UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Rafael Furlan Rossetti

Simulação do Zitterbewegung não usual e proteção de estados em armadilhas iônicas

São Carlos

2014

Rafael Furlan Rossetti

Simulação do zitterbewegung não usual e proteção de estados em armadilhas ionicas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica
Orientador: Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa

Versão Original

São Carlos

2014

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Rossetti, Rafael Furlan
Simulação do Zitterbewegung não usual e proteção de estados em armadilhas iônicas / Rafael Furlan Rossetti; orientadora Miled Hassan Youssef Moussa -- São Carlos, 2014.
94 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2014.

1. Simulação em armadilhas iônicas. 2. Zitterbewegung. 3. Proteção de estados quânticos. I. Moussa, Miled Hassan Youssef , orient. II. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Rafael Furlan Rossetti

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.
Área de Concentração: Física Básica.

Aprovado(a) em: 20/02/2014

Comissão Julgadora

Prof(a). Dr(a). Miled Hassan Youssef Moussa

Instituição: IFSC/USP

Prof(a). Dr(a). Ruynet Lima de Matos Filho

Instituição: UFRJ/Rio de Janeiro

Prof(a). Dr(a). Luiz Agostinho Ferreira

Instituição: IFSC/USP

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a minha mãe Solange e minha vó Orlanda, por todo apoio e incentivo durante toda a minha vida, principalmente no período da graduação de física de 2006 a 2011, no qual passei momentos difíceis.

Agradeço também a minha namorada Marília, que me apoia em todos as minhas decisões e está sempre ao meu lado em momentos difíceis, por exemplo, durante a escrita desta tese sempre teve paciência e tolerância com o meu mau humor. Também agradeço a minha sogra Silva que me ajudou no processo de escrita desta tese.

Sou grato também ao meu orientador, Miled H.Y Moussa, por quem tenho grande estima, tanto profissional, quanto pessoal. Espero que nossa amizade, nascida na interação orientador-aluno, mas que no entanto a transcendeu, seja cultivada mesmo após o término deste trabalho.

Com relação às amizades, não posso de deixar de agradecer ao Victor, ao Ibaté, ao Pedrão, ao Fininho e ao Gentil que sempre me ajudaram no âmbito acadêmico com relação aos exercícios, as provas e os artigos, ou seja, a máfia dos exercícios resolvidos.

Não posso esquecer de agradecer ao meu Tio Américo, que juntamente com minha avó foram as pessoas que me incentivaram a cursar uma faculdade.

Por fim, agradeço toda a minha família e amigos por todos os momentos de diversão.

Este trabalho foi financiado pela
CNPq

"Houston, we have a problem"

Jim Lovell (Apollo 13)

Resumo

ROSSETTI, R. F. **Simulação do não usual zitterbewegung e proteção de estados quânticos em armadilhas iônicas**. 2014. 94 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

Neste dissertação apresentamos um protocolo para simular, no contexto das armadilhas iônicas, o Zitterbewegung não usual, que é o análogo, na física do semicondutores, ao movimento de tremulação de uma partícula relativística. O Zitterbewegung não usual permite trajetórias cicloidais na ausência dos campos magnéticos. Além do Zitterbewegung, mostramos como gerar figuras de Lissajou para o movimento vibracional bidimensional do íon armadilhado. Ademais, o protocolo proposto nesta tese, permite gerar interações spin-órbita dos tipos Rashba e Dresselhaus, abrindo a possibilidade de simular, no ambito dos íons armadilhados, os acoplamentos spin-órbita dos tipos Rashba e Dresselhaus, Zitterbewegung não usual e as curvas de Lissajou. Além disso, nesta tese apresentamos protocolo para produzir engenharia de interações confinadas aos subespaços do espaço de Fock. Mostramos como engenheirar os hamitonianos dos tipos Jaynes-Cumming e anti-Jaynes-Cumming confinadados aos subespaços de Fock delimitados superiormente ou inferiormente e também as interações Jaynes-Cumming e anti-Jaynes-Cumming confinados a uma fatia do espaço Fock. Esses hamitonias delimitados superiormente (inferiormente) atuam sobre os subespaço de Fock de $|0\rangle$ a $|M\rangle$ ($|N\rangle\, a\infty$), enquanto aqueles confinados a uma fatia do espaço de Fock atuam sobre os subespaço de Fock de $|M\rangle$ a $|N\rangle$, com $M < N$. Enquanto que, as interações dos tipo Jaynes-Cumming ou anti-Jaynes-Cumming demilitadas superiormente conduzem qualquer estado inicial para o estado de Fock de quase-equilíbrio $|N\rangle$ e as interações confinadas a uma fatia do espaço de Fock conduz qualquer estado inicial a superporsição de estados de Fock de equilíbrio, que estão confinados no subespaço $\{|N\rangle, |N+1\rangle\}$.

Palavras-chave: Simulação em armadilhas iônicas. Zitterbewegung. Proteção de estados quânticos.

Abstract

ROSSETTI, R. F. **Simulation of unusual zitterbewegung and produce steady Fock and superpositions of Fock states** . 2014. 94 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

In this dissertation we present a protocol to simulate, with a single two-leve trapped ion, the unusual zitterbewegung: the semiconductor analog of the relativistic trembling motion of eletron, allowing cycloidal trajectories in the absence of magnetic fields. Beyon zitterbewegung, we show how to generate Lissajou curves from the vibrational motion of an ion in two dimensional trap. Morever our protocol enables us to engineerthe Rashba- and the Dresselhaus-type spin-orbit interatiction, opening the possibility to simulate with a trapped ion, spin-orbit effects other than the unusual zitterbewegung and Lissajou curves. Moreover, in this work we present a protocol to engineer interactions confined to subspaces of the Fock space: we show how to engineer upper-, lower-bounded and sliced Jaynes-Cummings (JC) and anti-Jaynes-Cummings (AJC) Hamiltonians. The upper-bounded (lower-bounded) interaction acting upon Fock subspaces ranging from $|0\rangle$ to $|M\rangle$ ($|N\rangle$ to ∞), and the sliced one confined to Fock subspace ranging from $|M\rangle$ to $|N\rangle$, whatever $M < N$. Whereas the upper-bounded JC or AJC interactions is shown to drive any initial state to an equilibrium Fock states $|N\rangle$, the sliced one is shown to produce equilibrium superpositions of Fock states confined to the sliced subspaces $\{|N\rangle, |N+1\rangle\}$.

Keywords: Quantum simulation in trapped ion. Zitterbewegung. Quantum state protection.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Ilustração dos níveis de energia de uma partícula relativística livre, na qual, a região azul reproduz os níveis continuos de energia positiva $mc^2 \leq E \leq \infty$ e a região vermelha da figura representa os níveis continuos de energia negativa $-\infty \leq E \leq -mc^2$, enquanto a a região banca descreve os níveis proibidos de energia. 37

Figura 2.2 - Valor esperado, $\langle \mathbf{x}(t) \rangle$, para uma partícula relativística com diferentes massas. A curva linear vermelha (quadrados) representa um partícula sem massa ($\Omega = 0\}$, movendo-se na velocidade da luz, que dada por $c = 2\eta\tilde{\Omega}/Delta = 0.052\Delta\mu s^{-1}$ para todas as curvas. As outra curvas representão o acréscimo de massa. Os comprimentos de compton, das partículas massivas, são $\lambda_c = 2\eta\tilde{\Omega}\Delta/\Omega = 5.4\Delta$(triângulo invertido), 2.5Δ(Losângulo), 1.2Δ(círculo) e 0.6Δ (triangulo), repectivamente. As cuvas sólidas representam os dados computacionais, enquanto os pontos são os dados experimentais. O Zitterbewegung é plotado para valores relativísticos, $2\eta\tilde{\Omega} \gg \Omega$, para valores não relativísticos, $2\eta\tilde{\Omega} \ll \Omega$.O gráfico inserido, têm os plotes das amplitude , R_{zb}(quadrados), e frequência, $\omega_{zb}(circular)$, do Zitterbewegung, versus o parametro $\omega/\eta\tilde{\omega}$ que é proporcional a massa. 51

Figura 2.3 - Descrição de uma feixe de átomos passando pela cavidade, na qual, o feixe vermelho representa o feixe átomico, o feixe azul descreve o campo quântico que produz os modos normais na cavidade, e a esfera vermelha representa o instante que o átomos está interagindo com a cavidade, que possui um comprimento L. . 59

Figura 3.1 -Descrição dos movimentos realizado pelo íon armadilhado no subespaço vibracional, com ajuste das condições iniciais para $p_x = \sqrt{10}$ e $p_y = 1$, sendo que, para produzir o movimento trocoidal (a) utilizamos $\epsilon = 3\bar{p_x}^2/2\bar{p_y}^2$, já em relação a trajetória cicloidal (b) utilizamos $\bar{p_x}^2/\bar{p_y}^2$. 70

Figura 3.2 - Descrição do movimento elíptico produzido pelo íon armadilhado no subespaço vibracional, com ajuste das condições iniciais para $p_x = \sqrt{10}$, $p_y = 1$ e $\epsilon = \bar{p_x}^2\bar{p_y}^2$. 71

Figura 3.3 – Descrição do movimento vibracional do íon armadilhado que reproduz a figura de Lissajous. Para isso, foi utilizado aproximação dos feixes lasers $\gamma_y^2 \gg \gamma_x^2$, além de preparar o subespaço eletrônico do íon armadilhado em um autoestado de σ_z. Com o ajuste da frequência de vibração para $\omega = 1.96$. 73

Figura 4.1 – Considerando valores típicos $\Gamma \sim 10^3\gamma$ e $\tau \sim 1/\Omega \sim 10^{-6}s$, para obter $\chi\tau \sim 1$. As linhas pontilhadas preta e cinza indicam, respectivamente, a evolução da fidelidadde $\mathcal{F}(t) = \mathrm{Tr}\,|M\rangle\langle M|\,\rho(t)$ versus $\gamma\tau$, para os estados de Fock $M = 5$ e $M = 10$, iniciando de um estado térmico $\overline{n} \simeq 0.01$. Começando do mesmo estado térmico e considerando $\Omega \sim 10^5 Hz$, $\chi\tau \sim 0.1$ e $\widetilde{\Gamma} \simeq 10^3\gamma$, as linhas sólidas preta e cinza apontam a evolução temporal da fidelidade$\mathcal{F}(t) = \mathrm{Tr}\,|\psi\rangle\langle\psi|\,\rho(t)$, na qual $|\psi\rangle$ representa a sobreposição de estados de Fock da forma $|\psi\rangle = |M\rangle + |M+1\rangle$, versus $\gamma\tau$, para os casos $M = 4$ e $M = 9$. O gráfico inserido mostra a evolução da fidelidade,num intervalo de tempo inicial, dos estados de Fock $|M\rangle$ e $|\psi\rangle$. . 83

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **19**

2 Derivação e simulação da equação de Dirac e Reservatórios Térmicos **25**

2.1 Derivação da equação Dirac 25

2.1.1 Solução de onda plana para a equação de Dirac 30

2.1.2 Zitterbewegung. 37

2.2 Íons armadilhados 39

2.3 Simulação da equação de Dirac 44

2.4 Reservatórios térmicos 52

2.4.1 Operador densidade 52

2.4.2 Equação mestra para o oscilador harmônico 54

2.4.3 Engenharia de reservatório em eletrodinâmica de cavidade 59

3 Simulação do Zitterbewegung não usual em armadilhas iônicas **63**

3.1 Simulações dos acoplamentos spin-órbita. 63

3.1.1 Introdução 63

3.1.2 Acoplamento spin-órbita do tipo Rashba 65

3.1.3 Acoplamento spin-órbita do tipo Dresselhaus 67

3.1.4 Acoplamentos simultâneos dos tipos Rashba e Dresselhaus 67

4 Particionando o espaço de Fock para a produção e proteção de estados **75**

4.1 Introdução 75

4.1.1 Derivações dos hamiltonianos dos tipos Jaynes-Cumming e anti-Jaynes-Cumming *upper* e *lower-bounded* 77
4.2 Estado de Fock de equilíbrio 80
4.3 Superposição de estado em equilíbrio 82

5 OBSERVAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS 85

REFERÊNCIAS 88

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Desde o início do século XX a mecânica quântica tem se mostrado, ao longo das décadas, como uma teoria extremamente bem sucedida, posicionando-se num lugar de destaque na história da física. Essa fabulosa teoria vem fornecendo explicações extremamente satisfatórias para fenômenos que vão desde a supercondutividade macroscópica à teoria microscópica de partículas elementares. No atual momento, todos os campos que se encontram sujeitos a uma minuciosa investigação científica, tais como a ótica e a informação quânticas, a spintrônica, etc., fundamentam-se nesta área do conhecimento. Contudo, não há de uma forma geral, um acordo sobre seus fundamentos conceituais e sua interpretação. A teoria promove informações exatas sobre o resultado de uma medida de um objeto físico. Entretanto, muitos acreditam que a teoria quântica não fornece uma resposta satisfatória quanto à natureza da realidade que atribuímos aos objetos físicos.

O obstáculo conceitual eclode através do fato de que a função de onda é usualmente dada por uma superposição coerente de vários estados distintos do sistema. Se designarmos a coleção de estados que revela os resultados possíveis de um experimento por $\{|\psi_j\rangle\}$, então o estado (puro) mais geral de um sistema (objeto físico) será dado por $|\psi\rangle = \sum_i c_j |\psi_j\rangle$, com $c_j = \langle\psi_j|\psi\rangle$. A probabilidade de obtermos o estado ψ_j em uma dada medida é $p_j = |c_j|^2$. Neste processo de medida, o então chamado "colapso da função de onda" (ou postulado de projeção) toma lugar e um único estado definido $|\psi_j\rangle$ do objeto físico é escolhido. O problema então surge quanto à interpretação do mecanismo pelo qual esse estado definido é escolhido dentre todos os resultados possíveis. Afinal de contas, a evolução da função de onda governada pela equação de Schrödinger é unitária e reversível, e estas unitariedade e reversibilidade deixam de ser contempladas pelo processo de medida.

Outro produto marcante do formalismo quântico, além da superposição de estados, é que ele possibilita uma descrição não-local de eventos. Esse caráter não-local da mecânica quântica tem sido objeto de diversos debates ao longo dos anos. No ano de 1935, Einstein-Poldolsky-Rosen (EPR)[1] argumentam, com embasamento em um "experimento idealizado", que a mecânica quântica seria um teoria incompleta. Contudo, esse "experimento idealizado" de EPR possibilitaria, na hipótese de que a mecânica quântica fosse um teoria completa, a presença de fenômenos não-locais. Se considerarmos um par correlacionado de EPR preparado inicialmente num estado do tipo singleto, por exemplo, a não-localidade revela-se através da medida, num dado estado, sobre uma das partículas que constitui o par. Esta medida projeta instantaneamente a outra partícula num estado ortogonal àquele da primeira partícula. Entretanto, na escassez de uma situação experimental palpável para provar a localidade na mecânica quântica, esta discussão sobre os fundamentos da teoria permaneceu, por muitos anos, no plano filosófico.

O cenário, todavia, mudou definitivamente quando, em 1964 J. S. Bell formulou o que se conhece hoje como " desigualdades de Bell",[2] que seriam sempre verdadeiras para qualquer teoria que satisfizesse noções "intuitivamente razoáveis" de realidade e de localidade. Entre o grande número de resultados derivados ao longo dos anos pela Mecânica Quântica, um dos mais fascinantes é que esta teoria viola as desigualdades de Bell, o que tem se comprovado ao longo das últimas décadas de experimentos, impulsionando o entendimento da natureza quântica.

O estímulo fornecido pela desigualdades de Bell acarretou nas décadas seguintes o desenvolvimento de diversas técnicas experimentais para o controle minucioso de sistemas quânticos individuais. Por exemplo, métodos para o aprisionamento de um único íon atômico[3] têm permitido a realização de testes da natureza fundamental da mecânica quântica — como por exemplo a não-localidade[4] e a decoerência de estados[5] — além de possibilitar uma plataforma singular para a implementação de operações quânticas lógicas.[6]

Principalmente ao longo das duas últimas décadas, têm sido realizados diversos estudos teóricos e implementações experimentais envolvendo processos de interação radiação-matéria em íons aprisionados e eletrôdinamica quântica de cavidades (EQC). Podemos citar como exemplo a preparação de superposição de estados do tipo "gato de Schrödinger", da forma $|\psi\rangle \propto \left(\left|\alpha e^{i\phi}\right\rangle + \left|\alpha e^{-i\phi}\right\rangle\right)$, com $|\alpha|^2 \approx 10$, em cavidades de alto fator de qualidade (alto-Q)[7] e em íons aprisionados[8] , o que tem permitido a investigação da

coerência quântica mesoscópica. Ademais, a preparação de uma variedade de estados não-clássicos foi reportada no âmbito da EQC[9–11] e de íons aprisionados.[12,13] A geração e a detecção de estados de Fock do campo de radiação foram demonstrados experimentalmente[14] e as oscilações de Rabi de átomos em estados circulares de Rydberg foram medidas,[15] revelando a natureza quântica do campo de radiação.[16]

Concomitantemente aos desenvolvimentos em EQC, o controle preciso das técnicas de manipulação de estados eletrônicos e vibracionais de íons aprisionados via campos clássicos tem possibilitado a investigação de fenômenos quânticos fundamentais bem como, por exemplo, a realização de várias propostas para computação e comunicação quânticas. A operação de uma porta lógica quântica de dois bits de informação, "Controlled-Not"(C-Not), foi demonstrada via mapeamento de dois bits quânticos de informação nos graus de liberdade interno e externo de um íon aprisionado.[3] Por outro lado, a superposição de estados vibracionais coerentes do tipo "gato de Schrodinger",[8] bem como outros estados não clássicos do movimento de um único íon[5] foram realizados experimentalmente. A reconstrução da matriz densidade e da função de Wigner de vários estados quânticos do movimento de um íon aprisionado em um potencial harmônico também foi reportada.[17]

Além da interação átomo-campo em EQC e em íons aprisionados, são várias as propostas para a preparação de estados de referência de campos de radiação propagantes, necessários para medir as propriedades de um campo sinal[18,19] baseadas em dispositivos óticos lineares[20] e não lineares.[21] As técnicas desenvolvidas nas últimas décadas para o processo de conversão paramétrica ascendente e descendentes de frequências têm possibilitado um grande avanço no domínio da manipulação de campos propagantes.

Ainda no ambito da computação quântica, é de grande interesse investigar a interação do sistema quântico com o reservatório térmico (meio ambiente), que pode levar a uma emaranhamento quântico entre o sistema e o ambiente, que implica na perda de informação do sistema quântico. Um conjunto de estado é menos sensitivos ao emaranhamento (*pointer states*), pois esse depende da forma concreta da interação entre o sistema e o ambiente.[22] Essas interações que rapidamente emaranham qualquer superposição de *pointer states* com estados não observáveis do ambiente, de maneira que a matriz densidade do sistema é indistinguível de uma mistura estatística. Por outro lado, os *pointer states* são mais estavéis, pois minimizam a taxa de decaimento do estado puro. O processo de perda de coerência da superposição de *pointer state*, que é a transformação do estado puro numa

mistura estatítica, é o coração da teoria quântica de medida,[23] além de ser uma regra essencial para o limite clássico da mecânica quântica.[24]

A luta contra a decoerência vem se tornando desde o início do século XXI até os dias atuais um grande desafio da física, motivado pelos progressos na teoria da informação quântica, que demanda a preservação da coerência dos estados.[25,26] Também é de interesse a grande precisão da medida da frequência em íon armadilhado.[27] As varias estratégias derivas incluem esquema de correção de erros quânticos,[28] *feedback implementations*,[29,30] a produção de quibts em subespaços simétricos desacoplados do meio ambiente[31] e a técnica de desacoplamento dinâmico.[32]

No contexto da cadeia de íons armadilhados, o mais importante efeito de decoerência está associado ao grau de liberdade vibracional, que é relacionado aos modos normais de vibração dos íons armadilhados.[33,34] Para finalizar, no cenário dos íons armadilhados, existe a técnica de engenharia de reservatório,[35] que simula o reservatório térmico (ambiente) e predomina sobre todos os outros processos de dissipação existentes. Tal técnica potege contra decoerência todos os autoestados do reservatório engenheirado. No sistema de íons armadilhados já se propos uma técnica para proteger vários estados não clássicos[37] contra decoerência .

Simultaneamente ao desenvolvimento da teoria da mecânica quântica, surgiu um grande interesse em unificar as teorias da mecânica quântica com a relatividade restrita, fato que resultou em um novo campo da física que é a mecânica quântica relativística. A primeira teoria relacionada à mecânica quântica relativística foi poduzida pelos físicos Oskar Klein e Walter Gordon em 1927, que propuseram uma versão relativística para a equação de Schrodinger. Mas essa teoria logo foi abandonada, pois possuía uma problema ligado a valores negativos para densidade de probabilidade da posição do elétron relativístico (algo que não tem interpretação física). Esses, estão relacionados à derivada de segunda ordem na variável temporal da partícula relativística. Portanto, em um primeiro momento, a equação conhecida como equação de Klein-Gordon foi abandonada.

Entre os anos de 1927 e 1934 a única equação reconhecida como aquela que descreve o comportamento de um elétron relativístico com spin 1/2, foi proposta pelo físico Paul Dirac em 1928, a qual através de uma ideia baseada nas equações covariantes de Maxwell, gerou um formalismo matemático com derivadas de primeira ordem nas variáveis relacionadas à posição e ao tempo da partícula relativística de spin 1/2. Esse fato implicou numa função

de onda com quatro componentes para descrever o comportamento do elétron relativístico de spin 1/2. Das quatro componentes da função de onda do elétron relativístico de spin 1/2, duas estão relacionadas a sua solução da energia positiva, enquanto as outras duas referencem-se a negativa . Com isso, não existem mais valores negativos para densidade de probabilidade da partícula relativística, logo o problema relacionado à equação de Klein-Gordon foi solucionado. Além disso, a equação de Dirac produz de forma natural o operador quântico relacionado ao grau de liberdade de spin 1/2 do elétron relativístico, algo que não está presente de forma natural na equação de Schrodinger. Mas em 1934 os físicos W. Pauli e V. F. Weisskopf, propuseram uma mudança na interpretação das componentes da equação de Klein-Gordon, a qual ao invés de ser interpretada como densidade de carga passou a ser interpretada como densidade de probabilidade de corrente. Isso solucionou o problema da equação de Klein-Gordon com relação aos valores negativos de densidade de probabilidade, mas, mesmo assim, a equação de Dirac possuía um trunfo quando comparada à equação de Klein-Gordon: a presença natural do operador quântico relacionado ao spin 1/2 da partícula relativística. Portanto, a equação de Dirac é considerada como a principal equação que descreve a partícula relativística de spin 1/2 atualmente.

