UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

RAFAEL POLISELI TELES

**Dinâmica de um vórtice num condensado de
Bose-Einstein em expansão livre**

São Carlos
2011

RAFAEL POLISELI TELES

**Dinâmica de um vórtice num condensado de
Bose-Einstein em expansão livre**

Dissertação apresentada ao Programa
de Pós-Graduação do Instituto de Física
de São Carlos da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de Mestre
em Ciências

Área de Concentração:
Física Básica

Orientador: Prof. Dr.
Vanderlei Salvador Bagnato

Versão corrigida
(versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos
2011

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

**Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação IFSC,
com os dados do fornecidos pelo(a) autor(a)**

Poliseli Teles, Rafael

Dinâmica de um vórtice num condensado de Bose-Einstein em expansão livre / Rafael Poliseli Teles; orientador Vanderlei Salvador Bagnato - versão corrigida – São Carlos, 2011.

75p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2011.

1. Física básica. 2. Física atômica. 3. Matéria condensada. 4. Átomos frios. 5. Vórtice quântico. I. Salvador Bagnato, Vanderlei, orient. II. Título.

aos Deuses de Ashkehria, pela não-existência existencial
aos meus druguís e à família, pela força

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus pais, Oswaldo e Regina, e minha irmã, Tais, pelo amor que sempre tiveram por mim.

Agradeço aos amigos do Grupo de Ótica. Em especial à Mônica e ao Edmir, pela ajuda no trabalho. Ao Jackson pelas discussões físicas e novas idéias. Ao Edwin, sempre como companheiro. Ao Dirceu, pelos conselhos. Ao Jorge, Edilson, Lorena e Cora pelos bons momentos. Aos professores Alzira C.M. Stein-Barana, Axel Pelster, José A.H. Neto, Marcos C. de Oliveira, Miled H.Y. Moussa e René A.M. Alfaro. E agradecimentos mais que especiais àqueles que tiveram ao meu lado nos momentos de doença.

Por fim, ao professor e orientador Vanderlei S. Bagnato que me deu a oportunidade de fazer parte dessa grande família, que é o grupo de ótica, e pela compreensão dos momentos de dificuldade.

Muito obrigado a todos!

“What can be imagined need never be lost.”
(Clive Barker, Weaveworld)

“...o espírito tem sua casa, que é o reino do significado das coisas.”
(Saint Exupéry, The Wisdom of the Sands)

RESUMO

TELES, R. P. **Dinâmica de um vórtice num condensado de Bose-Einstein em expansão livre.** 2011. 75 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

No presente trabalho, estudamos o comportamento de um Condensado de Bose-Einstein contendo um vórtice tipo linha aprisionado, e durante o vôo livre. Desta maneira foi feita a análise da velocidade de expansão do aspect ratio da nuvem para três formatos de armadilhas, as quais são potenciais harmônicos sem rotação, incluindo a comparação entre a velocidade de expansão do raio da nuvem e do núcleo do vórtice. Vimos que a precessão do vórtice pode independe de um potencial com rotação, sendo diretamente relacionada com a densidade da nuvem atômica. Ao supor um Condensado com um vórtice não-fundamental e estável obtemos uma possível descrição do aspect ratio da nuvem, como uma aproximação para uma rede de vórtices; utilizando apenas de um método semi-analítico.

Palavras-chave: Física básica. Física atômica. Matéria condensada. Átomos frios. Vórtice quântico.

ABSTRACT

TELES, R. P. **Dynamics of a single vortex in the Bose-Einstein condensate under free expansion.** 2011. 75 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

In this work, we have studied the behavior of a Bose-Einstein Condensate contend a line vortex at trap, and while the free flight. In this way it was analysed the expansion speed of cloud's aspect ratio into three kind of traps, which are non-rotating harmonic potentials, including the comparison between velocity of the radius and the vortex core under expansion. We have seen the vortex's precession may be independent of a rotating potential, thus it is directly associated with the density profile of atomic cloud. By assuming a Condensate within a stable non-fundamental vortex we obtain a possible description of aspect ratio of cloud, like an approach for a lattice vortex; using only a semi-analytic method.

Keywords: Basic physics. Atomic physics. Condensed matter. Cold atoms. Quantum vortex.

Lista de Figuras

1.1	Esquemas de Leonardo da Vinci	20
1.2	Rede de vórtices. Amostra contendo (a) 16 (b) 32 (c) 80 (d) 130 vórtices ao passo que a velocidade de rotação é aumentada. Imagem de W. Ketterle[1].	20
1.3	Imagem de absorção de um condensado contendo três vórtices em duas configurações: (a) triângulo (b) em linha.	21
1.4	Vôo livre de três tipos de nuvens atômicas. À esquerda: nuvem térmica com uma expansão balística. Ao centro: um CBE, caracterizado por sua assinatura a qual é a inversão do aspect ratio devido a interação de dois átomos. E à direita: uma nuvem turbulenta.	21
3.1	Densidade $ \Psi(\rho, z) ^2$ da nuvem sem e com vórtice respectivamente, em $z = 0$. Onde a linha pontilhada representa a gaussiana segundo o regime de Thomas-Fermi.	46
3.2	Energia como função da anisotropia da armadilha λ e interação γ	47
3.3	Razão A_e/A_f como função de λ e γ , respectivamente.	48
3.4	Imagem de absorção na escala do comprimento do oscilador ($\lambda = 10$ e $\gamma = 800$).	48
3.5	Excitações coletivas calculadas em $\gamma = 800$. Sendo os gráficos à esquerda calculados em $\lambda = 0.2$, e os gráficos da direita em $\lambda = 2$. Gerados por um $\delta\rho = 0.01$ e um $\delta z = -0.01$. Neste caso ambas excitações coletivas foram excitadas (breathing e quadrupole mode).	49
4.1	Expansão do aspect ratio para diferentes condições iniciais, $\omega_\rho = 2\pi(207)Hz$ com $\gamma = 800$	55
4.2	Razão A_e/A_f em função da interação γ	56
4.3	Razão A_e/A_f em função da anisotropia λ	56

4.4	Expansão no tempo, com $\omega_p = 2\pi(207) Hz$ e $\gamma = 800$	57
4.5	Conjunto de gráficos gerados a partir das equações das secções sobre precessão ($\gamma = 800$). Por razões de cunho numérico, não foi possível fazer esses gráficos para tempos mais longos.	58
5.1	Perfil de densidade como função de ρ , em $z = 0$. Sendo a linha cheia a gaussiana normal, e a linha tracejada a gaussiana com a aproximação de Thomas-Fermi. Note que a escala de cada figura está diferente.	63
5.2	Expansão livre. Variação do aspect ratio nas respectivas armadilhas: prolate ($\lambda = 0.1$), esférico ($\lambda = 1$) e oblate ($\lambda = 10$).	64
5.3	Energia funcional em função do tipo de armadilha, à cima, e em função da interação, à baixo.	65
5.4	Energia como função do número de circulação ℓ , com $\gamma = 800$	67

Sumário

1	Introdução	19
1.1	Vórtices e sua Importância	19
1.2	Apresentação do Trabalho	22
2	Vórtices: Formação e Características	23
2.1	Equação de Gross-Pitaevskii	24
2.1.1	Aproximação de Thomas-Fermi	25
2.1.2	Circulação Quantizada	25
2.2	Método Variacional	26
2.2.1	Estrutura de um Vórtice	27
2.2.2	Escolha de um ansatz	28
2.2.3	Vórtice em Duas Dimensões	28
2.2.4	Expansão	31
3	Vórtice no Condensado Aprisionado	33
3.1	Perfil de Densidade e Energia	33
3.1.1	Condensado sem Vórtice	33
3.1.2	Vórtice Central	35
3.2	Precessão	36
3.3	Excitações Coletivas	40
3.3.1	Caso sem Vórtice	40
3.3.2	Nuvem Contendo um Vórtice Central	42
3.3.3	Condensado com um Vórtice fora de centro	44
3.4	Resultados Numéricos	45

4	Vórtice num Condensado em Expansão Livre	51
4.1	Equações de Movimento	51
4.1.1	Condensado sem Vórtice	51
4.1.2	Vórtice Central	52
4.1.3	Precessão	52
4.2	Resultados Numéricos	53
5	Vórtice Não-fundamental	59
5.1	Ansatz	59
5.2	Equações de Movimento	60
5.2.1	Solução Estacionária	61
5.2.2	Expansão Livre	62
5.3	Resultados Numéricos	62
6	Discussões	69
6.1	Trabalhos Futuros	69
	Referências	71

1 Introdução

Antes de 1995 a condensação de Bose-Einstein era mais um objeto imaginário pouco palpável em laboratório. O condensado de Bose-Einstein (CBE)[2, 3, 4] se tornou uma realidade científica ao ser observado em uma notável série de experimentos com vapor de rubídio[5] e sódio[6], nos quais os átomos foram confinados em armadilhas magnéticas e resfriados à temperaturas extremamente baixas, da ordem de nanokelvins. Sendo o condensado de Bose-Einstein um dos poucos entes físicos macroscópicos que tem um comportamento quântico, também denominado de superfluido, o qual é caracterizado por praticamente podermos observar a função de onda quântica (de acordo com algumas interpretações). Assim temos uma densidade quântica descrita por uma teoria de campo médio, pelo fato de termos cerca de dez milhões de átomos bosônicos coerentes[7].

Uma característica intrigante destes condensados ocorre quando subjugamos (experimentalmente) estes a uma rotação: os vórtices.

1.1 Vórtices e sua Importância

O estudo de vórtices teve início com Leonardo da Vinci no século XVI (Figura 1.1), ao considerar a turbulência em fluidos clássicos devido à formação de vórtices no mesmo, onde essa turbulência consiste em vários turbilhões de tamanhos variados[8]. Em superfluidos é relatado a existência de vórtices quantizados, o que os diferenciam do vórtice clássico. Assim como a circulação no superfluido está apenas ao longo do vórtice, diferentemente do fluido clássico em que todo o fluido está girando[9]. Desta maneira a velocidade do condensado é dado pelo gradiente de um escalar,

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi \quad (1.1)$$

em seguida temos que o campo de velocidades é irrotacional, a menos de uma fase que carrega a singularidade:

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \quad (1.2)$$

de maneira que é gerado uma singularidade na função de onda.

Figura 1.1 - Esquemas de Leonardo da Vinci

A primeira observação de vórtices num condensado foi feita por Matthews et al. em 1999[10]. Logo após, vários grupos reportaram a criação de vórtices por procedimentos e técnicas distintas[11, 12, 13]. Entre os campos de pesquisa estão: o estudo de vórtices em condensados com interação dipolar[14], e a investigação das propriedades da dinâmica e da estabilidade de um vórtice[15].

Em 2009, foi observado a formação de vórtices num CBE a partir de uma superposição de um campo magnético oscilatório ao campo magnético da armadilha, a qual transfere momento angular à nuvem. Dependendo da amplitude de oscilação pode ser observado um regime sem vórtices e outro onde inúmeros vórtices são nucleados[16]. Utilizando do mesmo método, foi observado a criação de três vórtices em conjunto num condensado de rubídio. Este procedimento pode criar vórtices com dois tipos de circulação, o que foi observado com um cluster vórtice-

Figura 1.2 - Rede de vórtices. Amostra contendo (a) 16 (b) 32 (c) 80 (d) 130 vórtices ao passo que a velocidade de rotação é aumentada. Imagem de W. Ketterle[1].

Figura 1.3 - Imagem de absorção de um condensado contendo três vórtices em duas configurações: (a) triângulo (b) em linha.

Figura 1.4 - Vôo livre de três tipos de nuvens atômicas. À esquerda: nuvem térmica com uma expansão balística. Ao centro: um CBE, caracterizado por sua assinatura a qual é a inversão do aspect ratio devido a interação de dois átomos. E à direita: uma nuvem turbulenta.

antivórtice-vórtice (Figura 1.3)[17].

A turbulência é caracterizada pelo aparecimento de vórtices quantizados de forma emaranhada, se diferenciando de uma rede de vórtices (Figura 1.2)[18]. Com a obtenção da turbulência em condensados de Bose-Einstein vieram novas questões a serem respondidas.

Após esta breve cronologia de alguns fatos sobre vórtices e condensados, introduzo agora o sistema a ser estudado em questão: o condensado de Bose-Einstein com um vórtice tipo linha ao longo do eixo z (simetria cilíndrica, justificada pela simetria dos experimentos no grupo de Ótica aqui do IFSC). Desta maneira, nossa principal motivação está em: compreender em que a dinâmica de vórtices, em condensados de Bose-Einstein, influencia na expansão, justamente pelo fato de só observarmos o condensado fora da armadilha opto-magnética, e com o intuito de acumularmos pistas pra compreender a turbulência quântica (Figura 1.4).

1.2 Apresentação do Trabalho

A pesquisa teórica em condensação de Bose-Einstein tem evoluído enormemente nos últimos anos, com previsões confirmadas e ainda em estudo nas mais diversas frentes. Um dos principais pontos de partida do estudo teórico de sistemas condensados é a equação de Gross-Pitaevskii (EGP), que é a versão não-linear da equação de Schrödinger. A EGP, desde as primeiras observações experimentais, se mostrou capaz de explicar e prever muito bem os fenômenos relativos aos átomos condensados[7, 19].

No capítulo 2 farei uma revisão sobre a teoria dos condensados partindo da EGP, apresentando o regime de alta interação repulsiva, além do modelo semi-analítico usado[20, 21, 22]. Nos capítulos 3 e 4 apresentarei um resultado já conhecido nos trabalhos do E. Lundh et al. e F. Dalfovo et al.[23, 24], a expansão de uma nuvem contendo um vórtice ao longo da direção z , com uma característica nova, uma aproximação para o tamanho do vórtice central, modos coletivos de oscilação para uma nuvem contendo um vórtice e a precessão de um vórtice tipo linha. Desta forma que apenas as equações de movimento são resolvidas numericamente. No capítulo 5, extrapolamos o resultado para vórtices com maior número de circulação como uma possível aproximação do efeito que uma rede de vórtices pode surtir sobre a expansão livre, ou mesmo, uma física nova com vórtices não-fundamentais, os quais não decaem pela ausência de uma nuvem térmica, ou uma suposta estabilização.

