UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

RAFAEL GUOLO DIAS

FORMULAÇÕES ALTERNATIVAS DA
RELATIVIDADE GERAL: DA
GEOMETRODINÂMICA À ESTRUTURA DE
GAUGE DE ASHTEKAR-BARBERO

SÃO CARLOS

2011

RAFAEL GUOLO DIAS

FORMULAÇÕES ALTERNATIVAS DA
RELATIVIDADE GERAL: DA
GEOMETRODINÂMICA À ESTRUTURA DE
GAUGE DE ASHTEKAR-BARBERO

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Física do Instituto de
Física de São Carlos da Universidade de
São Paulo para obtenção do título de
Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica.
Orientador: Daniel Augusto Turolla
Vanzella.

VERSÃO CORRIGIDA

(versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

SÃO CARLOS

2011

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação IFSC/USP

Dias, Rafael Guolo

Formulações alternativas da relatividade geral: da geometrodinâmica à estrutura de Gauge de Ashtekar-Barbero./ Rafael Guolo Dias; orientador Daniel Augusto Turolla Vanzella.– versão corrigida – São Carlos, 2011.

182p.

Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Ciências. Área de concentração: Física Básica) Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo.

1. Relatividade geral. 2. Teorias de Gauge. 3. Ashtekar.
4. Fibrados. 5. Conexões. I. Título

Lado dedicado à folha de aprovação. Apagar isso antes de imprimir a versão oficial

*Dedico aos mestres e familiares que
guiaram meus passos até aqui.*

AGRADECIMENTOS

Um trabalho, mesmo que individual, nunca é realizado sozinho. Dentre todos os amigos que me suportaram nessa empreitada, gostaria de fazer um agradecimento especial para:

- FAPESP, pelo suporte ao projeto;
- Daniel Vanzella, Denise de Mattos e Edivaldo Lopes dos Santos, por toda as orientações que culminaram nesse resultado ao longo dos anos de mestrado e iniciação científica, pela paciência e mesmo às vezes pela falta dela nos momentos necessários;
- Gabriel Luchini e Renato Bettiol, pelas elucidações nos momentos de “escuridão teórica” e também por todo o material fornecido e que foi de muita utilidade;
- Willian Lima pela participação nas reuniões e as muitas conversas na sala durante o trabalho;
- Tiago Bueno de Moraes, Willian Trevisan e João Luiz Bunoro, companheiros diários do “café? - passa aqui”, que nos salvaram a todos de enlouquecer com nossos trabalhos;
- Thiago Mosqueiro, por me ensinar LaTeX;
- Diva Rubim, pelas longas conversas sobre o passado/presente/futuro que me permitiram me estruturar e me organizar durante o caminho;
- Joseana “MacGyver”, que convocou “sessões metal” e fez com que eu ainda tivesse vida social, e Fabiano Fidêncio, por me mostrar o quão pequeno é o mundo e que podemos viver nele e também nos divertir.
- Os amigos de Rio Claro que alegraram os finais de semana;
- Minha família, que me educou e sempre me amparou quando era preciso;
- Deus, acima de tudo e por tudo.

"A ciência em seu todo nada mais é que um refinamento do pensamento comum. É por essa razão que não é possível restringir o pensamento do físico ao exame dos conceitos de seu próprio campo específico. Ele não pode avançar sem considerar criticamente um problema muito mais difícil, o de analisar a natureza do pensamento humano." (Albert Einstein)

RESUMO

DIAS, R. G. *Formulações Alternativas da Relatividade Geral: da geometrodinâmica à estrutura de gauge de Ashtekar-Barbero*. 2011. 172 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

Desenvolvemos aqui um estudo das formulações alternativas-equivalentes da Relatividade Geral, baseada no formalismo de conexões de Ashtekar. Iniciamos discutindo a estrutura matemática necessária de fibrados e conexões, e a teoria de sistemas Hamiltonianos vinculados. Em seguida, damos uma breve introdução ao formalismo métrico de Einstein e então passamos ao formalismo geometrodinâmico canônico (formalismo ADM). Introduzimos as transformações no espaço de fase que geram as formulações alternativas, de forma generalizada tal que possamos obter ambas as variáveis complexas de Ashtekar ou as variáveis reais de Barbero, ou mesmo qualquer forma intermediária por meio do parâmetro de Immirzzi.

Palavras-chave: Relatividade Geral. Teorias de Gauge. Ashtekar. Fibrados. Conexões.

ABSTRACT

DIAS, R. G. *Alternative Formulations of General Relativity: from geometrodynamics to Ashtekar-Barbero's gauge structure*. 2011. 172 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

We develop here a study of the alternative-equivalent formulations of General Relativity, based on Ashtekar's connexion formalism. We begin discussing the mathematical structure needed of fibre bundles and connexions, and the theory of constrained Hamiltonian systems. Next, we give a brief introduction for Einstein's metric formalism and then we pass to the canonical geometrodynamical formalism (ADM formalism). We introduce the transformations of the phase space which generate the alternative formulations, in a generalized form such that we can obtain both Ashtekar's complex variables or Barbero's real variables, or even any intermediary form by using the Immirzi parameter.

Keywords: General Relativity. Gauge Theories. Ashtekar. Fibre Bundles. Connexions.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	p. 21
1 Fibrados e Conexões	p. 23
1.1 Fibrados	p. 23
1.1.1 Aplicações entre fibrados	p. 25
1.1.2 Fibrados Vetoriais	p. 27
1.1.3 Fibrados Principais	p. 31
1.1.4 Fibrados Associados	p. 34
1.2 Conexões em Fibrados Principais	p. 36
1.2.1 Forma Conectora Local e Potencial de <i>gauge</i>	p. 39
1.2.2 Levantamento Horizontal e Transporte Paralelo	p. 41
1.2.3 Holonomias	p. 45
1.2.4 Curvatura	p. 46
1.3 A Derivada Covariante em Fibrados Vetoriais Associados	p. 51
1.3.1 Expressão Local para a Derivada Covariante	p. 52
1.3.2 Curvatura Rederivada	p. 55
2 Sistemas Hamiltonianos com Vínculos	p. 57
2.1 Invariância de <i>Gauge</i> e Vínculos	p. 57
2.1.1 Lagrangeano e Vínculos Primários	p. 57

2.1.2	Hamiltoniano Canônico	p. 59
2.1.3	Vínculos secundários	p. 61
2.2	Vínculos de Primeira e Segunda-classe	p. 63
2.2.1	Transformações de <i>gauge</i>	p. 63
2.2.2	Hamiltoniano estendido	p. 64
2.2.3	Colchete de Dirac	p. 65
2.3	Fixação de <i>Gauge</i> e Invariantes	p. 67
2.4	Geometria da Superfície de Vínculo	p. 68
2.4.1	Geometria do espaço de fase (geometria simplética)	p. 69
3	Eletrodinâmica Associada a um $U(1)$-Fibrado	p. 77
3.1	Eletromagnetismo Clássico	p. 77
3.1.1	Equações de Maxwell	p. 78
3.1.2	Hamiltoniano	p. 80
3.2	Campo Escalar	p. 82
4	Relatividade Geral	p. 85
4.1	Bases da Teoria	p. 85
4.2	A Equação da Geodésica no Limite Newtoniano	p. 87
4.3	A Equação de Einstein	p. 88
4.4	Princípio Variacional	p. 91
4.4.1	Ação de Einstein-Hilbert	p. 91
4.4.2	Variação de Einstein-Palatini	p. 92
5	Formulação ADM	p. 95
5.1	Decomposição $3 + 1$	p. 95
5.2	Formas Espaciais	p. 97
5.2.1	Derivada covariante	p. 98

5.2.2	Curvatura	p. 99
5.3	<i>Pullback</i> para σ	p. 101
5.4	Hamiltoniano	p. 103
5.5	Estrutura simplética	p. 105
5.5.1	Vínculos	p. 106
5.6	Geometria das Transformações de <i>Gauge</i>	p. 107
5.6.1	Trajetórias de q_{ab}	p. 108
5.6.2	Trajetórias de P^{ab}	p. 109
5.6.3	Relação Entre $\text{Diff}(M)$ e as Transformações dos Vínculos	p. 116
6	Variáveis de Ashtekar	p. 119
6.1	<i>D-beins</i> e curvatura extrínseca	p. 119
6.2	Funções no espaço estendido	p. 121
6.2.1	Estrutura Simplética	p. 122
6.2.2	Vínculo de Rotação	p. 124
6.3	Nova Conexão	p. 125
6.3.1	Resumo Histórico	p. 125
6.3.2	Transformação Canônica	p. 126
6.3.3	Condições de Realidade	p. 129
6.3.4	Interpretação Quadri-dimensional	p. 130
6.4	Vínculos	p. 132
6.5	$\beta = \pm i$: Formulação de Ashtekar	p. 134
6.5.1	Ação Auto-dual	p. 134
6.5.2	De tríadas para espinores $SU(2)$	p. 136
6.5.3	Vínculos	p. 138
6.5.4	Discussão	p. 138
6.6	β real: Formulação de Barbero	p. 139

CONCLUSÃO	p. 141
REFERÊNCIAS	p. 143
APÊNDICE A – Elementos de Geometria Riemanniana	p. 147
A.1 Revisão de Tensores e Variedades	p. 147
A.1.1 Variedades	p. 147
A.1.2 Tensores	p. 149
A.1.3 Aplicações Induzidas	p. 152
A.2 Métricas Riemannianas e Pseudo-Riemannianas	p. 153
A.2.1 Métricas Riemannianas	p. 153
A.2.2 Métricas Pseudo-Riemannianas	p. 155
A.3 Conexões Lineares e Derivada Covariante	p. 156
A.3.1 Geodésicas	p. 158
A.4 Curvatura	p. 160
APÊNDICE B – Grupos de Lie	p. 165
APÊNDICE C – Invariância por Difeomorfismos e Observáveis	p. 171
C.1 Invariância por Difeomorfismos Passiva e Ativa	p. 171
C.2 O Argumento do Buraco	p. 172
C.3 Interpretação Física do Espaço	p. 174
APÊNDICE D – Formalismo de Palatini em Tetradas	p. 177
APÊNDICE E – Modificação de Holst na ação de Einstein-Palatini	p. 181

INTRODUÇÃO

Tratamos neste trabalho de uma revisão das formulações hamiltonianas da Relatividade Geral em termos das variáveis desenvolvidas por Ashtekar^{1,2} e suas variantes apresentadas por Barbero e Immirzi³⁻⁵. Tais formulações surgem num contexto da busca de uma teoria quântica da gravitação, haja visto que a teoria da Relatividade Geral, proposta por Albert Einstein em 1915 para descrever a gravidade (vide, por exemplo,⁶), sobrevive como sendo a única teoria clássica de uma “interação fundamental” cujo sucesso não foi (ainda) suplantado pelo de uma versão quântica.

Uma das principais dificuldades na unificação da Relatividade Geral com a Mecânica Quântica é a incompatibilidade das duas teorias no que concerne à questão da interpretação do tempo⁷. Em mecânica quântica, o tempo é uma variável independente, parâmetro da evolução dinâmica do sistema quântico pela equação de Schrödinger. Em Relatividade Geral, o tempo é tratado a par com as três dimensões espaciais, compondo a variedade do espaço-tempo quadridimensional. A métrica de fundo dessa variedade compõe a geometria do espaço-tempo e é a variável dinâmica: dessa geometria que surgem os efeitos da gravidade.

Podemos distinguir espaço e tempo através de folheações do espaço-tempo, em que hipersuperfícies são de tipo espaço se seus vetores tangentes apontam nas direções espaciais, e o tempo é encarado como a direção ortogonal a essas hipersuperfícies. Todavia, em geral inúmeras folheações diferentes são possíveis a um mesmo espaço-tempo e nenhuma é preferencial em relação às outras. Mais ainda, quando considerada a escala de Planck (a escala em que se espera que os efeitos quânticos da gravidade se revelem), esperar-se-ia que a geometria do espaço-tempo estivesse sujeita aos efeitos do princípio da incerteza de Heisenberg, e o tensor métrico estaria então sujeito a flutuações nas componentes, o que não permitiria a definição de um cone de luz e portanto das separações tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz. Assim, o caráter geometrodinâmico da Relatividade Geral se impõe como uma barreira às técnicas usuais de quantização a essa teoria.

É conveniente, portanto, reformular a Relatividade Geral de modo que a teoria não seja

dependente de uma métrica de fundo. E isso é possível graças às ferramentas proporcionadas pela teoria matemática dos fibrados (veja⁸). Podemos, dessa forma, transmitir o caráter dinâmico para conexões, em substituição à métrica.

Veremos, no entanto, que utilizar conexões como variáveis de uma teoria física é um procedimento também usado na descrição de teorias de *gauge*, e portanto aproximamos a Relatividade Geral das teorias que descrevem os outros princípios fundamentais da natureza. Com isso, encontramos uma motivação mesmo a nível clássico para a reformulação da gravitação em termos de conexões, e que portanto é uma motivação ainda mais fundamental que a primeira. Tal proximidade, ainda, sugere uma abordagem para a quantização, uma vez que teorias de gauge do tipo de Yang-Mills são bem sucedidas em suas versões quânticas.

Nosso trabalho pode bem ser dividido em duas partes. Nos capítulos iniciais tratamos da matemática dos fibrados e conexões (para isso, seguimos⁸⁻¹⁰) e o modo de se tratar sistemas Hamiltonianos que são sujeitos a vínculos¹¹. Dada essa estrutura preliminar, aplicamos os conceitos no tratamento do eletromagnetismo como teoria de gauge. Na segunda parte, podemos então iniciar a discussão da teoria da Relatividade Geral. Damos uma breve introdução à teoria de Einstein, seguindo^{6,12}. Discutimos o formalismo geometrodinâmico canônico (ou Hamiltoniano) desenvolvido por Arnowitt-Deser-Misner (ADM) e passamos por fim às transformações no espaço de fase que introduzirão as novas variáveis de uma forma geral, tomando como base o desenvolvimento em¹³. Dada a formulação geral, terminamos com uma discussão da formulação complexa de Ashtekar em termos de espinores (como em¹⁴) e as variantes reais introduzidas por Barbero, com uma breve análise de seus pontos positivos/negativos^{4,5,15}.

Fibrados e Conexões

O conceito de fibrados demonstra-se cada vez mais como uma ferramenta poderosa na construção de teorias físicas. Semelhante à definição de uma variedade, que localmente se assemelha a $\mathbb{R}^n$, um fibrado é localmente visto como a extensão de um espaço topológico pelo produto com outro, o que permite que sua estrutura manifeste-se desde exemplos simples como a relação entre um espaço de configurações (variedade) e seu respectivo espaço de fase (fibrado tangente) em mecânica clássica, até como base para o tratamento de teorias com liberdades de *gauge*.

1.1 Fibrados

Consideremos as variedades E , B e F e um grupo de Lie G . Vamos assumir que $G \times F \rightarrow F$ é uma ação efetiva à esquerda e $\pi : E \rightarrow B$ é uma submersão suave (i.e, π é uma aplicação suave tal que π_* é sobrejetora). Seja uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de B e suponhamos que existam difeomorfismos (**trivializações locais**) $\psi_\alpha : U_\alpha \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $\pi \circ \psi_\alpha = \pi_1$, onde $\pi_1(b, f) = b$;
- (ii) se $b \in U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ então $\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha(b, f) = (b, \theta_{\alpha\beta}(b)f)$, onde $\theta_{\alpha\beta}(b) \in G$ e $\theta_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ é suave.

Então a 7-upla $(E, \pi, B, F, G, \{U_\alpha\}, \{\psi_\alpha\})$ é chamada um **fibrado coordenado** e dois fibrados coordenados $(E, \pi, B, F, G, \{U_\alpha\}, \{\psi_\alpha\})$ e $(E, \pi, B, F, G, \{V_\beta\}, \{\phi_\beta\})$ serão equivalentes se $\phi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha(b, f) = (b, \tilde{\theta}_{\alpha\beta}(b)f)$, onde $\tilde{\theta}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap V_\beta \rightarrow G$ é suave.

Chamamos de **fibrado** uma classe de equivalência (E, π, B, F, G) de fibrados coordenados com respeito à relação de equivalência acima. E é denominado o **espaço total**, π a **projeção**, B o **espaço base**, F a **fibra** e G o **grupo de estrutura**. Também ψ_α é chamada a **função**

coordenada e $\theta_{\alpha\beta}$ a **função de transição**. Para cada $b \in B$, $\pi^{-1}(b)$ é chamado a **fibra sobre b** e é usualmente escrito como E_b (evidentemente, $E_b \simeq F$).

Figura 1.1– Fibrados coordenados.

Interpretando a definição, o espaço total E pode ser reconstituído “colando” produtos triviais $U_\alpha \times F$ de acordo com as funções de transição $\theta_{\alpha\beta}$, correspondentes da ação do grupo de estrutura na fibra. Mais precisamente, considere a reunião $\bigcup_\alpha U_\alpha \times F$. Sempre que $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, consideremos a relação de equivalência “ $\sim$ ” identificando $(x, f) \in U_\alpha \times F$ com $(x, \theta_{\alpha\beta}(b)f) \in U_\beta \times F$. Então o espaço quociente

$$\frac{\bigcup_\alpha U_\alpha \times F}{\sim}$$

corresponde a E e a projeção sobre o primeiro fator à projeção do fibrado. Um fibrado é dito **trivial** se for um produto direto $B \times F$.

A representação de um fibrado pode em alguns casos ter partes de sua estrutura omitidas, se essas forem evidentes pelo contexto. Assim, um fibrado pode em alguns casos ser representado apenas pela tripla (E, π, B) , ou até mesmo somente pelo espaço total E .

Uma **seção** de um fibrado (E, π, B, F, G) é uma aplicação $s : B \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = id_B$, onde id_B é a identidade em B . Em outras palavras, uma seção é uma aplicação $s : B \rightarrow E$ tal que $s(b) \in E_b$ para cada $b \in B$.

Figura 1.2– Uma seção s em $\pi^{-1}(U_\alpha)$.

1.1.1 Aplicações entre fibrados

Dados dois fibrados (E_1, π_1, B_1) e (E_2, π_2, B_2) , uma **aplicação de fibrados** é um par de aplicações contínuas $(\tilde{f}, f)$, $\tilde{f} : E_1 \rightarrow E_2$ e $f : B_1 \rightarrow B_2$, tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array} \quad (1.1.1)$$

isso é, $\pi_2 \circ \tilde{f} = f \circ \pi_1$. O diagrama acima implica precisamente que $\tilde{f}(\pi_1^{-1}(b)) \subset \pi_2^{-1}(f(b))$ para todo $b \in B_1$, ou seja, o par de aplicações $(\tilde{f}, f)$ preserva as fibras. Dois fibrados (E, π, B) e (E', π', B) são **equivalentes** se existe uma aplicação de fibrados $\tilde{f} : E' \rightarrow E$ tal que $f : B \rightarrow B$ é a identidade e $\tilde{f}$ é um difeomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{id_B} & B \end{array} \quad (1.1.2)$$

Figura 1.3– Uma aplicação entre fibrados.

Dado um fibrado (E, π, B) e uma aplicação $f : N \rightarrow B$, o par (E, f) define um novo fibrado sobre N com a mesma fibra F do anterior. O conjunto

$$f^*E \equiv \{(p, u) \in N \times E; f(p) = \pi(u)\} \quad (1.1.3)$$

é denominado o **pullback** de E por f . A fibra F_p de f^*E é uma cópia da fibra $F_{f(p)}$ de E , e se definimos $\pi_1 : f^*E \rightarrow N$ por $\pi_1(p, u) = p$ e $\pi_2 : f^*E \rightarrow E$ por $\pi_2(p, u) = u$, o pullback f^*E

pode ser munido com a estrutura de um fibrado e obtemos a seguinte aplicação de fibrados:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\pi_2} & E \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (1.1.4)$$

Figura 1.4– O pullback de E por f

Completamos a discussão sobre aplicações de fibrados mostrando uma maneira de verificar se um fibrado é trivial. Duas aplicações $f, g : X' \rightarrow X$ são ditas **homotópicas** se existe uma aplicação suave (denominada uma **homotopia**) $F : X' \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X'$. Um espaço X é **contrátil** se a aplicação $id_X : X \rightarrow X$ é homotópica a alguma aplicação constante $f_0 : X \rightarrow X$, $f_0(x) = x_0$ para todo $x \in X$ (para algum ponto $x_0 \in X$), isso é, existe $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ contínua tal que $F(x, 0) = id_X = x$ e $F(x, 1) = f_0(x) = x_0$, para todo $x \in X$.

Como um exemplo simples, podemos mostrar que $X = \mathbb{R}^n$ é contrátil à origem 0. Se definimos $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ por $H(x, t) = tx$, temos que $H(x, 0) = 0$ e $H(x, 1) = x$ para todo $x \in X$, o que demonstra a afirmação. Dessa forma, qualquer subespaço convexo de $\mathbb{R}^n$ é também contrátil.

A seguir, estabelecemos como utilizar os conceitos de homotopia para mostrar que um fibrado é trivial.

Teorema 1.1.1 *Seja (E, π, B, F) um fibrado e sejam f e g aplicações homotópicas de N para B . Então f^*E e g^*E são fibrados equivalentes sobre N .*

Omitiremos a demonstração, e nos concentraremos no decorrente corolário.

Corolário 1.1.2 *Seja (E, π, B) um fibrado. E é trivial se B é contrátil a um ponto.*

Demonstração. Seja B uma variedade contrátil a um ponto. Então existe uma homotopia $F : B \times [0, 1] \rightarrow B$ tal que

$$F(p, 0) = p, \quad F(p, 1) = p_0, \quad (1.1.5)$$

onde $p_0 \in B$ é um ponto fixo. Seja (E, π, B) um fibrado sobre B e considere os fibrados por pullback h_0^*E e h_1^*E , onde $h_t(p) = F(p, t)$. O fibrado h_1^*E é definido sobre um único ponto p_0 e portanto é um fibrado trivial, $h_1^*E \simeq \{p_0\} \times F$. Por outro lado, $h_0^*E = E$, uma vez que h_0 é a identidade. Entretanto, de acordo com o teorema anterior, h_0^*E e h_1^*E são equivalentes, então E é um fibrado trivial. $\square$

Trataremos a partir de agora da questão de como fibrados são classificados e como tipos diferentes podem ser construídos.

1.1.2 Fibrados Vetoriais

Um **fibrado vetorial n -dimensional** (ou **fibrado n -plano**) é um fibrado onde cada fibra é dotada com a estrutura de um espaço vetorial n -dimensional, de modo que a seguinte condição de trivialidade local é satisfeita: para cada $p \in B$, existe uma vizinhança U de p e um homeomorfismo $t : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ que é um isomorfismo de espaço vetorial para cada $\pi^{-1}(q)$ sobre $q \times \mathbb{R}^n$, de forma que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{t} & U \times \mathbb{R}^n \\ \pi \downarrow & \searrow \pi_1 & \\ U & & \end{array} \quad (1.1.6)$$

Consideramos então F como $\mathbb{R}^n$ e o grupo de estrutura como $GL(n, \mathbb{R})$, uma vez que espaços vetoriais são mapeados isomorficamente em espaços vetoriais de mesma dimensão. Se F for o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$, então o grupo de estrutura será $GL(n, \mathbb{C})$.

O exemplo mais simples de um fibrado n -plano é $B \times \mathbb{R}^n$, com $\pi : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B$ a projeção sobre o primeiro fator, e a estrutura óbvia de espaço vetorial em cada fibra. Esse é chamado o **fibrado n -plano trivial** sobre B e é denotado por $\mathcal{E}^n(B)$. Qualquer fibrado equivalente a $\mathcal{E}^n(B)$ também será dito **trivial**.

Um fibrado vetorial cuja fibra é unidimensional ($F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é denominado um **fibrado**

Figura 1.5—Condição de trivialidade local 1.1.6.

de linha, tal como o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$, que é um $\mathbb{R}$ -fibrado de linha trivial. Outro exemplo, a faixa de Möbius $\mathcal{M}$ pode ser considerada um fibrado vetorial 1-dimensional sobre S^1 , pois pode ser obtida de $[0, 1] \times \mathbb{R}$ pela identificação $(0, a) \sim (1, -a)$, enquanto S^1 é obtida identificando 0 a 1. A aplicação π é definida por $\pi(t, a) = t$ para $0 < t < 1$ e $\pi(\{(0, a), (1, -a)\}) = \{0, 1\}$. Suponha que $\mathcal{M}$ admita uma seção $s : S^1 \rightarrow \mathcal{M}$ contínua. Tal aplicação corresponde a uma função contínua $\bar{s} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ com $\bar{s}(0) = -\bar{s}(1)$. Para isso, $\bar{s}$ deve ser 0 em algum lugar, então a seção s deve também ser nula em algum lugar, ou seja, $s(\theta) \in \pi^{-1}(\theta)$ deve ser o vetor nulo para algum $\theta \in S^1$. Não podemos portanto simplesmente escrever $\mathcal{M}$ como um produto $S^1 \times \mathbb{R}$ (o que ocorreria no caso de um cilindro) pois ocorre a inversão da orientação da fibra. $\mathcal{M}$ então não é um fibrado trivial.

Figura 1.6—Faixa de Möbius.

Tratamos a seguir de alguns exemplos mais importantes de fibrados vetoriais.

Fibrado Tangente

É possível atribuir a cada n -variedade M um fibrado n -plano TM sobre M , denominado

o **fibrado tangente**, que consiste na coleção de todos os espaços tangentes em M :

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M. \quad (1.1.7)$$

Para cada aplicação suave $f : M \rightarrow N$ associa-se uma aplicação de fibrados (f_*, f) , de forma que f_* é a aplicação diferencial de f . Se $U \subset M$ é uma subvariedade aberta, então TU é equivalente a $TM|_U$, e para $f : M \rightarrow N$ a aplicação $(f|_U)_* : TU \rightarrow TN$ é a restrição de f_* .

Figura 1.7—Esboço do fibrado tangente a uma circunferência S^1 .

Seja $\{U_i\}$ uma cobertura aberta de M . Se $x^\mu = \varphi_i(p)$ é o sistema de coordenadas em U_i , um elemento de TU_i é especificado por um ponto $p \in U_i$ e um vetor $V = V^\mu(p)\partial_\mu|_p \in T_p M$. Se $u \in T(U_i \cap U_j)$, sendo $x^\mu = \varphi_i(p)$ e $y^\mu = \varphi_j(p)$ respectivamente os sistemas de coordenadas em U_i e U_j , o vetor V correspondendo a u será

$$V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p = \tilde{V}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} \Big|_p.$$

Vemos então que

$$\tilde{V}^\nu = \left(\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \right)_p V^\mu, \quad (1.1.8)$$

onde esperamos que a matriz $(G_\mu^\nu) \equiv (\partial y^\nu / \partial x^\mu)$ seja não singular, ou seja, $(G_\mu^\nu) \in GL(n, \mathbb{R})$. As trivializações locais são exibidas por

$$\psi_i^{-1}(u) = (p, \{V^\mu\}), \quad \psi_j^{-1}(u) = (p, \{\tilde{V}^\mu\}). \quad (1.1.9)$$

Para completar, seja X um campo vetorial em M . X designa um vetor $X|_p \in T_p M$ para cada ponto $p \in M$. Podemos definir X como uma seção de TM , pois X é visto como uma aplicação suave de $M \rightarrow TM$, e essa aplicação não é totalmente arbitraria uma vez que p deve ser aplicado em um ponto $u \in TM$ tal que $\pi(u) = p$.

Fibrado Dual

O **fibrado cotangente** $T^*M = \cup_{p \in M} T_p^*M$ é definido similarmente ao fibrado tangente. Dada uma carta U_i com coordenadas x^μ , a base de T_p^*M é tomada como $\{dx^1, \dots, dx^n\}$, que é dual a $\{\partial/\partial x^\mu\}$. Se $p \in U_i \cap U_j$, sendo y^μ as coordenadas de U_j , então uma 1-forma ω é expressa como

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \tilde{\omega}_\mu dy^\mu, \quad (1.1.10)$$

onde temos que

$$\tilde{\omega}_\mu = \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} \right)_p \omega_\nu = (G^{-1})^\nu_\mu(p) \omega_\nu. \quad (1.1.11)$$

Generalizando, dado um fibrado vetorial (E, π, M, F) , podemos definir seu **fibrado dual** (E^*, π', M, F^*) , em que a fibra F^* de E^* será o conjunto de aplicações lineares de F para $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Referenciais

No fibrado tangente TM , cada fibra possui uma base $\{\partial/\partial x^\mu\} = \{\partial_\mu\}$ dada pelo sistema de coordenadas x^μ em uma carta U_i . Da mesma forma, se M é munida de uma métrica g , podemos também empregar uma base ortonormal $\{e_\alpha(p)\} \in F_p$ para cada $p \in U_i$ de forma que resgatamos

$$g_{\alpha\beta}(p) = \langle e_\alpha(p), e_\beta(p) \rangle. \quad (1.1.12)$$

Ambos os conjuntos $\{\partial_\mu\}$ ou $\{e_\alpha\}$ formam, assim, campos vetoriais linearmente independentes sobre U_i .

Assim, seja (E, π, M) um fibrado vetorial com fibra $\mathbb{R}^k$ (ou $\mathbb{C}^k$). Em uma carta U_i , $\pi^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbb{R}^k$ (U_i é trivial), e podemos escolher k seções linearmente independentes $\{e_1(p), \dots, e_k(p)\}$ sobre U_i . Diz-se que essas seções definem um **referencial** sobre U_i .

Figura 1.8—Um referencial $\{e_1(p), \dots, e_k(p)\}$ sobre U_i .

Dado um referencial sobre U_i , temos uma aplicação natural $F_p \rightarrow F (= \mathbb{R}^k \text{ ou } \mathbb{C}^k)$ dada por

$$V = V^\alpha e_\alpha(p) \mapsto \{V^\alpha\} \in F. \quad (1.1.13)$$

A trivialização local é $\psi_i^{-1}(V) = (p, \{V^\alpha(p)\})$, onde, por definição, temos

$$\psi_i(p, \{0, \dots, 1_\alpha, 0, \dots, 0\}) = e_\alpha(p). \quad (1.1.14)$$

Seja $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e considere a mudança de referenciais. Em U_i temos um referencial $\{e_1(p), \dots, e_k(p)\}$ e em U_j , $\{\tilde{e}_1(p), \dots, \tilde{e}_k(p)\}$, onde $p \in U_i \cap U_j$. Um vetor $\tilde{e}_\beta(p)$ é então expresso como

$$\tilde{e}_\beta(p) = e_\alpha(p) G(p)_\beta^\alpha, \quad (1.1.15)$$

onde $(G(p)_\beta^\alpha) \in GL(k, \mathbb{R})$ ou $GL(k, \mathbb{C})$. Qualquer vetor $V \in \pi^{-1}(p)$ é expresso como

$$V = V^\alpha e_\alpha(p) = \tilde{V}^\alpha \tilde{e}_\alpha(p), \quad (1.1.16)$$

e tiramos então que

$$\tilde{V}^\beta = G^{-1}(p)_\alpha^\beta V^\alpha, \quad (1.1.17)$$

onde $G^{-1}(p)_\alpha^\beta G(p)_\gamma^\alpha = G(p)_\alpha^\beta G^{-1}(p)_\gamma^\alpha = \delta_\gamma^\beta$.

Dada uma base geral $\{e_\alpha(p)\}$ sobre F_p , podemos definir uma base dual $\{e^\alpha(p)\}$ de F_p^* por $e^\alpha(e_\beta)|_p = \delta_\beta^\alpha$.

1.1.3 Fibrados Principais

Um fibrado (P, ρ, B, F, G) é chamado um **fibrado principal** se $F = G$ e G atua em si próprio por translações à esquerda. Tais fibrados possuem a importante propriedade de que todos os fibrados não-principais podem ser contruídos a partir de (ou “associados”) um fibrado principal específico. Um fibrado principal (P, ρ, B, G) pode também ser denotado por $P(B, G)$ e é usualmente chamado de um **G-fibrado principal** sobre B .

Mostraremos a seguir que além da ação à esquerda (que define as funções de transição), a fibra também admite uma ação à direita:

Proposição 1.1.3 *Fibrados principais $P(B, G)$ admitem uma ação livre à direita $\mu : P \times G \rightarrow P$. Além do mais, órbitas dessa ação são fibras sobre o fibrado.*

Demonstração. Considere trivializações $\psi_\alpha : U_\alpha \times G \rightarrow \rho^{-1}(U_\alpha)$ e defina

$$\mu(x, g) = \psi_\alpha(\psi_\alpha^{-1}(x) \cdot g), \quad (1.1.18)$$

onde $(b, f) \cdot g = (b, fg)$, para todo $b \in B$, $f, g \in G$. Chequemos primeiro se essa ação está bem definida, isso é, se a definição não depende da escolha de ψ_α . Isso segue do fato que o grupo de estrutura atua à esquerda e a ação definida acima é uma ação à direita. De fato,

$$\psi_\alpha(\psi_\alpha^{-1}(x) \cdot g) = \psi_\alpha(b, fg) = \psi_\beta(b, \theta_{\alpha\beta}(b)fg) = \psi_\beta((b, \theta_{\alpha\beta}(b)f) \cdot g) = \psi_\beta(\psi_\beta^{-1}(x) \cdot g). \quad (1.1.19)$$

Para verificar que a ação é livre, basta notar que $\mu(x, g) = x$ implica que $\psi(b, fg) = \psi(b, f)$. Como ψ é bijetora, então $fg = f$, o que obriga $g = e$. A observação que as órbitas coincidem com as fibras é imediata da definição de μ . $\square$

Figura 1.9—Ação à direita de G em P .

Dada uma seção $s_i(p)$ sobre U_i , definimos uma trivialização local preferencial $\psi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ como segue: para $u \in \pi^{-1}(p)$, $p \in U_i$, há um único elemento $g_u \in G$ tal que $u = s_i(p)g_u$. Então definimos ψ_i como $\psi_i^{-1}(u) = (p, g_u)$. Nessa trivialização local, a seção $s_i(p)$ é expressa como

$$s_i(p) = \psi_i(p, e). \quad (1.1.20)$$

Essa trivialização local é chamada a **trivialização local canônica**. Por definição $\psi_i(p, g) = \psi_i(p, e)g = s_i(p)g$. Se $p \in U_i \cap U_j$, duas seções $s_i(p)$ e $s_j(p)$ são relacionadas pela função de transição $\theta_{ij}(p)$ como segue:

$$\begin{aligned} s_i(p) &= \psi_i(p, e) = \psi_j(p, \theta_{ij}(p)e) = \psi_j(p, \theta_{ij}(p)) \\ &= \psi_j(p, e)\theta_{ij}(p) = s_j(p)\theta_{ij}(p). \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

Enunciamos a seguir um teorema que propicia uma maneira de construir fibrados principais.

Omitiremos, todavia, sua demonstração.

Teorema 1.1.4 *Seja $\mu : M \times G \rightarrow M$ uma ação própria livre à direita. Então M/G admite uma estrutura suave tal que $(M, \rho, M/G, G)$ é um fibrado principal, onde $\rho : M \rightarrow M/G$ é a projeção canônica.*

Observamos que a estrutura suave em M/G tem as seguintes propriedades que garantem sua unicidade:

- (i) $\rho : M \rightarrow M/G$ é suave;
- (ii) Para qualquer variedade N e qualquer aplicação $h : M/G \rightarrow N$, h é suave se e somente se $h \circ \rho$ é suave.

Como um exemplo simples de fibrado principal, seja G o grupo cíclico $\mathbb{Z}_2 = \{e, a\}$ com $a^2 = e$, e tomemos a ação do grupo na n -esfera S^n pela troca de pontos antipodais

$$xe = x \quad \text{e} \quad xa = -x. \quad (1.1.22)$$

Essa ação é livre e dá origem a um $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal cujo espaço base é difeomorfo ao espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n \simeq S^n/\mathbb{Z}_2$.

A seguir, apresentamos um exemplo importante, que segue como corolário do teorema 1.1.4. Seja H um subgrupo de Lie fechado do grupo de Lie G . Mostraremos que G é um fibrado principal com fibra H e espaço de base G/H . Defina a ação à direita de H em G por $\mu(g, a) = ga$, $g \in G$, $a \in H$. A ação à direita é diferenciável, uma vez que G é um grupo de Lie. Defina a projeção $\pi : G \rightarrow G/H$ pela aplicação $\pi : g \mapsto [g] = \{gh; h \in H\}$. Claramente, $g, ga \in G$ são aplicados ao mesmo ponto $[g]$, $\pi(g) = \pi(ga) (= [g])$. Para definir as trivializações locais, precisamos definir uma aplicação $f_i : G \rightarrow H$ em cada carta U_i . Seja s uma seção local sobre U_i e seja $g \in \pi^{-1}([g])$. Defina f_i por $f_i(g) \equiv s([g])^{-1}g$. Como $s([g])$ é uma seção em $[g]$, ela é expressa como ga para algum $a \in H$ e de acordo com isso $s([g])^{-1}g = a^{-1}g^{-1}g = a^{-1} \in H$. Então definimos uma trivialização local $\psi_i : U_i \times H \rightarrow G$ por

$$\psi_i^{-1}(g) = ([g], f_i(g)).$$

É fácil de ver que $f_i(ga) = f_i(g)a$ ($a \in H$), assim $\pi_i^{-1}(ua) = (p, f_i(u)a)$ é satisfeito.

1.1.4 Fibrados Associados

Dado um fibrado principal $P(M, G)$ podemos construir um fibrado associado como segue. Seja G atuando em uma variedade F à esquerda. Defina uma ação de $g \in G$ em $P \times F$ por

$$(u, f) \mapsto (ug, g^{-1}f), \quad (1.1.23)$$

onde $u \in P$ e $f \in F$. Então, o **fibrado associado** $(P \times_G F, \pi, M, F, G)$ é uma classe de equivalência $P \times F/G$ na qual dois pontos (u, f) e $(ug, g^{-1}f)$ são identificados.

Consideremos como exemplo o $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal formado pela ação do grupo $\mathbb{Z}_2$ no círculo S^1 , tal como exibido acima, em 1.1.22. O espaço base $S^1/\mathbb{Z}_2$ é também difeomorfo a S^1 , e o fibrado é uma dupla cobertura do círculo por um círculo. Um número interessante de fibrados associados podem ser formados por esse fibrado particular pelo processo de associação:

1. $\mathbb{Z}_2$ atuando em $F = [-1, 1]$ com $a \in \mathbb{Z}_2$ levando $r \in [-1, 1]$ em si próprio (isso é, ação trivial) corresponde a um cilindro;
2. $\mathbb{Z}_2$ atuando não-trivialmente em $[-1, 1]$ com $a \in \mathbb{Z}_2$ levando $r \in [-1, 1]$ em $-r$ corresponde a uma faixa de Möbius;
3. $\mathbb{Z}_2$ atuando em $F = S^1$ com $a \in \mathbb{Z}_2$ refletindo os elementos do círculo da fibra no diâmetro resulta na garrafa de Klein.

Tomemos agora o caso em que F é um espaço vetorial V de dimensão k . Seja ρ a representação k -dimensional de G . O **fibrado vetorial associado** $P \times_\rho V$ é definido identificando os pontos (u, v) e $(ug, \rho(g)^{-1}v)$ de $P \times V$, onde $u \in P$, $g \in G$ e $v \in V$. A estrutura de um fibrado vetorial associado $E = P \times_\rho V$ é dada a seguir:

- (i) A projeção $\pi_E : E \rightarrow M$ é definida por $\pi_E(u, v) = \pi(u)$. Essa projeção está bem definida, uma vez que $\pi_E(ug, \rho(g)^{-1}v) = \pi(ug) = \pi(u) = \pi_E(u, v)$;
- (ii) A trivialização local é dada por $\psi_i : U_i \times V \rightarrow \pi_E^{-1}(U_i)$;
- (iii) A função de transição de E é dada por $\rho(\theta_{ij}(p))$, onde $\theta_{ij}(p)$ é a de P .

Por outro lado, um fibrado vetorial naturalmente induz um fibrado principal associado a ele, empregando as mesmas funções de transição.

Fibrado Referencial

Associado ao fibrado tangente TM sobre uma variedade m -dimensional M está um fibrado principal denominado o **fibrado referencial**

$$LM = \bigcup_{p \in M} L_p M, \quad (1.1.24)$$

onde $L_p M$ denota o conjunto dos referenciais sobre p . Introduzimos coordenadas x^μ em uma carta U_i , então $T_p M$ tem uma base natural $\{\partial_\mu\}$ em U_i . Um referencial $u = \{X_1, \dots, X_m\}$ em p é expresso como

$$X_\alpha = X_\alpha^\mu \partial_\mu|_p, \quad (1.1.25)$$

onde $1 \leq \alpha \leq m$ e (X_α^μ) é um elemento de $GL(m, \mathbb{R})$ tal que $\{X_\alpha\}$ são linearmente independentes. Definimos trivializações locais $\psi_i : U_i \times GL(m, \mathbb{R}) \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ por $\psi_i^{-1}(u) = (p, (X_\alpha^\mu))$.

A estrutura de fibrado de LM é definida como se segue:

- (i) Se $u = (X_1, \dots, X_m)$ é um referencial em p , definimos $\pi_L : LM \rightarrow M$ por $\pi_L(u) = p$;
- (ii) A ação de $a = (a_j^i) \in GL(m, \mathbb{R})$ no referencial $u = (X_1, \dots, X_m)$ é dada por $\mu(u, a) = ua$, onde ua é um novo referencial em p , definido por

$$Y_\beta = X_\alpha a_\beta^\alpha.$$

Por outro lado, dados quaisquer referenciais $\{X_\alpha\}$ e $\{Y_\beta\}$ existe um elemento de $GL(m, \mathbb{R})$ tal que a relação de transformação acima é satisfeita. Portanto $GL(m, \mathbb{R})$ atua em LM transitivamente;

- (iii) Sejam U_i e U_j cartas sobrepostas com coordenadas x^μ e y^μ , respectivamente. se $p \in U_i \cap U_j$, temos

$$X_\alpha = X_\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_p = \tilde{X}_\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu}|_p,$$

onde $(X_\alpha^\mu), (\tilde{X}_\alpha^\mu) \in GL(m, \mathbb{R})$. Como $X_\alpha^\mu = (\partial x^\mu / \partial y^\nu)_p \tilde{X}_\alpha^\nu$, achamos que a função de transição $\theta_{ij}^L(p)$ é

$$\theta_{ij}^L(p) = \left(\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \right)_p \right) \in GL(m, \mathbb{R}). \quad (1.1.26)$$

Em relatividade geral, a ação à direita corresponde à transformação de Lorentz local, enquanto a ação à esquerda corresponde à transformação geral de coordenada. Se $\{X_\alpha\}$ é normalizado introduzindo-se uma métrica, a matriz (X_α^μ) se torna uma tetrada e o grupo de estrutura reduz-se a $O(m)$.

Trivialidade de fibrados

O teorema a seguir nos fornece a condição sob a qual um fibrado principal é trivial, e a partir desse que qualquer fibrado associado também o é.

Teorema 1.1.5 *Um fibrado principal é trivial se e somente se ele admitir uma seção global.*

Demonstração. Seja (P, π, M, G) um fibrado principal sobre M e seja s uma seção global do fibrado. Essa seção pode ser usada para mostrar que existe um homeomorfismo entre P e $M \times G$. Se a é um elemento de G , o produto $s(p)a$ pertence à fibra em p . Como a ação à direita é transitiva e livre, qualquer elemento $u \in P$ é unicamente escrito como $s(p)a$ para algum $p \in M$ e $a \in G$. Defina uma aplicação $\Phi : P \rightarrow M \times G$ por

$$\Phi : s(p)a \mapsto (p, a). \quad (1.1.27)$$

Dado um aberto $U \subset M$, um aberto em P é da forma $\pi^{-1}(U)$, que é aplicado por Φ no aberto $(U, G) \in M \times G$. Por outro lado, a inversa de Φ aplicada ao aberto (U, G) nada mais é que uma trivialização em U , e assim também contínua. Portanto Φ é um homeomorfismo. Mostramos, pois, que P é um fibrado trivial $M \times G$.

Por outro lado, suponha que $P \simeq M \times G$. Seja $\phi : M \times G \rightarrow P$ uma trivialização. Tome um elemento fixo $g \in G$. Então $s_g : M \rightarrow P$ definida por $s_g(p) = \phi(p, g)$ é uma seção global. $\square$

Se olharmos o caso da faixa de Möbius, como existe um $p \in M$ tal que $s(p) = 0$, não podemos mais construir uma bijeção Φ . Portanto, não há como os espaços serem homeomorfos, o que demonstra a não-trivialidade.

Corolário 1.1.6 *Um fibrado vetorial E é trivial se e somente se seu fibrado principal associado $P(E)$ admite uma seção global.*

Demonstração. A demonstração segue do fato de E e $P(E)$ dividirem o mesmo conjunto de funções de transição. $\square$

1.2 Conexões em Fibrados Principais

Vimos na seção anterior que fibrados são estruturas poderosas que nos permitem abordar de forma clara várias questões de caráter topológico/geométrico, algumas das quais podem

ter aplicabilidade física, como é o caso dos fibrados referenciais. No entanto, até o momento sempre selecionamos um ponto na variedade base e trabalhamos em cima da fibra desse ponto, sem estabelecer relações entre diferentes fibras de diferentes pontos. A viabilidade de trabalharmos com fibrados em teorias físicas (que usualmente estabelecem uma dinâmica entre os pontos da variedade física), ou mesmo em questões de matemática pura, se dá então principalmente pela existência das conexões, responsáveis por instituir uma derivada covariante na estrutura do fibrado, e assim fazer a “conexão” entre as diversas fibras.

Seja u um elemento de um fibrado principal $P(M, G)$ e seja G_p a fibra em $p = \pi(u)$. Definimos o **subespaço vertical** $V_u P$ como um subspaço de $T_u P$ que é tangente a G_p em u . Uma **conexão** em P é então uma separação, para cada $u \in P$, do espaço tangente $T_u P$ no subespaço vertical $V_u P$ e num **subespaço horizontal** $H_u P$ tal que

- (i) $T_u P = H_u P \oplus V_u P$;
- (ii) Um campo vetorial suave X em P é separado em campos vetoriais suaves $X^H \in H_u P$ e $X^V \in V_u P$ de modo que $X = X^H + X^V$;
- (iii) $H_{ug} P = R_{g*} H_u P$, para quaisquer $u \in P$ e $g \in G$, sendo $R_g(u) = ug$ a ação à direita de G em P .

Figura 1.10—Separação entre subespaço vertical e subespaço horizontal

Vejamos como $V_u P$ é construído. Tomemos um elemento $A \in \mathfrak{g}$. Pela ação à direita

$$R_{\exp(tA)} u = u \exp(tA) \quad (1.2.1)$$

é definida uma curva através de u em P . Como $\pi(u) = \pi(u \exp(tA)) = p$, essa curva pertence

ao interior de G_p . Defina um vetor $A^\# \in T_u P$ por

$$A^\# f = \frac{d}{dt} f(u \exp(tA))|_{t=0}, \quad (1.2.2)$$

onde $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave arbitrária. O vetor $A^\#$ é tangente a G_p em u , e assim $A^\# \in V_u P$. Dessa forma definimos um vetor $A^\#$ em cada ponto de P e construímos um campo vetorial $A^\#$, denominado o **campo vetorial fundamental** gerado por A . Há assim um isomorfismo $\# : \mathfrak{g} \rightarrow V_u P$ dado por $A \mapsto A^\#$, para cada $u \in P$.

A condição (iii) ainda estabelece que um subespaço $H_u G$ em u é capaz de gerar todos os subespaços horizontais sobre a mesma fibra, através da aplicação linear R_{g*} induzida pela ação à direita. Essa condição garante que se um ponto u é transportado paralelamente, também o é seu múltiplo ug .

Para tornar essa definição obscura mais tratável, definimos uma **1-forma conectora** $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^* P$ como uma projeção de $T_u P$ sobre a componente vertical $V_u P \simeq \mathfrak{g}$ de forma que, dado um vetor $A^\# \in T_u P$,

$$(i) \quad \omega(A^\#) \equiv A, \text{ em que } A \in \mathfrak{g}.$$

$$(ii) \quad R_g^* \omega \equiv Ad_{g^{-1}} \omega, \text{ isso é, para } X \in T_u P,$$

$$R_g^* \omega(X)|_{ug} = \omega(R_{g*} X)|_u \equiv g^{-1} \omega(X) g|_u \quad (1.2.3)$$

(a aplicação $Ad_{g^{-1}}$ levando $\omega \mapsto g^{-1} \omega g$ é denominada **ação adjunta**). Definimos, assim, o subespaço horizontal $H_u P$ pelo *núcleo* de ω ,

$$H_u P \equiv \{X \in T_u P; \omega(X) = 0\}. \quad (1.2.4)$$

Verifiquemos que a definição acima é consistente com a definição que primeiro demos para a conexão. Fixe um ponto $u \in P$ e seja $H_u P$ definido como acima. Tome $X \in H_u P$ e construa $R_{g*} X \in T_{ug} P$. Achamos que

$$\omega(R_{g*} X) = R_g^* \omega(X) = g^{-1} \omega(X) g = 0, \quad (1.2.5)$$

uma vez que $\omega(X) = 0$. De acordo com isso, $R_{g*} X \in H_{ug} P$. Notemos também que R_{g*} é uma aplicação linear invertível, assim qualquer vetor $Y \in H_{ug} P$ é expresso como $Y = R_{g*} X$ para algum $X \in H_u P$.

Mostramos assim que a definição de uma 1-forma conectora é equivalente à da conexão, separando $T_u P$ em $H_u P \oplus V_u P$. A 1-forma conectora aqui definida é também conhecida como

conexão de Ehresmann.

1.2.1 Forma Conectora Local e Potencial de gauge

Definida a conexão no fibrado, nos é interessante “trazer” essa ferramenta para o espaço base, que à frente fará o papel de nossa variedade física. Dada uma cobertura aberta $\{U_i\}$ de M e uma seção local σ_i bem definida em cada U_i , introduzimos uma 1-forma $\mathcal{A}_i$ com valores na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ em U_i por

$$\mathcal{A}_i \equiv \sigma_i^* \omega \in \mathfrak{g} \otimes \Lambda^1(U_i), \quad (1.2.6)$$

onde $\Lambda^1(U_i)$ é o espaço das 1-formas diferenciais em U_i .

Como ω é definida em todo P , i.e., a separação $T_u P = H_u P \oplus V_u P$ é dada para todo $u \in P$, devemos ter $\omega_i = \omega_j$ em $U_i \cap U_j$. Como consequência, as formas locais $\mathcal{A}_i$ devem satisfazer uma propriedade de transformação similar a dos símbolos de Christoffel, o que procuraremos mostrar a seguir.

Lema 1.2.1 *Seja $P(M, G)$ um fibrado principal e $\sigma_i(\sigma_j)$ uma seção local sobre $U_i(U_j)$ tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Para $X \in T_p M$ ($p \in U_i \cap U_j$), $\sigma_{i*}X$ e $\sigma_{j*}X$ satisfazem*

$$\sigma_{j*}X = R_{\theta_{ij}*}(\sigma_{i*}X) + (\theta_{ij}^{-1} d\theta_{ij}(X))^{\#}, \quad (1.2.7)$$

onde $\theta_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ é a função de transição e d o operador derivada exterior.

Figura 1.11— $\omega_i = \omega_j$ em $U_i \cap U_j$ implica na relação 1.2.7 entre $\sigma_{i*}X$ e $\sigma_{j*}X$.

