2.2 Minitomógrafo desenvolvido no CNPDIA-EMBRAPA

O minitomógrafo é um equipamento para realizar tomografia, que é utilizado para o uso dedicado à física de solos e foi desenvolvido na CNPDIA-EMBRAPA (Embrapa Instrumentação Agropecuária), utilizando Raios X e Raios γ como fontes de radiação (1).

O minitomógrafo utilizado no desenvolvimento do projeto é um tomógrafo do tipo de pri-

Tabela 2.1 – Características das gerações de tomógrafos.

Características	Primeira geração	Segunda geração	Terceira geração	Quarta geração	Quinta geração
Movimento do tubo de raio-X e do detetor	translação e rotação	translação e rotação	rotação	rotação do tubo de raio- X com detetores estacionários	rotação do tubo de raio- X com detetores estacionários
Detetor por projeção	1	3-52	128-511	242-72000	242-72000
Feixe de raio-X por projeção	único feixe fino	múltiplos feixes em forma de leque	Vários feixes em leque envolvendo o objeto	vários feixes em leque envolvendo o objeto	vários feixes em leque envolvendo todo objeto
Tempo para realizar tomografia	4 min -5 min	5.3 seg - 3.5 min	3 seg - 4.8 seg	1 seg - 5 seg	milionésimos de segundos

Figura 2.3 – Esquema simplificado de um tomógrafo de primeira geração (1)

meira geração, mas, nesse caso, o tubo de raios X ou raios γ e o detetor são fixos, enquanto a amostra em estudo é que sofre o movimento de translação e rotação. A Figura 2.3 mostra um esquema simplificado do minitomógrafo de primeira geração.

Esse equipamento possui um sistema de obtenção de imagens, uma interface com o computador e um sistema computacional no qual é feito o processamento e a reconstrução das imagens.

(28) retratou, em sua dissertação de mestrado, o minitomógrafo de maneira mais detalhada, descrevendo-o de acordo com o diagrama de bloco mostrado na Figura 2.4.

O hardware possui uma mesa mecânica, uma fonte emissora de raios X ou raios γ , dois colimadores de tamanho variável, um detetor de cristal do tipo *NaI(Tl)*, um contador eletrônico de pulsos, um sistema também eletrônico para o processamento e medidas nucleares e um mi-

Figura 2.4 – Diagrama de bloco do minitomógrafo do CNPDIA.

crocomputador.

A mesa mecânica possui dois motores que controlam sua posição relativa, na qual é colocada a amostra que se deseja produzir a imagem. Um motor é utilizado para a rotação e o outro para a translação, o sistema foi projetado usando motores de passo. Um dispositivo optoeletrônico e um circuito comparador é utilizado para definir e inicializar as coordenadas de posição da mesa tomográfica. Os motores são controlados por um computador através de uma interface.

O sistema usa um sistema fonte-detector estacionário, enquanto o objeto faz movimentos de translação e rotação.

Um tubo de raios X ou raios γ emite um feixe de raios que sofrem uma colimação e incide sobre a amostra na mesa, atravessa a amostra, onde é atenuada, sofre uma outra colimação e é detetada no detector. Essa atenuação é devida ao coeficiente de atenuação da amostra.

A fonte e o detector possuem um colimador e ambos sofrem colimação a fim de evitar radiação indesejada e de melhorar a resolução espacial da medida tomográfica. O emprego de uma colimação muito fina na fonte e no detector limita o efeito da dispersão dos *fótons* no detector.

O par de colimadores, da fonte e do detector, são feitos de chumbo e possuem tamanhos variáveis, onde a escolha do tamanho ideal será feita conforme a resolução desejada.

Cada *fóton* que chega ao detector gera um pulso de amplitude proporcional à sua energia. Um sistema composto de amplificador, analisador monocanal, contador e temporizador conta esse pulso e o armazena na memória do computador.

O tempo necessário para a aquisição de dados depende do tamanho da amostra, da resolução desejada e da precisão do equipamento.

2.2.3 Modelo Matemático de Reconstrução

Seja $f_c(x, y)$ uma função de duas variáveis contínuas x e y , $f_c(x, y)$ pode representar, por exemplo, a opacidade de um ponto ou a função de atenuação de um objeto a ser reconstruído. Considere a geometria mostrada na Figura 2.5, na qual um sistema de coordenadas retangulares $x - y$ é rotacionado sobre a origem em um ângulo θ gerando um novo sistema de coordenadas $s - t$. Cada ponto neste plano possui dois conjuntos de coordenadas: coordenadas (x, y) relativas ao sistema $x - y$, e coordenadas (s, t) , relativas ao sistema de coordenadas $s - t$. É possível converter um ponto com coordenadas no sistema $s - t$ para o sistema de coordenadas $x - y$

Figura 2.5 – Relação entre coordenadas retangulares x - y e sistemas de coordenadas s - t .

utilizando a equação 2.1.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Note que para cada valor de s no sistema de coordenadas $s-t$ existe uma única linha que é paralela ao eixo t com valor de deslocamento s do eixo t , conforme ilustrado na figura 2.5. Considere $p_\theta(s)$ a representação da integral da função $f_c(x, y)$, então $p_\theta(s)$ pode ser representada pela equação 2.2.

$$p_\theta(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_c(x, y)|_{x=s \cos \theta - t \sin \theta, y=s \sin \theta + t \cos \theta} dt \quad (2.2)$$

A partir da função descrita pela equação 2.2 é possível desenvolver as bases teóricas da tomografia computadorizada. Em tomografia de raios X, uma seção bidimensional de um objeto tridimensional é penetrada por um feixe de raios X, conforme representado na Figura 2.6. De acordo com a física da tomografia de raios X, um feixe de raio tem sua intensidade atenuada pelo objeto atravessado. O grau de atenuação do feixe depende da composição do objeto. Pode-se citar como exemplo a atenuação causada pelo tecido humano, que é diferente da atenuação causada pelos ossos.

A transmissão na direção paralela ao eixo t que passa por s pode ser representada pela equação 2.3, onde I_0 é a intensidade do raio incidente, $I_\theta(s)$ é a intensidade do raio atenuado –

Figura 2.6 – Na tomografia de transmissão, uma seção transversal 2-D de um objeto 3-D é penetrada por uma série de raios paralelos ou divergentes.

armazenada no detetor com ângulo θ e deslocamento s (Figura 2.6). A função $p_\theta(s)$ é a função de distribuição de coeficientes de atenuação linear (integral de linha no ângulo θ e deslocamento s).

$$I_\theta(s) \approx I_0 \exp[-p_\theta(s)] \quad (2.3)$$

A equação 2.3 pode ser escrita novamente em função de $p_\theta(s)$, como demonstrado pela equação 2.4, tendo em vista que I_0 e $I_\theta(s)$ são obtidos experimentalmente.

$$p_\theta \approx \ln \frac{I_0}{I_\theta(s)} \quad (2.4)$$

O valor de $f_c(x,y)$ depende do conteúdo do objeto na posição espacial (x,y) . Isso pode ser usado para determinar a composição material do objeto. Logo, é de interesse reconstruir a função $f_c(x,y)$ a partir da medida de $p_\theta(s)$, que é o objetivo da tomografia computadorizada.

O ângulo θ na equação 2.2, como ilustrado na Figura 2.6, é chamado de ângulo de visão e a integral de linha é chamada de projeção (transformada de Radon), ou raio-soma de $f_c(x,y)$ no ângulo de visão θ com deslocamento s (21).

Na prática, os raios-soma p_θ são medidos em um número finito de ângulos de visão $\{\theta_k, k = 1, 2, \dots, K_\theta\}$, sobre um número finito de deslocamentos $\{s_l, l = 1, 2, \dots, K_s\}$. Essas limitações são impostas por muitos fatores, tais como o tamanho do detetor, a medida de precisão do instrumento físico, o tempo de exposição do material a ser examinado etc.

Figura 2.7 – Modelo Linear de degradação.

O problema fundamental da tomografia computadorizada é reconstruir a função de atenuação $f_c(x, y)$ de um total de $K_\theta K_s$ raios-somas $p_{\theta k}(s_l)$, onde $p_{\theta k}(s_l)$ representa o raio-soma obtido no ângulo de visão θ_k com deslocamento s_l . Tendo em vista que o algoritmo enfrenta as limitações impostas pelo computador, a função $f_c(x, y)$ é reconstruída sobre um número finito de posições 2D (x_i, y_i) . A coleção dessas posições espaciais é chamada de *sampling grid* (grade de amostragem) ou *sampling lattice* (amostragem reticulada) e os valores da função $f_c(x, y)$ são chamadas de *sampled representation* (representação amostrada) de $f_c(x, y)$. Pode-se afirmar que se a grade de amostra for suficientemente fina, a representação amostrada nos dará uma precisão suficiente para obter a função de atenuação $f_c(x, y)$.

2.2.4 A Transformada de Radon

O modelo linear, descrito pela equação 2.5, pode representar vários processos de degradação de imagem (30). A Figura 2.7 ilustra esse modelo, onde $f(x, y)$ é a imagem original e $g(\alpha, \beta)$ é a imagem degradada.

$$g(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) h(\alpha, \beta, x, y) dx dy \quad (2.5)$$

A equação 2.5 é chamada integral de Fredholm do primeiro tipo e representa um sistema linear variante no espaço, onde $h(\alpha, \beta, x, y)$ é a resposta impulsiva do sistema linear (*PSF* - *Point Spread Function*).

No caso de um sistema linear invariante no espaço, onde $h(\alpha, \beta, x, y) = h(\alpha - x, \beta - y)$, a equação 2.5 torna-se uma convolução em duas dimensões, que pode então ser facilmente manipulada no domínio da frequência, utilizando a transformada de Fourier bi-dimensional.

A transformada de Radon, descrita pela equação 2.6, utilizada em tomografia de transmissão, representa a integral de linha sobre a reta L com distância t da origem em um sistema de eixo rotacionado em um ângulo θ , conforme ilustrado pela Figura 2.8.

Figura 2.8 – Modelo usado em reconstrução tomográfica da imagem $f(x,y)$, onde as projeções são descritas pela integral de linha $g(t, \theta)$.

$$g(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \quad (2.6)$$

Na equação 2.6, $\delta(\cdot)$ é o delta de Dirac. Essa equação pode ser descrita na forma da equação 2.7, admitindo a mudança no sistema de coordenadas.

$$g(t, \theta) = \int_L f(s) ds \quad (2.7)$$

Observe que a partir das equações 2.5 e 2.6 é possível concluir que a transformada de Radon, para o caso bidimensional, é um caso particular de um sistema variante no espaço, onde a PSF é dada pela equação 2.8.

$$h(t, \theta, x, y) = \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) \quad (2.8)$$

O problema de reconstrução de uma imagem $f(x,y)$, a partir de suas projeções $g(t, \theta)$, pode ser visto como um problema de restauração, onde $g(t, \theta)$ é a imagem $f(x,y)$ degradada por um sistema com resposta impulsiva $h(t, \theta, x, y)$, dado pela equação 2.8.

Os métodos de reconstrução através de transformadas buscam obter a transformada inversa de Radon, por meio de diferentes implementações: aplicação direta da transformada de Fourier (DTF), convolução e retroprojeção etc.

Os métodos determinísticos estão relacionados com a versão discretizada da equação de

Figura 2.9 – Modelo discretizado para reconstrução de imagens de tomografia de transmissão.

Fredholm, o que pode ocasionar erros devido à quantização, podendo levar a um sistema indeterminado, o que pode ser agravado pela presença do ruído (19).

Métodos determinísticos iterativos podem incorporar fatores à PSF (discretização da função h), relaxando assim os requisitos necessários de amostragem para os métodos analíticos.

2.3 Modelo de Discretização para o Problema de Tomografia Computadorizada

Como descrito no início do capítulo, a Tomografia Computadorizada por transmissão reconstrói uma imagem da seção transversal do corpo em estudo, baseando-se no grau de atenuação que a fonte radioativa sofre ao atravessar o objeto. Para representar a imagem a ser reconstruída, considera-se que a mesma é representada por pequenos quadrados denominados *pixels* (*picture elements*). Censor(31) propôs um método, descrito a seguir, para representar o problema. Os pixels são numerados de um (canto superior esquerdo) a J (canto inferior direito), conforme mostrado na Figura 2.9.

Assume-se que a função de atenuação tem valor constante (real e não negativo) x_j ao passar pelo j -ésimo pixel ($j = 1, 2, \dots, J$). A fonte e o detector são considerados pontuais e os raios considerados linhas. O comprimento do i -ésimo raio no j -ésimo pixel, representado por a_{ij} para todo $i = 1, 2, \dots, I$ e $j = 1, 2, \dots, J$, representa a contribuição do j -ésimo pixel para atenuação do

i -ésimo raio. A medida física de atenuação no i -ésimo raio, representada por y_i , é a integral de linha ao longo do raio da função de atenuação conhecida. Para completar o modelo discreto, cada integral de linha passa a ser uma soma finita e o modelo passa a ser um sistema de equações lineares representada pelo sistema de equações 2.9.

$$y_i = \sum_{j=1}^J x_j a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (2.9)$$

onde $y = (y_i) \in R^I$ (espaço Euclidiano I -dimensional) é o vetor de medidas, $x = (x_j) \in R^J$ é o vetor imagem e a matriz $A = (a_{ij})$ (de dimensão $I \times J$) é a matriz de projeção.

$$y = Ax \quad (2.10)$$

O sistema de equações 2.9 pode ser escrito na forma vetorial, descrito pela equação 2.10, ou considerando o ruído η presente na aquisição de imagem, conforme mostrado na equação 2.11.

$$y = Ax + \eta \quad (2.11)$$

Com essa descrição o problema de reconstrução pode ser representado como a solução do sistema descrito pela equação 2.11.

2.4 Algoritmos de Reconstrução Tomográfica

Dentre os métodos de reconstrução de imagem tomográfica, destacam-se os de Retroprojeção Simples, Retroprojeção Filtrada, Aplicação Direta da Transformada de Fourier e a Técnica de Reconstrução Algébrica.

2.4.1 Aplicação Direta da Transformada de Fourier

A reconstrução através desse método é feita através da Transformada de Fourier (FT - *Fourier Transform*) em funções contínuas, embora em aplicações reais seja aplicada em funções discretas, o que permite utilizar a Transformada Rápida de Fourier (FFT - *Fast Fourier Transform*) ao invés da FT.

Aplicando a FT na primeira variável da transformada de Radon fornecida pela equação 2.6,

obtem-se a equação 2.12.

$$G(\rho, \theta) = \mathfrak{F}\{g(t, \theta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) e^{-j2\pi \rho t} dt \right] dx dy$$

$$G(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi \rho (x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \quad (2.12)$$

Observe que a equação 2.12 representa a FT bidimensional de $f(x, y)$, mostrada na equação 2.13, onde $u = \rho \cos \theta$ e $v = \rho \sin \theta$.

$$G(\rho, \theta) = F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi (ux + vy)} dx dy \quad (2.13)$$

A imagem reconstruída pode ser obtida através da transformada inversa de Fourier (IFT - *Inverse Fourier Transform*), dada pela equação 2.14.

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi (ux + vy)} du dv \quad (2.14)$$

Note que após aplicar a FT unidimensional nas projeções, obtém-se a FT bidimensional da imagem. Esta operação fornece um resultado em coordenadas polares, e se torna necessário mudar para coordenadas cartesianas, o que exige a estimação de valores (complexos) de $F(u, v)$ em pontos discretos do novo sistema.

2.4.2 Método de Retroprojeção Simples

Para reconstrução de uma seção transversal de um determinado corpo, é necessário um grande número de raios X. Essas medidas devem ser obtidas de diferentes projeções angulares sob vários raios.

A partir das medidas de projeção pode-se chegar a uma matriz de números que representa uma seção transversal do corpo em estudo. Esses números são os coeficientes de atenuação linear.

Supondo que a transmissão de raios X seja feita por várias direções, para cada orientação em particular tem-se um perfil. Após os perfis serem obtidos, os dados podem ser retroprojetados para formarem a imagem em questão.

Aumentando-se o número de raios e perfis, pode-se obter uma imagem mais próxima da original, ou seja, com melhor resolução.

O método de retroprojeção simples apresenta problemas na imagem reconstruída devido ao fato de cada raio-soma ser aplicado a todos os pontos do raio e não somente aos pontos de alta densidade. Esse problema aparecerá com maior intensidade quando a amostra tiver áreas com altas densidades discretas, o que produzirá o artefato "estrela". Neste artefato ocorre a formação de um conjunto de pixels devido às contribuições positivas dos diferentes perfis.

2.4.3 Reconstrução por Retroprojeção Filtrada

Na retroprojeção filtrada, os dados obtidos através de raios X são modificados antes de serem retroprojetados. Devido a essa modificação diz-se que os dados são filtrados.

A filtragem de uma projeção, no espaço real, é feita pela convolução da projeção com uma função pré-determinada, chamada de filtro. Os componentes negativos são somados aos dados projetados e os artefatos são eliminados a um nível razoável.

Ramachadran e Lakshminarayanan foram os primeiros a discutir a função filtro em 1971 (24).

2.4.4 Algoritmos de Reconstrução Algébrica

Um outro tipo de solução para reconstrução de imagens tomográficas consiste em assumir que a seção transversal é uma matriz desconhecida, e então produzir equações algébricas em termos das medidas dos dados projetados.

Na Figura 2.9 é apresentada uma grade retangular em uma imagem $f(x,y)$. Assume-se que em cada célula a função $f(x,y)$ é constante, sendo f_j o valor constante da j -ésima célula. Na técnica algébrica, um raio é definido de maneira diferente. Um raio é agora uma linha com uma certa espessura, passando pelo plano (x,y) . Para ilustrar foi sombreado o i -ésimo raio, onde cada raio tem largura τ . Na maioria dos casos a largura do raio é aproximadamente igual à largura da imagem da célula. A integral de linha é chamada de raio-soma.

$$\sum_{j=1}^N w_{ij} f_j = p_i \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (2.15)$$

Tal como a imagem, a projeção tem uma representação indexada. Seja p_i a medida do raio soma com o i -ésimo raio, conforme mostrado na Figura 2.10. A relação entre f_j e p_i pode ser expressa conforme a equação 2.15, onde M é o número total de raios (em todas as projeções) e w_{ij} é o fator de peso, que representa a contribuição da j -ésima célula da imagem interceptada

Figura 2.10 – Modelo discretizado para reconstrução de imagens de tomografia de transmissão.

pelo i -ésimo raio, como mostrado para uma célula. Note que a maioria dos w_{ij} são zero, tendo em vista que somente um pequeno número de células contribui para um dado raio-soma.

Se M e N são pequenos, pode-se usar o método convencional para inverter o sistema de equações em 2.15. No entanto, na prática, N pode ser maior que 65.000 (para imagens 256×256) e na maioria dos casos, para imagens deste tamanho, M terá a mesma magnitude. Para esses valores de M e N , o tamanho da matriz $[w_{ij}]$ é 65.000×65.000 o que impede, na prática, qualquer possibilidade de inversão direta da matriz. Quando existe ruído nas projeções e quando $M < N$, ou $N < M$, não é possível utilizar a inversão direta de matriz e o método da pseudo-inversa pode ser usado. Quando M e N são grandes, tal método também é computacionalmente impraticável.

Para grandes valores de M e N existem métodos iterativos para resolver 2.15. Para expor os métodos de cálculo envolvidos nestes métodos, a equação 2.15 será primeiramente reescrita conforme mostrado no sistema da equação 2.16.

Figura 2.11 – O método ART é ilustrado para o caso de dois hiperplanos.

$$\begin{aligned}
 w_{11}f_1 + w_{12}f_2 + w_{13}f_3 + \cdots + w_{1N}f_N &= p_1 \\
 w_{21}f_1 + w_{22}f_2 + w_{23}f_3 + \cdots + w_{2N}f_N &= p_2 \\
 &\vdots \\
 w_{M1}f_1 + w_{M2}f_2 + w_{M3}f_3 + \cdots + w_{MN}f_N &= p_M
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Uma imagem representada por $(f_1, f_2, \dots, f_N)$ pode ser considerada um único ponto em um espaço N -dimensional. Neste espaço, cada uma das equações acima representam um hiperplano. Quando existe uma única solução para essas equações, a interseção de todos esses hiperplanos é um único ponto, dado pela solução. Esse conceito é ilustrado na Figura 2.11, onde foi considerado o caso de somente duas variáveis f_1 e f_2 , satisfazendo as equações 2.17.

$$\begin{aligned}
 w_{11}f_1 + w_{12}f_2 &= p_1 \\
 w_{21}f_1 + w_{22}f_2 &= p_2
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

O procedimento computacional para localizar a solução na Figura 2.11 consiste em primeiro considerar uma solução inicial, projetando esse valor na primeira linha, reprojando o ponto resultante na segunda linha e, novamente, projetando na primeira linha, e assim por diante. Se existe uma única solução, as iterações irão convergir para essa solução.

Para implementar este método, primeiramente considere uma solução inicial. Essa solução representada por $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \dots, f_N^{(0)}$ é representada vetorialmente por $\vec{f}^{(0)}$ no espaço N -dimensional. Na maioria dos casos, simplifica-se fazendo-se com que todos os f_i tenham inicialmente valor 0. Este valor inicial é projetado no hiperplano representado pela primeira equação em 2.17,

resultando $\vec{f}^{(1)}$, como ilustrado na Figura 2.11, para o caso bidimensional. $\vec{f}^{(1)}$ é projetado no hiperplano representado pela segunda equação em 2.17, resultando em $\vec{f}^{(2)}$ e assim por diante. Quando $\vec{f}^{(i-1)}$ é projetado no hiperplano representado pela i -ésima equação, resultando em $\vec{f}^{(i)}$, o processo pode ser matematicamente descrito pela equação 2.18, onde $\vec{w}_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iN})$ e $\vec{w}_i \vec{w}_i$ é o produto interno de $\vec{w}_i$ com ele mesmo.

$$\vec{f}^i = \vec{f}^{i-1} - \frac{(\vec{f}^{i-1} \vec{w}_i - p)}{\vec{w}_i \vec{w}_i} \vec{w}_i \quad (2.18)$$

Conforme mostrado anteriormente, a Técnica de Reconstrução Algébrica (ART) busca a solução pela projeção seqüencial, a partir de uma estimacão inicial, no conjunto de soluções das equações lineares, onde cada um desses conjuntos é um hiperplano. A Técnica de Reconstrução Iterativa Simultânea (SIRT) busca a solução através da projeção paralela nos hiperplanos e dá melhores resultados na presença de ruído. Embora não propostos inicialmente como tal, esses métodos pertencem à classe de algoritmos POCS (Projection onto Convex Sets) (27).

O método de projeção seqüencial, em conjuntos de restrições fechados e convexos, para o problema de recuperação de imagens foi proposto por Youla e Webb em 1982 (32) e implementado sem o uso de informações sobre o ruído em imagens tomográficas por Sezan e Stark(33). Em 1993 Combettes (34) mostrou que os algoritmos de reconstrução paralela são mais adaptados ao ruído que métodos sequenciais. Os fundamentos da estimacão por restrições dadas por conjuntos são discutidos em detalhes na referência (35), onde o método de projeções sequenciais é referido como MOSP (*Method of Sequential Projections*) e o de projeções paralelas como MOPP (*Method of Parallel Projections*).

No método de projeções sequenciais é feita a projeção de um ponto e, em seguida, esse ponto é projetado seqüencialmente nos conjuntos, de forma cíclica. Já no método de projeções paralelas, as projeções são feitas em todos os conjuntos em uma única iteração. Os dois métodos convergem para uma única interseção, caso a interseção seja não vazia. Se a interseção é vazia, o método de projeção seqüencial não encontra a convergência, oscilando entre os conjuntos de restrição. Por outro lado, o método de projeção paralela converge para a solução dos mínimos quadrados, isto é, converge para um ponto cuja distância dos conjuntos de restrições é tal que a soma dos quadrados destas distâncias é mínima (34).

Conjuntos que não possuem interseção são muitas vezes gerados por projeções ruidosas, o que acaba gerando equações lineares inconsistentes. O método SIRT tem melhor desempenho, na presença de ruído, do que o ART. Bhumkar propôs uma maneira de tratar o ruído, utilizando ART, como um processo randômico (7).

2.5 Considerações Finais

Apesar de serem computacionalmente mais rápidos, os métodos de transformadas, tal como a aplicação direta da transformada de Fourier e retroprojeção filtrada, não produzem resultados satisfatórios quando o método de aquisição dos perfis angulares apresenta algum tipo de limitação, tal como ângulo de visão limitado ou a presença de ruído.

Os métodos algébricos permitem tratar a reconstrução tomográfica como a busca da solução de um sistema algébrico, o que permite restringir o conjunto de soluções com algum conhecimento *a priori* da imagem desejada.

3 REDUÇÃO DE RUÍDO

3.1 Considerações Iniciais

Lo(36) verificou que o processo de aquisição dos dados, em tomografia de transmissão, possui um ruído devido à natureza discreta dos fótons. As contagens de fótons, em cada projeção, são variáveis aleatórias de Poisson e são independentes entre si a um baixo nível de contagem.

Furuie(19) descreveu o modelo estatístico para as projeções ruidosas conforme mostrado pela Figura 3.1, onde f é a imagem do objeto, g são as projeções livres de ruído e y representa as observações ruidosas.

Uma maneira de reconstruir f a partir das observações y é inicialmente estimar as projeções g (a partir de y) e, em seguida, aplicar algoritmos de reconstrução sobre a estimação de g .

Esse modelo de reconstrução tomográfica coincide com o modelo de restauração de imagens com ruído Poisson, proposto por Lo(36), onde a matriz de projeção A corresponde à matriz de degradação.

Neste capítulo serão apresentados alguns métodos para filtragem dos perfis angulares que consideram apenas a presença de ruído dessa natureza.

Para ilustrar a redução do ruído será considerado o sinal *manhattan skyline* descrito por Jansen(37) e apresentado na Figura 3.2.a. Foi adicionado o ruído de Poisson ao sinal, gerando com isso o sinal ruidoso conforme mostrado na Figura 3.2.b.

Figura 3.1 – Modelo estatístico da aquisição de projeções com ruído de Poisson.

Figura 3.2 – Sinal manhattan skyline: (a) sinal original, (b) sinal com ruído Poisson.

3.2 Estimação Usando o Critério de *Maximum a Posteriori* - *MAP*

O método MAP (*Maximum a Posteriori*) é vantajoso quando se conhece a distribuição estatística do sinal g a ser estimado, sendo maximizada a probabilidade de g dadas as observações ruidosas y .

A partir do teorema de Bayes tem-se a probabilidade condicional do sinal g , dado y , descrita pela equação 3.1.

$$p(g|y) = \frac{p(y|g)p(g)}{p(y)} \quad (3.1)$$

A probabilidade condicional de y , dado g , é descrita pela equação 3.2, onde y é um dado ponto da projeção ruidosa e g a taxa correspondente.

$$p(y|g) = \frac{e^{-g}g^y}{y!} \quad (3.2)$$

Mascarenhas, Santos e Cruvinel(3) propuseram um método para reconstrução de imagens tomográficas utilizando estimador MAP (*Maximum a Posteriori*) para diferentes densidades *a priori*. Os parâmetros dessas densidades são estimados pelo método dos momentos.

A dedução dos estimadores apresentados a seguir é apresentada no Apêndice A na página 125.

Figura 3.3 – Redução do ruído utilizando MAP com densidade *a priori* gaussiana.

3.2.1 Estimador MAP com densidade *a priori* gaussiana

Dada uma densidade *a priori* gaussiana descrita pela equação 3.3, o estimador MAP é dado pela equação 3.4.

$$p(g) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{g-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (3.3)$$

$$\hat{g} = \frac{\mu - \sigma^2 + \sqrt{(\sigma^2 - \mu)^2 + 4\sigma^2 y}}{2} \quad (3.4)$$

Os parâmetros μ e σ são estimados pela amostra do momento m (média amostral) e s^2 pela variância amostral, conforme descrito pelas equações 3.5 e 3.6, respectivamente, onde n é o tamanho da janela em torno do ponto estimado.

$$\hat{\mu} = m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i \quad (3.5)$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (g_i - \mu_i)^2 \quad (3.6)$$

A Figura 3.3 mostra a estimação do sinal descrito pela Figura 3.2.a, considerando a observação ruidosa descrita pela Figura 3.2.b, utilizando o estimador MAP com densidade *a priori* gaussiana.

Figura 3.4 – Redução do ruído utilizando MAP com densidade *a priori* chi-quadrado.

3.2.2 Estimador MAP com densidade *a priori* chi-quadrado

Dada a densidade *a priori* chi-quadrado descrita pela equação 3.7, o estimador MAP pode ser obtido através da equação 3.8.

$$p(g) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} g^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{g}{2}} \quad (3.7)$$

$$\hat{g} = \frac{2y + n - 2}{3} \quad (3.8)$$

O parâmetro n é estimado pelo momento m da amostra descrito pela equação 3.5.

O resultado da aplicação desse estimador ao sinal representado pela Figura 3.2.b é mostrado na Figura 3.5.

3.2.3 Estimador MAP com densidade *a priori* gama

A densidade *a priori* gama, descrita pela equação 3.9, tem seu estimador representado pela equação 3.10.

$$p(g) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} (\beta g)^{\alpha-1} e^{-\beta g}, \quad g > 0 \quad (3.9)$$

$$\hat{g} = \frac{y + (\alpha - 1)}{1 + \beta} \quad (3.10)$$

Os parâmetros α e β são estimados pelo momento m da amostra (média amostral) e pela variância amostral (s^2) descritos nas equações 3.11 e 3.12.

Figura 3.5 – Redução do ruído utilizando MAP com densidade *a priori* gama.

$$\hat{\alpha} = \frac{m^2}{s^2} \quad (3.11)$$

$$\hat{\beta} = \frac{m}{s^2} \quad (3.12)$$

3.2.4 Estimador MAP com densidade *a priori* beta

A equação 3.13 mostra a distribuição de densidade *a priori* beta, que tem seu estimador MAP descrito pela equação 3.14.

$$p(g) = \frac{\Gamma(\beta + \alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} g^{\alpha-1} (1-g)^{\beta-1} \quad (3.13)$$

$$\hat{g} = \frac{1}{2} \left[(y\Delta + \alpha\Delta + \beta\Delta - \Delta) + \sqrt{(-y\Delta - \alpha\Delta - \beta\Delta + \Delta)^2 - 4(y\Delta^2 + \alpha\Delta^2 - \Delta^2)} \right] \quad (3.14)$$

O parâmetro Δ é o máximo valor observado em um perfil angular e os parâmetros α e β são estimados pelo momento m da amostra (média amostral) e pelo momento s^2 (variância amostral) representados pelas equações 3.15 e 3.16.

$$\hat{\alpha} = \frac{m^2 - m^3}{s^2} - m \quad (3.15)$$

$$\hat{\beta} = \frac{m^3 - 2m^2 + m + s^2m - s^2}{s^2} \quad (3.16)$$

3.3 Transformada de Anscombe

A Transformada de Anscombe (TA) (38) transforma o ruído Poisson dependente do sinal em um ruído aproximadamente: gaussiano, aditivo, independente de sinal, com média zero e variância unitária.

A TA de y_i é descrita pela equação 3.17, onde z_i pode ser representado pelo modelo aditivo, conforme mostrado na equação 3.18.

$$z_i = 2\sqrt{y_i + \frac{3}{8}} \quad (3.17)$$

$$z_i = 2\sqrt{g_i + \frac{1}{8}} + v_i = s_i + v_i \quad (3.18)$$

Na equação 3.18, v_i é um ruído aditivo, aproximadamente independente de s_i , g_i é o sinal sem o ruído de Poisson.

A Transformada Inversa de Anscombe é descrita pela equação 3.19.

$$\hat{g}_i = \frac{1}{4}z_i^2 - \frac{1}{8} \quad (3.19)$$

Algumas considerações sobre a TA são apresentada no apêndice B.

3.4 Filtro de Wiener Pontual

Na seção 3.17 é apresentada a TA, que transforma o ruído de Poisson em um modelo aditivo, independente do sinal. Neste caso, tem-se o modelo aditivo para o ruído de Poisson, representado pela equação 3.18.

Assumindo que as componentes do sinal podem ser representadas como um processo gaussiano com média e variância não estacionárias, e variáveis aleatórias não correlacionadas entre si, pode-se utilizar o Filtro de Wiener descrito pela equação 3.20 para estimar o sinal original g a partir das observações y sujeitas ao ruído gaussiano.

$$\hat{s}_i = E\{s_i\} + \frac{\sigma_{s_i}^2}{\sigma_{s_i}^2 + \sigma_{v_i}^2}(z_i - E\{s_i\}) \quad (3.20)$$

Devido ao modelo aditivo do sinal, podemos considerar na equação 3.20 que $E\{s_i\} = E\{z_i\}$

Figura 3.6 – Redução do ruído utilizando o Filtro de Wiener pontual.

e que $\sigma_{s_i}^2 = \sigma_{z_i}^2 - \sigma_{v_i}^2$. Considerando ainda que o ruído possui média zero e variância unitária, o filtro de Wiener pontual pode ser representado pela equação 3.21.

$$\hat{s}_i = E\{s_i\} + \frac{\sigma_{s_i}^2}{\sigma_{z_i}^2 - 1}(z_i - E\{s_i\}) \quad (3.21)$$

O valor esperado $E\{s_i\}$ e a variância $\sigma_{s_i}^2$ são estimados através da vizinhança dos coeficientes de z_i . Como a média do ruído é zero, o valor esperado pode ser estimado encontrando a média do sinal ruidoso sobre a vizinhança. A variância também é estimada a partir da variância amostral numa vizinhança ao redor do ponto em questão. A variância não pode ser encontrada subtraindo-se um da variância do sinal ruidoso (como teoricamente esperado), pois essa estimativa pode produzir um valor negativo.

A Figura 3.6 mostra o resultado deste estimador aplicado ao sinal descrito pela Figura 3.2.b.

3.5 Filtro Linear de Goodman-Belsher

O filtro linear descrito por Goodman e Belsher(39) baseia-se em um critério de mínimo erro quadrático, levando em consideração a presença do ruído Poisson. Esse filtro não leva em consideração a presença do ruído aditivo independente de sinal.

O filtro de Goodman-Belsher, apresentado na equação 3.22, minimiza o critério de erro médio quadrático no domínio de Fourier, fazendo o uso do princípio da ortogonalidade. Nesta equação, $\Phi_{\tilde{U}}[m, n]$ é a densidade espectral de potência do sinal observado (ruidoso e borrado) e $\Phi_{\tilde{U}\tilde{F}}[m, n]$ é a densidade espectral de potência cruzada do sinal observado e do sinal verdadeiro. O ponto chave da derivação do filtro consiste em determinar $\Phi_{\tilde{U}}[m, n]$ e $\Phi_{\tilde{U}\tilde{F}}[m, n]$.

Figura 3.7 – Redução do ruído utilizando o Filtro de Goodman-Belsher.

$$W_{GB}[m, n] = \frac{\Phi_{\tilde{U}\tilde{F}}[m, n]}{\Phi_{\tilde{U}}[m, n]} \quad (3.22)$$

Goodman e Belsher(39) demonstram, a partir do modelo para imagem detectada (borrada e sujeita ao ruído de Poisson), que a densidade espectral de potência para a imagem detectada pode ser expressa conforme mostrado na equação 3.23, onde $\Phi_{\tilde{F}}[m, n]$ é a densidade espectral de potência para o sinal original, $\bar{\mu}$ é o número médio de contagem de fótons e $H[m, n]$ é a função de espalhamento pontual.

$$\Phi_{\tilde{U}}[m, n] = \bar{\mu} + \bar{\mu}^2 |H[m, n]|^2 \Phi_{\tilde{F}}[m, n] \quad (3.23)$$

O filtro é originalmente proposto para o caso bidimensional, porém, pode ser estendido para o caso tridimensional, conforme mostrado por Homem(40). A utilização do filtro para o caso unidimensional se dá de maneira análoga à sua extensão para o caso tridimensional. A equação 3.24 mostra o filtro para o caso unidimensional.

$$W_{GB}[m] = \frac{\bar{\mu} H^*[m] \Phi_{\tilde{F}}[m]}{1 + \bar{\mu} |H[m]|^2 \Phi_{\tilde{F}}[m]} \quad (3.24)$$

Como não é considerado borramento para as projeções, a matriz $H[m]$ é a matriz identidade. $\Phi_{\tilde{F}}[m]$ é estimado utilizando o espectro de potência da Transformada de Fourier das projeções pelo método do periodograma.