No capítulo final, concluímos nosso trabalho com análises sobre os resultados apresentados e perspectivas para trabalhos futuros.

2 Vórtices: Formação e Características

Em Hélio superfluido contido numa cubeta cilíndrica sob uma rotação ao redor de seu eixo axial, observa-se a nucleação de vórtices quantizados para uma rotação suficientemente grande de frequência Ω . O mesmo fenômeno ocorre em condensados de Bose-Einstein confinados em uma armadilha harmônica sob o mesmo tipo de rotação[25]. Particularmente, vórtices são nucleados quando a rotação excita os modos de superfície do condensado; isso ocorre para frequências de rotação particulares entre $0 < \Omega \leq \omega_p/\sqrt{2}$, onde ω_p é a frequência do oscilador harmônico (comumente chamada de frequência da armadilha, sendo o potencial harmônico da armadilha) no plano radial perpendicular ao eixo de rotação z[26, 27, 28].

O interesse em condensados gasosos é tal que, devido à baixa densidade, o diâmetro do vórtice (da ordem do comprimento de coerência) é geralmente três ordens de magnitude maior que no He II. Nesta escala, é possível se fazer imagens de absorção do filamento de vórtice quando o condensado se encontra em expansão livre[9, 25]. Há dois esquemas muito utilizados pra se criar vórtices em condensados; o primeiro consiste em usar feixes de laser para construir a fase da função de onda do condensado e produzir o campo de velocidades desejado, esquema o qual obteve sucesso ao ser usado em misturas binárias de condensados, resultando em uma rotação quantizada de um dos dois componentes ao redor do segundo[10, 29]. Esta "impressão de fase" foi usada também para gerar solitons dentro de condensados[30]. O segundo esquema é análogo ao experimento de rotação[27]; os átomos são confinados em um potencial de dipolo atrativo e estático (armadilha magnética com simetria cilíndrica, de forma que é imposto uma não axissimetria na mesma) criado por um feixe de laser, combinado com uma armadilha harmônica (de formato alongado, prolate)[31, 32]. Neste esquema, a formação de vórtices é uma consequência do equilíbrio térmico, cujo Hamiltoniano do sistema é dado por $\hat{H} = H - \Omega L_z$, onde H é o Hamiltoniano ausente de rotação e L_z é o momento angular orbital total ao longo do eixo de rotação. Portanto acima de uma certa frequência de rotação crítica, $\Omega_c = (\hbar\ell)^{-1} [(E/N)_\ell - (E/N)_0]$ (E_ℓ é a energia do sistema com circulação $N\hbar\ell$), o termo ΩL_z pode favorecer a criação de um estado cuja função de onda do condensado tenha um momento angular $\hbar$ ao longo do eixo z e contendo um filamento de vórtice[33].

Daqui por diante trataremos dos métodos teóricos para o estudo da dinâmica de um vórtice tipo linha ao longo do eixo z, partindo da Equação de Gross-Pitaevskii (EGP). Esta equação aparece como resultado de uma aproximação de campo médio do Hamiltoniano de segunda quantização, descrevendo muito bem os condensados de Bose-Einstein de acordo com resultados experimentais.

2.1 Equação de Gross-Pitaevskii

Assumindo a falta de componentes térmicas, isto é, um condensado de Bose-Einstein puro à temperatura zero, sua dinâmica é descrita pela Equação de Gross-Pitaevskii EGP dependente do tempo[34, 35]

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) + U_0 |\psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \psi(\vec{r}, t). \quad (2.1)$$

De maneira geral, iremos considerar $V(\vec{r})$ um potencial externo arbitrário. No entanto, neste trabalho consideraremos este como uma armadilha harmônica de simetria cilíndrica,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m \omega_\rho^2 (\rho^2 + \lambda^2 z^2), \quad (2.2)$$

onde $\lambda = \omega_z/\omega_\rho$ nos confere o formato da armadilha ($\lambda < 1$ tipo charuto, $\lambda = 1$ formato esférico e $\lambda > 1$ forma de panqueca). Como estamos num limite de baixas energias (apenas espalhamento por ondas-s; o que é uma boa aproximação para a interação entre partículas de um gás diluído)[36, 37], a interação entre duas partículas, devido à aproximação de campo médio, é dada por:

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}, \quad (2.3)$$

onde a_s é o comprimento de espalhamento, parâmetro cuja definição remete-se ao espalhamento de baixas energias, ou seja, um espalhamento de uma onda plana que resulta em uma onda esférica após o espalhamento (espalhamento por esfera dura). Para $a_s < 0$ dizemos que o potencial é atrativo, se o mesmo for zero quer dizer que não há espalhamento, e se $a_s > 0$ diz-se que o potencial é repulsivo[20, 37].

A EGP, também chamada de equação de Schrödinger não-linear (na qual se encontra interação entre partículas), é normalizada ao número de partículas N , de maneira que a normalização é

$$N = \int |\psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r}. \quad (2.4)$$

Aplicando o método de separação de variáveis a partir de um ansatz,

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}}, \quad (2.5)$$

separamos a parte temporal e inserindo este na equação (2.1) obtemos a EGP independente do tempo

$$\mu \psi(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) + U_0 |\psi(\vec{r})|^2 \right] \psi(\vec{r}), \quad (2.6)$$

com o potencial químico dado por μ .

2.1.1 Aproximação de Thomas-Fermi

Quando temos um grande número de átomos em um potencial harmônico e a interação é repulsiva, o termo da energia cinética é muito pequeno comparado com as outras energias. Assim, a melhor aproximação para a função de onda do condensado é feita negligenciando a energia cinética da equação (2.6). Dessa maneira,

$$n(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})|^2 = \frac{\mu - V(\vec{r})}{U_0}, \quad (2.7)$$

e ela deve ser positiva, portanto $n(\vec{r}) = 0$ quando o termo à direita se torna negativo. No ponto onde a densidade é zero, definido como condição de contorno $V(\vec{r}) = \mu$, podemos obter os raios de Thomas-Fermi (TF), dados respectivamente na direção radial e axial:

$$R_\rho = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_\rho^2}}, \quad R_z = \sqrt{\frac{2\mu}{m(\omega_\rho\lambda)^2}}. \quad (2.8)$$

Utilizando-se da condição de normalização (2.4) em conjunto com o potencial harmônico (2.2) tiramos a seguinte expressão para o potencial químico,

$$\mu = \left[\frac{15\omega_\rho^3 \lambda N U_0}{8\pi} \left(\frac{m}{2} \right)^{3/2} \right]^{2/5}. \quad (2.9)$$

Finalmente, o perfil de densidade é dado por:

$$n_{TF}(\vec{r}) = n_{TF0} \left[1 - \left(\frac{\rho}{R_\rho} \right)^2 - \left(\frac{z}{R_z} \right)^2 \right], \quad (2.10)$$

com

$$n_{TF0} = \frac{\mu}{U_0}, \quad (2.11)$$

e $\rho < R_\rho$ e $z < R_z$.

2.1.2 Circulação Quantizada

Ao multiplicar a EGP dependente do tempo (2.1) por $\psi^*(\vec{r}, t)$ e subtrair desta sua respectiva equação para o complexo conjugado multiplicada por $\psi(\vec{r}, t)$, chega-se em:

$$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \right] = 0, \quad (2.12)$$

a qual se aparenta com a equação da continuidade, dada por:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \vec{v}) = 0. \quad (2.13)$$

Desta forma é definido n como a densidade do condensado, e sua respectiva velocidade por

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{2mi} \frac{(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)}{|\psi|^2}. \quad (2.14)$$

Através da transformação de Madelung[38] podemos escrever a função de onda do condensado da seguinte maneira:

$$\psi = \sqrt{n} e^{i\phi(\vec{r}, t)}. \quad (2.15)$$

Ao substituir (2.15) na expressão para a velocidade (2.14) é obtido a velocidade em termos do gradiente da fase (1.1). Ao calcular o rotacional da velocidade obtemos imediatamente que o campo de velocidades é irrotacional (1.2), a menos que esta rotação seja carregada pela fase $\phi(\vec{r}, t)$. Em torno de um contorno fechado, a variação na fase $\Delta\phi$ tem de ser múltiplo de 2π ; desta forma a circulação Γ em um contorno fechado ao longo do vórtice é

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2\pi\ell \frac{\hbar}{m} = \ell \frac{h}{m}, \quad (2.16)$$

mostrando que esta é quantizada em unidades de h/m [39, 40], e ℓ um número inteiro. A partir deste fato, para um vórtice central tipo linha, a equação (1.2) pode ser generalizada como:

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{\hbar\ell}{m} \delta^2(\vec{\rho}) \hat{z}, \quad (2.17)$$

onde $\vec{\rho} = (x, y)$ e δ^2 é uma função delta de Dirac para duas dimensões.

2.2 Método Variacional

Para estudar a dinâmica de condensado é utilizado um método variacional que consiste em calcular as equações de movimento para os parâmetros da nuvem, desta forma podemos introduzir os parâmetros que mais nos interessam[21, 22] a partir de um ansatz. Começando por restringir o problema da solução da EGP (2.1) como um problema variacional; fazendo o uso do princípio da mínima ação calcularemos a Lagrangeana como uma integral em todo o espaço de uma densidade de Lagrangeana dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{i\hbar}{2} \left[\psi^*(\vec{r}, t) \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} - \psi(\vec{r}, t) \frac{\partial \psi^*(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] \\ & - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi(\vec{r}, t)|^2 - V(\vec{r}) |\psi(\vec{r}, t)|^2 - \frac{U_0}{2} |\psi(\vec{r}, t)|^4,\end{aligned}\tag{2.18}$$

assim segue a Lagrangeana

$$L = \int \mathcal{L} d\vec{r}\tag{2.19}$$

e a ação

$$S = \int L dt.\tag{2.20}$$

Desta forma, minimizando a ação no tempo obtem-se as equações de Euler-Lagrange para os parâmetros $q(t)$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,\tag{2.21}$$

sendo estas as equações de movimento para os parâmetros $q(t)$ de nosso ansatz. Este método nos dá uma boa análise qualitativa e quantitativa[41, 42] para os problemas propostos neste trabalho. Também podemos calcular a energia funcional de uma forma variacional, desta forma

$$E_f = \int \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi(\vec{r})|^2 + V(\vec{r}) |\psi(\vec{r})|^2 + \frac{U}{2} |\psi(\vec{r})|^4 \right] d\vec{r}.\tag{2.22}$$

E também reobter a EGP (2.1) pelas equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} + \nabla \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \psi_i)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} = 0,\tag{2.23}$$

com $\psi_i = \psi, \psi^*$.

2.2.1 Estrutura de um Vórtice

Ao considerar uma armadilha com simetria axial (2.2) assumimos que o termo da fase da função de onda do condensado varia com o ângulo φ constante. Portanto em coordenadas cilíndricas a função de onda é escrita como

$$\psi(\vec{r}) = f(\rho, z) e^{i\ell\varphi},\tag{2.24}$$

onde f é real, e a energia (2.22) é

$$E = \int \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\hbar^2 \ell^2}{2m \rho^2} f^2 + V(\rho, z) f^2 + \frac{U_0}{2} f^4 \right\} d\vec{r}. \quad (2.25)$$

Note que a única diferença, entre a energia acima (2.25) e a energia de um condensado sem uma fase, é apenas o termo proporcional a $1/\rho^2$, o qual é consequência de uma rotação. Esta rotação acrescenta um termo de energia centrífuga[24, 43], cuja velocidade é

$$v_\varphi = \frac{\ell \hbar}{m \rho}. \quad (2.26)$$

A amplitude f pode ser obtida pela EGP independente do tempo (2.6), isto é,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right] + \frac{\hbar^2 \ell^2}{2m \rho^2} f + V(\rho, z) f + U_0 f^3 = \mu f. \quad (2.27)$$

2.2.2 Escolha de um ansatz

Para condensados de baixa interação repulsiva entre partículas (U_0 pequeno), tem-se o regime próximo ao do gás ideal. Sendo assim, a função de onda do condensado se aproxima à solução da EGP (2.1) com $U_0 = 0$, ou seja, a equação de Schrödinger independente do tempo:

$$E\psi(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}). \quad (2.28)$$

Portanto, usaremos como ansatz funções gaussianas as quais são solução assintótica de (2.28), pela simplicidade em trabalhar com gaussianas. Estas funções podem ser escritas como

$$\psi(\rho, z) = A e^{-\frac{\rho^2}{R_\rho}} e^{-\frac{z^2}{R_z}}. \quad (2.29)$$

2.2.3 Vórtice em Duas Dimensões

Primeiramente, consideraremos um vórtice uniforme ao longo do eixo axial, assim podemos considerar uma geometria bidimensional. Nestas considerações é negligenciado a variação no eixo axial z , portanto a equação (2.2) resume-se a dependência radial:

$$V = \frac{1}{2} m \omega_\rho^2 \rho^2, \quad (2.30)$$

com $\rho^2 = x^2 + y^2$. E a densidade segundo (2.7)

$$|\psi|^2 = \frac{1}{U_0} \left(\mu - \frac{1}{2} m \omega_\rho^2 \rho^2 \right), \quad (2.31)$$

lembrando que ρ tem de ser menor que $R_\rho = (2\mu/m\omega_\rho^2)^{1/2}$, pois acima deste valor a densidade é zero.

