UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

LUIZ GUSTAVO ESMENARD ARRUDA

**Computação quântica baseada em medidas projetivas
em sistemas quânticos abertos**

São Carlos

2011

LUIZ GUSTAVO ESMENARD ARRUDA

**Computação quântica baseada em medidas projetivas
em sistemas quânticos abertos**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física do Instituto de Física de São Carlos da
Universidade de São Paulo para obtenção do título
de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. José Eduardo M. Hornos

Versão corrigida

São Carlos

2011

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Arruda, Luiz Gustavo Esmenard
Computação quântica baseada em medidas projetivas
em sistemas quânticos abertos / Luiz Gustavo Esmenard
Arruda; orientador José Eduardo Martinho Hornos -
versão corrigida -- São Carlos, 2011.
162 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos,
Universidade de São Paulo, 2011.

1. Sistemas quânticos abertos. 2. Descoerência. 3.
Computação quântica. 4. Estados de Cluster. 5.
Discórdia quântica. I. Hornos, José Eduardo Martinho,
orient. II. Título.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. José Eduardo Martinho Hornos pela paciência, pelas conversas esclarecedoras e pelos anos de tutela.

Ao meu amigo e colega de trabalho Prof. Dr. Felipe Fernandes Fanchini pela colaboração e incentivo, sem os quais essa tese jamais teria sido realizada.

Aos professores Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano e Dr. Amir Ordacgi Caldeira pelas conversas esclarecedoras, colaboração e dicas importantes que facilitaram a minha vida de doutorando.

Ao meu falecido pai, Carlos José Silveira Esmenard Arruda, e à minha mãe, Maria Cristina Arruda Mortatti, pelo incentivo.

À minha avó Zaira Silveira Esmenard Arruda pela colaboração e pelo incentivo que me foi proporcionado.

Ao meu amigo João Lucas Crepaldi que tanto me ajudou.

À minha amada companheira Ana Paula Araujo Caixeta por simplesmente estar ao meu lado.

E finalmente a todas as pessoas que formam o Instituto de Física de São Carlos.

RESUMO

ARRUDA, L. G. E. **Computação quântica baseada em medidas projetivas em sistemas quânticos abertos**. 2011. 162 p. Tese (Doutorado) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

Usamos um modelo exatamente solúvel para calcular a dinâmica da fidelidade de uma computação baseada em medidas projetivas cujo sistema interage com um meio ambiente comum que insere erros de fase. Mostramos que a fidelidade do estado de *Cluster* canônico oscila como função do tempo e, como consequência, a computação quântica baseada em medidas projetivas pode apresentar melhores resultados computacionais mesmo para um conjunto sequencial de medidas lentas. Além disso, apresentamos uma condição necessária para que a dinâmica da fidelidade de um estado quântico geral apresente um comportamento não-monotônico.

Palavras-chave: *Sistemas quânticos abertos. Descoerência. Computação quântica. Estados de Cluster. Discórdia quântica.*

ABSTRACT

ARRUDA, L. G. E. **Measurement-based quantum computation in open quantum systems**. 2011. 162 p. Thesis (Doctoral) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

We use an exact solvable model to calculate the gate fidelity dynamics of a measurement-based quantum computation that interacts with a common dephasing environment. We show that the fidelity of the canonical cluster state oscillates as a function of time and, as a consequence, the measurement-based quantum computer can give better computational results even for a set of slow measurement sequences. Furthermore, we present a necessary condition to the fidelity dynamics of a general quantum state presents a non-monotonical shape.

Keywords: *Open quantum systems. Decoherence. Quantum computation. Cluster States. Quantum discord*

LISTA DE FIGURAS

Figura 5.1 A dinâmica da fidelidade para os quatro estados de Bell $|\Phi^\pm\rangle$ (linha vermelha) e $|\Psi^\pm\rangle$ (linha verde), e, o comportamento não-monotônico da dinâmica da fidelidade para o estado emaranhado (5.32) (linha azul) e para o estado separável (5.34) (linha preta). Aqui, assumimos uma densidade espectral ôhmica de forma que $\Theta(t) = \eta\omega_c t - \eta \arctan(\omega_c t)$, e, no regime quântico $\tau_c < t < \tau_T$, $\Gamma(t, T) \approx \eta \ln(\omega_c t)$. Além disso, consideramos $\eta = 1/100$ e $\omega_c = 100$ 95

Figura 5.2 A dinâmica da fidelidade para o estado W (linha vermelha), para o estado GHZ (linha verde), e para o estado de *Cluster* (linha azul). Aqui, novamente assumimos uma densidade espectral ôhmica de forma que $\Theta(t) = \eta\omega_c t - \eta \arctan(\omega_c t)$ e $\Gamma(t, T) \approx \eta \ln(\omega_c t)$ no regime quântico de tempo ($\tau_c < t < \tau_T$). Além disso, consideramos $\eta = 1/100$ e $\omega_c = 100$ 97

Figura 5.3 Esquema ilustrativo dos dois cenários considerados. Em (a), a primeira medida projetiva é aplicada no primeiro qubit do estado (5.48) em $t = 0$, a segunda medida é aplicada no segundo qubit em $t = t_1$, a terceira medida é aplicada no terceiro qubit em $t = t_2$ e finalmente a quarta medida projetiva é aplicada no quarto qubit em $t = t_{final}$. Em (b), projetamos o primeiro qubit do estado (5.48) em $t = 0$ e depois de um intervalo de tempo as outras três medidas subsequentes são aplicadas instantaneamente, porém sequencialmente nos qubits 2, 3 e 4, em $t = t_{final}$. O resultado da computação, em ambos senários, é “impresso” no quinto qubit (em verde). 100

Figura 5.4 Em (a) e (b) mostramos a dinâmica da fidelidade do estado (5.50) nos regimes quântico e térmico, respectivamente. Em (a) podemos observar as oscilações que caracterizam o regime quântico quando o estado inicial é escrito como uma superposição coerente em termos dos autoestados do operador $\hat{\sigma}_z^T$ cujos autovalores são diferentes em módulo. Em (b) observamos o decaimento exponencial característico do regime térmico. Em ambos os casos consideramos uma densidade espectral ôhmica de forma que $\Theta(t) = \eta\omega_c t - \eta \arctan(\omega_c t)$ e $\Gamma(t, T) \approx \eta \left[2\omega_T t \arctan(2\omega_T t) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\omega_c^2 t^2}{1+4\omega_T^2 t^2} \right) \right]$. No regime quântico fizemos $\omega_c = 100$ e $\omega_T = 1$, porém, no regime térmico (em que $t > \tau_T$), fizemos $\omega_c = 1$ e $\omega_T = 100$. Em ambos os casos assumimos que $\eta = 1/100$ 102

Figura 5.5 Nesse gráfico, mostramos a dinâmica da fidelidade de uma porta lógica quântica do tipo NOT, usando o modelo de computação quântica baseada em medidas projetivas como função do intervalo de tempo t_{gap} , tanto para o regime quântico em (a) quanto para o regime térmico em (b), respectivamente. Em ambos os casos assumimos $\eta = 1/100$ e uma densidade espectral ôhmica com $\Theta(t) = \eta\omega_c t - \eta \arctan(\omega_c t)$ e $\Gamma(t, T) \approx \eta \left[2\omega_T t \arctan(2\omega_T t) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\omega_c^2 t^2}{1+4\omega_T^2 t^2} \right) \right]$. No regime quântico fizemos $\omega_c = 100$ e $\omega_T = 1$, porém, no regime térmico escolhemos $\omega_c = 1$ e $\omega_T = 100$ 104

Figura 6.1 A dinâmica da medida geométrica de emaranhamento para o estado de *Cluster* de 4 qubits interagindo com o meio externo coletivamente segundo o hamiltoniano (6.8). 114

Figura 6.2 Dinâmica da discórdia quântica analítica (D_1 , quadrados azul; D_2 , círculos vermelho) e a discórdia quântica numérica (linha cheia preta) como função da escala de tempo $\gamma_0 t$ para (a) um reservatório comum com $\lambda = 0,1\gamma_0$ e (b) reservatórios independentes com $\lambda = 0,01\gamma_0$. As linhas verticais tracejadas em (a) indicam os valores de $\gamma_0 t$ onde as mudanças súbitas acontecem. O estado inicial usado aqui é dado pela equação 6.37 com $\alpha^2 = 1/3$ 120

SUMÁRIO

1	Introdução	17
2	Fundamentos	25
2.1	O princípio da superposição	25
2.2	O bit quântico	26
2.3	Rotações arbitrárias em um único qubit	27
2.4	O operador densidade	29
2.4.1	O operador densidade para estados puros	31
2.4.2	O operador densidade para misturas estatísticas	34
2.4.3	Populações e Coerências	37
2.5	Comportamento dinâmico de um sistema quântico	39
2.6	A versão de interação	41
2.7	Correlações quânticas	43
2.7.1	O emaranhamento	44
2.7.2	A discórdia quântica	47
2.8	Medidas de distância	50
2.8.1	A fidelidade	51
2.8.2	A medida geométrica de emaranhamento	54
3	Computação quântica baseada em medidas projetivas	55
3.1	Classes não equivalentes de emaranhamento	56

3.2	O estado de <i>Cluster</i>	56
3.3	Rotações arbitrárias em um único qubit	61
3.4	Implementando um “bit-flip”	63
4	Sistemas quânticos abertos	67
4.1	A evolução temporal de sistemas abertos	68
4.2	A equação mestra de Lindblad	70
4.3	A equação mestra de Redfield	71
4.4	Aplicação das equações de Lindblad e Redfield	72
4.4.1	Aplicação da equação mestra de Lindblad	75
4.4.2	Aplicação da equação mestra de Redfield	77
5	Dinâmica exata da fidelidade	83
5.1	Dinâmica dissipativa exata	85
5.2	Oscilações na dinâmica da fidelidade	90
5.2.1	Dinâmica da fidelidade para estados de dois qubits	91
5.2.2	Dinâmica da fidelidade para estados de quatro qubits	96
5.3	Dinâmica da fidelidade de um <i>bit-flip</i> no modelo de computação baseada em medidas projetivas	99
6	Maximizações e a dinâmica de medidas de correlações quânticas	107
6.1	Método de convergência global para sistemas de equações não lineares . .	107
6.2	A dinâmica da medida geométrica de emaranhamento	110
6.3	A dinâmica não-Markoviana da discórdia quântica	115
6.3.1	Expressão analítica para a discórdia quântica	116
6.3.2	Dinâmica dissipativa exata para a discórdia quântica	118

7	Conclusão	123
	Referências	128
	Apêndices	128
A	Cálculos do capítulo 4	129
A.1	O Hamiltoniano de interação na versão de interação	129
A.2	Cálculo da função de partição	131
A.3	Cálculo das funções de correlação do meio ambiente	133
B	A dinâmica exata de dois qubits	139
C	Obtenção do propagador e da matriz densidade reduzida	145
C.1	O propagador	145
C.2	A evolução matriz densidade do sistema reduzido	149
D	Prova da relação usada no apêndice C	159
E	Prova do teorema usado no apêndice C	161

1 Introdução

Em 1965, Gordon Moore era o diretor do laboratório de pesquisa e desenvolvimento da divisão de semicondutores de uma empresa estadunidense de tecnologia, chamada de *Fairchild Camera and Instruments Corporation*. Essa divisão, conhecida por *Fairchild Semiconductors*, foi pioneira na produção do primeiro circuito integrado comercialmente disponível e se tornaria uma das grandes responsáveis pela evolução do Vale do Silício na década de 1960. Como sabemos, esses circuitos revolucionaram o mundo da eletrônica e são usados em quase todos os equipamentos eletrônicos. Eles são, basicamente, circuitos miniaturizados e são compostos principalmente de dispositivos manufaturados em superfícies finas de materiais semi-condutores. Em 19 de abril de 1965, Gordon Moore publicou um trabalho (1) que ficaria conhecido por suas extraordinárias previsões sobre o futuro do circuito integrado e sobre as maravilhas advindas da contínua integração de mais e mais componentes dentro de um mesmo circuito. Em suas previsões, o futuro co-fundador da empresa *Intel*, sugeriu que o número de transistores que cabem num circuito integrado dobraria a cada ano, que os custos de manufatura desses transistores cairiam à medida que mais e mais componentes desse tipo fossem integrados ao circuito, e, que a velocidade de processamento aumentaria. Entre as maravilhas tecnológicas que os circuitos integrados proporcionariam para a sociedade, Moore citou os computadores pessoais e equipamentos portáteis de comunicação, entre outras.

Embora a história tenha revelado que o número de transistores num circuito integrado dobra a cada 18 meses e não a cada 12 meses como previa Moore, hoje em dia sabemos que

os computadores pessoais e os telefones celulares são partes inextricáveis da estrutura da sociedade moderna. De qualquer forma, essa taxa de variação do número de transistores que são integrados ao circuito a cada ano e meio se tornou uma espécie de lei, a *Lei de Moore*. Essa lei trouxe consigo consequências dramáticas e inimagináveis, uma vez que impõe um limite físico para os componentes elementares que constituem os computadores modernos, os *bits**. Em 1950 eram necessários 10^{19} átomos para representar um único bit de informação, ou seja, 10 bilhões de bilhões de átomos. Entretanto, a lei de Moore prevê que em 2020 um bit será representado por um único átomo. Ora, a medida que os componentes se tornam cada vez menores, aproximando-se das dimensões atômicas, efeitos quânticos começam a interferir no funcionamento dos dispositivos eletrônicos. Assim, o paradigma da física clássica deixa de ser válido e deve ser substituído. Possivelmente, uma das consequências mais interessantes advindas da descrição quântica do mundo físico esteja relacionada com o primeiro postulado da mecânica quântica, o *princípio da superposição* (2). O princípio da superposição diz que o estado de um sistema físico pode ser escrito como uma combinação linear de outros estados e essa propriedade só existe no reino da mecânica quântica. Outro efeito quântico inusitado pode ser encontrado em sistemas físicos formados por pelo menos duas partes (podendo existir em sistemas formados por muitas partes). Essa propriedade, conhecida na literatura como *emaranhamento*, nos serve de recurso para um novo modo de se fazer e pensar em teoria da computação e

*O bit é um conceito fundamental em teoria da computação e informação clássica. Ele é a menor unidade de informação que pode ser armazenada ou transmitida num computador. A palavra bit foi introduzida por John Wilder Tukey (PhD em matemática pela universidade de Princeton) enquanto trabalhava com John von Neumann nos primeiros “designs” de computadores. Essa palavra foi criada para abreviar o termo da língua inglesa *binary digit*, que numa tradução literal significa dígito binário, já que o bit pode assumir, como o próprio nome sugere, somente dois valores (por exemplo: 0 ou 1, verdadeiro ou falso, ligado ou desligado). Fisicamente, o valor de um bit pode ser armazenado como uma carga elétrica acima ou abaixo de um nível padrão em um único capacitor dentro de um dispositivo de memória, porém, os bits podem ser representados fisicamente por uma variedade de outros meios e técnicas: através da luz (em fibras ópticas ou em leitores e gravadores de discos ópticos), através de ondas eletromagnéticas (em redes wireless) ou por meio de polarização magnética (em discos rígidos).

informação, a *teoria da computação e informação quântica* (3). Nesse novo paradigma, o elemento fundamental deixa de ser representado pelo bit e passa a ser representado por uma outra entidade, o *qubit*. O qubit, ou *quantum bit*, é o análogo quântico do bit clássico, e, como ele, é um sistema que pode ser bem representado por uma base bidimensional (isto é, uma base formada por dois estados), conhecida no contexto da teoria da computação e informação quântica por *base computacional* e cujos estados quânticos que a definem são autoestados do operador σ_z : $\sigma_z|0\rangle = +1|0\rangle$ e $\sigma_z|1\rangle = -1|1\rangle$. Assim como os bits clássicos podem ser representados fisicamente de maneiras variadas, o bit quântico também pode ser realizado usando-se muitos sistemas físicos distintos. Na verdade, todo sistema físico que possa ser representado por um sistema quântico de dois níveis é um possível candidato a essa função. Para citar alguns exemplos podemos mencionar as duas diferentes polarizações de um mesmo fóton, o alinhamento do spin nuclear na presença de um campo magnético uniforme, os dois estados de um elétron na órbita de um único átomo, etc.

Uma das maiores promessas de ganho tecnológico associadas a essa nova área de pesquisa é, sem dúvida alguma, a possibilidade de desenvolvimento de um computador qualitativamente diferente dos computadores baseados nos princípios clássicos da física. O *computador quântico* é baseado nos princípios da física quântica e, se um dia for realmente construído, ele será mais eficiente para resolver certos tipos de problemas (4–6) se comparado com os computadores clássicos. Nos dias de hoje, possuímos alguns modelos distintos para descrever computações quânticas sofisticadas. Um deles é baseado em operações unitárias de um único qubit aliadas a transformações unitárias controladas de múltiplos qubits. Esse modelo de computação quântica ficou conhecido como *modelo de circuitos quânticos*. O outro modelo de computação é baseado em medidas projetivas

de um único qubit, isto é, medidas projetivas locais, aplicadas num estado altamente emaranhado conhecido por *estado de cluster* (7). Esse modelo de computação quântica foi chamado de *computação quântica de uma única via* ou *computação quântica baseada em medidas projetivas*[†] (8, 9), pois, ele é inteiramente baseado em medidas projetivas ao invés de evoluções unitárias e, portanto, a computação é inerentemente irreversível no tempo. Embora ambos os modelos apresentem o mesmo poder computacional, eles diferem substancialmente em termos dos requisitos físicos exigidos para se realizar computação quântica universal[‡]. A computação quântica baseada em medidas projetivas tem sido objeto de estudos teóricos (10–12) e realizações experimentais (13–17), visto que as exigências técnicas para realizá-la podem ser muito mais simples se comparadas com os requisitos exigidos para a realização de computação quântica usando-se o modelo padrão de circuitos quânticos.

Entretanto, os processos dissipativos que emergem da inevitável interação entre os qubits que formam o computador quântico e o meio ambiente, continuam sendo um dos maiores problemas que devem ser superados antes de sermos capazes de manufaturar os primeiros computadores quânticos funcionais. A interação entre os qubits e o meio ambiente, que depende da arquitetura do computador quântico, é um problema crucial em *teoria de sistemas quânticos abertos* (18) e está longe de ser bem compreendida. Sistemas quânticos que não interagem com o mundo à sua volta são chamados de *sistemas quânticos fechados*. Por outro lado, no mundo real, não há um sistema perfeitamente fechado, exceto talvez o nosso universo como um todo. Logo, todo sistema quântico interage com o meio externo e essa interação causa, ao sistema, efeitos deletérios indesejáveis

[†]Conhecida na língua inglesa por *one-way quantum computation* ou *measurement-based quantum computation*.

[‡]Por computação quântica universal, entendemos que qualquer operação unitária num sistema de N qubits pode ser realizada com uma precisão arbitrária usando-se um conjunto apropriado de portas lógicas. Nesse caso dizemos que esse conjunto de portas lógicas é um conjunto universal.

em forma de *ruído* ou *descoerência*[§]. Um profundo entendimento sobre esses processos ruidosos em sistemas abertos se faz necessário para que possamos contorná-los, para um dia, quem sabe, construirmos sistemas que processem informação quântica de forma confiável. Na teoria de sistemas quânticos abertos podemos encontrar dois tipos de processos conceitualmente distintos: um deles é conhecido como processo Markoviano e o outro é conhecido simplesmente como processo não-Markoviano. Processos Markovianos são sempre associados à falta de memória do sistema aberto interagindo com o meio externo. Nesses processos o conhecimento de um certo estado quântico em um ponto no tempo $t = t_0$ é suficiente para determinar o estado em um outro ponto posterior no tempo $t > t_0$, ou seja, a dinâmica do estado só depende da sua configuração inicial. Por outro lado, processos não-Markovianos permitem o surgimento de efeitos de memória e, geralmente, a dinâmica de um estado em um certo tempo t depende de toda a sua história anterior e não apenas do tempo inicial.

Entre as classes de erros (ou classes de ruídos quânticos) que o sistema de interesse está sujeito quando interage com o meio externo, podemos citar as mais estudadas: a classe de *erros de fase*, de *erros de bit-flip* e de *erros de amplitude*. Erros de fase são processos que descrevem a perda de informação quântica sem perdas de energia, pois, esse tipo de ruído danifica somente a fase existente entre os elementos que se superpõem quanticamente para formar o estado do sistema. O erro de fase está relacionado com o operador σ_z , que é chamado no contexto da teoria da computação e informação quântica de operador de fase, uma vez que a aplicação desse operador no estado $|0\rangle$ o deixa invariante mas a aplicação desse operador no estado $|1\rangle$ o leva para o mesmo estado, porém, com uma fase adicional, ou seja, $-|1\rangle$, o que justifica o nome do operador. Os autoestados do Hamiltoniano do

[§]A palavra descoerência, ou decoerência, é uma tradução da palavra inglesa *decoherence*, que significa perda de coerência e está relacionada com a perda das propriedades quânticas do sistema de interesse.

sistema não mudam com o tempo mas acumulam fase que é proporcional aos respectivos autovalores. Quando um sistema evolui por um período de tempo na presença de ruído de fase, a fase relativa entre os autoestados da energia é perdida. O erro de bit-flip é um processo que induz a troca incoerente de energia entre o sistema de interesse e o meio ambiente. Essa dinâmica “vira” o estado do qubit de $|0\rangle$ para $|1\rangle$ e vice versa, ou seja, ela está relacionada com a inversão de população do operador densidade. Esse erro pode ser representado pelo operador σ_x pois a aplicação desse operador no estado $|0\rangle$ o leva para o estado $|1\rangle$ e a aplicação no estado $|1\rangle$ resulta no estado $|0\rangle$. O erro de amplitude, assim como o erro de bit-flip, causa dissipação de energia no sistema de interesse. O acoplamento entre o sistema e o meio ambiente se dá por meio do operador $\sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)$.

Nessa tese escolhemos como objeto de estudo os sistemas abertos. Inicialmente, consideramos um sistema formado por N qubits interagindo coletivamente com um meio ambiente que insere na dinâmica dos qubits um erro de fase. Primeiramente, investigamos a dinâmica do sistema de interesse usando duas equações mestras: a equação mestra de Lindblad e a equação mestra de Redfield. A equação mestra de Redfield, ao contrário da equação mestra de Lindblad, foi derivada sem considerarmos aproximações Markovianas. Aplicamos os resultados em três estados iniciais de quatro qubits emaranhados que são os representantes canônicos de três classes de emaranhamento não equivalentes: a classe dos estados W , a classe dos estados GHZ e a classe dos estados de *Cluster*. Com a intenção de compararmos os diferentes resultados obtidos, calculamos a dinâmica da fidelidade entre o estado inicial e o estado evoluído. No caso da evolução Markoviana dada pela equação mestra de Lindblad, obtivemos dois comportamentos diferentes. O estado W apresentou uma dinâmica da fidelidade constante, mostrando que esse estado é livre de descoerência para o tipo de interação considerada, e, as dinâmicas das fidelidades do estado GHZ

e de *Cluster* decaem exponencialmente no tempo, mostrando que esses estados perdem coerência de forma monotônica a medida que o tempo passa. Por outro lado, no caso da evolução não-Markoviana dada pela equação mestra de Redfield, obtivemos um comportamento diferente para a dinâmica da fidelidade do estado de *Cluster*. Observamos um comportamento não-monotônico de natureza oscilatória e obtivemos uma condição necessária para o aparecimento dessas oscilações. Posteriormente, motivados pelas discrepâncias observadas entre as evoluções Markoviana e não-Markoviana da dinâmica da fidelidade do estado de *Cluster*, decidimos calcular a dinâmica exata do mesmo sistema de N qubits interagindo coletivamente com o mesmo meio ambiente para novamente compararmos o resultado aplicando-o nos mesmos estados iniciais. Os resultados obtidos da dinâmica exata são idênticos aos encontrados na dinâmica aproximada dada pela equação de Redfield, mostrando que no regime de tempo e temperatura considerados esse sistema não pode ser descrito através de uma evolução Lindbladiana. Além disso, reintroduzimos a condição necessária para que a fidelidade do sistema apresente um comportamento não-monotônico de uma forma diferente da apresentada anteriormente. O nosso método revela que essas características não dependem do emaranhamento inicial do sistema em questão; na realidade, essa propriedade está conectada apenas com a geometria do estado inicial. De fato, para qualquer estado inicial (emaranhado ou separável) dado por uma superposição de autoestados do operador de Pauli total do sistema de interesse, $\hat{\sigma}_z^T$, cujos autovalores são diferentes em módulo, a fidelidade exibe um caráter não-monotônico. Mostramos ainda que essa característica oscilatória trás consigo implicações cruciais para a computação baseada em medidas projetivas; sob a ação de um meio ambiente comum que insere erro de fase no sistema usado como recurso para a execução da computação, a fidelidade da computação pode apresentar valores altos mesmo para sequências de medi-

das “lentas” ou espaçadas temporalmente. Isso implica num resultado surpreendente, em que medidas aplicadas de propósito em tempos posteriores e bem determinados podem apresentar resultados melhores se comparados com medidas feitas em tempos anteriores e mal escolhidos. Ilustramos nossos achados examinando o comportamento da fidelidade de uma porta quântica do tipo NOT dentro do modelo de computação baseada em medidas projetivas.

Na segunda parte desta tese, descrevemos as nossas experiências com métodos numéricos para maximizações de um conjunto de funções não lineares. Aplicamos o nosso algoritmo baseado no *método de convergência global para sistemas de equações não lineares* (19) em dois casos distintos. Em um deles consideramos a medida geométrica de emaranhamento para sistemas de 4 qubits e no outro consideramos a discórdia quântica para sistemas de 2 qubits (20). Em ambos os casos o sistema formado pelos qubits também interage com o meio externo.

2 Fundamentos

Por questões didáticas, dedicamos à primeira parte desta tese um capítulo inteiro contendo apenas os fundamentos utilizados em teoria de informação e computação quântica, onde uma digressão sobre os conceitos mais básicos, porém fundamentais para uma completa compreensão do assunto, é apresentada.

2.1 O princípio da superposição

Sabemos que a descrição quântica de um sistema físico é fundamentada em alguns poucos postulados e, atualmente, a álgebra linear é o ramo da matemática usado para descrever essa teoria e suas peculiaridades (2). Entre os postulados da mecânica quântica existe um, porém, que merece maior atenção devido a sua consequência mais inusitada. O postulado que reza que todo estado de um sistema físico é definido completamente através de um vetor (o *vetor de estado*) pertencente a um espaço vetorial munido de um produto escalar (o *espaço de Hilbert*) leva, inevitavelmente, ao que conhecemos por *princípio da superposição*. Em outras palavras, o princípio da superposição é uma consequência direta do fato de descrevermos estados quânticos em termos dessas entidades matemáticas que satisfazem as propriedades que definem os elementos de um espaço vetorial. Podemos caracterizar o princípio da superposição da seguinte forma: sejam $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle$ vetores de estado pertencentes a um espaço de Hilbert qualquer $\mathcal{H}$, então o estado $|\psi\rangle =$

$\sum_{i=1}^n c_i |\varphi_i\rangle$ também é um vetor de estado pertencente ao espaço $\mathcal{H}$, onde os coeficientes c_i são números complexos e doravante serão chamados de amplitudes de probabilidade. Portanto, qualquer estado quântico pode ser escrito como uma combinação linear de outros estados quânticos. A superposição coerente de estados quânticos desempenha um papel de destaque na teoria da computação e da informação quântica como veremos adiante.

2.2 O bit quântico

O conceito (e a entidade) mais fundamental em ciência da informação é o *bit*. O bit é um sistema que carrega dois valores possíveis: 0 e 1. Em sua realização clássica, o bit (que poderia muito bem ser imaginado como sendo uma lâmpada) é um sistema desenhado para possuir dois estados distinguíveis (lâmpada acesa e lâmpada apagada).

O análogo quântico do bit é o bit quântico, ou *qubit*. O qubit é caracterizado por um sistema quântico de dois níveis e qualquer sistema físico que possua pelo menos dois níveis quânticos pode ser usado para realizar a sua função. Assim como os bits clássicos, os qubits possuem dois estados que podemos identificar pelos estados quânticos $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Entretanto, os qubits são essencialmente diferentes dos bits clássicos, pois o estado de um qubit qualquer sempre pode ser escrito como uma combinação linear do tipo

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.1)$$

onde as amplitudes de probabilidade são normalizadas, isto é, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Isto não significa que o qubit assume valores entre 0 e 1, mas sim, que o qubit se encontra numa superposição coerente de dois estados e se medirmos o qubit, nós o encontraremos

no estado $|0\rangle$ com probabilidade $|\alpha|^2$ ou no estado $|1\rangle$ com probabilidade $|\beta|^2$. Aqui nós seguiremos a convenção usada na referência (3) e atribuiremos as seguintes matrizes coluna aos estados da chamada base computacional

$$|0\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

A base formada pelos vetores acima é ortonormal e a ela é associado um espaço de Hilbert bidimensional. Além disso, os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são autoestados do operador de Pauli $\hat{\sigma}_z$ com autovalores ± 1 , ou seja,

$$\hat{\sigma}_z|0\rangle = 1|0\rangle \quad \hat{\sigma}_z|1\rangle = -1|1\rangle. \quad (2.3)$$

Os operadores de Pauli $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ e $\hat{\sigma}_z$ participam da descrição de sistemas desse tipo e satisfazem as seguintes relações de comutação e anti-comutação, respectivamente,

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k, \quad (2.4)$$

$$\{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j\} = \hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_i = 2\delta_{ij}. \quad (2.5)$$

Na base computacional, os operadores de Pauli $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ e $\hat{\sigma}_z$ possuem as seguintes representações matriciais:

$$\hat{\sigma}_x \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y \doteq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

2.3 Rotações arbitrárias em um único qubit

Nesta seção consideraremos certas operações sobre o sistema quântico mais simples de todos – um único qubit. Essas operações preservam a norma do vetor de estado que

caracteriza o qubit, ou seja, essas operações são rotações que preservam a relação $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Operações desse tipo são representadas por matrizes unitárias 2×2 , e o grupo de simetria associado a essas matrizes é o grupo $SU(2)$. As matrizes de Pauli dadas em (2.6) são exemplos de matrizes unitárias. Além de unitárias elas também são hermitianas e a exponenciação dessas matrizes originam três classes de matrizes unitárias que representam três classes de operações de rotação em torno dos eixos $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$, respectivamente. As seguintes equações definem essas operações de rotação

$$\hat{U}_x(\theta) \equiv e^{-i\theta\hat{\sigma}_x/2} = \hat{I} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\hat{\sigma}_x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \doteq \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\hat{U}_y(\theta) \equiv e^{-i\theta\hat{\sigma}_y/2} = \hat{I} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\hat{\sigma}_y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \doteq \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\hat{U}_z(\theta) \equiv e^{-i\theta\hat{\sigma}_z/2} = \hat{I} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\hat{\sigma}_z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \doteq \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

onde $\hat{I}$ é a matriz identidade em duas dimensões. Se $\hat{n}$ é um vetor tridimensional real de módulo unitário, então podemos definir uma rotação de ângulo θ em torno do eixo definido por $\hat{n}$ pela equação

$$\hat{U}_{\hat{n}}(\theta) \equiv e^{-i\theta\hat{n}\cdot\vec{\sigma}/2} = \hat{I} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (2.10)$$

com $\vec{\sigma} = \hat{\sigma}_x\hat{x} + \hat{\sigma}_y\hat{y} + \hat{\sigma}_z\hat{z}$. A rotação dada em (2.10) caracteriza a transformação unitária mais geral que se pode operar em um único qubit. Por outro lado, uma operação unitária arbitrária em um único qubit pode assumir outras formas e pode ser escrita, por exemplo, como uma composição de rotações, formando uma rotação na representação de Euler

$$\hat{U}_R(\xi, \eta, \zeta) = \hat{U}_x(\zeta) \hat{U}_z(\eta) \hat{U}_x(\xi), \quad (2.11)$$

onde ξ , η , ζ são os ângulos de Eüler.

2.4 O operador densidade

O operador densidade é uma ferramenta matemática que facilita a aplicação dos postulados da mecânica quântica e o cálculo das probabilidades, quando tratamos de sistemas físicos cujos estados não são perfeitamente conhecidos. Esse operador é representado por uma matriz hermitiana, positiva, chamada de matriz densidade. Quando possuímos toda informação sobre um dado sistema, ou mais rigorosamente sobre um *ensemble** de N sistemas idênticos (onde N é um número muito grande), isto é, quando o estado do sistema é perfeitamente conhecido, podemos descrever esse sistema através de um vetor de estado, ou seja, um estado puro que é bem representado por uma superposição coerente de estados quânticos,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i c_i(t) |\varphi_i\rangle. \quad (2.12)$$

Entretanto, na prática, é comum nos depararmos com situações onde existe uma certa ignorância acêrca do estado do sistema, e assim se faz necessária uma descrição estatística onde podemos incorporar ao formalismo o fato de possuímos apenas uma parte da informação e ao mesmo tempo fazer máximo uso da informação que dispomos em nossas previsões. O estado do sistema é então descrito através de um conceito conhecido por mistura estatística, que nada mais é que uma mistura de estados quânticos puros aos quais se associam probabilidades clássicas de ocorrência. Por exemplo, imaginemos que o

*Palavra de origem francesa para designar um número de elementos considerado como um grupo.

nosso ensemble não seja formado por N sistemas idênticos (isto é, não seja um ensemble puro) mas ao invés ele seja formado por N sistemas dos quais n_j se encontram no estado puro $|\psi_j\rangle$ para $j = 1, 2, \dots, k$. Assim, o ensemble é descrito por k estados puros $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_k\rangle$ e k números de elementos $n_1, n_2, \dots, n_k$ (um ensemble misto). Portanto, a informação parcial que possuímos sobre o sistema é traduzida no formalismo da mecânica quântica da seguinte forma: o estado do sistema se encontra no estado puro $|\psi_1\rangle$ com probabilidade $p_1 = n_1/N$, no estado puro $|\psi_2\rangle$ com probabilidade $p_2 = n_2/N$ e assim por diante, onde

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = \sum_i p_i = 1. \quad (2.13)$$

Em outras palavras, apelamos para o conceito de probabilidade para expor a nossa ignorância acerca do estado do sistema e associamos à probabilidade $p_k = n_k/N$ a chance de encontrarmos o sistema no estado puro $|\psi_k\rangle$. A descrição do sistema quântico em termos do operador densidade caracteriza completamente o ensemble misto levando em conta as suas propriedades estatísticas. Em termos do operador densidade podemos reescrever, numa forma compacta, as equações que descrevem a natureza do sistema físico, como por exemplo as probabilidades associadas com medidas, os valores médios de observáveis e a evolução temporal do sistema (veja a seção 2.5 para maiores detalhes sobre a evolução temporal de estados quânticos).

Nas próximas subseções introduziremos a formulação quântica do operador densidade. Na subseção 2.4.1, examinaremos o operador densidade para o caso mais simples onde o estado do sistema é perfeitamente conhecido, ou seja, o sistema é bem representado por um estado puro e todas as probabilidades na soma (2.13) são nulas, com exceção de uma única probabilidade que é igual a 1. Na subseção 2.4.2 examinaremos o operador densidade para caso mais geral onde o estado do sistema não é perfeitamente conhecido,

ou seja, o sistema deve ser representado por uma mistura estatística de estados puros.

2.4.1 O operador densidade para estados puros

Suponha que o estado de um sistema físico qualquer seja um estado puro dado pela equação (2.12) e considere o seguinte operador projetor $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ notando que, para uma base ortonormal $\{|\varphi_k\rangle\}$, isto é, $\langle\varphi_k|\varphi_l\rangle = \delta_{k,l}$, os seus elementos de matriz são dados como se segue

$$\begin{aligned}\rho_{m,n} &= \langle\varphi_m|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\varphi_n\rangle = \sum_{k,l} c_k(t) c_l(t)^* \langle\varphi_m|\varphi_k\rangle\langle\varphi_l|\varphi_n\rangle \\ &= \sum_{k,l} c_k(t) c_l(t)^* \delta_{m,k} \delta_{l,n} = c_m(t) c_n(t)^*.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Dessa forma, podemos convenientemente definir o operador densidade como sendo o projetor

$$\hat{\rho} = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|, \quad (2.15)$$

pois essa escolha caracteriza completamente o estado do sistema e é totalmente equivalente ao formalismo descrito pelo vetor de estado, uma vez que em termos do operador densidade a normalização da probabilidade é expressa por

$$\begin{aligned}\sum_n |c_n(t)|^2 &= \sum_n c_n(t) c_n(t)^* = \sum_n \langle\varphi_n|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\varphi_n\rangle \\ &= \sum_n \langle\varphi_n|\hat{\rho}|\varphi_n\rangle = \sum_n \rho_{n,n}(t) = 1 \\ &\Rightarrow \text{Tr}[\hat{\rho}(t)] = 1,\end{aligned}\quad (2.16)$$

(onde o *traço*[†] de uma matriz é uma função matricial definida como sendo a soma dos elementos da sua diagonal) o valor médio de um observável $\hat{A}$ qualquer é dado por

$$\begin{aligned}\langle \hat{A}(t) \rangle &= \sum_{m,n} c_m(t)^* c_n(t) A_{m,n} = \sum_{m,n} \langle \varphi_n | \hat{\rho}(t) | \varphi_m \rangle \langle \varphi_m | \hat{A} | \varphi_n \rangle = \sum_n \langle \varphi_n | \hat{\rho}(t) \hat{A} | \varphi_n \rangle \\ &\Rightarrow \langle \hat{A}(t) \rangle = \text{Tr} [\hat{\rho} \hat{A}],\end{aligned}\quad (2.17)$$

(onde usamos a relação de completeza $\sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = 1$) e, a evolução temporal do estado do sistema pode ser deduzida da equação de Schrödinger e obedece a seguinte equação

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) &= \left(\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right) \langle \psi(t)| + |\psi(t)\rangle \left(\frac{d}{dt} \langle \psi(t)| \right) \\ &= \frac{1}{i\hbar} \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| + \frac{1}{(-i\hbar)} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \hat{H}(t) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)].\end{aligned}\quad (2.18)$$

Para uma descrição completa do estado quântico de um sistema em termos do operador densidade, devemos ainda mostrar como se calcula as probabilidades $\mathcal{P}(a_n)$ de se obter os resultados a_n quando medimos o observável $\hat{A}$ no tempo t . Sabemos que para o caso de espectros discretos e não degenerados

$$\mathcal{P}(a_n) = |\langle \varphi_n | \psi(t) \rangle|^2. \quad (2.19)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(a_n) &= \langle \varphi_n | \psi(t) \rangle \langle \varphi_n | \psi(t) \rangle^* = \langle \varphi_n | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_m \langle \varphi_n | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \varphi_m \rangle \langle \varphi_m | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_m \langle \varphi_m | \underbrace{\varphi_n \langle \varphi_n |}_{\hat{P}_n} \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \varphi_m \rangle \\ &= \sum_m \langle \varphi_m | \hat{P}_n \hat{\rho}(t) | \varphi_m \rangle\end{aligned}$$

[†]O traço de uma matriz é *cíclico*, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, e *linear*, $\text{Tr}(A+B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$ e $\text{Tr}(zA) = z \text{Tr}(A)$, onde A e B são matrizes quaisquer e z é um número complexo arbitrário. Além do mais, pela propriedade cíclica segue que o traço de uma matriz é invariante com relação a transformações unitárias de similaridade já que $\text{Tr}(UAU^\dagger) = \text{Tr}(U^\dagger UA) = \text{Tr}(A)$. Portanto, o traço de um operador é bem definido, pois essa função não depende da base no qual o operador está sendo representado.

$$\Rightarrow \mathcal{P}(a_n) = \text{Tr} \left[\hat{P}_n \hat{\rho}(t) \right], \quad (2.20)$$

onde $\hat{P}_n = |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$ é o operador projetor que projeta o estado do sistema no estado $|\varphi_n\rangle$.