O resultado do filtro de Goodman-Belsher aplicado ao sinal descrito na Figura 3.2.b é mostrado na Figura 3.7.

3.6 Filtragem de ruído utilizando *Wavelet*

A análise de dados de acordo com escalas variáveis no domínio do tempo e da frequência é a idéia básica da utilização da teoria *Wavelet*. A Transformada Discreta *Wavelet* (DWT - *Discrete Wavelet Transform*) representa um sinal em termos de deslocamentos de função de baixa escala ϕ e deslocamento de funções de alta escala ψ , conforme representado pelas equações 3.25 e 3.26. A baixa escala representa a *wavelet* comprimida, ou seja, detalhes que mudam rapidamente (alta frequência de w). A alta escala representa a *wavelet* dilatada, ou seja, detalhes que mudam vagarosamente (baixa frequência de w).

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k) \quad (3.25)$$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \quad (3.26)$$

As equações 3.25 e 3.26 podem formar uma base ortonormal para determinadas escolhas de ϕ e ψ , onde $j, k \in \mathbb{Z}$.

Um sinal $y(t)$ pode ser expresso de acordo com a equação 3.27, e os componentes $u_{j,k}$ e $w_{j,k}$ podem ser representados pelas equações 3.28 e 3.29.

$$y(t) = \sum_k u_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^J \sum_k w_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (3.27)$$

$$u_{j,k} = \int y(t) \phi_{k,k}^*(t) dt \quad (3.28)$$

$$w_{j,k} = \int y(t) \psi_{k,k}^*(t) dt \quad (3.29)$$

O parâmetro J na equação 3.27 controla a resolução na representação *wavelet*.

Existem duas abordagens para a transformada *wavelets*, segundo Daubechies(41), ou seja: sistemas redundantes discretos (frames) e bases *wavelets* ortonormais. A segunda abordagem considera a análise de multiresolução, contemplada neste trabalho.

Figura 3.8 – Aninhamento entre os espaços com diferentes níveis de resolução.

3.6.1 Análise de Multiresolução

É possível construir famílias de *wavelets* discretas e desenvolver algoritmos rápidos para o cálculo de transformada utilizando o conceito de análise em multiresolução criado por Mallat(42). Essa análise parte da existência de uma função *wavelet* mãe $\psi(t)$ (descrita pela equação 3.26) e uma função de escala mãe $\phi(t)$ (descrita pela equação 3.25).

A relação entre os níveis de resolução pode ser descrita sob forma de aninhamento dos espaços de função, onde cada espaço de maior resolução contém os espaços de menor resolução, conforme mostrado na equação 3.30.

$$\cdots \supset v_3 \supset v_2 \supset v_1 \supset v_0 \quad (3.30)$$

A Figura 3.8 mostra o aninhamento entre os espaços descrito pela equação 3.30.

Cada espaço v_j é coberto pela família de funções de escala $\psi_{j,k}(t)$ correspondente. As funções de dilatação $\phi_{j,k}(t)$ estão contidas nos espaços ω_j , sendo ω_j o complemento de v_j em relação ao espaço v_{j+1} .

A equação 3.31 expressa a relação entre dois níveis adjacentes de resolução, onde o símbolo $\oplus$ representa a operação de soma direta.

$$v_{j+1} = v_j \oplus \omega_j \quad (3.31)$$

Figura 3.9 – Espaço da função de escala e função wavelet.

Considerando que o espaço v_0 é o espaço gerado pela função de escala quando $j = 3$, a equação 3.31 pode ser aplicada recursivamente para gerar o espaço original $v_0 \omega_0 \omega_1 \omega_2$, conforme ilustrado pela Figura 3.9.

Os conjuntos de funções de base (*wavelet* e escala) podem ser expressos como função de base de v_{j+1} , conforme representado nas equações 3.32 e 3.33. Note que cada uma das funções é ponderada pelos coeficientes $h_0[k]$ e $h_1[k]$.

$$\phi_{j,k}(t) = \sum_n h_0[n - 2k] \phi_{j-1,n}(t) \quad (3.32)$$

$$\psi_{j,k}(t) = \sum_n h_1[n - 2k] \phi_{j-1,n}(t) \quad (3.33)$$

O processo de síntese (composição) e análise (decomposição) podem ser entendidos como a aplicação de filtros passa-baixas e passa-altas seguidos de uma subamostragem (no caso da análise) ou precedido por uma superamostragem (no caso da síntese), onde os coeficientes $\{h_0[k], h_1[k]\}$ e $\{\tilde{h}_0[k], \tilde{h}_1[k]\}$ formam o banco de filtros utilizados por esses métodos, correspondendo aos bancos de filtros de análise e síntese respectivamente.

As expressões mostradas anteriormente sugerem uma recursão, onde a projeção de um sinal f sobre v_j é decomposta em v_{j-1} e ω_{j-1} , a projeção de v_{j-1} é decomposta em v_{j-2} e ω_{j-2} e assim sucessivamente.

Figura 3.10 – Processo de análise composto pela aplicação do banco de filtros.

Figura 3.11 – Processo de síntese composto pela aplicação do banco de filtros.

A Figura 3.10 mostra a relação recursiva entre os coeficientes da transformada *wavelet* contida em cada subespaço.

A Figura 3.11 mostra a recursão para reconstrução do sinal decomposto.

3.6.2 Wavelet Haar

A *wavelet* Haar é o exemplo mais simples de uma *wavelet* ortonormal. Sua função de escala contém somente dois coeficientes diferentes de zero, conforme mostra a equação 3.34, onde ambos os coeficientes de escala são unitários ($c_0 = c_1 = 1$).

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t - 1) \quad (3.34)$$

A partir da equação 3.34 é possível obter a função de escala, considerando que a *wavelet* tem suporte compacto e é ortogonal. A função de escala $\phi(t)$ é mostrada na equação 3.35. Essa função possui um pulso de bloco, conforme mostrado na Figura 3.12.a.

Figura 3.12 – Wavelets ortonormais: (a) a função de escala de Haar e (b) a função wavelet em termos da função de escala.

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.35)$$

A função *wavelet* possui, conseqüentemente, dois coeficientes diferentes de zero, devendo satisfazer a equação 3.36. A equação 3.37 mostra a função de dilatação $\psi(t)$.

A relação entre a equação 3.36 e a equação 3.37 pode ser observada na Figura 3.12.b.

$$\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t - 1) \quad (3.36)$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.37)$$

3.6.3 Wavelets de Daubechies

Como examinado na seção anterior sobre a transformada *wavelet* Haar, os coeficientes são utilizados em duas etapas: em uma delas, eles atuam como filtro de suavização, e na outra, extraem os detalhes do sinal em cada escala. A *wavelet* Haar é extremamente simples possuindo somente dois coeficientes de escala, ambos unitários. Existe uma família de *wavelets*, da qual a *wavelet* Haar é o membro mais simples, denominada *wavelets de Daubechies*.

As *wavelets* propostas por Daubechies(41) formam sistemas completos de *wavelets* ortonormais. Os sistemas são gerados a partir da função de escala, descrita pela equação 3.38, onde os parâmetros a_k são denominados *coeficientes de filtro*. Impondo determinadas restrições sobre os valores que estes coeficientes assumem, é possível obter determinadas propriedades para um sistema de *wavelets*, tal como a ortonormalidade.

$$\phi(t) = \sum_k a_k \phi(2t - k) \quad (3.38)$$

Para que as *wavelets* tenham suporte compacto é necessário que apenas um número finito de coeficientes do filtro tenham valores diferentes de zero. Os sistemas *wavelets* de Daubechies são organizados em diferentes famílias, caracterizadas pelos números de coeficientes a_k não nulos. Cada família é identificada pelo número de família, representado aqui por N , cujo valor é igual à metade do número de coeficientes do filtro utilizados na equação 3.38.

É possível reescrever a equação 3.38, em função de N , de maneira que represente cada uma das famílias *wavelets* de Daubechies, conforme apresentado na equação 3.39.

$${}_N\phi(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} a_k {}_N\phi(2t - k) \quad (3.39)$$

As funções de escala possuem valores não nulos apenas no intervalo $[0, 2 - N]$, o qual é denominado suporte da função de escala ${}_N\phi(t)$.

A *wavelet* primária de cada uma das famílias pode ser definida através da equação 3.40, onde o valor de b_k é definido pela equação 3.41.

$${}_N\psi(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} b_k {}_N\phi(2t - k) \quad (3.40)$$

$$b_k = (-1)^k a_{2N-1-k} \quad (3.41)$$

Daubechies(41) definiu as famílias *wavelets* com valores de N compreendidos entre 2 e 10. Cada família *wavelet* é indicada como DBN , onde DB indica que são as *wavelets* propostas por Daubechies e N indica o suporte da função.

A Figura 3.13 mostra as funções *wavelets* primárias e funções de escala para famílias estudadas por Daubechies com valores de N iguais a 2, 3 e 4. A Figura 3.13.a mostra a *wavelet* primária para Daubechies com $N = 2$, representada por ${}_2\psi(t)$, onde a função de escala, representada por ${}_2\phi(t)$, é mostrada na Figura 3.13.b. As Figuras 3.13.c e 3.13.d mostram a *wavelet* primária e função de escala, respectivamente, para $N = 3$. A *wavelet* primária para $N = 4$ é mostrada na Figura 3.13.e, enquanto a Figura 3.13.f mostra a função de escala para esse mesmo suporte.

Apesar de Daubechies definir em seu trabalho apenas valores para N até dez, outras famílias de diferentes suportes podem ser obtidas à partir das equações 3.39 e 3.40.

3.6.4 Transformada *Wavelet* do Sinal Ruidoso

Admitindo que um dado sinal discreto f é corrompido por um ruído aditivo η , gerando uma observação y , conforme mostrado pela equação 3.42, a matriz de covariância Q do ruído pode ser expressa pela equação 3.43.

$$y = f + \eta \quad (3.42)$$

$$Q = E \{ (\eta - E\{\eta\})(\eta - E\{\eta\})^T \} \quad (3.43)$$

Se o ruído possui média zero ($E\{\eta\} = 0$), a equação 3.43 pode ser reescrita conforme mostrado na equação 3.44, onde I é a matriz identidade com mesma dimensão de f e σ^2 é a variância do ruído.

$$Q = \sigma^2 I \quad (3.44)$$

A Transformada *Wavelet* do sinal descrito pela equação 3.42 é dada pela equação 3.45 onde w , v e ω é a Transformada *Wavelet* de y , f e η respectivamente. Essa representação é possível devido à linearidade da Transformada *Wavelet*.

$$w = v + \omega \quad (3.45)$$

Figura 3.13 – Famílias de wavelets de Daubechies: (a) wavelet primária DB2, (b) função de escala DB2, (c) wavelet primária DB3, (d) função de escala DB3, (e) wavelet primária DB4 e (f) função de escala DB4.

Admitindo que W é a matriz que faz a Transformada *Wavelet*, tem-se que $w = Wy$, $v = Wf$ e $\omega = W\eta$. Utilizando a equação 3.44 é possível representar a matriz de covariância S do ruído no domínio *wavelet* ($S = E\{\omega\omega^T\}$) na forma da equação 3.46.

$$S = WQW^T \quad (3.46)$$

Se W é ortogonal, a partir da equação 3.46 tem-se que $S = \sigma^2 I$.

O ruído pode ser filtrado em diferentes escalas *wavelets* através de um limiar que pode ser escolhido, dependente da escala *wavelet* (43).

3.6.5 Thresholding

O sinal v livre de ruído, descrito pela equação 3.42, é tipicamente esparso, contendo uma grande quantidade de valores próximos de zero (44). O sinal livre de ruído pode ser estimado utilizando um limiar λ . A equação 3.47 representa esse processo, onde w_λ representa a aplicação de um limiar (*thresholding*) no vetor w .

$$\hat{v} = w_\lambda \quad (3.47)$$

Donoho e Johnstone(45, 46) demonstraram que o *universal thresholding*, descrito pela equação 3.48 possui propriedades ótimas para eliminação de ruído nos coeficientes *wavelets*.

$$\lambda_{universal} = \sqrt{2 \log N} \sigma \quad (3.48)$$

O nome *universal threshold* reflete a idéia de que o limiar é válido para todos sinais de comprimento N (37).

Hard-thresholding

O procedimento no qual valores menores que um limiar são removidos enquanto os valores maiores ou iguais são mantidos é chamado *hard-thresholding*. A função que representa o *hard-thresholding* é mostrado na equação 3.49.

$$\rho_{hard}(x) = \begin{cases} x, & |x| > \lambda \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.49)$$

Figura 3.14 – Thresholding: (a) *hard-thresholding* e (b) *soft-thresholding*

A Figura 3.14.a mostra a função $\rho_{hard}(x)$ apresentada na equação 3.49, onde λ representa o limiar para remoção dos coeficientes *wavelets*. A função possui uma descontinuidade no intervalo $[-\lambda, \lambda]$, conforme observado na Figura 3.14.a .

A Figura 3.15 mostra a redução de ruído utilizando *hard-thresholding* com diferentes família *wavelets*. O método, descrito pela equação 3.49, foi aplicado em três escalas *wavelets*, onde o valor de λ em cada escala foi obtido através do *universal thresholding* descrito pela equação 3.48. O sinal original e o ruidoso são mostrados na Figura 3.2 na página 56.

A Figura 3.15.a utiliza a *wavelet* Haar, já as Figuras 3.15.b, 3.15.c e 3.15.d utilizam a *wavelet* DB2, DB3 e DB4 respectivamente.

Soft-thresholding

Uma alternativa para amenizar a descontinuidade nos coeficientes *wavelets* gerados pelo *hard-thresholding* é o *soft-thresholding*, mostrado na equação 3.50, onde os coeficientes com valores absolutos acima do limiar λ são reduzidos, conforme mostrado na Figura 3.14.b, ou seja, não somente pequenos valores são colocados como zero, mas valores maiores são reduzidos por um valor igual ao limiar λ . Como consequência, a transição entre os valores é contínua.

$$\rho_{soft}(x) = \begin{cases} x - \lambda, & x \geq \lambda \\ x + \lambda, & x \leq -\lambda \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.50)$$

Para ilustrar os resultados do *soft-thresholding*, o método foi aplicado ao sinal ruidoso mostrado na Figura 3.2 na página 56, onde o limiar λ foi obtido através do *universal thresholding*.

O método foi aplicado em três escalas, com diferentes famílias *wavelets*, conforme mos-

Figura 3.15 – *Hard-thresholding* utilizando as famílias wavelets: (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4.

Figura 3.16 – *Soft-thresholding* utilizando as famílias wavelets: (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4.

trado na Figura 3.16.

3.7 Considerações Finais

Todos os métodos de filtragem de ruído abordados neste capítulo possuem baixo custo computacional. É possível verificar que todos os métodos reduzem o ruído consideravelmente.

A filtragem de ruído no domínio *wavelet*, utilizando diferentes famílias *wavelets*, obtiveram bons resultados, sendo observado que quanto maior o suporte da função *wavelet*, maior será a suavização do sinal. Maiores detalhes sobre a Transformada *Wavelet*, bem como outras famílias *wavelets* são fornecidos por Burrus, Gopinath e Guo(47), Morettin(48) e Addison(49) em livros que discutem a *DWT* de maneira mais aprofundada.

Outra possibilidade é filtrar o ruído no domínio *wavelet*, utilizando o filtro de Wiener pontual, considerando uma janela em uma determinada escala (50).

4 ***PROJEÇÕES EM CONJUNTOS CONVEXOS (POCS - PROJECTIONS ONTO CONVEX SETS)***

4.1 **Considerações Iniciais**

Os métodos algébricos de reconstrução de imagens tomográficas, descritos no capítulo anterior, tal como ART e SIRT, são casos particulares de POCS, nos quais são considerados como conjuntos de restrição convexos somente os hiperplanos gerados para cada raio-soma. Além das observações, é possível considerar outros conjuntos de restrição baseado em algum conhecimento *a priori* sobre o material em estudo.

Segundo Homem(40) a teoria de POCS é um caso particular da teoria de conjuntos e de projeções em espaços vetoriais.

Neste capítulo serão apresentados os algoritmos de POCS sequencial e paralelo, mostrando previamente a definição de projetores e conjuntos convexos. Ao final do capítulo é apresentada uma comparação entre os algoritmos POCS e o algoritmo de retroprojeção filtrada.

4.2 **Projeção**

Considere a geometria do seguinte problema: em um plano bidimensional (2-D), a reta perpendicular a uma linha l passa por um ponto arbitrário x , interceptando essa linha exatamente em um ponto x^* (conforme mostrado na Figura 4.1.a). Esse ponto tem uma propriedade importante dentre os demais da linha l , pois é o ponto mais próximo de x (distância Euclidiana). Na Figura 4.1.b existe um círculo com centro em D e outros n círculos com centro em y . Note que somente um círculo (com centro em y) toca a circunferência D em um único ponto, denominado

Figura 4.1 – (a) Reta l e uma reta perpendicular à l passando por um ponto arbitrário x ; (b) figura bidimensional com círculos centrados em y , somente um disco toca o disco D em um ponto, representado por y^* .

y^* .

Tanto x^* como y^* são projeções de seus elementos em outros conjuntos, que no caso são convexos.

Seja C um conjunto convexo em um espaço de Hilbert H , então para cada x em H , existe um único x^* em C que é mais próximo de x . A equação 4.1 descreve essa condição, admitindo-se que $x^* \in C$.

$$\|x - x^*\| = \min_{y \in C} \|x - y\| \quad (4.1)$$

A equação 4.2 fornece uma solução única, que é uma das principais características associadas aos conjuntos convexos no espaço de Hilbert, ou seja, para todo $x \in H$ existe um único ponto mais próximo no conjunto C , o qual será chamado de projeção de x em C . A regra que determina a projeção no conjunto C é denominada *projetor* ou *operador de projeção* em C , o qual é denotado por P_C , ou seja, para todo $x \in H$ a projeção $P_C x$ em C é definida pela equação 4.2.

$$\|x - P_C x\| = \min_{y \in C} \|x - y\| \quad (4.2)$$

A Figura 4.1 mostra que x^* é a projeção de x na linha l e o ponto y^* é a projeção de y no disco D .

4.3 Algoritmo de POCS

Muitos problemas podem ser descritos sob a forma de conjuntos de restrições convexas. A solução para esses problemas satisfaz todas as restrições impostas, ou seja, a busca da solução desejada consiste em encontrar um valor pertencente à interseção entre os conjuntos.

Admitindo que exista n conjuntos de restrições, representados por $C_i (i = 1, 2, \dots, n)$, a solução para o problema está na interseção dos conjuntos, representada pela equação 4.3.

$$C_0 = \bigcap_{i=1}^n C_i \quad (4.3)$$

Se os conjuntos $C_i (i = 1, 2, \dots, n)$ são convexas e sua interseção é não vazia, as sucessivas projeções nos conjuntos convergirão para um ponto pertencente a C_0 . A equação 4.4 representa o algoritmo, admitindo que x_0 é um ponto qualquer e representa a estimativa inicial.

$$x_{k+1} = P_{C_k} \cdots P_{C_2} P_{C_1} x_k \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

O algoritmo descrito pela equação 4.4 faz a projeção sequencial nos conjuntos de restrições. O algoritmo de POCS (*Projections onto Convex Sets*) pode ser também implementado de maneira paralela. Nessa implementação, o ponto é projetado em todos os conjuntos e a cada projeção em um conjunto é atribuído um peso, fazendo, com isso, que seja considerada a projeção em todos os conjuntos ao mesmo tempo. A equação 4.5 descreve esse algoritmo. Note que o somatório dos pesos, representado por w_i , é igual a 1 conforme a equação 4.6.

$$x_{k+1} = x_k + \sum_{i=1}^n w_i (P_{C_i} x_k - x_k) \quad (4.5)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (4.6)$$

4.3.1 Comportamento do algoritmo POCS

Youla demonstrou em 1982 (32) que, sendo C_0 não vazio, para todo $x \in H$ a equação 4.4 converge fracamente para um ponto em C_0 . Embora em teoria essa convergência seja fraca, na prática a convergência para C_0 é forte. A Figura 4.8 mostra a representação gráfica dessa convergência

Figura 4.2 – Representação geométrica da convergência do método POCS sequencial.

Figura 4.3 – Comportamento do algoritmo de POCS (a) sequencial e (b) paralelo quando não há interseção entre os conjuntos convexos.

Quando não existe interseção entre os conjuntos de restrição, o algoritmo POCS sequencial não converge para um ponto e fica oscilando entre os conjuntos de restrições, conforme mostrado na Figura 4.3.a. Se a implementação for paralela, o algoritmo convergirá para um ponto tal que a soma dos quadrados das distâncias dos conjuntos é minimizada (27). Este caso é representado geometricamente pela Figura 4.3.b.

4.4 Conjuntos Convexos e Conjuntos não Convexos

Para que se tenha um conjunto convexo C é necessário que o segmento de reta definido por um par de elementos quaisquer, pertencente ao conjunto, possua somente pontos pertencentes a ele. A equação 4.7 representa essa condição, onde o ponto x , obtido a partir da combinação linear de x_1 e x_2 , pertence também ao conjunto C .

Figura 4.4 – Em conjuntos não convexos a solução pode convergir para (a) um trap ou para (b) a interseção, dependendo da estimativa inicial.

Figura 4.5 – Os pontos projetados em C_{nc} nas proximidades de x_T convergem para x_T .

$$x = \mu x_1 + (1 - \mu)x_2, \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad (4.7)$$

Quando os conjuntos não são convexos, a condição definida pela equação 4.7 nem sempre é satisfeita. É mais usual encontrar conjuntos de restrições não convexos do que convexos (27).

Quando um dos conjuntos é não convexo, a convergência para a interseção entre eles não é garantida através do método de projeções. A solução, dependendo da estimativa inicial, pode convergir para um *trap* (armadilha), conforme ilustrado pela Figura 4.4.a, ou para a interseção dos conjuntos (Figura 4.4.b).

Os *traps* podem ser classificados em atrativos e repulsivos. Para ilustrar os dois tipos de *traps*, considere um conjunto não convexo C_{nc} que tem um *trap* x_T , um conjunto convexo C_c e uma estimativa inicial x . Se uma projeção no conjunto C_{nc} é feita nas proximidades de x_T , e o *trap* é atrativo, as projeções seguintes convergirão para x_T , conforme ilustrado pela Figura 4.5. Se o *trap* é repulsivo, qualquer projeção feita nas imediações de x_T convergirá para outro valor (Figura 4.6.a). Nesse caso, as iterações convergirão para este *trap* somente se a projeção em C_{nc} é feita diretamente em x_T , conforme ilustrado pela Figura 4.6.b.

Figura 4.6 – Trap repulsivo.

Figura 4.7 – (a) l_1 e l_2 tem uma interseção (b) l_1 e l_2 são coincidentes, ou seja, possuem infinitas soluções (c) l_1 e l_2 são paralelas, não possuindo nenhuma interseção.

4.5 O Uso de POCS para solução de equações lineares

Considere-se o sistema de equações lineares da equação 4.8, o qual consiste de duas equações e duas variáveis x e y . Da álgebra elementar, sabe-se que as equações dadas são representadas por uma reta em R^2 . As equações podem ser representadas pelos gráficos da Figura 4.7.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \\
 (b) \quad & \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \\
 (c) \quad & \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Como as retas são conjuntos convexos, é possível resolver cada sistema utilizando projeções em conjuntos convexos, ou seja, pode ser considerado como solução para um sistema linear o ponto que pertença aos dois conjuntos, isto é, a interseção entre os conjuntos. Note que na

Figura 4.7.a existe somente um ponto que satisfaz essa condição, já em 4.7.b existem infinitas soluções, enquanto em 4.7.c não existe nenhuma solução, ou seja, para um sistema linear podemos concluir que se admite como resposta uma solução, nenhuma solução ou infinitas soluções.

As equações lineares podem ser representadas em forma de produto interno. A equação 4.9 representa um conjunto de equações lineares, onde $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ representam os coeficientes, y representa a variável, $b_i (i = 1, \dots, n)$ representam os termos independentes e n representa o número de equações.

$$\langle a_i, y \rangle = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.9)$$

O conjunto de soluções para cada equação pode ser representado pela equação 4.10.

$$C_i = \{y : \langle a_i, y \rangle = b_i\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.10)$$

Pode-se representar o conjunto de soluções do sistema de equações, representado pela equação 4.9, como C_0 , onde os conjuntos têm suas soluções representadas pela equação 4.10. Desta maneira, o conjunto de soluções pode ser representado pela equação 4.11.

$$C_0 = \bigcap_{i=1}^n C_i \quad (4.11)$$

Se a interseção é não vazia, o objetivo passa a ser encontrar este conjunto de interseção, o que pode ser resolvido através do método de projeções em conjuntos convexos. O problema passa a ser o de como calcular as projeções em cada conjunto, o que é feito através dos projetores.

4.5.1 Projetores

Pela definição, a projeção $P_i x$ de um vetor x no conjunto C_i é o ponto em C_i que é mais próximo de x . Suponha que o conjunto C_i represente um hiperplano com normal a_i . A reta que conecta x e sua projeção $P_i x$ é ortogonal a este hiperplano, com isso é possível estabelecer a relação apresentada na equação 4.12.

$$x - P_i x = \alpha a_i \quad (4.12)$$

A constante α pode ser calculada sabendo-se que $P_i x$ pertence ao conjunto C_i , ou seja, $P_i x$

satisfaz a equação 4.9. Substituindo $P_i x$ na equação 4.9 obtém-se a equação (3.13).

$$\langle a_i, P_i x \rangle = b_i \quad (4.13)$$

Aplicando a equação 4.12 na equação 4.13 obtém-se a equação 4.14.

$$\langle a_i, x - \alpha a_i \rangle = b_i \quad (4.14)$$

Utilizando os multiplicadores de Lagrange, é possível encontrar o valor de α , mostrado na equação 4.15, que fornece a regra de projeção descrita pela equação 4.16.

$$\alpha = \frac{\langle a_i, x \rangle - b_i}{\|a_i\|^2} \quad (4.15)$$

$$P_i x = x - \frac{\langle a_i, x \rangle - b_i}{\|a_i\|^2} a_i \quad (4.16)$$

Tendo o operador de projeção, para obter a solução do sistema de equações lineares basta escolher um x inicial e utilizar a equação 4.17 iterativamente, até que se verifique a convergência.

$$x_{k+1} = P_m \cdots P_2 P_1 x_k \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.17)$$

A equação 4.17 descreve uma implementação sequencial para o problema apresentado. A implementação paralela pode ser feita utilizando a equação 4.18, lembrando que os projetores são os mesmos da equação 4.16.

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P_i x_k - x_k) \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

O algoritmo representado pela equação 4.18 é o mesmo algoritmo representado pela equação 4.5, porém, os pesos w_i possuem os mesmos valores para $i = 1, 2, \dots, n$. Como existem n conjuntos e a condição descrita pela equação 4.6 tem que ser satisfeita, cada conjunto é normalizado por n .

Figura 4.8 – (a) As sucessivas projeções convergem para a solução do sistema, (b) a projeção converge para a solução mais próxima da estimativa inicial e (c) como não existe solução as projeções ficam oscilando entre dois valores.

4.5.2 Comportamento do Algoritmo

Para analisar a convergência das projeções, serão considerados os sistemas de equações apresentados na equação 4.8. A seguir será apresentada a análise de convergência para a implementação através de projeção paralela e sequencial.

Algoritmo de Projeção Sequencial

Dado um ponto qualquer, a equação 4.8.a convergirá assintoticamente para a solução esperada, conforme mostrado na Figura 4.8.a. A equação 4.8.b converge, em uma iteração, para o ponto mais próximo da solução inicialmente estimada (lembrando que esse sistema possui infinitas soluções), como mostrado na Figura 4.8.b. A equação 4.8.c não irá convergir e a projeção ficará oscilando entre dois valores (tendo em vista que esse sistema não possui solução), conforme mostrado na Figura 4.8.c.

Algoritmo de Projeção Paralela

A equação 4.8.a converge para a solução desejada, conforme mostrado na Figura 4.9.a. A equação 4.8.b tem sua convergência de maneira similar à descrita no método sequencial (Figura 4.9.b). A equação 4.8.c converge para um ponto equidistante de l_1 e l_2 (Figura 4.9.c).

Figura 4.9 – ((a) as sucessivas projeções convergem para a solução do sistema, (b) a projeção converge para a solução mais próxima da estimação inicial e (c) como não existe solução as projeções convergem para a solução dos mínimos quadrados.

4.6 Conjuntos de Restrições Convexos

O modelo linear para reconstrução de imagem pode ser descrito pela equação 4.19, onde g representa os dados do vetor de projeção de tamanho $(M \times 1)$, f é o vetor da imagem original de tamanho $(N^2 \times 1)$, A é a matriz de pesos de tamanho $(M \times N^2)$ e n é o vetor de ruído de tamanho $(M \times 1)$.

$$g = Af + n \quad (4.19)$$

Assume-se que a imagem estimada, $\tilde{f}$, é quadrada e que $f(i)$ representa o i -ésimo pixel de uma imagem $f \in \mathbb{R}^{N \times N}$. O resíduo, $r = g - A\tilde{f}$, é o vetor de *ruído estimado*. Restrições sobre o resíduo podem ser expressas como restrições sobre a imagem estimada (51).

A equação 4.19 descreve um sistema de equações lineares, onde cada linha de g descreve uma equação linear que pode ser representada por um hiperplano. Cada hiperplano é um conjunto convexo e sua solução pode ser encontrada através do método de POCS, conforme descrito na seção 4.5, sendo a regra de projeção definida pela equação 4.16 na página 82.

Além dos conjuntos de restrições expressos pela equação 4.19 é possível considerar o conhecimento *a priori* sobre a imagem a ser reconstruída. Tais restrições têm que ser expressas em forma de conjunto. A seguir serão descritos alguns conjuntos convexos que podem ser usados na reconstrução de imagens tomográficas.

4.6.1 Conjunto de Restrição de Suporte Finito

A equação 4.20 descreve o conjunto de restrição de suporte finito, onde todas as funções estão no espaço de Hilbert H e pertencem a uma região Ω .

$$C_{SF} = \{h : h \in H \text{ e } h(i) = 0 \text{ para } i \notin \Omega\} \quad (4.20)$$

O operador de projeção do conjunto definido pela equação 4.20 é mostrado na equação 4.21.

$$P_{SF}q(i) = \begin{cases} q(i) & \text{se } i \in \Omega \\ 0 & \text{se } i \notin \Omega \end{cases} \quad (4.21)$$

4.6.2 Conjunto de Restrição de Não Negatividade

O conjunto descrito pela equação 4.22 descreve um conjunto cujos elementos não podem assumir valores negativos, ou seja, estabelece um limite inferior para o grau de atenuação da imagem a ser reconstruída.

$$C_+ = \{h : h \in H \text{ e } h(i) \geq 0 \quad \forall i\} \quad (4.22)$$

A regra de projeção no conjunto C_+ é descrita pela equação 4.23.

$$P_+q(i) = \begin{cases} q(i) & \text{se } q(i) \geq 0 \\ 0 & \text{se } q(i) < 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

4.6.3 Conjunto de Restrição de Amplitude Limitada

Esse conjunto descreve o limite inferior e o limite superior para os valores dos *pixels* da imagem a ser reconstruída. A equação 4.24 descreve esse conjunto, onde α é o limite inferior, β é o limite superior e Ω é a região onde se encontra a imagem.

$$C_{AL} = \{h : h \in H \text{ e } \alpha \leq h(i) \leq \beta \text{ para } \forall i \in \Omega\} \quad (4.24)$$

O projetor da equação 4.24 é dado pela equação 4.25.

$$P_{AL}q(i) = \begin{cases} \alpha & \text{se } q(i) < \alpha \\ q(i) & \text{se } \alpha \leq q(i) \leq \beta \\ \beta & \text{se } q(i) > \beta \end{cases} \quad (4.25)$$

4.6.4 Conjunto de Imagens com Pontos Conhecidos

É possível estabelecer um conjunto de restrição quando se tem o conhecimento dos valores assumidos por alguns pixels na imagem a ser reconstruída. A equação 4.26 descreve esse conjunto, onde γ_i é a intensidade assumida pelo i -ésimo *pixel*.

$$C_{PC} = \{h : h \in H \text{ e } h(i) = \gamma_i \quad \forall i \in I \subset \{1, 2, \dots, N^2\}\} \quad (4.26)$$

O projetor é dado pela equação 4.27.

$$P_{PC}q(i) = \begin{cases} \gamma_i & \text{se } i \in I \\ q(i) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.27)$$

Este conjunto pode ser considerado uma generalização do conjunto de restrição de suporte finito, descrito pela equação 4.20, onde γ_i assume valor nulo para os pontos fora da região de interesse.

4.7 Comparação entre o algoritmo de POCS e Retroprojeção filtrada

Para reconstrução tomográfica de imagens utilizando POCS são considerados três tipos de conjuntos de restrição convexos. O primeiro tipo é definido pelas projeções. Esse conjunto é definido na seção 4.19 na página 84, onde as N equações definem os conjuntos $C_i (i = 1, 2, \dots, N)$ cujos projetores são definidos pela equação 4.16 na página 82. O segundo tipo de conjunto de restrição é o de suporte finito, descrito na seção 4.6.1 na página precedente. O terceiro é o conjunto de restrição de não negatividade, descrito na seção 4.6.2 na página anterior.

Estes conjuntos de restrição foram escolhidos por não exigirem conhecimento *a priori* mais profundo sobre o material em estudo.

No caso do POCS sequencial, o algoritmo escolhido é descrito pela equação 4.28, ou seja, a projeção é feita inicialmente nos hiperplanos definidos pelas observações, seguida pela projeção

Figura 4.10 – (a) *Phantom Sheep-Logan*, (b) *reconstrução com retroprojeção filtrada*, (c) *reconstrução utilizando POCS paralelo* e (d) *reconstrução utilizando POCS sequencial*

no conjunto de suporte finito e, por último, é feita a projeção no conjunto de não negatividade. É considerada como uma iteração, a projeção em todos os conjuntos.

$$f_{k+1} = P_+ P_{SF} P_{C_i} f_k \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (4.28)$$

No algoritmo de POCS paralelo, a projeção é feita paralelamente em todos os hiperplanos definidos pelas observações, seguida pela projeção no conjunto de suporte finito e de não negatividade. Esse algoritmo é definido pela equação 4.29.

$$\begin{aligned} g_k &= f_k + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (P_{C_i} f_k - f_k) \\ f_{k+1} &= P_+ P_{SF} g_k \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (4.29)$$

No algoritmo de retroprojeção filtrada foi utilizado o filtro *Ram-Lak*.

Para verificar o resultado da reconstrução tomográfica foi feita uma simulação de um *phantom* descrita por Logan e Shepp(25). Esse *phantom* é ilustrado pela Figura 4.10.a. Como o objetivo é analisar o efeito do ruído nos algoritmos de reconstrução, foi introduzido ruído de Poisson nas projeções do *phantom* em questão.

A Figura 4.10.b mostra o resultado da reconstrução utilizando o algoritmo de retroprojeção filtrada. O resultado da reconstrução utilizando POCS paralelo é mostrado na Figura 4.10.c e o resultado do POCS sequencial é apresentado na Figura 4.10.d.

É possível observar que as reconstrução utilizando POCS apresentaram um melhor resultado do que o algoritmo de retroprojeção filtrada. O melhor resultado observado é o apresentado pelo algoritmo de POCS paralelo que faz uma suavização do ruído, em comparação ao POCS sequencial, porém preservando as bordas da imagem.

4.8 Considerações Finais

O algoritmo de POCS torna possível a incorporação de conhecimento *a priori* nos algoritmos de reconstrução, fazendo com isso que a solução possua um resultado satisfatório.

Dentre os métodos apresentados o que obteve melhor resultado foi o algoritmo de POCS paralelo, apesar de possuir os mesmo conjuntos de restrição do algoritmo de POCS sequencial. Possivelmente o ruído faz com que os conjuntos gerados pelas observações não possuam interseção, ou seja, as iterações faz com que a solução oscile entre os conjuntos existentes. Já o POCS paralelo faz com que a solução satisfaça o mínimo erro médio quadrático, produzindo um resultado mais próximo dos conjuntos de restrições impostos.

5 MÉTODO PROPOSTO

5.1 Considerações Iniciais

Conforme abordado no capítulo 4, seção 4.7 na página 86, o algoritmo POCS paralelo apresenta melhor resultado na presença de ruído. Esse foi o método de reconstrução tomográfica escolhido, tendo em vista que, por melhor que seja o estimador do sinal original (dado o sinal ruidoso), existe um resíduo restante.

