UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

DIOGO LIMA BARRETO

Controle de coerência para termometria quântica de sistemas
fora do equilíbrio

São Carlos
2020

DIOGO LIMA BARRETO

Controle de coerência para termometria quântica de sistemas
fora do equilíbrio

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. Diogo de Oliveira
Soares Pinto

Versão Original

São Carlos
2020

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Barreto, Diogo Lima

Controle de coerência para termometria quântica de sistemas fora do equilíbrio / Diogo Lima Barreto; orientador Diogo de Oliveira Soares Pinto -- São Carlos, 2020.

79 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2020.

1. Metrologia quântica. 2. Sistemas quânticos abertos. 3. Sistemas fora do equilíbrio. I. Soares Pinto, Diogo de Oliveira, orient. II. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Diogo Lima Barreto

Tese apresentada ao Instituto de Física
de São Carlos da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de Doutor
em Ciências. Área de Concentração:
Física Básica.

Aprovado(a) em: 16/06/2020

Comissão Julgadora

Dr(a). Diogo de Oliveira Soares Pinto

Instituição: (IFSC/USP)

Dr(a). Francisco Paulo Marques Rouxinol

Instituição: (UNICAMP/Campinas)

Dr(a). Frederico Borges de Brito

Instituição: (IFSC/USP)

Dr(a). Edson Vernek

Instituição: (UFU/Uberlândia)

Dr(a). Gabriel Teixeira Landi

Instituição: (IF/USP)

Agradecimentos

Gostaria primeiramente de agradecer a minha família pelo apoio incondicional ao longo dessa jornada. Também agradeço a meus amigos de longa data: Gustavo, Guilherme Gallego, Felipe, Luiz Henrique e Raphael por terem me dado indiretamente motivação para continuar trilhando este caminho.

Agradeço também a meus colegas do IFSC: Ana, Cesar, Luiz Felipe, Milena, Guilherme Tomishiyo, Raul, Rodrigo, Pedro, André Cidrim e André Hernandez por todos os cafés, conversas, discussões, boardgames e sessões de RPG que me ajudaram a manter a sanidade nos momentos de loucura.

Um agradecimento especial para minha namorada/esposa Jessica Dipold que é minha grande companheira e meu grande suporte nessa vida, além de ser uma grande fonte de inspiração para mim. Espero ainda compartilhar muitos momentos ao lado dela.

Por último gostaria de agradecer ao IFSC pelo fornecimento da infraestrutura sem igual, além de todos os eventos e oportunidades que me ofereceu; e ao meu orientador-xará Diogo pelas conversas, apoio e principalmente compreensão diante das dificuldades que tive durante o doutorado.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) Código de financiamento 001.

“Nós contemplamos continuamente o mundo e ele se torna opaco às nossas percepções.

No entanto, encarado de um novo ponto de vista, ainda pode nos tirar o fôlego.”

Alan Moore

Resumo

BARRETO, D.L. **Controle de coerência para termometria quântica de sistemas fora do equilíbrio**. 2020. 79p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

Nas últimas duas décadas houve um aumento no interesse pela teoria de estimação quântica. Entre os vários tópicos sobre o tema um que se destaca é a estimação de parâmetros para sistemas abertos, que sabidamente possuem precisão menor do que o caso para sistemas fechados. Nosso trabalho foi focado justamente nos sistemas quânticos abertos onde exploramos a termometria fora do equilíbrio. Para isso utilizamos o modelo de um q-bit em contato com um banho térmico e mudamos sua dinâmica submetendo-o a dois efeitos distintos: primeiro adicionamos um campo estocástico, capaz de manter o sistema fora do equilíbrio por mais tempo, com dois tipos de ruído; no segundo caso fizemos com que a frequência do q-bit fosse variável no tempo, gerando um efeito de proteção de estado quântico, também prolongando o tempo para o sistema se equilibrar com o banho. Em ambos os casos estudamos como a presença destes efeitos secundários afetam a precisão das estimativas da temperatura do banho térmico, calculadas através de dados extraídos do q-bit, que passa a funcionar como um termômetro. No caso do campo estocástico verificamos que para um regime de baixas temperaturas em que os efeitos do campo prevalecem, é possível atingir uma precisão maior que para o caso de temperaturas mais altas. Já para o caso da frequência variável, verificamos que não é possível obter uma maior precisão, mas o retardamento da decoerência oferece uma janela de tempo maior para que as estimativas possam ser realizadas, o que pode oferecer uma vantagem para possíveis aplicações experimentais.

Palavras-chave: Metrologia quântica. Sistemas quânticos abertos. Sistemas fora do equilíbrio.

Abstract

BARRETO, D.L. **Coherence control for quantum thermometry of out of equilibrium systems**. 2020. 79p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

In the last two decades there has been an increasing interest for the quantum estimation theory. Among various research topics there's a recent effort to better understand quantum estimation for open quantum systems, which are known to have worse precision than the closed systems. Our work focused on open quantum systems where we explored out of equilibrium thermometry. To do this we used a single q-bit model in contact with a thermal reservoir and changed it's dynamic by adding two distinct effects: first we added a stochastic field, which can maintain the system out of equilibrium for longer periods, using two types of noises; on the second case we used a time-dependent frequency for the q-bit which generates a protective effect against decoherence also extending the period in which the system is out of equilibrium. In both cases we studied how these secondary effects affected the precision of temperature estimations for the reservoir temperature, using data extracted from the q-bit which becomes equivalent to a thermometer. For the stochastic field we found out that it's possible to achieve higher precision for low temperatures in which the effects of the field prevail. For the time-dependent frequency we couldn't find any evidence for a better precision but the delay on the effects of decoherence allows for more time to estimate the temperature, which may offer some advantages for experimental measurements.

Keywords: Quantum metrology. Open quantum systems. Out of equilibrium systems.

Lista de Figuras

2.1	Funções densidade de probabilidade dos estimadores $\hat{\phi}_1$ e $\hat{\phi}_2$	23
4.1	Gráficos para a informação de Fisher Q_T (linha preta sólida) e a quantidade Q_L (tracejado em vermelho) que determina a precisão do procedimento de estimação baseado em medidas diretas de energia no sistema $\mathcal{S}$. Em todos os gráficos o estado $\rho(0)$ de $\mathcal{S}$ é puro, com ângulo azimutal nulo e com ângulo polar dado por (a) $\theta(0) = 0$; (b) $\theta(0) = \pi/4$; (c) $\theta(0) = \pi/2$; e (d) $\theta(0) = \pi$. A temperatura T é dada por $2\omega_0$ e $\gamma = 1$. Note que quando o sistema é preparado em um estado diagonal ($\theta(0) = 0$ e $\theta(0) = \pi$), a desigualdade (4.4) é saturada e ambas as curvas coincidem.	57
4.2	Taxas de decaimento $\eta(t)$ e $\gamma_1(t)$ como funções do tempo usando o bombeamento exponencial para três temperaturas diferentes: $T = 0, 10\omega_0$ (linha preta sólida), $T = 0, 33\omega_0$ (curva tracejada vermelha) e $T = 0, 50\omega_0$ (linha laranja sólida). Todas as curvas usam: $\Delta\omega = 1$, $\tau_c = 8, 5$, $\Omega = 0, 91$ e $\gamma = 1$. .	59
4.3	Gráficos para a informação de Fisher Q_T sem ruído (linha preta sólida) e Q_{TExp} com ruído exponencial (linha azul sólida) e as quantidades Q_L (tracejado em vermelho) e Q_{LExp} (tracejado em laranja) que determinam a precisão do procedimento de estimação baseado em medidas diretas de energia no sistema $\mathcal{S}$. Em todos os gráficos o estado $\rho(0)$ de $\mathcal{S}$ é puro, com ângulo azimutal nulo e com ângulo polar dado por (a) $\theta(0) = 0$; (b) $\theta(0) = \pi/4$; (c) $\theta(0) = \pi/2$; e (d) $\theta(0) = \pi$. Todas as curvas usam: $T = 0, 3\omega_0$, $\Delta\omega = 1$, $\tau_c = 8, 5$ e $\gamma = 1$. Neste caso a evolução do sistema é dominada pela influência do ruído externo.	60
4.4	Gráfico da evolução da pureza do sistema com (linha azul sólida) e sem (linha vermelha sólida) bombeamento estocástico exponencial . Os tracejados cinza e preto representam o estado de equilíbrio ($\rho(t \rightarrow \infty)$) com e sem o bombeamento, respectivamente. Vemos que na presença do campo estocástico a pureza retorna a valores muito próximos de 1 em $t \approx 5, 5$, que coincide com o t do máximo global de Q_T . Os parâmetros utilizados foram: $\Omega = 0.91$, $\tau = 8.5$, $\Delta\omega = 1$, $\gamma = 1$, $\theta_0 = \pi$ e $T = 0.3\omega_0$	61

- 4.5 Gráficos para a informação de Fisher Q_T sem ruído (linha preta sólida) e Q_{TExp} com ruído exponencial (linha azul sólida) e as quantidades Q_L (tracejado em vermelho) e Q_{LExp} (tracejado em laranja) que determinam a precisão do procedimento de estimação baseado em medidas diretas de energia no sistema $\mathcal{S}$. Em todos os gráficos o estado $\rho(0)$ de $\mathcal{S}$ é puro, com ângulo azimutal nulo e com ângulo polar dado por (a) $\theta(0) = 0$; (b) $\theta(0) = \pi/4$; (c) $\theta(0) = \pi/2$; e (d) $\theta(0) = \pi$. Todas as curvas usam: $T = 0, 3\omega_0$, $\Delta\omega = 1$, $\tau_c = 8, 5$ e $\gamma = 1$. Neste caso a evolução do sistema é dominada pela influência do reservatório bosônico. 62
- 4.6 Gráficos para a informação de Fisher Q_T sem ruído (linha preta sólida) e Q_{TGauss} com ruído gaussiano (linha azul sólida) e as quantidades Q_L (tracejado em vermelho) e Q_{LGauss} (tracejado em laranja) que determinam a precisão do procedimento de estimação baseado em medidas diretas de energia no sistema $\mathcal{S}$. Em todos os gráficos o estado $\rho(0)$ de $\mathcal{S}$ é puro, com ângulo azimutal nulo e com ângulo polar dado por (a) $\theta(0) = 0$; (b) $\theta(0) = \pi/4$; (c) $\theta(0) = \pi/2$; e (d) $\theta(0) = \pi$. Todas as curvas usam: $T = 0, 3\omega_0$, $\Delta\omega = 1$, $\tau_c = 8, 5$ e $\gamma = 1$. Neste caso a evolução do sistema é dominada pela influência do ruído externo. 64
- 4.7 Gráficos para a informação de Fisher Q_T sem ruído (linha preta sólida) e Q_{TGauss} com ruído gaussiano (linha azul sólida) e as quantidades Q_L (tracejado em vermelho) e Q_{LGauss} (tracejado em laranja) que determinam a precisão do procedimento de estimação baseado em medidas diretas de energia no sistema $\mathcal{S}$. Em todos os gráficos o estado $\rho(0)$ de $\mathcal{S}$ é puro, com ângulo azimutal nulo e com ângulo polar dado por (a) $\theta(0) = 0$; (b) $\theta(0) = \pi/4$; (c) $\theta(0) = \pi/2$; e (d) $\theta(0) = \pi$. Todas as curvas usam: $T = 2\omega_0$, $\Delta\omega = 1$, $\tau_c = 8, 5$ e $\gamma = 1$. Neste caso a evolução do sistema é dominada pela influência do reservatório bosônico. 65
- 5.1 Gráfico da função de decaimento $a(\tau)$ para alguns valores dos parâmetros de controle η e χ/ζ . A linha azul representa o caso sem controle de coerência, ou seja, quando $\chi = 0$. As outras três linhas mostram o efeito do controle efetivo no processo de relaxamento devido a modulação da frequência. 71

5.2	Gráficos para a informação de Fisher Q_T para diferentes parâmetros de oscilação do estado não estacionário e configurações iniciais. Em todos os gráficos o estado $\rho(0)$ de $\mathcal{S}$ é puro, com ângulo azimutal nulo e com ângulo polar dado por (a) $\theta(0) = 0$; (b) $\theta(0) = \pi/4$; (c) $\theta(0) = \pi/2$; e (d) $\theta(0) = \pi$. Todas as curvas usam $T = 2\omega_0$, $\omega_0 = 10^3$, $\gamma_n = 10^3$, $\lambda = 1$, $T_1^0 = 1$ e $\tau_0 = 10^{-3}$. Em todos os gráficos é notável, principalmente para $\chi/\zeta = 10$ e $\eta = 10^{-3}$ (linha cinza), um retardamento na decoerência do sistema, de forma a transladar e alargar as curvas.....	73
-----	---	----

Sumário

1	Introdução	19
2	Metrologia Quântica	21
2.1	Estimação de parâmetros local	22
2.2	Teoria de Estimação de Parâmetros Quântica	24
2.3	Termometria e Estimadores Ótimos	27
2.4	Informação de Fisher para um q-bit	28
3	Sistemas quânticos abertos	31
3.1	Operações quânticas	31
3.1.1	Representação do Operador-Soma	32
3.1.2	Medidas Generalizadas	36
3.2	Dinâmica de sistemas abertos	37
3.2.1	Equação mestra de Lindblad	39
3.2.2	Equação de Redfield	43
3.2.3	Tempo de relaxação característico	45
3.2.4	Equação mestra estocástica	48
4	Resultados I: Termometria na presença de ruídos clássicos	55
4.1	Análise preliminar: Sistema e Reservatório	56
4.2	Ruídos Estocásticos	57
4.2.1	Ruído Exponencial	58
4.2.2	Ruído Gaussiano	62
5	Resultados II: Termometria em sistemas quânticos não estacionários	67
5.1	O Modelo	67
5.1.1	Controle de Coerência	68
5.2	Efeito do controle de coerência na informação de Fisher	70
6	Conclusões	75

Capítulo 1

Introdução

Estimar quantidades é uma atividade humana corriqueira. Toda vez que precisamos saber o valor de algo que não podemos medir diretamente, buscamos uma forma de tentar estimar este algo a partir dos valores de outras quantidades que podemos medir diretamente. Podemos estimar o volume de uma caixa de papelão medindo suas arestas. Já um submarino utiliza um sonar, que estima a distância de objetos, para evitar colisões no fundo do oceano ou detectar um torpedo vindo em sua direção.

Para se fazer uma estimativa geralmente o seguinte protocolo é seguido: define-se um ou mais parâmetros a serem estimados, em seguida utiliza-se um sistema secundário para se medir outras quantidades; por fim, podemos utilizar as quantidades medidas para estimar valores para os parâmetros de interesse.

Usando o exemplo do sonar de um submarino: ondas sonoras são emitidas pelo sonar e refletidas pelo fundo do mar ou outros objetos. Baseado no tempo que as ondas demoram para retornar e, sabendo de antemão sua velocidade na água, os tripulantes podem estimar a distância que estas ondas percorreram e, com isso, inferir a distância da região ou objeto de interesse com relação ao sonar. Para o caso da caixa de papelão, basta utilizarmos uma régua ou trena para medir seu comprimento, altura e largura e multiplicá-los para encontrar o seu volume.

Em ambos os exemplos, nos referimos ao sistema secundário, como as ondas sonoras e a régua, como sondas. Em geral a sonda escolhida é um sistema que gera quantidades mensuráveis que se relacionam de alguma forma com os parâmetros que queremos estimar. O grande desafio para se realizar boas estimativas, ou seja, estimar com alta precisão, está na escolha adequada da sonda e das quantidades que serão medidas para se realizar as estimativas.

Apesar da estimação de quantidades existir há muito tempo, foi apenas no século passado que Fisher formalizou uma teoria para isto.¹ Fisher introduziu a noção de eficiência no contexto da estimação através da quantidade de informação que pode ser extraída das medidas efetuadas. A partir desta teoria os cientistas puderam entender o que era necessário para efetuar estimativas mais precisas. Não tardou para que a teoria de estimação de parâmetros fosse aplicada ao contexto da mecânica quântica, onde sondas que se utilizavam de propriedades quânticas foram capazes de aumentar muito a precisão das estimativas.^{2,3} Estes desenvolvimentos culminaram na detecção de ondas gravitacionais em 2015,^{4,5} que até então nunca haviam sido detectadas pois exigiam que um detector extremamente sensível fosse utilizado.

A teoria de estimação de parâmetros quântica, também chamada de metrologia quântica, possui uma diferença fundamental com relação a sua versão clássica: a dependência com as medidas realizadas. Matematicamente é possível mostrar que o limite de precisão para o caso quântico pode ser otimizado com a escolha adequada de uma medida. Além disso, outras variáveis da sonda utilizada, como seu estado inicial, podem influenciar de maneira relevante a precisão das estimativas.

Em nosso trabalho aplicamos a teoria de estimação de parâmetros quântica para estimar a temperatura de um reservatório térmico usando como sonda um sistema quântico de dois níveis. Entretanto nós adicionamos efeitos que retardam a decoerência no sistema, de forma que conseguimos estimar a temperatura do reservatório com boa precisão mesmo antes que o equilíbrio térmico seja atingido.

Esta tese está organizada da seguinte forma: no capítulo 2 introduzimos a teoria de estimação de parâmetros quântica, revisando a ideia básica por trás da teoria de estimação clássica e também conceitos de física quântica no processo. No capítulo 3 nos aprofundamos na teoria de sistemas quânticos abertos, derivando as equações de evolução temporal para situações de interesse. No capítulo 4 nós exploramos como as medidas de temperatura são afetadas quando introduzimos um campo estocástico em regime Markoviano e Não-Markoviano. Por fim, no capítulo 5, adicionamos uma frequência modulada ao q-bit, o que produz um efeito de controle de coerência que prolonga o tempo em que as medidas podem ser efetuadas em laboratório.

Capítulo 2

Metrologia Quântica

A teoria de estimação de parâmetros formalizada por Fisher e posteriormente aprimorada se faz presente e útil em qualquer problema que envolvam dados. Sempre que precisamos descobrir o valor de algo que não podemos medir diretamente, nos utilizamos de medidas indiretas para poder estimar seus valores. Isto é algo que não muda mesmo quando vamos para o contexto da mecânica quântica.

A estimação de parâmetros quântica, também chamada de metrologia quântica,^{2,3} nos fornece ferramentas para encontrar medidas ótimas de acordo com algum critério. Isto dá origem a dois paradigmas centrais da teoria: a estimação quântica *global* busca por um operador de medida através da minimização de uma função custo. O resultado desta otimização é um operador único, independente do valor do parâmetro. Já a estimação quântica *local* busca por uma medida que maximiza a quantidade chamada de informação de Fisher, de forma a minimizar a variância do estimador, para um valor fixo do parâmetro.⁶⁻¹⁰

Neste capítulo revisaremos a estimação de parâmetros local clássica e quântica, onde apresentaremos a derivada logarítmica simétrica e a informação de Fisher quântica. Estamos interessados em encontrar o limite definitivo de precisão e determinar a medida ótima capaz de atingir tal limite. Inicialmente revisaremos as idéias básicas da teoria de estimação e calcularemos o limite de Cramér-Rao, fundamental para o nosso trabalho. Em seguida iremos expandir a teoria para o caso quântico em termos da matriz densidade. Por último, iremos focar na termometria quântica, onde desejamos estimar a temperatura de um reservatório térmico usando estimação de parâmetros quântica, através de medidas realizadas em cima de um sistema de dois níveis: um q-bit.

