UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

WILSON ENRIQUE ROSADO MERCADO

Engenharia de interações seletivas para a geração de estados estacionários do
campo de radiação

SÃO CARLOS

2015

WILSON ENRIQUE ROSADO MERCADO

**Engenharia de interações seletivas para a geração de estados estacionários do
campo de radiação**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. Miled Hassan Youssef
Moussa

Versão corrigida

(Versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos

2015

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Rosado Mercado, Wilson Enrique
Engenharia de interações seletivas para a geração
de estados estacionários do campo de radiação /
Wilson Enrique Rosado Mercado; orientador Miled
Hassan Youssef Moussa - versão corrigida -- São
Carlos, 2015.
105 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos,
Universidade de São Paulo, 2015.

1. Interações seletivas. 2. Reservatórios atômicos.
3. Estados emaranhados. 4. Estados de Fock. I.
Hassan Youssef Moussa, Miled , orient. II. Título.

A mi Familia.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Miled H. Y. Moussa, pelo apoio, confiança, incentivo, compreensão, por cada um de seus conselhos no momento certo. devo muito a você, e obrigado por sua amizade;

Aos amigos Gentil Dias de Moraes Neto e Fabiano Prado, meus co-orientadores não oficiais. Ao igual do que Miled, agradeço tudo o que me ensinaram;

Aos amigos e professores do IFSC;

Ao grande amigo Carlos Maximo pela amizade e colaboração na correção do português no texto;

A mis padres y mis hermanos, por todo lo que he recibido de ustedes toda mi vida. Gracias por el amor y la confianza que siempre me depositan;

A Xiomara, mi novia, por su apoyo en los momentos difíciles, sobre todo aquellos momentos en que mi espalda era una tortura;

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

ROSADO-MERCADO, W. E. *Engenharia de interações seletivas para a geração de estados estacionários do campo de radiação*. 2015. 105p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

Neste trabalho, descrevemos vários protocolos para a geração de estados estacionários não clássicos, suportados principalmente pela engenharia de hamiltonianos seletivos Jaynes-Cummings, e de reservatórios atômicos. Começamos apresentando um protocolo para engendar interações seletivas lineares e não lineares do tipo Jaynes-Cummings como também simulações numéricas para comprovar a eficácia de nosso esquema. Analisamos também como aplicar essas interações seletivas à preparação e proteção de estados de Fock estacionários via reservatório atômico. Esta estratégia combina a ação dos mecanismo de amortecimento da cavidade com os de um reservatório atômico engenhado para conduzir uma distribuição térmica inicial a um estado de Fock estacionário. A mesma técnica pode ser utilizada para fatiar as distribuições de probabilidade no espaço de Fock, permitindo assim a preparação de uma variedade de estados de equilíbrio não clássicos. Também apresentamos um protocolo para a engenharia de interações upper-bound e sliced Jaynes-Cummings e anti-Jaynes-Cummings na eletrodinâmica quântica de cavidade. No Hamiltoniano upper-bound, a interação átomo-campo está confinada a um subespaço de Fock com estados que vão desde $|0\rangle$ até $|4\rangle$ enquanto que no Hamiltoniano sliced vão desde $|M\rangle$ até $|M + 4\rangle$. Mostramos como construir Liouvillianos upper-bound independentemente da engenharia do Hamiltoniano upper-bound. Os Hamiltonianos e Liouvillianos upper-bound e sliced podem ser usados, entre outras aplicações, para gerar estados de Fock estacionários no modo da cavidade e para a implementação de um dispositivo de tesoura quântica para truncagem de estado óptico. Finalmente, propomos um esquema para a preparação de estados emaranhados estacionários em redes bosônicas dissipativas. Descrevemos a sua aplicação em um sistema de cavidades acopladas interagindo com um reservatório construído por átomos de três níveis. Os emblemáticos estados Bell e NOON, e estados multipartites (tipo W) podem ser produzidos com alta fidelidade e pureza.

Palavras-chave: Interação seletiva. Reservatório atômico. Estados emaranhados. Estados estacionários não clássicos

Abstract

ROSADO-MERCADO, W. E. *Engineering selective interactions for generating of non-classical steady-state of the radiation field*. 2015. 105p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

In this work, we describe various protocols for the generation of nonclassical steady-state, supported mainly by the engineering selective Hamiltonian Jaynes-Cummings-type, and atomics reservoirs. We started presenting a framework to engineer nonlinear selective Jaynes-Cummings-type interactions with numerical simulations to prove the effectiveness of our scheme. We further analyses how to apply these selective interactions to the preparation and protection of steady Fock states via atomic reservoir. This strategy combines the action of cavity damping mechanisms with that of an engineered atomic reservoir to drive an initial thermal distribution to a Fock equilibrium state. The same technique can be used to slice probability distributions in the Fock space, thus allowing the preparation of a variety of non-classical equilibrium states. Also we present a protocol to engineer upper-bound and sliced Jaynes-Cummings-type and anti-Jaynes-Cummings-type Hamiltonians in cavity quantum electrodynamics. In the upper-bounded Hamiltonians, the atom-field interaction is confined to a subspace of Fock states ranging from $|0\rangle$ up to $|4\rangle$, while in the sliced interaction the Fock subspace ranges from $|M\rangle$ up to $|M + 4\rangle$. We also show how to build upper-bounded and sliced Liouvillians irrespective of engineering Hamiltonians. The upper-bounded and sliced Hamiltonians and Liouvillians can be used, among other applications, to generate steady Fock states of a cavity mode and for the implementation of a quantum-scissors device for optical state truncation. Finally we propose a scheme for the preparation of steady entanglements in bosonic dissipative networks. We describe its implementation in a system of coupled cavities interacting with an engineered reservoir built up of three-level atoms. Emblematic bipartite (Bell and NOON) and multipartite (W -class) states can be produced with high fidelity and purity.

Keywords: Selective interactions. Atomics reservoirs. Entanglements states. Nonclassical steady-state.

Lista de Figuras

- Figura 1.2.1 – Um átomo de dois níveis interagindo como a cavidade num tempo $t^{(i)}$.
O fluxo atômico no estado $|g\rangle$ conduz a um Liouvilliano de emissão,
enquanto que o fluxo no estado $|e\rangle$ conduz ao Liouvilliano de absorção. 21
- Figura 2.2.1 – Configuração Lambda de três níveis utilizada para a obtenção da interação seletiva de um fóton. O campo clássico com constante Ω_1 garante a eficiência do processo seletivo de um fóton. 30
- Figura 2.2.2 – Configuração atômica tipo escada de cinco níveis usada para a engenharia da interação seletiva de dois fótons. O modo quântico com frequência ω junto com o campo clássico de frequência ω_L conduzem transições fora de ressonância, o qual é chave para a obtenção do hamiltoniano efetivo. 33
- Figura 2.2.3 – Configuração atômica tipo escada de quatro níveis usada para a construção da interação seletiva de três fótons. O campo clássico nesta configuração é apenas necessário para alcançar interações seletivas com altas excitações. 35
- Figura 2.3.1 – Populações dos estados $|e, m = 4\rangle$ e $|g, m = 5\rangle$, contra τ , calculadas a partir dos hamiltonianos de partida e seletivo de um fóton, descritas pelos pares de curvas contínuas e tracejadas, respectivamente. 37
- Figura 2.3.2 – Populações dos estados $|e, m = 4\rangle$ e $|g, m = 6\rangle$, contra τ , calculadas a partir dos hamiltonianos de partida e seletivo de dois fótons, descritas pelos pares de curvas contínuas e tracejadas, respectivamente. 38
- Figura 2.3.3 – Populações dos estados $|e, m = 4\rangle$ e $|g, m = 7\rangle$, contra τ , calculadas a partir dos hamiltonianos de partida e seletivo de três fótons, descritas pelos pares de curvas contínuas e tracejadas, respectivamente. 40

Figura 2.4.1–Histograma 3D que mostra a evolução, contra τ , das populações criadas pela preparação passo a passo determinista de estados de Fock, a partir de $ 4\rangle$ a $ 16\rangle$, numericamente calculadas a partir das interações de cinco átomos consecutivos com o modo da cavidade via transição seletiva de três fótons.	42
Figura 2.4.2–Histograma 3D com a evolução das populações dos estados de Fock, sob os efeitos da decoerência dos mecanismos de relaxações da cavidade e emissões espontâneas atômicas.	43
Figura 2.4.3–Representação esquemática de um fluxo de átomos atravessando a cavidade para construir um liouvillian seletivo no subespaço $\{ N-1\rangle, N\rangle\}$. 44	
Figura 2.4.4–Diagrama dos níveis de energia do modo da cavidade onde age o super operador associado com a taxa γ_{eff} , mostrando o fluxo de probabilidade de número nas Eqs. (2.4.6) e (2.4.7).	46
Figura 3.1.1–Configuração de níveis atômicos para engenhear: (a) hamiltoniano seletivo e (b) não seletivo.	48
Figura 3.2.1–Representação esquemática do fluxo atômico com átomos nos estados $ g\rangle$, $ e\rangle$ e $ i\rangle$, gerando os Lindbladianos requeridos para a obtenção do estado de Fock estacionário.	50
Figura 3.3.1–Truncamento da distribuição térmica a partir do estado $m+1=6$, e sua associada função de Wigner.	52
Figura 3.3.2–Amplificação da distribuição térmica a partir do estado $l+1=5$, e sua associada função de Wigner.	53
Figura 3.3.3–Amplificação da distribuição térmica a partir do estado $l+1=1$, e sua associada função de Wigner.	54
Figura 3.3.4–Distribuição térmica fatiada a partir de $l+1=4$ a $m=6$ e sua correspondente função de Wigner.	54
Figura 3.3.5–Estado de Fock estacionário $ 5\rangle$ e a correspondente função de Wigner. .	55
Figura 3.3.6–Estado de Fock estacionário $ 10\rangle$ e a correspondente função de Wigner.	56
Figura 3.3.7–Evolução temporal das fidelidades dos estados $ 5\rangle$ e $ 10\rangle$. Os parâmetros $\gamma_m = \gamma_l = 10^3\gamma$, $\varepsilon = 0.8$ e $\bar{n} = 0.05$, são suficientes para alcançar estados de Fock no equilíbrio com probabilidades em torno de 0,97 para o estado $ 5\rangle$ (linha tracejada) e em torno de 0,88 para o estado $ 10\rangle$ (linha sólida)	56

Figura 4.1.1—Configuração atômica de níveis para a geração dos hamiltonianos *ub* e *sliced* no subespaços (a) $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ e $\{|M\rangle, |M+1\rangle, |M+2\rangle\}$ e (b) $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ e $\{|M\rangle, |M+1\rangle, |M+2\rangle, |M+3\rangle\}$ 59

Figura 4.2.1—(a) Probabilidades $\mathcal{P}_0$ a $\mathcal{P}_3$ de medir o modo da cavidade nos estados de Fock $|0\rangle$ a $|3\rangle$, calculadas a partir do hamiltoniano (4.1.5) e o hamiltoniano (4.1.1), mostradas por linhas claras e escuras, respectivamente. $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_1$ são apresentados em primeiro plano, enquanto $\mathcal{P}_2$ está representada na inserção. $\mathcal{P}_3$, que é nulo para a interação efetiva, oscila perto de zero para o hamiltoniano (4.1.1), como mostrado pela curva tracejada. (b) Probabilidades $\mathcal{P}_2$ a $\mathcal{P}_6$ de medir o modo de cavidade nos estados de Fock $|3\rangle$ a $|5\rangle$, calculadas a partir do hamiltoniano (4.1.9) e o hamiltoniano (4.1.1), mostrados por linhas claras e escuras, respectivamente. $\mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_4$ são expostos em primeiro plano, enquanto $\mathcal{P}_5$ está representada na inserção. $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_6$, que são nulas para a interação efetiva (4.1.9), oscila perto de zero para o hamiltoniano (4.1.1), como mostrado pelas curvas tracejadas no primeiro plano e a inserção, respectivamente. . . . 63

Figura 4.2.2—(a) Probabilidades $\mathcal{P}_0$ a $\mathcal{P}_4$ de medir o modo da cavidade nos estados de Fock $|0\rangle$ a $|4\rangle$, calculadas a partir do hamiltoniano (4.1.14) e o hamiltoniano (4.1.11), mostradas por linhas claras e escuras, respectivamente. $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_1$ são apresentados em primeiro plano, enquanto $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_3$ estão representadas na inserção. $\mathcal{P}_4$, que é nula para a interação efetiva, oscila perto de zero para o hamiltoniano (4.1.11), como mostrado pela curva a tracejada. (b) Probabilidades $\mathcal{P}_2$ a $\mathcal{P}_7$ de medir o modo de cavidade nos estados de Fock $|2\rangle$ a $|7\rangle$, calculadas a partir do hamiltoniano (4.1.18) e o hamiltoniano (4.1.11), mostrados por linhas claras e escuras, respectivamente. $\mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_4$ são expostos em primeiro plano, enquanto $\mathcal{P}_5$ e $\mathcal{P}_6$ estão representadas na inserção. $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_7$, que são nulas para a interação efetiva (4.1.14), oscila perto de zero para o hamiltoniano (4.1.11), como mostrado pelas curvas tracejadas no primeiro plano e a inserção, respectivamente. 65

Figura 4.3.1—Evolução da fidelidade para o estados de Fock $|3\rangle$, na figura inserida à direita é plotado o fator Q de Mandel 67

Figura 4.3.2—Diagrama dos níveis de energia do modo da cavidade onde agem os liouvillianos associados com a taxa Γ 68

Figura 4.4.1—Evolução das fidelidades para os estados de Fock: (a) $|2\rangle$ e (b) $|3\rangle$. . . 69

Figura 5.2.1—Evolução da fidelidade do estado $|\phi_+\rangle$ contra a escala de tempo γt , partindo do estado inicial térmico com $\bar{n} = 0.05$. Na figura insertada comparamos as fidelidades calculadas a partir da Eq. (5.2.5) e quando substituímos o liouvilliano efetivo nesta equação pela evolução coerente $-i[H_{full}, \rho]$ 77

Figura 5.2.2—Evolução da fidelidade do estado $|N00N\rangle$ contra a escala de tempo γt , partindo do estado inicial térmico com $\bar{n} = 0.05$. Na figura insertada se mostra a evolução da pureza. 78

Figura 5.2.3—Evolução das fidelidades dos estados $|W\rangle_3$ e $|W\rangle_4$, contra a escala de tempo γt , partindo do estado inicial térmico com $\bar{n} = 0.05$. Na figura insertada se mostra a evolução da pureza de cada um. 79

Sumário

1	Introdução	17
1.1	Estados de Fock, Bell, NOON e tipo W	17
1.2	Feixe de átomos atuando como reservatório	20
1.3	Cavidades acopladas	22
1.4	Apresentação da tese	24
2	Engenharia de interações seletivas lineares e não lineares do tipo Jaynes-Cummings	27
2.1	Método geral para a construção de interações seletivas NSJC	28
2.2	Transições seletivas de um fóton	30
2.2.1	Transições seletivas de dois fótons	32
2.2.2	Transições seletivas de três fótons	34
2.3	Validade da engenharia das interações seletivas	36
2.4	Aplicações: Geração de estados de Fock e uma estratégia contra a decoerência	40
2.4.1	Estados de Fock	41
2.4.2	Decoerência	44
3	Estado de Fock estacionário via reservatório atômico	47
3.1	Engenharia de interação e equação mestra	48
3.1.1	Engenharia de interação	48
3.2	Equação mestra	49
3.3	Preparação do estado de Fock estacionário	52

4	Hamiltonianos e Liouvillianos confinados em subespaços de Fock do campo de radiação	57
4.1	Interações <i>ub</i> e <i>sliced</i> tipo JC e AJC	58
4.1.1	Interações <i>ub</i> e <i>sliced</i> em um subespaço de Fock 3D	58
4.1.2	Interações <i>ub</i> e <i>sliced</i> em um subespaço de Fock 4D	61
4.2	Validade das interações engenhadas <i>ub</i> e <i>sliced</i>	62
4.2.1	Interações confinadas nos subespaços de Fock 3D	62
4.2.2	Interações confinadas nos subespaços de Fock 4D	64
4.3	Engenharia do liouvilliano <i>ub</i> para a geração de estados de Fock estacionários	66
4.4	Liouvillianos <i>ub</i> independentes de hamiltonianos <i>ub</i>	67
5	Estados emaranhados estacionários em redes bosônicas dissipativas	71
5.1	Redes bosônicas dissipativas	71
5.1.1	Equação mestra para os osciladores naturais e dos modos normais	72
5.2	Estados de Bell e NOON estacionários em duas cavidades acopladas	74
6	Conclusão	81
	Referências	84
A	Teoria de hamiltonianos efetivos	93
A.1	Derivação do hamiltoniano efetivo de sistemas quânticos	93
A.2	Hamiltoniano efetivo em óptica quântica	95
A.3	Transição efetiva de dois fótons	97
A.4	Transição efetiva de três fótons	98
B	Duas cavidades acopladas interagindo com átomos de dois níveis	101
B.1	Cavidades acopladas	101
B.2	Interação com os átomos	102
C	Derivação física da equação mestra	103

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos houve grande interesse na descoberta de novos estados não clássicos do campo eletromagnético quantizado e a produção desses estados no laboratório, tais como estados com estatísticas sub poissonianas, tem exigido esforços consideráveis no desenvolvimento de novos conceitos e ferramentas para o controle dos ditos estados. Um grande avanço nesse campo veio com o micromaser (1), onde átomos de Rydberg de dois níveis interagem com o modo de uma cavidade de alto fator de qualidade, para a realização experimental do modelo de Jaynes-Cummings (JC). (2) Porém, mesmo em meio a esses grandes avanços tecnológicos, fenômenos como a decoerência ainda são obstáculos a serem superados e a implementação de propostas como a geração, proteção e caracterização de estados não clássicos, permanecem como problemas experimentais desafiantes. Neste capítulo introdutório, apresentamos uma breve revisão dos desenvolvimentos teóricos e experimentais na preparação de estados do campo de radiação, especificamente dos estados Fock, Bell, NOON e tipo W (os quais são parte dos objetivos desta Tese), assim como também uma descrição simples das ferramentas usadas neste trabalho. Finalizamos este capítulo com uma breve explicação da organização desta tese.

1.1 Estados de Fock, Bell, NOON e tipo W

Os estados de Fock desempenham um papel fundamental em óptica quântica. Eles constituem a essência da natureza do quantum de luz e são indispensáveis na descrição teórica de uma vasta gama de fenômenos ópticos, assim como também nos aspectos mais aplicados da óptica quântica, como os campos de comunicação e informação quântica. (3–5) De particular importância é a sua aplicação em criptografia quântica que resultaria num aumento significativo da capacidade de segurança de canais de comunicação. (6) Estados de Fock são também úteis para gerar múltiplos átomos emaranhados em sistemas tais como o micromaser, levando a aplicações como portas lógicas quânticas. (7, 8) Pelo acima referido, existe um crescente interesse em sistemas capazes de gerar campos que contêm um número bem definido de fótons.

Até nossos dias, a preparação e caracterização de estados de Fock no laboratório é uma tarefa difícil de se realizar, em especial aqueles com números de alta excitação. (9) O experimento reportado por *Brune et al.* (10), é baseado na preparação condicional de estados de Fock. Para preparar um estado de Fock puro escolhido aleatoriamente a partir de um estado inicial coerente, dependem das medições quânticas. Depois de preparar o estado de Fock, cada átomo é enviado através da cavidade para revelar informação sobre a evolução posterior do campo da mesma cavidade por meio de um processo conhecido como tomografia quântica. Já que neste experimento a preparação do estado de Fock é um processo aleatório, caracterizá-lo completamente não é nada fácil, exigindo até um milhão de medições atômicas individuais. (11)

Em condições perfeitas o campo micromaser num estado *trapping* é um estado de Fock. (12) Quando uma corrente de átomos de dois níveis, todos preparados no estado excitado $|e\rangle$, são enviados para interagir ressonantemente com o campo da cavidade inicialmente preparada no estado de vácuo, cada um destes átomos passando um a um pela cavidade, libera um fóton na seguinte sequência: o primeiro átomo prepara o estado de Fock $|1\rangle$; o segundo átomo estimulado pelo já existente fóton emite outro, projetando a cavidade ao estado de Fock $|2\rangle$ e assim por diante. Para o n -ésimo átomo ($n + 1$), o tempo de interação $t^{(i)}$ é ajustado de tal forma, que este átomo sai da cavidade no estado fundamental $|g\rangle$, com probabilidade $P_g = \sin^2 \left(g\sqrt{n+1}t_{n+1}^{(i)} \right)$, deixando a cavidade no estado de Fock n . Esta situação idealizada por ajuste do tempo $t^{(i)}$ (por exemplo, controlando as velocidades atômicas individuais) verificando que todos os átomos que saem da cavidade são detectados no estado $|g\rangle$, fixa na cavidade um estado de Fock n quando é satisfeita a condição de estado *trapping*, $g\sqrt{n+1}t_{n+1}^{(i)} = 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$); o que quer dizer que, a probabilidade de um átomo emitir um fóton é nula e todos os átomos subsequentes são detectados no estado $|e\rangle$ e o campo da cavidade permanece aprisionando nesse estado de Fock. Este estado *trapping* determinístico, requer uma sintonia muito específica do tempo de interação do sistema átomo campo, o qual é verdadeiramente difícil de conseguir na prática, complicando a geração de estados de Fock com números cada vez mais altos. Usando o esquema de estado *trapping*, têm-se gerado estados de Fock de um e dois fótons no contexto da eletrodinâmica quântica de cavidades (CQED). (13, 14) Outros protocolos de geração de estados de Fock determinísticos com números maiores têm sido realizados em circuitos quânticos supercondutores. (15)

No que diz respeito à eletrodinâmica quântica de circuitos (CirQED) (os quais são uma versão em chip da CQED) para a geração de estados de Fock. Este sistema, o qual é essencialmente um ressonador de linha de transmissão acoplado a um qubit supercondutor, tem como resultado um acoplamento forte entre o ressonador e o qubit. Em virtude do acoplamento muito forte, estados de Fock são obtidos pela medição do espectro de absorção do qubit como foi realizado por *H. Wang et al* (16), com a geração

de estados de Fock até $n = 15$, e da mesma forma como reportado por *Brune et al.*, *H. Wang et al* acharam que o estado de Fock n decai com a taxa $n\gamma$ (sendo γ a taxa de decaimento de um fóton), que é n vezes mais rápido do que para um estado de Fock com $n = 1$.

Além dos estados de Fock, estados não-clássicos que atraíram bastante interesse, incluem-se, estados de Bell (17), estados NOON (18), e estados tipo W. (19) Estes estados emaranhados, têm um papel importantíssimo nos processos de informação e comunicação quântica já que o emaranhamento é um recurso chave na maioria destes processos; por exemplo, a utilização de estados Bell para esquemas de comunicação quântica segura direta (20) e esquemas de teleportação quântica. (21) Os estados NOON se escrevem da forma: $|N00N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|N, 0\rangle + |0, N\rangle)$ e são um tipo especial de estados maximamente emaranhados que desempenham o papel crucial na litografia quântica (22), metrologia quântica (23, 24) cujas medições de fase de alta precisão tornam-se mais vantajosas quando o número de fótons aumenta. Os estados tipo W, que para o caso de três qubits é da forma $|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1, 0, 0\rangle + |0, 1, 0\rangle + |0, 0, 1\rangle)$, têm a propriedade interessante: se um qubit é medido em um dos estados $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, os qubits restantes se mantêm em um estado com alto grau de emaranhamento. Eles também foram usados para teletransporte quântico (25), em esquemas de comunicação quântica segura direta (26), além de serem utilizados na demonstração da não localidade quântica. (27) Explorando a interação ressonante entre três qubits supercondutores tipo transmon e um ressonador de linha de transmissão, *J. A. Mlynek et al* mostraram que um estado tipo W pode ser gerado com alta eficiência neste sistema, aproveitando a dinâmica coletiva. (28) O método também se beneficia da não linearidade da força de acoplamento entre N qubits e um único modo do campo fazendo com que o esquema seja mais rápido para um maior número de qubits.

Continuando com os estados NOON, a maioria dos esquemas para produzi-los estão no regime óptico. (18, 29) No regime de micro-ondas, usando transições ressonantes de dois fótons, é mostrado na Ref. (30) como gerar estes estados em cavidades. *Seth T. Merkel* e *Frank K Wilhelm* (31), reportaram um outro esquema para gerá-los em circuitos quânticos supercondutores. Os autores propuseram um esquema teórico que logo foi implementado experimentalmente para $N \leq 3$. (32) Como mostrado por *H. Wang et al* (32), a fidelidade do estado NOON obtido diminui drasticamente com o número de fótons N devido à decoerência, caindo ao redor de 0,33 para $N = 3$.

A engenharia de estados não clássicos, a fim de ser útil em tecnologias quânticas direciona seus esforços em melhorar de forma significativa a fidelidade dos estados produzidos; para isso, a comunidade científica trabalha intensamente na exploração de esquemas mais eficientes e robustos que minimizem os efeitos da decoerência, assim como, melhorar a experiência na manipulação de estados do campo.

1.2 Feixe de átomos atuando como reservatório

No micromaser ideal têm-se um controle absoluto do tempo de interação dos átomos com a cavidade. Já em uma situação real, os átomos interagem com a cavidade em tempos iguais e conseqüentemente a detecção atômica dos estados $|g\rangle$ e $|e\rangle$ é um processo aleatório. Isto, junto com os mecanismos de amortecimento na cavidade e as inevitáveis flutuações no fluxo atômico, fazem com que o feixe atômico aja como um ambiente para o campo, o qual deve ser descrito estatisticamente. Como mostrado por *B. G. Englert* (33), átomos de dois níveis em ressonância com o modo da cavidade entram e saem dela interagindo um por vez. Cada átomo tem a probabilidade de retirar ou doar um fóton da cavidade dependendo se esse átomo entra inicialmente no estado fundamental ou excitado, respectivamente. No regime de acoplamento fraco, que corresponde a $(gt^{(i)})^2 \ll 1$, e considerando que os átomos chegam na cavidade em tempos estatisticamente independentes, a dinâmica do campo na cavidade pode ser governada pela equação mestra (ver derivação no Apêndice C)

$$\dot{\rho} = \frac{\gamma_g}{2} (2a\rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a) + \frac{\gamma_e}{2} (2a^\dagger \rho a - a a^\dagger \rho - \rho a a^\dagger), \quad (1.2.1)$$

onde $\gamma_{g,e} = r_{g,e} (gt^{(i)})^2$. Esta equação descreve a troca de energia incoerente entre o campo da cavidade e um reservatório atômico, com taxas de perda e bombeio γ_g e γ_e respectivamente. Em termos coloquiais, uma corrente de átomos no estado fundamental (excitado) absorve fótons da cavidade, o que se traduz como perda (ganho) para a cavidade, emitindo (absorvendo) fótons a uma taxa γ_g (γ_e) (ver Fig. 1.2.1). Se $\gamma_e/\gamma_g < 1$, significa que há mais átomos no estado fundamental passando pela cavidade do que no estado excitado. Na média os átomos estão levando para fora excitações do campo de cavidade até que haja um equilíbrio entre as excitações dos átomos e o campo: o campo fica amortecido por este tipo de reservatório. Além disso, o estado do campo eventualmente se aproxima para o estado térmico com uma temperatura determinada pela diferença de população dos dois níveis atômicos. Na verdade, quando as populações dos dois níveis são distribuídos em concordância com a distribuição de Boltzmann.

O estado estacionário pode ser um estado puro, este seria o caso para o estado de vácuo na cavidade o qual corresponde à passagem de todos os átomos no estado fundamental $|g\rangle$, ou seja $\gamma_e = 0$. Neste caso, todos os átomos absorvem a energia média do modo na cavidade até que atinja o estado de vácuo. Este método também poderia ter sido identificado com base na observação de que o estado $|g, 0\rangle$, é o único auto estado de $H_{JC} = g(a\sigma_{eg} + \sigma_{ge}a^\dagger)$ (onde usamos a notação de spins de Pauli $\sigma_{eg} \equiv |e\rangle\langle g|$, etc) nesta dinâmica, que satisfaz $H_{JC}|g, 0\rangle = 0$. Portanto para tempos longos a dinâmica da Eq. (1.2.1) com $\gamma_e = 0$, evolui ao estado estacionário $\rho = |g, 0\rangle\langle g, 0|$. Obviamente, se dese-

Figura 1.2.1 – Um átomo de dois níveis interagindo com a cavidade num tempo $t^{(i)}$. O fluxo atômico no estado $|g\rangle$ conduz a um Liouvilliano de emissão, enquanto que o fluxo no estado $|e\rangle$ conduz ao Liouvilliano de absorção.

Fonte: Elaborada pelo autor.

jamos que nosso estado puro estacionário seja diferente do estado de vácuo, por exemplo $|\psi\rangle$, a dinâmica governada por H_{JC} deve ser modificada pela interação desejada H_{eff} , tal que satisfaça a condição $H_{eff}|\psi\rangle = 0$. Contudo, a satisfação da condição $H_{eff}|\psi\rangle = 0$ não seria a única forma de obter estados puros estacionários, como será mostrado nesta tese, onde um estado de Fock estacionário é preparado via reservatório atômico e a condição $H_{eff}|\psi\rangle = 0$ não é necessária. (34)

A ideia de usar um feixe atômico como um reservatório para o modo da cavidade remonta à teoria do laser, onde um feixe atômico atravessando a cavidade do laser atua como um banho térmico para o campo do laser. Implementações reais desta ideia foram usadas como estratégia para a preparação do estado de vácuo na cavidade. (35–37) Além disso, isto também tem sido explorado, teoricamente, em estreita relação com a técnica de engenharia de reservatório (38), para a geração de um estado estacionário de Einstein-Podolsky-Rosen. (39)

O desenvolvimento de cavidades super-high-finesse permitiu manipular e detectar campos com uma precisão sem precedentes alcançando tempos muito longos de armazenamento de fótons na cavidade (ao redor de 130ms). (40) Por outro lado, os estados atômicos de Rydberg são bem estáveis no tempo de interação entre átomo e cavidade. Estas propriedades entre outras têm permitido a preparação e medição de estados não-clássicos do campo em micro-ondas (41), medições quânticas não demolidoras. (36) Também foi observado a projeção progressiva do campo em estados de Fock, correspondente ao número definido de fótons e monitorado os saltos quânticos entre esses estados induzidos pelo amortecimento da cavidade. (42) Muitos destes avanços tecnológicos foram obtidos

com a implementação de hamiltonianos efetivos, a partir de interações dispersivas entre átomo e o campo da cavidade.