5.2 Algoritmo

Os método abordado consiste em, inicialmente, filtrar as projeções ruidosas com os métodos descritos no capítulo 3. Após a estimação das projeções, utiliza-se o algoritmo POCS paralelo, para reconstrução tomográfica das imagens, conforme mostrado na equação 4.5, utilizando os conjuntos de restrições convexos descritos pelas equações 4.19, 4.20 e 4.22. O método é descrito pela Figura 5.1, onde y representa as projeções ruidosas, $\hat{g}$ representa a estimação das projeções sem o ruído e f , a imagem reconstruída.

A estimação do sinal pode ser feita utilizando o critério MAP considerando-se diferentes densidades *a priori*. Este trabalho levou em consideração quatro tipos de densidade, sendo elas: a) Gaussiana, b) Chi-quadrado, c) Gama e d) Beta.

Como o ruído pode ser modelado como ruído Poisson, devido à baixa contagem de *fótons*,

Figura 5.1 – O método proposto consiste em filtrar as projeções antes de utilizar o algoritmo de reconstrução.

antes de utilizar a redução de ruído nos coeficientes *wavelets*, é efetuada a Transformada de Anscombe para poder obter um modelo de ruído aditivo. Em seguida, é aplicada a DWT, o que possibilita a redução de ruído em diferentes escalas. Depois de obtida a estimação dos coeficientes *wavelets* livres de ruído, através da utilização de *thresholding*, é aplicada, então, a IDWT (*Inverse Discrete Wavelet Transform*) e, em seguida, a Transformada Inversa de Anscombe, obtendo-se assim uma estimação das projeções sem a presença de ruído.

A utilização da Transformada de Anscombe permite que seja usado o Filtro de Wiener pontual. Já o Filtro de Goodman-Belsher, que considera o ruído de Poisson nas projeções, pode ser aplicado diretamente sobre as projeções ruidosas.

5.3 Resultados

Phantom ou corpo de prova é um objeto confeccionado para realizar um experimento. Para verificar a performance do método foram considerados *phantoms* simulados e reais. O *phantom* simulado foi utilizado para criar um ambiente onde é possível controlar o ruído presente, bem como conhecer a imagem real que se deseja reconstruir.

A performance do algoritmo foi calculada utilizando a melhoria da relação sinal-ruído (*ISNR - Improvement Signal-to-Noise Ratio*), que é medida em *decibel* (dB), apresentada na equação 5.1, onde f_j é o $j^{\text{ésimo}}$ elemento da imagem ideal, $\hat{f}_j$ é o $j^{\text{ésimo}}$ elemento da imagem reconstruída utilizando filtragem nas projeções e $\tilde{f}_j$ é o $j^{\text{ésimo}}$ elemento da imagem reconstruída sem filtrar as projeções.

$$ISNR = 10 \log \frac{\sum_j (f_j - \tilde{f}_j)^2}{\sum_j (f_j - \hat{f}_j)^2} \quad (5.1)$$

Na seqüência serão mostradas as imagens reconstruídas para cada *phantom*, bem como o *ISNR* para cada reconstrução.

5.3.1 Phantom Simulado

Para verificar os resultados em uma ambiente simulado foi utilizado o *phantom* de Shepp-Logan (25) mostrado na Figura 5.2.a. Foi simulada a tomografia do *phantom*, admitindo que a maior contagem de *fótons* (feixe livre) é igual a cem, em seguida, foi inserido ruído Poisson aos perfis angulares. As projeções foram feitas em 100 (cem) ângulos diferentes compreendidos no intervalo $[0, 180[$, cada perfil angular contém cem raios-soma. As imagens após a reconstrução

Figura 5.2 – Phantom Shepp-Logan: (a) original e (b) ruidoso.

Figura 5.3 – Reconstrução do phantom ruidoso simulado com filtragem das projeções ruidosas com o critério MAP com densidade *a priori* : (a) gaussiana, (b) chi-quadrado, (c) gama e (d) beta

têm dimensão 100X100.

A imagem ruidosa é gerada pela reconstrução do sinal ruidoso utilizando POCS paralelo, mostrada na Figura 5.2.b. A imagem estimada é reconstruída utilizando o mesmo método, porém, utilizando diferentes estimadores nas projeções.

A Figura 5.3 mostra os resultados da reconstrução tomográfica do *phantom* simulado utilizando o critério MAP com diferentes densidades de probabilidades *a priori*. Foram utilizadas as densidades *a priori*: (a) gaussiana (Figura 5.3.a), (b) chi-quadrado (Figura 5.3.b), (c) gama (Figura 5.3.c) e (d) beta (Figura 5.3.d).

A tabela 5.1 mostra o *ISNR* para a reconstrução utilizando o critério MAP com diferentes

Tabela 5.1 – *ISNR* da reconstrução com filtragem nas projeções utilizando o critério MAP com diferentes densidades de probabilidades *a priori*.

densidade <i>a priori</i> gaussiana	densidade <i>a priori</i> chi-quadrado	densidade <i>a priori</i> beta	densidade <i>a priori</i> gama
2,975	3,491	2,251	2,953

Figura 5.4 – Reconstrução do phantom ruidoso simulado com redução de ruído nas projeções utilizando o *hard-thresholding* nos coeficientes wavelets usando as famílias: (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4.

Tabela 5.2 – *ISNR* da reconstrução com a utilização do *hard-thresholding* nos coeficientes wavelets das projeções utilizando diferentes famílias wavelets.

Haar	DB2	DB3	DB4
2,978	2,913	2,758	2,61

densidades de probabilidade *a priori*. Os resultados apresentados na tabela mostram que os melhores resultados para esse tipo de filtragem foram obtidos utilizando a densidade *a priori* chi-quadrado e gaussiana.

A redução de ruído utilizando *hard-thresholding* nos coeficientes wavelets para este *phantom* é mostrado na Figura 5.4, onde as famílias wavelets utilizadas foram: Haar (Figura 5.4.a), DB2 (Figura 5.4.b), DB3 (Figura 5.4.c) e DB4 (Figura 5.4.d).

A tabela 5.2 mostra o *ISNR* para a redução do ruído utilizando *hard-thresholding* em três escalas wavelets; o limiar é calculado utilizando o *universal threshold*. A variância do ruído em todas escalas é unitária, tendo em vista que a redução de ruído é aplicada no domínio de Anscombe.

As Figuras 5.5.a, 5.5.b, 5.5.c e 5.5.d mostram o resultado da utilização do *soft-thresholding* nos coeficientes wavelets utilizando as famílias Haar, DB2, DB3 e DB4 respectivamente. O limiar é aplicado em três escalas wavelets.

A tabela 5.3 mostra o *ISNR* aplicado à reconstrução tomográfica precedida da redução de ruído utilizando *soft-thresholding* nos coeficientes wavelets para diferentes famílias wavelets.

A Figura 5.6.a mostra o resultado da reconstrução tomográfica precedida da filtragem nas projeções utilizando o filtro de Wiener pontual, com uma janela de dimensão três. Para essa imagem o *ISNR* é de 3,0174.

Figura 5.5 – Reconstrução do phantom ruidoso simulado com redução de ruído nas projeções utilizando o soft-thresholding nos coeficientes wavelets usando as famílias: (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4.

Tabela 5.3 – ISNR da reconstrução com a utilização do soft-thresholding nos coeficientes wavelets das projeções utilizando diferentes famílias wavelets a priori.

Haar	DB2	DB3	DB4
3,152	2,927	2,845	2,769

Figura 5.6 – Reconstrução do phantom ruidoso simulado com filtragem de ruído nas projeções utilizando os filtros de (a) Wiener e (b) Goodman-Belsher

Tabela 5.4 – *ISNR da reconstrução tomográfica, do phantom Shepp-Logan com dimensão 50X50, utilizando POCS e filtragem nas projeções.*

MAP com densidade <i>a priori</i>			
gaussiana	chi-quadrado	beta	gama
3,059	2,106	2,015	3,051
<i>Hard-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
2,228	2,111	2,113	2,065
<i>Soft-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
2,606	2,420	2,421	2,066
Filtro de Wiener Pontual		Filtro de Goodman-Belsher	
2,621		2,151	

O resultado da reconstrução tomográfica, filtrando anteriormente as projeções com o filtro de Goodman-Belsher, é mostrado na Figura 5.6.b, onde o *ISNR* é 3,493.

Apesar dos melhores resultados obtidos serem os que adotaram o critério MAP para a estimação do sinal livre de ruído, considerando o *ISNR*, as imagens são visualmente muito similares, sendo possível observar que alguns métodos, tal como a aplicação do filtro de Wiener pontual, provocaram uma suavização na imagem reconstruída.

Para verificar os efeitos produzidos nessas imagens, foi feita uma simulação, com o mesmo *phantom*, utilizando cinquenta perfis angulares, onde a imagem reconstruída possui 50X50 *pixels*. As imagens para cada um dos métodos de filtragem abordados neste trabalho são mostradas nas Figuras 5.7 e 5.7.

A imagem original para esse *phantom* é exibida na Figura 5.7.a e a imagem da Figura 5.7.b mostra a reconstrução das projeções ruidosas. O *ISNR* para a reconstrução tomográfica do *phantom* é mostrado na tabela 5.4.

Observando os valores do *ISNR*, nota-se que o método que obteve melhor resultado foi a reconstrução obtida a partir das projeções estimadas utilizando o critério MAP com densidade *a priori* gaussiana. A filtragem feita nos coeficientes *wavelets* apresentam valores de *ISNR* muito próximos, independente da família *wavelet* utilizada ou do método de filtragem (*hard-thresholding* ou *soft-thresholding*).

O filtro de Wiener pontual apesar de apresentar valor de *ISNR* igual a 2,621 suavizou a imagem a ponto de omitir algumas estruturas visíveis na imagem ruidosa. Já a utilização do filtro de Goodman-Belsher, apesar da suavização, não deixou esse efeito evidente.

Figura 5.7 – (a) Phantom de Shepp-Logan de tamanho 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo com estimação das projeções utilizando o critério MAP com densidades a priori (c) gaussiana, (d) chi-quadrado, (e) beta e (f) gama. Redução de ruído nas projeções utilizando hard-thresholding nos coeficientes wavelets utilizando as famílias wavelets (g) Haar, (h) DB2, (i) DB3 e (j) DB4. Filtragem nas projeções utilizando (k) o filtro de Wiener e o (l) filtro de Goodman-Belsher.

Figura 5.8 – (a) Phantom de Shepp-Logan de tamanho 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo precedida da aplicação do soft-thresholding nos coeficientes wavelets das projeções utilizando as famílias wavelets (c) Haar, (d) DB2, (e) DB3 e (f) DB4.

Figura 5.9 – Ilustração do corte transversal dos Phantoms experimentais (a) homogêneo, (b) simétrico e (c) assimétrico.

5.3.2 Phantoms Reais

Foram utilizados três *phantoms* experimentais: homogêneo, assimétrico e simétrico. O *phantom* homogêneo é um cilindro de *nylon* contendo água em seu interior, conforme mostrado na Figura 5.9.a. O *phantom* assimétrico é um objeto cilíndrico de *nylon*, com furos de diferentes tamanhos (Figura 5.9.b). O *phantom* simétrico é um corpo cilíndrico de *plexiglass* com dois furos e dois cilindros de alumínio em seu interior. Tanto os furos quanto os cilindros de alumínio estão dispostos de maneira simétrica, conforme mostrado na Figura 5.9.c.

A obtenção dos dados foi feita no CNPDIA-EMBRAPA, com um tomógrafo de primeira geração descrito na seção 2.2.2.

Cada *phantom* teve sua projeção obtida em dois diferentes tempos de exposição à radiação, sendo eles: (a) três segundos por raio soma, obtendo-se baixa contagem de *fótons* e, conseqüentemente, um alto ruído e (b) vinte segundos por raio soma, obtendo-se alta contagem de *fótons* e, conseqüentemente, aumentando substancialmente a relação sinal-ruído. As imagens reconstruídas a partir das projeções com alta contagem de *fótons* foram consideradas imagens ideais.

Figura 5.10 – *Phantom homogêneo: (a) imagem ideal, reconstruída a partir das projeções obtidas com 20 segundos de exposição por raio; (b) imagem ruidosa reconstruída a partir das projeções obtidas com 3 segundos de exposição por raio*

Phantom Homogêneo

O objetivo deste *phantom* é verificar o comportamento do ruído, tendo em vista que, por ser uma região homogênea, é mais fácil verificar as alterações de intensidades entre os *pixels*.

Foram feitas quatro coletas de dados com esse *phantom*, sendo que duas com alto tempo de exposição à radiação (vinte segundos por raio) em cem ângulos diferentes, com cem raios-soma por ângulo, e duas com baixo tempo de exposição à radiação (três segundos por raio) em cinquenta ângulos diferentes, com cinquenta raios-soma por ângulo.

Os primeiros resultados a serem apresentados foram os coletados em cem ângulos, gerando uma imagem de tamanho 100X100 *pixels*.

A Figura 5.10.a mostra a imagem ideal. Essa imagem foi obtida a partir da reconstrução das projeções com alto tempo de exposição à radiação (vinte segundos por raio). A reconstrução do *phantom* foi feita utilizando o algoritmo de POCS paralelo.

A imagem ruidosa, mostrada na Figura 5.10.b, foi obtida através da reconstrução, pelo algoritmo de POCS paralelo, das projeções com baixo tempo de exposição à radiação (três segundos por raio).

O resultado da reconstrução tomográfica utilizando a estimação das projeções livres de ruído, através do critério MAP, pode ser observado na Figura 5.11. As Figuras 5.11.a, 5.11.b, 5.11.c e 5.11.d mostram o resultado da reconstrução das projeções filtradas com o critério MAP com densidades *a priori* gaussiana, chi-quadrado, beta e gama respectivamente.

O *ISNR* para a estimação utilizando a densidade *a priori* gaussiana é de 5,478 dB, para a densidade *a priori* chi-quadrado é de 6,861 dB, para a densidade *a priori* beta e gama é de 3,238 dB e 5,425 dB.

Figura 5.11 – Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com estimação das projeções livres de ruído utilizando o critério MAP utilizando as densidades de probabilidades *a priori* (a) gaussiana, (b) chi-quadrado, (c) beta e (d) gama.

Tabela 5.5 – *ISNR* da reconstrução tomográfica, do phantom Homogêneo com dimensão 100X100, utilizando POCS e filtragem nas projeções.

MAP com densidade <i>a priori</i>			
gaussiana	chi-quadrado	beta	gama
5,478	6,861	3,238	5,425
<i>Hard-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
5,379	6,679	6,774	6,441
<i>Soft-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
5,462	6,592	6,759	6,451
Filtro de Wiener Pontual		Filtro de Goodman-Belsher	
7,258		6,374	

Observando os valores do *ISNR* bem como a Figura 5.11 que mostra o resultado da reconstrução após a estimação verifica-se que a densidade *a priori* chi-quadrado apresentou melhor resultado. Tanto a imagem quanto os valores do *ISNR* produzidos pela estimação MAP utilizando densidade *a priori* gaussiana e produziram resultados muito próximos.

A utilização do *hard-thresholding* e *soft-thresholding* é feita em três escalas *wavelets*. As famílias *wavelets* utilizadas foram a Haar e a de Daubechies (DB2, DB3 e DB4). Antes de aplicar a DWT é aplicada a Transformada de Anscombe, com o objetivo de transformar o ruído de Poisson em ruído aditivo gaussiano com média e variância conhecida (média nula e variância unitária).

Os resultados da reconstrução utilizando a filtragem dos coeficientes *wavelets* nas projeções através do *hard-thresholding* pode ser observado nas Figuras 5.12.a, 5.12.b, 5.12.c e 5.12.d, enquanto as Figuras 5.12.e, 5.12.f, 5.12.g e 5.12.h mostram os resultados da filtragem utilizando o *soft-thresholding*.

Figura 5.12 – Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com filtragem nos coeficientes wavelets utilizando: *Hard-thresholding* nos coeficientes wavelets das famílias (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4; *Soft-thresholding* nos coeficientes wavelets das famílias (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4.

Os valores do *ISNR* para a filtragem dos coeficientes *wavelets* utilizando o *hard-thresholding* é de 5,379 dB, 6,679 dB, 6,774 dB e 6,441 dB para as famílias *wavelets* Haar, DB2, DB3 e DB4. Os valores do *ISNR* para filtragem dos coeficientes *wavelets* através do *soft-thresholding* para estas famílias é de 5,462 dB, 6,592 dB, 6,759 dB e 6,451 dB.

Apesar dos valores do *ISNR* destes métodos serem relativamente próximos é possível notar que as imagens obtidas a partir da filtragem dos coeficientes *wavelets* da família Haar (Figura 5.11.a e Figura 5.11.e) produzem alguns artefatos em forma de círculos concêntricos.

Como a transformada de Anscombe transforma o ruído de Poisson dependente de sinal em um ruído aditivo é possível filtrar as projeções, no domínio de Anscombe, utilizando o filtro de Wiener pontual. A Figura 5.13.a apresenta a imagem gerada pela reconstrução do *phantom* ruidoso com a filtragem das projeções utilizando o filtro de Wiener pontual com uma janela de três elementos. O valor do *ISNR* para este método é de 7,258 dB.

É possível filtrar o ruído através do filtro não linear proposto por Goodman e Belsher(39). O resultado da reconstrução das projeções ruidosas filtrada com esse método é mostrado na Figura 5.13.b, sendo o *ISNR* para este método é igual a 6,374 dB.

Os valores do *ISNR* dos métodos apresentados, para a reconstrução do *phantom* homogêneo, apresentaram resultados bem próximos, conforme mostrado na tabela 5.5.

Figura 5.13 – Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com a aplicação nas projeções dos filtros de (a) Wiener e (b) Goodman-Belsher.

O melhor resultado, em termos de *ISNR*, foi gerado a partir da filtragem das projeções através do filtro de Wiener pontual, embora visualmente a estimação utilizando o critério MAP com densidade *a priori* chi-quadrado apresente um resultado similar.

Para verificar o comportamento dos métodos de redução de ruído, nas projeções que possuem dimensões menores, realizou-se a coleta de dados em uma quantidade menor de ângulos, com menos raios por projeção.

A reconstrução das projeções em cinquenta ângulos diferentes, com cinquenta raios-soma por ângulo, com a redução de ruído nas projeções pode ser observado nas Figuras 5.14 e 5.14, sendo que a Figura 5.14.a representa a imagem ideal (reconstruída a partir das projeções com alto tempo de exposição à radiação) e a Figura 5.14.b representa a imagem ruidosa (reconstruída a partir das projeções com baixo tempo de exposição à radiação).

As imagens com dimensões menores (50X50 *pixels*) permitem verificar melhor os efeitos causados pelo ruído neste *phantom*.

Os valores do *ISNR* para este *phantom* podem ser observados na tabela 5.6. Esta tabela mostra que o melhor valor obtido foi pela imagem reconstruída a partir do critério MAP com densidade *a priori* gaussiana.

A filtragem do ruído nos coeficientes *wavelets* também apresentaram boa performance, em termos de *ISNR*. As imagens mostradas nas Figuras 5.14.g e 5.15.c que representam a reconstrução tomográfica das projeções que cujos coeficientes *wavelets* foram filtrados através do *hard-thresholding* e *soft-thresholding* apresentaram alguns artefatos circulares concêntricos. É possível observar que quando o suporte da família *wavelet* é aumentado, esse artefato desaparece. Observe que quando o filtro é aplicado nos coeficientes *wavelets* da família DB2 (Figura 5.14.h e Figura 5.15.d) ainda existem alguns artefatos nas bordas, porém, em menor quantidade que o resultado da família Haar.

Figura 5.14 – (a) Phantom homogêneo de dimensão 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo com estimação das projeções utilizando o critério MAP com densidades a priori (c) gaussiana, (d) chi-quadrado, (e) beta e (f) gama. Redução de ruído nas projeções utilizando hard-thresholding nos coeficientes wavelets utilizando as famílias wavelets (g) Haar, (h) DB2, (i) DB3 e (j) DB4. Filtragem nas projeções utilizando (k) o filtro de Wiener e o (l) filtro de Goodman-Belsher.

Figura 5.15 – (a) *Phantom homogêneo de dimensão 50X50* e (b) *reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo precedida da aplicação do soft-thresholding nos coeficientes wavelets das projeções utilizando as famílias wavelets (c) Haar, (d) DB2, (e) DB3 e (f) DB4.*

Nos resultados das imagens reconstruídas a partir da filtragem dos coeficientes *wavelets* na família *DB4* (Figura 5.14.j e Figura 5.15.f), esses artefatos praticamente não existem.

Phantom Simétrico

O Objetivo desse *phantom* é verificar o contraste na imagem reconstruída.

Foram feitas quatro coletas, sendo duas com alto tempo de exposição à radiação, em cem e cinquenta ângulos diferentes, e duas com baixo tempo de exposição à radiação, com cem e cinquenta ângulos diferentes.

O *phantom* reconstruído a partir das projeções capturadas em cem ângulos, com cem raios-soma por ângulo será mostrado a seguir, no qual a imagem ideal foi reconstruída a partir das projeções com alto tempo de exposição à radiação (vinte segundos por raio). A Figura 5.16.a mostra a imagem ideal.

A Figura 5.16.b mostra o *phantom* ruidoso, obtido a partir da reconstrução tomográfica das

Tabela 5.6 – *ISNR da reconstrução tomográfica, do phantom Homogêneo com dimensão 50X50, utilizando POCS e filtragem nas projeções.*

MAP com densidade <i>a priori</i>			
gaussiana	chi-quadrado	beta	gama
4,578	2,901	1,8632	4,559
<i>Hard-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
2,649	3,812	4,044	2,664
<i>Soft-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
3,514	3,676	4,770	2,901
Filtro de Wiener Pontual		Filtro de Goodman-Belsher	
2,917		1,844

Figura 5.16 – *Phantom simétrico: (a) imagem ideal, reconstruída a partir das projeções obtidas com 20 segundos de exposição por raio; (b) imagem ruidosa reconstruída a partir das projeções obtidas com 3 segundos de exposição por raio.*

projeções com baixo tempo de exposição (três segundos por raio), utilizando POCS paralelo. As imagens reconstruídas possuem 100X100 *pixels*.

A reconstrução tomográfica obtida a partir da estimação do sinal, livre do ruído, através do critério MAP utilizando densidade *a priori* gaussiana é mostrada na Figura 5.17.a, onde o *ISNR* medido é de 4,534 dB.

Para estimação utilizando o critério MAP com densidades *a priori* chi-quadrado, beta e gama a reconstrução produz as imagens mostradas nas Figuras 5.17.b, 5.17.c e 5.17.d, respectivamente. Para essa estimação o *ISNR* medido na imagem reconstruída é de 4,160 dB, 2,998 dB e 4,524 dB.

A redução de ruído nas projeções através da aplicação do *hard-thresholding* nos coeficientes *wavelets*, utilizando as famílias Haar, DB2, DB3 e DB4, são mostradas nas Figuras 5.18.a,

Figura 5.17 – Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com estimação das projeções livres de ruído utilizando o critério MAP utilizando as densidades de probabilidades *a priori* (a) gaussiana, (b) chi-quadrado, (c) beta e (d) gama.

5.18.b, 5.18.c e 5.18.d, possuindo cada uma o valor de *ISNR* igual a 3,624 dB, 4,142 dB, 4,173 dB e 4,654 dB.

A Figura 5.18.e mostra a reconstrução tomográfica das projeções ruidosas após a redução do ruído através do *soft-thresholding* nos coeficientes *wavelets*. A *wavelet* utilizada para a DWT foi a de Haar, possuindo um valor de *ISNR* igual a 3,819 dB.

A redução de ruído utilizando *soft-thresholding* nos coeficientes *wavelets* da família *wavelets* de Daubechies (*DB2 DB3* e *DB4*) *soft-thresholding* é mostrado nas Figuras 5.18.f, 5.18.g e 5.18.h, possuindo valores de *ISNR* 3,996 dB, 4,146 dB e 4,653 dB, respectivamente.

A utilização do filtro de Wiener, após a transformada de Anscombe, nas projeções ruidosas produz a imagem mostrada na Figura 5.19.a, após a reconstrução tomográfica, gerando um valor de *ISNR* igual a 5,188 dB.

A aplicação direta do filtro de Goodman-Belsher nas projeções resulta na reconstrução mostrada na Figura 5.19.b com valor de *ISNR* de 4,326 dB.

O valores do *ISNR* são mostrados na tabela 5.7.

A reconstrução que apresentou melhor resultado foi obtida a partir da filtragem realizada com o filtro de Wiener pontual, embora a estimação utilizando o critério MAP com densidades *a priori* gaussiana e gama possuam valores de *ISNR* muito próximos ao do filtro de Wiener pontual.

As imagens obtidas apresentaram um resultado visual muito próximo, não alterando o contraste da imagem resultante.

Os *phantoms* obtidos a partir de cinquenta ângulos diferentes, bem como em cinquenta raios-soma por ângulo, produzem imagens com tamanho de 50X50 *pixels* o que permite verificar melhor o efeito da reconstrução nas bordas da imagem gerada.

Figura 5.18 – Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com filtragem nos coeficientes wavelets utilizando: *Hard-thresholding* nos coeficientes wavelets das famílias (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4; *Soft-thresholding* nos coeficientes wavelets das famílias (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4.

Figura 5.19 – Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com a aplicação nas projeções dos filtros de (a) Wiener e (b) Goodman-Belsher.

Tabela 5.7 – *ISNR da reconstrução tomográfica, do phantom simétrico com dimensão 100X100, utilizando POCS e filtragem nas projeções.*

MAP com densidade <i>a priori</i>			
gaussiana	chi-quadrado	beta	gama
4,534	4,160	2,998	4,524
<i>Hard-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
3,624	4,142	4,173	4,654
<i>Soft-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
3,819	3,996	4,146	4,653
Filtro de Wiener Pontual		Filtro de Goodman-Belsher	
5,188		4,326	

A imagem ideal para este *phantom* é mostrada na Figura 5.20.a e as projeções para esta reconstrução foram feitas utilizando um tempo de vinte segundos por raio. As projeções obtidas com três segundos por raio são as projeções ruidosas. A imagem ruidosa é mostrada na Figura 5.20.b.

As demais imagens da Figura 5.20 e Figura 5.21 mostram as imagens reconstruídas a partir da estimação do sinal original.

Os valores do *ISNR* são mostrados na tabela 5.8. A partir desta tabela é possível notar que a reconstrução que apresenta melhor resultado é feita a partir das projeções estimadas usando o critério MAP com densidade *a priori* gaussiana. Comparando a Figura 5.20.c, que representa o resultado da reconstrução utilizando a estimação MAP com densidade *a priori* gaussiana, com a Figura 5.20.k, reconstruída a partir das projeções utilizando o filtro de Wiener pontual, verifica-se que esta última apresenta uma pequena suavização nas bordas, enquanto na primeira não é possível verificar esse efeito.

Phantom Assimétrico

O objetivo deste *phantom* é verificar o quanto o ruído interfere em algumas estruturas do corpo de prova. O ruído deve ser filtrado sem que, com isso, elimine os círculos menores do *phantom*.

Assim como os experimentos anteriores (*phantom* homogêneo e *phantom* simétrico) as projeções foram capturadas em cem e cinquenta ângulos distintos, sendo as imagens reconstruídas em 100X100 *pixels* e 50X50 *pixels*.

Figura 5.20 – (a) Phantom simétrico de dimensão 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo com estimação das projeções utilizando o critério MAP com densidades a priori (c) gaussiana, (d) chi-quadrado, (e) beta e (f) gama. Redução de ruído nas projeções utilizando hard-thresholding nos coeficientes wavelets utilizando as famílias wavelets (g) Haar, (h) DB2, (i) DB3 e (j) DB4. Filtragem nas projeções utilizando (k) o filtro de Wiener e o (l) filtro de Goodman-Belsher.

Figura 5.21 – (a) Phantom Simétrico de dimensão 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo precedida da aplicação do soft-thresholding nos coeficientes wavelets das projeções utilizando as famílias wavelets (c) Haar, (d) DB2, (e) DB3 e (f) DB4.

Tabela 5.8 – ISNR da reconstrução tomográfica, do phantom simétrico com dimensão 50X50, utilizando POCS e filtragem nas projeções.

MAP com densidade <i>a priori</i>			
gaussiana	chi-quadrado	beta	gama
4,427	4,479	2,768	2,009
<i>Hard-thresholding</i> nos coeficientes wavelets			
Haar	DB2	DB3	DB4
2,034	3,508	3,379	3,247
<i>Soft-thresholding</i> nos coeficientes wavelets			
Haar	DB2	DB3	DB4
3,906	3,783	3,786	3,629
Filtro de Wiener Pontual		Filtro de Goodman-Belsher	
4,181		3,136

Figura 5.22 – *Phantom assimétrico: (a) imagem ideal, reconstruída a partir das projeções obtidas com 20 segundos de exposição por raio; (b) imagem ruidosa reconstruída a partir das projeções obtidas com 3 segundos de exposição por raio.*

Figura 5.23 – *Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com estimação das projeções livres de ruído utilizando o critério MAP utilizando as densidades de probabilidades a priori (a) gaussiana, (b) chi-quadrado, (c) beta e (d) gama.*

Inicialmente será apresentado o *phantom* obtido a partir das projeções feitas em cem diferentes ângulos, com cem raios-soma por ângulo. A imagem ideal, reconstruída a partir das projeções feitas com vinte segundos por raio, é apresentada na Figura 5.22.a.

As projeções ruidosas, obtidas a partir da exposição do corpo à radiação por três segundos por raio e reconstruída com o algoritmo de POCS paralelo, é mostrada na Figura 5.22.b.

A imagem gerada a partir da reconstrução tomográfica com as projeções filtradas através da estimação MAP com probabilidade *a priori* gaussiana é mostrada na Figura 5.23.a e possui *ISNR* de 3,634 dB. A reconstrução feita a partir da estimação MAP com densidade de probabilidade *a priori* chi-quadrado, apresentada na Figura 5.23.b, possui *ISNR* 3,712 dB e as densidades *a priori* beta e gama possuem *ISNR* 2,043 dB e 3,384 dB.

As Figuras 5.24.a, 5.24.b, 5.24.c e 5.24.d mostram as imagens geradas por meio da reconstrução tomográfica das projeções filtradas com *hard-thresholding* nos coeficientes *wavelets* das famílias Haar, DB2, DB3 e DB4, produzindo *ISNR* de 2,964 dB, 3,511 dB, 3,698 dB e 3,781 dB, respectivamente.

Figura 5.24 – Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com filtragem nos coeficientes wavelets utilizando: Hard-thresholding nos coeficientes wavelets das famílias (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4; Soft-thresholding nos coeficientes wavelets das famílias (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4.

Figura 5.25 – Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com a aplicação nas projeções dos filtros de (a) Wiener e (b) Goodman-Belsher.

O *hard-thresholding* aplicado nos coeficientes *wavelets* das projeções ruidosas utilizando as famílias *wavelets* Haar, DB2, DB3 e DB4 gera as imagens mostradas nas Figuras 5.24.a, 5.24.b, 5.24.c e 5.24.d, cujos valores de *ISNR* são 3,125 dB, 3,379 dB, 3,692 dB e 3,777 dB.

A filtragem das projeções utilizando o filtro de Wiener pontual com uma janela de tamanho três produz a imagem mostrada na Figura 5.25.a, após a reconstrução utilizando POCS paralelo, o que gera um *ISNR* de 4,201 dB.

A Figura 5.25.b mostra o resultado da reconstrução após aplicar nas projeções ruidosas o filtro de Goodman-Belsher com *ISNR* de 3,699 dB.

O valores do *ISNR* são mostrados na tabela 5.9.

Tabela 5.9 – *ISNR da reconstrução tomográfica, do phantom assimétrico com dimensão 100X100, utilizando POCS e filtragem nas projeções.*

MAP com densidade <i>a priori</i>			
gaussiana	chi-quadrado	beta	gama
3,634	3,712	2,043	3,384
<i>Hard-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
2,964	3,511	3,698	3,781
<i>Soft-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
3,125	3,379	3,692	3,777
Filtro de Wiener Pontual		Filtro de Goodman-Belsher	
4,201		3,699	

O maior valor de *ISNR* foi o da imagem gerada a partir da reconstrução obtida a partir da filtragem das projeções utilizando o filtro de Wiener pontual, porém, observando as imagens geradas é possível notar que esse método produziu uma suavização nas estruturas do *phantom*. A Figura 5.23.a e Figura 5.23.b geradas através da estimação MAP com densidades *a priori* gaussiana e gama deixaram essas estruturas bem definidas, apresentando um círculo menor observado somente na imagem ideal.

O experimento obtido em menor quantidade de ângulos, com menor número de raios por ângulo, permite verificar como o ruído interfere nas estruturas observadas no *phantom*. Essas estruturas podem ser observadas na reconstrução do *phantom* de maior dimensão.

A imagem ideal para o *phantom* assimétrico com 50X50 *pixels*, obtida a partir da reconstrução das projeções feitas em cinquenta ângulos diferentes, é apresentada na Figura 5.26.a. As projeções para essa reconstrução foram obtidas expondo o material à radiação durante vinte segundos por raio.

A imagem ruidosa, mostrada na Figura 5.26.b, foi obtida a partir da reconstrução das projeções com baixo tempo de exposição (três segundos por raio).

Os algoritmos de redução de ruído foram aplicados às projeções com baixa contagem de fótons. Os resultados para a reconstrução tomográfica após a filtragem são mostrados nas Figuras 5.26 e 5.27.

Os valores do *ISNR* para este *phantom* são mostrados na tabela 5.10.

Os maiores valores de *ISNR* observados foram gerados a partir da aplicação do filtro de Wiener pontual e através da estimação usando o critério MAP com densidade *a priori* gaussi-

Figura 5.26 – (a) *Phantom* assimétrico de dimensão 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo com estimação das projeções utilizando o critério MAP com densidades a priori (c) gaussiana, (d) chi-quadrado, (e) beta e (f) gama. Redução de ruído nas projeções utilizando hard-thresholding nos coeficientes wavelets utilizando as famílias wavelets (g) Haar, (h) DB2, (i) DB3 e (j) DB4. Filtragem nas projeções utilizando (k) o filtro de Wiener e o (l) filtro de Goodman-Belsher.

Figura 5.27 – (a) *Phantom assimétrico de dimensão 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo precedida da aplicação do soft-thresholding nos coeficientes wavelets das projeções utilizando as famílias wavelets (c) Haar, (d) DB2, (e) DB3 e (f) DB4.*

ana e gama. Porém, observando as Figuras geradas por essas reconstruções, verifica-se que o resultado da reconstrução obtida a partir do filtro de Wiener pontual suaviza a imagem, fazendo com que algumas estruturas não sejam detectadas, o que não ocorre com os resultados obtidos a partir da estimação MAP.

5.4 Considerações Finais

A filtragem das projeções reduziram consideravelmente o ruído nas imagens reconstruídas.

Embora na maioria dos casos o resultado da reconstrução, das projeções após a aplicação do filtro de Wiener pontual, produzisse valores de *ISNR* alto, verificou-se que esse método causa uma suavização excessiva, não permitindo, assim, identificar algumas estruturas no corpo de prova (conforme observado na reconstrução do *phantom* assimétrico).

A reconstrução obtida a partir da filtragem nos coeficientes *wavelets* utilizando *hard-thresholding*

Tabela 5.10 – *ISNR da reconstrução tomográfica, do phantom assimétrico com dimensão 50X50, utilizando POCS e filtragem nas projeções.*

MAP com densidade <i>a priori</i>			
gaussiana	chi-quadrado	beta	gama
4,689	3,048	2,601	4,620
<i>Hard-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
3,383	3,852	3,964	3,529
<i>Soft-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
3,683	3,740	3,959	3,652
Filtro de Wiener Pontual		Filtro de Goodman-Belsher	
5,019		2,808	

e *soft-thresholding* pode produzir alguns artefatos na imagem reconstruída. Estes artefatos podem desaparecer quando o suporte da função aumenta, porém, quanto maior o suporte maior será o efeito de suavização gerado na imagem final. É possível verificar esse efeito quando aplicado à filtragem dos coeficientes *wavelets* da família Haar no *phantom* homogêneo. Quando a família utilizada é a DB4, esse efeito é inexistente, mas conforme observado na reconstrução do *phantom assimétrico* algumas estruturas menores são confundidas com o ruído e também são filtradas.