Para o caso de espectros degenerados, sabemos que

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_{i=1}^g \left| \langle \varphi_n^i | \psi(t) \rangle \right|^2, \quad (2.21)$$

onde g é o grau da degenerescência. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a_n) &= \sum_{i=1}^g \langle \varphi_n^i | \psi(t) \rangle \langle \varphi_n^i | \psi(t) \rangle^* = \sum_{i=1}^g \langle \varphi_n^i | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \varphi_n^i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^g \sum_m \langle \varphi_n^i | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \varphi_m \rangle \langle \varphi_m | \varphi_n^i \rangle \\ &= \sum_m \langle \varphi_m | \underbrace{\sum_{i=1}^g |\varphi_n^i\rangle\langle\varphi_n^i|}_{\hat{P}_n} \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \varphi_m \rangle \\ &= \sum_m \langle \varphi_m | \hat{P}_n \hat{\rho}(t) | \varphi_m \rangle \\ &\Rightarrow \mathcal{P}(a_n) = \text{Tr} \left[\hat{P}_n \hat{\rho}(t) \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde agora $\hat{P}_n = \sum_{i=1}^g |\varphi_n^i\rangle\langle\varphi_n^i|$ é o projetor que projeta o estado do sistema no subespaço degenerado $\mathcal{H}_n$ formado pelos estados $\{|\varphi_n^i\rangle\}$ com $i = 1, \dots, g$.

A seguir apresentaremos algumas propriedades do operador densidade para estados puros. Em primeiro lugar sabemos que projetores formam uma importante classe de operadores hermitianos, logo, como o operador densidade para estados puros é um projetor, ele é também um operador hermitiano

$$\hat{\rho}^\dagger(t) = \hat{\rho}(t). \quad (2.23)$$

Além disso, o operador densidade é formado por uma outra classe especial de operadores hermitianos, os chamados operadores positivos. Um operador positivo $\hat{A}$ é definido como sendo um operador tal que para qualquer vetor $|v\rangle$, $\langle v | \hat{A} | v \rangle$ é um número real e não

negativo. Como $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, então $\langle v|\hat{\rho}|v\rangle = \langle v|\psi\rangle\langle\psi|v\rangle = \langle v|\psi\rangle\langle v|\psi\rangle^* = |\langle v|\psi\rangle|^2 \geq 0$, logo $\hat{\rho}$ é positivo. Lembrando que todo projetor Π satisfaz a propriedade $\Pi^2 = \Pi$, chegamos à seguinte conclusão

$$[\hat{\rho}(t)]^2 = \hat{\rho}(t), \quad (2.24)$$

o que implica num resultado importante em se tratando de estados puros

$$\text{Tr} [\hat{\rho}^2] = 1. \quad (2.25)$$

A propriedade (2.25) é usada como critério para se decidir se um estado é puro ou misto pois, como veremos adiante, para estados mistos a propriedade (2.24) não é mais válida e, conseqüentemente, o resultado (2.25) não é mais verdadeiro.

2.4.2 O operador densidade para misturas estatísticas

Agora vamos considerar o caso mais geral do qual possuímos apenas uma parte da informação acêrca do estado do sistema, isto é, não conhecemos o estado do sistema perfeitamente. Em outras palavras, o sistema deve ser representado por uma mistura estatística de estados puros (ensemble misto). Nesse caso as probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_k$ satisfazem a equação (2.13) e estão contidas no seguinte intervalo semiaberto

$$0 \leq p_1, p_2, p_3, \dots, p_k < 1. \quad (2.26)$$

Nesse novo cenário podemos nos perguntar como se calcula a probabilidade $\mathcal{P}(a_n)$ de se medir um observável $\hat{A}$ e obter como resultado o valor a_n , ou ainda, como se calcula o valor médio desse observável e se a normalização da probabilidade é satisfeita; podemos

ainda nos questionar a respeito da evolução temporal de sistemas representados por tais misturas estatísticas. Para responder a essas questões vamos considerar a probabilidade de se obter o resultado a_n , quando medimos o observável $\hat{A}$, se o vetor de estado for $|\psi_j\rangle$, isto é,

$$\mathcal{P}_j(a_n) = \langle \psi_j | \hat{P}_n | \psi_j \rangle = |c_j|^2. \quad (2.27)$$

Então, para se obter a probabilidade desejada $\mathcal{P}(a_n)$ devemos levar em conta o peso associado ao estado $|\psi_j\rangle$ e somar sobre todos os j 's

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_{j=1}^k p_j \mathcal{P}_j(a_n). \quad (2.28)$$

Pela equação (2.22)

$$\mathcal{P}_j(a_n) = \text{Tr} \left[\hat{P}_n \hat{\rho}_j(t) \right], \quad (2.29)$$

onde $\hat{\rho}_j = |\psi_j\rangle \langle \psi_j|$ é o operador densidade associado ao estado $|\psi_j\rangle$. Substituindo a equação (2.29) na equação (2.28) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a_n) &= \sum_j p_j \text{Tr} \left[\hat{P}_n \hat{\rho}_j(t) \right] = \sum_j p_j \sum_m \langle \varphi_m | \hat{P}_n \hat{\rho}_j | \varphi_m \rangle \\ &= \sum_m \langle \varphi_m | \sum_j \left(p_j \hat{P}_n \hat{\rho}_j \right) | \varphi_m \rangle = \text{Tr} \left[\sum_j \left(p_j \hat{P}_n \hat{\rho}_j \right) \right] \\ &= \text{Tr} \left[\hat{P}_n \sum_j (p_j \hat{\rho}_j) \right] = \text{Tr} \left[\hat{P}_n \hat{\rho} \right], \end{aligned} \quad (2.30)$$

desde que

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j \hat{\rho}_j = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|. \quad (2.31)$$

A equação (2.31) define o operador densidade para estados mistos. Embora o operador $\hat{\rho}$ assim definido não seja um projetor ele continua sendo um operador hermitiano

$$\hat{\rho}^\dagger = \left(\sum_j p_j \hat{\rho}_j \right)^\dagger = \sum_j p_j^* \hat{\rho}_j^\dagger = \sum_j p_j \hat{\rho}_j = \hat{\rho}, \quad (2.32)$$

pois $p_j \in \Re$ e $\hat{\rho}_j = \hat{\rho}_j^\dagger$. Por outro lado, ele não goza da propriedade (2.25) já que a propriedade (2.24) (satisfeita por qualquer projetor) não é mais verdadeira (logo $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$ para estados mistos) o que implica em

$$\text{Tr} [\hat{\rho}^2] \leq 1, \quad (2.33)$$

onde a igualdade só é válida para estados puros. Porém, o operador definido em (2.31) satisfaz a condição de normalização da probabilidade

$$\text{Tr} [\hat{\rho}] = \text{Tr} \left[\sum_j p_j \hat{\rho}_j \right] = \sum_j p_j \text{Tr} [\hat{\rho}_j] = \sum_j p_j = 1. \quad (2.34)$$

Vejamos como generalizar o cálculo do valor médio de um observável qualquer $\hat{A}$. Seja $\langle \hat{A} \rangle = \sum_n a_n \mathcal{P}(a_n)$, então

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_n a_n \text{Tr} [\hat{P}_n \hat{\rho}] = \text{Tr} \left[\sum_n a_n \hat{P}_n \hat{\rho} \right]. \quad (2.35)$$

Por outro lado,

$$\hat{A} = \hat{A} \hat{I} = \sum_n \hat{A} |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n| = \sum_n a_n |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n| = \sum_n a_n \hat{P}_n, \quad (2.36)$$

logo

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr} [\hat{\rho} \hat{A}] = \text{Tr} [\hat{A} \hat{\rho}]. \quad (2.37)$$

Para se calcular a evolução temporal do operador densidade devemos notar que se o sistema num certo instante de tempo t_0 possui uma probabilidade p_j de estar no estado $|\psi_j\rangle$, então num dado instante subsequente t ele possui a mesma probabilidade p_j de estar no estado evoluído $|\psi_j(t)\rangle$, onde (dado que a evolução seja unitária)

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_j(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi_j(t)\rangle. \quad (2.38)$$

O operador densidade no instante t fica:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_j p_j \hat{\rho}_j(t), \quad (2.39)$$

com $\hat{\rho}_j(t) = |\psi_j(t)\rangle\langle\psi_j(t)|$. Sabemos que

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\rho}_j(t) = [\hat{H}(t), \hat{\rho}_j(t)], \quad (2.40)$$

então

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) &= i\hbar\frac{d}{dt}\left(\sum_j p_j \hat{\rho}_j(t)\right) = \sum_j \left(p_j i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\rho}_j(t)\right) \\ &= \sum_j \left(p_j [\hat{H}(t), \hat{\rho}_j(t)]\right) = \left[\hat{H}(t), \sum_j p_j \hat{\rho}_j(t)\right], \end{aligned} \quad (2.41)$$

portanto

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]. \quad (2.42)$$

Finalmente, para qualquer ket $|v\rangle$ temos

$$\langle v | \hat{\rho} | v \rangle = \sum_j p_j \langle v | \hat{\rho}_j | v \rangle = \sum_j p_j |\langle v | \psi_j \rangle|^2 \geq 0. \quad (2.43)$$

Isto é,

$$\Rightarrow \langle v | \hat{\rho} | v \rangle \geq 0, \quad (2.44)$$

logo, o operador densidade para o caso mais geral ainda é um operador positivo.

2.4.3 Populações e Coerências

Qual é o significado físico dos elementos $\rho_{m,n}$ da matriz densidade? Primeiramente vamos considerar os elementos da diagonal

$$\begin{aligned} \rho_{m,m} &= \langle \varphi_m | \hat{\rho} | \varphi_m \rangle = \sum_j p_j \langle \varphi_m | \hat{\rho}_j | \varphi_m \rangle \\ &= \sum_j p_j \langle \varphi_m | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \varphi_m \rangle, \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde $\langle \varphi_m | \psi_j \rangle = c_m^j$ são os componentes de $|\psi_j\rangle$ na base $|\varphi_m\rangle$. Ou seja,

$$\rho_{m,m} = \sum_j p_j |c_m^j|^2. \quad (2.46)$$

$|c_m^j|^2$ é um número real cuja interpretação física é a seguinte: se o estado do sistema é $|\psi_j\rangle$, então $|c_m^j|^2$ é a probabilidade de se encontrar o sistema no estado $|\varphi_m\rangle$. De acordo com a equação (2.46), se levarmos em conta a indeterminação do estado antes da medida, $\rho_{m,m}$ é a probabilidade média (média ponderada) de se achar o sistema no estado $|\varphi_m\rangle$. Se a mesma medida é realizada N vezes sob as mesmas condições iniciais, onde N é um número grande, então $N\rho_{m,m}$ sistemas serão encontrados no estado $|\varphi_m\rangle$. Por esse motivo $\rho_{m,m}$ é chamado de *população*.

Considerando agora os elementos fora da diagonal, vemos que

$$\rho_{m,n} = \sum_j p_j c_m^j c_n^{j*}. \quad (2.47)$$

Os termos cruzados $c_m^j c_n^{j*}$ expressam efeitos de interferência entre os estados $|\varphi_m\rangle$ e $|\varphi_n\rangle$, que aparecem quando $|\psi_j\rangle$ é uma superposição coerente formada pelos estados $|\varphi_m\rangle$ e $|\varphi_n\rangle$. De acordo com a equação (2.47), $\rho_{m,n}$ é a média ponderada destes termos cruzados, tomados sobre todos os possíveis estados da mistura estatística. Ao contrário das populações, $\rho_{m,n}$ pode ser igual a zero até mesmo se nenhum dos produtos $c_m^j c_n^{j*}$ são: enquanto $\rho_{m,m}$ é uma soma de números reais positivos (ou zero), $\rho_{m,n}$ é uma soma de números complexos. Se $\rho_{m,n}$ é zero isto significa que a média (2.47) cancelou todos os efeitos de interferência entre $|\varphi_m\rangle$ e $|\varphi_n\rangle$. Por outro lado, se $\rho_{m,n} \neq 0$ uma certa coerência existe entre estes estados.

2.5 Comportamento dinâmico de um sistema quântico

Nesta seção especificaremos como os sistemas quânticos se comportam dinamicamente, ou seja, mostraremos como o estado quântico de um sistema físico evolui no tempo. Segundo um dos postulados da mecânica quântica, a evolução temporal de um estado quântico $|\psi(t)\rangle$ satisfaz a seguinte equação

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi(t)\rangle, \quad (2.48)$$

onde $\hat{H}$ é o operador Hamiltoniano, um operador hermitiano associado à energia do sistema, e a equação acima é a conhecida por equação de Schrödinger, nome dado devido ao físico austríaco que a inventou, Erwin Schrödinger[‡]. Dois casos distintos podem ser considerados a respeito do Hamiltoniano do sistema: ele pode ser explicitamente dependente do tempo ou independente do tempo. Caso ele seja independente do tempo, nós podemos formalmente integrar a equação (2.48) para obter (na chamada *versão de Schrödinger*[§])

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad (2.49)$$

onde

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t - t_0)\right], \quad (2.50)$$

com t_0 sendo o tempo inicial e $|\psi(t_0)\rangle$ o estado inicial do sistema.

Pela equação (2.50), podemos facilmente verificar que $\hat{U}(t, t_0)$ também satisfaz a equação de Schrödinger

$$\frac{d}{dt}\hat{U}(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\hat{U}(t, t_0), \quad (2.51)$$

[‡]Erwin Schrödinger fora laureado e dividiu o prêmio nobel de física de 1933 com o físico inglês Paul Dirac. Ambos receberam o prêmio devido a suas inestimáveis contribuições para a teoria quântica.

[§]Nesta tese optamos por chamar de “versão de Schrödinger” e “versão de interação” a “representação de Schrödinger” e a “representação de interação”, respectivamente.

enquanto pela equação (2.49), em $t = t_0$, $\hat{U}(t, t_0)$ deve satisfazer

$$\hat{U}(t_0, t_0) = \hat{I}. \quad (2.52)$$

Como $\hat{H}$ é um operador hermitiano, segue que (21):

$$\hat{U}^\dagger(t, t_0) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t - t_0) \right] = \hat{U}^{-1}(t, t_0), \quad (2.53)$$

o que mostra que $\hat{U}(t, t_0)$ é um operador unitário. Portanto, podemos dizer que o estado quântico de um sistema físico evolui de um tempo inicial t_0 para um tempo final t através de uma transformação unitária. O operador $\hat{U}(t, t_0)$ é chamado de *operador evolução temporal*. Baseado numa representação geométrica dos vetores de estado, podemos considerar a evolução dada pela equação (2.49) como uma rotação contínua do vetor de estado, pertencente ao espaço dos estados, de uma direção inicial em t_0 para uma direção final em t . Como $\hat{U}^{-1}(t, t_0) = \hat{U}^\dagger(t, t_0)$, a norma de $|\psi(t)\rangle$ é preservada

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | \hat{U}^{-1}(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle = \langle \psi(t_0) | \psi(t_0) \rangle, \quad (2.54)$$

ou seja, a direção do estado muda com o tempo mas o tamanho do vetor é invariante por transformações de similaridade. Além do mais, quaisquer duas funções do operador $\hat{H}$ comutam entre si, logo é fácil verificar que o operador $\hat{U}$ satisfaz a propriedade de divisibilidade

$$\hat{U}(t, t_2) = \hat{U}(t, t_1) \hat{U}(t_1, t_2), \quad (2.55)$$

onde $t > t_1 > t_2$.

Discutiremos o caso em que $\hat{H}$ é explicitamente dependente do tempo na próxima seção, porém, podemos notar que a solução para a equação (2.48) não será dada por

$$|\psi(t)\rangle = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t') dt' \right] |\psi(t_0)\rangle, \quad (2.56)$$

já que, em geral, $\int_{t_0}^t \hat{H}(t') dt'$ não comuta com $\hat{H}(t)$ e quando tentamos diferenciar a exponencial acima, a ordem dos fatores pode ser ambígua. O que devemos notar é que se dois operadores comutam em tempos iguais não significa que eles comutarão em tempos distintos.

2.6 A versão de interação

Vamos considerar que o Hamiltoniano do sistema seja escrito como uma soma de dois termos:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}. \quad (2.57)$$

Nós vamos assumir ainda que $\hat{H}_0$ seja independente do tempo e que $\hat{H}_{int}$ pode ser explicitamente dependente do tempo ou não. A *versão de interação* é particularmente útil quando $\hat{H}$ pode ser dividido como em (2.57) e é definida pela transformação unitária $\hat{U}_0(t, t_0)$ da seguinte forma:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}_0(t, t_0) |\psi_I(t)\rangle, \quad (2.58)$$

onde $|\psi_I(t)\rangle$ refere-se ao estado quântico do sistema na versão de interação e $|\psi(t)\rangle$ refere-se ao estado quântico do sistema na versão de Schrödinger. Logo, os estados na versão de Schrödinger e na versão de interação se relacionam através de uma transformação de similaridade, isto é, através de uma rotação. O operador que relaciona as duas versões, $\hat{U}_0(t, t_0)$, satisfaz a equação

$$\frac{d}{dt} \hat{U}_0(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 \hat{U}_0(t, t_0), \quad (2.59)$$

com

$$\hat{U}_0(t, t_0) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 (t - t_0) \right]. \quad (2.60)$$

Além disso, $\hat{U}_0^\dagger = \hat{U}_0^{-1}$ e $\hat{U}_0(t_0, t_0) = \hat{I}$.

A equação de Schrödinger associada ao Hamiltoniano (2.57) será

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_0 + \hat{H}_{int}] |\psi(t)\rangle. \quad (2.61)$$

Por outro lado, se substituirmos a equação (2.58) na equação (2.61), obtemos

$$\left(\frac{d}{dt} \hat{U}_0 \right) |\psi_I\rangle + \hat{U}_0 \left(\frac{d}{dt} |\psi_I\rangle \right) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_0 + \hat{H}_{int}] \hat{U}_0 |\psi_I\rangle. \quad (2.62)$$

Usando a equação (2.59), o primeiro termo do lado esquerdo da equação (2.62) se cancela com o primeiro termo do lado direito. Se, então, multiplicarmos ambos os lados dessa equação por $\hat{U}_0^{-1}$, ela pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \tilde{H}_{int}(t) |\psi_I(t)\rangle, \quad (2.63)$$

onde

$$\tilde{H}_{int}(t) = \hat{U}_0^\dagger \hat{H}_{int} \hat{U}_0. \quad (2.64)$$

A equação (2.63) é a equação de Schrödinger para o vetor de estado na versão de interação.

Mesmo que $\hat{H}_{int}$ não seja explicitamente dependente do tempo, vemos pela equação (2.64)

que $\tilde{H}_{int}$ geralmente dependerá explicitamente do tempo.

Vamos procurar por soluções da equação (2.63) do tipo

$$|\psi_I(t)\rangle = \hat{U}_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad (2.65)$$

pois, pela a equação (2.58) e pela a propriedade $\hat{U}_0(t_0, t_0) = \hat{I}$, $|\psi(t_0)\rangle = |\psi_I(t_0)\rangle$ (ou seja, as duas versões coincidem em $t = t_0$). Substituindo (2.65) em (2.63) e notando que $|\psi_I(t_0)\rangle$ é arbitrário, $\hat{U}_I(t, t_0)$ satisfaz

$$\frac{d}{dt} \hat{U}_I(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar} \tilde{H}_{int}(t) \hat{U}_I(t, t_0). \quad (2.66)$$

Integrando ambos os lados da equação (2.66), obtemos

$$\hat{U}_I(t, t_0) = \hat{U}_I(t_0, t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t \tilde{H}_{int}(t') \hat{U}_I(t', t_0) dt'. \quad (2.67)$$

Se fizermos $t = t'$ e substituirmos a variável muda de integração $t' \rightarrow t''$, obteremos

$$\hat{U}_I(t', t_0) = \hat{U}_I(t_0, t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^{t'} \tilde{H}_{int}(t'') \hat{U}_I(t'', t_0) dt''. \quad (2.68)$$

Agora, se substituirmos a equação (2.68) em (2.67), obtemos

$$\hat{U}_I(t, t_0) = 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t \tilde{H}_{int}(t_1) dt_1 + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t \tilde{H}_{int}(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} \tilde{H}_{int}(t_2) \hat{U}_I(t_2, t_0) dt_2, \quad (2.69)$$

onde fizemos $\hat{U}_I(t_0, t_0) = 1$. Procedendo indefinidamente dessa mesma forma, isto é, iterando os termos, obtemos a seguinte série:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \tilde{H}_{int}(t_1) \tilde{H}_{int}(t_2) \dots \tilde{H}_{int}(t_n). \quad (2.70)$$

Podemos reescrever a expressão (2.70) acima de uma forma compacta em termos do operador ordenamento temporal de Dyson (22).

$$\hat{U}_I(t, t_0) = \hat{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \tilde{H}_{int}(t') dt' \right]. \quad (2.71)$$

2.7 Correlações quânticas

Nas próximas subseções introduziremos alguns conceitos básicos e definições a respeito de dois tipos de correlação quântica: o *emaranhamento* e a *discórdia quântica*. Porém, devido à pletora de conceitos relevantes nessa sub-área da teoria da computação e informação quântica, iremos expor de forma sucinta e sem a pretensão de apresentar um

tratado sobre esse tema. Assim, apresentaremos apenas os conceitos relevantes para o desenvolvimento dessa tese de doutorado.

2.7.1 O emaranhamento

A palavra emaranhamento é uma tradução literal para a palavra inglesa *entanglement* que por sua vez foi traduzida da palavra alemã *Verschränkung*, termo difundido por Schrödinger para designar uma das propriedades mais contra intuitivas da mecânica quântica. O emaranhamento é um tipo muito especial de correlação quântica que está intimamente relacionada com o princípio da superposição. Além disso, o emaranhamento é um recurso que desempenha um papel fundamental na teoria da computação e informação quântica, pois ele é usado como uma espécie de substrato para a realização de diversas tarefas. Dizemos que o emaranhamento é um recurso pois ele é consumido durante a realização dessas tarefas. Ele foi objeto de árduo debate epistemológico ao longo do século passado (23–25) e hoje é objeto de intensos estudos, consagrando-se como uma sub-área do conhecimento dentro da área da teoria da computação e informação quântica.

O emaranhamento existe entre diferentes partes de um sistema físico composto, ou seja, para que haja emaranhamento o sistema deve ser formado por pelo menos duas partes (emaranhamento bipartite), podendo existir em sistemas formados por várias partes (emaranhamento multipartite). Lembre-se que na descrição quântica, quando temos o conhecimento completo de um sistema físico qualquer, podemos representar o estado do sistema através de um estado puro $|\psi\rangle$. Agora, suponha que o nosso sistema seja formado por N subsistemas. O espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ associado ao sistema composto é dado pelo produto tensorial dos espaços de Hilbert dos subsistemas individuais, isto é,

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$, ou $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i$, onde $\mathcal{H}_i$ é o espaço de Hilbert do i -ésimo subsistema. Se d_i é a dimensão do i -ésimo subsistema, então $D \equiv \prod_{i=1}^N d_i$ é a dimensão do espaço de Hilbert do sistema composto. O produto tensorial define um espaço vetorial cuja estrutura é tal que nem todos os seus elementos podem ser escritos como um estado produto. Em outras palavras, o princípio da superposição permite, chamando de $|j_i\rangle$ o j -ésimo elemento de alguma base (escolhida de forma conveniente) de $\mathcal{H}_i$ (por exemplo, a base formada por autoestados do Hamiltoniano livre do i -ésimo subsistema), escrever o estado mais geral do sistema composto pelos N subsistemas da seguinte forma:

$$|\psi\rangle = \sum_{j_1=1}^{d_1} \sum_{j_2=1}^{d_2} \cdots \sum_{j_N=1}^{d_N} c_{j_1, j_2, \dots, j_N} |j_1, j_2, \dots, j_N\rangle. \quad (2.72)$$

A base produto $|j_1\rangle \otimes |j_2\rangle \otimes \cdots \otimes |j_N\rangle$, que podemos escrever abreviadamente como $|j_1\rangle|j_2\rangle \cdots |j_N\rangle$, ou simplesmente $|j_1, j_2 \dots j_N\rangle$, pode ser a base computacional de $\mathcal{H}$ se os N subsistemas forem formados por qubits. O estado (2.72) não pode, em geral, ser escrito como um estado produto, ou seja, como o produto dos estados individuais dos subsistemas:

$$|\psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_N\rangle. \quad (2.73)$$

Logo, não podemos atribuir um vetor de estado a cada subsistema individual. Essa constatação nos leva a nossa primeira definição de emaranhamento:

Definição 1 *Um estado puro é emaranhado se, e somente se, não é um estado produto.*

Como exemplo de estados puros emaranhados podemos considerar os quatro estados de Bell, que são estados puros maximamente emaranhados de dois qubits, ou seja, um emaranhamento bipartite entre dois subsistemas de dimensões $d_1 = d_2 = 2$:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\Psi^-\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.74)$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\Phi_-\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.75)$$

Os estados de Bell constituem uma base para o espaço $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ e formam a única classe de emaranhamento para sistemas de dois qubits (veja a seção 3.1 do capítulo 3). Note que não podemos escrever nenhum estado acima como um estado produto, ou seja, como o produto das partes que compõem o sistema combinado. Os estados (2.74) e (2.75) possuem uma propriedade notável; se realizarmos uma medida sobre qualquer subsistema (em qualquer base local), todos os resultados são equiprováveis e a informação sobre qualquer subsistema é incompleta. Por outro lado, o resultado de medidas dos dois subsistemas estão correlacionados. Exemplos de estados não-emaranhados, que não possuem essa propriedade, são:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |00\rangle = |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2, \\ |\phi\rangle &= \frac{|00\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}} = |0\rangle_1 \otimes \frac{|0\rangle_2 + |1\rangle_2}{\sqrt{2}}, \\ |\varphi\rangle &= \frac{|0\rangle_1 + |1\rangle_1}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle_2 + |0\rangle_2}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Agora, se considerarmos estados puros emaranhados de três qubits, podemos encontrar duas classes distintas de emaranhamento genuinamente tripartite (26): a classe dos estados *GHZ* (27) e a classe dos estados *W*. As formas canônicas dos estados *GHZ* e *W*, respectivamente, são:

$$\begin{aligned} |GHZ\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle), \\ |W\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Os estados puros de quatro qubits maximamente emaranhados definem três classes não equivalentes de emaranhamento. Além das classes *GHZ* e *W*, uma terceira classe pode ser observada: a classe dos estados de *Cluster*. As formas canônicas dos estados (puros

emaranhados de quatro qubits) GHZ , W e $Cluster$ são respectivamente

$$\begin{aligned} |GHZ\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0000\rangle + |1111\rangle), \\ |W\rangle &= \frac{1}{2} (|0111\rangle + |1011\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle), \\ |\Phi\rangle_c &= \frac{1}{2} (|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Podemos redefinir o emaranhamento em termos de estados mais gerais, considerando também os estados mistos (que são muito mais abundantes que os estados puros):

Definição 2 *Um estado qualquer $\hat{\rho} \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ [¶] é emaranhado se, e somente se, não pode ser expresso como uma combinação convexa de estados produto de todos os subsistemas que formam o sistema composto, isto é, se, e somente se:*

$$\hat{\rho} \neq \sum_{\mu} p_{\mu} \hat{\rho}_{\mu}^{(1)} \otimes \hat{\rho}_{\mu}^{(2)} \otimes \cdots \otimes \hat{\rho}_{\mu}^{(N)}, \quad (2.79)$$

onde o índice μ refere-se à μ -ésima realização do estado (ou o μ -ésimo membro do ensemble) e $\sum_{\mu} p_{\mu} \equiv 1$ com $p_{\mu} \geq 1$. Uma terceira definição ainda pode ser proposta:

Definição 3 *todos os estados que não são emaranhados são chamados separáveis.*

2.7.2 A discórdia quântica

O emaranhamento é um tipo de correlação quântica que tem desempenhado um papel fundamental em teoria da computação e informação quântica. Entretanto, a idéia de que o emaranhamento é um recurso indispensável para a computação quântica é uma idéia que

[¶] $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ é o conjunto dos operadores densidade que agem em $\mathcal{H}$.

nem todos compartilham nos dias de hoje. Há evidências da existência de outras formas de correlações quânticas que podem desempenhar um papel importante para a realização de outros tipos de computação quântica que não utilizam o emaranhamento como substrato primordial. Na tentativa de caracterizar todas as correlações quânticas, Harold Ollivier e Wojciech Zurek apresentaram o que foi chamado por eles de *discórdia quântica* (28) e apesar de ter sido mencionada pela primeira vez em 2002, apenas recentemente a discórdia tem recebido a devida atenção. A idéia é a seguinte: duas expressões classicamente equivalentes para a *informação mútua*^{||} geralmente diferem quando os sistemas envolvidos são quânticos e essa diferença define a discórdia quântica. Além do mais, a discórdia é usada para medir as correlações puramente quânticas entre sistemas. A separabilidade da matriz densidade total de um sistema composto não implica no desaparecimento da discórdia, mostrando que a ausência de emaranhamento não garante classicalidade.

Para compreendermos como Ollivier e Zurek definiram a discórdia quântica, temos que percorrer o mesmo caminho em termos da informação mútua clássica. Em teoria de informação clássica, a informação mútua é definida da seguinte forma:

$$\mathcal{I}(\mathcal{A} : \mathcal{B}) = H(\mathcal{A}) + H(\mathcal{B}) - H(\mathcal{A}, \mathcal{B}). \quad (2.80)$$

$H(\mathcal{X})$ é conhecida em teoria da informação clássica como *entropia de Shannon* (29), devido a Claude Elwood Shannon – um matemático americano conhecido como o pai da teoria da informação. A entropia de Shannon quantifica a nossa ignorância acerca da variável estocástica $\mathcal{X}$ e é definida da seguinte forma:

$$H(\mathcal{X}) = - \sum_i p_i \log p_i, \quad (2.81)$$

onde $\{p_i\}$ é o espaço de probabilidade associado a variável $\mathcal{X}$. Na definição (2.80),

^{||}A informação sobre as correlações entre duas variáveis estocásticas pode ser obtida medindo-se a informação mútua.

$H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = -\sum_{i,j} p_{ij} \log p_{ij}$ é a entropia conjunta de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Introduzindo a entropia condicional

$$H(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) - H(\mathcal{B}), \quad (2.82)$$

que quantifica a ignorância a respeito de $\mathcal{A}$ dado $\mathcal{B}$, podemos reescrever, equivalentemente, a informação mútua (2.80) da seguinte forma:

$$\mathcal{I}(\mathcal{A} : \mathcal{B}) = H(\mathcal{A}) - H(\mathcal{A}|\mathcal{B}). \quad (2.83)$$

Agora, para generalizarmos as equações acima para o domínio quântico, nós substituímos as distribuições clássicas de probabilidade por matrizes densidades, ou seja, denotando por $\hat{\rho}^A = \text{Tr}_B \hat{\rho}^{AB}$ e $\hat{\rho}^B = \text{Tr}_A \hat{\rho}^{AB}$ as matrizes densidade das partes dos dois subsistemas A e B que compõem o sistema combinado AB , a informação mútua quântica análoga a informação mútua clássica dada pela equação (2.80) será

$$I(\hat{\rho}^A : \hat{\rho}^B) = S(\hat{\rho}^A) + S(\hat{\rho}^B) - S(\hat{\rho}^{AB}), \quad (2.84)$$

onde $S(\hat{\rho}^X) = -\text{Tr}_X \hat{\rho}^X \log \hat{\rho}^X$ é a *entropia de von Neumann* para o sistema X . Todavia, a generalização da expressão (2.83) não é automática como é para $\mathcal{I}$, pois a entropia condicional $H(A|B)$ requer a especificação do estado de A dado o estado de B . Essa especificação é ambígua até que o conjunto de estados de B a ser medido seja selecionado. Vamos considerar medidas projetivas aplicadas localmente apenas no subsistema B , descritas por um conjunto completo de projetores ortogonais, $\{\Pi_k^B\}$, onde o índice k distingue os diferentes resultados dessas medidas. O estado quântico depois da medida se torna

$$\hat{\rho}_k^{AB} = \frac{(\hat{I}^A \otimes \Pi_k^B) \hat{\rho}^{AB} (\hat{I}^A \otimes \Pi_k^B)}{\text{Tr}_{AB} [(\hat{I}^A \otimes \Pi_k^B) \hat{\rho}^{AB} (\hat{I}^A \otimes \Pi_k^B)]}, \quad (2.85)$$

onde $\hat{I}^A$ é o operador identidade para o subsistema A . Com esse operador densidade

condicional, o análogo quântico da entropia condicional pode ser definida como

$$S(\hat{\rho}^{AB} | \{\Pi_k^B\}) = \sum_k p_k S(\hat{\rho}_k^{AB}), \quad (2.86)$$

com $p_k = \text{Tr}_{AB} \left[\left(\hat{I}^A \otimes \Pi_k^B \right) \hat{\rho}^{AB} \left(\hat{I}^A \otimes \Pi_k^B \right) \right]$, e a extensão quântica da informação mútua clássica $\mathcal{J}$ é dada por

$$J(\hat{\rho}^{AB} | \{\Pi_k^B\}) = S(\hat{\rho}^A) - S(\hat{\rho}^{AB} | \{\Pi_k^B\}). \quad (2.87)$$

As medidas projetivas sobre o subsistema B removem todas as correlações quânticas entre A e B ; por outro lado, o valor de $J(\hat{\rho}^{AB} | \{\Pi_k^B\})$ depende da escolha de $\{\Pi_k^B\}$. Então, para assegurar que todas as correlações clássicas entre A e B estarão contidas em J , devemos maximizar J sobre todos os conjuntos $\{\Pi_k^B\}$. A quantidade

$$Q(\hat{\rho}^A : \hat{\rho}^B) = \max_{\{\Pi_k^B\}} J(\hat{\rho}^{AB} | \{\Pi_k^B\}) \quad (2.88)$$

é interpretada como uma medida das correlações clássicas entre A e B . A discórdia quântica, é finalmente definida como sendo a diferença

$$D(\hat{\rho}^{AB}) = I(\hat{\rho}^A : \hat{\rho}^B) - Q(\hat{\rho}^A : \hat{\rho}^B). \quad (2.89)$$

A discórdia definida acima é uma medida da natureza quântica das correlações entre dois subsistemas A e B . Ela é nula somente para subsistemas que possuem correlações puramente clássicas e diferente de zero para subsistemas que possuem correlações quânticas.

2.8 Medidas de distância

Na tentativa de responder quantitativamente questões centrais da teoria da informação quântica (como por exemplo: *dois itens de informação são similares?* ou *quanto*

de informação é preservada em algum processo?) desenvolveu-se medidas de distância entre estados quânticos. Medidas *estáticas* quantificam quão próximos estão dois estados enquanto medidas *dinâmicas* quantificam se a informação está sendo bem preservada durante um processo. Devido a uma certa arbitrariedade no modo como essas medidas de distância foram definidas, a comunidade que se dedica à área da computação e informação quântica tem usado, de acordo com suas conveniências, diversas medidas de distância. De todas as medidas encontradas na literatura, duas despertaram o nosso interesse: a fidelidade e a medida geométrica de emaranhamento. Por isso, a presente seção é dedicada a uma revisão sobre essas duas medidas de distância.