2.1 Estimação de parâmetros local

Vamos inicialmente formalizar o problema da estimação de parâmetros clássica. Seja X uma variável aleatória, que assume os valores x , com função de densidade (FDP) e que denotamos por $p(x|\phi)$ em que ϕ é um parâmetro desconhecido. Uma vez especificada a FDP para os dados coletados devemos encontrar uma função dos dados, que chamamos de estimador $\hat{\phi}$, que associa valores de X a um valor de ϕ . Note que, sendo dependente de X , $\hat{\phi}$ é também uma variável aleatória e chamamos seus valores de estimativas.

Até o momento não demos nenhum argumento a respeito da escolha de um estimador. Em princípio qualquer função que assume valores no conjunto Φ em que ϕ assume valores é um estimador válido. Uma forma comum de comparar tais estimadores é calculando seu erro quadrático médio em relação ao valor real de ϕ .¹¹⁻¹⁵ O erro quadrático médio de um estimador $\hat{\phi}$ é dado por

$$\begin{aligned} \text{EQM}[\hat{\phi}] &= \left\langle (\hat{\phi} - \phi)^2 \right\rangle = \int dx (\hat{\phi} - \phi)^2 p(x|\phi) \\ &= \int dx (\hat{\phi}^2 + \phi^2 - 2\hat{\phi}\phi) p(x|\phi) \\ &= \left\langle \hat{\phi}^2 \right\rangle + \phi^2 - 2\left\langle \hat{\phi} \right\rangle \phi. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Esta equação pode ser reescrita em termos da variância de $\hat{\phi}$ se adicionarmos o termo, que resultará em $\left\langle \hat{\phi} \right\rangle^2 - \left\langle \hat{\phi} \right\rangle^2$

$$\text{EQM}[\hat{\phi}] = \left(\left\langle \hat{\phi}^2 \right\rangle - \left\langle \hat{\phi} \right\rangle^2 \right) + \left(\left\langle \hat{\phi} \right\rangle - \phi \right)^2 = \text{Var}(\hat{\phi}) + B^2(\hat{\phi}), \quad (2.2)$$

onde $B(\hat{\phi}) = \left\langle \hat{\phi} \right\rangle - \phi$ é chamado de viés do estimador $\hat{\phi}$. No caso em que um estimador satisfaz $B(\hat{\phi}) = 0$ nos referimos a ele como um estimador não-enviesado. Tais estimadores possuem FDP centrada no verdadeiro valor de ϕ . O fato de um estimador ser não-enviesado não implica necessariamente que ele seja um bom estimador, apenas garante que, na média, ele irá nos retornar o verdadeiro valor do parâmetro. Por outro lado um estimador enviesado é caracterizado por um erro sistemático e tal viés persistente sempre irá resultar em um estimador ruim.

Assumindo então que nosso estimador $\hat{\phi}$ seja não-enviesado, o erro quadrático médio coincide com a variância do estimador

$$\text{EQM}[\hat{\phi}] = \text{Var}(\hat{\phi}). \quad (2.3)$$

Figura 2.1 – Funções densidade de probabilidade dos estimadores $\hat{\phi}_1$ e $\hat{\phi}_2$.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste caso comparar os estimadores através de sua variância faz sentido quando pensamos em suas FDP. Sejam dois estimadores não-enviesados distintos $\hat{\phi}_1$ e $\hat{\phi}_2$. O gráfico (2.1) representa as FDP de cada um deles. Deste gráfico é fácil ver que ao escolhermos $\hat{\phi}_2$ ao invés de $\hat{\phi}_1$, utilizaremos um estimador que nos retornará estimativas mais próximas do valor real de ϕ . Assim, do fato de que $\text{Var}(\hat{\phi}_2) < \text{Var}(\hat{\phi}_1)$, concluímos que quanto menor a variância de um estimador, melhores serão os valores das estimativas geradas por ele.

Entretanto, devido a natureza aleatória do problema, existe um limite inferior para a variância dos estimadores não-enviesados de ϕ . Podemos encontrar tal limite partindo do fato de $\hat{\phi}$ ser não-enviesado¹⁶

$$B(\hat{\phi}) = \langle \hat{\phi} - \phi \rangle = \int dx (\hat{\phi} - \phi) p(x|\phi) = 0. \quad (2.4)$$

Derivando esta equação em relação a ϕ ficamos com

$$\int dx \partial_{\phi} p(x|\phi) (\hat{\phi} - \phi) - \int dx p(x|\phi) = 0 \rightarrow \int dx p(x|\phi) \partial_{\phi} \ln p(x|\phi) (\hat{\phi} - \phi) = 1, \quad (2.5)$$

onde usamos o fato que $\partial_{\phi} p = p \partial_{\phi} \ln p$ e a normalização de $p(x|\phi)$. Podemos reescrever o termo dentro da integral como

$$\int dx \sqrt{p(x|\phi)} \partial_{\phi} \ln p(x|\phi) \sqrt{p(x|\phi)} (\hat{\phi} - \phi) = 1. \quad (2.6)$$

Elevando ambos os lados desta equação ao quadrado podemos utilizar a desigualdade de

Cauchy-Schwarz na forma integral^a

$$\begin{aligned} 1 &= \left| \int dx \sqrt{p(x|\phi)} \partial_\phi \ln p(x|\phi) \sqrt{p(x|\phi)} (\hat{\phi} - \phi) \right|^2 \\ &\leq \int dx p(x|\phi) (\partial_\phi \ln p(x|\phi))^2 \int dx p(x|\phi) (\hat{\phi} - \phi)^2, \end{aligned}$$

e obter a relação

$$\text{Var}(\hat{\phi}) \geq \frac{1}{F(\phi)}, \quad (2.7)$$

onde

$$F(\phi) \equiv \int dx p(x|\phi) (\partial_\phi \ln p(x|\phi))^2 = \langle (\partial_\phi \ln p(x|\phi))^2 \rangle \quad (2.8)$$

é chamada de informação de Fisher (IF)^{11-14, 17} e recebe este nome pois nos dá a quantidade de informação disponível a cerca do parâmetro ϕ . Caso a variância tendesse a zero, $F(\phi)$ tenderia ao infinito, refletindo o fato que temos acesso a toda informação a respeito do parâmetro e nossa estimativa possuiria precisão absoluta. No caso oposto em que não possuímos nenhuma informação sobre o parâmetro, teríamos uma variância tendendo a infinito e nossa estimativa seria um valor muito distante do valor real do parâmetro.

Para o caso em que realizamos N medidas independentes e identicamente distribuídas de X , pelo teorema central do limite,^{18, 19} a desigualdade (2.7) ficará

$$\boxed{\text{Var}(\hat{\phi}) \geq \frac{1}{NF(\phi)}}. \quad (2.9)$$

Esta desigualdade é conhecida como desigualdade da informação ou limite de Cramér-Rao (LCR)¹² e nos fornece o limite inferior da variância de um estimador para o caso em que múltiplas medidas são realizadas. Um estimador que sature a equação (2.9) é chamado estimador ótimo e apresentará os melhores valores de estimativas possíveis.

2.2 Teoria de Estimação de Parâmetros Quântica

Assim como no caso clássico, em sistemas quânticos também existem quantidades que não podem ser medidas diretamente, isto é, quantidades que não possuem um observável associado a elas. Neste tipo de situação temos de estimar o valor do parâmetro de interesse através da medida de outros observáveis, utilizando para isto uma teoria de

^a $\left| \int dx f^*(x)g(x) \right|^2 \leq \int dx |f(x)|^2 \int dx |g(x)|^2$

estimação adequada ao contexto quântico.

Antes de formalizar esta teoria, precisamos entender como o processo de estimação é usualmente feito. Partimos de um sistema quântico qualquer com estado inicial definido por uma matriz densidade $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ que obedece $\text{Tr}[\rho] = \mathbb{I}$.^{20,21} Este sistema será nossa sonda. Fazemos então com que esta sonda sofra um processo dinâmico que, de alguma forma, carrega o parâmetro ϕ que desejamos estimar. Após este processo a sonda passará a ter dependência com o parâmetro e sua matriz densidade pode ser escrita como $\rho_\phi = |\psi_\phi\rangle\langle\psi_\phi|$. Então realizamos alguma medida na sonda e, a partir dessas medidas, usamos um estimador apropriado para obtermos estimativas do valor do parâmetro ϕ . Apesar deste procedimento de estimação ser bem similar ao caso clássico a matemática por trás do processo deve ser reescrita em termos dos estados quânticos e de operadores.

Começando pela FDP, seja $\{M_x\}$ um conjunto de operadores de medida que atuam nos estados da sonda. De acordo com a regra de Born, a probabilidade de obtermos um resultado x dado o valor ϕ do parâmetro é $p(x|\phi) = \text{Tr}[M_x \rho_\phi M_x^\dagger]$ que, pela ciclicidade do traço, pode ser reescrita como $p(x|\phi) = \text{Tr}[\Pi_x \rho_\phi]$ onde $\Pi_x = M_x^\dagger M_x$. Do fato de que a soma das probabilidades de todos os resultados x possíveis deve ser igual a um temos

$$1 = \sum_x p(x|\phi) = \sum_x \text{Tr}[\Pi_x \rho_\phi] = \text{Tr}\left[\sum_x \Pi_x \rho_\phi\right]. \quad (2.10)$$

Sabendo que esta igualdade deve valer para qualquer ρ_ϕ concluimos que $\sum_x \Pi_x = \mathbb{I}$. Os operadores Π_x são chamados de POVM^b e são a representação mais geral possível de medidas na física quântica. Discutiremos mais sobre os POVM no próximo capítulo. Definimos então um operador auto-adjunto Λ_ϕ , conhecido na literatura^{15,22} como derivada logarítmica simétrica (DLS), que satisfaz a equação

$$\Lambda_\phi \rho_\phi + \rho_\phi \Lambda_\phi = \{\Lambda_\phi, \rho_\phi\} = 2\partial_\phi \rho_\phi. \quad (2.11)$$

Assim teremos que

$$\begin{aligned} \partial_\phi p(x|\phi) &= \text{Tr}[\partial_\phi \rho_\phi \Pi_x] = \text{Tr}\left[\frac{\{\Lambda_\phi, \rho_\phi\}}{2} \Pi_x\right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}\left[\rho_\phi \Pi_x \Lambda_\phi + \left(\rho_\phi \Pi_x \Lambda_\phi\right)^\dagger\right] = \text{Re}[\text{Tr}[\rho_\phi \Pi_x \Lambda_\phi]] \end{aligned} \quad (2.12)$$

^b Do inglês Positive Operator-Valued Measure.

e a IF na equação (2.8) pode ser reescrita como

$$F(\phi) = \int dx p(x|\phi) (\partial_\phi \ln p(x|\phi))^2 = \int dx \frac{\partial_\phi p(x|\phi)^2}{p(x|\phi)} = \int dx \frac{\text{Re}[\text{Tr}[\rho_\phi \Pi_x \Lambda_\phi]]^2}{\text{Tr}[\rho_\phi \Pi_x]}. \quad (2.13)$$

Esta equação nos dá um limite clássico de precisão, que pode ser atingido assintoticamente por técnicas de processamento de dados como a estimação de máxima verossimilhança.^{13,14} Podemos ainda encontrar um limite definitivo de precisão se maximizarmos a IF com respeito a todas as medidas quânticas. Seguindo as referências,⁷⁻¹⁰ do fato que $\text{Re}[\text{Tr}[\rho_\phi \Pi_x \Lambda_\phi]] \leq \|\text{Tr}[\rho_\phi \Pi_x \Lambda_\phi]\|$, escrevemos

$$F(\phi) \leq \int dx \frac{\|\text{Tr}[\rho_\phi \Pi_x \Lambda_\phi]\|^2}{\text{Tr}[\rho_\phi \Pi_x]} = \int dx \frac{\|\text{Tr}[(\sqrt{\rho_\phi} \sqrt{\Pi_x})(\sqrt{\Pi_x} \Lambda_\phi \sqrt{\rho_\phi})]\|^2}{\text{Tr}[\rho_\phi \Pi_x]}. \quad (2.14)$$

Podemos então usar a desigualdade de Cauchy-Schwarz para o traço^c para ficarmos com

$$\begin{aligned} \|\text{Tr}[(\sqrt{\rho_\phi} \sqrt{\Pi_x})(\sqrt{\Pi_x} \Lambda_\phi \sqrt{\rho_\phi})]\|^2 &\leq \text{Tr}[(\sqrt{\Pi_x} \sqrt{\rho_\phi})^\dagger (\sqrt{\Pi_x} \sqrt{\rho_\phi})] \times \\ &\quad \text{Tr}[(\sqrt{\Pi_x} \Lambda_\phi \sqrt{\rho_\phi})^\dagger (\sqrt{\Pi_x} \Lambda_\phi \sqrt{\rho_\phi})] \end{aligned} \quad (2.15)$$

assim podemos reescrever a Eq. (2.14) como

$$F(\phi) \leq \int dx \frac{\text{Tr}[\rho_\phi \Pi_x] \text{Tr}[\Lambda_\phi \Pi_x \Lambda_\phi \rho_\phi]}{\text{Tr}[\rho_\phi \Pi_x]} = \int dx \text{Tr}[\Pi_x \Lambda_\phi \rho_\phi \Lambda_\phi] = \text{Tr}[\rho_\phi \Lambda_\phi^2]. \quad (2.16)$$

A cadeia de desigualdades acima mostra que a informação de Fisher de qualquer medida é limitada superiormente por uma quantidade conhecida como informação de Fisher quântica (IFQ)

$$F(\phi) \leq Q_\phi \equiv \text{Tr}[\rho_\phi \Lambda_\phi^2] = \text{Tr}[\Lambda_\phi \partial_\phi \rho_\phi] \quad (2.17)$$

e dessa forma definimos o limite de Cramér-Rao quântico (LCRQ)

$$\boxed{\text{Var}(\hat{\phi}) \geq \frac{1}{NQ_\phi}} \quad (2.18)$$

para a variância de um estimador. A versão quântica do LCR nos fornece o limite de precisão definitivo: ele depende do modelo estatístico e independe da medida. Medidas quânticas ótimas para a estimação de ϕ correspondem aos POVM cuja IF se iguala a IFQ, ou seja, aqueles que saturam as desigualdades (2.14) e (2.16).

^c $|\text{Tr}[A^\dagger B]|^2 \leq \text{Tr}[A^\dagger A] \text{Tr}[B^\dagger B]$

2.3 Termometria e Estimadores Ótimos

Neste trabalho queremos estimar a temperatura de um banho térmico $\mathcal{B}$ a partir de medidas em uma sonda $\mathcal{S}$, nosso sistema termômetro, fracamente acoplado com o banho. Assumindo que o termômetro atinge a configuração de equilíbrio térmico, a teoria de flutuação de Einstein (TFE) pode ser usada para caracterizar a precisão do procedimento em termos da capacidade térmica de $\mathcal{S}$ que representa sua susceptibilidade térmica as perturbações impostas pelo banho.^{23–26} Entretanto também é possível se realizar termometria sem que ocorra o termalização completa da sonda. Esta termometria fora do equilíbrio é capaz de oferecer uma melhor precisão nas estimativas de temperatura.²⁷

Para realizar o procedimento de termometria padrão, assumimos que a sonda é caracterizada por um Hamiltoniano H e por um estado inicial $\rho(0)$. Esta sonda interage fracamente com o banho $\mathcal{B}$ durante um tempo τ , resultando em um estado final dado pela matriz densidade reduzida $\rho(\tau) = \text{Tr}_B [\rho_F(\tau)]$, onde $\rho_F(\tau)$ é o estado final de ambos os sistemas e Tr_B é o traço parcial tomado sobre os estados do banho. A energia média do sistema $\mathcal{S}$ é dada por $E_T(\tau) = \text{Tr}[\rho(\tau)H]$ e, a partir dela, podemos recuperar a temperatura invertendo sua dependencia funcional com T .

Pelo teorema central do limite, após N medidas a incerteza da energia será dada por $\text{Var}(E_T(\tau))/N$. Esta incerteza se propaga na variância para T como

$$\text{Var}(T) = \left(\frac{\partial T}{\partial E_T(\tau)} \right)^2 \frac{\text{Var}(E_T(\tau))}{N}. \quad (2.19)$$

Podemos reescrever esta equação em termos da derivada parcial $C_T(\tau) = \partial_T E_T(\tau)$, quantidade que coincide com a capacidade térmica tanto fora como no equilíbrio térmico. Ficamos então com

$$\text{Var}(T) = \frac{\text{Var}(E_T(\tau))}{N C_T^2(\tau)}. \quad (2.20)$$

Olhando então para o LCRQ (2.18), onde o parâmetro ϕ passa a ser a temperatura T , e a eq. (2.20) obtemos a seguinte relação universal

$$Q_T \geq \frac{C_T^2(\tau)}{\text{Var}(E_T(\tau))}, \quad (2.21)$$

que relaciona a capacidade térmica generalizada de $\mathcal{S}$, a variância da energia e a IFQ associada. Esta desigualdade é saturada quando a TFE vale, isto é, para tempos τ suficientemente longos, quando $\mathcal{S}$ atinge o estado de equilíbrio representado pelo estado térmico

de Gibbs $\rho_T^{(eq)} = e^{-H/k_B T} / \mathcal{Z}$ onde k_B é a constante de Boltzmann e $\mathcal{Z} = \text{Tr} [e^{-H/k_B T}]$ é a função de partição do sistema. De fato, nesta situação temos^{28, 29}

$$Q_T^{(eq)} = \frac{\text{Var}(E_T^{(eq)})}{k_B^2 T^4} \quad (2.22)$$

e a capacidade térmica dada por

$$C_T^{(eq)} = \partial_T E_T(\tau) = \partial_T \left(\text{Tr} \left[\frac{e^{-H/k_B T}}{\text{Tr} [e^{-H/k_B T}]} H \right] \right) = \frac{\text{Var}(E_T(\tau))}{k_B T^2}. \quad (2.23)$$

A combinação dessas equações nos leva a $Q_T^{(eq)} = (C_T^{(eq)})^2 / \text{Var}(E_T^{(eq)})$ e, com isso, podemos concluir que quando a sonda e o banho entram em equilíbrio térmico, usar o procedimento de termometria padrão para estimar T através da média da energia de $\mathcal{S}$ é o protocolo de estimação ótimo. Entretanto, como veremos a seguir, existe a possibilidade de que (2.21) seja saturada mesmo para valores finitos de τ , ou seja, para regimes fora do equilíbrio.