A realização de estados não clássicos do campo de cavidade, no regime de dissipação, baseia-se em dinâmicas dissipativas adequadamente adaptadas, em que os átomos atuam como reservatório do campo de cavidade de tal forma, que a dinâmica de dissipação impulsiona o modo da cavidade ao estado desejado, mediante um acoplamento adequado com o ambiente. Como mencionado antes, um exemplo simples é a preparação do modo da cavidade no estado de vácuo. A engenharia de reservatório foi proposta pela primeira vez por *J. Cirac et al* no contexto de íons armadilhados (38, 43), e surgiu como uma das estratégias possíveis para lidar contra os efeitos induzidos pelo ambiente. Sua eficácia depende de uma considerável sofisticação técnica na manipulação da interação da radiação com a matéria. É assim que a engenharia de hamiltonianos, através de interações auxiliares quânticas ou clássicas, e aproximações associadas a regimes de parâmetros convenientes para a construção de interações efetivas desejadas, utiliza-se para modificar os efeitos do reservatório sobre o sistema de interesse. Portanto, o programa de engenharia de interações é condição necessária para a engenharia de reservatórios.

Tendo em vista os resultados que acabamos de mencionar, coadunam-se esforços teóricos a fim de melhorar a experiência na manipulação nos estados do campo de radiação (ou vibracional), através de sua interação com os átomos; para isso, protocolos para engenharia de hamiltonianos também têm sido desenvolvidos. (44–46) Um protocolo para o controle coerente de uma colisão atômica numa cavidade tem-se proposto por *Zheng et. al.* (47) e experimentalmente implementada para melhorar a manipulação de estados emaranhados. (48) Outras propostas incluem um protocolo para engenho operadores de squeezing dentro da cavidade. (49) O programa de engenharia de hamiltonianos também foi aplicado para obter interações seletivas do tipo Jaynes-Cummings (SJC), o qual é um dos pilares que sustentam os resultados que permeiam esta tese. Esta interação seletiva, chamada assim porque a excitação de um modo do campo de radiação está confinada dentro do subespaço $\{|n\rangle, |n+1\rangle\}$, têm sido usada com sucesso na preparação (50–52) e reconstrução de estados (51, 53), e operações lógicas quânticas. (53, 54) interações SJC não lineares (NSJC), que promovem transições de k -fótons têm sido engenhadas para manipular os estados vibracionais de um sistema de dois íons aprisionados (55), obrigando à excitação vibracional tanto do centro de massa como dos modos relativos a estarem confinados dentro do subespaço $\{|n\rangle, |n+k\rangle\}$.

1.3 Cavidades acopladas

A partir dos avanços realizados na manipulação de átomos, fótons e fônons (46), os desen-

volvidos atuais da Óptica Quântica ocorrem no sentido a considerar redes de cavidades interagentes, incluindo a possibilidade de armadilhamento de átomos ou amostras atômicas nestas cavidades. Estes desenvolvimentos dão-se, em parte, na esteira dos resultados alcançados, também a partir da década de 1990, com as redes ópticas, que compreendem átomos ou amostras atômicas, armadilhados em potenciais ópticos periódicos. Voltando às redes de cavidades ou osciladores harmônicos quânticos, recentemente tem se dedicado considerável atenção ao estudo das dinâmicas de coerência e decoerência de estados nestas redes. Mencionamos especificamente o processo de transferência perfeita de estados entre os osciladores da rede (56), além de estudos do mecanismo de decoerência de estados que revela aspectos interessantes como a não aditividade das taxas de relaxação. (57–60) Nos trabalhos propostos por *M. A. de Ponte et al.* (57–59), considera-se o caso em que cada oscilador da rede acopla-se ao seu respectivo reservatório, ao contrário da asserção, muitas vezes ad hoc, onde toda a rede acopla-se a um reservatório comum. Tratando-se de redes de osciladores harmônicos dissipativos, apresentou-se mais recentemente um tratamento geral que, englobando os trabalhos de *M. A. de Ponte et al.*, aplica-se a qualquer padrão de acoplamentos entre os osciladores, quaisquer que sejam suas frequências naturais e seus acoplamentos. O tratamento geral também apresentado por *M. A. de Ponte et al.* (61), possibilitou a construção teórica de um dispositivo para o armazenamento dinâmico de estados em redes de osciladores dissipativos. (62) Por armazenamento referimo-nos à proteção de estados contra o processo de decoerência induzido pelos reservatórios associados a cada oscilador da rede. Este dispositivo compreende as topologias ótimas que viabilizam, na rede, evoluções específicas de estados preparados em osciladores individuais da rede. Destas evoluções específicas resulta a maximização dos tempos de decoerência dos estados armazenados, antes que sejam resgatados nos osciladores onde foram originalmente preparados. Os resultados derivados por *M. A. de Ponte et al.*, possibilitaram também a apresentação de um protocolo para a transferência quase-perfeita de estados em redes bosônicas dissipativas (63), que se utiliza de um mecanismo similar ao efeito túnel para contornar os mecanismos de dissipação no processo de transferência de estados entre nodos distintos da rede.

Uma extensão recente do programa de redes de cavidades considera a inserção de átomos ou amostras atômicas no interior dessas cavidades. (64, 65) Através da manipulação desses átomos via campos clássicos externos e de suas interações como os respectivos modos das cavidades, e destas entre si, verificam-se fenômenos interessantes como, por exemplo, o bloqueio de fótons: enquanto que na ausência dos átomos as cavidades podem armazenar, em princípio, qualquer número de fótons, a presença dos átomos faz com que as cavidades aceitem um único fóton, repelindo a injeção de fótons adicionais. Este fenômeno possibilita então a construção de cristais de luz, nos quais os fótons são armadilhados nas cavidades através da repulsão mútua que exercem entre si, mediada pelos átomos. Esta repulsão entre os fótons observada por *Hartmann et al.* (65) é forte o suficiente para

simular um estado do tipo isolante de Mott, no qual os fótons, localizados nas diferentes cavidades, impedem o movimento dos vizinhos. Dado que na ausência dos átomos, e portanto na ausência da repulsão por eles mediada, os fótons movem-se livremente entre as cavidades, de forma similar a um estado superfluido no qual encontram-se espalhados através da rede, verifica-se nestes sistemas uma transição de fase quântica, à temperatura zero, análoga àquela entre um isolante de Mott e um superfluido. (64) Ressaltamos, por fim, que mesmo fenômenos em redes de cavidades contendo átomos em seus interiores estão prestes a serem realizados experimentalmente através dos desenvolvimentos recentes da eletrodinâmica quântica de circuitos. (66) Portanto, redes de nanocavidades acopladas por linhas de transmissão supercondutoras (os guias de onda), e que interagem com átomos artificiais localizados na região dos seus campos, fornecem plataformas adequadas para simular, com diversas vantagens, os processos típicos da CQED numa escala sem precedentes.

1.4 Apresentação da tese

O desenvolvimento de estratégias para preparação de estados não clássicos em CQED (67–69) e, em particular, sua aplicação à decoerência (via subespaços livres de decoerência (70, 71), e a engenharia de reservatórios (38, 43) desempenharam um papel significativo na óptica quântica. Do ponto de vista conceitual, a necessidade de gerar estes estados provém da sua utilização nos estudos de processos quânticos, tais como a decoerência (72) e a transição quântico-clássico. (73) Já do ponto de vista pragmático, o advento da computação e comunicação quântica tem certamente colocado uma pressão extra sobre os investigadores, afim de que estes implementem técnicas eficientes de engenharia e proteção de estados não clássicos. A proposição de esquemas que permitem a geração de estados não clássicos e estacionários representam, portanto, uma abordagem ideal para os desafios atuais. Graças aos desenvolvimentos recentes, tais como cavidades com fatores de alta qualidade e circuitos quânticos supercondutores, novas formas de gerar, controlar e medir estados não-clássicos da luz são agora possíveis.

Objetivando a geração de estados não clássicos estacionários do modo quântico no contexto de eletrodinâmica quântica de cavidades, apresentamos nesta tese estratégias para a preparação dos ditos estados usando duas vias, mediante a utilização (indispensável para nossos objetivos) da engenharia de interações seletivas. Uma via segue a linha de raciocínio apresentada por *S. Diehl et. al.* (74), sobre a base de que para um hamiltoniano geral da forma $H = g (O\sigma_{eg} + \sigma_{ge}O^\dagger)$ onde O é função unicamente de a e $a^\dagger$, pode-se construir uma equação mestra com estado estacionário $|\psi\rangle$. O estado estacionário $|\psi\rangle$ é determinado pela condição $H|\psi\rangle = 0$, e unicamente esse estado satisfaz esta condição.

A segunda via combina a ação dos mecanismos de amortecimento da cavidade com os de um reservatório atômico. Ao contrario do raciocínio anterior, o estado a proteger $|\psi\rangle$ não cumpre $H|\psi\rangle = 0$. Nesta ordem de ideias, vamos explorar primeiramente no Capítulo 2, a engenharia de interações seletivas lineares SJC e não lineares NSJC. Para sua derivação, usamos uma análise da dinâmica de sistemas quânticos não ressonantes desenvolvida por *D.F. James* (75, 76), pela qual foi possível deduzir uma expressão hamiltoniana que substituiu a interação original não ressonante. Demonstramos que nosso método é mais eficaz do que o apresentado por *M. França Santos et. al.* (51). Em seguida, expõe-se a derivação dos processos seletivos de um, dois e três fótons no domínio de eletrodinâmica quântica de cavidades. Depois, apresenta-se um protocolo de preparação de estados de Fock passo a passo via interação seletiva JC de três fótons. Por fim, mais importante do que a preparação do estado de Fock através da interação seletiva de três fótons, apresentamos uma estratégia que depende exclusivamente da interação SJC de um fóton, que atrasa significativamente a decoerência do estado de Fock preparado. No Capítulo 3, vamos expor uma técnica para a preparação de estados de Fock estacionários que se serve fundamentalmente das interações seletivas, especificamente da interação seletiva de um fóton. Esta técnica combina a ação dos mecanismos de amortecimento da cavidade com os de um reservatório atômico e é utilizada para fatiar as distribuições de probabilidade no espaço de Fock, permitindo assim a preparação de diferentes estados estacionários não clássicos do campo de radiação. Logo, no Capítulo 4 apresenta-se a engenharia de hamiltonianos que se restringem a subespaços de Fock restritos; esta interação é na verdade uma extensão da engenharia seletiva do Capítulo 2, que ao invés de selecionar dois estados do espaço de Fock ou um subespaço de Fock de duas dimensões (2D), a interação pode ser confinada em subespaços de Fock 3D e 4D, dependendo da configuração de níveis atômicos escolhidos. Logo, mostramos como produzir os estados de Fock estacionários $|2\rangle$, $|3\rangle$ e $|4\rangle$ na base da condição $H|\psi\rangle = 0$, via reservatório atômico. Finalizamos este Capítulo apresentando uma estratégia de como gerar liouvillianos fatiados sem precisar dos hamiltonianos confinados nos subespaços de Fock 3D e 4D, o que também pode ser usado para produzir estados de Fock estacionários. No Capítulo 5, baseado no trabalho apresentado no Capítulo 3, mostramos uma estratégia para produzir estados emaranhados estacionários com alta fidelidade em osciladores harmônicos quânticos acoplados. Nosso protocolo pode ser entendido em termos de um mapeamento entre os estados da base dos osciladores naturais e os estados da base dos modos normais, em que um estado de Fock estacionário preparado num dado modo normal, deve corresponder a um estado emaranhado estacionário na base dos osciladores naturais. Depois de uma breve revisão dos passos para obter a equação mestra de uma rede bosônica, demonstramos como gerar os estados emaranhados Bell, NOON e tipo W. Finalmente no Capítulo 6 discutimos brevemente os resultados obtidos.

 Capítulo 2

Engenharia de interações seletivas lineares e não lineares do tipo Jaynes-Cummings

Neste capítulo apresenta-se uma técnica para a construção das interações seletivas de k -fótons. (77) Em comparação com os outros métodos apresentados na literatura (51, 53–55), a técnica permite uma derivação mais formal e eficiente das interações (N)SJC, assegurando que as transições indesejáveis a níveis adjacentes fora do subespaço $\{n, n + k\}$ do campo da cavidade são quase completamente removidas. Em seguida, descrevemos como gerar hamiltonianos efetivos, que levarão à obtenção das interações seletivas para transições de um, dois e três fótons em CQED. A preparação de estados de Fock é um tópico de continuo interesse e como uma ilustração de nosso método, apresentamos um protocolo para a preparação de estados de Fock passo a passo com a utilização de um hamiltoniano seletivo de três fótons. Lembramos que a preparação de estados de Fock em um processo passo a passo já havia sido considerada anos atrás. (78) Mais importante do que a preparação de um estado Fock através de interações seletivas (uma tarefa que, afinal, pode ser alcançada por meio da interação convencional Jaynes-Cummings), apresentamos uma estratégia eficaz que depende inteiramente da interação seletiva JC de um único fóton que atrasaria significativamente o decaimento do estado de Fock preparado.

A teoria de transições de dois fótons em cavidades CQED foi amplamente abordada anteriormente na literatura (79), juntamente com a realização experimental do Maser de dois fótons. (80) Transições de três fótons também têm sido estudadas dentro de CQED, incluindo a geração de estados não clássicos (81), motivando-nos a obter as transições SJC de três fótons. Começamos por apresentar o método geral para obter interações NSJC e, em seguida, a derivação detalhada das interações SJC de um, dois e três fótons. Em seguida, analisa-se a validade do nosso método. Para este fim, comparamos a evolução das populações dos estados selecionados $|n\rangle$ e $|n + k\rangle$, calculada a partir dos hamiltonianos total e seletivo.

2.1 Método geral para a construção de interações seletivas NSJC

Nesta seção descrevemos o método geral para obter interações seletivas do tipo JC e AJC não lineares de forma sistemática. Começaremos com uma situação geral sem fazer referencia a uma configuração de níveis específica a fim de compreender o procedimento matemático que mais adiante aplicaremos a sistemas particulares com configurações de níveis bem específicas e técnica usada para obter o hamiltoniano efetivo (2.1.1) não seletivo do qual partimos para obter as interações seletivas é aquela exposta no trabalho de *D. F. James e Jerke* (76). Em geral, para obter uma interação seletiva, é necessário a construção de um hamiltoniano efetivo da forma

$$H = (\chi_g a^\dagger a + \kappa_g) \sigma_{gg} + (\chi_e a^\dagger a + \kappa_e) \sigma_{ee} + \xi \left[(a^\dagger)^k \sigma_{ge} + a^k \sigma_{eg} \right], \quad (2.1.1)$$

onde $\sigma_{rs} = |r\rangle \langle s|$, com r e s rotulando os estados atômicos envolvidos, que são o estado fundamental g , o estado excitado e , a ($a^\dagger$) representa o operador de aniquilação (criação) de um modo da cavidade e $\chi_{g,e}$, $\kappa_{g,e}$ e ξ são parâmetros a depender das constantes de acoplamento e dessintonias associadas ao sistema átomo-campo. Esse hamiltoniano pode ser expandido em blocos pelos estados do sistema átomo-campo $|g, n+k\rangle$ e $|e, n\rangle$ como

$$H = \sum_n \begin{bmatrix} \chi_g (n+k) + \kappa_g & \sqrt{(n+1)\dots(n+k)} \xi \\ \sqrt{(n+1)\dots(n+k)} \xi & \chi_e n + \kappa_e \end{bmatrix}. \quad (2.1.2)$$

Os termos diagonais na forma matricial do hamiltoniano na Eq. (2.1.2), definem a diferença de energia $\phi_n = (n+k) \chi_g - n \chi_e + \kappa_g - \kappa_e$, entre os níveis $|g, n+k\rangle$ e $|e, n\rangle$. Note que, essa diferença de energia ou dessintonia depende do número n de fótons no modo da cavidade. Portanto, a essência da interação seletiva vem do fato de que para um número m específico de fótons no bloco definido pelo subespaço $|g, m+k\rangle$ e $|e, m\rangle$, $\phi_m = 0$ determina a frequência ressonante efetiva da transição $|g, m+k\rangle \leftrightarrow |e, m\rangle$ enquanto o resto dos blocos, aqueles com $n \neq m$ ficam no regime dispersivo. De forma mais sistemática, no hamiltoniano da Eq. (2.1.1), é aplicada a transformação unitária

$$U = \exp \left\{ -i \left[(\chi_g a^\dagger a + \kappa_g) \sigma_{gg} + (\chi_e a^\dagger a + \kappa_e) \sigma_{ee} \right] t \right\} \quad (2.1.3)$$

e utilizamos a relação

$$(a^\dagger)^k = \sum_n \sqrt{(n+1)\dots(n+k)} |n+k\rangle \langle n|, \quad (2.1.4)$$

para a obtenção de forma simplificada

$$H_U = \sum_n \xi_n (|n+k\rangle \langle n| \sigma_{ge} e^{i\phi_n t} + H.c.), \quad (2.1.5)$$

onde $\xi_n = \sqrt{(n+1)\dots(n+k)}\xi$ e, de novo,

$$\phi_n = (n+k)\chi_g - n\chi_e + \kappa_g - \kappa_e.$$

Podemos expandir a soma na Eq. (2.1.5) e escrevê-la como

$$\begin{aligned} H_U = & (\xi_0 |k\rangle \langle 0| e^{i\phi_0 t} \dots + \xi_{m-1} |m+k-1\rangle \langle m-1| e^{i\phi_{m-1} t} + \xi_m |m+k\rangle \langle m| e^{i\phi_m t} \\ & + \xi_{m+1} |m+k+1\rangle \langle m+1| e^{i\phi_{m+1} t} + \dots) \sigma_{ge} + H.c., \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

e já que estamos focados no m -ésimo termo fatoramos $e^{i\phi_m t}$, para obter

$$\begin{aligned} H_U = & (\xi_0 |k\rangle \langle 0| e^{i(\phi_0 - \phi_m)t} \dots + \xi_{m-1} |m+k-1\rangle \langle m-1| e^{i(\phi_{m-1} - \phi_m)t} + \xi_m |m+k\rangle \langle m| \\ & + \xi_{m+1} |m+k+1\rangle \langle m+1| e^{i(\phi_{m+1} - \phi_m)t} + \dots) \sigma_{ge} e^{i\phi_m t} + H.c. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Note-se que para $\phi_m = 0$, o m -ésimo termo da expansão não oscila, enquanto o resto oscila com a fase $|\phi_{m\pm\ell} - \phi_m|$ (onde $\ell \in [1, \infty)$). Portanto, quando a transição dentro do subespaço escolhido $\{|g, m+k\rangle, |e, m\rangle\}$ é sintonizada para ressonância, isto é quando $\phi_m = 0$, as outras transições são dispersivas, sob a condição

$$\begin{aligned} |\phi_{m\pm\ell} - \phi_m| &= |(m \pm \ell + k)\chi_g - (m \pm \ell)\chi_e - (m+k)\chi_g + m\chi_e| \\ &= \ell |\chi_g - \chi_e| \gg |\xi_{m\pm\ell}|, \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

em que $\ell \in [1, \infty)$ para $\xi_{m+\ell}$ e $\ell \in [1, m]$ para $\xi_{m-\ell}$. Então, é possível eliminar estes termos altamente oscilantes do hamiltoniano, via aproximação onda girante e a interação átomo-campo é bem descrita pelo hamiltoniano seletivo não linear de Jaynes-Cummings

$$H_{NSJC} = \xi_m |m+k\rangle \langle m| \sigma_{ge} + H.c.. \quad (2.1.9)$$

Em resumo, para extrair a interação (N)SJC (Eq. 2.1.9), temos que supor a restrição de parâmetros onde, para um determinado número de estado $n = m$, as seguintes condições são satisfeitas:

$$\phi_m = 0 \quad (2.1.10)$$

e

$$\ell |\chi_g - \chi_e| \gg |\xi_{m\pm\ell}|. \quad (2.1.11)$$

Figura 2.2.1 – Configuração Lambda de três níveis utilizada para a obtenção da interação seletiva de um fóton. O campo clássico com constante Ω_1 garante a eficiência do processo seletivo de um fóton.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Finalmente observamos que, em vez do hamiltoniano da Eq. (2.1.1), poderíamos ter começado pela engenharia de um hamiltoniano efetivo anti-Jaynes-Cummings (AJC)

$$H = (\chi_g a^\dagger a + \kappa_g) \sigma_{gg} + (\chi_e a^\dagger a + \kappa_e) \sigma_{ee} + \xi \left[(a^\dagger)^k \sigma_{eg} + a^k \sigma_{ge} \right], \quad (2.1.12)$$

o que teria levado à interação seletiva não linear anti-Jaynes-Cummings (NSAJC)

$$H_{NSAJC} = \xi_m |m+k\rangle \langle m| \sigma_{eg} + H.c. \quad (2.1.13)$$

2.2 Transições seletivas de um fóton

Embora a interação SJC para transições de um fóton já exista na literatura (ver (51, 53, 54)), aqui abordaremos novamente esse tema para descrever uma derivação de forma mais sistemática. Essa derivação baseia-se na utilização de dois campos clássicos ao em vez de um, como apresentado por *M. França Santos et. al.* (51, 54) Demonstraremos porque o uso de dois campos clássicos é essencial para uma melhor eficiência da engenharia de interação.

Consideramos um átomo de três níveis em uma configuração do tipo lambda, conforme ilustrado na Fig. (2.2.1), com frequência de transição ω_0 (ω_i) entre os estados fundamental $|g\rangle$ e excitado $|e\rangle$ (intermediário $|i\rangle$). O átomo interage com um modo da cavidade de frequência ω , descrito pelo operador a ($a^\dagger$) de aniquilação (criação), que conduz fora de ressonância a transição $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ com frequência de Rabi λ e dessintonia Δ .

Simultaneamente a esta interação, dois campos clássicos, de frequências ω_1 e ω_2 , também conduzem fora de ressonância as transições $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ e $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$, com as constantes de acoplamento Ω_1 e Ω_2 , e dessintonias Δ_1 e Δ_2 , respectivamente. O hamiltoniano é dado por

$$H = H_0 + V, \quad (2.2.1)$$

onde

$$H_0 = \omega a^\dagger a + \omega_0 \sigma_{ee} + \omega_i \sigma_{ii}, \quad (2.2.2)$$

e

$$V = \lambda a \sigma_{ig} + \Omega_1 \sigma_{ig} e^{-i\omega_1 t} + \Omega_2 \sigma_{ie} e^{-i\omega_2 t} + H.c., \quad (2.2.3)$$

onde os operadores de transição atômica são dados por $\sigma_{rs} = |r\rangle \langle s|$ (com r e s rotulando os estados atômicos g , e e i). Na representação de interação, obtemos

$$H_I = \lambda a \sigma_{ig} e^{-i\Delta t} + \Omega_1 \sigma_{ig} e^{i\Delta_1 t} + \Omega_2 \sigma_{ie} e^{-i\Delta_2 t} + H.c., \quad (2.2.4)$$

onde as dessintonias são dadas por $\Delta = \omega - \omega_i$, $\Delta_1 = \omega_i - \omega_1$ e $\Delta_2 = \omega_2 - (\omega_i - \omega_0)$. No regime dispersivo $\sqrt{n+1}\lambda \ll \Delta$, $\Omega_2 \ll \Delta_2 = \Delta$, e $\Omega_1 \ll \Delta_1$, a Eq. (2.2.4) contém termos altamente oscilantes, de modo que não há troca de energia entre o átomo e a cavidade, portanto o hamiltoniano efetivo o qual é dado por (ver derivação por *D. F. James e Jerke* (76) sem o campo clássico ω_1)

$$H_{eff} = (\chi_g a^\dagger a + \kappa_g) \sigma_{gg} + \kappa_e \sigma_{ee} + [\xi a^\dagger \sigma_{ge} + \xi^* a \sigma_{eg}], \quad (2.2.5)$$

onde $\chi_g = |\lambda|^2 / \Delta$, $\kappa_g = -|\Omega_1|^2 / \Delta_1$, $\kappa_e = |\Omega_2|^2 / \Delta$ e $\xi = \lambda \Omega_2^* / \Delta$. Com a interação efetiva (2.2.5), conseguimos a estrutura requerida do hamiltoniano na forma da Eq. (2.1.1), com $k = 1$ e $\chi_e = 0$. Agora, o próximo passo é realizar uma transformação unitária definida por

$$U = \exp \left\{ -i \left[(\chi_g a^\dagger a + \kappa_g) \sigma_{gg} + \kappa_e \sigma_{ee} \right] t \right\}. \quad (2.2.6)$$

Assim, usando a relação $a^\dagger = \sum_n \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle n|$, chegamos a estrutura simplificada

$$H_{eff} = \sum_n \xi_n (|n+k\rangle \langle n| \sigma_{ge} e^{i\phi_n t} + H.c.), \quad (2.2.7)$$

onde a constante de acoplamento é dada por $\xi_n = \sqrt{n+1} \xi$ e

$$\phi_n = (n+1) \chi_g + \kappa_g - \kappa_e. \quad (2.2.8)$$

Supondo a restrição de parâmetros, conforme indicado pelas Eqs. (2.1.10) e (2.1.11), para

um estado de número particular $n = m$, as seguintes condições são satisfeitas

$$\phi_m = 0 \quad (2.2.9)$$

e

$$\ell |\lambda| \gg \sqrt{m+1} \pm \ell |\Omega_2|. \quad (2.2.10)$$

Para garantir que ambas as condições (2.2.9) e (2.2.10) são simultaneamente satisfeitas, ϕ_m deve ser ajustada de modo que $m\chi_g \sim |\kappa_g| \gg \kappa_e$. Sob esta restrição, as transições para níveis adjacentes fora do subespaço $\{m, m+1\}$ do campo de cavidade são desprezíveis, confinando assim, a interação átomo-campo para este subespaço selecionado, conforme descrito pela interação SJC

$$H_m = \xi_m |m+1\rangle \langle m| \sigma_{ge} + H.c. \quad (2.2.11)$$

Vale observar que a interação NSAJC de um fóton

$$H_m = \xi_m |m+1\rangle \langle m| \sigma_{eg} + H.c, \quad (2.2.12)$$

é obtida diretamente pela troca dos campos quântico e clássico (Ω_2) conduzindo agora as transições $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ e $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$, respectivamente. Finalmente, observamos que, com um único campo clássico de frequência ω_2 , como nas Refs. (51, 54), o fator de fase é $\phi_n = (n+1)\chi_g - \kappa_e$ em vez daquela na Eq. (2.2.8), exigindo, por meio da Eq. (2.2.9), que $\sqrt{m+1}|\lambda| = |\Omega_2|$ e evitando assim, o cumprimento da aproximação de onda girante (2.2.10), piorando à medida que o número n aumenta. Por isso, ao contrário de *M. França Santos et. al.*, o nosso procedimento permite uma derivação rigorosa do hamiltoniano seletivo para transições de um fóton, satisfazendo a condição (2.2.10), mesmo para grandes números de Fock.