As reconstruções obtidas a partir da estimação das projeções utilizando o critério MAP foram as que obtiveram resultados mais estáveis, tanto em termos de *ISNR* quanto no aspecto visual da imagem gerada. Dentre as estimações MAP, os melhores resultados observados foram os que utilizaram a densidade *a priori* gaussiana e gama, sendo que a primeira produziu melhor valor de *ISNR* para os experimentos mostrados neste trabalho.

6 CONCLUSÃO

6.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo são apresentadas algumas conclusões do trabalho. Na Seção 6.2 são descritas as principais contribuições; na Seção 6.3 são discutidas algumas limitações e por fim, na Seção 6.4 são apresentadas as perspectivas para trabalhos futuros.

6.2 Contribuições

O algoritmo de POCS paralelo apresenta melhor resultado para sinais que possuam baixa relação sinal-ruído, dentre os métodos de reconstrução abordados, conforme mostrado no capítulo 4. Esses resultados são discutidos na seção 4.7 na página 86.

A filtragem nas projeções ruidosas melhora o resultado, tanto do *ISNR* quanto o aspecto visual da imagem gerada. Os algoritmos utilizados para filtragem das projeções possuem complexidade algorítmica linear ($O(n)$) não interferindo na complexidade do algoritmo de reconstrução tomográfica. Portanto, a relação custo-benefício do método é superior à aplicação pura do algoritmo POCS de reconstrução.

A filtragem nos coeficientes *wavelets*, utilizando *hard-thresholding* e *soft-thresholding* geraram imagens muito próximas (independente da família *wavelet* utilizada) com pouca diferença nos valores de *ISNR*. O que altera consideravelmente a filtragem nos coeficientes *wavelets* é o suporte da família utilizada. Foi possível notar que existe uma relação entre o tamanho desse suporte e a suavização incorporada. Quando o suporte é baixo, como no caso da família Haar, a filtragem pode incorporar alguns artefatos indesejáveis.

A utilização dos filtros de Wiener pontual e Goodman-Belsher apresentaram um bom desempenho. No entanto, quando aplicados a estruturas menores, ou em uma imagem de baixa resolução (gerada com um pequeno número de projeções), podem interpretar pequenas estruturas como ruído, as quais, consequentemente, serão eliminadas.

Dentre os métodos de filtragem abordados, os que utilizaram o critério MAP foram os que apresentaram maior estabilidade, principalmente quando utilizada a densidade *a priori* gaussiana, pois produziram maior relação sinal-ruído (medido pelo *ISNR*) e uma melhor qualidade nas imagens observadas.

Todos os métodos de filtragem melhoraram consideravelmente a relação sinal-ruído, na imagem resultante, a um baixo custo computacional.

6.3 Limitações

O tempo de reconstrução não é afetado por nenhum dos métodos de redução de ruído nas projeções. A maior demora do método se dá devido ao método POCS paralelo. Verificou-se que a convergência se dá em menos de dez iterações, o que não torna seu uso impeditivo devido à crescente velocidade de processamento dos equipamentos.

Os métodos de estimação MAP tiveram seus parâmetros estimados em uma janela. Essa janela é determinada pelo tamanho das projeções, ou seja, quanto maior a quantidade de raios na projeção, maior será o tamanho da janela, porém, esse aumento não ocorre de maneira linear. Neste trabalho foi utilizado somente uma janela de três elementos. O problema de determinação do tamanho da janela também ocorre na utilização do filtro de Wiener pontual.

6.4 Trabalhos Futuros

Existem alguns pontos, a partir deste trabalho, que podem ser considerados como trabalhos futuros, tal como a utilização do filtro de Wiener com *wavelets*, podendo utilizar algum algoritmo de *thresholding* nos coeficientes *wavelets* e o filtro de Wiener pontual nas imagens de baixa resolução (após aplicar a função de escala).

Uma outra sugestão para trabalho futuro é a utilização do filtro de Wiener não pontual, isto é, incorporando a correlação do sinal não ruidoso após a Transformada de Anscombe.

Na estimação MAP, é possível verificar o uso de outras distribuições de probabilidade *a priori*.

No algoritmo de reconstrução POCS é interessante verificar o uso de outros conjuntos de restrições convexas, tal como o de energia limitada e imagem de referência.

REFERÊNCIAS

- 1 CRUVINEL, P. E. *Minitomógrafo de Raios X e Raios γ Computadorizado para Aplicações Multidisciplinares*. Tese (Doutorado) — UNICAMP, 1987.
- 2 MASCARENHAS, N. D. A.; FURUIE, S. S.; PORTAL, L. S. Global Projection Estimation Methods for the Tomographic Reconstruction of Images with Poison Noise. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, n. 40, p. 2008–2013, 1993.
- 3 MASCARENHAS, N. D. A.; SANTOS, S. S. L.; CRUVINEL, P. E. The Use of MAP Techniques in the Tomographic Reconstruction of Poison Noise Corrupted Images. In: *IX SIBGRAPI*. [S.l.: s.n.], 1996. v. 197-207.
- 4 SALINA, F. V.; MASCARENHAS, N. D. A.; CRUVINEL, P. E. A Comparison of POCS Algorithms for Tomographic Reconstruction Under Noise and Limited View. In: *XV SIBGRAPI*. Fortaleza, Brazil: [s.n.], 2002. p. 342–346.
- 5 IUSEM, A. N.; PIERRO, A. R. D. Convergence Results for an Accelerated Nonlinear Cimmino Algorithm. *Numerische Mathematik*, n. 49, p. 367–378, 1986.
- 6 PIERRO, A. R. D.; IUSEM, A. N. On the Asymptotic Behaviour of Some Alternate Smoothing Series Expansion Iterative Methods. *Linear Algebra and Its Applications*, n. 130, p. 3–24, 1990.
- 7 BHUMKAR, B. et al. A Set Theoretic Approach to Image Reconstruction from Projections. *International Conference on Image Processing*, v. 2, p. 737–740, September 1996.
- 8 KAMALABADI, F.; SHARIF, B. Robust Regularized Tomographic Imaging With Convex Projections. *International Conference on Image Processing*, v. 2, p. 205–208, September 2005.
- 9 MALGOUYRES, F. Minimizing the Total Variation Under a General Convex Constraint for Image Restoration. *IEEE Transaction on Image Processing*, v. 11, n. 12, p. 1450–1456, December 2002.
- 10 ZHONG, J.; NING, R.; CONOVER, D. Image Denising Based on Multiscale Singularity Detection for Cone Beam CT Breast Image. *IEEE Transaction on Medical Imaging*, v. 23, n. 6, p. 696–703, june 2004.
- 11 NEELAMANI, R.; CHOI, H.; BARANIUK, R. Wavelet-domain regularized deconvolution for ill-conditioned systems. *International Conference on Image Processing*, v. 1, n. 204-208, 1999.
- 12 HOU, J.; TIAN, J.; LIU, J. Bayesshrink Based Wiener Filter in Wavelet Domain. *IEEE Workshop VLSI Design and Video Tech.*, p. 427–430, may 2005.

- 13 KALIFA, J.; LAINE, A.; ESSER, P. D. Regularization in Tomographic Reconstruction Using Thresholding Estimators. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v. 22, n. 3, p. 351–359, march 2003.
- 14 BOUBCHIR, L.; FADILI, J. M. Bayesian Denoising Based On The MAP Estimation in Wavelet-Domain Using Bessel K Form Prior. *International Conference on Image Processing*, v. 1, p. 113–116, september 2005.
- 15 LIU, C.; FREEMAN, W. T.; KANG, R. S. and S. B. Noise Estimation from a Single Image. *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, v. 1, p. 901–908, june 2006.
- 16 GUO, L.; WANG, H. Minimum Entropy Filtering for Multivariate Stochastic Systems With Non-Gaussian Noises. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 51, p. 695–700, april 2006.
- 17 WANG, J. et al. Penalized weighted least-squares approach to sinogram noise reduction and image reconstruction for low-dose X-ray computed tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v. 25, n. 10, p. 1272–1283, october 2006.
- 18 RIVIÈRE, P. J. L.; BIAN, J.; VARGAS, P. A. Penalized-likelihood sinogram restoration for computed tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v. 25, n. 8, p. 1022–1036, august 2006.
- 19 FURUIE, S. S. *Reconstrução Tomográfica de Imagens com Ruído Poisson: Estimativa das Projeções*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da USP - Depto. Engenharia Elétrica, Março 1990.
- 20 SANTOS, S. S. L. *Reconstrução Tomográfica de Imagens com Ruído Poisson por Estimadores MAP das Projeções Utilizando Densidades "A Priori" Definidas na Semi-Reta Não-Negativa*. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Computação - Universidade Federal de São Carlos, 1996.
- 21 RADON, J. On the Determination of Functions from their Integrals along Certain Manifolds. *Leipzig Math. Phys.*, v. 69, p. 262–277, 1917.
- 22 HOUNSFIELD, G. N. Computadorized Transverse Axial Scanning (Tomography) I: Description of System. *Brit. J. Radiol.*, v. 46, p. 1016–1022, 1973.
- 23 CORMACK, A. M. Representation of a Function by Its Line Integrals, with some Radiological Applications. *J. Appl. Physics*, v. 34, p. 2722–2727, 1963.
- 24 RAMANCHANDRAN, G. N.; LAKSHMINARAYANAN, A. V. Three-Dimensional Reconstruction from Radiographs and Electron Micrographs: Application of Convolutions instead of Fourier Transformers. *Proc. National Academic Science USA*, v. 68, p. 2236–2240, 1971.
- 25 LOGAN, B. F.; SHEPP, L. A. Optimal Reconstruction of a Function from its Projections. *Duke Mathematical Journal*, v. 42, n. 4, p. 645–659, 1975.
- 26 KAK, A. C.; SLANEY, M. *Principles of Computadorized Tomographic Imaging*. [S.l.]: IEEE Press, 1988.

- 27 STARK, H.; YANG, Y. *Vector Space Projections - A Numerical Approach to Signal and Image Processing, Neural Nets, and Optics*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1998.
- 28 RIBEIRO, G. C. *Desenvolvimento de um Algoritmo para a Reconstrução Tridimensional para Imagens de um Miniotomógrafo, baseado no Método de Reconstrução Algébrica Modificado e Interpolação Spline*. Dissertação (Mestrado) — UFSCar - Departamento de Computação, Dezembro 1994.
- 29 HENDEE, W. R. *The Physical Principles of Computed tomography*. Boston: Little Brown and Company, 1983.
- 30 TRUSSEL, H. J. Advances in Computer Vision and Image Processing. In: _____. [S.l.]: JAI Press, 1984. v. 1, cap. A Priori Knowledge in Algebraic Reconstruction Methods, p. 265–316.
- 31 CENSOR, Y. Parallel Application of Block-Iterative Methods in Medical Imaging and Radiation Therapy. *Mathematical Programming*, v. 12, p. 307–325, 1988.
- 32 YOULA, D. C.; WEBB, H. Image Restoration by the Method of Convex Projections: Part 1 - Theory. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, MI-1, p. 81–94, October 1982.
- 33 SEZAN, M. I.; STARK, H. Image Restoration by the Method of Convex Projections: Part 2 - Applications and Numerical Results. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, MI-1, p. 95–101, October 1982.
- 34 COMBETTES, P. L. The Foundations of Set Theoretic Estimation. *Proc. IEEE*, v. 81, n. 2, p. 182–208, Feb. 1993.
- 35 COMBETTES, P. L. The Convex Feasibility Problem in Image Recovery. *Advances in Imaging and Electron Physics*, v. 95, p. 155–270, 1996.
- 36 LO, C. M. *Estimation of Image Signals with Poisson Noise*. Tese (Doutorado) — University of Southern California, Los Angeles, June 1979.
- 37 JANSEN, M. *Noise Reduction by Wavelet Thresholding*. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2001. (Lecture notes in statistics, v. 161).
- 38 ANSCOMBE, F. J. The Transformation of Poisson, Binomial and Negative-Binomial Data. *Biometrika*, v. 15, p. 246–254, 1948.
- 39 GOODMAN, J. W.; BELSHER, J. F. Fundamental Limitations in Linear Invariant Restoration of Atmospherically Degraded Images. *Proc. SPIE*, v. 75, p. 141–154, 1976.
- 40 HOMEM, M. R. *Reconstrução Tridimensional de Imagens com o Uso de Deconvolução a Partir de Seções Bidimensionais Obtidas em Microscopia Óptica*. Tese (Doutorado) — USP - Instituto de Física de São Carlos, São Carlos, 2003.
- 41 DAUBECHIES, I. *Ten Lectures on Wavelets*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. (Regional Conference Series in Applied Mathematics, v. 61).
- 42 MALLAT, S. G. A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: the wavelet representation. *IEEE Trans. Pat. Analysis and Mach. Intell.*, v. 11, p. 674–693, 1989.

- 43 CHARLES, C.; RASSON, J. P. Wavelet Denoising of Poisson-Distributed Data and Applications. *Computational Statistics and Data Analysis*, p. 139–148, 2003.
- 44 JANSEN, M. Minimum Risk Thresholds for Dta With Heavy Noise. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 13, n. 5, p. 296–299, May 2006.
- 45 DONOHO, D. L.; JOHNSTONE, I. M. Ideal Spatial Adaptation Via Wavelet Shrinkage. *Biometrika*, v. 81, p. 425–455, 1994.
- 46 DONOHO, D. L.; JOHNSTONE, I. M. Minimax Estimation Via Wavelet Shrinkage. *Ann. Stat.*, v. 26, p. 879–921, 1998.
- 47 BURRUS, C. S.; GOPINATH, R. A.; GUO, H. *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms: A Primer*. [S.l.]: Prentice Hall, 1998.
- 48 MORETTIN, P. A. *Ondas e Ondaletas: Da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas*. [S.l.]: Editora da Universidade de São Paulo, 1999.
- 49 ADDISON, P. S. *The Illustrated Wavelet Transform Handbook - Introductory Theory ans Applications in Science, Engineering, Medicine and Finance*. [S.l.]: IOP Publishing Ltd, 2002.
- 50 KAZUBEK, M. Wavelet Domain Image Denoising by Thresholding and Wiener Filtering. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 10, n. 11, p. 324–326, 2003.
- 51 COMBETTES, P. L.; PUH, H. Parallel Projection Methods for Set Theoretic Signal Reconstruction and Restoration. *ICASSP*, v. 5, p. 297–300, 1993.

APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO DOS ESTIMADORES MAP

A partir da probabilidade condicional do ruído, descrita pela equação 3.2 na página 56, é possível obter a densidade do sinal, dado o ruído, através do teorema de Bayes. A equação A.1 descreve essa probabilidade.

$$f(g|y) = \frac{P(y|g)f(g)}{P(y)} \quad (\text{A.1})$$

Como a probabilidade do ruído $P(y)$ é independente do sinal pode-se considerá-la uma constante. Com isso, a equação A.1 pode ser escrita conforme mostrado na equação A.2.

$$f(g|y) \approx P(y|g)f(g)$$

$$f(g|y) \approx \frac{e^{-g}g^y}{y!}f(g) \quad (\text{A.2})$$

A.1 Estimador com densidade *a priori* gaussiana

Considerando que as projeções possuem densidade de probabilidade gaussiana, descrita pela equação 3.3 na página 57, a equação A.2 pode ser representada pela equação A.3.

$$f(g|y) = \frac{e^{-g}g^y}{y!} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{g-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (\text{A.3})$$

Para maximizar a equação A.3 deriva-se a mesma. Com o objetivo de simplificar a expressão, toma-se o logaritmo da mesma, o que resulta na equação A.4.

$$\ln f(g|y) = \ln g^y + \ln e^{-g} + \ln e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{g-\mu}{\sigma}\right)^2} + \ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \ln y!$$

$$\ln f(g|y) = y \ln g - g - \frac{1}{2} \left(\frac{g - \mu}{\sigma} \right)^2 - \ln \sigma \sqrt{2\pi} - \ln y! \quad (\text{A.4})$$

Tomando a derivada da equação A.4 em relação a g , buscando maximizá-la, obtém-se a equação A.5.

$$\frac{d \ln f(g|y)}{dg} = \frac{y}{g} - 1 - \frac{g - \mu}{\sigma^2}$$

$$g^2 + (\sigma^2 - \mu)g - y\sigma^2 = 0$$

$$\hat{g} = \frac{-(\sigma^2 - \mu) \pm \sqrt{(\sigma^2 - \mu)^2 + 4y\sigma^2}}{2} \quad (\text{A.5})$$

Como σ^2 e μ são maiores que 0 (zero) e $\sqrt{(\sigma^2 - \mu)^2 + 4y\sigma^2} > (\sigma^2 - \mu)$, pode-se desprezar a parte negativa da equação A.5, o que resulta na equação A.6.

$$\hat{g} = \frac{\mu - \sigma^2 + \sqrt{(\sigma^2 - \mu)^2 + 4y\sigma^2}}{2} \quad (\text{A.6})$$

A equação A.6 é o estimador para densidade *a priori* gaussiana.

A.2 Estimador com densidade *a priori* gama

Assumindo que as projeções possuem densidade gama, deve-se considerar que existem dois parâmetros a serem estimados (α, β) , onde ambos são números reais positivos. A função de densidade de probabilidade é dada pela equação 3.9 na página 58. A função $\Gamma(\alpha)$, descrita pela equação A.7, é a função gama.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty g^{\alpha-1} e^{-\alpha} dg \quad (\text{A.7})$$

A média e a variância são fornecidas pelas equações A.8 e A.9, respectivamente.

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\text{A.8})$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (\text{A.9})$$

Utilizando a fórmula de Bayes, descrita pela equação A.2 na página 125, obtém-se a expressão fornecida pela equação A.10.

$$f(g|y) = \frac{e^{-g}g^y}{y!} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} (\beta g)^{\alpha-1} e^{-\beta g} \quad (\text{A.10})$$

Tomando-se o logaritmo da equação A.10, obtém-se a equação A.11.

$$\ln f(g|y) = -(\beta + 1)g + y \ln g + (\alpha - 1) \ln \beta g + \ln \beta - \ln y! - \ln \Gamma(\alpha) \quad (\text{A.11})$$

Derivando-se a equação A.11 em relação a g e, em seguida, igualando a derivada a zero, com o objetivo de maximizar g , obtém-se a equação A.12.

$$\begin{aligned} \frac{d \ln f(g|y)}{dg} &= -(\beta + 1) + \frac{y}{g} + \frac{(\alpha-1)}{\beta g} \beta \\ &= -(\beta + 1) + \frac{y}{g} + \frac{\alpha-1}{g} = 0 \end{aligned}$$

$$\hat{g} = \frac{y + \alpha - 1}{\beta + 1} \quad (\text{A.12})$$

A equação A.12 é o estimador para densidade *a priori* gama.

Os parâmetros α e β podem ser obtidos através do sistema formado pelas equações A.8 na página anterior e A.9. Isolando β na equação A.8, é obtida a expressão:

$$\beta = \frac{\alpha}{\mu}.$$

Substituindo β na equação A.9 é possível isolar α , o que gera a estimação fornecida pela equação A.13.

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\alpha}{\frac{\alpha^2}{\mu^2}} \\ \alpha &= \frac{\mu^2}{\sigma^2} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Substituindo α na equação A.8 é possível obter a estimação de β fornecida pela equação A.14.

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\alpha}{\mu} \\ \beta &= \frac{\mu^2}{\sigma^2} \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{\mu}{\sigma^2} \quad (\text{A.14})$$

A.3 Estimador com densidade *a priori* chi-quadrado

Considere agora que as projeções possuem função de probabilidade *a priori* Chi-quadrado, representada pela equação 3.7 na página 58. A função de probabilidade Chi-quadrado é um caso particular da função de probabilidade gama, onde $\beta = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{n}{2}$, sendo n um inteiro positivo.

Substituindo a equação 3.7 na equação A.2 obtém-se a função de probabilidade condicional fornecida pela equação A.15.

$$f(g|y) = \frac{e^{-g} g^y}{y!} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} g^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{g}{2}} \quad (\text{A.15})$$

Aplicando o logaritmo na equação A.15, a equação A.16 é obtida.

$$\ln f(g|y) = \left(y + \frac{n}{2} - 1\right) \ln g - \frac{3}{2}g - \ln y! - \frac{n}{2} \ln 2 - \ln \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \quad (\text{A.16})$$

Com o objetivo de maximizar, em função de g , deriva-se a equação A.16 igualando-a a zero, encontrando a equação A.17.

$$\begin{aligned} \frac{d \ln f(g|y)}{dg} &= \left(y + \frac{n}{2} - 1\right) \frac{1}{g} - \frac{3}{2} \\ \frac{\left(y + \frac{n}{2} - 1\right)}{g} - \frac{3}{2} &= 0 \\ g &= \frac{2y + n - 2}{3} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

A equação A.17 fornece o estimador com densidade *a priori* chi-quadrado, onde n é a média da amostra.

A.4 Estimador com densidade *a priori* beta

Considerando que as projeções possuem densidade *a priori* Beta é necessário considerar algumas características dessa distribuição. A variável aleatória descrita por essa distribuição é limitada em ambos os lados, nesse caso limitada ao intervalo $(0, 1)$, conforme representado pela

equação A.18, embora possa ser estendida ao intervalo $a < g \leq b$ mediante a variável auxiliar $y = (b - a)g + a$.

$$0 \leq g \leq 1 \quad (\text{A.18})$$

Para satisfazer a equação A.18 as projeções são normalizadas entre 0 e 1.

A função de densidade de probabilidade é dada pela equação A.19.

$$f(g) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} g^{\alpha-1} (1-g)^{\beta-1} \quad (\text{A.19})$$

A função Beta na equação A.19 pode ser representada pela função Gama conforme mostrado na equação A.20.

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 g^{\alpha-1} (1-g)^{\beta-1} dg = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (\text{A.20})$$

Os parâmetros α e β são números inteiros positivos. A média e a variância são fornecidas pela equações A.21 e A.22.

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (\text{A.21})$$

$$\alpha^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \quad (\text{A.22})$$

Aplicando a fórmula de Bayes, da equação A.2 na página 125, com a densidade beta da equação A.19 obtém-se a equação A.23.

$$f(g|y) = \frac{e^{-g} g^y}{y!} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} g^{\alpha-1} (1-g)^{\beta-1} \quad (\text{A.23})$$

Como g tem distribuição beta, é necessário normalizar g dividindo por Δ , onde Δ determina o fator de normalização por projeção, ou seja, é o maior valor da projeção. Normalizando a equação A.23 por Δ obtém-se a equação A.24.

$$f(g|y) = \left(\frac{g}{\Delta}\right)^{y+\alpha-1} \left(1 - \frac{g}{\Delta}\right)^{\beta-1} e^{-\frac{g}{\Delta}} \frac{1}{y! B(\alpha, \beta)} \quad (\text{A.24})$$

A equação A.25 é obtida tomando o logaritmo da equação A.24.

$$\ln f(g|y) = (y + \alpha - 1) \ln g + (\beta - 1) \ln \Delta - g - \frac{g}{\Delta} - (y + \alpha - 1) \ln \Delta - \ln y! - \ln B(\alpha, \beta) \quad (\text{A.25})$$

Derivando a equação A.25 e a igualando a zero, tem-se a equação A.26.

$$\frac{d \ln f(g|y)}{dg} = (y + \alpha - 1) \frac{1}{g} + (\beta - 1) \frac{1}{\Delta - g} (-1) - \frac{1}{\Delta}$$

$$\Delta(\Delta - g)(y + \alpha - 1) - \Delta g(\beta - 1) - g(\Delta - g) = 0$$

$$g^2 + (-\Delta y - \Delta \alpha - \Delta \beta + \Delta)g + (\Delta^2 y + \Delta^2 \alpha - \Delta^2) = 0 \quad (\text{A.26})$$

Encontrando as raízes da equação do segundo grau em A.26 e desprezando a solução negativa, tem-se o estimador descrito pela equação A.27.

$$\hat{g} = \frac{(\Delta y + \Delta \alpha + \Delta \beta - \Delta) + \sqrt{(-\Delta y - \Delta \alpha - \Delta \beta + \Delta)^2 - 4(\Delta^2 y + \Delta^2 \alpha - \Delta^2)}}{2} \quad (\text{A.27})$$

Os valores de α e β são obtidos através do sistema formado pelas equações A.21 e A.22. Isolando β na equação A.21 é obtida a expressão a seguir:

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$(\alpha + \beta)\mu = \alpha$$

$$\beta = \frac{\alpha}{\mu} - \alpha$$

Substituindo a última expressão na equação A.22 é possível obter a equação A.28.

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \\ \sigma^2 &= \frac{\alpha\left(\frac{\alpha}{\mu} - \alpha\right)}{\left(\alpha + \frac{\alpha}{\mu} - \alpha\right)^2\left(\alpha + \frac{\alpha}{\mu} - \alpha + 1\right)} \\ \sigma^2 &= \frac{\mu^2 - \mu^3}{\alpha + \mu} \end{aligned}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\mu^2 - \mu^3}{\sigma^2} - \mu \quad (\text{A.28})$$

Substituindo a estimação de α fornecida pela equação A.28 na equação A.21 é possível obter a estimação de β , equação A.29.

$$\beta = \frac{\alpha}{\mu} - \alpha$$

$$\beta = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\mu^2 - \mu^3}{\sigma^2} - \mu \right] - \left[\frac{\mu^2 - \mu^3}{\sigma^2} - \mu \right]$$

$$\hat{\beta} = \frac{\mu^3 - 2\mu^2 + \mu + \sigma^2\mu - \sigma^2}{\sigma^2} \tag{A.29}$$

APÊNDICE B – TRANSFORMADA DE ANSCOMBE

Conforme apresentado no capítulo 3, na seção 3.3 na página 60, a Transformada de Anscombe (TA) descrita pela equação 3.17 transforma o ruído de Poisson, que é dependente do sinal, em um ruído gaussiano de média aproximadamente nula e variância aproximadamente unitária.

Para verificar o comportamento da transformada utilizou-se o sinal descrito pela figura 3.2 com diferentes amplitudes, introduzindo em seguida o ruído Poisson. No domínio de Anscombe isolou-se o ruído, subtraindo o sinal original do sinal ruidoso e, em seguida, foram verificadas a média e a variância do sinal.

Para uma amplitude de 10 unidades, a média do ruído calculada no domínio de Anscombe é 0,1298 e a variância é 0,6405. A figura B.1 mostra o sinal livre de ruído, o sinal ruidoso e o ruído no domínio de Anscombe.

Para o sinal com amplitude 100 a média e a variância do ruído no domínio de Anscombe é de 0,0650 e 0,8430, respectivamente. Os dados para este sinal são ilustrados pela figura B.2.

Quando a amplitude do sinal é 1.000, os valores da média e variância para o ruído no domínio de Anscombe é respectivamente 0,0053 e 0,9695. Tanto o sinal quanto o ruído resul-

Figura B.1 – Sinal com amplitude 10: (a) sinal original, (b) sinal sujeito ao ruído de Poisson e (c) ruído no domínio de Anscombe.

Figura B.2 – Sinal com amplitude 100: (a) sinal original, (b) sinal sujeito ao ruído de Poisson e (c) ruído no domínio de Anscombe.

Figura B.3 – Sinal com amplitude 1.000: (a) sinal original, (b) sinal sujeito ao ruído de Poisson e (c) ruído no domínio de Anscombe.

tante podem ser observados na figura B.3.

Para o sinal com amplitude 10.000, a média do ruído é 0,0021 com variância 0,9954. O comportamento do sinal original e ruidoso, bem como o ruído no domínio de Anscombe, podem ser observados na figura B.4.

É possível observar que, para valores maiores a média e a variância do ruído se aproximam de zero e um, respectivamente. Para os *phantoms* reais, com baixa exposição à radiação, a taxa de contagem (feixe livre) é de 500 o que possibilita que o ruído presente, no domínio de

Figura B.4 – Sinal com amplitude 10.000: (a) sinal original, (b) sinal sujeito ao ruído de Poisson e (c) ruído no domínio de Anscombe.

Anscombe, possui uma margem de erro aceitável.

SUMÁRIO

1	Introdução	31
2	Tomografia Computadorizada	35
2.1	Considerações Iniciais	35
2.2	Princípios da Tomografia Computadorizada	36
2.2.1	Tomografia de Transmissão	36
2.2.2	Minitomógrafo desenvolvido no CNPDIA-EMBRAPA	38
2.2.3	Modelo Matemático de Reconstrução	41
2.2.4	A Transformada de Radon	44
2.3	Modelo de Discretização para o Problema de Tomografia Computadorizada.....	46
2.4	Algoritmos de Reconstrução Tomográfica	47
2.4.1	Aplicação Direta da Transformada de Fourier	47
2.4.2	Método de Retroprojeção Simples	48
2.4.3	Reconstrução por Retroprojeção Filtrada.....	49
2.4.4	Algoritmos de Reconstrução Algébrica	49
2.5	Considerações Finais.....	53
3	Redução de Ruído	55
3.1	Considerações Iniciais	55
3.2	Estimação Usando o Critério de <i>Maximum a Posteriori</i> - MAP	56
3.2.1	Estimador MAP com densidade <i>a priori</i> gaussiana	57
3.2.2	Estimador MAP com densidade <i>a priori</i> chi-quadrado	58

3.2.3	Estimador MAP com densidade <i>a priori</i> gama	58
3.2.4	Estimador MAP com densidade <i>a priori</i> beta.....	59
3.3	Transformada de Anscombe	60
3.4	Filtro de Wiener Pontual	60
3.5	Filtro Linear de Goodman-Belsher	61
3.6	Filtragem de ruído utilizando <i>Wavelet</i>	63
3.6.1	Análise de Multiresolução	64
3.6.2	<i>Wavelet</i> Haar	66
3.6.3	<i>Wavelets</i> de Daubechies	68
3.6.4	Transformada <i>Wavelet</i> do Sinal Ruidoso	69
3.6.5	<i>Thresholding</i>	71
3.7	Considerações Finais.....	74
4	Projeções em Conjuntos Convexos (POCS - Projections onto Convex Sets)	75
4.1	Considerações Iniciais	75
4.2	Projeção.....	75
4.3	Algoritmo de POCS.....	77
4.3.1	Comportamento do algoritmo POCS	77
4.4	Conjuntos Convexos e Conjuntos não Convexos	78
4.5	O Uso de POCS para solução de equações lineares	80
4.5.1	Projetores	81
4.5.2	Comportamento do Algoritmo.....	83
4.6	Conjuntos de Restrições Convexos.....	84
4.6.1	Conjunto de Restrição de Suporte Finito	85
4.6.2	Conjunto de Restrição de Não Negatividade.....	85
4.6.3	Conjunto de Restrição de Amplitude Limitada	85
4.6.4	Conjunto de Imagens com Pontos Conhecidos	86

4.7	Comparação entre o algoritmo de POCS e Retroprojeção filtrada	86
4.8	Considerações Finais.....	88
5	Método Proposto	89
5.1	Considerações Iniciais	89
5.2	Algoritmo	89
5.3	Resultados	90
5.3.1	Phantom Simulado	90
5.3.2	<i>Phantoms</i> Reais	97
5.4	Considerações Finais.....	114
6	Conclusão.....	117
6.1	Considerações Iniciais	117
6.2	Contribuições.....	117
6.3	Limitações	118
6.4	Trabalhos Futuros.....	118
	Referências	119
	Apêndice A – Desenvolvimento dos estimadores MAP	125
A.1	Estimador com densidade <i>a priori</i> gaussiana	125
A.2	Estimador com densidade <i>a priori</i> gama	126
A.3	Estimador com densidade <i>a priori</i> chi-quadrado	128
A.4	Estimador com densidade <i>a priori</i> beta.....	128
	Apêndice B – Transformada de Anscombe	133

1 INTRODUÇÃO

Em muitos problemas de processamento de imagem, tal como reconstrução tomográfica, as observações são modeladas como um sinal ruidoso. Muitas vezes assume-se que o ruído é um processo gaussiano branco, porém, em problemas físicos, os dados armazenados não podem ser modelados como um ruído gaussiano, mas como um processo de Poisson.

Em reconstrução tomográfica de imagens, o sinal capturado está sujeito a um ruído de Poisson devido à baixa contagem de fótons. O tempo de exposição de um corpo à radiação está diretamente ligado à contagem de fótons obtida pelo tomógrafo. Quanto menor a contagem de fótons, mais ruidosas serão as projeções capturadas. Nas referências (2, 3) é proposto um método que mantém o compromisso entre métodos puramente estatísticos e o da retroprojeção filtrada. Esses métodos são implementados inicialmente pela filtragem do ruído Poisson presente nas projeções, seguida pelo algoritmo de retroprojeção filtrada.

Métodos de reconstrução tomográfica baseados em POCS (*Projections onto Convex Sets*) consideram restrições sobre todos os conjuntos de possíveis soluções, permitindo assim a utilização de conhecimento *a priori*, por meio do uso de restrições convexas. Tais métodos são apresentados na referência (4). O método de POCS paralelo obtém melhor resultado que o POCS seqüencial na presença de ruído pois, não havendo interseção entre os conjuntos de restrições, o POCS paralelo converge para uma solução, enquanto o método seqüencial altera ciclicamente entre os conjuntos de restrição (4). Uma discussão sobre a convergência para os métodos POCS é fornecida nas referências (5, 6).

Em 1996, Bhumkar et al.(7) apresentam alguns conjuntos convexos utilizados na reconstrução tomográfica a partir de projeções ruidosas. A técnica, utilizando POCS seqüencial e paralelo é denominada, no trabalho referenciado, como MOSP (*Method of Sequential Projections*) e MOPP (*Method of Parallel Projections*). Posteriormente 8 propuseram um método de regularização nas projeções utilizando um conjunto de restrição baseado na utilização de uma imagem de referência. Esses conjuntos melhoraram consideravelmente as imagens reconstruídas.

Malgouyres(9), em 2002 descreve a utilização de conjuntos convexos para filtrar os coeficientes *wavelets* de uma imagem ruidosa, sendo necessário, porém, que o ruído seja aditivo. Esse modelo requer conhecimento *a priori* da imagem para que todas as estruturas sejam preservadas, podendo ocorrer uma suavização excessiva caso os conjuntos não sejam adequados à imagem.

O método de filtragem dos coeficientes *wavelets* tem sido alvo de estudo na literatura. Zhong, Ning e Conover(10) apresentam um método de redução de ruído aplicado à imagem tomográfica reconstruída a partir de projeções com feixe de raio em leque, em 2004. O método baseia-se na detecção de singularidades nos coeficientes *wavelets*.

Neelamani, Choi e Baraniuk(11) mostram um método do filtro inverso regularizado aplicado aos coeficientes *wavelets*, denominado WaRD (*Wavelet-based regularized Deconvolution*). Hou, Tian e Liu(12) expõem um algoritmo similar, utilizando informações estatísticas sobre o sinal para estimar os parâmetros (variância do ruído nas escalas *wavelets*) para utilização do filtro de Wiener nos coeficientes *wavelets*. Esses métodos foram aplicados as imagens que possuem ruído gaussiano aditivo com média nula.

Um método de regularização nos coeficientes *wavelets* é apresentado por Kalifa, Laine e Esser(13) no qual as projeções estimadas são reconstruídas com o algoritmo de retroprojeção filtrada, as quais produziram resultados superiores aos do método de reconstrução que não utilizou essa regularização.

Boubchir e Fadili(14) apresentam um método de filtragem dos coeficientes *wavelets*, para o ruído aditivo gaussiano, utilizando o critério MAP para estimar os coeficientes *wavelets* livres de ruído. Esse método (para casos específicos) é equivalente à aplicação do *universal hard-thresholding*.

A filtragem do ruído, dependente de sinal, utilizando o critério MAP (*Maximum a Posteriori*) apresenta bons resultados para imagens sujeitas a esse tipo de ruído, conforme apresentado por Liu, Freeman e Kang(15). As informações estatísticas sobre o ruído permitem filtrar o sinal de maneira a otimizar a entropia do sinal resultante (16). A estimação MAP aplicada às projeções, em tomografia computadorizada, pode produzir melhores resultados na imagem resultante, conforme apresentado por Wang et al.(17) e Rivière, Bian e Vargas(18).

Filtrar as projeções ruidosas antes da reconstrução possibilita gerar melhores resultados, pois a estimação dessas projeções tornam seus valores mais próximos dos valores esperados. Aliado à estimação, um método de reconstrução que incorpora algum conhecimento *a priori* da imagem possibilita a produção de resultados ainda melhores.