2.4 Informação de Fisher para um q-bit

Iremos focar agora em um caso especial em que nossa sonda $\mathcal{S}$ consiste em um sistema de dois níveis, um q-bit, descrito pelo Hamiltoniano $H = \hbar\omega\sigma_3/2$, com $\sigma_3 = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ sendo um operador de Pauli. Seguindo os passos apresentados no trabalho de Cavina *et al.*³⁰ podemos escrever a DLS na base das matrizes de Pauli como $\Lambda_\phi = l_0(\tau)\mathbb{I} + \vec{l}(\tau) \cdot \vec{\sigma}$ com $l_0(\tau)$ e $\vec{l}(\tau) = (l_1(\tau), l_2(\tau), l_3(\tau))$ sendo quantidades reais que podem ou não depender do tempo de evolução τ e $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ as matrizes de Pauli^d. Podemos também escrever a matriz densidade usando o vetor de Bloch²⁰ $\rho(\tau) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{n}(\tau) \cdot \vec{\sigma})$ onde $\vec{n}(\tau) = (n_1(\tau), n_2(\tau), n_3(\tau))$ e $n_j(\tau)$ são suas componentes que carregam dependência com o parâmetro ϕ e com o tempo de evolução τ .

Da definição (2.11) temos $\{\Lambda_\phi, \rho(\tau)\} = 2\partial_\phi \rho(\tau)$ que, nesse caso, pode ser reescrita como

$$l_j(\tau) + n_j(\tau)l_0(\tau) = \partial_\phi n_j(\tau), \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.24a)$$

$$l_0(\tau) + \sum_{j=1}^3 n_j(\tau)l_j(\tau) = 0. \quad (2.24b)$$

^d $\sigma_1 = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$, $\sigma_2 = i(|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|)$

Resolvendo a Eq. (2.24a) para $l_j(\tau)$ e substituindo na Eq. (2.24b) obtemos

$$l_0(\tau) = -\frac{1}{2} \frac{\partial_\phi n^2(\tau)}{1 - n^2(\tau)} \quad (2.25)$$

com $n^2(\tau) = \sum_{j=1}^3 n_j^2(\tau)$ sendo o comprimento do vetor de Bloch. Substituindo o resultado em (2.24a) escrevemos

$$l_j(\tau) = \partial_\phi n_j(\tau) + \frac{n_j(\tau)}{2} \frac{\partial_\phi n^2(\tau)}{1 - n^2(\tau)} \quad (2.26)$$

e a partir da definição (2.17) para a IFQ, podemos finalmente escrever

$$\begin{aligned} Q_\phi = \text{Tr} [\Lambda_\phi \partial_\phi \rho] &= \sum_{j=1}^3 l_j(\tau) \partial_\phi n_j(\tau) = \sum_{j=1}^3 [\partial_\phi n_j(\tau)]^2 + \frac{1}{4} \frac{[\partial_\phi n^2(\tau)]^2}{1 - n^2(\tau)} \\ &= \sum_{j=1}^3 [\partial_\phi n_j(\tau)]^2 + \frac{n^2(\tau)}{1 - n^2(\tau)} [\partial_\phi n(\tau)]^2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Se expressarmos o vetor de Bloch em coordenadas polares $\vec{n} = r(\cos(\varphi)\text{sen}(\theta), \text{sen}(\varphi)\text{sen}(\theta), \cos(\theta))$ podemos verificar que o ângulo azimutal é uma constante de movimento, isto é, $\varphi(\tau) = \arctan[r_2(\tau)/r_1(\tau)] = \arctan[r_2(0)/r_1(0)] = \varphi(0)$ e dessa forma é independente do parâmetro ϕ . A partir desse fato é possível verificar que a Eq. (2.27) depende apenas do módulo $r(\tau)$ e do ângulo polar $\theta(\tau)$ e com isso podemos sempre assumir $\varphi(0) = 0$ em nosso estado inicial.

Por outro lado, levando em conta a desigualdade (2.21), a partir da matriz densidade reduzida $\rho(\tau)$ podemos calcular a capacidade térmica e a variância da energia $\text{Var}(E_T(\tau))$ da sonda. Para o cálculo da capacidade térmica, lembrando que $E_T(\tau) = \text{Tr}[\rho(\tau)H]$, teremos

$$C_T(\tau) = \partial_T E_T(\tau) = \frac{\omega}{2} \partial_T \text{Tr}[\rho(\tau)\sigma_3] = \frac{\omega}{2} \partial_T n_3(\tau). \quad (2.28)$$

Já para o cálculo da incerteza da energia temos, pela definição da variância

$$\text{Var}(E_T(\tau)) = \text{Tr}[(H - E_T(\tau)\mathbb{I})^2 \rho(\tau)] = \frac{\omega^2}{4} (1 - n_3(\tau)^2), \quad (2.29)$$

de forma que a desigualdade (2.21) pode ser reescrita como

$$Q_T(\tau) \geq \frac{(\partial_T n_3(\tau))^2}{1 - n_3(\tau)^2}. \quad (2.30)$$

Usando essa desigualdade e a equação (2.27) vemos que, no caso em que $n_1 = n_2 = 0$, isto é, quando $\theta(0)$ for múltiplo inteiro de π e o estado inicial da sonda é diagonal, encontramos um regime em que a termometria padrão é ótima para qualquer $\tau \neq 0$. Ou seja, podemos realizar medidas de energia para estimar a temperatura do banho antes mesmo que a sonda entre em equilíbrio térmico. Além disso, em acordo com a literatura, veremos em nossos resultados que a termometria fora do equilíbrio se mostra geralmente mais precisa que o caso em que há equilíbrio térmico.

Capítulo 3

Sistemas quânticos abertos

Neste capítulo faremos uma revisão da teoria que descreve a evolução da matriz densidade para o caso de sistemas quânticos abertos, ou seja, sistemas quânticos que interagem de alguma forma com um sistema externo, como o ambiente ou banho térmico. Em geral estas interações alteram a dinâmica do sistema, resultando em efeitos de dissipação, onde a informação contida no sistema é perdida para o ambiente. O interesse em estudar sistemas quânticos abertos vem do simples fato de que nenhum sistema quântico em laboratório é completamente isolado do ambiente.

Inicialmente apresentaremos o conceito de operação quântica, onde mostramos a representação da evolução através dos operadores de Krauss. Em seguida, derivamos a chamada equação mestra de Lindblad, uma equação diferencial análoga a equação de Schrödinger para sistemas abertos. Por fim, apresentamos brevemente os sistemas que utilizaremos nesta tese: um sistema acoplado a um banho e a um campo estocástico externo; um sistema acoplado a um banho e com frequência modulada no tempo.

3.1 Operações quânticas

O formalismo de operações quânticas é uma ferramenta para descrever a evolução de sistemas quânticos em diversas circunstâncias, incluindo mudanças estocásticas no estado quântico, de forma análoga a como processos Markovianos descrevem mudanças estocásticas em estados clássicos.^{31,32}

Assim como estados clássicos são descritos por um vetor de probabilidades, nós descreveremos estados quânticos através dos operadores densidade. Estes estados quânticos

cos, de forma similar ao caso clássico, se transformam da forma

$$\rho' = \mathcal{E}(\rho) \quad (3.1)$$

onde o mapa $\mathcal{E}$ desta equação é um operador quântico. Operações de medida são exemplos simples de operações quânticas. Desta forma, descrever a dinâmica de um sistema aberto, isto é, um sistema quântico que interage de alguma forma com o resto do mundo, usando uma operação quântica como uma espécie de extensão do caso fechado se torna interessante.

Uma maneira natural de descrever a dinâmica de um sistema aberto é tratá-lo como a interação de um sistema de interesse $\mathcal{S}$ e um ambiente $\mathcal{B}$, que juntos formam um sistema fechado. Em geral o estado final do sistema, $\mathcal{E}(\rho_S)$ não estará relacionado com o estado inicial ρ através. Se assumirmos que o estado inicial do sistema-ambiente é um produto $\rho_S \otimes \rho_B$, podemos descrever o estado final do sistema utilizando um traço parcial sobre o ambiente:

$$\mathcal{E}(\rho_s) = \text{Tr}_B [U(\rho_S \otimes \rho_B)U^\dagger] \quad (3.2)$$

onde, caso U não interaja com o ambiente, teremos simplesmente $\mathcal{E}(\rho_S) = \hat{U}\rho_s\hat{U}^\dagger$ onde $\hat{U}$ é a parte de U que atua apenas em $\mathcal{S}$.

Impusemos uma condição muito relevante ao assumir que o estado inicial do sistema-ambiente poderia ser escrito como um produto. Apesar de nem sempre podermos aplicar esta condição, conhecida na literatura como acoplamento fraco, devido a correlações que surgem da interação do sistema com o ambiente, é razoável assumirmos ela para vários casos práticos, pois quando um pesquisador experimental prepara um estado em laboratório ele desfaz todas as correlações do estado com o sistema. Idealmente, as correlações serão completamente destruídas, deixando o sistema em um estado puro.

3.1.1 Representação do Operador-Soma

As operações quânticas podem ser representadas através da representação de operador-soma, que essencialmente equivale a equação (3.2) reescrita com operadores que atuam apenas no espaço de Hilbert de $\mathcal{S}$. Seja $|e_k\rangle$ uma base ortonormal para o espaço de estados de dimensão finita do ambiente e seja $\rho_B = |e_0\rangle\langle e_0|$ o estado inicial do ambiente. Não há perda de generalidade ao assumirmos que o ambiente inicia num estado puro, pois caso o estado inicial fosse um estado misto poderíamos adicionar sistemas extras a fim de

purificar o ambiente. Apesar deste sistema extra ser "fictício", ele não altera em nada a dinâmica do sistema principal $\mathcal{S}$ e pode então ser utilizado como um passo intermediário nos cálculos. A equação (3.2) pode ser reescrita como

$$\mathcal{E}(\rho_S) = \sum_i \langle e_i | U [\rho_S \otimes |e_0\rangle \langle e_0|] U^\dagger | e_i \rangle = \sum_i K_i \rho_S K_i^\dagger \quad (3.3)$$

onde $K_i = \langle e_i | U | e_0 \rangle$ é um operador que atua apenas em $\mathcal{S}$. A equação (3.3) é conhecida como a representação de operador-soma de $\mathcal{E}$. Assumindo então que tais operações preservam o traço do operador densidade, devemos impor

$$1 = \text{Tr} [\mathcal{E}(\rho_S)] = \text{Tr} \left[\sum_i K_i \rho_S K_i \right] = \text{Tr} \left[\sum_i K_i^\dagger K_i \rho_S \right]. \quad (3.4)$$

Como esta relação é válida para qualquer ρ_S , concluimos que

$$\sum_i K_i^\dagger K_i = \mathbb{I}. \quad (3.5)$$

Existem operações que não preservam traço, mas discuti-las está fora do escopo desta tese pois em todos os nossos trabalhos utilizamos operadores que preservam traço.⁽²⁰⁾ Antes de prosseguirmos para aplicações das operações quânticas iremos formalizar tais operações de forma axiomática.

Definimos uma operação $\mathcal{E}$ como um mapa do conjunto de operadores densidade de entrada do espaço Q_1 para o espaço de operadores densidade de saída Q_2 , com as seguintes propriedades:

- **A1:** $\text{Tr} [\mathcal{E}(\rho)]$ é a probabilidade de que o processo representado por $\mathcal{E}$ ocorra quando ρ for o estado inicial. Assim $0 \leq \mathcal{E} \leq 1$ para qualquer estado ρ .
- **A2:** $\mathcal{E}$ é um mapa convexo-linear no conjunto das matrizes densidade, isto é, para probabilidades $\{p_i\}$,

$$\mathcal{E} \left(\sum_i p_i \rho_i \right) = \sum_i p_i \mathcal{E}(\rho_i). \quad (3.6)$$

- **A3:** $\mathcal{E}$ é um mapa completamente positivo. Isto é, se $\mathcal{E}$ mapeia os operadores densidade de Q_1 para os operadores densidade de Q_2 , então $\mathcal{E}(A)$ deve ser positivo para qualquer operador positivo A . Além disto, se introduzirmos um sistema extra R de dimensão arbitrária, deve ser verdade que $(\mathcal{I} \otimes \mathcal{E})(A)$ é positivo para qualquer operador positivo A no sistema combinado RQ_1 , onde $\mathcal{I}$ é o mapa identidade de R .

Apenas estes três axiomas são suficientes para definir uma operação quântica. Entretanto, o teorema a seguir mostra que eles são equivalentes ao modelo sistema-ambiente anterior e a definição em termos do operador-soma:

Teorema 1. *O mapa $\mathcal{E}$ satisfaz os axiomas **A1**, **A2** e **A3** se, e somente se*

$$\mathcal{E}(\rho_S) = \sum_i K_i \rho_S K_i^\dagger \quad (3.7)$$

para um conjunto de operadores $\{K_i\}$ que mapeiam o espaço de Hilbert de entrada no espaço de Hilbert de saída, e $\sum_i K_i^\dagger K_i \leq \mathbb{I}$.

Prova:

Vamos supor $\mathcal{E}(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger$. $\mathcal{E}$ é linear, então para verificar que $\mathcal{E}$ é uma operação quântica devemos provar que ela é completamente positiva. Seja A um operador positivo agindo no espaço de estados de um sistema expandido RQ e seja $|\psi\rangle$ um estado qualquer de RQ . Definindo $|\varphi_i\rangle \equiv (\mathbb{I}_R \otimes K_i^\dagger) |\psi\rangle$, temos

$$\langle \psi | (\mathbb{I}_R \otimes K_i^\dagger) A (\mathbb{I}_R \otimes K_i) | \psi \rangle = \langle \varphi_i | A | \varphi_i \rangle \geq 0 \quad (3.8)$$

devido a positividade do operador A . Segue daí que

$$\langle \psi | (\mathcal{I} \otimes \mathcal{E})(A) | \psi \rangle = \sum_i \langle \varphi_i | A | \varphi_i \rangle \geq 0 \quad (3.9)$$

e assim para qualquer operador positivo A , o operador $(\mathcal{I} \otimes \mathcal{E})(A)$ também será positivo. A restrição $\sum_i K_i^\dagger K_i \leq \mathbb{I}$ garante que as probabilidades sejam menores ou iguais a 1. Isto completa a primeira parte da prova.

Vamos supor agora que $\mathcal{E}$ satisfaça os três axiomas. Devemos encontrar uma representação de operador-soma para $\mathcal{E}$. Introduzindo um sistema R , com a mesma dimensão do sistema quântico original, Q . Seja $|i_R\rangle$ e $|i_Q\rangle$ bases ortonormais para R e Q . Definimos um estado conjunto $|\alpha\rangle$ de RQ como

$$|\alpha\rangle \equiv \sum_i |i_R\rangle |i_Q\rangle. \quad (3.10)$$

O estado $|\alpha\rangle$ é, a menos de um fator de normalização, um estado maximamente emaranhado dos sistemas R e Q . Definimos então um operador σ no espaço de estados de RQ

como

$$\sigma \equiv (\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{E}) (|\alpha\rangle \langle \alpha|). \quad (3.11)$$

Iremos demonstrar agora que σ especifica totalmente a operação quântica $\mathcal{E}$, isto é, para saber como $\mathcal{E}$ age num estado arbitrário de Q é suficiente saber como ele age em um estado maximamente emaranhado de Q com outro sistema.

Para recuperarmos $\mathcal{E}$ a partir de σ vamos utilizar um estado $|\psi\rangle = \sum_j \psi_j |j_Q\rangle$ qualquer de Q . Definimos um estado correspondente $|\tilde{\psi}\rangle$ de R através da equação

$$|\tilde{\psi}\rangle \equiv \sum_j \psi_j^* |j_R\rangle. \quad (3.12)$$

Note que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\psi} | \sigma | \tilde{\psi} \rangle &= \langle \tilde{\psi} | \left(\sum_{ij} |i_R\rangle \langle j_R| \otimes \mathcal{E}(|i_Q\rangle \langle j_Q|) \right) | \tilde{\psi} \rangle \\ &= \sum_{ij} \psi_i \psi_j^* \mathcal{E}(|i_Q\rangle \langle j_Q|) \\ &= \mathcal{E}(|\psi\rangle \langle \psi|). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Seja $\sigma = \sum_i |s_i\rangle \langle s_i|$ uma decomposição de σ , onde os vetores $|s_i\rangle$ não precisam ser normalizados. Definimos um mapa

$$K_i(|\psi\rangle) \equiv \langle \tilde{\psi} | s_i \rangle. \quad (3.14)$$

Este mapa é um operador linear no espaço de estados de Q . Além disso, temos

$$\begin{aligned} \sum_i K_i |\psi\rangle \langle \psi| K_i^\dagger &= \sum_i \langle \tilde{\psi} | s_i \rangle \langle s_i | \tilde{\psi} \rangle \\ &= \langle \tilde{\psi} | \sigma | \tilde{\psi} \rangle \\ &= \mathcal{E}(|\psi\rangle \langle \psi|). \end{aligned} \quad (3.15)$$

E assim

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle \langle \psi|) = \sum_i K_i |\psi\rangle \langle \psi| K_i^\dagger, \quad (3.16)$$

para todos os estados puros $|\psi\rangle$ de Q . Pela linearidade convexa segue que

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger \quad (3.17)$$

em geral. A condição $\sum_i K_i^\dagger K_i \leq \mathbb{I}$ segue imediatamente do axioma **A1** identificando o traço de $\mathcal{E}(\rho)$ com uma probabilidade.

Além disso, é digno de nota que representação do operador-soma não é única, podendo haver um conjunto de operadores $\{F_i\}$ resultando na mesma operação que $\{K_i\}$.

3.1.2 Medidas Generalizadas

Introduziremos os operadores de medida generalizada como um exemplo de uma operação quântica. Consideremos um conjunto de operadores de medida $\{M_i\}$ que atuam no espaço dos estados do sistema quântico a ser medido. O índice i rotula os possíveis resultados do experimento. Estes operadores satisfazem

$$\sum_i M_i^\dagger M_i = \mathbb{I}. \quad (3.18)$$

A probabilidade de obtermos um resultado i é dada então por

$$p_i = \text{Tr} [M_i \rho M_i^\dagger] \quad (3.19)$$

e o estado normalizado após esta medida é

$$\rho \rightarrow \frac{M_i \rho M_i^\dagger}{p_i} \quad (3.20)$$

que descreve o efeito da medida sobre o sistema. As chamadas medidas projetivas correspondem ao caso em que escrevemos M_i como um operador de projeção P_i , que apresentamos em ??, e são as medidas mais simples que podemos realizar em um estado.

