UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

CARLOS EDUARDO MAXIMO

Tomografia de estados
quânticos via Stern-Gerlach óptico
de cavidades cruzadas

São Carlos

2013

CARLOS EDUARDO MAXIMO

Tomografia de estados quânticos via
Stern-Gerlach óptico de cavidades cruzadas

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica
Orientador: Prof. Dr. Miled Hassan Yousef Moussa

Versão Corrigida
(Versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos
2013

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Maximo, Carlos Eduardo

Tomografia de estados quânticos via Stern-Gerlach
óptico de cavidades cruzadas / Carlos Eduardo Maximo;
orientador Miled Hassan Youssef Moussa - versão
corrigida -- São Carlos, 2013.
98 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos,
Universidade de São Paulo, 2013.

1. Interação radiação-matéria. 2. Eletrodinâmica
Quântica de Cavidades. 3. Litografia atômica. 4.
Tomografia de estados quânticos. I. Moussa, Miled
Hassan Youssef , orient. II. Título.

AGRADECIMENTOS

Seja na carreira científica ou mesmo na trajetória da vida, sempre existe um motivo para agradecer. Pessoas importantes surgem em nosso caminho e o tornam mais agradável de ser trilhado. Independente do tempo e a distância, por mais turbulento que o mundo possa se apresentar, estes permanecerão sempre em minha memória.

Agradeço acima de tudo a Deus, por me conceder a oportunidade de fazer o que gosto, e por sempre indicar a direção certa a seguir.

A minha mãe, Marta Maximo, e a meu pai, Carlos Alberto Maximo, por não medirem esforços a fim de que eu tivesse a chance que não tiveram. Esses fazem jus ao sobrenome que carrego e por toda vida serei grato.

A minha esposa, Heliny Maximo, pelo carinho e paciência dedicados. Seu apoio nos momentos de aflição cooperaram de forma direta para que este trabalho fosse concluído. A ela dedico essa dissertação.

A toda a família Maximo, em especial a meu primo, Raoni Maximo, pela ajuda com os desenhos esquemáticos discutidos durante o período de mestrado.

A família Navarro, principalmente aos meus tios, Marcelo Navarro e Sandra Navarro, pelo auxílio financeiro durante o período de graduação.

A toda família Carvalho por ter me recebido como parte dela.

Aos membros do grupo de óptica e informação quântica do IFSC-USP, em especial ao meu orientador, Miled Moussa, por colocar-me em contato com temas extremamente interessantes da física. O agradeço também por confiar-me um trabalho desta magnitude. Nesses dois anos, com certeza foi estabelecida uma relação de amizade da qual sempre prezarei.

Ao Wilson Rosado pela ótima convivência nesses dois anos de mestrado. Sempre esteve disposto a ajudar e ouvir em meio as adversidades encontradas neste período.

Aos mais recentes componentes da sala 34, João Getelina, pela ajuda com o inglês, e Guilherme Araújo, pelas discussões de física.

Aos parceiros de bandeirão, Diego Carvajal e Julian Grajales, pelos divertidos momentos de descontração e aprendizado.

Ao Tiago Batalhão, talvez a pessoa que mais ajudou neste trabalho, ao Gentil Neto e Mickel de Ponte, pelas dicas certeiras.

Ao amigo Diego Paiva, companheiro nos trabalhos de graduação, sendo a amizade mais antiga que conquistei em São Carlos. Obrigado pelos esclarecimentos pertinentes relacionados ao misterioso Latex.

Aos professores do IFSC e da UFSCar, que contribuíram fortemente para minha formação.

Por fim, agradeço a secretaria da pós-graduação, ao serviço de biblioteca e informação e ao serviço de gráfica de impressão.

*“The exquisite order displayed by our scientific understanding of the physical world calls
for the divine”.*

Vera Kistiakowsky - Professora Emérita do MIT (1928-)

RESUMO

MAXIMO, C. E. *Tomografia de estados quânticos via Stern-Gerlach óptico de cavidades cruzadas*. 2013. 98 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

No presente trabalho, buscou-se generalizar o Stern-Gerlach óptico para o caso de duas cavidades, as quais possuem eixos ópticos perpendiculares entre si. Nesse experimento, um pacote atômico de dois níveis incide em uma pequena fração do volume ocupado por dois modos, na região onde os nodos das ondas estacionárias de cada modo se superpõem. Diferentemente do Stern-Gerlach óptico de cavidade única, além do intercâmbio de fótons efetuado entre o átomo e cada modo separadamente, também ocorre interação modo-modo, mediada indiretamente pelo átomo. Esse fator contribui efetivamente na caracterização da distribuição de momento do átomo. Espera-se que os desvios de trajetória sofridos pelo átomo, decorrentes de sua interação simultânea com dois modos idênticos do campo de radiação, devam ser observados no plano definido pelas duas cavidades. O estudo é efetuado considerando-se o tratamento clássico da posição do centro de massa atômico, que está associado à sua direção de incidência. Além do que, considera-se a aproximação de Raman-Nath, na qual despreza-se a variação da energia cinética transversal ao movimento atômico, durante a interação átomo-modos. Verifica-se que a análise da distribuição de momento atômico transversal permite acessar a estatística de fótons dos modos das cavidades. Este resultado viabiliza a realização da tomografia dos estados de dois modos por meio da medida da distribuição de momento bidimensional dos átomos. Por fim, através da utilização de estados coerentes na configuração de cavidades cruzadas, investiga-se as possibilidades do controle da direção de deflexão do átomo para aplicações em litografia puramente quântica.

Palavras-chave: Interação radiação-matéria. Eletrodinâmica quântica de cavidades. Litografia atômica. Tomografia de estados quânticos.

ABSTRACT

MAXIMO C. E. *Quantum state tomography via optical Stern-Gerlach of crossed cavities*. 2013. 98 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

This work deals with the generalization of the optical Stern-Gerlach effect for two cavities whose optical axes are perpendicular to each other. An atomic wave of a two-level atom is focused on a small fraction of the volume occupied by the two modes, in the region where the standing waves nodes overlap. Unlike the optical Stern-Gerlach of single cavity, besides the separate photon exchange between an atom and each mode, there also occurs mode-mode interaction indirectly mediated by the atom. This fact contributes towards the characterization of the atomic momentum distribution. Trajectory deviations suffered by the atom due to its simultaneous interaction with the two identical modes of the radiation field are expected in the plane defined by the two cavities. The study is carried out considering the classical treatment of the atomic center of mass position, which is associated with its incidence direction. The Raman-Nath approximation, which neglects the variation in the kinetic energy transversal to the atomic motion during the interaction atom-modes is considered. The analysis of the transversal momentum distribution of the atom allows accessing the photon statistics of the cavities modes. This result enables the realization of the two-mode states tomography via measurement of the two-dimensional momentum distribution of the atom. Finally, by using coherent states of the crossed cavities configuration, the study investigates the possibilities of controlling the atomic deflection direction for applications to quantum lithography.

Palavras-chave: Radiation-matter interaction. Cavity quantum electrodynamics. Atomic lithography. Quantum state tomography.