No capítulo 2, serão apresentadas as bases da tomografia computadorizada, esquematizado o tomógrafo utilizado para a coleta de dados e apresentados métodos de reconstrução tomográfica.

No capítulo 3 serão apresentados os métodos para estimação do sinal original, dada uma observação ruidosa. Serão abordados os métodos de estimação MAP com densidades *a priori* gaussiana, chi-quadrado, beta e gama. É abordada, neste capítulo, a filtragem dos coeficientes *wavelets* das projeções, bem como a utilização do filtro de Wiener pontual e o filtro de Goodman-Belsher.

O capítulo 4 contém a apresentação dos algoritmos POCS, e, ao final do capítulo uma comparação entre a reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo, POCS sequencial e Retroprojeção Filtrada.

O capítulo 5 é destinado à descrição do algoritmo proposto, bem como à análise dos resultados gerados pelo método de reconstrução abordado.

As conclusões gerais e perspectivas para trabalhos futuros são abordadas no capítulo 6.

O Anexo A mostra o desenvolvimento dos estimadores MAP. Esses estimadores foram desenvolvidos a partir dos métodos apresentados por Furuie(19) e Santos(20). O Anexo B apresenta o comportamento do ruído de Poisson, presente no sinal, no domínio de Anscombe.

2 TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA

2.1 Considerações Iniciais

A tomografia computadorizada produz uma imagem que representa um corte perpendicular do corpo, o que é de grande interesse em muitas aplicações, principalmente no diagnóstico médico, tendo em vista que permite aos médicos visualizarem órgãos internos com precisão. A primeira aplicação médica utilizava raios X para formar as imagens de tecidos, tendo por base seu coeficiente de atenuação. Atualmente, essas imagens também têm sido geradas a partir de radioisótopos, ultrassom e ressonância magnética, sendo o parâmetro para reconstrução da imagem diferente em cada um desses casos.

As aplicações de tomografia não ficam restritas somente à área médica. Alguns pesquisadores têm utilizado esta técnica para mapear recursos presentes no solo, gerando imagens com testes não destrutivos. O aspecto inovador apresentado pela Tomografia Computadorizada é a possibilidade da reconstrução de uma imagem a partir de suas projeções, sendo que a projeção em um dado ângulo é a integral da imagem na direção especificada pelo ângulo. A projeção é a medida da energia transmitida quando um objeto é irradiado em um dado ângulo.

Do ponto de vista matemático, a solução para o problema da reconstrução de uma função a partir de seus dados de projeção foi proposta por Radon em 1917 (21), embora somente na década de 70 Hounsfield tenha inventado o primeiro tomógrafo (22), utilizando raios X, invenção pela qual recebeu o prêmio Nobel em 1979. Ele dividiu o prêmio com Allan Cormack que, em 1963 contribuiu de maneira relevante para o desenvolvimento de algoritmos para reconstrução tomográfica (23). Radon descobriu as bases matemáticas para reconstrução de um corpo a partir de suas projeções, porém, apenas mediante infinitas projeções de um corpo. Cormack, por outro lado, propôs a reconstrução de um corpo com base em um número finito de projeções.

Depois da invenção de Hounsfield, a tomografia computadorizada por transmissão ob-

teve grandes avanços, principalmente no desenvolvimento dos algoritmos para reconstrução. Hounsfield empregou a técnica de reconstrução algébrica, que será descrita na seção 2.4.4 na página 49, e reconstruiu uma imagem de tamanho 80×80 *pixels*. Em 1971, foi proposto o algoritmo de convolução e retroprojeção, primeiramente desenvolvido por Ramachandran e Lakshminarayanan (24), sendo aprimorado posteriormente por Shepp e Logan (25). Esses dois algoritmos reduzem consideravelmente o tempo de processamento para reconstrução e a imagem produzida é numericamente mais precisa. Como resultado, fabricantes comerciais de tomógrafos iniciaram a construção de um sistema capaz de reconstruir imagens de 256×256 e 512×512 com maior precisão (26).

Neste capítulo, serão apresentados os princípios da tomografia computadorizada, sendo mostrados alguns algoritmos de reconstrução tomográfica, tal como a aplicação direta da transformada de Fourier, os algoritmos de retroprojeção e retroprojeção filtrada, bem como o algoritmo de reconstrução algébrica.

2.2 Princípios da Tomografia Computadorizada

A tomografia por transmissão consiste basicamente em irradiar o objeto a partir de várias direções, armazenando para cada direção as intensidades transmitidas e as recebidas. Para isso, é utilizado um feixe de radiação colimado, o qual define planos verticais tão finos quanto o próprio feixe. A intensidade emitida e a recebida são armazenadas, definindo assim uma vista longitudinal do corpo. Por meio do uso de vários feixes colimados paralelos definem-se vários planos verticais, obtendo-se perfis em várias posições angulares. Esses valores armazenados podem, então, ser processados para formarem uma matriz em que cada ponto representa a função coeficiente de atenuação linear, a qual poderá ser montada, ponto a ponto, segundo uma escala de tons ou intensidades de pontos nos *pixels* (*picture element*).

2.2.1 Tomografia de Transmissão

Tomógrafo de transmissão é a máquina que captura dados para a construção da imagem. Ela consiste basicamente em um emissor como, por exemplo, um emissor de raios X, e um receptor que captura a intensidade com que o raio chega ao destino; tais entidades serão chamadas doravante de fonte-detetor. Existem muitas geometrias de fonte-detetor, sendo que as mais usadas são as do tipo de feixe de raios paralelos e feixes de raios em leque, mostrados nas Figuras 2.1.a e 2.1.b, respectivamente. Observa-se que a geometria de feixe de raios em leque é a mais rápida (27).

Figura 2.1 – (a) Geometria de fonte-detetor de feixes de raios paralelos e (b) geometria de fonte-detetor de feixe de raios em leque.

Além da fonte e do detetor um tomógrafo possui um sistema para a obtenção da imagem, dados capturados pelo detetor, uma mesa tomográfica, na qual se posiciona o material, e um sistema de movimentação para captura dos diferentes perfis angulares.

Em menos de quatro anos depois da introdução da tomografia computadorizada, surgiram quatro gerações de tomógrafos. Essa rápida evolução foi motivada, fundamentalmente, pela tentativa da melhoria do projeto mecânico do tomógrafo, para que se pudesse produzir uma tomografia em menor tempo e que se proporcionasse melhor controle sobre os movimentos do paciente, na tomografia médica (28).

No tomógrafo de primeira geração (Figura 2.2.a), o tubo de raios X, colimador e detetor são partes de um corpo comum, tal que o tubo de raios X e o detetor se movem, em sincronia, em lados opostos do paciente ou objeto da tomografia. Esse tipo de tomógrafo usa um único feixe de raio X colimado para fazer a tomografia. Nesse tipo de aparelho, são tomadas sequências de medidas, até que se atinja o final do movimento de translação e, então, opera-se uma rotação de um certo grau e o movimento de translação se repete. Todo o processo é repetido para um ângulo θ compreendido entre zero e π ($0 \leq \theta < \pi$).

No Tomógrafo de segunda geração (Figura 2.2.b) foram colocados vários detetores lado a lado, e cada detetor recebe um feixe de radiação ao mesmo tempo, diminuindo assim o tempo da tomografia. Dessa maneira, o tempo de obtenção de dados de uma seção foi diminuído de acordo com o número de detetores empregados. Mesmo assim, o tempo de obtenção de dados era grande e os esforços para reduzir o tempo de tomografia resultaram nos tomógrafos de terceira geração.

No tomógrafo de terceira geração (Figura 2.2.c) não era mais necessário fazer o movimento

Figura 2.2 – Geometria e arquitetura dos tomógrafos de (a) primeira geração, (b) segunda geração, (c) terceira geração e (d) quarta geração.

de translação do tubo de raios X e dos detetores, pois o número de detetores era suficiente para a coleta dos dados de toda uma projeção com o tubo de raios X em uma única posição.

Nos tomógrafos de quarta geração (Figura 2.2.d), vários detetores foram colocados lado a lado até formarem um anel ao redor do corpo em estudo. Esses detetores são fixos e o tubo de raios X rotaciona dentro do anel de detetores e ao redor do corpo. Nos tomógrafos de quarta geração, a redução do tempo de tomografia estava mais limitada à saída do tubo de raio-X do que pelo modelo do tomógrafo.

Para se reduzir o tempo de tomografia para milionésimos de segundo, foi proposto um novo modelo, em que vários tubos de raios X são colocados ao redor do paciente e do lado de fora do anel de detetores. Esse tipo de tomógrafo reduziu ainda mais o tempo de tomografia (28).

A tabela 2.1 (29) apresenta as particularidades de cada geração de tomógrafo.

2.2.2 Minitomógrafo desenvolvido no CNPDIA-EMBRAPA

O minitomógrafo é um equipamento para realizar tomografia, que é utilizado para o uso dedicado à física de solos e foi desenvolvido na CNPDIA-EMBRAPA (Embrapa Instrumentação Agropecuária), utilizando Raios X e Raios γ como fontes de radiação (1).

O minitomógrafo utilizado no desenvolvimento do projeto é um tomógrafo do tipo de pri-

Tabela 2.1 – Características das gerações de tomógrafos.

Características	Primeira geração	Segunda geração	Terceira geração	Quarta geração	Quinta geração
Movimento do tubo de raio-X e do detetor	translação e rotação	translação e rotação	rotação	rotação do tubo de raio- X com detetores estacionários	rotação do tubo de raio- X com detetores estacionários
Detetor por projeção	1	3-52	128-511	242-72000	242-72000
Feixe de raio-X por projeção	único feixe fino	múltiplos feixes em forma de leque	Vários feixes em leque envolvendo o objeto	vários feixes em leque envolvendo o objeto	vários feixes em leque envolvendo todo objeto
Tempo para realizar tomografia	4 min -5 min	5.3 seg - 3.5 min	3 seg - 4.8 seg	1 seg - 5 seg	milionésimos de segundos

Figura 2.3 – Esquema simplificado de um tomógrafo de primeira geração (1)

meira geração, mas, nesse caso, o tubo de raios X ou raios γ e o detetor são fixos, enquanto a amostra em estudo é que sofre o movimento de translação e rotação. A Figura 2.3 mostra um esquema simplificado do minitomógrafo de primeira geração.

Esse equipamento possui um sistema de obtenção de imagens, uma interface com o computador e um sistema computacional no qual é feito o processamento e a reconstrução das imagens.

(28) retratou, em sua dissertação de mestrado, o minitomógrafo de maneira mais detalhada, descrevendo-o de acordo com o diagrama de bloco mostrado na Figura 2.4.

O hardware possui uma mesa mecânica, uma fonte emissora de raios X ou raios γ , dois colimadores de tamanho variável, um detetor de cristal do tipo *NaI(Tl)*, um contador eletrônico de pulsos, um sistema também eletrônico para o processamento e medidas nucleares e um mi-

Figura 2.4 – Diagrama de bloco do minitomógrafo do CNPDIA.

crocomputador.

A mesa mecânica possui dois motores que controlam sua posição relativa, na qual é colocada a amostra que se deseja produzir a imagem. Um motor é utilizado para a rotação e o outro para a translação, o sistema foi projetado usando motores de passo. Um dispositivo optoeletrônico e um circuito comparador é utilizado para definir e inicializar as coordenadas de posição da mesa tomográfica. Os motores são controlados por um computador através de uma interface.

O sistema usa um sistema fonte-detector estacionário, enquanto o objeto faz movimentos de translação e rotação.

Um tubo de raios X ou raios γ emite um feixe de raios que sofrem uma colimação e incide sobre a amostra na mesa, atravessa a amostra, onde é atenuada, sofre uma outra colimação e é detetada no detector. Essa atenuação é devida ao coeficiente de atenuação da amostra.

A fonte e o detector possuem um colimador e ambos sofrem colimação a fim de evitar radiação indesejada e de melhorar a resolução espacial da medida tomográfica. O emprego de uma colimação muito fina na fonte e no detector limita o efeito da dispersão dos *fótons* no detector.

O par de colimadores, da fonte e do detector, são feitos de chumbo e possuem tamanhos variáveis, onde a escolha do tamanho ideal será feita conforme a resolução desejada.

Cada *fóton* que chega ao detector gera um pulso de amplitude proporcional à sua energia. Um sistema composto de amplificador, analisador monocal, contador e temporizador conta esse pulso e o armazena na memória do computador.

O tempo necessário para a aquisição de dados depende do tamanho da amostra, da resolução desejada e da precisão do equipamento.

2.2.3 Modelo Matemático de Reconstrução

Seja $f_c(x, y)$ uma função de duas variáveis contínuas x e y , $f_c(x, y)$ pode representar, por exemplo, a opacidade de um ponto ou a função de atenuação de um objeto a ser reconstruído. Considere a geometria mostrada na Figura 2.5, na qual um sistema de coordenadas retangulares $x - y$ é rotacionado sobre a origem em um ângulo θ gerando um novo sistema de coordenadas $s - t$. Cada ponto neste plano possui dois conjuntos de coordenadas: coordenadas (x, y) relativas ao sistema $x - y$, e coordenadas (s, t) , relativas ao sistema de coordenadas $s - t$. É possível converter um ponto com coordenadas no sistema $s - t$ para o sistema de coordenadas $x - y$

Figura 2.5 – Relação entre coordenadas retangulares x - y e sistemas de coordenadas s - t .

utilizando a equação 2.1.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Note que para cada valor de s no sistema de coordenadas $s-t$ existe uma única linha que é paralela ao eixo t com valor de deslocamento s do eixo t , conforme ilustrado na figura 2.5. Considere $p_\theta(s)$ a representação da integral da função $f_c(x, y)$, então $p_\theta(s)$ pode ser representada pela equação 2.2.

$$p_\theta(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_c(x, y)|_{x=s \cos \theta - t \sin \theta, y=s \sin \theta + t \cos \theta} dt \quad (2.2)$$

A partir da função descrita pela equação 2.2 é possível desenvolver as bases teóricas da tomografia computadorizada. Em tomografia de raios X, uma seção bidimensional de um objeto tridimensional é penetrada por um feixe de raios X, conforme representado na Figura 2.6. De acordo com a física da tomografia de raios X, um feixe de raio tem sua intensidade atenuada pelo objeto atravessado. O grau de atenuação do feixe depende da composição do objeto. Pode-se citar como exemplo a atenuação causada pelo tecido humano, que é diferente da atenuação causada pelos ossos.

A transmissão na direção paralela ao eixo t que passa por s pode ser representada pela equação 2.3, onde I_0 é a intensidade do raio incidente, $I_\theta(s)$ é a intensidade do raio atenuado –

Figura 2.6 – Na tomografia de transmissão, uma seção transversal 2-D de um objeto 3-D é penetrada por uma série de raios paralelos ou divergentes.

armazenada no detetor com ângulo θ e deslocamento s (Figura 2.6). A função $p_\theta(s)$ é a função de distribuição de coeficientes de atenuação linear (integral de linha no ângulo θ e deslocamento s).

$$I_\theta(s) \approx I_0 \exp[-p_\theta(s)] \quad (2.3)$$

A equação 2.3 pode ser escrita novamente em função de $p_\theta(s)$, como demonstrado pela equação 2.4, tendo em vista que I_0 e $I_\theta(s)$ são obtidos experimentalmente.

$$p_\theta \approx \ln \frac{I_0}{I_\theta(s)} \quad (2.4)$$

O valor de $f_c(x,y)$ depende do conteúdo do objeto na posição espacial (x,y) . Isso pode ser usado para determinar a composição material do objeto. Logo, é de interesse reconstruir a função $f_c(x,y)$ a partir da medida de $p_\theta(s)$, que é o objetivo da tomografia computadorizada.

O ângulo θ na equação 2.2, como ilustrado na Figura 2.6, é chamado de ângulo de visão e a integral de linha é chamada de projeção (transformada de Radon), ou raio-soma de $f_c(x,y)$ no ângulo de visão θ com deslocamento s (21).

Na prática, os raios-soma p_θ são medidos em um número finito de ângulos de visão $\{\theta_k, k = 1, 2, \dots, K_\theta\}$, sobre um número finito de deslocamentos $\{s_l, l = 1, 2, \dots, K_s\}$. Essas limitações são impostas por muitos fatores, tais como o tamanho do detetor, a medida de precisão do instrumento físico, o tempo de exposição do material a ser examinado etc.

Figura 2.7 – Modelo Linear de degradação.

O problema fundamental da tomografia computadorizada é reconstruir a função de atenuação $f_c(x, y)$ de um total de $K_\theta K_s$ raios-somas $p_{\theta k}(s_l)$, onde $p_{\theta k}(s_l)$ representa o raio-soma obtido no ângulo de visão θ_k com deslocamento s_l . Tendo em vista que o algoritmo enfrenta as limitações impostas pelo computador, a função $f_c(x, y)$ é reconstruída sobre um número finito de posições 2D (x_i, y_i) . A coleção dessas posições espaciais é chamada de *sampling grid* (grade de amostragem) ou *sampling lattice* (amostragem reticulada) e os valores da função $f_c(x, y)$ são chamadas de *sampled representation* (representação amostrada) de $f_c(x, y)$. Pode-se afirmar que se a grade de amostra for suficientemente fina, a representação amostrada nos dará uma precisão suficiente para obter a função de atenuação $f_c(x, y)$.

2.2.4 A Transformada de Radon

O modelo linear, descrito pela equação 2.5, pode representar vários processos de degradação de imagem (30). A Figura 2.7 ilustra esse modelo, onde $f(x, y)$ é a imagem original e $g(\alpha, \beta)$ é a imagem degradada.

$$g(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) h(\alpha, \beta, x, y) dx dy \quad (2.5)$$

A equação 2.5 é chamada integral de Fredholm do primeiro tipo e representa um sistema linear variante no espaço, onde $h(\alpha, \beta, x, y)$ é a resposta impulsiva do sistema linear (*PSF* - *Point Spread Function*).

No caso de um sistema linear invariante no espaço, onde $h(\alpha, \beta, x, y) = h(\alpha - x, \beta - y)$, a equação 2.5 torna-se uma convolução em duas dimensões, que pode então ser facilmente manipulada no domínio da frequência, utilizando a transformada de Fourier bi-dimensional.

A transformada de Radon, descrita pela equação 2.6, utilizada em tomografia de transmissão, representa a integral de linha sobre a reta L com distância t da origem em um sistema de eixo rotacionado em um ângulo θ , conforme ilustrado pela Figura 2.8.

Figura 2.8 – Modelo usado em reconstrução tomográfica da imagem $f(x,y)$, onde as projeções são descritas pela integral de linha $g(t, \theta)$.

$$g(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \quad (2.6)$$

Na equação 2.6, $\delta(\cdot)$ é o delta de Dirac. Essa equação pode ser descrita na forma da equação 2.7, admitindo a mudança no sistema de coordenadas.

$$g(t, \theta) = \int_L f(s) ds \quad (2.7)$$

Observe que a partir das equações 2.5 e 2.6 é possível concluir que a transformada de Radon, para o caso bidimensional, é um caso particular de um sistema variante no espaço, onde a PSF é dada pela equação 2.8.

$$h(t, \theta, x, y) = \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) \quad (2.8)$$

O problema de reconstrução de uma imagem $f(x,y)$, a partir de suas projeções $g(t, \theta)$, pode ser visto como um problema de restauração, onde $g(t, \theta)$ é a imagem $f(x,y)$ degradada por um sistema com resposta impulsiva $h(t, \theta, x, y)$, dado pela equação 2.8.

Os métodos de reconstrução através de transformadas buscam obter a transformada inversa de Radon, por meio de diferentes implementações: aplicação direta da transformada de Fourier (DTF), convolução e retroprojeção etc.

Os métodos determinísticos estão relacionados com a versão discretizada da equação de

Figura 2.9 – Modelo discretizado para reconstrução de imagens de tomografia de transmissão.

Fredholm, o que pode ocasionar erros devido à quantização, podendo levar a um sistema indeterminado, o que pode ser agravado pela presença do ruído (19).

Métodos determinísticos iterativos podem incorporar fatores à PSF (discretização da função h), relaxando assim os requisitos necessários de amostragem para os métodos analíticos.

2.3 Modelo de Discretização para o Problema de Tomografia Computadorizada

Como descrito no início do capítulo, a Tomografia Computadorizada por transmissão reconstrói uma imagem da seção transversal do corpo em estudo, baseando-se no grau de atenuação que a fonte radioativa sofre ao atravessar o objeto. Para representar a imagem a ser reconstruída, considera-se que a mesma é representada por pequenos quadrados denominados *pixels* (*picture elements*). Censor(31) propôs um método, descrito a seguir, para representar o problema. Os pixels são numerados de um (canto superior esquerdo) a J (canto inferior direito), conforme mostrado na Figura 2.9.

Assume-se que a função de atenuação tem valor constante (real e não negativo) x_j ao passar pelo j -ésimo pixel ($j = 1, 2, \dots, J$). A fonte e o detector são considerados pontuais e os raios considerados linhas. O comprimento do i -ésimo raio no j -ésimo pixel, representado por a_{ij} para todo $i = 1, 2, \dots, I$ e $j = 1, 2, \dots, J$, representa a contribuição do j -ésimo pixel para atenuação do

i -ésimo raio. A medida física de atenuação no i -ésimo raio, representada por y_i , é a integral de linha ao longo do raio da função de atenuação conhecida. Para completar o modelo discreto, cada integral de linha passa a ser uma soma finita e o modelo passa a ser um sistema de equações lineares representada pelo sistema de equações 2.9.

$$y_i = \sum_{j=1}^J x_j a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (2.9)$$

onde $y = (y_i) \in R^I$ (espaço Euclidiano I -dimensional) é o vetor de medidas, $x = (x_j) \in R^J$ é o vetor imagem e a matriz $A = (a_{ij})$ (de dimensão $I \times J$) é a matriz de projeção.

$$y = Ax \quad (2.10)$$

O sistema de equações 2.9 pode ser escrito na forma vetorial, descrito pela equação 2.10, ou considerando o ruído η presente na aquisição de imagem, conforme mostrado na equação 2.11.

$$y = Ax + \eta \quad (2.11)$$

Com essa descrição o problema de reconstrução pode ser representado como a solução do sistema descrito pela equação 2.11.

2.4 Algoritmos de Reconstrução Tomográfica

Dentre os métodos de reconstrução de imagem tomográfica, destacam-se os de Retroprojeção Simples, Retroprojeção Filtrada, Aplicação Direta da Transformada de Fourier e a Técnica de Reconstrução Algébrica.

2.4.1 Aplicação Direta da Transformada de Fourier

A reconstrução através desse método é feita através da Transformada de Fourier (FT - *Fourier Transform*) em funções contínuas, embora em aplicações reais seja aplicada em funções discretas, o que permite utilizar a Transformada Rápida de Fourier (FFT - *Fast Fourier Transform*) ao invés da FT.

Aplicando a FT na primeira variável da transformada de Radon fornecida pela equação 2.6,

obtém-se a equação 2.12.

$$G(\rho, \theta) = \mathfrak{F}\{g(t, \theta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) e^{-j2\pi \rho t} dt \right] dx dy$$

$$G(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi \rho (x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \quad (2.12)$$

Observe que a equação 2.12 representa a FT bidimensional de $f(x, y)$, mostrada na equação 2.13, onde $u = \rho \cos \theta$ e $v = \rho \sin \theta$.

$$G(\rho, \theta) = F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi (ux + vy)} dx dy \quad (2.13)$$

A imagem reconstruída pode ser obtida através da transformada inversa de Fourier (IFT - *Inverse Fourier Transform*), dada pela equação 2.14.

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi (ux + vy)} du dv \quad (2.14)$$

Note que após aplicar a FT unidimensional nas projeções, obtém-se a FT bidimensional da imagem. Esta operação fornece um resultado em coordenadas polares, e se torna necessário mudar para coordenadas cartesianas, o que exige a estimação de valores (complexos) de $F(u, v)$ em pontos discretos do novo sistema.

2.4.2 Método de Retroprojeção Simples

Para reconstrução de uma seção transversal de um determinado corpo, é necessário um grande número de raios X. Essas medidas devem ser obtidas de diferentes projeções angulares sob vários raios.

A partir das medidas de projeção pode-se chegar a uma matriz de números que representa uma seção transversal do corpo em estudo. Esses números são os coeficientes de atenuação linear.

Supondo que a transmissão de raios X seja feita por várias direções, para cada orientação em particular tem-se um perfil. Após os perfis serem obtidos, os dados podem ser retroprojetados para formarem a imagem em questão.

Aumentando-se o número de raios e perfis, pode-se obter uma imagem mais próxima da original, ou seja, com melhor resolução.

O método de retroprojeção simples apresenta problemas na imagem reconstruída devido ao fato de cada raio-soma ser aplicado a todos os pontos do raio e não somente aos pontos de alta densidade. Esse problema aparecerá com maior intensidade quando a amostra tiver áreas com altas densidades discretas, o que produzirá o artefato "estrela". Neste artefato ocorre a formação de um conjunto de pixels devido às contribuições positivas dos diferentes perfis.

2.4.3 Reconstrução por Retroprojeção Filtrada

Na retroprojeção filtrada, os dados obtidos através de raios X são modificados antes de serem retroprojetados. Devido a essa modificação diz-se que os dados são filtrados.

A filtragem de uma projeção, no espaço real, é feita pela convolução da projeção com uma função pré-determinada, chamada de filtro. Os componentes negativos são somados aos dados projetados e os artefatos são eliminados a um nível razoável.

Ramachadran e Lakshminarayanan foram os primeiros a discutir a função filtro em 1971 (24).

2.4.4 Algoritmos de Reconstrução Algébrica

Um outro tipo de solução para reconstrução de imagens tomográficas consiste em assumir que a seção transversal é uma matriz desconhecida, e então produzir equações algébricas em termos das medidas dos dados projetados.

Na Figura 2.9 é apresentada uma grade retangular em uma imagem $f(x,y)$. Assume-se que em cada célula a função $f(x,y)$ é constante, sendo f_j o valor constante da j -ésima célula. Na técnica algébrica, um raio é definido de maneira diferente. Um raio é agora uma linha com uma certa espessura, passando pelo plano (x,y) . Para ilustrar foi sombreado o i -ésimo raio, onde cada raio tem largura τ . Na maioria dos casos a largura do raio é aproximadamente igual à largura da imagem da célula. A integral de linha é chamada de raio-soma.

$$\sum_{j=1}^N w_{ij} f_j = p_i \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (2.15)$$

Tal como a imagem, a projeção tem uma representação indexada. Seja p_i a medida do raio soma com o i -ésimo raio, conforme mostrado na Figura 2.10. A relação entre f_j e p_i pode ser expressa conforme a equação 2.15, onde M é o número total de raios (em todas as projeções) e w_{ij} é o fator de peso, que representa a contribuição da j -ésima célula da imagem interceptada

Figura 2.10 – Modelo discretizado para reconstrução de imagens de tomografia de transmissão.

pelo i -ésimo raio, como mostrado para uma célula. Note que a maioria dos w_{ij} são zero, tendo em vista que somente um pequeno número de células contribui para um dado raio-soma.

Se M e N são pequenos, pode-se usar o método convencional para inverter o sistema de equações em 2.15. No entanto, na prática, N pode ser maior que 65.000 (para imagens 256×256) e na maioria dos casos, para imagens deste tamanho, M terá a mesma magnitude. Para esses valores de M e N , o tamanho da matriz $[w_{ij}]$ é 65.000×65.000 o que impede, na prática, qualquer possibilidade de inversão direta da matriz. Quando existe ruído nas projeções e quando $M < N$, ou $N < M$, não é possível utilizar a inversão direta de matriz e o método da pseudo-inversa pode ser usado. Quando M e N são grandes, tal método também é computacionalmente impraticável.

Para grandes valores de M e N existem métodos iterativos para resolver 2.15. Para expor os métodos de cálculo envolvidos nestes métodos, a equação 2.15 será primeiramente reescrita conforme mostrado no sistema da equação 2.16.

Figura 2.11 – O método ART é ilustrado para o caso de dois hiperplanos.

$$\begin{aligned}
 w_{11}f_1 + w_{12}f_2 + w_{13}f_3 + \cdots + w_{1N}f_N &= p_1 \\
 w_{21}f_1 + w_{22}f_2 + w_{23}f_3 + \cdots + w_{2N}f_N &= p_2 \\
 &\vdots \\
 w_{M1}f_1 + w_{M2}f_2 + w_{M3}f_3 + \cdots + w_{MN}f_N &= p_M
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Uma imagem representada por $(f_1, f_2, \dots, f_N)$ pode ser considerada um único ponto em um espaço N -dimensional. Neste espaço, cada uma das equações acima representam um hiperplano. Quando existe uma única solução para essas equações, a interseção de todos esses hiperplanos é um único ponto, dado pela solução. Esse conceito é ilustrado na Figura 2.11, onde foi considerado o caso de somente duas variáveis f_1 e f_2 , satisfazendo as equações 2.17.

$$\begin{aligned}
 w_{11}f_1 + w_{12}f_2 &= p_1 \\
 w_{21}f_1 + w_{22}f_2 &= p_2
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

O procedimento computacional para localizar a solução na Figura 2.11 consiste em primeiro considerar uma solução inicial, projetando esse valor na primeira linha, reprojando o ponto resultante na segunda linha e, novamente, projetando na primeira linha, e assim por diante. Se existe uma única solução, as iterações irão convergir para essa solução.

Para implementar este método, primeiramente considere uma solução inicial. Essa solução representada por $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \dots, f_N^{(0)}$ é representada vetorialmente por $\vec{f}^{(0)}$ no espaço N -dimensional. Na maioria dos casos, simplifica-se fazendo-se com que todos os f_i tenham inicialmente valor 0. Este valor inicial é projetado no hiperplano representado pela primeira equação em 2.17,

resultando $\vec{f}^{(1)}$, como ilustrado na Figura 2.11, para o caso bidimensional. $\vec{f}^{(1)}$ é projetado no hiperplano representado pela segunda equação em 2.17, resultando em $\vec{f}^{(2)}$ e assim por diante. Quando $\vec{f}^{(i-1)}$ é projetado no hiperplano representado pela i -ésima equação, resultando em $\vec{f}^{(i)}$, o processo pode ser matematicamente descrito pela equação 2.18, onde $\vec{w}_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iN})$ e $\vec{w}_i \vec{w}_i$ é o produto interno de $\vec{w}_i$ com ele mesmo.

$$\vec{f}^i = \vec{f}^{i-1} - \frac{(\vec{f}^{i-1} \vec{w}_i - p)}{\vec{w}_i \vec{w}_i} \vec{w}_i \quad (2.18)$$

Conforme mostrado anteriormente, a Técnica de Reconstrução Algébrica (ART) busca a solução pela projeção seqüencial, a partir de uma estimacão inicial, no conjunto de soluções das equações lineares, onde cada um desses conjuntos é um hiperplano. A Técnica de Reconstrução Iterativa Simultânea (SIRT) busca a solução através da projeção paralela nos hiperplanos e dá melhores resultados na presença de ruído. Embora não propostos inicialmente como tal, esses métodos pertencem à classe de algoritmos POCS (Projection onto Convex Sets) (27).

O método de projeção seqüencial, em conjuntos de restrições fechados e convexos, para o problema de recuperação de imagens foi proposto por Youla e Webb em 1982 (32) e implementado sem o uso de informações sobre o ruído em imagens tomográficas por Sezan e Stark(33). Em 1993 Combettes (34) mostrou que os algoritmos de reconstrução paralela são mais adaptados ao ruído que métodos sequenciais. Os fundamentos da estimacão por restrições dadas por conjuntos são discutidos em detalhes na referência (35), onde o método de projeções sequenciais é referido como MOSP (*Method of Sequential Projections*) e o de projeções paralelas como MOPP (*Method of Parallel Projections*).

No método de projeções sequenciais é feita a projeção de um ponto e, em seguida, esse ponto é projetado seqüencialmente nos conjuntos, de forma cíclica. Já no método de projeções paralelas, as projeções são feitas em todos os conjuntos em uma única iteração. Os dois métodos convergem para uma única interseção, caso a interseção seja não vazia. Se a interseção é vazia, o método de projeção seqüencial não encontra a convergência, oscilando entre os conjuntos de restrição. Por outro lado, o método de projeção paralela converge para a solução dos mínimos quadrados, isto é, converge para um ponto cuja distância dos conjuntos de restrições é tal que a soma dos quadrados destas distâncias é mínima (34).

Conjuntos que não possuem interseção são muitas vezes gerados por projeções ruidosas, o que acaba gerando equações lineares inconsistentes. O método SIRT tem melhor desempenho, na presença de ruído, do que o ART. Bhumkar propôs uma maneira de tratar o ruído, utilizando ART, como um processo randômico (7).

2.5 Considerações Finais

Apesar de serem computacionalmente mais rápidos, os métodos de transformadas, tal como a aplicação direta da transformada de Fourier e retroprojeção filtrada, não produzem resultados satisfatórios quando o método de aquisição dos perfis angulares apresenta algum tipo de limitação, tal como ângulo de visão limitado ou a presença de ruído.

Os métodos algébricos permitem tratar a reconstrução tomográfica como a busca da solução de um sistema algébrico, o que permite restringir o conjunto de soluções com algum conhecimento *a priori* da imagem desejada.

3 REDUÇÃO DE RUÍDO

3.1 Considerações Iniciais

Lo(36) verificou que o processo de aquisição dos dados, em tomografia de transmissão, possui um ruído devido à natureza discreta dos fótons. As contagens de fótons, em cada projeção, são variáveis aleatórias de Poisson e são independentes entre si a um baixo nível de contagem.

Furuie(19) descreveu o modelo estatístico para as projeções ruidosas conforme mostrado pela Figura 3.1, onde f é a imagem do objeto, g são as projeções livres de ruído e y representa as observações ruidosas.

Uma maneira de reconstruir f a partir das observações y é inicialmente estimar as projeções g (a partir de y) e, em seguida, aplicar algoritmos de reconstrução sobre a estimativa de g .

Esse modelo de reconstrução tomográfica coincide com o modelo de restauração de imagens com ruído Poisson, proposto por Lo(36), onde a matriz de projeção A corresponde à matriz de degradação.

Neste capítulo serão apresentados alguns métodos para filtragem dos perfis angulares que consideram apenas a presença de ruído dessa natureza.

Para ilustrar a redução do ruído será considerado o sinal *manhattan skyline* descrito por Jansen(37) e apresentado na Figura 3.2.a. Foi adicionado o ruído de Poisson ao sinal, gerando com isso o sinal ruidoso conforme mostrado na Figura 3.2.b.

Figura 3.1 – Modelo estatístico da aquisição de projeções com ruído de Poisson.

Figura 3.2 – Sinal manhattan skyline: (a) sinal original, (b) sinal com ruído Poisson.

3.2 Estimação Usando o Critério de *Maximum a Posteriori* - *MAP*

O método MAP (*Maximum a Posteriori*) é vantajoso quando se conhece a distribuição estatística do sinal g a ser estimado, sendo maximizada a probabilidade de g dadas as observações ruidosas y .

A partir do teorema de Bayes tem-se a probabilidade condicional do sinal g , dado y , descrita pela equação 3.1.

$$p(g|y) = \frac{p(y|g)p(g)}{p(y)} \quad (3.1)$$

A probabilidade condicional de y , dado g , é descrita pela equação 3.2, onde y é um dado ponto da projeção ruidosa e g a taxa correspondente.

$$p(y|g) = \frac{e^{-g} g^y}{y!} \quad (3.2)$$

Mascarenhas, Santos e Cruvinel(3) propuseram um método para reconstrução de imagens tomográficas utilizando estimador MAP (*Maximum a Posteriori*) para diferentes densidades *a priori*. Os parâmetros dessas densidades são estimados pelo método dos momentos.

A dedução dos estimadores apresentados a seguir é apresentada no Apêndice A na página 125.

Figura 3.3 – Redução do ruído utilizando MAP com densidade *a priori* gaussiana.

3.2.1 Estimador MAP com densidade *a priori* gaussiana

Dada uma densidade *a priori* gaussiana descrita pela equação 3.3, o estimador MAP é dado pela equação 3.4.

$$p(g) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{g-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (3.3)$$

$$\hat{g} = \frac{\mu - \sigma^2 + \sqrt{(\sigma^2 - \mu)^2 + 4\sigma^2 y}}{2} \quad (3.4)$$

Os parâmetros μ e σ são estimados pela amostra do momento m (média amostral) e s^2 pela variância amostral, conforme descrito pelas equações 3.5 e 3.6, respectivamente, onde n é o tamanho da janela em torno do ponto estimado.

$$\hat{\mu} = m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i \quad (3.5)$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (g_i - \mu_i)^2 \quad (3.6)$$

A Figura 3.3 mostra a estimação do sinal descrito pela Figura 3.2.a, considerando a observação ruidosa descrita pela Figura 3.2.b, utilizando o estimador MAP com densidade *a priori* gaussiana.