A densidade de partícula por unidade de comprimento ao longo do eixo z é

$$\nu = 2\pi \int_0^{R_\rho} |\psi|^2 \rho d\rho = \frac{\pi \mu^2}{U_0 m \omega_\rho^2} = \left(\frac{\mu}{2\hbar \omega_\rho} \right)^2 a_s^{-1}. \quad (2.32)$$

Em termos do parâmetro adimensional de interação $\gamma = \nu a_s$, o potencial químico é dado por:

$$\mu = 2\hbar \omega_\rho (\nu a_s)^{1/2} = 2\hbar \omega_\rho \gamma^{1/2}. \quad (2.33)$$

No limite de grandes γ a aproximação de Thomas-Fermi se torna exata. Uma vez que o potencial químico é dado em termos da energia total por comprimento, E , a partir da equação $\mu = \partial E / \partial \nu$, tem-se que $E = \int \mu d\nu$ então

$$E = \frac{4}{3} \hbar \omega_\rho \nu^{3/2} a_s^{1/2} = \frac{2}{3} \nu \mu. \quad (2.34)$$

Concluindo que $\mu = 3E/2\nu$. Por simplificação dos cálculos escolhemos um ansatz gaussiano, sendo apropriado comparar as equações (2.33) e (2.34) com o resultado decorrido do cálculo variacional da energia do estado fundamental com uma função tentativa do tipo:

$$\psi_0(\rho) = A e^{-\rho^2/2b^2}, \quad (2.35)$$

onde $A = \sqrt{\nu/\pi b^2}$ e b é um parâmetro variacional proporcional ao comprimento fundamental do oscilador $d = (\hbar/m\omega)^{1/2}$, portando escrevemos $b = \alpha d$. Segundo (2.22) encontramos a energia por unidade de comprimento dada por:

$$E_0 = \nu \hbar \omega_\rho \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\gamma}{\alpha^2} \right). \quad (2.36)$$

Minimizando a energia em relação a α , $\partial E_0 / \partial \alpha = 0$, tem-se o mínimo em $\alpha = \alpha_0 = (1 + 2\gamma)^{1/4}$, resultando na estimativa da energia do estado fundamental

$$E_0 = \nu \hbar \omega_\rho \sqrt{1 + 2\gamma}. \quad (2.37)$$

No limite de grandes γ a energia estimada pelo método variacional excede o valor exato (2.34) em 6% [24], consistindo num bom resultado.

Agora consideremos um estado de vórtice com um quantum $\hbar/m$ de circulação em torno do eixo z . A correção para a aproximação de Thomas-Fermi da energia (2.34) consiste em dois termos: a energia de vórtice por unidade de comprimento e a energia cinética, que é da mesma ordem de magnitude da energia de vórtice. Para nuvens grandes a energia do vórtice por unidade de comprimento é dado por [20, 24]:

$$E_v = \pi |\psi(0)|^2 \frac{\hbar^2}{m} \ln \left(\frac{0.888 R_\rho}{\xi} \right) \approx \frac{\nu \hbar \omega_\rho}{2\gamma^{1/2}} \ln \left(3.55 \gamma^{1/2} \right), \quad (2.38)$$

onde o comprimento de coerência ξ é definido por

$$\frac{\hbar^2}{2m\xi^2} = U_0 |\psi(0)|^2. \quad (2.39)$$

Note que

$$\frac{R_\rho}{\xi} = \frac{2\mu}{\hbar \omega_\rho} = 4\gamma^{1/2}. \quad (2.40)$$

E a energia associada com a superfície é [19, 20]

$$E_c = \frac{\nu \hbar \omega_\rho}{4\gamma^{1/2}} \ln \left(2.43 \gamma^{1/3} \right). \quad (2.41)$$

Somando as contribuições (2.34), (2.38) e (2.41) temos a energia total por unidade de comprimento para uma nuvem suficientemente grande ($\gamma \gg 1$):

$$E = \nu \hbar \omega_\rho \left[\frac{4}{3} \gamma^{1/2} + \frac{\ln(13.0\gamma)}{3\gamma^{1/2}} \right] \quad (2.42)$$

Podemos comparar o resultado (2.42) com a energia calculada através do seguinte ansatz:

$$\psi_1(\rho, \varphi) = A \rho e^{i\varphi} e^{-\rho^2/2b^2}, \quad (2.43)$$

onde φ é o ângulo azimutal e $A = \sqrt{\nu/\pi b^4}$. Com a energia resultando em

$$E_1 = \nu \hbar \omega_\rho \left(\frac{1}{\alpha^2} + \alpha^2 + \frac{\gamma}{2\alpha^2} \right), \quad (2.44)$$

ao minimizar a energia em respeito a α e substituindo o α_0 em (2.44), tem-se

$$E_1 = \nu \hbar \omega_\rho \sqrt{4 + 2\gamma}. \quad (2.45)$$

Fazendo a expansão de Taylor até primeira ordem de (2.37) e (2.45), e subtraindo uma da outra temos $\nu \hbar \omega_\rho 3\sqrt{2}/4\gamma^{1/2}$, que é a energia do vórtice devido ao uso de um anstaz gaussiano. Comparado este resultado com (2.38) vemos que o cálculo variacional nos dá um resultado pobre para a energia do vórtice. Isto é decorrente do seguinte fato: temos um único parâmetro

variacional para o tamanho da nuvem e para o tamanho do vórtice, isto é, o parametro b da função de onda (2.43) não representa exatamente o raio do condensado, representando assim, a largura da gaussiana que seria aproximadamente a diferença entre o raio do condensado e o raio do vórtice. Para que a energia do vórtice, resultante do calculo variacional, fosse tida como uma boa estimativa, essa energia deveria conter o comportamento logaritimico de (2.38).

2.2.4 Expansão

Devemos agora usar um ansatz Gaussiano para a expansão, que consiste em desligar a armadilha magnética em $t = 0$. Desta forma, tem-se a evolução temporal para a densidade. Para isso temos de acrescentar mais um termo à Gaussiana (2.43):

$$\psi(\rho, \varphi, t) = A(t)\rho e^{i\varphi} e^{-\rho^2/2R(t)^2} e^{i\beta(t)\rho^2/2}, \quad (2.46)$$

onde $A = A(t)$, $R = R(t)$ e $\beta = \beta(t)$ são os parâmetros variacionais dependentes do tempo. O parâmetro $\beta(t)$ adicional, nos dá a informação sobre a inclinação do perfil de densidade. Portanto, é de β de onde surgirá as aceleração de $R(t)$, $\ddot{R}$ [21, 22]. Utilizando (2.19); substituindo (2.46) em (2.18), é obtida a seguinte Lagrangeana:

$$L = -\nu \left[\frac{\hbar^2}{mR^2} (1 + \beta^2 R^4) + \hbar \dot{\beta} R^2 + \frac{\nu U_0}{8\pi R^2} \right]. \quad (2.47)$$

A partir das equações de Lagrange (2.21) para as duas variáveis independentes β e R temos

$$\beta = \frac{m\dot{R}}{\hbar R} \quad (2.48)$$

e

$$\dot{\beta} = \frac{\hbar}{mR^4} - \frac{\hbar\beta}{m} + \frac{\nu U_0}{8\pi\hbar R^4}. \quad (2.49)$$

Substituindo (2.48) em (2.49) resulta na equação de evolução temporal para R

$$\ddot{R} = \left(\frac{\hbar^2}{m^2} + \frac{\nu U_0}{8\pi m} \right) \frac{1}{R^3}, \quad (2.50)$$

cuja solução é

$$R(t)^2 = R(0)^2 + v_0^2 t^2, \quad (2.51)$$

onde $R(0) = d(1 + \gamma/2)^{1/4}$ e $v_0 = \omega_\rho R(0)$, os quais foram encontrados da solução estacionária. Note que o parâmetro R não é o raio da nuvem mas sim a largura da Gaussiana, diferentemente

de quando usamos um ansatz Gaussiano para a nuvem sem vórtice; pois nesta o raio da nuvem coincide com a largura da Gaussiana. Comparando as velocidades da nuvem com vórtice e sem vórtice temos um resultado que diferente do resultado numérico obtido por Emil Lundh et al. [24]; o resultado numérico de [24] nos mostra que a velocidade de expansão da nuvem contendo o vórtice central é maior, e o resultado variacional para o caso 2D é o contrario.

3 Vórtice no Condensado Aprisionado

No capítulo anterior foi resumido o método teórico que será utilizado neste e nos próximos capítulos. Na seção 3.1 faremos uma análise de um condensado ainda aprisionado, comparando as energias, os perfis de densidade, e as equações estacionárias (condições iniciais para a expansão) de um condensado sem vórtice, subseção 3.1.1, e de um condensado com um vórtice central de um quantum de circulação, subseção 3.1.2.

Em seguida, será obtido as equações de movimento para um vórtice linha, permitindo que o mesmo possa estar fora do centro da nuvem atômica. E então, discutiremos as possíveis condições iniciais para realizar a expansão.

3.1 Perfil de Densidade e Energia

O método variacional para o caso tridimensional apresenta um resultado qualitativo e quantitativo bom e superior ao caso bidimensional, subseção 2.2.3, justamente por termos agora uma densidade não uniforme na direção axial. Portanto, será explorado daqui por diante o caso em três dimensões. Vale acrescentar que estamos interessados em a_s positivo (potencial repulsivo) com a interação γ da ordem de 800.

3.1.1 Condensado sem Vórtice

Começemos a generalizar (2.35) para três dimensões, isto é,

$$\psi_f(\rho, z) = \sqrt{\frac{N}{\pi^{3/2} R_\rho^2 R_z}} e^{-\rho^2/2R_\rho^2} e^{-z^2/2R_z^2}; \quad (3.1)$$

observemos bem nosso anstaz acima, neste temos que R_ρ e R_z estão relacionados com os raios, radial e axial, de nosso condensado. Sendo os mesmos a largura da gaussiana. Cabe a nós definirmos conceitualmente os raios como sendo $\Delta x = \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle}{N} - \left(\frac{\langle x \rangle}{N}\right)^2}$ com $\langle x \rangle = 0$, assim $\Delta\rho$ é o comprimento radial e Δz o comprimento axial, dados por:

$$\Delta\rho = R_\rho \quad \text{e} \quad \Delta z = \frac{R_z}{\sqrt{2}}. \quad (3.2)$$

Agora podemos calcular a energia funcional (2.22) com o potencial (2.2) para o ansatz acima (3.1), obtendo então:

$$\begin{aligned} E_f &= \frac{N\hbar^2}{4m} \left(\frac{2}{R_\rho^2} + \frac{1}{R_z^2} \right) + \frac{m\omega_\rho^2 N}{4} (2R_\rho^2 + \lambda^2 R_z^2) + \frac{N^2 U_0}{4(2\pi^3)^{1/2} R_\rho^2 R_z} \\ &= N\hbar\omega_\rho \left[\frac{a_{osc}^2}{4} \left(\frac{2}{R_\rho^2} + \frac{1}{R_z^2} \right) + \frac{(2R_\rho^2 + \lambda^2 R_z^2)}{4a_{osc}^2} + \frac{Na_s a_{osc}^2}{(2\pi)^{1/2} R_\rho^2 R_z} \right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $a_{osc} = (\hbar/m\omega_\rho)^{1/2}$ é o comprimento do oscilador harmônico. Reescalando $R_\rho = a_{osc} r_\rho$, $R_z = a_{osc} r_z$ e $\gamma = Na_s/a_{osc}$, adimensionalizamos os parâmetros. Desta maneira a energia (3.3) é escrita como:

$$E_f = N\hbar\omega_\rho \left[\frac{1}{4} \left(\frac{2}{r_\rho^2} + \frac{1}{r_z^2} \right) + \frac{2r_\rho^2 + \lambda^2 r_z^2}{4} + \frac{\gamma}{(2\pi)^{1/2} r_\rho^2 r_z} \right]. \quad (3.4)$$

Ao minimizar (3.4) em relação a r_ρ e r_z temos as equações que resultam nas condições de equilíbrio, as quais serão usadas como condições iniciais para expansão:

$$r_{\rho 0}^4 = 1 + \frac{2\gamma}{(2\pi)^{1/2} r_{z0}} \quad \text{e} \quad \lambda^2 r_{z0}^4 = 1 + \frac{2\gamma r_{z0}}{(2\pi)^{1/2} r_{\rho 0}^2}. \quad (3.5)$$

No limite de Thoma-Fermi, o termo proporcional a γ é muito maior que 1, assim podemos escrever (3.5) como

$$r_{\rho 0}^4 = \frac{2\gamma}{(2\pi)^{1/2} r_{z0}} \quad \text{e} \quad \lambda^2 r_{z0}^3 = \frac{2\gamma}{(2\pi)^{1/2} r_{\rho 0}^2}. \quad (3.6)$$

O condensado aprisionado deve obedecer a equações de movimentos resultantes de (2.19), para isso devemos fazer a mesma modificação feita em (2.43) que resultou em (2.46). Portanto nosso novo ansatz é

$$\Psi_f(\rho, z, t) = \psi_f(\rho, z) e^{i\beta_\rho \rho^2/2} e^{i\beta_z z^2/2}, \quad (3.7)$$

onde os parâmetros da função de onda acima são dependentes do tempo. Com (3.7) obtemos a seguinte Lagrangeana:

$$\begin{aligned} L &= -N \left\{ \frac{\hbar}{4} (2\dot{\beta}_\rho R_\rho^2 + \dot{\beta}_z R_z^2) + \frac{\hbar^2}{4m} \left[2 \left(\beta_\rho^2 R_\rho^2 + \frac{1}{R_z^2} \right) + \beta_z^2 R_z^2 + \frac{1}{R_z^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{m\omega_\rho^2}{4} (2R_\rho^2 + \lambda^2 R_z^2) + \frac{NU_0}{2(2\pi)^{3/2} R_\rho^2 R_z} \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde β_j ($j = \rho, z$) é calculado a partir de (2.21), dando

$$\beta_j = \frac{m}{\hbar} \frac{\dot{R}_j}{R_j}. \quad (3.9)$$

Note que o resultado (3.9) é similar ao (2.48). Substituindo o mesmo em (3.8) e utilizando de (2.21) temos as equações de movimento para o caso estacionário, isto é:

$$\begin{aligned} \ddot{R}_\rho + \omega_\rho^2 R_\rho &= \frac{\hbar^2}{m^2 R_\rho^3} + \frac{NU_0}{(2\pi)^{3/2} R_\rho^3 R_z}, \\ \ddot{R}_z + \omega_\rho^2 \lambda^2 R_z &= \frac{\hbar^2}{m^2 R_z^3} + \frac{NU_0}{(2\pi)^{3/2} R_\rho^2 R_z^2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

O termo R_j provem do potencial, R_j^{-3} nos fornece a parte cinética e o termo proporcional a U_0 é a interação de duas partículas. Fazendo as grandezas adimensionais, isto é, $R_j(t) = a_{osc} r_j(t)$ e $\tau = \omega_\rho t$; as equações acima ficam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \ddot{r}_\rho + r_\rho &= \frac{1}{r_\rho^3} + \frac{2\gamma}{(2\pi)^{1/2} r_\rho^3 r_z}, \\ \ddot{r}_z + \lambda^2 r_z &= \frac{1}{r_z^3} + \frac{2\gamma}{(2\pi)^{1/2} r_\rho^2 r_z^2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para obter a solução estacionário faz-se $r_j(t) = r_{j0}$, como r_{j0} não é função do tempo, e re-obtemos (3.5).