Lista de Figuras

2.1	Potencial $U_n(x)$ no ponto $z = L_z/2$, com $n = 1, 2$ e 3 , para $\mu_y \mathcal{E}_0 = 1$	26
2.2	Um pacote de onda atômico incide ortogonalmente ao eixo óptico da cavidade. Um campo clássico prepara o estado atômico desejado e uma fenda colimadora de largura $\Delta x \ll \lambda$, anteposta ao campo, restringe o átomo a incidir em um dos nodos da onda estacionária formada no ressonador. Devido a ação do campo, o átomo deve sofrer deflexões na direção transversal x . Um detector conta o número de átomos em uma determinada posição. A cavidade da ilustração é do tipo Fabry-Pérot.	27
3.1	Gráfico da distribuição inicial Gaussiana em estilo tracejado, e distribuição exponencial em linha sólida. Em ambos os casos $\Delta x = 1$	36
3.2	Distribuição de momento como superposição de Gaussianas, em estilo tracejado, e Student com linha sólida. Em todos os casos fixou-se os valores $\alpha = 1.5e^{i\pi/6}$ e $\Delta x = \lambda/10$. Os valores de Λ especificados nos gráficos foram: a) $\Lambda = 10$, b) $\Lambda = 25$ e c) $\Lambda = 40$. Nos gráficos de a) a c), foi especificado $\varphi = 0$. Somente no gráfico d) optou-se por $\varphi = \pi$	38
4.1	Arranjo experimental de cavidades cruzadas. O pacote atômico incide perpendicularmente ao plano formado pelos eixos ópticos das cavidades, na região onde os nodos das duas ondas estacionárias se superpõem. O círculo tracejado representa a fenda colimadora de raio muito menor que o comprimento de onda dos ressonadores. Neste caso, espera-se que os desvios de trajetória do átomo ocorram no plano $x - y$	42
4.2	Representação pictórica de estados de Fock de dois modos, onde cada ponto do gráfico representa um estado Fock. Após a reindexação (4.20), os estados dos dois modos passam a ser representados por $ q, N - q\rangle$, com N denotando o número total de fótons de um dado subespaço e $0 \leq q \leq N$	45
4.3	Gráfico da distribuição exponencial bidimensional com $\Delta r = 1$	52
5.1	Distribuição de momento atômico transversal $W(\wp, \phi)$ via estado inicial $ g, 0, 0\rangle$, ou seja, $C_{0,0} = C_g = 1$	56
5.2	Distribuição de momento atômico transversal $W(\wp, \phi)$ via estado inicial $ e, 0, 0\rangle$, ou seja, $C_{0,0} = C_e = 1$	56
5.3	Distribuição de momento atômico transversal $W(\wp, \phi)$ via estado inicial $ g, 1, 0\rangle$, ou seja $C_{1,0} = C_g = 1$	57

5.4	Distribuição de momento atômico transversal $W(\wp, \phi)$ via estado inicial $ g, 0, 1\rangle$, ou seja $C_{0,1} = C_g = 1$	58
5.5	Distribuição de momento atômico transversal $W(\wp, \phi)$ via estado inicial $ e, 1, 0\rangle$, ou seja $C_{1,0} = C_e = 1$	58
5.6	Distribuição de momento atômico transversal $W(\wp, \phi)$ via estado inicial $ e, 0, 1\rangle$, ou seja $C_{0,1} = C_e = 1$	59
5.7	Distribuição de momento atômico transversal $W(\wp, \phi)$ via estado inicial $ g, 1, 1\rangle$, ou seja $C_{1,1} = C_g = 1$	60
5.8	Distribuição de momento atômico transversal $W(\wp, \phi)$ via estado inicial $ e, 1, 1\rangle$, ou seja $C_{1,1} = C_e = 1$	61
5.9	Gráfico da distribuição $W(\wp, \phi)$ com o estado coerente nos dois modos, para $\alpha = 1.5e^{i\pi/2}$, $\beta = 2e^{i\pi/5}$ e $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Como a distribuição central é muito maior que as deflexões, para melhor visualizá-las, foi feito um corte no eixo z	62
6.1	Distribuição de momento atômico transversal $W(\wp, \phi)$ com os dois modos inicialmente em estados coerentes para $\Lambda = 5$	64
6.2	Distribuição de momento atômico transversal $W(\wp, \phi)$ com os dois modos inicialmente em estados coerentes para $\Lambda = 10$	64
6.3	Distribuição de momento atômico transversal $W(\wp, \phi)$ com os dois modos inicialmente em estados coerentes para $\Lambda = 20$. Corte no eixo de $W(\wp, \phi)$	65
6.4	SGO de cavidades cruzadas em analogia com difração de luz por fenda circular. Nesta caso, a escolha dos parâmetros foram $\Lambda = 10$ $\alpha = 1.5e^{i\pi/2}$, $\beta = 1.5$ e $\varphi = 0$	69
6.5	Distribuição de momento do átomo com $\Lambda = 2$, $\alpha = \beta = 1.5i$ e $\varphi = 0$	71
6.6	Distribuição de momento do átomo com $\Lambda = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{3}{\sqrt{2}}i$ e $\varphi = 0$	71
6.7	Distribuição de momento do átomo com $\Lambda = 3$, $\alpha = \beta = 1.5i$ e $\varphi = \pi$	72
6.8	Distribuição de momento do átomo com $\Lambda = 2$, $\alpha = -2i$, $\beta = 2i$ e $\varphi = 0$	72

Sumário

1	Introdução	19
2	Óptica atômica com campos quânticos	23
2.1	Potencial efetivo do sistema átomo-campo	23
2.2	Redução do tratamento quântico espacial para um grau de liberdade	27
2.3	Aproximação de Raman-Nath	29
2.4	Regime de Stern-Gerlach	30
3	Tomografia do estado de um modo via deflexão atômica	33
3.1	Evolução temporal do sistema átomo-campo	33
3.2	Distribuição de momento atômico	35
3.3	Tomografia	39
4	Stern-Gerlach óptico de cavidades cruzadas	41
4.1	Formulação do problema	41
4.2	Diagonalização do Hamiltoniano do sistema	43
4.3	Evolução temporal do estado	46
4.4	Distribuição de momento atômico	49
4.5	Integrais bidimensionais de Fourier	51
5	Padrões de deflexões bidimensionais	55
5.1	Modos no estado de vácuo	55
5.2	Modos nos estados $ 0, 1\rangle$ e $ 1, 0\rangle$	57
5.3	Modos no estado $ 1, 1\rangle$	59
5.4	Estados Coerentes	61
6	Aplicações	63
6.1	Tomografia de dois modos	63
6.2	Litografia atômica	68
7	Conclusões e perspectivas	75
	Referências	77

A	Interação radiação-matéria	81
A.1	Quantização do campo eletromagnético	81
A.1.1	Equação de onda para o potencial vetorial	81
A.1.2	Solução da equação de onda para um ressonador retangular	82
A.1.3	O campo como um conjunto de osciladores desacoplados	85
A.2	Interação átomo-campo	87
A.2.1	Aproximação de dipolo atômico	87
A.2.2	Hamiltoniano atômico	88
A.2.3	Hamiltoniano de interação	89
A.2.4	Aproximação de ondas girantes	90
B	Transformação de Bogoliubov	93
C	Integrais Bidimensionais de Fourier	95

Capítulo 1

Introdução

Uma das descobertas fundamentais do século XX, que continua a intrigar os físicos (1-4), é o comportamento ondulatório da matéria. Ele se manifesta, por exemplo, no espalhamento de partículas por uma onda eletromagnética estacionária, devido ao perfil periódico do potencial em questão. É um conceito de suma importância em óptica atômica (5) e no estudo dos efeitos mecânicos da luz em partículas, profundamente investigados no século XX (6-9).