Além dos triunfos da equação de Dirac, já mencionados, o seu formalismo também descreve precisamente o espectro do átomo de hidrogênio, o que o tornou a principal teoria da mecânica quântica de campos, na qual se permiti a criação e a aniquilação de partículas . Por outro lado, a interpretação da solução de onda da equação de Dirac para uma partícula relativística de spin 1/2 prevê efeitos inesperados: Zitterbewegung[36] e paradoxo de Klein.[36] Mas, tanto o Zitterbewegung quanto o paradoxo de Klein estão fora do atual alcance experimental. Portanto, nenhuma dessas previsões teóricas do formalismo de Dirac foram comprovadas. Além das conclusões associadas à teoria de Dirac, existem muitas outras consequências da física teórica que estão fora do atual alcance experimental. Logo, devido aos efeitos teóricos que ainda não possuem confirmação por meio de experimentos, recentemente surgiu um grande entusiasmo na comunidade científica em simular efeitos físicos que estão fora do alcance empirico, em ambientes que possilbilitem um grande controle dos parâmetros experimentais. As recentes realizações foram as simulações do efeito Unruh em armadilha iônica,[38] Zitterbewegung para fermions massivos na física do estado sólido,[39] propriedades do buraco negro no condensado de Bose-Einstein[40] e a simulação da equação de Dirac e seus efeitos relativísticos: Zitterbewegung[41] e paradoxo

de Klein.[42] Ademais, a baixa energia de excitação de um elétron não relativístico, em duas dimensões, no contexto da física do grafeno, conhecida como equação de Dirac-Weyl, simula a física de uma partícula relativística não massiva.[43,44] Por outro lado, o diálogo estimulante entre a informação quântica e a relatividade especial está levantando uma importante questão no que diz respeito ao bispinor de Dirac sobre a transformação de Lorentz.[45]

É importante ressaltar que efeitos anômalos, como Zitterbewegung, não estão presente apenas em sistemas relativísticos, como a equação de Dirac; um efeito análogo ao Zitterbewegung, conhecido como Zitterbewegung não usual ocorre na física do estado sólido,[46] na qual o elétron está sobe ação de um hamiltoniano não relativístico.

Nesta tese, apresentados protocolos para simular, no contexto de armadilhas iônicas, os acoplamentos dos tipos Rashba e Dresseulhauss da física do estado sólido. Consequêntemente, conseguimos produzir varias trajetórias (cicloidais, eliptica e figuras de Lissajou) no grau de liberdade vibracional do íon armadilhado, as quais são realizadas, na ausência de campos magnéticos, utilizando apenas a interação entre os níveis internos e externos do íon. Outro resultado desta tese é a geração de interações, no ambito de íons armadilhados, demitadas superiormente ou inferiormente no espaço de Fock. Além disso, produzimos hamiltonianos dos tipos Jaynes-Cumming e anti-Jaynes-Cumming confinados ao subespaço fatiado do espaço de Fock. Por fim, utilizamos as interações, delimitadas superiormente (inferiormente) e as confinadas numa fatia do estado de Fock, para realizar a engenheira de reservatório com o objetivo de conduzir qualquer estado inicial para os estados quase-estacionário de Fock e superposição de estados de Fock de equilíbrio.

CAPÍTULO 2

DERIVAÇÃO E SIMULAÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIRAC E RESERVATÓRIOS TÉRMICOS

2.1 Derivação da equação Dirac

Nesta seção o nosso objetivo é a descrição de uma equação de onda relativística para uma partícula de spin 1/2. Para isso, utilizaremos o formalismo de Dirac, que incorpora o spin do elétron na teoria da mecânica quântica relativística de forma natural. Partindo do operador de energia cinética da partícula livre relativística, temos:

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = (mc)^2 \,, \tag{2.1}$$

utilizando a propriedade da matriz de Pauli:

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \left(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \mathrm{I} + i \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{\sigma}, \tag{2.2}$$

podemos reescrever a Eq.(2.1), na forma:

$$\left(\frac{E^{op}}{c} - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right)\left(\frac{E^{op}}{c} + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right) = (mc)^2\,, \tag{2.3}$$

na qual, aplicando o princípio de primeira quantização para $E^{op} = i\hbar\partial/\partial t = i\hbar c\partial/\partial x_0$, com $\partial x_0 = c\partial t$ e $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$. Logo, podemos escrever uma equação de segunda ordem em relação as derivadas temporais e espaciais da elétron relativística livre

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x_0} + i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x_0} - i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\phi = (mc)^2\,\phi, \tag{2.4}$$

onde ϕ é uma função de onda de duas componentes. Estamos interessados em obter uma equação de onda de primeira ordem na derivada temporal, devido à falha da equação de Klein-Gordon, que possibilita a presença de valores negativos para a densidade de probabilidade da posição da partícula relativística, algo que não possui significado físico. Essa densidade negativa é devido à presença, na equação de Klein-Gordon, da derivada de segunda ordem na variável temporal.[36] Assim, fica evidente a necessidade de uma derivada de primeira ordem na variável temporal. Além disso, é necessário que a nova equação relativística, de primeira ordem em relação a componente temporal da partícula relativística, seja covariante. Portanto, é obrigatório que essa nova equação possua também uma derivada de primeira ordem em relação a componente da posição do elétron relativístico $\vec{\nabla}$. Observamos algo análogo a descriçao anterior, no contexto dos campos clássicos de Maxwell que são descrito por campos magnético e elétrico, na forma covariante:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{j_\mu}{c}, \tag{2.5}$$

na qual $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético, que é uma matriz de ordem quatro constituida pelos campos elétrico e magnético, e j_μ é um vetor composto pelas densidade de carga e corrente elétricas. Já a equação covariante para os potenciais vetor e escalar é obtida a partir da relação entre os tensores A_μ e $F_{\mu\nu}$ que é representada pela equação:

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = F_{\mu\nu}, \tag{2.6}$$

na qual A_μ é o tensor covariante de quatro componentes que contém os potenciais vetor e escalar.

Considerando uma transformação de "gauge"conveniente:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \tag{2.7}$$

obtemos:

$$\Box A_\mu = -\frac{j_\mu}{c}, \tag{2.8}$$

onde, $\Box = \nabla^2 - \partial^2/\partial x_0^2$ .Portanto, a Eq.(2.8) é a equação covariante para os potenciais vetor e escalar. Logo, notamos que o número de componentes que descrevem os campos de Maxwell é maior quando trabalhamos com a derivada de primeira ordem e essa é uma consequência inevitável. Nota-se tal fato quando observamos as Eqs.(2.5) e (2.8).

Podemos, então, voltar à discussão sobre uma equação covariante que possua derivadas de primeira ordem em relação às variáveis do tempo e da posição do elétron relativístico de spin 1/2. Logo, inspirado pelas equações covariantes de Maxwell, podemos substituir a Eq.(2.4) por duas equação:

$$\phi^R = \frac{1}{mc}\left(i\hbar\mathbb{I}_{2\times2}\frac{\partial}{\partial x_0} - i\hbar\mathbb{I}_{2\times2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\phi^L, \tag{2.9}$$

onde $\mathbb{I}_{2\times2}$ é a matriz identidade e ϕ^R e ϕ^L são matrizes coluna de duas componentes, nas quais os subescritos R e L decorrem do fato de que quando $m \to 0$, ϕ^R e ϕ^L descrevem, respectivamente, estados *right-handed* (spin paralelo à direção do momento) e *left-handed* (spin antiparalelo a direção do momento) de partículas de spin 1/2[36] . Portanto, como já era esperado, que ao mudar uma equação de segunda ordem para um equação de primeira ordem em relação as derivadas temporais e espaciais da partícula relativística, o número

de componentes da função de onda associada a nova equação relatrivística aumentetou. A Eq.(2.3) de segunda ordem é agora equivalente a duas equações de primeira ordem:

$$\left(i\hbar\mathbb{I}_{2\times2}\frac{\partial}{\partial x_0} - i\hbar\mathbb{I}_{2\times2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\phi^L = -mc\phi^R, \tag{2.10a}$$

$$\left(i\hbar\mathbb{I}_{-2\times2}\frac{\partial}{\partial x_0} - i\hbar\mathbb{I}_{2\times2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\phi^R = -mc\phi^L. \tag{2.10b}$$

Nota-se que, a não ser que a partícula tenha massa de repouso nula ($mc = 0$), as Eqs. (2.10a) e (2.10b) de primeira ordem acoplam ϕ^R e ϕ^L exatamente como fazem as equações de Maxwell, de primeira ordem, com os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Somando e subtraindo as Eqs.(2.10a) e (2.10b) obtemos, respectivamente:

$$-i\hbar\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\phi^R - \phi^L\right) - i\hbar\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\phi^L + \phi^R\right) = -mc\left(\phi^L + \phi^R\right),, \tag{2.11a}$$

$$i\hbar\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\phi^R + \phi^L\right) + i\hbar\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\phi^R - \phi^L\right) = -mc\left(\phi^R - \phi^L\right). \tag{2.11b}$$

Defininfo a soma e a diferença de ϕ^R e ϕ^L por $\psi_A = \phi^R + \phi^L$ e $\psi_B = \phi^R - \phi^L$, respectivamente, obtemos:

$$-i\hbar\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\psi_B - i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)\psi_A = -mc\psi_A, \tag{2.12a}$$

$$i\hbar\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\psi_A + i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)\psi_B = -mc\psi_A, \tag{2.12b}$$

podendo reescrever as Eqs. (2.12a) e (2.12b) na notação matricial

$$\begin{bmatrix} -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_0} & -i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} \\ i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} & i\hbar\frac{\partial}{\partial x_0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_A \\ \psi_B\end{bmatrix} = -mc\begin{bmatrix}\psi_A \\ \psi_B\end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Agora, defininido $\psi = \begin{bmatrix}\psi_A \\ \psi_B\end{bmatrix}$ conseguimos escrever a Eq.(2.13) de forma mais concisa:

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0, \tag{2.14}$$

onde γ_μ, com $\mu = 1, 2, 3, 4$, são as matrizes de ordem quatro, definidas por:

$$\gamma_\mu = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{bmatrix}, , \tag{2.15a}$$

$$\gamma_4 = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{bmatrix}, \tag{2.15b}$$

com $k = 1, 2, 3$. As matrizes de ordem quatro da Eq.(2.15a) são chamadas de matrizes γ ou matrizes de Dirac, e satisfazem, como pode ser verificado, as seguintes relações de comutação:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}. \tag{2.16}$$

Além disso, γ_μ é uma matriz hermitiana, $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$, e com traço nulo $\mathrm{Tr}[\gamma_\mu] = 0$. Para finalizar, multiplicando a Eq. (2.14) por γ_4, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\gamma_4 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + \gamma_4^2 \frac{\partial}{\partial (ix_0)}\right)\psi + \gamma_4 \frac{mc}{\hbar}\psi = 0, \\ i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(c\hbar\gamma_4 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + \gamma_4 mc^2\right)\psi, \end{aligned} \tag{2.17}$$

onde definimos:

$$\beta = \gamma_4 = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{bmatrix}, \tag{2.18a}$$

$$\alpha_k = -i\gamma_4\gamma_k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.18b}$$

Logo, obtemos uma forma hamiltoniana para a equação de Dirac:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \tag{2.19}$$

com:

$$H = -ic\hbar\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2, \tag{2.20}$$

onde as matrizes α e β satisfazem:

$$\{\alpha_k, \beta_k\} = 0, \tag{2.21}$$

$$\beta^2 = 1, \tag{2.22}$$

$$\{\alpha_k, \alpha_l\} = 2\delta_k. \tag{2.23}$$

2.1.1 Solução de onda plana para a equação de Dirac

Iniciaremos esta subseção analisando problemas em que soluções exatas da equação de Dirac são possíveis. O resultado mais acessível da equação de Dirac diz repeito à partícula relativística livre em repouso, $\vec{p} = 0$. Logo, a equação que devemos resolver, obtida da Eq.(2.19), é:

$$\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial(ict)} = -\frac{mc}{\hbar}\psi. \tag{2.24}$$

Primeiramente, utilizamos o Ansatz de uma função de onda com uma dependência temporal da forma $\psi \propto e^{-imc^2t/\hbar}$. Assim, substituindo o Ansatz na Eq.(2.24) temos:

$$\frac{\gamma_4}{ic}\left(\frac{-imc^2}{\hbar}\right)\psi = -\frac{mc}{\hbar}\begin{bmatrix}\mathbb{I} & 0\\ 0 & -\mathbb{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_A(0)\\ \psi_B(0)\end{bmatrix} = -\frac{mc}{\hbar}\begin{bmatrix}\psi_A(0)\\ \psi_B(0)\end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Portanto, a solução da Eq.(2.25) é o resultado do sistema:

$$\psi_A(0) = \psi_A(0), \tag{2.26a}$$

$$\psi_B(0) = -\psi_B(0). \tag{2.26b}$$

Logo, o sistema das Eqs.(2.26a) tem solução somente se as duas componentes inferiores do bispinor são nulas, ou seja, $\psi_B(0) = 0$. Mas, uma vez que a Eq.(2.25) é também satisfeita pela dependência temporal $e^{imc^2t/\hbar}$, temos um novo sistema

$$\psi_A(0) = -\psi_A(0), \tag{2.27a}$$

$$\psi_B(0) = \psi_B(0), \tag{2.27b}$$

que possui solução somente se as duas componentes superiores do bispinor forem nulas ($\psi_A(0)$). Como na teoria de Pauli, as duas componentes do spin não nulas podem ter o aspecto igual a $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, de forma análoga à dedução do hamiltoniano de Jaynes-Cumming quando introduzimos os pseudospins. Então, podemos utilizar essas soluções para as componentes diferente de zero que são resultados dos sistemas acima. Portanto, há quatro soluções independentes para a Eq.(2.25), essas que são:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} e^{-imc^2t/\hbar} \quad , \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} e^{-imc^2t/\hbar} \quad ,$$

(2.28a)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{imc^2 t/\hbar} \quad e \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{imc^2 t/\hbar}. \tag{2.28b}$$

Se insistirmos na interpretação, de origem heurística, que $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ é o operador hamiltoniano, as duas primeiras soluções nas Eqs.(2.28a) são soluções de *energia positiva* enquanto que as duas últimas são soluções de *energia negativa*, pois essas soluções são autoestados e autofunções do operador hamiltoniano da Eq.(2.24), com autovalores iguas a $\pm mc^2$:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}e^{\mp imc^2}\psi = \pm mc^2\psi, \tag{2.29}$$

a depender dos autovalores de $\gamma_4 = \beta$ que é ± 1, fato que decorre da equação de Dirac na forma hamiltoniana:

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{2.30}$$

na qual $H = -ic\hbar\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2$. Na referência,[36] fica demonstrado que a existência de soluções de energia negativa está inerentemente associada ao fato de que a teoria de Dirac pode acomodar o pósitron além do elétron, sua antipartícula.

Vamos agora considerar o problema da partícula livre quando $\vec{p} \neq 0$. Nessa situação iremos resolver a Eq.(2.24), a qual possui dependências temporal e espacial, além de possuir um bispinor como sua autofunção. Logo o Ansatz mais conveniente é da forma :

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_A(\vec{p}) \\ u_B(\vec{p}) \end{bmatrix} e^{\frac{i\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar} - \frac{iEt}{\hbar}}. \tag{2.31}$$

Substituindo esse Ansatz nas Eq.(2.12a) e (2.12b), obtemos:

$$u_A(\vec{p}) = \frac{c}{E - mc^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\, u_B(\vec{p}),, \tag{2.32a}$$

$$u_B(\vec{p}) = \frac{c}{E + mc^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\, u_A(\vec{p}), \tag{2.32b}$$

onde $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} > 0$, a menos de uma constante de normalização. Utilizando os vetores de estado $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ para $u_A(\vec{p})$, encontramos facilmente a forma do spinor u_b através da Eq.(2.32b). Primeiro, para o caso:

$$u_A(\vec{p}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.33}$$

obtemos:

$$u_B^1 = \begin{bmatrix} \dfrac{p_z c}{E + mc^2} \\ \dfrac{\left(p_x + ip_y\right)c}{E + mc^2} \end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

Já para a o caso:

$$u_A(\vec{p}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.35}$$

chegamos a:

$$u_B^2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(p_x - ip_y\right)c}{E + mc^2} \\ \dfrac{-p_z c}{E + mc^2} \end{bmatrix}. \tag{2.36}$$

Portanto, chegamos às duas soluções independentes para energia positiva:

$$u^1(\vec{p}) = N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\left(p_x - ip_y\right)c}{E + mc^2} \\ \dfrac{-p_z c}{E + mc^2} \end{bmatrix}, \tag{2.37}$$

$$u^2(\vec{p}) = N \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{p_z c}{E + mc^2} \\ \dfrac{\left(p_x + ip_y\right)c}{E + mc^2} \end{bmatrix}, \tag{2.38}$$

onde a constante de normalização será determinada a seguir. Para o caso de energia negativa $E = -\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} < 0$, podemos, à semelhança do que fizemos para $E > 0$, alcançar

$$u^3(\vec{p}) = N \begin{bmatrix} \dfrac{-p_z c}{E + mc^2} \\ \dfrac{-\left(p_x + ip_y\right)c}{E + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e \tag{2.39a}$$

$$u^4(\vec{p}) = N \begin{bmatrix} \dfrac{-\left(p_x - ip_y\right)c}{E + mc^2} \\ \dfrac{p_z c}{E + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2.39b}$$

Para finalizar, só falta a normalização da função de onda $u(\vec{p})$. Há duas convenções na literatura, a primeira é:

$$u^\dagger(\vec{p})\, u(\vec{p}) = 1, \tag{2.40}$$

o que implica em:

$$N^2\left(1+\frac{p^2c^2}{E+mc^2}\right)=1, \tag{2.41}$$

e ,consequentemente,

$$N=\sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}}. \tag{2.42}$$

A segunda convenção de normalização, que impõe:

$$u^\dagger u=\frac{E}{mc^2}, \tag{2.43}$$

transforma-se à semelhança da componente de ordem zero de um quadrivetor, parecendo algo artificial. Contudo, veremos adiante que essa convenção é natural do ponto de vista relativístico e devemos daqui para frente usar a segunda condição de normalização.
Em síntese, as soluções de onda plana normalizadas para um dado $\vec{p}$ decorrem da Eq.(2.31) e da consideração imposta na Eq.(2.43):

$$\int \psi^\dagger\psi \mathrm{d}^3r=N^2\int_v u^\dagger u\mathrm{d}^3r, \tag{2.44}$$

obtendo-se:

$$N=\sqrt{\frac{mc^2}{EV}}. \tag{2.45}$$

Portanto, para energias positivas temos:

$$\psi=\sqrt{\frac{mc^2}{EV}}u^{(1ou2)}\left(\vec{p}\right)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar+iEt/\hbar}. \tag{2.46}$$

Para o caso da energia $E<0$, temos:

$$\psi = \sqrt{\frac{mc^2}{EV}} u^{(3ou4)}\left(\vec{p}\right) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar + iEt/\hbar}. \tag{2.47}$$

Quando tomamos $V \to \infty$, os valores permitidos para a energia formam um espectro contínuo. De fato, assumindo condições periódicas de contorno para as soluções da função onda da partícula relativística:

$$e^{ip_x x/\hbar} e^{ip_y y/\hbar} e^{ip_z z/\hbar} = e^{ip_x (x+l)/\hbar} e^{ip_y (y+l)/\hbar} e^{ip_z (z+l)/\hbar}, \tag{2.48}$$

obtemos:

$$p_x = \frac{2\pi\hbar}{L} n_x, \tag{2.49}$$

$$p_y = \frac{2\pi\hbar}{L} n_y, \tag{2.50}$$

$$p_z = \frac{2\pi\hbar}{L} n_z, \tag{2.51}$$

com n_x, n_y e $n_z = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Logo, qara a solução de partículas livres com energias positivas, temos:

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2 c^2}{\left(mc^2\right)^2}}, \tag{2.52}$$

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \frac{(2\pi\hbar)^2}{mc^2} \left[\frac{(n_x)^2}{L^2} + \frac{\left(n_y\right)^2}{L^2} + \frac{(n_z)^2}{L^2} \right]}, \tag{2.53}$$

as quais são soluções para valores discretos de energia positiva, mas se considerarmos o limite que volume tende ao infinito $V \to \infty$, temos:

$$E = \pm mc^2 \sqrt{1 + \frac{v^2}{mc^2}}, \tag{2.54}$$

que é a equação do espectro contínuo de energia da partícula relativística. Portanto,

uma partícula relativística livre no espaço euclidiano está contida em um ambiente de volume infinito, logo, essa partícula possuí um espectro contínuo de energia, que é defina nos intervalos $mc^2 \leq E < \infty$, para soluções de energia positiva, enquanto que para as soluções de energias negativas chegamos a $-\infty < E \leq -mc^2$. Os valores permitidos de energia para partículas livres são representados na Fig.(1).

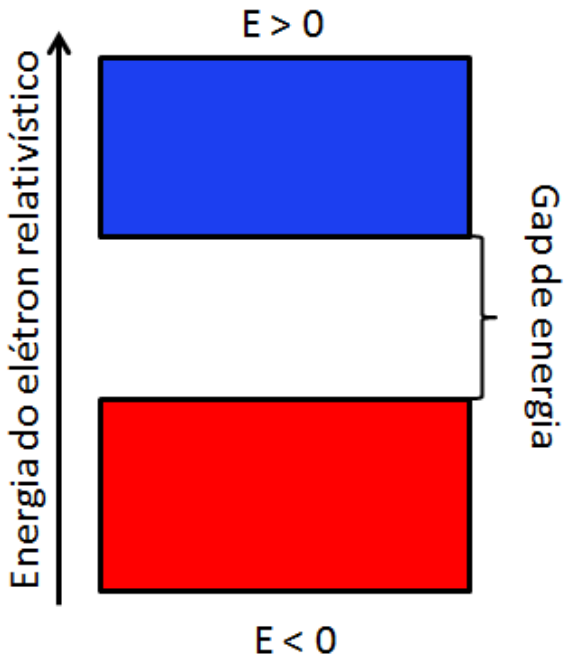


Figura 2.1 – Ilustração dos níveis de energia de uma partícula relativística livre, na qual, a região azul reproduz os níveis continuos de energia positiva $mc^2 \leq E \leq \infty$ e a região vermelha da figura representa os níveis continuos de energia negativa $-\infty \leq E \leq -mc^2$, enquanto a a região banca descreve os níveis proibidos de energia.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Esse espectro de energia relativística, faz com que o formalismo de Dirac proporcione a explicação para o pósitron,[36] além de ser crucial para o Zitterbewegung, que será melhor explicado em seguida.