Demonstração. Tome uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = X$. Como $\sigma_i(p)$

e $\sigma_j(p)$ são relacionadas por 1.1.21 do modo $\sigma_j(p) = \sigma_i(p)\theta_{ij}(p)$, temos

$$\begin{aligned}\sigma_{j*}X &= \frac{d}{dt}\sigma_j(\gamma(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\{\sigma_i(t)\theta_{ij}(t)\}|_{t=0} \\ &= \left(\frac{d}{dt}\sigma_i(t)\right)\theta_{ij}(p) + \sigma_i(p)\frac{d}{dt}\theta_{ij}(t)|_{t=0} \\ &= R_{\theta_{ij}*}(\sigma_{i*}X) + \sigma_j(p)\theta_{ij}^{-1}(p)\frac{d}{dt}\theta_{ij}(t)|_{t=0},\end{aligned}\tag{1.2.8}$$

onde $\sigma_i(t)$ representa $\sigma_i(\gamma(t))$ e assumimos que G é um grupo matricial para o qual $R_{g*}X = Xg$. Notemos que

$$\theta_{ij}^{-1}(p)d\theta_{ij}(X) = \theta_{ij}^{-1}(p)\frac{d}{dt}\theta_{ij}(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}[\theta_{ij}^{-1}(p)\theta_{ij}(t)]|_{t=0} \in T_eG \simeq \mathfrak{g},\tag{1.2.9}$$

pois $\theta_{ij}^{-1}(p)\theta(\gamma(t)) = e$ em $t = 0$. Isso mostra que o segundo termo de $\sigma_{j*}X$ representa o campo vetorial $(\theta_{ij}^{-1}d\theta_{ij}(X))^\#$ (definido em 1.2.2) em $\sigma_j(p)$. $\square$

A condição que procuramos é então obtida aplicando a 1-forma conectora ω na equação do lema acima. Temos então

$$\begin{aligned}\sigma_j^*\omega(X) &= \omega(\sigma_{j*}X) = \omega[R_{\theta_{ij}*}(\sigma_{i*}(X))] + \omega[(\theta_{ij}^{-1}d\theta_{ij}(X))^\#] \\ &= R_{\theta_{ij}}^*\omega(\sigma_{i*}X) + \theta_{ij}^{-1}d\theta_{ij}(X) \\ &= \theta_{ij}^{-1}\sigma_i^*\omega(X)\theta_{ij} + \theta_{ij}^{-1}d\theta_{ij}(X),\end{aligned}\tag{1.2.10}$$

onde utilizamos as condições da definição da 1-forma conectora ω . Como isso é verdadeiro para qualquer $X \in T_pM$, a equação acima reduz-se a

$$\mathcal{A}_j = \theta_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i\theta_{ij} + \theta_{ij}^{-1}d\theta_{ij},\tag{1.2.11}$$

que é a **condição de compatibilidade** que procurávamos.

Por outro lado, dada um cobertura aberta $\{U_i\}$, as seções locais $\{\sigma_i\}$ e formas locais $\{\mathcal{A}_i\}$ que satisfazem a equação acima, podemos construir a 1-forma ω sobre P . Como um fibrado não-trivial não admite uma seção global, o pullback $\mathcal{A}_i = \sigma_i^*\omega$ existe localmente mas não necessariamente globalmente. Em teorias de *gauge* identificamos $\mathcal{A}_i$ ao **potencial de gauge**. Relacionamos a liberdade na escolha de *gauge* com a escolha da trivialização local, e assim a condição 1.2.11 exprime tal relação. Em resumo, a ação do grupo de estrutura sobre a 1-forma $\mathcal{A}_i$ se torna a responsável por gerar a liberdade de *gauge* encontrada no sistema físico.

Convém ressaltar novamente que ω é definida globalmente sobre o fibrado $P(M, G)$. Embora haja muitas 1-formas conectoras em $P(M, G)$, elas compartilham a mesma informação

global acerca do fibrado. Por outro lado, uma peça local individual (potencial de *gauge*) $\mathcal{A}_i$ é associada com o fibrado trivial $\pi^{-1}(U_i)$ e não pode ter qualquer informação global sobre P . É ω , ou equivalentemente, o total de $\{\mathcal{A}_i\}$ satisfazendo a condição de compatibilidade, que carrega a informação global sobre o fibrado.

$U(1)$ -Fibrado

Olhemos para o exemplo de um $U(1)$ -fibrado P sobre M . Sejam cartas sobrepostas U_i e U_j , e $\mathcal{A}_i$ ($\mathcal{A}_j$) uma forma conectora local em U_i (U_j). A função de transição $\theta_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U(1)$ é dada por

$$\theta_{ij}(p) = \exp[i\chi(p)], \quad \chi(p) \in \mathbb{R}. \quad (1.2.12)$$

Como $U(1)$ é abeliano, $\mathcal{A}_i$ e $\mathcal{A}_j$ são relacionados por

$$\mathcal{A}_j(p) = \theta_{ij}^{-1}(p)\mathcal{A}_i(p)\theta_{ij}(p) + \theta_{ij}^{-1}(p)d\theta_{ij}(p) = \mathcal{A}_i(p) + id\chi(p). \quad (1.2.13)$$

Em componentes, temos a expressão

$$\mathcal{A}_{j\mu} = \mathcal{A}_{i\mu} + i\partial_\mu\chi. \quad (1.2.14)$$

1.2.2 Levantamento Horizontal e Transporte Paralelo

A instituição da conexão, separando o espaço dos vetores verticais (tangentes à fibra) em um determinado ponto do fibrado do espaço dos vetores horizontais, pertencentes ao núcleo da 1-forma conectora, nos permite tratar agora de movimentos no fibrado. Para isso, primeiramente trataremos de relacionar uma trajetória no espaço base a uma no espaço total.

Seja $P(M, G)$ um G -fibrado e seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva em M . Uma curva $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$ é dita um **levantamento horizontal** de γ se $\pi(\tilde{\gamma}) = \gamma$ e o vetor tangente a $\tilde{\gamma}(t)$ sempre pertence a $H_{\tilde{\gamma}(t)}P$. Se $\tilde{X}$ é um vetor tangente a $\tilde{\gamma}$, então ele satisfaz $\omega(\tilde{X}) = 0$ por definição. Essa condição é uma equação diferencial ordinária, e o teorema fundamental de EDO's garante a existência local e a unicidade do levantamento horizontal.

Teorema 1.2.2 *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva em M e seja $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Então existe um único levantamento horizontal $\tilde{\gamma}(t)$ em P tal que $\tilde{\gamma}(0) = u_0$.*

Vamos construir tal curva $\tilde{\gamma}$. Seja U_i uma carta que contém γ e tomemos uma seção σ_i sobre U_i . Se existe um levantamento horizontal $\tilde{\gamma}$, ele pode ser expresso como $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(t)$, para algum $g_i(t) \equiv g_i(\gamma(t)) \in G$. Nossa intenção é, então, derivar uma equação que determine $g_i(t)$ em cada ponto, a partir da conexão ω .

Figura 1.12–Levantamento horizontal $\tilde{\gamma}(t)$ de $\gamma(t) \in U_i$.

Sem perda de generalidade, podemos tomar uma seção tal que $\sigma_i(\gamma(0)) = \tilde{\gamma}(0)$, ou seja, $g_i(0) = e$. Seja X um vetor tangente a $\gamma(t)$ em $\gamma(0)$; cometeremos então o abuso de notação e chamaremos de $\tilde{\gamma}_* : T_{\gamma(t)}M \rightarrow T_{\tilde{\gamma}(t)}P$ a aplicação levando X no vetor $\tilde{X}$, tangente a $\tilde{\gamma}$ em $u_0 = \tilde{\gamma}(0)$ (o abuso se dá porque $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$, e não faz sentido definir uma aplicação $\tilde{\gamma}_*X$ tal como a definição de *push-forward*). Como o vetor tangente $\tilde{X}$ é horizontal, satisfaz $\omega(\tilde{X}) = 0$. Uma pequena modificação no lema 1.2.1 gera

$$\tilde{X} = g_i(t)^{-1} \sigma_{i*} X g_i(t) + [g_i(t)^{-1} dg_i(X)]^\# . \quad (1.2.15)$$

Aplicando ω na equação, temos

$$0 = \omega(\tilde{X}) = g_i(t)^{-1} \omega(\sigma_{i*} X) g_i(t) + g_i(t)^{-1} \frac{dg_i(t)}{dt} . \quad (1.2.16)$$

Multiplicando à esquerda por $g_i(t)$,

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\omega(\sigma_{i*} X) g_i(t), \quad (1.2.17)$$

e o teorema fundamental das EDO's garante a existência e a unicidade da solução.

Como $\omega(\sigma_{i*} X) = \sigma_i^* \omega(X) = \mathcal{A}_i(X)$, a equação acima é expressa em uma forma local

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\mathcal{A}_i(X) g_i(t), \quad (1.2.18)$$

cuja solução formal com $g_i(0) = e$ é

$$\begin{aligned} g_i(\gamma(t)) &= P \exp \left(- \int_0^t \mathcal{A}_{i\mu} \frac{dx^\mu}{dt} dt \right) \\ &= P \exp \left(- \int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \mathcal{A}_{i\mu}(\gamma(t)) dx^\mu \right), \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

onde P é o operador de ordenação do caminho ao longo de $\gamma(t)$. O levantamento horizontal é expresso como $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(\gamma(t))$.

Corolário 1.2.3 *Seja $\tilde{\gamma}'$ outro levantamento horizontal de γ , tal que $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}(0)g$. Então $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t)g$ para todo $t \in [0, 1]$.*

Demonstração. Notemos primeiramente que o subespaço horizontal é invariante à direita, $R_{g*}H_uP = H_{ug}P$. Seja $\tilde{\gamma}$ um levantamento horizontal de γ . Então $\tilde{\gamma}g : t \mapsto \tilde{\gamma}(t)g$ é também um levantamento horizontal de $\gamma(t)$, uma vez que seu vetor tangente pertence a $H_{\tilde{\gamma}g}P$. Do teorema 1.2.2 achamos que γ' é o único levantamento horizontal que começa em $\tilde{\gamma}(0)g$. $\square$

Figura 1.13—Uma curva $\gamma(t)$ em M e seus levantamentos horizontais $\tilde{\gamma}(t)$ e $\tilde{\gamma}(t)g$.

Consideremos como exemplo o fibrado $P(M, \mathbb{R}) \simeq M \times \mathbb{R}$, para $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Seja $\phi : ((x, y), f) \rightarrow u \in P$ uma trivialização local, onde (x, y) são as coordenadas de M , enquanto f é do grupo aditivo $\mathbb{R}$. Então

$$\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} + df \quad (1.2.20)$$

é uma 1-forma conectora. Para vermos isso, dado $A^\# = A \frac{\partial}{\partial f}$, $A \in \mathbb{R}$ um elemento da álgebra

de Lie do grupo aditivo, temos

$$\omega(A^\#) = \frac{1}{x^2 + y^2} \left[ydx \left(A \frac{\partial}{\partial f} \right) - xdy \left(A \frac{\partial}{\partial f} \right) \right] + df \left(A \frac{\partial}{\partial f} \right) = A.$$

Além do mais, $R_{g*}\omega = \omega = g^{-1}\omega g$, uma vez que $\mathbb{R}$ é abeliano. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Trabalharemos um levantamento horizontal que começa em $((1, 0), 0)$.

Seja

$$X = \frac{d}{dt} \equiv \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{df}{dt} \frac{\partial}{\partial f}$$

tangente a $\tilde{\gamma}(t)$. Para X ser horizontal, deve satisfazer

$$0 = \omega(X) = \frac{dx}{dt} \frac{y}{r^2} - \frac{dy}{dt} \frac{x}{r^2} + \frac{df}{dt} = -2\pi + \frac{df}{dt} \Rightarrow f = 2\pi t + cte.$$

Encontramos, pois, o levantamento horizontal $\tilde{\gamma}$ passando por $((1, 0), 0)$,

$$\tilde{\gamma}(t) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), 2\pi t),$$

que é uma hélice sobre o círculo unitário. Sob a ação do grupo (à direita ou à esquerda, não importa), f translada para $f + g$, $g \in \mathbb{R}$. O levantamento horizontal deslocado é

$$\tilde{\gamma}g = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), 2\pi t + g).$$

Tomemos agora uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, e um ponto $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Há um único levantamento horizontal $\tilde{\gamma}(t)$ através de u_0 , e assim um único ponto $u_1 = \tilde{\gamma}(1) \in \pi^{-1}(\gamma(1))$. O ponto u_1 é chamado o **transporte paralelo** de u_0 ao longo de $\tilde{\gamma}$, e define uma aplicação $\Gamma(\tilde{\gamma}) : \pi^{-1}(\gamma(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\gamma(1))$ levando u_0 a u_1 . Empregando a forma local, temos

$$u_1 = \sigma_i(1)P \exp \left(- \int_0^1 \mathcal{A}_{i\mu} \frac{dx^\mu(\gamma(t))}{dt} dt \right). \quad (1.2.21)$$

Pelo corolário 1.2.3, podemos mostrar que $\Gamma(\tilde{\gamma})$ comuta com a ação à direita R_g . Primeiro note que $R_g\Gamma(\tilde{\gamma})(u_0) = u_1g$ e $\Gamma(\tilde{\gamma})R_g(u_0) = \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0g)$. Observe que $\tilde{\gamma}(t)g$ é um levantamento horizontal por u_0g e u_1g , e da unicidade do levantamento horizontal por u_0g , temos $u_1g = \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0g)$, isso é, $R_g\Gamma(\tilde{\gamma})(u_0) = \Gamma(\tilde{\gamma})R_g(u_0)$. Como isso é verdade para qualquer $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, vemos que

$$R_g\Gamma(\tilde{\gamma}) = \Gamma(\tilde{\gamma})R_g. \quad (1.2.22)$$

1.2.3 Holonomias

Vemos em 1.2.21 que o transporte paralelo ao longo de um levantamento horizontal $\tilde{\gamma}$ de uma curva γ de M depende de todo o caminho da curva, e não somente de suas extremidades. Dessa forma, se consideramos duas curvas $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow M$ com $\alpha(0) = \beta(0) = p_0$ e $\alpha(1) = \beta(1) = p_1$ e seus levantamentos horizontais $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ tais que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = u_0$, não necessariamente teremos $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. Mais ainda, se considerarmos um *loop* $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ em $p = \gamma(0) = \gamma(1)$, no geral teremos $\tilde{\gamma}(0) \neq \tilde{\gamma}(1)$. Um *loop* γ define assim uma transformação $\tau_\gamma : \pi^{-1}(p) \rightarrow \pi^{-1}(p)$ na fibra, que é compatível com a ação à direita do grupo,

$$\tau_\gamma(ug) = \tau_\gamma(u)g, \quad (1.2.23)$$

o que segue diretamente de $R_g\Gamma = \Gamma R_g$. Notemos, todavia, que τ_γ não depende apenas do *loop* γ , mas também da conexão.

Voltemos à 1-forma conectora 1.2.20 e o *loop* γ , definidos no $\mathbb{R}$ -fibrado sobre $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. ω e γ definem ali uma aplicação $\tau_\gamma : \pi^{-1}((1, 0)) \rightarrow \pi^{-1}((1, 0))$, que leva $g \mapsto g + 2\pi$, $g \in \mathbb{R}$.

Figura 1.14 – (a) Duas curvas α, β com mesmas extremidades podem resultar transportes paralelos diferentes em seus levantamentos horizontais; (b) o levantamento horizontal de um *loop* não necessariamente é fechado.

Tomemos um ponto $u \in P$ com $\pi(u) = p$ e consideremos o conjunto de *loops* $C_p(M)$

em p ,

$$C_p(M) \equiv \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M; \gamma(0) = \gamma(1) = p\}. \quad (1.2.24)$$

O conjunto de elementos

$$\Phi_u \equiv \{g \in G; \tau_\gamma(u) = ug, \gamma \in C_p(M)\} \quad (1.2.25)$$

é um subgrupo do grupo de estrutura G , que denominaremos **grupo de holonomia** em u .

Se α, β e $\gamma = \alpha * \beta$ são *loops* em p , temos $\tau_\gamma = \tau_\beta \tau_\alpha$, assim

$$\tau_\gamma(u) = \tau_\beta \tau_\alpha(u) = \tau_\beta(u)g_\alpha = ug_\beta g_\alpha. \quad (1.2.26)$$

Isso mostra que

$$g_\gamma = g_\beta g_\alpha. \quad (1.2.27)$$

O *loop* constante $c : [0, 1] \rightarrow p$ define a transformação identidade $\tau_c : u \mapsto u$. O *loop* inverso γ^{-1} de γ induz a transformação inversa $\tau_{\gamma^{-1}} = \tau_\gamma^{-1}$, e assim $g_{\gamma^{-1}} = g_\gamma^{-1}$.

1.2.4 Curvatura

Vamos agora definir uma derivada covariante sobre o fibrado, e com isso determinar uma curvatura para a conexão. Para isso, precisamos primeiramente generalizar a operação de derivada exterior de r -formas reais, dada por A.1.20, para r -formas com valor vetorial $\phi \in \Lambda^r(P) \otimes V$,

$$\phi : TP \otimes \cdots \otimes TP \rightarrow V, \quad (1.2.28)$$

onde V é um espaço vetorial de dimensão k . A forma mais geral de ϕ é $\phi = \phi^\alpha \otimes e_\alpha$, onde $\{e_\alpha\}$ é uma base de V e $\phi^\alpha \in \Lambda^r(P)$. Lembramos ainda que uma conexão ω decompõe um campo vetorial suave X em $T_u P$ em duas componentes $X^H \in H_u P$ e $X^V \in V_u P$.

Seja $\phi \in \Lambda^r(P) \otimes V$ e $X_1, \dots, X_{r+1} \in T_u P$. A **derivada covariante** de ϕ é definida por

$$D\phi(X_1, \dots, X_{r+1}) \equiv d_P \phi(X_1^H, \dots, X_{r+1}^H), \quad (1.2.29)$$

onde d_P é a derivada exterior em P e $d_P \phi \equiv d_P \phi^\alpha \otimes e_\alpha$. A **2-forma de curvatura** Ω é a derivada covariante da 1-forma conectora ω ,

$$\Omega \equiv D\omega \in \Lambda^2(P) \otimes \mathfrak{g}. \quad (1.2.30)$$

Tomemos uma p -forma $\zeta = \zeta^\alpha \otimes T_\alpha$ e uma q -forma $\eta = \eta^\alpha \otimes T_\alpha$, onde $\zeta^\alpha \in \Lambda^p(M)$, $\eta^\alpha \in$

$\Lambda^q(M)$ e $\{T_\alpha\}$ é uma base de $\mathfrak{g}$. Defina o comutador de ζ e η por

$$\begin{aligned}
 [\zeta, \eta] &\equiv \zeta \wedge \eta - (-1)^{pq} \eta \wedge \zeta \\
 &= T_\alpha T_\beta \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta - (-1)^{pq} T_\beta T_\alpha \eta^\beta \wedge \zeta^\alpha \\
 &= [T_\alpha, T_\beta] \otimes \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta \\
 &= f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma \otimes \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta.
 \end{aligned} \tag{1.2.31}$$

Se fazemos $\zeta = \eta$, então

$$[\zeta, \zeta] = 2\zeta \wedge \zeta = f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma \otimes \zeta^\alpha \wedge \zeta^\beta. \tag{1.2.32}$$

O teorema abaixo nos fornece uma fórmula para a 2-forma de curvatura:

Teorema 1.2.4 *Sejam $X, Y \in T_u P$. Então Ω e ω satisfazem a equação de estrutura de Cartan*

$$\Omega(X, Y) = d_P \omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)], \tag{1.2.33}$$

que é também escrita como

$$\Omega = d_P \omega + \omega \wedge \omega. \tag{1.2.34}$$

A demonstração do teorema consiste em considerar em separado as possibilidades de combinações de X, Y pertencendo a $H_u P$ ou $V_u P$, e verificar se a equação acima é coerente com a definição da 2-forma de curvatura. Omitiremos aqui a demonstração. Vejamos contudo como chegar da primeira para a segunda equação do teorema. Notemos que

$$\begin{aligned}
 [\omega, \omega](X, Y) &= [T_\alpha, T_\beta] \omega^\alpha \wedge \omega^\beta(X, Y) \\
 &= [T_\alpha, T_\beta] (\omega^\alpha(X) \omega^\beta(Y) - \omega^\beta(X) \omega^\alpha(Y)) \\
 &= [\omega(X), \omega(Y)] - [\omega(Y), \omega(X)] \\
 &= 2[\omega(X), \omega(Y)].
 \end{aligned} \tag{1.2.35}$$

Assim,

$$\Omega(X, Y) = \left(d_P \omega + \frac{1}{2} [\omega, \omega] \right) (X, Y) = (d_P \omega + \omega \wedge \omega) (X, Y). \tag{1.2.36}$$

Significado Geométrico da Curvatura

A curvatura em fibrados principais possui uma interpretação similar à do tensor de curvatura de Riemman, que expressa a não-comutatividade do transporte paralelo de vetores.

Para ver isso, comecemos mostrando que $\Omega(X, Y)$ gera a componente vertical do colchete de Lie $[X, Y]$ de vetores horizontais $X, Y \in H_u P$. Segue de $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ que

$$d_P \omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) = -\omega([X, Y]), \quad (1.2.37)$$

e como $X^H = X$ e $Y^H = Y$, temos

$$\Omega(X, Y) = d_P \omega(X, Y) = -\omega([X, Y]). \quad (1.2.38)$$

Dado um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ em uma carta U , sejam $V = \frac{\partial}{\partial x^1}$ e $W = \frac{\partial}{\partial x^2}$. Consideremos então o levantamento horizontal $\tilde{\gamma}$ de um paralelogramo infinitesimal γ , cujos vértices são $O = (0), P = (\epsilon, 0, \dots, 0), Q = (\epsilon, \delta, 0, \dots, 0)$ e $R = (0, \delta, 0, \dots, 0)$. Sejam $X, Y \in H_u P$ tais que $\pi_* X = \epsilon V$ e $\pi_* Y = \delta W$, então

$$\pi_*([X, Y]^\#) = \epsilon \delta [V, W] = \epsilon \delta \left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right] = 0, \quad (1.2.39)$$

isso é, $[X, Y]$ é vertical. A consideração acima mostra que o levantamento horizontal $\tilde{\gamma}$ de um *loop* γ falha em fechar. Essa falha é proporcional ao vetor vertical $[X, Y]$ conectando o ponto inicial e o ponto final na mesma fibra. A curvatura mede essa distância,

$$\Omega(X, Y) = -\omega([X, Y]) = A, \quad (1.2.40)$$

onde A é um elemento de $\mathfrak{g}$ tal que $[X, Y] = A^\#$.

Como a discrepância entre os pontos inicial e final do levantamento horizontal de uma curva fechada é simplesmente a holonomia, esperamos que o grupo de holonomia seja expresso em termos da curvatura.

Teorema 1.2.5 *Seja $P(M, G)$ um G -fibrado sobre uma variedade conexa M . A álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ do grupo de holonomia Φ_{u_0} de um ponto $u_0 \in P$ concorda com a sub-álgebra de $\mathfrak{g}$ gerada pelos elementos da forma*

$$\Omega_u(X, Y), \quad X, Y \in H_u P,$$

onde $u \in P$ é um ponto no mesmo levantamento horizontal que u_0 .

Forma Local

Podemos definir uma forma local $\mathcal{F}$ da curvatura Ω , que chamaremos de **força do campo**, por

$$\mathcal{F} \equiv \sigma^* \Omega, \quad (1.2.41)$$

onde σ é uma seção local definida em uma carta U de M (tal como definimos $\mathcal{A}$). $\mathcal{F}$ é então expressa em termos do potencial de *gauge* como

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}, \quad (1.2.42)$$

pois $\mathcal{A} = \sigma^*\omega$, $\sigma^*d_P\omega = d\sigma^*\omega$ e $\sigma^*(\zeta \wedge \eta) = \sigma^*\zeta \wedge \sigma^*\eta$. A ação de $\mathcal{F}$ em vetores de TM é dada por

$$\mathcal{F}(X, Y) = d\mathcal{A}(X, Y) + [\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)]. \quad (1.2.43)$$

Achemos, agora, a expressão em componentes para $\mathcal{F}$ em uma carta $((x^\mu), U)$. Seja $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu$, $\mathcal{A} \in \mathfrak{g}$, o potencial de *gauge*. Então

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}(\partial_\kappa, \partial_\lambda) &= \partial_\mu \mathcal{A}_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu (\partial_\kappa, \partial_\lambda) = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu \det \begin{pmatrix} \langle dx^\mu, \partial_\kappa \rangle & \langle dx^\mu, \partial_\lambda \rangle \\ \langle dx^\nu, \partial_\kappa \rangle & \langle dx^\nu, \partial_\lambda \rangle \end{pmatrix} \\ &= \partial_\mu \mathcal{A}_\nu \det \begin{pmatrix} \delta_\kappa^\mu & \delta_\lambda^\mu \\ \delta_\kappa^\nu & \delta_\lambda^\nu \end{pmatrix} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu (\delta_\kappa^\mu \delta_\lambda^\nu - \delta_\lambda^\mu \delta_\kappa^\nu) \\ &= \partial_\kappa \mathcal{A}_\lambda - \partial_\lambda \mathcal{A}_\kappa. \end{aligned} \quad (1.2.44)$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu (\partial_\kappa, \partial_\lambda) &= (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) (\delta_\kappa^\mu \delta_\lambda^\nu - \delta_\lambda^\mu \delta_\kappa^\nu) \\ &= \partial_\kappa \mathcal{A}_\lambda - \partial_\lambda \mathcal{A}_\kappa - \partial_\lambda \mathcal{A}_\kappa + \partial_\kappa \mathcal{A}_\lambda = 2(\partial_\kappa \mathcal{A}_\lambda - \partial_\lambda \mathcal{A}_\kappa). \end{aligned} \quad (1.2.45)$$

Assim, podemos escrever

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (1.2.46)$$

Como temos também que $[\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)] = \frac{1}{2}[\mathcal{A}, \mathcal{A}](X, Y)$, se escrevermos $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$, encontramos que

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu], \quad (1.2.47)$$

e como $\mathcal{A}_\mu$ e $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ são funções com valores em $\mathfrak{g}$, podemos expandi-las em termos da base $\{T_i\}$ de $\mathfrak{g}$ (aqui usamos letras romanas para o índice da álgebra, e reservamos as letras gregas para as coordenadas),

$$\mathcal{A}_\mu = A_\mu^i T_i \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^i T_i. \quad (1.2.48)$$

Os vetores da base satisfazem a relação de comutação usual $[T_i, T_j] = f_{ij}^k T_k$, e portanto

obtemos a expressão

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + f_{jk}^i A_\mu^j A_\nu^k. \quad (1.2.49)$$

Identidade de Bianchi

Para completar, mostraremos que a 2-forma de curvatura satisfaz a **identidade de Bianchi**:

$$D\Omega = 0, \quad (1.2.50)$$

e acharemos uma forma local para ela. Temos que

$$D\Omega(X, Y, Z) = d_P\Omega(X^H, Y^H, Z^H),$$

onde $X, Y, Z \in T_u P$. Como ω e Ω assumem valores em $\mathfrak{g}$, os expandimos em termos da base $\{T_i\}$ de $\mathfrak{g}$. A equação para Ω fica então

$$\Omega^i = d_P\omega^i + f_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k. \quad (1.2.51)$$

Aplicando a derivada exterior,

$$d_P\Omega^i = f_{jk}^i d_P\omega^j \wedge \omega^k + f_{jk}^i \omega^j \wedge d_P\omega^k, \quad (1.2.52)$$

mas $\omega(X^H) = 0$ para qualquer X , e a identidade está provada.

Determinemos uma forma local da identidade de Bianchi. Aplicando σ^* na última equação, temos que $\sigma^*d_P\Omega = d\sigma^*\Omega = d\mathcal{F}$ para o lado esquerdo e

$$\sigma^*(d_P\omega \wedge \omega - \omega \wedge d_P\omega) = d\sigma^*\omega \wedge \sigma^*\omega - \sigma^*\omega \wedge d\sigma^*\omega = d\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} = \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} \quad (1.2.53)$$

para o lado direito. Portanto,

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = d\mathcal{F} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} - \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} = d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0, \quad (1.2.54)$$

onde definimos a ação de $\mathcal{D}$ em uma p -forma η de valor em $\mathfrak{g}$ por

$$\mathcal{D}\eta \equiv d\eta + [\mathcal{A}, \eta]. \quad (1.2.55)$$

1.3 A Derivada Covariante em Fibrados Vetoriais Associados

É bastante comum, em teorias físicas, a necessidade de derivar um campo vetorial. Escrevendo as teorias em termos de fibrados vetoriais, tais campos vetoriais se tornam seções no fibrado. Por exemplo, um campo escalar carregado é considerado como uma seção de um fibrado de linha complexo (ou seja, um fibrado de fibra $\mathbb{C}$) associado a um $U(1)$ -fibrado $P(M, U(1))$. Temos, assim, que diferenciar seções covariantemente é muito importante na construção de ações invariantes de *gauge*.

Vimos, até agora, como instituir uma derivada covariante em um fibrado principal $P(M, G)$, a partir da 1-forma conectora ω . A partir daí, podemos também definir uma derivada covariante nos fibrados associados a P de uma maneira natural. Consideremos então, para um G -fibrado $P(M, G)$ de projeção π_P , uma seção σ_i sobre uma carta U_i de M , e a trivialização canônica $\phi_i(p, e) = \sigma_i(p)$. Seja também $\tilde{\gamma}$ um levantamento horizontal de uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow U_i$, com $\gamma(0) = p_0$ e $\tilde{\gamma}(0) = u_0$.

Associado a P , temos um fibrado vetorial $E = P \times_\rho V$ com a projeção π_E . Sejam $X \in T_{p_0}M$ um vetor tangente a $\gamma(t)$ em p_0 e $s \in \Gamma(M, E)$ uma seção, ou um campo vetorial, em M . Escrevemos um elemento de E como $[(u, v)] = \{(ug, \rho(g)^{-1}v); u \in P, v \in V, g \in G\}$.

Quando tomamos um representante da classe de equivalência, fixamos o *gauge*. Escolhemos então a seguinte forma,

$$s(p) = [(\sigma_i(p), \xi(p))], \quad \xi(p) \in V, \quad (1.3.1)$$

como um representante.

Para definir o transporte paralelo de um vetor em E ao longo de uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, procuramos uma definição que seja intrínseca, ou seja, independente da escolha de coordenadas adotadas na representação. Uma primeira escolha nos leva a olhar para 1.3.1, e definir que “ ξ é transportado paralelamente se $\xi(\gamma(t))$ é constante ao longo de $\gamma(t)$ ”. No entanto, tal “definição” é dependente da escolha da seção $\sigma_i(p)$: se considerada um outra seção $\sigma_j(p)$, temos por 1.1.21 que $\sigma_j(p) = \sigma_i(p)\theta_{ij}(p)$, e então (omitindo ρ para simplificar a notação e usando apenas t para a variação ao longo de $\gamma(t)$),

$$[(\sigma_i(t), \xi(t))] = [(\sigma_j(t), \theta_{ij}^{-1}(t)\xi(t))], \quad (1.3.2)$$

e o elemento $\theta_{ij}^{-1}(\gamma(t))\xi(\gamma(t))$ não é mais constante.

Definimos então um vetor como transportado paralelamente se é constante com respeito ao levantamento horizontal $\tilde{\gamma}$ de γ em P . Em outras palavras, uma seção $s(\gamma(t)) = [(\tilde{\gamma}(t), \eta(\gamma(t)))]$ é transportada paralelamente se η é constante ao longo de $\gamma(t)$. Essa definição é intrínseca pois se $\tilde{\gamma}'$ é outro levantamento horizontal de γ , então pode ser escrito como $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t)a$, $a \in G$, e temos ,

$$[(\tilde{\gamma}(t), \eta(t))] = [(\tilde{\gamma}'(t), a^{-1}\eta(t))] , \quad (1.3.3)$$

onde $\eta(t)$ está para $\eta(\gamma(t))$. Assim, se $\eta(t)$ é constante ao longo de $\gamma(t)$, também o é seu múltiplo constante $a^{-1}\eta(t)$.

Definimos a **derivada covariante** de $s(t)$ ao longo de $\gamma(t)$ em $p_0 = \gamma(0)$ por

$$\nabla_X s \equiv \left[\left(\tilde{\gamma}(0), \left. \frac{d}{dt} \eta(\gamma(t)) \right|_{t=0} \right) \right] , \quad (1.3.4)$$

onde X é o vetor tangente a $\gamma(t)$ em p_0 . Para que essa definição seja intrínseca, não deve depender da informação extra, que é o levantamento horizontal. Seja então $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t)a$, $a \in G$, outro levantamento horizontal de γ . Se escolhermos "o" levantamento horizontal como $\tilde{\gamma}'(t)$, temos um representante $[(\tilde{\gamma}'(t), a^{-1}\eta(t))]$. A derivada covariante é agora dada por

$$\left[\left(\tilde{\gamma}'(0), \left. \frac{d}{dt} \{a^{-1}\eta(t)\} \right|_{t=0} \right) \right] = \left[\left(\tilde{\gamma}'(0)a^{-1}, \left. \frac{d}{dt} \eta(t) \right|_{t=0} \right) \right] , \quad (1.3.5)$$

que concorda com a definida anteriormente. Assim, $\nabla_X s$ depende somente do vetor tangente X e das seções $s \in \Gamma(M, E)$, e não do levantamento horizontal $\tilde{\gamma}(t)$. Nossa definição depende somente de uma curva γ e uma conexão, e não de trivializações locais.

Até agora definimos a derivada covariante num ponto $p_0 = \gamma(0)$. Está claro que se X é um campo vetorial, ∇_X aplica uma seção s em uma nova seção $\nabla_X s$, assim ∇_X é tomada como uma aplicação $\Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E)$. Para ser mais preciso, tome $X \in \mathcal{T}(M)$ cujo valor em p é $X_p \in T_p M$. Há uma curva $\gamma(t)$ tal que $\gamma(0) = p$ e sua tangente em p é X_p . Então qualquer levantamento horizontal $\tilde{\gamma}(t)$ de γ nos permite calcular a derivada covariante $\nabla_X s|_p \equiv \nabla_{X_p} s$. Também definimos uma aplicação $\nabla : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E) \otimes \Omega^1(M)$ por

$$\nabla s(X) \equiv \nabla_X s; \quad X \in \mathcal{T}(M), \quad s \in \Gamma(M, E). \quad (1.3.6)$$

1.3.1 Expressão Local para a Derivada Covariante

É conveniente que tenhamos uma representação em coordenadas locais da derivada covariante. Dados o G -fibrado $P(M, G)$ e um fibrado vetorial associado $E = P \times_\rho V$, definimos

uma seção local $\sigma_i \in \Gamma(U_i, P)$ e usamos a trivialização canônica $\sigma_i(p) = \phi_i(p, e)$. Para $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva em U_i , escrevemos então seu levantamento horizontal $\tilde{\gamma}$ como

$$\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(t)g_i(t), \quad (1.3.7)$$

onde $g_i(t) \equiv g_i(\gamma(t)) \in G$.

Tomemos uma seção $e_\alpha(p) \equiv [(\sigma_i(p), e_\alpha^0)]$ de E , onde e_α^0 é o α -ésimo vetor básico de V , $(e_\alpha^0)^\beta = \delta_\alpha^\beta$. Temos

$$e_\alpha(t) = [(\tilde{\gamma}(t)g_i(t)^{-1}, e_\alpha^0)] = [(\tilde{\gamma}(t), g_i(t)^{-1}e_\alpha^0)], \quad (1.3.8)$$

onde $g_i(t)^{-1}$ atua em e_α^0 para compensar a mudança de base ao longo de γ . A derivada covariante de e_α é então dada por

$$\begin{aligned} \nabla_X e_\alpha &= \left[\left(\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt} \{g_i(t)^{-1}e_\alpha^0\} \Big|_{t=0} \right) \right] \\ &= \left[\left(\tilde{\gamma}(0), -g_i(t)^{-1} \left\{ \frac{d}{dt} g_i(t) \right\} g_i(t)^{-1}e_\alpha^0 \Big|_{t=0} \right) \right] \\ &= [(\tilde{\gamma}(0)g_i(0)^{-1}, \mathcal{A}_i(X)e_\alpha^0)]. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Assim,

$$\nabla_X e_\alpha = [(\sigma_i(0), \mathcal{A}_i(X)e_\alpha^0)]. \quad (1.3.10)$$

Agora, escrevendo $\mathcal{A}_i$ em componentes, temos $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu} dx^\mu = \mathcal{A}_{i\mu}^\alpha dx^\mu$, onde $\mathcal{A}_{i\mu}^\alpha \equiv \mathcal{A}_{i\mu}^\gamma (T_\gamma)^\alpha_\beta$. Então

$$\mathcal{A}_i(X)e_\alpha^0 = \frac{dx^\mu}{dt} e_\beta^0 \mathcal{A}_{i\mu}^\beta \delta_\alpha^\gamma = \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_{i\mu}^\beta e_\alpha^0. \quad (1.3.11)$$

Temos, assim, usando 1.3.9, que

$$\nabla_X e_\alpha = \left[\left(\sigma_i(0), \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_{i\mu}^\beta e_\alpha^0 \right) \right] = \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_{i\mu}^\beta e_\alpha e_\beta, \quad (1.3.12)$$

ou

$$\nabla e_\alpha = \mathcal{A}_i^\beta e_\alpha e_\beta. \quad (1.3.13)$$

Em particular, para uma curva coordenada x^μ , temos

$$\nabla_\mu e_\alpha = \mathcal{A}_{i\mu}^\beta e_\alpha e_\beta. \quad (1.3.14)$$

Por construção, a derivada covariante é independente da trivialização local, o que também é observado da forma local de $\nabla_X s$. Se $\sigma_i(p)$ e $\sigma_j(p)$ são seções locais de cartas sobrepostas

U_i e U_j , em $U_i \cap U_j$ temos $\sigma_i(p) = \sigma_j(p)\theta_{ij}(p)$. Na i -trivialização, temos

$$\begin{aligned}\nabla_X s &= \left[\left(\sigma_i(0), \frac{d\xi_i}{dt} + \mathcal{A}_i(X)\xi_i \right) \Big|_{t=0} \right] \\ &= \left[\left(\sigma_j(0)\theta_{ij}^{-1}, \frac{d}{dt}(\theta_{ij}\xi_j) + \mathcal{A}_i(X)\theta_{ij}\xi_j \right) \Big|_{t=0} \right] \\ &= \left[\left(\sigma_j(0), \frac{d\xi_j}{dt} + \mathcal{A}_j(X)\xi_j \right) \Big|_{t=0} \right].\end{aligned}\quad (1.3.15)$$

Vimos, então, que a derivada covariante é independente do levantamento horizontal tal como da seção local. O potencial de *gauge* $\mathcal{A}_i$ se transforma sob a mudança de trivialização tal que $\nabla_X s$ seja uma seção bem definida em E , e nesse senso, ∇_X é a derivada mais natural em um fibrado vetorial associado que é compatível com a conexão no fibrado principal P .

Fibrado Referencial

Consideremos o exemplo de um fibrado referencial LM sobre M , com TM seu fibrado associado. Notemos que $LM = P(M, GL(m, \mathbb{R}))$ e $TM = LM \times_\rho \mathbb{R}^m$, onde $m = \dim M$ e ρ é a representação $m \times m$ -matricial de $GL(m, \mathbb{R})$. Elementos de $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ são matrizes $m \times m$. Reescrevamos a conexão local $\mathcal{A}_i$ como $\mathcal{A}_i = \Gamma_{\mu\beta}^\alpha dx^\mu$. Achamos então que

$$\nabla_\mu e_\alpha = [(\sigma_i(0), \Gamma_\mu e_\alpha^0)] = \Gamma_{\mu\alpha}^\beta e_\beta. \quad (1.3.16)$$

Para uma seção geral (campo vetorial) $s(p) = [(\sigma_i(p), X_i(p))] = X_i^\alpha(p)e_\alpha$, nós temos

$$\nabla_\mu s = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} X_i^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha X_i^\beta \right) e_\alpha. \quad (1.3.17)$$

Convém, entretanto, observar que os papéis praticados por α, β, μ em $\Gamma_{\mu\beta}^\alpha$ são bem diferentes em seus caracteres: μ é o índice de $\Omega^1(M)$, enquanto que α e β são índices em $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$. Veremos, quando tratarmos as variáveis de Ashtekar para a gravitação, que $\Gamma_{\mu\beta}^\alpha$ corresponderá à nossa **conexão de spin**.

$SU(2)$ -Yang-Mills

Consideremos a teoria $SU(2)$ de Yang-Mills em M . Os fibrados relevantes são o $SU(2)$ -fibrado $P(M, SU(2))$ e seu fibrado associado $E = P \times_\rho \mathbb{C}^2$, onde tomamos a representação bidimensional. O potencial de *gauge* em uma carta U_i é

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu} dx^\mu = \mathcal{A}_{i\mu}^\alpha \left(\frac{\sigma_\alpha}{2i} \right) dx^\mu, \quad (1.3.18)$$

onde $\sigma_\alpha/2i$ são geradores de $SU(2)$, σ_α sendo as matrizes de Pauli. Sejam e_α^0 ($\alpha = 1, 2$)

vetores básicos de $\mathbb{C}^2$, e considere seções

$$e_\alpha(p) \equiv [(\sigma_i(p), e_\alpha^0)], \quad (1.3.19)$$

onde $\sigma_i(p)$ define uma trivialização canônica de P sobre U_i . Seja $\phi(p) = [(\sigma_i(p), \Phi^\alpha(p)e_\alpha^0)]$ uma seção de E sobre M . Ao longo de um levantamento horizontal $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(t)g(t)$, $g(t) \in SU(2)$, temos

$$\phi(t) = [(\tilde{\gamma}(t), g(t)^{-1}\Phi^\alpha(t)e_\alpha^0)]. \quad (1.3.20)$$

A derivada covariante de ϕ ao longo de $X = d/dt$ é

$$\begin{aligned} \nabla_X \phi &= \left[\left(\tilde{\gamma}(0), g(0)^{-1} \frac{d\Phi^\alpha(0)}{dt} e_\alpha^0 \right) \right] + [(\tilde{\gamma}(0), g(0)^{-1} \mathcal{A}_i(X)^\alpha_\beta \Phi^\beta(0) e_\alpha^0)] \\ &= X^\mu \left(\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x^\mu} + \mathcal{A}_{i\mu}^\alpha{}_\beta \Phi^\beta \right) e_\beta. \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

1.3.2 Curvatura Rederivada

Determinada a derivada covariante para fibrados associados, resta-nos achar uma expressão que relacione a curvatura no fibrado associado com a 2-forma de curvatura do fibrado principal. Vimos em 1.3.6 que a derivada covariante $\nabla_X s$ define um operador $\nabla : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E \otimes \Omega^1(M))$ por $\nabla s(X) = \nabla_X s$. Generalizando, definiremos a ação de ∇ em uma p -forma de valor vetorial $s \otimes \eta$, com $\eta \in \Omega^p(M)$, como

$$\nabla(s \otimes \eta) \equiv (\nabla s) \wedge \eta + s \otimes d\eta. \quad (1.3.22)$$

Dados U_i uma carta de M e σ_i uma seção de P sobre U_i , tomemos a trivialização canônica sobre U_i . Mostraremos agora que a forma local da curvatura aparece em

$$\nabla \nabla e_\alpha = e_\beta \otimes \mathcal{F}_i^\beta{}_\alpha, \quad (1.3.23)$$

onde $e_\alpha = [(\sigma_i, e_\alpha^0)] \in \Gamma(U_i, E)$. De fato, por cálculo direto, achamos que

$$\begin{aligned} \nabla \nabla e_\alpha &= \nabla (e_\beta \otimes \mathcal{A}_i^\beta{}_\alpha) = \nabla e_\beta \wedge \mathcal{A}_i^\beta{}_\alpha + e_\beta \otimes d\mathcal{A}_i^\beta{}_\alpha \\ &= e_\beta \otimes (d\mathcal{A}_i^\beta{}_\alpha + \mathcal{A}_i^\beta{}_\gamma \wedge \mathcal{A}_i^\gamma{}_\alpha) = e_\beta \otimes \mathcal{F}_i^\beta{}_\alpha. \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

Se $s(p) = \xi^\alpha(p)e_\alpha(p)$ é uma seção de E , então

$$\nabla \nabla s = e_\beta \otimes \mathcal{F}_i^\beta{}_\alpha \xi^\alpha. \quad (1.3.25)$$

Encerramos, dessa forma, nosso estudo sobre a geometria de fibrados e conexões. Além dos exemplos já discutidos aqui, relacionados com aplicações físicas, esperamos deixar claro à frente, seja de forma explícita ou apenas implicitamente pelo contexto, a importância que essas estruturas possuem no contexto de teorias físicas, especificamente nas teorias de *gauge*.

Sistemas Hamiltonianos com Vínculos

2.1 Invariância de *Gauge* e Vínculos

Em uma **teoria de *gauge***, as variáveis dinâmicas são especificadas com respeito a um referencial de escolha arbitrária em todo instante de tempo. Requer-se que as variáveis físicas importantes (**observáveis**) sejam independentes do referencial local, sendo assim **invariantes de *gauge***. Transformações das variáveis por mudanças no referencial arbitrário são então denominadas **transformação de *gauge***.

No capítulo anterior, vimos que essa arbitrariedade de escolha do referencial pode ser expressa por um fibrado principal, e as transformações de *gauge* são então encarregadas pela ação do grupo de estrutura sobre os elementos da fibra. Associamos então a conexão a um potencial de *gauge*, e as transformações de *gauge* resultam na condição de compatibilidade 1.2.11.

Nesse capítulo, expandiremos as noções de *gauge* trabalhadas até aqui. Veremos que a solução geral das equações de movimento contêm funções arbitrárias do tempo, e a essas funções atribuiremos o nome de **liberdade de *gauge***. Veremos também que um sistema de *gauge* é sempre um sistema hamiltoniano que admite vínculos.

2.1.1 Lagrangeano e Vínculos Primários

Consideremos o lagrangeano

$$\begin{aligned} L : TM &\rightarrow \mathbb{C} \\ (q^n, \dot{q}^n) &\mapsto L(q, \dot{q}). \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Os movimentos clássicos de um sistema são aqueles que fazem a ação

$$S_L = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt, \quad (2.1.2)$$

estacionária sob variações $\delta q^n(t)$ das variáveis q^n , $n = 1, \dots, m$, que se anulam em t_1 e t_2 . Aplicando o princípio variacional, extraímos então as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0. \quad (2.1.3)$$

Analisaremos as equações de Euler-Lagrange sob nossos propósitos reescrevendo-as na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{q}^{n'}}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{n'}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) + \frac{d\dot{q}^{n'}}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{n'}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} \ddot{q}^{n'} &= \frac{\partial L}{\partial q^n} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} \dot{q}^{n'}. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Assim, a aceleração será única em função das coordenadas e velocidades se a matriz $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} \right)$ for invertível. Caso contrário, o lagrangeano será dito **singular**.

Definimos o **momento canônico** como

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}, \quad (2.1.5)$$

e consideramos então a seguinte **transformação de Legendre**:

$$\begin{aligned} \rho_L : \quad TM &\rightarrow T^*M \\ (q^n, \dot{q}^n) &\mapsto (q^n, p_n). \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Para lagrangeanos singulares, não é possível resolver as velocidades completamente em termos dos momentos. Seja $m = \dim(M)$ e suponha que o posto da matriz $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} \right)$ seja $m - r$, com $0 < r \leq m$. Pelo teorema da função inversa, podemos resolver (ao menos localmente) $m - r$ velocidades para $m - r$ momentos e as velocidades remanescentes, ou seja,

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}(q, \dot{q}) \quad \Rightarrow \quad \dot{q}^A = v^A(q^a, p_A, \dot{q}^i), \quad (2.1.7)$$

onde adotamos $a, b, \dots = 1, \dots, m$; $A, B, \dots = 1, \dots, m - r$ e $i, j, \dots = m - r + 1, \dots, m$. Substituindo 2.1.7 nas equações remanescentes, $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$, concluímos que as equações não poderão depender de mais nenhum $\dot{q}^i$; caso contrário, poderíamos expressar esse $\dot{q}^i$ em função do resto tal como em 2.1.7 e excederíamos o posto $m - r$. Obtemos, portanto, r

equações da forma

$$p_i = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}) \right]_{\dot{q}^A = v^A(q^a, p_A, \dot{q}^i)} \equiv f_i(q^a, p_A). \quad (2.1.8)$$

Concluimos daí que os momentos não são independentes uns dos outros, e podemos construir certas relações

$$\phi_i(q, p) = 0, \quad (2.1.9)$$

com $i = 1, \dots, r$, da forma $\phi_i(p, q) \equiv p_i - f_i(q, p_A)$. Relações da forma 2.1.9 decorrem diretamente da definição dos momentos, sem a necessidade de equações de movimento, e portanto são denominadas **vínculos primários**.

2.1.2 Hamiltoniano Canônico

O hamiltoniano canônico é definido como

$$H_c = \dot{q}^n p_n - L(q, \dot{q}). \quad (2.1.10)$$

Apesar de incluir as velocidades em sua definição, observamos que H é função somente das coordenadas e momentos,

$$\delta H_c = \dot{q}^n \delta p_n + p_n \delta \dot{q}^n - \overbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}}^{p_n} \delta \dot{q}^n - \frac{\partial L}{\partial q^n} \delta q^n = \dot{q}^n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q^n} \delta q^n. \quad (2.1.11)$$

Logo,

$$\frac{\partial H_c}{\partial q^n} = -\frac{\partial L}{\partial q^n}, \quad \frac{\partial H_c}{\partial p_n} = \dot{q}^n, \quad \frac{\partial H_c}{\partial \dot{q}^n} = 0. \quad (2.1.12)$$

Entretanto, em uma teoria com lagrangeano singular, o hamiltoniano não é determinado de forma unívoca como uma função dos p 's e q 's. Isso porque os δp_n não são de todo independentes, mas são restritos a preservar os vínculos primários 2.1.9.