O primeiro trabalho a considerar a influência no movimento de partículas, devido a ação de uma onda eletromagnética estacionária, foi publicado em 1933 (10). Neste artigo, Kapitza e Dirac propõem um experimento onde um feixe de luz, de comprimento de onda específico, é aprisionado entre dois espelhos especiais. Quando um elétron atravessa essa região deve sofrer a ação de duas ondas progressivas, de mesma frequência, que se propagam em direções opostas. De forma independente, cada um desses feixes provoca espalhamento Compton onde um fóton é absorvido virtualmente pelo elétron e reemitido em uma direção arbitrária, espontaneamente. Como resultado desse processo, o elétron experimenta um recuo instantâneo e desvia-se de sua trajetória original, de forma análoga a reflexão especular de luz. Entretanto, quando duas ondas contra propagantes agem de forma conjunta no elétron, surge a probabilidade deste mesmo elétron absorver um fóton de uma onda e ser estimulado a reemitir pela existência de outra onda. Assim, a transferência de momento deixa ser aleatória sendo favorecida na direção de propagação do campo. No caso da emissão estimulada, a conservação de energia e momento levam a condição de Bragg para as possíveis deflexões que o elétron pode sofrer. Portanto, frequentemente faz-se a analogia deste fenômeno com a difração de luz por estruturas periódicas de matéria.

Em 1966 (11), o mesmo fenômeno foi generalizado para todas as partículas capazes de espalhar fótons, inclusive átomos neutros. O argumento utilizado aponta que o fator preponderante em questão não reside na natureza da partícula, mas sim no fato de que fótons obedecem a estatística de Bose-Einstein.

Devido a necessidade de feixes intensos, este efeito só pode ser observado com o advento

do Laser. O experimento que estabeleceu, definitivamente, a difração de partículas por uma onda eletromagnética estacionária foi proposto em 1985 (11). Nele, um bombeio óptico prepara um feixe de átomos de sódio em um estado excitado específico. Após este processo, os átomos atingem uma onda estacionária constituída de um modo do campo de radiação, ressonante com a transição atômica. Sob condições que permitiam o negligenciamento da emissão espontânea, claramente verificou-se que a transferência de momento possuía a mesma direção de propagação da onda estacionária, proporcional a $2k\hbar$. Os resultados deste experimento apresentaram boa concordância com as previsões teóricas (9).

Por outro lado, os avanços sem precedentes, ligados a Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (EQC), abriram caminho para uma profunda investigação de fenômenos físicos puramente quânticos. Cavidades de alto fator de qualidade, revestidas por uma fina camada de material supercondutor, realizam a proeza de aprisionar fótons em seus interiores por tempos da ordem de um décimo de segundo (13). Em condições tão especiais, átomos são conduzidos individualmente a interagir com um único modo do campo de radiação. Desta feita, previsões teóricas concernentes a interação da radiação com a matéria obtiveram ratificação experimental. Destaca-se, entre outras, a observação das oscilações de Rabi de estados circulares de Rydberg (14), a preparação de estados emaranhados de um par de átomos (15) e a construção de portas lógicas quânticas (16). Esse relativo domínio do mundo quântico rendeu o prêmio Nobel de física de 2012 para a área de EQC.

Até o final da década de 1980, os trabalhos dedicados a manipulação de átomos por luz utilizavam em essência abordagens semiclássicas. O primeiro artigo a conectar EQC com o estudo da ação de ondas eletromagnéticas estacionárias na trajetória dos átomos consta em (17). Via Hamiltoniano de Jaynes-Cummings, os autores preocuparam-se em entender, teoricamente, em que medida a natureza quântica da luz modifica o movimento dos átomos. Como conclusão, eles perceberam que as deflexões atômicas resultantes dependiam fortemente da estatística de fótons do campo quântico com o qual o átomo interage. Este resultado despertou o interesse da comunidade científica em utilizar a distribuição de momento do átomo como ferramenta de determinação do campo de radiação. O protocolo de reconstrução de estados é frequentemente intitulado como tomografia de estados quânticos (18-26).

No trabalho de Freyberger e Herkommer (21), em especial, os autores consideraram as deflexões atômicas no regime de Stern-Gerlach. Neste caso, uma fenda estreita restringe o pacote de onda atômico a incidir em um dos nodos de uma onda eletromagnética estacionária que está aprisionada no interior de um ressonador. Nesse cenário, o estado de um modo do campo é determinado, a menos da fase do estado de vácuo, por meio de uma medida completa da distribuição de momento do átomo. Além disso, ao evoluir o estado do sistema segundo o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings, surge na expressão um "beam splitter" simétrico de momento, análogo ao descrito no experimento de Stern-

Gerlach original (27). Isso justifica a utilização do nome Stern-Gerlach óptico (SGO) para o referido fenômeno, comprovado experimentalmente em (28). Em (29), a mesma abordagem é considerada para elétrons atingindo o antinodo de uma onda estacionária, levando a resultados similares.

Tomando o artigo de Freyberger e Herkommer como motivação, na presente dissertação, buscou-se generalizar o Stern-Gerlach óptico para o caso de duas cavidades, as quais possuem eixos ópticos perpendiculares entre si. Desta forma, os efeitos mecânicos que átomo experimenta, decorrente de sua interação com dois modos idênticos, devem ser observados no plano definido pelas duas cavidades. A configuração de cavidades cruzadas também foi utilizada em (30) no intuito de visualizar superposições de estados. Diferentemente do Stern-Gerlach óptico de cavidade única, além do intercâmbio de fótons efetuado entre o átomo e cada modo separadamente, também ocorre interação modo-modo mediada indiretamente pelo átomo. Esse fator contribui efetivamente na caracterização da distribuição de momento do átomo a ser analisada.

No que diz respeito ao corpo da dissertação, o capítulo 2 propõe a revisão de abordagens simplificadoras, muito bem estabelecidas em óptica atômica, justificando regimes utilizados nos capítulos subsequentes. Portanto, para uma melhor compreensão dos Hamiltonianos de interação discutidos por todo o trabalho, recomenda-se a leitura deste capítulo.

No capítulo 3, foi inserida a tomografia dos estados de um modo do campo, proposta em (21), por servir de alicerce no decorrer do mestrado. Neste mesmo capítulo, adicionalmente é feita uma comparação entre distribuições de momento atômico quando calculadas com distribuições espaciais iniciais distintas: exponencial e Gaussiana. Este paralelo é importante para o capítulo seguinte. No capítulo 4, onde consta o projeto de mestrado propriamente dito, encontra-se a diagonalização do Hamiltoniano que dita a interação ressonante entre um átomo de dois níveis com dois modos cruzados idênticos. Obviamente, este procedimento viabiliza a obtenção da evolução temporal e o cálculo da distribuição de momento do átomo.