2.8.1 A fidelidade

O conceito de fidelidade é um conceito importante em teoria de computação e informação quântica. Em computação quântica, por exemplo, podemos nos perguntar qual é a fidelidade de uma computação cujos estados quânticos (que são o recurso básico para a realização da computação) estão interagindo com um meio externo que insere irreversivelmente efeitos indesejados, corrompendo (parcialmente ou totalmente) os estados e a própria computação. Em outras palavras, podemos nos perguntar sobre quão precisa é a nossa computação quando ela está sujeita a ruídos deletérios. Da mesma forma, podemos considerar um processo onde queremos comunicar quanticamente uma certa informação, e o nosso canal de comunicação está sujeito a ruídos que também podem corromper o sinal enviado. Para qualquer esquema de comunicação, a fidelidade é uma medida quantitativa da precisão da transmissão. A fidelidade é muitas vezes chamada de medida de distância entre estados quânticos, muito embora ela não defina uma métrica no espaço

dos estados. Em outras palavras, ela não satisfaz todas as características que definem um espaço métrico^{**}. A fidelidade entre dois estados puros, $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$, é geralmente definida como sendo

$$F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) \equiv |\langle\psi|\phi\rangle|^2. \quad (2.90)$$

A fidelidade acima possui uma interpretação em termos da distinguibilidade entre os dois estados quânticos $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$: ela é a probabilidade dos estados serem os mesmos. Dessa forma, podemos estender esse conceito para o caso em que a fidelidade é calculada entre um estado puro $|\psi_1\rangle$ e um estado misto $\hat{\rho}_2$, apenas tomando a média da equação (2.90) sobre o ensemble representado por $\hat{\rho}_2$:

$$F(|\psi_1\rangle, \hat{\rho}_2) \equiv \langle\psi_1|\hat{\rho}_2|\psi_1\rangle. \quad (2.91)$$

A fidelidade (2.91) possui uma interpretação física simples: ela é a probabilidade do estado misto $\hat{\rho}_2$ ser o estado puro $|\psi_1\rangle$. Ambas as fidelidades definidas acima podem ser generalizadas da seguinte forma:

$$F(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) = \text{Tr}(\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2), \quad (2.92)$$

onde $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ são puros em (2.90) e apenas $\hat{\rho}_1$ é puro em (2.91). Infelizmente uma interpretação semelhante (em termos da probabilidade de um dos estados ser idêntico ao outro) quando consideramos dois estados mistos não é facilmente encontrada (30). Com o

^{**}Em matemática um espaço métrico (V, D) é um conjunto V munido de uma métrica (ou distância). Essa métrica é uma função $D : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer elementos v_1, v_2 e v_3 pertencentes a V ,

- $D(v_1, v_2) \geq 0$, isto é, é sempre positiva,
- $D(v_1, v_2)$ é um número real, não negativo e finito,
- $D(v_1, v_2) = 0$ se e somente se $v_1 = v_2$,
- $D(v_1, v_2) = D(v_2, v_1)$, ou seja, é simétrica.
- $D(v_1, v_3) \leq D(v_1, v_2) + D(v_2, v_3)$ (desigualdade triangular).

intuito de generalizar a equação (2.91) para o caso em que ambos os estados sejam mistos, Richard Josza (31), considerou as seguintes premissas axiomáticas:

1. O valor da fidelidade deve estar contido dentro de um intervalo aberto entre 0 e 1, ou seja, $0 \leq F(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) \leq 1$; além disso, a fidelidade deve ser igual a 1 somente se os estados forem os mesmos, isto é, $F(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) = 1$ se, e somente se $\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2$,
2. a fidelidade é simétrica com relação aos seus argumentos, $F(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) = F(\hat{\rho}_2, \hat{\rho}_1)$,
3. se $\hat{\rho}_1$ é puro então a equação (2.91) é satisfeita,
4. a fidelidade é uma função invariante por transformações unitárias no espaço dos estados, ou seja, $F\left[\hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}_1 \hat{U}^\dagger(t, t_0), \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}_2 \hat{U}^\dagger(t, t_0)\right] = F(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2)$.

A equação (2.92) não é uma generalização para o caso de dois estados mistos, pois, ela não satisfaz o axioma número 1 se $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ são ambos mistos. O procedimento adotado por Josza se baseia na purificação^{††} dos operadores densidade $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$. O teorema demonstrado por Josza afirma que

$$F(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) = \max |\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle|^2, \quad (2.93)$$

onde a maximização é obtida sobre todas as purificações Ψ_1 e Ψ_2 de $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$. Josza mostrou ainda, que a equação (2.93) é idêntica à fidelidade entre estados mistos sugerida por Uhlmann em 1976 (32). A fidelidade entre dois estados mistos definida por Uhlmann tem a seguinte forma:

$$F(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) \equiv \left\{ \text{Tr} \left[\sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_1} \hat{\rho}_2 \sqrt{\hat{\rho}_1}} \right] \right\}^2, \quad (2.94)$$

onde a raiz de uma matriz qualquer $\sqrt{A}$ é definida como sendo uma matriz B tal que

$$B \cdot B = A.$$

^{††}Uma purificação de um estado misto $\hat{\rho}_1$, pertencente ao espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$, é, por definição, um estado puro $|\Psi\rangle$ que pertence a um espaço de Hilbert maior (ou estendido), $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, tal que $\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_2(|\Psi\rangle \langle \Psi|)$. Assim, uma purificação é qualquer estado puro que tenha $\hat{\rho}_1$ como operador densidade reduzido.

2.8.2 A medida geométrica de emaranhamento

A medida geométrica de emaranhamento é uma medida que quantifica a distância entre um estado quântico emaranhado multipartite e o conjunto de estados separáveis (33). Seja Ψ um estado emaranhado multipartite, composto por N subsistemas, pertencente a um espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i$, onde $\mathcal{H}_i$ é o espaço de Hilbert do i -ésimo subsistema. A medida geométrica de emaranhamento é definida como sendo

$$E_g = \min_{|\Phi\rangle \in \text{Prod}(\mathcal{H})} \left\{ -\log_2 (|\langle \Phi | \Psi \rangle|^2) \right\}, \quad (2.95)$$

onde $\text{Prod}(\mathcal{H})$ é o conjunto de todos os estados separáveis em $\mathcal{H}$ e o mínimo garante que escolheremos o estado separável mais próximo do estado Ψ .

3 Computação quântica baseada em medidas projetivas

Neste capítulo descreveremos alguns aspectos de um modelo de computação quântica universal baseado inteiramente em medidas projetivas locais (isto é, medidas de um único qubit) num estado maximamente emaranhado conhecido na literatura como estado de *Cluster* (7). Esse esquema de computação quântica foi proposto por Robert Raussendorf e Hans Briegel em 2001, e foi batizado por eles de *One-Way Quantum Computer* (8). Nesse modelo, que difere do modelo abitual conhecido por circuitos quânticos (3), o estado de *Cluster* desempenha um papel fundamental, já que todo recurso para executar a computação quântica é proveniente desse estado peculiar. Durante o processo de computação todo emaranhamento do estado de *Cluster* é destruído, e assim o estado pode ser usado apenas uma única vez, daí a origem do nome do modelo. Estados de *Cluster* podem ser criados eficientemente, a baixas temperaturas, através de uma interação quântica do tipo Ising entre partículas que podem ser bem representadas por sistemas de dois níveis. Para descrevermos os aspectos da computação quântica baseada em medidas projetivas que consideramos pertinentes para esta tese, dedicamos à primeira seção deste capítulo um resumo a respeito das diferentes classes de emaranhamento.

3.1 Classes não equivalentes de emaranhamento

Enquanto para estados emaranhados de dois qubits existe apenas uma classe de emaranhamento, a classe formada pelos estados de Bell, para estados emaranhados de três ou mais qubits existem diversas classes não equivalentes de emaranhamento (26). Essas diferentes classes de não equivalência podem ser definidas através de transformações unitárias locais. De acordo com a definição, dois estados emaranhados pertencem à mesma classe de emaranhamento se um deles puder ser transformado no outro, e vice versa, através de operações locais e comunicação clássica (LOCC)* – onde o uso de comunicação clássica se faz necessário caso as partes que constituem o sistema (isto é, os qubits) estejam separadas por longas distâncias. Quando aplicada em estados puros de três qubits essa abordagem revela a existência de dois tipos diferentes de emaranhamento genuinamente tripartite. Um deles é bem representado pelos estados GHZ e o outro pelos estados W . Isto quer dizer que todo e qualquer estado puro de três qubits cujo emaranhamento é genuinamente tripartite, ou pertence a classe de estados GHZ ou pertence a classe de estados W . Além disso, estados GHZ nunca podem ser transformados em estados W , e vice e versa, através de operações locais e comunicação clássica. Ao considerarmos sistemas formados por mais de três qubits surge uma nova classe não equivalente de emaranhamento: a classe dos estados de *Cluster*.

3.2 O estado de *Cluster*

Estados de *Cluster* podem ser criados eficientemente através de uma interação do tipo Ising a baixas temperaturas, tanto em cadeias lineares de sistemas de dois níveis

*Do inglês: Local Operations and Classical Communication.

como também em redes bidimensionais ou tridimensionais. Essa interação é ligada por um intervalo de tempo bem determinado, τ , e depois desligada. Inicialmente, antes da interação ser ligada, o estado do sistema é um estado separável e todos os qubits que farão parte do cluster $\mathcal{C}$ se encontram no estado

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (3.1)$$

Para criarmos um estado de *Cluster* linear de quatro qubits, por exemplo, primeiramente criamos o seguinte estado ao qual posteriormente aplicaremos a interação do tipo Ising:

$$|\phi\rangle = |+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \otimes |+\rangle_3 \otimes |+\rangle_4. \quad (3.2)$$

Uma vez que o Hamiltoniano do tipo Ising age uniformemente na cadeia, ou na rede, um cluster inteiro de partículas vizinhas se tornam emaranhadas num único passo. Depois de criado, o estado de *Cluster* $|\Phi\rangle_{\mathcal{C}}$ obedece o seguinte conjunto de equações de autovalores:

$$\hat{\sigma}_x^{(a)} \bigotimes_{a' \in \text{ngbh}(a)} \hat{\sigma}_z^{(a')} |\Phi\rangle_{\mathcal{C}} = \pm |\Phi\rangle_{\mathcal{C}}, \quad (3.3)$$

onde $a' \in \text{ngbh}(a)$ especifica os sítios de todos os qubits que interagem com o qubit no sítio $a \in \mathcal{C}$. Os autovalores são determinados pela distribuição de qubits sobre a rede.

Podemos reescrever a expressão (3.3) da seguinte forma:

$$\mathcal{K}^{(a)} |\Phi_{\{k\}}\rangle_{\mathcal{C}} = (-1)^{k_a} |\Phi_{\{k\}}\rangle_{\mathcal{C}}, \quad (3.4)$$

onde

$$\mathcal{K}^{(a)} = \hat{\sigma}_x^{(a)} \bigotimes_{b \in \text{ngbh}(a)} \hat{\sigma}_z^{(b)}, \quad (3.5)$$

e $\{k\} = \{k_a \in \{0, 1\} | a \in \mathcal{C}\}$ é um conjunto binário de parâmetros que especifica o estado de *Cluster*. Um estado de *Cluster* é completamente especificado pela equação de autovalores (3.4), uma vez que $\mathcal{K}^{(a)}$ forma um conjunto completo de observáveis comutantes

para o sistema de qubits no cluster $\mathcal{C}$. Por razões didáticas e para fins de ilustração, veremos como a equação (3.4) funciona para o caso de estados de “*Cluster*” de dois, três e quatro qubits. Considere como exemplo o seguinte estado de 2 qubits:

$$|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |+\rangle_2 + |1\rangle_1 |-\rangle_2), \quad (3.6)$$

ou seja,

$$|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle_1 \left(\frac{|0\rangle_2 + |1\rangle_2}{\sqrt{2}} \right) + |1\rangle_1 \left(\frac{|0\rangle_2 - |1\rangle_2}{\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (3.7)$$

O estado (3.7) pertence à única classe de emaranhamento existente entre dois qubits, isto é, esse estado é totalmente equivalente aos estados de Bell e ele pode ser transformado em um desses estados via transformações unitárias locais. Para o caso de dois qubits, temos ainda

$$\mathcal{K}^{(1)} = \hat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(2)}, \quad (3.8)$$

$$\mathcal{K}^{(2)} = \hat{\sigma}_x^{(2)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(1)}. \quad (3.9)$$

Aplicando $\mathcal{K}^{(1)}$ em $|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_2}$ obtemos

$$\mathcal{K}^{(1)}|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|1\rangle_1 \left(\frac{|0\rangle_2 - |1\rangle_2}{\sqrt{2}} \right) + |0\rangle_1 \left(\frac{|0\rangle_2 + |1\rangle_2}{\sqrt{2}} \right) \right] = +|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_2}. \quad (3.10)$$

Agora, aplicando $\mathcal{K}^{(2)}$ em $|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_2}$ obtemos

$$\mathcal{K}^{(2)}|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle_1 \left(\frac{|0\rangle_2 + |1\rangle_2}{\sqrt{2}} \right) + |1\rangle_1 \left(\frac{|0\rangle_2 - |1\rangle_2}{\sqrt{2}} \right) \right] = +|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_2}. \quad (3.11)$$

Portanto a equação de autovalores (3.4) é satisfeita para o estado (3.6) e para os observáveis (3.8) e (3.9). Agora, vamos considerar o seguinte estado emaranhado de 3 qubits:

$$|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |0\rangle_2 |+\rangle_3 + |-\rangle_1 |1\rangle_2 |-\rangle_3). \quad (3.12)$$

O estado (3.12) é equivalente, via transformações unitárias locais, ao estado *GHZ*, ou seja, ele pertence à classe *GHZ* de estados emaranhados. Para o caso de três qubits,

temos os seguintes observáveis

$$\mathcal{K}^{(1)} = \hat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(2)}, \quad (3.13)$$

$$\mathcal{K}^{(2)} = \hat{\sigma}_x^{(2)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(3)}, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{K}^{(3)} = \hat{\sigma}_x^{(3)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(2)}. \quad (3.15)$$

Como $\hat{\sigma}_x|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$ e $\hat{\sigma}_z|\pm\rangle = |\mp\rangle$, então, aplicando $\mathcal{K}^{(1)}$ em $|\Phi\rangle_{C_3}$ obtemos

$$\mathcal{K}^{(1)}|\Phi\rangle_{C_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1|0\rangle_2|+\rangle_3 + |-\rangle_1|1\rangle_2|-\rangle_3) = +|\Phi\rangle_{C_3}; \quad (3.16)$$

aplicando $\mathcal{K}^{(2)}$ em $|\Phi\rangle_{C_3}$ obtemos

$$\mathcal{K}^{(2)}|\Phi\rangle_{C_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-\rangle_1|1\rangle_2|-\rangle_3 + |+\rangle_1|0\rangle_2|+\rangle_3) = +|\Phi\rangle_{C_3}, \quad (3.17)$$

e aplicando $\mathcal{K}^{(3)}$ em $|\Phi\rangle_{C_3}$ obtemos

$$\mathcal{K}^{(3)}|\Phi\rangle_{C_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1|0\rangle_2|+\rangle_3 + |-\rangle_1|1\rangle_2|-\rangle_3) = +|\Phi\rangle_{C_3}. \quad (3.18)$$

De forma que a equação de autovalores (3.4) é satisfeita para o estado (3.12) e para os observáveis (3.13), (3.14) e (3.15). Dessa forma, podemos dizer que os estados de Bell são os representantes de 2 qubits dos estados de *Cluster* assim como os estados *GHZ* são os representantes de três qubits.

O estado de *Cluster* de 4 qubits será

$$|\Phi\rangle_{C_4} = \frac{1}{2} (|+\rangle_1|0\rangle_2|+\rangle_3|0\rangle_4 + |+\rangle_1|0\rangle_2|-\rangle_3|1\rangle_4 + |-\rangle_1|1\rangle_2|-\rangle_3|0\rangle_4 + |-\rangle_1|1\rangle_2|+\rangle_3|1\rangle_4). \quad (3.19)$$

Os observáveis nesse caso serão

$$\mathcal{K}^{(1)} = \hat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(2)}, \quad (3.20)$$

$$\mathcal{K}^{(2)} = \hat{\sigma}_x^{(2)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(3)}, \quad (3.21)$$

$$\mathcal{K}^{(3)} = \hat{\sigma}_x^{(3)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(2)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(4)}. \quad (3.22)$$

$$\mathcal{K}^{(4)} = \hat{\sigma}_x^{(4)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(3)}. \quad (3.23)$$

Aplicando $\mathcal{K}^{(1)}$ em $|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_4}$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(1)}|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_4} &= \frac{1}{2} (|+\rangle_1|0\rangle_2|+\rangle_3|0\rangle_4 + |+\rangle_1|0\rangle_2|-\rangle_3|1\rangle_4 + |-\rangle_1|1\rangle_2|-\rangle_3|0\rangle_4 + |-\rangle_1|1\rangle_2|+\rangle_3|1\rangle_4) \\ &= +|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_4}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Aplicando $\mathcal{K}^{(2)}$ em $|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_4}$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(2)}|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_4} &= \frac{1}{2} (|-\rangle_1|1\rangle_2|-\rangle_3|0\rangle_4 + |-\rangle_1|1\rangle_2|+\rangle_3|1\rangle_4 + |+\rangle_1|0\rangle_2|+\rangle_3|0\rangle_4 + |+\rangle_1|0\rangle_2|-\rangle_3|1\rangle_4) \\ &= +|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_4}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Aplicando $\mathcal{K}^{(3)}$ em $|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_4}$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(3)}|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_4} &= \frac{1}{2} (|+\rangle_1|0\rangle_2|+\rangle_3|0\rangle_4 + |+\rangle_1|0\rangle_2|-\rangle_3|1\rangle_4 + |-\rangle_1|1\rangle_2|-\rangle_3|0\rangle_4 + |-\rangle_1|1\rangle_2|+\rangle_3|1\rangle_4) \\ &= +|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_4}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Aplicando $\mathcal{K}^{(4)}$ em $|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_4}$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(4)}|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_4} &= \frac{1}{2} (|+\rangle_1|0\rangle_2|-\rangle_3|1\rangle_4 + |+\rangle_1|0\rangle_2|+\rangle_3|0\rangle_4 + |-\rangle_1|1\rangle_2|+\rangle_3|1\rangle_4 + |-\rangle_1|1\rangle_2|-\rangle_3|0\rangle_4) \\ &= +|\Phi\rangle_{\mathcal{C}_4}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

E novamente mostramos que a equação de autovalor (3.4) é satisfeita para o estado (3.19)

e para os observáveis (3.20), (3.21), (3.22) e (3.23). Um modo de se criar um estado de

Cluster seria medir todos os operadores de correlação $\mathcal{K}^{(a)}$, com $a \in \mathcal{C}$ num estado arbi-

trário pertencente ao cluster $\mathcal{C}$. Um outro modo seria resfriá-lo até o estado fundamental

do Hamiltoniano

$$\hat{H}_{\mathcal{K}} = -\hbar g \sum_{a \in \mathcal{C}} \kappa_a \mathcal{K}^a. \quad (3.28)$$

Outro modo, provavelmente mais adequado para realizações experimentais, seria preparar um estado separável $|+\rangle_{\mathcal{C}} = \bigotimes_{a \in \mathcal{C}} |+\rangle_a$ e em seguida aplicar a transformação unitária $\hat{S}$ que emaranha o sistema num estado de *Cluster*. Essa transformação unitária $\hat{S}$ é gerada pelo seguinte Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \hbar g \sum_{a,a'} f(a - a') \frac{1 + \hat{\sigma}_z^a}{2} \frac{1 - \hat{\sigma}_z^{a'}}{2}, \quad (3.29)$$

onde $f(a - a')$ especifica o limite da interação (considerando o caso de uma cadeia linear de qubits cuja interação é entre primeiros vizinhos, teremos $f(a - a') = \delta_{a+1,a'}$); por outro lado, a parte da interação entre os subsistemas a e a' do Hamiltoniano acima é escrita da seguinte forma:

$$\hat{H}_{int} = -\frac{\hbar g}{4} \sum_{a,a'} f(a - a') \hat{\sigma}_z^a \hat{\sigma}_z^{a'}. \quad (3.30)$$

O Hamiltoniano (3.30) é um Hamiltoniano do tipo Ising. Para aplicar a transformação unitária desejada, $\hat{S}$, o Hamiltoniano acima é ligado por um tempo $\tau = \pi/g$. Assim, a transformação é escrita como se segue:

$$\hat{S} = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{int} \tau \right). \quad (3.31)$$

3.3 Rotações arbitrárias em um único qubit

A seguir mostraremos como implementar rotações arbitrárias em um qubit usando o modelo proposto por Raussendorf e Briegel. Essa tarefa pode ser cumprida em uma cadeia de cinco qubits inicialmente separados, todos preparados no estado $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, com exceção do primeiro qubit que será o nosso input (o qual se deseja fazer a rotação)

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_{in}\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \otimes |+\rangle_3 \otimes |+\rangle_4 \otimes |+\rangle_5. \quad (3.32)$$

Aplicando a operação $\hat{S}$ no estado (3.32) obtemos o seguinte estado de *Cluster*

$$\begin{aligned}\hat{S}|\psi\rangle_{1,\dots,5} &= \frac{1}{2}|\psi_{\text{in}}\rangle_1|0\rangle_2|-\rangle_3|0\rangle_4|-\rangle_5 - \frac{1}{2}|\psi_{\text{in}}\rangle_1|0\rangle_2|+\rangle_3|1\rangle_4|+\rangle_5 \\ &- \frac{1}{2}|\psi_{\text{in}}^*\rangle_1|1\rangle_2|+\rangle_3|0\rangle_4|-\rangle_5 + \frac{1}{2}|\psi_{\text{in}}^*\rangle_1|1\rangle_2|-\rangle_3|1\rangle_4|+\rangle_5,\end{aligned}\quad (3.33)$$

onde $|\psi_{\text{in}}^*\rangle = \hat{\sigma}_z|\psi_{\text{in}}\rangle$ e $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

Como vimos na seção 2.3, uma rotação arbitrária pode ser caracterizada através de três ângulos, os ângulos de Eüler.

$$\hat{U}_R(\xi, \eta, \zeta) = \hat{U}_x(\zeta) \hat{U}_z(\eta) \hat{U}_x(\xi), \quad (3.34)$$

onde

$$\hat{U}_x(\alpha) = \exp\left(-i\alpha\frac{\hat{\sigma}_x}{2}\right), \quad (3.35)$$

e

$$\hat{U}_z(\alpha) = \exp\left(-i\alpha\frac{\hat{\sigma}_z}{2}\right). \quad (3.36)$$

Agora, segundo o modelo proposto por Raussendorf e Briegel, o estado $|\psi_{\text{in}}\rangle$ pode ser rotacionado medindo os qubits 1 até 4, enquanto o resultado da rotação é teleportado para o sítio 5. Os qubits 1, 2, 3 e 4 são medidos em bases apropriadamente escolhidas

$$\mathcal{B}_j(\alpha_j) = \left\{ \frac{|0\rangle_j + e^{i\alpha_j}|1\rangle_j}{\sqrt{2}}, \frac{|0\rangle_j - e^{i\alpha_j}|1\rangle_j}{\sqrt{2}} \right\}, \quad (3.37)$$

onde os resultados das medidas $s_j \in \{0, 1\}$ para $j = 1, 2, 3, 4$ são obtidos. Aqui, $s_j = 0$ significa que o qubit j é projetado no primeiro estado de $\mathcal{B}_j(\alpha_j)$. O estado resultante é

$$|s_1\rangle_{\alpha_1,1} \otimes |s_2\rangle_{\alpha_2,2} \otimes |s_3\rangle_{\alpha_3,3} \otimes |s_4\rangle_{\alpha_4,4} \otimes |\psi_{\text{out}}\rangle_5, \quad (3.38)$$

com $\hat{U}|\psi_{\text{in}}\rangle = |\psi_{\text{out}}\rangle$. Para a escolha $\alpha_1 = 0$ (medindo o qubit 1 na base formada pelos autovetores do operador $\hat{\sigma}_x$) a rotação $\hat{U}$ tem a forma

$$\hat{U} = \hat{\sigma}_x^{s_2+s_4} \hat{\sigma}_z^{s_1+s_3} \hat{U}_R \left[(-1)^{s_1+1} \alpha_2, (-1)^{s_2} \alpha_3, (-1)^{s_1+s_3} \alpha_4, \right]. \quad (3.39)$$

Assim, resumizando, o procedimento para se implementar uma rotação arbitrária $\hat{U}_R(\xi, \eta, \zeta)$, especificada pelos ângulos de Eüler ξ , η e ζ é:

1. medir o qubit 1 em $\mathcal{B}_1(0)$;
2. medir o qubit 2 em $\mathcal{B}_2((-1)^{s_1+1}\xi)$
3. medir o qubit 3 em $\mathcal{B}_3((-1)^{s_2}\eta)$
4. medir qubit 4 em $\mathcal{B}_4((-1)^{s_1+s_3}\zeta)$

3.4 Implementando um “bit-flip”

Se desejarmos implementar um “bit-flip” usando a receita descrita por Raussendorf e Briegel, devemos primeiramente identificar os ângulos de Eüler que representam a rotação desejada. No nosso caso, um bit-flip seria bem representado pelos seguintes ângulos: $\xi = \pi$, $\eta = 0$ e $\zeta = 0$. Consideraremos como o nosso estado inicial $|\psi_{\text{in}}\rangle$ o estado mais geral de um qubit dado por:

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \quad (3.40)$$

Seguindo a receita dada nos itens (1) até (4) da seção anterior, e escolhendo $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$, temos:

$$\mathcal{B}_1(0) = \frac{|0\rangle_1 + |1\rangle_1}{\sqrt{2}} = |+\rangle_1, \quad (3.41)$$

$$\mathcal{B}_2(-\pi) = \frac{|0\rangle_2 + e^{-i\pi}|1\rangle_2}{\sqrt{2}} = \frac{|0\rangle_2 - |1\rangle_2}{\sqrt{2}} = |-\rangle_2, \quad (3.42)$$

$$\mathcal{B}_3(0) = \frac{|0\rangle_3 + |1\rangle_3}{\sqrt{2}} = |+\rangle_3, \quad (3.43)$$

$$\mathcal{B}_4(0) = \frac{|0\rangle_4 + |1\rangle_4}{\sqrt{2}} = |+\rangle_4. \quad (3.44)$$

E como $|\psi_{\text{in}}^*\rangle = \hat{\sigma}_z |\psi_{\text{in}}\rangle$, temos:

$$|\psi_{\text{in}}^*\rangle = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle. \quad (3.45)$$

Assim, o nosso estado $\hat{S}|\psi\rangle_{1,\dots,5}$ será, substituindo (3.40) e (3.45) em (3.33):

$$\begin{aligned} \hat{S}|\psi\rangle_{1,\dots,5} &= \frac{1}{2} (\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1) |0\rangle_2 |-\rangle_3 |0\rangle_4 |-\rangle_5 - \frac{1}{2} (\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1) |0\rangle_2 |+\rangle_3 |1\rangle_4 |+\rangle_5 \\ &- \frac{1}{2} (\alpha|0\rangle_1 - \beta|1\rangle_1) |1\rangle_2 |+\rangle_3 |0\rangle_4 |-\rangle_5 + \frac{1}{2} (\alpha|0\rangle_1 - \beta|1\rangle_1) |1\rangle_2 |-\rangle_3 |1\rangle_4 |+\rangle_5, \end{aligned} \quad (3.46)$$

Os projetores associados às bases $\mathcal{B}_1(0)$, $\mathcal{B}_2(-\pi)$, $\mathcal{B}_3(0)$ e $\mathcal{B}_4(0)$ são respectivamente:

$$\hat{\Pi}_1(0) = |+\rangle_1 \langle +|, \quad (3.47)$$

$$\hat{\Pi}_2(-\pi) = |-\rangle_2 \langle -|, \quad (3.48)$$

$$\hat{\Pi}_3(0) = |+\rangle_3 \langle +|, \quad (3.49)$$

$$\hat{\Pi}_4(0) = |+\rangle_4 \langle +|. \quad (3.50)$$

Aplicando $\hat{\Pi}_1(0)$ em $\hat{S}|\psi\rangle_{1,\dots,5}$ sabendo que $|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$ e $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$,

ou seja, sabendo que

$$|\psi_{\text{in}}\rangle_1 = \alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1 = \left(\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}\right) |+\rangle_1 + \left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}\right) |-\rangle_1 \quad (3.51)$$

e que

$$|\psi_{\text{in}}^*\rangle_1 = \alpha|0\rangle_1 - \beta|1\rangle_1 = \left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}\right) |+\rangle_1 + \left(\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}\right) |-\rangle_1, \quad (3.52)$$

de forma que

$$\hat{\Pi}_1(0) |\psi_{\text{in}}\rangle_1 = \left(\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}\right) |+\rangle_1, \quad (3.53)$$

$$\hat{\Pi}_1(0) |\psi_{\text{in}}^*\rangle_1 = \left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}\right) |+\rangle_1, \quad (3.54)$$

obtemos:

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_1(0) \hat{S}|\psi\rangle_{1,\dots,5} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} \right) [|+\rangle_1 |0\rangle_2 |-\rangle_3 |0\rangle_4 |-\rangle_5 - |+\rangle_1 |0\rangle_2 |+\rangle_3 |1\rangle_4 |+\rangle_5] \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}} \right) [|+\rangle_1 |1\rangle_2 |+\rangle_3 |0\rangle_4 |-\rangle_5 - |+\rangle_1 |1\rangle_2 |-\rangle_3 |1\rangle_4 |+\rangle_5].\end{aligned}\quad (3.55)$$

Aplicando $\hat{\Pi}_2(-\pi)$ em $\hat{\Pi}_1(0) \hat{S}|\psi\rangle_{1,\dots,5}$ sabendo que

$$\hat{\Pi}_2(-\pi) |0\rangle_2 = \hat{\Pi}_2(-\pi) \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_2 + |-\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle_2, \quad (3.56)$$

$$\hat{\Pi}_2(-\pi) |1\rangle_2 = \hat{\Pi}_2(-\pi) \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_2 - |-\rangle_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle_2, \quad (3.57)$$

obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_2(-\pi) \hat{\Pi}_1(0) \hat{S}|\psi\rangle_{1,\dots,5} &= \left(\frac{\alpha + \beta}{4} \right) [|+\rangle_1 |-\rangle_2 |-\rangle_3 |0\rangle_4 |-\rangle_5 - |+\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 |1\rangle_4 |+\rangle_5] \\ &+ \left(\frac{\alpha - \beta}{4} \right) [|+\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 |0\rangle_4 |-\rangle_5 - |+\rangle_1 |-\rangle_2 |-\rangle_3 |1\rangle_4 |+\rangle_5].\end{aligned}\quad (3.58)$$

Aplicando $\hat{\Pi}_3(0)$ em $\hat{\Pi}_2(-\pi) \hat{\Pi}_1(0) \hat{S}|\psi\rangle_{1,\dots,5}$ obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_3(0) \hat{\Pi}_2(-\pi) \hat{\Pi}_1(0) \hat{S}|\psi\rangle_{1,\dots,5} &= - \left(\frac{\alpha + \beta}{4} \right) |+\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 |1\rangle_4 |+\rangle_5 \\ &+ \left(\frac{\alpha - \beta}{4} \right) |+\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 |0\rangle_4 |-\rangle_5.\end{aligned}\quad (3.59)$$

Por fim, aplicando $\hat{\Pi}_4(0)$ em $\hat{\Pi}_3(0) \hat{\Pi}_2(-\pi) \hat{\Pi}_1(0) \hat{S}|\psi\rangle_{1,\dots,5}$ sabendo que

$$\hat{\Pi}_4(0) |0\rangle_4 = \hat{\Pi}_4(0) \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_4 + |-\rangle_4) = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_4, \quad (3.60)$$

$$\hat{\Pi}_4(0) |1\rangle_4 = \hat{\Pi}_4(0) \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_4 - |-\rangle_4) = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_4, \quad (3.61)$$

obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_4(0) \hat{\Pi}_3(0) \hat{\Pi}_2(-\pi) \hat{\Pi}_1(0) \hat{S}|\psi\rangle_{1,\dots,5} &= - \left(\frac{\alpha + \beta}{4\sqrt{2}} \right) |+\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 |+\rangle_4 |+\rangle_5 \\ &+ \left(\frac{\alpha - \beta}{4\sqrt{2}} \right) |+\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 |+\rangle_4 |-\rangle_5,\end{aligned}\quad (3.62)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \hat{\Pi}_4(0) \hat{\Pi}_3(0) \hat{\Pi}_2(-\pi) \hat{\Pi}_1(0) \hat{S}|\psi\rangle_{1,\dots,5} = \\ & = - \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \right) |+\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 |+\rangle_4 [(\alpha + \beta) |+\rangle_5 - (\alpha - \beta) |-\rangle_5]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Então,

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_4(0) \hat{\Pi}_3(0) \hat{\Pi}_2(-\pi) \hat{\Pi}_1(0) \hat{S}|\psi\rangle_{1,\dots,5} = & - \left(\frac{1}{4} \right) |+\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 |+\rangle_4 \times \\ & \times \left[\alpha \frac{(|+\rangle_5 - |-\rangle_5)}{\sqrt{2}} + \beta \frac{(|+\rangle_5 + |-\rangle_5)}{\sqrt{2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_4(0) \hat{\Pi}_3(0) \hat{\Pi}_2(-\pi) \hat{\Pi}_1(0) \hat{S}|\psi\rangle_{1,\dots,5} = & - \left(\frac{1}{4} \right) |+\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 |+\rangle_4 \times \\ & \times (\alpha |1\rangle_5 + \beta |0\rangle_5). \end{aligned} \quad (3.65)$$

4 Sistemas quânticos abertos

Na teoria quântica podemos identificar dois tipos de sistemas físicos: os sistemas fechados e os sistemas abertos. Os sistemas quânticos fechados são aqueles perfeitamente isolados do resto do universo, ou seja, são aqueles que não sofrem interações indesejadas com o mundo à sua volta. Todavia, sistemas perfeitamente isolados são idealizações e não existem no mundo real. Nesse sentido, todos os sistemas quânticos devem ser considerados sistemas quânticos abertos, uma vez que é impossível isolá-los perfeitamente e eles sempre estão sujeitos a um acoplamento com o meio externo. O meio externo é, por definição, uma parte do sistema total que em geral não se tem um controle absoluto e cuja dinâmica nós queremos ignorar. Ao contrário do que acontece com um sistema fechado, a dinâmica quântica de um sistema aberto não pode ser representada em termos de uma evolução temporal unitária. Assim sendo, a evolução temporal do sistema que estamos interessados em observar, ou seja, do sistema aberto, segue uma dinâmica não unitária. Existem diversas técnicas para se calcular dinâmicas não unitárias impostas pela interação do sistema de interesse com o meio ambiente. Cada uma delas possui suas próprias peculiaridades, aproximações e limitações. Podemos, por exemplo, citar duas descrições dinâmicas em termos de equações mestras que são fundamentalmente diferentes: a equação de Lindblad e a equação de Redfield. Como veremos, numa mesma aplicação essas duas descrições podem levar a resultados completamente distintos. Isso acontece devido à natureza das aproximações que cada uma delas considera.

4.1 A evolução temporal de sistemas abertos

No capítulo 2, nas seções 2.5 e 2.6, descrevemos resumidamente as equações que representam a dinâmica de sistemas quânticos fechados. Nesta seção, descreveremos brevemente a evolução temporal de sistemas quânticos abertos. O sistema aberto S interagindo com o meio ambiente que o rodeia E , forma, juntamente com esse último, o sistema combinado $S + E$. O sistema combinado é considerado um sistema fechado e segue uma evolução temporal unitária que obedece a uma dinâmica descrita pelo Hamiltoniano total do sistema combinado. O estado do sistema S , entretanto, se transformará como uma consequência de sua dinâmica interna e de sua interação com o meio que o cerca. Essa interação leva a certas correlações entre o sistema de interesse e o meio ambiente, de forma que a evolução do sistema não mais seguirá uma evolução temporal unitária. Vamos denotar por $\mathcal{H}_S$ o espaço de Hilbert do sistema de interesse e por $\mathcal{H}_E$ o espaço de Hilbert do meio ambiente. O espaço de Hilbert do sistema combinado $S + E$ é dado pelo produto tensorial entre os espaços individuais, ou seja, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$. Sempre que um sistema interage com um meio externo podemos escrever o Hamiltoniano total do sistema combinado dividindo-o em três partes, isto é:

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{H}_{int}, \quad (4.1)$$

onde $\hat{H}_S$ é o Hamiltoniano do sistema, $\hat{H}_E$ é o Hamiltoniano do meio externo e $\hat{H}_{int}$ representa a interação entre eles.

A maior motivação para se estudar sistemas quânticos abertos é que em muitas situações fisicamente importantes, uma descrição matemática da dinâmica completa do sistema combinado é muito complicada. O meio ambiente, em geral, consiste de um sistema

com infinitos graus de liberdade e um tratamento exato exigiria a solução de infinitas equações de movimento acopladas. Mesmo que uma solução fosse conhecida, nos confrontaríamos com a tarefa de isolar e determinar as quantidades físicas de interesse através de uma média sobre os graus de liberdade que não nos interessa. Assim, tendemos a desenvolver uma descrição mais simples em termos de um espaço de estados reduzido, formado por um conjunto restrito de variáveis fisicamente relevantes que é alcançado empregando-se métodos analíticos e perturbativos. Se o estado do sistema combinado é descrito por um operador densidade $\hat{\rho}$, então o estado do sistema reduzido pode ser representado por um operador densidade do sistema reduzido dado pela aplicação do traço parcial sobre os graus de liberdade do meio ambiente

$$\hat{\rho}^S = \text{Tr}_E (\hat{\rho}) . \quad (4.2)$$

O operador densidade $\hat{\rho}^S(t)$ no tempo t é obtido através do operador densidade do sistema combinado $\hat{\rho}(t)$ evoluído tomando-se o traço sobre os graus de liberdade do meio ambiente.