2.1.2 Zitterbewegung.

Nesta seção analisaremos o comportamento da evolução temporal do operador posição. Para investigar tal comportamento é necessário utilizar a representação de Heisenberg.

No caso de uma partícula relativística livre, o hamiltoniano é da forma:

$$H = c\alpha_j p_j + \beta m c^2, \tag{2.55}$$

na qual $j = 1, 2, 3$. Logo, a equação de Heisenberg para a posição da partícula relativística é dada por:

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}\left[H, x_j\right] = c\alpha_j. \tag{2.56}$$

A equação nos diz que α_j é a velocidade em unidades de c. Sabemos que os autovalores da matriz α_j são $\pm$ 1, logo teremos um resultado interessante, no que diz respeito ao autovalor da velocidade da partícula relativística que é $\pm c$.

Com isso, o próximo passo é verificar se o operador α_j é uma constante de movimento. Portanto, a equação de movimento para esse operador é:

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_j}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}[H, \alpha_k] = \frac{i}{\hbar}\left(-2\alpha_j H + 2cp_j\right). \tag{2.57}$$

Como podemos notar obsercando a Eq.(2.60), o operador α não é constante de movimento, pois possui uma dependência temporal da forma:

$$\alpha_j(t) = cp_j H^{-1} + \left(\alpha_j(0) - cp_j^{-1}\right) e^{-2iHt/\hbar}. \tag{2.58}$$

Consequentemente, o operador posição não é uma constante de movimento. Logo, para descobrirmos a dependência temporal do operador posição basta substituir a Eq.(2.58) na Eq. (2.60). Sabendo que os operadores **p** e **H** são grandezas conservadas, ou seja, não possuem dependência temporal, obtemos:

$$x_j(t) = x_j(0) + c^2 p_j H^{-1} t + \frac{ic\hbar}{2}\left(\alpha_j(0) - cp_j H^{-1}\right) H^{-1} e^{-2iHt/\hbar}. \tag{2.59}$$

O primeiro e o segundo termos do lado direito da Eq.(2.59) são análogos à equação de movimento para uma paríticula clássica livre. Já o terceiro termo que aparece na Eq.(2.59), devido ao segundo termo do lado direito da Eq.(2.58), é responsável pela adição de uma rápida oscilação na trajetória uniforme retilínea da partícula relativística – esse movimento é denominado Zitterbewegung. O termo que causa a tremulação na trajetória retilínea da partícula relatívistica surge devido à sobreposição das soluções de energias positiva e negativa. Portanto, o zitterbewegung é possível somente quando temos um espectro de energia equivalente à Fig.(2.1)

2.2 Íons armadilhados

Nesta seção discutiremos o hamiltoniano efetivo produzido pelo sistema físico constituído de um íon de massa M dentro de uma armadilha, que pode ser do tipo Paul (na qual não há campos magnéticos) ou do tipo Penning (na qual há campos magnéticos). Nessa armadilha, o grau de liberdade interno do íon é aproximado para dois níveis eletrônicos,[3] que são acoplados por intermédio de um campo laser aos graus de liberdade vibracionais do íon na armadilha eletromagnética. Nesse sistema físico (íon armadilhado), a interação dos subespaços eletrônico e vibracional do íon , que ocorre por intermédio do campo clássico, é descrita pelo hamiltoniano efetivo Jaynes-Cumming não linear, ferramenta que possibilita a engenharia de inúmeras interações spin-órbita. Esse fato, juntamente com a flexibilidade experimental do sistema o torna adequado para física das simulações quânticas. Nos últimos anos há crescente interesse em simulações de efeitos relativísticos, por exemplo: o efeito Unruh[38] e o Zitterbewegung.[41]

Para mostrarmos a interação Jaynes-Cumming não linear, começaremos a partir do hamiltoniano, na representação de Schrödinger, que corresponde ao sistema descrito no início do parágrafo:

$$H = \hbar \nu a^{\dagger} a + \frac{\hbar \omega_o}{2} \sigma_z + H_{int}, \tag{2.60}$$

onde ν é a frequência de vibração da armadilha, ω_0 é a frequência de transição entre os níveis fundamental e excitado do íon, a e $a^\dagger$ são, respectivamente, os operadores de destruição e criação do subespaço vibracional e σ_z é o operador do subespaço eletrônico. O hamiltoniano de interação, que decorre do diálogo do laser com o íon armadilhado, é descrito da seguinte forma (na representação de Schrodinger):

$$H_{int} = \frac{\hbar}{2}\Omega\left(\sigma_+ + \sigma_-\right)\left[e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi\right)} + e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi\right)}\right], \tag{2.61}$$

onde, Ω é a frequência do acoplamento dos níveis eletrônicos fundamental e excitado, σ_+ e σ_- são, respectivamente, os operadores de criação e destruição do subespaço eletrônico, $\vec{k}$ é o vetor de onda do feixe laser, $\vec{r}$ é o operador posição do íon na armadilha, ω frequência do laser e ϕ fase do laser. Neste momento, passaremos à Eq.(2.60) para a representação de interação, com $H_0 = \hbar\nu a^\dagger a + \frac{\hbar\omega_o}{2}\sigma_z$ e $H_{int} = \hbar/2\Omega\left(\sigma_+ + \sigma_-\right)\left[e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi\right)} + e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi\right)}\right]$, tal que:

$$V_{int} = e^{i\left(\frac{H_0}{\hbar}\right)t} H_{int} e^{-i\left(\frac{H_0}{\hbar}\right)t}. \tag{2.62}$$

Antes de calcularmos o hamiltoniano de interação, será necessário transfomar o elemento $\vec{k}\cdot\vec{r}$, que está relacionado ao vetor de onda do laser e à posição do íon na armadilha íônica, em um operador quântico. Por simplicidade faremos os cálculos em uma dimensão. Logo,

$$\vec{k}\cdot\vec{x} = kx\cos(\theta) = k_x x \tag{2.63}$$

Considerando que o operador quântico relacionado à posição do oscilador harmônico é da forma:

$$\mathrm{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}\left(a + a^\dagger\right), \tag{2.64}$$

consequentemente obtemos:

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = k_x \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(a + a^{\dagger}\right). \tag{2.65}$$

Então, podemos definir:

$$\eta = \sqrt{\frac{k_x^2 \hbar}{2m\omega}}, \tag{2.66}$$

que é conhecido como parâmetro de Lamb-Dicke, que aborda a relação entre a energia de recuo do íon aprisionado, $E_r = \hbar^2 k_x^2/2M$, com a energia de vibração, $E_v = \hbar\nu$. Dessa maneira, o parâmetro de Lamb-Dicke nos informa se a energia que o laser transmite para o movimento vibracional do íon armadilhado (energia de recuo) é suficiente para provocar uma transição de um nível de menor energia para um nível de maior energia vibracional. Portanto, quando consideramos o regime de Lamb-Dicke, $\eta \ll 1$, a energia de recuo é muito menor que a energia de vibração. Assim sendo, a energia de recuo não provoca uma transição de um nível de energia vibracional menor para um maior. Outro modo de entendermos o regime de Lamb-Dicke consiste no fato de que o comprimento de onda do laser é muito maior que a amplitude de oscilação do íon armadilhado, ou seja, há pouca interação do laser com o grau de liberdade vibracional do íon. Assim, quando o parâmetro de Lamb-Dicke é $\eta \sim 1$, temos uma interação não linear do grau de liberdade vibracional com o eletrônico do íon, como veremos mais adiante. Portanto, o hamiltoniano de interação pode ser escrito da seguinte forma:

$$H_{int} = \frac{\hbar}{2}\Omega\left(\sigma_+ + \sigma_-\right)\left\{e^{i\left[\eta\left(a+a^{\dagger}\right)-\omega t+\phi\right]} + e^{-i\left[\eta\left(a+a^{\dagger}\right)-\omega t+\phi\right]}\right\}. \tag{2.67}$$

Agora, podemos retornar ao cálculo do hamiltoniano na representação de interação. Então, conseguimos da Eq.(2.62) o seguinte resultado:

$$V_{int} = \frac{\Omega}{2} e^{-\eta^2/2+i\phi}\sigma_+ \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{(i\eta)^{l+m}}{l!m!}\left(a^{\dagger}\right)^l a^m e^{i(l-m)\nu t} e^{-i(\omega-\omega_0)t} + H.C, \tag{2.68}$$

onde, a diferença da frequência de transição dos níveis eletrônicos do íon, ω_0, e do laser, ω, é definida como uma dessintonia, $\delta = \omega_0 - \omega$. Essa é interpretada com o número de vezes que a dessintonia é maior que frequência de vibração da armadilha iônica, $\delta = k\nu$, onde $k \epsilon \mathbb{N}$. Logo, podemos reescrever a Eq. (2.68) da seguinte maneira:

$$V_{int} = \frac{\Omega}{2} e^{-\eta^2/2+i\phi} \sigma_+ \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{(i\eta)^{l+m}}{l!m!} \left(a^\dagger\right)^l a^m e^{i(l-m+k)\nu t} + H.C. \tag{2.69}$$

Podemos então utilizar o regime de bandas laterais resolvidas, escolhendo um valor específico $m = k + l$. Em consequência dessa escolha a dependência temporal da Eq.(2.69) é anulada para os termos da somatória iguais a $m = k + l$, mas para todos os outros termos da somatória $m \neq k + l$ a dependência temporal ainda existe. Para ignorarmos os termos que possuem dependência temporal, ou seja, para observarmos apenas o hamiltoniano efetivo, é necessário realizar a aproximação de ondas girantes, que nos assegura que quando a frequência de oscilação da armadilha iônica, ν, for muito maior que a taxa de decaimento relacionada ao nível eletrônico do íon, Γ, podemos eliminar todos os termos que possuem dependência temporal. Além da aproximação de ondas girantes, é preciso que a frequência de oscilação da armadilha iônica, ν, seja muito maior que a frequência de transição característica do sistema não linear, Ω_{nm}. Portanto, obtemos um hamiltoniano efetivo da forma:

$$V_{int} = \frac{\Omega}{2} e^{-i\eta^2/2+i\phi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\eta)^{2l+k}}{l!\,(l+k)!} \left(a^\dagger\right)^l a^l a^k \sigma_+ + H.C. \tag{2.70}$$

Logo, o hamiltoniano efetivo da Eq. (2.70) representa as interações Jaynes-Cumming e anti-Jaynes-Cumming não lineares, que são escolhidas através da dessintonia $k > 0$ para interação Jaynes-Cumming não linear (também conhecida como *red sideband* regime) e $k < 0$ para interação anti-Jaynes-Cumming não linear (também conhecida como *blue sideband* regime). As interações do tipo *red* e *blue sidebands* baseiam-se no fato de que, quando há ganho de energia relacionado ao nível eletrônico do íon, o subespaço vibracional do íon pode perder k excitações em uma interação do tipo *red sideband*, ou ganhar k excitações em uma interação do tipo *blue sideband*. Quando ocorrer perda de energia relativa ao grau de liberdade eletrônico do íon, o nível de energia vibracional do

íon pode ganhar energia em uma interação do tipo *red sideband*, ou perder energia em uma interação do tipo *blue sideband*. É importante salientar que não ocorrem nem grandes excitações e nem grandes perdas energia no grau de liberdade vibracional, a partir da diminuição ou aumento de energia do subespaço eletrônico do íon. Isso é proibido, pois a probabilidade de transição de um nível $|n\rangle$ para um nível $|n+k\rangle$ está relacionada à frequência de Rabi $\Omega_{n,n+k}$, que é dada pela seguinte equação:

$$\Omega_{n,n+k} = \Omega_0 \left[e^{i\phi} + (-1)^k e^{-i\phi} \right] (i\eta)^k \left(\frac{n!}{(n+k)!} \right)^{1/2} L_n^k \left(\eta^2 \right), \tag{2.71}$$

na qual, $L_n^k \left(\eta^2 \right)$ é o polinômio de Laguerre. Assim, quanto maior for a dessintonia, em módulo, menor será a frequência de Rabi ligada à transição dos níveis vibracionais do íon, e consequentemente a probabilidade de ocupação do nível $|n+k\rangle$ será quase nula.

Para finalizar, mostraremos as três interações mais usuais no sistema físico dos íons armadilhados, todas obtidas no regime de Lamb-Dicke ($\eta \ll 1$), que restringe a somatória da Eq.(2.70) apenas ao primeiro termo, $l = 0$. Assim sendo, a Eq.(2.70) fica da seguinte forma:

$$V_{int} = \frac{\Omega}{2} e^{-i\phi} \frac{(i\eta)^k}{k!} a^k \sigma_+ + H.C. \tag{2.72}$$

Iniciaremos com a interação do tipo *carrier*,na qua o laser é ressonante com a transição entre os níveis eletrônicos do íon, ou seja, não há dessintonia entre a frequência de transição dos níveis eletrônicos e a do laser ($k = 0$). Isso implica que não ocorre interação dos níveis internos com os externos do íon armadilhado. Além disso, é necessário ajustar a fase para $\phi = 0$. O hamiltoniano que representa essa interação é descrito na equação abaixo:

$$V_{int} = \frac{\Omega}{2} [\sigma_+ + \sigma_-]. \tag{2.73}$$

Essa interação nos mostra que quando o grau de liberdade eletrônico do íon ganha ou perde energia, o grau de liberdade vibracional do íon permanece inalterado. A outra interação conhecida como *first-red sideband*, é o acoplamento dispersivo do laser com o subespaço

eletrônico do íon, ou seja, a dessintonia da frequência do laser com a relacionada aos níveis internos decorre da escolha $k = 1$, juntamente com o ajuste da fase $\phi = 0$. Desta forma, o hamiltoniano que representa a interação Jaynes-Cumming é:

$$V_{int} = \frac{\Omega}{2}\left[a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-\right]. \tag{2.74}$$

Por fim, com a interação denominada *first-blue sideband* ou anti-Jaynes-Cumming, que se fundamenta em um laser com uma dessintonia $k = -1$ em relação aos níveis eletrônicos do íon, acompanhado do ajuste de fase $\phi = 0$, obtemos o seguinte hamiltoniano efetivo de interação:

$$V_{int} = \frac{\Omega}{2}\left[a\sigma_- + a^\dagger\sigma_+\right]. \tag{2.75}$$

Portanto, como já foi dito no início da seção, a física do íon armadilhado possiblita a geração de vários tipos de interações, como demonstrado nas Eqs (2.73), (2.74) e (2.75). Mas outras interações podem ser produzidas, apenas com ajuste da frequência do laser, que permite a geração de novas dessintonias, por exemplo $k = 2$ e $k = -2$, que produzem no regime de Lamb-Dicke, respectivamente, interações dos tipos $V_{int} = \Omega\left[\left(a^\dagger\right)^2\sigma_- + a^2\sigma_+\right]$ e $V_{int} = \Omega\left[\left(a^\dagger\right)^2\sigma_+ + a^2\sigma_-\right]$. Também temos a possibilidade de não utilizar o regime de Lamb-Dicke, como será demonstrado no capítulo 4, que fornecerá interações seletivas relativas ao subespaço vibracional. Além disso, a flexibilidade de produzir diferentes tipos de interações através da física do íon armadilhado possibilitou a simulação das maiorias das interações spin-órbita da física de estado sólido que está presente no capítulo 3.

2.3 Simulação da equação de Dirac

Nas seções anteriores, primeiro discutimos a equação de Dirac, que apresenta um comportamento não usual em relação à trajetória de uma partícula relativística livre. Essa

trajetória não usual, representa um movimento retilíneo uniforme com a adição de um movimento oscilatório, que possui frequência e amplitude da ordem de $10^{21}Hz$ de $10^{-3}A$ (valores que estão fora do atual alcance experimental). Depois abordamos o hamiltoniano de interação gerado pela física do íon armadilhado, cujo característica não linear da interação do subespaço vibracional com o eletrônico do íon, possibilita a simulação de vários tipos de acoplamentos entre os subespaços vibracional e eletrônico. Além disso, esse sistema físico permirte um alto grau de controle sobre os parâmetros experimentais. Devido a esses fatos apresentados, foi realizado na referência[41] a simulação da equação de Dirac. É importante ressaltar que simular efeitos quânticos relativísticos em outros sistemas físicos, como no caso: a reprodução do zitterbewegung em íons armadilhados, não comprova a existência do efeito relativístico, mas permite explorar as semelhanças e diferenças entre tais sistemas físicos.

Para simular o Zitterbewegung, primeiro simularemos a equação de Dirac. Logo, o sistema será constituído de um único íon de massa M dentro de uma armadilha do tipo Paul, com frequências ν_x, ν_y e ν_z, na qual os quatro níveis internos estáveis do íon ($|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$ e $|d\rangle$), podem ser acoplados aos pares com o movimento do centro de massa nas direções x, y e z por intermédio de um laser. Utilizaremos três interações-padrão para a tecnologia dos íons armadilhados. Primeiro, a interação do tipo *carrier*, que consiste de um feixe laser atuando de forma ressonante com uma dada transição eletônica, enquanto o grau de liberdade vibracional permanece inalterado. Isso é descrito de forma efetiva pelo hamiltoniano:

$$H_c = \hbar\Omega\left(\sigma_+ e^{i\phi_c} + \sigma_- e^{-i\phi_c}\right), \tag{2.76}$$

onde, Ω é a frequência de acoplamento do laser com os níveis eletrônicos do íon, σ_+ e σ_- são, repectivamente, os operadores de criação e destruição do subespaço eletrônico do íon e ϕ_c é a fase do laser em relação à armadilha. Segundo, utilizaremos a interação Jaynes-Cumming, usualmente chamada de *first-red sideband*, que consiste de um laser atuando de forma ressonante a uma dada transição eletrônica e o modo vibracional do centro de massa do íon. Tipicamente, o acoplamento do tipo Jaynes-Cumming provoca uma excitação no nível eletrônico do íon, enquanto produz um decaimento do seu nível vibracional , ou vice-versa. O hamiltoniano efetivo da interação Jaynes-Cumming é descrito da seguinte

forma:

$$H_r = \hbar\eta\tilde{\Omega}\left(\sigma_+ a e^{i\phi_r} + \sigma_- a^\dagger e^{-i\phi_r}\right), \tag{2.77}$$

na qual, $\eta = k\sqrt{\hbar/2M\nu}$ é o parâmetro de Lamb-Dicke, onde k é ovetor de onda do laser e a e $a^\dagger$ são, respectivamente, os operadores de criação e destruiçao no subespaço vibracional do íon. Terceiro, consideramos a interação do tipo anti-Jaynes-Cumming, conhecido também como *first-blue sideband*, que consiste em uma interação similar ao Jaynes-Cumming, mas agora a excitação do nível interno é acompanhada pela excitação do nível externo do íon e vice-versa. O hamiltoniano efetivo é descrito da seguinte forma:

$$H_b = \hbar\eta\tilde{\Omega}\left(\sigma_+ a^\dagger e^{i\phi_b} + \sigma_- a e^{-i\phi_b}\right). \tag{2.78}$$

Todas essas interações podem ser aplicadas simultaneamente e endereçadas a diferentes transições dos níveis eletrônicos, acoplados aos modos de vibração do centro de massa do íon. Por exemplo, podemos utilizar simultaneamente dois lasers, cada qual produzindo as interações do tipo Jaynes-Cumming e anti-Jaynes-Cumming. Consequentemente teremos:

$$\begin{aligned} H &= \hbar\eta\tilde{\Omega}\left(\sigma_+ a e^{i\phi_r} + \sigma_- a^\dagger e^{-i\phi_r}\right) + \hbar\eta\tilde{\Omega}\left(\sigma_+ a^\dagger e^{i\phi_b} + \sigma_- a e^{-i\phi_b}\right) \\ &= \hbar\eta\tilde{\Omega}\left[\sigma_+\left(a e^{i\phi_r} + a^\dagger e^{i\phi_b}\right) + \sigma_-\left(a^\dagger e^{-i\phi_r} + a e^{-i\phi_b}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.79}$$

Ajustando as fases adequadamente para $\phi_r = 3\pi/2$ e $\phi_b = \pi/2$, obtemos:

$$H = i\hbar\eta\tilde{\Omega}\sigma_x\left(a^\dagger - a\right), \tag{2.80}$$

com $i\left(a^\dagger - a\right)/2 = \Delta\mathbf{p}/\hbar$, enquanto $\Delta = \sqrt{\hbar/2M\nu}$ é a amplitude de deslocamento ao longo da direção de oscilação do íon e $\mathbf{p}$ corresponde ao operador adimensional do momento linear. Logo, conseguimos o hamiltoniano:

$$H = 2\eta\tilde{\Omega}\sigma_x \mathbf{p}. \tag{2.81}$$

Portanto, podemos manipular o vetor de onda e a fase do laser para conseguirmos obter as seguintes interações:

$$H_{\sigma_x}^{p_x} = \hbar\eta\tilde{\Omega}\sigma_x \mathbf{p}_x, \tag{2.82}$$

$$H_{\sigma_y}^{p_y} = \hbar\eta\tilde{\Omega}\sigma_y \mathbf{p}_y, \tag{2.83}$$

$$H_{\sigma_x}^{p_z} = \hbar\eta\tilde{\Omega}\sigma_x \mathbf{p}_z. \tag{2.84}$$

Essas interações já foram produzidas em laboratório, sobe condições ressonantes (Haljan) e dispersivas (Sackett).