2.2.1 Transições seletivas de dois fótons

Para derivar a transição de dois fótons, os estados fundamental $|g\rangle$ e excitado $|e\rangle$ são acoplados pelo modo da cavidade ω através do nível intermediário $|j\rangle$, com dessintonia Δ e constante de acoplamento λ , como representado na Fig. 2.2.2. Além disso, consideramos que o campo quântico ω também acopla fora de ressonância a transição $|e\rangle \leftrightarrow |k\rangle$, com constante λ e dessintonia δ . Finalmente, introduzimos um campo clássico de frequência ω_L que acopla fora de ressonância a transição $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$, com constante Ω e dessintonia δ_L . O hamiltoniano que descreve o processo é dado por

$$H = H_0 + V, \quad (2.2.13)$$

Figura 2.2.2 – Configuração atômica tipo escada de cinco níveis usada para a engenharia da interação seletiva de dois fótons. O modo quântico com frequência ω junto com o campo clássico de frequência ω_L conduzem transições fora de ressonância, o qual é chave para a obtenção do hamiltoniano efetivo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

em que

$$H_0 = \omega a^\dagger a + \omega_g |g\rangle \langle g| + \omega_j |j\rangle \langle j| + \omega_e |e\rangle \langle e| + \omega_k |k\rangle \langle k|, \quad (2.2.14)$$

e

$$V = \lambda a (\sigma_{jg} + \sigma_{ej} + \sigma_{ke}) + \Omega \sigma_{gi} e^{-i\omega_L t} + H.c.. \quad (2.2.15)$$

As frequências são dadas por $\omega_g = \omega_L + \delta_L$, $\omega_j = \omega_g + \omega - \Delta$, $\omega_e = \omega_g + 2\omega$ e $\omega_k = \omega_g + 3\omega - \delta$. Estamos fazendo a suposição razoável de que todas as frequências de Rabi são iguais. Depois de passar para a representação de interação e impor a restrição de parâmetros $\sqrt{n+1}\lambda \sim \Omega \ll \Delta, \delta, \delta_L$, mais uma vez descobrimos que a interação átomo-campo consiste de termos altamente oscilantes que levam ao hamiltoniano efetivo de segunda ordem (ver derivação no Apêndice A)

$$H = (\chi_g a^\dagger a + \kappa_g) \sigma_{gg} + (\chi_e a^\dagger a + \kappa_e) \sigma_{ee} + \xi \left[(a^\dagger)^2 \sigma_{ge} + a^2 \sigma_{eg} \right], \quad (2.2.16)$$

em que $\chi_g = \xi = \kappa_e = |\lambda|^2 / \Delta$, $\kappa_g = |\Omega|^2 / \delta_L$ e $\chi_e = (\delta + \Delta) |\lambda|^2 / \delta \Delta$. Seguindo os passos usados para derivar o hamiltoniano (2.2.11), realizamos uma outra transformação unitária

$$U = \exp \left\{ -i \left[(\chi_g a^\dagger a + \kappa_g) \sigma_{gg} + (\chi_e a^\dagger a + \kappa_e) \sigma_{ee} \right] t \right\}, \quad (2.2.17)$$

para se livrar dos termos diagonais na Eq. (2.2.16), conduzindo assim à forma simplificada

$$H_{eff} = \sum_n \xi_n (|n+2\rangle \langle n| \sigma_{ge} e^{i\phi_n t} + H.c.), \quad (2.2.18)$$

em que $\xi_n = \sqrt{(n+1)(n+2)}\xi$ e a fase independente do tempo é

$$\varphi_n = (n+2)\chi_g - n\chi_e + \kappa_g - \kappa_e. \quad (2.2.19)$$

Como no caso da transição seletiva de um fóton, que para um número de fótons particular $n = m$ as duas condições seguintes são satisfeitas

$$\phi_m = 0 \quad (2.2.20)$$

e

$$\ell |\chi_g - \chi_e| \gg |\xi_{m\pm\ell}|. \quad (2.2.21)$$

Finalmente, obtém-se a interação seletiva de dois fótons

$$H_m = \xi_m |m+2\rangle \langle m| \sigma_{ge} + H.c. \quad (2.2.22)$$

A fim de assegurar que ambas as condições (2.2.20) e (2.2.21) são simultaneamente satisfeitas, adotamos uma restrição adicional de parâmetros, onde $m\chi_e \sim \kappa_g \gg m\chi_g, \kappa_e$. Supondo $\delta \ll \Delta$, o ajuste adequado da razão δ/Δ , torna-se possível satisfazer a condição (2.2.21), para qualquer que seja o valor de ℓ . Com este conjunto de parâmetros, a condição (2.2.21) reduz-se a $\sqrt{(m+1\pm\ell)(m+2\pm\ell)} \ll \ell\Delta/\delta$, que restringe o intervalo permitido de subespaços $\{m, m+2\}$ para grandes números de Fock à condição $m \ll \ell\Delta/\delta$. Para a derivação da interação seletiva de dois fótons temos escolhido uma configuração de níveis mais complicada daquelas para os processos de um, dois e três fótons (a ser discutida abaixo) pela necessidade do cumprimento da condição (2.2.21). Sem a inclusão do nível $|k\rangle$, o valor do parâmetro χ_e seria $|\lambda|^2/\Delta$. Isto entraria em conflito com (2.2.21), já que a diferença $\chi_g - \chi_e$ seria nula. A adição do nível $|i\rangle$, é importante para satisfazer a condição (2.2.20) através do termo $\kappa_g = |\Omega|^2/\delta_L$, devido à imposição $\delta \ll \Delta$, obrigatória para satisfazer (2.2.21). Contudo, a aplicação adequada do campo clássico para acoplar transições no sistema, (por exemplo $|e\rangle \leftrightarrow |k\rangle$) poderia reduzir a configuração de 5 níveis para 4 níveis.

2.2.2 Transições seletivas de três fótons

A seguir, para obter a interação de três fótons SJC consideramos um átomo de quatro níveis, como representado na Fig. 2.2.3, com as transições $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ e $|f\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ acopladas

Figura 2.2.3 – Configuração atômica tipo escada de quatro níveis usada para a construção da interação seletiva de três fótons. O campo clássico nesta configuração é apenas necessário para alcançar interações seletivas com altas excitações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

fora de ressonância pelo modo de cavidade ω , com dessintonias $\Delta_1 = \omega - \omega_i$, $\delta = \Delta_2 - \Delta_1$ e $\Delta_2 = (\omega_e - \omega_f) - \omega$, respectivamente. Consideramos que todas as frequências de Rabi estão em torno de λ . Além disso, um campo clássico de frequência ω_L é considerado para induzir a transição $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ com constante de acoplamento Ω e dessintonia $\delta_L = \omega - \omega_L - \Delta_1$. O hamiltoniano é dado por

$$H = H_0 + V, \quad (2.2.23)$$

em que

$$H_0 = \omega a^\dagger a + (\omega - \Delta_1) |i\rangle \langle i| + (2\omega - \Delta_2) |f\rangle \langle f| + 3\omega |e\rangle \langle e|, \quad (2.2.24)$$

e

$$V = \lambda a (\sigma_{ig} + \sigma_{fi} + \sigma_{ef}) + \Omega \sigma_{ig} e^{-i\omega_L t} + H.c.. \quad (2.2.25)$$

Na representação de interação, o hamiltoniano é dado por

$$H_I = \lambda \sigma_{ig} a e^{-i\Delta_1 t} + \lambda \sigma_{fi} a e^{-i\delta t} + \lambda \sigma_{ef} a e^{i\Delta_2 t} + \Omega \sigma_{ig} e^{-i\delta_L t} + H.c.. \quad (2.2.26)$$

No regime dispersivo onde $\sqrt{n+1}\lambda \ll \Delta_1, \Delta_2, \delta$ e $\Omega \ll \delta_L$, o hamiltoniano efetivo é dado por uma expansão perturbativa; para este caso, até terceira ordem. A condição $\Delta_2 > \delta > \Delta_1$, é suficiente para garantir que apenas os termos diagonais vão contribuir na correção de segunda ordem, enquanto que os termos não-diagonais são altamente oscilantes. Sob estas condições o termo de troca de três fótons entre átomo e campo decorre da correção de terceira ordem; e assim, o hamiltoniano efetivo é dado por (ver derivação no Apêndice

A)

$$H_{eff} = (\chi_g a^\dagger a + \kappa_g) \sigma_{gg} + \chi_e (a^\dagger a + 1) \sigma_{ee} + (\xi a^{\dagger 3} \sigma_{ge} + \xi^* a^3 \sigma_{eg}), \quad (2.2.27)$$

com $\chi_g = |\lambda|^2 / \Delta_1$, $\kappa_g = |\Omega|^2 / \delta_L$, $\chi_e = |\lambda|^2 / \Delta_2$, e $\xi = \lambda |\lambda|^2 / (\Delta_1 \Delta_2)$. Seguindo o protocolo para a construção de hamiltonianos seletivos, realizamos a transformação unitária

$$U = \exp \left\{ -i \left[(\chi_g a^\dagger a + \kappa_g) \sigma_{gg} + \chi_e (a^\dagger a + 1) \sigma_{ee} \right] t \right\} \quad (2.2.28)$$

para obter a forma simplificada:

$$H_{eff} = \sum_n \xi_n (|n+3\rangle \langle n| \sigma_{ge} e^{i\phi_n t} + H.c.). \quad (2.2.29)$$

Se para um determinado número de fótons $n = m$, ambas as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\varphi_m = (m+3) \chi_g - (m+1) \chi_e - \kappa_g = 0 \quad (2.2.30)$$

e

$$\xi_{m \pm \ell} \ll \ell |\chi_g - \chi_e|, \quad (2.2.31)$$

onde $\xi_m = \sqrt{(m+1)(m+2)(m+3)} \xi$, derivamos o hamiltoniano seletivo para transições de três fótons dado por

$$H_m = \xi_m |m+3\rangle \langle m| \sigma_{ge} + H.c.. \quad (2.2.32)$$

Da condição (2.2.31), obtemos $\sqrt{(m+1 \pm \ell)(m+2 \pm \ell)(m+3 \pm \ell)} \ll \ell \delta / \lambda$, restringindo o intervalo permitido de subespaços $\{m, m+3\}$ para grandes números de Fock à condição $m \ll \ell \Delta / \delta$. Neste sentido, nota-se que o campo clássico é essencial para a engenharia de interações seletivas de subespaços com grandes números de Fock. Para subespaços de estados de Fock com número pequeno, o campo clássico pode ser desprezado.

2.3 Validade da engenharia das interações seletivas

Para analisar a validade do nosso método, podemos comparar numericamente as evoluções das populações do subespaço selecionado $\{m, m+k\}$, derivada dos hamiltonianos de partida, com as oscilações de Rabi senoidais dos hamiltonianos seletivos para cada uma das transições de um, dois e três fótons, respectivamente. Além disso, demonstramos que

Figura 2.3.1 – Populações dos estados $|e, m = 4\rangle$ e $|g, m = 5\rangle$, contra τ , calculadas a partir dos hamiltonianos de partida e seletivo de um fóton, descritas pelos pares de curvas contínuas e tracejadas, respectivamente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

os hamiltonianos seletivos agem apenas nos estados selecionados e, dificilmente preenchem os estados fora do subespaço selecionado.

Começamos com a interação seletiva de um fóton no estado inicial $|e, m = 4\rangle$. Na Fig. 2.3.1, estão os gráficos das populações dos estados selecionados $|e, m = 4\rangle$ e $|g, m = 5\rangle$ contra uma escala de tempo adimensional $\tau = \lambda t$. Os pares de curvas sólidas e tracejadas na figura mostram as evoluções das populações dos estados $|e, m = 4\rangle$ e $|g, m = 5\rangle$, calculadas a partir dos hamiltonianos (2.2.1) e (2.2.11), respectivamente. Através da análise das aproximações necessárias para obter o hamiltoniano (2.2.11), supusemos os parâmetros $\Delta = \Delta_2 = 8\sqrt{m+1}\lambda$, $\Omega_1 = \sqrt{m+1}\lambda$ e $\Omega_2 = \lambda/(8\sqrt{m+2}\lambda)$, que por meio da equação (2.2.9), conduzem à relação de dessintonias $\Delta_1 = \{1 - \Omega_2^2/[(m+1)\lambda^2]\}^{-1}\Delta$, enquanto que as oscilações de Rabi, derivadas do hamiltoniano seletivo (2.2.11), ocorrem entre zero e a unidade. Aquelas derivadas do hamiltoniano (2.2.1) ocorrem aproximadamente em torno de 0,02 e 0,98. Isso indica que, para o conjunto requerido de parâmetros, a dinâmica regida pela engenharia de interação se encaixa muito bem com o hamiltoniano (2.2.1).

Já que a dinâmica ditada pelo hamiltoniano seletivo (2.2.11) é igual ao do modelo Jaynes-Cummings usual, para o caso particular dos estados selecionados $|e, m = 4\rangle$ e $|g, m = 5\rangle$, na Fig. 2.3.1, também apresentamos a evolução das populações dos estados iniciais adjacentes $|e, m = 3\rangle$ e $|e, m = 5\rangle$, sob o hamiltoniano (2.2.1) e os mesmos parâmetros previamente considerados. Como podemos ver a partir das curvas mais leves,

Figura 2.3.2 – Populações dos estados $|e, m = 4\rangle$ e $|g, m = 6\rangle$, contra τ , calculadas a partir dos hamiltonianos de partida e seletivo de dois fótons, descritas pelos pares de curvas contínuas e tracejadas, respectivamente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

que oscilam próximo da unidade, aquela com a menor (maior) amplitude associada ao estado $|e, m = 3\rangle$ ($|e, m = 5\rangle$), a dinâmica governada pelo hamiltoniano (2.2.1) dificilmente vai popular os estados fora do subespaço selecionado, confirmando assim, a validade da interação seletiva de um fóton.

No caso das transições de dois fótons, na Fig. 2.3.2, começamos novamente com o estado $|e, m = 4\rangle$ para ilustrar a evolução das populações dos estados $|e, m = 4\rangle$ e $|g, m = 6\rangle$, contra τ , regida pelos hamiltonianos nas equações (2.2.13) e (2.2.22), a partir do qual se derivam os pares de curvas sólidas e tracejadas, respectivamente. Temos imposto os parâmetros $\delta = 8\sqrt{m+1}\lambda$, $\Delta = 8(m+2)\delta$ e $\Omega = \sqrt{m}\lambda$, que conduzem, através da equação (2.2.20), a $\delta_L = \{1 - \delta/(m\Delta)\}^{-1}\delta$. As quatro curvas sólidas novamente atestam a validade das aproximações que levam à interação seletiva. Apesar da pequena amplitude das oscilações rápidas da curva que mostra a evolução da população do estado $|e, m = 4\rangle$, as linhas contínuas se encaixam bem com as oscilações de Rabi sinusoidais mostradas pelas linhas tracejadas. A discrepância entre as curvas provenientes dos hamiltonianos seletivo e de partida está próxima daquela para o processo de um fóton. A principal diferença entre as curvas derivadas das transições de um, dois e três fótons (a ser discutida abaixo) é a amplitude das oscilações rápidas exibidas pela curva para a população do estado $|e, m = 4\rangle$; no caso da transição de dois fótons, a amplitude das oscilações é significativamente maior do que aqueles para as transições de um e três fótons.

Assim como no caso da transição de um fóton, a dinâmica resultante do hamil-

toniano seletivo (2.2.22) é igual ao do modelo não linear de Jaynes-Cummings de dois fótons para o caso particular dos estados de Fock $|e, m = 4\rangle$ e $|g, m = 6\rangle$. Com o objetivo de comprovar a seletividade do processo de dois fótons, na Fig. 2.3.2, apresentamos a evolução das populações dos estados iniciais adjacentes $|e, m = 3\rangle$ e $|e, m = 5\rangle$, mostrada pelas curvas mais leves que oscilam em torno da unidade com amplitude menor e maior, respectivamente, sob o hamiltoniano (2.2.13) e os mesmos parâmetros considerados acima. Mais uma vez, estas curvas mostram que os estados adjacentes são muito mal populados, como todos os outros estados, com exceção de $|e, m = 4\rangle$ e $|g, m = 6\rangle$.

Em relação à validade das transições de três fótons na Fig. 2.3.3, começamos com o estado $|e, m = 4\rangle$ para mostrar a evolução das populações desses estados $|e, m = 4\rangle$ e $|g, m = 7\rangle$ contra τ , calculada a partir dos hamiltonianos das equações (2.2.23) e (2.2.32), derivando as curvas sólidas e tracejadas, respectivamente. Da análise das aproximações para obter o hamiltoniano (2.2.32) definimos os parâmetros $\Delta_1 = 8\sqrt{m+1}\lambda$, $\Delta_2 = 8\Delta_1$ e $\Omega = \sqrt{m+1}\lambda$, que, por meio da equação (2.2.30), conduzem à relação $\delta_L = (m+1)\Delta_1\Delta_2/[(m+3)\Delta_2 - (m+1)\Delta_1]$. A validade da interação seletiva é confirmada com um erro associado à inversão de população de aproximadamente 4%, uma vez que estas curvas evoluem entre as probabilidades de aproximadamente 0,04 e 0,94. As curvas mais leves exibem as evoluções das populações dos estados iniciais adjacentes $|e, m = 3\rangle$ e $|e, m = 5\rangle$, que oscilam em torno da unidade com amplitude menor e maior, respectivamente, sob o hamiltoniano (2.2.23) e com os mesmos parâmetros considerados acima. Mais uma vez, verifica-se que todos os outros estados, com exceção de $|e, m = 4\rangle$ e $|g, m = 7\rangle$, são mal populados, corroborando as aproximações realizadas para a dedução do hamiltoniano seletivo de três fótons.

Observa-se nas Figuras 2.3.1 a 2.3.3 que os três conjuntos de parâmetros escolhidos para analisar a eficácia dos hamiltonianos seletivos (2.2.11), (2.2.22) e (2.2.32) levam aproximadamente o mesmo tempo de inflexão de população, ao redor de $10^2/\lambda$. Esse fato notável mostra que projetamos todas as três interações seletivas de um, dois e três fótons com aproximadamente a mesma constante de acoplamento átomo-campo, $\xi \sim 10^{-2}\lambda$. Evidentemente, a constante de acoplamento das interações seletivas depende crucialmente do procedimento adotado para atingir as interações seletivas desejadas, como também da configuração de níveis atômicos e transições escolhidas. Este fato nos estimula a buscar novos procedimentos e configurações de estados atômicos para a engenharia das interações seletivas de transições de um e dois fótons que resultam em constantes de acoplamentos átomo-campo mais fortes. Apesar de ter obtido a mesma ordem de grandeza para os três acoplamentos átomo-campo que temos realizado, naturalmente esperamos obter constantes de acoplamento menos intensas em ordens superiores do hamiltoniano efetivo. Vale ressaltar, no entanto, que, apesar de as interações de ordem superior produzirem cada vez menores acoplamentos efetivos átomo-campo dentro da cavidade QED, avanços re-

Figura 2.3.3 – Populações dos estados $|e, m = 4\rangle$ e $|g, m = 7\rangle$, contra τ , calculadas a partir dos hamiltonianos de partida e seletivo de três fótons, descritas pelos pares de curvas contínuas e tracejadas, respectivamente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

centes em CirQED tendem à realização de regimes de acoplamento ultra fortes, com a relação de acoplamento normalizado λ/ω até 12%. (82) Ao confiar em CirQED podemos, portanto, esperar interações seletivas de ordem superior que poderiam ser úteis para o processamento de informação quântica. (83) Evidentemente, outro ponto sensível para ser resolvido, na engenharia de interações de ordem superior, é como ajustar os parâmetros do modelo para eliminar todas as transições de fótons indesejáveis a ordens inferiores.

2.4 Aplicações: Geração de estados de Fock e uma estratégia contra a decoerência

Em seguida, aplicamos as interações seletivas para a geração de estados de Fock em cavidades QED, mostrando que podemos preparar um estado de Fock de número maior por um procedimento passo a passo. Mais importante, apresentamos uma técnica para proteger um estado de Fock contra os mecanismos de dissipação da cavidade, permitindo que o tempo de decoerência seja aumentado de forma significativa. Esta técnica envolve a injeção de um feixe de átomos dentro da cavidade, que são obrigados a interagir com o modo da cavidade cujo estado tem de ser protegido, por meio de um processo seletivo de um fóton.

2.4.1 Estados de Fock

As interações NSJC, promovendo transições de k -fótons, podem, evidentemente, ser usadas para preparar estados de Fock, através de um procedimento passo a passo. A partir do vácuo ou do estado de um fóton e considerando a engenharia de interação seletiva para transições de k -fótons, podemos atingir o estado do campo $|Nk\rangle$ ou $|Nk + 1\rangle$ pela passagem de N átomos através da cavidade. Evidentemente, cada passo da interação seletiva átomo-campo, levando a um estado de Fock particular, exige um determinado conjunto de parâmetros a ser ajustados. O M -ésimo passo requer a construção específica da interação seletiva $\xi_{(M-1)k} (|Mk\rangle \langle (M-1)k| \sigma_{ge} + H.c.)$. O hamiltoniano (2.2.32) é a interação mais eficaz na preparação de estados de Fock pelo fato de que todas as três interações seletivas (para uma, duas e três transições de fótons) têm aproximadamente a mesma constante de acoplamento átomo-campo ($\xi \sim 10^{-2}\lambda$). Portanto, seria mais eficaz preparar estados de Fock usando a transição de três fótons, em vez das transições de um ou dois fótons. Como na ilustração Fig. 2.3.3, a partir do estado de Fock $|1\rangle$, poderíamos construir o estado de Fock $|16\rangle$ pela passagem de cinco átomos, todos preparados em seus estados excitados. Do ponto de vista do hamiltoniano efetivo (2.2.32), depois de medir o M -ésimo átomo no seu estado fundamental e, assim, projetar o campo da cavidade sobre o estado de Fock $|Mk + 1\rangle$, estamos prontos para enviar o $(M + 1)$ -ésimo átomo através da cavidade, para se obter o estado de Fock $|(M + 1)k\rangle$, e assim sucessivamente. Baseando-se na configuração atômica associada à Fig. 2.3.3, primeiro definimos as mesmas dessintonias Δ_1 e Δ_2 para todas as etapas da interação átomo-campo. O tempo de interação para cada átomo, o qual é calculado considerando a probabilidade de cada átomo ser detectado no estado fundamental ($|g\rangle$) após da passagem pela cavidade ($P_g = \sin^2 \xi_m t_m = 1$) é dado por

$$t_m = \frac{\pi}{2\xi_m} = \frac{\pi\Delta_1\Delta_2}{2\lambda^3\sqrt{(m+1)(m+2)(m+3)}}. \quad (2.4.1)$$

Com a passagem de um dado átomo o valor de m ($= 0, 3, 6, 9, 12$) aumenta, definindo um particular subespaço selecionado $\{m, m+3\}$, ou seja, cada átomo leva um tempo menor para interagir com o campo da cavidade do que o tempo de seu antecessor. Ressaltamos que com os valores de Δ_1 e Δ_2 previamente fixados, a condição (2.2.30) para definir a sequência necessária de subespaços selecionados é conseguida através do ajuste da frequência de Rabi do campo clássico tal que

$$\Omega_m = \lambda \sqrt{\delta_L \left(\frac{m+3}{\Delta_1} - \frac{m+1}{\Delta_2} \right)}. \quad (2.4.2)$$

Na Fig. 2.4.1, ajustamos as dessintonias $\Delta_1 = 12\lambda$ e $\Delta_2 = 5\delta_L = 5\Delta_1/2$ e, a partir do estado de Fock $|1\rangle$, obtemos um histograma 3D mostrando a evolução das populações

Figura 2.4.1 – Histograma 3D que mostra a evolução, contra τ , das populações criadas pela preparação passo a passo determinista de estados de Fock, a partir de $|4\rangle$ a $|16\rangle$, numericamente calculadas a partir das interações de cinco átomos consecutivos com o modo da cavidade via transição seletiva de três fótons.

Fonte: Elaborada pelo autor.

dos estados de Fock projetados, a partir do estado $|1\rangle$ até $|16\rangle$ contra a escala de tempo adimensional τ , numericamente calculados a partir do hamiltoniano (2.2.23). A partir do estado inicial $|1\rangle$, observa-se que, após a passagem de cada átomo através da cavidade e sua medida no estado fundamental, as fidelidades resultantes $\mathcal{F} = \langle m | \tilde{\rho}_F | m \rangle$ para todos os estados preparados do campo na cavidade, a partir de $|4\rangle$ até $|16\rangle$, evoluem de 0.999 a 0.991, sendo $\tilde{\rho}_F$ o estado normalizado do campo na cavidade após sua projeção sobre o estado fundamental atômico. Supondo que o estado $|1\rangle$ é preparado em $\tau_0 = 0$, o primeiro átomo é, então, enviado para interagir com o modo da cavidade durante o intervalo de tempo $\tau_1 = \lambda t_1 = 234$. Depois de medir este primeiro átomo em seu estado fundamental (supondo que esta medida e todas as outras levam um tempo insignificante) o segundo átomo é enviado para interagir com o modo da cavidade, deixando o estado de Fock $|4\rangle$ com fidelidade 0.999, durante o intervalo de tempo $\Delta\tau = 54$, de forma que o tempo em que este átomo é medido no seu estado fundamental é $\tau_2 = 288$, deixando o modo no estado $|7\rangle$ com fidelidade 0,998. Como se pode ver na Fig. 2.4.1, uma pequena população residual do estado $|8\rangle$ da cavidade é deixada depois da medição do segundo átomo. O terceiro átomo é então liberado para interagir com o modo da cavidade durante o intervalo de tempo $\Delta\tau = 27$, deixando a cavidade no estado $|10\rangle$ em $\tau_3 = 315$, com fidelidade 0,997. O quarto átomo

Figura 2.4.2 – Histograma 3D com a evolução das populações dos estados de Fock, sob os efeitos da decoerência dos mecanismos de relaxações da cavidade e emissões espontâneas atômicas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

é suposto interagir com este estado quase puro durante o intervalo de tempo $\Delta\tau = 17$, produzindo, assim, o estado $|13\rangle$ em $\tau_4 = 332$ e a fidelidade agora caindo para 0,993. Observamos a partir da figura 7 que ambos os estados vizinhos $|12\rangle$ e $|14\rangle$ têm populações residuais após a medição do quarto átomo. Finalmente, o quinto átomo é enviado para interagir com o estado quase puro $|13\rangle$ em τ_4 , preparando assim o estado $|16\rangle$ com ainda a significativamente alta fidelidade 0,991 em $\tau_5 = 344$. Como esperado, os erros decorrentes das aproximações utilizadas produzem populações residuais nos estados vizinhos $|15\rangle$ e $|17\rangle$, levemente maior as do que aquelas nos estados $|12\rangle$ e $|14\rangle$. Vale a pena notar, no entanto, que os valores elevados das fidelidades contrastam com as probabilidades de medição, um por um, dos estados fundamentais de cinco átomos, que variam de 0,93 para o primeiro átomo a 0,80 para o quinto átomo; a probabilidade resultante de medir todos esses átomos em seus estados fundamentais (ou seja, de, finalmente, projetar o estado de Fock $|16\rangle$) é em torno de 0,5.

Na Fig. 2.4.2 temos novamente um histograma 3D calculado numericamente mostrando a evolução das populações dos estados de Fock projetados contra τ , seguindo exatamente o protocolo descrito para esboçar a Figura 2.4.1, mas desta vez levando em conta os efeitos da decoerência devida à emissão espontânea atômica e aos mecanismos de dissipação da cavidade. Neste caso deve-se considerar a evolução do operador densidade

átomo-campo ρ dada pela equação mestra

$$\begin{aligned}\dot{\rho} = & -i[H, \rho] + (\Gamma/2) (2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) \\ & + (\gamma/2) [(2\sigma_{ge}\rho\sigma_{eg} - \sigma_{ee}\rho - \rho\sigma_{ee}) \\ & + (2\sigma_{fe}\rho\sigma_{ef} - \sigma_{ee}\rho - \rho\sigma_{ee})] \\ & + (\tilde{\gamma}/2) [(2\sigma_{if}\rho\sigma_{fi} - \sigma_{ff}\rho - \rho\sigma_{ff}) \\ & + (2\sigma_{gi}\rho\sigma_{ig} - \sigma_{ii}\rho - \rho\sigma_{ii})],\end{aligned}\quad (2.4.3)$$

onde H é o hamiltoniano total, γ ($\tilde{\gamma}$) é a taxa de decaimento para estados de Rydberg circular (não circular), e Γ (com valor típico de 10s^{-1} para cavidades com alto fator de qualidade) é a taxa de decaimento do campo da cavidade. Consideramos o estado fundamental e excitado são níveis circulares de Rydberg, o que nos permite utilizar $\gamma = 3 \times 10^1\text{s}^{-1}$ enquanto que, para os estados de Rydberg não-circulares, assumimos $\tilde{\gamma} = 10^2\gamma$. Para esses valores das taxas de relaxamento, as fidelidades na Fig. 2.4.2 não são muito menores do que aquelas calculadas a partir da dinâmica do sistema fechado na Fig. 2.4.1, que vão desde 0,999 para o estado $|4\rangle$ a 0,933 para o estado final $|16\rangle$. O que está acontecendo aqui é que, dentro do intervalo de tempo necessário para produzir o estado desejado $|16\rangle$, em torno de $3.5 \times 10^2/\lambda$, os efeitos da decoerência dificilmente entram em jogo. Observamos também que a probabilidade resultante de alcançar o estado de Fock $|16\rangle$, isto é, a medição do estado fundamental de todos os cinco átomos, é em torno do mesmo valor como derivado para o caso ideal.

Figura 2.4.3 – Representação esquemática de um fluxo de átomos atravessando a cavidade para construir um liouvillian seletivo no subespaço $\{|N-1\rangle, |N\rangle\}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.4.2 Decoerência

Embora as perdas por decoerência não sejam grandes, na preparação do estado de Fock com N em torno de 16, os mecanismos de amortecimento da cavidade começam a desem-

penhar um papel importante conforme o tempo passa. Tendo isso em mente, apresenta-se uma estratégia para minimizar a decoerência inevitável associada ao fator de qualidade da cavidade. A estratégia consiste em enviar um feixe de átomos preparados no seus estados excitados para interagir com o modo da cavidade em contato com um reservatório a temperatura zero sob a dinâmica do hamiltoniano (2.2.11) (ver Fig. 2.4.3) com $m = N$, levando assim à equação mestra (na representação de interação)

$$\begin{aligned}\dot{\rho} = & (\Gamma/2) (2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) \\ & + (\gamma_{eff}/2) (2a_N^\dagger \rho a_N - a_N a_N^\dagger \rho - \rho a_N a_N^\dagger)\end{aligned}\quad (2.4.4)$$

onde $a_N = |N-1\rangle\langle N|$ é o operador de campo seletivo. Além da taxa de decaimento Γ , o campo da cavidade é agora submetido a uma taxa de amortecimento efetiva dada por

$$\gamma_{eff} = r(|\xi_m|\tau)^2 = (N+1)r(|\xi|\tau)^2 = c(N+1)\Gamma,$$

em que r representa a taxa de chegada do feixe atômico, τ é o tempo de passagem de cada átomo através da cavidade, e ξ_m é a constante de acoplamento na Eq. (2.2.11). A engenharia de reservatórios com um feixe atômico abordada em detalhes por *B. G. Englert* (33), conduz ao super operador associado com a taxa γ_{eff} na Eq. (2.4.4). É conveniente relacionar a taxa efetiva de amortecimento à taxa de decaimento da cavidade por $\gamma_{eff} = c(N+1)\Gamma$, onde $c = r(|\xi|\tau)^2/\Gamma \gg 1$. A evolução dos elementos de matriz densidade na base de Fock, $\rho_{k,l} = \langle k|\rho|l\rangle$, é descrita pela equação

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{k,l} = & (\Gamma/2) \left[2\sqrt{(k+1)(l+1)}\rho_{k+1,l+1} - (k+l)\rho_{k,l} \right] \\ & + c(N+1)(\Gamma/2) [2\delta_{k,N}\delta_{l,N}\rho_{N-1,N-1} - \delta_{k,N-1}\rho_{N-1,l} \\ & - \delta_{l,N-1}\rho_{k,N-1}].\end{aligned}\quad (2.4.5)$$

Dado que não há informação de fase envolvida, o decaimento do estado de Fock pode ser descrito pelas variações nas probabilidades de estados. Portanto

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{k,k} = & (k+1)\Gamma\rho_{k+1,k+1} - k\Gamma\rho_{k,k}, \quad 0 \leq k \leq N-2 \\ \dot{\rho}_{N-1,N-1} = & N\Gamma\rho_{N,N} - (N-1)\Gamma\rho_{N-1,N-1} \\ & - c(N+1)\Gamma\rho_{N-1,N-1},\end{aligned}\quad (2.4.6)$$

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{N,N} = & (N+1)\Gamma\rho_{N+1,N+1} - N\Gamma\rho_{N,N} \\ & + c(N+1)\Gamma\rho_{N-1,N-1}.\end{aligned}\quad (2.4.7)$$

Já que o super operador associado à taxa γ_{eff} atua unicamente no subespaço de Fock $\{|N-1\rangle, |N\rangle\}$, vamo-nos focar nas Eqs. (2.4.6) e (2.4.7), e consideramos o estado inicial $\rho(0) = |N\rangle\langle N|$. Sem absorção estimulada (como seria o caso para um reservatório sem

Figura 2.4.4 – Diagrama dos níveis de energia do modo da cavidade onde age o super operador associado com a taxa γ_{eff} , mostrando o fluxo de probabilidade de número nas Eqs. (2.4.6) e (2.4.7).