Como o operador densidade do sistema combinado evolui unitariamente, temos

$$\hat{\rho}^S(t) = \text{Tr}_E \left\{ U(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) U^\dagger(t, t_0) \right\} , \quad (4.3)$$

em que $U(t, t_0)$ é o operador evolução temporal do sistema combinado. De forma análoga, a equação de movimento do operador densidade reduzido é obtida tomando-se o traço parcial sobre os graus de liberdade do meio ambiente em ambos os lados da equação de Liouville-von Neumann do sistema combinado

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}^S = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_E \left\{ \left[\hat{H}, \hat{\rho} \right] \right\} . \quad (4.4)$$

Nas seções que se seguem, apresentaremos resumidamente duas importantes equações de movimento para o operador densidade do sistema de interesse, ou seja, o sistema reduzido.

4.2 A equação mestra de Lindblad

Um mapa dinâmico $\Phi(t, 0)$ é definido como sendo divisível, se para todo t e $\tau \geq 0$ existe um mapa completamente positivo que preserva o traço (CTP), $\Phi(t + \tau, 0)$, que pode ser escrito como uma composição de outros dois mapas CPT, $\Phi(t + \tau, t)$ e $\Phi(t, 0)$, da seguinte forma:

$$\Phi(t + \tau, 0) = \Phi(t + \tau, t) \Phi(t, 0). \quad (4.5)$$

Processos Markovianos são descritos em termos de mapas CPT e a equação mestra mais geral que descreve uma evolução Markoviana não unitária de um estado inicial $\hat{\rho}$ é dada em termos da equação mestra de Lindblad (34). Essa equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = \mathcal{L} \hat{\rho}(t), \quad (4.6)$$

cujos gerador $\mathcal{L}$ na forma de Lindblad é dado por

$$\mathcal{L} \hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_i \gamma_i \left[\hat{A}_i \hat{\rho} \hat{A}_i^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i, \hat{\rho} \} \right]. \quad (4.7)$$

O gerador dado acima envolve um Hamiltoniano $\hat{H}$ assim como operadores de Lindblad $\hat{A}_i$ independentes do tempo, e taxas de decaimento positivas $\gamma_i \geq 0$ que também são independentes do tempo. $\{ \hat{A}, \hat{B} \} = \hat{A} \hat{B} + \hat{B} \hat{A}$ é o anti-comutador entre os operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Equações mestras que possuem essa estrutura levam a uma dinâmica de semigrupo cujos mapas são CPT, $\Phi(t, 0) = \exp(\mathcal{L}t)$, pois, com $\Phi(t + \tau, t) = \exp(\mathcal{L}\tau)$, a condição de divisibilidade (4.5) é trivialmente satisfeita.

4.3 A equação mestra de Redfield

Para deduzirmos a equação mestra de Redfield, consideraremos o Hamiltoniano do sistema combinado, ou seja, do sistema acoplado com o meio ambiente:

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{H}_{int}. \quad (4.8)$$

A dinâmica do sistema combinado na versão de interação é dada por

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{H}_{int}(t), \tilde{\rho}(t) \right], \quad (4.9)$$

onde $\tilde{\rho} = \hat{U}_0(t) \hat{\rho} \hat{U}_0^\dagger(t)$ e $\tilde{H}_{int} = \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{H}_{int} \hat{U}_0(t)$, com $\hat{U}_0(t) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t \right]$ e $\hat{H}_0 = \hat{H}_S + \hat{H}_E$. Integrando ambos os lados da equação (4.9) obtemos

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \left[\tilde{H}_{int}(t'), \tilde{\rho}(t') \right] dt'. \quad (4.10)$$

Iterando, obtemos

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \left[\tilde{H}_{int}(t'), \tilde{\rho}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^{t'} \left[\tilde{H}_{int}(t''), \tilde{\rho}(t'') \right] dt'' \right] dt', \quad (4.11)$$

logo,

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \left[\tilde{H}_{int}(t'), \tilde{\rho}(0) \right] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \left[\tilde{H}_{int}(t'), \left[\tilde{H}_{int}(t''), \tilde{\rho}(t'') \right] \right]. \quad (4.12)$$

Agora, tomando-se o traço sobre o reservatório em ambos os lados da equação (4.12) obtemos $\tilde{\rho}^S(t)$, isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}^S(t) &= \tilde{\rho}^S(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \text{Tr}_E \left\{ \left[\tilde{H}_{int}(t'), \tilde{\rho}(0) \right] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \text{Tr}_E \left\{ \left[\tilde{H}_{int}(t'), \left[\tilde{H}_{int}(t''), \tilde{\rho}(t'') \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Derivando a equação (4.13), obtemos

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}^S(t) = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_E \left\{ \left[\tilde{H}_{int}(t), \tilde{\rho}(0) \right] \right\} - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_E \left\{ \left[\tilde{H}_{int}(t), \left[\tilde{H}_{int}(t'), \tilde{\rho}(t') \right] \right] \right\}. \quad (4.14)$$

Em seguida, para concluirmos a dedução da equação mestra de Redfield, faremos algumas suposições e aproximações. Em primeiro lugar, supomos que o operador densidade do sistema combinado fatora em qualquer tempo em suas partes individuais, isto é, $\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}^S(t) \otimes \hat{\rho}^E(t)$. Em segundo lugar, supomos que o estado do meio ambiente é constante no tempo, ou seja, $[\hat{\rho}^E, \hat{H}_E] = 0 \rightarrow \hat{\rho}^E(t) = \hat{\rho}^E(0)$. Em terceiro lugar, supomos que $\tilde{H}_{int}$ possui apenas elementos fora da diagonal principal numa base $\{|e\rangle\}$ que representa os estados do meio ambiente. Além disso, supomos que a escala de tempo característica da memória do sistema é curta o suficiente para que possamos fazer a seguinte substituição: $\hat{\rho}(t') \rightarrow \hat{\rho}(t)$. Dessa forma, a equação (4.14) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}^S(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_E \left\{ \left[\tilde{H}_{int}(t), \left[\tilde{H}_{int}(t'), \tilde{\rho}^S(t) \otimes \tilde{\rho}^E(0) \right] \right] \right\}. \quad (4.15)$$

A equação mestra acima é a equação de Redfield. Ela é local no tempo e é uma equação perturbativa de segunda ordem que descreve a evolução do operador densidade reduzido na versão de interação. Todavia, apesar de ser local no tempo, a equação acima descreve processos não Markovianos, já que depende explicitamente do tempo inicial $t_0 = 0$. A aproximação Markoviana é obtida substituindo-se o limite superior da integral por ∞ .

4.4 Aplicação das equações de Lindblad e Redfield

Nesta seção iremos aplicar as duas descrições apresentadas nas seções anteriores num caso que nos despertou um certo interesse. Consideraremos um sistema físico (formado por N qubits) que satisfaz um modelo conhecido na literatura como *modelo spin-boson* (35). O Hamiltoniano nesse modelo é escrito como se segue

$$\hat{H} = -\hbar \sum_{n=1}^N \Delta_n \hat{\sigma}_x^n + \sum_{n=1}^N \epsilon_n \hat{\sigma}_z^n + \sum_k \epsilon_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hbar \sum_{n,k} \hat{\sigma}_z^n \left(g_k \hat{a}_k^\dagger + g_k^* \hat{a}_k \right), \quad (4.16)$$

onde os dois primeiros termos representam a evolução livre dos qubits, o terceiro termo representa a evolução livre do meio ambiente e o quarto termo descreve a interação entre eles. Os operadores $\hat{a}_k^\dagger$ e $\hat{a}_k$ são os operadores usuais de criação e aniquilação de um *quantum* de excitação no k -ésimo modo do meio ambiente e seguem a álgebra de Heisenberg satisfazendo a relação de comutação canônica $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}$. Os operadores $\hat{\sigma}_x^n$ e $\hat{\sigma}_z^n$ são os operadores de Pauli $\hat{\sigma}_x$ e $\hat{\sigma}_z$ do n -ésimo qubit, respectivamente. As constantes complexas g_k e g_k^* são as constantes de acoplamento entre os qubits e os modos do campo. Além disso, $\epsilon_n = \hbar\omega_0^n$ é a diferença de energia entre os níveis fundamental e excitado do qubit n e $\epsilon_k = \hbar\omega_k$ é a energia associada com o k -ésimo modo do campo, com ω_0^n e ω_k sendo respectivamente a frequência de transição e a frequência do k -ésimo modo do campo. Δ_n é a frequência de “tunelamento” ligada a inversão entre os níveis fundamental e excitado. Note que os N qubits interagem coletivamente com o meio ambiente.

Quando um sistema aberto interage com um meio externo deve-se considerar dois efeitos principais ao se examinar a evolução temporal desse sistema. Primeiramente, existe uma perda de energia do sistema inicial devido à relaxação que acontece a uma taxa τ_{rel}^{-1} , onde τ_{rel} é a escala temporal de relaxação. Em segundo lugar, há um processo conhecido na literatura como *descoerência* (ou simplesmente *decoerência*) (36), em que a interação contínua entre o sistema e o meio causa o surgimento de correlações indesejadas entre eles, e tais correlações fazem com que o sistema perca a habilidade de interferir. Esse fenômeno é caracterizado por um tempo que define a perda de coerência, o tempo de descoerência τ_{dec} . Geralmente, a escala de tempo associada ao fenômeno de descoerência é muito menor que a escala de tempo associada ao fenômeno de relaxação. Então, no contexto da computação quântica, um computador quântico será mais sensível a processos de descoerência do que processos de relaxação*. Assim sendo, não consideraremos

*Por outro lado, pensando em aplicações práticas em computação quântica, o que realmente importa

mecanismos de relaxação (ou seja, $\sigma_x^n = \sigma_y^n = 0$ para os n qubits que compõem o sistema de interesse), em que o sistema de interesse troca energia com o meio ambiente, levando a erros de *bit-flip*. Portanto, consideraremos que a dinâmica do sistema combinado seja descrita pelo seguinte Hamiltoniano descrito por uma versão simplificada do Hamiltoniano tradicional do modelo de spin-boson:

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^N \epsilon_n \hat{\sigma}_z^n + \sum_k \epsilon_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hbar \sum_{n,k} \hat{\sigma}_z^n \left(g_k \hat{a}_k^\dagger + g_k^* \hat{a}_k \right). \quad (4.17)$$

Aqui estamos interessados em sistemas formados por 4 qubits e na versão de interação o Hamiltoniano acima se torna

$$\tilde{H}_{int}(t) = (\hat{\sigma}_z^1 + \hat{\sigma}_z^2 + \hat{\sigma}_z^3 + \hat{\sigma}_z^4) \otimes \left(\tilde{A}(t) + \tilde{A}^\dagger(t) \right) = \hat{\sigma}_z^T \otimes \left(\tilde{A}(t) + \tilde{A}^\dagger(t) \right), \quad (4.18)$$

onde $\tilde{A}(t) = \hbar \sum_k g_k^* e^{-i\omega_k t} \hat{a}_k$ e $\hat{\sigma}_z^T$ é o operador momento angular azimutal total. Além do mais, consideraremos três casos distintos de estados iniciais para calcularmos a dinâmica dos elementos da matriz densidade; o estado *GHZ*, o estado *W* e o estado de Cluster, assumem as seguintes formas canônicas:

$$\begin{aligned} |GHZ\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0000\rangle + |1111\rangle), \\ |W\rangle &= \frac{1}{2} (|0111\rangle + |1011\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle), \\ |\Phi\rangle_c &= \frac{1}{2} (|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Veremos adiante como esses três estados se comportam dinamicamente quando as equações de Lindblad e Redfield são usadas para se calcular a suas evoluções temporais. Para efeito de comparação, calcularemos a dinâmica da fidelidade associada a esses três estados. Como os três estados iniciais considerados são estados puros, a fidelidade como função do tempo é dada por

$$F(t) = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}^Q(0) \hat{\rho}^Q(t) \right\}. \quad (4.20)$$

para um processamento de informação quântica confiável é a relação entre os tempos τ_{gate}/τ_{dec} , onde τ_{gate} é o tempo necessário para executar a computação.

4.4.1 Aplicação da equação mestra de Lindblad

A equação de Lindblad na versão de interação para o caso considerado, pode ser escrita como se segue

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}^Q(t) = -\gamma \left[\hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T \hat{\rho}^Q(t) + \hat{\rho}^Q(t) \hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T - 2\hat{\sigma}_z^T \hat{\rho}^Q(t) \hat{\sigma}_z^T \right], \quad (4.21)$$

onde $\hat{\rho}^Q$ é o operador densidade do sistema formado pelos 4 qubits e $\hat{A} = \hat{\sigma}_z^T$ é o operador de Lindblad.

Considerando o estado GHZ como sendo o nosso estado inicial, podemos calcular a dinâmica dos elementos de matriz do operador densidade usando a equação acima. Fazendo isso, obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{1,1}(t) &= 0 \rightarrow \rho_{1,1}(t) = \rho_{1,1}(0) \\ \dot{\rho}_{16,16}(t) &= 0 \rightarrow \rho_{16,16}(t) = \rho_{16,16}(0) \\ \dot{\rho}_{1,16}(t) &= -64\gamma\rho_{1,16}(t) \rightarrow \rho_{1,16}(t) = e^{-64\gamma t}\rho_{1,16}(0) \\ \dot{\rho}_{16,1}(t) &= -64\gamma\rho_{16,1}(t) \rightarrow \rho_{16,1}(t) = e^{-64\gamma t}\rho_{16,1}(0). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Considerando agora o estado W como sendo o nosso estado inicial e usando a equação de Lindblad para calcular a dinâmica dos elementos de matriz do operador densidade associado a esse estado, chegamos aos seguintes resultados: $\dot{\rho}_{i,j}(t) = 0$ para todo i e j de interesse. Logo, $\rho_{i,j}(t) = \rho_{i,j}(0)$.

Finalmente, considerando o estado de Cluster como o nosso estado inicial, obtemos a dinâmica dos elementos de matriz que representa o operador densidade desse estado

peculiar,

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{1,1}(t) &= 0 \rightarrow \rho_{1,1}(t) = \rho_{1,1}(0) \\
\dot{\rho}_{1,4}(t) &= -16\gamma\rho_{1,4}(t) \rightarrow \rho_{1,4}(t) = e^{-16\gamma t}\rho_{1,4}(0) \\
\dot{\rho}_{1,13}(t) &= -16\gamma\rho_{1,13}(t) \rightarrow \rho_{1,13}(t) = e^{-16\gamma t}\rho_{1,13}(0) \\
\dot{\rho}_{1,16}(t) &= -64\gamma\rho_{1,16}(t) \rightarrow \rho_{1,16}(t) = e^{-64\gamma t}\rho_{1,16}(0) \\
\dot{\rho}_{4,1}(t) &= -16\gamma\rho_{4,1}(t) \rightarrow \rho_{4,1}(t) = e^{-16\gamma t}\rho_{4,1}(0) \\
\dot{\rho}_{4,4}(t) &= 0 \rightarrow \rho_{4,4}(t) = \rho_{4,4}(0) \\
\dot{\rho}_{4,13}(t) &= 0 \rightarrow \rho_{4,13}(t) = \rho_{4,13}(0) \\
\dot{\rho}_{4,16}(t) &= -16\gamma\rho_{4,16}(t) \rightarrow \rho_{4,16}(t) = e^{-16\gamma t}\rho_{4,16}(0)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{13,1}(t) &= -16\gamma\rho_{13,1}(t) \rightarrow \rho_{13,1}(t) = e^{-16\gamma t}\rho_{13,1}(0) \\
\dot{\rho}_{13,4}(t) &= 0 \rightarrow \rho_{13,4}(t) = \rho_{13,4}(0) \\
\dot{\rho}_{13,13}(t) &= 0 \rightarrow \rho_{13,13}(t) = \rho_{13,13}(0) \\
\dot{\rho}_{13,16}(t) &= -16\gamma\rho_{13,16}(t) \rightarrow \rho_{13,16}(t) = e^{-16\gamma t}\rho_{13,16}(0) \\
\dot{\rho}_{16,1}(t) &= -64\gamma\rho_{16,1}(t) \rightarrow \rho_{16,1}(t) = e^{-64\gamma t}\rho_{16,1}(0) \\
\dot{\rho}_{16,4}(t) &= -16\gamma\rho_{16,4}(t) \rightarrow \rho_{16,4}(t) = e^{-16\gamma t}\rho_{16,4}(0) \\
\dot{\rho}_{16,13}(t) &= -16\gamma\rho_{16,13}(t) \rightarrow \rho_{16,13}(t) = e^{-16\gamma t}\rho_{16,13}(0) \\
\dot{\rho}_{16,16}(t) &= 0 \rightarrow \rho_{16,16}(t) = \rho_{16,16}(0).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

De posse da dinâmica da matriz densidade, dada pela equação de Lindblad (4.21), podemos calcular as respectivas fidelidades como função do tempo. Então, se $\rho^Q(0)$ representa os estados GHZ , W e Cluster, respectivamente, obtemos as seguintes expressões

para as dinâmicas das fidelidades correspondentes

$$\begin{aligned} F_{GHZ}(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-64\gamma t}, \\ F_W(t) &= 1, \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$F_C(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}e^{-64\gamma t} + \frac{1}{2}e^{-16\gamma t}. \tag{4.26}$$

Podemos notar que a fidelidade do estado W não muda com o tempo, demonstrando que esse estado é livre de descoerência para o Hamiltoniano (4.17). Podemos verificar essa constatação observando que os elementos de matriz do operador densidade desse estado particular não mudam com o tempo. Por outro lado, para os estados GHZ e Cluster, as suas fidelidades evoluem no tempo decaindo exponencialmente para uma dinâmica Lindbladiana que não considera efeitos de memória, ou seja, uma dinâmica Markoviana. Veremos a seguir que a dinâmica dada pela equação de Redfield trará resultados um pouco diferentes dos obtidos aqui nesta seção.

4.4.2 Aplicação da equação mestra de Redfield

A equação (4.15) pode ser reescrita abrindo-se o comutador

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\rho}^Q(t) = & - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_E \left\{ \tilde{H}_{int}(t) \tilde{H}_{int}(t') \tilde{\rho}^Q(t) \tilde{\rho}^E(0) \right\} \\ & + \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_E \left\{ \tilde{H}_{int}(t) \tilde{\rho}^Q(t) \tilde{\rho}^E(0) \tilde{H}_{int}(t') \right\} \\ & + \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_E \left\{ \tilde{H}_{int}(t') \tilde{\rho}^Q(t) \tilde{\rho}^E(0) \tilde{H}_{int}(t) \right\} \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_E \left\{ \tilde{\rho}^Q(t) \tilde{\rho}^E(0) \tilde{H}_{int}(t') \tilde{H}_{int}(t) \right\}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Como o Hamiltoniano de interação na versão de interação é dado pela expressão (4.18), o primeiro termo da equação (4.27) será

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}_E \left\{ \tilde{H}_{int}(t) \tilde{H}_{int}(t') \tilde{\rho}^Q(t) \tilde{\rho}^E(0) \right\} = \\
& = \text{Tr}_E \left\{ \left[\hat{\sigma}_z^T \left(\tilde{A}(t) + \tilde{A}^\dagger(t) \right) \right] \left[\hat{\sigma}_z^T \left(\tilde{A}(t') + \tilde{A}^\dagger(t') \right) \right] \tilde{\rho}^Q(t) \tilde{\rho}^E(0) \right\} \\
& = \text{Tr}_E \left\{ \hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T \tilde{A}(t) \tilde{A}(t') \tilde{\rho}^Q(t) \tilde{\rho}^E(0) \right\} + \text{Tr}_E \left\{ \hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T \tilde{A}(t) \tilde{A}^\dagger(t') \tilde{\rho}^Q(t) \tilde{\rho}^E(0) \right\} \\
& = \text{Tr}_E \left\{ \hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T \tilde{A}^\dagger(t) \tilde{A}(t') \tilde{\rho}^Q(t) \tilde{\rho}^E(0) \right\} + \text{Tr}_E \left\{ \hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T \tilde{A}^\dagger(t) \tilde{A}^\dagger(t') \tilde{\rho}^Q(t) \tilde{\rho}^E(0) \right\},
\end{aligned} \tag{4.28}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}_E \left\{ \tilde{H}_{int}(t) \tilde{H}_{int}(t') \tilde{\rho}^Q(t) \tilde{\rho}^E(0) \right\} = \\
& = \hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T \tilde{\rho}^Q(t) \text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}(t) \tilde{A}(t') \tilde{\rho}^E(0) \right\} + \hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T \tilde{\rho}^Q(t) \text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}(t) \tilde{A}^\dagger(t') \tilde{\rho}^E(0) \right\} \\
& = \hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T \tilde{\rho}^Q(t) \text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}^\dagger(t) \tilde{A}(t') \tilde{\rho}^E(0) \right\} + \hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T \tilde{\rho}^Q(t) \text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}^\dagger(t) \tilde{A}^\dagger(t') \tilde{\rho}^E(0) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Os traços que aparecem na equação (4.29) são as funções de correlação entre os operadores $\tilde{A}^\dagger(t)$ e $\tilde{A}(t)$ em tempos diferentes. Porém, as funções $\text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}(t) \tilde{A}(t') \tilde{\rho}^E(0) \right\}$ e $\text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}^\dagger(t) \tilde{A}^\dagger(t') \tilde{\rho}^E(0) \right\}$ são nulas (os detalhes dos cálculos podem ser encontrados no apêndice A na seção A.3)

$$\text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}(t) \tilde{A}(t') \tilde{\rho}^E(0) \right\} = \text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}^\dagger(t) \tilde{A}^\dagger(t') \tilde{\rho}^E(0) \right\} = 0, \tag{4.30}$$

logo,

$$\text{Tr}_E \left\{ \tilde{H}_{int}(t) \tilde{H}_{int}(t') \tilde{\rho}^Q(t) \tilde{\rho}^E(0) \right\} = \hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T \tilde{\rho}^Q(t) [\Lambda_1(t, t') + \Lambda_2(t, t')], \tag{4.31}$$

onde

$$\Lambda_1(t, t') = \text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}(t) \tilde{A}^\dagger(t') \tilde{\rho}^E(0) \right\} \tag{4.32}$$

e

$$\Lambda_2(t, t') = \text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}^\dagger(t) \tilde{A}(t') \tilde{\rho}^E(0) \right\}. \quad (4.33)$$

Seguindo o mesmo raciocínio para reescrever os outros termos da equação (4.27), obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}^Q(t) = & - \hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T \tilde{\rho}^Q(t) \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\Lambda_1(t, t') + \Lambda_2(t, t')] \\ & + \hat{\sigma}_z^T \tilde{\rho}^Q(t) \hat{\sigma}_z^T \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\Lambda_1(t', t) + \Lambda_2(t', t)] \\ & + \hat{\sigma}_z^T \tilde{\rho}^Q(t) \hat{\sigma}_z^T \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\Lambda_1(t, t') + \Lambda_2(t, t')] \\ & - \tilde{\rho}^Q(t) \hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\Lambda_1(t', t) + \Lambda_2(t', t)]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Os cálculos de $\Lambda_1(t, t')$ e $\Lambda_2(t, t')$ podem ser encontrados no apêndice A na seção A.3, onde também observamos que

$$\Lambda_1(t', t) = \Lambda_1^*(t, t'), \quad (4.35)$$

$$\Lambda_2(t', t) = \Lambda_2^*(t, t'). \quad (4.36)$$

Definindo as funções

$$C(t, t') = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\Lambda_1(t, t') + \Lambda_2(t, t')], \quad (4.37)$$

$$C^*(t, t') = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\Lambda_1^*(t, t') + \Lambda_2^*(t, t')], \quad (4.38)$$

$$(4.39)$$

podemos separá-las em suas respectivas partes real e imaginária,

$$u(t) + iv(t) = \int dt C(t, t'). \quad (4.40)$$

As funções $u(t)$ e $v(t)$ são pesos estatísticos que definem a dinâmica temporal do estado do sistema de interesse. A equação (4.34) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}^Q(t) = & - \hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T \tilde{\rho}^Q(t) [\dot{u}(t) + i\dot{v}(t)] \\ & + \hat{\sigma}_z^T \tilde{\rho}^Q(t) \hat{\sigma}_z^T [\dot{u}(t) - i\dot{v}(t)] \\ & + \hat{\sigma}_z^T \tilde{\rho}^Q(t) \hat{\sigma}_z^T [\dot{u}(t) + i\dot{v}(t)] \\ & - \tilde{\rho}^Q(t) \hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T [\dot{u}(t) - i\dot{v}(t)], \end{aligned} \quad (4.41)$$

ou seja

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}^Q(t) = 2\dot{u}(t) \hat{\sigma}_z^T \tilde{\rho}^Q(t) \hat{\sigma}_z^T - \dot{u}(t) \{ \hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T, \tilde{\rho}^Q(t) \} - i\dot{v}(t) [\hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T, \tilde{\rho}^Q(t)]. \quad (4.42)$$

Podemos observar alguma semelhança entre a equação de Lindblad (4.21) e a equação de Redfield (4.42). Note que a equação de Lindblad também pode ser escrita em termos do anti-comutador $\{ \hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T, \tilde{\rho}^Q(t) \}$ e dessa forma os dois primeiros termos do lado direito da equação (4.42) se parecem com uma evolução Lindbladiana cuja taxa de decaimento γ é nesse caso dependente do tempo e dada por $\dot{u}(t)$. Por outro lado, o último termo da equação (4.42) é um termo adicional que aparece na dinâmica, o qual depende da parte imaginária das funções de correlação do reservatório. Note que a presença ou a ausência desse termo é determinada pelo valor do comutador $[\hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T, \tilde{\rho}^Q(t)]$. Se $[\hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T, \tilde{\rho}^Q(t)] = 0$, esse termo não colabora para a dinâmica do estado do sistema. Porém, se $[\hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T, \tilde{\rho}^Q(t)] \neq 0$, o termo estará presente na dinâmica e produzirá oscilações nas coerências.

Resolvendo a equação mestra (4.42), podemos calcular a dinâmica da fidelidade para os três estados iniciais considerados anteriormente. Logo, se $\rho^Q(0)$ representa os estados *GHZ*, *W* e *Cluster*, respectivamente, obtemos as seguintes expressões para as dinâmicas

das fidelidades

$$F_{GHZ}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-64u(t)},$$

$$F_W(t) = 1, \tag{4.43}$$

$$F_C(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \left\{ e^{-64u(t)} + 4e^{-16u(t)} \cos[16v(t)] \right\}. \tag{4.44}$$

Podemos observar três comportamentos distintos. Novamente, como foi observado, usando-se a equação de Lindblad para se calcular a dinâmica da fidelidade do estado W , esse estado é livre de descoerência para o Hamiltoniano (4.17) e a sua fidelidade não muda com o tempo. Para o estado GHZ um decaimento exponencial é observado e depende apenas da parte real das funções de correlação do meio ambiente. Entretanto, para o estado de Cluster um comportamento oscilatório é observado, cuja frequência é definida pela parte imaginária das funções de correlação do meio ambiente.

Para entender melhor a natureza dessas oscilações vamos separar os auto-estados do operador σ_z^T em três grupos distintos, onde colocaremos no mesmo grupo auto-estados que possuem o mesmo auto-valor, em módulo, do operador σ_z^T . Assim,

$$\begin{aligned} \text{Grupo 1} & : \{ |1111\rangle, |0000\rangle \} \\ \text{Grupo 2} & : \{ |0001\rangle, |0010\rangle, |0100\rangle, |1000\rangle, \\ & \quad |1110\rangle, |1101\rangle, |1011\rangle, |0111\rangle \} \\ \text{Grupo 3} & : \{ |0011\rangle, |0110\rangle, |1100\rangle, \\ & \quad |1010\rangle, |1001\rangle, |0101\rangle \}. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Nós notamos que qualquer estado inicial dado por uma combinação linear de vetores pertencentes ao mesmo grupo, gerará uma matriz densidade inicial que satisfaz $[\hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T, \tilde{\rho}^Q(t)] = 0$. Como observamos, esse é o caso dos estados W e GHZ . Por outro lado, o estado de

Cluster é dado por uma combinação de elementos que pertencem ao Grupo 1 e ao Grupo 2, e nesse caso $[\hat{\sigma}_z^T \hat{\sigma}_z^T, \tilde{\rho}^Q(t)] \neq 0$. Esse fato introduz na equação mestra (4.15) o termo imaginário adicional responsável pelo comportamento não-monotônico da dinâmica da fidelidade.

5 Dinâmica exata da fidelidade

Neste capítulo, motivados a entender melhor os diferentes resultados entre a dinâmica da fidelidade do estado de *Cluster* calculada via equação mestra de Lindblad e equação mestra de Redfield (deduzida sem considerarmos aproximações Markovianas), decidimos usar um modelo exatamente solúvel (37) para calcular a dinâmica dissipativa da fidelidade entre o estado inicial de um sistema de N qubits, $\hat{\rho}^Q(t_0)$, e o estado evoluído no tempo, $\hat{\rho}^Q(t)$, quando os N qubits interagem coletivamente com um meio ambiente que causa efeitos de defasagem, isto é, o meio ambiente insere erros de fase no sistema. Em nosso modelo, o sistema inicial é sempre preparado num estado puro $\hat{\rho}^Q(t_0) = |\Psi(t_0)\rangle\langle\Psi(t_0)|$. Como anteriormente, consideramos o Hamiltoniano de interação dado por $\hat{\sigma}_z^T \otimes \hat{E}$, onde $\hat{\sigma}_z^T \equiv \sum_{n=1}^N \hat{\sigma}_z^{(n)}$ é o momento angular azimutal total do sistema formado por N qubits e $\hat{E} \equiv \hbar \sum_{k=1}^{\infty} \left(g_k \hat{a}_k^\dagger + g_k^* \hat{a}_k \right)$ é o operador que age nos graus de liberdade do meio ambiente. $\hat{\sigma}_z^{(n)}$ é o operador momento angular azimutal do n -ésimo qubit, g_k e g_k^* são as constantes de acoplamento entre o sistema e o meio ambiente, e, $\hat{a}_k^\dagger$ e $\hat{a}_k$ são os operadores usuais de criação e aniquilação de um *quantum* de excitação no k -ésimo modo do campo.

Através da análise da evolução dos elementos da matriz que representa o operador densidade do sistema, fomos capazes de reformular a condição necessária para que a fidelidade oscile no tempo encontrada no capítulo 4. Mostramos que para qualquer estado inicial dado por uma superposição de autoestados do operador $\hat{\sigma}_z^T$ cujos autovalores são diferentes em módulo, a fidelidade exibe um comportamento oscilatório. Para sermos mais precisos, suponha que $\hat{\sigma}_z^{(n)}|m_n\rangle = m_n|m_n\rangle$, onde $|m_n\rangle = |0\rangle_n, |1\rangle_n$ é o estado do n -ésimo

qubit e $m_n = \pm 1$ é o respectivo autovalor; seja $\{|m_1, m_2, \dots, m_N\rangle\}$ uma base escolhida convenientemente para representar um sistema de N qubits cujo estado inicial pode ser escrito da seguinte forma:

$$|\Psi(t_0)\rangle = \sum_{m_1=0}^1 \sum_{m_2=0}^1 \cdots \sum_{m_N=0}^1 c_{m_1, m_2, \dots, m_N}(t_0) |m_1, m_2, \dots, m_N\rangle, \quad (5.1)$$

onde agora $\hat{\sigma}_z^T |m_1, m_2, \dots, m_N\rangle = M |m_1, m_2, \dots, m_N\rangle$ com $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$. Se os autovetores de $\hat{\sigma}_z^T$ que compõem o estado $|\Psi(t_0)\rangle$ possuem autovalores iguais em módulo, isto é, se os vetores $|m_1, m_2, \dots, m_N\rangle$ que compõem o estado $|\Psi(t_0)\rangle$ possuem $|M|$ todos iguais, então a dinâmica da fidelidade jamais apresentará características não-monotônicas. Por outro lado, se pelo menos um autovetor que compõe o estado $|\Psi(t_0)\rangle$ possui um autovalor em módulo diferente dos demais, podemos observar um comportamento não-monotônico de natureza oscilatória na dinâmica da fidelidade. Essa condição se revelou necessária para a fidelidade apresentar um comportamento oscilatório, e não depende do emaranhamento inicial entre os qubits que compõem o sistema (dependendo apenas da configuração geométrica do estado inicial do sistema). Esse resultado por si só é extremamente interessante, pois, conhecer o estado inicial do sistema nos permite dizer se a fidelidade apresentará um comportamento oscilatório ou não.

Essa capacidade de previsão pode ser muito útil quando o estado inicial do sistema, interagindo com o meio ambiente segundo o modelo considerado, é usado como substrato para a computação quântica baseada em medidas projetivas locais. Como veremos, os tempos de “revival” das coerências do estado de *Cluster* proporcionam os melhores tempos para a aplicação das medidas projetivas, obtendo, dessa forma, os melhores valores para a fidelidade da computação. Nesse sentido, medidas realizadas em tempos curtos não garantem bons resultados da computação, enquanto medidas aplicadas em tempos mais longos não necessariamente produzirão resultados ruins. Ou seja, podemos identificar os

melhores tempos para a realização das medidas que produzirão os melhores resultados. Esse resultado é uma consequência natural do comportamento oscilatório das coerências da matriz densidade. Como exemplo, estudamos as implicações desse comportamento oscilatório no caso em que a computação executa um bit-flip, ou seja, a sequência de medidas projetivas locais aplicadas nos qubits executa uma porta lógica do tipo NOT.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção 5.1 descrevemos a dinâmica dissipativa exata de um sistema de N qubits interagindo com um meio comum que insere no sistema um erro de fase (37). Na seção 5.2 mostramos a condição necessária para o aparecimento de um comportamento não-monotônico da fidelidade e a aplicamos em alguns casos interessantes de sistemas formados por dois e quatro qubits. Na seção 5.3 nós apresentamos as implicações dos nossos resultados para a computação quântica baseada em medidas projetivas locais e aplicamos no caso em que a computação executa uma porta lógica do tipo NOT.

5.1 Dinâmica dissipativa exata

Considere o seguinte Hamiltoniano de um sistema composto por N qubits interagindo coletivamente com um meio ambiente que insere um erro de fase

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^N \epsilon_n \hat{\sigma}_z^{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hbar \sum_{n,k} \hat{\sigma}_z^{(n)} \left(g_k \hat{a}_k^\dagger + g_k^* \hat{a}_k \right), \quad (5.2)$$

onde os dois primeiros termos representam a evolução livre dos qubits e do meio, respectivamente, e o terceiro termo descreve a interação entre eles. Os operadores $\hat{a}_k^\dagger$ e $\hat{a}_k$ são os operadores usuais de criação e aniquilação de um *quantum* de excitação no k -ésimo modo do meio ambiente, e seguem a álgebra de Heisenberg satisfazendo a relação de comutação canônica $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}$. O operador $\hat{\sigma}_z^{(n)}$ é o operador de Pauli $\hat{\sigma}_z$ do n -ésimo qubit. As

constantes complexas g_k e g_k^* são as constantes de acoplamento entre os qubits e os modos do campo. Além disso, $\epsilon_n = \hbar\omega_0^n$ é a diferença de energia entre os níveis fundamental e excitado do qubit n e $\epsilon_k = \hbar\omega_k$ é a energia associada com o k -ésimo modo do campo, com ω_0^n e ω_k sendo respectivamente a frequência de transição e a frequência do k -ésimo modo do campo. Assumimos que inicialmente o estado dos qubits e o estado do meio ambiente estão desacoplados, isto é, o estado inicial do sistema combinado pode ser representado por um operador densidade dado pelo seguinte produto tensorial $\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}^Q(0) \otimes \hat{\rho}^E(0)$, em que $\hat{\rho}^Q(0)$ e $\hat{\rho}^E(0)$ representam o estado inicial dos qubits e o estado inicial do meio, respectivamente. Nós também assumimos que o meio está inicialmente em equilíbrio térmico

$$\hat{\rho}^E(0) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\beta \hat{H}_E\right), \quad (5.3)$$

onde $\hat{H}_E = \sum_k \epsilon_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ é o Hamiltoniano do meio ambiente, $Z = \text{Tr}_E \left[\exp\left(-\beta \hat{H}_E\right) \right]$ é a função de partição, e $\beta = 1/k_B T$, com k_B representando a constante de Boltzmann e T a temperatura.

Agora, reescrevemos o Hamiltoniano (5.2) como uma soma de dois termos, $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$, onde $\hat{H}_0 = \sum_{n=1}^N \epsilon_n \hat{\sigma}_z^{(n)} + \sum_k \epsilon_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ e $\hat{H}_{int} = \hbar \sum_{n,k} \hat{\sigma}_z^{(n)} \left(g_k \hat{a}_k^\dagger + g_k^* \hat{a}_k \right)$. Assim, na versão de interação $\tilde{H}_{int} = \hat{U}_0^\dagger \hat{H}_{int} \hat{U}_0$, nós temos

$$\tilde{H}_{int}(t) = \hbar \sum_{n,k} \hat{\sigma}_z^{(n)} \left(g_k e^{i\omega_k t} \hat{a}_k^\dagger + g_k^* e^{-i\omega_k t} \hat{a}_k \right), \quad (5.4)$$

em que $\hat{U}_0 = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right)$. Então, o operador evolução temporal é dado por

$$\hat{U}_I(t) = \hat{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \tilde{H}_{int}(t') dt' \right] \quad (5.5)$$

onde $\hat{T}$ é o operador de ordenamento temporal de Dyson. Se substituirmos a equação (5.4) na equação (5.5), obteremos, depois de alguns cálculos (veja apêndice C), a seguinte

expressão para o operador evolução temporal:

$$\begin{aligned}\hat{U}_I(t) &= \exp \left\{ \sum_{n,k} \left[g_k \hat{\sigma}_z^{(n)} \varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger - g_k^* \hat{\sigma}_z^{(n)} \varphi_{\omega_k}^*(t) \hat{a}_k \right] \right\} \\ &\times \exp \left\{ i \sum_k \sum_{m,n} |g_k|^2 \hat{\sigma}_z^{(m)} \hat{\sigma}_z^{(n)} s(\omega_k, t) \right\},\end{aligned}\quad (5.6)$$

em que $\varphi_{\omega_k}(t) = \frac{1 - e^{i\omega_k t}}{\omega_k}$ e $s(\omega_k, t) = \frac{\omega_k t - \sin(\omega_k t)}{(\omega_k)^2}$.