Caso realizássemos uma medida mas não checassemos seu resultado, nosso melhor palpite sobre o estado final do sistema passaria a ser uma mistura estatística dos possíveis resultados

$$\rho' = \sum_i p_i \frac{M_i \rho M_i^\dagger}{p_i} = \sum_i M_i \rho M_i^\dagger \quad (3.21)$$

que nada mais é do que uma operação quântica.

POVM

Olhando para a equação (3.19), vemos que não precisamos saber quais são os operadores de medida M_i , basta que conheçamos

$$\Pi_i = M_i^\dagger M_i \quad (3.22)$$

que nos dará

$$p_i = \text{Tr} [\Pi_i \rho] \quad (3.23)$$

onde o conjunto de operadores $\{\Pi_i\}$ são chamados de POVM^a. Por construção estes operadores são positivos semi-definidos. Além disso a normalização (3.18) ficará

$$\sum_i \Pi_i = \mathbb{I}. \quad (3.24)$$

Qualquer conjunto de operadores $\{\Pi_i\}$ que for positivo semi-definido e satisfizer a condição de normalização representa um POVM válido.

É interessante diferenciar as medidas generalizadas dos POVM pois diferentes conjuntos $\{M_i\}$ podem gerar o mesmo conjunto $\{\Pi_i\}$. Isto implica que mesmo que o efeito das medidas sejam diferentes, o POVM será o mesmo, ou seja, pensando em termos de probabilidade, obteremos o mesmo resultado. POVM são muito úteis pois em muitos experimentos não possuímos acesso aos estados após uma medida, mas apenas suas probabilidades de ocorrerem.³³ Retomaremos a representação de operador-soma no capítulo 5 onde a utilizaremos para escrever a evolução de um sistema sob efeito de uma atenuação de amplitude.

3.2 Dinâmica de sistemas abertos

A representação do operador-soma apesar de ser uma maneira simples de tratar a evolução de sistemas abertos não nos fornece nenhuma ferramenta para deduzirmos de princípios físicos as formas dos operadores de Kraus: precisaríamos saber previamente o estado final da evolução para podermos construí-los. Entretanto, é possível encontrarmos o estado final do sistema se construirmos uma equação análoga a equação de Schrödinger para sistemas fechados, capaz de descrever a evolução temporal da matriz densidade do

^a Do inglês Positive-Operator Valued Measure.

sistema de interesse.

Vamos primeiro encontrar uma forma geral para a evolução temporal de $\rho(t)$, ou seja, a matriz densidade de todos os sistemas envolvidos, partindo do Hamiltoniano total dos banho $\mathcal{B}$ e do sistema $\mathcal{S}$. Para fazermos isso utilizaremos a representação de interação para descrever os operadores. Ao longo desta tese assumiremos $\hbar = 1$ e $k_B = 1$ por simplicidade. Vamos primeiro considerar que, para o caso sistema-banho ($\mathcal{SB}$) podemos escrever seu Hamiltoniano total como

$$H = H_S(t) + H_B + H_{SB}(t), \quad (3.25)$$

onde $H_S(t)$ é o Hamiltoniano do sistema $\mathcal{S}$, H_B é o Hamiltoniano do banho e $H_{SB}(t)$ está associado a interação sistema-banho. Neste caso, a matriz densidade na representação usual de Schrödinger evolui seguindo a equação de Von Neumann.

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H_S(t) + H_B + H_{SB}(t), \rho(t)]. \quad (3.26)$$

A matriz densidade da representação de interação pode ser escrita em termos da matriz densidade da representação de Schrodinger através de

$$\rho_I(t) = e^{i(\mathcal{H}_S(t) + H_B t)} \rho(t) e^{-i(\mathcal{H}_S(t) + H_B t)}. \quad (3.27)$$

com $\mathcal{H}_S(t) = \int dt' H_S(t')$. Esta relação possui forma similar para qualquer observável A

$$A_I(t) = e^{i(\mathcal{H}_S(t) + H_B t)} A(t) e^{-i(\mathcal{H}_S(t) + H_B t)}. \quad (3.28)$$

Assim, na representação de interação, a equação (3.26) é escrita como

$$\frac{d}{dt}\rho_I(t) = -i[V_I(t), \rho_I(t)], \quad (3.29)$$

onde $V_I(t)$ é o Hamiltoniano de interação entre os sistemas na representação de interação. Integrando (3.29) podemos escrever uma forma integral da equação mestra

$$\rho_I(t) = \rho_I(0) - i \int_0^t dt_1 [V_I(t_1), \rho_I(t_1)]. \quad (3.30)$$

É possível ainda reescrever $\rho_I(t_1)$ do lado direito da equação em termos de (3.30)

$$\rho_I(t) = \rho_I(0) - i \int_0^t dt' [V_I(t_1), \rho_I(0)] - \int_0^t \int_0^{t_1} dt_1 dt_2 [V_I(t_1), [V_I(t_2), \rho_I(t_2)]]. \quad (3.31)$$

Vamos assumir então que o sistema e o ambiente estão num regime de acoplamento fraco, de forma que sua matriz densidade possa ser escrita na forma do produto $\rho(t) = \rho_S(t) \otimes \rho_B(t)$. Na representação de interação este estado também será um produto. Além disso assumiremos que o tempo de correlação τ_B do banho é tão pequeno que $\rho_B(t) \approx \rho_B(0)$ para $t \gg \tau_B$. Como estamos interessados somente no estado do sistema $\mathcal{S}$, obtemos o operador densidade reduzido utilizando o traço parcial sobre os estados de $\mathcal{B}$. Para simplificar a notação vamos ocultar o índice I referente a representação de interação. Ficamos então com

$$\begin{aligned} \rho_S(t) = & \rho_S(0) - i \int_0^t dt_1 \text{Tr}_B [V(t_1), \rho_S(0) \otimes \rho_B(0)] \\ & - \int_0^t \int_0^{t_1} dt_1 dt_2 \text{Tr}_B [V(t_1), [V(t_2), \rho_S(t_2) \otimes \rho_B(0)]] . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Esta equação pode ser simplificada se assumirmos se escrevermos sem perda de generalidade o termo de interação como $V(t) = \sum_k A_k(t) \otimes B_K(t)$. Olhando para o segundo termo da equação (3.32) teremos $\text{Tr}_B [V(t), \rho_S(0) \otimes \rho_B(0)] = \sum_k [A_k, \rho_S(0)] \langle B_k(t') \rangle_{\rho_B}$ e escolhemos B_k tal que $\langle B_k \rangle_{\rho_B} = 0$. Finalmente, tomando então a derivada temporal de (3.32) obtemos

$$\boxed{\frac{d}{dt} \rho_S(t) = - \int_0^t dt_1 \text{Tr}_B [V(t), [V(t_1), \rho_S(t_1) \otimes \rho_B(0)]]} . \quad (3.33)$$

Esta equação é importante pois será nosso ponto de partida para a análise da dinâmica do sistema quântico $\mathcal{S}$ em contato com o banho $\mathcal{B}$ para três casos diferentes: no primeiro consideraremos ambos os sistemas como sendo quânticos, o que resultará na conhecida equação mestra de Lindblad. No segundo consideraremos um tratamento semiclássico do sistema onde acoplamos um spin a uma rede de spins descrita como um banho clássico, procedimento conhecido como formalismo de Redfield. Por último consideraremos um caso particular em que o banho é substituído por um campo estocástico externo, como um laser por exemplo, atuando no sistema de interesse.

3.2.1 Equação mestra de Lindblad

Primeiro encontraremos uma equação de evolução para um q-bit usando uma abordagem puramente quântica, ou seja, assumindo que o banho $\mathcal{B}$ pode ser descrito através formalismo quântico. Para fazermos isso, modelaremos o banho como um conjunto infinito

de osciladores harmônicos desacoplados, também conhecido como banho bosônico,^{34,35} descritos pelo Hamiltoniano

$$H_B = \sum_r \omega_r b_r^\dagger b_r, \quad (3.34)$$

em que $b_r^\dagger(b_r)$ é o operador de criação(aniquilação). Assumindo que o nosso sistema $\mathcal{S}$ seja um q-bit, o Hamiltoniano que descreve a evolução deste sistema pode ser escrito como³⁵

$$H = \frac{\omega_0}{2} \sigma_3 + \sum_r \omega_r b_r^\dagger b_r + \sum_r g_r (\sigma_- b_r^\dagger + \sigma_+ b_r), \quad (3.35)$$

onde ω_0 é a frequência do sistema e g_r é a constante de acoplamento. Reescrevendo o termo H_{SB} na representação de interação, teremos

$$V(t) = e^{-i\omega_0 t} \sigma_- \otimes \sum_r g_r e^{-i\omega_r t} b_r^\dagger + e^{i\omega_0 t} \sigma_+ \otimes \sum_r g_r e^{i\omega_r t} b_r = \sum_{k=1}^2 \tilde{A}_k \otimes \tilde{B}_k, \quad (3.36)$$

onde $\sigma_\pm = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$. Assumindo que a aproximação de acoplamento fraco é válida, podemos substituir $V(t)$ na equação (3.33)

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = \sum_{\alpha, \beta} \int_0^t dt_1 \left(\tilde{A}_\beta(t) \rho_S(t_1) \tilde{A}_\alpha^\dagger(t_1) - \tilde{A}_\alpha^\dagger(t_1) \tilde{A}_\beta(t) \rho_S(t_1) \right) G_{\alpha\beta}(t, t_1) + \text{h.c} \quad (3.37)$$

onde $G_{\alpha\beta}(t, t_1) = \left\langle \tilde{B}_\alpha^\dagger(t) \tilde{B}_\beta(t_1) \right\rangle_{\rho_B}$ é a função de correlação do ambiente e h.c representa o termo Hermitiano conjugado da equação. Devido a dependência com os operadores de criação e aniquilação, podemos verificar facilmente que a função de correlação se anula quando $\alpha = \beta$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(t, t_1) &= \text{Tr}_B \left[\tilde{B}_\alpha^\dagger(t) \tilde{B}_\beta(t_1) \right] = \text{Tr}_B \left[e^{i\omega_r t} B_\alpha^\dagger(0) e^{-i\omega_r t} e^{i\omega_r t_1} B_\beta(0) e^{-i\omega_r t_1} \right] \\ &= \text{Tr}_B \left[\tilde{B}_\alpha^\dagger(t - t_1) B_\beta(0) \right] = G_{\alpha\beta}(t - t_1). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Reescrevendo então $t_1 = t - \tau$ a equação 3.37 fica

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = \sum_{\alpha, \beta} \int_0^t d\tau G_{\alpha\beta}(\tau) \left(\tilde{A}_\beta(t) \rho_S(t - \tau) \tilde{A}_\alpha^\dagger(t - \tau) - \tilde{A}_\alpha^\dagger(t - \tau) \tilde{A}_\beta(t) \rho_S(t - \tau) \right) + \text{h.c}, \quad (3.39)$$

onde podemos utilizar a aproximação de Markov, que assume que o tempo de decaimento das funções de correlação τ_B é muito menor que o tempo de relaxação característico do sistema τ_S , e que t é da ordem de τ_B . Assim podemos substituir $\rho_S(t - \tau)$ por $\rho_S(t)$, o que implica que o estado atual $\rho_S(t)$ independe dos estados passados do sistema. Além

disso podemos fazer $t \rightarrow \infty$ no limite de integração, visto que o tempo de decaimento das funções de correlação é tão rápido que, para um tempo da ordem τ_B , o integrando em (3.39) é praticamente zero. Desta forma, teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S(t) &= \sum_{\alpha \neq \beta} \int_0^\infty d\tau e^{i\omega_0\tau} G_{\alpha\beta}(\tau) (A_\beta \rho_S(t) A_\alpha^\dagger - A_\alpha^\dagger A_\beta \rho_S(t)) \\ &+ \sum_{\alpha \neq \beta} \left(\int_0^\infty d\tau e^{i\omega_0\tau} G_{\beta\alpha}(\tau) \right)^\dagger (A_\alpha \rho_S(t) A_\beta^\dagger - \rho_S(t) A_\beta^\dagger A_\alpha), \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde usamos o fato que $\tilde{A}_k(t) = e^{-i\omega_0 t} A_k$, onde $A_1 = \sigma_-$ e $A_2 = \sigma_+$ pela equação (3.36). Além disso, partindo da mesma equação e usando a definição dos operadores de criação e aniquilação, temos que $G_{\alpha\alpha}(\tau) \propto \langle b_r b_{r'} \rangle = \langle b_r^\dagger b_{r'}^\dagger \rangle = 0$ de forma que apenas os termos em que $\alpha \neq \beta$ são não nulos. Podemos simplificar ainda mais esta equação escrevendo $\int_0^\infty d\tau e^{i\omega_0\tau} G_{\alpha\beta}(\tau) = \Gamma_{\alpha\beta}(\omega_0) = \gamma_{\alpha\beta}(\omega_0) + i\Upsilon_{\alpha\beta}(\omega_0)$ e ficando com

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S(t) &= -i \left[\sum_{\alpha \neq \beta} \Upsilon_{\alpha\beta}(\omega_0) A_\alpha^\dagger A_\beta, \rho_S(t) \right] \\ &+ \sum_{\alpha \neq \beta} \gamma_{\alpha\beta}(\omega_0) \left[A_\beta \rho_S(t) A_\alpha^\dagger - \frac{1}{2} \{ A_\alpha^\dagger A_\beta, \rho_S(t) \} \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

O primeiro termo desta equação é similar a equação de Von Neumann para $\rho_S(t)$, o que nos permite definir o Hamiltoniano de deslocamento Lamb (Lamb shift) como $H_{LS} = \sum_{\alpha, \beta} \Upsilon_{\alpha\beta}(\omega_0) A_\alpha^\dagger A_\beta$. Podemos calcular o segundo termo explicitamente se lembrarmos que $\langle b_r b_{r'}^\dagger \rangle = \delta_{rr'}(1 + N(\omega_r))$ e $\langle b_r^\dagger b_r \rangle = \delta_{rr'} N(\omega_r)$. Ficaremos então com

$$G_{11}(\tau) = \text{Tr}_B \left[\tilde{B}(\tau)^\dagger B(0) \right] = \sum_{r, r'} g_r^* g_{r'} e^{i\omega_r \tau} \langle b_r^\dagger b_{r'} \rangle = \sum_r |g_r|^2 e^{i\omega_r \tau} N(\omega_r), \quad (3.42a)$$

$$G_{22}(\tau) = \sum_r |g_r|^2 e^{-i\omega_r \tau} (1 + N(\omega_r)). \quad (3.42b)$$

Estas funções podem ser reescritas se considerarmos um limite do contínuo dado por

$$\sum_r f(\omega_r) \rightarrow \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{|g(\omega)|^2} f(\omega), \quad (3.42c)$$

onde $f(\omega_r)$ é uma função qualquer das frequências do banho e $J(\omega)$ é a densidade espectral do banho,³⁴ que nos diz como a força de acoplamento varia com a frequência. Escrever as funções de correlação do banho em termos de frequências contínuas faz sentido se

considerarmos a aproximação de Markov: os tempos muito curtos de decaimento das correlações implicam em um espaçamento menor dos níveis de energia, o que pode ser tratado como um espectro contínuo de energia. Desta forma teremos

$$G_{11}(\tau) = \int_0^\infty d\omega e^{i\omega\tau} J(\omega) N(\omega), \quad (3.43a)$$

$$G_{22}(\tau) = \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega\tau} J(\omega) (1 + N(\omega)). \quad (3.43b)$$

Podemos agora calcular as taxas de decaimento $\gamma_{\alpha\beta}(\omega)$. Se assumirmos que a frequência natural ω_0 é positiva

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(\omega_0) &= \int_{-\infty}^\infty d\tau e^{i\omega_0\tau} G_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^\infty d\tau e^{i\omega_0\tau} \int_0^\infty d\omega e^{i\omega\tau} J(\omega) N(\omega) \\ &= \int_0^\infty d\omega J(\omega) N(\omega) \int_{-\infty}^\infty d\tau e^{i(\omega+\omega_0)\tau} \\ &= 2\pi \int_0^\infty d\omega J(\omega) N(\omega) \delta(\omega + \omega_0), \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde usamos a representação integral da função delta de Dirac (ref):

$$\delta(\omega - \omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\tau e^{i(\omega - \omega_0)\tau}. \quad (3.45)$$

Como ω_0 é positivo, a integral envolvendo $\delta(\omega + \omega_0)$ é nula do fato que o domínio de integração é o eixo positivo de ω . Assim, $\gamma_{11}(\omega_0) = 0$. Por outro lado,

$$\gamma_{11}(-\omega_0) = 2\pi \int_0^\infty d\omega J(\omega) N(\omega) \delta(\omega - \omega_0) = 2\pi J(\omega_0) N(\omega_0). \quad (3.46)$$

De forma análoga, $\gamma_{22}(-\omega_0) = 0$ e

$$\gamma_{22}(\omega_0) = 2\pi J(\omega_0) (1 + N(\omega_0)). \quad (3.47)$$

Finalmente a equação mestra de Lindblad pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_S(t) &= -i \left[\frac{\omega_0}{2} \sigma_3 + H_{LS}, \rho_S(t) \right] + \gamma(1 + N(\omega_0)) \left[\sigma_- \rho_S(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \{ \sigma_+ \sigma_-, \rho_S(t) \} \right] \\ &\quad + \gamma N(\omega_0) \left[\sigma_+ \rho_S(t) \sigma_- - \frac{1}{2} \{ \sigma_- \sigma_+, \rho_S(t) \} \right], \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde $\gamma = 2\pi J(\omega_0)$. Esta equação descreve a chamada atenuação de Amplitude (Amplitude Damping) e é geralmente utilizada para modelar a troca de energia entre o sistema de interesse e o reservatório. Com as informações contidas nesta seção também poderia-

mos calcular o Hamiltoniano de deslocamento Lamb H_{LS} , entretanto iremos assumir um referencial em que o primeiro termo a direita de (3.48) será desprezível e apenas os termos de interação entre o sistema e reservatório serão levados em consideração.