Fonte: Elaborada pelo autor.

temperatura), o estado $|N+1\rangle$ não pode ser populado e portanto sua probabilidade é desprezada, isto é $\rho_{N+1,N+1} = 0$; e assim, as Eqs. (2.4.6) e (2.4.7) se reduzem à forma

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho}_{N-1,N-1} \\ \dot{\rho}_{N,N} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -[(N-1)\Gamma + c(N+1)\Gamma] & N\Gamma \\ c(N+1)\Gamma & -N\Gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{N-1,N-1} \\ \rho_{N,N} \end{pmatrix}. \quad (2.4.8)$$

Além da imposição $c \gg 1$, também consideramos $N \gg 1$, e com estas considerações a solução das equações acopladas para $\rho_{N-1,N-1}$ e $\rho_{N,N}$, é dada por

$$\begin{pmatrix} \rho_{N-1,N-1} \\ \rho_{N,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/c \\ 1 - 2/c \end{pmatrix} e^{-\frac{N\Gamma}{c}t} + \begin{pmatrix} -1/c \\ 2/c \end{pmatrix} e^{-cN\Gamma t}, \quad (2.4.9)$$

demonstrando claramente que a população do estado inicial $|N\rangle$ diminui lentamente, à razão $N\Gamma/c$, substancialmente menor do que o valor de $cN\Gamma$ resultante do caso em que o reservatório de feixe atômico está ausente. Em conclusão, o reservatório de um feixe atômico construído pela interação seletiva de um fóton, que limita a excitação de um modo do campo dentro de um subespaço $\{|N-1\rangle, |N\rangle\}$, trabalha para atrasar substancialmente o decaimento do estado de Fock $|N\rangle$, com a realimentação da população do estado $|N\rangle$ através do estado $|N-1\rangle$ (ver Fig. 2.4.4). A partir desse resultado surge uma interessante questão: o que acontece com a população do estado $|N\rangle$, se super operadores do mesmo tipo atuam desde o estado de vácuo até $|N\rangle$. Pode ser esse estado estacionário? A resposta é sim, mas retornaremos a esta importante questão em mais detalhe no Capítulo 4.

Capítulo 3

Estado de Fock estacionário via reservatório atômico

A proposição de esquemas que permitem a geração de estados de equilíbrio não clássicos tem sido uma das principais tarefas no campo da ciência da informação quântica. A este respeito, a técnica de engenharia de reservatório sinalizou um passo importante para a implementação de processos quânticos de informação. Por outro lado, a proteção de um determinado estado exige a engenharia de uma interação específica (nem sempre fácil). Recentemente, a geração de estados de Fock com números de fótons n até 7 foi reportada em CQED (9), onde é utilizado um procedimento de retroalimentação quântica para corrigir os saltos quânticos induzidos pelo amortecimento da cavidade. A distribuição do número de fótons resultante atribui uma probabilidade ao redor de 0,8 para a geração de estados número até 3, caindo abaixo de 0,4 para $n = 7$. Uma proposta teórica foi apresentada para gerar estados de Fock altamente excitados a partir de um estado inicial coerente, no contexto de íons aprisionados. (84) Neste esquema os autores consideram apenas o mecanismo de relaxamento dos estados eletrônicos. Diferentemente, em nossa proposta consideramos o decaimento do modo da cavidade onde o estado estacionário é preparado; na verdade, aproveitamos esse decaimento inevitável para produzir nossos estados estacionários, que são obtidos independentemente do estado inicial do modo da cavidade.

Neste capítulo expõe-se um protocolo que consiste de uma técnica para a preparação de estados de Fock estacionários. (34) O reservatório atômico (33), o qual é construído por injeção de um feixe de átomos para interagir um de cada vez com o modo da cavidade, dá origem a um liouvillian para governar a dinâmica do campo junto com aqueles liouvillianos provenientes dos mecanismos de perdas da cavidade. Ressaltamos que nosso protocolo é diferente de aqueles apresentados por Refs. (38, 39, 43, 74, 85). Em contraste com as suposições que suportam os métodos propostos nas Refs. (38, 39, 43, 74, 85), nosso estado de Fock não é um estado estacionário de um limdbliadiano específico $\mathcal{L}\rho = (\Gamma/2) (2\mathcal{O}\rho\mathcal{O}^\dagger - \mathcal{O}^\dagger\mathcal{O}\rho - \rho\mathcal{O}^\dagger\mathcal{O})$, onde o único estado puro estacionário do sistema é auto estado do operador $\mathcal{O}$ com auto-valor nulo. Em nosso protocolo, para alcançar o estado

Figura 3.1.1 – Configuração de níveis atômicos para engenhear: (a) hamiltoniano seletivo e (b) não seletivo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

de Fock estacionário é requerida a soma de três lindbladianos, onde dois deles agem em subespaços selecionados do espaço do modo da cavidade, com o modo emitindo um fóton quando o átomo passa ao estado fundamental $|g\rangle$, ou absorvendo um fóton quando o átomo passa ao estado excitado $|e\rangle$, dentro dos subespaços selecionados $\{|m\rangle, |m+1\rangle\}$ e $\{|l\rangle, |l+1\rangle\}$, respectivamente. O terceiro lindbladiano que não é seletivo, está associado com a absorção de fótons pelo modo da cavidade, a fim de contrabalançar a emissão inevitável para o ambiente natural. Segue, a derivação desses lindbladianos.

3.1 Engenharia de interação e equação mestra

Para gerar os lindbladianos necessários utiliza-se a engenharia de interações seletivas apresentadas no Capítulo 2 e o reservatório atômico (33). Os lindbladianos seletivos são obtidos considerando-se a configuração de níveis atômicos na Fig. 3.1.1a, com o processo de emissão ou absorção a partir dos átomos preparados no estado fundamental $|g\rangle$ ou excitado $|e\rangle$, respectivamente, e o lindbladiano não seletivo considerando-se a configuração de níveis da Fig. 3.1.1b.

3.1.1 Engenharia de interação

Vamos começar primeiro com a interação seletiva. Como mostrado na Fig. 3.1.1a, o modo da cavidade (ω) é usado para promover um tipo de transição Raman $g \leftrightarrow e$ e ajudado por dois campos clássicos de frequências, ω_1 e ω_2 , fora de sintonia com as transições $g \leftrightarrow i$

e $e \leftrightarrow i$, respectivamente. No regime dispersivo, $\lambda\sqrt{n+1} \ll \Delta$ e $\Omega_j \ll \Delta_j$ ($j = 1, 2$), o estado $|i\rangle$ não é populado e a interação efetiva é dada pelo hamiltoniano

$$H_{eff} = (\xi a^\dagger a - \varpi_g) \sigma_{gg} + \varpi_e \sigma_{ee} + (\zeta a^\dagger \sigma_{ge} e^{i\delta t} + H.c.),$$

onde $\varpi_g = |\Omega_1|^2 / \Delta_1$, $\varpi_e = |\Omega_2|^2 / \Delta_2$, $\xi = |\lambda|^2 / \Delta$, $\zeta = \lambda^* \Omega_2 (\Delta^{-1} + \Delta_2^{-1}) / 2$ e $\delta = \Delta - \Delta_2$. Os termos diagonais no hamiltoniano acima correspondem ao shift de energia entre os níveis $|g\rangle$ e $|e\rangle$ cuja diferença somada à dessintonia δ determina a frequência efetiva ϕ_n da transição $g \leftrightarrow e$ que depende do número de fótons no modo da cavidade. Os últimos dois termos descrevem as transições entre estes níveis. Para obter seletividade é necessária a transformação unitária $U = \exp \{-i [(\xi a^\dagger a - \varpi_g) \sigma_{gg} + \varpi_e \sigma_{ee}] t\}$ que leva H_{eff} à forma

$$V_{eff} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n e^{i\phi_n t} \sigma_{ge} |n+1\rangle \langle n| + H.c.,$$

com $\zeta_n = \sqrt{n+1} \zeta$ e $\phi_n = (n+1) \xi + \delta - \varpi_g - \varpi_e$. Aplicando as condições (2.1.10) e (2.1.11) dadas no capítulo 2 que neste caso particular se reduzem a $\xi \gg \sqrt{k+2} |\zeta|$ e $\phi_k = 0$ (a qual é satisfeita com a imposição $\Omega_1 = \lambda \sqrt{(m+1) \Delta_1 / \Delta} \gg \sqrt{\Delta_1 / \Delta_2} \Omega_2$), são suficientes para obter o hamiltoniano seletivo desejado

$$\mathcal{H}_1 = \zeta_k \sigma_{ge} |k+1\rangle \langle k| + H.c. \quad (3.1.1)$$

Com o desligamento dos campos clássicos e aproveitando o efeito Stark, o modo da cavidade é agora usado para acoplar de forma ressonante os níveis $|g\rangle$ e $|i\rangle$ como se mostra na Fig. ???. Portanto segue-se o hamiltoniano

$$\mathcal{H}_2 = \tilde{\lambda} \sigma_{ig} a + H.c.. \quad (3.1.2)$$

3.2 Equação mestra

De acordo com o trabalho de *B. G. Englert* para a engenharia do reservatório atômico, assumimos o regime de acoplamento fraco para o parâmetro de interação associado com a Eq. (3.1.2), i.e., $\tilde{\lambda} \tau \ll 1$, sendo τ o tempo durante o qual um átomo atravessa a cavidade. No entanto, a estrutura de lindblad do superoperador vindo do hamiltoniano na Eq. (3.1.1) não depende do regime de acoplamento fraco devido à natureza seletiva dessa interação. Seguindo a linha de raciocínio de *B. G. Englert*, quando os átomos preparados no estado fundamental $|g\rangle$ atravessam a cavidade e a dinâmica está regida pelo hamiltoniano (3.1.1) ajustado por um conjunto de parâmetros (a serem discutidos

Figura 3.2.1 – Representação esquemática do fluxo atômico com átomos nos estados $|g\rangle$, $|e\rangle$ e $|i\rangle$, gerando os Lindbladianos requeridos para a obtenção do estado de Fock estacionário.

Fonte: Elaborada pelo autor.

mais adiante) para atuar no subespaço $\{|m\rangle, |m+1\rangle\}$, dão origem ao liouvilliano seletivo (ver Fig. 3.2.1)

$$r^{(g)} [\rho(t + \tau) - \rho(t)] = r^{(g)} \Delta \rho(t) = \frac{\gamma_m}{2} (2a_m \rho a_m^\dagger - \rho a_m^\dagger a_m - a_m^\dagger a_m \rho),$$

onde $\gamma_m = r^{(g)} (\zeta_m \tau)^2$, é a taxa efetiva de emissão, r^g a taxa com que os átomos preparados no estado $|g\rangle$ chegam na cavidade e $a_k = |k\rangle \langle k+1|$ ($k = m, l$) é o operador seletivo do campo. Similarmente, os átomos preparados no estado $|e\rangle$ atravessam a cavidade para dar origem a outro liouvilliano, nesta vez com o hamiltoniano (3.1.1) ajustado para atuar no subespaço $\{|l\rangle, |l+1\rangle\}$, descrito pela equação

$$r^{(e)} \Delta \rho(t) = \frac{\gamma_l}{2} (2a_l^\dagger \rho a_l - \rho a_l a_l^\dagger - a_l a_l^\dagger \rho),$$

onde $\gamma_l = r^{(e)} (\zeta_l \tau)^2$, é a taxa efetiva de absorção e r^e é a taxa de chegada na cavidade dos átomos preparados no estado $|e\rangle$. Em um intervalo de tempo aleatório, os campos clássicos são desligados de tal forma que a dinâmica átomo-campo é regida pelo hamiltoniano da Eq. (3.1.2); assim, quando os átomos passam pela cavidade no estado $|i\rangle$, interagem ressonantemente com o modo da cavidade para gerar o lindbladiano não seletivo

$$r^{(i)} \Delta \rho(t) = \frac{\tilde{\gamma}}{2} (2a^\dagger \rho a - \rho a a^\dagger - a a^\dagger \rho),$$

onde $\tilde{\gamma} = r^{(i)} \left(\tilde{\lambda} \tau \right)^2 = \varepsilon \gamma$ ($\varepsilon < 1$ para alcançar o estado de Fock estacionário), é a taxa efetiva associada à absorção de fótons pelo modo da cavidade, r^i é a taxa de chegada dos átomos na cavidade no estado $|i\rangle$ e γ é taxa de decaimento natural associada às imperfeições da cavidade. Se supormos que os átomos chegam na cavidade em tempos estatisticamente independentes, a dinâmica do campo na cavidade é descrita pela equação mestra

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = & \frac{\gamma_m}{2} (2a_m \rho a_m^\dagger - \rho a_m^\dagger a_m - a_m^\dagger a_m \rho) \\ & + \frac{\gamma_l}{2} (2a_l^\dagger \rho a_l - \rho a_l a_l^\dagger - a_l a_l^\dagger \rho) \\ & + \frac{\tilde{\gamma}}{2} (2a^\dagger \rho a - \rho a a^\dagger - a a^\dagger \rho) \\ & + \frac{\gamma}{2} (1 + \bar{n}) (2a \rho a^\dagger - \rho a^\dagger a - a^\dagger a \rho) \\ & + \frac{\gamma}{2} \bar{n} (2a^\dagger \rho a - \rho a a^\dagger - a a^\dagger \rho). \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

As taxas de chegada r^g , r^e , e r^i são proporcionais às probabilidades p_g , p_e , e p_i , respectivamente. Já que estamos interessados na solução de estado estacionário, focamos nossa atenção nos termos diagonais ou populações ($\rho_n = \langle n | \rho | n \rangle$) da Eq. (3.2.1) na base de estados de Fock:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_n}{dt} = & \gamma_m (\rho_{m+1} \delta_{m,n} - \rho_{m+1} \delta_{m+1,n}) + \gamma_l (\rho_l \delta_{l+1,n} - \rho_l \delta_{l,n}) \\ & + (\tilde{\gamma} + \gamma \bar{n}) [n \rho_{n-1} - (n+1) \rho_n] + \gamma (1 + \bar{n}) [(n+1) \rho_{n+1} - n \rho_n], \end{aligned}$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$. A solução analítica no estado estacionário é obtida pela condição de balanço detalhado e apresenta a forma (considerando $l+1 < m$)

$$\rho_n = \begin{cases} R_n \rho_0 & n \leq l \\ R_n \mathcal{A}_l \rho_0 & l+1 \leq n \leq m \\ R_n \mathcal{B}_{l,m} \rho_0 & n \geq m+1 \end{cases}, \quad (3.2.2)$$

onde $R_n = [(\varepsilon + \bar{n}) / (1 + \bar{n})]^n$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_l &= \frac{\gamma_l + (l+1)(\varepsilon + \bar{n})\gamma}{(l+1)(\varepsilon + \bar{n})\gamma}, \\ \mathcal{B}_{l,m} &= \frac{(m+1)(1 + \bar{n})\gamma}{\gamma_m + (m+1)(1 + \bar{n})\gamma} \mathcal{A}_l, \\ \rho_0 &= \frac{(1 - \varepsilon) / (1 + \bar{n})}{1 - R_{l+1} + \mathcal{A}_l (R_{l+1} - R_{m+1}) + \mathcal{B}_{l,m} R_{m+1}}. \end{aligned}$$

Figura 3.3.1 – Truncamento da distribuição térmica a partir do estado $m + 1 = 6$, e sua associada função de Wigner.

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3 Preparação do estado de Fock estacionário

É claro que a escolha adequada dos parâmetros engenhados γ_m , γ_l e $\tilde{\gamma}$, modificam a forma da função de distribuição da Eq. (3.2.2). Considerando os parâmetros típicos em CQED na faixa das micro-ondas, tais como $\lambda \sim 5 \times 10^5 \text{Hz}$, $\gamma \sim 10 \text{Hz}$, fazendo a escolha das dessintonias $\Delta = \Delta_1 = (1 + 10^{-2}) \times \Delta_2 = 10\sqrt{k+1}|\lambda|$, tal que $|\Omega_1| = 10 \times |\Omega_2| = \sqrt{k+1}|\lambda|$, $\zeta_k = 10^{-2}\sqrt{k+1}|\lambda|$ e $\tau = 10^2/\sqrt{k+1}|\lambda|$ (tal que $\zeta_k\tau = 1$). Portanto, considerando $m, l \sim 10$ além de impor $\tilde{\gamma} \sim r^i \times 10^{-2} = \varepsilon\gamma$, obtém-se valores de γ_k até $2 \times 10^3\gamma$ com $r^i = 10^3\varepsilon$ (i.e., $p_i = 10^{-2}\varepsilon$) e r^g, r^e aproximadamente 10^4 (p_g, p_e limitado até $1 - 2p_i$).

A fim de gerar estados de Fock estacionários, observamos primeiro que um valor de γ_m significativamente maior comparado com o valor de γ , com $\gamma_l = 0$ (não há átomos atravessando a cavidade no estado $|e\rangle$) tal que

$$R_{m+1}\mathcal{B}_{l,m} \ll R_m\mathcal{A}_l, \quad (3.3.1)$$

implica a truncagem da distribuição de equilíbrio (3.2.2), desde a população do estado $m + 1$, como mostrado na Fig. 3.3.1, onde temos assumido $m = 5$, $\bar{n} = 0.05$ e $\varepsilon = 0.8$, tal que $\tilde{\gamma} = 0.8\gamma$, $\gamma_l = 0$ e $\gamma_m = 10^3\gamma$, satisfazendo a condição (3.3.1). Por outro lado, observamos que um valor significativamente grande de γ_l (comparado com γ), com $\gamma_m = 0$

Figura 3.3.2 – Amplificação da distribuição térmica a partir do estado $l + 1 = 5$, e sua associada função de Wigner.

Fonte: Elaborada pelo autor.

(não há átomos atravessando a cavidade no estado $|g\rangle$), conduz ao efeito oposto mostrado na Fig. 3.3.1, aumentando as probabilidades da distribuição de equilíbrio (3.2.2) para $l + 1 \leq n$, em vez de fatiá-la. O procedimento de amplificação impõe a restrição

$$R_{l+1}\mathcal{A}_l \gg R_0, \quad (3.3.2)$$

Na Fig. 3.3.2, ilustramos a amplificação do estado de equilíbrio, a partir de $l + 1 = 5$, usando os mesmos parâmetros da Fig. 3.3.1, mas trocando γ_m e γ_l , de tal forma que $\gamma_l = 10^3\gamma$. A função de Wigner exibe agora valores negativos. É interessante notar que simplesmente eliminando o estado de vácuo na distribuição térmica com $l = 0$, obtém-se automaticamente estes valores negativos da função de Wigner, tal como mostrado na Fig. 3.3.3, onde usamos os mesmos parâmetros da Fig. 3.3.2, mas desta vez com $\varepsilon = 0.5$ (tal que $\tilde{\gamma} = 0.5\gamma$). Portanto, o vácuo desempenha um papel importante na interseção entre estados clássicos e não clássicos. (86)

Outro caso surge quando juntamos os efeitos de truncagem e amplificação para fatiar a distribuição de equilíbrio, a partir de $l + 1$ a m . Isto é feito garantindo as condições que conduzem ao mesmo tempo às Eqs. (3.3.1) e (3.3.2). A Fig. 3.3.4, mostra a distribuição de equilíbrio fatiada, variando desde $l + 1 = 4$ a $m = 6$, novamente assumindo os mesmos parâmetros como acima, mas com $\gamma_m = \gamma_l = 10^3\gamma$ e $\varepsilon = 0.8$. A função de Wigner na figura inserida da Fig. 3.3.4, agora exibe uma grande região com valores negativos, reforçando o carácter não clássico do estado gerado.

Figura 3.3.3 – Amplificação da distribuição térmica a partir do estado $l + 1 = 1$, e sua associada função de Wigner.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 3.3.4 – Distribuição térmica fatiada a partir de $l + 1 = 4$ a $m = 6$ e sua correspondente função de Wigner.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 3.3.5 – Estado de Fock estacionário $|5\rangle$ e a correspondente função de Wigner.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Finalmente chegamos ao nosso principal objetivo deste capítulo, a preparação do estado de Fock estacionário. O estado de Fock estacionário é alcançado quando $l = m - 1$; já que, os subespaços onde agem os Lindbladianos seletivos $\{l, l + 1\}$ e $\{m, m + 1\}$ ficam lado a lado, de modo que ambos compartilham o mesmo estado m , populando-o por emissão de $m + 1 \rightarrow m$ e absorção de $m - 1 \rightarrow m$, como pode ser visto na Fig. 3.3.5, ilustrando o estado estacionário de Fock $m = 5$, obtido sob as mesmas condições usadas na Fig. 3.3.4. A fidelidade do estado de Fock preparado é em torno de 0,97, como foi confirmado pela distribuição de Wigner que apresentam a característica peculiar de um estado de Fock. Finalmente preparamos o estado de Fock $m = l + 1 = 10$ na Fig. 3.3.6, com fidelidade aproximadamente de 0,88. Na Fig. 3.3.7, apresentamos a evolução no tempo das fidelidades dos estados $|5\rangle$ e $|10\rangle$ para confirmar o bom comportamento no equilíbrio desses estados.

Embora a solução analítica na Eq. (3.2.2) foi crucial para enxergar a possibilidade de manipular as populações $\rho_n = \langle n | \rho | n \rangle$ através da escolha adequada dos parâmetros envolvidos, todas as simulações neste capítulo foram baseados na solução da Eq. (3.2.1), executando o pacote QuTIP. (87) Finalizamos este Capítulo adiantando que além da preparação de estados de Fock, outros estados não clássicos podem ser obtidos a partir do presente protocolo, como por exemplo a geração de estado estacionários emaranhados em uma rede de osciladores quânticos acoplados que apresentaremos no Capítulo 5.

Figura 3.3.6 – Estado de Fock estacionário $|10\rangle$ e a correspondente função de Wigner.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 3.3.7 – Evolução temporal das fidelidades dos estados $|5\rangle$ e $|10\rangle$. Os parâmetros $\gamma_m = \gamma_l = 10^3\gamma$, $\varepsilon = 0.8$ e $\bar{n} = 0.05$, são suficientes para alcançar estados de Fock no equilíbrio com probabilidades em torno de 0,97 para o estado $|5\rangle$ (linha tracejada) e em torno de 0,88 para o estado $|10\rangle$ (linha sólida)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Capítulo 4

Hamiltonianos e Liouvillianos confinados em subespaços de Fock do campo de radiação

A engenharia de hamiltonianos efetivos tem desempenhado um papel importante na teoria da informação quântica, onde o desenho das interações adequadas à implementação de processos lógicos quânticos é um ingrediente chave. A engenharia de interações é também necessária para a simulação quântica, onde os sistemas são controlados no laboratório para simular fenômenos quânticos que compartilham a mesma estrutura matemática, mas que são difíceis de manipular no laboratório. Além disso, a engenharia de interações é uma pré-condição para a técnica de engenharia de reservatório, onde um estado é protegido. A engenharia de interações, tem fornecido caminhos alternativos cada vez mais robustos para a realização de experimentos, como também lançar novos paradigmas para a implementação experimental. No domínio de eletrodinâmica quântica de cavidades encontramos vários trabalhos (49, 88), mostrando que a dinâmica átomo-campo baseada na interação de JC pode assumir outras formas hamiltonianas mediante a configuração de campos e níveis atômicos apropriados. Mais recentemente, foi apresentado um esquema baseando-se em uma interação adequadamente adaptada para a geração de estados não clássicos estacionários no contexto de íons aprisionados (89) via reservatório atômico. No trabalho do *R. F. Rossetti* (89), interações tipo upper-lower-bound e *sliced* JC e anti Jaynes-Cummings (AJC) são obrigatórias. As interações delimitadas inferior (lower-bound) e superiormente (upper-bound), agem sobre subespaços de Fock que vão desde $|N\rangle$ até ∞ e $|0\rangle$ até $|N\rangle$ respectivamente, e a fatiada (*sliced*) está confinada ao subespaço de Fock variando desde $|M\rangle$ até $|N\rangle$, para qualquer $M < N$. As interações lower-bound (*lb*) e upper-bound (*ub*) são usadas para conduzir qualquer estado inicial a um estado de Fock estacionário $|N\rangle$, e a interação *sliced* é usado para produzir superposições estacionárias de estados de Fock.

Neste Capítulo, apresentamos uma estratégia para engenhar hamiltonianos *ub* e *sliced* JC e AJC na CQED, como já foi mostrado no contexto de íons aprisionados. (89)

Essas interações levam a liouvillianos atuando nesses espaços confinados; em particular o hamiltonianos *ub* que conduz ao liouvilliano *ub*, o qual via reservatório atômico conduz à geração de estados de Fock estacionários que em nosso caso são os estados $|2\rangle$ e $|3\rangle$. Além disso, apresentamos uma estratégia para gerar um liouvilliano *ub* sem precisar do hamiltoniano *ub*, o que também pode ser usado para produzir estados de Fock estacionários. Ressaltamos que a técnica utilizada para obter os hamiltonianos *ub* e *sliced* em CQED é completamente diferente do que é utilizado com íons aprisionados, onde um ajustamento adequado do parâmetro Lamb-Dicke é suficiente para alcançar as interações desejadas. Por outro lado, como mostraremos mais adiante, as interações requeridas em CQED resultam de ajustes adequados em uma sequência de transições tipo Raman. É importante salientar que também nosso protocolo pode ser utilizado em outras plataformas, como os CirQED com transições fluxonium. (90) O protocolo mostrado aqui, depende das interações seletivas apresentadas no Capítulo 2. Basicamente geramos varias interações seletivas nas que intervêm processos de um fóton, cada interação seletiva está confinada em distintos subespaços (vizinhos) que ao considerá-los em conjunto formam um espaço maior de confinamento para o modo do campo de radiação na CQED.

4.1 Interações *ub* e *sliced* tipo JC e AJC

Nesta seção mostramos como derivar os hamiltonianos *ub* e *sliced*, do tipo JC e AJC. Primeiro mostramos a derivação para confinar a interação em subespaços de Fock 3D, especificamente os subespaços $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ e $\{|M\rangle, |M+1\rangle, |M+2\rangle\}$. Depois, a derivação destas interações para os subespaços $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ e $\{|M\rangle, |M+1\rangle, |M+2\rangle, |M+3\rangle\}$, e finalmente a análise da validade destas interações nos seus respectivos subespaços.