Denominamos um **hamiltoniano primário** correspondente a L a função

$$H'(q^a, p_a, \dot{q}^i) \equiv [p_a \dot{q}^a - L(q^a, p_a)]_{\dot{q}^A = v^A(q^a, p_A, \dot{q}^i)}. \quad (2.1.13)$$

Se reescrevemos a expressão como

$$H'(q^a, p_a, v^i) = p_A v^A(q^a, p_B, v^j) + p_i v^i - L(q^a, v^A(q^a, p_B, v^j), v^i) \quad (2.1.14)$$

e diferenciamos com respeito a v^i , observamos que o hamiltoniano primário é linear em v^i ,

com coeficientes ϕ_i :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H'(q^a, p_a, \dot{q}^i)}{\partial v^i} &= p_A \frac{\partial v^A}{\partial v^i} + p_i - \frac{\partial L}{\partial v^A} \frac{\partial v^A}{\partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial v^i} \\
 &= \left[p_A - \frac{\partial L}{\partial v^A} \right] \frac{\partial v^A}{\partial v^i} + \left[p_i - \frac{\partial L}{\partial v^i}(q^a, p_A, v^i) \right] \\
 &= p_i - f_i(q, p_A) = \phi_i(q, p).
 \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Como conclusão, podemos escrever

$$H'(q, p) = H(q, p) + v^i \phi_i(q, p), \tag{2.1.16}$$

onde H é independente das velocidades v^i . Dessa forma, as equações canônicas 2.1.12 podem ser reescritas da forma

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + v^i \frac{\partial \phi_i}{\partial p_n}, \quad \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^n} - v^i \frac{\partial \phi_i}{\partial q^n}, \quad \phi_i(q, p) = 0, \tag{2.1.17}$$

que podem ser derivadas pelo princípio variacional

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{q}^n p_n - H - v^i \phi_i) = 0, \tag{2.1.18}$$

para variações arbitrárias de δq^n , δp_n e δv^i , sujeitas à restrição $\delta q^n(t_1) = \delta q^n(t_2) = 0$. Para demonstrar isso, fazemos

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{q}^n p_n - H - v^i \phi_i) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\dot{q}^n \delta p_n + p_n \delta \dot{q}^n - \frac{\partial H}{\partial p_n} \delta p_n - \frac{\partial H}{\partial q^n} \delta q^n - v^i \frac{\partial \phi_i}{\partial q^n} \delta q^n - \phi_i \delta v^i \right) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\dot{q}^n - \frac{\partial H}{\partial p_n} - v^i \frac{\partial \phi_i}{\partial p_n} \right) \delta p_n - \left(\frac{\partial H}{\partial q^n} + v^i \frac{\partial \phi_i}{\partial q^n} \right) \delta q^n - \phi_i \delta v^i + p_n \delta \dot{q}^n \right].
 \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

Integramos então o último termo por partes,

$$\int p_n \delta \frac{d}{dt} q^n dt = \int p_n \frac{d}{dt} \delta q^n dt = \overbrace{p_n \delta q^n}^0 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int \dot{p}_n \delta q^n dt. \tag{2.1.20}$$

Como δp_n , δq^n e δv^i são arbitrários, encontramos

$$\dot{q}^n - \frac{\partial H}{\partial p_n} - v^i \frac{\partial \phi_i}{\partial p_n} = 0, \quad (2.1.21a)$$

$$\dot{p}_n + \frac{\partial H}{\partial q^n} + v^i \frac{\partial \phi_i}{\partial q^n} = 0, \quad (2.1.21b)$$

$$\phi_i = 0. \quad (2.1.21c)$$

Observamos ainda da ação que a teoria é invariante sob a transformação $H \mapsto H + c^k \phi_k$. Se introduzimos os colchetes de Poisson

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i}, \quad (2.1.22)$$

com F e G funções de (p, q) , podemos reescrever as equações de movimento como

$$\dot{F} = \{F, H\} + v^i \{F, \phi_i\}. \quad (2.1.23)$$

Concluindo, o espaço de fase P do sistema vinculado tem então por coordenadas q^n e p_n , enquanto v^i são multiplicadores de Lagrange e não seguem qualquer trajetória dinâmica prescrita, sendo completamente arbitrários. Convém ainda introduzir o símbolo de **igualdade fraca** “ $\approx$ ” para equações com vínculos:

$$\phi_j \approx 0. \quad (2.1.24)$$

Isso enfatiza que ϕ_j é numericamente restrito a zero, mas não se anula identicamente ao longo do espaço de fase, ou seja, que possui colchetes de Poisson não-nulos com as variáveis canônicas. Assim, duas funções que coincidam na subvariedade definida pelos vínculos $\phi_m \approx 0$ são ditas **fracamente iguais**, e são escritas $F \approx G$.

2.1.3 Vínculos secundários

Por consistência, requeremos que as relações de vínculos sejam constantes no tempo, $\dot{\phi}_m = 0$. Dessa forma, da equação de movimento obtemos uma **condição de consistência**,

$$\{\phi_m, H\} + v^i \{\phi_m, \phi_i\} \approx 0. \quad (2.1.25)$$

Essa condição pode se resumir em três casos:

- (i) A equação reduz-se identicamente a $0 = 0$;
- (ii) Reduz-se a uma equação independente de v^i , envolvendo apenas p e q , assumindo uma

forma

$$\chi(q, p) \approx 0, \quad (2.1.26)$$

que denominamos **vínculo secundário** (por decorrer das equações de movimento). Nesse novo vínculo, aplica-se novamente a condição de consistência, e novamente, até se exaurirem as condições.

O tratamento dos vínculos secundários se dará da mesma forma que os vínculos primários. Teremos então k equações adicionais, totalizando, de uma maneira uniforme,

$$\phi_j \approx 0, \quad j = 1, \dots, r + k = J; \quad (2.1.27)$$

(iii) Estabelece uma relação que impõe uma restrição sobre os v^i . Se assumimos que 2.1.27 fornece um conjunto completo de vínculos, temos que

$$\{\phi_j, H\} + v^i \{\phi_j, \phi_i\} \approx 0 \quad (2.1.28)$$

com $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, J$, formam um conjunto de J equações lineares inhomogêneas nos $r \leq J$ v^i desconhecidos, com coeficientes que são funções de p e q . A solução mais geral para essas equações será da forma

$$v^i \approx U^i + v^a V_a^i, \quad (2.1.29)$$

onde U^i é uma solução particular da equação inhomogênea e V_a^i é cada uma das $a = 1, \dots, A$ soluções independentes do sistema homogêneo associado,

$$V_a^i \{\phi_j, \phi_i\} \approx 0. \quad (2.1.30)$$

Os coeficientes v^a são totalmente arbitrários.

Usando que

$$\{F, U^m \phi_m\} = U^m \{F, \phi_m\} + \{F, U^m\} \phi_m \approx U^m \{F, \phi_m\}, \quad (2.1.31a)$$

$$\{F, V_a^m \phi_m\} = V_a^m \{F, \phi_m\} + \{F, V_a^m\} \phi_m \approx V_a^m \{F, \phi_m\} \quad (2.1.31b)$$

e substituindo nas equações de movimento, chegamos em

$$\dot{F} \approx \{F, H' + v^a \phi_a\}, \quad (2.1.32)$$

onde representamos $H' = H + U^m \phi_m$, $\phi_a = V_a^m \phi_m$. Denominaremos então $H_T = H' + v^a \phi_a$ de **hamiltoniano total**. Equações da forma $\dot{F} \approx \{F, H_T\}$ contêm portanto A funções

arbitrárias v^a e são equivalentes, por construção, às equações de movimento originais do lagrangeano.

2.2 Vínculos de Primeira e Segunda-classe

Uma função é dita de **primeira-classe** se

$$\{F, \phi_j\} \approx 0 \quad (2.2.1)$$

para todo $j = 1, \dots, J$ ou é dita de **segunda-classe**, caso contrário. Se F e G são de primeira-classe, então podemos escrever $\{F, \phi_j\} \approx f_j^{j'} \phi_{j'}$ e $\{G, \phi_j\} = g_j^{j'} \phi_{j'}$. Utilizando a identidade de Jacobi, vemos que o comutador de F e G também é de primeira-classe:

$$\begin{aligned} \{\{F, G\}, \phi_j\} &= \{F, \{G, \phi_j\}\} - \{G, \{F, \phi_j\}\} = \{F, g_j^{j'} \phi_{j'}\} - \{G, f_j^{j'} \phi_{j'}\} \\ &= \{F, g_j^{j'}\} \phi_{j'} + g_j^{j'} f_j^{j''} \phi_{j''} - \{G, f_j^{j'}\} \phi_{j'} - f_j^{j'} g_j^{j''} \phi_{j''} \approx 0. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Temos também, decorrendo diretamente da condição de consistência, que H' e ϕ_a são de primeira-classe. Ainda mais, como $v^a V_a^i$ é a solução mais geral da equação homogênea, $\{\phi_a\}$ é um conjunto completo de vínculos de primeira-classe.

2.2.1 Transformações de *gauge*

A presença das funções arbitrárias v^a no hamiltoniano total nos mostra que, para um mesmo estado físico, podemos ter mais de um conjunto de variáveis canônicas que o representem, ou seja, nem todos os p 's e q 's são observáveis. Consideremos duas escolhas de funções arbitrárias v^a , $\tilde{v}^a$ em um tempo t_1 e olhemos para a variável dinâmica F no tempo $t_2 = t_1 + \delta t$,

$$\delta F = \left(\dot{F}_{v^a} - \dot{F}_{\tilde{v}^a} \right) \delta t \approx \{F, (v^a - \tilde{v}^a) \phi_a\} \delta t \approx \delta v^a \{F, \phi_a\} \approx 0, \quad (2.2.3)$$

onde $\delta v^a = (v^a - \tilde{v}^a) \delta t$. Portanto, transformações do tipo 2.2.3 não alteram o estado físico no tempo t_2 . Concluimos, portanto, que vínculos primários de primeira-classe geram transformações de *gauge*.

Outra possibilidade é aplicando a uma variável dinâmica F quatro transformações sucessivas do tipo 2.2.3, com parâmetros δv^a dados por $\epsilon^a, \eta^a, -\epsilon^a, -\eta^a$, obtendo, com o uso da

identidade de Jacobi,

$$\delta F \approx \epsilon^a \eta^{a'} \{F, \{\phi_a, \phi_{a'}\}\} + O(\epsilon^2) + O(\eta^2). \quad (2.2.4)$$

Como ϵ^a e η^a são arbitrários, também o é $\epsilon^a \eta^{a'}$ e concluímos que o colchete de Poisson $\{\phi_a, \phi_{a'}\}$ de quaisquer dois vínculos primários de primeira-classe gera uma transformação de *gauge*.

Comparemos agora os valores da variável dinâmica F no tempo $t + \epsilon$ obtida por

- (i) fazendo uma transformação de *gauge* 2.2.3 de parâmetro $\delta v^a = \eta^a$ e então evoluindo o sistema com H' ,
- (ii) fazendo as mesmas operações na ordem inversa.

A diferença resultante deve ser uma transformação de *gauge*. De fato, temos

$$\delta F = (\{F, \phi_a\}, H') - \{F, H'\}, \phi_a) \epsilon \eta^a = \{F, \{\phi_a, H'\}\} \epsilon \eta^a, \quad (2.2.5)$$

o que mostra que $\{\phi_a, H'\}$ gera uma transformação de *gauge*.

Vemos, dessa forma, que vínculos primários de primeira-classe geram transformações de *gauge*. Apesar das considerações acima não dizerem nada a respeito dos vínculos secundários de primeira-classe, e inclusive sermos mesmo capazes de construir contraexemplos “patológicos” que mostrem que esses podem não gerar transformações de *gauge*, é comum se adotar, como regra geral, a **conjectura de Dirac**:

Todo vínculo de primeira-classe gera uma transformação de gauge.

Em distinção, denotaremos os vínculos de primeira-classe por γ_a e os de segunda-classe χ_α , reservando ϕ_j para quando nos referirmos ao conjunto de todos os vínculos indistintamente.

2.2.2 Hamiltoniano estendido

O hamiltoniano total possui funções de *gauge* arbitrárias relacionadas a vínculos primários de primeira-classe; acrescentaremos agora à função também os vínculos secundários de primeira-classe, multiplicados por funções arbitrárias, resultando no **hamiltoniano estendido**:

$$H_E = H' + u^a \gamma_a, \quad (2.2.6)$$

em que a corre todo o conjunto de vínculos de primeira-classe.

A evolução predita por H' , H_T ou H_E é a mesma para variáveis dinâmicas invariantes de *gauge* (colchetes de Poisson com γ_a se anulam fracamente), porém devemos utilizar H_E se lidamos com outros tipos de variáveis para contar com toda a liberdade de *gauge*. Convém, no entanto, enfatizar que é H_T que gera as equações de movimento lagrangeanas, que H_E contém mais funções arbitrárias do tempo que H_T .

2.2.3 Colchete de Dirac

Vínculos de segunda-classe não podem ser interpretados como geradores de *gauge*, uma vez que uma transformação por um vínculo de segunda-classe χ não preserva todos os vínculos $\phi_j \approx 0$ e portanto mapeia um estado permitido em um não-permitido. Discutiremos então um modo de tratar esses vínculos.

Começando com um exemplo simples, seja um sistema de N pares de coordenadas canônicas tal que o primeiro par (q^1, p_1) é vinculado a zero:

$$\chi_1 = q^1 \approx 0, \quad \chi_2 = p_1 \approx 0, \quad \{\chi_1, \chi_2\} = 1 \text{ (segunda classe)}.$$

Podemos simplesmente descartar o primeiro grau de liberdade, pois esse não é importante. Trabalhamos então com o colchete de Poisson modificado:

$$\{F, G\}^* = \sum_{n=2}^N \left(\frac{\partial F}{\partial q^n} \frac{\partial G}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial G}{\partial q^n} \right). \quad (2.2.7)$$

O colchete modificado dos dois vínculos com qualquer variável arbitrária é identicamente zero, então trabalhando com $\{, \}^*$ podemos pôr $\chi_\alpha = 0$ antes de calcularmos o colchete (igualdade forte).

Seja $C_{jj'} = \{\phi_j, \phi_{j'}\}$ a matriz do colchete de Poisson na superfície de vínculos. Se $\det C_{jj'} \approx 0$, então existe (ao menos) um vínculo de primeira-classe. Podemos ordenar os vínculos de forma que a matriz fique da forma

$$\begin{matrix} & \gamma_a & \chi_\alpha \\ \gamma_b & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{\beta\alpha} \end{pmatrix} \\ \chi_\beta & \end{matrix}, \quad (2.2.8)$$

onde $C_{\beta\alpha}$ é uma matriz anti-simétrica que é invertível em qualquer lugar na superfície de vínculo. Notemos que o número de vínculos de segunda-classe deve ser par, caso contrário a matriz $C_{\beta\alpha}$ teria determinante nulo, contrariando o fato que $C_{\alpha\beta}$ é invertível, existindo $C^{\alpha\beta}$

tal que $C^{\alpha\beta}C_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$.

Definimos o **colchete de Dirac** por

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \chi_\alpha\}C^{\alpha\beta}\{\chi_\beta, G\}. \quad (2.2.9)$$

Temos, assim, as seguintes propriedades satisfeitas:

1. $\{F, G\}^* = -\{G, F\}^*$;
2. $\{F, GR\}^* = \{F, G\}^*R + G\{F, R\}^*$;
3. $\{\{F, G\}^*, R\}^* + \{\{R, F\}^*, G\}^* + \{\{G, R\}^*, F\}^* = 0$;
4. $\{\chi_\alpha, F\}^* = 0$ para qualquer F ;
5. $\{F, G\}^* \approx \{F, G\}$ para G primeira-classe e F qualquer;
6. $\{R, \{F, G\}^*\}^* \approx \{R, \{F, G\}\}$ para F e G primeira-classe e R qualquer.

Preserva-se, portanto

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\} \approx \{F, H_E\}^*, \quad (2.2.10)$$

pois H_E é de primeira-classe e também

$$\{F, \gamma_a\} \approx \{F, \gamma_a\}^* \quad (2.2.11)$$

para qualquer F .

Dessa forma, o colchete de Poisson pode ser descartado e todas as equações da teoria reformuladas em termos do colchete de Dirac. Os vínculos de segunda-classe tornam-se então identidades fortes expressando algumas variáveis canônicas em termos de outras.

2.3 Fixação de Gauge e Invariantes

Observáveis clássicos

Um **observável clássico** é uma função na superfície de vínculo que é invariante de *gauge*. Assim, pode ser descrito como uma função F no espaço de fase tal que

$$\{F, \gamma_a\}^* \approx 0, \quad (2.3.1)$$

e de modo que duas dessas funções são identificadas se coincidirem na superfície de vínculo. O conceito de observáveis, portanto, envolve:

- (i) restrição à superfície de vínculo, e
- (ii) condição de invariância de *gauge*.

Se uma função f é conhecida em um *gauge* específico, podemos construir uma **extensão invariante de gauge** de f , $F(p, q)$. Agora, dado G uma função arbitrária no espaço de fase, podemos também considerar sua restrição g em um dado *gauge* e então estender para uma função invariante $\tilde{G}$, que coincide com G no *gauge* escolhido.

Gauges canônicos

Podemos eliminar a ambiguidade causada pela presença de vínculos de primeira-classe e a liberdade de *gauge* associada a esses impondo condições adicionais nas variáveis canônicas, de modo que haja uma correspondência injetora entre os estados físicos e os valores das variáveis canônicas independentes. Isso é permitido porque as condições removem os elementos arbitrários não observáveis da teoria, não afetando as propriedades observáveis. Convém somente observar que essas não são uma consequência da teoria, mas uma imposição para evitar a “múltipla contagem de estados”. A essas condições denominamos **condições de gauge canônicas**.

Seja um conjunto satisfatório de condições de *gauge*

$$C_b(q, p) \approx 0. \quad (2.3.2)$$

Dado qualquer conjunto de variáveis canônicas, deve haver uma transformação de *gauge* que o mapeia sobrejetoramente sobre $\{C_b\}$ e que pode ser obtida pela iteração de transformações infinitesimais $\delta u^a \{F, \gamma_a\}$. Isso garante que 2.3.2 não afeta as propriedades fisicamente relevantes do sistema, mas apenas restringe a liberdade de *gauge*, e como o número de parâmetros

δu^a é igual ao número de vínculos γ_a , concluímos que o número de condições independentes 2.3.2 não pode ser maior que o número de γ_a 's independentes. Por outro lado, as condições devem fixar o *gauge* completamente e não deve existir nenhuma transformação de *gauge* além da identidade que preserve 2.3.2. Em outras palavras, as equações

$$\delta u^a \{C_b, \gamma_a\} \approx 0 \quad (2.3.3)$$

devem implicar $\delta u^a = 0$, o que é possível somente se o número de equações independentes for igual ou maior que o número de δu^a . Dessa forma, concluímos que, para fixar o *gauge* completamente,

o número de condições de gauge independentes deve ser igual ao número de vínculos de primeira-classe independentes.

Os colchetes de Poisson geram então uma matriz quadrada invertível, ou seja, $\det\{C_b, \gamma_a\} \neq 0$. Mas isso expressa que os vínculos C_b, γ_a formam juntos um conjunto de segunda-classe, ou seja, após a fixação de *gauge* completa, não restam mais vínculos de primeira-classe.

Graus de liberdade

Após fixado o *gauge*, encontramos o seguinte número de graus de liberdade do sistema físico:

$$\begin{aligned} 2 \times (\text{graus de liberdade físicos}) &= (\text{variáveis canônicas independentes}) \\ &= (\text{total variáveis}) - (\text{vínculos 2ª-classe}) - (\text{vínculos 1ª-classe}) - (\text{condições de gauge}) \\ &= (\text{total variáveis}) - (\text{vínculos segunda-classe}) - 2 \times (\text{vínculos primeira-classe}). \end{aligned}$$

Vemos aqui também a consistência física do fato de o número de vínculos de segunda-classe ser par.

2.4 Geometria da Superfície de Vínculo

Analogia em Minkowski

A descrição geométrica da superfície de vínculo é baseada na estrutura que essa herda de seu mergulho no espaço de fase. Uma boa analogia é dada pelo estudo de superfícies mergulhadas numa variedade pseudo-riemanniana; tomaremos então um espaço de Minkowski.

Do mergulho, induz-se uma métrica do espaço de Minkowski sobre a superfície. Se $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e $x^\lambda = x^\lambda(y^i)$ são equações paramétricas da superfície (com $\partial_i x^\lambda \neq 0$ para que y^i seja um bom sistema de coordenadas na superfície) então a métrica induzida é dada por

$$g_{ij} = \eta_{\lambda\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^i} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^j}. \quad (2.4.1)$$

De relevância física, a assinatura da métrica induzida caracteriza a superfície como tipo espaço, nula ou tipo tempo. Tal caracterização é intrínseca da superfície mergulhada e portanto não depende de como ela é representada. Vale a pena ainda destacar que a métrica induzida não pode ter um número arbitrário de direções nulas ou tipo-tempo, pois isso entraria em conflito com a assinatura da métrica de Minkowski. Assim, uma superfície não pode conter duas direções tipo-tempo ortogonais, uma vez que não se pode achar dois vetores tipo-tempo ortogonais no espaço de Minkowski.

2.4.1 Geometria do espaço de fase (geometria simplética)

Considerações similares ao exemplo acima podem ser feitas para superfícies mergulhadas no espaço de fase, caracterizando-as pelo posto de um tensor induzido apropriado. Nesse caso, não há em geral uma métrica natural do espaço de fase, mas podemos fazer uso da estrutura dos colchetes de Poisson. Se denotamos as coordenadas do espaço de fase por x^λ , podemos definir um tensor antissimétrico contravariante de posto 2,

$$\sigma^{\lambda\mu} = \{x^\lambda, x^\mu\}, \quad (2.4.2)$$

satisfazendo as propriedades:

- (i) $\det \sigma^{\lambda\mu} \neq 0$;
- (ii) $\sigma^{[\lambda\mu}{}_{,\rho} \sigma^{\nu]\rho} = 0$ (identidade de Jacobi);
- (iii) Dadas duas funções F e G ,

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial q^i} \frac{\partial x^\mu}{\partial p^i} \frac{\partial G}{\partial x^\mu} - \frac{\partial F}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial p^i} \frac{\partial x^\mu}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial x^\mu} = F_{,\lambda} \sigma^{\lambda\mu} G_{,\mu}; \quad (2.4.3)$$

- (iv) (decorrente de (i) e (ii)) Existe uma inversa $\sigma_{\lambda\mu}$ tal que $\sigma_{\lambda\mu} \sigma^{\mu\rho} = \delta_\lambda^\rho$ e assim temos $\det \sigma_{\lambda\mu} \neq 0$ e $\sigma_{[\lambda\mu, \nu]} = 0$. $\sigma_{\lambda\mu}$ é conhecido como **2-forma simplética**.

Por meio dessas propriedades, definimos uma **estrutura simplética**.

Podemos agora induzir uma 2-forma numa superfície Σ mergulhada no espaço de fase, de coordenadas y^i , por

$$\sigma_{ij} = \sigma_{\lambda\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^i} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^j}. \quad (2.4.4)$$

Teremos aqui ainda que $\sigma_{[ij,k]} = 0$, mas σ_{ij} pode não ser invertível, pois pode conter **auto-vetores nulos**, i.e., autovetores X_a^λ tais que $\sigma_{\lambda\mu} X_a^\lambda X_a^\mu = 0$ (aqui convém não confundir com o vetor $\vec{0}$, também chamado de vetor nulo, o que gera ambiguidade). Estabeleceremos a seguir uma relação entre o posto de σ_{ij} e a classe da superfície de vínculo.

Proposição 2.4.1 *Seja N a dimensão do espaço de fase e $N - M$ a dimensão de Σ . Então $N - 2M \leq \text{posto } \sigma_{ij} \leq N - M$.*

Demonstração. σ_{ij} é uma matriz antissimétrica $(N - M) \times (N - M)$. Tomemos uma base para vetores no espaço de fase:

- (i) Os primeiros X_a^λ ($a = 1, \dots, A$) como uma base do espaço dos autovetores nulos de σ_{ij} , tangentes a Σ ;
- (ii) Complete com vetores apropriados $Y_{\bar{a}}^\lambda$ ($\bar{a} = A + 1, \dots, N - M$) para uma base do espaço tangente a Σ ;
- (iii) Por fim, adicione M vetores Z_α^λ ($\alpha = N - M + 1, \dots, N$) para completar todo o espaço vetorial.

Por construção, tem-se

$$\sigma_{\lambda\mu} X_a^\lambda X_b^\mu = \sigma_{\lambda\mu} X_a^\lambda Y_{\bar{a}}^\mu = 0.$$

Considere agora as M equações lineares e homogêneas para os A coeficientes desconhecidos A^a :

$$A^a X_a^\lambda \sigma_{\lambda\mu} Z_\alpha^\mu = 0.$$

Se $A > M$, essas equações possuiriam soluções não-triviais não importando o que $\sigma_{\lambda\mu} X_a^\lambda Z_\alpha^\mu$ seja (mais variáveis que equações), mas nesse caso se acharia um vetor não-nulo $X^\lambda = A^a X_a^\lambda$ que possui produto nulo $\sigma_{\lambda\mu} X^\lambda Z^\mu$ com qualquer vetor Z^μ , contradizendo que $\det \sigma_{\lambda\mu} \neq 0$. Assim, $A \leq M$ e o limite inferior no posto de σ_{ij} é $N - 2M$. $\square$

Superfície de vínculo de primeira-classe

Consideremos primeiramente o caso em que temos somente vínculos γ_a ($a = 1, \dots, M$) de primeira-classe. Os vínculos definem vetores X_a^λ através de

$$X_a^\lambda = \sigma^{\lambda\mu} \partial_\mu \gamma_a, \quad (2.4.5)$$

às vezes chamados **campos vetoriais hamiltonianos** associados às funções γ_a . Esses satisfazem a relação $X_a^\lambda \partial_\lambda F \equiv \partial_a F = \{F, \gamma_a\}$, pois

$$X_a^\lambda \partial_\lambda F = \sigma^{\lambda\mu} \partial_\mu \gamma_a \partial_\lambda F = \partial_\lambda F \sigma^{\lambda\mu} \partial_\mu \gamma_a = \{F, \gamma_a\}. \quad (2.4.6)$$

A classificação da 2-forma simplética é dada a seguir:

Teorema 2.4.2 *A 2-forma induzida σ_{ij} é maximamente degenerada,*

$$\text{posto } \sigma_{ij} = N - 2M \quad (2.4.7)$$

e as direções nulas são geradas pelos vetores X_a^λ .

Demonstração. Sabemos que $N - 2M \leq \text{posto } \sigma_{ij} \leq N - M$. Então, temos que mostrar a existência de M vetores nulos linearmente independentes. Um vetor Y^λ é tangente a $\gamma_a = 0$ se e somente se $Y^\lambda \partial_\lambda \gamma_a \approx 0$. Isso implica

- (i) que os M vetores nulos X_a^λ associados aos vínculos (de primeira-classe) γ_a são tangentes a $\gamma_a = 0$, uma vez que $X_b^\lambda \partial_\lambda \gamma_a = \{\gamma_a, \gamma_b\} \approx 0$;
- (ii) que $\sigma_{\lambda\mu} X_a^\lambda Y^\mu \approx 0$ sempre que Y^μ for tangente à superfície de vínculo, pois

$$\sigma_{\lambda\mu} X_a^\lambda Y^\mu = \sigma_{\lambda\mu} \sigma^{\lambda\nu} \partial_\nu \gamma_a Y^\mu = -\sigma_{\lambda\mu} \sigma^{\lambda\nu} \partial_\nu \gamma_a Y^\mu = -\delta_\mu^\nu \partial_\nu \gamma_a Y^\mu = -Y^\mu \partial_\mu \gamma_a \approx 0.$$

Portanto, os X_a^λ são auto-vetores da 2-forma induzida, o que prova o teorema.

□

Dado um espaço vetorial simplético V com uma 2-forma simplética ω arbitrária e um subconjunto F de V , definimos o **aniquilador** de F como o conjunto $F^\perp \equiv \{u \in V; \omega(u, v) = 0, \forall v \in F\}$. Baseado nisso, F é denominado

- (a) isotrópico se $F \subset F^\perp$;
- (b) co-isotrópico se $F^\perp \subset F$;
- (c) lagrangeano se $F = F^\perp$;

(d) simplético se $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Uma subvariedade N de uma variedade M com estrutura simplética ω é dita (a) – (d) se $T_p N$ é (a) – (d) em cada ponto $p \in N$. Concluimos, portanto, que superfícies de vínculo de primeira-classe são **co-isotrópicas**, pois contêm todas as direções “ortogonais” a elas pela ação de $\sigma_{\lambda\mu}$.

Ainda mais, os vetores X_a^λ sobre as superfícies de vínculo são geradores de subvariedades M -dimensionais (**superfícies nulas**), pois

$$[X_a, X_b]^\lambda = \sigma^{\lambda\mu} (C_{ab}^c \gamma_c)_{,\mu} = C_{ab}^c X_c^\lambda + \gamma_c \sigma^{\lambda\mu} \partial_\mu C_{ab}^c \approx C_{ab}^c X_c^\lambda, \quad (2.4.8)$$

formando assim uma álgebra de Lie (ou seja, geram espaços tangentes de uma variedade M -dimensional). Dessa forma, qualquer vetor tangente às M -superfícies geradas pelos X_a^λ é aniquilado pela 2-forma induzida. Como os X_a^λ também geram transformações de *gauge*, vemos que as *superfícies nulas coincidem com as órbitas de gauge*.

Vínculos de segunda-classe

Olharemos agora para a situação em que temos somente vínculos de segunda-classe $\chi_\alpha = 0$. Definimos então M vetores $X_\alpha^\lambda = \sigma^{\lambda\mu} \partial_\mu \chi_\alpha$.

Lema 2.4.3 *Nenhuma combinação linear de X_α^λ é tangente à superfície de vínculo.*

Demonstração. Um vetor Y^λ é tangente a $\chi_\alpha = 0$ se e somente se $Y^\lambda \partial_\lambda \chi_\alpha \approx 0$. Se $Y^\lambda \approx a^\alpha X_\alpha^\lambda$, vê-se que

$$a^\beta X_\beta^\lambda \partial_\lambda \chi_\alpha = a^\beta \sigma^{\lambda\mu} \partial_\mu \chi_\beta \partial_\lambda \chi_\alpha = a^\beta \chi_{\alpha,\lambda} \sigma^{\lambda\mu} \chi_{\beta,\mu} = a^\beta \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} = a^\beta C_{\alpha\beta},$$

ou seja, $Y^\lambda \partial_\lambda \chi_\alpha \approx a^\beta C_{\alpha\beta}$. Como $C_{\alpha\beta}$ é invertível, $a^\beta C_{\alpha\beta}$ se anula fracamente se e somente se $a^\beta \approx 0$, ou seja, $Y^\lambda \approx 0$. $\square$

Partindo disso, podemos classificar a superfície de vínculo a seguir.

Teorema 2.4.4 *Uma superfície $\chi_\alpha = 0$ é de segunda-classe se e somente se σ_{ij} é de posto máximo $N - M$, ou seja, $\det \sigma_{ij} \neq 0$.*

Demonstração. Os vetores X_α^λ e suas combinações lineares são os únicos para os quais o produto $\sigma_{\lambda\mu} Y^\lambda X_\alpha^\mu$ é igual a zero para vetores arbitrários tangentes Y^λ . Isso porque um vetor

genérico tangente a $\chi_\alpha = 0$ é sujeito apenas às condições $Y^\lambda \partial_\lambda \chi_\alpha \equiv \sigma_{\lambda\mu} Y^\mu X_\alpha^\mu = 0$ e a nenhuma outra. Nesses termos, a 2-forma induzida σ_{ij} é degenerada se e só se existe ao menos uma combinação linear não-nula $a^\alpha X_\alpha^\mu$ de vetores X_α^μ que é tangente a $\chi_\alpha = 0$, isso é, se e somente se existe ao menos uma solução não-nula de $a^\alpha X_\alpha^\mu \partial_\mu \chi_\beta \equiv a^\alpha C_{\beta\alpha} = 0$. Mas, pelo teorema anterior, vemos que não há tal solução quando os vínculos são de segunda-classe. Por outro lado, se $a^\alpha C_{\beta\alpha} = 0$ implica $a^\alpha = 0$, então a matriz $C_{\beta\alpha}$ é invertível e os vínculos são de segunda-classe. $\square$

O teorema 2.4.4 permite a definição de uma superfície de segunda-classe sem referência à sua representação explícita pelas equações de vínculo $\chi_\alpha = 0$.

Devemos agora analisar como proceder com os colchetes de Dirac ao se utilizar a estrutura simplética. Dadas duas funções $f(y^i)$, $g(y^i)$ em $\chi_\alpha = 0$, definimos o colchete

$$\{f, g\}^* \equiv \frac{\partial f}{\partial y^i} \sigma^{ij} \frac{\partial g}{\partial y^j}, \quad (2.4.9)$$

com $\sigma^{ij} \sigma_{jk} = \delta_k^i$.

Teorema 2.4.5 *O colchete de Dirac associado aos vínculos de segunda-classe $\chi_\alpha = 0$ é simplesmente o colchete de Dirac induzido na superfície $\chi_\alpha = 0$. Mais precisamente,*

$$\{F, G\}^*|_{\chi_\alpha=0} = \{f, g\}^* \quad (2.4.10)$$

onde $F|_{\chi_\alpha=0} = f$, $G|_{\chi_\alpha=0} = g$.

Demonstração. Ambos os lados são independentes de coordenadas. Assim, é suficiente verificar a igualdade em um sistema de coordenadas conveniente. Para esse fim, estendemos além de $\chi_\alpha = 0$ as coordenadas y^i ali definidas, requerendo que $\{y^i, \chi_\alpha\} \approx 0$. Isso é possível porque se $\bar{y}^i$ é uma extensão arbitrária de y^i , então $\bar{y}^i + \lambda^{i\alpha} \chi_\alpha$ com $\lambda^{i\alpha} C_{\alpha\beta} = -\{\bar{y}^i, \chi_\beta\}$ preenche o requerimento necessário. Em seguida, tomamos y^i e χ_α como coordenadas do espaço de fase.

A matriz dos colchetes de Poisson dessas coordenadas é dada, em $\chi_\alpha = 0$, por

$$\sigma^{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} \{y^i, y^j\} & 0 \\ 0 & C_{\alpha\beta} \end{pmatrix},$$

tal que $\det\{y^i, y^j\} \neq 0$. A 2-forma simplética é obtida por inversão,

$$\sigma_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} \sigma_{ij} & 0 \\ 0 & C^{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

com $\sigma_{ij}\{y^j, y^k\} = \delta_k^i$, $C^{\alpha\beta}C_{\beta\rho} = \delta_\rho^\alpha$. Como σ_{ij} são as componentes da 2-forma induzida, inferimos de $\sigma^{ij}\sigma_{jk} = \delta_k^i$ que

$$\{y^j, y^k\}|_{\chi_\alpha=0} = \{y^i, y^k\}^*,$$

onde $\{y^i, y^k\}^* = \sigma^{ik}$ é o colchete induzido. Isso prova o teorema para as funções y^i porque $\{y^i, \chi_\alpha\} = 0$.

Agora, considere funções arbitrárias F, G . Tem-se

$$\{F, \chi_\alpha\}|_{\chi_\beta=0} = (\sigma^{\lambda\mu}\partial_\lambda F \partial_\mu \chi_\alpha)|_{\chi_\beta=0} = (\partial_\beta F C_{\beta\alpha})|_{\chi_\beta=0},$$

com $\partial_\beta F = \partial F / \partial \chi_\beta$. Portanto,

$$\begin{aligned} \{F, G\}|_{\chi_\beta=0} &= (\sigma^{\lambda\mu}\partial_\lambda F \partial_\mu G)|_{\chi_\beta=0} = (\sigma^{ij}\partial_i F \partial_j G)|_{\chi_\beta=0} + (\partial_\alpha F C_{\alpha\beta}\partial_\beta G)|_{\chi_\beta=0} \\ &= \sigma^{ij}\partial_i F \partial_j G + \{F, \chi_\alpha\}C^{\alpha\beta}\{\chi_\beta, G\}|_{\chi_\beta=0} \Rightarrow \{F, G\}|_{\chi_\beta=0} = \{f, g\}^*. \end{aligned}$$

□

Eliminados os vínculos de segunda-classe, as equações de movimento na superfície de vínculo, expressas em termos de coordenadas y^i , tomam forma de equações hamiltonianas ordinárias, livres de vínculos,

$$\dot{y}^i = \{y^i, h(y)\}^* \quad (2.4.11)$$

com $h(y) = H|_{\chi_\alpha=0}$. Se $a_i(y)$ é uma 1-forma de potencial para a 2-forma fechada σ_{ij} ,

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial y^i} - \frac{\partial a_i}{\partial y^j}, \quad (2.4.12)$$

derivamos as equações 2.4.11 do princípio variacional com

$$S[y^i(t)] = \int (a_i \dot{y}^i - h) dt. \quad (2.4.13)$$

De fato,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (a_i \dot{y}^i - h) dt = 0 \Rightarrow \int dt \left\{ \left(\frac{\partial a_i}{\partial y^j} \delta y^j + \frac{\partial a_i}{\partial p_j} \delta p_j \right) \dot{y}^i + a_j \delta \dot{y}^j - \frac{\partial h}{\partial y^j} \delta y^j - \frac{\partial h}{\partial p_j} \delta p_j \right\}. \quad (2.4.14)$$

Integrando por partes, temos que $\int a_j \delta \dot{y}^j dt = - \int \dot{a}_j \delta y^j$. Retendo somente as variações com respeito a y^j , temos

$$\begin{aligned} \int dt \left(\frac{\partial a_i}{\partial y^j} \frac{dy^i}{dt} - \frac{da_j}{dt} - \frac{\partial h}{\partial y^j} \right) \delta y^j &= \int dt \left(\frac{\partial a_i}{\partial y^j} - \frac{\partial a_j}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial y^j} \right) \delta y^j = 0 \\ \Rightarrow \sigma_{ij} \frac{dy^i}{dt} - \frac{\partial h}{\partial y^j} &= 0 \Rightarrow \frac{dy^i}{dt} = \sigma^{ij} \frac{\partial h}{\partial y^j} = \{y^i, h\}. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

A equação 2.4.13 é obtida resolvendo os vínculos (de segunda-classe) no princípio variacional de primeira-ordem original

$$\delta S_E[q^n(t), p_n(t), u^\alpha(t)] = \delta \int (p_n \dot{q}^n - H - u^\alpha \chi_\alpha) dt = 0 \quad (2.4.16)$$

da seguinte maneira:

- (i) Substituindo $x^\mu = x^\mu(y^i)$ (com $x^\mu = (q^n, p_n)$) e descartando uma derivada total no tempo, o termo cinético fica

$$p_n \dot{q}^n \equiv a_\mu(x) \dot{x}^\mu = a_i(y) \dot{y}^i \quad (2.4.17)$$

com $a_\mu = (p_n, 0)$, uma vez que a derivada exterior da 2-forma induzida

$$a_i(y) = a_\mu(x(y)) \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \quad (2.4.18)$$

é igual à 2-forma induzida σ_{ij} ;

- (ii) Os últimos termos $H + u^\alpha \chi_\alpha$ reduzem-se a $h(y)$ na superfície de vínculo.

A observação que 2.4.16 leva a 2.4.13 fornece um novo método para calcular os colchetes de Dirac: resolvem-se os vínculos dentro da ação e lê-se os colchetes de Dirac do termo cinético da ação desvinculada, usando as equações 2.4.12 e 2.4.9. Em muitas aplicações esse método se mostra o mais conveniente.

Como os vínculos $\gamma_a = 0$ obedecem a condição de regularidade, é certamente válido resolvê-los dentro da ação

$$S_E[q, p, u^a] = \int (p \dot{q} - H - u^a \gamma_a) dt. \quad (2.4.19)$$

Pode-se implementar a condição de *gauge* C_a com um novo multiplicador de Lagrange μ^a , deixando da forma

$$S[q, p, u^a] \mapsto S[q, p, u^a, \mu^a] = \int (p \dot{q} - H - u^a \gamma_a - \mu^a C_a) dt. \quad (2.4.20)$$

Essa ação gera as equações de movimento corretas, pois $\dot{\gamma}_a = 0$ implica em $\mu^a = 0$. As equações para q, p não mudam, portanto, e incluem o u^a particular fixado para $C_a = 0$. O termo cinético da ação reduzida gera os colchetes de Dirac no *gauge* $C_a = 0$.

Caso misto

Para o caso de superfícies de vínculo tanto de primeira e segunda-classes, teremos *posto* $\sigma_{ij} = N - M - K$, $0 < K < M$, onde K é o número de vínculos de primeira-classe independentes. As órbitas de *gauge* geradas pelas transformações de *gauge* são novamente as superfícies nulas da 2-forma induzida σ_{ij} . O espaço de fase reduzido é obtido pelo quociente da superfície de vínculo com as órbitas geradas pelos vínculos de primeira-classe. As equações dinâmicas na superfície $\chi_\alpha = 0$ dos vínculos de segunda-classe, escritas em termos dos colchetes de Dirac, são geradas pela ação estendida na qual os vínculos de segunda-classe foram resolvidos.

Encerramos por aqui a introdução a sistemas hamiltonianos com vínculos, de maneira que poderemos operar no espaço-tempo com o que desenvolvemos até aqui. Para um maior estudo do assunto, sugerimos¹¹.

Eletrodinâmica Associada a um $U(1)$ -Fibrado

3.1 Eletromagnetismo Clássico

Trabalharemos aqui o exemplo do eletromagnetismo como teoria de *gauge*. A teoria eletromagnética pode ser descrita por um fibrado principal $P(M, U(1))$; retomaremos, assim, o que já vimos nos exemplos com $U(1)$ e trabalharemos em cima a aplicação. $U(1)$ é abeliano e unidimensional ($U(1) \simeq S^1$), assim podemos omitir os índices de grupo $a, b, \dots$ (existe um único gerador para o grupo) e escrever as constantes de estrutura $f_{ab}^c = 0$. O potencial de *gauge* (forma local da conexão) em um aberto $U_i \in M$ é da forma

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu} dx^\mu.$$

Seja $p \in U_i \cap U_j$ e $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j$ as formas locais nos respectivos abertos. A função de transição $\theta_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U(1)$ é então dada por

$$\theta_{ij} = \exp[i\chi(p)], \quad \chi(p) \in \mathbb{R}. \quad (3.1.1)$$

Como $U(1)$ é abeliano, $\mathcal{A}_i$ e $\mathcal{A}_j$ são relacionados por

$$\mathcal{A}_j(p) = \theta_{ij}^{-1}(p) \mathcal{A}_i(p) \theta_{ij}(p) + \theta_{ij}^{-1}(p) d\theta_{ij}(p) = \mathcal{A}_i(p) + id\chi(p). \quad (3.1.2)$$

Temos também que, por ser unidimensional, $[\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)] = 0$ para quaisquer $X, Y \in TM$, e portanto a força de campo é simplesmente

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A}. \quad (3.1.3)$$

$\mathcal{F}$ satisfaz a identidade de Bianchi

$$d\mathcal{F} = \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} = 0, \quad (3.1.4)$$

o que é esperado, uma vez que $\mathcal{F}$ é exato e portanto fechado, $d\mathcal{F} = d^2\mathcal{A} = 0$. Em componentes, temos as expressões

$$\mathcal{A}_{i\mu} = \mathcal{A}_{i\mu} + i\partial_\mu\chi, \quad (3.1.5a)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathcal{A}_\nu - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu, \quad (3.1.5b)$$

$$\partial_\lambda\mathcal{F}_{\mu\nu} + \partial_\nu\mathcal{F}_{\lambda\mu} + \partial_\mu\mathcal{F}_{\nu\lambda} = 0. \quad (3.1.5c)$$

Se, ainda, especificamos o espaço base M como um espaço-tempo de Minkowski quadridimensional, $M = \mathbb{R}^4$ é contrátil, implicando que o fibrado é trivial,

$$P = \mathbb{R}^4 \times U(1), \quad (3.1.6)$$

de modo que podemos estabelecer uma seção global, e a forma local da conexão também pode ser definida globalmente no espaço.

3.1.1 Equações de Maxwell

Consideremos então o eletromagnetismo no espaço de Minkowski. Podemos expressar o campo elétrico $\vec{E}$ e o campo magnético $\vec{B}$ em termos do covetor potencial $A_\mu = (\phi, \vec{A})$, como

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{e} \quad \vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi. \quad (3.1.7)$$

Essas equações ficam invariantes perante a **transformação de gauge**

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\chi, \quad (3.1.8)$$

onde χ é uma função escalar. Observamos que essa transformação se equivale a 3.1.5a através da associação com o fator i , gerador da álgebra de Lie $\mathfrak{u}(1)$: $\mathcal{A}_\mu = iA_\mu$. Partindo dessa associação, o tensor eletromagnético decorre da força do campo, $\mathcal{F}_{\mu\nu} = iF_{\mu\nu}$, e obtemos

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \Rightarrow \begin{cases} E_i = F_{i0} \\ F_{jk} = \epsilon_{jk}^i B_i \Leftrightarrow B_i = \frac{1}{2}\epsilon_i^{jk} F_{jk} \end{cases}. \quad (3.1.9)$$

Lembrando que $\mathcal{F}$ é antissimétrico a partir da identidade de Bianchi 3.1.5c, encontramos,

(i) $\mu = i$ ($i = 1, 2, 3$), $\nu = 0$, $\lambda = k$:

$$\partial_k F_{i0} + \partial_0 F_{ki} + \partial_i F_{0k} = \partial_k E_i - \partial_i E_k + \partial_0 F_{ki} = (\vec{\nabla} \times \vec{E})_j + \partial_0 B_j = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (3.1.10)$$

(ii) $\mu = i, \nu = k, \lambda = k$:

$$\begin{aligned} \partial_k F_{ij} + \partial_j F_{ki} + \partial_i F_{jk} &= \partial_k B_k + \partial_j B_j + \partial_i B_i = 0 \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Vemos daí que obtivemos duas das equações de Maxwell partindo somente da identidade de Bianchi, que é uma condição *geométrica* do espaço.

Para encontrar as outras equações, precisamos olhar para a *dinâmica* da teoria, e assim precisamos antes especificar sua ação. A **ação de Maxwell** $S_M[\mathcal{A}]$ é um funcional de $\mathcal{A}$ e é dada por

$$S_M[\mathcal{A}] \equiv \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} d^4x = -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x. \quad (3.1.12)$$

Chamemos $\mathcal{L} = \mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\lambda} \eta^{\beta\rho} F_{\alpha\beta} F_{\lambda\rho}$. Pela variação de $S_M[\mathcal{A}]$ com respeito a $\mathcal{A}_\nu$, chegamos nas equações de movimento

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu)} = 0. \quad (3.1.13)$$

Desenvolvendo, temos que o primeiro termo é identicamente nulo,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\nu} = 2g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho} \left(\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{A}_\beta}{\partial \mathcal{A}_\nu} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{A}_\alpha}{\partial \mathcal{A}_\nu} \right) \mathcal{F}_{\lambda\rho} = 2g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho} (\partial_\alpha \delta_\beta^\nu - \partial_\beta \delta_\alpha^\nu) \mathcal{F}_{\lambda\rho} = 0. \quad (3.1.14)$$

Calculando o segundo termo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu)} &= 2g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho} \left(\frac{\partial (\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta)}{\partial (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu)} - \frac{\partial (\partial_\beta \mathcal{A}_\alpha)}{\partial (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu)} \right) \mathcal{F}_{\lambda\rho} \\ &= 2g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) \mathcal{F}_{\lambda\rho} \\ &= 2(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) \mathcal{F}^{\alpha\beta} \\ &= 4\mathcal{F}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

e dessa forma,

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.1.16)$$

Dessa relação extraímos então as equações de Maxwell remanescentes,

(i) $\nu = 0$:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_i F^{i0} = \eta^{0\gamma} \eta^{\delta i} \partial_i F_{\delta\gamma} = - \sum_{i\gamma\delta} \delta_{0\gamma} \delta_{\delta i} \partial_i F_{\delta\gamma} = - \sum_i \partial_i F_{i0} = - \sum_i \partial_i E_i = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0. \quad (3.1.17)$$

(ii) $\nu = i$:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu i} &= \partial_0 F^{0i} + \partial_m F^{mi} = -\partial_0 F_{0i} + \sum_m \partial_m F_{mi} = \partial_0 E_i - \sum_m \epsilon_{im}^j \partial_m B_j = 0 \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

3.1.2 Hamiltoniano

Tomando A_μ como variável de configuração, representaremos sua velocidade como $\partial_0 A_\mu$. O momento conjugado será então, reescrevendo $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$,

$$\begin{aligned} \pi^\lambda &\equiv \frac{\delta S_M[\mathcal{A}]}{\delta(\partial_0 A_\lambda)} = -\frac{1}{4} \left\{ F_{\mu\nu} (\eta^{0\mu} \eta^{\lambda\nu} - \eta^{0\nu} \eta^{\lambda\mu}) + F_{\alpha\beta} (\eta^{0\alpha} \eta^{\lambda\beta} - \eta^{0\beta} \eta^{\lambda\alpha}) \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \{ 2F^{0\lambda} - 2F^{\lambda 0} \} = \frac{1}{4} \{ 4F^{\lambda 0} \} \\ &= \begin{cases} F^{00} = 0 \equiv \pi^0 \\ F^{i0} = -E^i \equiv \pi^i \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Estabelecemos, portanto, um vínculo primário

$$\phi_1 \equiv \pi^0 = 0. \quad (3.1.20)$$

Os colchetes de Poisson entre as variáveis canônicas serão dados por

$$\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} = \eta_\mu^\nu \delta(x, y). \quad (3.1.21)$$

O hamiltoniano canônico fica como

$$H = \int d^3x \{ F^{\mu 0} \partial_0 A_\mu - L \} = \int d^3x \left\{ F^{i0} \partial_0 A_i + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} F^{0i} F_{0i} \right\}, \quad (3.1.22)$$

onde escrevemos $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = F^{ij} F_{ij} + F^{0i} F_{0i} + F^{i0} F_{i0} = F^{ij} F_{ij} + 2F^{0i} F_{0i}$. Vemos, no entanto, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= F^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -F^{\mu\nu} \partial_\nu A_\mu \\ &= -F^{00} \partial_0 A_0 - F^{0i} \partial_i A_0 - F^{i0} \partial_0 A_i - F^{ij} \partial_j A_i \\ &= -F^{0i} \partial_i A_0 - F^{i0} \partial_0 A_i + \frac{1}{2} F^{ij} F_{ij}, \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned}
 F^{i0}\partial_0 A_i &= -F^{0i}\partial_i A_0 + \frac{1}{2}F^{ij}F_{ij} - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
 &= -F^{0i}\partial_i A_0 - F^{0i}F_{0i} \\
 &= -E^i\partial_i A_0 + E^i E_i.
 \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

Substituindo em 3.1.22, e lembrando que $B^i B_i = \frac{1}{4}\epsilon_i^{jk}F_{jk}e_{mn}^i F^{mn} = \frac{1}{2}F^{jk}F_{jk}$, temos

$$\begin{aligned}
 H &= \int d^3x \left\{ -E^i\partial_i A_0 + \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij} - E^i E_i \right\} \\
 &= \int d^3x \left\{ A_0\partial_i E^i + \frac{1}{2}(B^i B_i + E^i E_i) \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

Passemos agora ao cálculo da condição de consistência para π^0 ,

$$\begin{aligned}
 \dot{\pi}^0 &= \{\pi^0, H\} \\
 &= \int d^3x \{\pi^0, A_0\} \partial_i E^i \\
 &= -\partial_i E^i \approx 0.
 \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

Encontramos, assim, o vínculo secundário

$$G \equiv \partial_i E^i \approx 0, \tag{3.1.26}$$

que é precisamente a Lei de Gauss do campo elétrico. Temos, portanto, que a Lei de Gauss não atua realmente como uma equação dinâmica do sistema, mas como um vínculo. Como seu colchete de Poisson com π^0 é trivialmente nulo, temos que 3.1.26 é um vínculo de primeira-classe, e portanto seu colchete de Poisson da variável de configuração deve gerar uma transformação de *gauge*. Seja, então o funcional do vínculo

$$G[\chi] \equiv \int d^3x \chi(x) G, \tag{3.1.27}$$

onde χ atua como um multiplicador de Lagrange. Então

$$\begin{aligned}
 \delta A_i &= \{A_i, G[\chi]\} = \left\{ A_i(x), \int \chi(y) \partial_j E^j \right\} \\
 &= \left\{ A_i(x), \int (-E^j(y) \partial_j \chi + \partial_j (\chi(y) E^j)) \right\} \\
 &= \int -\partial_j \chi \{A_i(x), E^j(y)\} \\
 &= \partial_i \chi,
 \end{aligned} \tag{3.1.28}$$

o que concorda com o que vimos em 3.1.8.