3.2.2 Equação de Redfield

Agora analisaremos a dinâmica de um sistema de spin dependente do tempo em contato com uma rede de spins agindo como reservatório térmico.³⁶ Primeiro consideraremos que o acoplamento fraco vale, o que implica que a rede de spins não é afetada pela interação com o sistema. Isto significa que a rede possui capacidade térmica alta o suficiente para se manter no estado de Gibbs $\rho_B = e^{-H_B/T}/\text{Tr}[e^{-H_B/T}]$. Além disso consideraremos uma aproximação de altas temperaturas, em que a energia ω entre os níveis de energia dos spins da rede é muito menor que sua energia térmica, o que implica em $\omega/T \ll 1$. Desta forma o estado da rede $\mathcal{B}$ pode ser escrita como $\rho_B = e^{-H_B/T}/\text{Tr}[e^{-H_B/T}] \approx 1 - H_B/T$. Desta forma a equação (3.33) fica

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \int_0^t dt_1 \text{Tr}_B \left[V(t), \left[V(t_1), \frac{H_B}{T} - \rho_S(t_1) \right] \right]. \quad (3.49)$$

Da equação de movimento de Heisenberg para $V(t)$ obtemos

$$\left[V(t), \rho_S(t) - \frac{H_B}{T} \right] = \left[V(t), \rho_S(t) + \frac{H_S(t)}{T} \right] \frac{i}{T} \frac{dV(t)}{dt} + \frac{i}{T} U^\dagger(t) \frac{dH_{SB}}{dt} U(t), \quad (3.50)$$

e conseqüentemente a equação de evolução fica

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S(t) &= \frac{i}{T} \text{Tr}_B \{ [V(t), V(0)] \} - \text{Tr}_B \int_0^t dt_1 \left[V(t), \left[V(t_1), \rho_S(t) + \frac{H_S(t_1)}{T} \right] \right] \\ &\quad - \frac{i}{T} \text{Tr}_B \int_0^t \left[V(t_1), U^\dagger(t_1) \frac{dH_{SB}(t_1)}{dt_1} U(t_1) \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Reescrevemos o termo de interação como $V(t) \propto \lambda(t)\mathcal{O}$ onde $\lambda(t)$ modela a flutuação estocástica e $\mathcal{O}$ representa um operador que atua em $\mathcal{S}$. Assim o primeiro termo a direita da equação(3.51) se anula, em acordo com o fato que $\langle \lambda(t) \rangle = 0$. Além disso $\mathcal{H}_{SB}(t) = H_{SB}(t)$, de forma que $V(t) = e^{i\mathcal{H}_S(t)} H_{SB} e^{-i\mathcal{H}_S(t)}$. Usando integração por partes no terceiro termo do lado direito da equação e considerando que as oscilações temporais do operador $U^\dagger(t_1)(\mathcal{O})U(t_1)$ são muito mais rápidas que as de $V(t)$, aplicamos a aproximação de onda rotatória para concluir que este termo também é nulo. Com isso obtemos uma

equação de movimento simplificada para o sistema de spin

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \text{Tr}_B \int_0^t dt_1 \left[V(t) \left[V(t_1), \frac{H_S(t_1)}{T} - \rho_S(t) \right] \right], \quad (3.52)$$

que, de acordo com a aproximação para altas temperaturas, onde $\rho_S^{eq}(0) \approx 1 - \frac{H_S(0)}{T}$ e $\frac{H_S(t_1)}{T} \approx 1 - \rho_S^{eq}(0)$, ficará

$$\frac{d\Sigma(t)}{dt} = - \int_0^t dt_1 \overline{[V(t), [V(t_1), \Sigma(t)]]}, \quad (3.53)$$

onde definimos o operador $\Sigma(t) = \rho_S(t) - \rho_S^{eq}(0)$ e substituímos o traço sobre os graus de liberdade da rede pela média sobre realizações estocásticas, representada pela barra horizontal. Esta é a equação de Redfield para um sistema de spin dependente do tempo. Devemos notar que a aproximação para altas temperaturas, que nos permite definir $\Sigma(t)$, indica uma relaxação do sistema para o estado de Gibbs, algo característico em sistemas de Ressonância Magnética Nuclear (RMN) por exemplo.

Para definirmos a densidade espectral da rede, introduzimos a equação de autovalores $H_S(t) |k\rangle = \epsilon_k |k\rangle$, com a base de spin $\{|k\rangle\}$. Tomando então o elemento de matriz kk' da equação (3.53) e voltando para a representação de Schrödinger onde $\Sigma^{sch}(t) = e^{-i\mathcal{H}_S(t)}\Sigma(t)e^{i\mathcal{H}_S(t)}$, obtemos as equações de Redfield dos elementos da matriz densidade

$$\frac{d\Sigma_{kk'}^{sch}(t)}{dt} = -i \langle k | [H_S, \Sigma^{sch}] | k' \rangle + \sum_{n,n'} e^{-i(\Omega_{kk'} + \Omega_{nn'})} R_{kn,n'k'} \Sigma_{nn'}^{sch}, \quad (3.54)$$

onde usamos a notação $\Omega_{kn}(t) = E_k(t) - E_n(t)$, $E_k(t) = \int_0^t dt_1 \epsilon_k(t_1)$ e $\Sigma_{nn'}^{sch}(t) = \langle n | \Sigma^{sch}(t) | n' \rangle$ e definimos os elementos da matriz de relaxação

$$\begin{aligned} R_{kn,n'k'} &= J_{kn,n'k'}(t, \Omega_{n'k'}) e^{i\Omega_{kn}(t)} + J_{n'k',kn}(t, \Omega_{kn}) e^{i\Omega_{n'k'}(t)} \\ &\quad - \delta_{k'n'} \sum_j J_{kj,jn}(t, \Omega_{jn}) e^{i\Omega_{kj}(t)} - \delta_{kn} \sum_j J_{jk',n'j}(t, \Omega_{n'j}) e^{i\Omega_{jk'}(t)}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

com as densidades espectrais do ambiente dadas por

$$J_{kn,n'k'}(t, \Omega_{n'k'}) = \int_0^t dt_1 G_{kn,n'k'}(t, t_1) e^{i\Omega_{n'k'}(t')} \quad (3.56a)$$

$$G_{kn,n'k'}(t, t_1) = \overline{\langle k | H_{SB}(t) | n \rangle \langle n' | H_{SB}(t_1) | k' \rangle} \quad (3.56b)$$

Apesar dos cálculos aqui apresentados terem focado em um sistema de spin, as equações encontradas são bem gerais, sendo válidas para qualquer Hamiltoniano $H_s(t)$ que satisfaça $[H_s(t), H_s(t')] = 0$ e que sejam válidos o acoplamento fraco e a aproximação para altas temperaturas.

3.2.3 Tempo de relaxação característico

Há uma conexão entre o tratamento semiclássico e quântico derivados acima conforme demonstrado por Diogo et.al.³⁶ Para encontrar esta conexão assumiremos que o nosso q-bit consiste num sistema de spin 1/2 sujeito a um campo magnético constante na direção z . O espaçamento entre os dois níveis Zeeman definem a frequência de Larmor $\omega_L = \omega_1(t) - \omega_0(t)$, onde $\omega_1(t)$ e $\omega_0(t)$ representam as frequências do estado excitado e estado fundamental, respectivamente. A modulação destas frequências é devido a alguma influência externa, como um campo magnético dependente do tempo adicional.

O Hamiltoniano do sistema é dado por $H_S(t) = \omega_L(t)\sigma_z/2$. Já a ação do ambiente no sistema é modelada pelo Hamiltoniano de spin-rede

$$H_{SB}(t) = -\gamma_n \sum_q \lambda_q(t) \frac{\sigma_q}{2}, \quad (3.57)$$

onde γ_n é o fator giromagnético, $q = 1, 2, 3$ identifica as direções cartesianas e $\lambda_q(t)$ se refere a flutuação estocástica da rede na direção q .

Para este sistema a densidade espectral dada pelas equações (3.56) fica

$$J_{kn,n'k'}(t, \Omega_{n'k'}) = \sum_q I_q^{kn} I_q^{n'k'} \Theta_q(t, \Omega_{n'k'}), \quad (3.58)$$

onde $I_q^{kn} = \langle k | I_q | n \rangle$, $I_q = \sigma_q/2$ e

$$\Theta_q(t, \Omega_{n'k'}) = \gamma_n^2 \lambda_q^2 \int_0^t dt_1 e^{-|t_1|/\tau_0} e^{i\Omega_{n'k'}(t+t_1)}. \quad (3.59)$$

Para derivarmos (3.59) assumimos flutuações estocásticas isotrópicas(ref), de onde

$$\overline{\lambda_q(t) \lambda_{q_1}(t+t_1)} = \delta_{qq_1} \lambda_q^2 e^{-|t_1|/\tau_0}, \quad (3.60)$$

com λ_q^2 sendo um valor médio dependente da natureza específica do spin e τ_0 o tempo de correlação do ambiente, que mede a taxa de alteração dos spins do banho devido a uma

interação anisotrópica de spin (deslocamento químico, acoplamento dipolar, etc.)(ref). Assumimos aqui que os valores médios do acoplamento $\lambda_q(t)$ não são afetados pela dependência temporal do sistema.

Substituindo então a equação (3.58) na equação (3.55) obtemos os elementos da matriz de relaxação

$$\begin{aligned}
 R_{kn,n'k'}(t) = & \sum_q \left\{ [\Theta_q(t, \Omega_{n'k'})e^{i\Omega_{kn}(t)} + \Theta_q(t, \Omega_{kn})e^{i\Omega_{n'k'}(t)}] I_q^{kn} I_q^{n'k'} \right. \\
 & - \sum_j \left[\delta_{k'n'} I_q^{kj} I_q^{jn} \Theta_q(t, \Omega_{jn}) e^{i\Omega_{kj}(t)} \right. \\
 & \left. \left. + \delta_{kn} I_q^{jk'} I_q^{n'j} \Theta_q(t, \Omega_{n'j}) e^{i\Omega_{jk'}(t)} \right] \right\}, \quad (3.61)
 \end{aligned}$$

que nos permite calcular a evolução do valor médio da magnetização $\langle I_d \rangle$ numa direção d arbitrária:

$$\frac{d\langle I_d \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \text{Tr} [I_d \Sigma(t)] = \text{Tr} \left[I_d \frac{d\Sigma(t)}{dt} \right]. \quad (3.62)$$

Substituindo (3.54) e (3.61) na equação acima encontraremos

$$\frac{d\langle I_d \rangle}{dt} = -i \sum_{l,m} I_d^{lm} \langle m | [H_S(t), \Sigma] | l \rangle + \sum_q \sum_{l,m} \Theta_q(t, \Omega_{ml}) e^{-i\Omega_{ml}t} I_d^{ml} \langle l | [[I_d, I_q], \Sigma] | m \rangle. \quad (3.63)$$

Para spin 1/2 temos $|\Omega_{ml}(t)| = \Omega(t)(1 - \delta_{ml})$, de forma que a equação acima pode ser separada em componentes horizontais e longitudinais do campo

$$\frac{d\langle I_d \rangle}{dt} = \sum_{q=x,y} \sum_{l,m} \kappa_q(t, \Omega_{ml}) I_d^{ml} \langle l | [[I_d, I_q], \Sigma] | m \rangle + \kappa_z \text{Tr} [I_z [[I_d, I_z], \Sigma]] \quad (3.64)$$

onde $\kappa_q(t, \Omega_{ml}) = \Theta_q(t, \Omega_{ml}) e^{-i\Omega_{ml}t}$. Aqui nós desprezamos o termo de evolução livre do sistema pois estamos interessados apenas na dinâmica induzida pela interação com o ambiente. Reescrevendo esta equação em termos das magnetizações transversal e longitudinal, definidas como $M_z = \langle I_z \rangle$ e $\mathbf{M}_\perp = (\langle I_x \rangle, \langle I_y \rangle, 0)$, obtemos

$$\frac{dM_z(t)}{dt} = -\text{Re} [\kappa_x(t, \Omega) + \kappa_y(t, \Omega)] \{M_z(t) - M_0\} \quad (3.65a)$$

$$\frac{d\mathbf{M}_\perp}{dt} = -\frac{1}{2} \text{Re} [\kappa_x(t, \Omega) + \kappa_y(t, \Omega) + 2\kappa_z] \mathbf{M}_\perp \quad (3.65b)$$

com $M_0 = \text{Tr} [I_z \rho_S^{eq}]$ sendo a magnetização longitudinal de equilíbrio. Agora, comparando

estas equações com as equações fenomenológicas de Bloch

$$\frac{dM_z(t)}{dt} = \frac{1}{T_1} \{M_z(t) - M_0\} \quad (3.66a)$$

$$\frac{d\mathbf{M}_\perp(t)}{dt} = -\frac{\mathbf{M}_\perp(t)}{T_2} \quad (3.66b)$$

de onde conseguimos encontrar que os tempos de relaxação característica T_1 e T_2 são dados por

$$\frac{1}{T_1} = \text{Re} [\kappa_x(t, \Omega) + \kappa_y(t, \Omega)] \quad (3.67a)$$

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{2} \text{Re} [\kappa_x(t, \Omega) + \kappa_y(t, \Omega)] + \kappa_z = \frac{1}{2T_1} + \kappa_z. \quad (3.67b)$$

Por outro lado, olhando para a equação mestra de Lindblad, vemos que podemos reescrevê-la em termos dos operadores I_q , de forma que a equação (3.48) ficará

$$\dot{\rho}_S(t) = \gamma N(\omega_0) [I_- \rho_S(t), I_+] + \gamma (N(\omega_0) + 1) [I_+ \rho_S(t), I_-] + \text{h.c.} \quad (3.68)$$

Calculando a partir disso o valor médio da magnetização $\langle I_d \rangle$ numa direção d arbitrária obtemos, como no caso anterior, uma magnetização transversal e longitudinal dadas por

$$\frac{dM_z(t)}{dt} = -2\text{Re}(\gamma)(2N(\omega_0) + 1)M_z \quad (3.69a)$$

$$\frac{d\mathbf{M}_\perp(t)}{dt} = -\text{Re}(\gamma)(2N(\omega_0) + 1)\mathbf{M}_\perp(t) \quad (3.69b)$$

que, comparando com as equações (3.67) encontramos as relações

$$\frac{1}{T_1} = 2\text{Re}(\gamma)(2N(\omega_0) + 1) = \text{Re} [\kappa_x(t, \Omega) + \kappa_y(t, \Omega)] \quad (3.70a)$$

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{2T_1} = \text{Re}(\gamma)(2N(\omega_0) + 1) = \frac{1}{2} \text{Re} [\kappa_x(t, \Omega) + \kappa_y(t, \Omega)] + \kappa_z, \quad (3.70b)$$

onde vemos que, para o caso de atenuação de amplitude puro, a segunda equação só vale quando $\kappa_z = 0$ ^b. Assim, estas equações deixam clara a conexão entre o tratamento semiclássico e o tratamento quântico na dinâmica de sistemas quânticos abertos.

^b No tratamento quântico κ_z está associado a um termo associado ao efeito de atenuação de fase (phase damping), o que exigiria que considerássemos um segundo reservatório atuando no sistema durante a derivação da equação mestra.

3.2.4 Equação mestra estocástica

Iremos agora deduzir uma outra equação mestra para a atenuação de amplitude através de uma abordagem semiclássica, entretanto, neste caso consideraremos que o sistema está sob efeito de um campo clássico estocástico.^{37,38} Usaremos para isso o formalismo de função de onda estocástica,³⁹ onde o estado de um sistema quântico aberto é descrito por um ensemble de estados puros

$$\rho(t) = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|. \quad (3.71)$$

A evolução do sistema é recuperada após realizarmos uma média sobre todas as realizações estocásticas

$$\rho_S(t) = \overline{\rho(t)}, \quad (3.72)$$

ou seja, a média do operador estocástico $r(t)$ coincide com o operador densidade do sistema $\rho_S(t)$.

Vamos trabalhar com um modelo de ruído gaussiano, de forma que a Hamiltoniana total fique

$$H(t) = H_S + V(t) \quad (3.73)$$

sendo $V(t)$ o termo que representa o campo estocástico, cuja forma é dada por

$$V(t) = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha}(t) V_{\alpha}, \quad (3.74)$$

onde V_{α} são operadores que atuam no espaço do sistema e ξ_{α} são processos estocásticos complexos. Assumimos que tais processos são Gaussianos com valor médio nulo, ou seja

$$\overline{\xi_{\alpha}(t)} = 0, \quad (3.75a)$$

$$\overline{\xi_{\alpha}(t)\xi_{\beta}(t_1)} = \overline{\xi_{\alpha}^*(t)\xi_{\beta}^*(t_1)} = 0, \quad (3.75b)$$

$$\overline{\xi_{\alpha}^*(t)\xi_{\beta}(t_1)} \equiv \chi_{\alpha\beta}(t, t_1), \quad (3.75c)$$

para todo α, β e todo t e t_1 no intervalo de evolução. A última equação representa a função de correlação do ruído. Como o processo é Gaussiano, todas as correlações de ordem mais alta são nulas. Além disso, como o operador de ruído $V(t)$ é Hermitiano, segue que

$$\sum_{\alpha} \xi_{\alpha}(t) V_{\alpha} = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha}^*(t) V_{\alpha}^{\dagger} \quad (3.76)$$

A equação de von Neumann para este sistema é dada por

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i [H(t), \rho(t)], \quad (3.77)$$

cuja solução, em termos dos propagadores, é

$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0). \quad (3.78)$$

Reescrevendo a equação de von Neumann na representação de interação de forma análoga ao que fizemos nos casos anteriores, teremos

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}(t) = -i [\tilde{V}(t), \tilde{\rho}(t)], \quad (3.79)$$

onde $\tilde{O}$ é a o operador O escrito na representação de interação e $\tilde{V}(t) = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha}(t)\tilde{V}_{\alpha}$. A solução da equação acima é dada por

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{U}(t, t_0)\tilde{\rho}(t_0)\tilde{U}^\dagger(t, t_0), \quad (3.80)$$

com $\tilde{U}(t, t_0) = e^{iH_S t}U(t, t_0)e^{-iH_S t_0}$. Tomando então a média sobre todas as realizações estocásticas teremos

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \frac{d}{dt}\overline{\tilde{\rho}(t)} = -i [\overline{\tilde{V}(t)\tilde{\rho}(t)} - \overline{\tilde{\rho}(t)}\tilde{V}(t)]. \quad (3.81)$$

Para calcular os termos dentro dos colchetes usaremos o Teorema de Novikov. A média de um ruído $\xi(t)$ e um funcional $\mathcal{M}[\xi]$ é dada por

$$\overline{\xi(t)\mathcal{M}[\xi]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n C_{n+1}(t, t_1, \dots, t_n) \frac{\overline{\delta^n \mathcal{M}[\xi]}}{d\xi(t_1) \dots d\xi(t_n)}, \quad (3.82)$$

onde C_n são os cumulantes do ruído e o último termo é a n -ésima derivada funcional com respeito a ξ . Consideramos um caso especial do teorema de Novikov que se aplica a ruídos Gaussianos com valor médio nulo³⁷

$$\overline{\xi_{\alpha}(t)\mathcal{M}[\{\xi_{\gamma}(t)\}]} = \sum_{\beta} \int_{t_0}^t dt' \xi_{\alpha}(t)\xi_{\beta}^*(t') \frac{\overline{\delta \mathcal{M}[\{\xi_{\gamma}(t)\}]}{\delta \xi_{\beta}^*(t')}, \quad (3.83)$$

onde $\mathcal{M}$ é um funcional do conjunto de ruídos $\{\xi_{\gamma}(t)\}$ do qual ξ_{α} faz parte e a soma do lado direito da equação é realizada sobre este conjunto. Usando as equações (3.76) e