Figura 3.4 – Redução do ruído utilizando MAP com densidade *a priori* chi-quadrado.

3.2.2 Estimador MAP com densidade *a priori* chi-quadrado

Dada a densidade *a priori* chi-quadrado descrita pela equação 3.7, o estimador MAP pode ser obtido através da equação 3.8.

$$p(g) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} g^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{g}{2}} \quad (3.7)$$

$$\hat{g} = \frac{2y + n - 2}{3} \quad (3.8)$$

O parâmetro n é estimado pelo momento m da amostra descrito pela equação 3.5.

O resultado da aplicação desse estimador ao sinal representado pela Figura 3.2.b é mostrado na Figura 3.5.

3.2.3 Estimador MAP com densidade *a priori* gama

A densidade *a priori* gama, descrita pela equação 3.9, tem seu estimador representado pela equação 3.10.

$$p(g) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} (\beta g)^{\alpha-1} e^{-\beta g}, \quad g > 0 \quad (3.9)$$

$$\hat{g} = \frac{y + (\alpha - 1)}{1 + \beta} \quad (3.10)$$

Os parâmetros α e β são estimados pelo momento m da amostra (média amostral) e pela variância amostral (s^2) descritos nas equações 3.11 e 3.12.

Figura 3.5 – Redução do ruído utilizando MAP com densidade *a priori* gama.

$$\hat{\alpha} = \frac{m^2}{s^2} \quad (3.11)$$

$$\hat{\beta} = \frac{m}{s^2} \quad (3.12)$$

3.2.4 Estimador MAP com densidade *a priori* beta

A equação 3.13 mostra a distribuição de densidade *a priori* beta, que tem seu estimador MAP descrito pela equação 3.14.

$$p(g) = \frac{\Gamma(\beta + \alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} g^{\alpha-1} (1-g)^{\beta-1} \quad (3.13)$$

$$\hat{g} = \frac{1}{2} \left[(y\Delta + \alpha\Delta + \beta\Delta - \Delta) + \sqrt{(-y\Delta - \alpha\Delta - \beta\Delta + \Delta)^2 - 4(y\Delta^2 + \alpha\Delta^2 - \Delta^2)} \right] \quad (3.14)$$

O parâmetro Δ é o máximo valor observado em um perfil angular e os parâmetros α e β são estimados pelo momento m da amostra (média amostral) e pelo momento s^2 (variância amostral) representados pelas equações 3.15 e 3.16.

$$\hat{\alpha} = \frac{m^2 - m^3}{s^2} - m \quad (3.15)$$

$$\hat{\beta} = \frac{m^3 - 2m^2 + m + s^2m - s^2}{s^2} \quad (3.16)$$

3.3 Transformada de Anscombe

A Transformada de Anscombe (TA) (38) transforma o ruído Poisson dependente do sinal em um ruído aproximadamente: gaussiano, aditivo, independente de sinal, com média zero e variância unitária.

A TA de y_i é descrita pela equação 3.17, onde z_i pode ser representado pelo modelo aditivo, conforme mostrado na equação 3.18.

$$z_i = 2\sqrt{y_i + \frac{3}{8}} \quad (3.17)$$

$$z_i = 2\sqrt{g_i + \frac{1}{8}} + v_i = s_i + v_i \quad (3.18)$$

Na equação 3.18, v_i é um ruído aditivo, aproximadamente independente de s_i , g_i é o sinal sem o ruído de Poisson.

A Transformada Inversa de Anscombe é descrita pela equação 3.19.

$$\hat{g}_i = \frac{1}{4}z_i^2 - \frac{1}{8} \quad (3.19)$$

Algumas considerações sobre a TA são apresentada no apêndice B.

3.4 Filtro de Wiener Pontual

Na seção 3.17 é apresentada a TA, que transforma o ruído de Poisson em um modelo aditivo, independente do sinal. Neste caso, tem-se o modelo aditivo para o ruído de Poisson, representado pela equação 3.18.

Assumindo que as componentes do sinal podem ser representadas como um processo gaussiano com média e variância não estacionárias, e variáveis aleatórias não correlacionadas entre si, pode-se utilizar o Filtro de Wiener descrito pela equação 3.20 para estimar o sinal original g a partir das observações y sujeitas ao ruído gaussiano.

$$\hat{s}_i = E\{s_i\} + \frac{\sigma_{s_i}^2}{\sigma_{s_i}^2 + \sigma_{v_i}^2}(z_i - E\{s_i\}) \quad (3.20)$$

Devido ao modelo aditivo do sinal, podemos considerar na equação 3.20 que $E\{s_i\} = E\{z_i\}$

Figura 3.6 – Redução do ruído utilizando o Filtro de Wiener pontual.

e que $\sigma_{s_i}^2 = \sigma_{z_i}^2 - \sigma_{v_i}^2$. Considerando ainda que o ruído possui média zero e variância unitária, o filtro de Wiener pontual pode ser representado pela equação 3.21.

$$\hat{s}_i = E\{s_i\} + \frac{\sigma_{s_i}^2}{\sigma_{z_i}^2 - 1}(z_i - E\{s_i\}) \quad (3.21)$$

O valor esperado $E\{s_i\}$ e a variância $\sigma_{s_i}^2$ são estimados através da vizinhança dos coeficientes de z_i . Como a média do ruído é zero, o valor esperado pode ser estimado encontrando a média do sinal ruidoso sobre a vizinhança. A variância também é estimada a partir da variância amostral numa vizinhança ao redor do ponto em questão. A variância não pode ser encontrada subtraindo-se um da variância do sinal ruidoso (como teoricamente esperado), pois essa estimativa pode produzir um valor negativo.

A Figura 3.6 mostra o resultado deste estimador aplicado ao sinal descrito pela Figura 3.2.b.

3.5 Filtro Linear de Goodman-Belsher

O filtro linear descrito por Goodman e Belsher(39) baseia-se em um critério de mínimo erro quadrático, levando em consideração a presença do ruído Poisson. Esse filtro não leva em consideração a presença do ruído aditivo independente de sinal.

O filtro de Goodman-Belsher, apresentado na equação 3.22, minimiza o critério de erro médio quadrático no domínio de Fourier, fazendo o uso do princípio da ortogonalidade. Nesta equação, $\Phi_{\tilde{U}}[m, n]$ é a densidade espectral de potência do sinal observado (ruidoso e borrado) e $\Phi_{\tilde{U}\tilde{F}}[m, n]$ é a densidade espectral de potência cruzada do sinal observado e do sinal verdadeiro. O ponto chave da derivação do filtro consiste em determinar $\Phi_{\tilde{U}}[m, n]$ e $\Phi_{\tilde{U}\tilde{F}}[m, n]$.

Figura 3.7 – Redução do ruído utilizando o Filtro de Goodman-Belsher.

$$W_{GB}[m, n] = \frac{\Phi_{\tilde{U}\tilde{F}}[m, n]}{\Phi_{\tilde{U}}[m, n]} \quad (3.22)$$

Goodman e Belsher(39) demonstram, a partir do modelo para imagem detectada (borrada e sujeita ao ruído de Poisson), que a densidade espectral de potência para a imagem detectada pode ser expressa conforme mostrado na equação 3.23, onde $\Phi_{\tilde{F}}[m, n]$ é a densidade espectral de potência para o sinal original, $\bar{\mu}$ é o número médio de contagem de fótons e $H[m, n]$ é a função de espalhamento pontual.

$$\Phi_{\tilde{U}}[m, n] = \bar{\mu} + \bar{\mu}^2 |H[m, n]|^2 \Phi_{\tilde{F}}[m, n] \quad (3.23)$$

O filtro é originalmente proposto para o caso bidimensional, porém, pode ser estendido para o caso tridimensional, conforme mostrado por Homem(40). A utilização do filtro para o caso unidimensional se dá de maneira análoga à sua extensão para o caso tridimensional. A equação 3.24 mostra o filtro para o caso unidimensional.

$$W_{GB}[m] = \frac{\bar{\mu} H^*[m] \Phi_{\tilde{F}}[m]}{1 + \bar{\mu} |H[m]|^2 \Phi_{\tilde{F}}[m]} \quad (3.24)$$

Como não é considerado borramento para as projeções, a matriz $H[m]$ é a matriz identidade. $\Phi_{\tilde{F}}[m]$ é estimado utilizando o espectro de potência da Transformada de Fourier das projeções pelo método do periodograma.

O resultado do filtro de Goodman-Belsher aplicado ao sinal descrito na Figura 3.2.b é mostrado na Figura 3.7.

3.6 Filtragem de ruído utilizando *Wavelet*

A análise de dados de acordo com escalas variáveis no domínio do tempo e da frequência é a idéia básica da utilização da teoria *Wavelet*. A Transformada Discreta *Wavelet* (DWT - *Discrete Wavelet Transform*) representa um sinal em termos de deslocamentos de função de baixa escala ϕ e deslocamento de funções de alta escala ψ , conforme representado pelas equações 3.25 e 3.26. A baixa escala representa a *wavelet* comprimida, ou seja, detalhes que mudam rapidamente (alta frequência de w). A alta escala representa a *wavelet* dilatada, ou seja, detalhes que mudam vagarosamente (baixa frequência de w).

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k) \quad (3.25)$$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \quad (3.26)$$

As equações 3.25 e 3.26 podem formar uma base ortonormal para determinadas escolhas de ϕ e ψ , onde $j, k \in \mathbb{Z}$.

Um sinal $y(t)$ pode ser expresso de acordo com a equação 3.27, e os componentes $u_{j,k}$ e $w_{j,k}$ podem ser representados pelas equações 3.28 e 3.29.

$$y(t) = \sum_k u_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^J \sum_k w_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (3.27)$$

$$u_{j,k} = \int y(t) \phi_{k,k}^*(t) dt \quad (3.28)$$

$$w_{j,k} = \int y(t) \psi_{k,k}^*(t) dt \quad (3.29)$$

O parâmetro J na equação 3.27 controla a resolução na representação *wavelet*.

Existem duas abordagens para a transformada *wavelets*, segundo Daubechies(41), ou seja: sistemas redundantes discretos (frames) e bases *wavelets* ortonormais. A segunda abordagem considera a análise de multiresolução, contemplada neste trabalho.

Figura 3.8 – Aninhamento entre os espaços com diferentes níveis de resolução.

3.6.1 Análise de Multiresolução

É possível construir famílias de *wavelets* discretas e desenvolver algoritmos rápidos para o cálculo de transformada utilizando o conceito de análise em multiresolução criado por Mallat(42). Essa análise parte da existência de uma função *wavelet* mãe $\psi(t)$ (descrita pela equação 3.26) e uma função de escala mãe $\phi(t)$ (descrita pela equação 3.25).

A relação entre os níveis de resolução pode ser descrita sob forma de aninhamento dos espaços de função, onde cada espaço de maior resolução contém os espaços de menor resolução, conforme mostrado na equação 3.30.

$$\cdots \supset v_3 \supset v_2 \supset v_1 \supset v_0 \quad (3.30)$$

A Figura 3.8 mostra o aninhamento entre os espaços descrito pela equação 3.30.

Cada espaço v_j é coberto pela família de funções de escala $\psi_{j,k}(t)$ correspondente. As funções de dilatação $\phi_{j,k}(t)$ estão contidas nos espaços ω_j , sendo ω_j o complemento de v_j em relação ao espaço v_{j+1} .

A equação 3.31 expressa a relação entre dois níveis adjacentes de resolução, onde o símbolo $\oplus$ representa a operação de soma direta.

$$v_{j+1} = v_j \oplus \omega_j \quad (3.31)$$

Figura 3.9 – Espaço da função de escala e função wavelet.

Considerando que o espaço v_0 é o espaço gerado pela função de escala quando $j = 3$, a equação 3.31 pode ser aplicada recursivamente para gerar o espaço original $v_0\omega_0\omega_1\omega_2$, conforme ilustrado pela Figura 3.9.

Os conjuntos de funções de base (*wavelet* e escala) podem ser expressos como função de base de v_{j+1} , conforme representado nas equações 3.32 e 3.33. Note que cada uma das funções é ponderada pelos coeficientes $h_0[k]$ e $h_1[k]$.

$$\phi_{j,k}(t) = \sum_n h_0[n - 2k] \phi_{j-1,n}(t) \quad (3.32)$$

$$\psi_{j,k}(t) = \sum_n h_1[n - 2k] \phi_{j-1,n}(t) \quad (3.33)$$

O processo de síntese (composição) e análise (decomposição) podem ser entendidos como a aplicação de filtros passa-baixas e passa-altas seguidos de uma subamostragem (no caso da análise) ou precedido por uma superamostragem (no caso da síntese), onde os coeficientes $\{h_0[k], h_1[k]\}$ e $\{\tilde{h}_0[k], \tilde{h}_1[k]\}$ formam o banco de filtros utilizados por esses métodos, correspondendo aos bancos de filtros de análise e síntese respectivamente.

As expressões mostradas anteriormente sugerem uma recursão, onde a projeção de um sinal f sobre v_j é decomposta em v_{j-1} e ω_{j-1} , a projeção de v_{j-1} é decomposta em v_{j-2} e ω_{j-2} e assim sucessivamente.

Figura 3.10 – Processo de análise composto pela aplicação do banco de filtros.

Figura 3.11 – Processo de síntese composto pela aplicação do banco de filtros.

A Figura 3.10 mostra a relação recursiva entre os coeficientes da transformada *wavelet* contida em cada subespaço.

A Figura 3.11 mostra a recursão para reconstrução do sinal decomposto.

3.6.2 Wavelet Haar

A *wavelet* Haar é o exemplo mais simples de uma *wavelet* ortonormal. Sua função de escala contém somente dois coeficientes diferentes de zero, conforme mostra a equação 3.34, onde ambos os coeficientes de escala são unitários ($c_0 = c_1 = 1$).

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t - 1) \quad (3.34)$$

A partir da equação 3.34 é possível obter a função de escala, considerando que a *wavelet* tem suporte compacto e é ortogonal. A função de escala $\phi(t)$ é mostrada na equação 3.35. Essa função possui um pulso de bloco, conforme mostrado na Figura 3.12.a.

Figura 3.12 – Wavelets ortonormais: (a) a função de escala de Haar e (b) a função wavelet em termos da função de escala.

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.35)$$

A função *wavelet* possui, conseqüentemente, dois coeficientes diferentes de zero, devendo satisfazer a equação 3.36. A equação 3.37 mostra a função de dilatação $\psi(t)$.

A relação entre a equação 3.36 e a equação 3.37 pode ser observada na Figura 3.12.b.

$$\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t - 1) \quad (3.36)$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.37)$$

3.6.3 Wavelets de Daubechies

Como examinado na seção anterior sobre a transformada *wavelet* Haar, os coeficientes são utilizados em duas etapas: em uma delas, eles atuam como filtro de suavização, e na outra, extraem os detalhes do sinal em cada escala. A *wavelet* Haar é extremamente simples possuindo somente dois coeficientes de escala, ambos unitários. Existe uma família de *wavelets*, da qual a *wavelet* Haar é o membro mais simples, denominada *wavelets de Daubechies*.

As *wavelets* propostas por Daubechies(41) formam sistemas completos de *wavelets* ortonormais. Os sistemas são gerados a partir da função de escala, descrita pela equação 3.38, onde os parâmetros a_k são denominados *coeficientes de filtro*. Impondo determinadas restrições sobre os valores que estes coeficientes assumem, é possível obter determinadas propriedades para um sistema de *wavelets*, tal como a ortonormalidade.

$$\phi(t) = \sum_k a_k \phi(2t - k) \quad (3.38)$$

Para que as *wavelets* tenham suporte compacto é necessário que apenas um número finito de coeficientes do filtro tenham valores diferentes de zero. Os sistemas *wavelets* de Daubechies são organizados em diferentes famílias, caracterizadas pelos números de coeficientes a_k não nulos. Cada família é identificada pelo número de família, representado aqui por N , cujo valor é igual à metade do número de coeficientes do filtro utilizados na equação 3.38.

É possível reescrever a equação 3.38, em função de N , de maneira que represente cada uma das famílias *wavelets* de Daubechies, conforme apresentado na equação 3.39.

$${}_N\phi(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} a_k {}_N\phi(2t - k) \quad (3.39)$$

As funções de escala possuem valores não nulos apenas no intervalo $[0, 2 - N]$, o qual é denominado suporte da função de escala ${}_N\phi(t)$.

A *wavelet* primária de cada uma das famílias pode ser definida através da equação 3.40, onde o valor de b_k é definido pela equação 3.41.

$${}_N\psi(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} b_k {}_N\phi(2t - k) \quad (3.40)$$

$$b_k = (-1)^k a_{2N-1-k} \quad (3.41)$$

Daubechies(41) definiu as famílias *wavelets* com valores de N compreendidos entre 2 e 10. Cada família *wavelet* é indicada como DBN , onde DB indica que são as *wavelets* propostas por Daubechies e N indica o suporte da função.

A Figura 3.13 mostra as funções *wavelets* primárias e funções de escala para famílias estudadas por Daubechies com valores de N iguais a 2, 3 e 4. A Figura 3.13.a mostra a *wavelet* primária para Daubechies com $N = 2$, representada por ${}_2\psi(t)$, onde a função de escala, representada por ${}_2\phi(t)$, é mostrada na Figura 3.13.b. As Figuras 3.13.c e 3.13.d mostram a *wavelet* primária e função de escala, respectivamente, para $N = 3$. A *wavelet* primária para $N = 4$ é mostrada na Figura 3.13.e, enquanto a Figura 3.13.f mostra a função de escala para esse mesmo suporte.

Apesar de Daubechies definir em seu trabalho apenas valores para N até dez, outras famílias de diferentes suportes podem ser obtidas à partir das equações 3.39 e 3.40.

3.6.4 Transformada *Wavelet* do Sinal Ruidoso

Admitindo que um dado sinal discreto f é corrompido por um ruído aditivo η , gerando uma observação y , conforme mostrado pela equação 3.42, a matriz de covariância Q do ruído pode ser expressa pela equação 3.43.

$$y = f + \eta \quad (3.42)$$

$$Q = E \{ (\eta - E\{\eta\})(\eta - E\{\eta\})^T \} \quad (3.43)$$

Se o ruído possui média zero ($E\{\eta\} = 0$), a equação 3.43 pode ser reescrita conforme mostrado na equação 3.44, onde I é a matriz identidade com mesma dimensão de f e σ^2 é a variância do ruído.

$$Q = \sigma^2 I \quad (3.44)$$

A Transformada *Wavelet* do sinal descrito pela equação 3.42 é dada pela equação 3.45 onde w , v e ω é a Transformada *Wavelet* de y , f e η respectivamente. Essa representação é possível devido à linearidade da Transformada *Wavelet*.

$$w = v + \omega \quad (3.45)$$

Figura 3.13 – Famílias de wavelets de Daubechies: (a) wavelet primária DB2, (b) função de escala DB2, (c) wavelet primária DB3, (d) função de escala DB3, (e) wavelet primária DB4 e (f) função de escala DB4.

Admitindo que W é a matriz que faz a Transformada *Wavelet*, tem-se que $w = Wy$, $v = Wf$ e $\omega = W\eta$. Utilizando a equação 3.44 é possível representar a matriz de covariância S do ruído no domínio *wavelet* ($S = E\{\omega\omega^T\}$) na forma da equação 3.46.

$$S = WQW^T \quad (3.46)$$

Se W é ortogonal, a partir da equação 3.46 tem-se que $S = \sigma^2 I$.

O ruído pode ser filtrado em diferentes escalas *wavelets* através de um limiar que pode ser escolhido, dependente da escala *wavelet* (43).

3.6.5 Thresholding

O sinal v livre de ruído, descrito pela equação 3.42, é tipicamente esparsos, contendo uma grande quantidade de valores próximos de zero (44). O sinal livre de ruído pode ser estimado utilizando um limiar λ . A equação 3.47 representa esse processo, onde w_λ representa a aplicação de um limiar (*thresholding*) no vetor w .

$$\hat{v} = w_\lambda \quad (3.47)$$

Donoho e Johnstone(45, 46) demonstraram que o *universal thresholding*, descrito pela equação 3.48 possui propriedades ótimas para eliminação de ruído nos coeficientes *wavelets*.

$$\lambda_{universal} = \sqrt{2 \log N} \sigma \quad (3.48)$$

O nome *universal threshold* reflete a idéia de que o limiar é válido para todos sinais de comprimento N (37).

Hard-thresholding

O procedimento no qual valores menores que um limiar são removidos enquanto os valores maiores ou iguais são mantidos é chamado *hard-thresholding*. A função que representa o *hard-thresholding* é mostrado na equação 3.49.

$$\rho_{hard}(x) = \begin{cases} x, & |x| > \lambda \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.49)$$

Figura 3.14 – Thresholding: (a) *hard-thresholding* e (b) *soft-thresholding*

A Figura 3.14.a mostra a função $\rho_{hard}(x)$ apresentada na equação 3.49, onde λ representa o limiar para remoção dos coeficientes *wavelets*. A função possui uma descontinuidade no intervalo $[-\lambda, \lambda]$, conforme observado na Figura 3.14.a .

A Figura 3.15 mostra a redução de ruído utilizando *hard-thresholding* com diferentes família *wavelets*. O método, descrito pela equação 3.49, foi aplicado em três escalas *wavelets*, onde o valor de λ em cada escala foi obtido através do *universal thresholding* descrito pela equação 3.48. O sinal original e o ruidoso são mostrados na Figura 3.2 na página 56.

A Figura 3.15.a utiliza a *wavelet* Haar, já as Figuras 3.15.b, 3.15.c e 3.15.d utilizam a *wavelet* DB2, DB3 e DB4 respectivamente.

Soft-thresholding

Uma alternativa para amenizar a descontinuidade nos coeficientes *wavelets* gerados pelo *hard-thresholding* é o *soft-thresholding*, mostrado na equação 3.50, onde os coeficientes com valores absolutos acima do limiar λ são reduzidos, conforme mostrado na Figura 3.14.b, ou seja, não somente pequenos valores são colocados como zero, mas valores maiores são reduzidos por um valor igual ao limiar λ . Como consequência, a transição entre os valores é contínua.

$$\rho_{soft}(x) = \begin{cases} x - \lambda, & x \geq \lambda \\ x + \lambda, & x \leq -\lambda \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.50)$$

Para ilustrar os resultados do *soft-thresholding*, o método foi aplicado ao sinal ruidoso mostrado na Figura 3.2 na página 56, onde o limiar λ foi obtido através do *universal thresholding*.

O método foi aplicado em três escalas, com diferentes famílias *wavelets*, conforme mos-

Figura 3.15 – *Hard-thresholding* utilizando as famílias wavelets: (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4.

Figura 3.16 – *Soft-thresholding* utilizando as famílias wavelets: (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4.

trado na Figura 3.16.

3.7 Considerações Finais

Todos os métodos de filtragem de ruído abordados neste capítulo possuem baixo custo computacional. É possível verificar que todos os métodos reduzem o ruído consideravelmente.

A filtragem de ruído no domínio *wavelet*, utilizando diferentes famílias *wavelets*, obtiveram bons resultados, sendo observado que quanto maior o suporte da função *wavelet*, maior será a suavização do sinal. Maiores detalhes sobre a Transformada *Wavelet*, bem como outras famílias *wavelets* são fornecidos por Burrus, Gopinath e Guo(47), Morettin(48) e Addison(49) em livros que discutem a *DWT* de maneira mais aprofundada.

Outra possibilidade é filtrar o ruído no domínio *wavelet*, utilizando o filtro de Wiener pontual, considerando uma janela em uma determinada escala (50).

4 ***PROJEÇÕES EM CONJUNTOS CONVEXOS (POCS - PROJECTIONS ONTO CONVEX SETS)***

4.1 **Considerações Iniciais**

Os métodos algébricos de reconstrução de imagens tomográficas, descritos no capítulo anterior, tal como ART e SIRT, são casos particulares de POCS, nos quais são considerados como conjuntos de restrição convexos somente os hiperplanos gerados para cada raio-soma. Além das observações, é possível considerar outros conjuntos de restrição baseado em algum conhecimento *a priori* sobre o material em estudo.

Segundo Homem(40) a teoria de POCS é um caso particular da teoria de conjuntos e de projeções em espaços vetoriais.

Neste capítulo serão apresentados os algoritmos de POCS sequencial e paralelo, mostrando previamente a definição de projetores e conjuntos convexos. Ao final do capítulo é apresentada uma comparação entre os algoritmos POCS e o algoritmo de retroprojeção filtrada.

4.2 **Projeção**

Considere a geometria do seguinte problema: em um plano bidimensional (2-D), a reta perpendicular a uma linha l passa por um ponto arbitrário x , interceptando essa linha exatamente em um ponto x^* (conforme mostrado na Figura 4.1.a). Esse ponto tem uma propriedade importante dentre os demais da linha l , pois é o ponto mais próximo de x (distância Euclidiana). Na Figura 4.1.b existe um círculo com centro em D e outros n círculos com centro em y . Note que somente um círculo (com centro em y) toca a circunferência D em um único ponto, denominado

Figura 4.1 – (a) Reta l e uma reta perpendicular à l passando por um ponto arbitrário x ; (b) figura bidimensional com círculos centrados em y , somente um disco toca o disco D em um ponto, representado por y^* .

y^* .

Tanto x^* como y^* são projeções de seus elementos em outros conjuntos, que no caso são convexos.

Seja C um conjunto convexo em um espaço de Hilbert H , então para cada x em H , existe um único x^* em C que é mais próximo de x . A equação 4.1 descreve essa condição, admitindo-se que $x^* \in C$.

$$\|x - x^*\| = \min_{y \in C} \|x - y\| \quad (4.1)$$

A equação 4.2 fornece uma solução única, que é uma das principais características associadas aos conjuntos convexos no espaço de Hilbert, ou seja, para todo $x \in H$ existe um único ponto mais próximo no conjunto C , o qual será chamado de projeção de x em C . A regra que determina a projeção no conjunto C é denominada *projetor* ou *operador de projeção* em C , o qual é denotado por P_C , ou seja, para todo $x \in H$ a projeção $P_C x$ em C é definida pela equação 4.2.

$$\|x - P_C x\| = \min_{y \in C} \|x - y\| \quad (4.2)$$

A Figura 4.1 mostra que x^* é a projeção de x na linha l e o ponto y^* é a projeção de y no disco D .

4.3 Algoritmo de POCS

Muitos problemas podem ser descritos sob a forma de conjuntos de restrições convexas. A solução para esses problemas satisfaz todas as restrições impostas, ou seja, a busca da solução desejada consiste em encontrar um valor pertencente à interseção entre os conjuntos.

Admitindo que exista n conjuntos de restrições, representados por $C_i (i = 1, 2, \dots, n)$, a solução para o problema está na interseção dos conjuntos, representada pela equação 4.3.

$$C_0 = \bigcap_{i=1}^n C_i \quad (4.3)$$

Se os conjuntos $C_i (i = 1, 2, \dots, n)$ são convexas e sua interseção é não vazia, as sucessivas projeções nos conjuntos convergirão para um ponto pertencente a C_0 . A equação 4.4 representa o algoritmo, admitindo que x_0 é um ponto qualquer e representa a estimativa inicial.

$$x_{k+1} = P_{C_k} \cdots P_{C_2} P_{C_1} x_k \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

O algoritmo descrito pela equação 4.4 faz a projeção sequencial nos conjuntos de restrições. O algoritmo de POCS (*Projections onto Convex Sets*) pode ser também implementado de maneira paralela. Nessa implementação, o ponto é projetado em todos os conjuntos e a cada projeção em um conjunto é atribuído um peso, fazendo, com isso, que seja considerada a projeção em todos os conjuntos ao mesmo tempo. A equação 4.5 descreve esse algoritmo. Note que o somatório dos pesos, representado por w_i , é igual a 1 conforme a equação 4.6.

$$x_{k+1} = x_k + \sum_{i=1}^n w_i (P_{C_i} x_k - x_k) \quad (4.5)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (4.6)$$

4.3.1 Comportamento do algoritmo POCS

Youla demonstrou em 1982 (32) que, sendo C_0 não vazio, para todo $x \in H$ a equação 4.4 converge fracamente para um ponto em C_0 . Embora em teoria essa convergência seja fraca, na prática a convergência para C_0 é forte. A Figura 4.8 mostra a representação gráfica dessa convergência

Figura 4.2 – Representação geométrica da convergência do método POCS sequencial.

Figura 4.3 – Comportamento do algoritmo de POCS (a) sequencial e (b) paralelo quando não há interseção entre os conjuntos convexos.

Quando não existe interseção entre os conjuntos de restrição, o algoritmo POCS sequencial não converge para um ponto e fica oscilando entre os conjuntos de restrições, conforme mostrado na Figura 4.3.a. Se a implementação for paralela, o algoritmo convergirá para um ponto tal que a soma dos quadrados das distâncias dos conjuntos é minimizada (27). Este caso é representado geometricamente pela Figura 4.3.b.

4.4 Conjuntos Convexos e Conjuntos não Convexos

Para que se tenha um conjunto convexo C é necessário que o segmento de reta definido por um par de elementos quaisquer, pertencente ao conjunto, possua somente pontos pertencentes a ele. A equação 4.7 representa essa condição, onde o ponto x , obtido a partir da combinação linear de x_1 e x_2 , pertence também ao conjunto C .

Figura 4.4 – Em conjuntos não convexos a solução pode convergir para (a) um trap ou para (b) a interseção, dependendo da estimativa inicial.

Figura 4.5 – Os pontos projetados em C_{nc} nas proximidades de x_T convergem para x_T .

$$x = \mu x_1 + (1 - \mu)x_2, \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad (4.7)$$

Quando os conjuntos não são convexos, a condição definida pela equação 4.7 nem sempre é satisfeita. É mais usual encontrar conjuntos de restrições não convexos do que convexos (27).

Quando um dos conjuntos é não convexo, a convergência para a interseção entre eles não é garantida através do método de projeções. A solução, dependendo da estimativa inicial, pode convergir para um *trap* (armadilha), conforme ilustrado pela Figura 4.4.a, ou para a interseção dos conjuntos (Figura 4.4.b).

Os *traps* podem ser classificados em atrativos e repulsivos. Para ilustrar os dois tipos de *traps*, considere um conjunto não convexo C_{nc} que tem um *trap* x_T , um conjunto convexo C_c e uma estimativa inicial x . Se uma projeção no conjunto C_{nc} é feita nas proximidades de x_T , e o *trap* é atrativo, as projeções seguintes convergirão para x_T , conforme ilustrado pela Figura 4.5. Se o *trap* é repulsivo, qualquer projeção feita nas imediações de x_T convergirá para outro valor (Figura 4.6.a). Nesse caso, as iterações convergirão para este *trap* somente se a projeção em C_{nc} é feita diretamente em x_T , conforme ilustrado pela Figura 4.6.b.

Figura 4.6 – Trap repulsivo.

Figura 4.7 – (a) l_1 e l_2 tem uma interseção (b) l_1 e l_2 são coincidentes, ou seja, possuem infinitas soluções (c) l_1 e l_2 são paralelas, não possuindo nenhuma interseção.

4.5 O Uso de POCS para solução de equações lineares

Considere-se o sistema de equações lineares da equação 4.8, o qual consiste de duas equações e duas variáveis x e y . Da álgebra elementar, sabe-se que as equações dadas são representadas por uma reta em R^2 . As equações podem ser representadas pelos gráficos da Figura 4.7.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \\
 (b) \quad & \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \\
 (c) \quad & \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Como as retas são conjuntos convexos, é possível resolver cada sistema utilizando projeções em conjuntos convexos, ou seja, pode ser considerado como solução para um sistema linear o ponto que pertença aos dois conjuntos, isto é, a interseção entre os conjuntos. Note que na

Figura 4.7.a existe somente um ponto que satisfaz essa condição, já em 4.7.b existem infinitas soluções, enquanto em 4.7.c não existe nenhuma solução, ou seja, para um sistema linear podemos concluir que se admite como resposta uma solução, nenhuma solução ou infinitas soluções.

As equações lineares podem ser representadas em forma de produto interno. A equação 4.9 representa um conjunto de equações lineares, onde $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ representam os coeficientes, y representa a variável, $b_i (i = 1, \dots, n)$ representam os termos independentes e n representa o número de equações.

$$\langle a_i, y \rangle = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.9)$$

O conjunto de soluções para cada equação pode ser representado pela equação 4.10.

$$C_i = \{y : \langle a_i, y \rangle = b_i\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.10)$$

Pode-se representar o conjunto de soluções do sistema de equações, representado pela equação 4.9, como C_0 , onde os conjuntos têm suas soluções representadas pela equação 4.10. Desta maneira, o conjunto de soluções pode ser representado pela equação 4.11.

$$C_0 = \bigcap_{i=1}^n C_i \quad (4.11)$$

Se a interseção é não vazia, o objetivo passa a ser encontrar este conjunto de interseção, o que pode ser resolvido através do método de projeções em conjuntos convexos. O problema passa a ser o de como calcular as projeções em cada conjunto, o que é feito através dos projetores.

4.5.1 Projetores

Pela definição, a projeção $P_i x$ de um vetor x no conjunto C_i é o ponto em C_i que é mais próximo de x . Suponha que o conjunto C_i represente um hiperplano com normal a_i . A reta que conecta x e sua projeção $P_i x$ é ortogonal a este hiperplano, com isso é possível estabelecer a relação apresentada na equação 4.12.

$$x - P_i x = \alpha a_i \quad (4.12)$$

A constante α pode ser calculada sabendo-se que $P_i x$ pertence ao conjunto C_i , ou seja, $P_i x$

satisfaz a equação 4.9. Substituindo $P_i x$ na equação 4.9 obtém-se a equação (3.13).

$$\langle a_i, P_i x \rangle = b_i \quad (4.13)$$

Aplicando a equação 4.12 na equação 4.13 obtém-se a equação 4.14.

$$\langle a_i, x - \alpha a_i \rangle = b_i \quad (4.14)$$

Utilizando os multiplicadores de Lagrange, é possível encontrar o valor de α , mostrado na equação 4.15, que fornece a regra de projeção descrita pela equação 4.16.

$$\alpha = \frac{\langle a_i, x \rangle - b_i}{\|a_i\|^2} \quad (4.15)$$

$$P_i x = x - \frac{\langle a_i, x \rangle - b_i}{\|a_i\|^2} a_i \quad (4.16)$$

Tendo o operador de projeção, para obter a solução do sistema de equações lineares basta escolher um x inicial e utilizar a equação 4.17 iterativamente, até que se verifique a convergência.

$$x_{k+1} = P_m \cdots P_2 P_1 x_k \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.17)$$

A equação 4.17 descreve uma implementação sequencial para o problema apresentado. A implementação paralela pode ser feita utilizando a equação 4.18, lembrando que os projetores são os mesmos da equação 4.16.

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P_i x_k - x_k) \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

O algoritmo representado pela equação 4.18 é o mesmo algoritmo representado pela equação 4.5, porém, os pesos w_i possuem os mesmos valores para $i = 1, 2, \dots, n$. Como existem n conjuntos e a condição descrita pela equação 4.6 tem que ser satisfeita, cada conjunto é normalizado por n .

Figura 4.8 – (a) As sucessivas projeções convergem para a solução do sistema, (b) a projeção converge para a solução mais próxima da estimativa inicial e (c) como não existe solução as projeções ficam oscilando entre dois valores.

4.5.2 Comportamento do Algoritmo

Para analisar a convergência das projeções, serão considerados os sistemas de equações apresentados na equação 4.8. A seguir será apresentada a análise de convergência para a implementação através de projeção paralela e sequencial.

Algoritmo de Projeção Sequencial

Dado um ponto qualquer, a equação 4.8.a convergirá assintoticamente para a solução esperada, conforme mostrado na Figura 4.8.a. A equação 4.8.b converge, em uma iteração, para o ponto mais próximo da solução inicialmente estimada (lembrando que esse sistema possui infinitas soluções), como mostrado na Figura 4.8.b. A equação 4.8.c não irá convergir e a projeção ficará oscilando entre dois valores (tendo em vista que esse sistema não possui solução), conforme mostrado na Figura 4.8.c.