Como 3.1.26 comuta com o hamiltoniano, a condição de consistência para o vínculo é trivialmente nula, e portanto não temos mais vínculos. Considerando, pois, 3.1.26 no hamiltoniano agora como um vínculo, e desprezando o vínculo π^0 , que é apenas uma constante, escrevemos o hamiltoniano do sistema na sua forma final como

$$H = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{E}) + \chi \nabla \cdot \vec{E} \right\}. \quad (3.1.29)$$

3.2 Campo Escalar

Tomemos agora o campo de *gauge* $U(1)$ acoplado a um campo escalar complexo ψ . Trabalharemos então por vias do fibrado associado $E = P \times_\rho \mathbb{C}$, em que ρ é a identificação natural de $U(1)$ com um número complexo. Seja γ uma curva em M com vetor tangente X em $\gamma(0)$. Tomemos uma seção σ_i e expressemos um levantamento horizontal arbitrário $\tilde{\gamma}$ de γ como $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(t)e^{i\lambda(t)}$, onde $g(t) = e^{i\lambda(t)} \in U(1)$. Se $1 \in \mathbb{C}$ é tomado como um vetor de base, a seção básica é

$$e = [(\sigma_i(p), 1)]. \quad (3.2.1)$$

Seja $\psi(p) = [(\sigma_i(p), \Psi(p))] = \Psi(p)e$, $\Psi : M \rightarrow \mathbb{C}$, uma seção de E , que é identificada com um campo escalar complexo. Com respeito a $\tilde{\gamma}(t)$ a seção é dada por

$$\psi(t) = [(\tilde{\gamma}(t)e^{-i\lambda(t)}, \Psi(t))] = [(\tilde{\gamma}(t), e^{-i\lambda(t)}\Psi(t))]. \quad (3.2.2)$$

A derivada covariante de ψ ao longo de γ é, portanto,

$$\begin{aligned} \nabla_X \psi &= \left[\left(\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt} \{g(t)^{-1}\Psi(t)\} \right) \right] \\ &= \left[\left(\tilde{\gamma}(0), -g(0)^{-1} \frac{dg(t)}{dt} g(0)^{-1} \Psi(0) + g(0)^{-1} \frac{d\Psi(t)}{dt} \right) \right] \\ &= \left[\left(\tilde{\gamma}(0), g(0)^{-1} \mathcal{A}_i(X) \Psi(0) + g(0)^{-1} \frac{d\Psi(t)}{dt} \right) \right] \\ &= \left[\left(\sigma_i(p), \mathcal{A}_i(X) \Psi(0) + \frac{d\Psi(t)}{dt} \right) \right] = \left(\mathcal{A}_i(X) \Psi(0) + \frac{d\Psi(t)}{dt} \right) e \\ &= \left(\mathcal{A}_{i\mu} \frac{dx^\mu}{dt} \Psi + \frac{d\Psi}{dt} \right) e = X^\mu (\mathcal{A}_{i\mu} \Psi + \partial_\mu \Psi) e \\ &= X^\mu (\mathcal{A}_{i\mu} + \partial_\mu) \psi. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Para uma curva coordenada x^μ , 3.2.3 fica simplesmente

$$\nabla_\mu \psi(p) = (\partial_\mu + \mathcal{A}_{i\mu}) \psi(p). \quad (3.2.4)$$

Consideremos um campo escalar complexo ϕ , correspondendo a um par partícula + antipartícula carregadas, identificado ao fibrado associado $E = P \times_{\rho} \mathbb{C}$. A densidade lagrangeana do sistema é descrita como

$$\mathcal{L} = \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi^{\dagger} \partial_{\nu} \phi - m \phi^{\dagger} \phi. \quad (3.2.5)$$

Requereremos agora que o campo seja invariante pela transformação local de *gauge*

$$\phi \mapsto e^{-i\alpha(x)} \phi, \quad (3.2.6)$$

em que $e^{i\alpha(x)} \in G$. Substituindo na lagrangeana, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} (e^{i\alpha} \phi^{\dagger}) \partial_{\nu} (e^{-i\alpha} \phi) - m \phi^{\dagger} e^{i\alpha} e^{-i\alpha} \phi \\ &= \eta^{\mu\nu} ((\partial_{\mu} g) \phi^{\dagger} + g \partial_{\mu} \phi^{\dagger}) ((\partial_{\nu} g^{-1}) \phi + g^{-1} \partial_{\nu} \phi) - m \phi^{\dagger} \phi \\ &\stackrel{*}{=} \eta^{\mu\nu} (-\mathcal{A}_{\mu} g \phi^{\dagger} + g \partial_{\mu} \phi^{\dagger}) (\mathcal{A}_{\nu} g^{-1} \phi + g^{-1} \partial_{\nu} \phi) - m \phi^{\dagger} \phi \\ &= \eta^{\mu\nu} (\partial_{\mu} - i\mathcal{A}_{\mu}) \phi^{\dagger} (\partial_{\nu} + i\mathcal{A}_{\nu}) \phi - m \phi^{\dagger} \phi \\ &= \nabla^{\nu} \phi^{\dagger} \nabla_{\nu} \phi - m \phi^{\dagger} \phi. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

onde em * usamos 1.2.18. Instituímos assim a derivada covariante

$$\nabla_{\nu} = (\partial_{\nu} + i\mathcal{A}_{\nu}), \quad (3.2.8)$$

que concorda com 3.2.4, mediante a associação feita entre o vetor potencial e a conexão.

Concluimos, pois, que o fibrado $P(M, U(1))$ descreve satisfatoriamente o campo eletromagnético no vácuo, e seu fibrado associado $E = P \times \mathbb{C}$ é capaz de descrever o campo partícula-antipartícula carregadas (de spin 0, o que todavia pode ser generalizado, utilizando campos espinoriais).

Relatividade Geral

A teoria da Relatividade Geral é a teoria desenvolvida por Albert Einstein em 1915 para descrever a estrutura do espaço-tempo e da gravitação. O **espaço-tempo** é caracterizado como uma variedade M munida uma métrica de Lorentz $g_{\mu\nu}$. A gravidade surge como resultado da curvatura dessa métrica, associada à distribuição de matéria e energia $T_{\mu\nu}$ na variedade pela **equação de campo de Einstein**:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (4.0.1)$$

Delinearemos nessa seção as idéias principais por trás da teoria, levando à construção de suas equações. Surgirá então naturalmente, como consequência da discussão, o papel fundamental que é assumido pela métrica.

4.1 Bases da Teoria

Partiremos de princípios fundamentais assumidos em física, e procuraremos desenvolver as idéias que levaram à formulação da Equação de Einstein.

Postulado 4.1.1 O **princípio da covariância geral** presume que não há campos vetoriais preferenciais, ou bases de campos vetoriais preferenciais pertencentes somente à estrutura da variedade que possam aparecer nas leis físicas. Em outras palavras, coordenadas são apenas um artifício para descrever a natureza e não existem a priori, assim não devem ter qualquer participação na formulação das leis físicas fundamentais. Em nosso contexto, o princípio se traduz na forma de que a métrica e suas derivadas são as únicas quantidades inerentes ao espaço-tempo que podem aparecer nas leis físicas.

Baseado nesse princípio, podemos considerar tensores como os objetos matemáticos adequados para descrever os fenômenos físicos, pois são objetos cuja existência independe da

presença ou não de sistemas de coordenadas. Assim, uma equação construída utilizando-se apenas de tensores, se válida em um sistema de coordenadas, será válida em qualquer outro. Os **observáveis** de uma teoria (valores cujas grandezas podem ser mensuráveis) passam a ser escalares construídos a partir de tensores que descrevem o sistema e o aparato de medida.

Seguimos agora tratando do passo inicial para a formulação da Relatividade Geral:

Proposição 4.1.2 (Princípio da Equivalência) *É impossível distinguir um campo de gravidade de um sistema acelerado por meio de qualquer experiência local.*

Para ilustrar isso, consideremos um observador S sob a influência de um campo de gravidade g e um outro observador S' , de mesma massa de S , dentro de um foguete no espaço livre de gravidade, que se movimenta com aceleração $-g$. A força sentida por S é igual ao seu peso $F = mg$. Por outro lado, em reação à aceleração do foguete, o observador S' sentirá uma aceleração de g no sentido oposto ao movimento, e portanto uma força $F = mg$. Ou seja, os efeitos sentidos em ambos os casos são iguais.

Na Relatividade Restrita, o movimento de corpos inerciais (movimento natural de um corpo no espaço de Minkowski, na ausência de forças externas) define um conjunto preferencial de curvas independente da natureza dos corpos. De fato, essas curvas possuem velocidade constante, ou seja, são geodésicas da métrica do espaço de Minkowski $\mathbb{R}^4$. Se consideramos um campo de gravidade, todos os corpos por ele afetados, independente de suas naturezas, caem precisamente da mesma forma no campo, ou seja, os corpos definem uma classe preferencial de curvas no sistema, análogo ao caso anterior. Isso sugere a possibilidade de que as propriedades do campo gravitacional possam ser atribuídas à estrutura espaço-tempo.

Assim, na presença de um campo de gravidade, referenciais em queda livre são os mais “inerciais” possíveis. Baseando-se na Relatividade Restrita, pode-se considerar a hipótese de que o movimentos de corpos livres (corpos inerciais em Relatividade Restrita, ou em queda livre na presença de gravidade) sejam sempre geodésicas, e os efeitos gravitacionais sejam então variações na métrica ao longo do espaço-tempo curvo. Tal hipótese concorda com o princípio da covariância geral, e transforma a força gravitacional de um efeito de um campo para um efeito de inércia decorrente dos desvios da métrica na estrutura da variedade.

Em suma, concluímos que a Relatividade Geral deve reger-se pelos seguintes princípios:

1. Obedece ao princípio da covariância geral.
2. O movimento de corpos em queda livre são geodésicas.

3. Concorde com a Relatividade Restrita no limite de campos gravitacionais nulos.
4. As equações newtonianas são obtidas para algum limite de baixas energias.

Utilizaremos esses princípios para a derivação das equações de movimento e algumas de suas consequências. Ressaltamos, todavia, que essa derivação não é única e que não deve ser tratada como uma dedução das equações de Einstein.

4.2 A Equação da Geodésica no Limite Newtoniano

Vamos partir da hipótese considerada no parágrafo anterior. Consideraremos a equação da geodésica e analisaremos as alterações da métrica em seu **limite newtoniano**, isto é

- (i) $x^0 = ct$, $x^i = (x, y, z)$ localmente.
- (ii) Campos fracos, longe das fontes. Chamaremos

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1. \quad (4.2.1)$$

Teremos assim uma leve distorção do espaço chato da Relatividade Restrita.

- (iii) Regime independente do tempo,

$$\partial_t g_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.2.2)$$

- (iv) Velocidades baixas,

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \ll c. \quad (4.2.3)$$

Nesse limite, esperamos que a equação da geodésica reproduza a equação de movimento Newtoniana:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad \xrightarrow{\text{lim}} \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x^i}. \quad (4.2.4)$$

Na equação inicial, passamos de ds para dt multiplicando-a por ds/dt :

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} \frac{dx^\alpha}{ds} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{ds}{dt} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dt}{ds} \right) + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} \frac{dt}{ds} + \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{d}{dt} \frac{dt}{ds} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} = 0 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Para $\alpha = i$ o segundo termo é desprezível e, na soma do terceiro termo, $\beta = \gamma = 0$ contribui de maneira dominante. Logo,

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i c^2 = 0, \quad (4.2.6)$$

que reproduz o limite se

$$\Gamma_{00}^i c^2 = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}. \quad (4.2.7)$$

Em primeira ordem em $h_{\alpha\beta}$, junto com a condição (iii), encontramos a expressão aproximada para os símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \eta^{ir} (-\partial_r g_{00}) = -\frac{1}{2} \partial_i h_{00}, \quad (4.2.8)$$

onde usamos $\eta^{ir} = \delta_{ir}$. Substituindo na equação anterior, resulta

$$\frac{c^2}{2} \partial_i h_{00} = -\partial_i \phi, \quad (4.2.9)$$

que implica na identificação (a menos de uma constante),

$$\frac{c^2 h_{00}}{2} = -\phi. \quad (4.2.10)$$

Temos enfim que

$$g_{00} = - \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right). \quad (4.2.11)$$

O potencial ϕ aparece então como o desvio da componente $\eta_{00} = -1$ da métrica do espaço chato da Relatividade Restrita.

Como exemplo, no caso do Sol, $\phi = -GM/r$. Logo,

$$g_{00} = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right).$$

O resultado aqui obtido por primeira ordem de perturbação coincide com o resultado exato obtido da solução da equação de Einstein para o caso de uma massa M (solução de Schwarzschild).

4.3 A Equação de Einstein

Veamos agora como podemos “enxergar” a equação de Einstein a partir do limite Newtoniano se partimos da hipótese que os efeitos de curvatura são produzidos pela presença de corpos massivos, da maneira mais simples possível. Esse “princípio de simplicidade” se mostra conveniente e suficiente para o que queremos, mas ressaltamos novamente que não pode ser considerado como uma dedução das equações de movimento, pois na linearização termos de ordens mais altas no tensor de curvatura desaparecem.

Em componentes covariantes, a equação do campo gravitacional deverá conter o tensor

$T_{\alpha\beta}$, representando a matéria, e os tensores de segunda ordem que derivam do tensor métrico. Tendo em vista que a equação de Poisson para o potencial gravitacional Newtoniano,

$$\nabla^2\phi = 4\pi\rho G, \quad (4.3.1)$$

terá que aparecer em algum limite, tais tensores devem conter no máximo derivadas segundas e e serem lineares nessas derivadas. A equação pode então conter $R_{\alpha\beta}$ e $g_{\alpha\beta}R$, ou seja, deve ter a forma

$$R_{\alpha\beta} + ag_{\alpha\beta}R = \frac{\chi}{2}T_{\alpha\beta}, \quad (4.3.2)$$

onde a e χ são dois parâmetros (e o emprego de $\chi/2$ no parâmetro de $T_{\alpha\beta}$ é de forma que simplifique a ação no princípio variacional, que ficará claro a frente). O segundo deverá ser proporcional à constante gravitacional G , para que surja num limite a equação de Poisson.

Como $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$, poderíamos ainda considerar um termo constante $\Lambda g_{\alpha\beta}$ no lado esquerdo da equação. Todavia, esse termo quebraria nossa hipótese de simplicidade de que só $T_{\alpha\beta}$ produz curvatura (onde por “curvatura”, queremos na verdade dizer a curvatura de Ricci, já que pelas nossas hipóteses é ela que é observável). Historicamente, a **constante cosmológica** Λ chegou a ser incluída na equação por Einstein, para obtenção de universo estacionário. Todavia, o próprio admitiu mais tarde o erro e abandonou o termo, após as observações de Hubble que mostravam o universo em expansão.

Em componentes contravariantes, temos

$$R^{\alpha\beta} + ag^{\alpha\beta}R = \frac{\chi}{2}T^{\alpha\beta}. \quad (4.3.3)$$

Em primeira ordem em G (ou seja, em χ), a equação torna-se

$$(R^{\alpha\beta} + ag^{\alpha\beta}R)^{(1)} = \frac{\chi}{2} \overset{\circ}{T}^{\alpha\beta}, \quad (4.3.4)$$

onde $\overset{\circ}{T}^{\alpha\beta}$ é o tensor da matéria livre, que surge na Relatividade Restrita, sem interações gravitacionais. Na ausência dessas interações, para a conservação da energia sua divergência é nula,

$$\partial_\beta \overset{\circ}{T}^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.3.5)$$

Em primeira ordem $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, então

$$\partial_\beta (R^{\alpha\beta(1)} + a\eta^{\alpha\beta}R^{(1)}) = 0. \quad (4.3.6)$$

Mas um cálculo direto nos mostra que

$$R_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2}(h_{\beta,\alpha\sigma}^{\sigma} + h_{\alpha,\beta\sigma}^{\sigma} - h_{\alpha\beta,\sigma}^{\sigma} - h_{\sigma,\alpha\beta}^{\sigma}) \quad \text{e} \quad R = \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(1)} = h^{\sigma\alpha}_{,\alpha\sigma} - h_{\alpha}^{\alpha}_{,\sigma}{}^{\sigma}, \quad (4.3.7)$$

onde os índices após vírgulas indicam índices de derivadas. Então, pela equação acima,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (h_{\beta,\alpha\sigma}^{\sigma} + h_{\alpha,\beta\sigma}^{\sigma} - h_{\alpha\beta,\sigma}^{\sigma} - h_{\sigma,\alpha\beta}^{\sigma}) + a (h^{\sigma\rho}_{,\rho\sigma\alpha} - h_{\rho}^{\rho}_{,\sigma\alpha}) \\ &= \left(\frac{1}{2} + a \right) (h^{\sigma\rho}_{,\rho\sigma\alpha} - h_{\rho}^{\rho}_{,\sigma\alpha}) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

uma vez que $h_{\alpha\beta}$ é arbitrário. Isso fixa então o lado esquerdo da equação de campo.

Vejam agora o valor de χ . Temos

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \frac{\chi}{2}T_{\alpha\beta}. \quad (4.3.9)$$

Contraindo com $g^{\alpha\beta}$: $R - \frac{1}{2}4R = -R = \frac{\chi}{2}T$, ou seja,

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\chi}{2} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T \right). \quad (4.3.10)$$

Tomando a componente $_{00}$ em primeira ordem em G ,

$$R_{00}^{(1)} = \frac{\chi}{2} \left(\overset{\circ}{T}_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00} \overset{\circ}{T} \right). \quad (4.3.11)$$

No caso estático (como no caso newtoniano) $\overset{\circ}{T}_{00} = \rho c^2$, $\overset{\circ}{T}_{0i} = 0$ e $\overset{\circ}{T}_{ij} = 0$. Logo, $\overset{\circ}{T} = \eta^{00} \overset{\circ}{T}_{00} = -\rho c^2$, e portanto,

$$R_{00}^{(1)} = \frac{1}{4}\chi\rho c^2. \quad (4.3.12)$$

Tomando a componente $_{00}$ na equação para $R_{\alpha\beta}^{(1)}$, como a métrica é independente do tempo, encontramos que $R_{00}^{(1)} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}$. Unindo as relações,

$$-\nabla^2 h_{00} = \frac{\chi}{2}\rho c^2. \quad (4.3.13)$$

Se lembrarmos que da seção anterior $h_{00} = -2\phi/c^2$ e comparando com a equação de Poisson,

$$\frac{1}{4}\chi\rho c^4 = \nabla^2 \phi = 4\pi G\rho, \quad (4.3.14)$$

vem então o valor da constante χ ,

$$\chi = \frac{16\pi G}{c^4}. \quad (4.3.15)$$

Justificamos então a Equação de Einstein 4.0.1, a qual podemos escrever também do modo

$$R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T \right). \quad (4.3.16)$$

Dessa equação, vemos facilmente que fora da matéria, no vácuo, $R_{\alpha\beta} = 0$.

4.4 Princípio Variacional

4.4.1 Ação de Eistein-Hilbert

Vemos que a dinâmica nas equações de Einstein é regida pela métrica e é linear em suas derivadas segundas, presentes na curvatura. Esperamos, agora, poder derivar essas equações através de um princípio variacional, partindo de uma ação que seja um escalar nas variáveis de configuração (no nosso caso, a métrica), e nas suas derivadas. No entanto, não encontramos entidades envolvendo a primeira derivada da métrica que sejam covariantes. Assim, o procedimento padrão de se obter as equações de campo a partir de uma ação com a variável e suas derivadas primeiras não nos é viável. A saída, então, é aumentar a derivada, e encontrar uma ação que seja covariante na métrica até suas derivadas segundas,

$$S = \int_M \mathcal{L}(g, \partial^2 g) dv = \int_M \mathcal{L}(g, \partial^2 g) \sqrt{|g|} d^4x, \quad (4.4.1)$$

onde $dv = \sqrt{|g|} d^4x$ é o elemento de volume invariante por difeomorfismos e $\mathcal{L}$ seja alguma combinação linear dos tensores métrico e de curvatura. Todavia, a única combinação possível para $\mathcal{L}$ que seja linear nas derivadas segundas da métrica é o escalar de curvatura $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Dessa forma,

$$S = A \int_M d^4x \sqrt{|g|} R, \quad (4.4.2)$$

onde A é uma constante a ser determinada.

Efetuada a variação da ação com relação a $g_{\alpha\beta}$,

$$\delta \left(\sqrt{|g|} R \right) = \delta \left(\sqrt{|g|} R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \right) = \delta \left(\sqrt{|g|} \right) R + \sqrt{|g|} \delta \left(g^{\alpha\beta} \right) R_{\alpha\beta} + \sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta}, \quad (4.4.3)$$

sendo,

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{|g|} &= \frac{1}{2\sqrt{|g|}} \delta \left(\frac{\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_4} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_4} g_{\alpha_1 \beta_1} \dots g_{\alpha_4 \beta_4}}{4!} \right) = \frac{1}{2\sqrt{|g|}} \frac{\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_3} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_3} g_{\alpha_1 \beta_1} \dots g_{\alpha_3 \beta_3}}{3!} \delta g_{\alpha\beta} \\ &= \frac{\sqrt{|g|} g^{\alpha\beta}}{2} \delta g_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

$$\delta (g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\delta}) g^{\delta\beta} = (\delta g^{\alpha\gamma}) g_{\gamma\delta} g^{\delta\beta} + g^{\alpha\gamma} g^{\delta\beta} \delta g_{\gamma\delta} = 0 \Rightarrow \delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\gamma} g^{\delta\beta} \delta g_{\gamma\delta}, \quad (4.4.5)$$

e

$$\begin{aligned}
 g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} &= g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\gamma\beta}^{\gamma} = g^{\alpha\beta}\delta (\partial_{\gamma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} - \partial_{\beta}\Gamma_{\gamma\alpha}^{\gamma} + \Gamma_{\gamma\epsilon}^{\gamma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon} - \Gamma_{\beta\epsilon}^{\gamma}\Gamma_{\gamma\alpha}^{\epsilon}) \\
 &= g^{\alpha\beta} [(\partial_{\gamma}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} + \Gamma_{\gamma\epsilon}^{\gamma}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon} - \Gamma_{\beta\epsilon}^{\gamma}\delta\Gamma_{\gamma\alpha}^{\epsilon} - \Gamma_{\gamma\alpha}^{\epsilon}\delta\Gamma_{\beta\epsilon}^{\gamma}) - (\partial_{\beta}\delta\Gamma_{\gamma\alpha}^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon}\delta\Gamma_{\gamma\epsilon}^{\gamma})] \\
 &= g^{\alpha\beta} [\nabla_{\gamma}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} - \nabla_{\beta}\delta\Gamma_{\gamma\alpha}^{\gamma}] = \nabla_{\gamma} (g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} - g^{\alpha\gamma}\Gamma_{\beta\alpha}^{\beta}). \quad (4.4.6)
 \end{aligned}$$

Esse último termo só contribui portanto para o termo de bordo, que podemos assumir como se anulando no infinito. Assim,

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} = 0 \Rightarrow \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R - R_{\gamma\delta} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \right) = \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R - R^{\alpha\beta} \right) = 0, \quad (4.4.7)$$

que resulta na equação de Einstein no vácuo na forma contravariante.

Para que possamos determinar a constante multiplicativa, acrescentaremos o termo $\int d^4x \sqrt{|g|} \mathcal{L}_m$, correspondente a campos de matéria na variedade. Definimos, então, o tensor energia-momentum como

$$\sqrt{|g|} T^{\alpha\beta} \equiv 2 \frac{\delta [\sqrt{|g|} \mathcal{L}_m]}{\delta g_{\alpha\beta}}, \quad (4.4.8)$$

e temos que

$$\begin{aligned}
 \sqrt{|g|} A \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R - R^{\alpha\beta} \right) + \frac{\delta (\sqrt{|g|} \mathcal{L}_m)}{\delta g_{\alpha\beta}} &= 0 \\
 \Rightarrow R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R &= \frac{1}{\sqrt{|g|} A} \frac{\delta (\mathcal{L}_m \sqrt{|g|})}{\delta g_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2A} T^{\alpha\beta},
 \end{aligned}$$

então, para recuperar as equações de Einstein,

$$\frac{1}{2A} = \frac{8\pi G}{c^4} \Rightarrow A = \frac{1}{\chi} = \frac{c^4}{16\pi G}. \quad (4.4.9)$$

Assim, determinamos a **ação de Einstein-Hilbert** da gravitação,

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int_M d^4x \sqrt{|g|} R + \int_M d^4x \sqrt{|g|} \mathcal{L}_m, \quad (4.4.10)$$

exibida independentemente por Hilbert em 1915 e por Einstein em 1916, inspirado por uma série de trabalhos de Lorentz do mesmo ano¹⁶.

4.4.2 Variação de Einstein-Palatini

A variação devida a Palatini em 1919 e empregada por Einstein em 1925 utiliza da mesma ação de Hilbert, todavia considera uma conexão generalizada, não necessariamente métrica, e

que portanto deve ser considerada de forma independente na variação da ação,

$$S = \frac{1}{\chi} \int_M \sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}(\Gamma). \quad (4.4.11)$$

Dessa forma, diferente da ação métrica de Hilbert que deve ser carregada até a segunda derivada da variável dinâmica, aqui a ação métrica-afim depende somente das variáveis e suas derivadas primeiras.

A variação com relação a $g_{\alpha\beta}$ é a mesma que resulta em 4.4.7 (uma vez que vimos que a variação da curvatura na ação de Einstein-Hilbert gera somente um termo de bordo) e resulta nas equações de Einstein. Variando a ação com respeito a Γ , lembrando 4.4.6, temos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_M d^4x \sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} (\nabla_\gamma \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \nabla_\beta \delta \Gamma_{\gamma\alpha}^\gamma) = \int_M d^4x \sqrt{|g|} (g^{\alpha\beta} \nabla_\gamma \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - g^{\alpha\gamma} \nabla_\gamma \delta \Gamma_{\beta\alpha}^\beta) \\ &= \int_M d^4x \sqrt{|g|} \left\{ \nabla_\gamma (g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma) - \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma (\nabla_\gamma g^{\alpha\beta}) - \nabla_\gamma (g^{\alpha\gamma} \delta \Gamma_{\beta\alpha}^\beta) + \delta \Gamma_{\beta\alpha}^\beta (\nabla_\gamma g^{\alpha\gamma}) \right\} \\ &\stackrel{*}{=} \int_M d^4x \sqrt{|g|} \left\{ \delta \Gamma_{\beta\alpha}^\beta (\nabla_\gamma g^{\alpha\gamma}) - \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma (\nabla_\gamma g^{\alpha\beta}) \right\} \\ &= \int_M d^4x \sqrt{|g|} \left\{ \delta_\beta^\gamma \nabla_\lambda g^{\alpha\lambda} - \nabla_\gamma g^{\alpha\beta} \right\} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma, \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

onde em * descartamos os termos de derivada total, que só contribuiriam para um termo de bordo. Fazendo a variação igual a zero, 4.4.12 se anula identicamente para $\beta = \gamma$ e para $\beta \neq \gamma$ encontramos

$$\nabla_\gamma g^{\alpha\beta} = 0, \quad (4.4.13)$$

ou seja, a conexão é compatível com a métrica. Com esse resultado, elimina-se o aparente excesso de variáveis na dependência da ação, em comparação com a variação de Einstein-Hilbert.

Formulação ADM

Embora a dinâmica da Relatividade Geral seja totalmente descrita pela equação de campo de Einstein 4.0.1 no nível clássico, uma formulação hamiltoniana da teoria nos permite compreender melhor certos aspectos da natureza dessa dinâmica, como veremos a seguir, e se torna o alicerce na busca da quantização canônica.

5.1 Decomposição 3 + 1

O tratamento canônico se inicia com a identificação das variáveis de configuração e suas respectivas velocidades que definirão os momentos conjugados. Para que as velocidades sejam identificadas, todavia, é necessária a existência de um parâmetro temporal. Assim, iniciamos o tratamento decompondo a variedade do espaço-tempo em espaço + tempo. Apesar da aparente quebra na invariância por difeomorfismo, esse procedimento é lícito uma vez que não fixamos a separação em espaço e tempo, mas a deixamos arbitrária.

Consideremos a ação de Einstein-Hilbert generalizada em uma $(D+1)$ -variedade M ,

$$S = \frac{1}{\chi} \int_M d^{D+1}X \sqrt{|\det(g)|} R^{(D+1)}. \quad (5.1.1)$$

Optamos por fixar a assinatura em $(-, +, \dots, +)$, mas mantemos a dimensão da variedade arbitrária no nosso tratamento, até o momento em que a generalização não for mais possível. X^μ são as coordenadas de M em trivializações locais, $R^{(D+1)}$ é o escalar de curvatura associado a $g_{\mu\nu}$ e $\chi = 16\pi G$, onde G é a constante de Newton ($c = 1$).

Assumimos que a topologia na variedade é $M \simeq \mathbb{R} \times \sigma$, onde σ é uma variedade de dimensão D de topologia arbitrária. Isso é possível devido ao seguinte:

Teorema 5.1.1 (Geroch) *Seja $(M, g_{\mu\nu})$ um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Então uma função global t pode ser escolhida tal que cada superfície de t constante é uma superfície*

de Cauchy. Portanto M pode ser folheada por superfícies de Cauchy e a topologia é $\mathbb{R} \times \Sigma$, onde Σ denota qualquer superfície de Cauchy.

Um esboço da prova pode ser visto em⁶. Portanto, M é folheada em hipersuperfícies $\Sigma_t \equiv X_t(\sigma)$ e para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo temos um mergulho $X_t : \sigma \rightarrow M$ dado por $X_t(x) \equiv X(t, x)$, onde x^a , $a = 1, \dots, D$ são coordenadas locais de σ . Temos então um difeomorfismo

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} \times \sigma &\rightarrow M \\ (t, x) &\mapsto X(t, x) \equiv X_t(x). \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Figura 5.1–Difeomorfismo entre $\mathbb{R} \times \sigma$ e M .

Qualquer difeomorfismo $\varphi \in \text{Diff}(M)$ de M é construído da forma $\varphi = X' \circ X^{-1}$, para duas folheações diferentes X, X' . Portanto, relacionamos duas folheações por $X' = \varphi \circ X$. Assim, a liberdade na escolha da folheação é equivalente a $\text{Diff}(M)$ e essa arbitrariedade na escolha da folheação condiz com a invariância por difeomorfismo da ação.

Parametrizamos a decomposição da ação através do **campo vetorial de deformação**

$$T^\mu(X) \equiv \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)_{X=X(x,t)} \equiv N(X)n^\mu(X) + N^\mu(X). \quad (5.1.3)$$

O **vetor deslocamento** N^μ é tangencial a Σ_t e n^μ um vetor unitário normal, ou seja, $g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = -1$. O coeficiente de proporcionalidade N é denominado **lapso**. Requeremos então que o campo de deformação T seja tipo-tempo em toda a variedade, pois queremos trabalhar com mergulhos tipo-espaço. Temos, portanto, o vínculo

$$-N^2 + g_{\mu\nu}N^\mu N^\nu < 0. \quad (5.1.4)$$

Isso implica que o lapso não se anula em nenhum lugar, o que é condizente com a expectativa de uma evolução temporal da folheação.

Figura 5.2—Folheação do espaço-tempo em hipersuperfícies tipo-espaço.

Pelo teorema da função inversa, e como vemos pela construção da folheação, Σ_t pode ser definida por uma equação do tipo $f(X) = t = \text{constante}$. Portanto

$$0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(X_t(x + \epsilon b)) - f(X_t(x))}{\epsilon} = b^a f_{,a} X^\mu_{,a} |_{X=X_t(x)}$$

para qualquer vetor tangente b de σ e x . Como $X^\mu_{,a}$ é também tangente, concluímos que $f_{,a}$ é proporcional ao vetor normal, ou seja, o vetor normal é proporcional a uma 1-forma exata

$$n = n_\mu dX^\mu = F f_{,a} dX^\mu = F df. \quad (5.1.5)$$

5.2 Formas Espaciais

Consideremos as formas fundamentais em Σ :

$$\textbf{Primeira forma fundamental} \quad q_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (5.2.1)$$

$$\textbf{Segunda forma fundamental} \quad K_{\mu\nu} \equiv q^\rho_\mu q^\sigma_\nu \nabla_\rho n_\sigma. \quad (5.2.2)$$

Ambas as formas são espaciais pois se anulam se qualquer índice é contraído com n^μ . Vemos que $K_{\mu\nu}$ é simétrico:

$$\begin{aligned} K_{[\mu\nu]} &= q^\rho_\mu q^\sigma_\nu [\nabla_\rho n_\sigma - \nabla_\sigma n_\rho] = q^\rho_\mu q^\sigma_\nu [\nabla_\rho F \nabla_\sigma f + F \nabla_\rho \nabla_\sigma f - \nabla_\sigma F \nabla_\rho f - F \nabla_\sigma \nabla_\rho f] \\ &= q^\rho_\mu q^\sigma_\nu [(\nabla_{[\rho} \ln F) n_{\sigma]} + F \nabla_{[\rho} \nabla_{\sigma]} f] = 0, \end{aligned}$$

pois ∇ é livre de torção, e que está relacionado à derivada de Lie da métrica $q_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} 2K_{\mu\nu} &= q^\rho_\mu q^\sigma_\nu (2\nabla_{(\rho} n_{\sigma)}) = q^\rho_\mu q^\sigma_\nu (\mathcal{L}_n g)_{\rho\sigma} \\ &= q^\rho_\mu q^\sigma_\nu (\mathcal{L}_n q - \mathcal{L}_n(n \otimes n))_{\rho\sigma} = q^\rho_\mu q^\sigma_\nu (\mathcal{L}_n q)_{\rho\sigma} \\ &= (\mathcal{L}_n q)_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

onde na primeira passagem usamos a relação entre a derivada covariante e a derivada de Lie e na última passagem usamos que $n^\mu \mathcal{L}_n q_{\mu\nu} = -q_{\mu\nu} [n, n]^\mu = 0$, e por isso podemos fazer a

contração dos índices com a métrica q tal como se fosse a métrica g . Usando a relação 5.1.3, reescrevemos a expressão acima como

$$2K_{\mu\nu} = \frac{1}{N} (\mathcal{L}_{(T-N)q}) - 2n^\rho q_{\rho[\mu} \ln(N)_{,\nu]} = \frac{1}{N} (\mathcal{L}_{(T-N)q})_{\mu\nu}. \quad (5.2.4)$$

5.2.1 Derivada covariante

Como q é uma métrica de assinatura euclidiana em Σ , podemos procurar uma derivada covariante D em tensores espaciais que seja compatível com a métrica ($D_\alpha q_{\mu\nu} = 0$) e livre de torção ($D_{[\mu} D_{\nu]} f = 0$, para um escalar f qualquer). Dessa forma, pelo teorema fundamental da geometria riemanniana, essa derivada covariante será única.

Seja u uma 1-forma em Σ tal que $u_\mu n^\mu = 0$ e sejam $\tilde{f}$ e $\tilde{u}$ extensões arbitrárias de f e u em uma vizinhança de Σ em M . Definimos então a seguinte **derivada covariante**:

$$D_\mu f \equiv q_\mu^\nu \nabla_\nu \tilde{f}, \quad (5.2.5a)$$

$$D_\mu u_\nu \equiv q_\mu^\rho q_\nu^\sigma \nabla_\rho \tilde{u}_\sigma, \quad (5.2.5b)$$

e assim por diante com formas de ordens maiores. Embora a extensão para uma vizinhança de Σ em M seja formalmente necessária na definição para efetuar a operação em ∇ , no final a derivada covariante é independente dela, pois vetores não tangentes a Σ acabam sendo projetados pela métrica q . Assim, derrubamos o til daqui para frente. Vejamos, pois, se essa definição confere com a nossa procura:

$$1. D_\mu q_{\nu\rho} = q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} \nabla_{\mu'} (g_{\nu'\rho'} + n_{\nu'} n_{\rho'}) = q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} [(\nabla_{\mu'} n_{\nu'}) n_{\rho'} + n_{\nu'} (\nabla_{\mu'} n_{\rho'})] = 0;$$

$$2. D_\mu D_\nu f - D_\nu D_\mu f = D_\mu (q_\nu^\sigma \nabla_\sigma f) - D_\nu (q_\mu^\lambda \nabla_\lambda f) = q_\mu^\lambda \nabla_\lambda (q_\nu^\sigma \nabla_\sigma f) - q_\nu^\sigma \nabla_\sigma (q_\mu^\lambda \nabla_\lambda f)$$

$$= q_\mu^\lambda q_\nu^\sigma \nabla_\lambda \nabla_\sigma f - q_\nu^\sigma q_\mu^\lambda \nabla_\sigma \nabla_\lambda f = q_\mu^\lambda q_\nu^\sigma (\nabla_\lambda \nabla_\sigma f - \nabla_\sigma \nabla_\lambda f) = 0.$$

Resumindo, a ação de D em tensores espaciais se dá atuando ∇ da maneira usual, seguida da projeção espacial de todos os índices que aparecem, incluindo aquele em que a derivada é tomada.

5.2.2 Curvatura

Passemos agora para o cálculo da curvatura:

$$\begin{aligned}
 D_\mu D_\nu u_\rho &= q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} \nabla_{\mu'} D_{\nu'} u_{\rho'} = q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} \nabla_{\mu'} \left(q_{\nu'}^{\nu''} q_{\rho'}^{\rho''} \nabla_{\nu''} u_{\rho''} \right) \\
 &= \overbrace{q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} \left[(\nabla_{\mu'} q_{\nu'}^{\nu''}) q_{\rho'}^{\rho''} \nabla_{\nu''} u_{\rho''} \right]}^A + \overbrace{q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} \left[q_{\nu'}^{\nu''} (\nabla_{\mu'} q_{\rho'}^{\rho''}) \nabla_{\nu''} u_{\rho''} \right]}^B \\
 &\quad + q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} \left[q_{\nu'}^{\nu''} q_{\rho'}^{\rho''} \nabla_{\mu'} \nabla_{\nu''} u_{\rho''} \right] \tag{5.2.6}
 \end{aligned}$$

Temos que $\nabla_c q_a^b = \nabla_c (g_a^b + n_a n^b) = [(\nabla_c n_a) n^b + n_a \nabla_c n^b]$. Assim,

$$\begin{aligned}
 A &= q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} \left[(\nabla_{\mu'} n_{\nu'}) n^{\nu''} q_{\rho'}^{\rho''} \nabla_{\nu''} u_{\rho''} + n_{\nu'} (\nabla_{\mu'} n^{\nu''}) q_{\rho'}^{\rho''} \nabla_{\nu''} u_{\rho''} \right] \\
 &= q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} (\nabla_{\mu'} n_{\nu'}) n^{\nu''} (g_{\rho'}^{\rho''} + n_{\rho'} n^{\rho''}) \nabla_{\nu''} u_{\rho''} \\
 &= q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} \left[(\nabla_{\mu'} n_{\nu'}) n^{\nu''} g_{\rho'}^{\rho''} \nabla_{\nu''} u_{\rho''} + (\nabla_{\mu'} n_{\nu'}) n^{\nu''} n_{\rho'} n^{\rho''} \nabla_{\nu''} u_{\rho''} \right] \\
 &= q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} (\nabla_{\mu'} n_{\nu'}) (\nabla_n u_{\rho'}),
 \end{aligned}$$

com $\nabla_n u_{\rho'} = n^{\nu''} \nabla_{\nu''} u_{\rho'}$, e

$$\begin{aligned}
 B &= q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} q_{\nu'}^{\nu''} \left[(\nabla_{\mu'} n_{\rho'}) n^{\rho''} \nabla_{\nu''} u_{\rho''} + n_{\rho'} (\nabla_{\mu'} n^{\rho''}) \nabla_{\nu''} u_{\rho''} \right] \\
 &= q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} (\nabla_{\mu'} n_{\rho'}) n^{\rho''} \nabla_{\nu''} u_{\rho''} \\
 &= -q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} (\nabla_{\mu'} n_{\rho'}) (\nabla_{\nu'} n^{\rho''}) u_{\rho''},
 \end{aligned}$$

pois $0 = \nabla_{\nu'} (n^{\rho''} u_{\rho''}) = (\nabla_{\nu'} n^{\rho''}) u_{\rho''} + n^{\rho''} \nabla_{\nu'} u_{\rho''}$. Assim,

$$D_\mu D_\nu u_\rho = q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} \left[(\nabla_{\mu'} n_{\nu'}) (\nabla_n u_{\rho'}) - (\nabla_{\mu'} n_{\rho'}) (\nabla_{\nu'} n^{\rho''}) u_{\rho''} + \nabla_{\mu'} \nabla_{\nu'} u_{\rho'} \right]. \tag{5.2.7}$$

Dessa forma, determinamos a **equação de Gauss**,

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu\rho}^{(D)\sigma} u_\sigma &= D_\mu D_\nu u_\rho - D_\nu D_\mu u_\rho = q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} \left[(\nabla_{\mu'} n_{\nu'}) (\nabla_n u_{\rho'}) - (\nabla_{\mu'} n_{\rho'}) (\nabla_{\nu'} n^{\rho''}) u_{\rho''} \right. \\
 &\quad \left. - (\nabla_{\nu'} n_{\mu'}) (\nabla_n u_{\rho'}) + (\nabla_{\nu'} n_{\rho'}) (\nabla_{\mu'} n^{\rho''}) u_{\rho''} + \nabla_{\mu'} \nabla_{\nu'} u_{\rho'} - \nabla_{\nu'} \nabla_{\mu'} u_{\rho'} \right] \\
 &= -K_{\mu\rho} q_\nu^{\nu'} (\nabla_{\nu'} n^{\rho''}) q_{\rho'}^{\rho''} u_\sigma + K_{\nu\rho} q_\mu^{\mu'} (\nabla_{\mu'} n^{\rho''}) q_{\rho'}^{\rho''} u_\sigma + \nabla_{\mu'} \nabla_{\nu'} u_{\rho'} - \nabla_{\nu'} \nabla_{\mu'} u_{\rho'} \\
 &= \left[K_{\nu\rho} K_\mu^\sigma - K_{\mu\rho} K_\nu^\sigma + q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} R_{\mu'\nu'\rho'}^{(D+1)\sigma} \right] u_\sigma, \tag{5.2.8}
 \end{aligned}$$

que pode ser expressa simplesmente como

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}^{(D)} = q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} q_\sigma^{\sigma'} R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}^{(D+1)} - 2K_{\rho[\mu} K_{\nu]\sigma}. \tag{5.2.9}$$

Procedemos agora para determinar o escalar de curvatura, que é o elemento que nos

interessa, por aparecer na ação. Sejam $K \equiv q^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$ e $K^{\mu\nu} \equiv q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} K_{\rho\sigma}$. Temos,

$$\begin{aligned} R^{(D)} &= R_{\mu\nu\rho\sigma}^{(D)} q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} = [K_{\nu\rho} K_{\mu\sigma} - K_{\mu\rho} K_{\nu\sigma}] q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} + q_{\mu}^{\mu'} q_{\nu}^{\nu'} q_{\rho}^{\rho'} q_{\sigma}^{\sigma'} R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}^{(D+1)} q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} \\ &= K^{\mu\sigma} K_{\mu\sigma} - K^2 + q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}^{(D+1)}. \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

A contração dos índices em $R^{(D+1)}$, que é o termo que aparece na ação, se dá com a métrica g do espaço-tempo, e não com a métrica q de Σ ,

$$\begin{aligned} R^{(D+1)} &= R_{\mu\nu\rho\sigma}^{(D+1)} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma}^{(D+1)} (q^{\mu\rho} - n^{\mu} n^{\rho}) (q^{\nu\sigma} - n^{\nu} n^{\sigma}) \\ &= R_{\mu\nu\rho\sigma}^{(D+1)} [q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} - q^{\mu\rho} n^{\nu} n^{\sigma} - n^{\mu} n^{\rho} q^{\nu\sigma} + n^{\mu} n^{\rho} n^{\nu} n^{\sigma}]. \end{aligned}$$

Mas $R_{\mu\nu\rho\sigma}^{(D+1)} n^{\sigma} = 2\nabla_{[\mu} \nabla_{\nu]} n_{\rho}$, então

$$\begin{aligned} R^{(D+1)} &= R_{\mu\nu\rho\sigma}^{(D+1)} q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} - q^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\sigma}^{(D+1)} n^{\nu} n^{\sigma} - q^{\nu\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}^{(D+1)} n^{\mu} n^{\rho} + R_{\mu\nu\rho\sigma}^{(D+1)} n^{\mu} n^{\rho} n^{\nu} n^{\sigma} \\ &= R_{\mu\nu\rho\sigma}^{(D+1)} q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} - 2q^{\mu\rho} n^{\nu} \nabla_{[\mu} \nabla_{\nu]} n_{\rho} - 2q^{\nu\sigma} \nabla_{[\nu} \nabla_{\mu]} n_{\sigma} + 2(\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - \nabla_{\nu} \nabla_{\mu}) n_{\rho} n^{\rho} n^{\mu} n^{\nu} \\ &= R_{\mu\nu\rho\sigma}^{(D+1)} q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} - 2n^{\nu} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] n^{\mu} - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} n^{\mu} n^{\nu} + \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} n^{\nu} n^{\mu} \\ &= R_{\mu\nu\rho\sigma}^{(D+1)} q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} - 2n^{\nu} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] n^{\mu}. \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Reescrevemos

$$n^{\nu} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] n^{\mu} = \nabla_{\mu} (n^{\nu} \nabla_{\nu} n^{\mu} - n^{\mu} \nabla_{\nu} n^{\nu}) - (\nabla_{\mu} n^{\nu}) (\nabla_{\nu} n^{\mu}) + (\nabla_{\mu} n^{\nu}) (\nabla_{\nu} n^{\mu})$$

e observamos que

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\mu} (n^{\nu} n_{\nu}) = (\nabla_{\mu} n^{\nu}) n_{\nu} + n^{\nu} (\nabla_{\mu} n_{\nu}) = \nabla_{\mu} (n_{\rho} g_{\nu}^{\rho}) n_{\nu} + n^{\nu} (\nabla_{\mu} n_{\nu}) \\ &= (\nabla_{\mu} n_{\rho}) n^{\rho} + n^{\nu} (\nabla_{\mu} n_{\nu}) = 2n^{\nu} \nabla_{\mu} n_{\nu}. \end{aligned}$$

Baseado nisso, escrevemos

$$\begin{aligned} K &= K_{\mu\nu} q^{\mu\nu} = q_{\mu}^{\rho} q_{\nu}^{\sigma} \nabla_{\rho} n_{\sigma} q^{\mu\nu} = q^{\rho\nu} q_{\nu}^{\sigma} \nabla_{\rho} n_{\sigma} = q^{\rho\sigma} \nabla_{\rho} n_{\sigma} \\ &= g^{\rho\sigma} \nabla_{\rho} n_{\sigma} + n^{\rho} n^{\sigma} \nabla_{\rho} n_{\sigma} = g^{\rho\sigma} \nabla_{\rho} n_{\sigma} = \nabla_{\rho} n^{\rho} \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

e

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} &= (q_{\mu}^{\rho} q_{\nu}^{\sigma} \nabla_{\rho} n_{\sigma}) (q^{\mu\epsilon} q^{\nu\theta} q_{\theta}^{\lambda} q_{\epsilon}^{\delta} \nabla_{\lambda} n_{\delta}) = q^{\rho\delta} q^{\sigma\lambda} \nabla_{\rho} n_{\sigma} \nabla_{\lambda} n_{\delta} \\ &= (g^{\rho\delta} + n^{\rho} n^{\delta}) (g^{\sigma\lambda} + n^{\sigma} n^{\lambda}) \nabla_{\rho} n_{\sigma} \nabla_{\lambda} n_{\delta} \\ &= g^{\rho\delta} g^{\sigma\lambda} \nabla_{\rho} n_{\sigma} \nabla_{\lambda} n_{\delta} + g^{\rho\delta} n^{\sigma} \nabla_{\rho} n_{\sigma} n^{\lambda} \nabla_{\lambda} n_{\delta} + g^{\sigma\lambda} n^{\rho} \nabla_{\rho} n_{\sigma} n^{\delta} \nabla_{\lambda} n_{\delta} \\ &\quad + n^{\rho} n^{\lambda} n^{\sigma} \nabla_{\lambda} n_{\sigma} n^{\delta} \nabla_{\lambda} n_{\delta} \\ &= g^{\rho\delta} g^{\sigma\lambda} \nabla_{\rho} n_{\sigma} \nabla_{\lambda} n_{\delta} = (\nabla_{\rho} n^{\lambda}) (\nabla_{\lambda} n^{\rho}), \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

de forma que obtemos a **equação de Codazzi**,

$$R^{(D+1)} = R^{(D)} - 2\nabla_\mu (n^\nu \nabla_\nu n^\mu - n^\mu \nabla_\nu n^\nu) - K^2 + K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}. \quad (5.2.14)$$

O termo da derivada covariante, todavia, é relevante somente para o termo de bordo na ação, que assumiremos por ora que vá a zero. Assim, expressaremos

$$R^{(D+1)} = R^{(D)} - K^2 + K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}. \quad (5.2.15)$$

5.3 Pullback para σ

Reescrevemos até aqui as grandezas relevantes em função das variáveis determinadas sobre Σ_t . No entanto, ainda continuamos ligados a dependência temporal em Σ_t ; queremos, pois, realizar o *pullback* para σ , onde estaremos de fato lidando apenas com coordenadas espaciais, com o parâmetro t como um parâmetro de evolução externo.

Para isso, consideremos os D campos vetoriais espaciais em Σ_t :

$$X_a^\mu(X) \equiv X^\mu_{,a}(x, t)|_{X(x, t)=X}. \quad (5.3.1)$$

Como $n_\mu X_a^\mu = 0$, pois X_a^μ são espaciais, então

$$q_{ab}(t, x) \equiv (q_{\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu)(X(t, x)) = g_{\mu\nu}(X(t, x)) X^\mu_{,a}(t, x) X^\nu_{,b}(t, x) \quad (5.3.2)$$

e

$$K_{ab}(t, x) \equiv (K_{\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu)(X(t, x)) = (X^\mu_{,a} X^\nu_{,b} \nabla_\mu n_\nu)(t, x). \quad (5.3.3)$$

Usando q_{ab} e sua inversa $q^{ab} = \frac{\epsilon^{aa_1 \dots a_{D-1}} \epsilon^{bb_1 \dots b_{D-1}} q_{a_1 b_1} \dots q_{a_{D-1} b_{D-1}}}{\det(q_{cd})(D-1)!}$, podemos restabelecer a métrica em Σ_t através de

$$\begin{aligned} [q^{ab} X^\mu_{,a} X^\nu_{,b}](x, t)|_{X(x, t)=X} &= \epsilon^{aa_1 \dots a_{D-1}} \epsilon^{bb_1 \dots b_{D-1}} q_{a_1 b_1} \dots q_{a_{D-1} b_{D-1}} X^\mu_{,a} X^\nu_{,b} \\ &= \epsilon^{aa_1 \dots a_{D-1}} \epsilon^{bb_1 \dots b_{D-1}} \frac{g_{\nu_1 \nu_1} X^{\mu_1}_{,a} X^{\nu_1}_{,b} \dots g_{\nu_{D-1} \nu_{D-1}} X^{\mu_{D-1}}_{,a} X^{\nu_{D-1}}_{,b}}{\det(q_{cd})(D-1)!} X^\mu_{,a} X^\nu_{,b} \frac{q_{\mu\nu} q^{\mu\nu}}{D} \\ &= \frac{\det(q_{ab}) D!}{\det(q_{cd}) D!} q^{\mu\nu} = q^{\mu\nu}(X). \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Definimos os *pullbacks* do lapso e do vetor deslocamento como $N(x, t) \equiv N(X(x, t))$ e

$N^a(x, t) \equiv q^{ab}(x, t)(X_b^\mu g_{\mu\nu} N^\nu)(X(x, t))$. Então a relação entre K_{ab} e q_{ab} fica da forma

$$\begin{aligned} K_{ab} &= K_{\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu = \frac{1}{2N} \left(\mathcal{L}_{(\vec{T}-\vec{N})} q \right)_{\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu = \frac{1}{2N} [(\mathcal{L}_t q)_{\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu - (\mathcal{L}_{\vec{N}} q)_{\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu] \\ &= \frac{1}{2N} [\dot{q}_{ab} - (\mathcal{L}_{\vec{N}} q)_{ab}]. \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Os *pullbacks* das expressões em 5.2.15 ficam

$$K(x, t) = (q^{\mu\nu} K_{\mu\nu})(X(x, t)) = (q^{ab} K_{ab})(x, t), \quad (5.3.6)$$

$$K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}(x, t) = (K_{\mu\nu} K^{\rho\sigma} q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma})(X(x, t)) = (K_{ab} K_{cd} q^{ac} q^{bd})(x, t), \quad (5.3.7)$$

$$R^{(D)}(x, t) = (R_{\mu\nu\rho\sigma}^{\quad(D)} q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma})(X(x, t)) = (K_{ab} K_{cd} q^{ac} q^{bd})(x, t). \quad (5.3.8)$$

Escrevendo o intervalo invariante no novo sistema de coordenadas (x, t) usando as quantidades q_{ab} , N , N^a , temos

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dX^\mu \otimes dX^\nu \\ &= g_{\mu\nu}(X(x, t)) [X^\mu_{,t} dt + X^\mu_{,a} dx^a] \otimes [X^\nu_{,t} dt + X^\nu_{,b} dx^b] \\ &= g_{\mu\nu}(X(x, t)) [N n^\mu dt + X^\mu_{,a} (dx^a + N^a dt)] \otimes [N n^\nu dt + X^\nu_{,b} (dx^b + N^b dt)] \\ &= [q_{ab} N^a N^b - N^2] dt \otimes dt + q_{ab} N^b [dt \otimes dx^a + dx^a \otimes dt] + q_{ab} dx^a \otimes dx^b. \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

Daí extraímos as componentes da métrica X^*g em σ .