(3.83) teremos, após alguma álgebra

$$\overline{\tilde{V}(t)\tilde{\rho}(t)} = \sum_{\alpha,\beta} \int_{t_0}^t dt' \chi_{\alpha\beta}(t, t') \tilde{V}_\alpha^\dagger(t) \frac{\overline{\delta\tilde{\rho}(t)}}{\delta\xi_\beta(t')}, \quad (3.84a)$$

$$\overline{\tilde{\rho}(t)\tilde{V}(t)} = \sum_{\alpha,\beta} \int_{t_0}^t dt' \chi_{\alpha\beta}(t, t') \frac{\overline{\delta\tilde{\rho}(t)}}{\delta\xi_\beta(t')} \tilde{V}_\alpha^\dagger(t), \quad (3.84b)$$

de forma que a equação mestra ficará

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = -i \sum_{\alpha,\beta} \int_{t_0}^t dt' \chi_{\alpha\beta}(t, t') \left[\tilde{V}_\alpha^\dagger(t), \frac{\overline{\delta\tilde{\rho}(t)}}{\delta\xi_\beta(t')} \right]. \quad (3.85)$$

Para calcularmos a derivada funcional, vamos primeiro integrar a equação (3.79), obtendo assim

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(0) - i \int_{t_0}^t d\tau \left[\tilde{V}(\tau), \tilde{\rho}(\tau) \right]. \quad (3.86)$$

Agora, tomando a derivada funcional com respeito a $\xi_\beta(t')$ com $t_0 < t' < t$,

$$\frac{\delta\tilde{\rho}(t)}{\delta\xi_\beta(t')} = \frac{\delta\tilde{\rho}(t_0)}{\delta\xi_\beta(t')} - i \int_{t_0}^t d\tau \left\{ \left[\frac{\delta\tilde{V}(\tau)}{\delta\xi_\beta(t')}, \tilde{\rho}(\tau) \right] + \left[\tilde{V}(\tau), \frac{\delta\tilde{\rho}(\tau)}{\delta\xi_\beta(t')} \right] \right\}, \quad (3.87)$$

onde utilizamos a regra da cadeia para derivadas funcionais. Se assumirmos que o estado inicial $\rho(t_0)$ é descorrelacionado com o ruído o primeiro termo do lado direito desta equação se anula. Analogamente $\tilde{\rho}(\tau)$ não pode ser afetado pelo ruído $\xi_\beta(\tau')$ quando $\tau < t'$ e, dessa forma, o limite de integração inferior para o terceiro termo do lado direito é t' . Para o segundo termo, usando o fato que

$$\frac{\delta\xi_\alpha(\tau)}{\delta\xi_\beta(t')} = \delta_{\alpha\beta}\delta(\tau - t'), \quad (3.88)$$

teremos

$$\frac{\delta\tilde{V}(\tau)}{\delta\xi_\beta(t')} = \sum_{\alpha} \left(\frac{\delta\xi_\alpha(\tau)}{\delta\xi_\beta(t')} \right) \tilde{V}_\alpha(\tau) = \tilde{V}_\beta(\tau)\delta(\tau - t'). \quad (3.89)$$

Com os resultados acima a equação da derivada funcional ficará

$$\begin{aligned} \frac{\delta\tilde{\rho}(t)}{\delta\xi_\beta(t')} &= -i \int_{t_0}^t d\tau \delta(\tau - t') \left[\tilde{V}_\beta(\tau), \tilde{\rho}(\tau) \right] - i \int_{t'}^t d\tau \left[\tilde{V}(\tau), \frac{\delta\tilde{\rho}(\tau)}{\delta\xi_\beta(t')} \right] \\ &= -i \left[\tilde{V}_\beta(t'), \tilde{\rho}(t') \right] - i \int_{t'}^t d\tau \left[\tilde{V}(\tau), \frac{\delta\tilde{\rho}(\tau)}{\delta\xi_\beta(t')} \right]. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Notando que quando $t' = t$ ficamos com

$$\frac{\delta \tilde{\rho}(t')}{\delta \xi_\beta(t')} = -i \left[\tilde{V}_\beta(t'), \tilde{\rho}(t') \right], \quad (3.91)$$

que corresponde a condição inicial.

Tomando então a derivada temporal desta equação, ficamos com

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \tilde{\rho}(t)}{\delta \xi_\beta(t')} = -i \left[\tilde{V}(t), \frac{\delta \tilde{\rho}(t)}{\delta \xi_\beta(t')} \right], \quad (3.92)$$

cujas soluções podem ser escritas como

$$\frac{\delta \tilde{\rho}(t)}{\delta \xi_\beta(t')} = \tilde{U}(t, t') \frac{\delta \tilde{\rho}(t')}{\delta \xi_\beta(t')} \tilde{U}^\dagger(t, t') = -i \tilde{U}(t, t') \left[\tilde{V}_\beta(t'), \tilde{\rho}(t') \right] \tilde{U}^\dagger(t, t'), \quad (3.93)$$

onde usamos a condição (3.91). Do fato que os operadores $\tilde{U}(t, t')$ são unitários, podemos reescrever $\tilde{\rho}(t')$ em termos de $\tilde{\rho}(t)$ com

$$\tilde{\rho}(t') = \tilde{U}^\dagger(t, t') \tilde{\rho}(t) \tilde{U}(t, t'), \quad (3.94)$$

e a equação (3.93) pode ser reescrita como

$$\frac{\delta \tilde{\rho}(t)}{\delta \xi_\beta(t')} = -i \left[\tilde{U}(t, t') \tilde{V}_\beta(t') \tilde{U}^\dagger(t, t'), \tilde{\rho}(t) \right]. \quad (3.95)$$

Com uma fórmula para a derivada funcional a equação mestra (3.85) pode finalmente ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = - \sum_{\alpha, \beta} \int_{t_0}^t dt' \chi_{\alpha\beta}(t, t') \left[\tilde{V}_\alpha^\dagger(t), \overline{\left[\tilde{U}(t, t') \tilde{V}_\beta(t') \tilde{U}^\dagger(t, t'), \tilde{\rho}(t) \right]} \right]. \quad (3.96)$$

Podemos reescrever esta equação de forma similar a equação mestra de Lindblad com algumas simplificações. Primeiro, notando que $\tilde{U}(t, t') = \mathbb{I}$, ao assumirmos um acoplamento fraco podemos levar em conta apenas a contribuição de ordem zero dos operadores de evolução, ou seja, $\tilde{U}(t, t') \approx \mathbb{I}$ ³⁷

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) &= - \sum_{\alpha, \beta} \int_{t_0}^t dt' \chi_{\alpha\beta}(t, t') \left[\tilde{V}_\alpha(t) \overline{\left[\tilde{V}_\beta(t'), \tilde{\rho}(t) \right]} \right] \\ &= - \sum_{\alpha, \beta} \int_{t_0}^t dt' \chi_{\alpha\beta}(t, t') \left[\tilde{V}_\alpha(t) \left[\tilde{V}_\beta(t'), \tilde{\rho}_S(t) \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Rearranjando os termos dentro dos comutadores, ficamos com

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) &= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\int_{t_0}^t dt'\chi_{\alpha\beta}(t,t')\left[\left[\tilde{V}_\alpha^\dagger(t),\tilde{V}_\beta(t')\right],\tilde{\rho}_S(t)\right] \\
&+ \sum_{\alpha,\beta}\int_{t_0}^t dt'\chi_{\alpha\beta}(t,t')\left[\tilde{V}_\beta(t')\tilde{\rho}_S(t)\tilde{V}_\alpha^\dagger(t)-\frac{1}{2}\left\{\tilde{V}_\alpha^\dagger(t)\tilde{V}_\beta(t'),\tilde{\rho}_S(t)\right\}\right] \\
&+ \sum_{\alpha,\beta}\int_{t_0}^t dt'\chi_{\alpha\beta}(t,t')\left[\tilde{V}_\alpha^\dagger(t)\tilde{\rho}_S(t)\tilde{V}_\beta(t')-\frac{1}{2}\left\{\tilde{V}_\beta(t')\tilde{V}_\alpha^\dagger(t),\tilde{\rho}_S(t)\right\}\right] \quad (3.98)
\end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito da equação ainda pode ser reescrito como

$$-i[H_{ef}(t),\tilde{\rho}_S(t)], \quad (3.99)$$

onde

$$H_{ef}(t) = -\frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta}\int_{t_0}^t dt'\chi_{\alpha\beta}\left[\tilde{V}_\alpha^\dagger(t),\tilde{V}_\beta(t')\right], \quad (3.100)$$

é chamado de Hamiltoniano efetivo. Podemos verificar que

$$\begin{aligned}
H_{ef}^\dagger(t) &= \frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta}\int_{t_0}^t dt'\chi_{\alpha\beta}(t',t)\left[\tilde{V}_\beta^\dagger(t'),\tilde{V}_\alpha(t)\right] \\
&= -\frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta}\int_{t_0}^t \chi_{\alpha\beta}(t',t)\left[\tilde{V}_\alpha(t),\tilde{V}_\beta^\dagger(t')\right] \\
&= -\frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta}\int_{t_0}^t \chi_{\alpha\beta}(t,t')\left[\tilde{V}_\alpha^\dagger(t),\tilde{V}_\beta(t')\right] = H_{ef}(t), \quad (3.101)
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que para cada α existe um β tal que $V_\alpha^\dagger = V_\beta$ e $\xi_\alpha^* = \xi_\beta$, e

$$\overline{\xi_\beta(t)\xi_\alpha^*(t')} = \overline{\xi_\alpha^*(t')\xi_\beta(t)} = \chi_{\alpha\beta}(t',t). \quad (3.102)$$

Podemos usar esta última relação no terceiro termo da equação mestra, ficando com

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) &= -i[H_{ef}(t),\tilde{\rho}_S(t)] \\
&= \sum_{\alpha,\beta}\int_{t_0}^t dt'\chi_{\alpha\beta}(t,t')\left[\tilde{V}_\beta(t')\tilde{\rho}_S(t)\tilde{V}_\alpha^\dagger(t)-\frac{1}{2}\left\{\tilde{V}_\alpha^\dagger(t)\tilde{V}_\beta(t'),\tilde{\rho}_S(t)\right\}\right] \\
&= \sum_{\alpha,\beta}\int_{t_0}^t dt'\chi_{\alpha\beta}(t,t')\left[\tilde{V}_\beta(t)\tilde{\rho}_S(t)\tilde{V}_\alpha^\dagger(t')-\frac{1}{2}\left\{\tilde{V}_\alpha^\dagger(t')\tilde{V}_\beta(t),\tilde{\rho}_S(t)\right\}\right] \quad (3.103)
\end{aligned}$$

De forma similar ao que fizemos para o caso do banho bosônico, podemos consi-

derar que o sistema possui um espectro discreto, dessa forma escrevermos

$$\tilde{V}_\beta(t) = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} V_\beta(\omega), \quad (3.104a)$$

$$\tilde{V}_\alpha^\dagger(t) = \sum_{\omega'} e^{i\omega' t} V_\alpha^\dagger(\omega'). \quad (3.104b)$$

Além disso usando a substituição $t' = t - \tau$ e a aproximação de onda girante, onde apenas os termos com $\omega = \omega'$ são considerados, encontramos finalmente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = & -i [H_{ef}(t), \tilde{\rho}_S(t)] \\ & + \sum_{\alpha, \beta, \omega} \eta_{\alpha\beta\omega}(t) \left[V_\beta(\omega) \tilde{\rho}_S(t) V_\alpha^\dagger(\omega) - \frac{1}{2} \{ V_\alpha^\dagger(\omega) V_\beta(\omega), \tilde{\rho}_S(t) \} \right] \end{aligned} \quad (3.105)$$

onde as taxas de decaimento são dadas por

$$\eta_{\alpha\beta\omega}(t) \equiv \int_{t_0}^t d\tau (\chi_{\alpha\beta}(t, t - \tau) e^{i\omega\tau} + \chi_{\alpha\beta}(t - \tau, t) e^{-i\omega\tau}). \quad (3.106)$$

Para escrevermos a equação (3.105) na representação de Schrödinger basta fazermos $\tilde{\rho}_S(t) \rightarrow \rho_S(t)$ e adicionarmos o termo $-i [H_S, \rho_S(t)]$ no lado direito. Entretanto, como nos casos anteriores, estamos interessados apenas em estudar a dinâmica da interação do sistema com o campo estocástico, de forma que apenas o último termo da equação será relevante para nossas análises.

Atenuação de Amplitude

Vamos agora encontrar a equação de evolução de um q-bit sob ação de um bombardeamento estocástico externo com frequência ω . O Hamiltoniano total pode ser escrito como

$$H(t) = H_S + V(t) = \frac{\omega_0}{2} \sigma_3 + i (e^{-i\omega t} u(t) \sigma_+ - e^{i\omega t} u^*(t) \sigma_-) \quad (3.107)$$

onde ω_0 é a frequência natural do sistema e $u(t)$, $u^*(t)$ são ruídos Gaussianos com valor médio nula. O termo do ruído é

$$V(t) = ie^{-i\omega t} u(t) \sigma_+ - ie^{i\omega t} u^*(t) \sigma_- = \xi_1(t) V_1 + \xi_2(t) V_2. \quad (3.108)$$

Na representação de interação esta equação é reescrita como

$$\tilde{V}(t) = \xi_1(t) e^{i\omega_0 t} \sigma_+ + \xi_2(t) e^{-i\omega_0 t} \sigma_- = \xi_1(t) \tilde{V}_1(t) + \xi_2(t) \tilde{V}_2(t). \quad (3.109)$$

Olhando então para as equações (3.104) identificamos: $V_1(-\omega_0) = \sigma_+$, $V_1(\omega_0) = 0$, $V_2(\omega_0) = \sigma_-$ e $V_2(-\omega_0) = 0$. Assim os únicos termos que não se anulam são aqueles com $(\alpha, \beta, \omega) = (1, 1, -\omega_0)$ e $(\alpha, \beta, \omega) = (2, 2, \omega_0)$. As funções de correlação dos ruídos ficarão então

$$\chi_{11}(t, t') = \overline{\xi_1^*(t)\xi_1(t')} = e^{i\omega(t-t')}\overline{u^*(t)u(t')} \quad (3.110a)$$

$$\chi_{22}(t, t') = \overline{\xi_2^*(t)\xi_2(t')} = e^{-i\omega(t-t')}\overline{u(t)u^*(t')}. \quad (3.110b)$$

Assumindo que as correlações são homogêneas no tempo temos $\overline{u^*(t)u(t')} = \overline{u(t)u^*(t')} \equiv \mathcal{S}(\tau)$ onde $\tau = t - t'$. Assim, as taxas de decaimento ficarão

$$\begin{aligned} \eta_{1,1,-\omega_0}(t) &= \int_0^t d\tau (\chi_{11}(\tau)e^{-i\omega_0\tau} + \chi_{11}(-\tau)e^{i\omega_0\tau}) \\ &= \int_0^t d\tau \mathcal{S}(\tau) (e^{i\omega\tau}e^{-i\omega_0\tau} + e^{-i\omega\tau}e^{i\omega_0\tau}) \\ &= 2 \int_0^t d\tau \mathcal{S}(\tau) \cos(\Delta\omega\tau) \equiv \eta(t) \end{aligned} \quad (3.111)$$

onde $\Delta\omega = \omega - \omega_0$. De maneira similar temos

$$\begin{aligned} \eta_{2,2,\omega_0}(t) &= \int_0^t d\tau \mathcal{S}(\tau) (e^{-i\omega\tau}e^{i\omega_0\tau} + e^{i\omega\tau}e^{-i\omega_0\tau}) \\ &= 2 \int_0^t d\tau \mathcal{S}(\tau) \cos(\Delta\omega\tau) \equiv \eta(t). \end{aligned} \quad (3.112)$$

Finalmente, levando em conta apenas o termo de interação, a equação mestra para a atenuação de amplitude fica

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S(t) &= \eta(t) \left[\sigma_- \rho_S(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \{ \sigma_+ \sigma_-, \rho_S(t) \} \right] \\ &\quad + \eta(t) \left[\sigma_+ \rho_S(t) \sigma_- - \frac{1}{2} \{ \sigma_- \sigma_+, \rho_S(t) \} \right]. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Com isso, encerramos as derivações necessárias para entender as equações que usaremos em nosso trabalho.

Capítulo 4

Resultados I: Termometria na presença de ruídos clássicos

Utilizaremos para este trabalho um modelo simples que consiste em um sistema de dois níveis (um q-bit) $\mathcal{S}$ em contato com um reservatório bosônico $\mathcal{B}$ e sob efeito de um bombeamento estocástico externo. O sistema é utilizado como um termômetro, onde podemos efetuar medidas de energia para estimar a temperatura do reservatório. Em todos os cálculos assumimos $k_B = 1$ e $\hbar = 1$.

Considerando que o q-bit evolui sob efeito de uma atenuação de amplitude advinda tanto do reservatório bosônico quanto do bombeamento externo, a evolução temporal do estado $\rho(t)$ de $\mathcal{S}$ é uma combinação das equações (3.48) e (3.113)

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \gamma_1 \left[\sigma_+ \rho(t) \sigma_- - \frac{1}{2} \{ \sigma_- \sigma_+, \rho(t) \} \right] + \gamma_2 \left[\sigma_- \rho(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \{ \sigma_+ \sigma_-, \rho(t) \} \right] \quad (4.1)$$

onde omitimos o índice S da matriz densidade reduzida. Nesta equação as taxas de decaimento são $\gamma_1(t) = \gamma N(\omega_0) + \eta(t)$ e $\gamma_2 = \gamma + \gamma_1(t)$, sendo $N(\omega_0) = (e^{\omega_0/T} - 1)^{-1}$ o número de estados do reservatório bosônico no modo ω_0 e $\eta(t)$ é a taxa de decaimento devido ao bombeamento estocástico externo. Note que, como já mencionado previamente, levaremos em conta apenas os termos de interação do q-bit com o reservatório e com o bombeamento, de forma que possamos comparar nossos resultados mais facilmente com os da literatura.³⁰ Podemos reescrever o estado de $\mathcal{S}$ na representação de Bloch, ou seja, $\rho(t) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{n}(t) \cdot \vec{\sigma})$, com $\vec{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), n_3(t))$, de forma que a equação (4.1) se reduz a um sistema de equações das componentes do vetor de Bloch $\vec{n}(t)$:

$$\dot{n}_1 = -\frac{1}{2}(\gamma_1(t) + \gamma_2(t))n_1(t) \quad (4.2a)$$

$$\dot{n}_2 = -\frac{1}{2}(\gamma_1(t) + \gamma_2(t))n_2(t) \quad (4.2b)$$

$$\dot{n}_3 = -(\gamma_1(t) + \gamma_2(t))n_3(t) + (\gamma_1(t) - \gamma_2(t)). \quad (4.2c)$$

Para que possamos saber quão precisas são nossas estimativas, precisamos calcular a informação de Fisher Q_T referente a temperatura para $\mathcal{S}$. Conforme já foi discutido no Capítulo 2, quando utilizamos a representação de Bloch para descrever $\rho(t)$, a informação de Fisher pode ser reescrita como

$$Q_T = \sum_{j=1}^3 [\partial_T n_j(t)]^2 + \frac{n^2(t)}{1 - n^2(t)} [\partial_T n(t)]^2. \quad (4.3)$$

e é limitada inferiormente por

$$Q_T \geq Q_L \equiv \frac{(\partial_T n_3(t))^2}{1 - n_3(t)^2} \quad (4.4)$$

cuja saturação indica que as medidas de energia passam a ser as medidas ótimas para se fazer estimativas da temperatura. Devemos notar que em todos os casos explorados nesta tese a informação de Fisher Q_T será dependente da própria temperatura que desejamos estimar, o que está de acordo com o esperado pela teoria que expusemos anteriormente referente a estimação de parâmetros em sistemas abertos.