3.1.2 Vórtice Central

Em toda esta dissertação seguiremos o mesmo procedimento teórico, e afim de evitar cálculos repetitivos resumiremos os passos apenas àqueles de maior importância.

Dando prosseguimento, os ansatz, independente e dependente do tempo, são

$$\begin{aligned} \psi_e(\rho, \varphi, z) &= \sqrt{\frac{N}{\pi^{3/2} R_\rho^4 R_z}} \rho e^{i\ell\varphi} e^{-\rho^2/2R_\rho^2} e^{-z^2/2R_z^2}, \\ \Psi_e(\rho, \varphi, z, t) &= \psi(\rho, \varphi, z) e^{-i\beta_\rho(t)\rho^2/2} e^{-i\beta_z(t)z^2/2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Cabe lembrar que, em $\Psi_e(\rho, \varphi, z, t)$, os parâmetros variacionais de $\psi_e(\rho, \varphi, z)$ também serão dependentes do tempo. Tomando cuidado com os parâmetros variacionais acima (R_ρ e R_z), vemos que R_ρ é exatamente o pico de nossa gaussiana, isso porque só este parâmetro não apenas carrega a informação do raio radial como também o raio do vórtice. Ficando aqui

justificado o motivo pelo qual definimos os raios como $\Delta x = \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle}{N} - \left(\frac{\langle x \rangle}{N}\right)^2}$, portando os raios serão:

$$\Delta \rho = R_\rho \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \Delta z = \frac{R_z}{\sqrt{2}}. \quad (3.13)$$

Respectivamente, a energia e a Lagrangeana são:

$$E_e = N\hbar\omega_\rho \left[\frac{1}{r_\rho^2} + r_\rho^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r_z^2} + \lambda^2 r_z^2 \right) + \frac{\gamma}{2^{3/2}\pi^{1/2}r_\rho^2 r_z} \right] \quad (3.14)$$

e

$$\begin{aligned} L = -N \left\{ \frac{\hbar}{4} \left(4\dot{\beta}_\rho R_\rho^2 + \dot{\beta}_z R_z^2 \right) + \frac{\hbar^2}{4m} \left[2 \left(\beta_\rho^2 R_\rho^2 + \frac{1}{R_\rho^2} \right) + \beta_z^2 R_z^2 + \frac{1}{R_z^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{m\omega_\rho^2}{4} (4R_\rho^2 + \lambda^2 R_z^2) + \frac{NU_0}{4(2\pi)^{3/2}R_\rho^2 R_z} \right\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

com β_ρ e β_z dados por (3.9). Desta forma, a Lagrangeana resulta nas seguintes equações de movimento para os parâmetros adimensionais definidos anteriormente:

$$\begin{aligned} \ddot{r}_\rho + r_\rho &= \frac{1}{r_\rho^3} + \frac{\gamma}{2(2\pi)^{1/2}r_\rho^3 r_z}, \\ \ddot{r}_z + \lambda^2 r_z &= \frac{1}{r_z^3} + \frac{\gamma}{(2\pi)^{1/2}r_\rho^2 r_z^2}; \end{aligned} \quad (3.16)$$

as quais tem como solução estacionária

$$r_{\rho 0}^4 = 1 + \frac{\gamma}{2(2\pi)^{1/2}r_{z0}} \quad \text{e} \quad \lambda^2 r_{z0}^4 = 1 + \frac{\gamma r_{z0}}{(2\pi)^{1/2}r_{\rho 0}^2}. \quad (3.17)$$

Comparando respectivamente (3.10) e (3.11) com (3.16) e (3.17), pode-se observar que elas são similares com apenas uma diferença entre elas. Essa diferença é apenas nos termos referentes à interação de duas partículas para as equações do parâmetro radial (ρ).

3.2 Precessão

Consideraremos agora o caso em que o vórtice não está no centro do condensado, assim encontra-se dificuldades para se aplicar o método variacional. Em síntese este obstáculo é caracterizado por uma dificuldade em se escrever a função de onda, com ênfase na fase da função.

Pois quando deslocamos o vórtice do centro a fase é uma função de sua posição, assim a função de onda não pode ser descrita por (2.24). Uma maneira de se contornar este obstáculo de cunho matemático é a seguinte: passamos a usar coordenadas cartesianas, onde o potencial da armadilha torna-se $V(x, y, z) = m\omega_\rho^2(x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2)/2$, com $\omega_x = \omega_y = \omega_\rho$; utilizando a conversão $x = \rho \cos \varphi$ e $y = \rho \sin \varphi$, o termo de vórtice é

$$\rho e^{i\varphi} = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = x + iy, \quad (3.18)$$

assim, em coordenadas cartesianas, fica facil escrever a fase $e^{i\phi(\vec{r})}$; agora adicionando dois parâmetros variacionais ($x_0 = \rho_0 \cos \varphi_0$ e $y_0 = \rho_0 \sin \varphi_0$) para que desloquemos o vórtice do centro da nuvem, e fazendo a engenharia reversa de (3.18):

$$x - x_0 + i(y - y_0) = \rho e^{i\varphi} - \rho_0 e^{i\varphi_0}. \quad (3.19)$$

Então nosso novo ansatz em coordenadas polares será

$$\psi(\rho, \varphi, z) = A (\rho e^{i\varphi} - \rho_0 e^{i\varphi_0}) e^{-\rho^2/2R_\rho^2} e^{-z^2/2R_z^2}, \quad (3.20)$$

com

$$A = \sqrt{\frac{N}{\pi^{3/2} (R_\rho^2 + \rho_0^2) R_\rho^2 R_z}} \quad (3.21)$$

Ressaltando o fato de que para o cálculo da Lagrangeana os parâmetros de (3.20) são dependentes do tempo e a função de onda ganha uma fase para cada componente espacial, isto é,

$$\Psi(\rho, \varphi, z, t) = \psi(\rho, \varphi, z) e^{i\beta_\rho r^2/2} e^{i\beta_z z^2/2}. \quad (3.22)$$

Portando a Lagrangeana, $L = L_{time} + L_{kin} + L_{trap} + L_{int}$, é dada por:

$$\begin{aligned} L_{time} &= -\frac{N\hbar}{4} \left[\frac{R_\rho^4 \dot{\beta}_\rho + R_\rho^2 (2\rho_0^2 \dot{\beta}_\rho + R_z^2 \dot{\beta}_z) + \rho_0^2 (R_z^2 \dot{\beta}_z + \dot{\varphi}_0)}{R_\rho^2 + \rho_0^2} \right] \\ L_{kin} &= -\frac{N\hbar^2}{4m} \left[1 + \frac{(2 + \beta_\rho^2 R_\rho^4) (2R_\rho^2 + \rho_0^2)}{(R_\rho^4 + R_\rho^2 \rho_0^2)} + \beta_z^2 R_z^2 \right] \\ L_{trap} &= -\frac{Nm\omega_\rho^2}{4} \left[\frac{2R_\rho^2 (2R_\rho^2 + \rho_0^2)}{R_\rho^2 + \rho_0^2} + \lambda^2 R_z^2 \right] \\ L_{int} &= -\frac{N^2 U (R_\rho^4 + 4R_\rho^2 \rho_0^2 + 2\rho_0^4)}{8\sqrt{2}\pi^{3/2} R_\rho^2 R_z (R_\rho^2 + \rho_0^2)^2}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde

$$\beta_\rho = \frac{m}{\hbar} \left[\frac{\dot{R}_\rho}{R_\rho} + \frac{3R_\rho \rho_0^2 \dot{R}_\rho - R_\rho^2 \rho_0 \dot{\rho}_0}{(R_\rho^2 + \rho_0^2)(2R_\rho^2 + \rho_0)} \right] \quad \text{e} \quad \beta_z = \frac{m \dot{R}_z}{\hbar R_z}. \quad (3.24)$$

Consequentemente a energia funcional, $E = E_{kin} + E_{trap} + E_{int}$, é

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{N\hbar^2}{4m} \left[\frac{R_\rho^4 + 2\rho_0^2 R_z^2 + R_\rho^2 (r_0^2 + 4R_z^2)}{R_z^2 (R_\rho^4 + R_\rho^2 \rho_0)} \right] \\ E_{trap} &= \frac{Nm\omega_\rho^2}{4} \left[\frac{4R_\rho^4 + 2R_\rho^2 \rho_0^2}{R_\rho^2 + \rho_0^2} + \lambda^2 R_z^2 \right] \\ E_{int} &= \frac{N^2 U (R_\rho^4 + 4R_\rho^2 \rho_0^2 + 2\rho_0^4)}{8\sqrt{2}\pi^{3/2} R_\rho^2 R_z (R_\rho^2 + \rho_0^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A partir das equações de Euler-Lagrange (2.21) tem-se as seguintes equações de movimento (para os parâmetros reescalados de maneira adimensional):

$$\begin{aligned} A_1 \ddot{r}_\rho + A_2 \ddot{r}_{\rho_0} + A_3 \dot{r}_\rho^2 + A_4 \dot{r}_{\rho_0}^2 + A_5 \dot{r}_\rho \dot{r}_{\rho_0} + A_6 \dot{\varphi}_0 + A_7 &= \\ &= \frac{2\gamma (r_\rho^2 + r_{\rho_0}^2) (2r_\rho^2 + r_{\rho_0}^2)^2}{\sqrt{2\pi} r_\rho r_z} \\ B_1 \ddot{r}_\rho + B_2 \ddot{r}_{\rho_0} + B_3 \dot{r}_\rho^2 + B_4 \dot{r}_{\rho_0}^2 + B_5 \dot{r}_\rho \dot{r}_{\rho_0} + B_6 \dot{\varphi}_0 + B_7 &= \\ &= \frac{\gamma (r_\rho^2 + r_{\rho_0}^2) (2r_\rho^2 + r_{\rho_0}^2)^2 (7r_\rho^4 r_{\rho_0}^2 + 6r_\rho^2 r_{\rho_0}^4 + r_\rho^6 + 2r_{\rho_0}^6)}{\sqrt{2\pi} r_z} \\ \ddot{r}_z + \lambda^2 r_z &= \frac{1}{r_z^3} + \frac{\gamma r_z (4r_\rho^2 r_{\rho_0}^2 + r_\rho^4 + 2r_{\rho_0}^4)}{\sqrt{2\pi} r_\rho^2 r_z^3 (r_\rho^2 + r_{\rho_0}^2)^2} \\ r_\rho \dot{r}_{\rho_0} - r_{\rho_0} \dot{r}_\rho &= 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

com

$$\begin{aligned}
A_1 &= 4r_\rho^8 + 14r_\rho^6 r_{\rho_0}^2 + 16r_\rho^4 r_{\rho_0}^4 + 7r_\rho^2 r_{\rho_0}^6 + r_{\rho_0}^8 \\
A_2 &= -2r_\rho^7 r_{\rho_0} - 3r_\rho^5 r_{\rho_0}^3 - r_\rho^3 r_{\rho_0}^5 \\
A_3 &= -2r_\rho^5 r_{\rho_0}^2 + 4r_\rho^3 r_{\rho_0}^4 + 3r_\rho r_{\rho_0}^6 \\
A_4 &= -2r_\rho^7 + 4r_\rho^5 r_{\rho_0}^2 + 3r_\rho^3 r_{\rho_0}^4 \\
A_5 &= 2r_\rho^6 r_{\rho_0} - 8r_\rho^4 r_{\rho_0}^3 - 6r_\rho^2 r_{\rho_0}^5 \\
A_6 &= -8r_\rho^7 - 24r_\rho^5 r_{\rho_0}^2 - 26r_\rho^3 r_{\rho_0}^4 - 12r_\rho r_{\rho_0}^6 - \frac{2r_{\rho_0}^8}{r_\rho} \\
A_7 &= 4r_\rho^{12} + 4r_\rho^5 + 12r_\rho^7 r_{\rho_0}^2 + 19r_\rho^5 r_{\rho_0}^4 + 12r_\rho^3 r_{\rho_0}^2 + 13r_\rho r_{\rho_0}^4 + r_\rho r_{\rho_0}^8 + \frac{6r_{\rho_0}^6}{r_\rho} + r_{\rho_0}^8
\end{aligned} \tag{3.27}$$

e

$$\begin{aligned}
B_1 &= 8r_\rho^{15} + 44r_\rho^{13} r_{\rho_0}^2 + 92r_\rho^{11} r_{\rho_0}^4 + 92r_\rho^9 r_{\rho_0}^6 + 46r_\rho^7 r_{\rho_0}^8 + 11r_\rho^5 r_{\rho_0}^{10} + r_\rho^3 r_{\rho_0}^{12} \\
B_2 &= -14r_\rho^{12} r_{\rho_0}^3 - 7r_\rho^8 r_{\rho_0}^7 - r_\rho^6 r_{\rho_0}^9 - 16r_\rho^{10} r_{\rho_0}^5 - 4r_\rho^{14} r_{\rho_0} \\
B_3 &= -4r_\rho^{12} r_{\rho_0}^2 + 20r_\rho^8 r_{\rho_0}^6 + 16r_\rho^6 r_{\rho_0}^8 + 3r_\rho^4 r_{\rho_0}^{10} \\
B_4 &= -4r_\rho^{14} + 20r_\rho^{10} r_{\rho_0}^4 + 16r_\rho^8 r_{\rho_0}^6 + 3r_\rho^6 r_{\rho_0}^8 \\
B_5 &= 8r_\rho^{13} r_{\rho_0} - 40r_\rho^9 r_{\rho_0}^5 - 32r_\rho^7 r_{\rho_0}^7 - 6r_\rho^5 r_{\rho_0}^9 \\
B_6 &= -24r_\rho^{10} r_{\rho_0}^4 - 26r_\rho^8 r_{\rho_0}^6 - 12r_\rho^6 r_{\rho_0}^8 - 2r_\rho^4 r_{\rho_0}^{10} - 4r_\rho^2 \\
B_7 &= 8r_\rho^{16} + 40r_\rho^{14} r_{\rho_0}^2 + 78r_\rho^{12} r_{\rho_0}^4 - 8r_\rho^{12} + 76r_\rho^{10} r_{\rho_0}^6 - 32r_\rho^{10} r_{\rho_0}^2 - 54r_\rho^8 r_{\rho_0}^4 \\
&\quad + 39r_\rho^8 r_{\rho_0}^8 - 50r_\rho^6 r_{\rho_0}^6 + 10r_\rho^6 r_{\rho_0}^{10} - 8r_\rho^2 r_{\rho_0}^{10} - 27r_\rho^4 r_{\rho_0}^8 + r_\rho^4 r_{\rho_0}^{12} - r_{\rho_0}^{12}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Analisando as equações (3.26), observamos duas soluções estacionárias, as quais descrevem dois regimes de movimentos. Primeiro regime, que pode ser observados, é obtendo a solução para todas as acelerações ($\ddot{r}_\rho$, $\ddot{r}_{\rho_0}$ e $\ddot{r}_z$) e velocidades ($\dot{r}_\rho$, $\dot{r}_{\rho_0}$ e $\dot{\varphi}_0$) iguais à zero, ou seja, a solução para o vórtice sem precessão que resulta no mesmo sendo central ($r_{\rho_0} = 0$), necessariamente. Assim, o segundo regime é aquele cuja solução estacionária tem $\dot{\varphi}_0$ diferente de zero, sendo este dado por:

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{2\gamma \left(r_\rho(0)^2 + r_{\rho_0}(0)^2 \right) \left(2r_\rho(0)^2 + r_{\rho_0}(0)^2 \right)^2}{\sqrt{2\pi} A_6(0) r_\rho(0) r_z(0)} - \frac{A_7(0)}{A_6(0)} \quad (3.29)$$

ou

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_0 = & \frac{\gamma \left[r_\rho(0)^2 + r_{\rho_0}(0)^2 \right] \left[2r_\rho(0)^2 + r_{\rho_0}(0)^2 \right]^2}{\sqrt{2\pi} B_6(0) r_z(0)} \left[7r_\rho(0)^4 r_{\rho_0}(0)^2 \right. \\ & \left. + 6r_\rho(0)^2 r_{\rho_0}(0)^4 + r_\rho(0)^6 + 2r_{\rho_0}(0)^6 \right] - \frac{B_7(0)}{B_6(0)}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

portanto o movimento de órbita feito pelo vórtice em torno do centro do condensado é uniforme (conforme visto experimentalmente em [44]), sendo este escrito como:

$$\varphi_0(\tau) = \varphi_0(0) + \dot{\varphi}_0 \tau. \quad (3.31)$$

Resalto ao fato de 3.29 e 3.30 serem iguais, e $\dot{\varphi}_0$ é constante.

3.3 Excitações Coletivas

As excitações elementares de um CBE, também conhecidas como modos coerentes ou modos naturais de vibração, são obtidos com a linearização da EGP[20, 45]. Tal excitação é uma ferramenta essencial para a investigação das propriedades do estado quântico ultra frio. A excitação coerente de muitas quasi-partículas culmina nas oscilações coletivas, ou modulações da densidade, numa nuvem atômica armadilhada[46, 47]. As mesmas são produzidas por uma perturbação espacial na armadilha harmônica, isto é, uma perturbação a qual coloca os parâmetros variacionais fora da solução estacionária (modulação do campo magnético da armadilha).

Assim como os vórtices, os modos coletivos de excitação tem importância em outros superfluidos (ex: CBE-BCS crossover, $^3\text{He-B}$ e nuvem atômica à temperatura finita)[48, 49, 50].

3.3.1 Caso sem Vórtice

Para linearizar a equação (3.11) faremos as seguintes alterações nos parâmetros:

$$\begin{aligned} r_\rho(\tau) & \rightarrow r_{\rho 0} + \delta r_\rho(\tau) \\ r_z(\tau) & \rightarrow r_{z 0} + \delta r_z(\tau), \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde $r_{\rho 0}$ e $r_{z 0}$ são dados por (3.6). Desta maneira, (3.11) se torna uma equação de δr_ρ e δr_z onde desprezaremos termos de ordem superior ($\delta r_\rho^2, \delta r_z^2, \delta r_\rho \delta r_z \dots$), obtendo:

$$\begin{aligned}\ddot{\delta r}_\rho + \delta r_\rho &= \frac{3\delta r_\rho}{r_{\rho 0}^4} + \frac{2\gamma\delta r_z}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} r_{\rho 0}^3 r_{z 0}^2} + \frac{6\gamma\delta r_\rho}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} r_{\rho 0}^4 r_{z 0}} \\ \ddot{\delta r}_z + \lambda^2 \delta r_z &= \frac{3\delta r_z}{r_{z 0}^4} + \frac{4\gamma\delta r_\rho}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} r_{\rho 0}^3 r_{z 0}^2} + \frac{4\gamma\delta r_z}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} r_{\rho 0}^2 r_{z 0}^3},\end{aligned}\tag{3.33}$$

reescrevendo (3.33) como um sistema de equações matriciais,

$$\begin{pmatrix} \ddot{\delta r}_\rho \\ \ddot{\delta r}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_\rho \\ \delta r_z \end{pmatrix}\tag{3.34}$$

com os coeficientes dados por

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{3}{r_{\rho 0}^4} + \frac{6\gamma}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} r_{\rho 0}^4 r_{z 0}} - 1 \\ a_{12} &= \frac{2\gamma}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} r_{\rho 0}^3 r_{z 0}^2} \\ a_{21} &= \frac{4\gamma}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} r_{\rho 0}^3 r_{z 0}^2} \\ a_{22} &= \frac{3}{r_{z 0}^4} + \frac{4\gamma}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} r_{\rho 0}^2 r_{z 0}^3} - \lambda^2.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Calculemos então os autovalores e seus autovetores, os quais carregam a informação da fase de oscilação. A partir do seguinte determinante

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \omega_0^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \omega_0^2 \end{pmatrix} = 0,\tag{3.36}$$

temos a equação de segundo grau, $\omega_0^4 - (a_{11} + a_{22})\omega_0^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, para ω_0^2 . Estas são:

$$\omega_0^2 = \begin{cases} a_{22} + a_{12} \left(k - \sqrt{k^2 + 2} \right) \\ a_{22} + a_{12} \left(k + \sqrt{k^2 + 2} \right) \end{cases}\tag{3.37}$$

onde $k = (a_{11} - a_{22})/2a_{12}$. Então, respectivamente, os autovetores são

$$\begin{pmatrix} k - \sqrt{k^2 + 1} \\ 1 \end{pmatrix}\tag{3.38}$$

e

$$\begin{pmatrix} k + \sqrt{k^2 + 1} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Como k é sempre positivo, os autovetores acima são interpretados da seguinte forma: (3.38) representa uma oscilação fora de fase entre R_ρ e R_z (chamando a mesma de quadrupole mode), pois $k < \sqrt{k^2 - 1}$; diferentemente de (3.38), (3.39) representa uma oscilação em fase dos mesmos parâmetros (breathing mode).

3.3.2 Nuvem Contendo um Vórtice Central

No caso de um condensado com um vórtice linha central, é esperado que encontremos três modos de oscilação, sendo os dois primeiros conhecidos (breathing mode e quadrupole mode), e o terceiro seria um novo modo de excitação, o qual chamarei de vortex mode. Porém, ao utilizarmos as equações (3.16), temos dois parâmetros que resulta apenas em duas frequências. Sabendo que o raio do vórtice do condensado é da ordem de seu comprimento de coerência ξ , e que no limite de Thomas-Fermi a nuvem com um único vórtice fundamental e central tem a mesma dimensão e energia de um condensado sem vórtice, aproximaremos o raio do vórtice por ξ de um condensado sem vórtice, assim sendo:

$$\xi = \frac{\pi^{\frac{1}{4}} R_\rho R_z^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{8N} a_s}, \quad (3.40)$$

o qual reescalado de forma adimensional torna-se

$$r_\xi^2 = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} r_\rho^2 r_z}{8\gamma}. \quad (3.41)$$

Agora para obter uma terceira equação diferencial derivemos (3.41) duas vezes,

$$2\dot{r}_\xi^2 + 2r_\xi \ddot{r}_\xi = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} (2\dot{r}_\rho^2 r_z + 2r_\rho \ddot{r}_\rho r_z + 4r_\rho \dot{r}_\rho \dot{r}_z + r_\rho^2 \ddot{r}_z)}{8\gamma}, \quad (3.42)$$

e então, com a mudança nos parâmetros similar à (3.32), linearizamos (3.16) e (3.42) como um único conjunto de equações,

$$\begin{aligned}
\ddot{\delta r}_\rho + \delta r_\rho &= \frac{3\delta r_{\rho 0}}{r_{\rho 0}^4} + \frac{\gamma \delta r_{z 0}}{2(2\pi)^{\frac{1}{2}} r_{\rho 0}^3 r_{z 0}^2} + \frac{3\gamma \delta r_{\rho 0}}{2(2\pi)^{\frac{1}{2}} (r_{\rho 0}^4 r_{z 0})} \\
\ddot{\delta r}_z + \lambda^2 \delta r_z &= \frac{3\delta r_{z 0}}{r_{z 0}^4} + \frac{2\gamma \delta r_{\rho 0}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} r_{\rho 0}^3 r_{z 0}^2} + \frac{2\gamma \delta r_{z 0}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} r_{\rho 0}^2 r_{z 0}^3}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\ddot{\delta r}_\xi = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{16\gamma r_{\xi 0}} \left(2r_{\rho 0} r_{z 0} \ddot{\delta r}_\rho + r_{\rho 0}^2 \ddot{\delta r}_{z 0} \right).$$

Reescrevendo (3.43) de forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \ddot{\delta r}_\rho \\ \ddot{\delta r}_z \\ \ddot{\delta r}_\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_\rho \\ \delta r_z \\ \delta r_\xi \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

com

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{3}{r_{\rho 0}^4} \left(1 + \frac{\gamma}{2(2\pi)^{\frac{1}{2}} r_{z 0}} \right) - 1 \\
a_{12} &= \frac{\gamma}{2(2\pi)^{\frac{1}{2}} r_{\rho 0}^3 r_{z 0}^2} \\
a_{21} &= \frac{2\gamma}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} r_{\rho 0}^3 r_{z 0}^2} \\
a_{22} &= \frac{3}{r_{z 0}^4} + \frac{2\gamma}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} r_{\rho 0}^2 r_{z 0}^3} - \lambda^2 \\
a_{31} &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{16\gamma r_{\xi 0}} (2r_{\rho 0} r_{z 0} a_{11} + r_{\rho 0}^2 a_{21}) \\
a_{32} &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{16\gamma r_{\xi 0}} (2r_{\rho 0} r_{z 0} a_{12} + r_{\rho 0}^2 a_{22}),
\end{aligned} \tag{3.45}$$

tiramos seus autovalores,

$$\omega_0^2 = \begin{cases} k_+ - \sqrt{\Delta} \\ k_+ + \sqrt{\Delta} \\ 0 \end{cases} \tag{3.46}$$

e autovetores,

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{k_+ - \sqrt{\Delta}}{a_{31}} \right) \left\{ 1 - \left[\frac{a_{21}a_{32}}{a_{31}(k_- - \sqrt{\Delta}) - a_{21}a_{32}} \right] \right\} \\ \frac{a_{21}(k_+ - \sqrt{\Delta})}{a_{31}(k_- - \sqrt{\Delta}) - a_{12}a_{32}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{k_+ + \sqrt{\Delta}}{a_{31}} \right) \left\{ 1 - \left[\frac{a_{21}a_{32}}{a_{31}(k_- + \sqrt{\Delta}) - a_{21}a_{32}} \right] \right\} \\ \frac{a_{21}(k_+ + \sqrt{\Delta})}{a_{31}(k_- + \sqrt{\Delta}) - a_{12}a_{32}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Onde $k_{\pm} = (a_{11} \pm a_{22})/2$ e $\Delta = [(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}]/4$. Em (3.46) temos as mesmas frequências de (3.37), e um novo ω_0^2 que é igual a zero. Assim interpretemos esta nova frequência e seu respectivo autovetor (3.49) como: uma oscilação muito pequena no regime de Thomas-Fermi, a qual excita um novo modo coletivo onde apenas o raio do vórtice oscila e o restante da nuvem continua estática. Com respeito ao breathing mode, o vórtice está oscilando em fase com o restante da nuvem; e no quadrupole mode o raio do vórtice está em fase com a componente axial para valores pequenos de λ , já para o caso em que λ é igual ou maior que 1 este, o raio do vórtice, oscila em fase com a componente radial (Figura 3.5). Portanto, no quadrupole mode, o vórtice está em fase com a região de maior confinamento, ou seja, em $\lambda < 1$, a oscilação na direção radial é relativamente maior, já que o condensado acaba sendo bem alongado na direção z ; e para $\lambda > 1$, a oscilação do raio do vórtice estará em fase com a direção axial, devido essa direção ter uma amplitude de oscilação relativamente maior que a oscilação da componente radial.