Por fim, resta-nos escrever o elemento de volume $\Omega(X) \equiv \sqrt{|\det(g)|} d^{D+1}X$ no novo referencial. Como a forma de volume é covariante, então $(X^*\Omega)(x, t) = \sqrt{|\det(X^*g)|} dt d^D x$, sendo que

$$\begin{aligned} \det(X^*g) &= (q_{ab} N^a N^b - N^2) \det(q_{ab}) - \\ &\quad q_{a1} N^a \begin{vmatrix} q_{1b} N^b & q_{12} & q_{13} \\ q_{2b} N^b & q_{22} & q_{23} \\ q_{3b} N^b & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} + q_{a2} N^a \begin{vmatrix} q_{12} & q_{1b} N^b & q_{13} \\ q_{22} & q_{2b} N^b & q_{23} \\ q_{32} & q_{3b} N^b & q_{33} \end{vmatrix} - q_{a3} N^a \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{1b} N^b \\ q_{21} & q_{22} & q_{2b} N^b \\ q_{31} & q_{32} & q_{3b} N^b \end{vmatrix} \\ &= (q_{ab} N^a N^b - N^2) \det(q_{ab}) - q_{1b} N^b N^1 \det(q_{ab}) + q_{2b} N^b N^2 (-\det(q_{ab})) - \\ &\quad q_{3b} N^b N^3 \det(q_{ab}) = -N^2 \det(q_{ab}). \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Reescrevemos, assim, o *pullback* para $\mathbb{R} \times \sigma$ da ação de Einstein-Hilbert, que denominaremos de **ação ADM** (Arnowitt-Deser-Misner):

$$S = \frac{1}{\chi} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\sigma} d^D x \sqrt{\det(q)} |N| \left[R^{(D)} + K_{ab} K^{ab} - K^2 \right]. \quad (5.3.11)$$

5.4 Hamiltoniano

Na formulação de Einstein-Hilbert, a métrica g_{ab} (simétrica) possui 10 variáveis de entrada, que por consistência devem ser mantidas em número na formulação ADM. Adotamos então o espaço de configurações cujas variáveis de entrada sejam dadas por q_{ab} , N^a e N (totalizando $6+3+1=10$). Uma vez determinada a ação em nosso novo espaço, trataremos agora de passá-la para uma forma hamiltoniana.

Por simplificação, omitiremos o índice da dimensão das curvaturas, ficando subentendido nesse caso que tratamos com $\dim(\sigma) = D$.

Os momentos conjugados são dados por

$$\begin{aligned}
 P^{ab}(t, x) &\equiv \frac{\delta S}{\delta \dot{q}_{ab}(t, x)} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{ab}} \left[\sqrt{\det(q)} |N| (R + K_{ab} K^{ab} - q^{ab} K_{ab}) \right], \\
 &= \frac{\sqrt{\det(q)} |N|}{\chi} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{ab}} (K_{ab} K^{ab}) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{ab}} (q^{ab} K_{ab})^2 \right] \\
 &= \frac{\sqrt{\det(q)} |N|}{\chi} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{ab}} K_{ab} \right) K^{ab} + K_{ab} q^{ac} q^{bd} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{ab}} K_{cd} \right) - 2K q^{ab} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{ab}} K_{ab} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{\det(q)} |N|}{\chi} \frac{1}{N} [K^{ab} - q^{ab} K], \tag{5.4.1a}
 \end{aligned}$$

$$\Pi(t, x) \equiv \frac{\delta S}{\delta \dot{N}(t, x)} = 0, \tag{5.4.1b}$$

$$\Pi_a(t, x) \equiv \frac{\delta S}{\delta \dot{N}^a(t, x)} = 0, \tag{5.4.1c}$$

onde para 5.4.1a utilizamos 5.3.5. Vemos que 5.4.1b e 5.4.1c constituem dois vínculos primários

$$\Pi(t, x) \approx 0 \quad \text{e} \quad \Pi^a(t, x) \approx 0.$$

Para escrever o hamiltoniano, primeiramente usamos 5.3.5 e expressamos $\dot{q}_{ab} = 2N K_{ab} + (\mathcal{L}_{\vec{N}} q)_{ab}$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_{ab} P^{ab} &= (2N K_{ab} + (\mathcal{L}_{\vec{N}} q)_{ab}) (K^{ab} - q^{ab} K) \frac{|N|}{N} \frac{\sqrt{\det(q)}}{\chi} \\
 &= \frac{|N| \sqrt{\det(q)}}{N \chi} [2N K_{ab} K^{ab} - 2N K^2] + (\mathcal{L}_{\vec{N}} q)_{ab} P^{ab} \\
 &= (\mathcal{L}_{\vec{N}} q)_{ab} P^{ab} + \frac{2|N| \sqrt{\det(q)}}{\chi} [K_{ab} K^{ab} - K^2]. \tag{5.4.2}
 \end{aligned}$$

Queremos, no entanto, obter uma expressão final dependente somente das variáveis de con-

figuração e momento. Para isso, vemos que

$$\begin{aligned}
 P_{ab}P^{ab} &= q_{ac}q_{bd}P^{cd}P^{ab} = \frac{\det(q)}{\chi^2}(K^{cd} - q^{cd}K)(K^{ab} - q^{ab}K)q_{ac}q_{bd} \\
 &= \frac{\det(q)}{\chi^2}(K_{ab}K^{ab} - 2q^{ab}K^{cd}Kq_{ac}q_{bd} + q^{ab}q^{cd}K^2q_{ac}q_{bd}) \\
 &= \frac{\det(q)}{\chi^2}[K_{ab}K^{ab} + (D-2)K^2]
 \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

e

$$P^2 = (q_{ab}P^{ab})^2 = \left[\frac{|N|}{N\chi} \sqrt{\det(q)}(K - DK) \right]^2 = \frac{(1-D)^2}{\chi^2}(\det(q))K^2. \tag{5.4.4}$$

Portanto,

$$P^{ab}P_{ab} + \frac{P^2}{1-D} = \frac{\det(q)}{\chi^2}[K_{ab}K^{ab} + (D-2+1-D)K^2] = \frac{\det(q)}{\chi^2}(K_{ab}K^{ab} - K^2). \tag{5.4.5}$$

O termo dentro da integral do hamiltoniano fica então da forma

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \dot{q}_{ab}(P, q, N, \vec{N})P^{ab} + \dot{N}\Pi + \dot{N}^a\Pi_a - \frac{\sqrt{\det(q)}|N|}{\chi}(R + K_{ab}K^{ab} - K^2)(P, q, N, \vec{N}) \right\} \\
 &= \left\{ \dot{N}\Pi + \dot{N}^a\Pi_a + (\mathcal{L}_{\vec{N}}q)_{ab}P^{ab} + \frac{|N|\sqrt{\det(q)}}{\chi}(2K_{ab}K^{ab} - 2K^2 - R - K_{ab}K^{ab} + K^2) \right\} \\
 &= \left\{ \dot{N}\Pi + \dot{N}^a\Pi_a + (\mathcal{L}_{\vec{N}}q)_{ab}P^{ab} + \frac{|N|\sqrt{\det(q)}}{\chi} \left[\frac{\chi^2}{\det(q)} \left(P^{ab}P_{ab} - \frac{1}{D-1}P^2 \right) - R \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Lembrando que $(\mathcal{L}_{\vec{N}}q)_{ab} = D_a N_b + D_b N_a = q_{bc}D_a N^c + q_{ac}D_b N^c$, e que

$$\int (q_{bc}D_a N^c - q_{ac}D_b N^c)P^{ab} = - \int (q_{bc}N^c D_a P^{ab} + q_{ac}N^c D_b P^{ab}) = - \int 2N^c q_{bc}D_a P^{ab},$$

escrevemos o hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\chi} \int_{\sigma} d^D x \left\{ \dot{N}\Pi + \dot{N}^a\Pi_a + N^a H_a + |N|H \right\}, \tag{5.4.6}$$

sendo

$$H_a \equiv -2q_{ac}D_b P^{bc}, \tag{5.4.7a}$$

$$H \equiv \frac{\chi}{\sqrt{\det(q)}} \left(q_{ac}q_{bd} - \frac{1}{D-1}q_{ab}q_{cd} \right) P^{ab}P^{cd} + \sqrt{\det(q)}R, \tag{5.4.7b}$$

que por ora trataremos respectivamente como o termo vetorial e o termo escalar do hamiltoniano.

5.5 Estrutura simplética

Para um dado t fixo, os pontos no espaço de fase P são constituídos pelos campos suaves $(q_{ab}(t, x), N^a(t, x), N(t, x); P^{ab}(t, x), \Pi_a(t, x), \Pi(t, x))$. Podemos escolher o espaço de Banach em que a variedade é modelada como o produto direto do espaço $T_2(\sigma) \times T_1(\sigma) \times T_0(\sigma)$ de campos tensoriais covariantes simétricos com o espaço $\tilde{T}^2(\sigma) \times \tilde{T}^1(\sigma) \times \tilde{T}^0(\sigma)$ de campos de densidade tensoriais contravariantes simétricos, de posto 2, 1 e 0 em σ , respectivamente, equipados com alguma norma apropriada.

Dados campos tensoriais de posto m qualquer, definimos o seguinte par funcional, invariante por difeomorfismos em σ ,

$$\begin{aligned} \tilde{T}^m(\sigma) \times T_m(\sigma) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (F_m, f^m) &\mapsto F_m(f^m) \equiv \int_{\sigma} d^D x F_m^{a_1 \dots a_m}(x) f_{a_1 \dots a_m}^m(x) \\ &= \int_{\sigma} d^D x \int_{\sigma} d^D x' F_m^{a_1 \dots a_m}(x') f_{b_1 \dots b_m}^m(x) \delta_{(a_1}^{b_1} \dots \delta_{a_m)}^{b_m} \delta^{(D)}(x', x). \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

Definimos, então, a seguinte estrutura de Poisson no espaço de fase:

$$\{F_2(q), P(f^2)\} = \chi F_2(f^2), \quad \{\vec{F}^1(\vec{N}), \vec{\Pi}(\vec{f}_1)\} = \chi \vec{F}_1(\vec{f}_1), \quad \{F(N), \Pi(f)\} = \chi F(f), \quad (5.5.2)$$

e zero para as demais combinações. Essa definição em termos de funcionais nos permitirá enxergar mais facilmente a frente os difeomorfismos gerados pelas transformações de *gauge*, mas é análoga a definição usual para os colchetes de Poisson, se definimos,

$$\begin{aligned} P(\delta^2) &= \int_{\sigma} d^D x' \delta^{(D)}(x', x) P^{ab}(t, x') = P^{ab}(t, x), \\ \delta_2(q) &= \int_{\sigma} d^D x' \delta^{(D)}(x', x) q_{ab}(t, x') = q_{ab}(t, x), \end{aligned}$$

então, pela definição 5.5.2,

$$\begin{aligned} \{q_{ab}(t, x), P^{cd}(t, x')\} &= \{\delta_2(q), P(\delta^2)\} \\ &= \chi \int_{\sigma} d^D x'' \int_{\sigma} d^D x''' \delta^{(D)}(x'', x) \delta^{(D)}(x''', x') \delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta^{(D)}(x'', x''') \\ &= \chi \delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta^{(D)}(x, x'). \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

Estendendo o colchete para funcionais arbitrários $G, G' : P \rightarrow \mathbb{C}$, temos

$$\{G, G'\} = \chi \int_{\sigma} d^D x \left[\frac{\delta G}{\delta q_{ab}(x)} \frac{\delta G'}{\delta P^{ab}(x)} - \frac{\delta G}{\delta P^{ab}(x)} \frac{\delta G'}{\delta q_{ab}(x)} \right]. \quad (5.5.4)$$

Sob essa estrutura simplética, a evolução de um funcional arbitrário G no espaço de fase se dará então por

$$\dot{G} \equiv \{G, \mathcal{H}\}. \quad (5.5.5)$$

5.5.1 Vínculos

Passemos ao tratamento dos vínculos. Na forma funcional, o hamiltoniano fica escrito como

$$\chi \mathcal{H} = \int_{\sigma} d^D x \left\{ \dot{N} \Pi + \dot{N}^a \Pi_a + N^a H_a + |N| H \right\} \equiv \Pi(\dot{N}) + \vec{\Pi}(\dot{\vec{N}}) + \vec{H}(\vec{N}) + H(|N|). \quad (5.5.6)$$

Aplicando a condição de consistência sobre os vínculos 5.4.1b e 5.4.1c, encontramos

$$\dot{\vec{\Pi}}(\vec{f}) = \left\{ \vec{\Pi}(\vec{f}), \mathcal{H} \right\} = \left\{ \vec{\Pi}(\vec{f}), \vec{H}(\vec{N}) \right\} = \vec{H}(\vec{f}) \approx 0.$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(f) &= \{ \Pi(f), \mathcal{H} \} = \{ \Pi(f), H(|N|) \} = \begin{cases} \{ \Pi(f), H(N) \} = H(f), & N > 0 \\ \{ \Pi(f), H(-N) \} = H(-f), & N < 0 \end{cases} \\ &= H\left(\frac{N}{|N|} f\right) \approx 0. \end{aligned}$$

Assim, encontramos que os termos vetorial e escalar do hamiltoniano são na verdade vínculos,

$$H_a(t, x) \approx 0 \quad \text{e} \quad H(t, x) \approx 0. \quad (5.5.7)$$

Dando continuidade ao procedimento, reaplicamos as condições de consistência para os novos vínculos 5.5.7. Essas nos levam a

$$\left\{ \vec{H}(\vec{f}), \mathcal{H} \right\} = \vec{H}(\mathcal{L}_{\vec{N}} \vec{f}) - H(\mathcal{L}_{\vec{f}} |N|) \approx 0, \quad (5.5.8a)$$

$$\{ H(f), \mathcal{H} \} = H(\mathcal{L}_{\vec{N}} f) + \vec{H}(\vec{N}(|N|, f, q)) \approx 0, \quad (5.5.8b)$$

onde $\vec{N}(f, f', q)^a = q^{ab}(f f',_b - f' f,{}_b)$. O cálculo das condições 5.5.8 é não-trivial, e equivale

à dedução da **álgebra de Dirac** $\mathfrak{D}$,

$$\begin{aligned}\left\{\vec{H}(\vec{f}), \vec{H}(\vec{f}')\right\} &= \chi \vec{H}(\mathcal{L}_{\vec{f}} \vec{f}'), \\ \left\{\vec{H}(\vec{f}), H(f)\right\} &= \chi H(\mathcal{L}_{\vec{f}} f), \\ \{H(f), H(f')\} &= \chi \vec{H}(\vec{N}(f, f', q)),\end{aligned}\quad (5.5.9)$$

também denominada **álgebra de deformação da hipersuperfície** e que pode ser derivada a partir da discussão feita a seguir (para a dedução completa, ver¹³). Dadas suas atuações, denominaremos os vínculos H_a e H também como **vínculo de difeomorfismo** e **vínculo hamiltoniano**, respectivamente.

Uma última observação sobre os vínculos que deve ser feita é que são todos de primeira-classe. Dessa forma, a superfície de vínculo é preservada sobre os movimentos gerados por esses, ou seja, os vínculos são geradores de transformações de *gauge*.

Figura 5.3 – Espaço de fase P , superfície de vínculos E , órbita de *gauge* $[u]$ e espaço de fase reduzido P^* . Movimentos gerados sobre a superfície de vínculo geram transformações de *gauge*.

5.6 Geometria das Transformações de Gauge

Em vias de entender a geometria da atuação das transformações de *gauge*, estudaremos as equações de movimento das variáveis canônicas no espaço de fase. Π e Π_a são vínculos primários e seus movimentos já foram analisados pela condição de consistência resultando em 5.5.7. Devido a esses, ainda, $\dot{N}$ e $\dot{N}^a$ atuam como multiplicadores de Lagrange, e portanto as trajetórias do lapso e do deslocamento são completamente arbitrárias. Resta-nos, então, o estudo das trajetórias de q_{ab} e P^{ab} .

Consideremos a ação reduzida, denominada **ação ADM canônica**,

$$S = \frac{1}{\chi} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\sigma} d^D x \left\{ \dot{q}_{ab} P^{ab} - [N^a H_a + |N|H] \right\}. \quad (5.6.1)$$

O hamiltoniano reduzido

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\chi} \int_{\sigma} d^D x [N^a H_a + |N|H] \quad (5.6.2)$$

é uma combinação linear de vínculos, e portanto podemos obter as equações de movimento através do fluxo hamiltoniano das funções $\vec{H}(\vec{f})$ e $H(f)$ separadamente, para quaisquer $\vec{f}$, f .

Seja uma função J qualquer no espaço de fase P . Definimos

$$\delta_{\vec{f}} J \equiv \left\{ J, \vec{H}(\vec{f}) \right\} \quad \text{e} \quad \delta_f J \equiv \{ J, H(f) \}. \quad (5.6.3)$$

5.6.1 Trajetórias de q_{ab}

Começaremos o tratamento reescrevendo o vínculo vetorial de uma forma mais propícia para a análise geométrica. Integrando por partes, temos

$$\vec{H}(\vec{f}) = - \int_{\sigma} d^D x f^a 2q_{ac} D_b P^{bc} = \int_{\sigma} d^D x 2D_b (f^a q_{ac}) P^{bc} = \int_{\sigma} d^D x 2(D_b f^a) q_{ac} P^{bc}. \quad (5.6.4)$$

No entanto, devido à simetria de q_{ab} e P^{ab} ,

$$P^{ab} \left(\mathcal{L}_{\vec{f}} q \right)_{ab} = P^{ab} f^c (D_c q_{ab}) + P^{ab} (D_a f^c) q_{cb} + P^{ab} (D_b f^c) q_{ac} = 2(D_b f^c) q_{ca} P^{ab}, \quad (5.6.5)$$

e assim,

$$\vec{H}(\vec{f}) = \int_{\sigma} d^D x P^{ab} \left(\mathcal{L}_{\vec{f}} q \right)_{ab}. \quad (5.6.6)$$

Dessa forma,

$$\delta_{\vec{f}} F_2(q) = \left\{ F_2(q), \vec{H}(\vec{f}) \right\} = \left\{ F_2(q), P \left(\mathcal{L}_{\vec{f}} q \right) \right\} = \chi F_2 \left(\mathcal{L}_{\vec{f}} q \right) \quad (5.6.7)$$

e

$$\begin{aligned} \delta_f F_2(q) &= \{ F_2(q), H(f) \} = \{ F_2(q), P^2(\tilde{f}) \} = (P \circ \{ F_2, P \} + \{ F_2, P \} \circ P)(q, \tilde{f}) \\ &= 2P \circ \{ F_2, P \}(q, \tilde{f}) = 2(P \circ F_2)(\tilde{f}) = \int_{\sigma} d^D x 2\chi^2 F_{ab}^2 P^{cd} f \frac{q_{ac} q_{bd} - q_{ab} q_{cd} / (D-1)}{\sqrt{\det(q)}} \\ &= 2\chi^2 \int_{\sigma} d^D x F_2^{ab} f \frac{P_{ab} - P q_{ab} / (D-1)}{\sqrt{\det(q)}}. \end{aligned} \quad (5.6.8)$$

Como $P_{ab} = \frac{|N|}{N} \sqrt{\det(q)} [K_{ab} - q_{ab}K]$ e $K_{ab} = \frac{1}{2N} (\dot{q}_{ab} - (\mathcal{L}_{\vec{N}}q)_{ab})$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \delta_{|N|} q_{ab} &= 2\chi^2 |N| \frac{P_{ab} - Pq_{ab}/(D-1)}{\sqrt{\det(q)}} \\ &= 2\chi^2 |N| \frac{1}{\sqrt{\det(q)}} \frac{N}{|N|} \sqrt{\det(q)} \left[K_{ab} - q_{ab}K + K(1-D) \frac{q_{ab}}{D-1} \right] \\ &= 2N\chi K_{ab} = \chi (\dot{q}_{ab} - (\mathcal{L}_{\vec{N}}q)_{ab}). \end{aligned} \quad (5.6.9)$$

Para que possamos interpretar essa quantidade no referencial (t, x) , devemos observar como se comportam as variáveis que a definem. Olhando para a métrica, temos

$$g_{tt} = -N^2 + q_{ab}N^aN^b, \quad g_{ta} = q_{ab}N^b, \quad g_{ab} = q_{ab} \quad (5.6.10)$$

e sua inversa, utilizando $g^{\mu\nu} = \frac{\epsilon^{\mu\mu_1\mu_2\cdots\mu_D} \epsilon^{\nu\nu_1\nu_2\cdots\nu_D} g_{\mu_1\nu_1} g_{\mu_2\nu_2} \cdots g_{\mu_D\nu_D}}{D! \det(g_{\mu\nu})}$, é da forma

$$g^{tt} = -\frac{1}{N^2}, \quad g^{ta} = \frac{N^a}{N^2}, \quad g^{ab} = q^{ab} - \frac{N^aN^b}{N^2}. \quad (5.6.11)$$

Assim,

$$n_t = n_\mu X_t^\mu = -N, \quad n_a = n_\mu X_a^\mu = 0 \quad \text{e} \quad n^t = \frac{1}{N}, \quad n^a = -\frac{N^a}{N}. \quad (5.6.12)$$

Como $q_{at} = q_{tt} = 0$, obtemos então

$$\delta_{|N|} F_2(q) = \chi F_2(\mathcal{L}_{Nn}q). \quad (5.6.13)$$

Resumindo, quando consideramos q_{ab} ,

- H_a gera difeomorfismos de M que preservam Σ_t ;
- H gera difeomorfismos de M ortogonais a Σ_t , entretanto somente quando as equações de movimento $\dot{q}_{ab} = \{q_{ab}, \mathcal{H}\}$ são satisfeitas (as quais usamos para reexpressar P em termos de $\dot{q}$).

5.6.2 Trajetórias de P^{ab}

A variação de $P(f^2)$ com respeito a $\vec{H}(\vec{f}) = -\int_\sigma d^D x q_{ab} (\mathcal{L}_{\vec{f}} P)^{ab}$ fica da forma

$$\delta_{\vec{f}} P(f^2) = \left\{ P(f^2), \vec{H}(\vec{f}) \right\} = \left\{ P(f^2), (-\mathcal{L}_{\vec{f}} P)(q) \right\} = \chi (\mathcal{L}_{\vec{f}} P)(f^2). \quad (5.6.14)$$

O resultado com respeito a $H(f)$ é no entanto bem mais complexo devido à existência do termo de curvatura. Também, como mostraremos, só é válido *on shell*, isso é, quando as

equações de Einstein no vácuo são satisfeitas. Calcularemos aqui $\{P^{ab}, H(|N|)\} = -\frac{\delta H(|N|)}{\delta q_{ab}}$.

Variando H com respeito a q_{ab} ,

$$\begin{aligned} \frac{\delta H(|N|)}{\delta q_{ab}} = \int_{\sigma} d^D x |N| \left\{ \frac{\chi}{\sqrt{\det(q)}} \left[\frac{\delta q_{ac}}{\delta q_{ab}} q_{bd} + q_{ac} \frac{\delta q_{bd}}{\delta q_{ab}} - \frac{1}{D-1} \left(\frac{\delta q_{ab}}{\delta q_{ab}} q_{cd} + q_{ab} \frac{\delta q_{cd}}{\delta q_{ab}} \right) \right] P^{ab} P^{cd} \right. \\ \left. + \chi \left[q_{ac} q_{bd} - \frac{1}{D-1} q_{ab} q_{cd} \right] P^{ab} P^{cd} \frac{\delta}{\delta q_{ab}} \left(\frac{1}{\sqrt{\det(q)}} \right) + \frac{\delta}{\delta q_{ab}} \left(\frac{\sqrt{\det(q)} R}{\chi} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.6.15)$$

Analisando por partes,

$$\begin{aligned} (i) \quad \frac{\delta}{\delta q_{ab}} \left(\frac{1}{\sqrt{\det(q)}} \right) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(\det(q))^{3/2}} \frac{\delta}{\delta q_{ab}} \left(\frac{\epsilon^{a_1 \dots a_D} \epsilon^{b_1 \dots b_D} q_{a_1 b_1} \dots q_{a_D b_D}}{D!} \right) \\ &= -\frac{1}{2 \det(\det(q))} D \frac{\epsilon^{a_1 \dots a_D} \epsilon^{b_1 \dots b_D} q_{a_1 b_1} \dots q_{a_{D-1} b_{D-1}}}{D!} = -\frac{q^{ab}}{2 \sqrt{\det(q)}}, \end{aligned} \quad (5.6.16a)$$

$$(ii) \quad \delta(\sqrt{\det(q)} R) = \left(\delta \sqrt{\det(q)} \right) R + \sqrt{q} (\delta q^{ab}) R_{ab} + \sqrt{q} q^{ab} \delta R_{ab}, \quad (5.6.16b)$$

sendo que

$$\begin{aligned} (ii_a) \quad \frac{\delta \sqrt{\det(q)}}{\delta q^{ab}} &= \frac{1}{2 \sqrt{\det(q)}} \frac{\delta \det(q)}{\delta q^{ab}} = \frac{\sqrt{\det(q)}}{2} q^{ab}, \\ (ii_b) \quad \delta [q^{mn} q_{nj}] q^{jk} &= 0 = (\delta q^{mn}) q_{nj} q^{jk} + q^{mn} q^{jk} \delta q_{nj} \Rightarrow \delta q^{mk} = -q^{mn} q^{jk} \delta q_{nj}, \\ (ii_c) \quad \delta R_{ab} &= \delta [R_{acb}] = \delta [\partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_a \Gamma_{ca}^c + \Gamma_{cd}^c \Gamma_{ab}^d - \Gamma_{bd}^c \Gamma_{ca}^d] \\ &= \partial_c \delta \Gamma_{ab}^c - \partial_b \delta \Gamma_{ca}^c + \Gamma_{cd}^c \delta \Gamma_{ab}^d + \Gamma_{ab}^d \delta \Gamma_{cd}^c - \Gamma_{bd}^c \delta \Gamma_{ca}^d - \Gamma_{ca}^d \delta \Gamma_{bd}^c. \end{aligned}$$

Mas, da definição da derivada covariante,

$$\begin{aligned} D_c \delta \Gamma_{ab}^c &= \partial_c \delta \Gamma_{ab}^c + \Gamma_{cd}^c \delta \Gamma_{ab}^d - \Gamma_{cb}^d \delta \Gamma_{ad}^c - \Gamma_{ca}^d \delta \Gamma_{db}^c, \\ D_b \delta \Gamma_{ca}^c &= \partial_b \delta \Gamma_{ca}^c + \Gamma_{bd}^c \delta \Gamma_{ca}^d - \Gamma_{ba}^d \delta \Gamma_{cd}^c - \Gamma_{bc}^d \delta \Gamma_{da}^c = \partial_b \delta \Gamma_{ca}^c - \Gamma_{ba}^d \delta \Gamma_{cd}^c, \end{aligned}$$

observando que, embora o símbolo de Christoffel não seja um tensor, sua variação o é. Assim,

$$\delta R_{ab} = D_c \delta \Gamma_{ab}^c - D_b \delta \Gamma_{ca}^c. \quad (5.6.17)$$

Expressando então $\delta\Gamma_{ab}^c$ em função de δq_{ab} ,

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma_{ab}^c &= \frac{\delta q^{cd}}{2} (\partial_a q_{bd} + \partial_b q^{ad} - \partial_d q_{ab}) + \frac{q^{cd}}{2} (\partial_a \delta q_{bd} + \partial_b \delta q_{ad} - \partial_d \delta q_{ab}) \\
&= -\frac{q^{ce} q^{df}}{2} (\partial_a q_{bd} + \partial_b q_{ad} - \partial_d q_{ab}) \delta q_{ef} + \frac{q^{cd}}{2} (\partial_a \delta q_{bd} + \partial_b \delta q_{ad} - \partial_d \delta q_{ab}) \\
&= -\frac{q^{ce} q^{df}}{2} 2\Gamma_{ab}^n q_{nd} \delta q_{ef} + \frac{q^{cd}}{2} (\partial_a \delta q_{bd} + \partial_b \delta q_{ad} - \partial_d \delta q_{ab}) \\
&= \frac{q^{cd}}{2} \left(\partial_a \delta q_{bd} + \partial_b \delta q_{ad} - \partial_d \delta q_{ab} - 2\Gamma_{ab}^f \delta q_{df} \right),
\end{aligned}$$

onde usamos que $\Gamma_{ab}^n = \frac{q^{nd}}{2} (\partial_a q_{bd} + \partial_b q_{ad} - \partial_d q_{ab})$. Temos ainda,

$$\begin{aligned}
D_a \delta q_{bd} &= \partial_a \delta q_{bd} - \Gamma_{ab}^f \delta q_{fd} - \Gamma_{ad}^f \delta q_{bf} \\
D_b \delta q_{bd} &= \partial_b \delta q_{bd} - \Gamma_{ba}^f \delta q_{fd} - \Gamma_{bd}^f \delta q_{af} \\
-D_d \delta q_{ab} &= \partial_d \delta q_{ab} + \Gamma_{da}^f \delta q_{bf} + \Gamma_{db}^f \delta q_{af}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$D_a \delta q_{bd} + D_b \delta q_{ad} - D_d \delta q_{ab} = \partial_a \delta q_{bd} + \partial_b \delta q_{ad} - \partial_d \delta q_{ab} - 2\Gamma_{ab}^f \delta q_{df}$$

e assim,

$$\delta\Gamma_{ab}^c = \frac{q^{cd}}{2} (D_a \delta q_{bd} + D_b \delta q_{ad} - D_d \delta q_{ab}). \quad (5.6.18)$$

Substituindo então a equação 5.6.18 em 5.6.17, e tomando a parte correspondente em 5.6.16, temos

$$\int_{\sigma} d^D x |N| \sqrt{\det(q)} q^{cd} \delta R_{cd} = \int_{\sigma} d^D x \sqrt{\det(q)} q^{cd} [D_e \delta \Gamma_{cd}^e - D_c \delta \Gamma_{ed}^e].$$

Integrando duas vezes por partes, e descartando os termos de bordo,

$$\begin{aligned}
&= \int d^D x \sqrt{\det(q)} q^{cd} [(D_c |N|) \delta \Gamma_{ed}^e - (D_e |N|) \delta \Gamma_{cd}^e] \\
&= \int d^D x \sqrt{\det(q)} q^{cd} \left[(D_c |N|) \frac{q^{ef}}{2} (D_d \delta q_{ef} + D_e \delta q_{df} - D_f \delta q_{de}) - (D_e |N|) \frac{q^{ef}}{2} (D_d \delta q_{cf} \right. \\
&\quad \left. + D_c \delta q_{df} - D_f \delta q_{cd}) \right] \\
&= \int d^D x \sqrt{\det(q)} q^{cd} q^{ef} [(D_c |N|) D_d \delta q_{ef} - (D_e |N|) D_c \delta q_{df}] \\
&= \int d^D x \sqrt{\det(q)} q^{cd} q^{ef} [-(D_d D_c |N|) \delta q_{ef} + (D_c D_e |N|) \delta q_{df}] \\
&= \int d^D x \sqrt{\det(q)} [-(D_e D^c |N|) q^{ab} + (D^a D^b |N|)] \delta q_{ab}. \quad (5.6.19)
\end{aligned}$$

Podemos, por fim, reescrever 5.6.15 como

$$\begin{aligned} \{P^{ab}, H(|N|)\} &= -\frac{2|N|}{\sqrt{\det(q)}} \left[P^{ac} P_c^b - \frac{P^{ab} P}{D-1} \right] + \frac{q^{ab} |N| H}{2} + |N| \sqrt{\det(q)} (q^{ab} R - R^{ab}) \\ &+ \sqrt{\det(q)} [-(D_c D^c |N|) q^{ab} + D^a D^b |N|]. \end{aligned} \quad (5.6.20)$$

Esse resultado, entretanto, ainda não nos permite enxergar que o fluxo de P^{ab} com respeito a $H(|N|)$ possa ser tratado como um difeomorfismo ortogonal a Σ_t . Para mostrar isso, trataremos do processo inverso, e escreveremos $\mathcal{L}_{Nn} P^{ab}$ e mostraremos sua relação com 5.6.20.

Partimos de $\mathcal{L}_n K_{\mu\nu} \equiv n^\rho \nabla_\rho K_{\mu\nu} + (\nabla_\mu n^\rho) K_{\rho\nu} + (\nabla_\nu n^\rho) K_{\mu\rho}$. Temos que

$$\begin{aligned} \nabla_\rho (n^\rho K_{\mu\nu}) &= (\nabla_\rho n^\rho) K_{\mu\nu} + n^\rho \nabla_\rho K_{\mu\nu} = K K_{\mu\nu} + n^\rho \nabla_\rho K_{\mu\nu} \\ \Rightarrow n^\rho \nabla_\rho K_{\mu\nu} &= \nabla_\rho (n^\rho K_{\mu\nu}) - K K_{\mu\nu} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\nabla_\mu n^\rho) K_{\rho\nu} &= (\nabla_\mu n_\lambda g^{\lambda\rho}) K_{\rho\nu} = (\nabla_\mu n_\lambda g^{\lambda\rho}) K_{\rho\nu} = (\nabla_\mu n_\lambda) g^{\lambda\rho} K_{\rho\nu} \\ &= (\nabla_\mu n_\lambda) (q^{\lambda\rho} - n^\lambda n^\rho) K_{\rho\nu} = K_\mu^\rho K_{\rho\nu} - K_{\mu\lambda} n^\lambda n^\rho \nabla_\rho n_\nu = K_\mu^\rho K_{\rho\nu} - K_{\mu\lambda} n^\lambda \nabla_n n_\nu \\ &= K_\mu^\rho K_{\rho\nu} + K_{\mu\lambda} n_\nu \nabla_n n^\lambda, \end{aligned}$$

pois $0 = \nabla_n (n^\lambda n_\nu) = (\nabla_n n^\lambda) n_\nu + n^\lambda (\nabla_n n_\nu)$. Assim,

$$\mathcal{L}_n K_{\mu\nu} = -K K_{\mu\nu} + 2K_{\rho\mu} K_\nu^\rho + [\nabla_\rho (n^\rho K_{\mu\nu}) - 2K_{\rho(\mu} n_{\nu)} \nabla_n n^\rho] \quad (5.6.21)$$

Usando a equação de Gauss 5.2.9,

$$\begin{aligned} R_{\nu\sigma} &= R_{\mu\nu\sigma\rho} q^{\mu\rho} = -2K_{\rho[\mu} K_{\nu]\sigma} q^{\mu\rho} + R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}^{(D+1)} q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} q_\sigma^{\sigma'} q^{\mu\rho} \\ &= -K_{\rho\mu} K_{\nu\sigma} q^{\mu\rho} + K_{\rho\nu} K_{\mu\sigma} q^{\mu\rho} + q_\nu^{\nu'} q_\sigma^{\sigma'} R_{\mu\nu'\rho\sigma'}^{(D+1)} (g^{\mu\rho} - n^\mu n^\rho) \\ &= -K K_{\nu\sigma} + K_{\nu\rho} K_\sigma^\rho + q_\nu^{\nu'} q_\sigma^{\sigma'} R_{\nu'\sigma'}^{(D+1)} - q_\nu^{\nu'} q_\sigma^{\sigma'} R_{\mu\nu'\rho\sigma'}^{(D+1)} n^\mu n^\rho \\ &= -K K_{\nu\sigma} + K_{\nu\rho} K_\sigma^\rho + q_\nu^{\nu'} q_\sigma^{\sigma'} R_{\nu'\sigma'}^{(D+1)} + q_\nu^{\nu'} q_\sigma^{\sigma'} n^\mu R_{\mu\nu'\sigma'\rho}^{(D+1)} n^\rho \\ &= -K K_{\nu\sigma} + K_{\nu\rho} K_\sigma^\rho + q_\nu^{\nu'} q_\sigma^{\sigma'} R_{\nu'\sigma'}^{(D+1)} - q_\nu^{\nu'} q_\sigma^{\sigma'} n^\mu [\nabla_\mu, \nabla_{\nu'}] n_{\sigma'}, \end{aligned}$$

então

$$R_{\rho\sigma}^{(D+1)} q_\mu^\rho q_\nu^\sigma - R_{\mu\nu} = K_{\mu\nu} K - K_{\mu\rho} K_\nu^\rho - q_\mu^\rho q_\nu^\sigma n^\lambda [\nabla_\rho, \nabla_\lambda] n_\sigma. \quad (5.6.22)$$

Manipulando o comutador,

$$q_\mu^\rho q_\nu^\sigma n^\lambda [\nabla_\rho, \nabla_\lambda] n_\sigma = q_\mu^\rho q_\nu^\sigma n^\lambda \nabla_\rho \nabla_\lambda n_\sigma - q_\mu^\rho q_\nu^\sigma n^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\rho n_\sigma,$$

mas,

$$\begin{aligned}
\nabla_\lambda(n^\lambda K_{\mu\nu}) &= \nabla_\lambda(q_\nu^\sigma n^\lambda q_\mu^\rho \nabla_\rho n_\sigma) = (\nabla_\lambda q_\nu^\sigma) n^\lambda (\nabla_\mu n_\sigma) + (\nabla_\lambda n^\lambda) (\nabla_\mu n_\nu) \\
&+ n^\lambda (\nabla_\lambda q_\mu^\rho) (\nabla_\rho n_\nu) + q_\mu^\rho q_\nu^\sigma n^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\rho n_\sigma = (\nabla_\lambda n_\nu) n^\sigma n^\lambda (\nabla_\mu n_\sigma) + (\nabla_\lambda n^\sigma) n_\nu n^\lambda (\nabla_\mu n_\sigma) \\
&+ (\nabla_\lambda n^\lambda) (\nabla_\mu n_\nu) + n^\lambda (\nabla_\lambda n_\mu) n^\rho (\nabla_\rho n_\nu) + n^\lambda (\nabla_\lambda n^\rho) n_\mu (\nabla_\rho n_\nu) + q_\mu^\rho q_\nu^\sigma n^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\rho n_\sigma \\
&= (\nabla_n n_\nu) n^\sigma (\nabla_\mu n_\sigma) + (\nabla_n n^\sigma) n_\nu (\nabla_\mu n_\sigma) + (\nabla_\lambda n^\lambda) (\nabla_\mu n_\nu) + (\nabla_n n_\mu) n^\rho (\nabla_\rho n_\nu) \\
&+ (\nabla_n n^\rho) n_\mu (\nabla_\rho n_\nu) + q_\mu^\rho q_\nu^\sigma n^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\rho = (\nabla_n n_\nu) n^\rho K_{\mu\rho} + (\nabla_n n^\rho) n_\nu K_{\mu\rho} \\
&+ K K_{\mu\nu} + \nabla_n (n_\mu n^\rho) (\nabla_\rho n_\nu) + q_\mu^\rho q_\nu^\sigma n^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\rho n_\sigma.
\end{aligned}$$

Então, $q_\mu^\rho q_\nu^\sigma n^\lambda [\nabla_\rho, \nabla_\lambda] n_\sigma$ é igual a

$$q_\mu^\rho q_\nu^\sigma n^\lambda \nabla_\rho \nabla_\lambda n_\sigma + K K_{\mu\nu} - \nabla_\rho (n^\rho K_{\mu\nu}) + (\nabla_n n^\rho) n_\nu K_{\mu\rho} + (\nabla_n (n_\mu n^\rho)) (\nabla_\rho n_\nu). \quad (5.6.23)$$

Somando o termo entre colchetes de 5.6.21 com menos o termo da direita de 5.6.22 e usando 5.6.23, encontramos,

$$\begin{aligned}
&\nabla_\rho (n^\rho K_{\mu\nu}) - K_{\rho\mu} n_\nu \nabla_n n^\rho - K_{\rho\nu} n_\mu \nabla_n n^\rho - K_{\mu\nu} K + K_{\mu\rho} K_\nu^\rho + q_\mu^\rho q_\nu^\sigma n^\lambda \nabla_\rho \nabla_\lambda n_\sigma + K K_{\mu\nu} \\
&- \nabla_\rho (n^\rho K_{\mu\nu}) + (\nabla_n n^\rho) n_\nu K_{\mu\rho} + (\nabla_n (n_\mu n^\rho)) (\nabla_\rho n_\nu) \\
&= K_{\mu\rho} K_\nu^\rho + q_\mu^\rho q_\nu^\sigma n^\lambda \nabla_\rho \nabla_\lambda n_\sigma - K_{\rho\nu} n_\mu \nabla_n n^\rho + \nabla_n (n_\mu n^\rho) \nabla_\rho n_\nu \\
&= K_{\mu\rho} K_\nu^\rho + q_\mu^\rho q_\nu^\sigma n^\lambda \nabla_\rho \nabla_\lambda n_\sigma - (\nabla_\rho n_\nu) n_\mu (\nabla_n n^\rho) + (\nabla_n n_\mu) (\nabla_n n_\nu) + (\nabla_n n^\rho) n_\mu (\nabla_\rho n_\nu) \\
&= K_{\mu\rho} K_\nu^\rho + q_\mu^\rho q_\nu^\sigma n^\lambda \nabla_\rho \nabla_\lambda n_\sigma - q_\mu^\rho q_\nu^\sigma (\nabla_\rho n^\lambda) (\nabla_\lambda n_\sigma) + (\nabla_n n_\mu) (\nabla_n n_\nu) \\
&= q_\mu^\rho q_\nu^\sigma n^\lambda \nabla_\rho \nabla_\lambda n_\sigma + (\nabla_n n_\mu) (\nabla_n n_\nu). \quad (5.6.24)
\end{aligned}$$

Queremos agora mostrar que 5.6.24 equivale a $(D_\mu D_\nu N)/N$. Como Σ_t é definida por $t(X) = t = \text{constante}$,

$$\frac{\partial}{\partial t} t(X) = \nabla_\mu t \frac{\partial X^\mu}{\partial t} = (\nabla_\mu t) T^\mu = 1 \quad \Rightarrow \quad (\nabla_\mu t) (N n^\mu + N^\mu) = 1.$$

Como N^μ e n^μ são ortogonais,

$$1 = (\nabla_\mu t) (-n^\nu n_\nu) (N n^\mu + N^\mu) = - (n^\nu \nabla_\mu t) N (-\delta_\nu^\mu) = N \nabla_n t. \quad (5.6.25)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
D_\mu N &= D_\mu \left(\frac{1}{\nabla_n t} \right) = -N^2 D_\mu \nabla_n t = -N^2 q_\mu^\nu \nabla_\nu \nabla_n t \stackrel{*}{=} -N^2 q_\mu^\nu n^\rho \nabla_\rho \nabla_\nu t \\
&= -N q_\mu^\nu n^\rho \nabla_\rho (N \nabla_\nu t) + N q_\mu^\nu (\nabla_n N) (\nabla_\nu t) \stackrel{**}{=} N \nabla_n n_\mu, \quad (5.6.26)
\end{aligned}$$

onde em $*$ usamos a condição de torção nula e em $**$ usamos que $q_\mu^\nu \nabla_\nu t = \frac{1}{N} q_\mu^\nu n_\nu = 0$ e

$N\nabla_\mu t = n_\mu$. A segunda derivada é então

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu N &= D_\mu(N\nabla_n n_\nu) = (D_\mu N)(\nabla_n n_\nu) + ND_\mu \nabla_n n_\nu \\ &= N(\nabla_n n_\mu)(\nabla_n n_\nu) + Nq_\mu^\rho q_\nu^\sigma \nabla_\rho \nabla_n n_\sigma, \end{aligned} \quad (5.6.27)$$

que é N vezes 5.6.24. Observamos que em 5.6.27 não podemos substituir N por $|N|$ se N não for positivo em todo lugar, o que torna nossa explicação válida somente se $|N| = N$ sempre. Dessa forma, impomos N positivo daqui por diante. Obtemos, então, que

$$N \left[\mathcal{L}_n K_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - 2K_{\rho\mu} K_\nu^\rho - R_{\rho\sigma}^{(D+1)} q_\mu^\rho q_\nu^\sigma + R_{\mu\nu} \right] = D_\mu D_\nu N$$

e portanto

$$\mathcal{L}_{Nn} K_{\mu\nu} = N \left[-K K_{\mu\nu} + 2K_{\rho\mu} K_\nu^\rho + R_{\rho\sigma}^{(D+1)} q_\mu^\rho q_\nu^\sigma - R_{\mu\nu} \right] + D_\mu D_\nu N. \quad (5.6.28)$$

Calculado $\mathcal{L}_{Nn} K_{\mu\nu}$, passamos aos cálculos de $\mathcal{L}_{Nn} \left(\sqrt{\det(q)} \right)$ e $\mathcal{L}_{Nn} q^{\mu\nu}$. Temos que $\det(q)$ generalizado para um referencial arbitrário é

$$\det((q_{\mu\nu})(X)) \equiv \frac{1}{D!} [(\nabla_{\mu_0} t)(X) \epsilon^{\mu_0 \dots \mu_D}] [(\nabla_{\nu_0} t)(X) \epsilon^{\nu_0 \dots \nu_D}] q_{\mu_1 \nu_1}(X) \dots q_{\mu_D \nu_D}(X). \quad (5.6.29)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Nn} \left(\sqrt{\det(q)} \right) &= \frac{1}{2\sqrt{\det(q)}} \mathcal{L}_{Nn}(\det(q)) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\det(q)}} \left[\frac{2\epsilon^{\mu_0 \dots \mu_D} (\nabla_{\nu_0} t) \epsilon^{\nu_0 \dots \nu_D} q_{\mu_1 \nu_1} \dots q_{\mu_D \nu_D} \mathcal{L}_{Nn}(\nabla_{\mu_0} t)}{D!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{D(\nabla_{\mu_0} t) \epsilon^{\mu_0 \dots \mu_D} (\nabla_{\nu_0} t) \epsilon^{\nu_0 \dots \nu_D} q_{\mu_1 \nu_1} \dots q_{\mu_{D-1} \nu_{D-1}} \mathcal{L}_{Nn} q_{\mu_D \nu_D}}{D!} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\det(q)}} \det(q) q^{\mu\nu} \mathcal{L}_{Nn} q_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{\det(q)} q^{\mu\nu} \mathcal{L}_{Nn} q_{\mu\nu} \\ &= N \sqrt{\det(q)} K, \end{aligned} \quad (5.6.30)$$

sendo que o primeiro termo da segunda igualdade se anula porque $\mathcal{L}_{\vec{T}} \nabla_\mu t = \mathcal{L}_{\vec{N}} \nabla_\mu t = 0$. Por fim,

$$\mathcal{L}_{Nn} q^{\mu\nu} = -q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} \mathcal{L}_{Nn} q_{\rho\sigma} = -2N K^{\mu\nu}. \quad (5.6.31)$$

Finalmente, somos capazes de calcular a derivada de Lie de $P^{\mu\nu} = \sqrt{\det(q)} [q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} -$

$$q^{\mu\nu} q^{\rho\sigma}] K_{\rho\sigma},$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Nn} P^{\mu\nu} &= \left(\mathcal{L}_{Nn} \sqrt{\det(q)} \right) [q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} - q^{\mu\nu} q^{\rho\sigma}] K_{\rho\sigma} + \sqrt{\det(q)} [(\mathcal{L}_{Nn} q^{\mu\rho}) q^{\nu\sigma} \\
&\quad + q^{\mu\rho} (\mathcal{L}_{Nn} q^{\nu\sigma}) - (\mathcal{L}_{Nn} q^{\mu\nu}) q^{\rho\sigma} - q^{\mu\nu} (\mathcal{L}_{Nn} q^{\rho\sigma})] K_{\rho\sigma} + \sqrt{\det(q)} [q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} \\
&\quad - q^{\mu\nu} q^{\rho\sigma}] \mathcal{L}_{Nn} K_{\rho\sigma} \\
&= N \sqrt{\det(q)} [K K^{\mu\nu} - K^2 q^{\mu\nu}] - 2N \sqrt{\det(q)} [K^{\mu\rho} K_{\rho}^{\nu} + K^{\nu\sigma} K_{\sigma}^{\mu} \\
&\quad - K^{\mu\nu} K - q^{\mu\nu} K^{\rho\sigma} K_{\rho\sigma}] + N \sqrt{\det(q)} [q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} - q^{\mu\nu} q^{\rho\sigma}] \left[-K K_{\rho\sigma} \right. \\
&\quad \left. + 2K_{\lambda\rho} K_{\sigma}^{\lambda} + R_{\lambda\delta}^{(D+1)} q_{\rho}^{\lambda} q_{\sigma}^{\delta} - R_{\rho\sigma} + \frac{1}{N} D_{\rho} D_{\sigma} N \right] \\
&= N \sqrt{\det(q)} \left[K K^{\mu\nu} - K^2 q^{\mu\nu} - 2K^{\mu\rho} K_{\rho}^{\nu} - 2K^{\nu\sigma} K_{\sigma}^{\mu} + 2K^{\mu\nu} K \right. \\
&\quad \left. + 2q^{\mu\nu} K^{\rho\sigma} K_{\rho\sigma} - K K^{\mu\nu} + 2K_{\lambda}^{\mu} K^{\nu\lambda} + K^2 q^{\mu\nu} - 2q^{\mu\nu} K_{\lambda\rho} K^{\lambda\rho} \right. \\
&\quad \left. + R_{\lambda\delta}^{(D+1)} q^{\mu\lambda} q^{\nu\delta} - R_{\lambda\delta}^{(D+1)} q^{\mu\nu} q^{\lambda\delta} - R^{\mu\nu} + R q^{\mu\nu} + \frac{1}{N} D^{\mu} D^{\nu} N - \frac{1}{N} q^{\mu\nu} D^{\sigma} D_{\sigma} N \right] \\
&= N \sqrt{\det(q)} \left[2K^{\mu\nu} K - 2K^{\mu\rho} K_{\rho}^{\nu} + R^{\mu\nu(D+1)} - R^{(D+1)} q^{\mu\nu} - R^{\mu\nu} + R q^{\mu\nu} \right] \\
&\quad + \sqrt{\det(q)} [D^{\mu} D^{\nu} N - q^{\mu\nu} D^{\sigma} D_{\sigma} N] \tag{5.6.32}
\end{aligned}$$

Lembrando que 5.6.20 é

$$\begin{aligned}
\{P^{\mu\nu}, H(N)\} &= -\frac{2|N|}{\sqrt{\det(q)}} \left[P^{\mu\rho} P_{\rho}^{\nu} - \frac{P^{\mu\nu} P}{D-1} \right] + \frac{q^{\mu\nu} N H}{2} + |N| \sqrt{\det(q)} (q^{\mu\nu} R - R^{\mu\nu}) \\
&\quad + \sqrt{\det(q)} [-(D_{\sigma} D^{\sigma} N) q^{\mu\nu} + D^{\mu} D^{\nu} N],
\end{aligned}$$

se escrevemos

$$\begin{aligned}
P^{\mu\rho} P_{\rho}^{\nu} - \frac{P^{\mu\nu} P}{D-1} &= \det(q) \left[(K^{\mu\rho} - K q^{\mu\rho})(K_{\rho}^{\nu} - K q_{\rho}^{\nu}) - \frac{(K^{\mu\nu} - K q^{\mu\nu})(K - DK)}{D-1} \right] \\
&= \det(q) [K^{\mu\rho} K_{\rho}^{\nu} - K K^{\mu\nu} - K K^{\mu\nu} + K^2 q^{\mu\nu} + K K^{\mu\nu} - K^2 q^{\mu\nu}] \\
&= \det(q) [K^{\mu\nu} K_{\rho}^{\nu} - K^{\mu\nu} K],
\end{aligned}$$

então

$$\{H(N), P^{\mu\nu}\} = \frac{q^{\mu\nu} N H}{2} - N \sqrt{\det(q)} [q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} - q^{\mu\nu} q^{\rho\sigma}] R_{\rho\sigma}^{(D+1)} + \mathcal{L}_{Nn} P^{\mu\nu}. \tag{5.6.33}$$

Desse modo, somente sobre a superfície de vínculo e somente se as equações de movimento no vácuo valem ($R_{\rho\sigma}^{(D+1)} = 0$) é que o fluxo de $P^{\mu\nu}$ com respeito a $H(N)$ pode ser interpretado como a ação de um difeomorfismo na direção perpendicular a Σ_t .