4.1 Análise preliminar: Sistema e Reservatório

Vamos primeiro analisar como a informação de Fisher se comporta na ausência do bombeamento estocástico. Para isto, fixamos a temperatura do banho e variamos os valores do estado inicial de $\mathcal{S}$, $\rho_0 = 1/2(\mathbb{I} + \vec{n}(0) \cdot \vec{\sigma})$.

O vetor de Bloch pode ser reescrito em termos das coordenadas esféricas, isto é, $\vec{n}(t) = r(t)(\sin \theta(t) \cos \phi(t), \sin \theta(t) \sin \phi(t), \cos \theta(t))$. Fixamos então $r(0) = 1$ de forma que o estado inicial sempre seja puro. Além disso escolhemos $\phi(0) = 0$, pois, como pode ser verificado analiticamente, a equação (4.3) independe de $\phi(t)$, e dessa forma o estado inicial se modifica apenas com variações no ângulo polar $\theta(0)$.

Para nossa análise, fixamos a temperatura em $T = 2\omega_0$, onde ω_0 é a frequência natural do sistema $\mathcal{S}$, e assumimos $\eta(t) = 0$ nas taxas de decaimento. Os gráficos numéricos da figura (4.1) mostram a relação entre os lados esquerdo (Q_T) e direito (Q_L) de (4.4). Em acordo com trabalhos prévios ^{ref} podemos perceber que Q_T alcança valores maiores

Figura 4.1 – Gráficos para a informação de Fisher Q_T (linha preta sólida) e a quantidade Q_L (tracejado em vermelho) que determina a precisão do procedimento de estimação baseado em medidas diretas de energia no sistema $\mathcal{S}$. Em todos os gráficos o estado $\rho(0)$ de $\mathcal{S}$ é puro, com ângulo azimutal nulo e com ângulo polar dado por (a) $\theta(0) = 0$; (b) $\theta(0) = \pi/4$; (c) $\theta(0) = \pi/2$; e (d) $\theta(0) = \pi$. A temperatura T é dada por $2\omega_0$ e $\gamma = 1$. Note que quando o sistema é preparado em um estado diagonal ($\theta(0) = 0$ e $\theta(0) = \pi$), a desigualdade (4.4) é saturada e ambas as curvas coincidem.

Fonte: Elaborada pelo autor.

(correspondendo a uma melhor precisão) para valores finitos de t . Além disso, vemos que os resultados mais precisos são obtidos quando o estado inicial é o estado fundamental ($\theta_0 = \pi$). Os gráficos também mostram que para $\theta_0 = 0$ e $\theta_0 = \pi$, ambos estados iniciais diagonais, ocorre a saturação da desigualdade (4.4), enquanto que para outros estados iniciais isto só seria possível para $t \rightarrow \infty$ uma vez que o sistema entra em equilíbrio térmico assintoticamente.

4.2 Ruídos Estocásticos

Baseando-nos no trabalho realizado por Costa-Filho et. al,⁴⁰ aplicamos dois diferentes tipos de bombeamentos estocásticos em nosso sistema $\mathcal{S}$: o ruído de Ornstein-

Ullenhbeck (exponencial) e um ruído gaussiano. As análises realizadas em ambos os casos seguem os moldes das apresentadas na seção anterior para o caso sem ruído.

4.2.1 Ruído Exponencial

O ruído exponencial é dado por

$$S(t) = \frac{\Omega}{2\tau_c} e^{-t/\tau_c} \quad (4.5)$$

onde Ω é a amplitude do ruído e τ_c é o tempo de correlação.

Sabendo a forma do ruído podemos calcular $\eta(t)$, definido por

$$\eta(t) = 2 \int_0^t d\tau S(\tau) \cos(\Delta\omega\tau). \quad (4.6)$$

Esta função possui mínimo global em $\Delta\omega\tau_c = 8,5$ então usamos $\Delta\omega = 1$ e $\tau_c = 8,5$. Dessa forma a amplitude Ω se torna então o único parâmetro livre.

No trabalho no qual nos baseamos, Costa-Filho et.al., focaram em explorar efeitos da não-Markovianidade RHP para a energia do sistema estudado. Com isso em mente, para encontrar os valores dos parâmetros do bombeamento estocástico, foi preciso encontrar o valor de Ω que torna $\gamma_1(t)$ negativo. Para o caso em que $N(\omega_0) = 0,05$, um valor típico para experimentos com ions aprisionados, encontra-se $\gamma_1(t)$ nulo quando $\Omega = 0,91$. Os gráficos para os coeficientes $\eta(t)$ e $\gamma_1(t)$ podem ser vistos na figura (4.2). A amplitude do bombeamento também pode ser fixada e pode se analisar a situação para duas temperaturas diferentes, uma no regime Markoviano, $T = 0,5\omega_0$ e outro não-Markoviano $T = 0,1\omega_0$. As taxas de decaimento $\gamma_1(t)$ para estas temperaturas também podem ser vistas na figura (4.2).

Iremos agora calcular a informação de Fisher utilizando os valores dos parâmetros escolhidos acima. Como queremos usar nosso q-bit como um termômetro e ao mesmo tempo explorar a não-Markovianidade, utilizaremos dois valores de temperatura para verificar a precisão de nossas estimativas: $T = 0,3\omega_0$ em regime não-Markoviano e $T = 2\omega_0$ em regime Markoviano.

Figura 4.2 – Taxas de decaimento $\eta(t)$ e $\gamma_1(t)$ como funções do tempo usando o bombeamento exponencial para três temperaturas diferentes: $T = 0, 10\omega_0$ (linha preta sólida), $T = 0, 33\omega_0$ (curva tracejada vermelha) e $T = 0, 50\omega_0$ (linha laranja sólida). Todas as curvas usam: $\Delta\omega = 1$, $\tau_c = 8,5$, $\Omega = 0,91$ e $\gamma = 1$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

T=0,3ω₀

Resolvendo as equações (4.2a) a (4.2c), levando em conta a presença do ruído estocástico, e substituindo os valores encontrados das componentes de $\vec{n}(t)$ na equação (4.3), podemos construir gráficos similares aos da seção anterior para o caso sem ruído.

A figura 4.3 mostra os resultados numéricos obtidos variando-se o estado inicial de forma análoga ao caso sem ruído. Primeiro devemos notar que em ambos os casos a informação de Fisher atinge valores maiores que para o caso de $T = 2\omega_0$, além disso como no caso anterior o estado fundamental $\theta_0 = \pi$ se mostra superior aos demais. Segundo, um resultado similar ao caso sem ruído se faz presente com relação a saturação da desigualdade (4.4), ou seja, estados iniciais diagonais saturam (4.4) para qualquer t , mas isto não é verdade para outros estados. Entretanto, devemos notar que para $\Omega \neq 0$, apesar das curvas de Q_L e Q_T coincidirem, o equilíbrio do sistema ainda não foi atingido, o que implica que a presença do ruído está retardando a decoerência, permitindo que sejam feitas estimativas da temperatura antes que $\mathcal{S}$ entre em equilíbrio com $\mathcal{B}$ e com o ruído.

Ainda mais notável é a presença de um ponto de máximo global que emerge para $t \approx 5,5s$. Este máximo, cuja amplitude é aproximadamente cinco vezes maior que a informação de Fisher quando $\Omega = 0$, é definido pelos parâmetros do bombeamento e pelo estado inicial $\rho(0)$. Além disso o instante em que este máximo ocorre coincide com o período da oscilação da pureza de $\rho(t)$ devido a presença do bombeamento externo. O gráfico (4.4) mostra a evolução da pureza do sistema com e sem o ruído. A pureza do

Figura 4.3 – Gráficos para a informação de Fisher Q_T sem ruído (linha preta sólida) e Q_{TExp} com ruído exponencial (linha azul sólida) e as quantidades Q_L (tracejado em vermelho) e Q_{LExp} (tracejado em laranja) que determinam a precisão do procedimento de estimação baseado em medidas diretas de energia no sistema $\mathcal{S}$. Em todos os gráficos o estado $\rho(0)$ de $\mathcal{S}$ é puro, com ângulo azimutal nulo e com ângulo polar dado por (a) $\theta(0) = 0$; (b) $\theta(0) = \pi/4$; (c) $\theta(0) = \pi/2$; e (d) $\theta(0) = \pi$. Todas as curvas usam: $T = 0,3\omega_0$, $\Delta\omega = 1$, $\tau_c = 8,5$ e $\gamma = 1$. Neste caso a evolução do sistema é dominada pela influência do ruído externo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.4 – Gráfico da evolução da pureza do sistema com (linha azul sólida) e sem (linha vermelha sólida) bombeamento estocástico exponencial. Os tracejados cinza e preto representam o estado de equilíbrio ($\rho(t \rightarrow \infty)$) com e sem o bombeamento, respectivamente. Vemos que na presença do campo estocástico a pureza retorna a valores muito próximos de 1 em $t \approx 5,5$, que coincide com o t do máximo global de Q_T . Os parâmetros utilizados foram: $\Omega = 0.91$, $\tau = 8.5$, $\Delta\omega = 1$, $\gamma = 1$, $\theta_0 = \pi$ e $T = 0.3\omega_0$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

estado $\rho(t)$ completa seu primeiro período em $t \approx 5,5s$, chegando novamente a valores muito próximos de 1 para $T < 0.3\omega_0$. Devemos ressaltar que estamos lidando também com um caso limíte do modelo utilizado, pois, para $T \leq 0.28\omega_0$, a pureza atinge valores maiores que 1 que não possuem sentido físico e por conta disso não serão explorados.

O comportamento geral da informação de Fisher nesta situação evidencia que o bombeamento externo exerce maior influência na evolução de $\mathcal{S}$. Em princípio poderíamos analisar como este comportamento mudaria caso alterássemos o valor de Ω , entretanto, isto não será explorado no presente trabalho pois é necessário que mantenhamos o bombeamento estocástico de nosso modelo num regime de interação fraca e que ainda atenda as condições para surgimento da não-Markovianidade RHP.

T=2 ω_0

Iremos agora repetir os mesmos procedimentos para $T = 2\omega_0$.

Com o aumento da temperatura, a influência do reservatório bosônico na evolução do q-bit também aumenta. Como consequência disto, os valores da informação de Fisher para este caso são menores do que para $T = 0,3\omega_0$, conforme podemos ver nas figura

Figura 4.5 – Gráficos para a informação de Fisher Q_T sem ruído (linha preta sólida) e Q_{TExp} com ruído exponencial (linha azul sólida) e as quantidades Q_L (tracejado em vermelho) e Q_{LExp} (tracejado em laranja) que determinam a precisão do procedimento de estimação baseado em medidas diretas de energia no sistema $\mathcal{S}$. Em todos os gráficos o estado $\rho(0)$ de $\mathcal{S}$ é puro, com ângulo azimutal nulo e com ângulo polar dado por (a) $\theta(0) = 0$; (b) $\theta(0) = \pi/4$; (c) $\theta(0) = \pi/2$; e (d) $\theta(0) = \pi$. Todas as curvas usam: $T = 0,3\omega_0$, $\Delta\omega = 1$, $\tau_c = 8,5$ e $\gamma = 1$. Neste caso a evolução do sistema é dominada pela influência do reservatório bosônico.

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.5, pois se aproximam do caso sem bombeamento externo. O comportamento das curvas para cada estado inicial se mantém com ou sem presença de ruído e o estado fundamental $\theta_0 = \pi$ continua se mantendo aquele com os maiores valores para a informação de Fisher.

4.2.2 Ruído Gaussiano

O ruído gaussiano possui a forma

$$S = \frac{\Omega}{\tau_c \sqrt{\pi}} e^{-(t/\tau_c)^2}. \quad (4.7)$$

De forma análoga ao caso exponencial, podemos minimizar $\eta(t)$ com $\Delta\omega = 1$ e $\tau_c = 8.5$ e anular $\gamma_1(t)$ com $\Omega = 0.47$.

T=0,3 ω_0

Na figura 4.6 temos os resultados numéricos para a presença do ruído gaussiano em baixas temperaturas. Apesar do comportamento similar ao ruído exponencial, vemos que a informação de Fisher para o ruído gaussiano possui máximo global com valor superior ao caso anterior.

Para o melhor caso, com $\theta_0 = \pi$, temos em $t \approx 5,5s$ uma informação de Fisher quase dez vezes maior que o caso sem bombeamento. Para temperaturas baixas o ruído gaussiano também apresenta outra característica interessante: o estado de equilíbrio ($\rho(t \rightarrow \infty)$) para os casos com e sem a presença de ruído é o mesmo, o estado de Gibbs $\rho_{Gibbs}(T)$ com $T = 0,3\omega_0$. Isto pode ser verificado numericamente utilizando-se tempos suficientemente grandes e a distância traço $T(\rho, \sigma) = \frac{1}{2}\text{Tr} \left[\sqrt{(\rho - \sigma)^\dagger (\rho - \sigma)} \right]$ dos estados de equilíbrio para ambos os casos. A distância traço é uma medida de distinguibilidade entre estados e quanto mais próximo de zero mais difícil é distinguir os estados entre si. No nosso caso encontramos $T(\rho_{bomb}^{(eq)}, \rho_{Gibbs}) \propto 10^{-8}$, que podemos considerar nulo para este trabalho.

T=2 ω_0

Para temperaturas mais altas, vemos novamente a evolução do q-bit ser dominada pela interação com o reservatório térmico, resultando nos gráficos da figura 4.7 muito similares ao caso do ruído exponencial.

Assim, a presença do campo estocástico, em ambos os regimes Markoviano e não-Markoviano, retarda o efeito da decoerência no sistema conforme podemos ver na figura 4.4, permitindo que possamos realizar estimativas da temperatura enquanto o q-bit se mantém fora do equilíbrio com o banho térmico. Além disso, para baixas temperaturas, onde os termos do campo estocástico prevalecem, verificamos a possibilidade de conseguirmos valores maiores da informação de Fisher, possibilitando estimativas melhores até que o caso em altas temperaturas, onde a predominância dos efeitos do banho térmico no sistema.

Figura 4.6 – Gráficos para a informação de Fisher Q_T sem ruído (linha preta sólida) e Q_{TGauss} com ruído gaussiano (linha azul sólida) e as quantidades Q_L (tracejado em vermelho) e Q_{LGauss} (tracejado em laranja) que determinam a precisão do procedimento de estimação baseado em medidas diretas de energia no sistema $\mathcal{S}$. Em todos os gráficos o estado $\rho(0)$ de $\mathcal{S}$ é puro, com ângulo azimutal nulo e com ângulo polar dado por (a) $\theta(0) = 0$; (b) $\theta(0) = \pi/4$; (c) $\theta(0) = \pi/2$; e (d) $\theta(0) = \pi$. Todas as curvas usam: $T = 0,3\omega_0$, $\Delta\omega = 1$, $\tau_c = 8,5$ e $\gamma = 1$. Neste caso a evolução do sistema é dominada pela influência do ruído externo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.7 – Gráficos para a informação de Fisher Q_T sem ruído (linha preta sólida) e Q_{TGauss} com ruído gaussiano (linha azul sólida) e as quantidades Q_L (tracejado em vermelho) e Q_{LGauss} (tracejado em laranja) que determinam a precisão do procedimento de estimação baseado em medidas diretas de energia no sistema $\mathcal{S}$. Em todos os gráficos o estado $\rho(0)$ de $\mathcal{S}$ é puro, com ângulo azimutal nulo e com ângulo polar dado por (a) $\theta(0) = 0$; (b) $\theta(0) = \pi/4$; (c) $\theta(0) = \pi/2$; e (d) $\theta(0) = \pi$. Todas as curvas usam: $T = 2\omega_0$, $\Delta\omega = 1$, $\tau_c = 8,5$ e $\gamma = 1$. Neste caso a evolução do sistema é dominada pela influência do reservatório bosônico.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Capítulo 5

Resultados II: Termometria em sistemas quânticos não estacionários

Neste capítulo utilizaremos um q-bit $\mathcal{S}$ fracamente acoplado a um reservatório bosônico $\mathcal{B}$ sob efeito de um atenuamento de amplitude. De forma similar ao capítulo anterior, submetemos o q-bit a outra influência externa: assumimos que $\mathcal{S}$ está em um regime não-estacionário, ou seja, a frequência do sistema agora oscila no tempo, levando a um efeito de proteção do estado do q-bit, aumentando assim o tempo de decoerência e, inevitavelmente, afetando a informação de Fisher e o limite de precisão para estimativas da temperatura do sistema.

5.1 O Modelo

Conforme discutimos no Capítulo 3, podemos descrever a evolução de um sistema aberto sujeito a atenuação de amplitude através da representação do operador-soma utilizando para isso os seguintes operadores de Kraus²⁰

$$E_0^a = \sqrt{\gamma_T} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-a(t)} \end{bmatrix} \quad (5.1a)$$

$$E_1^a = \sqrt{\gamma_T} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{a(t)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1b)$$

$$E_2^a = \sqrt{1-\gamma_T} \begin{bmatrix} \sqrt{1-a(t)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1c)$$

$$E_3^a = \sqrt{1 - \gamma_T} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{a(t)} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1d)$$

onde as informações sobre a modulação da frequência do sistema estão contida em $a(t)$, $\gamma_T = e^{-E/T}/(1 + e^{-E/T})$ é o fator de Boltzmann e E é a diferença de energia entre os dois níveis do q-bit. Assim o estado final do sistema pode ser escrito $\rho(t) = \sum_{k=0}^3 E_k \rho(0) E_k^\dagger$:

$$\begin{bmatrix} \rho_{11}(t) & \rho_{12}(t) \\ \rho_{21}(t) & \rho_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_T a(t) + (1 - a(t))(1 - \rho_{11}(0)) & \sqrt{1 - a(t)} \rho_{12}(0) \\ \sqrt{1 - a(t)} \rho_{21}(0) & (1 - \gamma_T) a(t) + (1 - a(t)) \rho_{11}(0) \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Derivando a matriz densidade acima no tempo encontraremos um sistema de quatro equações diferenciais que, por construção, deverão ser equivalentes as equações geradas pela equação mestra para a atenuação de amplitude. Após alguma manipulação algébrica encontraremos

$$a(t) = 1 - e^{-\int_0^t T_1(\tau)^{-1} d\tau}, \quad (5.3)$$

onde vemos que os formalismos de Redfield, da equação mestra e representação do operador-soma se conectam através deste termo de decaimento.