3.3.3 Condensado com um Vórtice fora de centro

O que falta ser respondido é: quais alterações os modos coletivos terão se o vórtice não for central? Segundo nosso ansatz (3.20), não temos como falar sobre uma oscilação no raio do vórtice do condensado, porém podemos dizer sobre a oscilação de sua posição ρ_0 . Para tanto,

basta utilizar a equação proveniente da equação de Euler-Lagrange (2.21) para o parâmetro $q_i = \varphi_0$, ou seja, a quarta equação de (3.26). Sendo essa $r_\rho \dot{r}_{\rho_0} - r_{\rho_0} \dot{r}_\rho = 0$, então

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{r_{\rho_0}}{r_\rho} \right) = 0. \quad (3.50)$$

Portanto, já que a derivada em t da razão r_{ρ_0}/r_ρ é nula, essa razão necessariamente é uma constante. Essa constante deve ser positiva para que tenha sentido físico. Assim, concluímos que a posição do vórtice r_{ρ_0} oscilará em fase com o raio do condensado r_ρ . Desta maneira, as quatro equações de (3.26) são reduzidas a apenas duas, o que sugere dois modos normais de vibração (breathing mode e quadrupolar mode). Nestes modos a nuvem condensada conterá, além da própria excitação coletiva, uma precessão com velocidade constante da posição do vórtice. Assim sendo, o comportamento do vórtice fora de centro no condensado, durante um excitação coletiva, tem como análogo clássico o movimento de órbita acrescentado de uma nutação.

3.4 Resultados Numéricos

Para encontrar as raízes de (3.5) e (3.17) foi usado o método de Newton[51], ao encontrar as raízes calculamos como a energia varia em função do parâmetro de interação γ e da anisotropia do potencial harmônico λ (Figura 3.2). Então, nesta mesma figura, é observado uma aproximação das duas linhas de energias (casos com e sem vórtice) conforme temos um condensado com uma maior interação atômica, ou seja, no regime de gás ideal temos duas linhas distintas na energia, mas conforme vamos nos aproximando do regime de Thomas-Fermi a energia de ambos os casos se torna uma só. Isso justifica nossa aproximação feita para estimar o raio do vórtice, como da ordem do comprimento de coerência da nuvem sem vórtice. Segundo

$$\Omega_c = \frac{E_v}{N\hbar} = \frac{E_e - E_f}{N\hbar}, \quad (3.51)$$

podemos inferir que a velocidade angular crítica para formação do vórtice diminui em função do parâmetro de interação γ e do parâmetro de anisotropia da armadilha λ . Classicamente podemos interpretar que se precisa de maior energia de rotação quanto menor a densidade do fluido, para o mesmo formar um vórtice.

Ao graficarmos os perfis de densidade $|\Psi|^2$, em z e t iguais a zero, comparamos os perfis para a nuvem condensada com as seguintes anisotropias: $\lambda = 0.1, 1, 10$. Assim, a Figura 3.1 mostra como a densidade do condensado é maior, no plano $z = 0$, de acordo com o maior confinamento na direção axial, uma vez que o confinamento radial é mantido constante. Portanto, pode-se observar que: o raio do vórtice é menor quando temos um maior confinamento axial, pelo mesmo ser inversamente proporcional à raiz quadrada da densidade ($\xi \propto 1/\sqrt{U_0|\Psi|^2}$), ou seja, o raio do vórtice é inversamente proporcional ao termo que confere o potencial de interação atômica ($U_0 |\Psi|^2$).

Figura 3.1 - Densidade $|\Psi(\rho, z)|^2$ da nuvem sem e com vórtice respectivamente, em $z = 0$. Onde a linha pontilhada representa a gaussiana segundo o regime de Thomas-Fermi.

Definimos o aspect ratio A como a razão do comprimento radial pelo axial, dada por:

$$A_f = \frac{R_\rho \sqrt{2}}{R_z} = \frac{r_\rho \sqrt{2}}{r_z} \quad \text{e} \quad A_e = \frac{2R_\rho}{R_z} = \frac{2r_\rho}{r_z}. \quad (3.52)$$

Observe que: em A_f os parâmetros r_ρ e r_z não são os mesmos aos usados em A_e . Como A_f é o aspect ratio de uma nuvem sem vórtice, os parâmetros r_ρ e r_z são calculados em (3.5). O mesmo poderia dizer para A_e , onde r_ρ e r_z são extraídos de (3.17). Vimos que a razão A_e/A_f é sempre maior que 1, o que significa que a nuvem com a presença de um vórtice é sempre maior que a nuvem sem o vórtice. Esta razão muda de acordo com o tipo de armadilha, sendo maior para armadilha do tipo prolate diminuindo conforme achatamos o condensado, tornando a armadilha esférica e por sua vez oblate; este fato é consistente por termos que: no limite de altas interações ($\gamma \rightarrow \infty$) a razão A_e/A_f tende a um (Figura 3.3). Da mesma maneira que suas energias (fundamental e estado com vórtice) se igualam no mesmo limite. Segundo nosso potencial (2.2), estamos fixando ω_ρ e variando ω_z , ou seja, variando o parametro de anisotropia λ . Portanto, ao manter o confinamento radial sempre igual, tem-se a mudança na energia de interação conforme mudamos o formato do potencial harmônico, pois quanto maior a anisotropia maior será a energia de interação da nuvem condensada (maior repulsão) devido ao grande confinamento.

Na Figura 3.4 temos o que seria experimentalmente uma imagem de absorção[52], definida como uma integral da densidade na direção perpendicular à imagem formada,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\rho, \varphi, z)|^2 dz = I(\rho, \varphi) = I(x, y); \quad (3.53)$$

na mesma figura a parte branca representa a nuvem, quanto mais branco maior a densidade atômica. Observe que o density plot da Figura 3.4, para a nuvem sem vórtice, não ficou bom, pois nela há imperfeições nas bordas do condensado, as quais não existem. Ambos condensados são perfeitamente arredondados nas bordas, assim como o vórtice também deve ser.

Utilizando de um “kick” na amostra foi excitado simultaneamente todos os modos normais de vibração, este “kick” foi apenas a inserção de um pequeno δ nas condições iniciais da amostra,

Figura 3.2 - Energia como função da anisotropia da armadilha λ e interação γ .

Figura 3.3 - Razão A_e/A_f como função de λ e γ , respectivamente.

Figura 3.4 - Imagem de absorção na escala do comprimento do oscilador ($\lambda = 10$ e $\gamma = 800$).

fazendo com que a mesma oscilasse, resolvendo as equações (3.11) e (3.16) pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem (Figura 3.5).

Figura 3.5 - Excitações coletivas calculadas em $\gamma = 800$. Sendo os gráficos à esquerda calculados em $\lambda = 0.2$, e os gráficos da direita em $\lambda = 2$. Gerados por um $\delta\rho = 0.01$ e um $\delta z = -0.01$. Neste caso ambas excitações coletivas foram excitadas (breathing e quadrupole mode).

4 Vórtice num Condensado em Expansão Livre

No capítulo 3 foi feita uma análise do condensado em na armadilha harmônica, ou seja, suas condições iniciais para a expansão livre, também obtivemos os modos de excitação coletiva e a precessão do vórtice no condensado harmonicamente confinado. Agora veremos as equações de movimento e o comportamento para a nuvem em vôo livre, utilizando de métodos numéricos para resolver as equações acopladas não-lineares correspondentes.

4.1 Equações de Movimento

A expansão livre consiste, experimentalmente, em desligar o potencial harmônico da armadilha, portanto basta retirarmos o termo referente ao potencial harmônico da lagrangeana, o que é o mesmo que retirá-lo das equações de movimento, para obtermos a evolução temporal do vôo livre. Assim as equações de movimento ficarão apenas com os termos cinético e de interação atômica. E então, usaremos as soluções estacionárias como condições iniciais para a expansão.

4.1.1 Condensado sem Vórtice

Ao negligenciarmos os termos do potencial harmônico de (3.11), r_ρ e $\lambda^2 r_z$, as mesmas se tornam

$$\begin{aligned}\ddot{r}_\rho &= \frac{1}{r_\rho^3} + \frac{2\gamma}{(2\pi)^{1/2} r_\rho^3 r_z}, \\ \ddot{r}_z &= \frac{1}{r_z^3} + \frac{2\gamma}{(2\pi)^{1/2} r_\rho^2 r_z^2}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

À partir de sua nova lagrangeana

$$\begin{aligned}
L = -N \left\{ \frac{\hbar}{4} (2\dot{\beta}_\rho R_\rho^2 + \dot{\beta}_z R_z^2) + \frac{\hbar^2}{4m} \left[2 \left(\beta_\rho^2 R_\rho^2 + \frac{1}{R_z^2} \right) + \beta_z^2 R_z^2 + \frac{1}{R_z^2} \right] \right. \\
\left. + \frac{NU_0}{2(2\pi)^{3/2} R_\rho^2 R_z} \right\}, \quad (4.2)
\end{aligned}$$

onde

$$\beta_j = \frac{m}{\hbar} \frac{\dot{R}_j}{R_j}, \quad j = \rho, z. \quad (4.3)$$

4.1.2 Vórtice Central

Os mesmos termos negligenciados em (3.11) serão retirados de (3.16), as quais são escrita como

$$\begin{aligned}
\ddot{r}_\rho &= \frac{1}{r_\rho^3} + \frac{\gamma}{2(2\pi)^{1/2} r_\rho^3 r_z} \\
\ddot{r}_z &= \frac{1}{r_z^3} + \frac{\gamma}{(2\pi)^{1/2} r_\rho^2 r_z^2}, \quad (4.4)
\end{aligned}$$

sendo emergidas da lagrangeana

$$\begin{aligned}
L = -N \left\{ \frac{\hbar}{4} (4\dot{\beta}_\rho R_\rho^2 + \dot{\beta}_z R_z^2) + \frac{\hbar^2}{4m} \left[2 \left(\beta_\rho^2 R_\rho^2 + \frac{1}{R_\rho^2} \right) + \beta_z^2 R_z^2 + \frac{1}{R_z^2} \right] \right. \\
\left. + \frac{NU_0}{4(2\pi)^{3/2} R_\rho^2 R_z} \right\}, \quad (4.5)
\end{aligned}$$

com β_j dado por (4.3), onde $j = \rho, z$.

Aqui também será usado a aproximação (3.41) para a evolução temporal do raio do vórtice.

4.1.3 Precessão

Para a precessão os termos a serem negligenciados nas equações de movimento são mais complicados. No entanto, o que é importante observar é: ao retirarmos o potencial esperamos que $\dot{\varphi}_0$ não seja mais constante, e o movimento angular não seja mais uniforme. Sendo sua lagrangeana dada por:

$$\begin{aligned}
L_{time} &= -\frac{N\hbar}{4} \left[\frac{R_\rho^4 \dot{B}_\rho + R_\rho^2 (2\rho_0^2 \dot{B}_\rho + R_z^2 \dot{B}_z) + \rho_0^2 (R_z^2 \dot{B}_z + \dot{\varphi}_0)}{R_\rho^2 + \rho_0^2} \right] \\
L_{kin} &= -\frac{N\hbar^2}{4m} \left[1 + \frac{(2 + B_\rho^2 R_\rho^4) (2R_\rho^2 + \rho_0^2)}{(R_\rho^4 + R_\rho^2 \rho_0^2)} + B_z^2 R_z^2 \right] \\
L_{int} &= -\frac{N^2 U (R_\rho^4 + 4R_\rho^2 \rho_0^2 + 2\rho_0^4)}{8\sqrt{2}\pi^{3/2} R_\rho^2 R_z (R_\rho^2 + \rho_0^2)^2}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Ao utilizando os argumentos da subseção 3.3.3, inferimos que, de acordo com (3.50), a posição do centro do vórtice será proporcional ao raio da nuvem condensada. Portanto, durante a expansão, ρ_0 terá as mesmas velocidade e aceleração que R_ρ .

4.2 Resultados Numéricos

Para resolver as equações de movimento do presente capítulo fizemos uso do método numérico de Runge-Kutta de 4ª ordem, utilizando as condições iniciais calculadas na seção 3.4.

A inversão do aspect ratio (dada no instante de tempo em que o aspect ratio é igual a 1, isto é, o momento no qual os raios se tornam iguais) no caso de um condensado de formato alongado ($\lambda = 0.1$) dá-se em torno dos 8ms, coincidindo com os dados experimentais. Quando há uma nuvem condensada de formato esférico ($\lambda = 1$) não há mudança no aspect ratio em ambos os casos, com e sem vórtice central; assim vemos que o acrescimento na energia cinética, introduzido pelo vórtice, é muito pequeno para que haja uma mudança quando o mesmo tem um formato esférico. Portanto, a pressão quântica acrescida da pressão de interação, isto é, a soma delas, é igual em ambas direções (ρ e z), devido ao confinamento inicial ser o mesmo nessas duas direções. Para os demais formatos iniciais ($\lambda \neq 1$) há uma diminuição no tempo de inversão de aspect ratio causada pelo crescimento do vórtice (Figura 4.1), ou seja, além da pressão de interação (repulsiva), temos a energia centrífuga acrescentando na energia cinética, junto ao termo de pressão quântica, os quais contribuem com a expansão livre. Note que, na Figura 4.1 b), o aspect ratio do condensado sem vórtice está maior que o outro aspect ratio. Isso se deve à maneira como definimos os $\Delta\rho$ e Δz em (3.2), fazendo com que o aspect ratio esteja multiplicado por um fator de $\sqrt{2}$. Ao dividir o aspect ratio da nuvem sem vórtice, da Figura 4.1 b), por este fator, o resultado é uma linha em 1, ou seja, o condensado é perfeitamente esférico em $\lambda = 1$.

Constatamos também que para baixas interações o condensado sem vórtice expande a ponto de ficar maior com relação ao condensado contendo um vórtice central, que no início era maior (Figura 4.2), quando os mesmos são alongados, sendo assim uma interação muito mais fraca. Com isso, o acrescimento do vórtice diminuiu significativamente a energia de interação, e seu acrescimento com a energia centrífuga é mínimo no contexto de baixa interação ($\gamma < 10$) com

$\lambda = 0.1$. Observe que em $\gamma = 10$, para o caso de $\lambda = 0.1$, a taxa de expansão do condensado, na presença do vórtice central, é a mesma que para o uma nuvem atômica sem vórtice. O que resulta na razão de seus aspect ratio ser a mesma, antes e após a expansão livre (isso quer dizer: durante todo o processo de expansão).