5.6.3 Relação Entre $\text{Diff}(M)$ e as Transformações dos Vínculos

Uma importante característica da natureza geométrica da Relatividade Geral é o fato da ação de Einstein-Hilbert ser invariante sob o grupo de difeomorfismos quadri-dimensionais $\text{Diff}(M)$ (mudanças suaves de coordenadas não afetam a ação), e que isso independe da validade ou não das equações de movimento. Entretanto, vemos que as transformações de *gauge* geradas pelos vínculos resultam em difeomorfismos infinitesimais somente se as equações de movimento são válidas, ou seja, fora dessa condição os grupos são diferentes. Outra maneira de enxergar tal diferença é o fato da álgebra de Dirac $\mathfrak{D}$, ao contrário dos difeomorfismos infinitesimais, não constituir uma álgebra de Lie. Em $\{H(N_1), H(N_2)\} = \vec{H}(\vec{N}_3)$, o campo $\vec{N}_3$ depende do espaço de fase, deixando assim de ser uma constante de estrutura (independente do espaço de fase) e se tornando uma função de estrutura.

Daremos aqui uma das razões para que a álgebra de Dirac envolva funções de estrutura, e que também é uma razão para que o vínculo hamiltoniano só possa gerar difeomorfismos ao longo do campo vetorial tipo-tempo Nn . Nosso procedimento baseia-se em mergulhos tipo-espaço X , com respeito a uma dada métrica g . Entretanto, o grupo $\text{Diff}(M)$ apenas depende de M e não de g , e portanto para qualquer mergulho tipo-espaço X podemos encontrar um elemento $\phi \in \text{Diff}(M)$ tal que $\phi \circ X$ não seja mais tipo-espaço com respeito a g . Dessa forma, $\text{Diff}(M)$ é incompatível com a dependência dinâmica de X com g . Para que isso seja corrigido, então, precisamos restringir $\text{Diff}(M)$ àqueles difeomorfismos que preservam a natureza tipo-espaço do mergulho, assim dependendo da métrica. Isso explica também o motivo do vínculo hamiltoniano como gerador canônico desses difeomorfismos apenas fechar com essas funções de estrutura dependendo da métrica espacial e porque sua álgebra se espelha a $\text{Diff}(M)$ somente quando valem as equações de movimento.

Figura 5.4 – A ação de $\phi \in \text{Diff}(M)$ sobre um mergulho tipo-espaço X e uma dada métrica g não é necessariamente tipo-espaço com relação a g . Temos, assim, que restringir $\text{Diff}(M)$ de modo que a natureza da folheação seja preservada.

Estruturas com vínculos cujos multiplicadores de Lagrange dependem do espaço de fase estão relacionados com o chamado **grupo de Bergman-Komar**, $BK(M)$. Classicamente, não vemos diferença nas soluções, pois sendo válidas as equações de Einstein, então $Diff(M) = BK(M)$.

Observamos, por fim, que a invariância acerca de $Diff(M)$ consiste de uma **simetria cinemática** de qualquer ação invariante por difeomorfismo, isso é, o grupo de invariância é insensível à forma do lagrangeano. Por outro lado, as equações de movimento são dadas pelo colchete de Poisson das variáveis com os vínculos, e portanto os vínculos estão relacionados com a dinâmica. Mesmo que essa dinâmica seja considerada como uma transformação de *gauge* infinitesimal, os vínculos devem ter informação sobre a forma específica do lagrangeano. Por isso, $BK(M)$ é denominado como um grupo de **simetria dinâmica**.

Variáveis de Ashtekar

Passaremos agora à construção das novas variáveis, que deslocarão o caráter dinâmico da Relatividade Geral da métrica para conexões. Para isso, estenderemos o espaço de fase ADM, que passaremos a considerar como uma redução simplética de uma variedade simplética maior com superfície de vínculo co-isotrópica. Por fim, efetuaremos uma transformação canônica sobre o espaço de fase estendido, determinando a conexão.

6.1 *D-beins* e curvatura extrínseca

Definimos as chamadas **co-*D-bein*** e_a^i (para $D = 3, 4$: co-*dreibein*, co-*vierbein* ou co-triada, co-tetrad) como bases ortonormais “não-holonômicas” (ou seja, não-coordenadas) de campos vetoriais suaves em σ , onde $a, b, \dots$ são índices tensoriais e $i, j, \dots$ índices de $SO(D)$. As bases obedecem as relações

$$e_a^i e_j^a = \delta_j^i \quad \text{e} \quad e_a^i e_i^b = \delta_a^b, \quad (6.1.1)$$

ou seja, $e_i^a = (e_a^i)^{-1}$. A métrica é restituída como

$$q_{ab} \equiv \delta_{ij} e_a^i e_b^j. \quad (6.1.2)$$

Com a inserção das *D-beins*, estendemos o espaço de fase com as dimensões do grupo. Todavia, a variante física relevante que é a métrica fica invariante sob rotações em $SO(D)$: $e_a^i \mapsto O_j^i e_a^j$. Assim, contruímos um fibrado principal em $SO(D)$, onde o espaço base é o espaço de fase ADM. Em especial para $D = 3$, podemos ver e_a^i como uma 1-forma de valores em $su(2)$, uma vez que a representação adjunta de $SU(2)$ sobre sua álgebra de Lie é isomorfa à representação definida de $SO(3)$ em $\mathbb{R}^3$ sob o isomorfismo $\mathbb{R}^3 \rightarrow su(2)$ levando $v^i \mapsto v^i \tau_i$, onde τ_i é uma base de $su(2)$ (matrizes de Pauli).

Em Relatividade Geral Clássica, assume-se a métrica q_{ab} como não-degenerada e de assi-

natura euclideana. Portanto, $\det(q) = |\det(e)|^2 > 0$. Assume-se também que os campos e_a^j, q_{ab} sejam suaves em σ , implicando que $\det(e)$ tem um sinal constante. Estamos, assim, implicitamente impondo uma orientação a σ .

Figura 6.1 – Consideramos o espaço de fase ADM como uma redução simplética de um fibrado principal em $SO(D)$, a partir das D -beins.

Por meio da curvatura extrínseca, definimos a 1-forma K_a^i como

$$K_a^i \equiv K_{ab} e^{bi}, \quad (6.1.3)$$

onde $e^{bi} = \delta^{ij} e_j^b$ (usamos o delta de Kronecker para levantamento e abaixamento dos índices de $SO(D)$). Devido à simetria de K_{ab} ,

$$K_a^i e_{bi} = K_{ab} = K_{ba} = K_b^i e_{ai},$$

e estabelecemos o vínculo

$$G_{ab} \equiv K_{[a}^i e_{b]i} = 0. \quad (6.1.4)$$

Definimos ainda uma quantidade densitizada das D -bein, com a qual preferiremos trabalhar (por razões que se mostrarão a frente),

$$E_j^a \equiv \sqrt{\det(q)} e_j^a. \quad (6.1.5)$$

Usando 6.1.4 e 6.1.5,

$$K_{ai} E_j^a = K_{ab} e_i^b \sqrt{\det(q)} e_j^a = K_{ba} e_j^a \sqrt{\det(q)} e_i^b = K_{aj} e_i^b,$$

e assim reescrevemos o vínculo 6.1.4 como

$$G_{ij} \equiv K_{a[i} E_{j]}^a = 0 \quad (6.1.6)$$

6.2 Funções no espaço estendido

Consideremos as variáveis canônicas do espaço de fase ADM reescritas em função das variáveis do espaço estendido,

$$q_{ab} = \delta_{ij} e_a^j e_b^i = \delta_{ij} E_a^j E_b^i (\det(q)) = E_a^j E_{bj} |\det(E_l^c)|^{2/(D-1)} \quad (6.2.1)$$

e

$$\begin{aligned} P^{ab} &= \sqrt{\det(q)} [K^{ab} - q^{ab} K] = \sqrt{\det(q)} [K_{cd} q^{ac} q^{bd} - K_{cd} q^{ab} q^{cd}] \\ &= \sqrt{\det(q)} K_{(c} e_{d)i} [e_j^a e^{cj} e_k^b e^{dk} - e_l^a e^{bl} e_m^c e^{dm}] \\ &= \frac{\sqrt{\det(q)}}{2} [e_j^a e_k^b K_c^i e^{cj} \delta_i^k + e_j^a e_k^b K_d^j e^{dk} \delta_i^j - e_l^a e_m^c e^{bl} \delta_i^m K_c^i - e_l^a e^{bl} e^{dm} K_d^i \delta_{im}] \\ &= \frac{\sqrt{\det(q)}}{2} [e_j^a e_k^b K_c^i e_l^c \delta^{lj} + e_j^a e_k^b K_d^j e^{dk} - e_j^a e^{bj} e_m^c K_c^m - e_j^a e^{bj} e_i^d K_d^i] \\ &= \frac{1}{|\det(q)|} [E_j^a E_k^b K_c^i E_l^c \delta^{lj} - E_j^a E_l^b \delta_{lj} K_c^i E_k^c] \\ &= 2 |\det(E_l^c)|^{2/(D-1)} E^{al} E_l^d K_{[d} \delta_{c]}^b E_k^c, \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

onde usamos que

$$\det(E_j^a) = \epsilon_{a_1 \dots a_D} \epsilon^{j_1 \dots j_D} e_{j_1}^{a_1} \dots e_{j_D}^{a_D} \left(\sqrt{\det(q)} \right)^D = \det(e_j^a) \left(\sqrt{\det(q)} \right)^D = \left(\sqrt{\det(q)} \right)^{D-1}.$$

Reescrevemos então os vínculos,

$$\begin{aligned} H_a &= -2q_{ac} D_b P^{bc} = -2D_b (q_{ac} P^{bc}) = -2D_b [E_a^j E_{cj} 2E^{bl} E_l^d K_{[d} \delta_{e]}^c E_k^e] \\ &= -2D_b [E_a^j E_{cj} E^{bl} E_l^d K_d^k E_k^c - E_a^j E_{cj} E^{bl} E_l^c K_d^k E_k^d] \\ &= -2D_b [E_a^j \delta_{jk} \delta^{bd} K_d^k - E_a^j \delta_{jl} E^{bl} K_d^k E_k^d] \\ &= -2D_b [E_a^j K_{dj} \delta^{bd} - \delta_a^b K_d^k E_k^d] \stackrel{*}{=} -2D_b [E_d^j K_{aj} \delta^{bd} - \delta_a^b K_d^k E_k^d] \\ &= -2D_b [E_j^b K_a^j - \delta_a^b E_k^d K_d^k], \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

onde em * usamos 6.1.4, e

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\sqrt{\det(q)}} \left[q_{ac} q_{bd} - \frac{1}{D-1} q_{ab} q_{cd} \right] P^{ab} P^{cd} - \sqrt{\det(q)} R \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(q)}} \left[E_a^j E_{cj} E_b^k E_{dk} - \frac{1}{D-1} E_a^l E_{bl} E_c^m E_{dm} \right] 4E^{an} E_n^e K_{[e}^o \delta_{f]}^b E_o^f E^{cp} E_p^g K_{[g}^q \delta_{h]}^d E_q^h \\ &\quad - \sqrt{\det(q)} R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\det(q)}} \left[\delta^{jn} \delta_j^p (E_n^e K_e^o \delta_o^k - E_o^e K_e^o \delta_n^k) (E_p^g K_g^q \delta_{kq} - E_q^g K_g^q \delta_{kp}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{D-1} \delta^{ln} \delta^{mp} (E_n^e K_e^o \delta_{lo} - E_o^e K_e^o \delta_{ln}) (E_p^g K_g^q \delta_{mq} - E_q^g K_g^q \delta_{mp}) \right] - \sqrt{\det(q)} R \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(q)}} \left[\delta^{np} (E_n^e E_p^g K_e^k K_{gk} - \delta_{kp} E_n^e E_q^g K_e^k K_g^q - \delta_n^k E_o^e E_p^g K_e^o K_{gk} \right. \\
&\quad \left. + \delta_n^k \delta_{kp} E_o^e E_p^g K_e^o K_g^q) + (1-D) E_o^e K_e^o E_q^g K_g^q \right] - \sqrt{\det(q)} R \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(q)}} \left[E^{ep} E_p^g K_e^k K_{gk} - E_k^e K_e^k E_q^g K_g^q - E_o^e K_e^o E^{gk} K_{gk} + D E_o^e K_e^o E_q^g K_g^q \right. \\
&\quad \left. - D E_o^e K_e^o E_q^g K_g^q \right] - \sqrt{\det(q)} R \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(q)}} \left[E^{ep} E_p^g K_e^k K_{gk} - E_o^e K_e^o E^{gk} K_{gk} \right] - \sqrt{\det(q)} R \\
&\stackrel{*}{=} \frac{1}{\sqrt{\det(q)}} \left[E_k^e K_e^p E_p^g K_g^k - E_p^e K_e^p E_k^g K_g^k \right] - \sqrt{\det(q)} R \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(q)}} \left[E_k^e E_p^g - E_p^e E_k^g \right] K_e^p K_g^k - \sqrt{\det(q)} R, \tag{6.2.4}
\end{aligned}$$

onde em * usamos 6.1.6, $R(q)$ é considerado uma função de E_j^a e $\sqrt{\det(q)} = |\det(E_j^a)|^{\frac{1}{D-1}}$.

6.2.1 Estrutura Simplética

Muniremos nosso espaço estendido com uma estrutura simplética da forma

$$\{E_j^a(x), E_k^b(y)\} = \{K_a^j(x), K_b^k(y)\} = 0 \quad \text{e} \quad \{E_i^a(x), K_b^j(y)\} = \frac{\chi}{2} \delta_b^a \delta_j^i \delta(x, y), \tag{6.2.5}$$

e com isso verificaremos que recuperamos os colchetes de Poisson para P^{ab} e q_{cd} :

1. Como q_{ab} é função somente de E_j^a , é trivial que $\{q_{ab}, q_{cd}\} = 0$;
2. $\{P^{ab}, q_{cd}\} = \{|\det(E)|^{-2/(D-1)} [E^{an} E_n^e K_e^o E_o^b - E^{an} E_n^b K_e^o E_o^e], E_c^j E_{dj} | \det(E)|^{2/(D-1)}\}$
 $= |\det(E)|^{-2/(D-1)} (E^{an} E_n^e E_o^b - E^{an} E_n^b E_o^e) \{K_e^o, E_c^j E_{dj} | \det(E)|^{2/(D-1)}\}.$

Sendo que

$$\begin{aligned}
\{K_e^o, |\det(E)|^{2/(D-1)}\} &= \frac{2}{D-1} |\det(E)|^{2/(D-1)-1} \{K_e^o, |\det(E)|\} \\
&= \frac{2}{(D-1)} |\det(E)|^{2/(D-1)-1} \frac{\chi}{2} \left(-\frac{\partial |\det(E)|}{\partial E_o^e} \right) \\
&= -\frac{\chi}{D-1} |\det(E)|^{2/(D-1)} E_o^e, \tag{6.2.6}
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
\{P^{ab}, q_{ab}\} &= |\det(E)|^{-2/(D-1)} (E^{an} E_n^e E_o^b - E^{an} E_n^b E_o^e) \left[E_{dj} |\det(E)|^{2/(D-1)} \frac{\chi}{2} \delta_{ec} \delta^{jo} \right. \\
&\quad \left. + E_c^j |\det(E)|^{2/(D-1)} \frac{\chi}{2} \delta_{ed} \delta_j^o - \frac{\chi}{D-1} |\det(E)|^{2/(D-1)} E_e^o E_c^j E_{dj} \right] \\
&= \chi \left[\frac{1}{2} E^{an} E_{cn} E^{bj} E_{dj} + \frac{1}{2} E^{an} E_{dn} E_j^b E_c^j - E^{an} E_n^b E_c^j E_{dj} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{D-1} (-E^{an} E_n^e \delta_e^b E_c^j E_{dj} + D E^{an} E_n^b E_c^j E_{dj}) \right] \\
&= \chi \left[\frac{1}{2} \delta_c^a \delta_d^b + \frac{1}{2} \delta_d^a \delta_c^b - E^{an} E_n^b E_c^j E_{dj} + E^{an} E_n^b E_c^j E_{dj} \right] \\
&= \chi \delta_{(c}^a \delta_{d)}^b;
\end{aligned} \tag{6.2.7}$$

3. Para definir os colchetes de Poisson dos momentos, usaremos

$$\{P^{ab}, P^{cd}\} = \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial P^{ab}}{\partial K_f^k} \frac{\partial P^{cd}}{\partial E_k^f} - \frac{\partial P^{ab}}{\partial E_k^f} \frac{\partial P^{cd}}{\partial K_f^k} \right),$$

onde

$$\frac{\partial P^{ab}}{\partial K_f^k} = \frac{\partial}{\partial K_f^k} (2 |\det(E)|^{-2/(D-1)} E^{an} E_n^e K_{[e}^o \delta_{g]}^b E_o^g) = 2 |\det(E)|^{-2/(D-1)} E^{an} E_n^e \delta_k^o \delta_{[e}^f \delta_{g]}^b E_o^g \tag{6.2.8}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P^{ab}}{\partial E_k^f} &= \frac{\partial}{\partial E_k^f} (|\det(E)|^{-2/(D-1)} E^{an} E_n^e K_{[e}^o \delta_{g]}^b E_o^g) \\
&= K_{[e}^o \delta_{g]}^b \left[\left(\frac{\partial |\det(E)|^{-2/(D-1)}}{\partial E_k^f} \right) E^{an} E_n^e E_o^g + |\det(E)|^{-2/(D-1)} \left(\frac{\partial E^{an}}{\partial E_k^f} \right) E_n^e E_o^g \right. \\
&\quad \left. + |\det(E)|^{-2/(D-1)} E^{an} \left(\frac{\partial E_n^e}{\partial E_k^f} \right) E_o^g + |\det(E)|^{-2/(D-1)} E^{an} E_n^e \left(\frac{\partial E_o^g}{\partial E_k^f} \right) \right] \\
&= |\det(E)|^{-2/(D-1)} K_{[e}^o \delta_{g]}^b \left[-\frac{2}{D-1} E_f^k E^{an} E_n^e E_o^g + \delta_f^a \delta^{nk} E_n^e E_o^g + E^{an} \delta_f^e \delta_n^k E_o^g \right. \\
&\quad \left. + E^{an} E_n^e \delta_f^g \delta_o^k \right] \\
&= |\det(E)|^{-2/(D-1)} K_{[e}^o \delta_{g]}^b \left[E^{ek} E_o^g \delta_f^a + E^{ak} E_o^g \delta_f^e + E^{an} E_n^e \delta_f^g \delta_o^k \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{D-1} E_f^k E^{an} E_n^e E_o^g \right].
\end{aligned} \tag{6.2.9}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \{P^{ab}, P^{cd}\} = & E^{an} E_n^e \delta_k^o \delta_{[e}^f \delta_{g]}^b E_o^g K_{[e}^{o'} \delta_{g']}^d \left(E^{e'k} E_{o'}^{g'} \delta_f^c + E^{ck} E_{o'}^{g'} \delta_f^{e'} + E^{cn'} E_{n'}^{e'} \delta_f^{g'} \delta_{o'}^k \right. \\ & \left. - \frac{2}{D-1} E_f^k E^{cn'} E_{n'}^e E_{o'}^{g'} \right) - E^{cn} E_n^e \delta_k^o \delta_{[e}^f \delta_{g]}^d E_o^g K_{[e}^{o'} \delta_{g']}^b \left(E^{e'k} E_{o'}^{g'} \delta_f^a \right. \\ & \left. + E^{ak} E_{o'}^{g'} \delta_f^{e'} + E^{an'} E_{n'}^{e'} \delta_f^{g'} \delta_{o'}^k - \frac{2}{D-1} E_f^k E^{an'} E_{n'}^e E_{o'}^{g'} \right). \end{aligned}$$

Como os termos são os mesmos a menos das trocas de $a \leftrightarrow c$ e $b \leftrightarrow d$, abriremos somente o primeiro termo aqui,

$$\begin{aligned} E^{an} E_n^e \delta_k^o (\delta_e^f \delta_g^b - \delta_g^f \delta_e^b) E_o^g (K_{e'}^{o'} \delta_{g'}^d - K_{g'}^{o'} \delta_{e'}^d) & \left(E^{e'k} E_{o'}^{g'} \delta_f^c + E^{ck} E_{o'}^{g'} \delta_f^{e'} + E^{cn'} E_{n'}^{e'} \delta_f^{g'} \delta_{o'}^k \right. \\ & \left. - \frac{2}{D-1} E_f^k E^{cn'} E_{n'}^e E_{o'}^{g'} \right) = E^{an} E_n^c E_k^b E^{e'k} E_{o'}^d K_{e'}^{o'} - E^{an} E_n^c E_k^b E^{dk} E_{o'}^{g'} K_{g'}^{o'} + E^{an} E_n^f E_k^b E_{o'}^d E^{ck} K_f^{o'} \\ & - E^{an} E_n^d E_k^b E^{ck} E_{o'}^{g'} K_{g'}^{o'} + E^{an} E_n^d E_k^b E^{cn'} E_{n'}^{e'} K_{e'}^k - E^{an} E_n^f E_k^b E^{cn'} E_{n'}^d K_f^k \\ & - \frac{2}{D-1} E^{an} E_n^b E^{cn'} E_{n'}^{e'} E_{o'}^d K_{g'}^{o'} + \frac{2}{D-1} E^{an} E_n^b E^{cn'} E_{n'}^d E_{o'}^{g'} K_{g'}^{o'} - E^{an} E_n^b E_k^c E^{e'k} E_{o'}^d K_{e'}^{o'} \\ & + E^{an} E_n^b E_k^c E_f^d K_{g'}^{o'} + E^{an} E_n^b E_k^d E^{ck} E_{o'}^{g'} K_{g'}^{o'} - E^{an} E_n^b E^{cn'} E_{n'}^{e'} E_k^d K_{e'}^k + E^{an} E_n^b E^{cn'} E_{n'}^d E_k^f K_f^k \\ & + \frac{2D}{D-1} E^{an} E_n^b E^{cn'} E_{n'}^{e'} E_{o'}^d K_{e'}^{o'} - \frac{2D}{D-1} E^{an} E_n^b E^{cn'} E_{n'}^d E_{o'}^{g'} K_{g'}^{o'}. \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo trocando $a \leftrightarrow c$ e $b \leftrightarrow d$, cancelando os termos que são simétricos sob a troca, e renomeando os índices quando conveniente, chegamos a

$$\begin{aligned} \{P^{ab}, P^{cd}\} &= E^{an} E_n^c E_k^b E^{ek} E_o^d K_e^o - E^{cn} E_n^o E_o^d E^{eo} E_k^b K_e^k \\ &= E^{an} E_n^c E_o^d E_k^b G^{ko} \approx 0, \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

ou seja, o colchete de Poisson equivale ao do espaço ADM sob o vínculo de $G_{jk} = 0$.

6.2.2 Vínculo de Rotação

Olhemos agora para o significado do vínculo $G_{jk} = 0$: queremos mostrar que ele está relacionado a observáveis que são invariantes por rotação em $SO(D)$. Para isso, consideremos o funcional

$$G(\Lambda) \equiv \int_{\sigma} d^D x \Lambda^{jk} K_{aj} E_k^a, \quad (6.2.11)$$

para $\Lambda^T = -\Lambda$ uma matriz antissimétrica qualquer. Queremos mostrar que $G(\Lambda)$ gera rotações $SO(D)$. Primeiramente, vemos que podemos reescrever o funcional como

$$G(\Lambda) = \int_{\sigma} d^D x \Lambda^{jk} K_{aj} E_k^a = \int_{\sigma} d^D x \Lambda^{jk} \delta_{ij} K_a^i E_k^a = \int_{\sigma} d^D x \Lambda_i^k K_a^i E_k^a. \quad (6.2.12)$$

Então,

$$\{G(\Lambda), G(\Lambda')\} = \frac{\chi}{2} \int_{\sigma} d^D x \left[\frac{\partial G(\Lambda)}{\partial K_c^j} \frac{\partial G(\Lambda')}{\partial E_j^c} - \frac{\partial G(\Lambda')}{\partial K_c^j} \frac{\partial G(\Lambda)}{\partial E_j^c} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\chi}{2} \int_{\sigma} d^D x \left[\Lambda_i^k \delta_j^i \delta_a^c E_k^a \Lambda_{i'}^{k'} K_{a'}^{j'} \delta_c^{a'} - \Lambda_{i'}^{k'} \delta_j^{i'} \delta_a^c E_{k'}^{a'} \Lambda_i^k K_a^j \delta_c^j \delta_c^a \right] \\
&= \frac{\chi}{2} \int_{\sigma} d^D x \left[\Lambda_j^k E_k^c \Lambda_{i'}^j K_c^{i'} - \Lambda_j^{k'} E_{k'}^c \Lambda_i^j K_c^i \right] \\
&= \frac{\chi}{2} \int_{\sigma} d^D x K_c^i E_k^c \left[\Lambda_j^k \Lambda_i^{j'} - \Lambda_j^{k'} \Lambda_i^j \right] \\
&= \frac{\chi}{2} G([\Lambda, \Lambda']), \tag{6.2.13}
\end{aligned}$$

ou seja, $G(\Lambda)$ atua como um operador de rotação $SO(D)$ (lembrando que a composição de duas rotações resulta em uma rotação).

Como 6.2.1 e 6.2.2 são $SO(D)$ -invariantes, o colchete de Poisson desses com $G(\Lambda)$ se anula para qualquer Λ , e assim também os vínculos H e $\vec{H}$. Portanto, 6.2.3, 6.2.4 e 6.2.11 formam um conjunto de vínculos de primeira-classe. Reescrevemos então a ação no espaço estendido, cuja redução simplética com respeito a G_{jk} resulta no sistema descrito pela ação ADM 5.6.1,

$$S \equiv \frac{1}{\chi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\sigma} d^D x \left(2\dot{K}_a^j E_j^a - [N^a H_a + NH - \Lambda^{jk} G_{jk}] \right). \tag{6.2.14}$$

6.3 Nova Conexão

6.3.1 Resumo Histórico

A reformulação da Relatividade Geral em termos das denominadas “novas variáveis” deveu-se a Ashtekar em 1986-87, inspirado nos trabalhos de Sen de 1981-82 que generalizavam a derivada covariante ∇_{μ} para espinores $SL(2, \mathbb{C})$. Dessa forma, com uma generalização da projeção espacial D_{μ} através das conexões de spin, e uma variável tipo campo elétrico conjugada, os vínculos que surgem na teoria puderam ser escritos de uma forma simplificada que se tornava polinomial mediante o reescalonamento do vínculo escalar $H \mapsto \sqrt{\det(q)} H$. Ademais, a teoria sob esse tratamento assume uma forma semelhante às das de Yang-Mills, cujas versões quânticas são bem estabelecidas, sugerindo assim que o mesmo procedimento possa ser aplicável para a gravitação.

A formulação de Ashtekar se deu num contexto hamiltoniano, utilizando uma ação auto-dual da Relatividade Geral complexa (onde o grupo de *gauge* seria então $SL(2, \mathbb{C})$). Logo em seguida, uma formulação lagrangeana foi proposta independentemente por Samuel, Jacobson e Smolin, considerando uma ação auto-dual da gravidade de Palatini. Em 1988 foi então dada uma abordagem em termos de triadas por Goldberg e tetradas por Henneaux et al.

A utilização da gravitação complexa, no entanto, exige a implementação de condições

que retomem o caráter real da teoria (condições de realidade), e tais condições exibiram-se de grande dificuldade para a implementação de uma teoria quântica. Por outro lado, desenvolvia-se sem essa dificuldade uma teoria para gravitação euclideana utilizando-se de conexões reais. Isso levou Barbero (1994-1996) a considerar conexões reais também para a teoria de assinatura lorentziana, o que eliminava a necessidade da implementação das condições de realidade, mas a forma dos vínculos deixava de ser de forma polinomial, como apresentado por Ashtekar na forma complexa. Todavia, Thiemman mostrou logo em seguida que de fato o rescalonamento para deixar os vínculos complexos na forma polinomial impedia que a quantização do operador pudesse ser feita de forma independente do background sem que surgissem novos problemas, e portanto, apesar de esteticamente elegante, era na prática indesejável.

Barbero e Immirzi descobriram que é possível dar uma formulação hamiltoniana para qualquer valor complexo de um parâmetro β (denominado parâmetro de Immirzi), através do qual recobramos os casos que vinham sendo discutidos até então: $\beta = \pm 1$ retoma a conexão real apresentada inicialmente por Barbero, enquanto que $\beta = \pm i$ resulta em conexões complexas que são isomorfas aos espinores de Ashtekar. Uma formulação lagrangeana para um β arbitrário e qualquer assinatura (euclideana ou lorentziana) foi então dada por Holst, Barros e Sá e Capovilla et al. através de uma modificação da ação de Einstein-Palatini em tetradas.

Muita discussão e várias tentativas de quantização têm sido feitas desde então tanto para o caso real quanto para o complexo, cada um com suas vantagens e desvantagens em relação ao outro. No entanto, até o momento apenas o caso real tem obtido sucesso na construção de uma teoria quântica satisfatória, o que, por sua vez, não impede a possibilidade de que algo possa também ser realizado para o caso complexo. As discussões dos procedimentos de quantização, no entanto, estão além de nossos objetivos, e no nível clássico todos os valores do parâmetro de Immirzi levam a formulações da Relatividade Geral equivalentes à formulação ADM.

6.3.2 Transformação Canônica

Introduziremos um parâmetro de reescalonamento $\beta \in \mathbb{C}$, não nulo, denominado **parâmetro de Immirzi**, atuante na seguinte transformação canônica

$$(K_a^j, E_j^a) \mapsto \left({}^{(\beta)}K_a^j \equiv \beta K_a^j, {}^{(\beta)}E_j^a \equiv \frac{E_j^a}{\beta} \right). \quad (6.3.1)$$

Podemos notar facilmente que os colchetes de Poisson não se alteram, tal como o vínculo de rotação é invariante, que escreveremos aqui como

$$G_j = \epsilon_{jkl} K_a^k E^{al} = \epsilon_{jkl} \left({}^{(\beta)} K_a^k \right) \left({}^{(\beta)} E^{al} \right). \quad (6.3.2)$$

Definimos a **conexão de spin** como uma extensão da derivada covariante D_a de tensores para tensores generalizados com índices em $so(D)$,

$$D_a \lambda_b^i = \partial_a \lambda_b^i - \Gamma_{ab}^c \lambda_c^i + \Gamma_{ak}^i \lambda_a^k, \quad (6.3.3)$$

estendendo-se por linearidade e regra de Leibniz. Se estendemos a compatibilidade da métrica, $D_a q_{bc} = 0$ para os campos e_a^i , podemos expressar Γ_{ak}^i em termos desses e dos símbolos de Christoffel Γ_{ab}^c ,

$$D_a e_b^i = \partial_a e_b^i + \Gamma_{ak}^i e_b^k - \Gamma_{ab}^c e_c^i = 0 \Rightarrow \Gamma_{ak}^i = -e_k^b [\partial_a e_b^i - \Gamma_{ab}^c e_c^i]. \quad (6.3.4)$$

Podemos ainda ver que Γ_a gera uma matriz antissimétrica com valores em $so(D)$, pois

$$\begin{aligned} 0 &= D_a \delta_{jk} = D_a (e_j^b e_{bk}) = (D_a e_j^b) e_{bk} + e_j^b (D_a e_{bk}) \\ &= (\partial_a e_j^b + \Gamma_{ac}^b e_j^c - \Gamma_{aj}^l e_l^b) e_{bk} + e_j^b (\partial_a e_{bk} - \Gamma_{ab}^c e_{ck} - \Gamma_{ak}^l e_{bl}) \\ &= \partial_a (e_j^b e_{bk}) + \Gamma_{ac}^b e_j^c e_{bk} - \Gamma_{aj}^l \delta_{lk} - \Gamma_{ab}^c e_{ck} e_j^b - \Gamma_{ak}^l \delta_{lj} \\ &= \Gamma_{akj} + \Gamma_{ajk}. \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Restringamos aqui nossa atuação para $D = 3$. É conveniente ao nosso procedimento utilizar do isomorfismo entre a representação definida de $SO(3)$ e a representação adjunta de $SU(2)$ para reescrever a conexão de spin,

$$\Gamma_{aj}^k E_k^a = \epsilon_{jkl} \Gamma_a^k E^{al}. \quad (6.3.6)$$

Podemos, de 6.3.6 e de 6.3.4, resolver Γ_a^k em termos de E_j^a ,

$$\Gamma_a^k = \frac{1}{2} \epsilon^{jkl} \Gamma_{ajl} = \frac{1}{2} \epsilon^{jkl} e_l^b [\partial_a e_{bj} - \Gamma_{ab}^c e_{cj}], \quad (6.3.7)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^c &= \frac{1}{2} (q_{bd,a} + q_{ad,b} - q_{ab,d}) \\ &= \frac{1}{2} e^{ci} e_i^d (e_{b,a}^m e_{dm} + e_b^m e_{dm,a} + e_{a,b}^m e_{dm} + e_a^m e_{dm,b} - e_{a,d}^m e_{bm} - e_a^m e_{bm,d}) \\ &= \frac{1}{2} e^{ci} (e_{bi,a} + e_b^m e_i^d e_{dm,a} + e_{ai,b} + e_a^m e_i^d e_{dm,b} - e_i^d e_{a,d}^m e_{bm} - e_a^m e_i^d e_{bm,d}). \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Voltando na expressão geral,

$$\begin{aligned}
\Gamma_a^k &= \frac{1}{2} \epsilon^{jkl} e_l^b \left[e_{bj,a} - \frac{1}{2} e^{ci} (e_{bi,a} + e_b^m e_i^d e_{dm,a} + e_{ai,b} + e_a^m e_i^d e_{dm,b} - e_i^d e_{a,d}^m e_{bm} \right. \\
&\quad \left. - e_a^m e_i^d e_{bm,d}) e_{cj} \right] \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^{jkl} \left[e_l^b e_{bj,a} - \frac{1}{2} (e_l^b e_{bj,a} + e_j^d e_{dl,a} + e_l^b e_{aj,b} + e_l^b e_a^m e_j^d e_{dm,b} - e_j^d e_{al,d} - e_l^b e_a^m e_j^d e_{bm,d}) \right] \\
&\stackrel{*}{=} \frac{1}{2} \epsilon^{jkl} \left[e_l^b e_{bj,a} - \frac{1}{2} (e_l^b e_{bj,a} - e_l^b e_{bj,a} + e_l^b e_{aj,b} + e_l^b e_a^m e_j^d e_{dm,b} + e_l^b e_{aj,b} + e_l^b e_a^m e_j^d e_{dm,b}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^{jkl} e_l^b [e_{bj,a} - e_{aj,b} - e_a^m e_j^d e_{dm,b}] \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^{kjl} e_l^b [e_{aj,b} - e_{bj,a} + e_a^m e_j^d e_{dm,b}] \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^{kjl} E_l^b [E_{aj,b} - E_{bj,a} + E_j^d E_a^m E_{dm,b}] + \frac{1}{2} \epsilon^{kjl} \frac{E_l^b}{\sqrt{\det(E)}} \left[\frac{E_{aj}(\det(E))_{,b}}{2\sqrt{\det(E)}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{E_{bj}(\det(E))_{,a}}{2\sqrt{\det(E)}} + E_a^m E_j^d \frac{E_{dm}(\det(E))_{,b}}{2\sqrt{\det(E)}} \right] \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^{kjl} E_l^b [E_{aj,b} - E_{bj,a} + E_j^d E_a^m E_{dm,b}] + \frac{1}{4} \epsilon^{kjl} E_l^b \left[2 \frac{E_{aj}(\det(E))_{,b}}{\det(E)} - \frac{E_{bj}(\det(E))_{,a}}{\det(E)} \right],
\end{aligned} \tag{6.3.9}$$

onde em $*$ usamos que a troca de índices $j \leftrightarrow l$ leva à inversão de sinal do termo e, para $D = 3$, $\det(q) = \det(E)$. Vemos que Γ_a^k é uma função racional homogênea de grau zero de E_j^a e suas derivadas, e que portanto

$$({}^{(\beta)}\Gamma_a^j) \equiv \Gamma_a^j ({}^{(\beta)}E) = \Gamma_a^j ({}^{(1)}E) = \Gamma_a^j, \tag{6.3.10}$$

ou seja, Γ_a^j é invariante sob o reescalonamento e consequentemente a derivada covariante D_a independe do parâmetro de Immirzi β .

De 6.3.4 vemos que $D_a E_j^b = 0$. Em particular,

$$D_a ({}^{(\beta)}E_j^a) = D_a E_j^a = (D_a E^a)_j + \epsilon_{jkl} \Gamma_a^k E_l^a = \partial_a E_j^a + \epsilon_{jkl} \Gamma_a^k E_l^a = 0, \tag{6.3.11}$$

onde $(D_a E^a)_j$ indica que D atua somente nos índices tensoriais de E_j^a , que é equivalente à ação de ∂ , uma vez que a tríada densitizada é tangente à variedade espacial.

Utilizando de 6.3.11, podemos escrever o vínculo de rotação 6.3.2 como um **vínculo de Gauss** de uma teoria de Yang-Mills de $SU(2)$,

$$G_j = \epsilon_{jkl} ({}^{(\beta)}K_a^k) ({}^{(\beta)}E^{al}) = \partial_a ({}^{(\beta)}E_j^a) + \epsilon_{jkl} [\Gamma_a^k + ({}^{(\beta)}K_a^k)] ({}^{(\beta)}E^{al}) \equiv ({}^{(\beta)}\mathcal{D}_a ({}^{(\beta)}E_j^a). \tag{6.3.12}$$

Isso nos leva à introdução de uma nova conexão

$$({}^{(\beta)}A_a^j) \equiv \Gamma_a^j + ({}^{(\beta)}K_a^j), \quad (6.3.13)$$

que denominaremos como **conexão de Sen-Ashtekar-Immirzi-Barbero**, sendo que, especificamente, a conexão de Sen surge para $\beta = \pm i$ e $G_j = 0$, de Ashtekar para $\beta = \pm i$ somente, Immirzi para β complexo e Barbero para β real. Por simplicidade, chamaremos apenas de **nova conexão** ou **conexão de Ashtekar**. A nova derivada covariante relacionada à conexão A tem portanto atuação da forma

$$({}^{(\beta)}\mathcal{D}_a \lambda_j \equiv \partial_a \lambda_j + \epsilon_{jkl} ({}^{(\beta)}A_a^k \lambda^l) \quad \text{e} \quad ({}^{(\beta)}\mathcal{D}_a u_b \equiv D_a u_b) \quad (6.3.14)$$

Olhemos por fim para a estrutura simplética do espaço sob essa nova conexão,

$$\begin{aligned} \{({}^{(\beta)}E_j^a(x), {}^{(\beta)}A_b^k(y)\} &= \{({}^{(\beta)}E_j^a(x), \Gamma_b^k(y)\} + \{({}^{(\beta)}E_j^a(x), {}^{(\beta)}K_b^k(y)\} \\ &= \{({}^{(\beta)}E_j^a(x), {}^{(\beta)}K_b^k(y)\} \\ &= \frac{\chi}{2} \delta_b^a \delta_j^k \delta(x, y) \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

e

$$\begin{aligned} \{({}^{(\beta)}A_a^j(x), {}^{(\beta)}A_b^k(y)\} &= \beta [\{({}^{(\beta)}\Gamma_a^j(x), K_b^k(y)\} - \{\Gamma_b^k(y), K_a^j(x)\}] \\ &= \beta \frac{\chi}{2} \left[\frac{\delta \Gamma_a^j(x)}{\delta E_b^k(y)} - \frac{\delta \Gamma_b^k(y)}{\delta E_a^j(x)} \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

O colchete entre os E_j^a permanece sendo nulo.

6.3.3 Condições de Realidade

A transformação sob o parâmetro de Immirzi β , embora indiferente para a estrutura simplética do espaço de fase, possui implicações físicas importantes a serem consideradas. Para o caso de β real, temos que as variáveis dinâmicas ${}^{(\beta)}A$ e ${}^{(\beta)}E$ são também reais, e portanto constituem um par canônico do espaço de fase de uma teoria de Yang-Mills $SU(2)$, sem maiores problemas.

Entretanto, a escolha de β complexo implica que as variáveis são também complexas, gerando então uma teoria da Relatividade Geral complexa, da qual esperamos obter a teoria real como um subproduto. Devemos portanto impor condições que garantam que o número de graus de liberdade não seja dobrado e que recuperem a teoria real. Impomos, assim, as

seguintes **condições de realidade** sobre as variáveis,

$$^{(\beta)}E/\beta = \overline{^{(\beta)}E/\beta} \quad \text{e} \quad (^{(\beta)}A - \Gamma)/\beta = \overline{(^{(\beta)}A - \Gamma)/\beta}. \quad (6.3.17)$$

Essas condições garantem que apenas transformações de *gauge* $SU(2)$ sejam permitidas, e não transformações gerais de $SL(2, \mathbb{C})$. Todavia, $\Gamma = \Gamma(^{(\beta)}E)$ não é polinomial nas variáveis canônicas e nem mesmo analítica. Isso constitui um problema sério para se implementar uma teoria quântica, quando essas condições devem ser utilizadas para se determinar um produto interno apropriado.

6.3.4 Interpretação Quadri-dimensional

Analisemos agora uma interpretação quadri-dimensional para $^{(\beta)}A$. Consideremos os *vierbein* e_I^μ , onde usamos μ para denotar o índice espaço-temporal e $I = 0, 1, 2, 3$ para a representação definida do grupo de Lorentz. Temos, por definição,

$$g_{\mu\nu}e_I^\mu e_J^\nu = \eta_{IJ}, \quad (6.3.18)$$

e portanto e_0^μ, e_i^μ são ortogonais. Escolhemos então $e_0^\mu = n^\mu$ e $(e_i^\mu)_{\mu=a} = e_i^a$ no referencial ADM, para $\mu = t, a$. A partir de 5.6.12, escrevemos então as componentes

$$e_0^t = \frac{1}{N}, \quad e_0^a = -\frac{N^a}{N}, \quad e_i^t = 0, \quad e_i^a, \quad (6.3.19)$$

e as inversas (com o uso de 5.6.11),

$$e_t^0 = N, \quad e_a^0 = 0, \quad e_t^i = N^a e_a^i, \quad e_a^i. \quad (6.3.20)$$

Com isso, a métrica espacial $q_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu = \delta_\nu^\mu + e_0^\mu e_\nu^0$ tem a forma

$$q_t^t = 0, \quad q_a^t = 0, \quad q_t^a = N^a, \quad q_b^a = \delta_b^a. \quad (6.3.21)$$

Dados esses valores, módulo $G_j = 0$, encontramos

$$\begin{aligned} K_a^j &= e^{bj} K_{ab} = e^{bj} q_a^\mu q_b^\nu \nabla_\mu n_\nu = e^{bj} (\delta_a^\mu - e_0^\mu e_a^0) (\delta_b^\nu - e_0^\nu e_b^0) \nabla_\mu n_\nu = e^{bj} \delta_a^\mu \delta_b^\nu \nabla_\mu n_\nu \\ &= e^{bj} \nabla_a n_b = -e^{bj} (\nabla_a e_b)^0 = e^{bj} (\omega_a)^0_I e_b^I = e^{bj} (\omega_a)^0_k e_b^k = (\omega_a)^{0j}, \end{aligned} \quad (6.3.22)$$

onde usamos a definição da conexão de spin quadri-dimensional

$$\nabla_\mu e_\nu^I = (\nabla_\mu e_\nu)^I + (\omega_\mu)^I_J e_\nu^J = 0. \quad (6.3.23)$$

Por outro lado,

$$\Gamma_{ak}^j e_b^k = -(D_a e_b)^j = -q_a^\mu q_b^\nu (\nabla_\mu e_\nu)^j = -(\nabla_a e_b)^j = (\omega_a)^j_k e_b^k, \quad (6.3.24)$$

ou seja, $\omega_{ajk} = \Gamma_{ajk}$. Segue, pois,

$$^{(\beta)} A_a^i = \Gamma_a^i + ^{(\beta)} K_a^i = \epsilon^{ijk} \Gamma_{ajk} + \beta K_a^i = \epsilon^{ijk} \omega_{ajk} + \beta \omega_a^{0i}, \quad (6.3.25)$$

ou então,

$$^{(\beta)} A_{ajk} = \epsilon_{ijk} ^{(\beta)} A_a^i = \omega_{ajk} + \beta \epsilon_{ijk} \omega_a^{0i}. \quad (6.3.26)$$

Definimos o **dual de Hodge** de um tensor antissimétrico $T_{\alpha\beta}$ como

$$*T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \eta^{\gamma\gamma'} \eta^{\delta\delta'} T_{\gamma'\delta'}. \quad (6.3.27)$$

Um tensor anti-simétrico é dito **(anti)auto-dual** se $*T_{\alpha\beta} = \pm \sqrt{s} T$, sendo s a assinatura da métrica, e a **parte (anti)auto-dual** de qualquer $T_{\alpha\beta}$ é definida por

$$T^\pm = \frac{1}{2} \left(T \pm * \frac{T}{\sqrt{s}} \right), \quad (6.3.28)$$

uma vez que $* \circ * = id$. Um tensor (anti)auto-dual num espaço quadri-dimensional tem portanto apenas três componentes linearmente independentes.

Como $\epsilon_{0ijk} = \epsilon_{ijk}$, podemos escrever 6.3.26 como

$$\begin{aligned} ^{(\beta)} A_{ajk} &= \omega_{ajk} + \beta \epsilon_{0ijk} \eta^{0\gamma} \eta^{i\delta} \omega_{a\gamma\delta} = \omega_{ajk} + \beta \epsilon_{jk0i} \eta^{0\gamma} \eta^{i\delta} \omega_{a\gamma\delta} \\ &= \omega_{ajk} + \beta * \omega_{ajk}. \end{aligned} \quad (6.3.29)$$

Ademais, para $\beta = \pm i$, a conexão 6.3.29 é duas vezes a parte (anti)auto-dual do pullback para σ da conexão de spin quadri-dimensional.

Se dado qualquer outro valor de β que não os citados acima, a informação de 6.3.29 não é suficiente para que se construa uma conexão quadri-dimensional. Entretanto, não há obstáculos para o desenvolvimento nesses casos, embora a interpretação quadri-dimensional não tenha um significado geométrico tal como para β complexo. As novas variáveis ainda capturam a mesma informação que as variáveis ADM sobre superfície de vínculo de Gauss. O uso de β complexo oferece então uma vantagem estética, como veremos também no modo de escrever os vínculos, no entanto ainda não se obteve sucesso quanto a quantizar a teoria baseada em conexões complexas.

6.4 Vínculos

Consideremos as duas curvaturas, derivadas da conexão de spin e da nova conexão, respectivamente,

$$R_{ab}^j \equiv 2\partial_{[a}\Gamma_{b]}^j + \epsilon_{kl}^j \Gamma_a^k \Gamma_b^l, \quad (6.4.1a)$$

$${}^{(\beta)}F_{ab}^j \equiv 2\partial_{[a}{}^{(\beta)}A_{b]}^j + \epsilon_{kl}^j {}^{(\beta)}A_a^k {}^{(\beta)}A_b^l, \quad (6.4.1b)$$

que se relacionam com as derivadas covariantes por

$$[D_a, D_b] v_j = R_{abjl} v^l = \epsilon_{jkl} R_{ab}^k v^l, \quad (6.4.2a)$$

$$[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b] v_j = {}^{(\beta)}F_{abjl} v^l = \epsilon_{jkl} {}^{(\beta)}F_{ab}^k v^l. \quad (6.4.2b)$$

Queremos agora escrever os vínculos com a nova conexão. Expandindo ${}^{(\beta)}F_{ab}^j$ em termos de Γ_a^j e K_a^j ,

$$\begin{aligned} {}^{(\beta)}F_{ab}^j &= 2 \left[\partial_{[a}\Gamma_{b]}^j + \beta \partial_{[a}K_{b]}^j \right] + \epsilon_{kl}^j (\Gamma_a^k + \beta K_a^k) (\Gamma_b^l + \beta K_b^l) \\ &= 2\partial_{[a}\Gamma_{b]}^j + \epsilon_{kl}^j \Gamma_a^k \Gamma_b^l + 2\beta \left(\partial_{[a}K_{b]}^j + \epsilon_{kl}^j \Gamma_{[a}^k K_{b]}^l \right) + \beta^2 \epsilon_{kl}^j K_a^k K_b^l \\ &= R_{ab}^j + 2\beta D_{[a}K_{b]}^j + \beta^2 \epsilon_{kl}^j K_a^k K_b^l, \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

e contraindo com ${}^{(\beta)}E_j^b$,

$${}^{(\beta)}F_{ab}^j {}^{(\beta)}E_j^b = \frac{R_{ab}^j E_j^b}{\beta} + 2D_{[a} \left(K_{b]}^j E_j^b \right) + \beta K_a^j G_j. \quad (6.4.4)$$

Mostraremos que o primeiro termo à direita é igual a zero. De 6.3.4, derivamos a identidade de Bianchi na linguagem de formas

$$\begin{aligned} dx^a \wedge dx^b D_a e_b^j &= de^j + \Gamma_k^j \wedge e^k = 0 \\ 0 &= -d^2 e^j = d\Gamma_k^j \wedge e^k - \Gamma_j^l \wedge de^l = [d\Gamma_k^j + \Gamma_l^j \wedge \Gamma_k^l] e^k = \Omega_k^j \wedge e^k. \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

Agora, $\Omega_k^j = \Omega^i(T_i)_k^j$, e vemos que

$$\Omega = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = d\Gamma^i T_i + \frac{1}{2} [T_j, T_k] \Gamma^j \wedge \Gamma^k = \frac{1}{2} dx^a \wedge dx^b R_{ab}^i T_i.$$

Assim, $\epsilon_{ijk} \epsilon^{efc} R_{ef}^j e_c^k = 0$, o que implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} e_c^k e_a^i \epsilon^{efc} R_{ef}^j = \frac{1}{2} E_j^b \epsilon_{bca} \epsilon^{efc} R_{ef}^j \\ &= \frac{1}{2} E_j^b \left(\delta_a^e \delta_b^f - \delta_a^f \delta_b^e \right) R_{ef}^j = \frac{1}{2} E_j^b (R_{ab}^j - R_{ba}^j) = R_{ab}^j E_j^b. \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

Comparando agora 6.4.4 com 6.2.3, temos que

$$H_a = {}^{(\beta)}F_{ab}^j {}^{(\beta)}E_j^b - {}^{(\beta)}K_a^j G_j. \quad (6.4.7)$$

Para determinar o vínculo hamiltoniano, usamos

$$\begin{aligned} {}^{(\beta)}F_{ab}^j \epsilon_{jkl} {}^{(\beta)}E^{ak} {}^{(\beta)}E^{bl} &= \left(R_{ab}^j + 2\beta \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^j + \beta^2 \epsilon_{mn}^j K_a^m K_b^n \right) \epsilon_{jkl} \frac{E^{ak} E^{bl}}{\beta^2} \\ &= -\det(q) \frac{R_{abkl} e^{ak} e^{bl}}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} \left[(D_a \epsilon_{jkl} K_b^j E^{bl}) E^{ak} - (D_b \epsilon_{jkl} K_a^j E^{ak}) E^{bl} \right] \\ &\quad + \epsilon_{mn}^j \epsilon_{jkl} K_a^m K_b^n E^{ak} E^{bl} = -\frac{\det(q)R}{\beta^2} - 2{}^{(\beta)}E^{aj} D_a G_j + (\delta_{mk} \delta_{nl} - \delta_{ml} \delta_{nk}) K_a^m K_b^n E^{ak} E^{bl} \\ &= -\frac{\det(q)R}{\beta^2} - 2{}^{(\beta)}E^{aj} D_a G_j + (K_a^j E_j^a)^2 - (K_b^l E_j^a) (K_a^k E_k^b). \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

Comparando com 6.2.4,

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(q)} H &= \left[(K_a^j E_l^a) (K_b^j E_l^b) - (K_a^j E_j^a)^2 \right] - \det(q) R \\ &= -{}^{(\beta)}F_{ab}^j \epsilon_{jkl} {}^{(\beta)}E^{ak} {}^{(\beta)}E^{bl} - \frac{\det(q)R}{\beta^2} - 2{}^{(\beta)}E^{aj} D_a G_j - \det(q) R \\ &= -{}^{(\beta)}F_{ab}^j \epsilon_{jkl} {}^{(\beta)}E^{ak} {}^{(\beta)}E^{bl} - 2{}^{(\beta)}E^{aj} D_a G_j - \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) \det(q) R, \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

ou, eliminando a curvatura da expressão, $\sqrt{\det(q)} H - K_a^j K_{bj} E_l^a E^{bl} - (K_a^j E_j^a)^2 = \det(q) R$, e substituindo em 6.4.8,

$$\begin{aligned} H &= \frac{\beta}{\sqrt{|\det({}^{(\beta)}E\beta)|}} \left[{}^{(\beta)}F_{ab}^j \epsilon_{jkl} {}^{(\beta)}E^{ak} {}^{(\beta)}E^{bl} + 2{}^{(\beta)}E^{aj} D_a G_j \right] \\ &\quad + (\beta^2 + 1) \frac{({}^{(\beta)}K_b^j {}^{(\beta)}E_j^a) ({}^{(\beta)}K_a^j {}^{(\beta)}E_j^b) - ({}^{(\beta)}K_c^k {}^{(\beta)}E_k^c)^2}{\sqrt{|\det({}^{(\beta)}E\beta)|}}, \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

lembrando que ${}^{(\beta)}K_a^j = {}^{(\beta)}A_a^j - \Gamma_a^j$.