Para simular a equação de Dirac em três dimensões, precisamos de quatorze lasers. O primeiro e o segundo lasers acoplam a transição $|a\rangle \leftrightarrow |d\rangle$ ao modo vibracional do centro de massa na direção x, através de uma interação Jaynes-Cumming produzida pelo primeiro laser e outra, anti-Jaynes-Cumming, gerada pelo segundo laser, com ajuste das fases $\phi_r = 3\pi/2$ e $\phi_b = \pi/2$, nas quais ϕ_r está relacionado ao acoplamento Jaynes-Cumming, enquanto ϕ_b refere-se ao anti-Jaynes-Cumming. O terceiro e o quarto lasers acoplam a transição $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ ao grau de liberdade vibracional do íon na direção x, nas mesmas condições de acoplamento e fases utilizados pelo primeiro e segundo lasers. O quinto e o sexto lasers acoplam a transição $|a\rangle$, $|d\rangle$, com o subespaço vibracional do íon na direção y, através das interações do tipo *first-red* (quinto laser) e *first-blue* (sexto laser) *sidebands*, com ajuste das fases $\phi_r = \pi$ e $\phi_b = 0$. O sétimo e oitavo lasers acoplam a transição $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ ao grau de liberdade externo do íon na direção y, respectivamente através da interação Jaynes-Cumming e anti-Jaynes-Cumming, com as fases ajustadas para $\phi_r = 0$ e $\phi_b = \pi$. O nono e décimo lasers acoplam a transição $|a\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ com o modo vibracional do centro de massa na direção z, através das interações Jaynes-Cumming (nono laser) e anti-Jaynes-Cumming (décimo laser), com ajuste de fase do nono igual ao primeiro laser e do décimo idêntico ao segundo laser. O décimo primeiro e décimo segundo lasers acoplam a transição $|b\rangle \leftrightarrow |d\rangle$ relacionado ao nível eletrônico do íon, com o nível vibracional do íon na direção z , através dos acoplamentoes Jaynes-Cumming e anti-Jaynes-Cumming,

com o ajuste das fases $\phi_r = 3\pi/2$ e $\phi_b = \pi/2$. Para finalizar, os dois últimos lasers são sintonisados de forma ressonânte com as trasições $|a\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ e $|b\rangle \leftrightarrow |d\rangle$, e com ajuste das fases $\phi_{13} = \pi/2$ para o décimo terceiro laser e $\phi_{14} = 3\pi/2$ para o décimo quarto laser. É importante salientar que o número de lasers pode ser reduzido de quatorze para oito, pois um único feixe de laser pode produzir, via modulador eletro-óptico (Sackett), dois tipos de interações simultaneamente, ou seja, os acoplamentos Jaynes-Cumming e anti-Jaynes-Cumming são gerados por um único laser. O hamiltoniano efetivo que representa as interações descritas acima é:

$$\begin{aligned} H_D &= 2\eta_x\Delta_x\tilde{\Omega}_x\left(\sigma_x^{ad}+\sigma_x^{bc}\right)\mathbf{p}_x + 2\eta_y\Delta_y\tilde{\Omega}_y\left(\sigma_y^{ad}-\sigma_y^{bc}\right)\mathbf{p}_y \\ &+ 2\eta_z\Delta_z\tilde{\Omega}_z\left(\sigma_x^{ac}-\sigma_x^{bd}\right)\mathbf{p}_z + \hbar\Omega\left(\sigma_y^{ac}+\sigma_y^{bd}\right). \end{aligned} \tag{2.85}$$

Podemos ajustar os parâmetros do laser tal que $\eta = \eta_x = \eta_y = \eta_z$, $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z$ e $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_x = \tilde{\Omega}_y = \tilde{\Omega}_z$. Logo, podemos reescrever a Eq.(2.85) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H_D &= 2\eta\Delta\tilde{\Omega}\left(\sigma_x^{ad}+\sigma_x^{bc}\right)\mathbf{p}_x + 2\eta\Delta\tilde{\Omega}\left(\sigma_y^{ad}-\sigma_y^{bc}\right)\mathbf{p}_y \\ &+ 2\eta\Delta\tilde{\Omega}\left(\sigma_x^{ac}-\sigma_x^{bd}\right)\mathbf{p}_z + \hbar\Omega\left(\sigma_y^{ac}+\sigma_y^{bd}\right). \end{aligned} \tag{2.86}$$

Também podemos escrever a Eq.(2.86) na forma matricial:

$$H_D = \begin{bmatrix} 0 & 2\eta\Delta\tilde{\Omega}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right) - i\hbar\Omega \\ 2\eta\Delta\tilde{\Omega}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right) - i\hbar\Omega & 0 \end{bmatrix} \tag{2.87}$$

na qual, cada elemento da matriz representa uma matriz quadrada de ordem dois. A equação de Schrodinger associada à Eq.(2.87):

$$H_D\left|\psi\right\rangle = i\hbar\frac{\partial\left|\psi\right\rangle}{\partial t}, \tag{2.88}$$

apresenta a mesma dinâmica da equação de Dirac em três dimensões para uma partícula relativística livre de spin 1/2, na qual $|\psi\rangle$ representa um bispinor.

A representação matricial, supersimétrica, da equação de Dirac é:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} - imc^2 \\ c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + imc^2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.89}$$

onde c é a velocidade da luz, α é a matriz de Dirac e mc^2 é a energia de repouso da partícula relativística. Portanto, observamos que a analogia entre as Eqs (2.87) e (2.89) é imediata, logo faremos uma comparação eurítica dos termos da Eq. (2.87) com a Eq. (2.89). Com isso, obtemos $c = 2\eta\Delta\tilde{\Omega}$ e $mc^2 = \hbar\Omega$, o que permite reproduzir a equação de Dirac no contexto do íon armadilhado.

Vamos agora nos dedicar ao estudo do zitterbewegung no ambiente dos íons armadilhados. Para isso, analisaremos a equação de movimento da posição na representação de Heisenberg:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \frac{4\eta^2\Delta^2\tilde{\Omega}^2\vec{p}}{H_D}t + \left(\vec{\alpha} - \frac{2\eta\Delta\tilde{\Omega}\vec{p}}{H_D}\right)\frac{i\hbar\Delta\tilde{\Omega}}{H_D}\left(e^{2iH_Dt/\hbar} - 1\right), \tag{2.90}$$

na qual os dois primeiros termos estão relacionados ao clássico movimento cinemático da partícula livre, enquanto o terceiro termo é responsavel por uma tremulação transversal na direção de propagação da partícula relativística livre de spin 1/2. Se considerarmos um estado bispinor com uma distribuição de momento no entorno de p_0, $|\psi\rangle = |a\rangle \otimes exp^{\left[-(p-p_0)^2/2\sigma_p^2\right]}$, na qual σ_p é o desvio padrão da distribuição do momento. A frequência de oscilação do zitterbewegung relacionada à média do operador posição na representação de Heisenberg ($\langle\vec{r}(t)\rangle$) pode ser estimada em:

$$\omega_{zb} \approx \frac{2\bar{E}_D}{\hbar} = 2\sqrt{4\eta^2\Delta^2\tilde{\Omega}^2p^2} \tag{2.91}$$

na qual, $\bar{E}_D = \langle H_D\rangle$ é a energia média do íon armadilhado, que mapea a partícula relativística livre. De forma similar, podemos cacular através da média da Eq.(2.90) ($\langle\vec{r}(t)\rangle$) a amplitude associada ao zitterberwegung:

$$R_{zb} = \frac{\hbar}{2mc}\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 = \frac{\eta\hbar^2\tilde{\Omega}\Omega\Delta}{4\eta^2\tilde{\Omega}^2\Delta p_0^2 + \hbar\Omega^2}, \tag{2.92}$$

com $R_{zb} \approx \Delta$, se $\eta\tilde{\Omega} \sim \Omega$.

Como já dito anteriormente, a explicação-padrão para o movimento de tremulação da partícula relativística (efeito que nunca foi observado) consiste da interferência entre as componentes associadas às energias positiva e negativa da partícula relativística. Os valores reais de oscilação e amplitude, respectivamente, de um elétron relativistico são $\omega_{zb} = 10^{21}HZ$ e $R_{zb} = 10^{-3}A$, os quais estão fora do atual alcance experimental. Em vista da flexibilidade do sistema dos íons armadilhados, são permitidos valores de frequência e amplitude de oscilação que estão no intervalo de $\omega_{zb} \sim 0 - 10^6$ e $R_{zb} = 0 - 10^3A$, respectivamente.

Em consequência da complexidade experimental para simular a equação de Dirac tridimensional, pois é necessário a utilização de oito lasers, foi realizado na referência[47] a simulação experimental da citada equação em uma dimensão. Para simular a equação de Dirac unidimensional, o sistema utilizado consiste de um único íon de $^{40}Ca^+$ em uma armadilha linear do tipo Paul, com uma frequência $v_x = 2\pi \times 1.36MHz$. O íon foi preparado no estado fundamental de vibração. Foram utilizados dois lasers, sendo que um produz, via modulador eletro-ótico, as interações Jaynes-Cumming, anti-Jaynes-Cumming e *carrier*, juntamente com o ajuste de fase $\phi_r = 3\pi/2$, $\phi_b = \pi/2$ e $\phi_c = 0$, enquanto o outro laser gera a interação do tipo *carrier*, com o ajuste de fase $\phi_c = \pi/2$. Obtemos assimo o seguinte hamiltoniano:

$$H_D = 2\eta\Delta\tilde{\Omega}\sigma_x\mathbf{p} + \hbar\Omega\sigma_x + \hbar\Omega\sigma_y. \tag{2.93}$$

O próximo passo é calcular o hamiltoniano de interação da Eq.(2.93), com $H_0 = \hbar\Omega\sigma_y$ e $H_{int} = 2\eta\Delta\tilde{\Omega}\sigma_x\mathbf{p} + \hbar\Omega\sigma_x$, ajustamos adequadamente o tempo de interação entre os dois lasers, para que a Eq.(2.93) fique da forma:

$$H_D = 2\eta\Delta\tilde{\Omega}\sigma_x\mathbf{p} + \hbar\Omega\sigma_z. \tag{2.94}$$

Para estudar o zitterbewegung, é necessário medir experimentalmente a média $\langle \mathbf{x}(t) \rangle$. Mas no ambiente da armadilha iônica não há acesso ao grau de liberdade vibracional, logo é necessário utilizar a técnica conhecida como *very short probe time*, sem reconstruir por completo o estado quântico. Com isso, é possível coletar as informações relacionados ao subespaço vibracional para plotar o gráfico relacionado com $\langle \mathbf{x}(t) \rangle$ versus t. Para fazer o gráfico referente à simulação de uma partícula relativística livre, com diferentes massas, foi utilizado $\tilde{\Omega} = 2\pi \times 68KHz$, que corresponde à simulação da velocidade da luz ($c = 0.052\Delta\mu s^{-1}$). A medida do valor esperado $\langle \mathbf{x}(t) \rangle$, é mostrada na Fig. (2.2), para a partícula inicialmente preparada no estado *bispinor* $\psi(x, t = 0) = \left(\sqrt{2\pi}2\Delta\right)^{-1/2} e^{-x^2/4\Delta^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

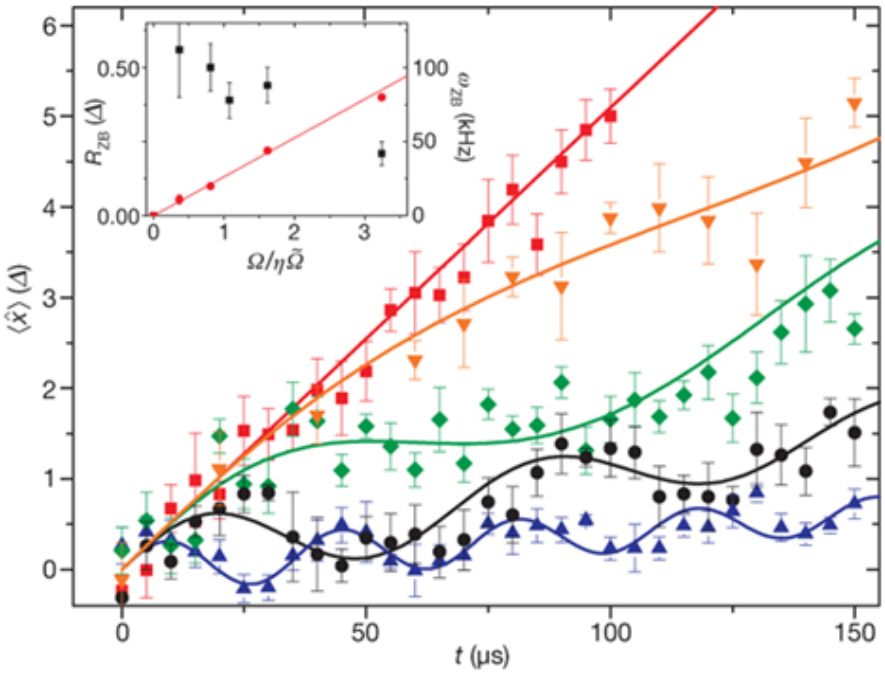


Figura 2.2 – Valor esperado, $\langle \mathbf{x}(t) \rangle$, para uma partícula relativística com diferentes massas. A curva linear vermelha (quadrados) representa um partícula sem massa ($\Omega = 0$}, movendo-se na velocidade da luz, que dada por $c = 2\eta\tilde{\Omega}/Delta = 0.052\Delta\mu s^{-1}$ para todas as curvas. As outra curvas representão o acréscimo de massa. Os comprimentos de compton, das partículas massivas, são $\lambda_c = 2\eta\tilde{\Omega}\Delta/\Omega = 5.4\Delta$(triângulo invertido), 2.5Δ(Losângulo), 1.2Δ(círculo) e 0.6Δ (triangulo), repectivamente. As cuvas sólidas representam os dados computacionais, enquanto os pontos são os dados experimentais. O Zitterbewegung é plotado para valores relativísticos, $2\eta\tilde{\Omega} \gg \Omega$, para valores não relativísticos, $2\eta\tilde{\Omega} \ll \Omega$.O gráfico inserido, têm os plotes das amplitude , R_{zb}(quadrados), e frequência, $\omega_{zb}(circular)$, do Zitterbewegung, versus o parametro $\omega/\eta\tilde{\omega}$ que é proporcional a massa.

Fonte: Gerritsmas[47]

É constatado através do gráfico que o Zitterbewegung aparece apenas para valores da

massa diferentes de zero.

2.4 Reservatórios térmicos

Em todas as seções anteriores descrevemos os sistemas físicos na ausência do reservatório térmico, ou seja, os sistemas não interagem com o meio ambiente. Como já foi mencionado na introdução, quando os sistemas não possuem interações com o reservatório térmico, não há perda de informação .

Um dos resultados dessa tese é a proteção do sistema físico contra decoerência. Portanto, é de extrema importância dedicarmos esta subseção para descrever, matematicamente, o que ocorre quando o sistema físico troca informações com o meio ambiente. Para isso, usamos um hamiltoniano de um sistema que se subdivide em dois subsistemas (em nosso caso o sistema de interesse e oreservatório), conforme descrito por:

$$H = H_S + H_R + H_{int}, \tag{2.95}$$

onde H_S representa os graus de liberdade do sistema, H_R os graus de liberdade do reservatório e H_{int} os graus de liberdade do sistema que interagem com os graus de liberdade do reservatório - mediados por uma determinada interação. Obviamente, a evolução do sistema composto é determinística e unitária, o que nos permite associar um vetor de onda ao estado do sistema composto.

2.4.1 Operador densidade

Para descrever apenas o sistema de interesse é necessário que o ambiente atue no estado desse sistema (via hamiltoniano de interação, que emaranhará, em quase todos casos, o sistema e o reservatório) e focar-se apenas nos graus de liberdade do sistema

de interesse; o efeito colateral de se optar por descrever a dinâmica do subsistema de interesse é o de não ser possível (em geral) a utilização do vetor de onda para prever a dinâmica desse subsustema, já que ele será descrito de maneira estatística pelos possíveis vetores de seu estado. Para contabilizar tal interferência que o reservatório faz sobre o sistema de interesse utiliza-se o operador densidade.

Como vantagem adicional, o operador densidade pode ser usado para descrever tanto estados puros quanto misturas estatísticas . O operador densidade é denotado por:

$$\rho = \sum_i \sum_j a_{ij} \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_j\right| . \tag{2.96}$$

Como ρ é hermitiano é sempre possível diagonalizá-lo, pois sempre há uma tranformação aplicável para diagonaliza-lo:

$$\rho = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| ; \quad \sum_i p_i = 1. \tag{2.97}$$

o que claramente nos dá:

$$\mathrm{Tr}\left\{\rho\right\} = \sum_k \sum_i p_i \left\langle\psi_k|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i|\psi_k\right\rangle = \sum_i p_i = 1, \tag{2.98}$$

uma propriedade imediata de ρ é:

$$Tr\{\rho\} = \sum_k \sum_i \sum_j a_{ij} \langle\psi_k|\psi_i\rangle\langle\psi_j|\psi_k\rangle = \sum_i a_{ii} \equiv \sum_i p_i = 1. \tag{2.99}$$

O valor esperado de um operador no formalismo do operador densidade é:

$$\langle\mathcal{O}\rangle = Tr\left\{\mathcal{O}\rho\right\} = \sum_k \sum_i p_i \left|\psi_k\right\rangle \mathcal{O} \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i|\psi_k\right\rangle = \sum_i p_i \left\langle\psi_i\right| \mathcal{O} \left|\psi_i\right\rangle = \sum_i p_i \left\langle\mathcal{O}\right\rangle_i \tag{2.100}$$

2.4.2 Equação mestra para o oscilador harmônico

Consideremos um sistema cujo hamiltoniano seja dado por:

$$H = \omega_0 a^\dagger a + \sum_j \omega_j b_j^\dagger b_j + \sum_j g_j (a b_j^\dagger + a^\dagger b_j), \tag{2.101}$$

com:

$$H_0 = \omega_0 a^\dagger a + \sum_j \omega_j b_j^\dagger b_j, \tag{2.102}$$

$$V = \sum_j g_j (a b_j^\dagger + a^\dagger b_j), \tag{2.103}$$

sendo, respectivamente, a e $a^\dagger$ os operadores de destruição e criação do sistema de interesse (não é necessário que o sistema seja um oscilador harmônico sempre. Nosso sistema de interesse será, mas poderíamos ter um átomo ou conjunto de átomos como sistema de interesse), que no caso é um oscilador harmônico; b_j e $b_j^\dagger$ os operadores de destruição e criação do j-ésimo grau de liberdade do reservatório, g_j é o acoplamento entre o j-ésimo grau de liberdade do reservatório e o sistema de interesse e ω_j é a freqüência do j-ésimo grau de liberdade do reservatório. Será apresentado um cálculo de caráter geral, até que se possa introduzir explicitamente $V_I(t)$ nas expressões - o que ocorrerá após a Eq.(2.112).

O operador densidade total (sistema + reservatório) na representação de Schrödinger, satisfará, em geral, a equação diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}\rho_T(t)}{\mathrm{d}t} = -i[H, \rho_T(t)]. \tag{2.104}$$

Na representação de interação, se definirmos $H_0 = H_S + H_R$, temos a operação unitária:

$$U_0(t) = e^{-iH_0 t}, \tag{2.105}$$

que define, na representação de interação, a equação de movimento:

$$\frac{\mathrm{d}\rho_T^I(t)}{\mathrm{d}t} = -i[V_I(t), \rho_T^I(t)], \tag{2.106}$$

sendo $\rho_T^I(t) = U_0^\dagger(t)\rho_T(t)U_0(t)$ e $V_I(t) = U_0^\dagger(t)V(t)U_0(t)$. Integrando, temos:

$$\rho_T^I(t) = \rho_T^I(0) - i\int_0^t \mathrm{d}t'[V_I(t'), \rho_T^I(t')]. \tag{2.107}$$

Substituindo a Eq.(2.107) na Eq.(2.106), decorre:

$$\frac{\mathrm{d}\rho_T^I(t)}{\mathrm{d}t} = -i[V_I(t), \rho_T^I(0)] - \int_0^t \mathrm{d}t'[V_I(t), [V_I(t'), \rho_T^I(t')]]. \tag{2.108}$$

Assim, ao traçar sobre os graus de liberdade do ambiente, temos:

$$\frac{\mathrm{d}\rho_S^I(t)}{\mathrm{d}t} = -iTr_R\left\{[V_I(t), \rho_T^I(0)]\right\} - \int_0^t \mathrm{d}t' Tr_R\{[V_I(t), [V_I(t'), \rho_T^I(t')]]\}. \tag{2.109}$$

Inicialmente, supondo que o sistema e o reservatório estejam descorrelacionados, ou seja, $\rho_T^I(0) = \rho_S^I(0) \otimes \rho_R^I(0)$ e que $Tr_R\{[V_I(t), \rho_T^I(0)]\} = 0$ bilineares, temos:

$$\frac{\mathrm{d}\rho_S^I(t)}{\mathrm{d}t} = -\int_0^t \mathrm{d}t' Tr_R\{[V_I(t), [V_I(t'), \rho_T^I(t')]]\}. \tag{2.110}$$

Assumindo que V possui um acoplamento muito mais fraco que os termos livres do hamiltoniano - ou seja, o acoplamento do sistema com o reservatório é fraco -, podemos pressupor que o operador densidade reduzido do reservatório não é afetado significativamente pela interação, de forma que:

$$\rho_T^I(t) \approx \rho_S^I(t) \otimes \rho_R^I(0). \tag{2.111}$$

Dessa forma a equação mestra nos fornece:

$$\frac{\mathrm{d}\rho_S^I(t)}{\mathrm{d}t} = -\int_0^t \mathrm{d}t' Tr_R\{[V_I(t), [V_I(t'), \rho_S^I(t') \otimes \rho_R^I(0)]]\}. \tag{2.112}$$

Consideremos, como já anteriormente explicitado, o caso de um oscilador harmônico

amortecido simples, no qual:

$$V_I(t) = \hbar(a^\dagger \Gamma(t) e^{i\omega_0 t} + a\Gamma^\dagger(t) e^{-i\omega_0 t}), \tag{2.113}$$

onde:

$$\Gamma(t) = \sum_j g_j b_j e^{i\omega_j t}, \tag{2.114}$$

com:

$$[b_j, b_k^\dagger] = \delta_{jk}. \tag{2.115}$$

Logo, com tal $V_I(t)$, a equação mestra gerará as seguintes integrais - que constituem a Eq.(2.112):

$$I_1 = \int_0^t \mathrm{d}t_1 \langle \Gamma(t)\Gamma(t_1)\rangle e^{i\omega_0(t+t_1)}, \tag{2.116}$$

$$I_2 = \int_0^t \mathrm{d}t_1 \langle \Gamma(t)^\dagger \Gamma(t_1)^\dagger\rangle e^{-i\omega_0(t+t_1)}, \tag{2.117}$$

$$I_3 = \int_0^t \mathrm{d}t_1 \langle \Gamma(t)\Gamma(t_1)^\dagger\rangle e^{i\omega_0(t-t_1)} e \tag{2.118}$$

$$I_4 = \int_0^t \mathrm{d}t_1 \langle \Gamma(t)^\dagger \Gamma(t_1)\rangle e^{-i\omega_0(t-t_1)}. \tag{2.119}$$

Daqui em diante será efetuada, como exemplo, uma das integrais, sendo que as demais integrais são imediatamente análogas. Usando a definição de $\Gamma(t)$, temos:

$$I_1 = \int_0^t \mathrm{d}t_1 \sum_{l,j} g_l g_j \langle b_l b_j\rangle e^{-i(\omega_l t + \omega_j t_1)} e^{i\omega_0(t+t_1)}. \tag{2.120}$$

Passando para o contínuo, temos:

$$I_1 = \int_0^t \mathrm{d}t_1 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega_1}{2\pi}\rho(\omega_1) \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega_2}{2\pi}\rho(\omega_2) g(\omega_1) g(\omega_2) \langle b(\omega_1) b(\omega_2)\rangle_R e^{-i(\omega_1 t + \omega_2 t_1)} e^{i\omega_0(t+t_1)}, \tag{2.121}$$

onde $\rho(\omega)$ é a densidade de estados.