Algoritmo de Projeção Paralela

A equação 4.8.a converge para a solução desejada, conforme mostrado na Figura 4.9.a. A equação 4.8.b tem sua convergência de maneira similar à descrita no método sequencial (Figura 4.9.b). A equação 4.8.c converge para um ponto equidistante de l_1 e l_2 (Figura 4.9.c).

Figura 4.9 – ((a) as sucessivas projeções convergem para a solução do sistema, (b) a projeção converge para a solução mais próxima da estimativa inicial e (c) como não existe solução as projeções convergem para a solução dos mínimos quadrados.

4.6 Conjuntos de Restrições Convexos

O modelo linear para reconstrução de imagem pode ser descrito pela equação 4.19, onde g representa os dados do vetor de projeção de tamanho $(M \times 1)$, f é o vetor da imagem original de tamanho $(N^2 \times 1)$, A é a matriz de pesos de tamanho $(M \times N^2)$ e n é o vetor de ruído de tamanho $(M \times 1)$.

$$g = Af + n \quad (4.19)$$

Assume-se que a imagem estimada, $\tilde{f}$, é quadrada e que $f(i)$ representa o i -ésimo pixel de uma imagem $f \in \mathbb{R}^{N \times N}$. O resíduo, $r = g - A\tilde{f}$, é o vetor de *ruído estimado*. Restrições sobre o resíduo podem ser expressas como restrições sobre a imagem estimada (51).

A equação 4.19 descreve um sistema de equações lineares, onde cada linha de g descreve uma equação linear que pode ser representada por um hiperplano. Cada hiperplano é um conjunto convexo e sua solução pode ser encontrada através do método de POCS, conforme descrito na seção 4.5, sendo a regra de projeção definida pela equação 4.16 na página 82.

Além dos conjuntos de restrições expressos pela equação 4.19 é possível considerar o conhecimento *a priori* sobre a imagem a ser reconstruída. Tais restrições têm que ser expressas em forma de conjunto. A seguir serão descritos alguns conjuntos convexos que podem ser usados na reconstrução de imagens tomográficas.

4.6.1 Conjunto de Restrição de Suporte Finito

A equação 4.20 descreve o conjunto de restrição de suporte finito, onde todas as funções estão no espaço de Hilbert H e pertencem a uma região Ω .

$$C_{SF} = \{h : h \in H \text{ e } h(i) = 0 \text{ para } i \notin \Omega\} \quad (4.20)$$

O operador de projeção do conjunto definido pela equação 4.20 é mostrado na equação 4.21.

$$P_{SF}q(i) = \begin{cases} q(i) & \text{se } i \in \Omega \\ 0 & \text{se } i \notin \Omega \end{cases} \quad (4.21)$$

4.6.2 Conjunto de Restrição de Não Negatividade

O conjunto descrito pela equação 4.22 descreve um conjunto cujos elementos não podem assumir valores negativos, ou seja, estabelece um limite inferior para o grau de atenuação da imagem a ser reconstruída.

$$C_+ = \{h : h \in H \text{ e } h(i) \geq 0 \quad \forall i\} \quad (4.22)$$

A regra de projeção no conjunto C_+ é descrita pela equação 4.23.

$$P_+q(i) = \begin{cases} q(i) & \text{se } q(i) \geq 0 \\ 0 & \text{se } q(i) < 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

4.6.3 Conjunto de Restrição de Amplitude Limitada

Esse conjunto descreve o limite inferior e o limite superior para os valores dos *pixels* da imagem a ser reconstruída. A equação 4.24 descreve esse conjunto, onde α é o limite inferior, β é o limite superior e Ω é a região onde se encontra a imagem.

$$C_{AL} = \{h : h \in H \text{ e } \alpha \leq h(i) \leq \beta \text{ para } \forall i \in \Omega\} \quad (4.24)$$

O projetor da equação 4.24 é dado pela equação 4.25.

$$P_{AL}q(i) = \begin{cases} \alpha & \text{se } q(i) < \alpha \\ q(i) & \text{se } \alpha \leq q(i) \leq \beta \\ \beta & \text{se } q(i) > \beta \end{cases} \quad (4.25)$$

4.6.4 Conjunto de Imagens com Pontos Conhecidos

É possível estabelecer um conjunto de restrição quando se tem o conhecimento dos valores assumidos por alguns pixels na imagem a ser reconstruída. A equação 4.26 descreve esse conjunto, onde γ_i é a intensidade assumida pelo i -ésimo *pixel*.

$$C_{PC} = \{h : h \in H \text{ e } h(i) = \gamma_i \quad \forall i \in I \subset \{1, 2, \dots, N^2\}\} \quad (4.26)$$

O projetor é dado pela equação 4.27.

$$P_{PC}q(i) = \begin{cases} \gamma_i & \text{se } i \in I \\ q(i) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.27)$$

Este conjunto pode ser considerado uma generalização do conjunto de restrição de suporte finito, descrito pela equação 4.20, onde γ_i assume valor nulo para os pontos fora da região de interesse.

4.7 Comparação entre o algoritmo de POCS e Retroprojeção filtrada

Para reconstrução tomográfica de imagens utilizando POCS são considerados três tipos de conjuntos de restrição convexos. O primeiro tipo é definido pelas projeções. Esse conjunto é definido na seção 4.19 na página 84, onde as N equações definem os conjuntos $C_i (i = 1, 2, \dots, N)$ cujos projetores são definidos pela equação 4.16 na página 82. O segundo tipo de conjunto de restrição é o de suporte finito, descrito na seção 4.6.1 na página precedente. O terceiro é o conjunto de restrição de não negatividade, descrito na seção 4.6.2 na página anterior.

Estes conjuntos de restrição foram escolhidos por não exigirem conhecimento *a priori* mais profundo sobre o material em estudo.

No caso do POCS sequencial, o algoritmo escolhido é descrito pela equação 4.28, ou seja, a projeção é feita inicialmente nos hiperplanos definidos pelas observações, seguida pela projeção

Figura 4.10 – (a) *Phantom Sheep-Logan*, (b) *reconstrução com retroprojeção filtrada*, (c) *reconstrução utilizando POCS paralelo* e (d) *reconstrução utilizando POCS sequencial*

no conjunto de suporte finito e, por último, é feita a projeção no conjunto de não negatividade. É considerada como uma iteração, a projeção em todos os conjuntos.

$$f_{k+1} = P_+ P_{SF} P_{C_i} f_k \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (4.28)$$

No algoritmo de POCS paralelo, a projeção é feita paralelamente em todos os hiperplanos definidos pelas observações, seguida pela projeção no conjunto de suporte finito e de não negatividade. Esse algoritmo é definido pela equação 4.29.

$$\begin{aligned} g_k &= f_k + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (P_{C_i} f_k - f_k) \\ f_{k+1} &= P_+ P_{SF} g_k \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (4.29)$$

No algoritmo de retroprojeção filtrada foi utilizado o filtro *Ram-Lak*.

Para verificar o resultado da reconstrução tomográfica foi feita uma simulação de um *phantom* descrita por Logan e Shepp(25). Esse *phantom* é ilustrado pela Figura 4.10.a. Como o objetivo é analisar o efeito do ruído nos algoritmos de reconstrução, foi introduzido ruído de Poisson nas projeções do *phantom* em questão.

A Figura 4.10.b mostra o resultado da reconstrução utilizando o algoritmo de retroprojeção filtrada. O resultado da reconstrução utilizando POCS paralelo é mostrado na Figura 4.10.c e o resultado do POCS sequencial é apresentado na Figura 4.10.d.

É possível observar que as reconstrução utilizando POCS apresentaram um melhor resultado do que o algoritmo de retroprojeção filtrada. O melhor resultado observado é o apresentado pelo algoritmo de POCS paralelo que faz uma suavização do ruído, em comparação ao POCS sequencial, porém preservando as bordas da imagem.

4.8 Considerações Finais

O algoritmo de POCS torna possível a incorporação de conhecimento *a priori* nos algoritmos de reconstrução, fazendo com isso que a solução possua um resultado satisfatório.

Dentre os métodos apresentados o que obteve melhor resultado foi o algoritmo de POCS paralelo, apesar de possuir os mesmo conjuntos de restrição do algoritmo de POCS sequencial. Possivelmente o ruído faz com que os conjuntos gerados pelas observações não possuam interseção, ou seja, as iterações faz com que a solução oscile entre os conjuntos existentes. Já o POCS paralelo faz com que a solução satisfaça o mínimo erro médio quadrático, produzindo um resultado mais próximo dos conjuntos de restrições impostos.

5 MÉTODO PROPOSTO

5.1 Considerações Iniciais

Conforme abordado no capítulo 4, seção 4.7 na página 86, o algoritmo POCS paralelo apresenta melhor resultado na presença de ruído. Esse foi o método de reconstrução tomográfica escolhido, tendo em vista que, por melhor que seja o estimador do sinal original (dado o sinal ruidoso), existe um resíduo restante.

5.2 Algoritmo

Os método abordado consiste em, inicialmente, filtrar as projeções ruidosas com os métodos descritos no capítulo 3. Após a estimação das projeções, utiliza-se o algoritmo POCS paralelo, para reconstrução tomográfica das imagens, conforme mostrado na equação 4.5, utilizando os conjuntos de restrições convexos descritos pelas equações 4.19, 4.20 e 4.22. O método é descrito pela Figura 5.1, onde y representa as projeções ruidosas, $\hat{g}$ representa a estimação das projeções sem o ruído e f , a imagem reconstruída.

A estimação do sinal pode ser feita utilizando o critério MAP considerando-se diferentes densidades *a priori*. Este trabalho levou em consideração quatro tipos de densidade, sendo elas: a) Gaussiana, b) Chi-quadrado, c) Gama e d) Beta.

Como o ruído pode ser modelado como ruído Poisson, devido à baixa contagem de *fótons*,

Figura 5.1 – O método proposto consiste em filtrar as projeções antes de utilizar o algoritmo de reconstrução.

antes de utilizar a redução de ruído nos coeficientes *wavelets*, é efetuada a Transformada de Anscombe para poder obter um modelo de ruído aditivo. Em seguida, é aplicada a DWT, o que possibilita a redução de ruído em diferentes escalas. Depois de obtida a estimação dos coeficientes *wavelets* livres de ruído, através da utilização de *thresholding*, é aplicada, então, a IDWT (*Inverse Discrete Wavelet Transform*) e, em seguida, a Transformada Inversa de Anscombe, obtendo-se assim uma estimação das projeções sem a presença de ruído.

A utilização da Transformada de Anscombe permite que seja usado o Filtro de Wiener pontual. Já o Filtro de Goodman-Belsher, que considera o ruído de Poisson nas projeções, pode ser aplicado diretamente sobre as projeções ruidosas.

5.3 Resultados

Phantom ou corpo de prova é um objeto confeccionado para realizar um experimento. Para verificar a performance do método foram considerados *phantoms* simulados e reais. O *phantom* simulado foi utilizado para criar um ambiente onde é possível controlar o ruído presente, bem como conhecer a imagem real que se deseja reconstruir.

A performance do algoritmo foi calculada utilizando a melhoria da relação sinal-ruído (*ISNR - Improvement Signal-to-Noise Ratio*), que é medida em *decibel* (dB), apresentada na equação 5.1, onde f_j é o $j^{\text{ésimo}}$ elemento da imagem ideal, $\hat{f}_j$ é o $j^{\text{ésimo}}$ elemento da imagem reconstruída utilizando filtragem nas projeções e $\tilde{f}_j$ é o $j^{\text{ésimo}}$ elemento da imagem reconstruída sem filtrar as projeções.

$$ISNR = 10 \log \frac{\sum_j (f_j - \tilde{f}_j)^2}{\sum_j (f_j - \hat{f}_j)^2} \quad (5.1)$$

Na seqüência serão mostradas as imagens reconstruídas para cada *phantom*, bem como o *ISNR* para cada reconstrução.

5.3.1 Phantom Simulado

Para verificar os resultados em uma ambiente simulado foi utilizado o *phantom* de Shepp-Logan (25) mostrado na Figura 5.2.a. Foi simulada a tomografia do *phantom*, admitindo que a maior contagem de *fótons* (feixe livre) é igual a cem, em seguida, foi inserido ruído Poisson aos perfis angulares. As projeções foram feitas em 100 (cem) ângulos diferentes compreendidos no intervalo $[0, 180[$, cada perfil angular contém cem raios-soma. As imagens após a reconstrução

Figura 5.2 – Phantom Shepp-Logan: (a) original e (b) ruidoso.

Figura 5.3 – Reconstrução do phantom ruidoso simulado com filtragem das projeções ruidosas com o critério MAP com densidade *a priori* : (a) gaussiana, (b) chi-quadrado, (c) gama e (d) beta

têm dimensão 100X100.

A imagem ruidosa é gerada pela reconstrução do sinal ruidoso utilizando POCS paralelo, mostrada na Figura 5.2.b. A imagem estimada é reconstruída utilizando o mesmo método, porém, utilizando diferentes estimadores nas projeções.

A Figura 5.3 mostra os resultados da reconstrução tomográfica do *phantom* simulado utilizando o critério MAP com diferentes densidades de probabilidades *a priori*. Foram utilizadas as densidades *a priori*: (a) gaussiana (Figura 5.3.a), (b) chi-quadrado (Figura 5.3.b), (c) gama (Figura 5.3.c) e (d) beta (Figura 5.3.d).

A tabela 5.1 mostra o *ISNR* para a reconstrução utilizando o critério MAP com diferentes

Tabela 5.1 – *ISNR* da reconstrução com filtragem nas projeções utilizando o critério MAP com diferentes densidades de probabilidades *a priori*.

densidade <i>a priori</i> gaussiana	densidade <i>a priori</i> chi-quadrado	densidade <i>a priori</i> beta	densidade <i>a priori</i> gama
2,975	3,491	2,251	2,953

Figura 5.4 – Reconstrução do phantom ruidoso simulado com redução de ruído nas projeções utilizando o *hard-thresholding* nos coeficientes wavelets usando as famílias: (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4.

Tabela 5.2 – *ISNR* da reconstrução com a utilização do *hard-thresholding* nos coeficientes wavelets das projeções utilizando diferentes famílias wavelets.

Haar	DB2	DB3	DB4
2,978	2,913	2,758	2,61

densidades de probabilidade *a priori*. Os resultados apresentados na tabela mostram que os melhores resultados para esse tipo de filtragem foram obtidos utilizando a densidade *a priori* chi-quadrado e gaussiana.

A redução de ruído utilizando *hard-thresholding* nos coeficientes wavelets para este *phantom* é mostrado na Figura 5.4, onde as famílias wavelets utilizadas foram: Haar (Figura 5.4.a), DB2 (Figura 5.4.b), DB3 (Figura 5.4.c) e DB4 (Figura 5.4.d).

A tabela 5.2 mostra o *ISNR* para a redução do ruído utilizando *hard-thresholding* em três escalas wavelets; o limiar é calculado utilizando o *universal threshold*. A variância do ruído em todas escalas é unitária, tendo em vista que a redução de ruído é aplicada no domínio de Anscombe.

As Figuras 5.5.a, 5.5.b, 5.5.c e 5.5.d mostram o resultado da utilização do *soft-thresholding* nos coeficientes wavelets utilizando as famílias Haar, DB2, DB3 e DB4 respectivamente. O limiar é aplicado em três escalas wavelets.

A tabela 5.3 mostra o *ISNR* aplicado à reconstrução tomográfica precedida da redução de ruído utilizando *soft-thresholding* nos coeficientes wavelets para diferentes famílias wavelets.

A Figura 5.6.a mostra o resultado da reconstrução tomográfica precedida da filtragem nas projeções utilizando o filtro de Wiener pontual, com uma janela de dimensão três. Para essa imagem o *ISNR* é de 3,0174.

Figura 5.5 – Reconstrução do phantom ruidoso simulado com redução de ruído nas projeções utilizando o soft-thresholding nos coeficientes wavelets usando as famílias: (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4.

Tabela 5.3 – ISNR da reconstrução com a utilização do soft-thresholding nos coeficientes wavelets das projeções utilizando diferentes famílias wavelets a priori.

Haar	DB2	DB3	DB4
3,152	2,927	2,845	2,769

Figura 5.6 – Reconstrução do phantom ruidoso simulado com filtragem de ruído nas projeções utilizando os filtros de (a) Wiener e (b) Goodman-Belsher

Tabela 5.4 – *ISNR da reconstrução tomográfica, do phantom Shepp-Logan com dimensão 50X50, utilizando POCS e filtragem nas projeções.*

MAP com densidade <i>a priori</i>			
gaussiana	chi-quadrado	beta	gama
3,059	2,106	2,015	3,051
<i>Hard-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
2,228	2,111	2,113	2,065
<i>Soft-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
2,606	2,420	2,421	2,066
Filtro de Wiener Pontual		Filtro de Goodman-Belsher	
2,621		2,151	

O resultado da reconstrução tomográfica, filtrando anteriormente as projeções com o filtro de Goodman-Belsher, é mostrado na Figura 5.6.b, onde o *ISNR* é 3,493.

Apesar dos melhores resultados obtidos serem os que adotaram o critério MAP para a estimação do sinal livre de ruído, considerando o *ISNR*, as imagens são visualmente muito similares, sendo possível observar que alguns métodos, tal como a aplicação do filtro de Wiener pontual, provocaram uma suavização na imagem reconstruída.

Para verificar os efeitos produzidos nessas imagens, foi feita uma simulação, com o mesmo *phantom*, utilizando cinquenta perfis angulares, onde a imagem reconstruída possui 50X50 *pixels*. As imagens para cada um dos métodos de filtragem abordados neste trabalho são mostradas nas Figuras 5.7 e 5.7.

A imagem original para esse *phantom* é exibida na Figura 5.7.a e a imagem da Figura 5.7.b mostra a reconstrução das projeções ruidosas. O *ISNR* para a reconstrução tomográfica do *phantom* é mostrado na tabela 5.4.

Observando os valores do *ISNR*, nota-se que o método que obteve melhor resultado foi a reconstrução obtida a partir das projeções estimadas utilizando o critério MAP com densidade *a priori* gaussiana. A filtragem feita nos coeficientes *wavelets* apresentam valores de *ISNR* muito próximos, independente da família *wavelet* utilizada ou do método de filtragem (*hard-thresholding* ou *soft-thresholding*).

O filtro de Wiener pontual apesar de apresentar valor de *ISNR* igual a 2,621 suavizou a imagem a ponto de omitir algumas estruturas visíveis na imagem ruidosa. Já a utilização do filtro de Goodman-Belsher, apesar da suavização, não deixou esse efeito evidente.

Figura 5.7 – (a) Phantom de Shepp-Logan de tamanho 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo com estimação das projeções utilizando o critério MAP com densidades a priori (c) gaussiana, (d) chi-quadrado, (e) beta e (f) gama. Redução de ruído nas projeções utilizando hard-thresholding nos coeficientes wavelets utilizando as famílias wavelets (g) Haar, (h) DB2, (i) DB3 e (j) DB4. Filtragem nas projeções utilizando (k) o filtro de Wiener e o (l) filtro de Goodman-Belsher.

Figura 5.8 – (a) Phantom de Shepp-Logan de tamanho 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo precedida da aplicação do soft-thresholding nos coeficientes wavelets das projeções utilizando as famílias wavelets (c) Haar, (d) DB2, (e) DB3 e (f) DB4.

Figura 5.9 – Ilustração do corte transversal dos *Phantoms* experimentais (a) homogêneo, (b) simétrico e (c) assimétrico.

5.3.2 *Phantoms* Reais

Foram utilizados três *phantoms* experimentais: homogêneo, assimétrico e simétrico. O *phantom* homogêneo é um cilindro de *nylon* contendo água em seu interior, conforme mostrado na Figura 5.9.a. O *phantom* assimétrico é um objeto cilíndrico de *nylon*, com furos de diferentes tamanhos (Figura 5.9.b). O *phantom* simétrico é um corpo cilíndrico de *plexiglass* com dois furos e dois cilindros de alumínio em seu interior. Tanto os furos quanto os cilindros de alumínio estão dispostos de maneira simétrica, conforme mostrado na Figura 5.9.c.

A obtenção dos dados foi feita no CNPDIA-EMBRAPA, com um tomógrafo de primeira geração descrito na seção 2.2.2.

Cada *phantom* teve sua projeção obtida em dois diferentes tempos de exposição à radiação, sendo eles: (a) três segundos por raio soma, obtendo-se baixa contagem de *fótons* e, conseqüentemente, um alto ruído e (b) vinte segundos por raio soma, obtendo-se alta contagem de *fótons* e, conseqüentemente, aumentando substancialmente a relação sinal-ruído. As imagens reconstruídas a partir das projeções com alta contagem de *fótons* foram consideradas imagens ideais.

Figura 5.10 – *Phantom homogêneo: (a) imagem ideal, reconstruída a partir das projeções obtidas com 20 segundos de exposição por raio; (b) imagem ruidosa reconstruída a partir das projeções obtidas com 3 segundos de exposição por raio*

Phantom Homogêneo

O objetivo deste *phantom* é verificar o comportamento do ruído, tendo em vista que, por ser uma região homogênea, é mais fácil verificar as alterações de intensidades entre os *pixels*.

Foram feitas quatro coletas de dados com esse *phantom*, sendo que duas com alto tempo de exposição à radiação (vinte segundos por raio) em cem ângulos diferentes, com cem raios-soma por ângulo, e duas com baixo tempo de exposição à radiação (três segundos por raio) em cinquenta ângulos diferentes, com cinquenta raios-soma por ângulo.

Os primeiros resultados a serem apresentados foram os coletados em cem ângulos, gerando uma imagem de tamanho 100X100 *pixels*.

A Figura 5.10.a mostra a imagem ideal. Essa imagem foi obtida a partir da reconstrução das projeções com alto tempo de exposição à radiação (vinte segundos por raio). A reconstrução do *phantom* foi feita utilizando o algoritmo de POCS paralelo.

A imagem ruidosa, mostrada na Figura 5.10.b, foi obtida através da reconstrução, pelo algoritmo de POCS paralelo, das projeções com baixo tempo de exposição à radiação (três segundos por raio).

O resultado da reconstrução tomográfica utilizando a estimação das projeções livres de ruído, através do critério MAP, pode ser observado na Figura 5.11. As Figuras 5.11.a, 5.11.b, 5.11.c e 5.11.d mostram o resultado da reconstrução das projeções filtradas com o critério MAP com densidades *a priori* gaussiana, chi-quadrado, beta e gama respectivamente.

O *ISNR* para a estimação utilizando a densidade *a priori* gaussiana é de 5,478 dB, para a densidade *a priori* chi-quadrado é de 6,861 dB, para a densidade *a priori* beta e gama é de 3,238 dB e 5,425 dB.

Figura 5.11 – Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com estimação das projeções livres de ruído utilizando o critério MAP utilizando as densidades de probabilidades *a priori* (a) gaussiana, (b) chi-quadrado, (c) beta e (d) gama.

Tabela 5.5 – *ISNR* da reconstrução tomográfica, do phantom Homogêneo com dimensão 100X100, utilizando POCS e filtragem nas projeções.

MAP com densidade <i>a priori</i>			
gaussiana	chi-quadrado	beta	gama
5,478	6,861	3,238	5,425
<i>Hard-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
5,379	6,679	6,774	6,441
<i>Soft-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
5,462	6,592	6,759	6,451
Filtro de Wiener Pontual		Filtro de Goodman-Belsher	
7,258		6,374	

Observando os valores do *ISNR* bem como a Figura 5.11 que mostra o resultado da reconstrução após a estimação verifica-se que a densidade *a priori* chi-quadrado apresentou melhor resultado. Tanto a imagem quanto os valores do *ISNR* produzidos pela estimação MAP utilizando densidade *a priori* gaussiana e produziram resultados muito próximos.

A utilização do *hard-thresholding* e *soft-thresholding* é feita em três escalas *wavelets*. As famílias *wavelets* utilizadas foram a Haar e a de Daubechies (DB2, DB3 e DB4). Antes de aplicar a DWT é aplicada a Transformada de Anscombe, com o objetivo de transformar o ruído de Poisson em ruído aditivo gaussiano com média e variância conhecida (média nula e variância unitária).

Os resultados da reconstrução utilizando a filtragem dos coeficientes *wavelets* nas projeções através do *hard-thresholding* pode ser observado nas Figuras 5.12.a, 5.12.b, 5.12.c e 5.12.d, enquanto as Figuras 5.12.e, 5.12.f, 5.12.g e 5.12.h mostram os resultados da filtragem utilizando o *soft-thresholding*.

Figura 5.12 – Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com filtragem nos coeficientes wavelets utilizando: *Hard-thresholding* nos coeficientes wavelets das famílias (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4; *Soft-thresholding* nos coeficientes wavelets das famílias (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4.

Os valores do *ISNR* para a filtragem dos coeficientes *wavelets* utilizando o *hard-thresholding* é de 5,379 dB, 6,679 dB, 6,774 dB e 6,441 dB para as famílias *wavelets* Haar, DB2, DB3 e DB4. Os valores do *ISNR* para filtragem dos coeficientes *wavelets* através do *soft-thresholding* para estas famílias é de 5,462 dB, 6,592 dB, 6,759 dB e 6,451 dB.

Apesar dos valores do *ISNR* destes métodos serem relativamente próximos é possível notar que as imagens obtidas a partir da filtragem dos coeficientes *wavelets* da família Haar (Figura 5.11.a e Figura 5.11.e) produzem alguns artefatos em forma de círculos concêntricos.

Como a transformada de Anscombe transforma o ruído de Poisson dependente de sinal em um ruído aditivo é possível filtrar as projeções, no domínio de Anscombe, utilizando o filtro de Wiener pontual. A Figura 5.13.a apresenta a imagem gerada pela reconstrução do *phantom* ruidoso com a filtragem das projeções utilizando o filtro de Wiener pontual com uma janela de três elementos. O valor do *ISNR* para este método é de 7,258 dB.

É possível filtrar o ruído através do filtro não linear proposto por Goodman e Belsher(39). O resultado da reconstrução das projeções ruidosas filtrada com esse método é mostrado na Figura 5.13.b, sendo o *ISNR* para este método é igual a 6,374 dB.

Os valores do *ISNR* dos métodos apresentados, para a reconstrução do *phantom* homogêneo, apresentaram resultados bem próximos, conforme mostrado na tabela 5.5.

Figura 5.13 – Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com a aplicação nas projeções dos filtros de (a) Wiener e (b) Goodman-Belsher.

O melhor resultado, em termos de *ISNR*, foi gerado a partir da filtragem das projeções através do filtro de Wiener pontual, embora visualmente a estimação utilizando o critério MAP com densidade *a priori* chi-quadrado apresente um resultado similar.

Para verificar o comportamento dos métodos de redução de ruído, nas projeções que possuem dimensões menores, realizou-se a coleta de dados em uma quantidade menor de ângulos, com menos raios por projeção.

A reconstrução das projeções em cinquenta ângulos diferentes, com cinquenta raios-soma por ângulo, com a redução de ruído nas projeções pode ser observado nas Figuras 5.14 e 5.14, sendo que a Figura 5.14.a representa a imagem ideal (reconstruída a partir das projeções com alto tempo de exposição à radiação) e a Figura 5.14.b representa a imagem ruidosa (reconstruída a partir das projeções com baixo tempo de exposição à radiação).

As imagens com dimensões menores (50X50 *pixels*) permitem verificar melhor os efeitos causados pelo ruído neste *phantom*.

Os valores do *ISNR* para este *phantom* podem ser observados na tabela 5.6. Esta tabela mostra que o melhor valor obtido foi pela imagem reconstruída a partir do critério MAP com densidade *a priori* gaussiana.

A filtragem do ruído nos coeficientes *wavelets* também apresentaram boa performance, em termos de *ISNR*. As imagens mostradas nas Figuras 5.14.g e 5.15.c que representam a reconstrução tomográfica das projeções que cujos coeficientes *wavelets* foram filtrados através do *hard-thresholding* e *soft-thresholding* apresentaram alguns artefatos circulares concêntricos. É possível observar que quando o suporte da família *wavelet* é aumentado, esse artefato desaparece. Observe que quando o filtro é aplicado nos coeficientes *wavelets* da família DB2 (Figura 5.14.h e Figura 5.15.d) ainda existem alguns artefatos nas bordas, porém, em menor quantidade que o resultado da família Haar.

Figura 5.14 – (a) Phantom homogêneo de dimensão 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo com estimação das projeções utilizando o critério MAP com densidades a priori (c) gaussiana, (d) chi-quadrado, (e) beta e (f) gama. Redução de ruído nas projeções utilizando hard-thresholding nos coeficientes wavelets utilizando as famílias wavelets (g) Haar, (h) DB2, (i) DB3 e (j) DB4. Filtragem nas projeções utilizando (k) o filtro de Wiener e o (l) filtro de Goodman-Belsher.

Figura 5.15 – (a) *Phantom homogêneo de dimensão 50X50* e (b) *reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo precedida da aplicação do soft-thresholding nos coeficientes wavelets das projeções utilizando as famílias wavelets (c) Haar, (d) DB2, (e) DB3 e (f) DB4.*

Nos resultados das imagens reconstruídas a partir da filtragem dos coeficientes *wavelets* na família *DB4* (Figura 5.14.j e Figura 5.15.f), esses artefatos praticamente não existem.

Phantom Simétrico

O Objetivo desse *phantom* é verificar o contraste na imagem reconstruída.

Foram feitas quatro coletas, sendo duas com alto tempo de exposição à radiação, em cem e cinquenta ângulos diferentes, e duas com baixo tempo de exposição à radiação, com cem e cinquenta ângulos diferentes.

O *phantom* reconstruído a partir das projeções capturadas em cem ângulos, com cem raios-soma por ângulo será mostrado a seguir, no qual a imagem ideal foi reconstruída a partir das projeções com alto tempo de exposição à radiação (vinte segundos por raio). A Figura 5.16.a mostra a imagem ideal.

A Figura 5.16.b mostra o *phantom* ruidoso, obtido a partir da reconstrução tomográfica das

Tabela 5.6 – *ISNR da reconstrução tomográfica, do phantom Homogêneo com dimensão 50X50, utilizando POCS e filtragem nas projeções.*

MAP com densidade <i>a priori</i>			
gaussiana	chi-quadrado	beta	gama
4,578	2,901	1,8632	4,559
<i>Hard-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
2,649	3,812	4,044	2,664
<i>Soft-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
3,514	3,676	4,770	2,901
Filtro de Wiener Pontual		Filtro de Goodman-Belsher	
2,917		1,844

Figura 5.16 – *Phantom simétrico: (a) imagem ideal, reconstruída a partir das projeções obtidas com 20 segundos de exposição por raio; (b) imagem ruidosa reconstruída a partir das projeções obtidas com 3 segundos de exposição por raio.*

projeções com baixo tempo de exposição (três segundos por raio), utilizando POCS paralelo. As imagens reconstruídas possuem 100X100 *pixels*.

A reconstrução tomográfica obtida a partir da estimação do sinal, livre do ruído, através do critério MAP utilizando densidade *a priori* gaussiana é mostrada na Figura 5.17.a, onde o *ISNR* medido é de 4,534 dB.

Para estimação utilizando o critério MAP com densidades *a priori* chi-quadrado, beta e gama a reconstrução produz as imagens mostradas nas Figuras 5.17.b, 5.17.c e 5.17.d, respectivamente. Para essa estimação o *ISNR* medido na imagem reconstruída é de 4,160 dB, 2,998 dB e 4,524 dB.

A redução de ruído nas projeções através da aplicação do *hard-thresholding* nos coeficientes *wavelets*, utilizando as famílias Haar, DB2, DB3 e DB4, são mostradas nas Figuras 5.18.a,

Figura 5.17 – Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com estimação das projeções livres de ruído utilizando o critério MAP utilizando as densidades de probabilidades *a priori* (a) gaussiana, (b) chi-quadrado, (c) beta e (d) gama.

5.18.b, 5.18.c e 5.18.d, possuindo cada uma o valor de *ISNR* igual a 3,624 dB, 4,142 dB, 4,173 dB e 4,654 dB.

A Figura 5.18.e mostra a reconstrução tomográfica das projeções ruidosas após a redução do ruído através do *soft-thresholding* nos coeficientes *wavelets*. A *wavelet* utilizada para a DWT foi a de Haar, possuindo um valor de *ISNR* igual a 3,819 dB.

A redução de ruído utilizando *soft-thresholding* nos coeficientes *wavelets* da família *wavelets* de Daubechies (*DB2 DB3* e *DB4*) *soft-thresholding* é mostrado nas Figuras 5.18.f, 5.18.g e 5.18.h, possuindo valores de *ISNR* 3,996 dB, 4,146 dB e 4,653 dB, respectivamente.

A utilização do filtro de Wiener, após a transformada de Anscombe, nas projeções ruidosas produz a imagem mostrada na Figura 5.19.a, após a reconstrução tomográfica, gerando um valor de *ISNR* igual a 5,188 dB.

A aplicação direta do filtro de Goodman-Belsher nas projeções resulta na reconstrução mostrada na Figura 5.19.b com valor de *ISNR* de 4,326 dB.

O valores do *ISNR* são mostrados na tabela 5.7.

A reconstrução que apresentou melhor resultado foi obtida a partir da filtragem realizada com o filtro de Wiener pontual, embora a estimação utilizando o critério MAP com densidades *a priori* gaussiana e gama possuam valores de *ISNR* muito próximos ao do filtro de Wiener pontual.

As imagens obtidas apresentaram um resultado visual muito próximo, não alterando o contraste da imagem resultante.

Os *phantoms* obtidos a partir de cinquenta ângulos diferentes, bem como em cinquenta raios-soma por ângulo, produzem imagens com tamanho de 50X50 *pixels* o que permite verificar melhor o efeito da reconstrução nas bordas da imagem gerada.

Figura 5.18 – Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com filtragem nos coeficientes wavelets utilizando: *Hard-thresholding* nos coeficientes wavelets das famílias (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4; *Soft-thresholding* nos coeficientes wavelets das famílias (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4.

Figura 5.19 – Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com a aplicação nas projeções dos filtros de (a) Wiener e (b) Goodman-Belsher.

Tabela 5.7 – *ISNR da reconstrução tomográfica, do phantom simétrico com dimensão 100X100, utilizando POCS e filtragem nas projeções.*

MAP com densidade <i>a priori</i>			
gaussiana	chi-quadrado	beta	gama
4,534	4,160	2,998	4,524
<i>Hard-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
3,624	4,142	4,173	4,654
<i>Soft-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
3,819	3,996	4,146	4,653
Filtro de Wiener Pontual		Filtro de Goodman-Belsher	
5,188		4,326	

A imagem ideal para este *phantom* é mostrada na Figura 5.20.a e as projeções para esta reconstrução foram feitas utilizando um tempo de vinte segundos por raio. As projeções obtidas com três segundos por raio são as projeções ruidosas. A imagem ruidosa é mostrada na Figura 5.20.b.

As demais imagens da Figura 5.20 e Figura 5.21 mostram as imagens reconstruídas a partir da estimação do sinal original.

Os valores do *ISNR* são mostrados na tabela 5.8. A partir desta tabela é possível notar que a reconstrução que apresenta melhor resultado é feita a partir das projeções estimadas usando o critério MAP com densidade *a priori* gaussiana. Comparando a Figura 5.20.c, que representa o resultado da reconstrução utilizando a estimação MAP com densidade *a priori* gaussiana, com a Figura 5.20.k, reconstruída a partir das projeções utilizando o filtro de Wiener pontual, verifica-se que esta última apresenta uma pequena suavização nas bordas, enquanto na primeira não é possível verificar esse efeito.

Phantom Assimétrico

O objetivo deste *phantom* é verificar o quanto o ruído interfere em algumas estruturas do corpo de prova. O ruído deve ser filtrado sem que, com isso, elimine os círculos menores do *phantom*.

Assim como os experimentos anteriores (*phantom* homogêneo e *phantom* simétrico) as projeções foram capturadas em cem e cinquenta ângulos distintos, sendo as imagens reconstruídas em 100X100 *pixels* e 50X50 *pixels*.

Figura 5.20 – (a) Phantom simétrico de dimensão 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo com estimação das projeções utilizando o critério MAP com densidades a priori (c) gaussiana, (d) chi-quadrado, (e) beta e (f) gama. Redução de ruído nas projeções utilizando hard-thresholding nos coeficientes wavelets utilizando as famílias wavelets (g) Haar, (h) DB2, (i) DB3 e (j) DB4. Filtragem nas projeções utilizando (k) o filtro de Wiener e o (l) filtro de Goodman-Belsher.