A dinâmica do sistema de N qubits pode ser escrita em termos do operador densidade do sistema combinado como se segue:

$$\hat{\rho}^Q(t) = \text{Tr}_E \left[\hat{U}_I(t) \hat{\rho}^Q(0) \otimes \hat{\rho}^E(0) \hat{U}_I^\dagger(t) \right], \quad (5.7)$$

onde o traço Tr_E é tomado nos graus de liberdade do meio ambiente. Portanto, os elementos da matriz densidade reduzida podem ser expressos como

$$\hat{\rho}_{\{i_n, j_n\}}^Q(t) = \langle i_1, i_2, \dots, i_N | \hat{\rho}^Q(t) | j_1, j_2, \dots, j_N \rangle, \quad (5.8)$$

em que $\{i_n, j_n\} \equiv \{i_1, j_1; i_2, j_2; \dots; i_N, j_N\}$ refere-se ao estado do sistema. Aqui nós temos $i_n, j_n = \pm 1$, isto é, j_n são os autovalores do operador de Pauli $\hat{\sigma}_z^{(n)}$ associados aos estados do n -ésimo qubit, $|0\rangle_n$ e $|1\rangle_n$, e i_n são os autovalores do operador $\hat{\sigma}_z^{(n)}$ associados ao respectivo espaço dual, ${}_n\langle 0|$ e ${}_n\langle 1|$. Após alguns cálculos (veja o apêndice C), finalmente obtemos explicitamente a dinâmica dos elementos da matriz densidade do sistema formado por N qubits

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\{i_n, j_n\}}^Q(t) &= \exp \left\{ -\gamma(t, T) \left[\sum_{n=1}^N (i_n - j_n) \right]^2 \right\} \\ &\times \exp \left\{ i\theta \left[\left(\sum_{n=1}^N i_n \right)^2 - \left(\sum_{n=1}^N j_n \right)^2 \right] \right\} \hat{\rho}_{\{i_n, j_n\}}^Q(0),\end{aligned}\quad (5.9)$$

onde

$$\gamma(t, T) = \sum_k |g_k|^2 c(\omega_k, t) \times \coth \left(\frac{\hbar \omega_k}{2k_B T} \right) \quad (5.10)$$

e

$$\theta(t) = \sum_k |g_k|^2 s(\omega_k, t), \quad (5.11)$$

com $c(\omega_k, t) = \frac{1 - \cos(\omega_k t)}{(\omega_k)^2}$. No limite do contínuo a equação (5.9) pode ser reescrita como se segue:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\{i_n, j_n\}}^Q(t) = & \exp \left\{ -\Gamma(t, T) \left[\sum_{n=1}^N (i_n - j_n) \right]^2 \right\} \\ \times & \exp \left\{ i\Theta(t) \left[\left(\sum_{n=1}^N i_n \right)^2 - \left(\sum_{n=1}^N j_n \right)^2 \right] \right\} \hat{\rho}_{\{i_n, j_n\}}^Q(0), \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde agora

$$\Gamma(t, T) = \int d\omega J(\omega) c(\omega, t) \coth \left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right) \quad (5.13)$$

e

$$\Theta(t) = \int d\omega J(\omega) s(\omega, t), \quad (5.14)$$

em que $J(\omega) \equiv \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega - \omega_k) \equiv (dk/d\omega) G(\omega) |g(\omega)|^2$ é a densidade espectral associada ao meio ambiente. A essa função é associada uma frequência de corte ω_c cujo valor depende do meio ambiente e impõe a condição $J(\omega) \mapsto 0$ para $\omega \gg \omega_c$.

É fácil notar através da equação (5.12) que os efeitos de descoerência advindos do ruído térmico podem ser separados dos efeitos provenientes das flutuações do vácuo quântico. Essa separação permite um exame das diferentes escalas de tempo presentes na dinâmica. As escalas de tempo mais rápidas são determinadas pela frequência de corte, $\tau_c \sim \omega_c^{-1}$. A outra escala de tempo que surge naturalmente, $\tau_T \sim \omega_T^{-1}$, é determinada pela frequência térmica $\omega_T = \frac{k_B T}{\hbar}$. Com essas duas escalas de tempo, podemos definir dois regimes diferentes de tempo: o regime *quântico* e o regime *térmico*, respectivamente. Já que os efeitos térmicos afetarão o sistema de N qubits predominantemente apenas para tempos $t > \tau_T$, o regime quântico acontece no seguinte intervalo de tempo $\tau_c < t < \tau_T$, quando as flutuações do vácuo quântico contribuem predominantemente. Além do mais, nós

podemos ver pela equação (5.13) e a equação (5.14) que para altas temperaturas, isto é, $\hbar\omega \ll k_B T$, o fator de decaimento de fase $\Gamma(t, T)$ é o agente principal responsável pela descoerência, enquanto o outro fator de decaimento de fase $\Theta(t)$ desempenha um papel menor. Nesse caso $\omega_c \ll \omega_T$ e flutuações térmicas sempre dominam sobre as flutuações do vácuo. Todavia, quando nós consideramos a situação inversa, ou seja, um meio ambiente com baixa temperatura, esses fatores de decaimento competem entre si dentro da mesma escala de tempo, e agora, $\Theta(t)$ desempenha um papel maior nos processos de descoerência em sistemas de N qubits.

Nós assumimos em nosso modelo uma densidade espectral ôhmica,

$$J(\omega) = \eta \omega e^{-\omega/\omega_c}, \quad (5.15)$$

onde η é uma constante de proporcionalidade adimensional que caracteriza o acoplamento entre o sistema e o meio. Substituindo a equação (5.15) nas equações (5.13) e (5.14) obtemos

$$\Gamma(t, T) = \eta \int d\omega e^{-\omega/\omega_c} \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega} \coth\left(\frac{\omega}{2\omega_T}\right) \quad (5.16)$$

e

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= \eta \int d\omega e^{-\omega/\omega_c} \frac{\omega t - \sin(\omega t)}{\omega} \\ &= \eta \omega_c t - \eta \arctan(\omega_c t). \end{aligned} \quad (5.17)$$

A solução geral da integral dada pela equação (5.16) requer integração numérica, porém uma solução aproximada pode ser obtida para baixas temperaturas

$$\Gamma(t, T) \approx \eta \left[2\omega_T t \arctan(2\omega_T t) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \omega_c^2 t^2}{1 + 4\omega_T^2 t^2} \right) \right]. \quad (5.18)$$

A equação (5.18) leva à identificação dos dois regimes principais definidos acima: o regime quântico, para o qual $\tau_c < t < \tau_T$ e $\Gamma(t, T) \approx \eta \ln(\omega_c t)$, e o regime térmico em

que $t > \tau_T$ e $\Gamma(t, T) \approx 2\eta\omega_T t$. Como mostraremos adiante, esses dois regimes distintos resultam em dinâmicas da fidelidade bem diferentes, decaindo monotonicamente no regime térmico e oscilando no regime quântico.

5.2 Oscilações na dinâmica da fidelidade

Nesta seção estamos interessados em descobrir quando a dinâmica da fidelidade de um sistema de N qubits interagindo coletivamente com um meio ambiente, na forma descrita pelo Hamiltoniano de interação (5.4), oscilará no tempo. Nós apresentamos, para o regime quântico, uma condição necessária para a dinâmica da fidelidade apresentar comportamento oscilatório. Aqui, já que sempre consideramos estados puros como os nossos estados iniciais, a fidelidade como função do tempo é dada por

$$F(t) = \text{Tr} \{ \hat{\rho}^Q(0) \hat{\rho}^Q(t) \}. \quad (5.19)$$

A dinâmica dos qubits interagindo com um meio comum é fortemente dependente das condições iniciais e nós mostraremos que, dentro do regime quântico de tempos, a fidelidade sempre apresentará um comportamento oscilatório quando o sistema formado por N qubits é escrito como uma superposição coerente de autoestados do operador $\hat{\sigma}_z^T$ cujos autovalores são diferentes em módulo. Como podemos ver pela equação (5.12), o segundo termo exponencial é responsável pelas oscilações e é identicamente igual a 1 quando $\left(\sum_{n=1}^N i_n\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^N j_n\right)^2$, isto é, quando $\sum_{n=1}^N i_n = \pm \sum_{n=1}^N j_n$. Podemos reescrever essa condição de forma mais elegante e assumir que sempre que $\left|\sum_{n=1}^N i_n\right| = \left|\sum_{n=1}^N j_n\right|$, o segundo termo exponencial da equação (5.12) é identicamente igual a 1. Note que $\sum_{n=1}^N j_n$ são os autovalores do operador momento angular azimutal total associados aos autoestados $|j_1, j_2, \dots, j_n\rangle$. Portanto, se o estado inicial do sistema de N qubits é

uma superposição coerente de autoestados do operador $\hat{\sigma}_z^T$, cujos autovalores são iguais em módulo, a condição $\left| \sum_n^N i_n \right| = \left| \sum_n^N j_n \right|$ é automaticamente satisfeita e a dinâmica da fidelidade não oscila de forma alguma. Por outro lado, um estado de N qubits que não é escrito dessa forma, ou seja, um estado que é escrito como uma superposição coerente de autoestados de $\hat{\sigma}_z^T$ cujos autovalores são diferentes em módulo, possui uma fidelidade que de fato oscila no tempo. Consequentemente, dentro do regime quântico de tempos, a condição $\left| \sum_n^N i_n \right|^2 \neq \left| \sum_n^N j_n \right|^2$ é uma condição necessária para que a fidelidade apresente comportamentos não-monotônicos de natureza oscilatória. É importante enfatizar que esse comportamento é intrínseco da geometria da condição inicial e essa propriedade não está correlacionada com o grau de emaranhamento do sistema no instante inicial.

A seguir, consideraremos alguns exemplos para ilustrar como funciona essa condição que, especificamente no regime quântico, determina se haverá ou não oscilação na dinâmica da fidelidade. Primeiramente, na subseção 5.2.1 consideramos sistemas formados por 2 qubits e posteriormente, na subseção 5.2.2, consideramos sistemas formados por 4 qubits.

5.2.1 Dinâmica da fidelidade para estados de dois qubits

Para melhor compreensão dos exemplos considerados aqui, é conveniente separarmos os quatro autovetores do operador $\sigma_z^T \equiv \sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)}$ em dois grupos distintos:

$$\text{Grupo 1} : \{ |00\rangle, |11\rangle \} \quad (5.20)$$

$$\text{Grupo 2} : \{ |01\rangle, |10\rangle \}. \quad (5.21)$$

Note que os autovetores pertencentes ao primeiro grupo possuem os mesmos autovalores do operador σ_z^T em módulo, já que, $\sigma_z^T |00\rangle = 2|00\rangle$ e $\sigma_z^T |11\rangle = -2|00\rangle$. Evidentemente, os autovetores pertencentes ao segundo grupo também possuem os mesmos autovalores

do operador σ_z^T em módulo, pois, $\sigma_z^T|01\rangle = 0|01\rangle$ e $\sigma_z^T|10\rangle = 0|10\rangle$. Veremos abaixo que os estados que são escritos como uma combinação linear de vetores pertencentes ao mesmo grupo apresentarão fidelidades que não oscilam no tempo, enquanto estados que são escritos como uma combinação linear de vetores que pertencem a diferentes grupos apresentarão fidelidades que oscilam no tempo. Como exemplo consideraremos alguns estados iniciais que são escritos como uma combinação linear de vetores que pertencem ao mesmo grupo e estados que não são escritos dessa forma.

Primeiramente, consideramos os quatro estados de Bell

$$|\Psi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\Psi^-\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (5.22)$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\Phi^-\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (5.23)$$

Os quatro estados de Bell exemplificam o caso em que dinâmica da fidelidade não oscila no tempo, pois, todos os estados acima são escritos como uma combinação linear de vetores pertencentes ao mesmo grupo e que compartilham dos mesmos autovalores do operador σ_z^T em módulo. Na verdade, as fidelidades dos estados $|\Psi^+\rangle$ e $|\Psi^-\rangle$ decaem exponencialmente (de forma monotônica) no tempo

$$F_{|\Psi^+\rangle} = F_{|\Psi^-\rangle} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-16\Gamma(t,T)}, \quad (5.24)$$

e as fidelidades associadas aos estados $|\Phi^+\rangle$ e $|\Phi^-\rangle$ são constantes no tempo

$$F_{|\Phi^+\rangle} = F_{|\Phi^-\rangle} = 1. \quad (5.25)$$

Podemos entender o comportamento das fidelidades (5.24) e (5.25) em termos da dinâmica dos elementos da matriz densidade que representa o estado considerado. Se escrevermos os operadores densidade associados aos quatro estados de Bell, obtemos:

$$\hat{\rho}_{\Psi^+} = \frac{1}{2} [|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|]. \quad (5.26)$$

$$\hat{\rho}_{\Psi^-} = \frac{1}{2} [|00\rangle\langle 00| - |00\rangle\langle 11| - |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|]. \quad (5.27)$$

$$\hat{\rho}_{\Phi^+} = \frac{1}{2} [|01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|]. \quad (5.28)$$

$$\hat{\rho}_{\Phi^-} = \frac{1}{2} [|01\rangle\langle 01| - |01\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|]. \quad (5.29)$$

Agora, escrevendo as quatro matrizes que representam esses estados na base computacional, obtemos

$$\hat{\rho}_{\Psi^+} \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\rho}_{\Psi^-} \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

$$\hat{\rho}_{\Phi^+} \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\rho}_{\Phi^-} \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

No apêndice B identificamos a dinâmica exata de todos os elementos da matriz densidade de um estado de um sistema de dois qubits e pudemos determinar, entre todos os elementos de matriz, aqueles que oscilam, aqueles que decaem exponencialmente e aqueles que se mantêm constantes. Então, seguindo o apêndice B, vemos que as coerências $\rho_{1,4}$ e $\rho_{4,1}$, das matrizes (5.30), decaem exponencialmente no tempo, o que justifica o comportamento da dinâmica das fidelidades (5.24) associadas aos estados $|\Psi^\pm\rangle$, enquanto as coerências $\rho_{2,3}$ e $\rho_{3,2}$, das matrizes (5.31), não mudam com o tempo, isto é, são constantes, e os estados $|\Phi^\pm\rangle$ formam um subespaço livre de descoerência, como é evidente pela dinâmica das fidelidades (5.24). Portanto, os quatro estados de Bell formam um conjunto exemplar de estados maximamente emaranhados que não apresentam oscilações na dinâmica de

suas fidelidades. O nosso próximo exemplo, porém, considera um estado maximamente emaranhado (pertencente a mesma classe de emaranhamento formada pelos estados de Bell) cuja fidelidade oscila no tempo, apresentando comportamentos não-monotônicos. Já que o estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle), \quad (5.32)$$

é escrito como uma soma de vetores pertencentes aos grupos 1 e 2, ou seja, já que ele é escrito como uma combinação de autovetores do operador σ_z^T cujos autovalores são diferentes em módulo, a sua fidelidade irá oscilar satisfazendo a equação abaixo

$$F_{|\psi\rangle} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}e^{-16\Gamma(t,T)} + \frac{1}{2}e^{-4\Gamma(t,T)} \cos[4\Theta(t)]. \quad (5.33)$$

Portanto, dentro da mesma classe de emaranhamento encontramos estados cujas fidelidades se comportam dinamicamente de formas distintas; algumas se mantêm constantes, outras decaem monotonicamente e outras apresentam comportamentos não-monotônicos, e, esses comportamentos distintos dependem apenas da geometria do estado inicial.

Agora consideraremos um estado de dois qubits que é totalmente separável, todavia, a sua fidelidade oscila no tempo. O estado

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + |11\rangle) = |1\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right), \quad (5.34)$$

não é um estado emaranhado já que podemos escrevê-lo como um estado produto, ou seja, em termos do produto tensorial entre os subsistemas caracterizados pelo estado do qubit 1 e o estado do qubit 2; porém, por ele ser escrito como uma superposição coerente de autovetores do operador σ_z^T cujos autovalores em módulo são diferentes, a sua fidelidade oscilará no tempo seguindo a equação abaixo

$$F_{|\phi\rangle} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-4\Gamma(t,T)} \cos[4\Theta(t)]. \quad (5.35)$$

Figura 5.1. A dinâmica da fidelidade para os quatro estados de Bell $|\Phi^\pm\rangle$ (linha vermelha) e $|\Psi^\pm\rangle$ (linha verde), e, o comportamento não-monotônico da dinâmica da fidelidade para o estado emaranhado (5.32) (linha azul) e para o estado separável (5.34) (linha preta). Aqui, assumimos uma densidade espectral ôhmica de forma que $\Theta(t) = \eta\omega_c t - \eta \arctan(\omega_c t)$, e, no regime quântico $\tau_c < t < \tau_T$, $\Gamma(t, T) \approx \eta \ln(\omega_c t)$. Além disso, consideramos $\eta = 1/100$ e $\omega_c = 100$.

Concluimos então, que o comportamento não-monotônico da dinâmica da fidelidade nada tem a ver com o grau de emaranhamento do sistema e está relacionado com a geometria do estado do sistema.

Pela figura (5.1) podemos observar o comportamento dos seis estados considerados acima assumindo uma densidade espectral ôhmica no regime quântico de tempo, isto é, para $J(\omega) = \eta\omega e^{-\omega/\omega_c}$ e $\tau_c < t < \tau_T$. Nesse regime, o fator de decaimento é dado por $\Gamma(t, T) \approx \eta \ln(\omega_c t)$ e o fator ligado às oscilações é $\Theta(t) = \eta\omega_c t - \eta \arctan(\omega_c t)$. Consideramos $\eta = 1/100$ e $\omega_c = 100$. A linha vermelha mostra o comportamento dos dois estados de Bell, $|\Phi^\pm\rangle$, que formam um subespaço livre de descoerência e a linha verde mostra o comportamento dos outros dois estados de Bell, $|\Psi^\pm\rangle$, que decaem exponencialmente no tempo. As linhas azul e preta mostram os estados (5.32) e (5.34), respectivamente. Como podemos observar, esses estados apresentam as oscilações típicas do regime quântico de tempo para estados cuja a geometria satisfaça a condição proposta aqui. A seguir,

veremos como se comportam alguns estados de 4 qubits.

5.2.2 Dinâmica da fidelidade para estados de quatro qubits

Nesta subseção consideraremos sistemas formados por 4 qubits emaranhados e analisaremos o comportamento da dinâmica da fidelidade para três tipos diferentes de condições iniciais: o estado GHZ , o estado W , e o estado de $Cluster$. Cada estado inicial considerado pertence a uma classe distinta e não equivalente de emaranhamento. Embora os estados emaranhados considerados aqui definem classes diferentes de emaranhamento, observamos, mesmo dentro da mesma classe, dinâmicas da fidelidade que se comportam de forma bem diferente. Vamos considerar os estados canônicos GHZ , W e $Cluster$:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0000\rangle + |1111\rangle), \quad (5.36)$$

$$|W\rangle = \frac{1}{2} (|0111\rangle + |1011\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle), \quad (5.37)$$

$$|\Phi\rangle_c = \frac{1}{2} (|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle). \quad (5.38)$$

Em posse da dinâmica da matriz densidade dada pela equação (5.12), podemos calcular as respectivas fidelidades como função do tempo. Então, se $\rho^Q(0)$ representa os estados GHZ , W e $Cluster$, respectivamente, obtemos as seguintes expressões para as fidelidades correspondentes

$$F_{GHZ}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-64\Gamma(T,t)}, \quad (5.39)$$

$$F_W(t) = 1, \quad (5.40)$$

$$F_C(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \{e^{-64\Gamma(T,t)} + 4e^{-16\Gamma(T,t)} \cos[16\Theta(t)]\}. \quad (5.41)$$

Podemos observar pela figura (5.2) três comportamentos distintos, dependendo da condição inicial. O estado canônico W é livre de descoerência para a interação representada pelo

Figura 5.2. A dinâmica da fidelidade para o estado W (linha vermelha), para o estado GHZ (linha verde), e para o estado de $Cluster$ (linha azul). Aqui, novamente assumimos uma densidade espectral ôhmica de forma que $\Theta(t) = \eta\omega_c t - \eta \arctan(\omega_c t)$ e $\Gamma(t, T) \approx \eta \ln(\omega_c t)$ no regime quântico de tempo ($\tau_c < t < \tau_T$). Além disso, consideramos $\eta = 1/100$ e $\omega_c = 100$

Hamiltoniano (5.4) e a sua fidelidade é constante no tempo. O estado GHZ apresenta uma fidelidade que decai exponencialmente com o passar do tempo. Todavia, o estado de $Cluster$ apresenta uma fidelidade que oscila no tempo. Novamente assumimos uma densidade espectral ôhmica dada por $J(\omega) = \eta\omega e^{-\omega/\omega_c}$ de forma que $\Theta(t) = \eta\omega_c t - \eta \arctan(\omega_c t)$. No regime quântico de tempo a taxa de decaimento é dada por $\Gamma(t, T) \approx \eta \ln(\omega_c t)$.

Para um melhor entendimento do comportamento não-monotônico da dinâmica da fidelidade associada ao estado de $Cluster$, vamos separar os 16 autovetores do operador $\sigma_z^T \equiv \sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)} + \sigma_z^{(3)} + \sigma_z^{(4)}$ em três grupos distintos. Explicitamente

$$\text{Grupo 1} : \{ |1111\rangle, |0000\rangle \} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \text{Grupo 2} : \quad & \{ |0001\rangle, |0010\rangle, |0100\rangle, |1000\rangle, \\ & |1110\rangle, |1101\rangle, |1011\rangle, |0111\rangle \} \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \text{Grupo 3} : \quad & \{ |0011\rangle, |0110\rangle, |1100\rangle, \\ & |1010\rangle, |1001\rangle, |0101\rangle \}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Note que para qualquer estado inicial dado por uma combinação linear de elementos pertencentes ao mesmo grupo, temos $|\sum_{n=1}^4 i_n|^2 = |\sum_{n=1}^4 j_n|^2$. Como observamos, esse é o caso do estado $|GHZ\rangle$ e do estado $|W\rangle$. Por outro lado, o estado de *Cluster* é dado por uma combinação linear de elementos pertencentes ao Grupo 1 e ao Grupo 2, e nesse caso temos $|\sum_{n=1}^4 i_n|^2 \neq |\sum_{n=1}^4 j_n|^2$. Esse fato introduz na dinâmica da matriz densidade do qubits, equação (5.12), o segundo termo exponencial responsável pelo comportamento oscilatório da fidelidade.

Embora o estado W dado pela equação (5.37) seja escrito como uma combinação de vetores que pertencem ao mesmo grupo, podemos considerar outros estados W por meio de operações unitárias locais. Como exemplo, assumamos que aplicamos uma operação unitária local no primeiro qubit do estado canônico W que o “vira”, ou seja, assumamos que aplicamos um *bit-flip* no primeiro qubit do estado (5.37). Assim, obtemos

$$|W\rangle = \text{l.u.} \frac{1}{2} (|1111\rangle + |0011\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle). \quad (5.45)$$

O estado (5.45) não mais será um estado livre de descoerência para o Hamiltoniano de interação (5.4) e a fidelidade não mais será constante no tempo. De fato, já que o estado W dado pela equação (5.45) não é mais escrito como uma combinação linear de vetores que pertencem ao mesmo Grupo e, agora, é escrito como uma combinação linear de vetores que pertencem aos Grupos 1 e 3, a sua fidelidade oscilará no tempo seguindo a seguinte

expressão

$$F = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} e^{-16\Gamma(t,T)} \cos(16\Theta(t)). \quad (5.46)$$

5.3 Dinâmica da fidelidade de um *bit-flip* no modelo de computação baseada em medidas projetivas

Nesta seção, analisaremos a fidelidade da computação de um *bit-flip* usando o modelo de computação baseada em medidas projetivas. Mostraremos porque o nosso resultado anterior é importante no que diz respeito à identificação dos estados que oscilarão no tempo e como essa identificação implica em consequências cruciais com relação aos resultados computacionais que podemos obter, dependendo dos tempos em que aplicamos o nosso conjunto de medidas projetivas. Escolhemos o estado $|0\rangle$ para ser o nosso *input* e, se o sistema fosse perfeitamente isolado do resto do universo, no final da sequência das medidas projetivas locais ele deveria ser transformado no *output* $|1\rangle$. Nesse caso ideal, a fidelidade da computação seria igual a 1. Todavia, o sistema formado pelos qubits que participam da computação estão o tempo todo interagindo com o meio que o cerca, de modo que o resultado dessa computação pode ser um resultado longe do esperado. Como vimos no capítulo 3 na seção 3.4, para executarmos um *bit-flip* numa cadeia linear, inicialmente o estado do sistema deve ser composto de cinco qubits desemaranhados

$$|\Phi_{ini}\rangle = |0\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \otimes |+\rangle_3 \otimes |+\rangle_4 \otimes |+\rangle_5, \quad (5.47)$$

onde os qubits 2 até 5 são inicialmente preparados no estado $|+\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_n + |1\rangle_n)$ e o estado do qubit número 1 é preparado para ser o nosso input. Posteriormente, o estado

Figura 5.3. Esquema ilustrativo dos dois cenários considerados. Em (a), a primeira medida projetiva é aplicada no primeiro qubit do estado (5.48) em $t = 0$, a segunda medida é aplicada no segundo qubit em $t = t_1$, a terceira medida é aplicada no terceiro qubit em $t = t_2$ e finalmente a quarta medida projetiva é aplicada no quarto qubit em $t = t_{final}$. Em (b), projetamos o primeiro qubit do estado (5.48) em $t = 0$ e depois de um intervalo de tempo as outras três medidas subsequentes são aplicadas instantaneamente, porém sequencialmente nos qubits 2, 3 e 4, em $t = t_{final}$. O resultado da computação, em ambos senários, é “impresso” no quinto qubit (em verde).

(5.47) é emaranhado através da aplicação da operação unitária $\hat{S}$

$$\begin{aligned} \hat{S}|\Phi_{ini}\rangle &= \frac{1}{2}|0\rangle_1|0\rangle_2|-\rangle_3|0\rangle_4|-\rangle_5 - \frac{1}{2}|0\rangle_1|0\rangle_2|+\rangle_3|1\rangle_4|+\rangle_5 \\ &- \frac{1}{2}|0\rangle_1|1\rangle_2|+\rangle_3|0\rangle_4|-\rangle_5 + \frac{1}{2}|0\rangle_1|1\rangle_2|-\rangle_3|1\rangle_4|+\rangle_5. \end{aligned} \quad (5.48)$$

A idéia aqui é aplicar quatro projetores, medindo um por um os qubits 1 até 4, e, ao mesmo tempo que essas medidas desemaranham completamente o estado (5.48) elas também executam o *bit-flip*, “imprimindo” o resultado no qubit 5. Sabemos que cada uma dessas medidas pode apresentar dois possíveis resultados distintos, *up* ou *down*, e a escolha da base para se medir o qubit subsequente depende do resultado anterior. Em nosso exemplo nós supusemos que todas as medidas apresentam o resultado *up*, o qual não é um evento tão raro cujas chances de ocorrência são 1/16. Assim, o primeiro projetor a ser aplicado no primeiro qubit será $\hat{\Pi}_1 = |+\rangle_1\langle+|$. Os outros três projetores que agem, respectivamente, nos qubits 2, 3 e 4 são $\hat{\Pi}_2 = |-\rangle_2\langle-|$, $\hat{\Pi}_3 = |+\rangle_3\langle+|$ e $\hat{\Pi}_4 = |+\rangle_4\langle+|$.

Em qualquer realização experimental realista, a operação unitária $\hat{S}$ que emaranha o estado (5.47) e as quatro medidas projetivas subsequentes, assim como a preparação do próprio estado (5.47), são realizadas num intervalo de tempo finito. Então, é interessante

analisar a computação quando o sistema está sujeito a efeitos deletérios causados pela interação com o meio ambiente. Aqui, assumimos por simplicidade que o estado inicial é o estado (5.48), isto é, o nosso estado em $t_0 = 0$ é o estado de *Cluster* já preparado para executar a computação. Supomos também que a primeira medida projetiva $\hat{\Pi}_1$ (aplicada no qubit 1) ocorre em $t_0 = 0$. As medidas subsequentes $\hat{\Pi}_2$, $\hat{\Pi}_3$ e $\hat{\Pi}_4$ (aplicadas nos qubits 2, 3, e 4, respectivamente) são aplicadas em dois cenários diferentes; em um deles as medidas subsequentes são aplicadas sequencialmente em diferentes momentos de tempo, isto é, num tempo $t_1 > t_0$ aplicamos a medida $\hat{\Pi}_2$ no qubit número 2, num tempo $t_2 > t_1$ aplicamos a medida $\hat{\Pi}_3$ no qubit número 3 e finalmente, num tempo $t_{final} > t_2$ aplicamos a medida $\hat{\Pi}_4$ no qubit número 4 (entre os tempos t_1 , t_2 e t_{final} o sistema evolui de acordo com a equação (5.12)); no outro cenário, as medidas são aplicadas em sequência ($\hat{\Pi}_{2,3,4} = \hat{\Pi}_4 \hat{\Pi}_3 \hat{\Pi}_2$), porém, praticamente todas no mesmo tempo t_{final} . Entre o lapso de tempo entre $t_0 = 0$ e $t = t_{final}$, que chamamos de t_{gap} , o sistema de quatro qubits evolui não unitariamente (veja a figura (5.3)).

Logo, após a primeira medida o estado resultante de quatro qubits é dado por

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{2,\dots,5}(0) = \hat{\Pi}_1 S|\phi_{ini}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}}|0\rangle_2|-\rangle_3|0\rangle_4|-\rangle_5 - \frac{1}{2\sqrt{2}}|0\rangle_2|+\rangle_3|1\rangle_4|+\rangle_5 \\ &- \frac{1}{2\sqrt{2}}|1\rangle_2|+\rangle_3|0\rangle_4|-\rangle_5 + \frac{1}{2\sqrt{2}}|1\rangle_2|-\rangle_3|1\rangle_4|+\rangle_5. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Como o estado (5.49) é escrito como uma combinação linear de autoestados do operador $\hat{\sigma}_z^T$ com diferentes autovalores em módulo, a dinâmica da fidelidade associada com esse estado oscilará da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F_{|\psi\rangle_{2,\dots,5}}(t) &= \frac{3}{32}e^{-16\Gamma(t,T)} \cos[16\Theta(t)] + \frac{1}{16}e^{-4\Gamma(t,T)} \cos[12\Theta(t)] \\ &+ \frac{1}{16}e^{-36\Gamma(t,T)} \cos[12\Theta(t)] + \frac{3}{8}e^{-4\Gamma(t,T)} \cos[4\Theta(t)] \\ &+ \frac{1}{8}e^{-16\Gamma(t,T)} + \frac{1}{128}e^{-64\Gamma(t,T)} + \frac{35}{128}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Figura 5.4. Em (a) e (b) mostramos a dinâmica da fidelidade do estado (5.50) nos regimes quântico e térmico, respectivamente. Em (a) podemos observar as oscilações que caracterizam o regime quântico quando o estado inicial é escrito como uma superposição coerente em termos dos autoestados do operador $\hat{\sigma}_z^T$ cujos autovalores são diferentes em módulo. Em (b) observamos o decaimento exponencial característico do regime térmico. Em ambos os casos consideramos uma densidade espectral ôhmica de forma que $\Theta(t) = \eta\omega_c t - \eta \arctan(\omega_c t)$ e $\Gamma(t, T) \approx \eta \left[2\omega_T t \arctan(2\omega_T t) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\omega_c^2 t^2}{1+4\omega_T^2 t^2} \right) \right]$. No regime quântico fizemos $\omega_c = 100$ e $\omega_T = 1$, porém, no regime térmico (em que $t > \tau_T$), fizemos $\omega_c = 1$ e $\omega_T = 100$. Em ambos os casos assumimos que $\eta = 1/100$.

Na figura (5.4) nós plotamos a fidelidade do estado dada pela equação (5.50) para uma densidade espectral ôhmica, considerando os dois regimes: o regime quântico e o regime térmico. Como podemos observar, o gráfico (a) mostra que a fidelidade do estado realmente oscila no regime quântico, enquanto o gráfico (b) mostra que a fidelidade do estado decai exponencialmente no regime térmico. Isso ocorre pois no regime térmico onde $t > \tau_T$, o fator de decaimento $\Gamma(t, T) \approx 2\eta\omega_T t$ é o principal agente responsável pela decoerência, enquanto o outro fator, associado às oscilações, $\Theta(t) = \eta\omega_c t - \eta \arctan(\omega_c t)$, desempenha um papel menor; portanto, qualquer tendência oscilatória é dominada pelo

decaimento exponencial. Por outro lado, no regime quântico em que $\tau_c < t < \tau_T$, é o decaimento exponencial dado por um fator de decaimento $\Gamma(t, T) \approx \eta \ln(\omega_c t)$, que desempenha um papel menor e as flutuações do vácuo quântico contribuem predominantemente; assim, o comportamento não-monotônico é evidente. É interessante notar que a fidelidade do estado no regime quântico oscila entre valores máximos, como 73,79% e 71,60%, em tempos como $t = 1,58/\omega_c$ e $t = 3,16/\omega_c$ (onde se encontram os picos) e valores mínimos, como 0,23% e 0,59%, em tempos como $t = 0,8/\omega_c$ e $t = 2,4/\omega_c$ (onde se encontram vales). Dessa forma, o que podemos dizer a respeito da fidelidade da computação quântica nesse regime peculiar (onde a fidelidade do estado oscila no tempo)? Podemos supor que somos capazes de mostrar o nosso resultado principal. Nós discutiremos a implicação das oscilações da fidelidade durante uma computação de uma única via, e demonstraremos que medidas que esperam um tempo maior para serem aplicadas podem, de fato, resultar em fidelidades computacionais melhores. Vamos primeiramente considerar o cenário onde as medidas são realizadas em tempos diferentes umas das outras. Consideremos, por exemplo, que $t_1 = 0.6/\omega_c$, $t_2 = 0.8/\omega_c$ e $t_3 = 1.0/\omega_c$, ou seja, as medidas $\hat{\Pi}_2$, $\hat{\Pi}_3$ e $\hat{\Pi}_4$ são aplicadas em intervalos de $\Delta t = 0.2/\omega_c$ começando em $t_1 = 0.6/\omega_c$. Nesse caso, temos uma fidelidade de computação de 31,49%. Agora, se considerarmos que $t_1 = 1.4/\omega_c$, $t_2 = 1.6/\omega_c$ e $t_3 = 1.8/\omega_c$, isto é, as medidas $\hat{\Pi}_2$, $\hat{\Pi}_3$ e $\hat{\Pi}_4$ são aplicadas em intervalos de $\Delta t = 0.2/\omega_c$ começando em $t_1 = 1.4/\omega_c$, então, teremos uma fidelidade de computação bem mais alta comparada com o primeiro caso, e cujo valor é 70,41%. Portanto, se aplicarmos as medidas em torno do primeiro vale, obteremos uma fidelidade de computação baixa, 31,49%, enquanto medidas aplicadas num tempo posterior, esperando-se alcançar as redondezas do primeiro pico, obtemos um resultado consideravelmente melhor.

Agora, vamos considerar o outro cenário onde as medidas são aplicadas em sequência,

Figura 5.5. Nesse gráfico, mostramos a dinâmica da fidelidade de uma porta lógica quântica do tipo NOT, usando o modelo de computação quântica baseada em medidas projetivas como função do intervalo de tempo t_{gap} , tanto para o regime quântico em (a) quanto para o regime térmico em (b), respectivamente. Em ambos os casos assumimos $\eta = 1/100$ e uma densidade espectral ôhmica com $\Theta(t) = \eta\omega_c t - \eta \arctan(\omega_c t)$ e $\Gamma(t, T) \approx \eta \left[2\omega_T t \arctan(2\omega_T t) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\omega_c^2 t^2}{1+4\omega_T^2 t^2} \right) \right]$. No regime quântico fizemos $\omega_c = 100$ e $\omega_T = 1$, porém, no regime térmico escolhemos $\omega_c = 1$ e $\omega_T = 100$.

porém, praticamente ao mesmo tempo. Na figura (5.5), os gráficos (a) e (b) mostram a fidelidade de computação em função do t para os regimes quântico e térmico, respectivamente. No regime térmico, observamos que quanto menor o tempo melhor é a fidelidade da computação. Todavia, contrariamente ao regime térmico, no regime quântico, observamos que existem tempos que de fato maximizam os valores da fidelidade da computação. Fica claro, que se todas as medidas são feitas em $t = 0$, a fidelidade da computação é 100%, mas que para alguns intervalos de tempo subsequentes a fidelidade da computação também atingirá valores altos. Em outras palavras, existem tempos ótimos para se aplicar as medidas diferentes do tempo $t = 0$. No exemplo ilustrado na figura (5.5), a imagem em (a) mostra que se o tempo de espera t é maior que $0.07/\omega_c$ (onde a fidelidade de com-

putação é 94,78%), os melhores valores para a fidelidade da computação são obtidos para $t = 1.59/\omega_c$, quando ela alcança incríveis 94,28%. Nesse sentido, os nossos resultados mostram que medidas “lentas” em computação de uma única via pode garantir melhores resultados. Se aplicarmos a mesma operação lógica no tempo $t = 0,6/\omega_c$, obteremos uma fidelidade de computação no valor de 70,38%.