Para banhos térmicos temos $\langle b(\omega_1) b(\omega_2)\rangle_R = 0$. Entretanto, alguns reservatórios especiais, como os reservatórios comprimidos, possuem esse tipo de correlação não nula. A

fim de incluí-los, admitamos:

$$\langle b(\omega_1)b(\omega_2)\rangle = 2\pi M(\omega_1)\delta(2\omega_0 - \omega_1 - \omega_2), \tag{2.122}$$

que corresponde a um estado de vácuo comprimido multimodal com uma frequência *carrier* igual à frequência de ressonância da cavidade, o que fornece, com a mudança de variável $\omega = \omega_1$:

$$I_1 = \int_0^t \mathrm{d}t_1 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\rho(\omega)\rho(2\omega_0 - \omega)g(\omega)g(2\omega_0 - \omega)M(\omega)e^{i(\omega_0-\omega)(t-t_1)}, \tag{2.123}$$

se $\tau = t - t_1$, temos:

$$I_1 = \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\rho(\omega)\rho(2\omega_0 - \omega)g(\omega)g(2\omega_0 - \omega)M(\omega)e^{i(\omega_0-\omega)\tau}. \tag{2.124}$$

Agora faremos a aproximação de Markov assumindo que $\rho(\omega)$, $g(\omega)$ e $M(\omega)$ são funções que variam lentamente em torno de $\omega = \omega_0$, com ω_0 sendo uma freqüência alta. Se $\epsilon = \omega - \omega_0$, e assumindo simetria em relação a ω_0 temos:

$$I_1 \approx \int_0^\infty \mathrm{d}\tau \int_{-\omega_0(\to-\infty)}^\infty \frac{\mathrm{d}\epsilon}{2\pi}\rho^2(\epsilon + \omega_0)g^2(\epsilon + \omega_0)M(\epsilon + \omega_0)e^{i\epsilon\tau}. \tag{2.125}$$

Sendo a extensão do limite inferior de integração justificável, já que ω_0 encontra-se longe da região de contribuição da integral . Assim, justifica-se de maneira similar a extensão da integral temporal para ∞. Efetuando a integração temporal temos:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}\epsilon}{2\pi}\rho^2(\epsilon + \omega_0)g^2(\epsilon + \omega_0)M(\epsilon + \omega_0)\left[\pi\delta(\epsilon) - i\mathcal{P}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right], \tag{2.126}$$

com:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\tau e^{\pm i\epsilon t} = \left[\pi\delta(\epsilon) - i\mathcal{P}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right], \tag{2.127}$$

sendo $\mathcal{P}$ o valor principal de Cauchy, que é definido por:

$$\mathcal{P}\int_{-a}^b \frac{f(\omega)\mathrm{d}\omega}{\omega} = \lim_{\epsilon\to\infty}\left\{\int_{-a}^{-\epsilon}\frac{f(\omega)\mathrm{d}\omega}{\omega} + \int_\epsilon^b \frac{f(\omega)\mathrm{d}\omega}{\omega}\right\}. \tag{2.128}$$

O termo referente ao valor principal origina induz um pequeno deslocamento na freqüên-

cia do oscilador. Há um termo semelhante a esse nas outras integrais, e tais termos serão desprezados. Se definirmos a taxa de decaimento por:

$$\gamma \equiv \rho^2(\omega_0)g^2(\omega_0), \tag{2.129}$$

obtemos:

$$I_1 = \frac{\gamma}{2}M(\omega_0). \tag{2.130}$$

Procedimentos análogos ao realizado para I_1 levam aos resultados das outras integrais:

$$I_2 = \frac{\gamma}{2}M^*(\omega_0), \tag{2.131}$$

$$I_3 = \frac{\gamma}{2}[N(\omega_0) + 1], \tag{2.132}$$

$$I_4 = \frac{\gamma}{2}N(\omega_0). \tag{2.133}$$

Nessa expressão $N(\omega)$ é definido por:

$$\langle b^\dagger(\omega)b(\omega')\rangle = 2\pi N(\omega)\delta(\omega - \omega'). \tag{2.134}$$

Substituindo tais expressões na Eq.(2.112) implica na seguinte equação mestra:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} &= \frac{\gamma}{2}(N+1)(2a\rho a^\dagger - \rho a^\dagger a - a^\dagger a\rho) + \frac{\gamma}{2}N(2a^\dagger\rho a - \rho a a^\dagger - a a^\dagger\rho) \\ &+ \frac{\gamma}{2}M(2a^\dagger\rho a^\dagger - \rho a^\dagger a^\dagger - a^\dagger a^\dagger\rho) + \frac{\gamma}{2}M^*(2a\rho a - \rho a a - a a\rho). \end{aligned} \tag{2.135}$$

Se o banho está em equilíbrio térmico à temperatura T & $M = 0$, ou seja, o reservatório não é comprimido, temos:

$$N(\omega_0) = \frac{1}{e^{\hbar\omega_0/kT} - 1}. \tag{2.136}$$

Por conseguinte, podemos obter a seguinte equação mestra:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma}{2}(N+1)(2a\rho a^\dagger - \rho a^\dagger a - a^\dagger a\rho) + \frac{\gamma}{2}N(2a^\dagger\rho a - \rho a a^\dagger - a a^\dagger\rho). \tag{2.137}$$

O estado de equilíbrio de tal equação é dado por:

$$\rho_{eq} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega(n+1/2)/k_B T} e^{-\hbar\omega/2k_B T}(1 - e^{-\hbar\omega/k_B T})|n\rangle\langle n|, \tag{2.138}$$

que é o operador densidade de um oscilador harmônico em contato com um reservatório à temperatura constante T.

2.4.3 Engenharia de reservatório em eletrodinâmica de cavidade

Para finalizar a seção, iremos mostrar como realizar a engenharia de um reservatório térmico, no cotexto de eletrodinâmica de cavidades. Para esse propósito, consideremos um modelo para os modos normais do oscilador hamônico, relacionado a cavidade. Para simular a engenharia de reservatórios utilizamos feixes átomicos passando pela cavidade. Ilustramos esse procedimenteo na Fig.(2.3).

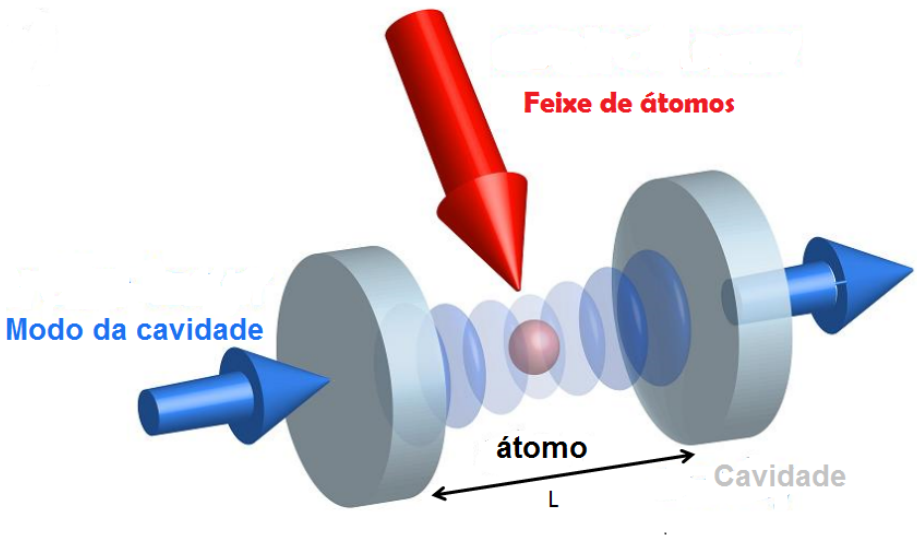


Figura 2.3 – Descrição de uma feixe de átomos passando pela cavidade, na qual, o feixe vermelho representa o feixe átomico, o feixe azul descreve o campo quântico que produz os modos normais na cavidade, e a esfera vermelha representa o instante que o átomos está interagindo com a cavidade, que possui um comprimento L.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os átomos da Fig.(2.3) são configurados apenas com dois níveis eletrônicos, os quais

possuem uma energia de transição entre os graus de liberdade fundamental e excitado que é igual a $\hbar\omega$. Quando incidimos o átomo preparado no estado excitado durante a interação do átomo com a cavidade ocorre uma perda de energia, relacionada ao nível eletrônico, que é transferida para o modo da cavidade, o qual ganha uma excitação. Mas quando incidimos o átomo preparado no estado fundamental, após a interação do átomo com a cavidade, ocorre a excitação do grau de liberdade fundamental para o excitado do átomos, que rouba um fóton do modo da cavidade. Logo, a interação átomo sistema é governada pelo hamiltoniano:

$$H = \hbar\omega a^{\dagger} a + \hbar\omega_0 \sigma^{\dagger}\sigma + \hbar g \left(\sigma a^{\dagger} + \sigma a^{\dagger}\right), \tag{2.139}$$

onde, ω é a frequência de oscilação dos modos da cavidade, ω_0 é a frequência de oscilação do grau de liberdade elerônico do átomo e g frequência de Rabi, que determina a força de acoplamento entre o modo da cavidade e os estados eletrônicos do átomo. Além dos operados de criação a e destruição $a^{\dagger}$ do subespaço vibracional e os operadores σ de criação e $\sigma^{\dagger}$ do subespaço eletrônico do átomo. Além de definirmos $\hbar = 1$

Denotamos por ρ_t o operador densidade que descreve a combinação dos sistemas átomo e caviade, em função das variáveis dinâmicas $a^{\dagger}$, a, $\sigma^{\dagger}$, σ. Logo, descravemos o operados da seguinte forma:

$$\rho_t = \rho_t \left(a^{\dagger}(t), a(t), \sigma^{\dagger}(t), \sigma(t)\right). \tag{2.140}$$

Agora supomos que t é o instante em que o átomo entra na cavidade e $t+\tau$ o instante quando o átomo emerge da cavidade. Portanto, teremos a evolução temporal do sistema interagente da Fig. (2.3):

$$\rho_{t+\tau} = e^{-iH_{int}\tau}\rho_{\tau} e^{iH_{int}\tau}, \tag{2.141}$$

na qual, H_{int} é o hamiltoniano de interação da Eq. (2.139), que é descrito por

$$H_{int} = \frac{g^2}{\delta}\left(a^\dagger\sigma + a\sigma^\dagger\right). \tag{2.142}$$

Para resolver a Eq. (2.141) utilizamos o método de Baker-Campbell-Hausdorff, no regime $\tau g^2/\delta \ll 1$, que é a força de acoplamento, entre os níveis eletrônicos e vibracionais, muito menor que o tempo de passagem do átomo na cavidade, $\tau = L/v$, onde v é a velocidade do átomo e L o comprimento da cavidade. Logo, a evolução tempora da interação do átomo com a cavidade é dado por:

$$\rho(t+\tau) = \rho(t) + [H_{int}, \rho_\tau] + [H_{int}, [H_{int}, \rho_\tau]]. \tag{2.143}$$

$$\begin{aligned} \rho(t+\tau) - \rho(t) &= i\Omega\tau\left[\left(a^\dagger\sigma + a\sigma^\dagger\right), \rho(t)\right] \\ &+ \frac{(i\Omega\tau)^2}{2}\left[\left(a^\dagger\sigma + a\sigma^\dagger\right), \left[\left(a^\dagger\sigma + a\sigma^\dagger\right), \rho(t)\right]\right] \end{aligned} \tag{2.144}$$

onde $\Omega = g^2/\delta$. Antes do átomo passar pela cavidade, a partícula é preparada numa mistura estatística dos estados exicitado e fundamental, $\rho_{átomo} = |g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|$. Para finalizar, eliminaremos o subespaço eletrônico do átomo no operador densidade, realizando o traço do grau de liberdade eletrônico, tal que:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}\left[\rho(t+\tau)\right]_{átomo} = \rho_{vib}(t) \\ &+\frac{(i\Omega\tau)^2}{2}\left[aa^\dagger\rho_{vib}(t) + \rho_{vib}(t)aa^\dagger - 2a^\dagger\rho_{vib}(t)a\right] \\ &+\frac{(i\Omega\tau)^2}{2}\left[a^\dagger a\rho_{vib}(t) + \rho_{vib}(t)a^\dagger a - 2a\rho_{vib}(t)a^\dagger\right] \quad , \end{aligned} \tag{2.145}$$

Logo , multiplicando os dois lados da Eq. (2.145) por r que é a taxa de passagem do átomo pela cavidade, sendo definido como $r = v/L$. Temos:

$$
\begin{aligned}
& r\left[\rho_{vib}(t+\tau)-\rho_{vib}(t+\tau)\right]= \\
&= \frac{r\,(i\Omega\tau)^2}{2}\left[aa^\dagger\rho_{vib}(t)+\rho_{vib}(t)aa^\dagger-2a^\dagger\rho_{vib}(t)a\right] \\
&+\frac{r\,(i\Omega\tau)^2}{2}\left[a^\dagger a\rho_{vib}(t)+\rho_{vib}(t)a^\dagger a-2a\rho_{vib}(t)a^\dagger\right] \quad .
\end{aligned}
\tag{2.146}
$$

onde $\Gamma_{eng}=r\,(i\Omega\tau)^2$. Portanto, obtemos a forma de Lindblad que simula o meio ambiente:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{\Gamma_{eng}}{2}\left[-aa^\dagger\rho_{vib}(t)-\rho_{vib}(t)aa^\dagger+2a^\dagger\rho_{vib}(t)a\right] \\
&+ \frac{\Gamma_{eng}}{2}\left[-a^\dagger a\rho_{vib}(t)-\rho_{vib}(t)a^\dagger a+2a\rho_{vib}(t)a^\dagger\right].
\end{aligned}
\tag{2.147}
$$

Voltando para representação de Schrödinger, obtemos a equação mestra do oscilador harmônico amortecido

$$
\begin{aligned}
& \frac{d\rho_{vib}(t)}{\mathrm{d}t}=-i\left[\omega a^\dagger a,\rho_{vib}(t)\right] \\
&+\frac{\Gamma_{eng}}{2}\left[-aa^\dagger\rho_{vib}(t)-\rho_{vib}(t)aa^\dagger+2a^\dagger\rho_{vib}(t)a\right] \\
&+\frac{\Gamma_{eng}}{2}\left[-a^\dagger a\rho_{vib}(t)-\rho_{vib}(t)a^\dagger a+2a\rho_{vib}(t)a^\dagger\right] \quad .
\end{aligned}
\tag{2.148}
$$

CAPÍTULO 3

SIMULAÇÃO DO ZITTERBEWEGUNG NÃO USUAL EM ARMADILHAS IÔNICAS

3.1 Simulações dos acoplamentos spin-órbita.

3.1.1 Introdução

Em uma recente referência[47] reportou-se a simulação quântica da equação de Dirac unidimensional no contexto de armadilha iônica. A medida da evolução temporal da posição do íon armadilhado, que simula matematicamente uma partícula relativística livre, foi utilizado para demonstrar o Zitterbewegung associado a equação de Dirac na referência.[41] Essencialmente, o acoplamento entre o momento e o spin da partícula relativística, ocorre de forma natural no regime da mecânica quântica relativítica, é simulado por intermédio do acoplamento, induzido por um campo clássico, dos graus de liberdades vibracional e eletrônico dos íon armadilhados. Além das armadilhas iônicas, diferentes sistemas físicos foram utilizados para mapear o Zitterbewegung, tais como os semicondutores, os cristais fotônicos e os átomos frios. No mesmo contexto, foi demonstrado que o condensado de Bosen-Eintein pode fornecer o análodo ao burraco negro sônico e ao boson de Huggs.

Na mesma direção do crescente interesse pela simulação quântica, a armadilhas iônicas

- utilizada nas últimas duas décadas como plataforma de teste para investigar fenômenos fundamentais da mecânica quântica e para a implementação de processos de informação quântica - foram aqui considerados para a reprodução das equações de onda da mecânica quântica relativística,

Portanto, motivado pelos trabalhos mencionados acima, neste capítulo demonstraremos como simular o zitterbewegung não usual[46] , análogo ao conhecido movimento de tremulação do elétron relativístico da física de semicondutores, em que trajetórias helicoidáis ocorrem na ausência de campo magnético. Para realizar tal feito, utilizaremos um único íon, com dois níveis eletrônicos, em uma armadilha do tipo Paul.

Para o Zitterbewegung não usual devemos considerar dois graus de liberdade vibracionais acoplados entre si através do níveis eletrônicos dos íon armadilhado, possibilitando assim uma dinâmica vibracional que reproduz tanto o zitterbewegung não usual como curvas de Lissajou, o que revela o alto grau de controle que se alcança nas armadilhas iônicas. Portanto, além do problema de simulação quântica, estamos aqui tangenciando o problema de controle quântico das referências[48,49] , outra linha de pesquisa que tem atraído muita atenção, especialmente no que concerne à teoria de informação quântica, que demanda um controle preciso do sistema dinâmico. Notamos que as curvas de Lissajus não podem ser derivadas do formalismo de Dirac, a menos que a velocidade da luz se altere com a direção de vibração do íon.

Finalmente, observamos que para a simulação do zitterbewegung não usual e das curvas de Lissaju em armadilhas iônicas faz-se necessário a engenharia de hamiltonianos que simulem os acoplamentos spin-órbita do tipo Rashba isotrópico e anisotrópico, respectivamente. A esse respeito, de forma análoga ao acoplamento Rashba, conseguimos alcançar a interação do tipo Dresselhaus, o que certamente nos permite dizer que podemos reproduzir toda a variedade das interações spin-órbita da física do estado sólido em armadilhas iônicas.

3.1.2 Acoplamento spin-órbita do tipo Rashba

Para realizar a interação do tipo Rashba no contexto de íons aprisionados, consideramos dois feixes laser alinhados nas direções x e y, para que produzam, cada qual, com o auxílio de um modulador eletro-óptico, interações do tipo *fisrt-blue* e *first-red sidebands*.[50] Os quatro campos assim gerados possuem frequências ω_l e fases ϕ_l, sendo dois desses campos sintonizados no *first-blue sideband*, e os demais sintonizados no *first-red sideband*. Logo, conseguimos derivar o seguinte hamiltoniano ($\hbar = 1$):

$$H = i\left[\Omega_x \eta_x \left(e^{i\phi_1} a_x + e^{i\phi_2} a_x^\dagger\right) + \Omega_y \eta_y \left(e^{i\phi_3} a_y + e^{i\phi_4} a_y^\dagger\right)) + H.C\right], \tag{3.1.1}$$

onde η_α é o parâmetro de Lamb-Dicke e Ω_α é a frequência de Rabi que acopla os níveis eletrônicos do íon (fundamental $|g\rangle$ e excitado $|e\rangle$) do íon a dois graus de liberdade vibracionais, descritos pelos operadores de aniquilação a_α e criação $a_\alpha^\dagger$ com as suas respectivas direções $\alpha = x, y$. Finalmente, $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ e $\sigma_- = \sigma_+^\dagger$ são os operadores de criação e aniquilação para os níveis eletrônicos do sistema. O próximo passo consiste no ajuste das fases, tais que $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi$, $\phi_3 = \pi/2$ e $\phi_4 = 3\pi/2$. Com esses procedimentos, conseguimos na representação de interação, o análogo do acoplamento spin-orbita do tipo Rashba:

$$H = \left(\Delta_x \eta_x \Omega_x p_x \sigma_y - \Delta_y \eta_y \Omega_y p_y \sigma_x\right), \tag{3.1.2}$$

onde $P_\alpha = i\left(a_\alpha^\dagger - a_\alpha\right)/2\Delta$, com $\Delta_\alpha = 1/\sqrt{2mv_\alpha}$, sendo m a massa do íon e v_α sua frequência de vibração na direção α. Quando ajustamos os parâmetros do laser de tal forma que $\Delta_x = \Delta_y = \Delta$, $\eta_x = \eta_y = \eta$ e $\Omega_x = \Omega_y = \Omega$, o hamiltoniano acima é reduzido exatamente à interação do tipo Rashba:

$$H = \gamma\left(p_x \sigma_y - p_y \sigma_x\right), \tag{3.1.3}$$

onde $\gamma = \Delta\Omega$.