Posteriormente, já adentro do que é classificado como resultados, no capítulo 5 segue a análise gráfica da distribuição de momento atômico bidimensional para estados iniciais do sistema átomo-dois-modos com número de fótons pequeno. Os gráficos exibidos neste capítulo devem servir para uma verificação mais intuitiva dos cálculos apresentados no capítulo 4. No capítulo 6, algumas aplicações são propostas para o caso de cavidades cruzadas. A primeira consiste na tomografia dos estados de dois modos do campo de radiação via medida da distribuição de momento bidimensional. No artigo (26), os autores perfazem a tomografia de dois modos distintos, porém, estes modos dividem a mesma cavidade e possuem mesma direção de propagação. Portanto, o conteúdo exposto do capítulo 4 em diante não está disponível na literatura atual. Pretende-se também demonstrar graficamente a possibilidade de controlar os desvios atômicos no plano através

da alteração de condições iniciais referentes aos dois modos e ao estado atômico. Para tal, considerou-se estados coerentes e uma superposição atômica preparada inicialmente por um campo clássico. Este resultado pode ser importante na inédita realização de litografia atômica decorrente de efeitos puramente quânticos.

Por fim, expõe-se as conclusões advindas dos resultados acompanhadas das perspectivas futuras. Eventuais cálculos exaustivos não encontrados no corpo do texto podem ser consultados nos apêndices, ao final da dissertação.

Capítulo 2

Óptica atômica com campos quânticos

O presente capítulo traz um enfoque especial na influência de um campo quântico no movimento atômico. Portanto, o tratamento quântico exposto aqui não se restringe aos graus de liberdade internos do átomo e do campo, mas incluem também o movimento do centro de massa do átomo. Neste contexto, é extremamente importante trazer à tona a natureza ondulatória da matéria, onde o termo óptica atômica enfatiza o comportamento dual de partículas microscópicas.

No decorrer desse capítulo, pretende-se derivar o potencial efetivo, que dita a interação entre um átomo de dois níveis com um modo do campo de radiação. Como resultado disso, é demonstrado que este potencial depende do número total de fótons do sistema. E ainda, além de estimar a condição da aproximação de Raman-Nath e comentar o regime de Stern-Gerlach, mostra-se que não é necessário tratar todos os graus de liberdade espaciais quânticamente, mas somente a coordenada transversal à direção de propagação inicial do átomo.

2.1 Potencial efetivo do sistema átomo-campo

Considere um pacote de onda atômico de dois níveis interagindo com um único modo de uma cavidade. Daqui em diante, o estado fundamental atômico será denotado por $|g\rangle$ e o estado excitado por $|e\rangle$. A frequência do campo é ressonante com a transição atômica, logo a interação é governada pelo Hamiltoniano de Jaynes-Cummings na representação de interação

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - \mathcal{E}_0 |\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})| (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-), \quad (2.1)$$

justificado no Apêndice A. As grandezas $\mathcal{E}_0$ e $\boldsymbol{\mu}$ são, respectivamente, o campo elétrico por fóton e o dipolo elétrico atômico. Os operadores de criação e aniquilação de fótons são denotados por $a^\dagger$ e a . Já os operadores de Pauli, relativos ao levantamento e abaixamento de excitações atômicas, são dados por σ_+ e σ_- . O campo vetorial $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ define o perfil do

modo na cavidade e satisfaz a equação de Helmholtz com as condições de contorno nas paredes de uma cavidade condutora. Como de costume, ao final do Apêndice A faz-se a escolha particular da fase associada ao número complexo $\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})$.

Se o foco da discussão reside no movimento atômico, a priori, a energia cinética do movimento do centro de massa deve ser considerada. Assim, os operadores conjugados $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$, relativos ao centro de massa do átomo, tornam-se parte importante deste cenário e devem obedecer a relação de comutação

$$[\mathbf{r}, \mathbf{p}] = i\hbar. \quad (2.2)$$

Para tempos de interação suficientemente curtos ($\sim 10^{-5}s$), é lícito desprezar os efeitos de emissão espontânea para um átomo com tempo de vida longo. Os Átomos de Rydberg são extremamente úteis neste caso, pois podem apresentar tempo de vida bastante longos ($\sim 10^{-2}s$) (31), dependendo dos níveis de energia utilizados. Para maiores discussões, verificou-se em (32) que, mesmo para tempos de interação grandes em relação ao tempo de vida de emissão espontânea do átomo, ainda é viável retirar informação coerente do estado quântico.

Quando a cavidade apresenta um alto fator de qualidade (13), seu tempo de relaxação ($\sim 10^{-1}s$) é bem maior que o de interação, sendo desnecessário o tratamento dissipativo da cavidade. Assim, o conjunto átomo-campo pode ser considerado um sistema fechado e a dinâmica unitária é governada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = H|\Psi(t)\rangle. \quad (2.3)$$

Lançando mão das relações de completeza, o estado do sistema pode ser expandido na forma

$$|\Psi(t)\rangle = \int d^3r' \left[C_{g,0}(\mathbf{r}', t) |g, 0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{g,n}(\mathbf{r}', t) |g, n\rangle + C_{e,n-1}(\mathbf{r}', t) |e, n-1\rangle \right) \right] |\mathbf{r}'\rangle, \quad (2.4)$$

que considera o produto tensorial entre os estados internos atômicos, a posição do centro de massa do átomo e o estado do campo. Define-se $C_{g,n}(\mathbf{r}', t)$ como a amplitude de probabilidade de se encontrar, em um tempo t , o átomo na posição $\mathbf{r}'$, no estado fundamental $|g\rangle$ com n fótons no modo da cavidade. Define-se também, $C_{e,n-1}(\mathbf{r}', t)$ como a amplitude de probabilidade de se encontrar, em um tempo t , o átomo na posição $\mathbf{r}'$, no estado excitado $|e\rangle$ com $n-1$ fótons no modo da cavidade. Reescrevendo o estado (2.4) em termos dos estados vestidos do sistema átomo-campo

$$|\pm, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|g, n\rangle \pm |e, n-1\rangle \right), \quad n \geq 1, \quad (2.5)$$

obtêm-se

$$|\Psi(t)\rangle = \int d^3r' \left[C_{g,0}(\mathbf{r}', t) |g, 0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n^+(\mathbf{r}', t) |+, n\rangle + C_n^-(\mathbf{r}', t) |-, n\rangle \right) \right] |\mathbf{r}'\rangle. \quad (2.6)$$

As novas amplitudes de probabilidade são definidas como

$$C_n^{\pm}(\mathbf{r}', t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(C_{g,n}(\mathbf{r}', t) \pm C_{e,n-1}(\mathbf{r}', t) \right). \quad (2.7)$$