Como a transformação de reescalonamento e introdução da nova conexão de Ashtekar é uma transformação canônica, os colchetes de Poisson entre o conjunto de vínculos de primeira-classe G_j , H_a e H permanecem os mesmos. Dessa forma, se reescrevemos 6.4.7 e 6.4.10 descartando os termos proporcionais ao vínculo de Gauss, o novo conjunto G_j , H_a e H gerará a mesma superfície de vínculo e permanecerá como um sistema de primeira-classe. É de se esperar que essa modificação gere alguma mudança na álgebra; todavia, essa deverá coincidir com a álgebra de Dirac sobre a subvariedade $G_j = 0$ do espaço de fase.

Resumindo, os vínculos nas novas variáveis assumem as formas

$$G_j = {}^{(\beta)}\mathcal{D}_a {}^{(\beta)}E_j^a = \partial_a {}^{(\beta)}E_j^a + \epsilon_{jk} {}^{l(\beta)}A_a^j {}^{(\beta)}E_l^a, \quad (6.4.11a)$$

$$H_a = {}^{(\beta)}F_{ab}^j {}^{(\beta)}E_j^b, \quad (6.4.11b)$$

$$H = [\beta^{2(\beta)} F_{ab}^j - (\beta^2 + 1) \epsilon_{jmn} ({}^{(\beta)}A_a^m - \Gamma_a^m) ({}^{(\beta)}A_b^n - \Gamma_b^n)] \frac{\epsilon^{jkl} {}^{(\beta)}E_k^a {}^{(\beta)}E_l^b}{\sqrt{|\det ({}^{(\beta)}E\beta)|}}. \quad (6.4.11c)$$

A ação de Einstein-Hilbert, portanto, fica reescrita como

$$S = \frac{1}{\chi} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\sigma} d^3x \left\{ 2^{(\beta)} \dot{A}_a^i {}^{(\beta)}E_i^a - [\Lambda^j G_j + N^a H_a + NH] \right\}. \quad (6.4.12)$$

Uma vez que temos a reformulação em seu modo mais geral, daremos a seguir um esboço (sem entrar nos detalhes das contas) dos trabalhos realizados por Ashtekar, utilizando uma conexão complexa em sua forma espinorial, e por Barbero, com o uso de variantes reais.

6.5 $\beta = \pm i$: Formulação de Ashtekar

Embora pudéssemos discutir as variáveis de Ashtekar diretamente dos resultados obtidos para a formulação geral, é instrutivo delinear o procedimento realizado pelo próprio, pois nos permite introduzir no campo da Relatividade Geral complexa e dos espinores.

Os trabalhos iniciais de Ashtekar^{1,2} introduzem as novas variáveis complexas já em formato de espinores $SU(2)$. Entretanto, o próprio ressalta¹⁴ que iniciar o tratamento com as *vierbein* tem a vantagem de enfatizar que o grupo de *gauge* interno no espaço de fase resultante da teoria livre de fontes é $SO(3)$ ao invés de $SU(2)$ - qualquer transformação $SU(2)$ e sua negativa têm o mesmo efeito sobre as variáveis canônicas - e explorar de uma maneira crucial o isomorfismo entre a sub-álgebra de Lie auto-dual de $SL(2, \mathbb{C})$ e a complexificação da álgebra de Lie de $SO(3)$.

6.5.1 Ação Auto-dual

Diferente do que fizemos na formulação geral, partimos aqui da ação de Einstein-Palatini no formato de tetradas,

$$S_{PT}(e, \omega) \equiv \frac{1}{\chi} \int d^4x \det(e) e_I^\alpha e_J^\beta R_{\alpha\beta}{}^{IJ}(\omega), \quad (6.5.1)$$

onde as tetradas obedecem 6.3.18, $R_{\alpha\beta}{}^{IJ} = \eta^{KJ} R_{\alpha\beta}{}^I{}_K$ para

$$R_{\alpha\beta}{}^I{}_K \equiv 2\partial_{[\alpha}\omega_{\beta]}{}^I{}_K + \omega_{\alpha}{}^I{}_L \omega_{\beta}{}^L{}_K - \omega_{\beta}{}^I{}_J \omega_{\alpha}{}^J{}_K, \quad (6.5.2)$$

e as conexões $\omega_{\alpha}{}^I{}_J$ tomam valores na álgebra de Lie de Lorentz complexificada. Entretanto, queremos usar conexões de Lorentz complexas $\mathcal{A}_{\alpha}{}^I{}_J$ que são auto-duais nos índices I, J , ou seja,

$$\frac{1}{2}\epsilon_{IJ}{}^{MN}\mathcal{A}_{\alpha}{}^{IJ} = i\mathcal{A}_{\alpha}{}^{MN}. \quad (6.5.3)$$

Essas conexões, diferentemente das conexões de Palatini, tomarão valores então na sub-álgebra auto-dual da álgebra de Lie de Lorentz complexificada. Convém ainda observar que como as métricas de interesse são complexas, as tetradas e_I^{α} também são.

Tomemos assim a ação auto-dual

$$S(e, \mathcal{A}) \equiv \frac{2}{\chi} \int d^4x \det(e) e_I^{\alpha} e_J^{\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta}{}^{IJ}, \quad (6.5.4)$$

sendo $\mathcal{F}_{\alpha\beta}{}^{IJ}$ a curvatura de $\mathcal{A}_{\alpha}{}^{IJ}$, que pode ser vista como a parte auto-dual de $R_{\alpha\beta}{}^{IJ}$,

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}{}^{IJ} = \frac{1}{2}R_{\alpha\beta}{}^{IJ} - \frac{i}{4}\epsilon_{KL}{}^{IJ}R_{\alpha\beta}{}^{KL}. \quad (6.5.5)$$

Fazendo a variação $\delta S/\delta \mathcal{A}_{\alpha}{}^{IJ} = 0$, encontra-se que $\mathcal{A}_{\alpha}{}^{IJ}$ é a parte auto-dual da conexão de Lorentz $\omega_{\alpha}{}^{IJ}$, determinada pela tetrada. Consequentemente, $\mathcal{F}_{\alpha\beta}{}^{IJ}$ se iguala à parte auto-dual da curvatura $R_{\alpha\beta}{}^{IJ}$ da conexão ∇ compatível com a tetrada.

Aplicada a transformação de Legendre e manipulando as variáveis para uma estrutura 3+1, escreve-se a estrutura hamiltoniana de forma que a variável de configuração é a 1-forma conectora A_a^{MN} na 3-variedade σ que toma valores na álgebra de Lie de Lorentz auto-dual (o *pullback* para σ de $\mathcal{A}_{\alpha}{}^{IJ}$). O momento conjugado é dado por

$$\Pi_{MN}^a \equiv \text{parte auto dual de } -iE_I^a \epsilon^I{}_{MN} = E_{[M}^a n_{N]} - \frac{i}{2}E_I^a \epsilon^I{}_{MN}, \quad (6.5.6)$$

onde $E_I^a = \sqrt{\det(q)}e_I^a$, e o hamiltoniano é a soma dos vínculos

$$\text{tr}(\Pi^a \Pi^b F_{ab}) = 0, \quad \text{tr}(\Pi^a F_{ab}) = 0, \quad D_a \Pi^a = 0. \quad (6.5.7)$$

O colchete de Poisson não nulo é da forma

$$\{A_b^{IJ}(x), \Pi_{MN}^a(y)\} = \frac{\chi}{4}\delta_b^a \left[\delta_{[M}^I \delta_{N]}^J - \frac{i}{2}\epsilon_{MN}{}^{IJ} \right] \delta(x, y). \quad (6.5.8)$$

Relembramos porém que estamos lidando com uma teoria da Relatividade Geral complexa.

Queremos, agora, obter o espaço de fase para uma teoria real restringindo-nos a uma seção real apropriada do espaço de fase complexo. Para isso, impomos **condições de realidade** sobre esse espaço. A primeira condição é que a métrica $q_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$ construída da tetrada e_a^I seja real. Em termos do momento canônico, temos $\det(q)q^{ab} \equiv E_I^a E^{Ib} \equiv \text{tr}(\Pi^a \Pi^b)$. Assim, no espaço de fase, essa condição de realidade pode ser expressa simplesmente como

$$\text{tr}(\Pi^a \Pi^b) \text{ é real.} \quad (6.5.9)$$

Para garantir que a condição de realidade é preservada sob evolução temporal, temos que impor a condição de que a derivada temporal dessa métrica também é real. Isso nos dá outra condição,

$$\text{tr}(\Pi^a D_c [\Pi^{[c} \Pi^{b]}) \text{ é real.} \quad (6.5.10)$$

Por fim, utilizando do isomorfismo entre a álgebra de Lie de Lorentz auto-dual e a álgebra de Lie de $SO(3)$ complexificada, passamos as variáveis de (A_a^{MN}, Π_{MN}^a) para (A_a^i, E_i^a) . Fixamos um vetor interno n^I com $n^I n_I = -1$. Expressamos Π por 6.5.6 e consideramos 6.3.20, e expressamos A por

$$A_a^{IJ} = i \left(A_a^{[I} n^{J]} - \frac{i}{2} A_a^M \epsilon_M^{IJ} \right) = i \left(q_i^{[I} n^{J]} - \frac{i}{2} \epsilon_i^{IJ} \right) A_a^i, \quad (6.5.11)$$

onde o índice minúsculo i enfatiza que são índices $SO(3)$, ortogonais a n^I . O colchete de Poisson não-nulo é da forma

$$\{E_i^a(x), A_b^j(y)\} = -i \frac{\chi}{2} \delta_b^a \delta_i^j \delta(x, y). \quad (6.5.12)$$

6.5.2 De tríadas para espinores $SU(2)$

Relacionaremos espinores $SU(2)$ com 3-vetores através das matrizes de Pauli $\tau_A^i{}^B$, onde $i = 1, 2, 3$ nomeia a matriz, enquanto os índices A, B se referem aos elementos da matriz. $\tau_A^i{}^B$ são matrizes hermitianas 2×2 de traço nulo, satisfazendo

$$\tau_A^i{}^B \tau_B^j{}^D \equiv (\tau^i \tau^j)_A^D = -\epsilon^{ij}{}_k \tau_A^k{}^D + \delta^{ij} \delta_A^D. \quad (6.5.13)$$

Definimos as **formas de solda**

$$\sigma_A^a{}^B \equiv -\frac{i}{2} E_i^a \tau_A^i{}^B, \quad (6.5.14)$$

que recebem esse nome porque provêm um isomorfismo entre o espaço tangente a cada ponto da variedade σ (3-dimensional real) e o espaço vetorial 3-dimensional real H das matrizes

hermitianas 2×2 livres de traço, “soldando”, assim, o espaço vetorial H ao espaço tangente a cada ponto de σ .

Devido a 6.5.13, temos

$$\text{tr}(\sigma^a \sigma^b) \equiv \sigma^a{}_A{}^B \sigma^b{}_B{}^A = -q^{ab}, \quad \text{e} \quad (6.5.15a)$$

$$[\sigma^a, \sigma^b]{}_A{}^B = \sqrt{2} \epsilon^{ab}{}_c \sigma^c{}_A{}^B. \quad (6.5.15b)$$

O fator numérico $-i/\sqrt{2}$ foi ajustado precisamente para produzir as equações 6.5.15 (com seus fatores numéricos), que são as relações padrões na literatura de relatividade. 6.5.15a nos diz que a forma de solda pode ser pensada como a raiz quadrada da métrica espacial, enquanto 6.5.15b implica que a escolha de uma forma de solda permite uma orientação em σ , através de uma escolha preferencial do sinal do tensor alternante ϵ^{abc} em (σ, q_{ab}) (que é única a menos de um sinal).

Olhemos agora para a forma conectora A_a^i . Façamos $A_{aA}{}^B \equiv \kappa A_a^i \tau_{iA}{}^B$ para alguma constante κ . Para que as curvaturas

$$F_{ab}^i = 2\partial_{[a} A_{b]}^i + \epsilon^{ijk} A_{aj} A_{bk} \quad \text{e} \quad F_{abA}{}^B = 2\partial_{[a} A_{b]A}{}^B + [A_a, A_b]_A{}^B \quad (6.5.16)$$

sejam relacionadas da mesma forma por $F_{abA}{}^B = \kappa F_{ab}^i \tau_{iA}{}^B$, devemos escolher $\kappa = -i/2$. Assim,

$$A_{aA}{}^B \equiv -\frac{i}{2} A_a^i \tau_{iA}{}^B. \quad (6.5.17)$$

Dessa forma, para que possamos incorporar as convenções espinoriais da geometria riemanniana tal como as convenções padrões da teoria de Yang-Mills para as curvaturas em termos das conexões, somos levados a usar fatores numéricos diferentes em 6.5.14 e 6.5.17.

Na linguagem espinorial, as variáveis canônicas básicas serão então a forma de solda densitizada $\tilde{\sigma}_A{}^B = \sqrt{\det(q)} \sigma_A{}^B$ e a conexão $A_{aA}{}^B$. É interessante observar, em comparação com a formulação ADM em termos de q_{ab} e P^{ab} , que o vínculo vetorial é linear no momento e o vínculo escalar é quadrático. Essa característica se mantém se tomamos $A_{aA}{}^B$ como variável de configuração e $\tilde{\sigma}_A{}^B$ como seu momento conjugado. É curiosa essa semelhança, apesar do momento ter “flipado”: o novo momento $\tilde{\sigma}_A{}^B$ é geometricamente análogo à antiga variável de configuração q_{ab} .

Usando as equações 6.5.14 e 6.5.17 e os colchetes de Poisson 6.5.12, calcula-se

$$\{\tilde{\sigma}_{CD}^a(x), A_b{}^{AB}(y)\} = -i \frac{\chi}{2\sqrt{2}} \delta_b^a \delta_C^{(A} \delta_D^{B)} \delta(x, y), \quad (6.5.18)$$

e os outros colchetes são nulos. Essa translação da estrutura básica do espaço de fase fornece

então o ponto de partida para a formulação canônica espinorial da Relatividade Geral.

6.5.3 Vínculos

Operando nas novas variáveis espinoriais, encontramos os vínculos

$$\mathcal{D}_a \tilde{\sigma}^a{}_A{}^B = \partial_a \tilde{\sigma}^a{}_A{}^B + [A_a, \tilde{\sigma}^a]_A{}^B = 0, \quad (6.5.19a)$$

$$H_a = -2\sqrt{2}i \text{tr}(\tilde{\sigma}^b F_{ab}) = 0, \quad (6.5.19b)$$

$$H = -\frac{2}{\sqrt{\det(q)}} \text{tr}(\tilde{\sigma}^a \tilde{\sigma}^b F_{ab}) = 0. \quad (6.5.19c)$$

Simplificando os fatores numéricos e reescalando $H \mapsto \sqrt{\det(q)}H$, obtemos finalmente

$$\mathcal{D}_a \tilde{\sigma}^a{}_A{}^B = 0, \quad (6.5.20a)$$

$$H_a = \text{tr}(\tilde{\sigma}^b F_{ab}) = 0, \quad (6.5.20b)$$

$$H = \text{tr}(\tilde{\sigma}^a \tilde{\sigma}^b F_{ab}) = 0. \quad (6.5.20c)$$

Por fim, as condições de realidade ficam da forma

$$(\tilde{\sigma}^a)^\dagger = \tilde{\sigma}^a \quad \text{e} \quad (A_{aA}{}^B - \Gamma_{aA}{}^B)^\dagger = -(A_{aA}{}^B - \Gamma_{aA}{}^B), \quad (6.5.21)$$

sendo que, na segunda condição, a conexão de spin $\Gamma_{aA}{}^B$ tem uma dependência não-polinomial nas variáveis canônicas básicas.

6.5.4 Discussão

Classicamente, a formulação de Ashtekar se mostra mais do que apenas uma forma elegante de reescrever a Relatividade Geral; de fato, apresenta vantagens se comparada à formulação ADM. Na forma final, os vínculos envolvem apenas as variáveis básicas $\tilde{\sigma}^a{}_A{}^B$ e $A_{aA}{}^B$ e suas ∂ derivadas. Não precisamos levantar ou abaixar os índices desses campos, e a inversa de $\tilde{\sigma}^a{}_A{}^B$ nunca entra nos cálculos. Os vínculos ainda são no pior quadráticos em cada das variáveis básicas, o que é uma melhora significativa com relação à complicada dependência não-polinomial em q_{ab}, P^{ab} da formulação ADM.

Notamos no novo vínculo escalar uma simplificação devido à ausência do termo correspondente ao escalar de curvatura no vínculo ADM. O preço a se pagar por essa simplificação, no entanto, é na localidade: no vínculo antigo o coeficiente multiplicando a combinação quadrática dos momentos depende apenas da variável de configuração q_{ab} , enquanto no novo

vínculo é dado pela curvatura F_{abA}^B , dependendo assim de A_{aA}^B e de suas derivadas.

Outra característica importante que vemos das equações 6.5.20 é que a ação de $\mathcal{D}$ ocorre apenas nos índices internos. Como $\tilde{\sigma}_A^a{}^B$ é uma densidade vetorial de peso 1, seu divergente não envolve os símbolos de Christoffel de q_{ab} . Similarmente, a definição de F_{abM}^N envolve a ação de $\mathcal{D}$ apenas em índices internos. Portanto, embora inicialmente $\mathcal{D}$ atue sobre ambos os índices tensoriais e internos, na análise final é apenas a ação nos índices internos que importa.

No entanto, embora a formulação de Ashtekar resulte em simplificações nos vínculos, que assumem formas polinomiais, ela gera uma complicação adicional na necessidade de impor as condições de realidade para reobtenção da teoria real, pois a conexão de spin Γ_{aA}^B é não-polinomial na variável básica $\tilde{\sigma}_{aA}^B$. Na transição para a teoria quântica, os vínculos de primeira-classe são impostos como operadores de vínculo sobre as funções de onda, enquanto as condições de realidade são usadas em um segundo passo, para determinar um produto interno apropriado. A dificuldade da implementação desse segundo passo é que é crucial para que a formulação complexa seja inviável quando se trata de quantização.

Ainda um outro problema da formulação de Ashtekar com respeito à quantização é a simplificação do vínculo hamiltoniano pelo reescalonamento $H \mapsto \sqrt{\det(q)}H$. Tal reescalonamento é feito com o intuito de deixar o vínculo na forma polinomial, o que é válido e desejável no nível clássico, mas quanticamente não é suportado pelo espaço de Hilbert, considerando que o intuito é manter a independência do *background*. Dessa forma, a motivação pela polinomialidade dos vínculos é perdida quando queremos tratar de uma teoria quântica. O que ainda nos motiva a ter uma formulação da Relatividade Geral em termos de conexões é então a semelhança que ela assume com as teorias de Yang-Mills, permitindo que usemos todo o bem-sucedido ferramental dessas últimas para tratar teorias quânticas, principalmente no que diz respeito ao uso das técnicas envolvendo *loops*.

6.6 β real: Formulação de Barbero

Uma vez que a formulação polinomial de Ashtekar em termos de espinores é derrubada pela dificuldade da implementação quântica das condições de realidade e pelo espaço de Hilbert não suportar o reescalonamento pela potência de $\det(q)$, é conveniente que tratemos então de uma formulação real baseada em conexões reais. Isso nos elimina o problema das condições de realidade, sob o preço que o vínculo escalar assume uma forma mais complexa. Barbero enfatizou^{3,4} que o principal a se considerar no formalismo é a natureza geométrica das variáveis de Ashtekar, e assim a introdução de variáveis complexas é necessária apenas se deseja-se

uma forma mais simples do vínculo hamiltoniano. Se aceitamos um vínculo hamiltoniano mais complicado no espaço de fase, podemos utilizar variáveis reais. O que é realmente importante é achar uma forma simples de se escrever os vínculos na transição quântica, e é concebível que um conjunto mais complicado de variáveis elementares possam dar a sacada para uma teoria quântica simples. Assim, mesmo que a formulação não possua vínculos simples, a natureza geométrica das variáveis básicas pode sugerir um conjunto de variáveis elementares que simplifiquem a teoria quântica. Essa foi, portanto, a motivação de Barbero para descrever a Relatividade Geral utilizando a formulação baseada em conexões reais.

O processo utilizado por Barbero⁴ e Immirzi⁷ para tratar da formulação real parte do formalismo ADM e então expande o espaço de fase instituindo as tríadas e o parâmetro β . Não há, portanto, nada de novo a ser discutido em termos das equações; os resultados são os mesmos de 6.4.11.

Além da não-polinomialidade do vínculo hamiltoniano, outro ponto desfavorável à formulação real é quanto ao significado geométrico da conexão: como vimos, para $\beta = \pm i$ a conexão A_a^i pode ser vista como o *pullback* para σ da conexão auto-dual quadri-dimensional $\mathcal{A}_a^{IJ}$. No entanto, para β real, Samuel¹⁵ demonstra que a conexão de Barbero não pode ser interpretada como o *pullback* de uma conexão do espaço-tempo, pois depende da fatia espacial considerada. Também é necessária a escolha de um “*gauge* temporal”, ou seja, a escolha $e_0^\mu = n^\mu$. Considerando ainda que o grupo de *gauge* da Relatividade Geral não é compacto (podendo ser tomado como o grupo de Lorentz ou de Poincaré, dependendo da abordagem), e que o grupo $SO(3)$ da formulação real é compacto, Samuel afirma que a formulação de Barbero não pode ser considerada como uma formulação de *gauge* da Relatividade Geral.

No entanto, essa “interpretação de *gauge*” da teoria é sobretudo de caráter estético. Uma interpretação das variáveis no espaço-tempo é desejável, mas de maneira alguma necessária (como ressalta Thiemman¹³), contanto que se tenha consciência de que a conexão não possui o comportamento da transformação ingênua sob a evolução hamiltoniana na superfície de vínculo.

Em suma, a importância da formulação de Barbero em termos de conexões reais resume-se no fato de permitir que se tenha ido mais longe numa formulação quântica, sendo a base para a teoria de *Loop Quantum Gravity*.

CONCLUSÃO

Dentre as teorias bem sucedidas que tratam das interações fundamentais, a Relatividade Geral se mostra, desde sua concepção, como sendo diferente. Enquanto outras interações tratam partículas ou campos sobre algum pano de fundo pré-definido, a teoria da Relatividade Geral trata a questão do espaço e tempo e suas consequências na presença de corpos massivos, ou seja, é a teoria que trata justamente da estrutura do “pano de fundo”. Assim, é natural que ela se apresente de forma diferente das outras teorias, e nos resulte em sutilezas também diferentes.

No entanto, pudemos ver ao longo do trabalho que podemos reescrever a teoria num formato hamiltoniano baseado em conexões, que a aproxima das teorias de *gauge* de Yang-Mills. Mais que isso, a generalidade de tal formulação apresenta vantagens com relação à formulação geometrodinâmica (ou formalismo ADM). Classicamente, podemos tratar a teoria como a redução de uma teoria complexa, que permite que os vínculos que surgem no tratamento hamiltoniano assumam formas polinomiais, e portanto muito mais simples de lidar do que os vínculos ADM. O preço a se pagar é a necessidade da imposição de condições de realidade, não polinomiais, todavia tratáveis contanto que não estejamos interessados em uma transição para a quantização. Em nível quântico a melhor formulação é baseada em conexões reais. Os vínculos assumem formas mais complexas, mas ainda são mais tratáveis que os vínculos ADM. Dispensa-se também a necessidade das condições de realidade, que demonstraram ser um problema grave na busca de uma teoria quântica.

Um grande progresso vem sendo feito na formulação quântica baseada nas conexões reais, que consiste na chamada teoria de *Loop Quantum Gravity*. Isso se deve, principalmente, à possibilidade de escrever as variáveis canônicas como variáveis de *loops*. Tal formalismo, no entanto, seria o “passo seguinte” no estudo das formulações de Ashtekar para a quantização, e vai além do nosso objetivo aqui.

Acima de tudo, devemos ressaltar a elegância do formalismo que abordamos. A possibilidade de vislumbrar um fenômeno físico como a redução de uma estrutura maior, embora

aparente ser uma complicação a mais, na verdade nos permite introduzir estruturas geométricas simples, que podem assumir significados consideráveis dentro das leis físicas. Isso demonstra o poder exercido pela matemática na construção de teorias físicas, e consequentemente sobre nossa descrição da natureza.

REFERÊNCIAS

- 1 ASHTEKAR, A. New variables for classical and quantum gravity. *Physical Review Letters*, v. 57, n. 18, p. 2244 - 2247, 1986.
- 2 ASHTEKAR, A. New Hamiltonian formulation of general relativity. *Physical Review D*, v. 36, n. 6, p. 1587 - 1602, 1987.
- 3 BARBERO, J.F. Real-polynomial formulation of general relativity in terms of connexions. *Physical Review D*, v. 49, n. 12, p. 6935-6938, 1994.
- 4 BARBERO, J.F. Real Ashtekar variables for lorentzian signature space-times. *Physical Review D*, v. 51, n. 10, p. 5507-5510, 1995.
- 5 IMMIRZZI, G. Real and complex connexions for canonical gravity. *Classical Quantum Gravity*, v. 14, n. 10, L177-L181, 1997.
- 6 WALD, R.M. *General relativity*. Chicago: The University of Chicago Press, 1984. 491 p.
- 7 AU, G.K. The Quest for quantum gravity. *Current Science*, v. 69, n. 6, p. 499-518, 1995.
- 8 NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. 2nd ed. New York: Taylor & Francis, 2003. 573 p.
- 9 ALEXANDRINO, M. M.; BETTIOL, R. G. *Introduction to Lie Groups, adjoint action and its generalizations*. In: ENCONTRO PAULISTA DE GEOMETRIA, 2., 2009, São Carlos. Anais. São Carlos: UFSCar, 2009.
- 10 ISHAM, C.J. *Modern differential geometry for physicists*. Singapore: World Scientific Publishing Co, 1989. 200 p.
- 11 HENNEAUX, M; TEITELBOIM, C. *Quantization of gauge systems*. New Jersey: Princeton University Press, 1992. 520 p.
- 12 RAGUSA, S. Relatividade geral I. São Carlos: IFSC, 2009. Notas de aula.

- 13 THIEMMAN, T. *Modern canonical quantum general relativity*. New York: Cambridge University Press, 2007. 819 p.
- 14 ASHTEKAR, A. *Lectures on non-perturbative canonical gravity*. Singapore: World Scientific Publishing, 1991. 334 p.
- 15 SAMUEL, J. Is Barbero's Hamiltonian formulation a gauge theory of Lorentzian gravity?. *Classical Quantum Gravity*, v. 17, n. 20, L141-L148, 2000.
- 16 FERRARIS, M; FRANCAVIGLIA, M; REINA, C. Variational formulation of general relativity from 1915 to 1925 "Palatini method" discovered by Einstein in 1925. *General Relativity and Gravitation*, v. 14, n. 3, p. 243 - 254, 1982.
- 17 SPIVAK, M. *A Comprehensive introduction to differential geometry*. Houston: Publish or Perish Inc, 1970. v. 1. 489 p.
- 18 STEWART, J. *Advanced general relativity*. New York: Cambridge University Press, 1991. 240 p. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- 19 LEE, J. M. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*. New York: Springer-Verlag Inc, 1997. 224 p.
- 20 LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds*. New York: Springer-Verlag Inc, 2003. 648 p.
- 21 CARMO, M.P. *Geometria riemanniana*, 3^a ed. ,Rio de Janeiro: IMPA, 2005. 298 p.
- 22 MUNKRES, J. R., *Topology, a first course*. New Jersey: Prentice-Hall Inc, 1975. 413 p.
- 23 ASHTEKAR, A. *100 Years of relativity space-time structure: Einstein and beyond*. Singapore: World Scientific Publishing, 2005. 510 p.
- 24 ASHTEKAR, A; LEWANDOWSKI, J. Background Independent Quantum Gravity: A Status Report. *Classical Quantum Gravity*, v. 21, n. 15, R53-R152, 2004.
- 25 KIEFER, C. *Quantum gravity*. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 2007. 361 p.
- 26 DIRAC, P. M. *Lectures on quantum mechanics*. New York: Dover Publications, 2001. 87 p.
- 27 LUCHINI, G. *Sobre a Quantização de laços de teorias topológicas em $2 + 1$ dimensões: gravitação e Chern-Simons*. 2009. 238 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2009.

-
- 28 ISHAM, C. J; KUCHAR, K. V. Representations of spacetime diffeomorphisms. I. canonical parametrized field theories, *Annals of Physics*, v. 164, n. 2, p. 288-315, 1985.
- 29 GAUL, M; ROVELLI, C. Loop Quantum Gravity and the Meaning of Diffeomorphism Invariance. *Lecture Notes in Physics*, v. 541, p. 277-324, 2000.
- 30 HOLST, S. Barbero's Hamiltonian derived from a generalized Hilbert-Palatini action. *Physical Review D*, v. 53, n. 10, p. 5966–5969, 1996.

Elementos de Geometria Riemanniana

Trataremos brevemente das definições essenciais de tensores e variedades, para que possamos focar na estrutura da geometria riemanniana ou, mais explicitamente, nos elementos que são análogos para um caso semi-riemanniano, que é o caso em Relatividade Geral. Embora o tratamento todo seja curto considerando a grandeza do assunto, dedicaremos um detalhe maior aos pontos que são estruturais para a Relatividade Geral e para a construção das formulações alternativas.

A.1 Revisão de Tensores e Variedades

A.1.1 Variedades

Uma **variedade topológica** M é um espaço topológico de Hausdorff, segundo enumerável, dotada da seguinte propriedade: se $x \in M$, então há uma vizinhança U de x e algum inteiro positivo n (denominado a **dimensão** de M) tal que U é homeomorfo a algum aberto de $\mathbb{R}^n$ (ou seja, existe uma correspondência bijetora ψ entre U e um aberto de $\mathbb{R}^n$ tal que ψ e sua inversa são contínuas). Um espaço ser Hausdorff significa que dois pontos distintos sempre admitem vizinhanças disjuntas, e ser segundo enumerável significa que a topologia do espaço admite uma base enumerável.

Dada uma variedade topológica, podemos dotá-la de uma estrutura diferenciável: se U e V são abertos de M , dois homeomorfismos $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ e $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ são **C^∞ -relacionados** se a aplicação

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V) \quad (\text{A.1.1})$$

e sua inversa são C^∞ (suaves). Em outras palavras, ϕ e ψ são C^∞ -relacionados se $\phi \circ \psi^{-1}$ for um difeomorfismo de $\psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ em $\phi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$.

Figura A.1—Homeomorfismos C^∞ -relacionados.

Uma família de homeomorfismos mutuamente C^∞ -relacionados cujos domínios cobrem M é denominada um **atlas** para M . Um membro particular (ϕ, U) de um atlas $\mathcal{A}$ é denominado uma **carta** (para o atlas $\mathcal{A}$), ou um **sistema de coordenadas** sobre U . A coleção de todas as cartas C^∞ -relacionadas é denominada um **atlas maximal** para M .

Uma **variedade suave** (ou C^∞ -**variedade** ou **variedade diferenciável**) consiste então do par $(M, \mathcal{A})$, onde $\mathcal{A}$ é um atlas maximal para M .

Espaço Tangente

Seja $C^\infty(p)$ o conjunto das funções suaves de imagem real cujo domínio de definição inclui alguma vizinhança aberta de p . O **espaço tangente** a M em p é então o espaço vetorial $T_p M$ de derivações lineares em p , ou seja, o conjunto de aplicações $v : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo para todos $f, g \in C^\infty(p)$,

- (i) $v(f + g) = v(f) + v(g)$ (linearidade);
- (ii) $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$ (Regra de Leibniz).

Definimos o **espaço tangente** a M como a reunião

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M. \quad (\text{A.1.2})$$

(Deixamos essa definição como momentânea; no capítulo seguinte trataremos TM com mais detalhe como um fibrado, denominando-o então como o fibrado tangente).

Dados $(\varphi = (x^1, \dots, x^n), U)$ uma carta sobre p e $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ a representação de

$f \in C^\infty(p)$ em coordenadas dadas por φ , os **vetores coordenados** dados por

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p f = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i} |_{\varphi(p)} \quad (\text{A.1.3})$$

formam uma **base** (ou um **referencial**) $\{ \frac{\partial}{\partial x^i} |_p \}$ de $T_p M$. Em particular, segue que $\dim T_p M = \dim M$. Nesse contexto, vetores tangentes podem ser vistos como derivadas direcionais. De fato, considere $v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p M$. Então

$$v(f) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i} |_{\varphi(p)} \quad (\text{A.1.4})$$

é denominado a **derivada direcional de f na direção de v** .

Figura A.2—Espaço tangente a um ponto p e vetor tangente à curva $\alpha(t)$ em p .

O **vetor tangente** a uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ em $\alpha(0)$ é definido como $\alpha'(0)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)|_{t=0}$. De fato, $\alpha'(0)$ é um vetor, e se φ é uma coordenada local e $(u^1(t), \dots, u^n(t)) = \varphi \circ \alpha$, então

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n u^{i'}(0) \frac{\partial}{\partial x^i} |_p \in T_p M, \quad (\text{A.1.5})$$

onde $u^{i'}(t) \equiv \frac{d}{dt} u^i(t)$. Por simplificação, nos casos em que o sistema de coordenadas for evidente do contexto, podemos escrever $\frac{\partial}{\partial x^i}$ simplesmente como ∂_i .

A.1.2 Tensores

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita (todos os espaços vetoriais e variedades aqui serão supostos reais). Chamaremos de V^* seu **espaço dual** (ou **espaço dos covetores**, ou dos funcionais lineares de valor real em V) e denotaremos a aplicação $V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ por uma das notações:

$$(\omega, X) \mapsto \langle \omega, X \rangle \quad \text{ou} \quad (\omega, X) \mapsto \omega(X), \quad (\text{A.1.6})$$

para $\omega \in V^*$, $X \in V$.

Como exemplo importante, consideremos o espaço tangente $T_p M$ a um ponto $p \in M$, que é um espaço vetorial. O seu dual será então o **espaço cotangente** $T_p^* M$. Um elemento $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ de $T_p^* M$ é chamado um **vetor dual** ou **covetor**, e o exemplo mais simples de um covetor é a diferencial df de uma função $f \in C^\infty(p)$, cuja ação em $v \in T_p M$ é dada por

$$\langle df, v \rangle \equiv v(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1.7})$$

Um **tensor l -covariante** em V é uma aplicação multilinear

$$F : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{l \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (\text{A.1.8})$$

Similarmente, um **tensor k -contravariante** é uma aplicação multilinear

$$F : \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{k \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (\text{A.1.9})$$

Um **tensor do tipo $\binom{k}{l}$** , também chamado **tensor k -contravariante e l -covariante** é uma aplicação multilinear

$$F : \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{k \text{ vezes}} \times \overbrace{V \times \cdots \times V}^{l \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (\text{A.1.10})$$

O espaço de todos os tensores k -contravariantes em V é denotado por $T^k(V)$, o espaço dos tensores l -covariantes por $T_l(V)$ e o espaço dos $\binom{k}{l}$ -tensores mistos por $T_l^k(V)$. O **posto** de um tensor é o número de argumentos (vetores e/ou covetores) que ele leva.

Há um produto natural, chamado o **produto tensorial**, ligando os vários espaços tensoriais sobre V . Se $F \in T_l^k(V)$ e $G \in T_q^p(V)$, o tensor $F \otimes G \in T_{l+q}^{k+p}(V)$ é definido por

$$\begin{aligned} (F \otimes G)(\omega^1, \dots, \omega^{k+p}, X_1, \dots, X_{l+q}) \\ = F(\omega^1, \dots, \omega^k, X_1, \dots, X_l) G(\omega^{k+1}, \dots, \omega^{k+p}, X_{l+1}, \dots, X_{l+q}), \end{aligned} \quad (\text{A.1.11})$$

com $\omega^i \in V^*$ e $X_i \in V$.

Se $(e_1, \dots, e_n)$ é uma base para V , seja $(\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ a base dual correspondente a V^* , definida por $\varphi(e_j) = \delta_j^i$. Uma base para $T_l^k(V)$ é dada pelo conjunto de todos os tensores da forma

$$e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k} \otimes \varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_l}, \quad (\text{A.1.12})$$

de forma que os índices i_p, j_q alcançam de 1 a n . Esses tensores agem nos elementos básicos

por

$$e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k} \otimes \varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_l}(\varphi^{s_1}, \dots, \varphi^{s_k}, e_{r_1}, \dots, e_{r_l}) = \delta_{j_1}^{s_1} \cdots \delta_{j_k}^{s_k} \delta_{r_1}^{i_1} \cdots \delta_{r_l}^{i_l}, \quad (\text{A.1.13})$$

e qualquer tensor $F \in T_l^k(V)$ pode ser escrito em termos dessa base como

$$F = F_{i_1 \dots i_l}^{j_1 \dots j_k} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k} \otimes \varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_l}, \quad (\text{A.1.14})$$

onde

$$F_{i_1 \dots i_l}^{j_1 \dots j_k} = F(\varphi^{j_1}, \dots, \varphi^{j_k}, e_{i_1}, \dots, e_{i_l}). \quad (\text{A.1.15})$$

Uma observação importante que convém ser feita é que usamos a **convenção de soma de Einstein**: se o mesmo índice aparece duas vezes, uma como índice acima e outra abaixo, assume-se que esse termo será somado sobre todos os valores possíveis desse índice (e omitimos o somatório para diminuir a extensão dos termos). Sempre escolhemos as posições dos índices de forma que vetores da base têm índices abaixo e covetores da base têm índices acima, enquanto as componentes dos vetores têm índices acima e a dos covetores índices abaixo.

Podemos definir uma operação natural chamada o **traço** ou **contração**, que abaixa o posto do tensor em 2. Definimos $tr_j^i : T_{l+1}^{k+1}(V) \rightarrow T_l^k(V)$ fazendo $(tr_j^i F)(\omega^1, \dots, \omega^k, V_1, \dots, V_l)$ o traço do endomorfismo

$$F(\omega^1, \dots, \cdot^i, \dots, \omega^k, V_1, \dots, \cdot_j, \dots, V_l) \in T_1^1(V). \quad (\text{A.1.16})$$

Em termos de uma base, as componente de $tr_j^i F$ são

$$(tr_j^i F)_{q_1 \dots q_l}^{p_1 \dots p_k} = F_{q_1 \dots m \dots q_l}^{p_1 \dots m \dots p_k}, \quad (\text{A.1.17})$$

onde o índice m é o i -ésimo índice acima e o j -ésimo índice abaixo

r-Formas

Uma classe de tensores que tem uma participação especial em geometria diferencial é a de **tensores alternantes**: aqueles que mudam de sinal toda vez que dois argumentos são permutados. Seja $\Lambda^r(V)$ o espaço dos tensores r -covariantes alternantes em V , também chamados **r -covetores** ou **r -formas (exteriores)**. Existe um produto bilinear associativo natural nas formas chamado o **produto cruzado**, definido em 1-formas $\omega^1, \dots, \omega^r$ por

$$(\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r)(X_1, \dots, X_r) = \det(\langle \omega^i, X_j \rangle), \quad (\text{A.1.18})$$

e estendendo por linearidade.

Denotemos por $\Lambda^r(M)$ o espaço das r -formas suaves em M . A **derivada exterior** d_r é uma aplicação de $\Lambda^r(M) \rightarrow \Lambda^{r+1}(M)$ cuja ação sobre uma r -forma

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (\text{A.1.19})$$

é definida por

$$d_r \omega = \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (\text{A.1.20})$$

A.1.3 Aplicações Induzidas

Uma aplicação suave $f : M \rightarrow N$ naturalmente induz uma aplicação f_* , denominada **aplicação diferencial** (ou **pushforward**)

$$f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N. \quad (\text{A.1.21})$$

A forma explícita de f_* é obtida da definição de um vetor tangente como uma derivada direcional ao longo de uma curva. Se $g \in C^\infty(f(p))$, então $g \circ f \in C^\infty(p)$. Dado um vetor $v \in T_p M$, definimos então $f_* v \in T_{f(p)} N$ como

$$(f_* v)(g) \equiv v(g \circ f). \quad (\text{A.1.22})$$

Figura A.3—A aplicação $f : M \rightarrow N$ induz a aplicação diferencial $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$.

Notamos que f_* vai na “mesma direção” de f . Por outro lado, podemos também induzir uma aplicação no sentido contrário (agora no espaço cotangente),

$$f^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M, \quad (\text{A.1.23})$$

que denominamos **pullback**. Se tomamos $v \in T_p M$ e $\omega \in T_{f(p)}^* N$, o pullback de ω por f^* é

definido por

$$\langle f^*\omega, v \rangle = \langle \omega, f_*v \rangle. \quad (\text{A.1.24})$$

A aplicação diferencial se estende naturalmente para tensores do tipo contravariantes, enquanto o *pullback* se estende para tensores covariantes. Não há uma extensão natural para tensores mistos, e essa só é possível se $f : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo, ou seja, quando possui inversa f^{-1} e essa também é suave.

Finalizamos aqui enunciando um importante teorema do cálculo em variedades, que nos será útil à frente. Sua demonstração é realizada em ??:

Teorema A.1.1 (Teorema da Função Inversa) *Suponha que M e N são variedades suaves e $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação suave. Se f_* é invertível em um ponto $p \in M$, então existem vizinhanças conexas U_0 de p e V_0 de $f(p)$ tal que $f : U_0 \rightarrow V_0$ é um difeomorfismo.*

A.2 Métricas Riemannianas e Pseudo-Riemannianas

A.2.1 Métricas Riemannianas

Definido o essencial de variedades e tensores, podemos agora inserir numa variedade suave M uma métrica, e a partir disso efetuar operações que envolvam distâncias.

Seja $\mathcal{T}(M)$ o espaço dos campos vetoriais suaves em M . Uma **métrica riemanniana** em uma variedade suave M é um campo tensorial 2-covariante $g \in \mathcal{T}_2(M)$ simétrico ($g(X, Y) = g(Y, X)$) e positivo definido. Uma métrica riemanniana portanto determina um produto interno em cada espaço tangente T_pM , que é tipicamente escrito como $\langle X, Y \rangle \equiv g(X, Y)$ para $X, Y \in T_pM$. Uma variedade junto a uma métrica riemanniana é denominada uma **variedade riemanniana**.

Se $(e_1, \dots, e_n)$ é qualquer referencial local para TM , e $(\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ seu correferencial dual, uma métrica riemanniana pode ser escrita localmente como

$$g = g_{ij}\varphi^i \otimes \varphi^j. \quad (\text{A.2.1})$$

A matriz de coeficientes, definida por $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, é simétrica em i e j e tem dependência suave em $p \in M$. Em particular, em um referencial coordenado, g tem a forma

$$g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j. \quad (\text{A.2.2})$$

Podemos ainda abreviar essa notação introduzindo o **produto simétrico** de dois covetores ω e η , denotado pela justaposição sem nenhum símbolo de produto:

$$\omega\eta \equiv \frac{1}{2}(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega). \quad (\text{A.2.3})$$

Devido à simetria de g_{ij} , então

$$g = g_{ij}dx^i dx^j. \quad (\text{A.2.4})$$

Utilizando a matriz de coeficientes, podemos levar um vetor a um covetor e vice-versa através da operação de **levantamento** ou **abaixamento de índices**:

$$X_j = g_{ij}X^i, \quad (\text{A.2.5a})$$

$$\omega^i = g^{ij}\omega_j, \quad (\text{A.2.5b})$$

onde a matriz $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

Um exemplo trivial de uma variedade riemanniana é $\mathbb{R}^n$ com sua **métrica euclidiana** $\bar{g}$, que é apenas o produto interno usual em cada espaço tangente $T_x\mathbb{R}^n$ sob a identificação natural $T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Em coordenadas padrão, podemos escrever como

$$\bar{g} = \sum_i dx^i dx^i = \sum_i (dx^i)^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j.$$

A matriz de $\bar{g}$ nessas coordenadas é portanto $\bar{g} = (\delta_{ij})$.

Se (M_1, g_1) e (M_2, g_2) são variedades riemannianas, o produto $M_1 \times M_2$ tem uma métrica riemanniana natural $g = g_1 \oplus g_2$, chamada a **métrica produto**, definida por

$$g(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2), \quad (\text{A.2.6})$$

onde $X_i, Y_i \in T_{p_i}M_i$ sob a identificação natural $T_{(p_1, p_2)}M_1 \times M_2 = T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$.

Quaisquer coordenadas locais $(x^1, \dots, x^n)$ para M_1 e $(x^{n+1}, \dots, x^{n+m})$ para M_2 geram coordenadas $(x^1, \dots, x^{n+m})$ para $M_1 \times M_2$. Em termos dessas coordenadas, a métrica produto tem a expressão local $g = g_{ij}dx^i dx^j$, onde (g_{ij}) é a matriz de bloco diagonal

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (g_1)_{ij} & 0 \\ 0 & (g_2)_{ij} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2.7})$$

A.2.2 Métricas Pseudo-Riemannianas

Discutiremos adiante que a métrica assumida pela variedade do espaço-tempo é uma métrica pseudo-riemanniana, que se diferencia da métrica riemanniana por não precisar ser positiva-definida. No geral, os cálculos e propriedades derivados de uma métrica riemanniana serão os mesmo para uma pseudo Riemanniana, a menos que envolvam a necessidade de ser positiva.

Formalmente, uma métrica **pseudo riemanniana** (ou **semi-riemanniana**) em uma variedade suave M é um campo tensorial 2-covariante g que é não-degenerado em cada ponto $p \in M$. Isso significa que o único vetor ortogonal a tudo é o vetor nulo, ou seja, $g(X, Y) = 0$ para todo $Y \in T_p M$ se e somente se $X = 0$. Se $g = g_{ij}\varphi^i\varphi^j$ em termos de um correferencial local, a não-degenerescência significa que a matriz g_{ij} é invertível.

Dada uma métrica pseudo-Riemanniana g e um ponto $p \in M$, pode-se construir uma base $(E_1, \dots, E_n)$ para $T_p M$ na qual g tem a expressão

$$g = -(\varphi^1)^2 - \dots - (\varphi^r)^2 + (\varphi^{r+1})^2 + \dots + (\varphi^n)^2 \quad (\text{A.2.8})$$

para algum inteiro $0 \leq r \leq n$. Esse inteiro r , chamado o **índice** de g , é igual à máxima dimensão de qualquer subespaço de $T_p M$ em que g é negativo-definido. O índice é independente da escolha de base, um fato conhecido classicamente como **lei de inércia de Sylvester**.

Métricas de Lorentz

As métricas pseudo-riemannianas mais importantes são as **métricas de Lorentz**, que são métricas pseudo-Riemannianas de índice 1. Com destaque especial, a **métrica de Minkowski** é a métrica de Lorentz η em $\mathbb{R}^{n+1}$ que é escrita em termos de coordenadas $(\tau, \xi^1, \dots, \xi^n)$ como

$$\eta = (d\xi^1)^2 + \dots + (d\xi^n)^2 - (d\tau)^2. \quad (\text{A.2.9})$$

No caso especial de $\mathbb{R}^4$, a métrica de Minkowski é o invariante fundamental da teoria da Relatividade Restrita. As diferentes caracterizações de espaço (direção ξ) e tempo (direção τ) surgem do fato que são subespaços nos quais g é positiva-definida e negativa-definida, respectivamente. Em Relatividade Geral, a inclusão de efeitos gravitacionais permite que a métrica de Lorentz varie ponto a ponto.

A.3 Conexões Lineares e Derivada Covariante

Conexões fazem o papel de relacionar um ponto a outro na variedade. Uma **conexão linear** (ou **conexão afim**) em M é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) &\rightarrow \mathcal{T}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned} \quad (\text{A.3.1})$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\nabla_X Y$ é linear em X sobre $C^\infty(M)$:
 $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$, para $f, g \in C^\infty(M)$.
- (ii) $\nabla_X Y$ é linear em Y sobre $\mathbb{R}$:
 $\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2$, para $a, b \in \mathbb{R}$.
- (iii) ∇ satisfaz a seguinte regra do produto:
 $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$, para $f \in C^\infty(M)$.

$\nabla_X Y$ é chamado a **derivada covariante** de Y na direção X .