Com respeito à evolução temporal do raio do vórtice, tem-se que o mesmo sempre expande mais rápido que a nuvem nos primeiro milisegundos, com esta velocidade diminuindo proporcionalmente ao decrescimento do gradiente de densidade, e se aproximando do regime do gás ideal. De modo, que para condensados mais alongados ($\lambda < 1$) essa velocidade é da ordem da velocidade de expansão do raio da nuvem (Figura 4.4), pois a velocidade de expansão do raio do vórtice está diretamente ligado com a expansão na direção axial, a qual é menor quando, inicialmente, temos um potencial harmônico do tipo prolate. Como estamos considerando apenas interação repulsiva $\gamma \gg 1$, então a porção do condensado, onde a densidade é zerada pelo vórtice, é menor quando γ ou/e λ são maiores[23]. Isto explica a dificuldade em se fazer experimentos com vórtice *insitu*, ou seja, os vórtices são muito pequenos quando ainda o condensado está armadilhado.

Nas Figuras 4.2 e 4.3, definimos longos tempos como sendo: o instante em que, já não há mudanças significativas no aspect ratio.

(a) $\lambda = 0.1$. (b) $\lambda = 1$. (c) $\lambda = 10$.**Figura 4.1** - Expansão do aspect ratio para diferentes condições iniciais, $\omega_p = 2\pi (207) \text{ Hz}$ com $\gamma = 800$.

(a) Após um longo tempo em expansão livre.

(b) Para $\lambda = 0.1$. (c) Para $\lambda = 1$. (d) Com $\lambda = 10$.**Figura 4.2** - Razão A_e/A_f em função da interação γ . (a) Para $\gamma = 20$. (b) Para $\gamma = 800$.**Figura 4.3** - Razão A_e/A_f em função da anisotropia λ .

(a) Linhas cheias representam r_ξ , e as linhas apontilhada $\Delta\rho$.

(b) Razão entre o raio do vórtice e o raio da nuvem.

Figura 4.4 - Expansão no tempo, com $\omega_p = 2\pi(207) Hz$ e $\gamma = 800$.

(a) Gráfico de $r_{\rho 0}(\tau)$, ou seja, a evolução temporal da posição do centro do vórtice durante a expansão como foi descrita na subsecção 4.1.3.

(b) Gráfico da velocidade angular de precessão $\dot{\phi}_0(\tau)$, a qual vai a zero, durante a expansão, num periodo de tempo muito curto, antes mesmo da inversão do aspect ratio. Podendo observar um tempo menor de precessão conforme a anisotropia inicial da armadilha (λ) é maior, pois nestes casos estamos num regime de maior energia devido ao maior confinamento em z .

(c) Evolução temporal do aspect ratio para $\lambda = 0.1$.

(d) Evolução temporal do aspect ratio para $\lambda = 10$.

Figura 4.5 - Conjunto de gráficos gerados a partir das equações das secções sobre precessão ($\gamma = 800$). Por razões de cunho numérico, não foi possível fazer esses gráficos para tempos mais longos.

5 Vórtice Não-fundamental

Nos capítulos 3 e 4, obtivemos a dinâmica de um Condensado de Bose-Einstein contendo um vórtice fundamental (ou seja, circulação $\ell = 1$). Nestes capítulos foram exploradas as propriedades do mesmo, o condensado, enquanto confinado na armadilha e em seguida sua expansão livre da mesma. No presente capítulo faremos uma generalização para o caso de uma nuvem atômica com circulação ℓ maior que um, focando no fato de não termos perturbação no estado condensado à temperatura zero. Assim sendo, veremos um vórtice central com maior circulação, o qual não decairá por falta de uma perturbação, que pode ser o caso da presença da nuvem térmica ou uma perturbação na frequência da armadilha (uma oscilação do comprimento de espalhamento a_s via ressonância de Feshback).

5.1 Ansatz

Obtendo uma solução aproximada para a equação (2.27) para amplitude f no caso $\rho \ll \xi$. Assim, para este caso os termos dominantes da equação (2.27) emergem da energia cinética, isto é, as derivadas associadas com relação à ρ . Portanto, negligenciando todos os outros termos, sobra apenas

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) \right] + \frac{\hbar^2 \ell^2}{2m \rho^2} f = 0. \quad (5.1)$$

Resolvendo para f com dependência em ρ

$$f = c \rho^\ell, \quad (5.2)$$

onde c é uma constante. No caso contrário, $\xi \ll \rho$, usaremos a solução gaussiana. Deste modo, nosso novo ansatz é

$$\psi_\ell(\rho, \varphi, z, t) = A_\ell(t) \rho^\ell e^{i\ell\varphi} e^{-\rho^2/2R_\rho(t)^2} e^{-z^2/2R_z(t)^2} \exp \left[i\beta_\rho(t) \frac{\rho^2}{2} \right] \exp \left[i\beta_z(t) \frac{z^2}{2} \right], \quad (5.3)$$

sendo $A_\ell(t)$ obtido pela normalização 2.4

$$A_\ell = \sqrt{\frac{N}{\pi^{\frac{3}{2}} R_\rho^{2\ell+2} R_z \Gamma(\ell+1)}}, \quad (5.4)$$

onde $\Gamma(n)$ é a função Gamma. Como ℓ é o número quântico de circulação no vórtice central tipo linha; ao fazer $\ell = 0$, recuperamos o ansatz para um condensado sem vórtice (3.1). Portanto, utilizando este ansatz temos a descrição desde um condensado sem vórtice até condensados com um vórtice central não-fundamental estável. Note que os parâmetros β_ρ e β_z nos fornecerão as variações das inclinações, referentes a ρ e z , no tempo (fornecendo a velocidade com que a gaussiana expande, no caso do vôo livre). Devemos ter cuidado com os parâmetros R_ρ e R_z , pois estes para uma nuvem sem vórtice nos fornece os raios; no entanto, para quando temos um vórtice central os mesmo já não representam os raios da nuvem atômica, neste caso, R_ρ nos fornecer a largura da gaussiana a menos de um fator de escala, sendo o pico desta em $R_\rho \sqrt{\ell}$. Levando em conta estes detalhes iremos definir os raios, como feito anteriormente, por

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \quad (5.5)$$

sendo $x = \rho, z$, com $\langle x \rangle = 0$. Portanto, as extensões da nuvem serão

$$\begin{aligned} \Delta \rho &= R_\rho \sqrt{\frac{\Gamma(\ell+2)}{\Gamma(\ell+1)}} = R_\rho \sqrt{\ell+1} \\ \Delta z &= \sqrt{\frac{1}{2}} R_z. \end{aligned} \quad (5.6)$$

5.2 Equações de Movimento

Apliquemos agora os procedimentos descritos no capítulo 2, e assim escrevemos as equações de movimento e a energia com os parâmetros da função de onda (5.3) reescalados para

$$R_\rho(t) = r_\rho(t) \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_\rho}}, \quad R_z(t) = r_z(t) \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_\rho}} \quad \text{e} \quad \tau = \omega_\rho t; \quad (5.7)$$

portanto a energia funcional (2.22) é dada por

$$E_\ell = N\hbar\omega_\rho \left[\frac{(\ell+1)}{2} \left(\frac{1}{r_\rho^2} + r_\rho^2 \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r_z^2} + \lambda^2 r_z^2 \right) + \frac{\gamma \Gamma(\ell + \frac{1}{2})}{\sqrt{2}\pi \Gamma(\ell+1) r_\rho^2 r_z} \right]. \quad (5.8)$$

E as equações de movimento dadas por

$$\begin{aligned}
\ddot{r}_\rho + r_\rho &= \frac{1}{r_\rho^3} + \frac{\gamma (\ell + 1) \Gamma (2\ell + 1)}{2^{2\ell-1} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \Gamma (\ell + 2)^2 r_\rho^3 r_z} \\
\ddot{r}_z + \lambda^2 r_z &= \frac{1}{r_z^3} + \frac{\gamma \Gamma (2\ell + 1)}{2^{2\ell-1} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \Gamma (\ell + 1)^2 r_\rho^2 r_z^2}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Portanto pode-se observar em (5.8) e (5.9) que o fato de se ter um vórtice central não-fundamental, tem influência tanto na energia cinética quanto no potencial de interação. Comparando o caso em que a nuvem atômica não tem vórtice ($\ell = 0$) com os demais ($\ell \geq 1$) podemos inferir que: Com o aumento da circulação, a energia cinética cresce e a energia de interação atômica diminui (Figura 5.3); como o vórtice está centrado, temos o mesmo ocupando uma posição onde deveria haver uma maior densidade atômica. E isso explica o fato da interação diminuir com o aumento da circulação.

5.2.1 Solução Estacionária

Ao avaliar a solução estacionária, obtida zerando as velocidades e acelerações de (5.9)

$$\begin{aligned}
r_{\rho 0}^4 &= 1 + \frac{\gamma \Gamma (2\ell + 1)}{2^{2\ell-1} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \Gamma (\ell + 2) \Gamma (\ell + 1) r_{z0}} \\
\lambda^2 r_{z0}^4 &= 1 + \frac{\gamma \Gamma (2\ell + 1) r_{z0}}{2^{2\ell-1} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \Gamma (\ell + 1)^2 r_{\rho 0}^2},
\end{aligned} \tag{5.10}$$

temos que no limite de grandes γ (regime de Thomas-Fermi) o termo cinético pode ser desconsiderado apenas no caso de ℓ pequeno, ou seja,

$$\begin{aligned}
r_{\rho 0}^4 &= \frac{\gamma \Gamma (2\ell + 1)}{2^{2\ell-1} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \Gamma (\ell + 2) \Gamma (\ell + 1) r_{z0}} \\
\lambda^2 r_{z0}^3 &= \frac{\gamma \Gamma (2\ell + 1)}{2^{2\ell-1} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \Gamma (\ell + 1)^2 r_{\rho 0}^2}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

De modo que, no caso de $\ell \gg 1$ apenas é negligenciado a parte cinética com relação à r_z , o que nos remete a

$$\begin{aligned}
r_{\rho 0}^4 &= 1 + \frac{\gamma \Gamma (2\ell + 1)}{2^{2\ell-1} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \Gamma (\ell + 2) \Gamma (\ell + 1) r_{z0}} \\
\lambda^2 r_{z0}^4 &= \frac{\gamma \Gamma (2\ell + 1) r_{z0}}{2^{2\ell-1} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \Gamma (\ell + 1)^2 r_{\rho 0}^2}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Portanto a mesma análise é válida nas equações de movimento (5.9).

5.2.2 Expansão Livre

Negligenciando o termo vindo do potencial harmônico da armadilha em (5.9) tem-se as equações do vôo livre:

$$\begin{aligned} \ddot{r}_\rho &= \frac{1}{r_\rho^3} + \frac{\gamma(\ell+1)\Gamma(2\ell+1)}{2^{2\ell-1}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma(\ell+2)^2 r_\rho^3 r_z} \\ \ddot{r}_z &= \frac{1}{r_z^3} + \frac{\gamma\Gamma(2\ell+1)}{2^{2\ell-1}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma(\ell+1)^2 r_\rho^2 r_z^2}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Como novamente não temos um parâmetro variacional para o raio do vórtice, utilizaremos a mesma aproximação feita na secção 3.3.2. Generalizando a mesma

$$r_\xi^{(\ell)} = \pi^{\frac{1}{4}} r_\rho^{(\ell)} \sqrt{\frac{r_z^{(\ell)}}{8\gamma}}. \quad (5.14)$$

5.3 Resultados Numéricos

Resultados obtidos com os mesmos métodos numéricos dos capítulos anteriores, para as equações (5.10),(5.11),(5.12) e (5.13). Com a Figura 5.1, concluímos que o perfil de densidade aproxima-se de um Thomas-Fermi para λ grande, nos casos de $\ell > 1$. E então, quando ℓ é zero ou um a gaussiana tem a mesma largura que a aproximação de Thomas-Fermi da mesma. O fato, de quanto maior é o confinamento na direção z mais próximo do perfil de Thomas-Fermi será, é dado pelo aumento da energia de interação atômica como pode ser vista na Figura 5.4.

De acordo com o que vimos no capítulo 3, a energia de $\ell = 0$ e $\ell = 1$ se aproximam e chegam a ser a mesma nos limites de grandes λ , e/ou de grandes γ (regime de Thomas-Fermi). Mas por outro lado, as energias de $\ell > 1$ mantem um shift com as duas primeiras, mostrando que a amostra é mais energética quando o vórtice é não-fundamental (Figura 5.3). Ao separar as contribuições das energias ($E = E_{cin} + E_{pot} + E_{int}$) temos a expliação para tanto. Isto, deve-se ao fato da energia de interação diminuir de maneira assintótica indo a zero, enquanto a energia cinética aumenta quase linearmente, da mesma maneira que a energia provida do potencial harmônico, com o aumento da circulação. Portanto, a energia do potencial hamônico fica muito maior que a energia de interação atômica e a energia cinética (Figura 5.4), conforme acrescentamos momentum angular ao condensado.

(a) $\lambda = 0.1$. (b) $\lambda = 1$. (c) $\lambda = 10$.

Figura 5.1 - Perfil de densidade como função de ρ , em $z = 0$. Sendo a linha cheia a gaussiana normal, e a linha tracejada a gaussiana com a aproximação de Thomas-Fermi. Note que a escala de cada figura está diferente.

(a) $\lambda = 0.1$. (b) $\lambda = 1$. (c) $\lambda = 10$.

Figura 5.2 - Expansão livre. Variação do aspect ratio nas respectivas armadilhas: prolate ($\lambda = 0.1$), esférico ($\lambda = 1$) e oblate ($\lambda = 10$).

Figura 5.3 - Energia funcional em função do tipo de armadilha, à cima, e em função da interação, à baixo.