Substituindo a expansão (2.6) em (2.3), tem-se

$$\begin{aligned} i\hbar \int d^3r' & \left[\frac{\partial C_{g,0}(\mathbf{r}', t)}{\partial t} |g, 0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial C_n^+(\mathbf{r}', t)}{\partial t} |+, n\rangle + \frac{\partial C_n^-(\mathbf{r}', t)}{\partial t} |-, n\rangle \right) \right] |\mathbf{r}'\rangle \\ & = \int d^3r' \left[C_{g,0}(\mathbf{r}', t) |g, 0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n^+(\mathbf{r}', t) |+, n\rangle + C_n^-(\mathbf{r}', t) |-, n\rangle \right) \right] \frac{\mathbf{p}^2}{2M} |\mathbf{r}'\rangle \\ & \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3r' \mathcal{E}_0 |\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})| \sqrt{n} \left(C_n^+(\mathbf{r}', t) |+, n\rangle - C_n^-(\mathbf{r}', t) |-, n\rangle \right) |\mathbf{r}'\rangle, \quad (2.8) \end{aligned}$$

onde utilizou-se a equação de autovalores

$$(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) |\pm, n\rangle = \pm\sqrt{n} |\pm, n\rangle. \quad (2.9)$$

Multiplicando pela esquerda a expressão (2.8) por cada um dos bra's $\langle \pm, n' | \langle \mathbf{r} |$, obtêm-se as equações de movimento desacopladas para as amplitudes de probabilidade

$$i\hbar \frac{\partial C_n^{\pm}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mp \mathcal{E}_0 |\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})| \sqrt{n} C_n^{\pm}(\mathbf{r}, t) + \int d^3r' C_n^{\pm}(\mathbf{r}', t) \langle \mathbf{r} | \frac{\mathbf{p}^2}{2M} |\mathbf{r}'\rangle. \quad (2.10)$$

No passo acima, valeu-se das relações de ortogonalidade

$$\begin{aligned} \langle \pm, n' | \pm, n \rangle &= \delta_{n', n} & \langle \pm, n' | \mp, n \rangle &= 0 \\ \langle \pm, n' | g, 0 \rangle &= 1 & \langle \mathbf{r} | \mathbf{r}' \rangle &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

A partir da relação

$$\langle \mathbf{r} | \frac{\mathbf{p}^2}{2M} |\mathbf{r}'\rangle = \frac{1}{2M} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right)^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.11)$$

é simples mostrar que as amplitudes de probabilidade $C_n^{\pm}(\mathbf{r}, t)$ satisfazem a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial C_n^{\pm}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2M} + U_n^{\mp}(\mathbf{r}) \right) C_n^{\pm}(\mathbf{r}, t), \quad (2.12)$$

onde o potencial efetivo do sistema é expresso por

$$U_n^\mp(\mathbf{r}) = \mp \mathcal{E}_0 |\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})| \sqrt{n}. \quad (2.13)$$

A equação (2.12) representa a dinâmica de uma partícula de massa M sujeita a um potencial proveniente do campo eletromagnético. Fica evidente a dependência deste potencial com o número de total fótons do sistema átomo-campo. Na seção A.1.2 do apêndice A, calcula-se a solução do campo vetorial adimensional $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ no caso em que o ressonador é uma caixa retangular feita de um condutor ideal, a saber

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z), \\ u_y(x, y, z) &= \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z), \\ u_z(x, y, z) &= \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Impondo que não exista propagação do campo na direção y ($k_y = 0$), o que de fato ocorre nas cavidades utilizadas experimentalmente, tem-se

$$U_n^\mp(x, z) = \mp \mu_y \mathcal{E}_0 \sqrt{n} \sin(k_x x) \sin(\pi z / L_z). \quad (2.15)$$

Neste caso, especificou-se o valor $k_z = \frac{\pi}{L_z}$, encontrado por meio das condições de contorno do campo eletromagnético nas paredes do condutor (Apêndice A). A Figura 2.1 apresenta o gráfico deste potencial com um corte em $z = L_z/2$ para três valores de n , expressando alguns comprimentos de onda.

Figura 2.1 – Potencial $U_n(x)$ no ponto $z = L_z/2$, com $n = 1, 2$ e 3 , para $\mu_y \mathcal{E}_0 = 1$.

2.2 Redução do tratamento quântico espacial para um grau de liberdade

Considere que eixo óptico da cavidade coincida com o eixo cartesiano x , direção que será referida como transversal. Já a direção de propagação do pacote de onda atômico denotar-se-á como longitudinal e alocada na direção z . Confira o esquema proposto na Figura 2.2.

Figura 2.2 – Um pacote de onda atômico incide ortogonalmente ao eixo óptico da cavidade. Um campo clássico prepara o estado atômico desejado e uma fenda colimadora de largura $\Delta x \ll \lambda$, anteposta ao campo, restringe o átomo a incidir em um dos nodos da onda estacionária formada no ressonador. Devido a ação do campo, o átomo deve sofrer deflexões na direção transversal x . Um detector conta o número de átomos em uma determinada posição. A cavidade da ilustração é do tipo Fabry-Pérot.

De início, o tratamento quântico da dinâmica do centro de massa atômico deve ter incluso todos os três graus de liberdade espaciais. Todavia, se a energia cinética do mesmo for muito maior que o acoplamento típico entre átomo e campo, a velocidade longitudinal do átomo praticamente não é alterada. Esta ideia motiva o ansatz

$$C_n^\pm(x, y, z, t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar} - ik_z z} \psi_n^\pm(x, y, z), \quad (2.16)$$

pressupondo que amplitudes $C_n^\pm(x, y, z, t)$ sejam ondas planas multiplicadas por funções que variem lentamente na direção z . Substituindo este ansatz na expressão (2.12),

encontra-se

$$E\psi_n^\pm(x, y, z) = \frac{1}{2M} \left[\hbar^2 k_z^2 \psi_n^\pm(x, y, z) - 2ik_z \hbar^2 \frac{\partial \psi_n^\pm(x, y, z)}{\partial z} - \hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_n^\pm(x, y, z)}{\partial^2 z} \right] + \left(\frac{p_x^2 + p_y^2}{2M} + U_n^\mp(x, y, z) \right) \psi_n^\pm(x, y, z). \quad (2.17)$$

Nesse passo, foi levado em conta que

$$p_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.18)$$

Impondo a condição de variação lenta

$$\left| \frac{\partial^2 \psi_n^\pm(x, y, z)}{\partial z^2} \right| \ll \left| k_z \frac{\partial \psi_n^\pm(x, y, z)}{\partial z} \right|, \quad (2.19)$$

despreza-se a derivada segunda da amplitude $\psi_n^\pm(x, y, z)$ com relação a z . Se o momento e a energia cinética da onda plana forem

$$p_z = Mv_z = \hbar k_z, \quad (2.20)$$

$$E = \frac{(\hbar k_z)^2}{2M}, \quad (2.21)$$

pode-se expressar a equação (2.17) como

$$i\hbar \frac{\partial \psi_n^\pm(x, y, z)}{\partial \left(\frac{zM}{\hbar k_z} \right)} = \left[\frac{p_x^2 + p_y^2}{2M} + U_n^\mp(x, y, z) \right] \psi_n^\pm(x, y, z). \quad (2.22)$$