6 Maximizações e a dinâmica de medidas de correlações quânticas

Neste capítulo descrevemos as nossas experiências com métodos numéricos para maximizações de um conjunto de funções não lineares. Aplicamos o nosso algoritmo baseado no *método de convergência global para sistemas de equações não lineares* (19) em dois casos distintos. Em um deles consideramos a medida geométrica de emaranhamento para sistemas de 4 qubits e no outro consideramos a discórdia quântica para sistemas de 2 qubits. Em ambos os casos o sistema formado pelos qubits interage com o meio externo.

6.1 Método de convergência global para sistemas de equações não lineares

Numericamente, os métodos para se encontrar soluções de equações num espaço N -dimensional se baseiam em começar a busca a partir de uma “solução tentativa” aproximada e usar algum algoritmo que melhorará a solução até que um critério de convergência pré-determinado seja alcançado. Os métodos mais elementares funcionam muito bem e sempre convergem para uma solução desde que o “chute” inicial seja um bom chute. Todavia, se a sua solução tentativa não for um bom chute inicial, esses métodos falham no processo de convergência e a raiz do conjunto de equações multidimensionais não é

encontrada. Um método que depende de um bom chute é o *método de Newton-Raphson para sistemas de equações não lineares*. Num problema típico temos N relações funcionais para serem zeradas simultaneamente, envolvendo x_i variáveis (com $i = 1, 2, \dots, N$):

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.1)$$

Denotando por $\vec{x}$ o conjunto de valores x_i e $\vec{F}$ o conjunto de funções F_i , na vizinhança de $\vec{x}$ cada função F_i pode ser expandida em série de Taylor

$$F_i(\vec{x} + \delta\vec{x}) = F_i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \delta x_j + \mathcal{O}(\delta\vec{x}^2). \quad (6.2)$$

A matriz formada pelas derivadas parciais que aparecem na equação (6.2) é a matriz jacobiana J :

$$J_{ij} \equiv \frac{\partial F_i}{\partial x_j}. \quad (6.3)$$

Em notação matricial a equação (6.2) é escrita da seguinte forma:

$$\vec{F}(\vec{x} + \delta\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}) + J \cdot \delta\vec{x} + \mathcal{O}(\delta\vec{x}^2). \quad (6.4)$$

Ignorando termos de ordem $\delta\vec{x}^2$ e superiores, e, fazendo $\vec{F}(\vec{x} + \delta\vec{x}) = 0$, obtemos um conjunto de equações lineares para as correções $\delta\vec{x}$ que movem cada função para mais perto do zero simultaneamente, isto é,

$$\vec{F}(\vec{x}) = -J \cdot \delta\vec{x}. \quad (6.5)$$

A equação (6.5) pode ser resolvida por decomposição LU^* . As correções são, então, adicionadas ao vetor solução:

$$\vec{x}_{\text{novo}} = \vec{x}_{\text{velho}} + \delta\vec{x}, \quad (6.6)$$

*Suponha que somos capazes de escrever uma matriz A como o produto de duas matrizes $L \cdot U = A$, onde L é uma matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior. Podemos usar a decomposição LU para resolver um conjunto de equações lineares $A \cdot \vec{x} = (L \cdot U) \vec{x} = L \cdot (U \cdot \vec{x}) = b$, primeiramente resolvendo $L \cdot \vec{y} = b$ e depois resolvendo $U \cdot \vec{x} = \vec{y}$. A vantagem de se quebrar o sistema de equações dessa forma é que a solução de um conjunto de equações triangular é trivial.

e o processo é iterado até a convergência ser alcançada.

Infelizmente, o método de Newton-Raphson para sistemas de equações não lineares possui a infeliz tendência de se perder na imensidão de pontos no espaço N dimensional quando o chute inicial, para a solução tentativa, não é suficientemente próximo da raiz do sistema considerado. Um outro método mais sofisticado pode ser empregado para se calcular a solução de um conjunto de N equações não lineares. Esse método melhora a convergência global do método de Newton-Raphson, não necessitando de um bom chute inicial. Nesse método, conhecido na literatura por *método de convergência global para sistemas de equações não lineares*, combina-se a convergência localmente rápida do método de Newton-Raphson com uma estratégia de convergência global que garante alguns progressos na direção da solução a cada iteração. A idéia é simples. A partir do método de Newton-Raphson, com passo de Newton para o conjunto de equações $\vec{F}(\vec{x}) = 0$ dado por $\vec{x}_{\text{novo}} = \vec{x}_{\text{velho}} + \delta\vec{x}$, com $\delta\vec{x} = -J^{-1} \cdot \vec{F}$, desejamos responder a seguinte pergunta: *Como decidir quando aceitar o passo de Newton $\delta\vec{x}$?* Uma possibilidade razoável é exigir que $|\vec{F}|^2 = \vec{F} \cdot \vec{F}$ decresça para o passo considerado. Por outro lado, apesar de toda solução do conjunto de equações $\vec{F}(\vec{x}) = 0$ minimizar também $|\vec{F}|^2$, podem existir mínimos locais de $|\vec{F}|^2$ que não são soluções do conjunto de equações $\vec{F}(\vec{x}) = 0$, o que não seria aceitável. Podemos melhorar a nossa estratégia notando que o passo de Newton $\delta\vec{x}$ é uma *direção descendente* para $|\vec{F}|^2$, ou seja

$$\frac{1}{2} \nabla (\vec{F} \cdot \vec{F}) \cdot \delta\vec{x} = (\vec{F} \cdot J) \cdot (-J^{-1} \cdot \vec{F}) = -\vec{F} \cdot \vec{F} < 0. \quad (6.7)$$

Assim o estratagema usado é simples; primeiramente tenta-se o passo de Newton completo, sempre checando se a cada iteração o passo proposto reduz $\vec{F} \cdot \vec{F}$. Se não, o algoritmo, “volta caminhando” ao longo da direção de Newton até encontrar um passo aceitável. O fato de o passo de Newton ser uma direção descendente para $\vec{F} \cdot \vec{F}$, garante que um

passo aceitável será encontrado. Na referência (19) podemos encontrar todas as sub-rotinas necessárias para escrever um algoritmo que calcula as raízes de um conjunto N dimensional de equações não lineares, usando o método descrito acima. Em nossos cálculos fizemos uso dessas sub-rotinas.

6.2 A dinâmica da medida geométrica de emaranhamento

A influência da descoerência no emaranhamento de sistemas multipartites vem sendo estudada através de várias perspectivas, porém, em sua grande maioria, considerando aspectos de bipartição. Considerar apenas aspectos de bipartição pode levar a uma compreensão incompleta do processo de descoerência, logo, é importante e altamente desejável investigar uma medida do grau de emaranhamento genuinamente multipartite sob a influência do meio externo. Porém, todas as medidas de emaranhamento genuinamente multipartite são definidas através de procedimentos complicados de otimização. Na verdade, examinando a literatura na área da computação e informação quântica, sempre nos deparamos com problemas de otimizações onde alguma grandeza deve ser minimizada ou maximizada. Entre as grandezas que envolvem algum tipo de otimização, podemos citar a medida geométrica de emaranhamento e a discórdia quântica, entre muitas outras.

Motivados pela possibilidade de compararmos os resultados obtidos nos capítulos anteriores para a dinâmica da fidelidade de sistemas formados por 4 qubits maximamente emaranhados que sofrem a influência de descoerência com a dinâmica de uma medida do grau de emaranhamento, nos dedicamos, durante um certo período, a tarefa de calcular numericamente a dinâmica da medida geométrica de emaranhamento para um sistema for-

mado por 4 qubits inicialmente emaranhados que interage com o meio ambiente e evolui não unitariamente satisfazendo o mesmo hamiltoniano estudado nos capítulos anteriores,

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^N \epsilon_n \hat{\sigma}_z^n + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hbar \sum_{n,k} \hat{\sigma}_z^n \left(g_k \hat{a}_k^\dagger + g_k^* \hat{a}_k \right), \quad (6.8)$$

e, nas mesmas condições e regimes anteriores.

Como vimos na subseção 2.8.2, a medida geométrica de emaranhamento quantifica a distância no espaço de Hilbert entre um estado quântico emaranhado multipartite e o conjunto dos estados separáveis. Ela é definida como sendo

$$E_g = \min_{|\Phi\rangle \in \text{Prod}(\mathcal{H})} \left\{ -\log_2 \left(|\langle \Phi | \Psi \rangle|^2 \right) \right\}, \quad (6.9)$$

onde $|\Psi\rangle$ é um estado emaranhado composto por N subsistemas pertencente ao espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i$ (onde $\mathcal{H}_i$ é o espaço de Hilbert do i -ésimo subsistema) e $\text{Prod}(\mathcal{H})$ é o conjunto de todos os estados puros separáveis no espaço $\mathcal{H}$. O mínimo na equação (6.9) garante que escolhemos o estado puro separável mais próximo do estado $|\Psi\rangle$, ou seja, garante que E_g é a menor distância no espaço de Hilbert entre o estado $|\Psi\rangle$ e o conjunto de todos os estados puros separáveis.

A idéia inicial para se calcular a dinâmica da grandeza (6.9) era simples; reescrevendo a equação (6.9) como se segue

$$E_g = \min_{|\Phi\rangle \in \text{Prod}(\mathcal{H})} \left\{ -\log_2 \left(\langle \Phi | \hat{\rho}^Q(0) | \Phi \rangle \right) \right\}, \quad (6.10)$$

poderíamos, uma vez que tínhamos calculado a dinâmica do operador densidade do sistema de interesse sob influência de descoerência, obter a evolução temporal da medida geométrica de emaranhamento da seguinte forma:

$$E_g(t) = \min_{|\Phi\rangle \in \text{Prod}(\mathcal{H})} \left\{ -\log_2 \left(\langle \Phi | \hat{\rho}^Q(t) | \Phi \rangle \right) \right\}, \quad (6.11)$$

onde $\hat{\rho}^Q(t)$ é o estado do sistema evoluído no tempo. Sabíamos que para alguns estados a dinâmica da fidelidade oscilava no tempo e tínhamos um método para identificarmos

esses estados (a condição apresentada no capítulo 5 na seção 5.2). Dessa forma, algumas perguntas eram inevitáveis: *Apenas o emaranhamento é necessário para implementar protocolos de computação quântica? E quanto a fidelidade? Que tipo de comportamento dinâmico a medida geométrica de emaranhamento apresentará? Para certos estados específicos, será que essa medida decai exponencialmente com o tempo ou será que oscila como faz a fidelidade? Quais seriam os resultados de protocolos de computação quântica implementados em tempos onde a fidelidade é muito alta (ou seja, num pico de uma oscilação) e o emaranhamento muito baixo? E o que dizer da situação oposta?* Assim, para responder essas e outras perguntas, o cálculo da dinâmica da medida geométrica de emaranhamento era uma questão que deveria ser resolvida. Nessa direção, primeiramente notamos que os estados puros separáveis mais gerais de sistemas formados por 4 qubits são escritos como se segue:

$$|\Phi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 \otimes |\psi\rangle_3 \otimes |\psi\rangle_4, \quad (6.12)$$

onde

$$|\psi\rangle_j = \cos\left(\frac{\theta_j}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi_j} \sin\left(\frac{\theta_j}{2}\right) |1\rangle, \quad (6.13)$$

para $j = 1, 2, 3, 4$. Logo, a função $\langle\Phi|\hat{\rho}^Q(t)|\Phi\rangle$ é uma função das oito variáveis $\{\theta_j, \varphi_j\}$ para $j = 1, 2, 3, 4$ e do tempo t . Portanto,

$$G(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, t) = -\log_2(\langle\Phi|\hat{\rho}^Q(t)|\Phi\rangle). \quad (6.14)$$

Para calcular a minimização sobre todos os estados puros separáveis (6.12), derivamos a função (6.14) em termos de suas oito variáveis angulares e igualamos a zero, obtendo

dessa forma oito equações não lineares com oito incógnitas para cada tempo t :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} G(\{\theta_j, \varphi_j\}, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta_2} G(\{\theta_j, \varphi_j\}, t) = 0, \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_3} G(\{\theta_j, \varphi_j\}, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta_4} G(\{\theta_j, \varphi_j\}, t) = 0, \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} G(\{\theta_j, \varphi_j\}, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_2} G(\{\theta_j, \varphi_j\}, t) = 0, \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_3} G(\{\theta_j, \varphi_j\}, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_4} G(\{\theta_j, \varphi_j\}, t) = 0. \quad (6.18)$$

Cada uma das equações acima possui 256 termos que são proporcionais aos 256 elementos de matriz do operador densidade $\hat{\rho}(t)$. É evidente que calcular as raízes desse conjunto de oito equações não lineares com oito variáveis independentes não é uma tarefa nada trivial, mesmo dentro do reino dos métodos numéricos. Note que a nossa missão era encontrar o conjunto de oito números $\{\theta_j, \varphi_j\}$, onde $j = 1, 2, 3, 4$, que satisfazem simultaneamente as oito equações não lineares acima. Por outro lado, um conjunto de equações desse tipo pode não possuir nenhuma solução (real) ou ainda, pode apresentar um grande número de máximos e mínimos locais, dificultando a tarefa de se encontrar o máximo e o mínimo absoluto.

Após obtermos um algoritmo baseado no método de convergência global para sistemas de equações não lineares e apesar de testarmos o nosso algoritmo para uma gama de situações em que poderíamos verificar a validade dos dados produzidos numericamente, obtendo dessa forma segurança em nosso algoritmo, não obtivemos resultados satisfatórios para a dinâmica da medida geométrica de emaranhamento. Os nossos resultados mostraram que a dinâmica da medida geométrica de emaranhamento, ao invés de decrescer com o passar do tempo, crescia com o tempo, como podemos observar no gráfico da figura (6.1) obtido através dos dados produzidos numericamente. Concluimos que deveríamos calcular a dinâmica da medida geométrica de emaranhamento, projetando o estado evoluído no subespaço mais geral dos estados mistos separáveis e não no sub-

Figura 6.1. A dinâmica da medida geométrica de emaranhamento para o estado de *Cluster* de 4 qubits interagindo com o meio externo coletivamente segundo o hamiltoniano (6.8).

espaço dos estados puros separáveis, já que o nosso estado inicial ficava cada vez mais misto à medida que ficava mais separável. Pensamos que, como a medida geométrica de emaranhamento é uma medida de distância no espaço de Hilbert, talvez os estados mistos separáveis estejam a uma distância maior dos estados puros separáveis do que estão os estados puros emaranhados. Em outras palavras, pensamos que talvez os estados emaranhados puros estejam mais próximos dos estados separáveis puros do que estão os estados mistos separáveis. Então, resolvemos calcular a dinâmica da medida geométrica de emaranhamento, projetando o estado do sistema evoluído nos estados mistos separáveis. Primeiramente escrevemos o estado de 4 qubits misto e separável da seguinte forma:

$$\hat{\rho}_{MS} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 \otimes \hat{\rho}_3 \otimes \hat{\rho}_4, \quad (6.19)$$

onde

$$\hat{\rho}_i = \frac{\hat{I}_i + \vec{r}_i \cdot \vec{\sigma}_i}{2}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4. \quad (6.20)$$

Assim teríamos

$$E_g(t) = \min_{\rho_{MS} \in \text{ProdMS}(\mathcal{H})} \left\{ -\log_2 [\text{Tr}(\hat{\rho}_{MS} \hat{\rho}^Q(t))] \right\}, \quad (6.21)$$

onde agora ProdMS seria o subespaço de todos os estados mistos e separáveis dentro do espaço de Hilbert total. Essa modificação incluiria mais quatro equações não lineares ao conjunto de oito já existente e mais quatro variáveis independentes: r_1, r_2, r_3, r_4 . Porém, o estado (6.19) não é o estado misto separável mais geral. O estado misto separável mais geral é dado por

$$\hat{\rho} = \sum_{\mu} p_{\mu} \hat{\rho}_{\mu}^{(1)} \otimes \hat{\rho}_{\mu}^{(2)} \otimes \hat{\rho}_{\mu}^{(3)} \otimes \hat{\rho}_{\mu}^{(4)}. \quad (6.22)$$

Assim sendo, é impossível fazer uma varredura completa sobre todos os estados que pertencem ao subespaço dos estados mistos separáveis, o que foi motivo de muita frustração, pois, esse fato colocava um ponto final em nossa busca pela dinâmica da medida geométrica de emaranhamento para sistemas de 4 qubits. Apesar da frustração inicial relacionada com o resultado dessa empreitada mal sucedida, logo encontramos uma situação que se mostraria factível para a aplicação de nosso algoritmo para o cálculo de equações não lineares. A seguir mostraremos a nossa nova empreitada e os resultados obtidos, em parte, devido aos nossos esforços.

6.3 A dinâmica não-Markoviana da discórdia quântica

Como vimos na subseção 2.7.2, a discórdia quântica é definida da seguinte forma:

$$D(\hat{\rho}) = I(\hat{\rho}) - Q(\hat{\rho}). \quad (6.23)$$

Ela nos fornece informação sobre a natureza quântica das correlações entre dois sistemas, sendo nula apenas para estados que compartilham correlações puramente clássicas e diferente de zero se esses estados possuem correlações de natureza quântica.

6.3.1 Expressão analítica para a discórdia quântica

Para calcular a dinâmica dissipativa apresentada no artigo (20) consideramos uma subclasse de operadores densidade cuja estrutura é a seguinte:

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & w \\ 0 & b & z & 0 \\ 0 & z & b & 0 \\ w & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad (6.24)$$

onde as coerências são números reais e os elementos ρ_{22} e ρ_{33} são sempre iguais. É fácil notar que para esse tipo de subclasse de operadores densidade, a condição $S(\hat{\rho}^A) = S(\hat{\rho}^B)$ é sempre satisfeita e a medida de correlações clássicas $Q(\hat{\rho})$ assume valores iguais, independentemente se as medidas são tomadas no subsistema $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$. Para reduzir a dificuldade em se computar a discórdia quântica devemos ser capazes de maximizar a correlação clássica $Q(\hat{\rho})$. Isso pode ser feito numericamente notando que um projetor geral de um único qubit pode ser escrito como função de duas variáveis independentes, uma vez que

$$\mathcal{Q}(\hat{\rho}) = S(\hat{\rho}^A) - F(\theta, \phi), \quad (6.25)$$

onde

$$F(\theta, \phi) = \inf_{\theta, \phi} \left[\sum_{k=1,2} p_k(\theta, \phi) S \left(\frac{\hat{\Pi}_k^{\mathcal{B}}(\theta, \phi) \hat{\rho}^{\mathcal{AB}} \hat{\Pi}_k^{\mathcal{B}}(\theta, \phi)}{p_k(\theta, \phi)} \right) \right], \quad (6.26)$$

com $p_k(\theta, \phi) = \text{Tr} \left[\hat{\Pi}_k^{\mathcal{B}}(\theta, \phi) \hat{\rho}^{\mathcal{AB}} \hat{\Pi}_k^{\mathcal{B}}(\theta, \phi) \right]$ e os projetores $\hat{\Pi}_k^{\mathcal{B}}(\theta, \phi) = \hat{I} \otimes |k\rangle \langle k|$ ($k = 1, 2$) definidos através dos seguintes estados ortogonais:

$$|1\rangle = \cos(\theta) |0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta) |1\rangle, \quad (6.27)$$

$$|2\rangle = \sin(\theta) |0\rangle - e^{i\phi} \cos(\theta) |1\rangle. \quad (6.28)$$

Derivando a função (6.26) em termos de suas duas variáveis independentes obtemos duas equações não lineares:

$$\frac{\partial F(\theta, \phi)}{\partial \theta} = 0, \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial F(\theta, \phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (6.30)$$

Calculamos numericamente as raízes das equações acima e obtivemos os seguintes conjuntos de soluções: para $\theta = n\frac{\pi}{2}$, onde $n \in \mathbb{Z}$, ϕ pode ser arbitrário, formando assim um conjunto com infinitas soluções; o outro conjunto é formado pelos pontos formados por $\theta = m\frac{\pi}{4}$ e $\phi = n\frac{\pi}{2}$, novamente para n e $m \in \mathbb{Z}$. Além disso, tivemos a oportunidade de verificar numericamente que esses dois conjuntos de soluções são os únicos dois conjuntos encontrados para operadores densidade que satisfazem a estrutura dada na expressão (6.24), onde os estados iniciais eram sorteados aleatoriamente. Os nossos resultados corroboraram para os resultados obtidos analiticamente no artigo (20). Comparando os resultados numéricos com os resultados analíticos, observamos total concordância. No artigo, descobriu-se que o conjunto de pontos críticos da função $F(\theta, \phi)$, dada a estrutura (6.24), não dependem dos elementos da matriz densidade. Dessa forma, pudemos aplicar o nosso algoritmo num caso não trivial em que a verificação com resultados analíticos foi possível. A concordância dos resultados numéricos com os resultados analíticos obtidos em (20), nos dá mais confiança de que temos um bom algoritmo para se calcular um conjunto multidimensional de equações não lineares. Certamente encontraremos outros cenários para a sua aplicação.

Assim, uma vez calculada a maximização associada às correlações clássicas $\mathcal{Q}(\hat{\rho})$, fomos capazes de computar uma expressão analítica para a discórdia quântica (20):

$$D(\hat{\rho}) = \min \{D_1, D_2\}, \quad (6.31)$$

onde

$$D_1 = S(\hat{\rho}^A) - (\hat{\rho}^{AB}) - a \log_2 \left(\frac{a}{a+b} \right) - b \log_2 \left(\frac{b}{a+b} \right) - d \log_2 \left(\frac{d}{b+d} \right) - b \log_2 \left(\frac{b}{b+d} \right), \quad (6.32)$$

e

$$D_2 = S(\hat{\rho}^A) - (\hat{\rho}^{AB}) - \Delta_+ \log_2 \Delta_+ - \Delta_- \log_2 \Delta_-, \quad (6.33)$$

com $\Delta_{\pm} = \frac{1}{2} (1 \pm \Gamma)$ e $\Gamma^2 = (a-d)^2 + 4(|z| + |z|)^2$.

6.3.2 Dinâmica dissipativa exata para a discórdia quântica

Nesta subseção apresentaremos os resultados publicados no artigo (20). Consideramos um sistema cuja dinâmica é descrita pelo modelo conhecido como *modelo de Jaynes-Cummings*. Analisamos duas situações distintas: reservatórios independentes e reservatórios coletivos. No primeiro caso, cada qubit está acoplado com o seu próprio reservatório, uma vez que os processos dissipativos ocorrem independentemente. No caso de reservatório coletivo, consideramos apenas um banho para ambos os qubits. Supusemos que os qubits estão acoplados com um único modo do reservatório que inicialmente se encontra no estado de vácuo. Nesse caso podemos dizer que o hamiltoniano de interação reduz a amplitude de movimento dos qubits, justificando o nome dado na literatura para esse tipo de ruído: erro de amplitude. Os meios ambientes (para o caso de reservatórios independentes) são representados por banhos de osciladores harmônicos e a densidade espectral é da seguinte forma:

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma_0 \lambda^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \lambda^2}, \quad (6.34)$$

onde λ está conectado ao tempo de correlação do reservatório τ_B pela relação $\tau_B \approx 1/\lambda$ e γ_0 está relacionado com a escala de tempo τ_R sob o qual o estado do sistema se transforma,

da seguinte forma: $\tau_R \approx 1/\gamma_0$. Consideramos o limite de acoplamento forte, ou seja, $\tau_R < 2\tau_B$.

Para reservatórios independentes o Hamiltoniano associado aos dois qubits que formam o sistema pode ser escrito como se segue:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^2 \omega_0^{(i)} \hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{\sigma}_-^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^{(i)} \hat{a}_k^{(i)\dagger} \hat{a}_k^{(i)} + \sum_{i=1}^2 \left(\hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{B}^{(i)} + \hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{B}^{(i)\dagger} \right), \quad (6.35)$$

onde $\hat{B}^{(i)} = \sum_k g_k^{(i)} \hat{a}_k^{(i)}$, com $g_k^{(i)}$ sendo a constante de acoplamento, $\omega_0^{(i)}$ é a frequência de transição do i -ésimo qubit e $\omega_k^{(i)}$ é a frequência associada ao k -ésimo modo do reservatório do i -ésimo qubit. $\hat{\sigma}_{\pm}^{(i)}$ são os operadores de levantamento e abaixamento do i -ésimo qubit, respectivamente, e, $\hat{a}_k^{(i)\dagger}$ e $\hat{a}_k^{(i)}$ são os operadores usuais de criação e destruição de excitação no modo k do reservatório do i -ésimo qubit.

Para o caso de interação coletiva, ou seja, para o caso em que temos o mesmo banho acoplado com os dois qubits, o hamiltoniano total do sistema combinado é dado da seguinte forma:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^2 \omega_0^{(i)} \hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{\sigma}_-^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^{(i)} \hat{a}_k^{(i)\dagger} \hat{a}_k^{(i)} + \sum_{i=1}^2 \left(\hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{B} + \hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{B}^\dagger \right). \quad (6.36)$$

Consideramos dois átomos idênticos igualmente acoplados com o reservatório. Nesse caso, a dinâmica dos dois qubits ocorre em dois subespaços completamente desacoplados gerados pelos estados $\{|00\rangle, |+\rangle, |11\rangle\}$ e $\{|-\rangle\}$. Usando esse fato pode-se mostrar (39–42) que a dinâmica desse sistema pode ser calculada sem nenhuma aproximação.

O estado inicial considerado foi o estado do tipo Bell

$$|\psi\rangle = \alpha |00\rangle + \sqrt{1 - \alpha^2} |11\rangle, \quad (6.37)$$

de forma que a matriz densidade que representa o sistema possui a estrutura da expressão (6.24) com a dinâmica dos elementos de matriz dada em (43) para reservatórios independentes e dada em (39) para reservatórios coletivos. Na figura 6.2, plotamos a

Figura 6.2. Dinâmica da discórdia quântica analítica (D_1 , quadrados azul; D_2 , círculos vermelho) e a discórdia quântica numérica (linha cheia preta) como função da escala de tempo $\gamma_0 t$ para (a) um reservatório comum com $\lambda = 0,1\gamma_0$ e (b) reservatórios independentes com $\lambda = 0,01\gamma_0$. As linhas verticais tracejadas em (a) indicam os valores de $\gamma_0 t$ onde as mudanças súbitas acontecem. O estado inicial usado aqui é dado pela equação 6.37 com $\alpha^2 = 1/3$.

discórdia quântica como função da escala de tempo $\gamma_0 t$ no regime de acoplamento forte, com $\lambda = 0,1\gamma_0$ para o caso de reservatório comum e $\lambda = 0,01\gamma_0$ para o caso de reservatórios independentes. O estado inicial usado na figura 6.2 é dado pela equação 6.37 com $\alpha^2 = 1/3$. A solução analítica da discórdia quântica é o valor mínimo assumido pelas funções D_1 (quadrados azuis) e D_2 (círculos vermelhos), dadas pelas equações (6.32) e (6.33), respectivamente. Na figura 6.2, a discórdia está representada em linha cheia preta.

Observamos que, para valores de $\gamma_0 t$ indicados pelas linhas verticais tracejadas na figura 6.2, os ângulos que minimizam a discórdia mudam, apontando para uma mudança súbita da discórdia. Na região entre duas linhas verticais tracejadas os ângulos permanecem constantes. Como mostra a figura 6.2(b) nenhuma mudança súbita é observada, porém, podemos observar renascimento súbito após a morte súbita da discórdia quântica. Nesse caso, dada a memória estocada no meio ambiente, parte da discórdia inicial que

é perdida para o meio durante o processo dissipativo, pode retornar aos qubits. Assim, podemos observar, para o estado (6.37) com $\alpha^2 \geq 1/2$ que a discórdia se anula periodicamente para tempos discretos dados por $t_n = 2[n\pi - \arctan(d/\lambda)]/d$ com $d = \sqrt{2\gamma_0\lambda - \lambda^2}$ e n inteiro.

7 Conclusão

Nesta tese estudamos a dinâmica exata de um sistema formado por N qubits interagindo coletivamente com um meio ambiente que insere no sistema um erro de fase. Introduzimos na seção (5.2) uma condição necessária para que, a baixas temperaturas e no regime quântico de tempo, a fidelidade do sistema apresente um comportamento não-monotônico de natureza oscilatória, e, o nosso método revelou que essas características não dependem do emaranhamento inicial do sistema em questão, dependendo apenas da geometria do estado inicial. De fato, para qualquer estado inicial (emaranhado ou separável) dado por uma superposição de auto-estados do operador de Pauli total $\hat{\sigma}_z^T = \sum_{n=1}^N \sigma_z^{(n)}$, cujos auto-valores são diferentes em módulo, a fidelidade exibe um comportamento oscilatório. Além do mais, como essa condição só depende da geometria inicial do sistema de interesse, podemos encontrar dentro da mesma classe de emaranhamento estados que oscilam e estados que não oscilam. Concluimos que esses efeitos de natureza oscilatória são particularmente importantes para a computação quântica baseada em medidas projetivas, pois, podemos escolher entre estados de *Cluster* (ou outros estados que servem para realizar esses tipo de computação) aqueles que satisfazem a condição para a oscilação da fidelidade, e, assim, aplicarmos o conjunto de medidas projetivas nos tempos de picos da oscilação de forma a obter os melhores resultados computacionais. Em outras palavras, fazemos uso dos tempos de “revival” da dinâmica oscilatória da fidelidade para obter os melhores resultados da computação quântica baseada em medidas projetivas, e, observamos que sequências de medidas “lentas” não implica em piores resultados da computação.

Analogamente, sequências de medidas “rápidas” não garantem um bom resultado da computação. Ilustramos essas observações na seção (5.3), examinando o comportamento da fidelidade de uma porta quântica do tipo NOT executada dentro do esquema de computação baseada em medidas projetivas. Ainda nessa seção, comparamos os resultados entre os regimes quântico e térmico de tempos e verificamos que as oscilações só acontecem no regime de tempo quântico, como já era esperado. Além disso, concluímos que o sistema considerado não permite uma descrição em termos de aproximações markovianas, mais especificamente, ele não pode ser bem representado por uma evolução Lindbladiana, que mascara esses efeitos oscilatórios.

Na outra parte do trabalho, nos dedicamos a solução numérica da correlação clássica que integra a expressão da discórdia quântica. Na seção 6.3, obtivemos uma expressão analítica para a discórdia quântica, o que possibilitou o cálculo de sua dinâmica exata para o caso de 2 qubits interagindo, tanto coletivamente quanto independentemente, com um meio que insere um erro de amplitude. Observamos, no caso de interação coletiva, que para certos valores de $\gamma_0 t$ os ângulos que minimizam a discórdia mudam, implicando numa mudança súbita da discórdia. Na região em que os ângulos permanecem constantes não há uma mudança súbita da discórdia. Para o caso de interação com reservatórios independentes nenhuma mudança súbita é observada. Por outro lado, observamos morte súbita e renascimento súbito.

Referências

- [1] MOORE, E. G. Cramming more components into integrated circuits. **Electronics**, v. 38, n. 8, 1965. Disponível em: <ftp://download.intel.com/research/silicon/moorespaper.pdf>. Acesso em: jan. 2011.
- [2] COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum mechanics**. New York: Wiley-Interscience Publication, 1977. 898 p.
- [3] NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum computation and quantum information**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 676 p.
- [4] DEUTSCH, D.; JOZSA, R. Rapid Solution of problems by quantum computation. **Proceedings of the Royal Society A: mathematical and physical science**, v. 439, n. 1907, p. 553-558, 1992.
- [5] SHOR, P. W. Algorithms for quantum computation: discret logarithms and factoring. In: ANNUAL SYMPOSIUM ON THE FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE, 35., 1994, Santa Fe. **Proceedings...** Santa Fe: IEEE Computer Society Press, 1994. p. 124-134.
- [6] GROVER, L. K. A fast quantum mechanical algorithm for data base search. In: ANNUAL ACM SYMPOSIUM ON THEORY OF COMPUTATION, 28., 1996, New York. **Proceedings...** New York: ACM Press, 1996. p. 212-219
- [7] BRIEGEL, H. J.; RAUSSENDORF, R. Persistent entanglement in arrays of interacting particles. **Physical Review Letters**, v. 86, n. 5, p. 910-913, 2001.
- [8] RAUSSENDORF, R.; BRIEGEL, H. J. A one-way quantum computer. **Physical Review Letters**, v. 86, n. 22, p. 5188-5191, 2001.
- [9] BRIEGEL, H. J.; BROWNE, D. E.; DÜR, W.; RAUSSENDORF, R.; VAN den NEST, M. Measurement-based quantum computation. **Nature Physics**, v. 5, p. 19-26, 2009. doi:10.1038/nphys1157

- [10] BACON, D.; FLAMMIA, S. T. Adiabatic cluster-state quantum computing. **Physical Review A**, v. 82, n. 3, p. 030303-1-030303-4, 2010.
- [11] WEINSTEIN, Y. S. Entanglement sudden death as an indicator of fidelity in a fourqubit clustes state. **Physical Review A**, v. 79, n. 5, p. 052325-052332, 2009.
- [12] TAME, M. S.; PATERNOSTRO, M.; KIM, M. S.; VEDRAL, V. Quantum information processing with noyse cluster state. **Physical Review A**, v. 72, n. 1, p. 012319-012330, 2005.
- [13] WALTHER, P.; RESCH, K. J.; RUDOLPH, T.; SCHENCK, E.; WEINFURTER, H.; VEDRAL, V.; ASPELMEYER, M.; ZEILINGER, A. Experimental one-way quantum computer. **Nature**, v. 434, p. 169-176, 2005. doi:10.1038/nature03347
- [14] KIESEL, N.; SCHMID, C.; WEBER, U.; TÓTH, G.; GÜHNE, O. Experimental analisys of a four-qubit photon cluster state. **Physical Review Letters**, v. 95, n. 21, p. 210502-1-210502-4, 2005.
- [15] LU, C. -Y.; ZHOU, X. -Q.; GÜHNE, O.; GAO, W. -B.; ZHANG, J.; YUAN, Z. -S.; GOEBEL, A.; YANG, T.; PAN, J. -W. Experimental entanglement of six photons in graph states. **Nature Physics**, v. 3, p. 91-95, 2007. doi:10.1038/nphys507
- [16] CECCARELI, R.; VALLONE, G.; MARTINI, F. de; MATALONI, P.; CABELLO, A. Experimental entanglement and nonlocality of a two-photon six-qubit cluster state. **Physical Review Letters**, v. 103, n.16, p. 160401-160404, 2009.
- [17] KALTENBAEK, R.; LAVOIE, J.; ZENG, B.; BARTLETT, S. D.; RESCH, K. J. Optical one-way quantum computing with a simulated valence-bound solid. **Nature Physics**, v. 6, p. 850-854, 2010.
- [18] BREUER, H. -P.; PETRUCCIONE, F. **The theory of open quantum systems**. Oxford: Oxford University Press, 2002. 625 p.
- [19] PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. **Numerical recipes in fortran: the art of scientific computing**. Cambridge: Cambridge University Press, 1986. 963 p.
- [20] FANCHINI, F. F.; WERLANG, T.; BRASIL, C. A.; ARRUDA, L. G. E.; CALDEIRA, A. O. Non-markovian dynamics of quantum discord. **Physical Review A**, v. 81, n. 5, p. 052107-1-052107-5, 2010.

- [21] WYBOURNE, B. G. **Classical groups for physicists**. New York: A Wiley-Interscience Publication, 1974. 415 p.
- [22] LOUISSEL, W. H. **Quantum statistical properties of radiation**. A Wiley-Interscience Publication, 1973. 528 p.
- [23] EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?. **Physical Review**, v. 47, n. 10, p. 777-780, 1935.
- [24] BOHR, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?. **Physical Review**, v. 48, n. 8, p. 696-702, 1935.
- [25] BELL, J. S. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. **Physics**, v. 1, n. 3, p. 195-200, 1964.
- [26] DÜR, W.; VIDAL, G.; CIRAC, J. I. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. **Physical Review A**, v. 62, n. 6, p. 062314-062325, 2000.
- [27] GREENBERGER, D. M.; HORNE, M. A.; ZEILINGER, A. Going beyond Bell's theorem. In: KAFATOS, M. **Bell's theorem, quantum theory, and the conception of the universe**. Dordrecht: Kluwer, 1989. p. 73-76.
- [28] OLLIVIER, H.; ZUREK, W. H. Quantum discord: a measure of quantumness of correlations. **Physical Review Letters**, v. 88, n. 1, p. 017901-017904, 2002.
- [29] SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. **The Bell System Technical Journal**, v. 27, n. 4, pp. 379-423, 623-656, 1948.
- [30] DODD, J. L.; NIELSEN, M. A. Simple operational interpretation of the fidelity of mixed states. **Physical Review A**, v. 66, n. 4, p. 044301-044302, 2002.
- [31] JOSZA, R. Fidelity for mixed states. **Journal of Modern Optics**, v. 41, n. 12, p. 2315-2323, 1994.
- [32] UHLMANN, A. The "transition probability" in the state space of a *-Algebra **Reports on Mathematical Physics**, v. 9, n. 2, p. 273-279, 1976.