Figura 5.21 – (a) *Phantom Simétrico de dimensão 50X50* e (b) *reconstrução utilizando POCS paralelo*. *Reconstrução utilizando POCS paralelo precedida da aplicação do soft-thresholding nos coeficientes wavelets das projeções utilizando as famílias wavelets* (c) *Haar*, (d) *DB2*, (e) *DB3* e (f) *DB4*.

Tabela 5.8 – *ISNR da reconstrução tomográfica, do phantom simétrico com dimensão 50X50, utilizando POCS e filtragem nas projeções.*

MAP com densidade <i>a priori</i>			
gaussiana	chi-quadrado	beta	gama
4,427	4,479	2,768	2,009
<i>Hard-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
2,034	3,508	3,379	3,247
<i>Soft-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
3,906	3,783	3,786	3,629
Filtro de Wiener Pontual		Filtro de Goodman-Belsher	
4,181		3,136

Figura 5.22 – *Phantom assimétrico: (a) imagem ideal, reconstruída a partir das projeções obtidas com 20 segundos de exposição por raio; (b) imagem ruidosa reconstruída a partir das projeções obtidas com 3 segundos de exposição por raio.*

Figura 5.23 – *Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com estimação das projeções livres de ruído utilizando o critério MAP utilizando as densidades de probabilidades a priori (a) gaussiana, (b) chi-quadrado, (c) beta e (d) gama.*

Inicialmente será apresentado o *phantom* obtido a partir das projeções feitas em cem diferentes ângulos, com cem raios-soma por ângulo. A imagem ideal, reconstruída a partir das projeções feitas com vinte segundos por raio, é apresentada na Figura 5.22.a.

As projeções ruidosas, obtidas a partir da exposição do corpo à radiação por três segundos por raio e reconstruída com o algoritmo de POCS paralelo, é mostrada na Figura 5.22.b.

A imagem gerada a partir da reconstrução tomográfica com as projeções filtradas através da estimação MAP com probabilidade *a priori* gaussiana é mostrada na Figura 5.23.a e possui *ISNR* de 3,634 dB. A reconstrução feita a partir da estimação MAP com densidade de probabilidade *a priori* chi-quadrado, apresentada na Figura 5.23.b, possui *ISNR* 3,712 dB e as densidades *a priori* beta e gama possuem *ISNR* 2,043 dB e 3,384 dB.

As Figuras 5.24.a, 5.24.b, 5.24.c e 5.24.d mostram as imagens geradas por meio da reconstrução tomográfica das projeções filtradas com *hard-thresholding* nos coeficientes *wavelets* das famílias Haar, DB2, DB3 e DB4, produzindo *ISNR* de 2,964 dB, 3,511 dB, 3,698 dB e 3,781 dB, respectivamente.

Figura 5.24 – Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com filtragem nos coeficientes wavelets utilizando: Hard-thresholding nos coeficientes wavelets das famílias (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4; Soft-thresholding nos coeficientes wavelets das famílias (a) Haar, (b) DB2, (c) DB3 e (d) DB4.

Figura 5.25 – Reconstrução tomográfica utilizando POCS paralelo com a aplicação nas projeções dos filtros de (a) Wiener e (b) Goodman-Belsher.

O *hard-thresholding* aplicado nos coeficientes *wavelets* das projeções ruidosas utilizando as famílias *wavelets* Haar, DB2, DB3 e DB4 gera as imagens mostradas nas Figuras 5.24.a, 5.24.b, 5.24.c e 5.24.d, cujos valores de *ISNR* são 3,125 dB, 3,379 dB, 3,692 dB e 3,777 dB.

A filtragem das projeções utilizando o filtro de Wiener pontual com uma janela de tamanho três produz a imagem mostrada na Figura 5.25.a, após a reconstrução utilizando POCS paralelo, o que gera um *ISNR* de 4,201 dB.

A Figura 5.25.b mostra o resultado da reconstrução após aplicar nas projeções ruidosas o filtro de Goodman-Belsher com *ISNR* de 3,699 dB.

O valores do *ISNR* são mostrados na tabela 5.9.

Tabela 5.9 – *ISNR da reconstrução tomográfica, do phantom assimétrico com dimensão 100X100, utilizando POCS e filtragem nas projeções.*

MAP com densidade <i>a priori</i>			
gaussiana	chi-quadrado	beta	gama
3,634	3,712	2,043	3,384
<i>Hard-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
2,964	3,511	3,698	3,781
<i>Soft-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
3,125	3,379	3,692	3,777
Filtro de Wiener Pontual		Filtro de Goodman-Belsher	
4,201		3,699	

O maior valor de *ISNR* foi o da imagem gerada a partir da reconstrução obtida a partir da filtragem das projeções utilizando o filtro de Wiener pontual, porém, observando as imagens geradas é possível notar que esse método produziu uma suavização nas estruturas do *phantom*. A Figura 5.23.a e Figura 5.23.b geradas através da estimação MAP com densidades *a priori* gaussiana e gama deixaram essas estruturas bem definidas, apresentando um círculo menor observado somente na imagem ideal.

O experimento obtido em menor quantidade de ângulos, com menor número de raios por ângulo, permite verificar como o ruído interfere nas estruturas observadas no *phantom*. Essas estruturas podem ser observadas na reconstrução do *phantom* de maior dimensão.

A imagem ideal para o *phantom* assimétrico com 50X50 *pixels*, obtida a partir da reconstrução das projeções feitas em cinquenta ângulos diferentes, é apresentada na Figura 5.26.a. As projeções para essa reconstrução foram obtidas expondo o material à radiação durante vinte segundos por raio.

A imagem ruidosa, mostrada na Figura 5.26.b, foi obtida a partir da reconstrução das projeções com baixo tempo de exposição (três segundos por raio).

Os algoritmos de redução de ruído foram aplicados às projeções com baixa contagem de fótons. Os resultados para a reconstrução tomográfica após a filtragem são mostrados nas Figuras 5.26 e 5.27.

Os valores do *ISNR* para este *phantom* são mostrados na tabela 5.10.

Os maiores valores de *ISNR* observados foram gerados a partir da aplicação do filtro de Wiener pontual e através da estimação usando o critério MAP com densidade *a priori* gaussi-

Figura 5.26 – (a) *Phantom* assimétrico de dimensão 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo com estimação das projeções utilizando o critério MAP com densidades a priori (c) gaussiana, (d) chi-quadrado, (e) beta e (f) gama. Redução de ruído nas projeções utilizando hard-thresholding nos coeficientes wavelets utilizando as famílias wavelets (g) Haar, (h) DB2, (i) DB3 e (j) DB4. Filtragem nas projeções utilizando (k) o filtro de Wiener e o (l) filtro de Goodman-Belsher.

Figura 5.27 – (a) *Phantom* assimétrico de dimensão 50X50 e (b) reconstrução utilizando POCS paralelo. Reconstrução utilizando POCS paralelo precedida da aplicação do *soft-thresholding* nos coeficientes *wavelets* das projeções utilizando as famílias *wavelets* (c) *Haar*, (d) *DB2*, (e) *DB3* e (f) *DB4*.

ana e gama. Porém, observando as Figuras geradas por essas reconstruções, verifica-se que o resultado da reconstrução obtida a partir do filtro de Wiener pontual suaviza a imagem, fazendo com que algumas estruturas não sejam detectadas, o que não ocorre com os resultados obtidos a partir da estimação MAP.

5.4 Considerações Finais

A filtragem das projeções reduziram consideravelmente o ruído nas imagens reconstruídas.

Embora na maioria dos casos o resultado da reconstrução, das projeções após a aplicação do filtro de Wiener pontual, produzisse valores de *ISNR* alto, verificou-se que esse método causa uma suavização excessiva, não permitindo, assim, identificar algumas estruturas no corpo de prova (conforme observado na reconstrução do *phantom* assimétrico).

A reconstrução obtida a partir da filtragem nos coeficientes *wavelets* utilizando *hard-thresholding*

Tabela 5.10 – *ISNR da reconstrução tomográfica, do phantom assimétrico com dimensão 50X50, utilizando POCS e filtragem nas projeções.*

MAP com densidade <i>a priori</i>			
gaussiana	chi-quadrado	beta	gama
4,689	3,048	2,601	4,620
<i>Hard-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
3,383	3,852	3,964	3,529
<i>Soft-thresholding</i> nos coeficientes <i>wavelets</i>			
Haar	DB2	DB3	DB4
3,683	3,740	3,959	3,652
Filtro de Wiener Pontual		Filtro de Goodman-Belsher	
5,019		2,808	

e *soft-thresholding* pode produzir alguns artefatos na imagem reconstruída. Estes artefatos podem desaparecer quando o suporte da função aumenta, porém, quanto maior o suporte maior será o efeito de suavização gerado na imagem final. É possível verificar esse efeito quando aplicado à filtragem dos coeficientes *wavelets* da família Haar no *phantom* homogêneo. Quando a família utilizada é a DB4, esse efeito é inexistente, mas conforme observado na reconstrução do *phantom assimétrico* algumas estruturas menores são confundidas com o ruído e também são filtradas.

As reconstruções obtidas a partir da estimação das projeções utilizando o critério MAP foram as que obtiveram resultados mais estáveis, tanto em termos de *ISNR* quanto no aspecto visual da imagem gerada. Dentre as estimações MAP, os melhores resultados observados foram os que utilizaram a densidade *a priori* gaussiana e gama, sendo que a primeira produziu melhor valor de *ISNR* para os experimentos mostrados neste trabalho.

6 CONCLUSÃO

6.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo são apresentadas algumas conclusões do trabalho. Na Seção 6.2 são descritas as principais contribuições; na Seção 6.3 são discutidas algumas limitações e por fim, na Seção 6.4 são apresentadas as perspectivas para trabalhos futuros.

6.2 Contribuições

O algoritmo de POCS paralelo apresenta melhor resultado para sinais que possuam baixa relação sinal-ruído, dentre os métodos de reconstrução abordados, conforme mostrado no capítulo 4. Esses resultados são discutidos na seção 4.7 na página 86.

A filtragem nas projeções ruidosas melhora o resultado, tanto do *ISNR* quanto o aspecto visual da imagem gerada. Os algoritmos utilizados para filtragem das projeções possuem complexidade algorítmica linear ($O(n)$) não interferindo na complexidade do algoritmo de reconstrução tomográfica. Portanto, a relação custo-benefício do método é superior à aplicação pura do algoritmo POCS de reconstrução.

A filtragem nos coeficientes *wavelets*, utilizando *hard-thresholding* e *soft-thresholding* geraram imagens muito próximas (independente da família *wavelet* utilizada) com pouca diferença nos valores de *ISNR*. O que altera consideravelmente a filtragem nos coeficientes *wavelets* é o suporte da família utilizada. Foi possível notar que existe uma relação entre o tamanho desse suporte e a suavização incorporada. Quando o suporte é baixo, como no caso da família Haar, a filtragem pode incorporar alguns artefatos indesejáveis.

A utilização dos filtros de Wiener pontual e Goodman-Belsher apresentaram um bom desempenho. No entanto, quando aplicados a estruturas menores, ou em uma imagem de baixa resolução (gerada com um pequeno número de projeções), podem interpretar pequenas estruturas como ruído, as quais, consequentemente, serão eliminadas.

Dentre os métodos de filtragem abordados, os que utilizaram o critério MAP foram os que apresentaram maior estabilidade, principalmente quando utilizada a densidade *a priori* gaussiana, pois produziram maior relação sinal-ruído (medido pelo *ISNR*) e uma melhor qualidade nas imagens observadas.

Todos os métodos de filtragem melhoraram consideravelmente a relação sinal-ruído, na imagem resultante, a um baixo custo computacional.

6.3 Limitações

O tempo de reconstrução não é afetado por nenhum dos métodos de redução de ruído nas projeções. A maior demora do método se dá devido ao método POCS paralelo. Verificou-se que a convergência se dá em menos de dez iterações, o que não torna seu uso impeditivo devido à crescente velocidade de processamento dos equipamentos.

Os métodos de estimação MAP tiveram seus parâmetros estimados em uma janela. Essa janela é determinada pelo tamanho das projeções, ou seja, quanto maior a quantidade de raios na projeção, maior será o tamanho da janela, porém, esse aumento não ocorre de maneira linear. Neste trabalho foi utilizado somente uma janela de três elementos. O problema de determinação do tamanho da janela também ocorre na utilização do filtro de Wiener pontual.

6.4 Trabalhos Futuros

Existem alguns pontos, a partir deste trabalho, que podem ser considerados como trabalhos futuros, tal como a utilização do filtro de Wiener com *wavelets*, podendo utilizar algum algoritmo de *thresholding* nos coeficientes *wavelets* e o filtro de Wiener pontual nas imagens de baixa resolução (após aplicar a função de escala).

Uma outra sugestão para trabalho futuro é a utilização do filtro de Wiener não pontual, isto é, incorporando a correlação do sinal não ruidoso após a Transformada de Anscombe.

Na estimação MAP, é possível verificar o uso de outras distribuições de probabilidade *a priori*.

No algoritmo de reconstrução POCS é interessante verificar o uso de outros conjuntos de restrições convexas, tal como o de energia limitada e imagem de referência.

REFERÊNCIAS

- 1 CRUVINEL, P. E. **Minitomógrafo de raio X e raio gama computadorizado para aplicações multidisciplinares**. 1987. 325 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica)-Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1987.

- 2 MASCARENHAS, N. D. A.; FURUIE, S. S.; PORTAL, L. S. Global projection estimation methods for the tomographic reconstruction of images with poison noise. **IEEE Transactions on Nuclear Science**, n. 40, p. 2008-2013, 1993.

- 3 MASCARENHAS, N. D. A.; SANTOS, S. S. L.; CRUVINEL, P. E. The use of MAP techniques in the tomographic reconstruction of poison noise corrupted images. In: IIX Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing **Proceedings**, v. 197-207, 1996.

- 4 SALINA, F. V.; MASCARENHAS, N. D. A.; CRUVINEL, P. E. A comparison of POCS Algorithms for tomographic reconstruction under noise and limited view. In: XV Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing. Fortaleza, 2002. **Proceedings**...p. 342-346. 113

- 5 IUSEM, A. N.; PIERRO, A. R. D. Convergence results for an accelerated nonlinear cimmino algorithm. **Numerishe Mathematik**, n. 49, p. 367-378, 1986.

- 6 PIERRO, A. R. D.; IUSEM, A. N. On the asymptotic behaviour of some alternate smoothing series expansion iterative methods. **Linear Algebra and Its Applications**, n. 130, p. 3-24, 1990.

- 7 BHUMKAR, B. et al. A set theoretic approach to image reconstruction from projections. **International Conference on Image Processing**, v. 2, p. 737-740, Sept. 1996.

- 8 KAMALABADI, F.; SHARIF, B. Robust Regularized Tomographic Imaging With Convex Projections. **International Conference on Image Processing**, v. 2, p. 205-208, Sept. 2005.

- 9 MALGOUYRES, F. Minimizing the Total Variation Under a General Convex Constraint for Image Restoration. **IEEE Transaction on Image Processing**, v. 11, n. 12, p.1450{1456, December 2002.

- 10 ZHONG, J.; NING, R.; CONOVER, D. Image denoising based on multiscale singularity detection for cone beam CT breast image. **IEEE Transaction on Medical Imaging**, v. 23, n. 6, p. 696-703, june 2004.

- 11 NEELAMANI, R.; CHOI, H.; BARANIUK, R. Wavelet-domain regularized deconvolution for ill-conditioned systems. **International Conference on Image Processing**, v. 1, n. 204-208, 1999.

- 12 HOU, J.; TIAN, J.; LIU, J. Bayes shrink based wiener filter in wavelet domain. **IEEE Workshop VLSI Design and Video Technology**, p. 427-430, May 2005.

- 13 KALIFA, J.; LAINE, A.; ESSER, P. D. Regularization in tomographic reconstruction using thresholding estimators. **IEEE Transactions on Medical Imaging**, v. 22, n. 3, p. 351-359, Mar. 2003.

- 14 BOUBCHIR, L.; FADILI, J. M. Bayesian denoising based on the MAP estimation in wavelet-domain using bessel k form prior. **International Conference on Image Processing**, v. 1, p. 113-116, september 2005.

- 15 LIU, C.; FREEMAN, W. T.; KANG, R. S. Noise estimation from a single image. **Conference on Computer Vision and Pattern Recognition**, v. 1, p. 901-908, June 2006.

- 16 GUO, L.; WANG, H. Minimum entropy filtering for multivariate stochastic systems with non-gaussian noises. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 51, p. 695-700, Apr. 2006.

- 17 WANG, J. et al. Penalized weighted least-squares approach to sinogram noise reduction and image reconstruction for low-dose X-ray computed tomography. **IEEE Transactions on Medical Imaging**, v. 25, n. 10, p. 1272-1283, october 2006.

- 18 RIVIÈRE, P. J. L.; BIAN, J.; VARGAS, P. A. Penalized-likelihood sinogram restoration for computed tomography. **IEEE Transactions on Medical Imaging**, v. 25, n. 8, p. 1022-1036, august 2006.

- 19 FURUIE, S. S. **Reconstrução tomográfica de imagens com ruído poisson: estimativa das projeções**. Tese (Doutorado) Escola Politécnica da USP - Depto. Engenharia Elétrica, Março 1990.

- 20 SANTOS, S. S. L. **Reconstrução tomográfica de imagens com ruído poisson por estimadores map das projeções utilizando densidades "a priori" definidas na semi-reta não-negativa.** Dissertação (Mestrado) Departamento de Computação - Universidade Federal de São Carlos, 1996.

- 21 RADON, J. On the determination of functions from their integrals along certain manifolds. **Leipzig Mathematics Physics**, v. 69, p. 262-277, 1917.

- 22 HOUNSFIELD, G. N. computadorized transverse axial scanning (tomography) i: description of system. **British Journal Radiology**, v. 46, p. 1016-1022, 1973.

- 23 CORMACK, A. M. Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications. **Journal of Applied Physics**, v. 34, p. 2722-2727, 1963.

- 24 RAMANCHANDRAN, G. N.; LAKSHMINARAYANAN, A. V. Three-dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs: application of convolutions instead of Fourier tranformers. **Proceedings National Academic Science USA**, v. 68, p.2236-2240, 1971.

- 25 LOGAN, B. F.; SHEPP, L. A. Optimal reconstruction of a function from its projections. **Duke Mathematical Journal**, v. 42, n. 4, p. 645{659, 1975.

- 26 KAK, A. C.; SLANEY, M. **Principles of computadorized tomographic imaging.** [S.l.]: IEEE Press, 1988.

- 27 STARK, H.; YANG, Y. **Vector space projections - A numerical approach to signal and image processing, neural nets, and optics.** [S.l.]: John Wiley and Sons, 1998.

- 28 RIBEIRO, G. C. **Desenvolvimento de um algoritmo para a reconstrução tridimensional para imagens de um minitomógrafo, baseado no método de reconstrução algébrica modificado e interpolação spline.** Dissertação (Mestrado) UFSCar - Departamento de Computação, Dezembro 1994.

- 29 HENDREE, W. R. **The physical principles of computed tomography.** Boston: Little Brown and Company, 1983.

- 30 TRUSSEL, H. J.. A priori knowledge in algebraic reconstruction methods. **Advances in Computer Vision and Image Processing** v. 1,p.265-316, 1984.

- 31 CENSOR, Y. Parallel application of block-iterative methods in medical imaging and radiation therapy. **Mathematical Programming**, v. 12, p. 307-325, 1988.
- 32 YOULA D. C.; WEBB, H. Restoration by the method of convex projections: part 1 - theory, image. **IEEE Transactions on Medical Imaging**, MI-1, p. 81-94, Oct. 1982.
- 33 SEZAN, M. I.; STARK, H. Image restoration by the method of convex projections: part 2 - applications and numerical results. **IEEE Transactions on Medical Imaging**, MI-1, p. 95-101, October 1982.
- 34 COMBETTES, P. L. The foundations of set theoretic estimation. **Proceedings of the IEEE**, v. 81,n. 2, p. 182{208, Feb. 1993.
- 35 _____. The Convex feasibility problem im image recovery. **Advances in Imaging and Electron Physics**, v. 95, p. 155-270, 1996.
- 36 LO, C. M. **Estimation of image signals with poisson noise**. Tese (Doutorado) University of Southern California, Los Angeles, June 1979.
- 37 JANSEN, M. **Noise reduction by wavelet thresholding**. New York: Spring-Verlag, 2001. (Lecture notes in statistics, v. 161).
- 38 ANSCOMBE, F. J. The transformation of poisson, binomial and negative-binomialdata. **Biometrika**, v. 15, p. 246-254, 1948.
- 39 GOODMAN, J. W.; BELSHER, J. F. Fundamental Limitations in linear invariant restoration of atmospherically degraded images. **Procedings of the SPIE**, v. 75, p. 141-154, 1976.
- 40 HOMEM, M. R. **Reconstrução tridimensional de imagens com o uso de deconvolução a partir de seções bidimensionais obtidas em microscopia óptica**. Tese (Doutorado) USP - Instituto de Física de São Carlos, São Carlos, 2003.
- 41 DAUBECHIES, I. **Ten lectures on wavelets**. [S.l.]: Society for Industrial an AppliedMathematics, 1992. (Regional Conference Series in Applied Mathematics, v. 61).
- 42 MALLAT, S. G. A Theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence Intell**, v. 11, p. 674-93, 1989.

- 43 CHARLES, C.; RASSON, J. P. Wavelet denoising of poison-distributed data and applications. **Computational Statistics and Data Analysis**, p. 139-148, 2003.
- 44 JANSEN, M.. Minimum Risk thresholds for dta with heavy noise. **IEEE Signal Processing Letters**, v. 13, n. 5, p. 296{299, May 2006.
- 45 DONOHO, D. L.; JOHNSTONE, I. M. ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. **Biometrika**, v. 81, p. 425-455, 1994.
- 46 _____. Minimax estimation via wavelet shrinkage. **Annals of Statitics.**, v. 26, p. 879-921, 1998.
- 47 BURRUS, C. S.; GOPINATH, R. A.; GUO, H. **Introduction to wavelets and wavelet transforms: a primer**. [S.l.]: Prentice Hall, 1998.
- 48 MORETTIN, P. A. **Ondas e ondaletas: da analise de Fourier à analise de ondaletas**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1999.
- 49 ADDISON, P. S. **The illustrated wavelet transform handbook** – introductory theory and applications in science, engineering, medicine and finance. [S.l.]: IOP Publishing Ltd, 2002.
- 50 KAZUBEK, M. Wavelet domain image denoising by thresholding and wiener filtering. **IEEE Signal Processing Letters**, v. 10, n. 11, p. 324{326, 2003.
- 51 COMBETTES, P. L.; PUH, H. Parallel projection methods for set theoretic signalreconstruction and restoration. **International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing**. v. 5, p. 297-300, 1993.

APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO DOS ESTIMADORES MAP

A partir da probabilidade condicional do ruído, descrita pela equação 3.2 na página 56, é possível obter a densidade do sinal, dado o ruído, através do teorema de Bayes. A equação A.1 descreve essa probabilidade.

$$f(g|y) = \frac{P(y|g)f(g)}{P(y)} \quad (\text{A.1})$$

Como a probabilidade do ruído $P(y)$ é independente do sinal pode-se considerá-la uma constante. Com isso, a equação A.1 pode ser escrita conforme mostrado na equação A.2.

$$f(g|y) \approx P(y|g)f(g)$$

$$f(g|y) \approx \frac{e^{-g}g^y}{y!}f(g) \quad (\text{A.2})$$

A.1 Estimador com densidade *a priori* gaussiana

Considerando que as projeções possuem densidade de probabilidade gaussiana, descrita pela equação 3.3 na página 57, a equação A.2 pode ser representada pela equação A.3.

$$f(g|y) = \frac{e^{-g}g^y}{y!} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{g-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (\text{A.3})$$

Para maximizar a equação A.3 deriva-se a mesma. Com o objetivo de simplificar a expressão, toma-se o logaritmo da mesma, o que resulta na equação A.4.

$$\ln f(g|y) = \ln g^y + \ln e^{-g} + \ln e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{g-\mu}{\sigma}\right)^2} + \ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \ln y!$$

$$\ln f(g|y) = y \ln g - g - \frac{1}{2} \left(\frac{g - \mu}{\sigma} \right)^2 - \ln \sigma \sqrt{2\pi} - \ln y! \quad (\text{A.4})$$

Tomando a derivada da equação A.4 em relação a g , buscando maximizá-la, obtém-se a equação A.5.

$$\frac{d \ln f(g|y)}{dg} = \frac{y}{g} - 1 - \frac{g - \mu}{\sigma^2}$$

$$g^2 + (\sigma^2 - \mu)g - y\sigma^2 = 0$$

$$\hat{g} = \frac{-(\sigma^2 - \mu) \pm \sqrt{(\sigma^2 - \mu)^2 + 4y\sigma^2}}{2} \quad (\text{A.5})$$

Como σ^2 e μ são maiores que 0 (zero) e $\sqrt{(\sigma^2 - \mu)^2 + 4y\sigma^2} > (\sigma^2 - \mu)$, pode-se desprezar a parte negativa da equação A.5, o que resulta na equação A.6.

$$\hat{g} = \frac{\mu - \sigma^2 + \sqrt{(\sigma^2 - \mu)^2 + 4y\sigma^2}}{2} \quad (\text{A.6})$$

A equação A.6 é o estimador para densidade *a priori* gaussiana.

A.2 Estimador com densidade *a priori* gama

Assumindo que as projeções possuem densidade gama, deve-se considerar que existem dois parâmetros a serem estimados (α, β) , onde ambos são números reais positivos. A função de densidade de probabilidade é dada pela equação 3.9 na página 58. A função $\Gamma(\alpha)$, descrita pela equação A.7, é a função gama.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty g^{\alpha-1} e^{-\alpha} dg \quad (\text{A.7})$$

A média e a variância são fornecidas pelas equações A.8 e A.9, respectivamente.

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\text{A.8})$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (\text{A.9})$$

Utilizando a fórmula de Bayes, descrita pela equação A.2 na página 125, obtém-se a expressão fornecida pela equação A.10.

$$f(g|y) = \frac{e^{-g}g^y}{y!} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} (\beta g)^{\alpha-1} e^{-\beta g} \quad (\text{A.10})$$

Tomando-se o logaritmo da equação A.10, obtém-se a equação A.11.

$$\ln f(g|y) = -(\beta + 1)g + y \ln g + (\alpha - 1) \ln \beta g + \ln \beta - \ln y! - \ln \Gamma(\alpha) \quad (\text{A.11})$$

Derivando-se a equação A.11 em relação a g e, em seguida, igualando a derivada a zero, com o objetivo de maximizar g , obtém-se a equação A.12.

$$\begin{aligned} \frac{d \ln f(g|y)}{dg} &= -(\beta + 1) + \frac{y}{g} + \frac{(\alpha-1)}{\beta g} \beta \\ &= -(\beta + 1) + \frac{y}{g} + \frac{\alpha-1}{g} = 0 \end{aligned}$$

$$\hat{g} = \frac{y + \alpha - 1}{\beta + 1} \quad (\text{A.12})$$

A equação A.12 é o estimador para densidade *a priori* gama.

Os parâmetros α e β podem ser obtidos através do sistema formado pelas equações A.8 na página anterior e A.9. Isolando β na equação A.8, é obtida a expressão:

$$\beta = \frac{\alpha}{\mu}.$$

Substituindo β na equação A.9 é possível isolar α , o que gera a estimação fornecida pela equação A.13.

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\alpha}{\frac{\alpha^2}{\mu^2}} \\ \alpha &= \frac{\mu^2}{\sigma^2} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Substituindo α na equação A.8 é possível obter a estimação de β fornecida pela equação A.14.

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\alpha}{\mu} \\ \beta &= \frac{\mu^2}{\sigma^2} \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{\mu}{\sigma^2} \quad (\text{A.14})$$

A.3 Estimador com densidade *a priori* chi-quadrado

Considere agora que as projeções possuem função de probabilidade *a priori* Chi-quadrado, representada pela equação 3.7 na página 58. A função de probabilidade Chi-quadrado é um caso particular da função de probabilidade gama, onde $\beta = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{n}{2}$, sendo n um inteiro positivo.

Substituindo a equação 3.7 na equação A.2 obtém-se a função de probabilidade condicional fornecida pela equação A.15.

$$f(g|y) = \frac{e^{-g} g^y}{y!} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} g^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{g}{2}} \quad (\text{A.15})$$

Aplicando o logaritmo na equação A.15, a equação A.16 é obtida.

$$\ln f(g|y) = \left(y + \frac{n}{2} - 1\right) \ln g - \frac{3}{2}g - \ln y! - \frac{n}{2} \ln 2 - \ln \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \quad (\text{A.16})$$

Com o objetivo de maximizar, em função de g , deriva-se a equação A.16 igualando-a a zero, encontrando a equação A.17.

$$\begin{aligned} \frac{d \ln f(g|y)}{dg} &= \left(y + \frac{n}{2} - 1\right) \frac{1}{g} - \frac{3}{2} \\ \frac{\left(y + \frac{n}{2} - 1\right)}{g} - \frac{3}{2} &= 0 \\ g &= \frac{2y + n - 2}{3} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

A equação A.17 fornece o estimador com densidade *a priori* chi-quadrado, onde n é a média da amostra.

A.4 Estimador com densidade *a priori* beta

Considerando que as projeções possuem densidade *a priori* Beta é necessário considerar algumas características dessa distribuição. A variável aleatória descrita por essa distribuição é limitada em ambos os lados, nesse caso limitada ao intervalo $(0, 1)$, conforme representado pela

equação A.18, embora possa ser estendida ao intervalo $a < g \leq b$ mediante a variável auxiliar $y = (b - a)g + a$.

$$0 \leq g \leq 1 \quad (\text{A.18})$$

Para satisfazer a equação A.18 as projeções são normalizadas entre 0 e 1.

A função de densidade de probabilidade é dada pela equação A.19.

$$f(g) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} g^{\alpha-1} (1-g)^{\beta-1} \quad (\text{A.19})$$

A função Beta na equação A.19 pode ser representada pela função Gama conforme mostrado na equação A.20.

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 g^{\alpha-1} (1-g)^{\beta-1} dg = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (\text{A.20})$$

Os parâmetros α e β são números inteiros positivos. A média e a variância são fornecidas pela equações A.21 e A.22.

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (\text{A.21})$$

$$\alpha^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \quad (\text{A.22})$$

Aplicando a fórmula de Bayes, da equação A.2 na página 125, com a densidade beta da equação A.19 obtém-se a equação A.23.

$$f(g|y) = \frac{e^{-g} g^y}{y!} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} g^{\alpha-1} (1-g)^{\beta-1} \quad (\text{A.23})$$

Como g tem distribuição beta, é necessário normalizar g dividindo por Δ , onde Δ determina o fator de normalização por projeção, ou seja, é o maior valor da projeção. Normalizando a equação A.23 por Δ obtém-se a equação A.24.

$$f(g|y) = \left(\frac{g}{\Delta}\right)^{y+\alpha-1} \left(1 - \frac{g}{\Delta}\right)^{\beta-1} e^{-\frac{g}{\Delta}} \frac{1}{y! B(\alpha, \beta)} \quad (\text{A.24})$$

A equação A.25 é obtida tomando o logaritmo da equação A.24.

$$\ln f(g|y) = (y + \alpha - 1) \ln g + (\beta - 1) \ln \Delta - g - \frac{g}{\Delta} - (y + \alpha - 1) \ln \Delta - \ln y! - \ln B(\alpha, \beta) \quad (\text{A.25})$$

Derivando a equação A.25 e a igualando a zero, tem-se a equação A.26.

$$\frac{d \ln f(g|y)}{dg} = (y + \alpha - 1) \frac{1}{g} + (\beta - 1) \frac{1}{\Delta - g} (-1) - \frac{1}{\Delta}$$

$$\Delta(\Delta - g)(y + \alpha - 1) - \Delta g(\beta - 1) - g(\Delta - g) = 0$$

$$g^2 + (-\Delta y - \Delta \alpha - \Delta \beta + \Delta)g + (\Delta^2 y + \Delta^2 \alpha - \Delta^2) = 0 \quad (\text{A.26})$$

Encontrando as raízes da equação do segundo grau em A.26 e desprezando a solução negativa, tem-se o estimador descrito pela equação A.27.

$$\hat{g} = \frac{(\Delta y + \Delta \alpha + \Delta \beta - \Delta) + \sqrt{(-\Delta y - \Delta \alpha - \Delta \beta + \Delta)^2 - 4(\Delta^2 y + \Delta^2 \alpha - \Delta^2)}}{2} \quad (\text{A.27})$$

Os valores de α e β são obtidos através do sistema formado pelas equações A.21 e A.22. Isolando β na equação A.21 é obtida a expressão a seguir:

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$(\alpha + \beta)\mu = \alpha$$

$$\beta = \frac{\alpha}{\mu} - \alpha$$

Substituindo a última expressão na equação A.22 é possível obter a equação A.28.

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \\ \sigma^2 &= \frac{\alpha\left(\frac{\alpha}{\mu} - \alpha\right)}{\left(\alpha + \frac{\alpha}{\mu} - \alpha\right)^2\left(\alpha + \frac{\alpha}{\mu} - \alpha + 1\right)} \\ \sigma^2 &= \frac{\mu^2 - \mu^3}{\alpha + \mu} \end{aligned}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\mu^2 - \mu^3}{\sigma^2} - \mu \quad (\text{A.28})$$

Substituindo a estimação de α fornecida pela equação A.28 na equação A.21 é possível obter a estimação de β , equação A.29.

$$\beta = \frac{\alpha}{\mu} - \alpha$$

$$\beta = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\mu^2 - \mu^3}{\sigma^2} - \mu \right] - \left[\frac{\mu^2 - \mu^3}{\sigma^2} - \mu \right]$$

$$\hat{\beta} = \frac{\mu^3 - 2\mu^2 + \mu + \sigma^2\mu - \sigma^2}{\sigma^2} \tag{A.29}$$

APÊNDICE B – TRANSFORMADA DE ANSCOMBE

Conforme apresentado no capítulo 3, na seção 3.3 na página 60, a Transformada de Anscombe (TA) descrita pela equação 3.17 transforma o ruído de Poisson, que é dependente do sinal, em um ruído gaussiano de média aproximadamente nula e variância aproximadamente unitária.

Para verificar o comportamento da transformada utilizou-se o sinal descrito pela figura 3.2 com diferentes amplitudes, introduzindo em seguida o ruído Poisson. No domínio de Anscombe isolou-se o ruído, subtraindo o sinal original do sinal ruidoso e, em seguida, foram verificadas a média e a variância do sinal.

Para uma amplitude de 10 unidades, a média do ruído calculada no domínio de Anscombe é 0,1298 e a variância é 0,6405. A figura B.1 mostra o sinal livre de ruído, o sinal ruidoso e o ruído no domínio de Anscombe.

Para o sinal com amplitude 100 a média e a variância do ruído no domínio de Anscombe é de 0,0650 e 0,8430, respectivamente. Os dados para este sinal são ilustrados pela figura B.2.

Quando a amplitude do sinal é 1.000, os valores da média e variância para o ruído no domínio de Anscombe é respectivamente 0,0053 e 0,9695. Tanto o sinal quanto o ruído resul-

Figura B.1 – Sinal com amplitude 10: (a) sinal original, (b) sinal sujeito ao ruído de Poisson e (c) ruído no domínio de Anscombe.

Figura B.2 – Sinal com amplitude 100: (a) sinal original, (b) sinal sujeito ao ruído de Poisson e (c) ruído no domínio de Anscombe.

Figura B.3 – Sinal com amplitude 1.000: (a) sinal original, (b) sinal sujeito ao ruído de Poisson e (c) ruído no domínio de Anscombe.

tante podem ser observados na figura B.3.

Para o sinal com amplitude 10.000, a média do ruído é 0,0021 com variância 0,9954. O comportamento do sinal original e ruidoso, bem como o ruído no domínio de Anscombe, podem ser observados na figura B.4.

É possível observar que, para valores maiores a média e a variância do ruído se aproximam de zero e um, respectivamente. Para os *phantoms* reais, com baixa exposição à radiação, a taxa de contagem (feixe livre) é de 500 o que possibilita que o ruído presente, no domínio de

Figura B.4 – Sinal com amplitude 10.000: (a) sinal original, (b) sinal sujeito ao ruído de Poisson e (c) ruído no domínio de Anscombe.

Anscombe, possui uma margem de erro aceitável.