4.1.1 Interações *ub* e *sliced* em um subespaço de Fock 3D

Começamos com a configuração dos níveis atômicos mostrada na Fig. 4.1.1a, onde os estados fundamental $|g\rangle$ e excitado $|e\rangle$ são acopladas através de transições Raman aos estados auxiliares $|f\rangle$ e $|h\rangle$. O modo da cavidade de frequência ω induz as transições $|g\rangle \leftrightarrow |f\rangle, |h\rangle$ com acoplamentos λ_1 e λ_2 e dessintonias Δ_1 e Δ_2 , enquanto um campo clássico de frequência ω_L induz as transições $|e\rangle \leftrightarrow |f\rangle, |h\rangle$ com acoplamentos Ω_1 e Ω_2 e dessintonias $\tilde{\Delta}_1$ e $\tilde{\Delta}_2$. O hamiltoniano que descreve o sistema na representação de interação é dado por

$$H_I = \lambda_1 a \sigma_{fg} e^{-i\Delta_1 t} + \Omega_1 \sigma_{fe} e^{-i\tilde{\Delta}_1 t} + \lambda_2 a \sigma_{hg} e^{i\Delta_2 t} + \Omega_2 \sigma_{he} e^{i\tilde{\Delta}_2 t}, \quad (4.1.1)$$

Figura 4.1.1 – Configuração atômica de níveis para a geração dos hamiltonianos *ub* e *sliced* no subespaços (a) $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ e $\{|M\rangle, |M+1\rangle, |M+2\rangle\}$ e (b) $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ e $\{|M\rangle, |M+1\rangle, |M+2\rangle, |M+3\rangle\}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

onde $\Delta_1 = \omega - \omega_f$, $\Delta_2 = \omega_h - \omega$, $\tilde{\Delta}_1 = \omega_L - \omega_f$ e $\tilde{\Delta}_2 = \omega_h + \omega_L$. É simples verificar que, sob as condições $\sqrt{n+1}\lambda_j \ll \Delta_j$ e $\Omega_j \ll \tilde{\Delta}_j$ ($j = 1, 2$), derivamos o hamiltoniano efetivo

$$H_{eff} = \chi a^\dagger a \sigma_{gg} + \varpi \sigma_{ee} + \sum_j \zeta_j \sigma_{ge} a^\dagger e^{i\theta_j t} + H.c.,$$

onde $\chi = \lambda_1^2/\Delta_1 - \lambda_2^2/\Delta_2$, $\zeta_j = (\lambda_j \Omega_j/2) \left(1/\Delta_j + 1/\tilde{\Delta}_j\right)$, $\varpi = \Omega_1^2/\tilde{\Delta}_1 - \Omega_2^2/\tilde{\Delta}_2$ e as dessintonias $\theta_j = (-1)^{\delta_{1,j}} \left(\tilde{\Delta}_j - \Delta_j\right)$, requeridas convenientemente para a engenharia da interação. Torna-se conveniente eliminar os termos diagonais, contemplados em H_{eff} , por meio da transformação unitária $U = \exp \left\{-i \left[\chi a^\dagger a \sigma_{gg} + \varpi \sigma_{ee}\right] t\right\}$ para obter a forma simplificada

$$H_{eff} = \sum_n \left(\zeta_n^{(1)} e^{it\phi_n^{(1)}} + \zeta_n^{(2)} e^{it\phi_n^{(2)}} \right) \sigma_{ge} |n+1\rangle \langle n| + H.c.,$$

onde $\phi_n^{(j)} = \xi_n + \theta_j$ e $\xi_n = (n+1)\chi - \varpi$, com $\zeta_n^{(j)} = \sqrt{n+1}\zeta_j$. Rescrevemos o hamiltoniano na forma,

$$H_{eff} = e^{it\phi_0^1} \zeta_1 \left(|1\rangle \langle 0| + \sqrt{2} |2\rangle \langle 1| e^{i(\phi_1^1 - \phi_0^1)t} + \sqrt{3} |3\rangle \langle 2| e^{i(\phi_2^1 - \phi_0^1)t} + \dots \right) + e^{it\phi_1^2} \zeta_2 \left(|1\rangle \langle 0| e^{i(\phi_0^2 - \phi_1^2)t} + \sqrt{2} |2\rangle \langle 1| + \sqrt{3} |3\rangle \langle 2| e^{i(\phi_2^2 - \phi_1^2)t} + \dots \right). \quad (4.1.2)$$

Finalmente ajustando os parâmetros de tal forma que

$$\phi_0^{(1)} = \phi_1^{(2)} = 0 \quad (4.1.3)$$

e

$$\chi \gg \sqrt{2}|\zeta_1|, \sqrt{3}|\zeta_2|, \quad (4.1.4)$$

obtém-se o hamiltoniano desejado

$$H_{ub} = \zeta_1 A_{ub}^\dagger \sigma_{ge} + \text{H.c} \quad (4.1.5)$$

onde

$$A_{ub}^\dagger = |1\rangle \langle 0| + \sqrt{2} \frac{\zeta_2}{\zeta_1} |2\rangle \langle 1|. \quad (4.1.6)$$

Conseguimos um hamiltoniano confinado no subespaço $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ e, para conseguir o hamiltoniano confinado no subespaço $\{|M\rangle, |M+1\rangle, |M+2\rangle\}$ redefinimos as condições nas Eqs. (4.1.3) e (4.1.4), a

$$\phi_M^{(1)} = \phi_{M+1}^{(2)} = 0 \quad (4.1.7)$$

e

$$\chi \gg \left| \zeta_{M+1}^{(1)} \right|, \left| \zeta_{M+2}^{(2)} \right|, \quad (4.1.8)$$

que conduz finalmente ao hamiltoniano

$$H_s = \zeta_M^{(1)} A_s^\dagger \sigma_{ge} + \text{H.c}, \quad (4.1.9)$$

com o operador de campo

$$A_s^\dagger = |M+1\rangle \langle M| + \left(\zeta_{M+1}^{(2)} / \zeta_M^{(1)} \right) |M+2\rangle \langle M+1|. \quad (4.1.10)$$

Vale ressaltar que tanto os hamiltoniano *ub* e *sliced* AJC decorrem da mesma configuração atômica na Fig. 4.1.1a, mas com o modo da cavidade e o campo clássico sintonizados para as transições $|e\rangle \leftrightarrow |f\rangle, |h\rangle$ e $|g\rangle \leftrightarrow |f\rangle, |h\rangle$, respectivamente. Observamos, também que, em vez da configuração de quatro níveis apresentada na Fig. 4.1.1a, uma configuração de níveis atômicos na forma losango também podem ser usadas para gerar os Hamiltonianas (4.1.5) e (4.1.9). Esta última configuração evita a necessária proximidade dos níveis de $|f\rangle$ e $|h\rangle$ na Fig. 4.1.1a, mantendo, no entanto, todas as condições e relações exatamente como derivadas acima. Finalmente, observa-se que as interações AJC confinadas aos subespaços de Fock $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ e $\{|M\rangle, |M+1\rangle, |M+2\rangle\}$ podem ser geradas através da troca das transições promovidas pelo modo da cavidade e o campo clássico, sintonizando o campo quântico (clássico) para conduzir a transição $|e\rangle (|g\rangle) \leftrightarrow |f\rangle, |h\rangle$, em vez de $|g\rangle (|e\rangle) \leftrightarrow$

$|f\rangle, |h\rangle$.

4.1.2 Interações *ub* e *sliced* em um subespaço de Fock 4D

Para obter os hamiltonianos *ub* e *sliced* confinados nos subespaços $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ e $\{|M\rangle, |M+1\rangle, |M+2\rangle, |M+3\rangle\}$ respectivamente, devemos adicionar mais um nível ($|i\rangle$) à configuração atômica da Fig. 4.1.1a, como mostrada na Fig. 4.1.1b. Agora, o modo da cavidade (campo clássico) também conduz a transição Raman $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ ($|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$) ao nível auxiliar, com constante de acoplamento λ_3 (Ω_3) e dessintonia Δ_3 ($\tilde{\Delta}_3$). O hamiltoniano que descreve o sistema na representação de interação vem dado por

$$H_I = \lambda_1 a \sigma_{fg} e^{-i\Delta_1 t} + \Omega_1 \sigma_{fe} e^{-i\tilde{\Delta}_1 t} + \lambda_2 a \sigma_{hg} e^{i\Delta_2 t} + \Omega_2 \sigma_{he} e^{i\tilde{\Delta}_2 t}, \\ + \lambda_3 a \sigma_{ei} e^{i\Delta_3 t} + \Omega_3 \sigma_{gi} e^{i\tilde{\Delta}_3 t}, \quad (4.1.11)$$

onde $\Delta_3 = \omega_e + \omega_i - \omega$, $\tilde{\Delta}_3 = \omega_L - \omega$ e todos os outros parâmetros são aqueles definidos anteriormente. Por analogia com o raciocínio usado para obter os hamiltonianos (4.1.5) e (4.1.9), consideramos as seguintes condições: $\sqrt{n+1}\lambda_j \ll \Delta_j$ e $\Omega_j \ll \tilde{\Delta}_j$ ($j = 1, 2, 3$), e

$$\Phi_0^{(1)} = \Phi_1^{(2)} = \Phi_2^{(3)} = 0, \quad (4.1.12)$$

e

$$|\chi - \tilde{\chi}| \gg \sqrt{2}|\zeta_1|, \sqrt{3}|\zeta_2|, 2|\zeta_3|, \quad (4.1.13)$$

onde $\Phi_n^{(j)} = \Xi_n + \theta_j$, $\Xi_n = \xi_n - (n+1)\tilde{\chi} + \Omega_3^2/\tilde{\Delta}_3$, $\tilde{\chi} = \lambda_3^2/\Delta_3$ e ξ_n , θ_j e ζ_n são os mesmos parâmetros definidos acima, mas agora com $j = 1, 2, 3$. Quando o nível auxiliar $|i\rangle$ é desconsiderado, os parâmetros em letras maiúsculas ($\Phi_n^{(j)}, \Xi_n$), recuperam aqueles em letras minúsculas ($\phi_n^{(j)}, \theta_j$) para $j = 1, 2$. Sob as condições mencionadas acima, derivamos o hamiltonianos *ub*

$$H_{ub} = \zeta_1 A_{ub}^\dagger \sigma_{ge} + \text{H.c} \quad (4.1.14)$$

onde

$$A_{ub}^\dagger = |1\rangle\langle 0| + \sqrt{2}\frac{\zeta_2}{\zeta_1}|2\rangle\langle 1| + \sqrt{3}\frac{\zeta_3}{\zeta_1}|3\rangle\langle 2|. \quad (4.1.15)$$

De novo obtemos o hamiltoniano *sliced* JC confinando-o ao subespaço de Fock constituído pelos vetores que vão desde $|M\rangle$ até $|M+3\rangle$, redefinindo as condições

$$\Phi_M^{(1)} = \Phi_{M+1}^{(2)} = \Phi_{M+2}^{(3)} = 0, \quad (4.1.16)$$

e

$$|\chi - \tilde{\chi}| \gg \left| \zeta_{M+1}^{(1)} \right|, \left| \zeta_{M+2}^{(2)} \right|, \left| \zeta_{M+3}^{(3)} \right|, \quad (4.1.17)$$

para assim obter o hamiltoniano *sliced* JC

$$H_s = \zeta_M^{(1)} A_s^\dagger \sigma_{ge} + \text{H.c.}, \quad (4.1.18)$$

com o operador de campo

$$A_s^\dagger = |M+1\rangle \langle M| + \left(\zeta_{M+1}^{(2)} / \zeta_M^{(1)} \right) |M+2\rangle \langle M+1| + \left(\zeta_{M+2}^{(3)} / \zeta_M^{(1)} \right) |M+3\rangle \langle M+2|. \quad (4.1.19)$$

Para gerar as interações *ub* e *sliced* AJC confinadas nos subespaços de Fock $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ e $\{|M\rangle, |M+1\rangle, |M+2\rangle, |M+3\rangle\}$, precisamos trocar as transições $|g\rangle, |e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ conduzidas pelos campos quântico e clássico. Finalmente, observamos que pela adição de outro nível auxiliar próximo de $|i\rangle$, podemos obter interações *ub* e *sliced* confinadas nos subespaços que vão desde $|0\rangle$ até $|4\rangle$ e $|M\rangle$ até $|M+4\rangle$.

4.2 Validade das interações engenhadas *ub* e *sliced*

A seguir, analisamos a validade dos hamiltonianos engenhados *ub* e *sliced* descritos pelas Eqs. (4.1.5), (4.1.9), (4.1.14) e (4.1.18). Para este fim, compara-se numericamente as oscilações sinusoidais de Rabi das populações do modo da cavidade provenientes dessas interações efetivas com os Hamiltonianas completos nas Eqs. (4.1.1) e (4.1.11).

4.2.1 Interações confinadas nos subespaços de Fock 3D

Começamos por analisar a validade da interação *ub* dada pela Eq. (4.1.5), confinada no subespaço de Fock $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$. Consideramos o estado inicial $|\Psi(0)\rangle = (1/2)(|0\rangle + |2\rangle) \otimes (|g\rangle + |e\rangle)$, na Fig. 4.2.1a, plotamos contra o parâmetro de interação $\zeta_1 t$, as probabilidades $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ de medir no modo de cavidade os estados de Fock $|0\rangle$, $|1\rangle$ e $|2\rangle$, respectivamente. Assumimos os acoplamento típicos na CQED, $\lambda_1 = \lambda_2 = 5 \times 10^5 \text{ Hz}$ ((37)), e definindo o conjunto de dessintonias $\Delta_1 = 2\Delta_2 = 10\lambda_1$ e $\theta_1 = \theta_2/2 = \lambda_1/10$, para obter $\tilde{\Delta}_1 = (99/52) \tilde{\Delta}_2 = 9.9\lambda_1$. Finalmente, com $\Omega_1 = 2\sqrt{2}\Omega_2 = \lambda_1/5\sqrt{2}$, obtemos $\zeta_1 = \sqrt{2}\zeta_2 = 1.77 \times 10^3 \text{ Hz}$, e conseqüentemente, o operador *ub*: $A_{ub}^\dagger = |1\rangle \langle 0| + |2\rangle \langle 1|$. Estes parâmetros são bastante adequados para a derivação da interação *ub*, como foi confirmado pelo bom comportamento mostrado na Fig. 4.2.1a entre as curvas cinzas calculadas a partir do hamiltoniano (4.1.1) e as escuras calculadas a partir do hamiltoniano (4.1.5), dadas por $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_2 = [1 + \cos^2 \zeta_1 t] / 4$ e $\mathcal{P}_1 = (1/2) \sin^2 \zeta_1 t$.

Enquanto as probabilidades $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_1$ são expostas em primeiro plano, $\mathcal{P}_2$ é mostrada na figura insertada. A probabilidade $\mathcal{P}_3$, é evidentemente nula quando é calculada a partir

Figura 4.2.1 – (a) Probabilidades $\mathcal{P}_0$ a $\mathcal{P}_3$ de medir o modo da cavidade nos estados de Fock $|0\rangle$ a $|3\rangle$, calculadas a partir do hamiltoniano (4.1.5) e o hamiltoniano (4.1.1), mostradas por linhas claras e escuras, respectivamente. $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_1$ são apresentados em primeiro plano, enquanto $\mathcal{P}_2$ está representada na inserção. $\mathcal{P}_3$, que é nulo para a interação efetiva, oscila perto de zero para o hamiltoniano (4.1.1), como mostrado pela curva tracejada. (b) Probabilidades $\mathcal{P}_2$ a $\mathcal{P}_6$ de medir o modo de cavidade nos estados de Fock $|3\rangle$ a $|5\rangle$, calculadas a partir do hamiltoniano (4.1.9) e o hamiltoniano (4.1.1), mostrados por linhas claras e escuras, respectivamente. $\mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_4$ são expostos em primeiro plano, enquanto $\mathcal{P}_5$ está representada na inserção. $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_6$, que são nulas para a interação efetiva (4.1.9), oscila perto de zero para o hamiltoniano (4.1.1), como mostrado pelas curvas tracejadas no primeiro plano e a inserção, respectivamente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

da interação *ub*, e oscila perto de zero para o hamiltoniano (4.1.1), como mostrado pela curva tracejada na Fig. 4.2.1a.

Para analisar a validade da interação *sliced* na Eq. (4.1.9), assumimos $M = 3$, portanto o hamiltoniano (4.1.9) é confinado ao subespaço de Fock $\{|3\rangle, |4\rangle, |5\rangle\}$. Assumimos o estado inicial $|\Psi(0)\rangle = (1/2)(|3\rangle + |5\rangle) \otimes (|g\rangle + |e\rangle)$, para calcular as probabilidades $\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4$ e $\mathcal{P}_5$, plotadas contra o parâmetro de interação $\zeta_3^{(1)}t$ (com $\zeta_3^{(1)} = 2\zeta_1$) na Fig. 4.2.1b. Novamente usamos os acoplamentos $\lambda_1 = \lambda_2 = 5 \times 10^5 \text{Hz}$, mas desta vez com as dessintonias $\Delta_1 = 2\Delta_2 = 20\lambda_1$ e $\theta_1 = 4\theta_2/5 = \lambda_1/5$, para obter $\tilde{\Delta}_1 = (79.2/41)\tilde{\Delta}_2 = 19.8\lambda_1$. Além disso, com a escolha $\Omega_1 = \sqrt{5}\Omega_2 = \lambda_1/5\sqrt{5}$, obtemos $\zeta_1 = \sqrt{2}\zeta_2 = 6 \times 10^2 \text{Hz}$, e consequentemente, o operador *sliced*: $A_s^\dagger = |4\rangle\langle 3| + |5\rangle\langle 4|$. Mais uma vez, observamos a boa concordância entre as curvas cinzas numericamente calculadas a partir do hamiltoniano (4.1.1) e as escuras, analiticamente calculadas a partir da interação *sliced*, dadas por $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_5 = [1 + \cos^2 \zeta_3^{(1)}t]/4$ e $\mathcal{P}_4 = (1/2)\sin^2 \zeta_1 t$. $\mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_4$ são expostas em primeiro plano e $\mathcal{P}_5$ é mostrada na figura insertada da Fig. 4.2.1b. As probabilidades $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_6$, que são nulas para o hamiltoniano *sliced*, oscilam perto de zero calculada pelo hamiltoniano de partida (2.2.23), como mostrado pelas curvas tracejadas no primeiro plano e a insertada na Fig. 4.2.1b, respectivamente.

4.2.2 Interações confinadas nos subespaços de Fock 4D

Seguimos analisando a validade da interação *ub* dada pela Eq. (4.1.14), confinada no subespaço de Fock $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. Assumimos o estado inicial $|\Psi(0)\rangle = (1/2)(|1\rangle + |3\rangle) \otimes (|g\rangle + |e\rangle)$, na Fig. 4.2.2a, plotamos as probabilidades desde $\mathcal{P}_0$ até $\mathcal{P}_3$ contra o parâmetro de interação $\zeta_1 t$. Assumimos os acoplamento típicos na CQED $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 5 \times 10^5 \text{Hz}$ ((37)), e definindo o conjunto de dessintonias $\Delta_1 = \Delta_2/2 = \Delta_3 = 10\lambda_1$ e $\theta_1 = \theta_2/2 = \theta_3/3 = \lambda_1/20$, para obter $\tilde{\Delta}_1 = (199/402)\tilde{\Delta}_2 = (199/203)\tilde{\Delta}_3 = 10.15\lambda_1$. Finalmente, com $\Omega_1 = \Omega_2/\sqrt{2} = \sqrt{3}\Omega_2 = \lambda_1/20$, obtemos $\zeta_1 = \sqrt{2}\zeta_2 = \sqrt{3}\zeta_3 = 1.77 \times 10^3 \text{Hz}$, e consequentemente, o operador *ub*: $A_{ub}^\dagger = |1\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 2|$. Assim como nas figuras analisadas anteriormente, há uma boa concordância entre as curvas cinzas, calculadas a partir do hamiltoniano (4.1.11) e as escuras, calculadas a partir do hamiltoniano (4.1.14) mostradas na Fig. 4.2.2a, dadas por $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_2/2 = (1/4)\sin^2 \zeta_1 t$ e $\mathcal{P}_1 = 2\mathcal{P}_3 - 1/2 = (1/2)\cos^2 \zeta_1 t/4$. $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_1$ são apresentadas em primeiro plano e $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_3$ são mostradas na figura insertada da Fig. 4.2.2a. A probabilidade $\mathcal{P}_4$, o qual é nula quando é calculada a partir do hamiltoniano (4.1.14), calculada a partir do hamiltoniano (4.1.11) oscila perto de zero mostrada pela curva tracejada na Fig. 4.2.2a.

Considerando a validade da interação *sliced* na Eq. (4.1.18), assumimos $M = 3$, portanto o hamiltoniano (4.1.18) é confinado ao subespaço de Fock $\{|3\rangle, |4\rangle, |5\rangle, |6\rangle\}$. Assumimos o estado inicial $|\Psi(0)\rangle = (1/2)(|3\rangle + |6\rangle) \otimes (|g\rangle + |e\rangle)$, para calcular as

Figura 4.2.2 – (a) Probabilidades $\mathcal{P}_0$ a $\mathcal{P}_4$ de medir o modo da cavidade nos estados Fock $|0\rangle$ a $|4\rangle$, calculadas a partir do hamiltoniano (4.1.14) e o hamiltoniano (4.1.11), mostradas por linhas claras e escuras, respectivamente. $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_1$ são apresentados em primeiro plano, enquanto $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_3$ estão representadas na inserção. $\mathcal{P}_4$, que é nula para a interação efetiva, oscila perto de zero para o hamiltoniano (4.1.11), como mostrado pela curva tracejada. (b) Probabilidades $\mathcal{P}_2$ a $\mathcal{P}_7$ de medir o modo de cavidade nos estados de Fock $|2\rangle$ a $|7\rangle$, calculadas a partir do hamiltoniano (4.1.18) e o hamiltoniano (4.1.11), mostrados por linhas claras e escuras, respectivamente. $\mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_4$ são expostos em primeiro plano, enquanto $\mathcal{P}_5$ e $\mathcal{P}_6$ estão representadas na inserção. $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_7$, que são nulas para a interação efetiva (4.1.14), oscila perto de zero para o hamiltoniano (4.1.11), como mostrado pelas curvas tracejadas no primeiro plano e a inserção, respectivamente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

probabilidades $\mathcal{P}_3$ até $\mathcal{P}_6$, plotadas contra o parâmetro de interação $\zeta_3^{(1)} t$ (com $\zeta_3^{(1)} = 2\zeta_1$) na Fig. 4.2.2b. Novamente usamos os acoplamentos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 5 \times 10^5 \text{Hz}$, com as dessintonias $\Delta_1 = \Delta_2/2 = \Delta_3 = 20\lambda_1$ e $\theta_1 = 4\theta_2/5 = 2\theta_3/3 = \lambda_1/10$, para obter $\tilde{\Delta}_1 = (159.2/321)$ $\tilde{\Delta}_2 = (199/201.5)$ $\tilde{\Delta}_3 = 20.15\lambda_1$. Além disso, com a escolha $\Omega_1 = \sqrt{5}\Omega_2/4 = \sqrt{6}\Omega_2/2 = \lambda_1/20\sqrt{5}$, obtemos $\zeta_1 = \sqrt{5}\zeta_2/2 = \sqrt{6}\zeta_3/2 = 1.7 \times 10^3 \text{Hz}$, e conseqüentemente, o operador ub : $A_s^\dagger = |4\rangle\langle 3| + |5\rangle\langle 4| + |6\rangle\langle 5|$. Observamos a boa concordância entre as curvas cinzas numericamente calculadas a partir do hamiltoniano (4.1.11), e as escuras, analiticamente calculadas a partir da interação (4.1.18), dadas por $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_6 = [1 + \cos^2 \zeta_3^{(1)} t]/4$ e $\mathcal{P}_4 = \mathcal{P}_5 = (1/4) \sin^2 \zeta_1 t$. $\mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_4$ são expostas em primeiro plano, $\mathcal{P}_5$ e $\mathcal{P}_6$ são mostradas na figura insertada da Fig. 4.2.2b. As probabilidades $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_7$, que são nulas para o hamiltoniano *sliced*, oscilam perto de zero para o hamiltoniano de partida (2.2.23), como mostrado pelas curvas tracejadas no primeiro plano e na figura insertada da Fig. 4.2.2b, respectivamente.

4.3 Engenharia do liouvilliano ub para a geração de estados de Fock estacionários

Passando às aplicações dos hamiltonianos ub derivados acima, apresentamos um método para proteger o estado de Fock $|3\rangle$, que se baseia na engenharia de reservatórios atômicos. Um grupo de átomos é necessário para interagir com o modo da cavidade, um de cada vez, através do hamiltoniano ub (4.1.14). Partindo do princípio que todos os átomos são preparados no estado excitado $|e\rangle$ antes de interagir com o modo da cavidade, sob o regime de acoplamento fraco $\zeta_1\tau \ll 1$, sendo τ o tempo da passagem dos átomos através da cavidade, é direto obter a equação mestra

$$\dot{\rho} = \frac{\Gamma}{2} \left(2A_{ub}^\dagger \rho A_{ub} - A_{ub} A_{ub}^\dagger \rho - \rho A_{ub} A_{ub}^\dagger \right) + \mathcal{L}\rho, \quad (4.3.1)$$

onde A_{ub} é operador definido na Eq. (4.1.15), $\Gamma = r(\zeta_1\tau)^2$ é a taxa efetiva de amortecimento devido ao reservatório atômico e r a taxa de chegada dos átomos. A forma de Lindblad

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\rho = & \frac{\gamma}{2} (1 + \bar{n}) (2a\rho a^\dagger - \rho a^\dagger a - a^\dagger a\rho) \\ & + \frac{\gamma}{2} \bar{n} (2a^\dagger \rho a - \rho a a^\dagger - a a^\dagger \rho), \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

descreve o efeito do ambiente natural sobre o modo da cavidade a uma temperatura T com a taxa de decaimento γ .

Não é difícil concluir que sob a condição $\Gamma \gg \gamma$, ou seja, $r \gg \gamma/(\zeta_1\tau)^2$, o modo da cavidade (qualquer que seja o seu estado inicial) é assintoticamente conduzido para um estado de Fock $|3\rangle$ quase estacionário, que é o único autoestado do operador $A_{ub}^\dagger$ com autovalor nulo ($A_{ub}^\dagger |3\rangle = 0$). Isto acontece porque, quando $\Gamma \gg \gamma$, a contribuição engenhada a $\dot{\rho}$ confinada ao subespaço compreendido pelos estados entre $|0\rangle$ e $|3\rangle$, prevalece sobre a ação do ambiente térmico descrito pela Eq. 4.3.2.

Usando os mesmos parâmetros da Fig. 4.2.2a, tal que $\zeta_1 = 1.77 \times 10^3 \text{Hz}$ com $\tau = 1/r = 2 \times 10^{-4} \text{s}$, obtemos a taxa efetiva engenhada $\Gamma = 63\gamma$, para uma cavidade de alto fator de qualidade ($\gamma \sim 10 \text{Hz}$). Na Fig. 4.3.1, começando com um estado térmico (com $\bar{n} = 0.05$), apresentamos a evolução da fidelidade $\mathcal{F}_3(t) = \sqrt{\text{Tr} |3\rangle \langle 3| \rho(t)}$, contra γt , onde o liouvilliano (4.3.1) engenhado através do hamiltoniano ub da Eq. (4.1.14), conduz ao estado de Fock $|3\rangle$ com fidelidade ao redor 0.92. A figura insertada na Fig. 4.3.1, plotamos o fator Q de Mandel, o qual começa desde 0.05 até aproximadamente -0.96 , indicando que o estado final estacionário, de fato, se aproxima a um estado de Fock.

No Capítulo 2, mostramos como resultado que um lindbladiano engenhado atra-

Figura 4.3.1 – Evolução da fidelidade para o estados de Fock $|3\rangle$, na figura inserida à direita é plotado o fator Q de Mandel

Fonte: Elaborada pelo autor.

vés do hamiltoniano seletivo de um fóton (2.2.11) retarda substancialmente o processo de decaimento do estado de Fock. Nesse resultado, um fluxo de probabilidade de número $(c(N+1)\Gamma\rho_{N-1,N-1})$ desde o estado $|N-1\rangle$ alimenta a população do estado $|N\rangle$. Seguindo a mesma linha de raciocínio, um hamiltoniano *ub* gera liouvillianos seletivos atuando nos subespaços bidimensionais $\{|N-1\rangle, |N\rangle\}$, $\{|N-2\rangle, |N-1\rangle\}$ $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, de tal forma que cada estado é realimentado pelo estado que o precede reforçando a estabilidade do estado no limite superior $|N\rangle$ deixando-o estacionário (ver Fig. 4.3.2).

4.4 Liouvillianos *ub* independentes de hamiltonianos *ub*

Vamos agora apresentar uma estratégia para gerar liouvillianos *ub* na CQED, que não depende da engenharia de um hamiltoniano *ub*. Para isso, seguimos a linha de raciocínio no Capítulo 3, onde liouvillianos seletivos são construídos através da combinação da engenharia de hamiltonianos e a engenharia de reservatórios atômicos.

Em seguida, seguindo o raciocínio no Capítulo 3 para a engenharia do reservatório atômico, podemos enxergar que a estrutura lindblad do superoperador emergido da

Figura 4.3.2 – Diagrama dos níveis de energia do modo da cavidade onde agem os liouvillianos associados com a taxa Γ

Fonte: Elaborada pelo autor.

dinâmica seletiva de um fóton Eq. (3.1.1), com os átomos preparados no seus estados excitados e o subespaço de Fock $\{|k\rangle, |k+1\rangle\}$ aleatoriamente selecionado para ser $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ou $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, o que é conseguido por um ajuste adequado dos parâmetros definidos no capítulo 3, se obtêm o liouvilliano selecionado (além do inevitável liouvilliano natural)

$$\dot{\rho} = \frac{\Gamma_k}{2} \sum_{k=0}^1 (2|k+1\rangle\langle k|\rho|k\rangle\langle k+1| - \rho|k\rangle\langle k| - |k\rangle\langle k|\rho) + \mathcal{L}\rho \quad (4.4.1)$$

com $\Gamma_k = r(\zeta_k\tau)^2$, que é um pouco diferente do que na Eq. (4.1.14). De fato, a equação acima não contém os termos cruzados que acoplam os dois subespaços selecionados $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ e $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, e que surgem naturalmente na Eq. (4.1.14). Evidentemente, podemos construir outro liouvilliano *ub*, selecionando subespaços adicionais além dos decorrentes de $k=0$ e $k=1$. Como observação final, antes de aplicar o liouvilliano engenhado (4.4.1) para produzir estados de Fock estacionários, observa-se que este liouvilliano não emerge a partir de um hamiltoniano *ub*, como foi feito com o anterior dado pela Eq. (4.3.1). Em vez disso, sua derivação baseia-se sobre as interações seletivas dada pela Eq. (3.1.1).

Considerando os parâmetros típicos em CQED na faixa das micro-ondas, tais como $\lambda \sim 5 \times 10^5 \text{Hz}$, $\gamma \sim 10 \text{Hz}$ e $\bar{n} = 0.05$, fazendo a escolha das dessintonias $\Delta = \Delta_1 = (1 + 10^{-2}) \times \Delta_2 = 10\sqrt{k+1}|\lambda|$, tal que $|\Omega_1| = 10 \times |\Omega_2| = \sqrt{k+1}|\lambda|$, $\zeta_k = 10^{-2}\sqrt{k+1}|\lambda|$ e $\tau = 1/r = 10^2/\sqrt{\max(k)+1}|\lambda|$ (tal que obtemos $\zeta_{\max(k)}\tau = 1$) e

Figura 4.4.1 – Evolução das fidelidades para os estados de Fock: (a) $|2\rangle$ e (b) $|3\rangle$ **Fonte:** Elaborada pelo autor.