Além disso, podemos simular o acoplamento spin-órbita do tipo Rashba em três dimensões. Para isso, consideramos uma armadilha do tipo Paul tridimensional, para o aprisionamento de um único íon. Além de utilizarmos as mesmas configurações de lasers usadas anteriomente para obter a Eq.(3.1.1), é necessário adicionarmos outro laser, que irá, via modulador eletro-ótico, produzir interações dos tipos *first-blue* e *first-red sidebands*, além de gerar as fases ϕ_l, a seram adequadamente ajustadas. Com essa nova configuração de lasers conseguimos realizar a engenharia do acoplamento do tipo Rashba em três dimensões, o que não ocorre na física de estado sólido:

$$H = \gamma \widehat{r}.\left(\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{\sigma}\right), \tag{3.1.4}$$

onde $\overrightarrow{r}$ define a posição do íon em relação ao centro de massa da armadilha iônica. Observamos que as Eqs.(3.1.2) até Eq.(3.1.4) - que descrevem respectivamente dois hamiltonianos bidimensionais e um tridimensional - produzem o Zitterbewegung não usual, mas o mesmo não ocorre para qualquer acoplamento do tipo Rashba e Dresselhaus no caso unidimensional, que possuem, respectivamente, hamiltonianos das formas $H = \gamma\sigma_x p_y$ e $H = \gamma\sigma_x p_x$. Para que ocorra tal efeito é necessário que um dos lasers utilizados para gerar a Eq.(3.1.1) seja ajustado de outra forma, a qual, ao invés de produzir uma interação do tipo *first-blue* e *first-red sidebands* produzirá uma interação do tipo *carrier*. Neste caso, derivamos um hamiltoniano em uma dimensão da forma ($\overline{\Omega}$ sendo a frequência de Rabi):

$$H = \gamma p_x \sigma_y + \overline{\Omega}\sigma_z, \tag{3.1.5}$$

na qual o gap entre as energias positivas e negativas, que é ingrediente essencial para a produção do Zitterbewegung, está presente no hamiltoniano da Eq.(3.1.5) com origem no termo Stark $\overline{\Omega}\sigma_z$ que produzirá o Zitterbewegung não usual. Com as mesmas configurações de lasers da Eq.(3.1.5), mas com uma nova escolha das fases ϕ_1 e ϕ_2, conseguimos imediatamente obter o hamiltoniano $H = \Delta\eta\Omega p_x \sigma_x + \overline{\Omega}\sigma_z$, que simula a equação de Dirac

em uma dimensão.[47]

3.1.3 Acoplamento spin-órbita do tipo Dresselhaus

Além da interação do tipo Rashba, podemos simular a interação spin-órbita do tipo Dresselhaus. Para isso, é preciso utilizar dois lasers, cada um produzindo um acoplamento do tipo *first-blue* e *first-red sidebands*, além da escolha das fases $\phi_1 = -\phi_2 = \pi/2$ e $\phi_3 = -\phi_4 = 3\pi/2$, para obter:

$$H = \gamma \left(p_x \sigma_x - p_y \sigma_y \right) . \tag{3.1.6}$$

3.1.4 Acoplamentos simultâneos dos tipos Rashba e Dresselhaus

Agora, podemos simular um acoplamento que possui as interações spin-orbita do tipo Rashba e Dresselhaus agindo simultaneamente. Para isso, usamos quatro lasers, dos quais dois passam através do modulador eletro-óptico e cada um produz interações do tipo *firt-blue e first-red sidebands*. Além do ajuste das fases para $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi$, $\phi_3 = \pi/2$ e $\phi_4 = 3\pi/2$. Os outros dois lasers também passam atráves de um modulador eletro-óptico para que cada laser possa gerar as interações do tipo *first-blue e first-red sidebands*, mas com as fases ajustadas para $\phi_5 = 0$, $\phi_6 = \Pi$, $\phi_7 = \Pi/2$ e $\phi_8 = 3\Pi/2$. Pelo fato de as frequências de Rabi serem distintas $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ e $\Omega_3 = \Omega_4 = \overline{\Omega}$, conseguimos derivar a interação do tipo Rashba e Dresselhauss simultaneamente em duas dimensões, o que nos leva ao hamiltoniano ($\overrightarrow{z}$ seleciona a posição do átomo):

$$H = \gamma \widehat{z} \left(\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{\sigma} \right) + \overline{\gamma} \left(p_x \sigma_x - p_y \sigma_y \right) \tag{3.1.7}$$

onde $\overline{\gamma} = \overline{\Omega}$, permitindo a simulação completa dos efeitos de spin-órbita da física de estadao sólido.

Neste momento é importante salientar que um íon com quatro níveis eletrônicos, em uma armadilha do tipo Paul , como é realizado na referência,[41] com dois níveis adicionais $\left|g^{'}\right\rangle$ e $\left|e^{'}\right\rangle$ tem o mesmo momento angular que $|g\rangle$ e $|e\rangle$, mas energias e momentos angulares distintos. É fundamental que ocorram transições cruzadas $|g\rangle \leftrightarrow \left|e^{'}\right\rangle$ e $|e\rangle \leftrightarrow \left|g^{'}\right\rangle$, como mostrado na Fig. (1). Todos os hamiltonianos das Eq.(3.1.2) a Eq.(3.1.6) têm as estruturas modificadas para simular matematicamente o hamiltoniano usado para derivar o Ziterbewegung não usual da referência[46] . Focando apenas na interação do tipo Rashba o hamiltoniano é modificado para a seguinte forma:

$$H = \sigma_x \otimes \Gamma \left(p_x \sigma_y - p_y \sigma_x\right) \tag{3.1.8}$$

onde $\Gamma = \Delta\eta\Omega$ e σ_x é analogo à matriz de Pauli σ_x restrita ao subespaço $\left|g^{'}\right\rangle$ e $\left|e^{'}\right\rangle$. Todos os halmitonianos, da Eq. (3.1.3) até a Eq. (3.1.7), são modificados para incluir um produto tensorial com τ_x.

Por outro lado, em termos de simplicidade, nos dedicaremos a desenvolver o sistema constituído por um íon com dois níveis eletrônicos, como demonstrado anteriormente, que recupera a mesma dependência temporal das equações de movimento do Zitterbewegung não usual , similar a referência[46] . De fato, ao começar com o acoplamento anisotrópico tipo Rashba da Eq.(3.1.2) obtemos na representação de Heisenberg

$$\alpha(t) = \alpha(0) - \frac{c^2 P_\alpha}{H} t - iH \left(c\sigma_\beta + \frac{c^2 P_\alpha}{H}\right) \left(e^{iHt} - 1\right) \tag{3.1.9}$$

com $\beta \neq \alpha = x, y$. Observamos que a Eq.(3.1.7) possui a mesma dependência temporal que a equação de movimento gerada a partir do hamiltoniano de Dirac, com o movimento de tremulação vindo do terceiro termo da equação. Considerando daqui em diante um estado inicial da forma $|\psi(0)\rangle = \prod_\alpha exp\left[-(p_\alpha - p_{0\alpha}/2\mu_\alpha)\right] \otimes |\phi(0)\rangle$, autoestado do momento centrado em torno de $p_{0\alpha}$, sendo μ_α e a largura da distribuição e $|\phi\rangle$ o estado associado aos níveis internos do íon, podemos com isso, computar o valor médio da posição vibracional do íon $\langle\overline{\alpha}\rangle = Tr\left[\overline{\alpha}\rho(t)\right]$:

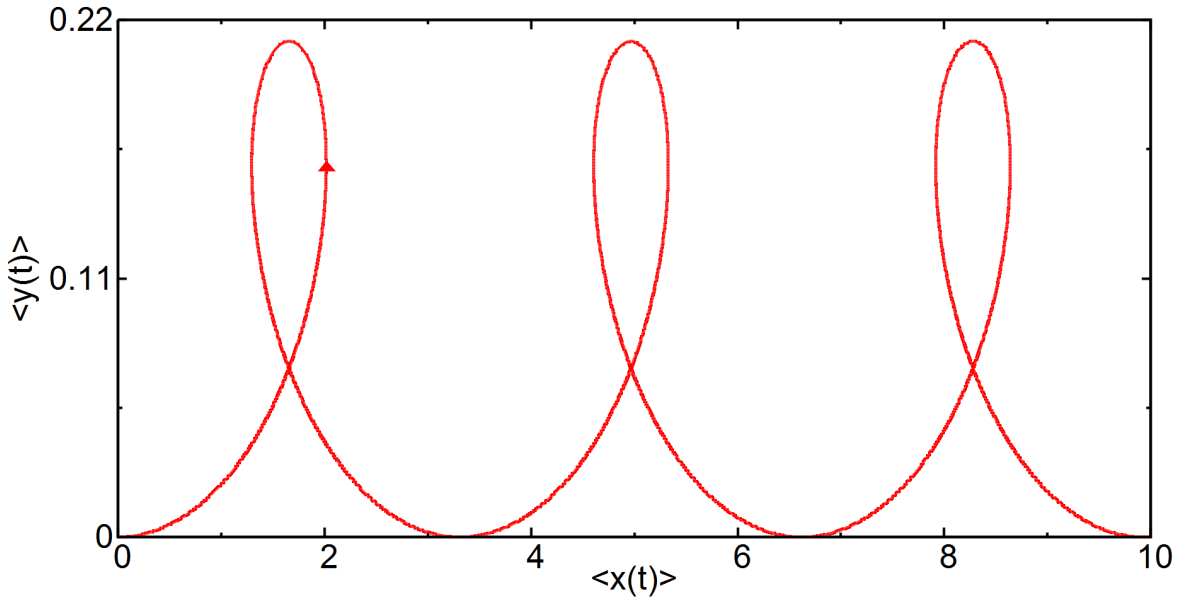
$$\begin{aligned}\langle\overline{\alpha}(\tau)\rangle = \langle\overline{\alpha}(0)\rangle &+ (-1)^{1+\delta_{\alpha x}}\epsilon^{\delta_{\alpha y}}\langle\overline{\sigma}(\beta)\rangle\,\tau \\ &+\frac{\epsilon\overline{p}_\beta}{2\xi}\left[\cos\left(2\xi^{1/2}\tau\right)-1\right]\langle\sigma_z\rangle \\ &+\frac{\epsilon\overline{p}_\beta}{2\xi^{3/2}}\left[\sin\left(2\xi^{1/2}\tau\right)-2\xi^{1/2}\tau\right] \\ &\times\left(\langle\sigma_x\rangle\overline{p}_x+\epsilon\langle\sigma_y\rangle\overline{p}_y\right)\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

onde são definidas as variáveis adimensionais de posição $\overline{\alpha} = \alpha/\Delta$, momento $\overline{p}_\alpha = 2\Delta p_\alpha$ e tempo $\tau = \eta\Omega t$, com $\xi = \sqrt{\langle\overline{p}_\alpha^2\rangle + \langle\overline{p}_\beta^2\rangle}$ e $\epsilon = \Delta_x^2\eta_x\Omega_x/\Delta_y^2\eta_y\Omega_y$. Além disso, temos uma delta de Kronecker $\delta_{\alpha x}$ e $\epsilon = 1$ ($\neq 1$), indica a interações do tipo Rashba isotrópica (anisotrópica). Quando preparamos as funções de ondas que são autoestado dos operadores momento nas direções x com $\epsilon^2\overline{p}_y^2 \gg \overline{p}_x^2$ e y no vácuo, juntamente com a função de onda do estado eletrônico do íon $|\phi\rangle = |a|\,|\uparrow\rangle + |b|\,e^{i\phi}\,|\downarrow\rangle$, com $|a| \neq |b|$ e $\phi = \Pi/2$, de tal forma que $\langle\sigma_x\rangle = 0$, obtemos as equações abaixo:

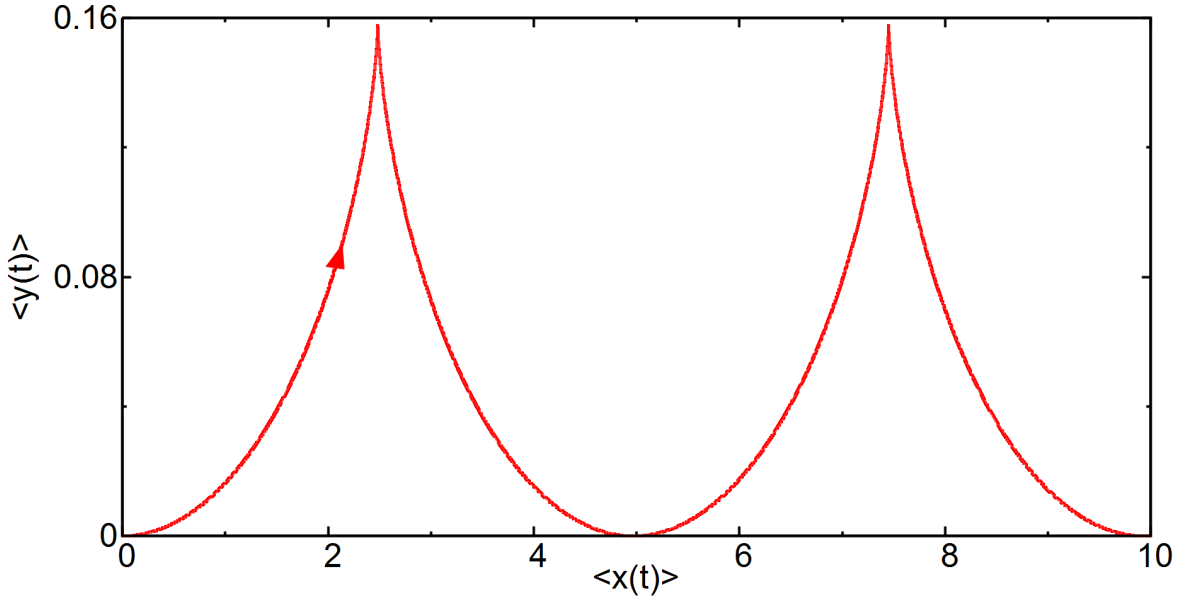
$$\langle\overline{x}(\tau)\rangle = \left(\frac{\epsilon^2\overline{p}_y^2}{2\overline{p}_x^2}-1\right)\tau - \frac{\epsilon^2\overline{p}_y^2}{2\overline{p}_x^3}\left[\sin\left(2\overline{p}_x\tau\right)\right], \tag{3.1.11a}$$

$$\langle\overline{y}(\tau)\rangle = \frac{\epsilon\overline{p}_x}{2\xi}\left[\cos\left(2\overline{p}_x\tau\right)-1\right] \tag{3.1.11b}$$

que nos levam às Figs.(3.1a e 3.1b) , que são os toroides da referência,[46] onde consideramos $\overline{p}_x = \sqrt{10}$ e $\overline{p}_y = 1$ para a Fig.(3.1a) $\epsilon = 3\overline{p}_x^2/2\overline{p}_y^2$ e para a Fig.(3.1b) $\epsilon = 2\overline{p}_x^2/2\overline{p}_y^2$.



(a) Movimento trocoidal.



(b) Movimento Cicloidal.

Figura 3.1 – Descrição dos movimentos realizado pelo íon armadilhado no subespaço vibracional, com ajuste das condições iniciais para $p_x = \sqrt{10}$ e $p_y = 1$, sendo que, para produzir o movimento trocoidal (a) utilizamos $\epsilon = 3\bar{p_x}^2/2\bar{p_y}^2$, já em relação a trajetória cicloidal (b) utilizamos $\bar{p_x}^2/\bar{p_y}^2$.

Fonte: Elaborado pelo autor

Também obtemos um movimento eliptíco mostrado na Fig.3.2, quando consideramos $\overline{p}_x = \sqrt{10}$ e $\overline{p}_y = 1$ com $\epsilon = \overline{p}_x^2\overline{p}_y^2$.

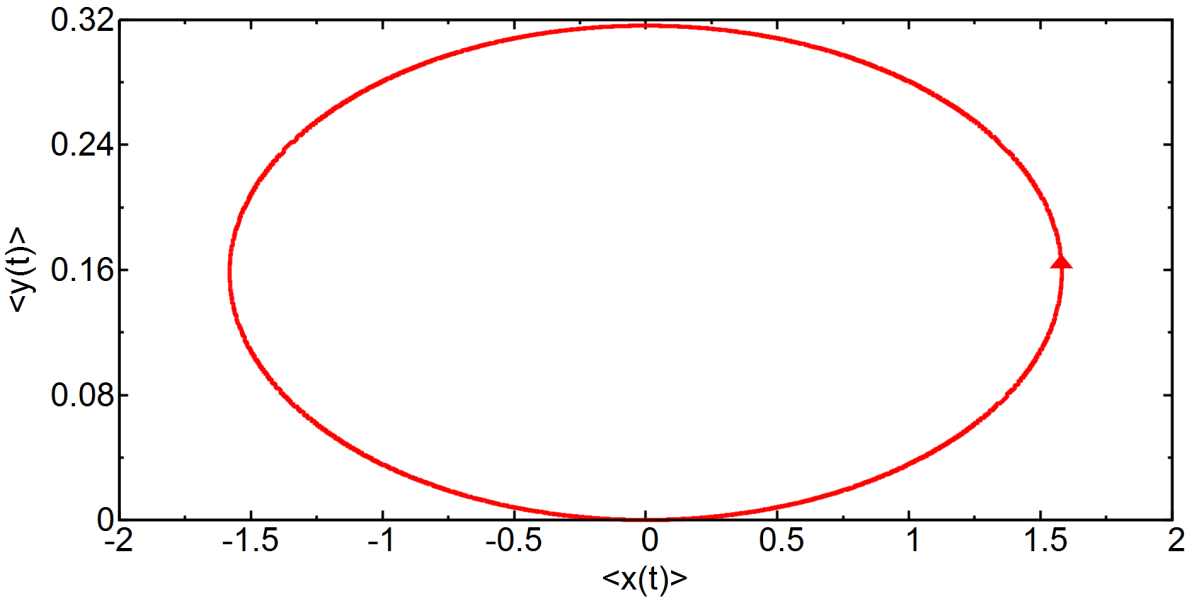


Figura 3.2 – Descrição do movimento elíptico produzido pelo íon armadilhado no subespaço vibracional, com ajuste das condições iniciais para $\bar{p_x} = \sqrt{10}$, $\bar{p_y} = 1$ e $\epsilon = \bar{p_x}^2 \bar{p_y}^2$.
Elaborado pelo autor

Quando consideramos a interação do tipo Dresselhaus chegamos exatamente à mesma dependência temporal que na Eq.(3.1.8), mas com a mudança de $\langle \sigma_x \rangle \overline{p}_x + \epsilon \langle \sigma_y \rangle \overline{p}_y$ para $\langle \sigma_x \rangle \overline{p}_y + \epsilon \langle \sigma_y \rangle \overline{p}_x$, afetando apenas a amplitude das curvas geradas pela Eq. (3.1.8). Com isso, podemos concluir que a interação do tipo Dresselhaus também produzirá as mesmas trajetórias trocoidais, na ausência do campo magnético, derivadas na referência[46] para o caso do acoplamento spin-órbita do tipo Rashba. Por outro lado, quando os acoplamentos do tipo Rashba e Dresselhaus estão presentes simultaneamente no sistema, fato reproduzido pela Eq. (3.1.6), obtemos ao invés da Eq.(3.1.8):

$$\begin{aligned} \langle \overline{\alpha}(\tau) \rangle &= \langle \overline{\alpha}(0) \rangle + \left[(-1)^{1+\delta_{\alpha x}} \left(\langle \sigma_\alpha \rangle - \kappa \langle \sigma_\beta \rangle \right) \right] \tau \\ &\quad - \kappa_\alpha \chi^{-2} \langle \overline{p}_\beta \rangle \langle \sigma_z \rangle [1 - \cos(\chi \tau)] \\ &\quad - \kappa_\alpha \chi^{-3} \langle \overline{p}_\beta \rangle \langle \sigma_z \rangle \Lambda [\sin(\chi \tau) - \tau] . \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

onde, definimos as grandezas adimensionais como o acoplamento $\kappa = \gamma / \overline{\gamma}$ e os parâmetros $\kappa_\alpha = 2 \left(\kappa^2 + (-1)^{1+\delta_{\alpha y}} \right)$, $\xi = 2\kappa \left[\kappa \xi^2 + 2 \left\langle \overline{p}_x \overline{p}_y \right\rangle \right]$ e $\Lambda = \left\langle \left(\kappa \overline{p}_y + \overline{p}_x \right) \sigma_y + \left(\kappa \overline{p}_x + \overline{p}_y \right) \sigma_x \right\rangle$. A Eq.(3.1.9) mostra que com ambos acoplamentos spin-órbita agindo simultaneamente com diferentes acoplamentos ($\kappa \neq 1$), ainda obtemos trajetórias similares às que são provo-

cadas pela ação dos acoplamentos spin-órbita separadamente, enquanto duas situações especiais emergem quando os níveis eletrônicos são preparados como autoestado de σ_z ou σ_α. No primeiro caso, não conseguimos o Zitterbewegung como esperado, pois o autoestado de σ_z não simula a superposição entre as energias positiva e negativa necessárias para o Zitterbewegung. Por outro lado, chegamos um interessante efeito: aprisionamos o movimento da partícula em uma direção α e conseguimos o movimento de um oscilador harmônico na direção β:

$$\langle \overline{\alpha}(\tau) \rangle = \langle \overline{\alpha}(0) \rangle - \kappa_\alpha \xi^{-2} \langle \overline{p_\beta} \rangle , \tag{3.1.13a}$$

$$\left\langle \overline{\beta}(\tau) \right\rangle = \left\langle \overline{\beta}(0) \right\rangle - \kappa_\beta \xi^{-2} \left[1 - \cos\left(\xi \tau \right) \right] . \tag{3.1.13b}$$

No segundo caso teremos um movimento uniforme na direção α e a dinâmica oscilatória na direção β:

$$\langle \overline{\alpha}(\tau) \rangle = \langle \overline{\alpha}(0) \rangle + (-1)^{1+\delta_{\alpha x}} \langle \sigma_\alpha \rangle \tau, \tag{3.1.14a}$$

$$\left\langle \overline{\beta}(\tau) \right\rangle = \left\langle \overline{\beta} \right\rangle (0) + (-1)^{1+\delta_{\alpha x}} \tau - \kappa_\beta \xi^{-3} \langle \overline{p_\alpha} \rangle \left\langle \overline{p_x} + \overline{p_y} \right\rangle \left[\sin\left(\xi \tau \right) - \tau \right] . \tag{3.1.14b}$$

Embora Eq, (3.1.14a) não produza as trajetórias similares às Figs. (1) e (2), observamos que a Eq.(3.1.9) pode ser apropriadamente manipulada para produzir esses movimentos cicloidais.

Agora, para a derivação de outros tipos de figuras de Lissajou, recorremos à versão do hamiltoniano do tipo Dresselhaus $H = \left(\gamma_x p_x \sigma_x - \gamma_y \right)$. Ajustando os feixes dos lasers de tal maneira que $\gamma_y^2 \gg \gamma_x^2$ e preparando a os níveis eletrônicos do íon como autoestado de σ_z obtemos:

$$\langle \overline{\alpha}(\tau) \rangle = \langle \overline{\alpha}(0) \rangle - \left\langle \overline{p}_\beta \right\rangle \left[1 - \cos\left(\overline{\omega} \right) \right] , \tag{3.1.15a}$$

$$\left\langle \overline{\beta}(\tau) \right\rangle = \left\langle \overline{\beta}(0) \right\rangle + \left\langle \overline{p}_\alpha \overline{p}_\beta^{-1} \right\rangle \left[1 - \cos\left(\sqrt{\overline{\omega} \tau} \right) \right] , \tag{3.1.15b}$$

com $\overline{\omega} = \left(\gamma_x / \gamma_y \right) \left\langle \overline{p}_y \right\rangle$. Na Fig. (3.3) mostramos as curvas determinadas a partir da Eq. (3.1.15) com $\overline{\omega} = 1.96$.