- [33] WEI, T. -C.; GOLDBART, P. M. Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states. **Physical Review A**, v. 68, n. 4, p. 042307-042318, 2003.
- [34] LINDBLAD, G. On the generators of quantum mechanics semigroups. **Communications in Mathematical Physics** v. 48, p. 119-130, 1976.
- [35] LEGGETT, A. J. On the generators of quantum mechanics semigroups. **Reviews of Modern Physics** v. 59, n. 1, p. 1-85, 1987.
- [36] ZUREK, W. H. Decoherence and the transition from quantum to classical. **Physics Today**, v. 44, n. 10, p. 36-44, 1991.
- [37] REINA, J. H.; QUIROGA, L.; JOHNSON, N. F. Decoherence of quantum registers. **Physical Review A**, v. 65, n. 3, p. 032326-1-032326-15, 2002.
- [38] SPIEGEL, M. R.; LIU, J.; LIPSCHUTZ, S. **Mathematical handbook of formulas and tables**. New York: McGraw-Hill Publication, 1999.
- [39] MAZZOLA, L.; MANISCALCO, S.; PILO, J.; SUOMINEN, K. -A.; GARRAWAY, B. M. Sudden death and sudden birth of entanglement in common structured reservoirs. **Physical Review A**, v. 79, n. 4, p. 042302-1-042302-4, 2009.
- [40] DALTON, B. J.; GARRAWAY, B. M. Non-markovian decay of a three-level cascade atom in a structured reservoir. **Physical Review A**, v. 68, n. 3, p. 033809-1-033809-13, 2003.
- [41] DALTON, B. J.; BARNETT, S. M.; GARRAWAY, B. M. Theory of pseudomodes in quantum optical processes. **Physical Review A**, v. 64, n. 5, p. 053813-1-053813-21, 2001.
- [42] GARRAWAY, B. M. Nonperturbative decay of an atomic system in a cavity. **Physical Review A**, v. 55, n. 3, p. 2290-2303, 1997.
- [43] BELLOMO, B.; LO FRANCO, R.; COMPAGNO, G. Non-markovian effects on the dynamics of entanglement. **Physical Review Letters**, v. 99, n. 16, p. 160502-1-160502-4, 2007.
- [44] GLAUBER, R. J. Coherent and incoherent states of the radiation field. **Physical Review**, v. 131, n. 6, p. 2766-2788, 1963.

A Cálculos do capítulo 4

Neste apêndice apresentamos alguns detalhes de alguns cálculos do capítulo 4.

A.1 O Hamiltoniano de interação na versão de interação

Sabemos que um observável qualquer $\hat{\mathcal{A}}$, na versão de Schrödinger, se transforma na versão de interação da seguinte forma:

$$\tilde{\mathcal{A}}(t) = U_0^\dagger(t, t_0) \hat{\mathcal{A}} U_0(t, t_0) \quad (\text{A.1})$$

onde $U_0(t, t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t - t_0)\right]$. O Hamiltoniano do sistema combinado pode ser decomposto em duas partes

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}, \quad (\text{A.2})$$

onde $\hat{H}_0 = \hat{H}_S + \hat{H}_E$ é a soma dos Hamiltonianos livres do sistema de interesse e do meio ambiente. Aqui, $\hat{H}_S = \sum_{n=1}^N \epsilon_n \hat{\sigma}_z^{(n)}$ e $\hat{H}_E = \sum_{k=1}^\infty \epsilon_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$. O Hamiltoniano de interação é dado pelo produto tensorial entre os operadores que agem somente nos graus de liberdade do sistema, $\hat{S}$, e os operadores que agem somente nos graus de liberdade do meio ambiente, $\hat{E}$, $\hat{H}_{int} = \hat{S} \otimes \hat{E} = \sum_{n=1}^N \hat{\sigma}_z^{(n)} \otimes \hbar \sum_{k=1}^\infty \left(g_k \hat{a}_k^\dagger + g_k^* \hat{a}_k\right)$. Então, o Hamiltoniano de interação na versão de interação, com $t_0 = 0$, será

$$\tilde{H}_{int} = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(\hat{H}_S + \hat{H}_E\right) t\right] \left(\hat{S} \otimes \hat{E}\right) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \left(\hat{H}_S + \hat{H}_E\right) t\right]. \quad (\text{A.3})$$

Porém, $[\hat{H}_S, \hat{H}_E] = 0$, logo

$$\tilde{H}_{int}(t) = \tilde{S}(t) \otimes \tilde{E}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} \hat{S} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} \otimes e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_E t} \hat{E} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_E t}. \quad (\text{A.4})$$

Vamos calcular separadamente cada termo do produto tensorial acima. Começando por $\tilde{S}$ vemos que

$$\tilde{S}(t) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\sum_{n=1}^N \epsilon_n \hat{\sigma}_z^{(n)} \right) t \right] \left(\sum_{n=1}^N \hat{\sigma}_z^{(n)} \right) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \left(\sum_{n=1}^N \epsilon_n \hat{\sigma}_z^{(n)} \right) t \right]. \quad (\text{A.5})$$

A equação (A.5) pode ser simplificada usando-se o teorema de Campbell-Baker-Hausdorff (21)

$$e^{\xi \hat{\mathcal{A}}} \hat{\mathcal{B}} e^{-\xi \hat{\mathcal{A}}} = \hat{\mathcal{B}} + \xi [\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}] + \frac{\xi^2}{2!} [\hat{\mathcal{A}}, [\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}]] + \frac{\xi^3}{3!} [\hat{\mathcal{A}}, [\hat{\mathcal{A}}, [\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}]]] + \dots \quad (\text{A.6})$$

onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são dois operadores quaisquer. Se $\hat{\mathcal{A}} = \hat{B}$, então

$$e^{\xi \hat{\mathcal{A}}} \hat{\mathcal{B}} e^{-\xi \hat{\mathcal{A}}} = \hat{\mathcal{B}}, \quad (\text{A.7})$$

logo $\tilde{S} = \hat{S}$. O outro termo do produto tensorial (A.4), $\tilde{E}$, pode ser calculado de forma análoga. Vamos começar observando que

$$\tilde{E}(t) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) t \right] \left[\hbar \sum_{k=1}^{\infty} \left(g_k \hat{a}_k^\dagger + g_k^* \hat{a}_k \right) \right] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) t \right]. \quad (\text{A.8})$$

Assim, $\tilde{E}(t) = \tilde{A}^\dagger(t) + \tilde{A}(t)$, onde

$$\tilde{A}(t) = \hbar \sum_{k=1}^{\infty} g_k^* \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} (\sum_{k'=1}^{\infty} \epsilon_{k'} \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_{k'}) t} (\hat{a}_k) e^{-\frac{i}{\hbar} (\sum_{k'=1}^{\infty} \epsilon_{k'} \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_{k'}) t}}_{(*)}. \quad (\text{A.9})$$

Usando o teorema (A.6), temos

$$(*) = \hat{a}_k + \frac{it}{\hbar} \sum_{k'=1}^{\infty} \epsilon_{k'} [\hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_{k'}, \hat{a}_k] + \frac{1}{2!} \left(\frac{it}{\hbar} \right)^2 \sum_{k''=1}^{\infty} \epsilon_{k''} \sum_{k'=1}^{\infty} \epsilon_{k'} [\hat{a}_{k''}^\dagger \hat{a}_{k''}, [\hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_{k'}, \hat{a}_k]] + \dots \quad (\text{A.10})$$

Lembrando que $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, então $[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{a} = -\hat{a}$, logo $[\hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_{k'}, \hat{a}_k] = -\delta_{k',k} \hat{a}_{k'}$. Substituindo em (A.10) obtemos

$$(*) = \hat{a}_k \left(1 + \frac{it\epsilon_k}{\hbar} + \frac{1}{2!} \left(\frac{it\epsilon_k}{\hbar} \right)^2 + \dots + \frac{1}{3!} \left(\frac{it\epsilon_k}{\hbar} \right)^3 \right) = \hat{a}_k e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_k t}, \quad (\text{A.11})$$

de forma que

$$\tilde{A}(t) = \hbar \sum_{k=1}^{\infty} g_k^* \hat{a}_k e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_k t}. \quad (\text{A.12})$$

Portanto, o Hamiltoniano de interação na versão de interação é dado por

$$\tilde{E}(t) = \hbar \sum_{k=1}^{\infty} \left(g_k \hat{a}_k^\dagger e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon_k t} + g_k^* \hat{a}_k e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_k t} \right). \quad (\text{A.13})$$

A.2 Cálculo da função de partição

A função de partição é dada por

$$Z = \text{Tr}_E \left[\exp \left(-\beta \hat{H}_E \right) \right], \quad (\text{A.14})$$

onde $\hat{H}_E = \sum_k \epsilon_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ é o Hamiltoniano livre do meio ambiente e $\beta = 1/k_B T$, sendo k_B a constante de Boltzmann e T a temperatura do reservatório. A seguir, vamos calcular essa função e para isso devemos escolher uma base qualquer para o espaço de Hilbert do meio ambiente. A escolha da base é arbitrária, já que o traço é uma função invariante por transformações unitárias. Escolheremos a base de Fock para um campo multi-modal formada por auto-estados do Hamiltoniano $\hat{H}_E$, $\{|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle\}$, onde um auto-estado qualquer, $|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle$, representa um estado que possui n_1 excitações no primeiro modo, n_2 excitações no segundo modo, n_k excitações no k -ésimo modo e assim por diante. A base de Fock é uma base ortonormal e a aplicação dos operadores de criação

e destruição nesse estado produz os seguintes resultados:

$$\hat{a}_k^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_1, n_2, \dots, n_k + 1, \dots\rangle, \quad (\text{A.15})$$

$$\hat{a}_k |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = \sqrt{n_k} |n_1, n_2, \dots, n_k - 1, \dots\rangle, \quad (\text{A.16})$$

$$\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = n_k |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle. \quad (\text{A.17})$$

O estado mais geral escrito em termos dessa base é uma superposição linear desses auto-estados

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=0}^{\infty} \cdots C_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots} |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle. \quad (\text{A.18})$$

Dessa forma, temos

$$Z = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=0}^{\infty} \cdots \langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | e^{-\beta \sum_{k'} \epsilon_{k'} \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_{k'}} | n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \rangle. \quad (\text{A.19})$$

Para calcularmos o traço dado acima devemos saber como expressar a exponencial de um operador qualquer $\hat{\mathcal{A}}$. Dito isso, lembrando que

$$\exp(\hat{\mathcal{A}}) = \hat{1} + \hat{\mathcal{A}} + \frac{1}{2!} (\hat{\mathcal{A}})^2 + \frac{1}{3!} (\hat{\mathcal{A}})^3 + \frac{1}{4!} (\hat{\mathcal{A}})^4 + \dots, \quad (\text{A.20})$$

e usando (A.17), temos o seguinte resultado:

$$Z = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=0}^{\infty} \cdots e^{-\beta \sum_{k'} \epsilon_{k'} n_{k'}} \underbrace{\langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \rangle}_{=1}. \quad (\text{A.21})$$

Assim, o resultado acima pode ser reescrito como se segue:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=0}^{\infty} \cdots e^{-\beta(\epsilon_1 n_1 + \epsilon_2 n_2 + \cdots + \epsilon_k n_k + \dots)} \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_1 n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_2 n_2} \cdots \sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_k n_k} \cdots \\ &= \prod_{k'=1}^{\infty} \left(\sum_{n_{k'}=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_{k'} n_{k'}} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Todavia, notando que

$$(1 - f(x)) \sum_{n=0}^{\infty} f(x)^n = (1 - f(x)) (1 + f(x) + f(x)^2 + f(x)^3 + \dots) = 1, \quad (\text{A.23})$$

o que implica em

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x)^n = \frac{1}{1 - f(x)}, \quad (\text{A.24})$$

obtemos o seguinte resultado para a função de partição:

$$Z = \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 - \exp(-\beta \epsilon_k n_k)} \right]. \quad (\text{A.25})$$

A.3 Cálculo das funções de correlação do meio ambiente

Nesta seção calcularemos as funções de correlação que aparecem no capítulo 4. Sendo $\tilde{A}(t) = \hbar \sum_k g_k^* e^{-i\omega_k t} \hat{a}_k$ e considerando o estado inicial do meio ambiente como sendo

$$\hat{\rho}^E(0) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta \hat{H}_E), \quad (\text{A.26})$$

temos as seguintes funções de correlação para serem calculadas:

$$\text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}(t) \tilde{A}(t') \hat{\rho}^E(0) \right\} = \sum_{k,k'} \hbar^2 g_k^* g_{k'}^* \exp[-i(\omega_k t + \omega_{k'} t')] \text{Tr}_E [\hat{a}_k \hat{a}_{k'} \hat{\rho}_E(0)], \quad (\text{A.27})$$

$$\text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}^\dagger(t) \tilde{A}^\dagger(t') \hat{\rho}^E(0) \right\} = \sum_{k,k'} \hbar^2 g_k g_{k'} \exp[i(\omega_k t + \omega_{k'} t')] \text{Tr}_E [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{\rho}_E(0)], \quad (\text{A.28})$$

$$\text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}(t) \tilde{A}^\dagger(t') \hat{\rho}^E(0) \right\} = \sum_{k,k'} \hbar^2 g_k^* g_{k'} \exp[-i(\omega_k t - \omega_{k'} t')] \text{Tr}_E [\hat{a}_k \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{\rho}_E(0)], \quad (\text{A.29})$$

$$\text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}^\dagger(t) \tilde{A}(t') \hat{\rho}^E(0) \right\} = \sum_{k,k'} \hbar^2 g_k g_{k'}^* \exp[i(\omega_k t - \omega_{k'} t')] \text{Tr}_E [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} \hat{\rho}_E(0)]. \quad (\text{A.30})$$

Como podemos observar, devemos calcular os traços que se encontram do lado direito das equações (A.27), (A.28), (A.29) e (A.30). Escolhendo a base de Fock e usando os resultados (A.15), (A.16) e (A.17), vemos que

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_E [\hat{a}_k \hat{a}_{k'} \hat{\rho}_E] = \\ &= \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} \langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | \hat{a}_k \hat{a}_{k'} \frac{e^{-\beta \sum_{k''} \epsilon_{k''} \hat{a}_{k''}^\dagger \hat{a}_{k''}}}{Z} | n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \rangle \\ &= \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta \sum_{k''} \epsilon_{k''} n_{k''}}}{Z} \langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | \hat{a}_k \hat{a}_{k'} | n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

onde fizemos $\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=0}^{\infty} \cdots = \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty}$ por simplicidade. Se $k = k'$ temos

$$\begin{aligned} & \langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | \hat{a}_k \hat{a}_{k'} | n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \rangle = \\ &= \langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | \hat{a}_k \hat{a}_k | n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \rangle = \\ &= \sqrt{n_k} \sqrt{n_k - 1} \langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | n_1, n_2, \dots, n_k - 2, \dots \rangle = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

já que a base de Fock é uma base ortonormal. Se $k \neq k'$, então,

$$\begin{aligned} & \langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | \hat{a}_k \hat{a}_{k'} | n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \rangle = \\ &= \sqrt{n_k} \sqrt{n_{k'}} \langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | n_1, n_2, \dots, n_k - 1, \dots, n_{k'} - 1, \dots \rangle = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

pelos mesmos motivos. Portanto, $\text{Tr}_E [\hat{a}_k \hat{a}_{k'} \hat{\rho}_E(0)] = 0$. De forma análoga $\text{Tr}_E [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{\rho}_E(0)]$ também é nulo. Logo, as duas primeiras funções de correlação são nulas, isto é,

$$\text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}(t) \tilde{A}(t') \hat{\rho}^E(0) \right\} = \text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}^\dagger(t) \tilde{A}^\dagger(t') \hat{\rho}^E(0) \right\} = 0. \quad (\text{A.34})$$

Agora vamos calcular as outras duas funções de correlação do reservatório

$$\Lambda_1(t, t') = \text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}(t) \tilde{A}^\dagger(t') \hat{\rho}^{(E)}(0) \right\} \text{ e } \Lambda_2(t, t') = \text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}^\dagger(t) \tilde{A}(t') \hat{\rho}^{(E)}(0) \right\} \quad (\text{A.35})$$

Vamos começar por $\Lambda_1(t, t')$. Lembrando que $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}$, o traço encontrado do lado direito da equação (A.29) pode ser reescrito como se segue

$$\begin{aligned} \text{Tr}_E [\hat{a}_k \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{\rho}_E(0)] &= \text{Tr}_E [\delta_{k,k'} \hat{\rho}_E(0)] + \text{Tr}_E [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} \hat{\rho}_E(0)] \\ &= \delta_{k,k'} \text{Tr}_E [\hat{\rho}_E(0)] + \text{Tr}_E [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} \hat{\rho}_E(0)] \\ &= \delta_{k,k'} + \text{Tr}_E [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} \hat{\rho}_E(0)], \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

logo, precisamos calcular apenas $\text{Tr}_E [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} \hat{\rho}_E(0)]$; assim,

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}_E \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} \hat{\rho}_E(0) \right] = \\
&= \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} \langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} \frac{e^{-\beta \sum_{k''} \epsilon_{k''} \hat{a}_{k''}^\dagger \hat{a}_{k''}}}{Z} | n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \rangle \\
&= \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta \sum_{k''} \epsilon_{k''} n_{k''}}}{Z} \langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} | n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \rangle. \quad (\text{A.37})
\end{aligned}$$

Por outro lado, $\langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} | n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \rangle$ é diferente de zero somente se $k = k'$. Assim,

$$\text{Tr}_E \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} \hat{\rho}_E(0) \right] = \delta_{k,k'} \text{Tr}_E \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\rho}_E(0) \right]. \quad (\text{A.38})$$

Substituindo a equação (A.38) em (A.37), obtemos

$$\text{Tr}_E \left[\hat{a}_k \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{\rho}_E(0) \right] = \delta_{k,k'} \left\{ 1 + \text{Tr}_E \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\rho}_E(0) \right] \right\}, \quad (\text{A.39})$$

isto é, $\text{Tr}_E \left[\hat{a}_k \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{\rho}_E(0) \right]$ é diferente de zero somente se $k = k'$. Nesse caso

$$\text{Tr}_E \left[\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\rho}_E(0) \right] = 1 + \text{Tr}_E \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\rho}_E(0) \right]. \quad (\text{A.40})$$

Calculando $\text{Tr}_E \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\rho}_E(0) \right]$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}_E \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\rho}_E(0) \right] = \\
&= \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} \langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \frac{e^{-\beta \sum_{k''} \epsilon_{k''} \hat{a}_{k''}^\dagger \hat{a}_{k''}}}{Z} | n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \rangle \\
&= \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta \sum_{k''} \epsilon_{k''} n_{k''}}}{Z} \langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k | n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \rangle \\
&= \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} n_k \frac{e^{-\beta \sum_{k''} \epsilon_{k''} n_{k''}}}{Z} \langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \rangle \\
&= \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} n_k \frac{e^{-\beta \sum_{k''} \epsilon_{k''} n_{k''}}}{Z} \\
&= \frac{1}{Z} \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_1 n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_2 n_2} \dots \sum_{n_k=0}^{\infty} n_k e^{-\beta \epsilon_k n_k} \dots \right) \\
&= \frac{\sum_{n_k=0}^{\infty} n_k e^{-\beta \epsilon_k n_k}}{\sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_k n_k}}. \quad (\text{A.41})
\end{aligned}$$

Entretanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{n_k=0}^{\infty} n_k e^{-\beta \epsilon_k n_k}}{\sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_k n_k}} &= \frac{\partial}{\partial (-\beta \epsilon_k)} \ln \left(\sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_k n_k} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial (-\beta \epsilon_k)} \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_k}} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial (-\beta \epsilon_k)} [\ln(1) - \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_k})] \\
&= -\frac{\partial}{\partial (-\beta \epsilon_k)} \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_k}) \\
&= \frac{e^{-\beta \epsilon_k}}{1 - e^{-\beta \epsilon_k}} \\
&= \frac{1}{e^{\beta \epsilon_k} - 1}.
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Portanto

$$\text{Tr}_E \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\rho}_E(0) \right] = \frac{1}{\exp(\beta \epsilon_k) - 1}. \tag{A.43}$$

Dessa forma, substituindo (A.43) em (A.40), temos

$$\text{Tr}_E \left[\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\rho}_E(0) \right] = 1 + \frac{1}{\exp(\beta \epsilon_k) - 1}, \tag{A.44}$$

ou seja,

$$\text{Tr}_E \left[\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{\rho}_E(0) \right] = \frac{\exp(\beta \epsilon_k)}{\exp(\beta \epsilon_k) - 1}. \tag{A.45}$$

Substituindo (A.45) em (A.39) e substituindo o resultado em (A.29), e, substituindo

(A.43) em (A.38) e substituindo o resultado em (A.30), obtemos

$$\text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}(t) \tilde{A}^\dagger(t') \hat{\rho}^E(0) \right\} = \sum_{k,k'} \hbar^2 g_k^* g_{k'} \exp[-i(\omega_k t - \omega_{k'} t')] \delta_{k,k'} \frac{\exp(\beta \epsilon_k)}{\exp(\beta \epsilon_k) - 1}, \tag{A.46}$$

$$\text{Tr}_E \left\{ \tilde{A}^\dagger(t) \tilde{A}(t') \hat{\rho}^E(0) \right\} = \sum_{k,k'} \hbar^2 g_k g_{k'}^* \exp[i(\omega_k t - \omega_{k'} t')] \delta_{k,k'} \frac{1}{\exp(\beta \epsilon_k) - 1}. \tag{A.47}$$

Assim, finalmente obtemos

$$\Lambda_1(t, t') = \sum_k \hbar^2 |g_k|^2 \exp[-i\omega_k(t - t')] \frac{\exp(\beta \epsilon_k)}{\exp(\beta \epsilon_k) - 1}, \tag{A.48}$$

$$\Lambda_2(t, t') = \sum_k \hbar^2 |g_k|^2 \exp[i\omega_k(t - t')] \frac{1}{\exp(\beta \epsilon_k) - 1}. \tag{A.49}$$

Note também que

$$\Lambda_1(t', t) = \Lambda_1^*(t, t'), \quad (\text{A.50})$$

$$\Lambda_2(t', t) = \Lambda_2^*(t, t'). \quad (\text{A.51})$$

B A dinâmica exata de dois qubits

A matriz que representa o operador densidade de um sistema de dois qubits na base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ pode ser escrita como se segue

$$\hat{\rho} \doteq \begin{matrix} & \begin{matrix} |00\rangle & |01\rangle & |10\rangle & |11\rangle \end{matrix} \\ \begin{matrix} \langle 00| \\ \langle 01| \\ \langle 10| \\ \langle 11| \end{matrix} & \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \rho_{1,4} \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & \rho_{3,3} & \rho_{3,4} \\ \rho_{4,1} & \rho_{4,2} & \rho_{4,3} & \rho_{4,4} \end{pmatrix} \end{matrix} . \quad (\text{B.1})$$

Ela possui 16 elementos (4 populações e 12 coerências) e a princípio todos eles se transformam a medida que o tempo passa. O operador densidade associado à matriz (B.1) assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = & \rho_{1,1}|00\rangle\langle 00| + \rho_{1,2}|00\rangle\langle 01| + \rho_{1,3}|00\rangle\langle 10| + \rho_{1,4}|00\rangle\langle 11| \\ & + \rho_{2,1}|01\rangle\langle 00| + \rho_{2,2}|01\rangle\langle 01| + \rho_{2,3}|01\rangle\langle 10| + \rho_{2,4}|01\rangle\langle 11| \\ & + \rho_{3,1}|10\rangle\langle 00| + \rho_{3,2}|10\rangle\langle 01| + \rho_{3,3}|10\rangle\langle 10| + \rho_{3,4}|10\rangle\langle 11| \\ & + \rho_{4,1}|11\rangle\langle 00| + \rho_{4,2}|11\rangle\langle 01| + \rho_{4,3}|11\rangle\langle 10| + \rho_{4,4}|11\rangle\langle 11|. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Uma simples inspeção nos mostra quais são os elementos da matriz densidade (B.1) que permanecerão constantes no tempo, os que oscilarão e os que simplesmente decairão no tempo. Por exemplo, o elemento $\rho_{1,2}$ irá oscilar, pois, para $\sigma_z^T \equiv \sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)}$, temos $\sigma_z^T|00\rangle = 2|00\rangle$ e $\langle 01|\sigma_z^T = \langle 01|0$, o que implica em $(\sum_{n=1}^2 i_n)^2 \neq (\sum_{n=1}^2 j_n)^2$ no segundo termo exponencial da equação (5.12) da seção 5.1 do capítulo 5. Os outros elementos que

também oscilarão no tempo são: $\rho_{1,3}$, $\rho_{2,1}$, $\rho_{2,4}$, $\rho_{3,1}$, $\rho_{1,3}$, $\rho_{3,4}$, $\rho_{4,2}$ e $\rho_{4,3}$. Podemos verificar formalmente a nossa suposição considerando a dinâmica exata dada pela equação (5.12). Para o caso de sistemas de dois qubits essa equação pode ser simplificada como se segue

$$\begin{aligned} \rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(t) &= \exp \left\{ -\Gamma(t, T) [(i_1 - j_1)^2 \right. \\ &\quad + 2(i_1 - j_1)(i_2 - j_2) + (i_2 - j_2)^2] \left. \right\} \\ &\times \exp \left\{ i\Theta(t) [(i_1 i_1 - j_1 j_1) + 2(i_1 i_2 - j_1 j_2) \right. \\ &\quad + (i_2 i_2 - j_2 j_2)] \left. \right\} \times \rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(0). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Os elementos da matriz densidade $\rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(t) = \langle i_1, i_2 | \rho^Q | j_1, j_2 \rangle$, onde nesse caso $\{i_n, j_n\} = \{i_1, j_1; i_2, j_2\}$ refere-se ao estado de dois qubits. Todavia, podemos ignorar os termos $(i_1 i_1 - j_1 j_1)$ e $(i_2 i_2 - j_2 j_2)$ que se encontram no argumento da segunda exponencial, pois, i_1, i_2, j_1 e j_2 assumem os valores ± 1 (lembrando que $\sigma_z^{(1)} |j_1, j_2\rangle = j_1 |j_1, j_2\rangle$, $\sigma_z^{(2)} |j_1, j_2\rangle = j_2 |j_1, j_2\rangle$, $\langle i_1, i_2 | \sigma_z^{(1)} = \langle i_1, i_2 | i_1$, $\langle i_1, i_2 | \sigma_z^{(2)} = \langle i_1, i_2 | i_2$) e esses termos são sempre nulos. Assim, a equação (B.3) se torna

$$\begin{aligned} \rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(t) &= \exp \left\{ -\Gamma(t, T) [(i_1 - j_1)^2 \right. \\ &\quad + 2(i_1 - j_1)(i_2 - j_2) + (i_2 - j_2)^2] \left. \right\} \\ &\times \exp \left\{ 2i\Theta(t) (i_1 i_2 - j_1 j_2) \right\} \times \rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(0). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Vejamos como a equação (B.4) funciona analisando a dinâmica dos 16 elementos da matriz densidade (B.1).

Vamos começar analisando as coerências que oscilam no tempo. Para esses elementos, temos $i_1 = j_1$ e $i_2 \neq j_2$, ou $i_1 \neq j_1$ e $i_2 = j_2$.

- Para o elemento $\rho_{1,2}$, temos $i_1 = 1$, $i_2 = 1$, $j_1 = 1$ e $j_2 = -1$. Substituindo esses

valores na equação (B.4), obtemos

$$\rho_{1,2}(t) = e^{-4\Gamma(t,T)} [\cos(4\Theta(t)) + i \sin(4\Theta(t))] \rho_{1,2}(0). \quad (\text{B.5})$$

- Para o elemento $\rho_{2,1}$, temos $i_1 = 1$, $i_2 = -1$, $j_1 = 1$ e $j_2 = 1$. Substituindo esses valores na equação (B.4), obtemos

$$\rho_{2,1}(t) = e^{-4\Gamma(t,T)} [\cos(4\Theta(t)) - i \sin(4\Theta(t))] \rho_{2,1}(0). \quad (\text{B.6})$$

- Para o elemento $\rho_{1,3}$, temos $i_1 = 1$, $i_2 = 1$, $j_1 = -1$ e $j_2 = 1$. Substituindo esses valores na equação (B.4), obtemos

$$\rho_{1,3}(t) = e^{-4\Gamma(t,T)} [\cos(4\Theta(t)) + i \sin(4\Theta(t))] \rho_{1,3}(0). \quad (\text{B.7})$$

- Para o elemento $\rho_{3,1}$, temos $i_1 = -1$, $i_2 = 1$, $j_1 = 1$ e $j_2 = 1$. Substituindo esses valores na equação (B.4), obtemos

$$\rho_{3,1}(t) = e^{-4\Gamma(t,T)} [\cos(4\Theta(t)) - i \sin(4\Theta(t))] \rho_{3,1}(0). \quad (\text{B.8})$$

- Para o elemento $\rho_{2,4}$, temos $i_1 = 1$, $i_2 = -1$, $j_1 = -1$ e $j_2 = -1$. Substituindo esses valores na equação (B.4), obtemos

$$\rho_{2,4}(t) = e^{-4\Gamma(t,T)} [\cos(4\Theta(t)) - i \sin(4\Theta(t))] \rho_{2,4}(0). \quad (\text{B.9})$$

- Para o elemento $\rho_{4,2}$, temos $i_1 = -1$, $i_2 = -1$, $j_1 = 1$ e $j_2 = -1$. Substituindo esses valores na equação (B.4), obtemos

$$\rho_{4,2}(t) = e^{-4\Gamma(t,T)} [\cos(4\Theta(t)) + i \sin(4\Theta(t))] \rho_{4,2}(0). \quad (\text{B.10})$$

- Para o elemento $\rho_{3,4}$, temos $i_1 = -1$, $i_2 = 1$, $j_1 = -1$ e $j_2 = -1$. Substituindo esses valores na equação (B.4), obtemos

$$\rho_{3,4}(t) = e^{-4\Gamma(t,T)} [\cos(4\Theta(t)) - i \sin(4\Theta(t))] \rho_{3,4}(0). \quad (\text{B.11})$$

- E finalmente, para o elemento $\rho_{4,3}$, temos $i_1 = -1$, $i_2 = -1$, $j_1 = -1$ e $j_2 = 1$.

Substituindo esses valores na equação (B.4), obtemos

$$\rho_{4,3}(t) = e^{-4\Gamma(t,T)} [\cos(4\Theta(t)) + i \sin(4\Theta(t))] \rho_{4,3}(0). \quad (\text{B.12})$$

Agora, vamos analisar as coerências em que $i_1 \neq j_1$ e $i_2 \neq j_2$. Para essas coerências observamos dois tipos diferentes de comportamento:

1. Coerências que decaem no tempo:

- Para o elemento $\rho_{1,4}$, temos $i_1 = 1$, $i_2 = 1$, $j_1 = -1$ e $j_2 = -1$. Substituindo esses valores na equação (B.4), obtemos

$$\rho_{1,4}(t) = e^{-16\Gamma(t,T)} \rho_{1,4}(0). \quad (\text{B.13})$$

- Para o elemento $\rho_{4,1}$, temos $i_1 = -1$, $i_2 = -1$, $j_1 = 1$ e $j_2 = 1$. Substituindo esses valores na equação (B.4), obtemos

$$\rho_{4,1}(t) = e^{-16\Gamma(t,T)} \rho_{4,1}(0). \quad (\text{B.14})$$

2. Coerências que não mudam com o tempo:

- Para o elemento $\rho_{2,3}$, temos $i_1 = 1$, $i_2 = -1$, $j_1 = -1$ e $j_2 = 1$. Substituindo esses valores na equação (B.4), obtemos

$$\rho_{2,3}(t) = \rho_{2,3}(0). \quad (\text{B.15})$$

- Para o elemento $\rho_{3,2}$, temos $i_1 = -1$, $i_2 = 1$, $j_1 = 1$ e $j_2 = -1$. Substituindo esses valores na equação (B.4), obtemos

$$\rho_{3,2}(t) = \rho_{3,2}(0). \quad (\text{B.16})$$

Os elementos para os quais $i_1 = j_1$ e $i_2 = j_2$ são os quatro elementos da diagonal principal, ou seja, as populações, e elas também não mudam com o tempo, já que $\rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(t) = \rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(0)$. Vejamos esse processo, um por um:

- Para o elemento $\rho_{1,1}$, temos $i_1 = 1$, $i_2 = 1$, $j_1 = 1$ e $j_2 = 1$. Substituindo esses valores na equação (B.4), obtemos

$$\rho_{1,1}(t) = \rho_{1,1}(0). \quad (\text{B.17})$$

- Para o elemento $\rho_{2,2}$, temos $i_1 = 1$, $i_2 = -1$, $j_1 = 1$ e $j_2 = -1$. Substituindo esses valores na equação (B.4), obtemos

$$\rho_{2,2}(t) = \rho_{2,2}(0). \quad (\text{B.18})$$

- Para o elemento $\rho_{3,3}$, temos $i_1 = -1$, $i_2 = 1$, $j_1 = -1$ e $j_2 = 1$. Substituindo esses valores na equação (B.4), obtemos

$$\rho_{3,3}(t) = \rho_{3,3}(0). \quad (\text{B.19})$$

- Para o elemento $\rho_{4,4}$, temos $i_1 = -1$, $i_2 = -1$, $j_1 = -1$ e $j_2 = -1$. Substituindo esses valores na equação (B.4), obtemos

$$\rho_{4,4}(t) = \rho_{4,4}(0). \quad (\text{B.20})$$

C Obtenção do propagador e da matriz densidade reduzida

C.1 O propagador

Considere o seguinte Hamiltoniano na versão de interação

$$\tilde{H}_{int}(t) = \hbar \sum_{n,k} \hat{\sigma}_z^{(n)} \left(g_k^n e^{i\omega_k t} \hat{a}_k^\dagger + g_k^{n*} e^{-i\omega_k t} \hat{a}_k \right). \quad (\text{C.1})$$

Na versão de interação, o estado quântico do sistema combinado (isto é, o estado do sistema de N qubits acoplado com o meio ambiente) no tempo t é dado por

$$|\psi_I(t)\rangle = \hat{U}_I(t) |\psi(0)\rangle, \quad (\text{C.2})$$

onde $|\psi(0)\rangle$ é o estado inicial do sistema combinado e $\hat{U}_I(t)$ é o operador evolução temporal. Através da equação de Schrödinger obtemos

$$\hat{U}_I(t) = \hat{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \tilde{H}_{int}(t') dt' \right], \quad (\text{C.3})$$

onde $\hat{T}$ é o operador ordenamento temporal de Dyson. Substituindo a equação (C.1) em (C.3) obtemos

$$\hat{U}_I(t) = \hat{T} \exp \left[-i \int_0^t \sum_{n,k} \hat{\sigma}_z^{(n)} \left(g_k^n e^{i\omega_k t'} \hat{a}_k^\dagger + g_k^{n*} e^{-i\omega_k t'} \hat{a}_k \right) dt' \right]. \quad (\text{C.4})$$

Por outro lado, sabemos que a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma (veja o apêndice D):

$$\begin{aligned} \hat{U}_I(t) &= \exp \left[\sum_{n,k} g_k^n \hat{\sigma}_z^{(n)} \varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger \right] \\ &\times \hat{T} \exp \left[-i \int_0^t \sum_{n,k} g_k^{n*} \hat{\sigma}_z^{(n)} e^{[-\sum_{n,k'} g_{k'}^n \hat{\sigma}_z^{(n)} \varphi_{\omega_{k'}}(t') \hat{a}_{k'}^\dagger]} \hat{a}_k e^{[\sum_{n,k'} g_{k'}^n \hat{\sigma}_z^{(n)} \varphi_{\omega_{k'}}(t') \hat{a}_{k'}^\dagger]} e^{-i\omega_k t'} dt' \right], \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

onde

$$\varphi_{\omega_k}(t) = -i \int_0^t e^{i\omega_k t'} dt' = \frac{1 - e^{i\omega_k t}}{\omega_k}. \quad (\text{C.6})$$

A equação (C.5) pode ser simplificada usando-se o teorema de Campbell-Baker-Hausdorff

(21)

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!} [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots \quad (\text{C.7})$$

fazendo $\hat{A} = -\sum_{k'} g_{k'} \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_{k'}}(t') \hat{a}_{k'}^\dagger$, $\hat{B} = g_k^* \hat{\sigma}_z \hat{a}_k$ e introduzindo a notação compacta $g_k \hat{\sigma}_z = \sum_n g_k^n \hat{\sigma}_z^{(n)}$. Assim

$$e^{[-\sum_{k'} g_{k'} \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_{k'}}(t') \hat{a}_{k'}^\dagger]} g_k^* \hat{\sigma}_z \hat{a}_k e^{[\sum_{k'} g_{k'} \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_{k'}}(t') \hat{a}_{k'}^\dagger]} = g_k^* \hat{\sigma}_z \left(\hat{a}_k - \sum_{k'} g_{k'} \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_{k'}}(t') [\hat{a}_{k'}^\dagger, \hat{a}_k] \right), \quad (\text{C.8})$$

uma vez que todos os termos de ordem superior a 1 são nulos. Como $[\hat{a}_{k'}^\dagger, \hat{a}_k] = -\delta_{k',k}$, então

$$e^{[-\sum_{k'} g_{k'} \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_{k'}}(t') \hat{a}_{k'}^\dagger]} g_k^* \hat{\sigma}_z \hat{a}_k e^{[\sum_{k'} g_{k'} \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_{k'}}(t') \hat{a}_{k'}^\dagger]} = g_k^* \hat{\sigma}_z [\hat{a}_k + g_k \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_k}(t')]. \quad (\text{C.9})$$