$\Gamma_k = \left\{ (k+1) |\lambda| / (\max(k) + 1)^{\frac{3}{2}} \right\} \times 10^{-2}$, na Fig. 4.4.1a, plotamos a evolução da fidelidade $\mathcal{F}_2(t) = \sqrt{\text{Tr} |2\rangle \langle 2| \rho(t)}$, contra γt , definindo $\tau = 1/r = \sqrt{2} \times 10^{-4}\text{s}$, $\Gamma_0 = 176\gamma$ e $\Gamma_1 = 2\Gamma_0$. Obtemos uma fidelidade em torno a 0,95. Utilizando os mesmos parâmetros típicos, na Fig. 4.4.1b, exibimos a evolução da fidelidade $\mathcal{F}_3(t)$ contra γt , com $\tau = 1/r = (2/\sqrt{3}) \times 10^{-4}\text{s}$, $\Gamma_0 = 96\gamma$ e $\Gamma_1 = 2\Gamma_0$ e $\Gamma_2 = 3\Gamma_0$, conseguindo uma fidelidade em torno a 0,94. Nas figuras insertadas nas Figs. 4.4.1 (a e b), plotamos o fator Q de Mandel, que tende a $-0,98$ e $-0,97$, respectivamente, mostrando que de fato os estados gerados $|2\rangle$ e $|3\rangle$, estão próximos de um estado de Fock em ambos casos.

Capítulo 5

Estados emaranhados estacionários em redes bosônicas dissipativas

Neste Capítulo (baseado no Capítulo 3), apresentamos uma estratégia para produzir estados emaranhados estacionários de alta fidelidade em osciladores harmônicos quânticos acoplados (QHOs). (91) Nosso protocolo pode-se entender em termos de um mapeamento entre os estados dos osciladores quânticos naturais e os estados da base dos modos normais, em que um estado de Fock estacionário preparado num dado modo normal, deve corresponder a um estado emaranhado estacionário na base dos osciladores naturais. Em conformidade com o estabelecido nos Capítulos 2 e 3, a engenharia de reservatório é construída a partir da interação SJC o que leva ao surgimento de um liouvilliano seletivo para governar a dinâmica dos modos normais ao lado dos liouvillianos originados pelos mecanismos naturais de perda.

5.1 Redes bosônicas dissipativas

Apresentamos aqui uma breve revisão dos passos para a derivação da equação mestra de uma rede bosônica, desenvolvida por *M. A. de Ponte et. al.* (92) Notamos que uma determinada topologia de uma rede composta por N QHOs é definida pela forma como os osciladores estão acoplados em conjunto, as intensidades dos acoplamentos $\{\lambda_{nm}\}$, e suas frequências naturais ω_m . Aqui consideramos o cenário geral em que cada oscilador é acoplado a seu próprio reservatório, em vez da situação particular em que toda a rede está ligada a um reservatório comum. Supomos a partir de agora, que os índices m e n , variam de 1 a N , o hamiltoniano $H = H_S + H_R + H_I$ que modela a rede para N osciladores acoplados, é ($\hbar = 1$)

$$H_S = \sum_{m=1}^N \left[\omega_m a_m^\dagger a_m + \frac{1}{2} \sum_{n(n \neq m)} \lambda_{nm} (a_m^\dagger a_n + a_m a_n^\dagger) \right], \quad (5.1.1)$$

com N reservatórios distintos

$$H_R = \sum_{m,k=1}^{N,\infty} \omega_{mk} b_{mk}^\dagger b_{mk},$$

cada um composto por um conjunto $\{k\}$ infinito de modos, e o acoplamento entre os osciladores harmônicos e seus respectivos reservatórios

$$H_I = \sum_{m,k} V_{mk} \left(b_{mk}^\dagger a_m + b_{mk} a_m^\dagger \right).$$

Nos hamiltonianos acima, $a_m (a_m^\dagger)$ é o operador de aniquilação (criação) associado com o m th oscilador da rede ω_m , o qual é acoplado ao n th oscilador com intensidade λ_{nm} e com o m th reservatório com acoplamento $V_{m,k}$. O k th modo do reservatório ω_{mk} é descrito pelo operador de criação (aniquilação) $b_{mk}^\dagger (b_{mk})$.

5.1.1 Equação mestra para os osciladores naturais e dos modos normais

Para obter a equação mestra do hamiltoniano H , primeiro rescrevemos H_S em forma matricial $H_S = \sum_{m,n} a_m^\dagger \mathcal{H}_{mn} a_n$, com os seguintes elementos

$$\mathcal{H}_{mn} = \omega_m \delta_{mn} - \lambda_{nm} (1 - \delta_{mn}).$$

A diagonalização da matriz H_S , composta pelos elementos $\mathcal{H}_{mn}$, é realizada por meio da transformação $A_m = \sum_n C_{mn} a_n$, onde os coeficientes da m th coluna da matriz C definem os autovetores associados aos autovalores $\bar{\omega}_m$ de H_S . C sendo uma matriz ortonormal, $C^T = C^{-1}$, temos seguintes relações de comutação $[A_m, A_n^\dagger] = \delta_{mn}$ e $[A_m, A_n] = 0$, o que permite que o hamiltoniano seja reescrito como $H = H_0 + V$, onde

$$H_0 = \sum_m \left(\bar{\omega}_m A_m^\dagger A_m + \sum_k \omega_{km} b_{mk}^\dagger b_{mk} \right)$$

e

$$V = \sum_{m,n,k} V_{mk} \left(b_{mk}^\dagger A_n + b_{mk} A_n^\dagger \right).$$

Com o hamiltoniano diagonal H_0 , podemos mudar para a representação de interação,

definida pela transformação $U(t) = \exp(-iH_0t)$, em que

$$V_I(t) = \sum_{m,n} V_{mk} (\mathcal{O}_{mn}^\dagger(t) A_n + \mathcal{O}_{mn}(t) A_n^\dagger)$$

e os operadores de banho $\mathcal{O}_{mn}(t) = C_{nm} \sum_k V_{mk} \exp[-i(\omega_{mk} - \bar{\omega}_m)t] b_{mk}$. Supondo que as interações entre os ressonadores e os reservatórios são fracas o suficiente, realizamos uma aproximação perturbativa de segunda ordem, em seguida, traçamos os graus de liberdade do reservatório. Consideramos também um reservatório markoviano, onde o operador densidade dependente do tempo da rede pode ser fatorado do reservatório $\rho_{1,\dots,N}(t) \otimes \rho_R(0)$.

Em seguida, partimos do princípio de que as frequências do reservatórios são estreitamente espaçadas, para permitir que façamos um somatório contínuo, como de costume, a força de acoplamento $V_m(\bar{\omega}_m)$ e a densidade de estados $\sigma_m(\bar{\omega})$ do m th reservatório são funções que variam lentamente. Além disso, supomos os reservatórios com ruído branco Markoviano, onde as taxas de amortecimento se leem $\gamma_m(\omega_k) = \gamma_m$, a excitação média do reservatório associado com o m th oscilador é $\langle b_m^\dagger(\bar{\omega}_k) b_m(\bar{\omega}_k) \rangle = \bar{n}_m(\bar{\omega}_k) = \bar{n}_m$ e os termos cruzados de decaimento γ_{mn} nulos (92), obtemos a equação mestra na representação dos modos normais

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[\bar{H}, \rho] + \mathcal{L}\rho, \quad (5.1.2)$$

onde $\bar{H} = \sum_m \bar{\omega}_m A_m^\dagger A_m$ e o liouvillian

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\rho &= \sum_m \frac{\gamma_m}{2} (1 + \bar{n}_m) (2A_m \rho A_m^\dagger - \rho A_m^\dagger A_m + A_m^\dagger A_m \rho) \\ &+ \sum_m \frac{\gamma_m}{2} \bar{n}_m (2A_m^\dagger \rho A_m - \rho A_m A_m^\dagger + A_m A_m^\dagger \rho). \end{aligned}$$

Nossa estratégia para produzir estados emaranhados estacionários em uma rede bosônica dissipativa requer a engenharia de um liouvillian seletivo, para ser adicionado à equação mestra (5.1.2), possuindo a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eng}\rho &= \sum_m \frac{\Gamma_{m\ell}}{2} (2A_{m\ell} \rho A_{m\ell}^\dagger - \rho A_{m\ell}^\dagger A_{m\ell} + A_{m\ell}^\dagger A_{m\ell} \rho) \\ &+ \sum_m \frac{\Gamma_{m\ell'}}{2} (2A_{m\ell'}^\dagger \rho A_{m\ell'} - \rho A_{m\ell'} A_{m\ell'}^\dagger + A_{m\ell'} A_{m\ell'}^\dagger \rho) \\ &+ \sum_m \frac{\Gamma_m}{2} (2A_m^\dagger \rho A_m - \rho A_m A_m^\dagger + A_m A_m^\dagger \rho), \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

em que $A_{m\ell}^\dagger = |\ell+1\rangle \langle \ell|$ ($A_{m\ell} = |\ell\rangle \langle \ell+1|$) é o operador de criação (aniquilação) atuando no subespaço $\{|\ell\rangle, |\ell+1\rangle\}$ do m th modo normal. Os liouvillianos engenhados, associados com as taxas de decaimento efetivas $\Gamma_{m\ell}$ e $\Gamma_{m\ell'}$ dão conta da emissão e absorção seletiva,

enquanto o liouvilliano associado à taxa Γ_m representa um termo de refrigeração adicional. Este liouvilliano adicional deve ser tido em conta, como ficará claro mais tarde, apenas quando a preparação do estado de equilíbrio requeira que pelo menos um dos modos normal, o enésimo, esteja no estado de vácuo. Se os modos normais não são degenerados e as taxas efetivas de decaimento satisfazem $\Gamma_{m\ell}, \Gamma_{m\ell'}, \Gamma_{n \neq m} \gg \gamma_m$, com a condição adicional $\ell = \ell' + 1$ (necessária para gerar um estado de Fock em um dado modo normal), a equação mestra $\dot{\rho} = -i [\bar{H}, \rho] + \mathcal{L}\rho + \mathcal{L}_{eng}\rho$ conduz ao estado estacionário de Fock $|\ell\rangle$. A ideia é alcançar estados de Fock estacionários na base dos modos normais que correspondem a um estado emaranhado na base dos osciladores naturais. Para ilustrar este protocolo, primeiro abordamos dois casos significativos: os estados Bell e NOON em um sistema de duas cavidades acopladas. Mostramos que esses estados são obtidos por meio da geração de um estado de Fock de uma excitação em um dado modo normal e este requer unicamente um lindbladiano seletivo em vez dos três lindbladianos na Eq. (5.1.3). Ressalta-se que o uso de todos os três termos na Eq. (5.1.3) melhora a fidelidade do estado estacionário engenhado, mas apenas são essenciais para alcançar estados emaranhados mais excitados.

5.2 Estados de Bell e NOON estacionários em duas cavidades acopladas

É direto verificar o mapeamento entre a base dos modos normais (rotulada por M) e a base dos osciladores naturais (rotulada por m), que nos casos de interesse é reduzido aos estados de Bell $|1, 0\rangle_M = (|1, 0\rangle_m + |0, 1\rangle_m) / \sqrt{2}$ e $|0, 1\rangle_M = (|1, 0\rangle_m - |0, 1\rangle_m) / \sqrt{2}$, e o estado NOON $|1, 1\rangle_M = (|2, 0\rangle_m - |0, 2\rangle_m) / \sqrt{2}$. Consideramos duas cavidades acopladas não ideais (rotulando $i, j = 1, 2$) com frequências degeneradas ω , força de acoplamento λ , taxas de decaimento γ , e à mesma temperatura $T = (\omega/k_B) \ln[(1 + \bar{n})/\bar{n}]$, descritas pelo hamiltoniano

$$H_c = \sum_i \omega a_i^\dagger a_i + \lambda \sum_{i \neq j} a_i^\dagger a_j,$$

o qual é diagonalizado por meio dos operadores $A_\pm^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^\dagger \pm a_2^\dagger)$, para obter a equação mestra particular da Eq. (5.1.2)

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i [\bar{H}, \rho] + \sum_{\alpha=\pm} \frac{\gamma}{2} (1 + \bar{n}) (2A_\alpha \rho A_\alpha^\dagger - \rho A_\alpha^\dagger A_\alpha + A_\alpha^\dagger A_\alpha \rho) \\ & + \sum_{\alpha=\pm} \frac{\gamma}{2} \bar{n} (2A_\alpha^\dagger \rho A_\alpha - \rho A_\alpha A_\alpha^\dagger + A_\alpha A_\alpha^\dagger \rho), \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

onde $\bar{H} = \sum_{\alpha=\pm} \bar{\omega}_\alpha A_\alpha^\dagger A_\alpha$ e $\bar{\omega}_\pm = \omega \pm \lambda$.

Os lindbladianos seletivos requeridos podem ser construídos pelo protocolo apresentado no Capítulo 3, estendido para permitir interações seletivas no espaço de Fock dos modos normais. Para este fim, considera-se um feixe de átomos de três níveis (ver Fig. ??), indo por meio de apenas uma das cavidades (por exemplo, $i = 1$) com acoplamento átomo-campo Ω_0 , ajudados por dois campos clássicos, ω_1 e ω_2 , para interagir com o modo normal através do hamiltoniano (ver Apêndice B)

$$H_{full} = \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} \sigma_{ig} (A_- e^{-i\Delta_- t} + A_+ e^{-i\Delta_+ t}) + \Omega_1 \sigma_{ig} e^{i\Delta_1 t} + \Omega_2 \sigma_{ie} e^{-i\Delta_2 t} + H.c., \quad (5.2.2)$$

onde $\Delta_{\pm} = \bar{\omega}_{\pm} - \omega_{ig}$, $\Delta_1 = \omega_{ig} - \omega_1$ e $\Delta_2 = \omega_2 - \omega_{ie}$, com $\omega_{i\ell} = \omega_i - \omega_{\ell}$ ($\ell = g, e$). Para $\lambda \gg \Omega_0$, estamos em um regime muito fora da ressonância e sob aproximação onda girante, temos que unicamente um dos modos normais interage efetivamente com o átomo. Escolhemos, por exemplo, o modo $\bar{\omega}_+$ a ser quase ressonante com a transição $g \longleftrightarrow i$ e daqui em diante vai se omitir o índice do modo normal, tal que $A_+ = A$ e $\Delta_+ = \Delta$. No regime dispersivo, as condições $\Omega_0 \sqrt{n+1} \ll \Delta$ e $\Omega_j \ll \Delta_j$ ($j = 1, 2$) conduzem ao hamiltoniano efetivo

$$H_{ef} = (\xi A^\dagger A - \varpi_g) \sigma_{gg} + \varpi_e \sigma_{ee} + (\zeta A^\dagger e^{i\delta t} \sigma_{ge} + H.c.), \quad (5.2.3)$$

onde $\varpi_g = |\Omega_1|^2 / \Delta_1$, $\varpi_e = |\Omega_2|^2 / \Delta_2$, $\xi = |\Omega_0|^2 / \Delta$, $\zeta = \sqrt{2} \Omega_0 \Omega_2 (\Delta^{-1} + \Delta_2^{-1}) / 4$ e $\delta = \Delta - \Delta_2$. A seguir, realizamos a transformação unitária

$$U = \exp \left\{ -i \left[(\xi A^\dagger A - \varpi_g) \sigma_{gg} + \varpi_e \sigma_{ee} \right] t \right\},$$

sobre o hamiltoniano (5.2.3), para levá-lo à forma

$$V_{eff} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n e^{i\phi_n t} \sigma_{ge} |n+1\rangle \langle n| + H.c.,$$

onde $\zeta_n = \sqrt{n+1} \zeta$ e $\phi_n = (n+1) \xi + \delta - \varpi_g - \varpi_e$. Tal como no Capítulo 3 ou mesmo no Capítulo 2 (no processo seletivo de um fóton), as condições $\xi \gg \sqrt{k+2} |\zeta|$ e $\phi_k = 0$, são suficientes para obter o hamiltoniano seletivo na base do modo normal da cavidade ($i = 1$)

$$H_{selec} = \zeta \sigma_{ge} |\ell+1\rangle \langle \ell| + H.c., \quad (5.2.4)$$

o qual produz as interações seletivas desejadas no subespaço de Fock $\{|\ell\rangle, |\ell+1\rangle\}$. Agora aplicamos o raciocínio usado por *B. G. Englert* (33), para a engenharia do reservatório atômico. Considerando que todos os átomos são preparados no seus estados excitados ($|e\rangle$), com as dessintonias Δ_j dos campos clássicos ajustadas para produzir $\ell' = 0$ (isto é,

$\phi_{\ell'} = 0$), obtemos a equação mestra

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & \frac{\Gamma_0}{2} \left(2A_0^\dagger \rho A_0 - \rho A_0 A_0^\dagger + A_0 A_0^\dagger \rho \right) \\ & + \sum_{\alpha=\pm} \frac{\gamma}{2} (1 + \bar{n}) \left(2A_\alpha \rho A_\alpha^\dagger - \rho A_\alpha^\dagger A_\alpha + A_\alpha^\dagger A_\alpha \rho \right) \\ & + \sum_{\alpha=\pm} \frac{\gamma}{2} \bar{n} \left(2A_\alpha^\dagger \rho A_\alpha - \rho A_\alpha A_\alpha^\dagger + A_\alpha A_\alpha^\dagger \rho \right), \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

em que é apenas requerida a engenharia seletiva do termo de absorção na Eq. (5.1.3) com a taxa efetiva $\Gamma_0 = r(\zeta_0\tau)^2$, lembrando que r é taxa de chegada dos átomos na cavidade e τ é o tempo de interação dos átomos com o modo da cavidade. Cada átomo atravessa a cavidade. Os outros dois Lindbladianos na Eq. (5.1.3), os termos de emissão seletiva e de refrigeração, podem ser construídos como se segue: 1) Ao preparar os átomos no estado fundamental ($|g\rangle$) e as dessintonias Δ_j para produzir $\ell = 1$, obtém-se o Liouvillano seletivo

$$\mathcal{L}_{eng-emis}\rho = \frac{\Gamma_1}{2} \left(2A_1\rho A_1^\dagger - \rho A_1^\dagger A_1 + A_1^\dagger A_1\rho \right),$$

e 2) desligando os campos clássicos e usando um feixe de átomos de dois níveis preparados no estado fundamental, ressonante com um dos modos normais $\bar{\omega}_\pm$, obtém-se o termo de enfreamento

$$\mathcal{L}_{eng-refri}\rho = \frac{\Gamma_\pm}{2} \left(2A_\pm\rho A_\pm^\dagger - \rho A_\pm^\dagger A_\pm + A_\pm^\dagger A_\pm\rho \right).$$

Para testar a validade destes parâmetros na CQED na faixa de micro-ondas, começamos pela escolha $\Delta = \Delta_1 = (1 + 10^{-2}) \times \Delta_2 = 10|\Omega_0|$, tal que $|\Omega_1| = 10 \times |\Omega_2| = |\Omega_0|$, $\zeta_0 = 10^{-2}|\Omega_0|$ e $\tau = 10^2/|\Omega_0|$. (tal que $\zeta_k\tau = 1$). Com os parâmetros típicos na CQED, tais como $\Omega_0 \sim 5 \times 10^5 \text{Hz}$ e $\gamma \sim 10 \text{Hz}$ para $\bar{n} = 0.05$ (40), obtém-se valores de Γ_0 até $10^3\gamma$. Dentro deste regime de parâmetros calculamos numericamente da Eq. (5.2.5) a fidelidade na qual o estado estacionário $|\phi_+\rangle = (|1,0\rangle_m + |0,1\rangle_m)/\sqrt{2}$ é gerado, executando QuTIP. (87) Na Fig. 5.2.1, apresentamos a evolução da fidelidade $\mathcal{F}(t) = \sqrt{\text{Tr}|\phi_+\rangle\langle\phi_+|\rho(t)}$ para três valores de $\Gamma_0 = (10, 25, 50)\gamma$, conduzindo aos resultados (0.91, 0.93, 0.94). Se tivéssemos escolhido $\bar{\omega}_-$ ao invés de $\bar{\omega}_+$ a ser ressonante com a transição $g \longleftrightarrow i$, teríamos alcançado o estado estacionário $|\phi_-\rangle = (|1,0\rangle_m - |0,1\rangle_m)/\sqrt{2}$. Analisamos também, o efeito sobre a fidelidade quando os três liouvillianos agem em conjunto, com $\Gamma_{+1} = \Gamma_{+0} = \Gamma_- = 50\gamma$. Como mencionado antes, conseguimos uma maior fidelidade, em torno de 0,98. A melhoria na preparação do estado emaranhado é devido ao efeito de refrigeração (Γ_-), o que aumenta a fidelidade do estado de vácuo no modo $\bar{\omega}_-$. Para analisar a eficácia da interação efetiva (5.2.4) em comparação com o hamiltoniano (5.2.2), plotamos, na inserção da Fig. 5.2.1, as fidelidades calculadas a partir da Eq. (5.2.5) (curva sólida) quando substituímos o liouvilliano efetivo $\mathcal{L}_{eng-abs}\rho = \frac{\Gamma_0}{2} \left(2A_0^\dagger \rho A_0 - \rho A_0 A_0^\dagger + A_0 A_0^\dagger \rho \right)$ nesta equação pela evolução coerente $-i[H_{full}, \rho]$ (curva tracejada). Neste ultimo caso é

Figura 5.2.1 – Evolução da fidelidade do estado $|\phi_+\rangle$ contra a escala de tempo γt , partindo do estado inicial térmico com $\bar{n} = 0.05$. Na figura insertada comparamos as fidelidades calculadas a partir da Eq. (5.2.5) e quando substituímos o liouvilliano efetivo nesta equação pela evolução coerente $-i[H_{full}, \rho]$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

numericamente simulado pela injeção de átomos ($r = |\Omega_0|/10^2 = 5 \times 10^3$) através da cavidade, considerando os parâmetros que conduzem a $\Gamma_0 = 50\gamma$ e assumindo $\lambda = 10^2 |\Omega_0|$. Verificamos que, apesar de que ambas curvas seguem dinâmicas separadas em torno ao tempo de relaxação γ^{-1} , convergem mais perto uma da outra, pouco depois desse intervalo. Embora esta comparação entre as dinâmicas decorrentes dos hamiltonianos efetivo (5.2.4) e completo (5.2.2) não serão realizadas para os casos discutidos abaixo, é bastante razoável supor que o excelente comportamento verificado acima deve repetir para tempos suficientemente longos. Depois de tudo, como pode ser observado, as curvas nas figuras apresentadas a seguir são derivados de conjunto de parâmetros muito próximas daquelas na Fig. 5.2.1.

Para investigar a possibilidade de alcançar o estado $|N00N\rangle = (|2, 0\rangle_m - |0, 2\rangle_m)/\sqrt{2}$, temos que considerar dois feixes atômicos que podem, por exemplo, ser injetados através de uma das cavidades. Devemos sintonizar um dos feixes para interagir com o modo normal $\bar{\omega}_+$ e o outro com $\bar{\omega}_-$. (Ressaltamos que nenhuma interação efetiva entre os átomos, mediada pelos modos da cavidade, ocorre quando $\gamma \gg \Omega_0$.) Seguindo os passos descritos acima para derivar a equação mestra (5.2.5), chegamos a dois liouvillianos seletivos atuando no subespaço $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ dos modos $\bar{\omega}_\pm$. Na Fig. 5.2.2, apresentamos a fidelidade $\mathcal{F}(t) = \sqrt{\text{Tr}[N00N]\langle N00N|\rho(t)}$ e sua pureza associada $\mathbf{p}(t) = \text{Tr}[\rho^2(t)]$, conseguida ao

Figura 5.2.2 – Evolução da fidelidade do estado $|N00N\rangle$ contra a escala de tempo γt , partindo do estado inicial térmico com $\bar{n} = 0.05$. Na figura insertada se mostra a evolução da pureza.

Fonte: Elaborada pelo autor.

adotar somente liouvillianos engenhados de absorção, com $\Gamma_{\pm 0} = 50\gamma$, ou ambos liouvillianos seletivos de absorção e emissão, com $\Gamma_{\pm 0} = \Gamma_{\pm 1} = 50\gamma$ conduzindo às fidelidades (purezas) em torno de 0.92 (0.77) e 0.98 (0.91), respectivamente. Além do aumento na fidelidade, o uso de ambos liouvillianos seletivos implica principalmente um maior grau de pureza. Aqui salientamos que as duas medidas em conjunto, da fidelidade e pureza, dão uma assinatura da eficácia de nosso esquema. Na verdade, há um número infinito de estados que apresentam a mesma fidelidade em relação a um determinado estado a proteger e o mesmo é verdade para a pureza; assim, ambas as quantidades são muitas vezes utilizadas para corroborar uma da outra. (93)

Finalmente, investigamos o caso das redes simétricas degeneradas ($\omega_m = \omega$ e $\lambda_{mn} = \lambda$), onde o hamiltoniano (5.1.1) pode ser diagonalizado através da transformação canônica $A_1 = \sum_m a_m / \sqrt{N}$ e $A_j = \sum_{k=1}^{j-1} a_k / \sqrt{j(j-1)} - (j-1)a_j$ ($j = 2, 3, \dots, N$) e as correspondentes frequências dos modos normais são $\bar{\omega}_1 = \omega + (N+1)\lambda$ e $\bar{\omega}_j = \omega - \lambda$. Aqui estamos interessados em atingir o estado de Fock estacionário com uma única excitação no modo normal não degenerado $\bar{\omega}_1$ e o estado de vácuo em todos os outros modos degenerados, o qual corresponde a um estado multiqubit tipo W:

$$|1, 0, \dots, 0\rangle_M = \frac{1}{\sqrt{N}} (|1, 0, \dots, 0\rangle_m + |0, 1, \dots, 0\rangle_m + \dots + |0, 0, \dots, 1\rangle_m) = |W\rangle_N.$$

Notamos que a Eq. (5.1.2) para o caso de redes simétricas degeneradas contém apenas

Figura 5.2.3 – Evolução das fidelidades dos estados $|W\rangle_3$ e $|W\rangle_4$, contra a escala de tempo γt , partindo do estado inicial térmico com $\bar{n} = 0.05$. Na figura insertada se mostra a evolução da pureza de cada um.

Fonte: Elaborada pelo autor.

taxas de decaimento natural no modo $\bar{\omega}_1$, isto é, $\gamma_1 = N\gamma$ e $\gamma_j = 0$. portanto, para alcançar o estado $||1, 0, \dots, 0\rangle\rangle_M$, além do Lindbladiano seletivo para o modo $\bar{\omega}_1$, precisamos projetar o Lindbladiano de refrigeração no modo $\bar{\omega}_j$. Em um sistema de cavidades acopladas, podemos seguir os mesmos passos como os descritos acima para construir a equação mestra desejada

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & \frac{\bar{\gamma}_{10}}{2} \left(2A_{10}^\dagger \rho A_{10} - \rho A_{10} A_{10}^\dagger + A_{10} A_{10}^\dagger \rho \right) + \frac{N\gamma}{2} (1 + \bar{n}) \left(2A_1 \rho A_1^\dagger - \rho A_1^\dagger A_1 + A_1^\dagger A_1 \rho \right) \\ & + \frac{N\gamma}{2} \bar{n} \left(2A_1^\dagger \rho A_1 - \rho A_1 A_1^\dagger + A_1 A_1^\dagger \rho \right) + \sum_j \frac{\tilde{\gamma}_j}{2} \left(2A_j \rho A_j^\dagger - \rho A_j^\dagger A_j + A_j^\dagger A_j \rho \right). \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Na Fig. 5.2.3, apresentamos a fidelidade e pureza, calculadas a partir da Eq. (5.2.6), da preparação do estado tipo W $|W\rangle_N$, para os casos $N = 3, 4$, adotando $\Gamma_{10}, \Gamma_j = 50\gamma$, e a partir de um estado térmico com $\bar{n} = 0.05$. Achamos que as fidelidades (purezas) dos emaranhamentos gerados $|W\rangle_3$ e $|W\rangle_4$ são em torno de 0,95 (0,81) e 0,94 (0,79), respectivamente. No caso de uma rede linear degenerada com uma única excitação, podemos chegar a um conjunto de estados estacionários multiqubits dado por (5.2.7)

$$|\Psi_n\rangle_{1,\dots,N} = \sqrt{\left(\frac{2}{N+1}\right)} \sum_{k=1}^N \sin\left(\frac{nk\pi}{N+1}\right) a_k^\dagger |0_1 0_2, \dots, 0_N\rangle. \quad (5.2.7)$$

Capítulo 6

Conclusão

Nesta Tese, descrevemos vários protocolos para a geração de estados não clássicos estacionários, suportados principalmente pela engenharia de hamiltonianos seletivos lineares JC, e de reservatórios atômicos. O método aplicado para as interações seletivas garante a remoção de transições indesejadas provenientes do acoplamento dos níveis atômicos com estados de Fock fora do subespaço $\{|n\rangle, |n+k\rangle\}$, através de um protocolo de sistemas quânticos em regime dispersivo, apresentado por *D. F. James*. (75, 76)

No Capítulo 2, depois de apresentar o método geral para obter interações seletivas, foram derivadas as transições seletivas de um, dois e três fótons. Para cada caso, partimos de uma configuração específica de nível atômico. Notavelmente, o procedimento que adotamos para derivar as interações seletivas levou à mesma frequência efetiva de Rabi para todos os processos de um, dois e três fótons. Este fato marcou a escolha da interação seletiva de três fótons para a preparação do estado de Fock $|16\rangle$ pela passagem de cinco átomos através da cavidade, com uma fidelidade de 0,991 obtido na ausência dos mecanismos de perda, e o valor ainda significativo de 0,933 quando os mecanismos de perda do campo e os átomos são levados em conta.