$\nabla_X Y|_p$ pode ser pensado como uma derivada direcional de Y em p na direção do vetor $X|_p$. De fato, $\nabla_X Y|_p$ depende somente dos valores de Y em uma vizinhança de p e do valor de X em p . Para enxergar isso, consideremos primeiro Y , e seja $Y = \tilde{Y}$ em uma vizinhança de p . Substituindo $Y \mapsto Y - \tilde{Y}$, é suficiente mostrar que $\nabla_X Y|_p = 0$ se Y se anula na vizinhança U de p . Escolha uma função $\varphi \in C^\infty(M)$ com suporte contido em U tal que $\varphi(p) = 1$. A hipótese que Y se anula em U implica que $\varphi Y \equiv 0$ em toda M , então $\nabla_X (\varphi Y) = \nabla_X (0 \cdot \varphi Y) = 0$. Portanto, para qualquer $X \in \mathcal{T}(M)$, a regra do produto fornece

$$0 = \nabla_X (\varphi Y) = X(\varphi)Y + \varphi(\nabla_X Y). \quad (\text{A.3.2})$$

Mas $Y \equiv 0$ no suporte de φ , então o primeiro termo da direita é identicamente nulo. O cálculo da expressão em p mostra que $\nabla_X Y|_p = 0$. Para a dependência de X , por linearidade, basta mostrar que $\nabla_X Y|_p = 0$ toda vez que $X_p = 0$. Escolhemos uma vizinhança coordenada U de p , e escrevemos $X = X^i \partial_i$ em coordenadas de U , com $X^i(p) = 0$. Então, para qualquer $Y \in \mathcal{T}(M)$,

$$\nabla_X Y|_p = \nabla_{X^i \partial_i} Y|_p = X^i(p) \nabla_{\partial_i} Y|_p = 0, \quad (\text{A.3.3})$$

e verificamos a afirmação.

Seja $\{e_i\}$ um referencial local para TM em um aberto $U \subset M$ e denotemos ∇_{e_i} simplesmente por ∇_i . Para quaisquer escolhas de índices i, j , podemos expandir $\nabla_i e_j$ em termos desse mesmo referencial:

$$\nabla_i e_j = \Gamma_{ij}^k e_k. \quad (\text{A.3.4})$$

Isso define n^3 funções Γ_{ij}^k em U , chamados os **símbolos de Christoffel** de ∇ com respeito ao referencial e_i . Se $X, Y \in \mathcal{T}(U)$ são expressos nesse referencial por $X = X^i e_i$ e $Y = Y^j e_j$, então

$$\nabla_X Y = (X(Y^k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) e_k. \quad (\text{A.3.5})$$

Explicitamente em um sistema de coordenadas ∂_i ,

$$\nabla_X Y = (X^i \partial_i Y^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k. \quad (\text{A.3.6})$$

Consideremos agora o exemplo de uma mudança de base $\hat{e}_a = B_a^b e_b$. Queremos saber como se comportam os símbolos de Christoffel. Temos que $\nabla_{\hat{e}_b} \hat{e}_a = \hat{\Gamma}_{bc}^a \hat{e}_a = \hat{\Gamma}_{bc}^a B_a^f e_f$, mas

$$\nabla_{\hat{e}_b} \hat{e}_a = \nabla_{(B_c^h e_h)} (B_b^g e_g) = B_c^h B_b^g \nabla_h e_g + B_c^h e_h (B_b^g) e_g = B_b^g B_c^h \Gamma_{hg}^f e_f + B_c^h e_h (B_b^f) e_f. \quad (\text{A.3.7})$$

Assim,

$$\hat{\Gamma}_{bc}^a = (B^{-1})_f^a B_b^g B_c^h \Gamma_{hg}^f + (B^{-1})_f^a B_c^h e_h (B_b^f). \quad (\text{A.3.8})$$

Dada uma variedade M com uma métrica g , uma conexão linear ∇ é dita **compatível** com a métrica se satisfaz a seguinte regra do produto para todos os campos vetoriais X, Y, Z :

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad (\text{A.3.9})$$

e é dita **simétrica** se

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \quad (\text{A.3.10})$$

Enunciaremos agora um importante teorema que nos permite relacionar uma conexão a uma métrica.

Teorema A.3.1 (Lema Fundamental da Geometria Riemanniana) *Seja (M, g) uma variedade riemanniana (ou pseudo riemanniana). Existe uma única conexão linear ∇ em M que é compatível com g e simétrica. Essa conexão é chamada **conexão riemanniana** ou **conexão de Levi-Civita** de g .*

Demonstração. Devido à extensão da demonstração, esboçaremos aqui apenas a parte que nos será de utilidade futura, derivando uma fórmula para ∇ , supondo a existência de tal conexão.

Sejam $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$. Escrevendo a equação da compatibilidade três vezes, teremos, uma vez que $\nabla_X \langle Y, Z \rangle = X \langle Y, Z \rangle$,

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle \\ Y \langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_X Y \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle \\ Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle, \end{aligned}$$

usando a condição de simetria no último termo em cada linha. Somando as duas primeiras equações e subtraindo a terceira, chegamos que

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} (X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle Y, [Y, X] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle). \quad (\text{A.3.11})$$

Seja agora $(U, (x^i))$ qualquer carta coordenada local. Aplicando a equação acima aos campos vetoriais coordenados, cujos colchetes são zero, obtemos

$$\langle \nabla_i \partial_j, \partial_l \rangle = \frac{1}{2} (\partial_i \langle \partial_j, \partial_l \rangle + \partial_j \langle \partial_l, \partial_i \rangle - \partial_l \langle \partial_i, \partial_j \rangle). \quad (\text{A.3.12})$$

Lembrando pelas definições que $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ e que $\nabla_i \partial_j = \Gamma_{ij}^m \partial_m$, temos

$$\Gamma_{ij}^m g_{ml} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \quad (\text{A.3.13})$$

Finalmente, multiplicando ambos os lados pela inversa g^{lk} e notando que $g_{ml} g^{lk} = \delta_m^k$, obtemos

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \quad (\text{A.3.14})$$

Da equação, é evidente que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. $\square$

A.3.1 Geodésicas

Dada uma variedade M com uma conexão ∇ , existe uma correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $D_t(V)$ ao longo de γ , denominado a **derivada covariante** de V ao longo de γ , tal que se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{T}(M)$ (ou seja, $V(t) = Y|_{\gamma(t)}$), então $D_t V = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y$. A **aceleração** de γ é o campo vetorial $D_t \dot{\gamma}$ ao longo de γ .

Uma curva γ é uma **geodésica** com respeito a ∇ se sua aceleração é zero: $D_t \dot{\gamma} = 0$. Um campo vetorial V ao longo de uma curva γ é dito **paralelo ao longo de γ** com respeito a ∇ se $D_t V \equiv 0$. V é denominado **paralelo** se é paralelo ao longo de qualquer curva.

Dado uma carta coordenada $(U, (x^i))$ em um ponto $p \in M$, uma geodésica $\gamma(t) =$

$(x^1, \dots, x^n)(t)$ satisfaz a **equação geodésica**

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0. \quad (\text{A.3.15})$$

Alguns exemplos básicos: para $M = \mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana usual, teremos que as geodésicas são retas parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco, e para $M = S^n$, as geodésicas corresponderão aos círculos máximos de S^n , parametrizados pelo comprimento de arco.

A seguir, enunciamos o teorema que garante a existência e unicidade das geodésicas. Omitiremos, no entanto, sua demonstração.

Teorema A.3.2 (Existência e Unicidade das Geodésicas) *Seja M uma variedade com uma conexão linear. Para qualquer $p \in M$, qualquer $v \in T_p M$ e qualquer $t_0 \in \mathbb{R}$, existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 e uma geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ satisfazendo*

$$\gamma(t_0) = p; \quad \dot{\gamma}(t_0) = v. \quad (\text{A.3.16})$$

Quaisquer duas geodésicas coincidem em seu domínio comum.

Segue da unicidade do teorema que, para qualquer $p \in M$ e $v \in T_p M$, há uma única geodésica maximal $\gamma_v : I \rightarrow M$ com $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$, definida em algum aberto I .

Seja agora o conjunto

$$\mathcal{E} \equiv \{v \in T_p M; \gamma_v \text{ é definida em um intervalo contendo } [0, 1]\}. \quad (\text{A.3.17})$$

Definimos a **aplicação exponencial** $\text{Exp} : \mathcal{E} \rightarrow M$ por

$$\text{Exp}(v) = \gamma_v(1). \quad (\text{A.3.18})$$

Na literatura, é comum encontrarmos a aplicação exponencial representada somente por letras minúsculas: $\exp$. No entanto, usamos aqui a primeira letra maiúscula para diferenciar da aplicação exponencial definida à frente para grupos de Lie. Podemos expressar a geodésica γ_v em termos da aplicação exponencial da forma

$$\gamma_v(t) = \text{Exp}(tv). \quad (\text{A.3.19})$$

Mostraremos, por fim, que a aplicação exponencial sempre nos permite determinar localmente um sistema de coordenadas em uma vizinhança U de $p \in M$. Para isso, utilizaremos o seguinte

Lema A.3.3 (Lema da Vizinhança Normal) Para todo $p \in M$, há uma vizinhança $\mathcal{V}$ da origem em $T_p M$ e uma vizinhança U de p , denominada **vizinhança normal**, tal que $\text{Exp}_p : \mathcal{V} \rightarrow U$ é um difeomorfismo.

Demonstração. Isso segue diretamente do teorema da função inversa A.1.1, uma vez que mostramos que $(\text{Exp})_*$ é invertível em 0. Como $T_p M$ é um espaço vetorial, há uma identificação natural $T_0(T_p M) = T_p M$. Sob essa identificação, mostraremos que $(\text{Exp})_* : T_0(T_p M) = T_p M \rightarrow T_p M$ tem uma expressão particularmente simples: a aplicação identidade!

Para calcular $(\text{Exp})_* v$ para um vetor arbitrário $v \in T_p M$, apenas precisamos escolher uma curva τ em $T_p M$ começando em 0 e cujo vetor tangente inicial é v , e calcular o vetor tangente inicial da curva composta $\text{Exp} \circ \tau(t)$. Uma escolha óbvia é $\tau(t) = tv$. Portanto,

$$(\text{Exp})_* V = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\text{Exp} \circ \tau)(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Exp}(tv) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma_v(t) = V. \quad (\text{A.3.20})$$

□

Uma base ortonormal $\{e_i\}$ para $T_p M$ fornece um isomorfismo $e : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$ por $e(x^1, \dots, x^n) = x^i e_i$. Se U é uma vizinhança normal de p , podemos combinar esse isomorfismo com a aplicação exponencial para obter uma carta coordenada

$$\phi : e^{-1} \circ \text{Exp}_p^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (\text{A.3.21})$$

Quaisquer dessas coordenadas são chamadas **coordenadas normais** em p . Algumas propriedades das coordenadas normais são:

1. Para qualquer vetor $v = v^i \partial_i \in T_p M$, a geodésica γ_v é representada em coordenadas normais em p por

$$\gamma_v(t) = (tv^1, \dots, tv^n), \quad (\text{A.3.22})$$

enquanto γ_v está em U ;

2. As coordenadas de p são $(0, \dots, 0)$;
3. as componentes da métrica em p são $g_{ij} = \delta_{ij}$.

A.4 Curvatura

O último tópico de elementos de geometria que discutiremos será a curvatura. Após isso, somos capazes de trabalhar com as equações em Relatividade Geral.

Se M é uma variedade riemanniana qualquer, o **endomorfismo de curvatura (de Riemman)** é a aplicação $R : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$ definida por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (\text{A.4.1})$$

O endomorfismo de curvatura é um campo $\binom{1}{3}$ -tensorial, e dessa forma suas componentes podem ser expressas com um índice em cima e três abaixo. Adotamos como convenção que o último índice seja o contravariante. Portanto, em termos de coordenadas (x^i) , teremos

$$R = R_{ijk}{}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l, \quad (\text{A.4.2})$$

onde os coeficientes são definidos por

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}{}^l \partial_l. \quad (\text{A.4.3})$$

Pelo abaixamento do último índice, definimos então o campo 4-tensorial covariante, que chamamos o **tensor de curvatura (de Riemman)**. Sua ação em campos vetoriais é dada por

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle, \quad (\text{A.4.4})$$

e em coordenadas é escrito como

$$Rm = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l, \quad (\text{A.4.5})$$

onde $R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}{}^m$.

Mostremos agora algumas propriedades de simetria do tensor de curvatura:

1. $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$ (primeira identidade de Bianchi):

Exprimindo em função dos vetores, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(Y, Z)X, T \rangle + \langle R(Z, X)Y, T \rangle \\ &= \langle R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y, T \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.4.6})$$

Basta, pois, mostrar que o primeiro termo é nulo. Pela simetria da conexão riemanniana,

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z \\ &+ \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z, X]} Y \\ &= \nabla_Y [X, Z] + \nabla_Z [Y, X] + \nabla_X [Z, Y] - \nabla_{[X, Z]} Y - \nabla_{[Y, X]} Z - \nabla_{[Z, Y]} X \\ &= [Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]] + [X, [Z, Y]] = 0; \end{aligned} \quad (\text{A.4.7})$$

2. $R_{ijkl} = -R_{jikl}$:

Segue direto da definição A.4.1;

3. $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$

Basta mostrar que $Rm(X, Y, Z, Z) = 0$. Assim,

$$Rm(X, Y, Z, Z) = \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle, \quad (A.4.8)$$

mas $\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle = Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle$ e $\langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle = \frac{1}{2}[X, Y] \langle Z, Z \rangle$.

Logo,

$$\begin{aligned} Rm(X, Y, Z, Z) &= Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle + \frac{1}{2}[X, Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2}Y(X \langle Z, Z \rangle) - \frac{1}{2}X(Y \langle Z, Z \rangle) + \frac{1}{2}[X, Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= -\frac{1}{2}[X, Y] \langle Z, Z \rangle + \frac{1}{2}[X, Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= 0; \end{aligned} \quad (A.4.9)$$

4. $R_{ijkl} = R_{klij}$:

Utilizamos o item 1. e escrevemos:

$$\begin{aligned} Rm(X, Y, Z, T) + Rm(Y, Z, X, T) + Rm(Z, X, Y, T) &= 0, \\ Rm(Y, Z, T, X) + Rm(Z, T, Y, X) + Rm(T, Y, Z, X) &= 0, \\ Rm(Z, T, X, Y) + Rm(T, X, Z, Y) + Rm(X, Z, T, Y) &= 0, \\ Rm(T, X, Y, Z) + Rm(X, Y, T, Z) + Rm(Y, T, X, Z) &= 0. \end{aligned}$$

Somando as equações acima, obtemos

$$2Rm(Z, X, Y, T) + 2Rm(T, Y, Z, X) = 0, \quad (A.4.10)$$

e portanto, $Rm(Z, X, Y, T) = Rm(Y, T, Z, X)$;

5. $\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk} = 0$ (Identidade diferencial de Bianchi):

Basta demonstrar a igualdade em um ponto $p \in M$. Sejam (x^i) coordenadas normais em p , e sejam X, Y, Z, V, W , vetores básicos coordenados ∂_i arbitrários. Temos que as derivadas covariantes dos vetores se anulam em p , uma vez que $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$, e $[\partial_i, \partial_j] = 0$.

Usando esses fatos e a compatibilidade da conexão com a métrica, temos

$$\nabla_W Rm(Z, V, X, Y) = \nabla_W \langle R(Z, V)X, Y \rangle = \langle \nabla_X \nabla_Z \nabla_V X - \nabla_W \nabla_V \nabla_Z X, Y \rangle. \quad (A.4.11)$$

Escrevendo essa equação três vezes, com os campos W, Z, V ciclicamente permutados, e somando-as,

$$\begin{aligned} \nabla_W Rm(Z, V, X, Y) + \nabla_Z Rm(V, W, X, Y) + \nabla_V Rm(W, Z, X, Y) &= \langle \nabla_W \nabla_Z \nabla_V X \\ &\quad - \nabla_W \nabla_V \nabla_Z X + \nabla_Z \nabla_V \nabla_W X - \nabla_Z \nabla_W \nabla_V X + \nabla_V \nabla_W \nabla_Z X - \nabla_V \nabla_Z \nabla_W X, Y \rangle \\ &= \langle R(W, Z) \nabla_V X + R(Z, V) \nabla_W X + R(V, W) \nabla_Z X, Y \rangle = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.4.12})$$

onde a última igualdade segue porque $\nabla_V X = \nabla_W X = \nabla_Z X = 0$ em p .

A **curvatura de Ricci** (ou **tensor de Ricci**), denotado por Rc , é o tensor 2-covariante definido como o traço do endomorfismo de curvatura em seu segundo e último índice. As componentes de Rc são usualmente denotadas por R_{ij} , de modo que

$$R_{ij} \equiv R_{ikj}{}^k = g^{km} R_{ikjm}. \quad (\text{A.4.13})$$

A **curvatura escalar** é definida como o traço do tensor de Ricci:

$$R \equiv R_i{}^i = g^{ij} R_{ij}. \quad (\text{A.4.14})$$

Convém observar que há muita variação na literatura com respeito às convenções de sinais adotadas nas definições do endomorfismo de curvatura de Riemman e do tensor de curvatura. Procura-se, entretanto, deixar com que os tensores de Ricci e escalar tenham a mesma forma independente da escolha de sinais para o tensor de curvatura. Assim, se o endomorfismo de curvatura é tomado com o sinal oposto ao aqui definido, obtemos o tensor de Ricci contraindo então o primeiro com o último termo.

Calculemos agora o tensor de curvatura em função dos símbolos de Christoffel. Escolhemos um sistema de coordenadas (x^i) . Dessa forma $[\partial_i, \partial_j] = 0$ e portanto o endomorfismo de curvatura será da forma

$$\begin{aligned} R(\partial_i, \partial_k) \partial_j &= \nabla_k (\nabla_i \partial_j) - \nabla_i (\nabla_k \partial_j) = \nabla_k (\Gamma_{ij}^m \partial_m) - \nabla_i (\Gamma_{jk}^m \partial_m) \\ &= \partial_k (\Gamma_{ij}^m) \partial_m + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m \partial_m - \partial_i (\Gamma_{jk}^m) \partial_m - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{li}^m \partial_m. \end{aligned} \quad (\text{A.4.15})$$

Fazendo $R(\partial_i, \partial_k) \partial_j = R_{ikj}{}^m \partial_m$, obtemos

$$R_{ikj}{}^m = \partial_k (\Gamma_{ij}^m) + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m - \partial_i (\Gamma_{jk}^m) - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{li}^m. \quad (\text{A.4.16})$$

Contraindo a equação acima, encontramos o tensor de Ricci:

$$R_{ij} = R_{ikj}{}^k = \partial_k (\Gamma_{ij}^k) - \partial_i (\Gamma_{jk}^k) + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^k - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{li}^k. \quad (\text{A.4.17})$$

Encerramos então a discussão dos elementos de geometria. Com esses conceitos estamos aptos a tratar da teoria da Relatividade Geral.

Grupos de Lie

Um dos componentes essenciais em um fibrado é seu grupo de estrutura. As ações desse grupo sobre a fibra que permitem, por um lado, dar consistência à definição do fibrado localmente, e por outro transladar por elementos distintos da fibra e relacioná-los, o que fisicamente se traduz como uma escolha de *gauge*.

Partimos da definição geral de um grupo para então definirmos um grupo de Lie. Um **grupo** é um conjunto não-vazio G dotado de uma operação binária

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh \end{aligned} \tag{B.0.1}$$

denominada produto, e de uma operação unária $G \rightarrow G$ (bijetora) denominada inversa, denotada pelo expoente $^{-1}$, tais que as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. *Associatividade*: para todos $a, b, c \in G$ vale $(ab)c = a(bc)$;
2. *Elemento neutro*: existe um elemento $e \in G$, denominado elemento neutro, tal que $ge = eg = g$ para todo $g \in G$;
3. *Inversa*: para cada $g \in G$ existe um elemento $h \in G$ tal que $gh = hg = e$. Esse elemento é denominado a inversa de g e denotado por g^{-1} .

Podemos ver facilmente que o elemento neutro é único. Se supomos $e, e' \in G$ dois elementos neutros, encontramos pela definição que $e = ee' = e'$, ou seja, $e = e'$. A unicidade da inversa verificamos para o caso de $h, h' \in G$ serem inversas de $g \in G$, então $h = he = h(gh') = (hg)h' = h'$.

Uma variedade suave G é um **grupo de Lie** se G é um grupo e as aplicações

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G & \text{e} & & G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh & & & g &\mapsto g^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.0.2})$$

são diferenciáveis.

Como exemplos quase triviais de grupos de Lie podemos considerar $(\mathbb{R}^n, +)$, ou $(S^1, \cdot)$ com a operação do grupo $e^{i\theta} \cdot e^{i\eta} = e^{i(\theta+\eta)}$. Outros exemplos, de interesse físico, são os chamados **grupos de Lie clássicos**, que formam quatro famílias de grupos de Lie de matrizes proximamente relacionados a simetrias de espaços euclidianos. Começamos com $GL(n, \mathbb{R})$, o **grupo linear geral** de matrizes quadradas de ordem n , não singulares (i.e., com determinante não-nulo), com elementos em $\mathbb{R}$ (ou, similarmente, podemos definir com elementos nos complexos $\mathbb{C}$ ou nos quaternions $\mathbb{H}$, respectivamente $GL(n, \mathbb{C})$ e $GL(n, \mathbb{H})$). Em geral, se V é um espaço vetorial de dimensão finita, $Aut(V)$ denota o grupo de automorfismos lineares de V . No mais, completamos nossa lista com os seguintes:

- (i) $SL(n, \mathbb{R}) \equiv \{M \in GL(n, \mathbb{R}); \det M = 1\}$, $SL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{H})$ os **grupos lineares especiais**;
- (ii) $O(n) \equiv \{M \in GL(n, \mathbb{R}); M^t M = I\}$, o **grupo ortogonal** (M^t é a matriz transposta de M) e $SO(n) \equiv O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$, o **grupo ortogonal especial**;
- (iii) $U(n) \equiv \{M \in GL(n, \mathbb{C}); M^\dagger M = I\}$, **grupo unitário** ($M^\dagger$ é a matriz transposta-conjugada de M) e $SU(n) \equiv U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$ o **grupo unitário especial**;
- (iv) $Sp(n) \equiv \{M \in GL(n, \mathbb{H}); M^\dagger M = I\}$, o **grupo simplético**.

Dado um grupo de Lie, podemos associar a ele uma álgebra. Uma **álgebra de Lie** $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial real munido com uma aplicação bilinear $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, chamada colchetes de Lie, satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $[X, Y] = -[Y, X]$ (antissimetria),
- (ii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidade de Jacobi)

Dadas duas álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$, uma aplicação linear $\psi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ é chamada um **homomorfismo de álgebras de Lie** se $[\psi(X), \psi(Y)] = \psi([X, Y])$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}_1$.

Um exemplo básico de uma álgebra de Lie são os espaços vetoriais de matrizes quadradas $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, denotada $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ e $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ respectivamente, com $[A, B] = AB - BA$.

Como visto, a definição de uma álgebra de Lie é independente e não faz qualquer menção a um grupo de Lie. Para estabelecer a relação entre os dois, precisamos do conceito de campos invariantes à esquerda ou à direita.

Para cada $g \in G$, denote L_g e R_g os difeomorfismos de G dados por translação à esquerda e à direita, respectivamente. Mais precisamente,

$$L_g(x) = gx \quad \text{e} \quad R_g(x) = xg. \quad (\text{B.0.3})$$

Seja $L_{g*} : T_x G \rightarrow T_{L_g(x)} G$ a aplicação diferencial induzida pela translação à esquerda no espaço tangente a $x \in G$. Um campo vetorial X em G (não assumido suave a priori) é dito **invariante à esquerda** se, para todo $g \in G$, X é L_g -relacionado a si mesmo, ou seja, $(L_{g*} \circ X)(f) = X(f) \circ L_g$. Isso significa que

$$(L_{g*} X)_h = X_{gh}. \quad (\text{B.0.4})$$

Similarmente, um campo vetorial é dito **invariante à direita** se, para todo $g \in G$, ele é R_g -relacionado a si mesmo, $R_{g*} X = X$ (usamos aqui uma notação simplificada). Um campo vetorial simultaneamente invariante à esquerda e à direita é chamado **bi-invariante**. Segue abaixo porque não precisamos assumir o campo suave:

Lema B.0.1 *Campos vetoriais invariantes à esquerda são suaves.*

Demonstração. Seja X um campo vetorial invariante à esquerda em G . Suponha $g \in G$ um elemento de uma vizinhança aberta da identidade $e \in G$, e considere a operação de grupo

$$\begin{aligned} \varphi : G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh. \end{aligned}$$

φ é suave, e portanto sua diferencial $d\varphi \equiv \varphi_* : T(G \times G) \simeq TG \times TG \rightarrow TG$, é uma aplicação suave. Defina

$$\begin{aligned} s : G &\rightarrow TG \times TG \\ g &\mapsto (0_g, X(e)) \end{aligned}$$

onde $g \mapsto 0_g$ é um vetor nulo de TG . Como $X = d\varphi \circ s$, segue que X é suave. $\square$

Relacionamos, pois, um grupo de Lie a uma álgebra:

Teorema B.0.2 *Seja $\mathfrak{g}$ o conjunto dos campos vetoriais invariantes à esquerda no grupo de*

Lie G . Então o seguinte vale:

- (i) $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, munida com os colchetes de Lie do campo vetorial.
- (ii) Considere o espaço tangente $T_e G$ com o colchete definido como segue: se $X^1, X^2 \in T_e G$, faça $[X^1, X^2] = [\tilde{X}^1, \tilde{X}^2]_e$, onde $\tilde{X}^i = L_g^* X^i$, e $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2]_e$ é o comutador dos campos vetoriais $\tilde{X}^1, \tilde{X}^2$ tomados em e . Defina a aplicação $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$ como $\psi(\tilde{X}) = X_e$. Então ψ é um isomorfismo de álgebras de Lie, onde $\mathfrak{g}$ é munido com o colchete de Lie de campos vetoriais e $T_e G$ com o colchete definido acima.

Demonstração. Primeiramente, note que $\mathfrak{g}$ tem uma estrutura de espaço vetorial real, o que segue diretamente da linearidade de L_g^* . Não é difícil ver que o comutador dos campos vetoriais é mesmo um colchete de Lie, ou seja, antissimétrico e satisfaz a identidade de Jacobi. O colchete de Lie de campos vetoriais invariantes à esquerda também é invariante à esquerda,

$$\begin{aligned} (L_g^*[X, Y])(f) &= (L_g^*(XY - YX))(f) = XY(f \circ L_g) - YX(f \circ L_g) \\ &= XY(f) \circ L_g - YX(f) \circ L_g = [X, Y](f) \circ L_g, \end{aligned} \quad (\text{B.0.5})$$

provando (i).

Para provar (ii), requeremos primeiro que ψ seja injetora. De fato, se $\psi(\tilde{X}) = \psi(\tilde{Y})$, para cada $g \in G$, $\tilde{X}_g = L_g^*(X_e) = L_g^*(Y_e) = \tilde{Y}_g$. Além do mais, é também sobrejetora, uma vez que para cada $v \in T_e G$, $\tilde{X}_g = L_g^*(v)$ é tal que $\psi(\tilde{X}) = v$ e $\tilde{X}$ é claramente invariante à esquerda. Portanto, ψ é uma bijeção linear entre dois espaços vetoriais reais e assim um isomorfismo. Da definição do colchete de Lie em $T_e G$ temos $[\psi(\tilde{X}), \psi(\tilde{Y})] = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_e = \psi([\tilde{X}, \tilde{Y}])$. Portanto, ψ é um isomorfismo de álgebra de Lie. $\square$

Assim, definimos a **álgebra de Lie de um grupo de Lie** G como a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de campos vetoriais invariantes à esquerda em G . De acordo com o teorema anterior, $\mathfrak{g}$ poderia ser equivalentemente definido como o espaço tangente $T_e G$ com o colchete como definido em (ii).

Agora seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ a sua álgebra. Um homomorfismo de Lie $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$ é chamado um **subgrupo de 1-parâmetro** de G . A **aplicação exponencial** (de Lie) em G é dada por

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ X &\mapsto \lambda_X(1), \end{aligned} \quad (\text{B.0.6})$$

onde λ_X é o único subgrupo de 1-parâmetro de G tal que $\lambda_X'(0) = X$.

Listamos a seguir algumas propriedades da aplicação exponencial:

1. $\exp(tX) = \lambda_X(t)$;
2. $\exp(-tX) = \exp(tX)^{-1}$;
3. $\exp(t_1X + t_2X) = \exp(t_1X) \exp(t_2X)$;
4. $\exp : T_e G \rightarrow G$ é suave e $d\exp_0 = id$, assim $\exp$ é um difeomorfismo de uma vizinhança aberta de $0 \in T_e G$ sobre uma vizinhança aberta de $e \in G$.

Para terminar o que nos será necessário de grupos de Lie, definimos ações de um grupo: dado G um grupo de Lie e M uma variedade suave, uma aplicação suave $\mu : G \times M \rightarrow M$ é chamada uma **ação à esquerda** de G em M se

- (i) $\mu(e, x) = x$, para todo $x \in M$;
- (ii) $\mu(g_1, \mu(g_2, x)) = \mu(g_1 g_2, x)$, para todos $g_1, g_2 \in G$, $x \in M$.

Definimos **ações à direita** de maneira similar.

Dada μ uma ação à esquerda e $x \in M$, o subgrupo $G_x \equiv \{g \in G; \mu(g, x) = x\}$ é denominado **grupo de isotropia** ou estabilizador de x e $G(x) \equiv \{\mu(g, x); g \in G\}$ é chamado a **órbita** de $x \in M$. Em adição, se $\bigcap_{x \in M} G_x = \{e\}$, a ação é dita **efetiva** e se $G_x = \{e\}$ para todo $x \in M$ ela é dita **livre**. Por fim, se dados $x, y \in M$ existe $g \in G$ com $\mu(g, x) = y$, μ é dita **transitiva**.

Uma ação é dita **própria** se a aplicação

$$\begin{aligned} G \times M &\rightarrow M \times M \\ (g, x) &\mapsto (\mu(g, x), x) \end{aligned} \tag{B.0.7}$$

é própria, isso é, a pré-imagem de qualquer conjunto compacto é compacta.

Invariância por Difeomorfismos e Observáveis

C.1 Invariância por Difeomorfismos Passiva e Ativa

As equações de Einstein 4.0.1 são invariantes sob a ação o grupo de difeomorfismos $Diff(M)$ de M^* . Lembramos que um difeomorfismo φ é uma aplicação C^∞ entre variedades que é bijetora e possui inversa C^∞ . Assim, o grupo de difeomorfismos é formado pelo conjunto de aplicações $\varphi : M \rightarrow M$ que preservam a estrutura de M .

Consideraremos difeomorfismos que são dados em coordenadas locais pelas aplicações suaves

$$f : x^\mu \rightarrow f^\mu(x). \quad (C.1.1)$$

Dada uma solução $g_{\mu\nu}(x)$ das equações de Einstein, então, devido à invariância por difeomorfismos, $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$ também é solução se

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial f^\rho(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial f^\sigma(x)}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(f(x)). \quad (C.1.2)$$

Geometricamente, há duas interpretações para C.1.2. Invariância por **difeomorfismos passivos** refere-se à invariância sob mudança de coordenadas (o mesmo objeto representado em diferentes sistemas de coordenadas). Seja um sistema de coordenadas locais S cuja métrica é $g_{\mu\nu}(x)$ e outro S' de métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$. Satisfazendo C.1.2, ambas representam a mesma métrica em M .

Por outro lado, invariância por **difeomorfismos ativos** relacionam objetos diferentes em M no mesmo sistema de coordenadas. f é então uma aplicação associando um ponto da variedade a outro. Dados dois pontos $p, q \in M$ e duas métricas $g_{\mu\nu}(x)$ e $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$, ambas soluções das equações de Einstein, teremos que a distância entre esses dois pontos dada por

* Seguimos aqui a discussão da seção 4 de²⁹.

cada uma das métricas será diferente,

$$d_g(P, Q) \neq d_{\tilde{g}}(P, Q). \quad (\text{C.1.3})$$

Essas métricas, no entanto, estarão relacionadas por C.1.2, que denominaremos um **difeomorfismo ativo**.

Se distâncias entre pontos são diferentes dadas por diferentes soluções das equações de campo, então o que seria um observável de distância na teoria? Tratem-se de uma formulação livre de coordenadas, para evitar confusões entre difeomorfismos ativos e passivos. Consideremos uma variedade M com uma métrica g , definida como a aplicação

$$\begin{aligned} g : M \times M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto d_g(P, Q), \end{aligned} \quad (\text{C.1.4})$$

$P, Q \in M$. Suponha que d_g resolva as equações de Einstein. Um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow M$ atua como pequenos deslocamentos sobre a variedade, resultando em $d_{\tilde{g}}$, com

$$d_{\tilde{g}}(P, Q) = d_g(\varphi^{-1}(P), \varphi^{-1}(Q)). \quad (\text{C.1.5})$$

A invariância por difeomorfismos ativos é o fato de que se d_g é solução das equações de Einstein, também o é $d_{\tilde{g}}$. Isso mostra que a Relatividade Geral é invariante sob difeomorfismos ativos, mesmo em uma formulação livre de coordenadas.

A Relatividade Geral é distinguível de outras teorias de campos dinâmicas por sua invariância sob difeomorfismos *ativos*, uma vez que qualquer teoria pode ser feita invariante sob mudanças de coordenadas (difeomorfismos *passivos*). Invariância sob difeomorfismos passivos é uma propriedade da formulação de uma teoria dinâmica, enquanto difeomorfismos ativos é uma propriedade da própria teoria dinâmica. Invariância sob pequenos deslocamentos dos campos dinâmicos vale apenas na Relatividade Geral e nas teorias em que ela vale. A seguir, trataremos um exemplo que nos tornará o conceito de difeomorfismos ativos mais concreto.

C.2 O Argumento do Buraco

Trataremos aqui do famoso “argumento do buraco”, proposto por Einstein em 1912. Suponha que temos um espaço-tempo M incluindo outras estruturas que representam matéria (como campos escalares ou partículas). Suponha ainda que a configuração da matéria é tal que há um *buraco* no espaço-tempo (uma região sem matéria), como na figura abaixo. Sejam $g_{\mu\nu}(x)$ e $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$ duas métricas distintas que são iguais em todo lugar de M exceto

no buraco, e que são ambas soluções das equações de Einstein. Agora introduzimos uma superfície tipo espaço (valor inicial) tal que o buraco esteja inteiramente no futuro dessa. Como as métricas são iguais em todos os pontos fora do buraco, ambas possuem o mesmo conjunto de valores iniciais na superfície.

Figura C.1—O argumento do buraco.

Se consideramos agora a distância d entre dois pontos distintos P e Q que estão ambos dentro do buraco, notamos imediatamente que $d_g(P, Q) \neq d_{\tilde{g}}(P, Q)$, embora as métricas tenham as mesmas condições iniciais. Assim, d_g não seria um observável físico (ou um observável de Dirac), ou seja, a distância não seria um observável predito pela teoria! Einstein ficou tão impressionado com essa conclusão, que em 1912 afirmou que a covariância geral *não* era uma propriedade da gravitação. Foi preciso três anos até que ele próprio apresentasse a solução a esse problema, resgatando a covariância geral, em 1915.

Figura C.2—Solução para o argumento do buraco.

Consideremos um sistema similar ao anterior, agora com quatro partículas A, B, C e D . Suas trajetórias são determinadas pelas equações de movimento e supõe-se que se iniciam na superfície tipo-espaço inicial. Suponhamos ainda que as trajetórias de A e B se encontrem em i , e C e D se encontrem em j , ambos pontos dentro do buraco.

À primeira vista, nos encontramos na mesma situação anterior. Contudo, há aqui uma diferença sutil no modo que definimos o observável. Considere o difeomorfismo que leva $g_{\mu\nu}$ a $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Como a teoria é invariante apenas sob um difeomorfismo que atue sobre *todas* as variáveis dinâmicas, $\tilde{g}_{\mu\nu}$ é uma solução das equações de Einstein apenas se o difeomorfismo deslocar as trajetórias das partículas também. Portanto, i e j também serão deslocados pelo difeomorfismo, e a nova distância entre os pontos de intersecção será

$$\tilde{d} = d_{\tilde{g}}(\varphi(i), \varphi(j)) = d_g(\varphi^{-1}\varphi(i), \varphi^{-1}\varphi(j)) = d_g(i, j) = d. \quad (\text{C.2.1})$$

Assim, segue que a distância d é invariante de gauge e, portanto, um observável de Dirac.

Em geral, para definir observáveis “locais” em Relatividade Geral, temos que usar alguns dos graus de liberdade da teoria (partículas, campos) para localizar um ponto ou uma região do espaço-tempo. É importante notar que a princípio não precisamos de matéria ou campos para fazer isso, mas podemos usar parte dos graus de liberdade do próprio campo gravitacional.

C.3 Interpretação Física do Espaço

Pelo argumento do buraco, vemos claramente que a noção de distância em Relatividade Geral deixa de se tratar de uma propriedade fixa do espaço-tempo, mas passa a ser ligada às quantidades dinâmicas nele presentes. Para uma maior reflexão, discutiremos como a noção de espaço (ou espaço-tempo) foi encarada ao longo da história da física.

O espaço de Aristóteles e Descartes

De acordo com Descartes (semelhante a Aristóteles), não há um “espaço” de fato, mas apenas objetos físicos que podem estar em contato uns com os outros. A localização de um objeto é apenas definida pela relação dos objetos próximos a esse, ou seja, a posição de um corpo é dada pelo conjunto de objetos aos quais esse corpo é contíguo. O movimento, então, é a mudança dessa posição, ou seja, a mudança na relação com os outros objetos contíguos. Tal ponto de vista é denominado **relacionalismo**

Espaço e tempo de Newton

Newton define que o espaço existe por si só, independente dos objetos que nele estejam. A localização de objetos corresponde à parte do espaço que ocupam, e o movimento de um corpo pode então ser definido com respeito ao espaço sozinho, independente de onde estejam os outros objetos. Newton insistiu que a aceleração é definida de forma absoluta, e é esse

fato que sustenta a estrutura da mecânica newtoniana. Similarmente, o tempo newtoniano é absoluto, levando a uma representação de um espaço-tempo como um *background* fixo, sobre o qual os fenômenos físicos ocorrem.

Como o espaço é fixo, medições são então feitas através do uso de sistemas de referência, ou seja, corpos físicos que atuam como réguas e relógios (observáveis independentes), dinamicamente desacoplados dos objetos que se desejam estudar.

Relatividade Geral

Pelo argumento do buraco e sua solução, vemos que a Relatividade Geral não distingue o sistema de referência dos objetos dinâmicos, isso é, o sistema de referência não pode então ser desacoplado da dinâmica. A localização e o movimento de observáveis passam novamente a ser determinados com relação às outras variáveis da teoria, e assim resgatamos o quadro aristotélico-cartesiano.

A consequência essencial desse fato é o aparecimento do grupo de difeomorfismo. De fato, se deslocamos todos os objetos dinâmicos na variedade de uma vez, não geramos nada além de uma descrição matemática equivalente do mesmo estado físico, porque a localização com respeito à variedade é irrelevante. Em outras palavras, pontos matemáticos individuais na variedade não possuem significado físico intrínseco, e apenas a localização relativa é relevante. Essa é precisamente a afirmação da invariância por difeomorfismos ativos da teoria.

APÊNDICE D

Formalismo de Palatini em Tetradas

Tratemos aqui do formalismo de Palatini utilizando tetradas, relacionando à linguagem de fibrados. A variação se dá com respeito à variável de um campo referencial relevante e (através do qual a métrica é definida) e uma conexão generalizada ω . No entanto, a abordagem não lida diretamente com uma conexão derivada do fibrado referencial LM , mas com uma conexão $SO(3,1)$ associada ao fibrado $SO(3,1)(M)$, obtido da redução do fibrado principal pela instituição da métrica

$$g_{\alpha\beta} \equiv e_{\alpha}^I e_{\beta}^J \eta_{IJ}, \quad (\text{D.0.1})$$

com $\eta_{IJ} \equiv \text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$, identicamente à que usamos em 6.3.18. Assim como TM pode ser considerado um fibrado vetorial associado ao fibrado referencial $LM(M, GL(4, \mathbb{R}))$, com a ajuda do casmpo referencial e , TM também pode ser visto como um fibrado vetorial associado ao fibrado reduzido $SO(3,1)(M)$, e assim pode-se consistentemente falar de uma derivada covariante $\hat{\nabla}$ induzida em TM devido à conexão ω de $SO(3,1)(M)$, em adição à derivada covariante usual ∇ , associada à conexão Γ em LM .

Consideremos, pois, a ação

$$S_{PT} = \frac{1}{\chi} \int d^4x \det(e) e_I^{\alpha} e_J^{\beta} R_{\alpha\beta}^{IJ}(\omega), \quad (\text{D.0.2})$$

onde $R_{\alpha\beta}^{IJ} = \eta^{KJ} R_{\alpha\beta K}^I$ e

$$R_{\alpha\beta K}^I \equiv 2\partial_{[\alpha}\omega_{\beta]}^I{}_K + \omega_{\alpha}^I{}_L \omega_{\beta}^L{}_K - \omega_{\beta}^I{}_J \omega_{\alpha}^J{}_K. \quad (\text{D.0.3})$$

Como $\omega_{\alpha}^I{}_K$ toma valores na álgebra de Lie do grupo $SO(3,1)$, necessariamente temos a relação

$$\omega_{\alpha}^I{}_K = -\omega_{\alpha K}^I, \quad (\text{D.0.4})$$

ou seja, ω é anti-simétrico em seus índices da álgebra de Lie.

O fibrado vetorial natural associado a $SO(3,1)(M)$ é $SO(3,1)(M) \times_{\rho} \mathbb{R}^4$, onde ρ é a

representação quadri-dimensional do grupo de Lorentz. Vetores básicos são então denotados por ξ_I , onde I é o índice da álgebra de Lie. Cada elemento de cada fibra do fibrado vetorial $SO(3,1)(M) \times_{\rho} \mathbb{R}^4$ pode ser identificado com um ponto correspondente na fibra relacionada de TM e assim temos um isomorfismo entre os dois espaços, provido pelo campo referencial e .

Figura D.1–Isomorfismo entre $SO(3,1)$ e TM .

Se ω induz a relação da derivada covariante $\hat{\nabla}b = c$ para $b = b^I \xi_I$ e $c = c^J \xi_J$ em alguma fibra de $SO(3,1)(M) \times_{\rho} \mathbb{R}^4$, achamos que, dado o isomorfismo

$$e(\xi_I) = e_I^\epsilon \partial_\epsilon, \quad (D.0.5)$$

requisitos de consistência fazem com que a conexão $\hat{\Gamma}$ em TM deva ser escrita em termos de ω como

$$\hat{\Gamma}_{\alpha}^{\gamma}{}_{\lambda} = e_{\lambda}^J e_I^{\gamma} \omega_{\alpha}^I{}_J + \partial_{\alpha} (e_{\lambda}^J) e_J^{\gamma}, \quad (D.0.6)$$

ou

$$\omega_{\alpha}^K{}_J = \partial_k (e_J^{\gamma}) e_{\gamma}^K + e_J^K e_J^{\epsilon} \hat{\Gamma}_{\alpha}^{\gamma}{}_{\epsilon}. \quad (D.0.7)$$

Unindo D.0.3 e D.0.6, estabelecemos uma relação entre os tensores de curvatura $R_{\alpha\beta}^I{}_K$

e $\hat{R}_{\alpha\beta}{}^\lambda{}_\epsilon$. Partimos de

$$\hat{R}_{\alpha\beta}{}^\lambda{}_\epsilon = 2\partial_{[\alpha}\hat{\Gamma}_{\beta]}{}^\gamma{}_\epsilon + \hat{\Gamma}_\beta{}^\lambda{}_\epsilon\hat{\Gamma}_\alpha{}^\gamma{}_\lambda - \hat{\Gamma}_\alpha{}^\lambda{}_\epsilon\hat{\Gamma}_\beta{}^\gamma{}_\lambda, \quad (\text{D.0.8})$$

com $\hat{\Gamma}_{ab}^c$ dado por D.0.6. Então,

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\alpha\beta}{}^\lambda{}_\epsilon &= \partial_\alpha [e_\epsilon^J e_I^\gamma \omega_\beta^I{}_J + \partial_\beta (e_b^J) e_J^\gamma] - \partial_\beta [e_\epsilon^J e_I^\gamma \omega_\alpha^I{}_J + \partial_\alpha (e_\epsilon^J) e_J^\gamma] \\ &\quad + [e_\epsilon^J e_I^\lambda \omega_\beta^I{}_J + \partial_\beta (e_\epsilon^J) e_J^\lambda] [e_\lambda^{J'} e_{I'}^\gamma \omega_\alpha^{I'}{}_{J'} + \partial_\alpha (e_\lambda^{J'}) e_{J'}^\gamma] \\ &\quad - [e_\epsilon^J e_I^\lambda \omega_\alpha^I{}_J + \partial_\alpha (e_\epsilon^J) e_J^\lambda] [e_\lambda^{J'} e_{I'}^\gamma \omega_\beta^{I'}{}_{J'} + \partial_\beta (e_\lambda^{J'}) e_{J'}^\gamma] \\ &= e_\epsilon^J e_I^\gamma [\partial_{[\alpha}\omega_{\beta]}^I{}_J + \omega_\beta^L{}_J \omega_\alpha^I{}_L - \omega_\alpha^L{}_J \omega_\beta^I{}_L] \\ &= e_\epsilon^J e_I^\gamma R_{\alpha\beta}{}^I{}_J. \end{aligned} \quad (\text{D.0.9})$$

Aplicando agora a conexão $\hat{\nabla}$ em $g_{\alpha\beta}$, encontramos que

$$\hat{\nabla}_\rho g_{\alpha\beta} = \partial_\rho g_{\alpha\beta} - \hat{\Gamma}_\rho{}^\gamma{}_\alpha g_{\beta\gamma} - \hat{\Gamma}_\rho{}^\epsilon{}_\beta g_{\alpha\epsilon}. \quad (\text{D.0.10})$$

Invocando D.0.6 e D.0.4, descobrimos então que

$$\hat{\nabla}_\rho g_{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{D.0.11})$$

para qualquer escolha de ρ , ou seja, $\hat{\nabla}$ é uma conexão métrica.

Olhemos agora para a ação D.0.2. Efetuando as variações com respeito a ω e e , chegamos a

$$\delta_e S_{PT} = 0 \Rightarrow \left[e_K^\alpha e_I^\gamma e_J^\beta - \frac{1}{2} e_I^\alpha e_K^\gamma e_J^\beta \right] R_{\gamma\beta}{}^{KJ} = 0, \quad (\text{D.0.12a})$$

$$\delta_\omega S_{PT} = 0 \Rightarrow \hat{\nabla}_\alpha [\det(e) e_I^{[\alpha} e_J^{\beta]}] = 0. \quad (\text{D.0.12b})$$

A segunda equação, todavia, pode ser reduzida para

$$\hat{\nabla}_{[\alpha} e_{\beta]}^K = 0, \quad (\text{D.0.13})$$

que é justamente a condição de torção nula para a conexão $\hat{\Gamma}$. Dessa forma, pela unicidade dada pelo teorema fundamental da geometria riemanniana, concluímos que a nossa conexão $\hat{\Gamma}$ é equivalente ao símbolo de Christoffel Γ . Temos, por fim, que a equação D.0.12a nos leva à equação de Einstein no vácuo,

$$\delta_e S_{PT} = e_I^\gamma R_\gamma^\alpha - \frac{1}{2} e_I^\alpha R = 0 \Rightarrow R_\gamma^\alpha - \frac{1}{2} e_\gamma^I e_I^\alpha R = G_\gamma^\alpha = 0. \quad (\text{D.0.14})$$

APÊNDICE E

Modificação de Holst na ação de Einstein-Palatini

Alternativo ao que fizemos ao longo do trabalho, partindo da ação de Einstein-Hilbert, Holst³⁰ apresentou uma versão modificada da ação de Einstein-Palatini em tetradas D.0.2, que resulta diretamente nas equações do caso geral (sem fixação do parâmetro de Immirzi),

$$S_H = S_{PT} - \frac{1}{\chi\beta} \int d^4x \left(\det(e) e_I^\alpha e_J^\beta \right) * R_{\alpha\beta}{}^{IJ} \equiv \frac{1}{\chi} \int d^4x \det(e) e_I^\alpha e_J^\beta \left[R_{\alpha\beta}{}^{IJ} - \frac{1}{2\beta} \epsilon^{IJ}{}_{KL} R_{\alpha\beta}{}^{KL} \right] \quad (\text{E.0.1})$$

onde $R_{\alpha\beta}{}^{IJ}$ é a curvatura relativa à conexão quadri-dimensional $\omega_\alpha{}^{IJ}$ e β o parâmetro de Immirzi. Usando que $\delta R_{\alpha\beta}{}^{IJ} = 2D_{[\alpha}\delta\omega_{\beta]}{}^{IJ}$, e aplicando a variação com respeito a $\omega_\beta{}^{IJ}$, encontramos que

$$\delta S = \frac{1}{\chi} \int d^4x \det(e) e_I^\alpha e_J^\beta \left[\delta R_{\alpha\beta}{}^{IJ} - \frac{1}{2\beta} \epsilon^{IJ}{}_{KL} \delta R_{\alpha\beta}{}^{KL} \right] = \int d^4x \delta B_\beta{}^{IJ} D_\alpha \left(\det(e) e_I^\alpha e_J^\beta \right), \quad (\text{E.0.2})$$

onde em * utilizamos uma integração por partes, e

$$\delta B_\beta{}^{IJ} \equiv \delta\omega_\beta{}^{IJ} - \frac{1}{\beta} * \delta\omega_\beta{}^{IJ}. \quad (\text{E.0.3})$$

Para β qualquer, pode-se encontrar $\delta\omega = \delta\omega(\delta B)$, e assim, tomar uma variação arbitrária δB em E.0.2. No entanto, se tomamos $\beta = \pm i$, $\delta B_\beta{}^{IJ}$ passa a ser a parte auto-dual (anti-auto-dual) de $\delta\omega_\beta{}^{IJ}$, e retomamos então a ação 6.5.4, com a curvatura auto-dual 6.5.5 (que reproduzimos novamente aqui),

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}{}^{IJ} = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta}{}^{IJ} - \frac{i}{4} \epsilon_{KL}{}^{IJ} R_{\alpha\beta}{}^{KL}. \quad (\text{E.0.4})$$

Ou seja, $\delta B_\beta{}^{IJ} \equiv \delta A_\beta{}^{IJ}$, com $A_\beta{}^{IJ}$ a conexão quadri-dimensional auto-dual de Ashtekar.

Da variação, encontramos que

$$D_\alpha \left(\det(e) e_I^\alpha e_J^\beta \right) = 0, \quad (\text{E.0.5})$$

que mostra que ω é a conexão de spin compatível com a tetrada,

$$\omega_{\alpha IJ} = e_{\beta I} \nabla_\alpha e_J^\beta. \quad (\text{E.0.6})$$

Um ponto importante a ser analisado é por que a adição do termo na ação de Palatini não altera a teoria obtida classicamente. Se olharmos para o termo adicional, abrindo a expressão de $\det(e)$ e usando E.0.6, vemos que,

$$\det(e) e_I^\alpha e_J^\beta \epsilon^{IJKL} R_{\alpha\beta KL} = e_\gamma^K e_\delta^L \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta KL} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0, \quad (\text{E.0.7})$$

devido à identidade de Bianchi. Essa adição, de certa forma, é análoga à adição de termos topológicos nas ações das teorias de Yang-Mills, que classicamente não alteram a teoria, mas possuem importância quando tratada a quantização. Ressaltamos, no entanto, que aqui a natureza do termo é diferente, pois o fato de não influenciar classicamente vem de uma razão puramente geométrica.

A partir desse ponto, Holst efetua a decomposição 3+1 e mostra que os resultados de Barbero são obtidos para a escolha de $\beta = 1$. Para esses cálculos, indicamos o trabalho original³⁰.