Introduzindo o tempo $t = zM/\hbar k_z = z/v_z$ como medida da posição z que a onda plana alcança a uma velocidade v_z , obtêm-se

$$i\hbar \frac{\partial \psi_n^\pm(x, y, v_z t)}{\partial t} = \left[\frac{p_x^2 + p_y^2}{2M} + U_n^\mp(x, y, v_z t) \right] \psi_n^\pm(x, y, v_z t). \quad (2.23)$$

Portanto, com a hipótese de variação lenta das amplitudes $\psi_n^\pm(x, y, z)$ e tratando classicamente a coordenada z , reduz-se o número de graus de liberdade espaciais a serem tratados quânticamente, de três para um. Consequentemente, o potencial efetivo se torna dependente do tempo. Substituindo $z = v_z t = L_z t/\tau$ na expressão (2.15), relativo ao tratamento clássico, o potencial efetivo se torna

$$U_n^\mp(x, t) = \mp \mu_y \mathcal{E}_0 \sqrt{n} \sin(k_x x) \sin(\pi t/\tau). \quad (2.24)$$

Note que o tempo de interação τ funciona como uma chave liga e desliga para o potencial.

A independência da interação com relação a coordenada y leva a separação de variáveis

na equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \eta(y, t)}{\partial t} = \frac{p_y^2}{2M} \eta(y, t) \quad (2.25)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_n^\pm(x, t)}{\partial t} = \left[\frac{p_x^2}{2M} + U_n^\mp(x, t) \right] \Phi_n^\pm(x, t), \quad (2.26)$$

onde utilizou-se o ansatz separador

$$\psi_n^\pm(x, y, t) = \eta(y, t) \Phi_n^\pm(x, t). \quad (2.27)$$

Observe que a informação mais relevante sobre a dinâmica do átomo estará concentrada na direção x , que é a direção do eixo óptico da cavidade. Deste modo, de três coordenadas espaciais, trata-se apenas duas via formalismo quântico. Uma abordagem para átomos frios que considera o tratamento quântico da direção de incidência do átomo pode ser encontrada em (33).

2.3 Aproximação de Raman-Nath

Na secção anterior, observou-se que potencial efetivo do sistema dependente exclusivamente da coordenada transversal, durante a passagem do átomo por um pequeno volume do modo. Consequentemente, neste mesmo período, há de se supor que exista uma transferência de momento nessa mesma direção. Uma simplificação frequentemente utilizada em óptica atômica, conhecida como aproximação de Raman-Nath, consiste em negligenciar a energia cinética transversal durante o tempo de interação, apesar da existência de uma transferência de momento. A fim de encontrar a condição de validade para o regime citado, é importante estimar a força clássica

$$F_{x,n} = \frac{\Delta p_{x,n}}{\tau} = \left| \frac{\partial U_n^\mp(x, t)}{\partial x} \right|. \quad (2.28)$$

A variação do momento na direção x será proporcional a

$$\Delta p_{x,n} \sim \mu_y \mathcal{E}_0 \sqrt{n} k_x \tau. \quad (2.29)$$

Despreza-se a energia cinética do átomo durante o tempo de interação se esta for muito menor que o acoplamento típico, ou seja,

$$\frac{(\Delta p_{x,n})^2}{2M} \ll \mu_y \mathcal{E}_0 \sqrt{n}. \quad (2.30)$$

Essa condição leva ao regime

$$\frac{\mu_y \mathcal{E}_0 \sqrt{n} k_x^2 \tau^2}{2M} \ll 1. \quad (2.31)$$

Assim, ao comparar-se a distancia ℓ_x alcançada pelo átomo ao fim do tempo de interação com o comprimento de onda do campo λ , tem-se

$$\frac{\ell_{x,n}}{\lambda} = \frac{k_x \tau \Delta p_{x,n}}{2\pi M} \sim \frac{k_x^2 \tau^2 \mu_y \mathcal{E}_0 \sqrt{n}}{2\pi M} \ll 1. \quad (2.32)$$

Nesse regime, o átomo está limitado a se deslocar por uma uma distância muito menor que o comprimento de onda do campo. Segundo a condição (2.31), isso ocorre para átomos de massa elevada e períodos de interação curtos. A Tabela 2.1 contém valores do deslocamento transversal $\ell_{x,n}$ e do "recoil" de momento nesta mesma direção, estimados via força clássica (2.28) que age durante o tempo de interação τ . Para tal, considerou-se uma cavidade de 50 cm^3 (13) contendo um modo no regime de micro-ondas. Um átomo ^{85}Rb atravessa o volume do modo com velocidade aproximada de 500 m/s . Note que a condição (2.32) é totalmente satisfeita.

Tabela 2.1 – Valores estimados para o "recoil" de momento e deslocamento transversal no o regime de micro-ondas para o átomo de ^{85}Rb .

Regime	Átomo	$\lambda \text{ (m)}$	$\tau \text{ (s)}$	$\Delta p_{x,n} \text{ (N.s)}$	$\ell_{x,n} \text{ (m)}$
Micro-ondas	^{85}Rb	10^{-2}	10^{-5}	$10^{-32} \sqrt{n}$	$10^{-12} \sqrt{n}$

Dentro deste limite, as equações de movimento das amplitudes $\Phi_n^\pm(x, t)$ se simplificam na forma

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_n^\pm(x, t)}{\partial t} = \mp \mu_y \mathcal{E}_0 \sqrt{n} \sin(k_x x) \sin(\pi t/\tau) \Phi_n^\pm(x, t), \quad (2.33)$$

onde desprezou-se o termo cinético referente a direção x .

2.4 Regime de Stern-Gerlach

O ultima abordagem a ser mencionado neste capítulo é conhecido como regime de Stern-Gerlach. Agora, uma fenda restringe a incidência do pacote de onda atômico em uma região muito menor que o comprimento de onda do campo. Se esta região conter um dos nodos da onda estacionária, como ilustrado na Figura 2.2, essa imposição se manifesta matematicamente na linearização $\sin(k_x x) \approx k_x x$ da função que define o perfil do modo do campo. No capítulo seguinte, tornar-se-á evidente que, para um átomo de dois níveis, os autovalores referentes aos estados vestidos do sistema átomo-campo diferem-se por um sinal. Em um gradiente de campo linear, isso implica na ação de forças opostas. Desta forma, no limite de detuning nulo, a evolução temporal ocorre tal qual um "beam splitter" simétrico explícito, análogo ao observado no experimento de Stern-Gerlach original (27). Este fenômeno, usualmente mencionado como Stern-Gerlach Óptico (SGO), foi observado experimentalmente em (28) para átomos de sódio.

Enfim, com todas as simplificações propostas neste capítulo, a inferência do Hamiltoniano final por meio da equação (2.33) é direta:

$$H(t) = -\mu\mathcal{E}_0 kx \sin(\pi t/\tau) (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-), \quad (2.34)$$

onde modificou-se as notações $k_x = k$ e $\mu_y = \mu$ a serem utilizadas no decorrer do texto.