Substituindo a equação (C.9) na (C.5) temos

$$\begin{aligned} \hat{U}_I(t) &= \exp \left[\sum_k g_k \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger \right] \\ &\times \hat{T} \exp \left\{ -i \int_0^t \sum_k g_k^* \hat{\sigma}_z [\hat{a}_k + g_k \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_k}(t')] e^{-i\omega_k t'} dt' \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
& \hat{T} \exp \left\{ -i \int_0^t \sum_k g_k^* \hat{\sigma}_z [\hat{a}_k + g_k \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_k}(t')] e^{-i\omega_k t'} dt' \right\} = \\
& = \hat{T} \exp \left\{ -i \int_0^t \sum_k g_k^* \hat{\sigma}_z \hat{a}_k e^{-i\omega_k t'} dt' \right\} \hat{T} \exp \left\{ -i \int_0^t \sum_k |g_k \hat{\sigma}_z|^2 \varphi_{\omega_k}(t') e^{-i\omega_k t'} dt' \right\} \\
& = \hat{T} \exp \left\{ -i \sum_k g_k^* \hat{\sigma}_z \hat{a}_k \int_0^t e^{-i\omega_k t'} dt' \right\} \hat{T} \exp \left\{ -i \sum_k |g_k \hat{\sigma}_z|^2 \int_0^t \varphi_{\omega_k}(t') e^{-i\omega_k t'} dt' \right\} \\
& = \exp \left\{ -i \sum_k g_k^* \hat{\sigma}_z \hat{a}_k \int_0^t e^{-i\omega_k t'} dt' \right\} \exp \left\{ -i \sum_k |g_k \hat{\sigma}_z|^2 \int_0^t \varphi_{\omega_k}(t') e^{-i\omega_k t'} dt' \right\}.
\end{aligned} \tag{C.11}$$

O cálculo das integrais em (C.11) é trivial;

$$I_1 = -i \int_0^t e^{-i\omega_k t'} dt' = -i \left(\frac{e^{-i\omega_k t'}}{-i\omega_k} \right) \Big|_0^t = \frac{e^{-i\omega_k t} - 1}{\omega_k} = -\varphi_{\omega_k}^*(t), \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= -i \int_0^t \varphi_{\omega_k}(t') e^{-i\omega_k t'} dt' = -i \int_0^t \left(\frac{1 - e^{i\omega_k t'}}{\omega_k} \right) e^{-i\omega_k t'} dt' \\
&= -\frac{i}{\omega_k} \left[\int_0^t e^{-i\omega_k t'} dt' - \int_0^t dt' \right] = -\frac{\varphi_{\omega_k}^*(t)}{\omega_k} + \frac{it}{\omega_k}.
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\hat{U}_I(t) &= \exp \left[\sum_k g_k \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger \right] \exp \left[- \sum_k g_k^* \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_k}^*(t) \hat{a}_k \right] \\
&\times \exp \left\{ -i \sum_k |g_k \hat{\sigma}_z|^2 \int_0^t \varphi_{\omega_k}(t') e^{-i\omega_k t'} dt' \right\}.
\end{aligned} \tag{C.14}$$

Conhecendo o teorema demonstrado no apêndice E que nos diz que $e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B}} e^{\frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{2}}$, sempre que $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$, podemos juntar as duas primeiras exponenciais na equação (C.14) em uma única, fazendo $\hat{A} = \sum_k g_k \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger$ e $\hat{B} = -\sum_k g_k^* \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_k}^*(t) \hat{a}_k$. Como, nesse caso

$$\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}] &= - \sum_{k, k'} g_k \hat{\sigma}_z g_{k'}^* \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_k}(t) \varphi_{\omega_{k'}}^*(t) \underbrace{[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}]}_{-\delta_{k, k'}} \\
&= \sum_k |g_k \hat{\sigma}_z|^2 |\varphi_{\omega_k}(t)|^2,
\end{aligned} \tag{C.15}$$

reescrevemos a equação (C.14) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \hat{U}_I(t) &= \exp \left\{ \sum_k \left[g_k \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger - g_k^* \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_k}^*(t) \hat{a}_k \right] \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_k |g_k \hat{\sigma}_z|^2 |\varphi_{\omega_k}(t)|^2 \right\} \exp \left\{ -i \sum_k |g_k \hat{\sigma}_z|^2 \int_0^t \varphi_{\omega_k}(t') e^{-i\omega_k t'} dt' \right\}. \end{aligned} \quad (C.16)$$

Substituindo (C.13) em (C.16) obtemos

$$\begin{aligned} \hat{U}_I(t) &= \exp \left\{ \sum_k \left[g_k \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger - g_k^* \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_k}^*(t) \hat{a}_k \right] \right\} \\ &\times \exp \left\{ \sum_k |g_k \hat{\sigma}_z|^2 \left[\frac{it}{\omega_k} - \frac{\varphi_{\omega_k}^*(t)}{\omega_k} + \frac{|\varphi_{\omega_k}(t)|^2}{2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (C.17)$$

Levando-se (C.6) em conta

$$\begin{aligned} \hat{U}_I(t) &= \exp \left\{ \sum_k \left[g_k \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger - g_k^* \hat{\sigma}_z \varphi_{\omega_k}^*(t) \hat{a}_k \right] \right\} \\ &\times \exp \left\{ i \sum_k |g_k \hat{\sigma}_z|^2 \left[\frac{\omega_k t - \sin(\omega_k t)}{(\omega_k)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (C.18)$$

Por fim, fazendo $s(\omega_k, t) = \frac{\omega_k t - \sin(\omega_k t)}{(\omega_k)^2}$ e abrindo mão da notação compacta introduzida para facilitar os cálculos, obtemos finalmente

$$\begin{aligned} \hat{U}_I(t) &= \exp \left\{ \sum_{n,k} \left[g_k^n \hat{\sigma}_z^{(n)} \varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger - g_k^{n*} \hat{\sigma}_z^{(n)} \varphi_{\omega_k}^*(t) \hat{a}_k \right] \right\} \\ &\times \exp \left\{ i \sum_k \sum_{m,n} g_k^m g_k^{n*} \sigma_z^m \hat{\sigma}_z^{(n)} s(\omega_k, t) \right\}. \end{aligned} \quad (C.19)$$

A expressão acima representa o propagador, ou seja, o operador evolução temporal para um sistema de N qubits interagindo com o meio ambiente seguindo o operador de interação (C.1). O propagador acima, a princípio, não faz distinção se o sistema formado pelos N qubits interage coletivamente ou independentemente com o meio ambiente. A seguir empregaremos o propagador (C.19) para a obtenção da evolução da matriz densidade do sistema de interesse.

C.2 A evolução matriz densidade do sistema reduzido

Devido à característica Abelianiana do modelo de ruído considerado, podemos calcular analiticamente a dependência funcional do decaimento das coerências dos registros quânticos (ou seja, dos qubits) levando em conta todos os modos do meio ambiente. No cálculo da dinâmica da matriz densidade reduzida seguimos a Ref. (37). Começamos notando que o estado evoluído do sistema combinado pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}_I(t) [\hat{\rho}^Q(0) \otimes \hat{\rho}^E(0)] \hat{U}_I^\dagger(t). \quad (\text{C.20})$$

Assim, o estado do sistema reduzido será representado pela seguinte matriz densidade reduzida

$$\hat{\rho}^Q(t) = \text{Tr}_E \{ \hat{\rho}(t) \} = \text{Tr}_E \left\{ \hat{U}_I(t) \hat{\rho}^Q(0) \otimes \hat{\rho}^E(0) \hat{U}_I^\dagger(t) \right\}, \quad (\text{C.21})$$

cujos elementos de matriz podem ser escritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(t) &= \langle i_L, i_{L-1}, \dots, i_1 | \text{Tr}_E \{ \hat{\rho}(t) \} | j_L, j_{L-1}, \dots, j_1 \rangle \\ &= \langle i_L, i_{L-1}, \dots, i_1 | \text{Tr}_E \left\{ \hat{U}_I(t) \hat{\rho}^Q(0) \otimes \hat{\rho}^E(0) \hat{U}_I^\dagger(t) \right\} | j_L, j_{L-1}, \dots, j_1 \rangle \\ &= \text{Tr}_E \left\{ \langle i_L, i_{L-1}, \dots, i_1 | \hat{U}_I(t) \hat{\rho}^Q(0) \otimes \hat{\rho}^E(0) \hat{U}_I^\dagger(t) | j_L, j_{L-1}, \dots, j_1 \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

onde $\{i_n, j_n\} = \{i_1, j_1; i_2, j_2; \dots; i_L, j_L\}$ refere-se aos estados dos qubits no registro quântico. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle i_L, i_{L-1}, \dots, i_1 | \hat{U}_I(t) &= \exp \left\{ \sum_{n,k} \left[g_k^n i_n \varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger - g_k^{n*} i_n \varphi_{\omega_k}^*(t) \hat{a}_k \right] \right\} \\ &\times \exp \left\{ i \sum_k \sum_{m,n} g_k^m g_k^{n*} i_m i_n s(\omega_k, t) \right\} \langle i_L, i_{L-1}, \dots, i_1 | \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

e

$$\begin{aligned} \hat{U}_I^\dagger(t) |j_L, j_{L-1}, \dots, j_1\rangle &= |j_L, j_{L-1}, \dots, j_1\rangle \exp \left\{ \sum_{n,k} \left[g_k^{n*} j_n \varphi_{\omega_k}^*(t) \hat{a}_k - g_k^n j_n \varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger \right] \right\} \\ &\times \exp \left\{ -i \sum_k \sum_{m,n} g_k^{m*} g_k^n j_m j_n s(\omega_k, t) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

de forma que

$$\rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(t) = \text{Tr}_E \left\{ U_I^{\{i_n\}}(t) \hat{\rho}^E(0) U_I^{\dagger\{j_n\}}(t) \right\} \rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(0), \quad (\text{C.25})$$

onde

$$U_I^{\{i_n\}}(t) = \exp \left\{ i \sum_k s(\omega_k, t) \sum_{m,n} g_k^m g_k^{n*} i_m i_n \right\} \exp \left\{ \sum_{n,k} i_n \left[g_k^n \varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger - g_k^{n*} \varphi_{\omega_k}^*(t) \hat{a}_k \right] \right\} \quad (\text{C.26})$$

e

$$\rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(0) = \langle i_L, i_{L-1}, \dots, i_1 | \rho^Q(0) | j_L, j_{L-1}, \dots, j_1 \rangle. \quad (\text{C.27})$$

Considerando a propriedade cíclica do traço, podemos reescrever a equação (C.25) da seguinte forma:

$$\rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(t) = \text{Tr}_E \left\{ \hat{\rho}^E(0) U_I^{\dagger\{j_n\}}(t) U_I^{\{i_n\}}(t) \right\} \rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(0); \quad (\text{C.28})$$

porém

$$\begin{aligned} U_I^{\dagger\{j_n\}}(t) U_I^{\{i_n\}}(t) &= \exp \left\{ -i \sum_k s(\omega_k, t) \sum_{m,n} g_k^{m*} g_k^n j_m j_n \right\} \\ &\times \exp \left\{ \sum_{n,k} j_n \left[g_k^{n*} \varphi_{\omega_k}^*(t) \hat{a}_k - g_k^n \varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger \right] \right\} \\ &\times \exp \left\{ i \sum_k s(\omega_k, t) \sum_{m,n} g_k^m g_k^{n*} i_m i_n \right\} \\ &\times \exp \left\{ \sum_{n,k} i_n \left[g_k^n \varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger - g_k^{n*} \varphi_{\omega_k}^*(t) \hat{a}_k \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
U_I^{\dagger\{j_n\}}(t) U_I^{\{i_n\}}(t) &= \exp \left\{ i \sum_k s(\omega_k, t) \sum_{m,n} (g_k^m g_k^{n*} i_m i_n - g_k^{m*} g_k^n j_m j_n) \right\} \\
&\times \exp \left\{ \sum_{n,k} (i_n - j_n) \left[g_k^n \varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger - g_k^{n*} \varphi_{\omega_k}^*(t) \hat{a}_k \right] \right\} \\
&\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_k \sum_{m,n} j_m i_n |\varphi_{\omega_k}(t)|^2 (g_k^{m*} g_k^n - g_k^m g_k^{n*}) \right\}. \quad (C.30)
\end{aligned}$$

Onde, novamente, usamos o teorema demonstrado no apêndice E com

$$\hat{A} = \sum_{n,k} j_n \left[g_k^{n*} \varphi_{\omega_k}^*(t) \hat{a}_k - g_k^n \varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger \right] \quad (C.31)$$

e

$$\hat{B} = \sum_{n,k} i_n \left[g_k^n \varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger - g_k^{n*} \varphi_{\omega_k}^*(t) \hat{a}_k \right]. \quad (C.32)$$

Escrevendo g_k^m em sua forma polar, isto é, $g_k^m = |g_k| e^{i\theta_m}$, obtemos

$$\begin{aligned}
U_I^{\dagger\{j_n\}}(t) U_I^{\{i_n\}}(t) &= \exp \left\{ i \sum_k |g_k|^2 s(\omega_k, t) \sum_{m,n} (i_m i_n e^{i\theta_{mn}} - j_m j_n e^{-i\theta_{mn}}) \right\} \\
&\times \exp \left\{ \sum_{n,k} |g_k|^2 (i_n - j_n) \left[\varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger e^{i\theta_n} - \varphi_{\omega_k}^*(t) \hat{a}_k e^{-i\theta_n} \right] \right\} \\
&\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_k \sum_{m,n} j_m i_n |g_k|^2 |\varphi_{\omega_k}(t)|^2 (e^{-i\theta_{mn}} - e^{i\theta_{mn}}) \right\}, \quad (C.33)
\end{aligned}$$

onde $\theta_{mn} = \theta_m - \theta_n$. Por fim, como $e^{i\theta_{mn}} = \cos(\theta_{mn}) + i \sin(\theta_{mn})$, temos

$$\begin{aligned}
U_I^{\dagger\{j_n\}}(t) U_I^{\{i_n\}}(t) &= \exp \left\{ i \sum_k |g_k|^2 s(\omega_k, t) \sum_{m,n} (i_m i_n - j_m j_n) \cos(\theta_{mn}) \right\} \\
&\times \exp \left\{ - \sum_k |g_k|^2 s(\omega_k, t) \sum_{m,n} (i_m i_n + j_m j_n) \sin(\theta_{mn}) \right\} \\
&\times \exp \left\{ -i \sum_k \sum_{m,n} j_m i_n |g_k|^2 |\varphi_{\omega_k}(t)|^2 \sin(\theta_{mn}) \right\}, \\
&\times \exp \left\{ \sum_{n,k} |g_k| (i_n - j_n) \left[\varphi_{\omega_k}(t) \hat{a}_k^\dagger e^{i\theta_n} - \varphi_{\omega_k}^*(t) \hat{a}_k e^{-i\theta_n} \right] \right\} \quad (C.34)
\end{aligned}$$

Assim, substituindo (C.34) em (C.28):

$$\begin{aligned}
\rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(t) &= \exp \left\{ i \sum_k |g_k|^2 s(\omega_k, t) \sum_{m,n} (i_m i_n - j_m j_n) \cos(\theta_{mn}) \right\} \\
&\times \exp \left\{ - \sum_k |g_k|^2 s(\omega_k, t) \sum_{m,n} (i_m i_n + j_m j_n) \sin(\theta_{mn}) \right\} \\
&\times \exp \left\{ -i \sum_k \sum_{m,n} j_m i_n |g_k|^2 |\varphi_{\omega_k}(t)|^2 \sin(\theta_{mn}) \right\} \\
&\times \text{Tr}_E \left\{ \hat{\rho}^E(0) \exp \left[\sum_k \left(\Lambda_k(t) \hat{a}_k^\dagger - \Lambda_k^*(t) \hat{a}_k \right) \right] \right\} \rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(0), \quad (\text{C.35})
\end{aligned}$$

onde $\Lambda_k(t) = |g_k| \varphi_{\omega_k}(t) \sum_n (i_n - j_n) e^{i\theta_n}$. Note que

$$|\Lambda_k(t)|^2 = |g_k|^2 |\varphi_{\omega_k}(t)|^2 \sum_{m,n} (i_m - j_m)(i_n - j_n) e^{i\theta_{mn}}. \quad (\text{C.36})$$

Mais uma vez, usamos o teorema do apêndice E para reescrever a exponencial dentro do traço na equação acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\exp \left[\sum_k \left(\Lambda_k(t) \hat{a}_k^\dagger - \Lambda_k^*(t) \hat{a}_k \right) \right] &= \exp \left[- \sum_k \Lambda_k^*(t) \hat{a}_k \right] \exp \left[\sum_k \Lambda_k(t) \hat{a}_k^\dagger \right] \\
&\times \exp \left[\frac{1}{2} \sum_k |\Lambda_k(t)|^2 \right]. \quad (\text{C.37})
\end{aligned}$$

Dessa forma, a equação (C.35) torna-se

$$\begin{aligned}
\rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(t) &= \exp \left\{ i \sum_k |g_k|^2 s(\omega_k, t) \sum_{m,n} (i_m i_n - j_m j_n) \cos(\theta_{mn}) \right\} \\
&\times \exp \left\{ - \sum_k |g_k|^2 s(\omega_k, t) \sum_{m,n} (i_m i_n + j_m j_n) \sin(\theta_{mn}) \right\} \\
&\times \exp \left\{ -i \sum_k \sum_{m,n} j_m i_n |g_k|^2 |\varphi_{\omega_k}(t)|^2 \sin(\theta_{mn}) \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_k |\Lambda_k(t)|^2 \right\} \\
&\times \text{Tr}_E \left\{ \hat{\rho}^E(0) \exp \left[- \sum_k \Lambda_k^*(t) \hat{a}_k \right] \exp \left[\sum_k \Lambda_k(t) \hat{a}_k^\dagger \right] \right\} \rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(0) \quad (\text{C.38})
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\hat{\rho}^E(0) = \prod_k \frac{\exp \left(-\beta \hbar \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right)}{Z_k}, \quad (\text{C.39})$$

onde $Z_k = \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega_k}}$. Assim, como os diferentes modos do reservatório são independentes, podemos reescrever o traço na equação (C.38) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_E \left\{ \hat{\rho}^E(0) \exp \left[\sum_k \Lambda_k(t) \hat{a}_k^\dagger \right] \exp \left[- \sum_k \Lambda_k^*(t) \hat{a}_k \right] \right\} \\ &= \prod_k \frac{1}{Z_k} \text{Tr}_{E_k} \left\{ \exp \left(-\beta\hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) \exp \left[-\Lambda_k^*(t) \hat{a}_k \right] \exp \left[\Lambda_k(t) \hat{a}_k^\dagger \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

Para se calcular os traços em (C.40) escolhemos a base de estados coerentes (44):

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_{E_k} \left\{ \exp \left[\Lambda_k(t) \hat{a}_k^\dagger \right] \exp \left(-\beta\hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) \exp \left[-\Lambda_k^*(t) \hat{a}_k \right] \right\} \\ &= \int \frac{d^2\alpha_k}{\pi} \langle \alpha_k | \exp \left[\Lambda_k(t) \hat{a}_k^\dagger \right] \exp \left(-\beta\hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) \exp \left[-\Lambda_k^*(t) \hat{a}_k \right] | \alpha_k \rangle \\ &= \int \frac{d^2\alpha_k}{\pi} \exp \left[\Lambda_k(t) \alpha_k^* - \Lambda_k^*(t) \alpha_k \right] \langle \alpha_k | \exp \left(-\beta\hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) | \alpha_k \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \langle \alpha_k | \exp \left(-\beta\hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) | \alpha_k \rangle &= \langle \alpha_k | \left(\sum_{n_k} \exp(-n_k\beta\hbar\omega_k) | n_k \rangle \langle n_k | \right) | \alpha_k \rangle \\ &= \sum_{n_k} \exp(-n_k\beta\hbar\omega_k) \langle \alpha_k | n_k \rangle \langle n_k | \alpha_k \rangle \\ &= \sum_{n_k} \exp(-n_k\beta\hbar\omega_k) \langle \alpha_k | n_k \rangle \langle \alpha_k | n_k \rangle^* \\ &= \sum_{n_k} \exp(-n_k\beta\hbar\omega_k) |\langle \alpha_k | n_k \rangle|^2, \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

onde usamos a decomposição espectral

$$\exp \left(-\beta\hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) = \sum_{n_k} \exp(-n_k\beta\hbar\omega_k) | n_k \rangle \langle n_k |. \quad (\text{C.43})$$

Sabendo que o estado coerente se escreve como se segue:

$$| \alpha_k \rangle = e^{-\frac{|\alpha_k|^2}{2}} \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_k)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} | n_k \rangle, \quad (\text{C.44})$$

então

$$\langle \alpha_k | n_k \rangle = e^{-\frac{|\alpha_k|^2}{2}} \sum_{n'_k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_k^*)^{n'_k}}{\sqrt{n'_k!}} \langle n'_k | n_k \rangle = e^{-\frac{|\alpha_k|^2}{2}} \sum_{n'_k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_k^*)^{n'_k}}{\sqrt{n'_k!}} \delta_{n'_k n_k} = e^{-\frac{|\alpha_k|^2}{2}} \frac{(\alpha_k^*)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}}. \quad (\text{C.45})$$

Substituindo (C.45) em (C.42) obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_k | \exp \left(-\beta \hbar \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) | \alpha_k \rangle &= e^{-|\alpha_k|^2} \sum_{n_k} \frac{|\alpha_k|^{2n_k}}{n_k!} \exp(-n_k \beta \hbar \omega_k) \\
&= e^{-|\alpha_k|^2} \exp[|\alpha_k|^2 e^{-\beta \hbar \omega_k}] \\
&= \exp[-|\alpha_k|^2 (1 - e^{-\beta \hbar \omega_k})]. \tag{C.46}
\end{aligned}$$

Agora, substituindo a equação (C.46) na (C.41) chegamos no seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
&\text{Tr}_{E_k} \left\{ \exp \left[\Lambda_k(t) \hat{a}_k^\dagger \right] \exp \left(-\beta \hbar \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) \exp \left[-\Lambda_k^*(t) \hat{a}_k \right] \right\} \\
&= \int \frac{d^2 \alpha_k}{\pi} \exp \left[\Lambda_k(t) \alpha_k^* - \Lambda_k^*(t) \alpha_k \right] \exp \left[-|\alpha_k|^2 (1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}) \right]. \tag{C.47}
\end{aligned}$$

Fazendo $\Xi_k = 1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}$, $\Lambda_k(t) = a(t) + ib(t)$ e $\alpha_k = x + iy$, temos

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{E_k} \left\{ e^{\Lambda_k(t) \hat{a}_k^\dagger} e^{-\beta \hbar \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k} e^{-\Lambda_k^*(t) \hat{a}_k} \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx dy}{\pi} e^{2i[b(t)x - a(t)y]} e^{-(x^2 + y^2)\Xi_k} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{2ib(t)x} e^{-\Xi_k x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-2ia(t)y} e^{-\Xi_k y^2}, \tag{C.48}
\end{aligned}$$

onde

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{2ib(t)x} e^{-\Xi_k x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\Xi_k x^2} \cos[2b(t)x] + i \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\Xi_k x^2} \sin[2b(t)x], \tag{C.49}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-2ia(t)y} e^{-\Xi_k y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\Xi_k y^2} \cos[2b(t)y] - i \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\Xi_k y^2} \sin[2b(t)y]. \tag{C.50}$$

A segunda integral do lado direito da igualdade nas equações (C.49) e (C.50) são nulas, pois os integrandos em ambas integrais são funções ímpares integradas num domínio simétrico. Assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{2ib(t)x} e^{-\Xi_k x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\Xi_k x^2} \cos[2b(t)x] = \sqrt{\frac{\pi}{\Xi_k}} e^{-\frac{b(t)^2}{\Xi_k}}, \tag{C.51}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-2ia(t)y} e^{-\Xi_k y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\Xi_k y^2} \cos[2b(t)y] = \sqrt{\frac{\pi}{\Xi_k}} e^{-\frac{a(t)^2}{\Xi_k}}, \tag{C.52}$$

onde usamos o resultado $\int_0^\infty dx e^{-ax^2} \cos(bx) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/4a}$ tabelado na referência (38).

Substituindo (C.51) e (C.52) em (C.48) obtemos

$$\text{Tr}_{E_k} \left\{ e^{\Lambda_k(t) \hat{a}_k^\dagger} e^{-\beta \hbar \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k} e^{-\Lambda_k^*(t) \hat{a}_k} \right\} = \frac{1}{\Xi_k} e^{-\frac{(a(t)^2 + b(t)^2)}{\Xi_k}} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}} \exp \left\{ -\frac{|\Lambda_k(t)|^2}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}} \right\}. \quad (\text{C.53})$$

Substituindo (C.53) em (C.40) temos

$$\begin{aligned} \text{Tr}_E \left\{ \hat{\rho}^E(0) \exp \left[\sum_k \Lambda_k(t) \hat{a}_k^\dagger \right] \exp \left[-\sum_k \Lambda_k^*(t) \hat{a}_k \right] \right\} &= \prod_k \exp \left\{ -\frac{|\Lambda_k(t)|^2}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}} \right\} \\ &= \exp \left\{ -\sum_k \frac{|\Lambda_k(t)|^2}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

uma vez que $Z_k \Xi_k = 1$. Agora, substituindo (C.54) em (C.38) obtemos

$$\begin{aligned} \rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(t) &= \exp \left\{ i \sum_k |g_k|^2 s(\omega_k, t) \sum_{m,n} (i_m i_n - j_m j_n) \cos(\theta_{mn}) \right\} \\ &\times \exp \left\{ -\sum_k |g_k|^2 s(\omega_k, t) \sum_{m,n} (i_m i_n + j_m j_n) \sin(\theta_{mn}) \right\} \\ &\times \exp \left\{ -i \sum_k \sum_{m,n} j_m i_n |g_k|^2 |\varphi_{\omega_k}(t)|^2 \sin(\theta_{mn}) \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_k |\Lambda_k(t)|^2 \right\} \exp \left\{ -\sum_k \frac{|\Lambda_k(t)|^2}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}} \right\} \rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(0). \end{aligned} \quad (\text{C.55})$$

Porém

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_k |\Lambda_k(t)|^2 \right\} \exp \left\{ -\sum_k \frac{|\Lambda_k(t)|^2}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}} \right\} &= \exp \left\{ \sum_k |\Lambda_k(t)|^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_k |\Lambda_k(t)|^2 \left[\frac{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k} - 2}{2(1 - e^{-\beta \hbar \omega_k})} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\sum_k \frac{|\Lambda_k(t)|^2}{2} \left(\frac{1 + e^{-\beta \hbar \omega_k}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\sum_k \frac{|\Lambda_k(t)|^2}{2} \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega_k}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

Lembrando que $|\Lambda_k(t)|^2 = |g_k|^2 |\varphi_{\omega_k}(t)|^2 \sum_{m,n} (i_m - j_m)(i_n - j_n) e^{i\theta_{mn}}$, a (C.56) torna-se

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_k |\Lambda_k(t)|^2 \right\} \exp \left\{ - \sum_k \frac{|\Lambda_k(t)|^2}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}} \right\} \\ = & \exp \left\{ - \sum_k \frac{|g_k|^2 |\varphi_{\omega_k}(t)|^2}{2} \sum_{m,n} (i_m - j_m)(i_n - j_n) e^{i\theta_{mn}} \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega_k}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} \rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(t) &= \exp \left\{ i \sum_k |g_k|^2 s(\omega_k, t) \sum_{m,n} (i_m i_n - j_m j_n) \cos(\theta_{mn}) \right\} \\ &\times \exp \left\{ - \sum_k |g_k|^2 s(\omega_k, t) \sum_{m,n} (i_m i_n + j_m j_n) \sin(\theta_{mn}) \right\} \\ &\times \exp \left\{ -i \sum_k \sum_{m,n} j_m i_n |g_k|^2 |\varphi_{\omega_k}(t)|^2 \sin(\theta_{mn}) \right\} \\ &\times \exp \left\{ - \sum_k \frac{|g_k|^2 |\varphi_{\omega_k}(t)|^2}{2} \sum_{m,n} (i_m - j_m)(i_n - j_n) e^{i\theta_{mn}} \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega_k}{2} \right) \right\} \rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(0). \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

Como $|\varphi_{\omega_k}(t)|^2 = 2c(\omega_k, t)$ (onde $c(\omega_k, t) = \frac{1 - \cos(\omega_k t)}{(\omega_k)^2}$), então

$$\begin{aligned} \rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(t) &= \exp \left\{ i \sum_k |g_k|^2 s(\omega_k, t) \sum_{m,n} (i_m i_n - j_m j_n) \cos(\theta_{mn}) \right\} \\ &\times \exp \left\{ - \sum_k |g_k|^2 s(\omega_k, t) \sum_{m,n} (i_m i_n + j_m j_n) \sin(\theta_{mn}) \right\} \\ &\times \exp \left\{ -2i \sum_k \sum_{m,n} j_m i_n |g_k|^2 c(\omega_k, t) \sin(\theta_{mn}) \right\} \\ &\times \exp \left\{ - \sum_k |g_k|^2 c(\omega_k, t) \sum_{m,n} (i_m - j_m)(i_n - j_n) e^{i\theta_{mn}} \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega_k}{2} \right) \right\} \rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(0). \end{aligned} \quad (\text{C.59})$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(t) &= \exp \left\{ - \sum_k |g_k|^2 c(\omega_k, t) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega_k}{2} \right) \sum_{m,n} (i_m - j_m) (i_n - j_n) \cos(\theta_{mn}) \right\} \\
&\times \exp \left\{ -i \sum_k |g_k|^2 c(\omega_k, t) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega_k}{2} \right) \sum_{m,n} (i_m - j_m) (i_n - j_n) \sin(\theta_{mn}) \right\} \\
&\times \exp \left\{ i \sum_k |g_k|^2 s(\omega_k, t) \sum_{m,n} (i_m i_n - j_m j_n) \cos(\theta_{mn}) \right\} \\
&\times \exp \left\{ - \sum_k |g_k|^2 s(\omega_k, t) \sum_{m,n} (i_m i_n + j_m j_n) \sin(\theta_{mn}) \right\} \\
&\times \exp \left\{ -2i \sum_k \sum_{m,n} |g_k|^2 c(\omega_k, t) j_m i_n \sin(\theta_{mn}) \right\} \\
&\times \rho_{\{i_n, j_n\}}^Q(0).
\end{aligned} \tag{C.60}$$

A expressão acima representa a evolução temporal dos elementos de matriz que representa o operador densidade do sistema. Novamente, ela não faz distinção se o sistema formado pelos N qubits interage coletivamente ou independentemente com o meio ambiente. Para obtermos a evolução quando o sistema interage coletivamente com o meio externo, basta fazer $\theta_{mn} = 0$ na equação acima, o que representa, matematicamente, uma distância muito pequena entre os qubits.

D Prova da relação usada no apêndice C

Considere o seguinte Hamiltoniano dependente do tempo

$$\hat{H}(t) = \hat{A}(t) + \hat{A}^\dagger(t), \quad (\text{D.1})$$

onde $\hat{A}(t) \neq \hat{A}^\dagger(t)$, ou seja, $\hat{A}(t)$ não é hermitiano. A equação de Schrödinger é

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (\text{D.2})$$

cuja solução será

$$|\psi(t)\rangle = \hat{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}(t') dt' \right] |\psi(0)\rangle, \quad (\text{D.3})$$

onde $\hat{T}$ é o operador ordenamento temporal, $|\psi(t)\rangle$ representa o estado do sistema no tempo t e $|\psi(0)\rangle$ é o estado inicial do sistema. Definindo-se a seguinte transformação inversível

$$\hat{\mathcal{U}}(t) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{A}^\dagger(t') dt' \right] \rightarrow \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{A}^\dagger(t') dt' \right] \quad (\text{D.4})$$

onde $\hat{\mathcal{U}}(t) \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t) = \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t) \hat{\mathcal{U}}(t) = 1$, podemos calcular a sua dinâmica, dada por

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathcal{U}}(t) = -\frac{i}{\hbar} \hat{A}^\dagger(t) \hat{\mathcal{U}}(t) \rightarrow \frac{d}{dt} \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t) = \frac{i}{\hbar} \hat{A}^\dagger(t) \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t). \quad (\text{D.5})$$

Agora, o vetor definido a seguir

$$|\psi(t)\rangle_{\text{nov}} = \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t) |\psi(t)\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t) |\psi(t)\rangle_{\text{nov}}, \quad (\text{D.6})$$

possui a seguinte equação de movimento

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_{\text{nov}} = \left[\frac{d}{dt}\hat{\mathcal{U}}^{-1}(t) \right] |\psi(t)\rangle + \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t) \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle. \quad (\text{D.7})$$

Pelas equações (D.2) e (D.5) podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_{\text{nov}} = \frac{i}{\hbar} \left[\hat{A}^\dagger(t) \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t) - \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t) \hat{H}(t) \right] |\psi(t)\rangle. \quad (\text{D.8})$$

Substituindo $\hat{H}(t)$ na equação acima obtém-se

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_{\text{nov}} = \frac{i}{\hbar} \left[\hat{A}^\dagger(t) \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t) - \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t) \hat{A}(t) - \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t) \hat{A}^\dagger(t) \right] |\psi(t)\rangle. \quad (\text{D.9})$$

Por outro lado $[\hat{A}^\dagger(t), \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t)] = 0$, logo

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_{\text{nov}} = -\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t) \hat{A}(t) |\psi(t)\rangle. \quad (\text{D.10})$$

Substituindo a equação (D.6) tem-se a seguinte equação de movimento

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_{\text{nov}} = -\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t) \hat{A}(t) \hat{\mathcal{U}}(t) |\psi(t)\rangle_{\text{nov}}, \quad (\text{D.11})$$

cuja solução é, naturalmente,

$$|\psi(t)\rangle_{\text{nov}} = \hat{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t') \hat{A}(t') \hat{\mathcal{U}}(t') dt' \right] |\psi(0)\rangle, \quad (\text{D.12})$$

uma vez que $|\psi(0)\rangle_{\text{nov}} = |\psi(0)\rangle$. Por fim, substituindo a equação (D.12) em (D.6),

obtemos

$$|\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t) \hat{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t') \hat{A}(t') \hat{\mathcal{U}}(t') dt' \right] |\psi(0)\rangle, \quad (\text{D.13})$$

o que prova a relação (C.5) usada no apêndice C para $\hat{\mathcal{U}}(t)$ dado pela equação (D.4) e

$$\hat{A}(t) = \sum_{n,k} \sigma_z^n g_k^n b_k e^{-i\omega_k t}. \quad (\text{D.14})$$

E Prova do teorema usado no apêndice C

O teorema usado no apêndice C pode ser enunciado da seguinte forma: *Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são dois operadores não comutantes que satisfazem as condições*

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0, \quad (\text{E.1})$$

então

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}. \quad (\text{E.2})$$

A prova considerada a seguir é devida a Glauber. Seja

$$f(\xi) = e^{\xi\hat{A}} e^{\xi\hat{B}}, \quad (\text{E.3})$$

onde ξ é um número complexo. Derivando $f(\xi)$ com relação a ξ obtemos

$$\frac{df}{d\xi} = \hat{A} e^{\xi\hat{A}} e^{\xi\hat{B}} + e^{\xi\hat{A}} e^{\xi\hat{B}} \hat{B} = \left(\hat{A} + e^{\xi\hat{A}} \hat{B} e^{-\xi\hat{A}} \right) f(\xi), \quad (\text{E.4})$$

já que $e^{\xi\hat{A}} e^{-\xi\hat{A}} = \hat{I}$. Conhecendo o teorema de Baker-Campbell-Hausdorf, advindo da teoria de grupos, dado por

$$e^{\xi\hat{A}} \hat{B} e^{-\xi\hat{A}} = \hat{B} + \xi [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\xi^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{\xi^3}{3!} [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots \quad (\text{E.5})$$

podemos expandir o segundo termo entre parênteses na equação (E.4). Devido à condição (E.1) todos os termos de ordem superior a um do lado direito da igualdade (E.5) se

anulam, sobrando então

$$e^{\xi \hat{A}} \hat{B} e^{-\xi \hat{A}} = \hat{B} + \xi [\hat{A}, \hat{B}]. \quad (\text{E.6})$$

A equação (E.4) pode ser escrita como se segue

$$\frac{df}{d\xi} = \left\{ (\hat{A} + \hat{B}) + \xi [\hat{A}, \hat{B}] \right\} f(\xi). \quad (\text{E.7})$$

Pela condição (E.1) nota-se que $\hat{A} + \hat{B}$ comuta com $[\hat{A}, \hat{B}]$ de forma que, podemos considerar essas duas quantidades como variáveis ordinárias que comutam como números comuns e podemos integrar (E.7), sem maiores problemas, sujeita a condição inicial (veja (E.3))

$$f(0) = 1. \quad (\text{E.8})$$

A solução da equação (E.7) que satisfaz a condição inicial (E.8) é

$$f(\xi) = e^{(\hat{A} + \hat{B})\xi + (\xi^2/2)[\hat{A}, \hat{B}]} = e^{(\hat{A} + \hat{B})\xi} e^{(\xi^2/2)[\hat{A}, \hat{B}]}, \quad (\text{E.9})$$

onde a última igualdade advém do fato de $\hat{A} + \hat{B}$ comutar com $[\hat{A}, \hat{B}]$. Fazendo $\xi = 1$ e multiplicando ambos os lados da (E.9) pela direita por $\exp\left(-1/2 [\hat{A}, \hat{B}]\right)$, então a igualdade (E.2) está provada.