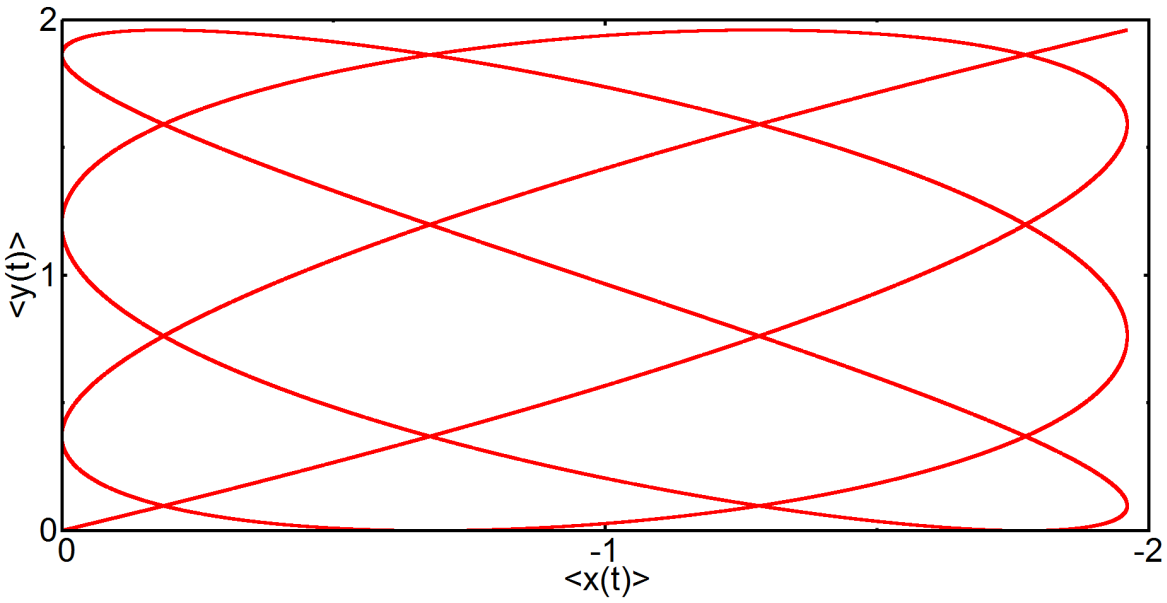


Figura 3.3 – Descrição do movimento vibracional do íon armadilhado que reproduz a figura de Lissajous. Para isso, foi utilizado aproximação dos feixes lasers $\gamma_y^2 \gg \gamma_x^2$, além de preparar o subespaço eletrônico do íon armadilhado em um autoestado de σ_z. Com o ajuste da frequência de vibração para $\omega = 1.96$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Apresentamos neste capítulo o protocolo para simular o não usual Zitterbewegung, que permite trajtórias cicloidáis na ausência de campos magnéticos, além de gerar as figuras de Lissajou no modo vibracional do íon armadilhado em duas dimensões. Esse protocolo é baseado na engenheirar do acoplamentos spin-órbitas dos tipos Rashba e Dresselhaus, que permite mapear os efeitos da interação spin-órbita da física do estado sólido no ambiente experimental dos armadilhas iônicas, que possui alto grau de controle.

CAPÍTULO 4

PARTICIONANDO O ESPAÇO DE FOCK PARA A PRODUÇÃO E PROTEÇÃO DE ESTADOS

4.1 Introdução

Com o surgimento da computação e comunicação quântica tornou-se obrigatório o desenvolvimentos de técnicas para o controle para manipulação coerente de estado quânticos. Desde a década de 1990 muito se avançou no desenvolvimento de técnicas de engenharia de hamiltonianos efetivos para a preparação de estados não clássicos e manipulação da evolução coerrente desses estados. Observamos também os progressos relacionados às técnicas para o controle da decoerrência de estados quânticos, tais como a correção de erros, os subespaços livres de decoerrênia, a engenharia de reservatório e o feedback quântico. Todos esses conhecimentos teóricos para controlar a decoerrência de estados quânticos já foi implementadas experimentalmente.

Mais especificamente, a busca por estados de Fock estacionários, tem sido intensa. Essa busca levou recentemente a um importante resultado no ambito da eletrodinâmica quântica, que é a geração de estados de Fock, com número de fóton variando até 7 e com probabilidade no entorno de 0.4, utilizando o método de *feedback* quântico. Estados de número fora do equilíbrio até 2 fótons eram há muito preparados em eletrodinâmica quântica de cavidade, como também em armadilhas iônicas e mais recentemente, na ele-

trodinâmica quântica de circuitos onde se alcança estados de número igual a 6.

Neste capítulo utilizamos, no contexto da física de íons armadilhados, as técnicas de engenharia de hamiltonianos e de reservatórios mencionadas na introdução. Apresentaremos um protocolo para produzir, com alto grau de fidelidade, estados de Fock quase-estacionários e superposições estacionárias de estados de Fock. O protocolo proposto depende de dois ingredientes fundamentais: a engenharia de interações confinadas a um determinado subespaço do espaço de Fock e a adaptação, para o contexto do íon armadilhado, da técnica de engenharia de reservatórios, originalmente proposta no ambito da eletrodinâmica quântica de cavidade.[51] No que diz respeito a engenharia, devemos derivar as interações efetivas do tipo Jaynes-Cumming e anti-Jaynes-Cumming confinadas a subespaço de Fock delimitados superiormente e inferiormente, além das interações confinadas a fatias do espaço de Fock. As interações delimitadas superiormente (*upper bounded*, *ub*) atuam sobre os estados de Focke entre $|0\rangle$ e $|M\rangle$; aquelas delimitads inferiormente (*lower bounded*, *lb*) atuam nos estados entre $|N\rangle$ e $|\infty\rangle$ e, finalmente, aquelas que demilitam uma fatia do espaço de Fock (*sliced*) atuam nos estados entre $|M\rangle$ e $|N\rangle$, com $M < N$. Segundo esses hamiltonianos a evolução temporal do estado vibracional do íon deve permanecer confinada aos seus repectivos subespaços de Fock.

A técnica de reservatórios atômicos ffoi empregada para a preparação do estado de vácuo na eletrodinâmica quântica de cavidades,[52] e para a proposição teórica da engenharia de estados estacionários de Einstein-Podoslky-Rosen, utilizando dois modos comprimidos de uma cavidade com alto fator de qualidade.[53] Neste capítulo, usaremos uma adaptação, para o contexto das armadilhas iônicas, da técnica de reservátorios átomicos a partir da interação Jaynes-Cumming ou anti-Jaynes-Cumming *ub*. A interação do tipo Jaynes-Cumming ou anti-Jaynes-Cumming *ub* será utilizada para realizar a engenharia de um superoperador de Lindblad associado ao processo de absorção. De fato, isso implicará na competição desse superoperador de Lindblad, derivado da engenharia de reservátiorios, com o Lindbladiano derivado do reservatório térmico naturalmente associado a armadilha. Essa competição poderá ser ajustada em favor do processo de absorção engenheirado, levando assim qualquer estado inicial relativo ao movimento vibracional, a um estado de quase-estacionário de Fock. Além disso, quando utilizarmos as interações confinadas a uma fatia do espaço de Fock para a derivação de um reservatório engenheirado com o superoperador de Lindblad associado ao processo de absorção e que atue no subespaço

$\{|N\rangle, |N+1\rangle\}$, mostraremos que os parâmetros podem ser ajustados convenientemente, para que qualquer estado inicial seja conduzido a uma sobreposição estacionária de estados de Fock $|\psi\rangle = c_N |N\rangle + c_{N+1} |N+1\rangle$. Assim estendemos o esquema da referência[37] , que se aplica ao subespaço específico $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, para qualquer subespaço $\{|N\rangle, |N+1\rangle\}$.

4.1.1 Derivações dos hamiltonianos dos tipos Jaynes-Cumming e anti-Jaynes-Cumming *upper* e *lower-bounded*

Iniciaremos com o hamiltoniano que acopla os níveis eletrônicos e vibracionais do íon armadilhado, no qual os operadores dos estados internos do íon são os de criação $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ e destruição $\sigma_- = \sigma_-^\dagger$, $|g\rangle$ e $|e\rangle$ descrevendo os estados eletrônicos fundamental e excitado, respetivamente. Os operadores associados aos graus de liberdade vibracionais do íon são os de criação $a^\dagger$ e destruição a. No regime de bandas laterais resolvidas, em que a dessintonia entre a frequência de transição eletrônica ω_0 e a frequência do feixe laser ω (usada para acoplar os graus de liberdade externos e internos íon) é um múltiplo inteiro da frequência vibracional ν, ou seja, $k = (\omega_0 - \omega)/\nu$, obtemos:

$$H = \Omega e^{i\phi - \eta^2/2} \sigma_+ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\eta)^{2l+k}}{l!\,(l+k)!} \left(a^\dagger\right)^l a^l a^k + H.c, \tag{4.1.1}$$

onde Ω é a frequência de Rabi, η é o parâmetro de Lamb-Dicke e ϕ é a fase do laser. Por meio do ajuste do feixe laser para *first red* $(k = 1)$ ou *blue* $(k = -1)$ *sideband* e trabalhando com o parâmetro de Lamb-Dicke até a segunda ordem, derivamos a interação:

$$H_{k=\pm 1} = \chi(\eta) \left[\sigma_\pm \mathsf{A}(\eta) + \sigma_\mp \mathsf{A}^\dagger(\eta)\right], \tag{4.1.2}$$

na qual, $\chi(\eta) = \Omega\eta\left(1 - \eta^2/2\right)$ e $\mathsf{A}(\eta) = \left(1 - \eta^2 a^\dagger a/2\right) a$. Expandindo o operador A e $\mathsf{A}^\dagger$ na base dos estados de Fock e ajustando o parâmetro de Lamb-Dicke para $\eta^2 = 2/N$, de forma que $\mathsf{A}^\dagger(\eta)|N\rangle = 0$ decorre que $H_{k=\pm 1}$ decompoem-se em duas componentes: os

hamiltonianos *upper* e *lower-bound*, tal que

$$\begin{aligned} H_{k=\pm l} &= H_{\pm}^{(ub)} + H_{\pm}^{(lb)}, \\ H_{\pm}^{(ub)} &= \sum_{n=0}^{N-l} \chi_n \left(|n\rangle \langle n+l| \, \sigma_{\pm} + H.C. \right), , \qquad (4.1.3a) \\ H_{\pm}^{(lb)} &= \sum_{n=N+l}^{\infty} \chi_n \left(|n\rangle \langle n+l| \, \sigma_{\pm} + H.C. \right), \qquad (4.1.3b) \end{aligned}$$

onde $\chi_n = \sqrt{n+1}\left(1-\eta^2/2\right)\chi(\eta)$ e as componentes (ub ou lb) H_+ e H_- referem-se às interações do tipo JC e AJC, respectivamente. A aproximação até segunda ordem considerada para o parâmetro de Lamb-Dicke, permite que sejam utilizados valores $N \sim 10$ do espaço de Fock. Procedemos, portanto, à engenharia das interações Jaynes-Cumming e anti-Jaynes-Cumming restritas aos subespaços de $|0\rangle$ a $|N\rangle$ ou de $|N+1\rangle$ a $|\infty\rangle$, qualquer que seja o interiro N ajustado através da escolha de η. Além disso, o estado inicial constituí-se em outro ingrediente crucial para esse processo de engenharia, dado que este deve também estar restrito ao subespaço desejado. De fato, a evolução do estado do campo $\rho = \sum_{m,n=0}^{N} \rho_{mn} |m\rangle \langle n|$ $\left(\rho = \sum_{m,n=N}^{\infty} \rho_{mn} |m\rangle \langle n|\right)$, qualquer que seja o estado eletrônico, permanece confinado ao subespaço *upper (lower)-bounded* sob a ação do hamiltoniano Jaynes-Cumming ub (anti-Jaynes-Cumming lb).

Obeservamos a possibilidade de desacoplarmos os graus de liberdade externo e interno nos hamiltonianos acima derivados, considerando-se um campo bicromático (gerado através do feixe laser utilizado acima e de um modulador eletroóptico), sintonizado simultaneâmente com o *firs red* e *first blue sidebands*, tal que $H = H^{ub} + H^{lb}$, onde:

$$\begin{aligned} H^{ub} &= \sum_{n=0}^{N-l} \chi_N \left(|n\rangle \langle n+l| + H.C \right) \sigma_x, \\ H^{lb} &= \sum_{n=N+l}^{\infty} \chi_N \left(|n\rangle \langle n+l| + H.C \right) \sigma_x, \qquad (4.1.4) \end{aligned}$$

A escolha do estado eletrônico como autoestado de σ_x evidentimente desacopla os graus de liberdade vibracionais e internos do íon, permitindo a seleção direta dos subespaços *upper* e *lower-bounded*.

A fim de realizar a engenharia do hamiltoniano que confine a dinâmica dos estados vibracionais a uma fatia do espaço de Fock, consideramos novamente dois feixes laser.

Um dos feixes sintonizado, via modulador eletro-óptico, de forma a produzir as interações dos tipos *first-red* (Ω_3) e *first-blue* (Ω_2) *sidebands*, além da interação *carrier* (Ω_1), enquanto o outro laser (Ω_4) tem sua frequência ajustada de forma ressonante com a transição eletrônica. Trabalhando novamente com termos até a segunda ordem nos parâmetros de Lamb-Dicke, ajustados tal que $\eta_1^2 = \eta_4^2 = 2/(N+1)$, $\eta_2^2 = 2/N$ e $\eta_3^2 = 2/(N-1)$, obtemos a interação:

$$H = \Omega\left(\mathbf{B}\sigma_+ + \mathbf{B}^\dagger\sigma_-\right), \tag{4.1.5}$$

onde, $\mathbf{B} = \bar{\Omega}_1 N_{n+1} + \bar{\Omega}_2 N_n + \bar{\Omega}_3 N_{n-1} a + \bar{\Omega}_4 a^\dagger N_{n+1}$ e $N_n = \mathbf{1} - \eta^2 a^\dagger/n$. As frequências de Rabi foram ajustadas tal que $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1/\Omega = (N+1)\sqrt{N+1}/(N-1)$, $\bar{\Omega}_2 = \Omega_2/\Omega = N\sqrt{N+1}/(N+1)$, $\bar{\Omega}_3 = \Omega_3/\Omega$ e $\bar{\Omega}_4 = \bar{\Omega}_3^{-1}$. Verificamos que para um estado preparado na forma $|\psi\rangle = c_N|N\rangle + c_{N+1}|N+1\rangle$ com $c_N/c_{N+1} = \bar{\Omega}_3$, a evolução governada pelo hamiltoniano da Eq.(4.1.5) confina $|\psi\rangle$ ao subespaço $\{|N\rangle, |N+1\rangle\}$. Embora esse hamiltoniano não se aplique aos casos $N = 0$ e 1, devido a escolha do parâmetro de Lamb-Dicke utilizado para a engenharia da interação confinada a uma fatia do espaço de Fock, o caso $N = 1$ pode ser implementado utilizando a engenharia de interações, confinada ao subespaço $|1\rangle, |2\rangle$, via dois feixes laser, um dos quais sintonizado com a transição do tipo *carrier* (Ω_1), enquanto o outro é sintonizado, via modulador eletro-ótico, nas interações dos tipos *carrier* e *first-blue sidebands* ($\Omega_1 = \Omega_3$). Ademais, o primeiro laser é ajustado para o regime de Lamb-Dicke, enquanto o segundo é ajustado para a aproximação de segunda ordem do parâmetro de Lamb-Dicke ($\eta_2 = \eta_3 = \eta$), com $\eta = 1$ e $\Omega_1 = \Omega_2$. Portanto, obtemos:

$$H = \Omega\left(\mathbf{C}\sigma_+ + \mathbf{C}^\dagger\sigma_-\right), \tag{4.1.6}$$

com $\mathbf{C} = \Omega_2\mathbf{N}_1/2 + \Omega_3 a^\dagger\mathbf{N}_1/2$. Ao ajustar $\Omega_3 = \left(c_2/\sqrt{2}c_1\right)\Omega_2$, a evolução do estado preparado $|\psi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle$ é automaticamente confinada ao subespaço $\{|1\rangle, |2\rangle\}$. Finalmente, podemos estender, sobe as mesmas condições das Eqs.(4.1.5) e (4.1.6), a engenharia de hamiltonianos para confinar qualquer estado inicia $\rho = \sum_{m,n=N}^{N+l}\rho_{mn}|m\rangle\langle n|$ ao subespaço $\{|N\rangle, ..., |N+l\rangle\}$ usando l lasers adicionais. Para isso, também é necessário

ajustar os parâmetros de Lamb-Dicke e as frequências de Rabi associadas a cada laser de acordo com os coeficientes da superposição de estado de Fock ($|\psi\rangle$), tal que $\mathbf{B}\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle$. Como mostraremos em seguida, com a condição adicioanl para $\lambda = 0$ o estado confinado será também protegido contra a decoerência.

4.2 Estado de Fock de equilíbrio

Focando agora nas aplicações dos (sete) hamiltonianos derivados anteriormente, em primeiro lugar apresentaremos um método para proteção de estados de Fock, que baseia-se na engenharia de reservatório atómicos[51] . Para este fim, mapeamos para o contexto de íon aprisionados a técnica originalmente proposta na referência[51] , no contexto da eletrodinâmica quântica de cavidades. Nessa técnica, sucessivas interações do átomo com a cavidade são utilizadas para realizar a engenharia de um reservatório conveniente, extra ao reservatório térmico naturalmente associado à cavidade. Para realizar a engenharia de reservatório no contexto da física dos íons armadilhados, simularemos as sucessivas interações do atómo com a cavidade por intermédio de consecutivos pulsos laser, utilizado para produzir a interação da Eq.(4.1.3a). Considerando H_{+}^{lb} (H_{-}^{ub}) e preparando o íon no estado eletrônico $|g\rangle$ ($|e\rangle$) antes da aplicação de cada pulso laser, é direto obter, no regime de acoplamento fraco $\chi(\eta)\tau \ll 1$, com τ indicando o tempo de duração de cada pulso, a equação mestra derivada é:

$$\mathcal{L}_{eng}^{1}\rho = \frac{\Gamma}{2}\left[2A^{\dagger}\rho\,(t)\,A - AA^{\dagger}\rho\,(t) - \rho\,(t)\,A^{\dagger}A\right], \tag{4.2.1}$$

com a constante de acoplamento efetiva $\Gamma = r\,(\chi\tau)^2$, onde r é o número de pulsos laser por unidade de tempo. Como a interação derivada na Eq.(4.1.3a), a atuação desse superoperador de Lindblad, derivado via eliminação adiabática dos graus de liberdade eletonicos, é confinada ao subespaço vibracional delimitado superiormente (ub). Analisando a equação completa:

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}_{eng}\rho + \mathcal{L}\rho, \tag{4.2.2}$$

na qual $\mathcal{L} = [(1+\bar{n})\,\gamma/2]\left(2a\rho a^{\dagger} - \rho a^{\dagger}a - a^{\dagger}a\rho\right) + [\bar{n}\gamma/2]\left(2a^{\dagger}\rho a - \rho a a^{\dagger} - a a^{\dagger}\rho\right)$ corresponde ao termo de Lindblad derivado do reservatório térmico naturalmente associado a armadilha iônica, não é difcil concluir que a condição $\Gamma \gg \gamma$ ($r \gg \gamma/(\chi\tau)^2$) implica que qualquer estado inicial $|\rho\rangle = \sum_{m,n=0}^{N} c_n \rho_{mn} |m\rangle\langle n|$ é assintoticamente conduzido ao estado de Fock quase-estacionário $|N = 2/\eta^2\rangle$. Isso ocorre porque, se $\Gamma \gg \gamma$, a contribuição do superoperador de Lindblad $\mathcal{L}_{eng}\rho$, confinada ao subespaço $|0\rangle$ até $|N\rangle$, prevalece sobre a ação do reservatório térmico natural da armadilha.

Na Fig.(4.1), partindo do estado térmico vibracional $\rho_{th} = \sum_n \overline{n}^n/(n+1)^{1+n}$ ($\overline{n} \sim 0.01$ indicando o número médio típico de ocupação e k_β a constante de Bolztman) e ajustando $\eta^2 = 2/M$, apresentamos a evolução da fidelidade $\mathcal{F}(t) = Tr\,|M\rangle\langle M|\,\rho(t)$ versus γt, considerando os valores, típicos, $\Gamma \sim 10^2\gamma$ e $\tau \sim 1/\Omega \sim 10^{-6}s$ para obter $\chi\tau \sim 0.1$. Como indicam as linhas pontilhadas preta e cinza o modo vibracional é conduzido ao estado de Fock quase-estacionário $M = 5\left(\eta^2 = 0.2, \Omega = 2.5\times 10^4\gamma\right)$ e $M = 10\left(\eta^2 = 0.2, \Omega = 2.5\times 10^4\gamma\right)$, com fidelidades significamente altas até o tempo de relaxação. O decaimento da fidelidade após atingir o máximo (no entorno da unidade), é devido a população de estados de Fock alheios ao subespaço de $|0\rangle$ a $|M\rangle$, induzida pelo termo de Lindblad, associado a absorção de fônons, do reservatório natural. Portanto, essa queda da fidelidade diminui à medida que temperatura do reservatório natural também diminui. É nesse sentido que nos referimos aos estados produzidoss como estados de Fock quase-estacionários.

Observamos que embora a interação da Eq.(4.1.3b) não seja adequada para a proteção do estado (uma vez que o superoperador de Lindblad realcionado ao reservatório térmico natural, inevitavelmente conduz qualquer estado confinado ao subespaço delimitado inferiormente (lb) para o estado de vácuo), ela é perfeitamente adequado, bem como todas as demais interações produzidas neste capítulo, para a implementação da "tesoura quântica", que é um dispositivo ótico para a engenharia de estados truncados.[18]

4.3 Superposição de estado em equilíbrio

Usando novamente o protocolo para a engenharia de reservatórios atômicos,[51] consideramos em seguida a utilização de sucessivos pulsos laser para a derivação da interação (4.1.4), com o íon preparado no estado fundamental antes da aplicação de cada pulso. Assumindo mais uma vez o regime de acoplamento fraco $\Omega\tau \ll 1$, obtemos a equação mestra

$$\mathfrak{L}_{eng}\rho = \frac{\tilde{\Gamma}}{2}\left(2\mathbf{B}\rho\mathbf{B}^{\dagger} - \mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{B}\rho - \rho\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{B}\right), \tag{4.3.1}$$

com $\tilde{\Gamma} = r\left(\Omega\tau\right)^2$. De forma similar ao que acontece com a Eq.(4.1.5), a ação do superoperador de Lindblad 4.3.1 é confinada ao subespaço $\{|N\rangle, |N+1\rangle\}$, com $N \neq 0, 1$, estabeleciado pelo hamiltoniano da Eq.(4.2.2) apartir do qual esse superoperador foi derivado. Voltando nossas atenções para a equação

$$\dot{\rho} = \mathfrak{L}_{eng}\rho + \mathcal{L}\rho, \tag{4.3.2}$$

verificamos que sobe a condição $\Gamma \gg \gamma$ que faz com que a contribuição do superoperador $\mathcal{L}_{eng}\rho$ prevaleça sobre $\mathcal{L}\rho$, qualquer superposição do tipo $|\psi\rangle = c_m|M\rangle + c_{M+1}|M+1\rangle$ é protegida contra a decoerência, se $\mathbf{B}|\psi\rangle = 0$. Partindo mais uma vez dos valores típicos $\bar{n} \approx 0.01$, $\Omega \sim 10^5 Hz$, $\chi\tau \sim 0.1$, e $\tilde{\Gamma} \sim 10^3\gamma$, e ajustando $\eta_1^2 = \eta_4^2 = 2/(M+1)$, $\eta_2^2 = 2/M$, $\eta_3^2 = 2/(M-1)$, apresentamos também na Fig.(4.1) a evolução da fidelidade $\mathcal{F}(t) = Tr|M\rangle\langle M|\rho(t)$ versus γt, para os casos $M = 4$ e 9. Verificamos que o modo vibracional do íon é conduzido para a superposição estacionária de estados de Fock ($|\psi\rangle$), com excepcional valor da fidelidade, como é mostrado pelas linhas continuas preta e cinza. No inset da Fig.(4.1), ampliamos o rápido e portanto obscuro crescimento das fidelidades. Finalmente, observamos que enquanto a proteção da sobreposição de estado é baseada no protocolo originalmente proposto na referência[35] e adotado na referência,[37] nosso protocolo para a proteção de estados de Fock difere daquela da referência.[35] De fato, a proteção da superposição de estados $|\psi\rangle$ exige a equação de autovalor nulo $\mathbf{B}|\psi\rangle = 0$, como na

referência.[35] Contudo, embora a condição $\mathbf{A}^{\dagger}(\eta)\,|N\rangle = 0$ seja automaticamente cumprida para a geração do requerido hamiltoniano cuja ação esteja confinada ao subespaço de Fock demilitadas superiormente (*ub*), esta é apenas uma condição necessária. Nosso protocolo apresentado nessa seção para protegeção os estados de Fock também demanda que a dinâmica desses estados permaneça confinada ao subespaço de Fock delimitado superiormente durante toda a evolução temporal. Os efeitos da temperatura associada ao reservatório térmico natural inevitavelmente aciona o hamiltoniano lb, fazendo com que a fidelidade decaia conforme se observa através das curvas pontilhadas da Fig.(4.1).