Capítulo 3

Tomografia do estado de um modo via deflexão atômica

No artigo (21), Freyberger e Herkommer utilizaram o Hamiltoniano (2.34) para demonstrar um importante princípio de medida. Devido a interação de um átomo de dois níveis com um campo quântico, existe a probabilidade do átomo sofrer desvios de trajetória na direção transversal ao seu deslocamento inicial. Após a interação, ao examinar a distribuição de momento, os autores mostram que é possível encontrar cada uma das amplitudes de probabilidade do modo do campo. Frequentemente, adota-se o termo "tomografia" de estados a esse protocolo. Este processo decorre do fato de que a estatística de fótons do campo tem papel crucial nas deflexões atômicas, evidenciando assim o caráter quântico do campo de radiação.

O desenvolvimento exibido em (21) serviu de base para o projeto de mestrado exposto a partir do capítulo 4. Por isso, a fim de utilizá-lo como ferramenta de sustentação e análise, optou-se por sua inserção nesta dissertação. Adicionalmente, além do cálculo da distribuição de momento transversal, por meio da transformada de Fourier de uma distribuição espacial Gaussiana, mais comum na literatura, propôs-se também o uso da distribuição exponencial. Esta tem papel fundamental na solução analítica das transformadas de Fourier bidimensionais, expostas no capítulo 4.

3.1 Evolução temporal do sistema átomo-campo

Se o Hamiltoniano em questão comuta com consigo mesmo em tempos diferentes, segue que evolução temporal governada por ele pode ser obtida via

$$|\Psi(\tau)\rangle = U(\tau) |\Psi(0)\rangle,$$

onde o operador evolução é escrito na forma

$$U(\tau) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^\tau H(t) dt \right\}. \quad (3.1)$$

O Hamiltoniano (2.34) obedece essa condição, possibilitando expressar operador $U(\tau)$ como

$$U(\tau) = \exp \left\{ \frac{i\mu\mathcal{E}_0 kx}{\hbar} (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) \int_0^\tau dt \sin(\pi t/\tau) \right\}. \quad (3.2)$$

A integral no tempo contribui com

$$\int_0^\tau dt \sin(\pi t/\tau) = \frac{2}{\pi} \tau. \quad (3.3)$$

Logo,

$$U(\tau) = \exp \left\{ i\Lambda(\tau) kx (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) \right\}, \quad (3.4)$$

onde define-se o parâmetro de interação adimensional dependente do tempo de interação

$$\Lambda(\tau) \equiv \frac{2\mu\mathcal{E}_0\tau}{\pi\hbar}. \quad (3.5)$$

Por meio da relação de completeza, o estado inicial do sistema átomo-campo deve ser construído como o produto tensorial dos três graus de liberdade a serem tratados via formalismo quântico, a saber

$$|\Psi(0)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) |x\rangle \otimes (C_g |g\rangle + C_e |e\rangle) \otimes \sum_{m=0}^{\infty} C_m |m\rangle. \quad (3.6)$$

Veja que o estado interno atômico está em uma superposição geral, que pode ser preparada inicialmente por um campo clássico. As amplitudes de probabilidade do modo do campo são dadas por C_m . A distribuição espacial $|f(x)|^2$ é normalizada e centrada em $x = 0$, com desvio padrão $\Delta x \ll \lambda$ delimitado pela fenda colimadora discutida na secção 2.4.

Uma notação conveniente adotada daqui em diante consiste na projeção

$$\langle x | \Psi(0) \rangle = |\Psi(x, 0)\rangle, \quad (3.7)$$

onde expressando o estado inicial em termos dos estados vestidos do sistema átomo-campo (2.5), obtêm-se

$$\begin{aligned} |\Psi(x, 0)\rangle &= C_g C_0 f(x) |g, 0\rangle \\ &+ \frac{f(x)}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} [(C_g C_m + C_e C_{m-1}) |+, m\rangle + (C_g C_m - C_e C_{m-1}) |-, m\rangle]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Agora, o estado inicial $|\Psi(x, 0)\rangle$ evolui no intervalo $0 \leq t \leq \tau$ de acordo com a interação (2.34) e, por meio das equações de autovalores

$$U(\tau) |\pm, m\rangle = e^{\pm i\Lambda k x \sqrt{m}} |\pm, m\rangle, \quad U(\tau) |g, 0\rangle = |g, 0\rangle, \quad (3.9)$$

encontra-se a evolução temporal

$$\begin{aligned} |\Psi(x, \tau)\rangle &= C_g C_0 f(x) |g, 0\rangle \\ &+ \frac{f(x)}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[(C_g C_m + C_e C_{m-1}) e^{i\Lambda k x \sqrt{m}} |+, m\rangle + (C_g C_m - C_e C_{m-1}) e^{-i\Lambda k x \sqrt{m}} |-, m\rangle \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Neste caso, a fase dependente da posição, proveniente da evolução temporal, é que carrega toda a descrição do movimento atômico.

3.2 Distribuição de momento atômico

Em um tempo $t \geq \tau$ o átomo, portador de momento na direção x , segue como partícula livre novamente. Na análise dos desvios de trajetória, deve-se colocar um detector distante o suficiente do ressonador para que as deflexões sutis sejam observadas. Nessa condição, a distribuição espacial final do átomo é a imagem de sua distribuição de momento no instante $t = \tau$. Este fato permite utilizar a distribuição de momento para a análise das deflexões, ao invés de obter esta informação via evolução temporal de partícula livre na representação de posição. Então, aplica-se a transformada de Fourier no estado (3.10), tal que

$$\begin{aligned} |\Psi(\wp, \tau)\rangle &= \sqrt{\hbar k} \left[C_g C_0 \mathcal{F}(\wp) |g, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}(\wp - \sqrt{m}\Lambda) (C_g C_m + C_e C_{m-1}) |+, m\rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}(\wp + \sqrt{m}\Lambda) (C_g C_m - C_e C_{m-1}) |-, m\rangle \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde

$$\mathcal{F}(\wp \pm \sqrt{m}\Lambda) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{k} e^{-i(\wp \pm \sqrt{m}\Lambda)u} f\left(\frac{u}{k}\right) du. \quad (3.12)$$

Neste passo efetuou-se duas mudanças de variáveis convenientes. Uma é conhecida como momento atômico $\wp = p/k\hbar$ e invoca o fator de normalização do estado $\sqrt{\hbar k}$. A outra mudança está relacionada com a variável de integração $u = kx$. Assim, a distribuição de momento será o traço parcial sobre o grau de liberdade interno do átomo e sobre o modo

da cavidade, a saber

$$W(\wp) = \hbar k \left[|C_g|^2 |C_0|^2 |\mathcal{F}(\wp)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} |\mathcal{F}(\wp - \sqrt{m}\Lambda)|^2 |C_g C_m + C_e C_{m-1}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} |\mathcal{F}(\wp + \sqrt{m}\Lambda)|^2 |C_g C_m - C_e C_{m-1}|^2 \right] \quad (3.13)$$

Esta expressão mostra de maneira clara que as amplitudes de probabilidade do campo e do átomo contribuem efetivamente para $W(\wp)$. Observe que para cada subespaço de m fótons, independentemente da distribuição espacial inicial escolhida, existe probabilidade do átomo ganhar o mesmo módulo de momento para ambas os sentidos da direção transversal. Esta simetria corrobora a analogia com o Stern-Gerlach original, comentada no final do capítulo 2 e na introdução.