Por fim, prevê-se uma estratégia para controlar o processo de decoerência dos estados de Fock preparados, resultante da utilização das interações seletivas derivadas aqui. Demonstramos que esta estratégia reduz drasticamente a taxa de decaimento de um estado de Fock $|N\rangle$, na medida em que substitui o fator de amortecimento $N\Gamma$ (proveniente do vácuo multimodo) por $N\Gamma/c$, onde a constante c depende dos parâmetros do reservatório do feixe atômico e pode ser muito maior do que a unidade.

No Capítulo 3, foi apresentado um esquema para manipular a distribuição térmica de forma a produzir estados de Fock estacionários do campo de radiação. Nosso protocolo depende da engenharia de hamiltonianos Jaynes-Cummings seletivos que conseguem gerar superoperadores de lindblad igualmente seletivos que permitem manipular a distribuição final no equilíbrio do campo de radiação, fatiando-a para a preparação de estados de Fock estacionários. A nossa técnica pode ser implementada em outros contextos de interação átomo-campo, tais como íons aprisionados e em CirQED, onde o feixe de átomos que

simulam o reservatório pode ser conseguido mediante campos clássicos pulsados. Por exemplo, no primeiro caso, o campo clássico é usado para acoplar o campo vibracional intermitentemente com os estados internos iônicos. Além da preparação de Fock estados, outras engenharias de estado surgiram a partir do presente protocolo, como a geração de estado estacionário emaranhados em uma rede de osciladores quânticos acoplados.

Com base ao resultado obtido no Capítulo 2, onde um feixe de átomos interagindo com a cavidade sob a dinâmica de processos seletivos de um fóton, leva à engenharia de um liouvilliano seletivo para retrasar a decoerência de um estado de Fock. Temos, assim, apresentado uma técnica para projetar interações átomo-campo *ub* e *sliced* na CQED. Começamos pela engenharia dessas interações confinadas aos subespaços Fock $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ e $\{|M\rangle, |M+1\rangle, |M+2\rangle\}$, respectivamente, utilizando uma configuração atômica de quatro níveis, um modo de cavidade e um campo clássico. Em seguida, com o mesmo modo de cavidade e campo clássico, mas com uma configuração atômica de cinco níveis, se mostrou a engenharia de interações confinados aos subespaços de Fock que vão desde os estados $|0\rangle$ até $|3\rangle$ e $|M\rangle$ até $|M+3\rangle$. A validade destas interações foi confirmada numericamente por comparação da evolução das populações do modo na cavidade descritas pelos hamiltonianos efetivo e completo, a partir do qual os hamiltonianos efetivos foram obtidos. Também indicamos como gerar, através de uma configuração atômica de seis níveis, as interações confinadas aos subespaços de Fock que vão desde $|0\rangle$ até $|4\rangle$ e $|M\rangle$ até $|M+4\rangle$.

Em seguida, voltando-se para as aplicações dos hamiltonianos *ub* confinados a um subespaço de estados de Fock que vão desde $|0\rangle$ até $|N\rangle$, apresentamos um método, com base na engenharia de reservatório atômico, para a proteção do estado de mais alta energia, $|N\rangle$. Centrando-se no hamiltoniano *ub* confinado ao subespaço de Fock $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, apresentamos a evolução da fidelidade $\mathcal{F}_3(t) = \sqrt{\text{Tr} |3\rangle \langle 3| \rho(t)}$ e do fator Q de Mandel, mostrando que o campo atinge o estado estacionário que se aproxima ao estado de Fock $|3\rangle$. Ressaltamos que, em contraste com outros esquemas usados para a preparação de estados de Fock baseados na condição de estados *trapping*, onde o campo na cavidade alcança um estado *ub*, nosso esquema não necessita nem de detecção atômica e nem o controle do tempo de interação na sequência de átomos. (13) Além dos hamiltonianos *ub*, foi apresentado uma estratégia (seguindo o protocolo no Capítulo 3, onde engenharia de reservatórios atômicos também são requeridos) para gerar liouvillianos *ub*, que não contam com a engenharia de um hamiltoniano *ub* específico. O liouvilliano engenhado foi então utilizado para gerar e proteger estados que se aproximam aos estados de Fock $|2\rangle$ e $|3\rangle$.

Os dois regimes descritos acima para a produção de estados de Fock estacionários têm aproximadamente a mesma eficácia e dificuldade de aplicação prática. A engenharia de hamiltonianos e liouvillianos *ub*, torna-se cada vez mais difícil à medida que aumen-

tamos o tamanho do subespaço ub . Enquanto a engenharia de interações ub requerem um número crescente de níveis atômicos específicos, a engenharia de liouvillianos ub exige a seleção aleatória de um número crescente dos subespaços $\{|k\rangle, |k+1\rangle\}$. Finalmente observamos que um número de aplicações distintas das interações ub e *sliced* podem ser implementadas, tais como a engenharia de estados não-clássicos emaranhados, portas lógicas quânticas, teletransporte de superposições de $N > 2$, etc. Basicamente, o que temos feito nesta contribuição pode ser levado adiante, no contexto do que tem sido chamado tesoura quântica para truncagem de estado óptico. (94, 95) Conforme já ressaltado anteriormente, esta técnica pode ser diretamente aplicável, entre outras plataformas, como CirQED. (90)

No Capítulo 5, propusemos um protocolo para obter estados emaranhados estacionários em uma rede bosônica dissipativa no limite Markoviano. Similarmente ao protocolo apresentado no Capítulo 3, nossa proposta baseia-se na engenharia de hamiltonianos seletivos JC, que geram lindbladianos igualmente seletivos que nos permitem manipular a distribuição de equilíbrio térmico dos modos normais de rede. Discutimos, também, uma possível implementação experimental da nossa proposta em um sistema de cavidades acopladas onde os liouvillianos engenhados necessários são construídos a partir de feixes atômicos de três níveis para interagir com os modos normais da rede. Dirigindo-se algumas questões interessantes para ser mais investigada, primeiro observamos que o papel desempenhado pela topologia de rede na geração dos emaranhamentos multipartites estacionários (ver Refs. (96, 97)) foi explorada apenas ligeiramente. Nossos resultados indicam que, manipulando a topologia da rede, podemos acessar a uma infinidade de estados de emaranhamento multipartites estacionários, cobrindo a totalidade ou parte da rede. Por fim, vale a pena investigar como a não markovianidade e o regime de acoplamento forte afetam nosso protocolo de dissipação para a preparação de estados emaranhados.

Referências

- 1 SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum optics*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1997.
- 2 JAYNES, E.; CUMMINGS, F. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, v. 51, n. 1, p. 89–109, 1963.
- 3 ZBINDEN, H. et al. Practical aspects of quantum cryptographic key distribution. *Journal of Cryptology*, v. 13, n. 2, p. 207–220, 2000.
- 4 ENK, S. J. van; CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. Ideal quantum communication over noisy channels: a quantum optical implementation. *Physical Review Letters*, v. 78, n. 22, p. 4293–4296, 1997.
- 5 CIRAC, J. I. et al. Quantum state transfer and entanglement distribution among distant nodes in a quantum network. *Physical Review Letters*, v. 78, n. 16, p. 3221–3224, 1997.
- 6 JENNEWEIN, T. et al. Quantum cryptography with entangled photons. *Physical Review Letters*, v. 84, n. 20, p. 4729–4732, 2000.
- 7 RAUSCHENBEUTEL, A. et al. Step-by-step engineered multiparticle entanglement. *Science*, v. 288, n. 5473, p. 2024–2028, 2000.
- 8 RAUSCHENBEUTEL, A. et al. Coherent operation of a tunable quantum phase gate in cavity qed. *Physical Review Letters*, v. 83, n. 24, p. 5166–5169, 1999.
- 9 ZHOU, X. et al. Field locked to a fock state by quantum feedback with single photon corrections. *Physical Review Letters*, v. 108, n. 24, p. 243602, 2012.
- 10 BRUNE, M. et al. Process tomography of field damping and measurement of fock state lifetimes by quantum nondemolition photon counting in a cavity. *Physical Review Letters*, v. 101, n. 24, p. 240402, 2008.
- 11 BLAIS, A.; GAMBETTA, J. M. Filling a cavity with photons, and watching them leave. *Physics*, v. 1, n. 1, p. 39, 2008.
- 12 WEIDINGER, M. et al. Trapping states in the micromaser. *Physical Review Letters*, v. 82, n. 19, p. 3795–3798, 1999.
- 13 BRATTKE, S.; VARCOE, B. T. H.; WALTHER, H. Generation of photon number states on demand via cavity quantum electrodynamics. *Physical Review Letters*, v. 86, n. 16, p. 3534–3537, 2001.

- 14 VARCOE, B. T. H. et al. Preparing pure photon number states of the radiation field. *Nature*, v. 403, n. 6771, p. 743–746, 2000.
- 15 HOFHEINZ, M. et al. Generation of fock states in a superconducting quantum circuit. *Nature*, v. 454, n. 7202, p. 310–314, 2008.
- 16 WANG, H. et al. Measurement of the decay of fock states in a superconducting quantum circuit. *Physical Review Letters*, v. 101, n. 24, p. 240401, 2008.
- 17 ROOS, C. et al. Bell states of atoms with ultralong lifetimes and their tomographic state analysis. *Physical Review Letters*, v. 92, n. 22, p. 220402, 2004.
- 18 DOWLING, J. P. Quantum optical metrology—the lowdown on high-NOON states. *Contemporary Physics*, v. 49, n. 2, p. 125–143, 2008.
- 19 CHEN, L.; CHEN, Y.-X. Classification of GHZ-type, W-type, and GHZ-W-type multiqubit entanglement. *Physical Review A*, v. 74, n. 6, p. 062310, 2006.
- 20 DENG, F.-G.; LONG, G.; LIU, X.-S. Two-step quantum direct communication protocol using the einstein-podolsky-rosen pair block. *Physical Review A*, v. 68, n. 4, p. 042317, 2003.
- 21 BENNETT, C. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Physical Review Letters*, v. 70, n. 13, p. 1895–1899, 1993.
- 22 BOTO, A. et al. Quantum interferometric optical lithography: exploiting entanglement to beat the diffraction limit. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 13, p. 2733–2736, 2000.
- 23 BOLLINGER, J. et al. Optimal frequency measurements with maximally correlated states. *Physical Review A*, v. 54, n. 6, p. R4649–R4652, 1996.
- 24 OU, Z. Y. Fundamental quantum limit in precision phase measurement. *Physical Review A*, v. 55, n. 4, p. 2598–2609, 1997.
- 25 SHI, B.-S.; TOMITA, A. Teleportation of an unknown state by w state. *Physics Letters A*, v. 296, n. 4-5, p. 161–164, 2002.
- 26 JUN, L. et al. Revisiting quantum secure direct communication with W state. *Chinese Physics Letters*, v. 23, n. 10, p. 2652, 2006.
- 27 WU, C. et al. Quantum nonlocality of N-qubit W states. *Physical Review A*, v. 73, n. 1, p. 012310, 2006.
- 28 MLYNEK, J. et al. Demonstrating w-type entanglement of dicke states in resonant cavity quantum electrodynamics. *Physical Review A*, v. 86, n. 5, p. 053838, 2012.
- 29 AFEK, I.; AMBAR, O.; SILBERBERG, Y. High-NOON states by mixing quantum and classical light. *Science*, v. 328, n. 5980, p. 879–881, 2010.
- 30 RODRIGUEZ-MENDEZ, D.; MOYA-CESSA, H. NOON states in entangled cavities. *Optics Communications*, v. 284, n. 13, p. 3345 – 3347, 2011.

-
- 31 MERKEL, S. T.; WILHELM, F. K. Generation and detection of noon states in superconducting circuits. *New Journal of Physics*, v. 12, n. 9, p. 093036, 2010.
- 32 WANG, H. et al. Deterministic entanglement of photons in two superconducting microwave resonators. *Physical Review Letters*, v. 106, n. 6, p. 060401, 2011.
- 33 BUCHLEITNER, A.; HORNBERGER, K. (Ed.). *Coherent evolution in noisy environments*. Berlin: Springer Verlag, 2002. 293 p. (Lecture Notes in Physics, v. 611).
- 34 PRADO, F. O. et al. Steady fock states via atomic reservoir. *Europhysics Letters*, v. 107, n. 1, p. 13001, 2014.
- 35 NOGUES, G. et al. Seeing a single photon without destroying it. *Nature*, v. 400, n. 6741, p. 239–242, 1999.
- 36 GLEYZES, S. et al. Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity. *Nature*, v. 446, n. 7133, p. 297–300, 2007.
- 37 RAIMOND, J.; BRUNE, M.; HAROCHE, S. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Reviews of Modern Physics*, v. 73, n. 3, p. 565–582, 2001.
- 38 POYATOS, J.; CIRAC, J.; ZOLLER, P. Quantum reservoir engineering with laser cooled trapped ions. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 23, p. 4728–4731, 1996.
- 39 PIELAWA, S. et al. Generation of einstein-podolsky-rosen-entangled radiation through an atomic reservoir. *Physical Review Letters*, v. 98, n. 24, p. 240401, 2007.
- 40 KUHR, S. et al. Ultrahigh finesse fabry-pérot superconducting resonator. *Applied Physics Letters*, v. 90, n. 16, p. 1641011, 2007.
- 41 WALTHER, H. et al. Cavity quantum electrodynamics. *Reports on Progress in Physics*, v. 69, n. 5, p. 1325, 2006.
- 42 GUERLIN, C. et al. Progressive field-state collapse and quantum non-demolition photon counting. *Nature*, v. 448, n. 7156, p. 889–893, 2007.
- 43 CIRAC, J. et al. "Dark" squeezed states of the motion of a trapped ion. *Physical Review Letters*, v. 70, n. 5, p. 556–559, 1993.
- 44 SERRA, R. et al. Frequency up- and down-conversions in two-mode cavity quantum electrodynamics. *Physical Review A*, v. 71, n. 4, p. 045802, 2005.
- 45 PRADO, F. et al. Bilinear and quadratic hamiltonians in two-mode cavity quantum electrodynamics. *Physical Review A*, v. 73, n. 4, p. 043803, 2006.
- 46 RODRIGUES, R.; MOUSSA, M.; VILLAS-BÔAS, C. Engineering phonon-photon interactions with a driven trapped ion in a cavity. *Physical Review A*, v. 74, n. 6, p. 063811, 2006.
- 47 ZHENG, S.-B.; GUO, G.-C. Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in cavity qed. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 11, p. 2392–2395, 2000.

-
- 48 OSNAGHI, S. et al. Coherent control of an atomic collision in a cavity. *Physical Review Letters*, v. 87, n. 3, p. 037902, 2001.
- 49 VILLAS-BÔAS, C. et al. Squeezing arbitrary cavity-field states through their interaction with a single driven atom. *Physical Review A*, v. 68, n. 6, p. 061801, 2003.
- 50 PELLIZZARI, T.; RITSCH, H. Preparation of stationary fock states in a one-atom raman laser. *Physical Review Letters*, v. 72, n. 25, p. 3973–3976, 1994.
- 51 SANTOS, M. F.; SOLANO, E.; MATOS FILHO, R. de. Conditional large fock state preparation and field state reconstruction in cavity qed. *Physical Review Letters*, v. 87, n. 9, p. 093601, 2001.
- 52 XIAO, Y.-F.; ZOU, X.-B.; GUO, G.-C. Generation of atomic entangled states with selective resonant interaction in cavity quantum electrodynamics. *Physical Review A*, v. 75, n. 1, p. 012310, 2007.
- 53 SOLANO, E. Selective interactions in trapped ions: state reconstruction and quantum logic. *Physical Review A*, v. 71, n. 1, p. 013813, 2005.
- 54 SANTOS, M. Universal and deterministic manipulation of the quantum state of harmonic oscillators: a route to unitary gates for fock state qubits. *Physical Review Letters*, v. 95, n. 1, p. 010504, 2005.
- 55 SOLANO, E. et al. Manipulating motional states by selective vibronic interaction in two trapped ions. *Physical Review A*, v. 62, n. 2, p. 021401, 2000.
- 56 PLENIO, M. B.; HARTLEY, J.; EISERT, J. Dynamics and manipulation of entanglement in coupled harmonic systems with many degrees of freedom. *New Journal of Physics*, v. 6, n. 1, p. 36, 2004.
- 57 PONTE, M. de; OLIVEIRA, M. de; MOUSSA, M. Decoherence in strongly coupled quantum oscillators. *Annals of Physics*, v. 317, n. 1, p. 72 – 106, 2005.
- 58 PONTE, M. de; OLIVEIRA, M. de; MOUSSA, M. Decoherence in a system of strongly coupled quantum oscillators. i. symmetric network. *Physical Review A*, v. 70, n. 2, p. 022324, 2004.
- 59 PONTE, M. de; OLIVEIRA, M. de; MOUSSA, M. Decoherence in a system of strongly coupled quantum oscillators. ii. central-oscillator network. *Physical Review A*, v. 70, n. 2, p. 022325, 2004.
- 60 BURKARD, G.; BRITO, F. Nonadditivity of decoherence rates in superconducting qubits. *Physical Review B*, v. 72, n. 5, p. 054528, 2005.
- 61 PONTE, M. de; MIZRAHI, S.; MOUSSA, M. Networks of dissipative quantum harmonic oscillators: a general treatment. *Physical Review A*, v. 76, n. 3, p. 032101, 2007.
- 62 PONTE, M. A. de; MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y. Storing quantum states in bosonic dissipative networks. *Journal of Physics B: atomic, molecular and optical physics*, v. 41, n. 21, p. 215506, 2008.

- 63 CACHEFFO, A. et al. Quasi-perfect state transfer in a bosonic dissipative network. *Journal of Physics B: atomic, molecular and optical physics*, v. 43, n. 10, p. 105503, 2010.
- 64 HARTMANN, M. J.; BRANDAO, F. G. S. L.; PLENIO, M. B. Strongly interacting polaritons in coupled arrays of cavities. *Nature Physics*, v. 2, n. 12, p. 849–855, 2006.
- 65 HARTMANN, M.; PLENIO, M. Strong photon nonlinearities and photonic mott insulators. *Physical Review Letters*, v. 99, n. 10, p. 103601, 2007.
- 66 BLAIS, A. et al. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: an architecture for quantum computation. *Physical Review A*, v. 69, n. 6, p. 062320, 2004.
- 67 SERRA, R. M. et al. Engineering cavity-field states by projection synthesis. *Physical Review A*, v. 62, n. 4, p. 043810, 2000.
- 68 PARKINS, A. S. et al. Synthesis of arbitrary quantum states via adiabatic transfer of zeeman coherence. *Physical Review Letters*, v. 71, n. 19, p. 3095–3098, 1993.
- 69 VOGEL, K.; AKULIN, V. M.; SCHLEICH, W. P. Quantum state engineering of the radiation field. *Physical Review Letters*, v. 71, n. 12, p. 1816–1819, 1993.
- 70 PONTE, M. A. de; MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y. State protection under collective damping and diffusion. *Physical Review A*, v. 84, n. 1, p. 012331, 2011.
- 71 LIDAR, D. A.; CHUANG, I. L.; WHALEY, K. B. Decoherence-free subspaces for quantum computation. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 12, p. 2594–2597, 1998.
- 72 BRUNE, M. et al. Observing the progressive decoherence of the “meter” in a quantum measurement. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 24, p. 4887–4890, 1996.
- 73 FINK, J. M. et al. Quantum-to-classical transition in cavity quantum electrodynamics. *Physical Review Letters*, v. 105, n. 16, p. 163601, 2010.
- 74 DIEHL, S. et al. Quantum states and phases in driven open quantum systems with cold atoms. *Nature Physics*, v. 4, n. 11, p. 878–883, 2008.
- 75 GAMEL, O.; JAMES, D. Time-averaged quantum dynamics and the validity of the effective hamiltonian model. *Physical Review A*, v. 82, n. 5, p. 052106, 2010.
- 76 JAMES, D. F.; JERKE, J. Effective hamiltonian theory and its applications in quantum information. *Canadian Journal of Physics*, v. 85, n. 6, p. 625–632, 2007.
- 77 PRADO, F. O. et al. Engineering selective linear and nonlinear jaynes-cummings interactions and applications. *Journal of Physics B: atomic, molecular and optical physics*, v. 46, n. 20, p. 205501, 2013.
- 78 KRAUSE, J. et al. Preparation of a pure number state and measurement of the photon statistics in a high- Q micromaser. *Physical Review A*, v. 39, n. 4, p. 1915–1921, 1989.
- 79 BRUNE, M.; RAIMOND, J. M.; HAROCHE, S. Theory of the rydberg-atom two-photon micromaser. *Physical Review A*, v. 35, n. 1, p. 154–163, 1987.

- 80 BRUNE, M. et al. Realization of a two-photon maser oscillator. *Physical Review Letters*, v. 59, n. 17, p. 1899–1902, 1987.
- 81 JYOTSNA, I. V.; AGARWAL, G. S. Competing three-photon and one-photon transitions in cavity quantum electrodynamics. *Physical Review A*, v. 50, n. 2, p. 1770–1776, 1994.
- 82 NIEMCZYK, T. et al. Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime. *Nature Physics*, v. 6, n. 10, p. 772–776, 2010. ISSN 1745-2473.
- 83 ARMANI, D. K. et al. Ultra-high-q toroid microcavity on a chip. *Nature*, v. 421, n. 6926, p. 925–928, 2003.
- 84 KIS, Z.; VOGEL, W.; DAVIDOVICH, L. Nonlinear coherent states of trapped-atom motion. *Physical Review A*, v. 64, n. 3, p. 033401, 2001.
- 85 KRAUS, B. et al. Preparation of entangled states by quantum markov processes. *Physical Review A*, v. 78, n. 4, p. 042307, 2008.
- 86 LEE, C. T. Theorem on nonclassical states. *Physical Review A*, v. 52, n. 4, p. 3374–3376, 1995.
- 87 JOHANSSON, J.; NATION, P.; NORI, F. Qutip: an open-source python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications*, v. 183, n. 8, p. 1760 – 1772, 2012.
- 88 SOLANO, E.; AGARWAL, G. S.; WALTHER, H. Strong-driving-assisted multipartite entanglement in cavity qed. *Physical Review Letters*, v. 90, n. 2, p. 027903, 2003.
- 89 ROSSETTI, R. F. et al. Slicing the fock space for state production and protection. *Physical Review A*, v. 90, n. 3, p. 033840, 2014.
- 90 ZHU, G. et al. Circuit qed with fluxonium qubits: Theory of the dispersive regime. *Physical Review B*, v. 87, n. 2, p. 024510, 2013.
- 91 MORAES NETO, G. D. de et al. Steady entanglement in bosonic dissipative networks. *Physical Review A*, v. 90, n. 6, p. 062322, 2014.
- 92 PONTE, M. A. de; MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y. Temperature effects on a network of dissipative quantum harmonic oscillators: collective damping and dispersion processes. *Journal of Physics A: mathematical and theoretical*, v. 42, n. 36, p. 365304, 2009.
- 93 WOOLLEY, M. J.; CLERK, A. A. Two-mode squeezed states in cavity optomechanics via engineering of a single reservoir. *Physical Review A*, v. 89, n. 6, p. 063805, 2014.
- 94 PEGG, D. T.; PHILLIPS, L. S.; BARNETT, S. M. Optical state truncation by projection synthesis. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 8, p. 1604–1606, 1998.
- 95 ÖZDEMİR, S. K. et al. Quantum-scissors device for optical state truncation: a proposal for practical realization. *Physical Review A*, v. 64, n. 6, p. 063818, 2001.

-
- 96 MARZOLINO, U. Entanglement in dissipative dynamics of identical particles. *Europhysics Letters*, v. 104, n. 4, p. 40004, 2013.
- 97 LOOCK, P. van; FURUSAWA, A. Detecting genuine multipartite continuous-variable entanglement. *Physical Review A*, v. 67, n. 5, p. 052315, 2003.
- 98 SCZANIECKI, L. Effective hamiltonians, two-level systems, and generalized maxwell-bloch equations. *Physical Review A*, v. 28, n. 6, p. 3493–3514, 1983.

Apêndice A

Teoria de hamiltonianos efetivos

Os hamiltonianos efetivos nos ajudam num melhor entendimento dos processos físicos relevantes da dinâmica do sistema, já que eles reproduzem o comportamento de alguns aspectos de um sistema físico mais complexo, melhorando nossa intuição acerca dos fenômenos em estudo. Existe uma grande variedade de técnicas para a determinação de hamiltonianos efetivos. Nos casos relevantes em óptica quântica, alguns por exemplo, têm em comum o uso de transformações canônicas unitárias através das quais o hamiltoniano efetivo obtido, após aproximações, compõem-se dos termos não seculares da teoria de perturbação (98), os quais de um ponto de vista operacional são muito trabalhosos. Neste apêndice apresentamos uma formulação compacta útil desenvolvida por *D.F. James* (75, 76), para derivar hamiltoniano efetivos descrevendo a dinâmica de sistemas quânticos que interagem dispersivamente.

A.1 Derivação do hamiltoniano efetivo de sistemas quânticos

O estado de um sistema quântico na representação de interação evolui de acordo com

$$|\Psi(t)\rangle = U(t) |\Psi(0)\rangle,$$

em que U é o operador de evolução unitária que obedece a equação

$$i\hbar \frac{\partial U(t)}{\partial t} = H_I U(t), \tag{A.1.1}$$

sendo H_I o hamiltoniano total do sistema de interesse na representação de interação. No contexto da dinâmica "coarse grained" ou dinâmica de tempo médio, é definida a média do operador O como

$$\overline{O(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t') O(t') dt',$$

em que a função $f(t)$ é real, com área unidade e atua como um filtro passa-baixo. Portanto, termos de alta frequência vão desaparecer da média no tempo. Usando a integração por partes é possível mostrar que,

$$\frac{\partial \overline{O(t)}}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t') \frac{\partial O(t')}{\partial t} dt' = \overline{\frac{\partial O(t)}{\partial t}}. \quad (\text{A.1.2})$$

Na dinâmica de tempo médio a equação de Schrödinger é diretamente definida de tal forma que a evolução é determinada pelo hamiltoniano H_{eff} da seguinte forma

$$i\hbar \frac{\partial \overline{U(t)}}{\partial t} = \mathcal{H}_{eff} \overline{U(t)}. \quad (\text{A.1.3})$$

Então, podemos determinar uma expressão para H_{eff} tomando a média no tempo da equação (A.1.1), isto é,

$$i\hbar \frac{\partial \overline{U(t)}}{\partial t} = \overline{H_I U(t)}, \quad (\text{A.1.4})$$

e usando o critério da equação (A.1.2) para realizar a comparação das equações (A.1.1) e (A.1.4) é fácil inferir

$$\mathcal{H}_{eff} \overline{U(t)} = \overline{H_I U(t)},$$

o que imediatamente leva à fórmula

$$\mathcal{H}_{eff} = \left(\overline{H_I U(t)} \right) \left(\overline{U(t)} \right)^{-1}. \quad (\text{A.1.5})$$

Embora a evolução do operador $U(t)$ seja unitária; em geral, o operador $\overline{U(t)}$ geralmente não é. A origem desta evolução não unitária, está em que o espaço de Hilbert foi dividido em duas partes, em frequências baixas e altas. A média no tempo é equivalente a executar um traço parcial sobre a parte do espaço de Hilbert de altas frequências, e executar um traço parcial em uma parte do espaço de Hilbert está associado a uma evolução não-unitária; Assim, a expressão (A.1.5) tem a desvantagem de não ser hermitiana. Então, a evolução hamiltoniana efetiva unitária é dada por,

$$H_{eff} = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{H}_{eff} + \mathcal{H}_{eff}^\dagger \right\}. \quad (\text{A.1.6})$$

Usando a expansão padrão para $U(t)$,

$$\begin{aligned} U(t) = & 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t H_I(t') dt' + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_0^t dt' H_I(t') \int_0^{t'} dt'' H_I(t'') \\ & + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^3 \int_0^t dt' H_I(t') \int_0^{t'} dt'' H_I(t'') \int_0^{t''} dt''' H_I(t''') + \dots, \end{aligned}$$

e mantendo unicamente os termos até terceira ordem do hamiltoniano H_I os quais são no produto $\left(\overline{H_I U(t)}\right) \left(\overline{U(t)}\right)^{-1}$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{eff} &= \left(\overline{H_I U(t)}\right) \left(\overline{U(t)}\right)^{-1} \\ &= \overline{(H_I + H_I U_1 + H_I U_2 + H_I U_3 + \dots)} \times \overline{(1 + U_1^\dagger + U_2^\dagger + U_3^\dagger + \dots)} \\ &= \overline{H_I} + \overline{H_I U_1^\dagger} + \overline{H_I U_2^\dagger} + \overline{H_I U_3^\dagger} + \overline{H_I U_1} + \overline{H_I U_1 U_1^\dagger} \\ &\quad + \overline{H_I U_1 U_2^\dagger} + \overline{H_I U_2} + \overline{H_I U_2 U_1^\dagger} + \overline{H_I U_3} + \dots,\end{aligned}$$

onde

$$U_1(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H_I(t') dt' \quad , \quad U_2(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' H_I(t') \int_0^{t'} dt'' H_I(t'')$$

Agora usamos o fato que $H_I^\dagger(t) = H_I(t)$, $U_1^\dagger(t) = -U_1(t)$ (note-se que $U_2^\dagger(t) \neq U_2(t)$ já que H_I não comuta em tempos diferentes),

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{eff} &= \overline{H_I} - \overline{H_I U_1} + \overline{H_I U_2^\dagger} + \overline{H_I U_1} - \overline{H_I U_1 U_1} + \overline{H_I U_2} \\ &\quad + \overline{H_I U_1 U_2^\dagger} - \overline{H_I U_2 U_1} + \overline{H_I U_3} + \overline{H_I U_3^\dagger}\end{aligned}\tag{A.1.7}$$

e assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{eff}^\dagger &= \overline{H_I} + \overline{U_1 H_I} + \overline{U_2 H_I} - \overline{U_1 H_I} - \overline{U_1 U_1 H_I} + \overline{U_2^\dagger H_I} \\ &\quad - \overline{U_2 U_1 H_I} + \overline{U_1 U_2^\dagger H_I} + \overline{U_3^\dagger H_I} + \overline{U_3 H_I}.\end{aligned}\tag{A.1.8}$$