5.1.1 Controle de Coerência

No artigo de Céleri et. al. foi proposto um método de proteção de estado para um modo de cavidade cuja frequência modulada $\omega(t)$ foi gerada através de uma interação átomo-campo.⁴¹ Para isso foi utilizado o formalismo da equação mestra assumindo uma taxa de decaimento proporcional a

$$\frac{\xi^2}{[\omega(t) - \nu]^2 + \xi} \quad (5.4)$$

com ν sendo a frequência contínua do ambiente e o parâmetro ξ contribuindo para o formato Lorentziano do acoplamento ao redor da frequência $\omega(t)$.

A modulação da frequência é dada por

$$\omega(t) = \omega_0 + \chi \sin \zeta t \quad (5.5)$$

sendo ω_0 a frequência estática do modo de cavidade. A condição $\zeta/\omega_0 \ll 1$, facilmente

obtida em experimentos de RMN e de eletrodinâmica quântica de cavidade, define a modulação adiabática da frequência. Fora deste regime, quando $\zeta \gtrsim \omega_0$, entramos num regime similar ao Efeito Casimir,⁴² onde o mecanismo de decoerência do modo de cavidade é completamente distinto do discutido aqui.

Uma vez válida a condição $\zeta/\omega_0 \ll 1$, o controle do processo de decoerência é alcançado por meio de dois parâmetros

$$\eta \equiv \frac{\Gamma_0}{\zeta}, \quad (5.6)$$

$$\varepsilon \equiv \frac{\xi}{\chi} \sim \frac{\Gamma_0}{\chi}, \quad (5.7)$$

onde Γ_0 é a taxa de decaimento natural do modo e foi assumindo que $\xi \sim \Gamma_0$. Na referência também foi demonstrado que ocorre atenuação da decoerência quando ambos os parâmetros são menores que a unidade. Isto pode ser percebido através da dependência temporal da taxa de decaimento, que se torna mais fraca conforme um ou ambos os parâmetros η e ε diminuem.

Diogo et. al. aplicaram as mesmas idéias propostas por Celeri para um q-bit, mas levando em conta o formalismo de Redfield conforme apresentado no Capítulo 3.³⁶ As mesmas conclusões para o modo de cavidade valem para o q-bit, mas sem a necessidade de se impor uma forma específica para o acoplamento sistema-banho, uma vez que uma taxa de decaimento Lorentziana e dependente do tempo surge automaticamente do formalismo de Redfield aplicado a sistemas de RMN.⁴³

O q-bit $\mathcal{S}$, interagindo com o reservatório que gera a atenuação de amplitude, pode ser descrito pelo Hamiltoniano $H_S(t) = \omega_L(t)I_z$ com $\omega_L(t) = \omega_0 + \chi \sin(\zeta t)$. A taxa efetiva de decaimento para a atenuação de amplitude é dada por

$$D(t) = \int_0^t d\tau T_1(\tau)^{-1} \quad (5.8)$$

com $T_1(t)$ definido pela equação (3.67). Assim, para que a decoerência seja evitada é necessário que façamos $T_1(t)$ assumir valores maiores que o caso estático T_1^0 (equivalente a Γ_0^{-1} para o caso do modo de cavidade). Se considerarmos um ambiente isotrópico e homogêneo, através das equações (3.59), (3.67) e (5.5) encontraremos a seguinte expressão para D

$$D(\tau) = 2(\gamma_n \lambda T_1^0)^2 \int_0^\tau d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \exp\left(-T_1^0 \frac{\tau_1}{\tau_0}\right) \cos\left[T_1^0 \omega_L \tau_1 + 2\frac{\chi}{\zeta} \sin^2\left(2\frac{\tau_1}{\eta}\right)\right] \quad (5.9)$$

na qual realizamos a mudança de variável $\tau = t/T_1^0$ e $\eta = (T_1^0\zeta)^{-1}$ onde T_1^0 é o valor estático de $T_1(t)$. O fator giromagnético γ_n e flutuação estocástica da rede na direção q , $\lambda \equiv \lambda_q$, são definidos na equação (3.57).

5.2 Efeito do controle de coerência na informação de Fisher.

Podemos escrever o estado do q-bit em termos do vetor de Bloch, cujas componentes podem ser encontradas através dos elementos da matriz densidade $\rho(t)$ dada pela equação (5.2), como

$$n_1(t) = \rho_{21}(t) + \rho_{12}(t) = r(0)e^{-D(t)/2} \cos \phi(0) \sin \theta(0) \quad (5.10a)$$

$$n_2(t) = -i(\rho_{21}(t) - \rho_{12}(t)) = r(0)e^{-D(t)/2} \sin \phi(0) \sin \theta(0) \quad (5.10b)$$

$$\begin{aligned} n_3(t) &= 2\rho_{11}(t) - 1 \\ &= r(0) \cos \theta(0) - (1 - e^{-D(t)}) \left[r \cos \theta(0) + \tanh \left(\frac{\omega_L}{2T} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.10c)$$

e a informação de Fisher para estimativas da temperatura pode ser calculada através da equação (2.27). Definimos então diferentes estados iniciais e fixamos a temperatura em $T = 2\omega_0$ a fim de comparar nossos resultados com o presente na literatura.

Como já fizemos no capítulo anterior, assumimos um estado inicial puro $r(0) = 1$, com ângulo azimutal $\phi(0)$ nulo e ângulo polar inicial $\theta(0)$ variando.

A figura 5.1 mostra o efeito de diferentes valores de η e χ/ζ no parâmetro $a(\tau)$ onde utilizamos as equações (5.9) e (5.3) para nossos cálculos numéricos. Podemos ver que a taxa de decaimento para o caso estacionário $\chi = 0$, a curva azul do gráfico, é atenuada quando o parâmetro de controle η diminui ou quando a razão χ/ζ aumenta. As outras três curvas preta, vermelha e cinza correspondem aos pares de parâmetros $(\eta = 0, 1, \chi/\zeta = 1)$, $(\eta = 10^{-2}, \chi/\zeta = 10)$ e $(\eta = 10^{-3}, \chi/\zeta = 10)$. A partir disso podemos ver que χ (a amplitude da modulação) é mais relevante que ζ (a frequência da modulação) no processo do controle de coerência.

Na figura 5.2 temos os resultados numéricos da informação de Fisher Q_T em função do parâmetro adimensional τ para quatro diferentes estados iniciais, com $\theta(0)$ assumindo os valores $0, \pi/4, \pi/2$ e π . Utilizamos os mesmos pares de valores para η e χ do gráfico da função de decaimento 5.1.

Figura 5.1 – Gráfico da função de decaimento $a(\tau)$ para alguns valores dos parâmetros de controle η e χ/ζ . A linha azul representa o caso sem controle de coerência, ou seja, quando $\chi = 0$. As outras três linhas mostram o efeito do controle efetivo no processo de relaxamento devido a modulação da frequência.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Conforme η diminui e χ aumenta as curvas para Q_T se deslocam no sentido positivo do eixo τ , evidenciando que quanto mais prolongado é o período fora do equilíbrio maior nosso tempo tendo acesso a melhores valores de precisão para termometria. Para ($\eta = 10^{-3}, \chi/\zeta = 10$) obtemos os efeitos mais notáveis.

Em todas as curvas ocorre um deslocamento e alargamento no eixo τ tal que quando $\theta(0) = \pi/2$ a largura do pico de máximo é quase 7 vezes maior que no caso em que não há modulação da frequência. Mantendo o padrão dos gráficos apresentados no capítulo 4, vemos que $\theta(0) = \pi$ ainda apresenta os valores mais altos para Q_T , entretanto não há efeito tão acentuado no alargamento do pico de máximo.

De um ponto de vista teórico, na presença do controle de coerência gerado pela modulação da frequência de um q-bit, um estado não diagonal ($\theta(0) = \pi/2$) apresenta vantagens para extrairmos estimativas da temperatura de um reservatório pois teríamos uma janela de tempo maior para realizarmos estimativas para um regime fora do equilíbrio. Entretanto, do ponto de vista prático, as coisas se complicariam pois, conforme discutimos no capítulo anterior, a informação de Fisher para estados não diagonais não coincide com o limite inferior de estimativas advindas de medidas de energia do sistema, o que implica que seria necessário construir um outro estimador ótimo, algo que foge do escopo deste trabalho.

Figura 5.2 – Gráficos para a informação de Fisher Q_T para diferentes parâmetros de oscilação do estado não estacionário e configurações iniciais. Em todos os gráficos o estado $\rho(0)$ de $\mathcal{S}$ é puro, com ângulo azimutal nulo e com ângulo polar dado por (a) $\theta(0) = 0$; (b) $\theta(0) = \pi/4$; (c) $\theta(0) = \pi/2$; e (d) $\theta(0) = \pi$. Todas as curvas usam $T = 2\omega_0$, $\omega_0 = 10^3$, $\gamma_n = 10^3$, $\lambda = 1$, $T_1^0 = 1$ e $\tau_0 = 10^{-3}$. Em todos os gráficos é notável, principalmente para $\chi/\zeta = 10$ e $\eta = 10^{-3}$ (linha cinza), um retardamento na decoerência do sistema, de forma a transladar e alargar as curvas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Capítulo 6

Conclusões

Apresentamos aqui duas possibilidades de se aprimorar a termometria fora do equilíbrio. Para isso focamos em um sistema de spin $1/2$, um q-bit, em contato com um reservatório térmico e adicionamos a este conjunto uma terceira influência externa: um campo estocástico e a modulação da frequência do q-bit através de um outro campo externo. Esta abordagem se diferencia do que vem sendo feito na literatura atual onde há um grande foco em se explorar sistemas com vários q-bits, usando artifícios como emaranhamento para otimizar as estimativas.

No primeiro caso utilizamos diferentes estados iniciais a fim de explorar como isto influenciaria a informação de Fisher e, em acordo com outros trabalhos, verificamos que simples medidas de energia seriam suficientes para estimar de maneira ótima a temperatura do reservatório para estados iniciais diagonais.

Ao aplicarmos o campo estocástico no sistema este padrão se manteve mas notamos que, para regimes de baixas temperaturas ($\sim 0.3\omega_0$), a informação de Fisher assumiu valores muito maiores que o caso em equilíbrio. Isto era esperado de resultados anteriores da literatura, entretanto, em nosso sistema verificamos que o valor da informação de Fisher poderia a princípio ser tão grande quanto se queira para certas combinações valores dos parâmetros do campo estocástico e da temperatura.

Dessa forma é necessário cautela com relação a mudanças dos valores dos parâmetros, pois no regime de baixas temperaturas estamos trabalhando próximos ao limite físico do modelo utilizado: para temperaturas inferiores a $\sim 0.28\omega_0$ a pureza da matriz densidade passou a assumir valores maiores que a unidade, algo que não possui significado físico. Por conta disso nos restringimos aos valores apresentados no trabalho de Inácio et. al. Uma desvantagem clara do sistema estudado é que, em comparação ao regime de altas

temperaturas ($\sim 2\omega_0$) é necessário esperar um tempo maior para se efetivar as medidas, o que pode ser uma complicação para implementação experimental.

Na segunda parte do trabalho exploramos como o controle de coerência gerado pela modulação da frequência do q-bit poderia influenciar as estimativas de temperatura. Para o caso particular do q-bit utilizamos o formalismo de Redfield, que é equivalente a equação mestra, que simplifica a derivação da amplitude efetiva de decaimento, quantidade necessária para os nossos cálculos.

Diferente do caso anterior, não houve otimização dos valores da informação de Fisher mas, em contrapartida, o tempo em que o sistema se mantém fora do equilíbrio foi prolongado, o que permite que estimativas da temperatura possam ser feitas com melhor precisão numa janela de tempo maior. Essa janela de tempo se mostrou maior para o caso em que o ângulo polar inicial é $\theta(0) = \pi/2$, o que corresponde a um estado não diagonal.

Apesar de ser um resultado interessante isto gera uma complicação para implementação experimental pois seria necessário criar um novo estimador ótimo, uma vez que não poderíamos mais usar a energia como medida para extrair a temperatura. Apesar disso, o caso em que $\theta(0) = \pi$, que permite a utilização da energia como estimador, ainda possui uma janela de tempo atrativa o suficiente para ser explorada em um possível experimento.

Referências

- 1 FISHER, R.A. Theory of statistical estimation. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 22, n. 5, p.700-725, 1925.
- 2 GIOVANETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Quantum metrology. **Physical Review Letters**, v. 96, n. 1, p. 010401, 2006.
- 3 GIOVANETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Advances in quantum metrology. **Nature Photonics**, v. 5, p. 222, 2011. DOI; 10.1038/nphoton.2011.35.
- 4 SCHNABEL, R. *et al.* Quantum metrology for gravitational wave astronomy. **Nature Communications**, v. 1, n. 121, 2010. DOI: 10.1038/ncomms1122.
- 5 ABBOTT, B.P. *et al.*, Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Physical Review Letters**, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- 6 HELSTROM, C.W. Minimum mean-squared error of estimates in quantum statistics. **Physics Letters A**, v. 25, n. 2, p.101-102, 1967.
- 7 HELSTROM, C.W.; KENNEDY, R.S. Noncommuting observables in quantum detection and estimation theory. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 20, n. 1, p. 16-24, 1974.
- 8 YUEN, H.; LAX, M. Multiple-parameter quantum estimation and measurement of nonselfadjoint observables. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 19, n. 6, p. 740-750, 1973.
- 9 BRAUNSTEIN, S.L.; CAVES, M.C. Statistical distance and the geometry of quantum states. **Physical Review Letters**, v. 72, n. 3, p. 3439, 1994.
- 10 BRAUNSTEIN, S.L.; CAVES, M.C.; MILBURN, G. Generalized uncertainty relations: theory, examples, and Lorentz invariance. **Annals of Physics**, v. 247, n. 1, p. 135-137, 1996.
- 11 RAO, C.R. **Linear statistical inference and its applications**. New York: Wiley, 1973.
- 12 CRAMÉR, H. **Mathematical methods of statistics**. Princeton: Princeton University Press, 1946.
- 13 BOLFARINI, H.; SANDOVAL, M.C. **Introdução a inferência estatística**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

- 14 KAY, S.M. **Fundamentals of statistical signal processing: estimation theory**. New Jersey: Prentice Hall, 1993.
- 15 HELSTROM, C.W. **Quantum detection and estimation theory**. New York: Academic Press, 1976.
- 16 FRIEDEN, B.R. **Science from Fisher information**. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- 17 CASELLA, G.; BERGER, R.L. **Inferência estatística**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.
- 18 MAGALHÃES, M.N. ; DE LIMA, A.C.P. **Noções de probabilidade e estatística**. São Paulo: EDUSP, 2015.
- 19 FELLER, W. **An introduction to probability theory and its applications**. New York: Wiley New & Son, 1967.
- 20 NIELSEN, M.; CHUANG, I. **Quantum computation and quantum information**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- 21 LANDI, G.T. **Quantum information and quantum noise**(notas de aula). Disponível em: <http://www.fmt.if.usp.br/~gtlandi/lecture-notes-2.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2019.
- 22 PARIS, M.G.A. Quantum estimation for quantum technology. **International Journal of Quantum Information**, v. 7, p. 125-137, 2009. DOI: 10.1142/S0219749909004839.
- 23 LANDAU, L.D.; LIFSHITZ, E.M. **Statistical physics: part I**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1980.
- 24 DI CASTRO, C.; RAIMONDI, R. **Statistical mechanics and applications in condensed matter**. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.
- 25 FALCIONI, M. *et al.* Estimate of temperature and its uncertainty in small systems. **American Journal of Physics**, v. 79, n. 7, p. 777, 2011.
- 26 PUGLISI, A.; SARRACINO, A.; VULPIANI, A. Temperature in and out of equilibrium: a review of concepts, tools and attempts. **Physics Reports**, v. 709-710, p. 1-60, 2017. DOI: 10.1016/j.physrep.2017.09.001.
- 27 CORREA, L.A. *et al.* Individual quantum probes for optimal thermometry. **Physical Review Letters**, v. 114, n. 2, p. 220405, 2015.
- 28 ZANARDI, P.; GIORDA, P.; COZZINI, M. Information-Theoretic differential geometry of quantum phase transitions. **Physical Review Letters**, v. 99, n.1, p. 100603, 2007.
- 29 ZANARDI, P.; PARIS, M.G.A.; VENUTI, L.C. Quantum criticality as a resource for quantum estimation. **Physical Review A**, v. 78, n. 4, p. 042105, 2008.
- 30 CAVINA, V. *et al.* Bridging thermodynamics and metrology in nonequilibrium quantum thermometry. **Physical Review A**, v. 98, n. 5, p. 050101 (R), 2018.

-
- 31 TOMÉ, T.; OLIVEIRA, M.J. **Dinâmica estocástica e irreversibilidade**. São Paulo: EDUSP, 2001.
- 32 SALINAS, S. **Introdução à física estatística**. São Paulo: EDUSP, 2005.
- 33 DAVIES, E. B. **Quantum theory of open systems**. Academic Press, 1976.
- 34 BREUER, H.P.; PETRUCCIONE, F. **The theory of open quantum systems**. New York: Oxford University Press, 2002.
- 35 RIVAS, A.; HUELGA, S.F. **Open quantum systems**. Berlin: Springer, 2012.
- 36 SOARES-PINTO, D.O. *et al.* Equivalence between Redfield- and master-equation approaches for a time-dependent quantum system and coherence control, **Physical Review A**, v. 83, n. 6, p. 062336, 2011.
- 37 BUDINI, A.A. Quantum systems subject to the action of classical stochastic fields. **Physical Review A**, v. 64, n. 5, p. 052110, 2001.
- 38 JAMES, D. F. Theory of heating of the quantum ground state of trapped ions. **Physical Review Letters**, v. 81, n. 2, p. 317, 1998.
- 39 CARMICHAEL, H. **An open system approach to quantum optics**. Berlin: Springer, 1993.
- 40 COSTA-FILHO, J.I. *et al.* Enabling quantum non-Markovian dynamics by injection of classical colored noise. **Physical Review A**, v. 95, n. 5, p. 052126, 2017.
- 41 CÉLERI, L.C.*et al.* Switching off the reservoir through nonstationary quantum systems. **Journal of Physics B: atomic, molecular and optical physics**, v. 41 ,n. 8, p. 085504, 2008.
- 42 CÉLERI, L.C.*et al.* Number of particle creation and decoherence in the nonideal dynamical Casimir effect at finite temperature. **Annals of Physics**, v. 324 , n. 10, p. 2057-2073, 2009.
- 43 SLICHTER, C.P. **Principles of magnetic ressonance**. Berlin: Springer, 1990.