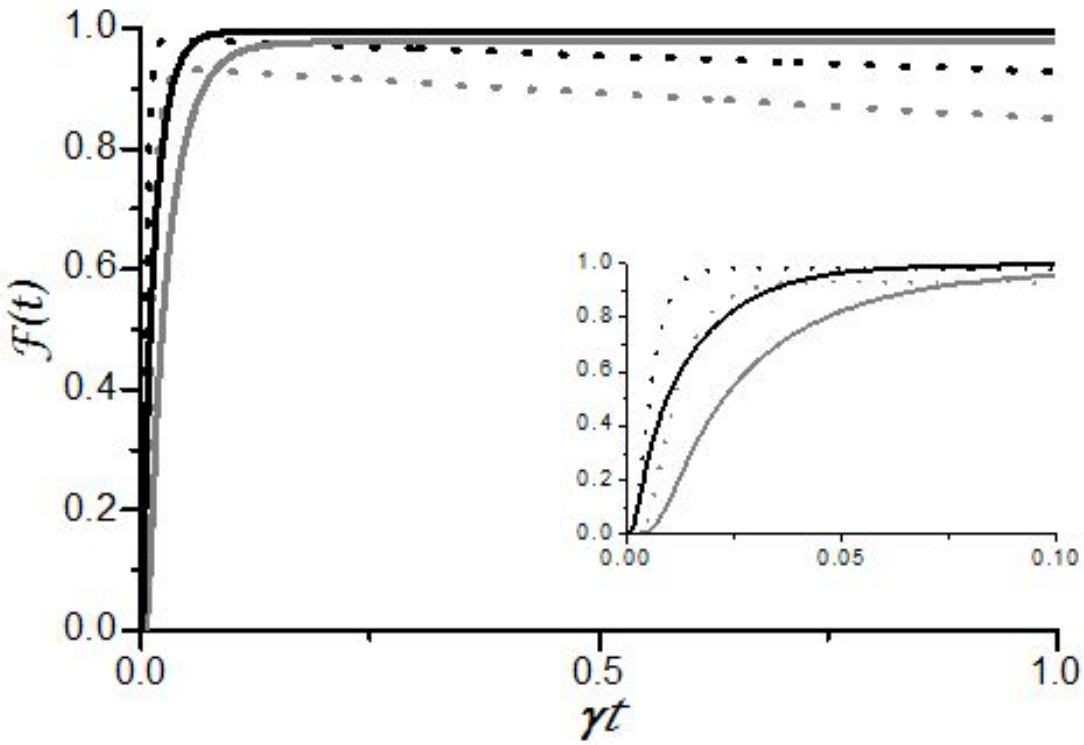


Figura 4.1 – Considerando valores típicos $\Gamma \sim 10^3\gamma$ e $\tau \sim 1/\Omega \sim 10^{-6}s$, para obter $\chi\tau \sim 1$. As linhas pontilhadas preta e cinza indicam, respectivamente, a evolução da fidelidadde $\mathcal{F}(t) = \mathrm{Tr}\,|M\rangle\langle M|\,\rho(t)$ versus $\gamma\tau$, para os estados de Fock $M = 5$ e $M = 10$, iniciando de um estado térmico $\overline{n} \simeq 0.01$. Começando do mesmo estado térmico e considerando $\Omega \sim 10^5 Hz$, $\chi\tau \sim 0.1$ e $\widetilde{\Gamma} \simeq 10^3\gamma$, as linhas sólidas preta e cinza apontam a evolução temporal da fidelidade$\mathcal{F}(t) = \mathrm{Tr}\,|\psi\rangle\langle\psi|\,\rho(t)$, na qual $|\psi\rangle$ representa a sobreposição de estados de Fock da forma $|\psi\rangle = |M\rangle + |M+1\rangle$, versus $\gamma\tau$, para os casos $M = 4$ e $M = 9$. O gráfico inserido mostra a evolução da fidelidade,num intervalo de tempo inicial, dos estados de Fock $|M\rangle$ e $|\psi\rangle$.

Fonte: Elaborada pelo autor

Portano, apresentamos um protocolo original para particionar o espaço de Fock através da engenharia de hamiltoniandos dos tipos Jaynes-Cumming ou anti-Jaynes-Cumming *upper-bounded*, *lower-bounded* e *sliced*, confinados a subepaços do espaço de Fock. Es-

ses hamiltonianos são usados para produzir estados de Fock quase-estacionário $|N\rangle$ e superposições estacionárias de estados de Fock confinadas ao subespaço $|N\rangle, |N+1\rangle$. Nosso protocolo pode também ser utilizado para a implementação da "tesoura quântica", o que demonstra sua adequação para a implementação de dispositivos lógicos quânticos e para testes dos fundamentos da mecânica quântica.

CAPÍTULO 5

OBSERVAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Nesta tese, foi demonstrado como simular o zitterbewegung não usual[46] , análogo ao conhecido movimento de tremulação do elétron relativístico da física de semicondutores, em que trajetórias helicoidáis ocorrem na ausência de campo magnético. Para realizar tal feito, foi utilizado um único íon, com dois níveis eletrônicos, em uma armadilha do tipo Paul.

Para o Zitterbewegung não usual foi considerar dois graus de liberdade vibracionais acoplados entre si através do níveis eletrônicos dos íon armadilhado, possibilitando assim uma dinâmica vibracional que reproduz tanto o zitterbewegung não usual como curvas de Lissajou, o que revela o alto grau de controle que se alcança nas armadilhas iônicas. Também foi notado que as curvas de Lissajus não podem ser derivadas do formalismo de Dirac, a menos que a velocidade da luz se altere com a direção de vibração do íon.

Finalmente, observou-se que para a simulação do zitterbewegung não usual e das curvas de Lissaju em armadilhas iônicas faz-se necessário a engenharia de hamiltonianos que simulem os acoplamentos spin-órbita do tipo Rashba isotrópico e anisotrópico, respectivamente. A esse respeito, de forma análoga ao acoplamento Rashba, conseguimos alcançar a interação do tipo Dresselhaus, o que certamente nos permite dizer que podemos reproduzir toda a variedade das interações spin-órbita da física do estado sólido em armadilhas iônicas.

Além disso, apresentaremos um protocolo para produzir, com alto grau de fidelidade, estados de Fock quase-estacionários e superposições estacionárias de estados de Fock. O protocolo proposto depende de dois ingredientes fundamentais: a engenharia de interações

confinadas a um determinado subespaço do espaço de Fock e a adaptação, para o contexto do íon armadilhado, da técnica de engenharia de reservatórios, originalmente proposta no ambito da eletrodinâmica quântica de cavidade.[51] No que diz respeito a engenharia, foi derivado as interações efetivas do tipo Jaynes-Cumming e anti-Jaynes-Cumming confinadas a subespaço de Fock delimitados superiormente e inferiormente, além das interações confinadas a fatias do espaço de Fock. As interações delimitadas superiormente (*upper bounded*, *ub*) atuam sobre os estados de Focke entre $|0\rangle$ e $|M\rangle$; aquelas delimitads inferiormente (*lower bounded*, *lb*) atuam nos estados entre $|N\rangle$ e $|\infty\rangle$ e, finalmente, aquelas que demilitam uma fatia do espaço de Fock (*sliced*) atuam nos estados entre $|M\rangle$ e $|N\rangle$, com $M < N$. Segundo esses hamiltonianos a evolução temporal do estado vibracional do íon deve permanecer confinada aos seus repectivos subespaços de Fock. A interação do tipo *JC* ou *AJC ub* será utilizadas para realizar a engenharia de um superoperador de Lindblad associado ao processo de absorção. De fato, isso implicaou na competição desse superoperador de Lindblad associado a absorção, derivado da engenharia de reservátiorios, com o Lindbladiano derivado do reservatório térmico naturalmente associado a armadilha. Essa competição foi ajustada em favor do processo de absorção engenheirado, levando assim qualquer estado inicial relativo ao movimento vibracional, ao estado de quase-estacionário de Fock. Além disso, quando foi utilizado as interações confinadas a uma fatia do espaço de Fock para a derivação de um de reservatório engenheirado com o superoperador de Lindblad associado ao processo de absorção e que atue no subespaço $\{|N\rangle, |N+1\rangle\}$, mostraremos que os parâmetros podem ser ajustados convenientemente, para que qualquer estado inicial seja conduzido a uma sobreposição estacionária de Fock $|\psi\rangle = c_N |N\rangle + c_{N+1} |N+1\rangle$. Assim estendemos o esquema da referência[37] , que se aplique ao subespaço específico $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

Para finalizar, decreveremos as perpectivas futuras: No âmbito da EQC, pretendemos armadilhar átomos neutros em cavidades cruzadas —duas cavidades com eixos ópticos perpendiculares entre si, na ausência de campos externos. Para isso devemos recorrer à engenharia da interações entre o átomo e modos da cavidade que simule o Zitterbewegung não usual.[46] A ocorrência de trajetórias helicoidais de partículas na ausência de campos magnéticos, fenômeno emblemático do Zitterbewegung não usual é que nos permite antecipar a possibilidade do aprisionamento de átomos neutros em cavidades cruzadas. Com isso podemos controlar com maior grau de liberadade o tempo de interação átomo-campo

em EQC, além de outras aplicações, como por exemplo a possibilidade de interações sucessivas do mesmo átomo com o modo da cavidade. Pretendemos também no contexto da EQC, simular o zitterbewegung tanto através do movimento espacial do átomo ,a ser explicitamente considerado como ocorre no tratamento do Stern-Gerlach ótico,[?] como através da quadratura de posição modo da cavidade. Dessa forma, se a medida da posição do átomo é um aspecto limitante para a verificação experimental deste efeito em EQC,podemos alternativamente evidenciá-lo através da medida da quadratura do campo.

REFERÊNCIAS

1 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, R.; ROSEN, R. Can quatum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review Letters*, v. 47, n. 77, p. 0777-0780, 1935.

2 BELL, J. S. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics Publishing Co*, v. 1, n. 3, p. 195-200, 1964.

3 LEIBFRIED, D.; BLATT, R.; MONROE, C.; WINELAND, D. J. Quantum dynamics of single trapped ions. *Reviews of Modern Physics*, v. 75, n. 1, p.281-324, 2003.

4 TURCHETTE, Q. A.; WOOD, C. S.; KING, B. E.; MYATT, C. J.;LEIBFRIED, D.; ITANO, W. M.; MONROE, C.; WINELAND, D. J. Deterministic entanglement of two trapped ions. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 17, p. 3631-3634, 1998.

5 MEEKHOF, D. M.; MONROE, C.; KING, B. E.; ITANO, W. M.; WINELAND, D. J. Generation of nonclassical motional states of a trapped atom. *Physical Review Letters*, v. 76, n. 11, p. 1796-1799, 1996.

6 MONROE, C.; MEEKHOF, D. M.; KING, B. E.; ITANO, W. M.; WINELAND, D. J. Demonstration of a fundamental quantum logic gate. *Physical Review Letters*, v. 75, n. 25, p. 4714-4717, 1995.

7 BRUNE, M.; HAGLEY, E.; DREYER, J.; MAITRE, X.; MAALI, A.; WUNDERLICH, C.; RAIMOND, J. M.; HACHORE, S. Observing the progressive decoherence of the "meter" in a quantum measurement. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 24, p.4887-4890, 1996.

8 MONROE, C.; MEEKHOF, D. M.; KING, B. E.; WINELAND, D. J. A Schrondinger cat superposition state of an atom. *Science*, v. 272, n. 5265, p. 1131-1136, 1996.

9 SHOR, P. W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *Siam Journal on Computing*, v. 26, n. 5, p. 1484-1509, 1997.

10 VANDERSYPEN, L. M. K.; STEFFEN, M.; BREYA, G.; YNNONI, C. S; SHERWOOD, M. H,; CHUNG, I. L. Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. *Nature*, v. 414, n. 6866, p. 883-887, 2001.

11 BENNETT, C. D.; DIVICENZO, D. P. Quantum computing - towards an engineering era. *Physical Review Letters*, v. 377, n. 6548, p. 389-390, 1995.

12 WOOTTERS, W. K.; ZUREK, W. H. A single quantum cannot be cloned. *Nature*, v. 299, n. 5886, p. 802-803, 1982.

13 MOUSSA, M. H. Y. Teleportation with identity interchange of quantum states. *Physical Review A*, v. 55, n. 5, p. R3287-R3290, 1997.

14 BRATTKE, S.; VARCOE, B. T. H.; WALTHER, H. Generation of photon number states on demand via cavity quantum electrodynamics. *Physical Review Letters*, v. 86, n. 16, p. 3534-3537, 2001.

15 BRUNE, M.; SCHMIDT-KALER, F.; MAALI, A.; DREYER, J.; HAGLEY, E.; RAIMOND, J. M.; HAROCHE, S. Quantum rabi oscillation: a direct test of field quantization in a cavity. *Physical Review Letters*, v. 76, n. 11, p. 1800-1803, 1996.

16 KNIGHT, P. Discrete charm of the photon. *Nature*, v. 330, n. 6573, p. 392-393, 1996.

17 LEIBFRIED, D.; MEEKHOF, D. M.; KING, B. E.; ITANO, W. M.; WINELAND, D. J. Experimental determination of the motional quantum state of a trapped atom. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 21, p. 4281-8285, 1996.

18 BARNETT, S. M.; PEGG, D. T. Phase measurement by projection synthesis. *Physical Review Letters*, v. 76, n. 22, p. 4148-4150, 1996.

19 BASEIA, B.; MOUSSA, M. H. Y. BAGNATO, V. S. Q-function measurement by projection synthesis. *Physical Review A*, v. 231, n. 6, p. 331-334, 1997.

20 PEGG, D. T.; PHILLIPS, L. S.; BARNETT, S. M. Optical state truncation by projection synthesis. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 8, p. 1604-1606, 1998.

21 D'ARIANO, G. M.; MACCONE, L; PARIS, M. G. A.; SACCHI, M. F. Optical fock-state synthesize. *Physical Review A*, v. 61, n. 053817, p. 053817-1-053817-5, 2000.

22 PAZ, J. P.; ZUREK, W. H. Quantum theory and measurement *Physical Review Letters*, v. 82, n. 26, p. 5181-5185, 1999.

23 WHEELER, J. A.; ZUREK, W. H. *Quantum theory and measurement*. Princeton: Princeton University Press, 1983. ISBN 0691083169.

24 PAZ, J. P.; ZUREK, W. H. Decoherence, chaos, and the 2nd law. *Physical Review Letters*, v. 72, n. 16, p. 2508-2511, 1994.

25 EKERT, A.; JOZSA, R. Quantum computation and Shor's factoring algorithm. *Reviews of Modern Physics*, v. 68, n. 3, p. 733-753, 1996.

26 CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. Quantum computations with cold trapped ions. *Physical Review Letters*, v. 74, n. 20, p. 4091-4094, 1995.

27 WINELAND, D. J.; BOLINGER, J. J.; ITANO, W. M.; MOORE, F. L.; HEINZEN, D. J. Spin squeezing and reduced quantum noise in spectroscopy. *Physical Review A*, v. 46, n. 11, p. R6797-R6800, 1992.

28 SHOR, P. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. *Physical Review A*, v. 52, n. 4, p. R2493–R2496, 1995.

29 MABUCHI, H.; ZOLLER, P. Inversion of quantum jumps in quantum optical systems under continuous observation. *Physical Review Letters*, v. 76, n. 17, p. 3108-3111, 1996.

30 VITALI, D.; TOMBESI, P.; MILBURN, G. J. Controlling the decoherence of a "meter"

via stroboscopic feedback. *Physical Review Letters*, v. 79, n. 13, p. 2442-2445, 1997.

31 ZANARDI, P; RASETTI, M. Noiseless quantum codes. *Physical Review Letters*, v. 79, n. 17, p. 3306-3309, 1997.

32 VIOLA, L.; KNILL, E.; LLOYD, S. Dynamical decoupling of open quantum systems. *Physical Review Letters*, v. 82, n. 12, p. 2417-2421, 1999.

33 WINELAND, D. J.; MONROE, C.; ITANO, W. M.; LEIBFRIED, D.; KING, B. E.; MEEKHOF, D. M. Experimental issues in coherent quantum-state manipulation of trapped atomic ions. *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, v. 103, n. 3, p. 259-328, 1998.

34 JAMES, D. F. V. Theory of heating of the quantum ground state of trapped ions. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 2, p. 317–320, 1998.

35 POYATOS, J. F.; CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. Quantum reservoir engineering with laser cooled trapped ions. *Physical Reviews Letters*, v. 77, n. 23, p. 4728-4731, 1996.

36 SAKURAI. *Advanced quantum mechanics*. 4th ed. Menlo Park, Calif.: Benjamin/Cummings Pub. Co, 1967. ISBN 0201067102.

37 CARVALHO, A. R. R.; MILMAN, P.; de MATTOS FILHO, L. R.; DAVIDOVICH, L. Decoherence, pointer engineering, and quantum state protection. *Physical Reviews Letters*, v. 86, n. 22, p. 4988-4991, 2001.

38 ALSING, P. M.; DOWLING, J. P.; MILBURN, G. J. Ion trap simulations of quantum fields in an expanding universe. *Physical Review Letters*, v. 94, n. 220401, p. 220401-1-220401-4, 2005.

39 SCHILEMANN, J.; LOSS, D.; WETERVELT, R. M. Zitterbewegung of electronic wave packets in III-V zinc-blende semiconductor quantum wells. *Physical Review Letters*, v. 94, n. 20, p. 206801-1-206801-4, 2005.

40 GARAY, L. J.; ANGLIN, J. R.; CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. Sonic analog of gravitational black holes in Bose-Einstein condensates. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 2, p.

4643–4647, 2000.

41 LAMATA, L.; LEÓN, J.; SCHÄTZ,T.; SOLANO, E. Dirac equation and quantum relativistic effetc in a single trapped ion. *Physical Review Letters*, v. 98, n. 25, p. 253005-1–25305-4, 2007.

42 GERRITSMA, R.; LANYON, B. P.; KIRCHMAIR, G.; ZAHRINGER, F.; HEMPEL, C.; CASANOVA, J.; GARCIA-RIPOLL, J. J.; SOLANO, E.; BLATT, R.; ROSS, C. F. Quantum simulation of the Klein Paradox with trapped ions. *Physical Review Letters*, v. 106, n. 6, p. 060503-1-060503-4, 2011.

43 CSERTI, J.; DAVID, G. Sonic analog of gravitational black holes in Bose-Einstein condensates. *Physical Review B*, v. 41, n. 17, p. 172305-1–172305-4, 2006.

44 KATSNELSON, M. I.; NOVOSELOV, K. S.; GEIM, A. K. Chiral tunnelling and the Klein paradox in graphene. *Nature Physics*, v. 2, n. 9, p. 620-625, 2006.

45 PERES, A.; TERNO,D. R. Quantum information and relativity theory. *Reviews of Modern Physics*, v. 98, n. 1, p. 93-123, 2004.

46 BERNARDES, E.; SCHILIEMANN, J.; LEE, M.; EGUES, J. C.; LOSS, D. Spin-orbit interaction in symmetric wells with two subbands. *Physical Review Letters*, v. 99, n. 07, p. 076603-1-076603-4, 2007.

47 GERRITSMAS, R.; KIRCHMAIR, G.; ZÄHRINGER, F; SOLANO, E.; BLATT, R.; ROOS, C. F. Quatum simulation of Dirac equation. *Nature*, v. 463, n. 7, p. 68–71, 2010.

48 RAMAKRISHNA, V. Relation between quantum computing and quantum controllability. *Physical Review A*, v. 54, n. 2, p. 1715, 1996.

49 BROWN, K. R.; OSPELKAUS, C.; COLOMBE, Y.; WILSON, A. C.; LEIDFRIED, D.; WINELAND, D. J. Coupled quantized mechanical oscillators. *Nature*, v. 471, n. 1, p. 196-199, 2011.

50 SACKETT, C. A.; KIELPINSKI, D.; KING, B. E.; LANGER, C.; MEYER, V.; MYATT, C. J.; ROWE, M.; TURCHETTE, Q. A.; ITANO, W. M; WINELAND, D. J. Experimental

entanglement of four particles. *Nature*, v. 404, n. 6775, p. 256-259, 2000.

51 ENGLERT, B. G.; MORIGI, G. *In coherent evolution in noisy environments*. Berlim: A. Bucjleiter and K. Hornberger, 2002. p.55

52 RAIMOND, J. M.; BRUNE, M.; HAROCHE, S. Manipulationg quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Reviews of Modern Physics*, v. 73, n. 3, p. 565-582, 2001.

53 PIELAWA, S.; DAVIDOVICH, L.; VITALI, D.; MORIGIA, G. Engineering atomic quantum reservoirs for photons. *Physical Reviews A*, v. 81, n. 4, p. 043802, 2010.