Substituindo as equações (A.1.7) e (A.1.8) substituídas em (A.1.6) obtemos

$$H_{eff} = \overline{H_I} + H_{eff}^{(2)} + H_{eff}^{(3)} + \dots\tag{A.1.9}$$

onde

$$H_{eff}^{(2)} = \frac{1}{2} \left\{ \overline{[H_I, U_1]} - \overline{[H_I, U_1]} \right\}$$

e

$$H_{eff}^{(3)} = \frac{1}{2} \left\{ \overline{H_I U_2^\dagger} - \overline{H_I U_1 U_1} + \overline{H_I U_2} + \overline{U_2 H_I} - \overline{U_1 U_1 H_I} + \overline{U_2^\dagger H_I} \right\}.$$

A.2 Hamiltoniano efetivo em óptica quântica

É usual no campo da óptica quântica usar transformações unitárias que nos levam a um novo sistema referencial onde o hamiltoniano resultante tem uma dependência temporal

harmônica. Vamos agora considerar um hamiltoniano com dependência temporal harmônica, cuja expressão tem a forma

$$H_I(t) = \sum_{n=1}^N (h_n e^{-i\omega_n t} + h_n^\dagger e^{i\omega_n t}). \quad (\text{A.2.1})$$

consideramos que $\omega_n > 0$, $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_N$, e que a gama de frequências presentes na interação é pequena, i.e. $\omega_N - \omega_1 \ll \omega_1$. Posto que estamos interessados em processos que acontecem em baixas frequências, assumimos também que:

$$\overline{e^{\pm i\omega_n t}} = 0,$$

$$\overline{e^{\pm i(\omega_n + \omega_m)t}} = 0,$$

e

$$\overline{e^{\pm i(\omega_n - \omega_m)t}} = e^{\pm i(\omega_n - \omega_m)t}.$$

Suposto isto, temos portanto que $\overline{H_I(t)} = 0$ e assim

$$H_{eff}^{(2)} = \frac{1}{2} \overline{[H_I, U_1]} = \frac{1}{2} (\overline{H_I U_1} - \overline{U_1 H_I}), \quad (\text{A.2.2})$$

onde

$$\overline{H_I U_1} = \frac{1}{\hbar} \sum_{n,m=1}^N \left(\frac{h_n^\dagger h_m}{\omega_m} e^{i(\omega_n - \omega_m)t} - \frac{h_n h_m^\dagger}{\omega_m} e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} \right),$$

e

$$\overline{U_1 H_I} = \frac{1}{\hbar} \sum_{n,m=1}^N \left(\frac{h_n h_m^\dagger}{\omega_n} e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} - \frac{h_n^\dagger h_m}{\omega_n} e^{i(\omega_n - \omega_m)t} \right).$$

Assim que o resultado para a Eq. (A.2.2), é

$$\begin{aligned} \overline{[H_I, U_1]} &= \frac{1}{\hbar} \sum_{n,m=1}^N \left[\left(\frac{1}{\omega_m} + \frac{1}{\omega_n} \right) h_n^\dagger h_m e^{i(\omega_n - \omega_m)t} - \left(\frac{1}{\omega_m} + \frac{1}{\omega_n} \right) h_n h_m^\dagger e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} \right] \\ &= \frac{1}{\hbar} \sum_{n,m=1}^N \left(\frac{1}{\omega_m} + \frac{1}{\omega_n} \right) [h_n^\dagger h_m e^{i(\omega_n - \omega_m)t} - h_n h_m^\dagger e^{-i(\omega_n - \omega_m)t}] \\ &= \frac{1}{\hbar} \sum_{n,m=1}^N \left(\frac{1}{\omega_m} + \frac{1}{\omega_n} \right) [h_n^\dagger h_m e^{i(\omega_n - \omega_m)t} - h_m h_n^\dagger e^{-i(\omega_m - \omega_n)t}] \\ &= \frac{1}{\hbar} \sum_{n,m=1}^N \left(\frac{1}{\omega_m} + \frac{1}{\omega_n} \right) [h_n^\dagger h_m - h_m h_n^\dagger] e^{i(\omega_n - \omega_m)t} \end{aligned}$$

em que utilizou-se o fato de que os índices são mudos e trocamos os índices no último termo para finalmente chegar

$$H_{eff}^{(2)} = \sum_{n,m=1}^N \frac{1}{\hbar \bar{\omega}_{mn}} [h_n^\dagger, h_m] e^{i(\omega_n - \omega_m)t} \quad (\text{A.2.3})$$

onde

$$\frac{1}{\bar{\omega}_{mn}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_m} + \frac{1}{\omega_n} \right).$$

Com $\overline{H_I(t)} = 0$, o termo $H_{eff}^{(3)}$ se reduz a

$$H_{eff}^{(3)} = \frac{1}{2} \left\{ \overline{U_2^\dagger H_I} - \overline{H_I U_1 U_1} + \overline{H_I U_2} - \overline{U_1 U_1 H_I} \right\}, \quad (\text{A.2.4})$$

para obter finalmente

$$\begin{aligned} H_{eff}^{(3)} = & \frac{1}{\hbar^2} \sum_{n,m,k=1}^N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_k (\omega_m + \omega_k)} - \frac{1}{\omega_n (\omega_m - \omega_n)} \right) h_n^\dagger h_m h_k e^{i[\omega_n - (\omega_m + \omega_k)]t} \\ & + \frac{1}{\hbar^2} \sum_{n,m,k=1}^N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_k (\omega_m + \omega_k)} - \frac{1}{\omega_n (\omega_m - \omega_n)} \right) h_n h_m^\dagger h_k^\dagger e^{-i[\omega_n - (\omega_m + \omega_k)]t} \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{n,m,k=1}^N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_k (\omega_m - \omega_k)} + \frac{1}{\omega_n (\omega_m - \omega_n)} \right) h_n h_m^\dagger h_k e^{-i[\omega_n - (\omega_m - \omega_k)]t} \\ & + \frac{1}{\hbar^2} \sum_{n,m,k=1}^N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_n (\omega_n + \omega_m)} - \frac{1}{\omega_k (\omega_m - \omega_k)} \right) h_n^\dagger h_m^\dagger h_k e^{i[\omega_n + (\omega_m - \omega_k)]t} \\ & + \frac{1}{\hbar^2} \sum_{n,m,k=1}^N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_n (\omega_n + \omega_m)} - \frac{1}{\omega_k (\omega_m - \omega_k)} \right) h_n h_m h_k^\dagger e^{-i[\omega_n + (\omega_m - \omega_k)]t} \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{n,m,k=1}^N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_k (\omega_m - \omega_k)} + \frac{1}{\omega_n (\omega_m - \omega_n)} \right) h_n^\dagger h_m h_k^\dagger e^{i[\omega_n - (\omega_m - \omega_k)]t}. \end{aligned}$$

Seguimos a obtenção dos hamiltonianos efetivos usados na tese o para a realização das transições seletivas de dois e três fótons.

A.3 Transição efetiva de dois fótons

O hamiltoniano associado à configuração de níveis na Fig. 2.1.2, é dado por

$$H_0 = \omega a^\dagger a + \omega_g |g\rangle \langle g| + \omega_j |j\rangle \langle j| + \omega_e |e\rangle \langle e| + \omega_k |k\rangle \langle k|,$$

e

$$V = \lambda a (\sigma_{jg} + \sigma_{ej} + \sigma_{ke}) + \Omega \sigma_{gi} e^{-i\omega_L t} + H.c..$$

Na representação de interação se reescreve da seguinte forma

$$H_I = \lambda a (\sigma_{jg} e^{-i\Delta t} + \sigma_{ej} e^{i\Delta t} + \sigma_{ke} e^{-i\delta t}) + \Omega \sigma_{gi} e^{i\delta_L t} + H.c..$$

As frequências são dadas por $\omega_g = \omega_L + \delta_L$, $\omega_j = \omega_g + \omega - \Delta$, $\omega_e = \omega_g + 2\omega$ e $\omega_k = \omega_g + 3\omega - \delta$. Já que operamos sob o regime $\sqrt{n+1}\lambda \sim \Omega \ll \Delta, \delta, \delta_L$, a dinamica é regida pela Eq. (A.2.3). Em concordância com a Eq. (A.2.3) definimos os seguintes operadores

$$\begin{aligned} h_1 &= \lambda a \sigma_{jg}, & h_1^\dagger &= \lambda \sigma_{gj} a^\dagger, & \omega_1 &= \Delta, \\ h_2 &= \lambda a^\dagger \sigma_{je}, & h_2^\dagger &= \lambda \sigma_{ej} a, & \omega_2 &= \Delta, \\ h_3 &= \lambda a \sigma_{ke}, & h_3^\dagger &= \lambda \sigma_{ek} a^\dagger, & \omega_3 &= \delta, \\ h_4 &= \Omega \sigma_{ig}, & h_4^\dagger &= \Omega \sigma_{gi}, & \omega_4 &= \delta_L, \end{aligned}$$

portanto obtemos

$$\begin{aligned} H_{eff} &= \frac{\lambda^2}{\Delta} (\sigma_{gg} a^\dagger a - \sigma_{jj} a a^\dagger) + \frac{\lambda^2}{\Delta} (\sigma_{ee} a a^\dagger - \sigma_{jj} a^\dagger a) + \frac{\lambda^2}{\delta} (\sigma_{ee} a^\dagger a - \sigma_{kk} a a^\dagger) \\ &+ \frac{\Omega^2}{\delta_L} (\sigma_{gg} - \sigma_{ii}) + \frac{\lambda^2}{\Delta} (\sigma_{eg} a^2 + \sigma_{ge} (a^\dagger)^2). \end{aligned}$$

Já que os níveis $|i\rangle$, $|j\rangle$ e $|k\rangle$ não serão populados, podem ser eliminados adiabaticamente tal que

$$\begin{aligned} H_{eff} &= \frac{\lambda^2}{\Delta} \sigma_{gg} a^\dagger a + \frac{\lambda^2}{\Delta} \sigma_{ee} a a^\dagger + \frac{\lambda^2}{\delta} \sigma_{ee} a^\dagger a \\ &+ \frac{\Omega^2}{\delta_L} \sigma_{gg} + \frac{\lambda^2}{\Delta} (\sigma_{eg} a^2 + \sigma_{ge} (a^\dagger)^2), \end{aligned}$$

que reescrevemos finalmente como

$$\begin{aligned} H_{eff} &= (\chi_g a^\dagger a + \kappa_g) \sigma_{gg} + (\chi_e a^\dagger a + \kappa_e) \sigma_{ee} \\ &+ \frac{\lambda^2}{\Delta} (\sigma_{eg} a^2 + \sigma_{ge} (a^\dagger)^2), \end{aligned}$$

onde $\chi_g = \xi = \kappa_e = |\lambda|^2 / \Delta$, $\kappa_g = |\Omega|^2 / \delta_L$ e $\chi_e = (\delta + \Delta) |\lambda|^2 / \delta \Delta$.

A.4 Transição efetiva de três fótons

Para o processo de transições de três fótons no regime dispersivo onde $\sqrt{n+1}\lambda \ll$

$\Delta_1, \Delta_2, \delta$ e $\Omega \ll \delta_L$, é necessária a expansão até terceira ordem do hamiltoniano efetivo onde termos, por exemplo da forma $(h_n^\dagger h_m h_k)$ ($h \sim a$ ou $h \sim a^\dagger$), estão presentes para obter a forma desejada do hamiltoniano.

A condição $\Delta_2 > \delta > \Delta_1$, é suficiente para garantir que apenas os termos diagonais vão contribuir na correção de segunda ordem, enquanto que os termos não-diagonais são altamente oscilantes. Sob estas condições o termo de troca de três fótons entre átomo e campo decorre da correção de terceira ordem; e assim, o hamiltoniano de partida segunda Fig. 2.1.3, é dado por

$$\begin{aligned} H_0 &= \omega_g \sigma_{gg} + \omega_i \sigma_{ii} + \omega_f \sigma_{ff} + \omega_e \sigma_{ee} + \omega a^\dagger a \\ V &= \lambda a (\sigma_{ig} + \sigma_{fi} + \sigma_{ef}) + H.C.. \end{aligned}$$

Na representação de interação obtemos

$$H_I = \lambda \sigma_{ig} a e^{-i\Delta_1 t} + \lambda \sigma_{fi} a e^{-i\delta t} + \lambda \sigma_{ef} a e^{i\Delta_2 t} + \Omega \sigma_{ig} e^{-i\delta_L t} + H.C$$

em que, $\Delta_1 = \omega - \omega_{ig}$, $\Delta_2 = \omega_{ef} - \omega$ e $\delta = \omega - \omega_{fi} = \Delta_2 - \Delta_1$. Impondo $\Delta_2 > \delta > \Delta_1$, $\Delta_2, \Delta_1, \delta \gg \lambda$, e $\Omega \ll \delta_L$. Definimos agora os operadores

$$\begin{aligned} h_1 &= \lambda \sigma_{ig} a, & h_1^\dagger &= \lambda^* \sigma_{gi} a^\dagger, & \omega_1 &= \Delta_1, \\ h_2 &= \lambda \sigma_{fi} a, & h_2^\dagger &= \lambda^* \sigma_{if} a^\dagger, & \omega_2 &= \delta, \\ h_3 &= \lambda \sigma_{fe} a^\dagger, & h_3^\dagger &= \lambda^* \sigma_{ef} a, & \omega_3 &= \Delta_2, \\ h_4 &= \Omega \sigma_{ig}, & h_4^\dagger &= \Omega \sigma_{gi}, & \omega_4 &= \delta_L, \end{aligned}$$

levando em conta que $[h_1^\dagger, h_2] = [h_2^\dagger, h_1] = [h_3^\dagger, h_1] = [h_1^\dagger, h_3] = 0$; neste caso, os termos não oscilante que contribuirão no hamiltoniano H'_{eff} são:

$$\begin{aligned} H_{eff} &= \overline{H_I} + H_{eff}^{(2)} + H_{eff}^{(3)} \\ &= \frac{1}{\omega_1} [h_1^\dagger, h_1] + \frac{1}{\omega_2} [h_2^\dagger, h_2] + \frac{1}{\omega_3} [h_3^\dagger, h_3] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_3} \right) [h_2^\dagger, h_3] e^{i(\omega_2 - \omega_3)t} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_3} \right) [h_3^\dagger, h_2] e^{i(\omega_3 - \omega_2)t} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_1(\omega_2 + \omega_1)} - \frac{1}{\omega_3(\omega_2 - \omega_3)} \right) (h_3^\dagger h_2 h_1 + h_1^\dagger h_2^\dagger h_3) \end{aligned}$$

obviamente temos termos cruzados tais como $[h_2^\dagger, h_3]$, que fariam transições de segunda ordem, mas a condição $\Delta_2 > \delta > \Delta_1$ permite desprezar esses termos já que por exemplo $\omega_2 - \omega_3 = \Delta_1 - \Delta_2 = -\delta$ e $\delta \gg \lambda$ desprezando assim via aproximação onda girante tais termos. Portanto, a condição $\Delta_2 > \delta > \Delta_1$, é suficiente para garantir que apenas os termos diagonais vão contribuir na correção de segunda ordem. Pelo estabelecido acima e

usando a aproximação adiabática para eliminar os termos associados a $|i\rangle$ e $|f\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned}
 H_{eff} &= \frac{|\lambda|^2}{\Delta_1} \sigma_{gg} a^\dagger a + \frac{|\lambda|^2}{\Delta_2} (\sigma_{ee} a a^\dagger - \sigma_{ff} a^\dagger a) + \frac{\Omega^2}{\delta_L} \sigma_{gg} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta_1 (\Delta_2 - \Delta_1 + \Delta_1)} - \frac{1}{\Delta_2 (\Delta_2 - \Delta_1 - \Delta_2)} \right) |\lambda|^2 \left(\lambda \sigma_{eg} a^3 + \lambda^* \sigma_{ge} (a^\dagger)^3 \right) \\
 &= \frac{|\lambda|^2}{\Delta_1} \sigma_{gg} a^\dagger a + \frac{|\lambda|^2}{\Delta_2} \sigma_{ee} a a^\dagger \\
 &\quad + \frac{|\lambda|^2}{\Delta_1 \Delta_2} \left(\lambda \sigma_{eg} a^3 + \lambda^* \sigma_{ge} (a^\dagger)^3 \right).
 \end{aligned}$$

Finalmente temos

$$H'_{eff} = (\chi_g a^\dagger a + \kappa_g) \sigma_{gg} + \chi_e (a^\dagger a + 1) \sigma_{ee} + (\xi a^{\dagger 3} \sigma_{ge} + \xi^* a^3 \sigma_{eg}), \quad (\text{A.4.1})$$

com $\chi_g = |\lambda|^2 / \Delta_1$, $\kappa_g = |\Omega|^2 / \delta_L$, $\chi_e = |\lambda|^2 / \Delta_2$, e $\xi = \lambda |\lambda|^2 / (\Delta_1 \Delta_2)$.

Apêndice B

Duas cavidades acopladas interagindo com átomos de dois níveis

B.1 Cavidades acopladas

Consideremos um sistema de duas cavidades ($j = 1, 2$) espacialmente separadas por uma curta distância, pelo vácuo ou um material dielétrico, ondas evanescentes de uma cavidade interferem no campo da outra acoplando-as. Assumindo que o acoplamento seja dado pela sobreposição entre os campos das duas cavidades, o hamiltoniano de acoplamento é, em termos dos operadores de criação e aniquilação dos campos, na aproximação de onda girante (RWA):

$$H_{acop-cav} = \lambda \left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 \right),$$

em que λ é a constante de acoplamento. Então, o hamiltoniano total do sistema pode ser escrita como:

$$H_{cav} = \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2 + \lambda \left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 \right), \quad (\text{B.1.1})$$

em que ω_j é a frequência do modo da cavidade j . O hamiltoniano acima (B.1.1) pode ser diagonalizado para o caso ressonante ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) se utilizarmos novos operadores bosônicos A_1 e A_2 (modos normais do sistema), dados pela seguinte transformação canônica:

$$A_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_1^\dagger + a_2^\dagger \right),$$

e

$$A_2^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_1^\dagger - a_2^\dagger \right).$$

Então, O hamiltoniano para o sistema das cavidades acopladas em função dos modos normais fica

$$H_{cav} = \Omega_1 A_1^\dagger A_1 + \Omega_2 A_2^\dagger A_2, \quad (\text{B.1.2})$$

onde as frequências dos modos normais são: $\Omega_1 = \omega + \lambda$ e $\Omega_2 = \omega - \lambda$.

Esse modelo representa uma boa aproximação se as cavidades estiverem suficientemente separadas (acoplamento fraco, isto é $\omega \gg \lambda$) e o suficientemente próximas para que haja um acoplamento dos modos.

B.2 Interação com os átomos

Consideremos um átomo de dois níveis com frequência de transição ω_a atravessando por apenas uma das cavidades com constante de acoplamento Ω_0 . A interação entre o átomo e o campo na cavidade j ($j = 1, 2$) é, na aproximação de onda girante, descrita pelo modelo JC :

$$H_{a-c} = \Omega_0 \left(a_j \sigma_{eg}^{(j)} + \sigma_{ge}^{(j)} a_j^\dagger \right)$$

em que $\sigma_{eg}^{(j)}$ ($\sigma_{ge}^{(j)}$) é o operador de excitação (desexcitação) do átomo na cavidade j . Desta forma, o hamiltoniano total do sistema átomo-cavidade, em função dos modos normais e assumindo que o átomo esteja na cavidade j é

$$\begin{aligned} H = & \frac{\omega_a}{2} \sigma_z^{(j)} + \Omega_1 A_1^\dagger A_1 + \Omega_2 A_2^\dagger A_2 \\ & + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} \left(\left(A_1 + (-1)^{j+1} A_2 \right) \sigma_{eg}^{(j)} + \sigma_{ge}^{(j)} \left(A_1^\dagger + (-1)^{j+1} A_2^\dagger \right) \right) \end{aligned}$$

Na representação de interação, o hamiltoniano se reescreve da seguinte forma

$$\begin{aligned} H = & \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} \left(\left(A_1 e^{-i(\Omega_1 - \omega_a)t} + (-1)^{j+1} A_2 e^{-i(\Omega_2 - \omega_a)t} \right) \sigma_{eg}^{(j)} \right. \\ & \left. + \sigma_{ge}^{(j)} \left(A_1^\dagger e^{i(\Omega_1 - \omega_a)t} + (-1)^{j+1} A_2^\dagger e^{i(\Omega_2 - \omega_a)t} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2.1})$$

Impondo que $\Omega_2 = \omega_a$, a dependência temporal do hamiltoniano na Eq. (B.2.1) sera devido apenas pelas exponenciais com a fase $\phi = \Omega_1 - \omega_a = 2\lambda$. Mas, se consideramos que $\lambda \gg \Omega_0$ podemos usar a aproximação de onda girante para eliminar os termos que oscilam rapidamente (as exponenciais 2λ) e o hamiltoniano de interação fica

$$H = \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} (-1)^{j+1} \left[A_2 \sigma_{eg}^{(j)} + \sigma_{ge}^{(j)} A_2^\dagger \right]. \quad (\text{B.2.2})$$

O hamiltoniano (B.2.2) é equivalente a do modelo JC (com sinal oposto para $j = 2$, isto é, com o átomo na cavidade 2). Assim, fixando $\Omega_2 = \omega_a$ e no regime de $\lambda \gg \Omega_0$, a dinâmica do sistema pode ser facilmente determinada por analogia com o modelo de Jaynes-Cummings.

Apêndice C

Derivação física da equação mestra

Expormos aqui o trabalho de *B. G. Englert* (33) cujo método algebraico é totalmente diferente daqueles tradicionais expostos na literatura e que portanto deve ser considerado como um suplemento e não como um substituto. Consideremos átomos de dois níveis em ressonância com o modo de uma cavidade que entram e saem dela interagindo um por vez. Justo antes de entrar na cavidade o estado do sistema átomo-campo descrito pelo operador densidade é $\rho(t)$. Após do átomo ter interagido durante um tempo τ com a cavidade o estado do sistema quando o átomo sai da cavidade é

$$\rho(t + \tau) = e^{-iH_I\tau} \rho(t) e^{iH_I\tau}, \quad (\text{C.0.1})$$

em que $H_I = g(a\sigma_{eg} + \sigma_{ge}a^\dagger)$ é o hamiltoniano do modelo JC na representação de interação que governa a dinâmica do sistema átomo-campo. Consideremos o fator exponencial em suas componentes cossenoidal e senoidal assim

$$e^{iH\tau} = \cos(H_I\tau) + i \sin(H_I\tau),$$

onde

$$\begin{aligned} \sin(H_I\tau) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} (H_I\tau)^{2j+1} \\ &= \frac{a^\dagger \sin(\phi\sqrt{aa^\dagger})}{\sqrt{aa^\dagger}} \sigma_{ge} + \sigma_{eg} \frac{\sin(\phi\sqrt{aa^\dagger})}{\sqrt{aa^\dagger}} a \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cos(H_I\tau) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} (H_I\tau)^{2j} \\ &= \cos(\phi\sqrt{a^\dagger a}) \sigma_{gg} + \sigma_{ee} \cos(\phi\sqrt{aa^\dagger}), \end{aligned}$$

onde $\phi = g\tau$. Portanto, em termos da base dos estados atômicos $e^{iH\tau}$ pode se representar na forma matricial

$$e^{iH\tau} = \begin{pmatrix} \cos\left(\phi\sqrt{aa^\dagger}\right) & i\frac{\sin\left(\phi\sqrt{aa^\dagger}\right)a}{\sqrt{aa^\dagger}} \\ i\frac{a^\dagger\sin\left(\phi\sqrt{aa^\dagger}\right)}{\sqrt{aa^\dagger}} & \cos\left(\phi\sqrt{a^\dagger a}\right) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.0.2})$$

Lembramos que nosso objetivo é modelar o acoplamento do campo a um reservatório, e portanto desejamos identificar o efeito de muitos átomos que atravessam a cavidade (um a um), mas com cada átomo acoplado de forma muito fraca ao campo de cavidade. Isto significa que a fim de simular um ambiente para o modo da cavidade, para um valor pequeno de ϕ , apenas os termos de ordem mais baixa em ϕ são relevantes, portanto temos

$$e^{iH\tau} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\phi^2}{2}aa^\dagger & i\phi a \\ ia^\dagger\phi & 1 - \frac{\phi^2}{2}a^\dagger a \end{pmatrix}. \quad (\text{C.0.3})$$

Agora bem, estamos interessados em calcular o efeito total da interação com um átomo sobre o operador densidade associado à cavidade. Então, no instante final $t+\tau$ o operador densidade do campo é obtido por meio de

$$\rho_c(t+\tau) = \text{Tr}_{at} \{ \rho_c(t+\tau) \}. \quad (\text{C.0.4})$$

Se consideramos que o estado inicial do átomo é $|g\rangle$ ou seja

$$\rho(t) = \rho_c(t) \otimes \rho_{at}(t) = \rho_c(t) \otimes |g\rangle\langle g| = \rho_c(t) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \rho(t+\tau) &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\phi^2}{2}aa^\dagger & -i\phi a \\ -ia^\dagger\phi & 1 - \frac{\phi^2}{2}a^\dagger a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rho_c(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\phi^2}{2}aa^\dagger & i\phi a \\ ia^\dagger\phi & 1 - \frac{\phi^2}{2}a^\dagger a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -i\phi a \\ 1 - \frac{\phi^2}{2}a^\dagger a \end{pmatrix} \rho_c(t) \begin{pmatrix} ia^\dagger\phi & 1 - \frac{\phi^2}{2}a^\dagger a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi^2 a \rho_c(t) a^\dagger & -i\phi a \rho_c \left(1 - \frac{\phi^2}{2}a^\dagger a\right) \\ \left(1 - \frac{\phi^2}{2}a^\dagger a\right) \rho_c(t) ia^\dagger\phi & \rho_c(t) - \frac{\phi^2}{2}\rho_c(t) a^\dagger a - \frac{\phi^2}{2}a^\dagger a \rho_c(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.0.5}) \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} \rho_c(t+\tau) &= \text{Tr}_{at} \{ \rho(t+\tau) \} \\ &= \rho_c(t) + \phi^2 a \rho_c(t) a^\dagger - \frac{\phi^2}{2} \rho_c(t) a^\dagger a - \frac{\phi^2}{2} a^\dagger a \rho_c(t), \end{aligned}$$

permitindo enxergar que a variação de $\rho_c(t)$ como resultado da passagem de um único

átomo no estado fundamental é

$$\Delta\rho_c(t) = \rho_c(t + \tau) - \rho_c(t) = \frac{\phi^2}{2} (2a\rho_c(t)a^\dagger - \rho_c(t)a^\dagger a - a^\dagger a\rho_c(t)). \quad (\text{C.0.6})$$

Analogamente Se consideramos que o estado inicial do átomo for $|e\rangle$ ou seja

$$\rho(t) = \rho_c(t) \otimes \rho_{at}(t) = \rho_c(t) \otimes |e\rangle\langle e| = \rho_c(t) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \rho(t + \tau) &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\phi^2}{2}aa^\dagger & -i\phi a \\ -ia^\dagger\phi & 1 - \frac{\phi^2}{2}a^\dagger a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rho_c(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\phi^2}{2}aa^\dagger & i\phi a \\ ia^\dagger\phi & 1 - \frac{\phi^2}{2}a^\dagger a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\phi^2}{2}aa^\dagger \\ -ia^\dagger\phi \end{pmatrix} \rho_c(t) \begin{pmatrix} 1 - \frac{\phi^2}{2}aa^\dagger & i\phi a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\phi^2}{2}aa^\dagger\right)\rho_c(t) \begin{pmatrix} 1 - \frac{\phi^2}{2}aa^\dagger \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 - \frac{\phi^2}{2}aa^\dagger \end{pmatrix}\rho_c(t)i\phi a \\ -ia^\dagger\phi\rho_c(t) \begin{pmatrix} 1 - \frac{\phi^2}{2}aa^\dagger \end{pmatrix} & \phi^2 a^\dagger\rho_c(t)a \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{C.0.7})$$

então

$$\begin{aligned} \rho_c(t + \tau) &= \text{Tr}_{at}\{\rho(t + \tau)\} \\ &= \rho_c(t) + \phi^2 a^\dagger \rho_c(t) a - \frac{\phi^2}{2} \rho_c(t) aa^\dagger - \frac{\phi^2}{2} aa^\dagger \rho_c(t), \end{aligned}$$

de tal forma que a variação de $\rho_c(t)$ como resultado da passagem de um único átomo no estado excitado é

$$\Delta\rho_c(t) = \rho_c(t + \tau) - \rho_c(t) = \frac{\phi^2}{2} (2a^\dagger \rho_c(t) a - \rho_c(t) aa^\dagger - aa^\dagger \rho_c(t)). \quad (\text{C.0.8})$$

Átomos que chegam em tempos estatisticamente independentes, iram induzir uma taxa de variação do $\rho_c(t)$ que é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho_c(t) &= r_1\Delta_1\rho_c(t) + r_2\Delta_2\rho_c(t) \\ &= \frac{r_1\phi^2}{2} (2a\rho_c(t)a^\dagger - \rho_c(t)a^\dagger a - a^\dagger a\rho_c(t)) \\ &\quad + \frac{r_2\phi^2}{2} (2a^\dagger \rho_c(t) a - \rho_c(t) aa^\dagger - aa^\dagger \rho_c(t)), \end{aligned}$$

em que r_1 y r_2 , são as taxas de chegada dos átomos nos estados $|g\rangle$ e $|e\rangle$ respectivamente.