Durante a expansão, a inversão do aspect ratio se dá com maior rapidez, para condições iniciais de $\lambda \neq 1$, de acordo com a quantidade de momentum angular (Figura 5.2). Por exemplo, um condensado com $\ell = 3$ tem seu aspect ratio invertido num tempo menor do que um condensado com ℓ igual a 0, 1 e 2; porém num tempo maior do que condensados com $\ell \geq 4$. Para $\lambda < 1$, o aspect ratio após um longo tempo é maior de acordo com a número de circulação da nuvem atômica, ou seja, ao passo que aumentamos o momentum angular, aumentamos também o tamanho da nuvem. O que resulta num aspect ratio numericamente maior, com o mesmo se mantendo maior durante toda expansão. No caso de $\lambda > 1$, temos o mesmo comportamento descrito para $\lambda < 1$, com a exceção da nuvem sem vórtice ($\ell = 0$). No entanto, se descontarmos o valor de $\sqrt{2}$ do aspect ratio, como discutido anteriormente na seção 4.2. Essa discussão se aplica também aqui, na Figura 5.2 b), ou seja, $\lambda = 1$.

De acordo com a seção 4.2, o vórtice tem um raio cada vez menor de acordo com os parâmetros λ e/ou γ serem cada vez maiores. Agora inferimos maiores informações quando a alteração do mesmo com a mudança no número de circulação ℓ . A energia centrífuga aumenta com o quadrado do número de circulação,

$$E_{centrifuga} = \frac{\hbar^2 \ell^2}{2m\rho^2}, \quad (5.15)$$

concluindo então que o raio do vórtice é da ordem de $\ell\xi$, para o condensado de respectivo quanta de circulação ℓ . Isso explica a expansão “explosiva” em condensados contendo um grande vórtice central, ou seja, baixa pressão de interação, porém com uma grande pressão advinda da energia centrífuga.

Figura 5.4 - Energia como função do número de circulação ℓ , com $\gamma = 800$.

6 Discussões

No presente trabalho estudamos um condensado de Bose-Einstein com um vórtice, usando uma aproximação variacional para um ansatz gaussiano. Foram derivadas as equações de movimento para os parâmetros variacionais, os quais descrevem aproximadamente as extensões espaciais através de $\Delta\rho$ e Δz , a posição do vórtice ρ_0 e φ_0 , e uma aproximação ξ que estima o tamanho do raio do vórtice. Então estudamos os modos coletivos gerados por uma perturbação que põe o condensado fora do equilíbrio, e os resultados de cunho numérico das equações de movimento na situação de expansão livre.

Assim, adquirimos pistas sobre um possível novo modo de oscilação para vórtice, a qual a frequência de oscilação vai a zero no limite de grande interação. Além de obtermos a maneira com que o raio do vórtice oscila nos breathing e quadrupole modes, em realação aos raios da nuvem. Constatamos que, no regime de Thomas-Fermi, as extensões da nuvem atômica não se alteram na presença de um vórtice fundamental, assim como a energia não se altera. Obtivemos o resultado conhecido por simulações numéricas a respeito da razão entre os raios, do vórtice e da nuvem. Também certificamos as suspeitas sobre o movimento de órbita quando o condensado está em expansão livre, resultado o qual é o congelamento do movimento de órbita (precessão) após pouco tempo que o potencial harmônico é desligado. Para o caso de um vórtice central não-fundamental ($\ell > 1$) concluímos que o aumento da circulação tem efeito, não só na pressão quântica (parte cinética), como também na pressão de interação devido que diminui.

De acordo com nosso método variacional afirmamos que o mesmo não é um método bom quando se quer um resultado quantitativo satisfatório para um grande número de parâmetros variacionais, no entanto conseguimos retirar muita física com o mesmo método. Deste modo, os resultados para o vórtice central são quantitativamente bons no regime de Thomas-Fermi, mas sendo apenas qualitativamente satisfatório no caso do movimento de precessão do vórtice, devido ao nosso ansatz ser gaussiano e a falta de um parâmetro que restrinja o tamanho do raio do vórtice.

6.1 Trabalhos Futuros

Para dar continuação a esse estudo iremos explorar mais a fundo a possível nova excitação coletiva, vortex mode, utilizando um novo ansatz não gaussiano baseado na função de onda da

aproximação de Thomas-Fermi (2.7), e assim escrevemos a nova função de onda como

$$\psi(\rho, z, \varphi, t) = C(t) \sqrt{\frac{\rho^2}{\rho^2 + R_\rho(t)^2 \beta(t)^2} \left\{ 1 - \left[\frac{\rho}{R_\rho(t)} \right]^2 - \left[\frac{z}{R_z(t)} \right]^2 \right\}} e^{i\varphi + iB_\rho(t)\rho^2 + iB_z(t)z^2}, \quad (6.1)$$

onde $\beta(t)$ é a razão $\xi(t)/R_\rho(t)$. Implementando também um deslocamento do vórtice do centro do condensado de Bose-Einstein, esperando obter um resultado qualitativamente melhor para a expansão já estudada, assim como: talvez mais um novo modo de oscilação o qual descreveria algo como um movimento de nutação do vórtice, além da precessão do mesmo.

A ressonância de Feshbach, que permite a variação do comprimento de espalhamento via um campo magnético, é uma das mais promissoras ferramentas para manipulação das propriedades dos condensados de Bose-Einstein e tem sido investigado, experimentalmente e teoricamente, para excitar os modos coletivos. Como o estado de vórtice tem de fato um modo coletivo do condensado, com esta técnica podemos investigar se o estado com vórtice não-fundamental pode ser estabilizado ou não. Onde modularemos o comprimento de espalhamento por

$$a_s(t) = a_0 + a_1 \cos(\Omega t), \quad (6.2)$$

explorando possíveis estabilidades quando a_s for negativo, ou seja, uma interação atômica atrativa.

Referências

- 1 KETTERLE, W. The magic of matter waves. *MIT Physics Annual*, p. 44–49, 2001.
- 2 BOSE, S. N. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, v. 26, n. 1, p. 178–181, 1924.
- 3 EINSTEIN, A. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, p. 261–267, 1924.
- 4 EINSTEIN, A. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases II. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, p. 3–14, 1925.
- 5 ANDERSON, M. H. et al. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, v. 269, n. 5221, p. 198–201, 1995. DOI: 10.1126/science.269.5221.198.
- 6 DAVIS, K. B. et al. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Physical Review Letters*, v. 75, n. 22, p. 3969–3973, 1995.
- 7 DALFOVO, F. et al. Theory of Bose-Einstein condensate in trapped gases. *Reviews of Modern Physics*, v. 71, n. 3, p. 463–512, April 1999.
- 8 ZÖLLER, N. *A single vortex in a Bose-Einstein condensate. 2010. 31p.* Tese (Bachelor) — Fachbereich Physik, Freie Universität Berlin, Berlin, 2010.
- 9 AFTALION, A. *Vortices in Bose-Einstein condensates.* Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2006. (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, v. 67).
- 10 MATTHEWS, M. R. et al. Vortices in Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*,

- v. 83, p. 2498–2501, 1999.
- 11 CHEVY, F.; MADISON, K. W.; DALIBARD, J. Measurement of the angular momentum of a rotating Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*, v. 85, p. 2223–2227, 2002.
- 12 HODBY, E. et al. Vortex nucleation in Bose-Einstein condensates in an oblate, purely magnetic potential. *Physical Review Letters*, v. 88, n. 1, p. 010405, 2001.
- 13 BRETIN, V. et al. Quadrupole oscillation of a single-vortex Bose-Einstein condensate: evidence for Kelvin modes. *Physical Review Letters*, v. 90, n. 10, p. 100403, 2003.
- 14 O'DELL, D. H. J.; EBERLEIN, C. Vortex in a trapped Bose-Einstein condensate with dipole-dipole interactions. *Physical Review A*, v. 75, n. 1, p. 013604, 2007.
- 15 SVIDZINSKY, A. A.; FETTER, A. L. Stability of a vortex in a trapped Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*, v. 84, n. 26, p. 5919–5923, 2000.
- 16 HENN, E. A. L. et al. Observation of vortex formation in an oscillating trapped Bose-Einstein condensate. *Physical Review A*, v. 79, n. 4, p. 043618, 2009.
- 17 SEMAN, J. A. et al. Three-vortex configurations in trapped Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, v. 82, n. 3, p. 033616, 2010.
- 18 HENN, E. A. L. et al. Emergence of turbulence in an oscillating Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*, v. 103, n. 4, p. 045301, July 2009.
- 19 RAMOS, E. R. F. *Dinâmica das excitações dos modos coerentes topológicos em um condensado de Bose-Einstein*. 2006. 74p. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.
- 20 PETHICK, C. J.; SMITH, H. *Bose-Einstein condensation in dilute gases*. 2nd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- 21 PÉREZ-GARCÍA, V. M. et al. Dynamics of bose-einstein condensates: variational solutions

- of the gross-pitaevskii equations. *Physical Review A*, v. 56, n. 2, p. 1424–1432, August 1997.
- 22 PÉREZ-GARCÍA, V. M. et al. Low energy excitations of a bose-einstein condensate: a time-dependent variational analysis. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 27, p. 5320–5323, December 1996.
- 23 DALFOVO, F.; MODUGNO, M. Free expansion of Bose-Einstein condensates with quantized vortices. *Physical Review A*, v. 61, n. 2, p. 023605, January 2000.
- 24 LUNDH, E.; PETHICK, C. J.; SMITH, H. Vortices in Bose-Einstein-condensed atomic clouds. *Physical Review A*, v. 58, n. 6, p. 4816–4823, December 1998.
- 25 BARENGHI, C. F.; SERGEEV, Y. A. *Vortices and turbulence at very low temperatures*. New York: SpringerWienNewYork, 2008.
- 26 ROSENBUSCH, P. et al. Critical rotation of a harmonically trapped bose gas. *Physical Review Letters*, v. 88, n. 25, p. 250403, June 2002.
- 27 DTRINGARI, S. Phase diagram of quantized vortices in a trapped bose-einstein condensed gas. *Physical Review Letters*, v. 82, n. 22, p. 4371–4375, May 1999.
- 28 CARRETERO-GONZÁLEZ, R. et al. Dynamics of vortex formation in merging Bose-Einstein condensate fragments. *Physical Review A*, v. 77, n. 3, p. 033625, 2008.
- 29 WILLIAMS, J.; HOLLAND, M. Preparing topological states of a bose-einstein condensate. *Nature (London)*, v. 401, n. 6753, p. 568–572, 1999.
- 30 DENSCHLAG, J. et al. Generating solitons by phase engineering of a bose-einstein condensate. *Science*, v. 287, n. 5450, p. 97–101, January 2000.
- 31 ROSENBUSCH, P.; BRETIN, V.; DALIBARD, J. Dynamics of a single vortex line in a bose-einstein condensate. *Physical Review Letters*, v. 89, n. 20, p. 200403, November 2002.
- 32 ABO-SHAER, J. R.; RAMAN, C.; KETTERLE, W. Formation and decay of vortex lattices

- in bose-einstein condensates at finite temperatures. *Physical Review Letters*, v. 88, n. 7, p. 070409, February 2002.
- 33 MADISON, K. W. et al. Vortex formation in a stirred bose-einstein condensate. *Physical Review Letters*, v. 84, n. 5, p. 806–809, January 2000.
- 34 GROSS, E. Structure of a quantized vortex in boson systems. *Il Nuovo Cimento*, v. 20, n. 3, p. 454–477, 1961.
- 35 PITAEVSKII, L. P. Vortex lines in an imperfect bose gas. *Soviet Physics JETP-USSR*, v. 13, n. 2, p. 451–454, 1961.
- 36 HUANG, K. *Statistical mechanics*. 2nd. ed. New York: Wiley, 1987.
- 37 MERZBACHER, E. *Quantum mechanics*. 3rd. ed. New York: Wiley, 1997.
- 38 A.L.SOROKIN. Madelung transformation for vortex flows of a perfect liquid. *Doklady Physics*, v. 46, n. 8, p. 576–578, 2001.
- 39 FEYNMAN, R. P. Application of quantum mechanics to liquid helium. In: *Progress in low temperature physics*. Amsterdam: North-Holland, 1955. v.1. p.1.
- 40 ONSAGER, L. Statistical hydrodynamics. *Il Nuovo Cimento*, v. 6, n. 2, p. 279, 1949.
- 41 ANDERSON, D. Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers. *Physical Review A*, v. 27, n. 6, p. 3135–3145, June 1983.
- 42 DESAIX, M.; ANDERSON, D.; LISAK, M. Accuracy of an approximate variational solution procedure for the nonlinear Schrödinger equation. *Physical Review A*, v. 40, n. 5, p. 2441–2445, September 1989.
- 43 WATANABE, G. et al. Structure of vortices in rotating Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, v. 74, n. 6, p. 063621, December 2006.

-
- 44 ANDERSON, B. P.; HALJAN, P. C. Vortex precession in Bose-Einstein condensates: observations with filled and empty cores. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 14, p. 2857–2860, October 2000.
- 45 COURTEILLE, P. W.; BAGNATO, V. S.; YUKALOV, V. I. Bose-Einstein condensation of trapped atomic gases. *Laser Physics*, v. 11, n. 6, p. 659–800, 2001.
- 46 POLLACK, S. E. et al. Collective excitation of a Bose-Einstein condensate by modulation of the atomic scattering length. *Physical Review A*, v. 81, n. 5, p. 053627, 2010.
- 47 HEISELBERG, H. Collective modes of trapped gases at the BEC-BCS crossover. *Physical Review Letters*, v. 93, n. 4, p. 040402, July 2004.
- 48 ZHANG, Z.; LIU, W. V. Finite-temperature damping of collective modes of a BCS-BEC crossover superfluid. *Physical Review A*, v. 83, n. 2, p. 023617, 2011.
- 49 ČLOVEČKO, M. et al. New non-Goldstone collective mode of BEC of magnons in superfluid $^3\text{He-B}$. *Physical Review Letters*, v. 100, n. 15, p. 155301, April 2008.
- 50 ALTMAYER, A. et al. Precision measurements of collective oscillations in the BEC-BSC crossover. *Physical Review Letters*, v. 98, n. 4, p. 040401, January 2007.
- 51 RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. *Cálculo numérico - aspectos teóricos e computacionais*. 2nd. ed. São Paulo: Pearson Markron Books, 1996.
- 52 HENN, E. A. de L. *Produção experimental de excitações topológicas em um condensado de Bose-Einstein*. 2008. 129p. Tese (Doutorado) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.