Figura 3.1 – Gráfico da distribuição inicial Gaussiana em estilo tracejado, e distribuição exponencial em linha sólida. Em ambos os casos $\Delta x = 1$.

A distribuição inicial é totalmente determinada pela fenda do experimentador. A fim de representá-la, pode-se escolher qualquer função normalizável que decaia nos limites da fenda. Neste caso, a distribuição Gaussiana normalizada

$$f(x) = \left(\frac{1}{\pi \Delta x^2} \right)^{1/4} e^{-\frac{x^2}{2\Delta x^2}}, \quad (3.14)$$

com desvio padrão Δx , é uma boa aproximação para tal e possui a propriedade de que

sua transformada de Fourier também é uma Gaussiana

$$\mathcal{F}(\wp \pm \sqrt{m}\Lambda) = \left(\frac{\Delta x^2}{\pi \hbar^2}\right)^{1/4} e^{-\frac{k^2 \Delta x^2}{2} (\wp \pm \sqrt{m}\Lambda)^2}. \quad (3.15)$$

Além de (3.14), mais utilizada na literatura, propõe-se abordar a distribuição exponencial

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Delta x}} e^{-\frac{|x|}{2\Delta x}}. \quad (3.16)$$

Esta função possui o mesmo desvio padrão que a Gaussiana e tem como transformada de Fourier a distribuição Student

$$\mathcal{F}(\wp \pm \sqrt{m}\Lambda) = 2\sqrt{\frac{\Delta x}{\pi \hbar}} \frac{1}{\left[1 + 4k^2 \Delta x^2 (\wp \pm \Lambda\sqrt{m})^2\right]}. \quad (3.17)$$

A fim de comparar as duas distribuições citadas, observe o gráfico da Figura 3.1. A distribuição exponencial apresenta um bico na média ($x = 0$), sendo mais concentrada em torno deste ponto do que a Gaussiana. Portanto, nos limites assintóticos, a exponencial deve decair de forma mais lenta do que a Gaussiana, mantendo a condição de normalização. Objetivando analisar a distribuição de momento descrita por (3.15) e (3.17), suponha que o modo do campo esteja inicialmente em um estado coerente com estatística descrita por

$$C_m = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}, \quad (3.18)$$

onde α é a intensidade do estado coerente. O estado atômico de partida pode ser preparado por um campo clássico em uma superposição

$$C_g = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad C_e = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}. \quad (3.19)$$

Apesar das deflexões apresentarem uma certa generalidade quanto as condições iniciais, esta especificação permite uma análise mais intuitiva dos resultados. Os gráficos da Figura 3.2 contém $W(\wp)$ para três valores distintos do parâmetro interação. Em todos eles, a distribuição de momento descrita por uma superposição de Gaussianas é caracterizada pela linha tracejada. Já a linha sólida é caracterizada pela superposição de funções Student.

O primeiro fato que salta aos olhos ao observar os gráficos da Figura 3.2 é o aspecto discreto em ambas distribuições de momento. A medida que o parâmetro de interação é acrescido, mais definidos ficam os picos com médias individuais $\wp = \pm \Lambda\sqrt{m}$, até se comportarem praticamente como funções delta. Veja que, a partir de um determinado parâmetro de interação ($\Lambda = 10$), a superposição de funções Student já apresenta um aspecto discreto razoavelmente definido. Já a superposição de funções Gaussianas ainda é bastante indefinida. Quando $\Lambda = 40$, ambos os casos são bem parecidos com picos

completamente resolvidos.

O gráfico *d)* apresenta uma distribuição calculada com uma fase diferente das escolhidas nos outros gráficos, a saber $\varphi = \pi$. Veja que ele é o único gráfico onde o átomo tem maior probabilidade de ganhar momento negativo do que positivo. Esta fase atribui pesos distintos para picos simétricos de média $\wp = \pm\Lambda\sqrt{m}$, resultando no controle da probabilidade do átomo defletir mais para um lado do que para outro. Dentre os picos de um determinado lado dos gráficos, um sempre é mais elevado do que todos. Recordando que o número médio de fótons do estado coerente é dado por $|\alpha|^2$, um determinado número de fótons pode ser escolhido como mais provável de ocorrer do que outros. Nos gráficos da Figura 3.2, por exemplo, a deflexão com maior probabilidade de ocorrer é proporcional a raiz de dois fótons.

Figura 3.2 – Distribuição de momento como superposição de Gaussianas, em estilo tracejado, e Student com linha sólida. Em todos os casos fixou-se os valores $\alpha = 1.5e^{i\pi/6}$ e $\Delta x = \lambda/10$. Os valores de Λ especificados nos gráficos foram: *a)* $\Lambda = 10$, *b)* $\Lambda = 25$ e *c)* $\Lambda = 40$. Nos gráficos de *a)* a *c)*, foi especificado $\varphi = 0$. Somente no gráfico *d)* optou-se por $\varphi = \pi$.

Concluindo, a distribuição de momento do centro de massa atômico recebe grande influência da estatística de fótons do campo quântico com o qual o átomo interage. Talvez seja mais difícil a construção experimental de uma fenda que represente a distribuição exponencial. Entretanto, com sua utilização, a mesma informação teórica relevante sobre as deflexões pode ser recuperada, sendo útil nos capítulos seguintes.

3.3 Tomografia

As comparações realizadas na secção anterior indicaram que, para Λ suficientemente grande, os picos individuais da distribuição de momento são bem distantes uns dos outros. Neste limite, as funções $|\mathcal{F}(\varphi \pm \sqrt{m}\Lambda)|^2$ agem praticamente como funções delta, já que as regiões vizinhas a elas não contribuem para a probabilidade total. Em (3.10), cada estado vestido $|\pm, m\rangle$ está associado a apenas uma função $|\mathcal{F}(\varphi \pm \sqrt{m}\Lambda)|^2$. Esse fato acarreta uma relação um a um entre $|C_g C_m \pm C_e C_{m-1}|^2$ e os picos estreitos. Portanto, considerando a superposição atômica (3.19) em (3.13), para $\varphi > 0$ e $\varphi < 0$ a probabilidade de encontrar o átomo com o momento $\varphi = \pm \Lambda\sqrt{m}$ pode ser aproximada por

$$P(\varphi = \pm \Lambda\sqrt{m}) \cong \frac{\hbar k}{4} |\mathcal{F}(0)|^2 |C_m \pm e^{i\varphi} C_{m-1}|^2 = \left(\frac{k^2 \Delta x^2}{16\pi} \right)^{1/2} |C_m \pm e^{i\varphi} C_{m-1}|^2, \quad (3.20)$$

com $m \geq 1$. Em $\varphi = 0$, o peso do pico central

$$P(\varphi = 0) \cong \frac{\hbar k}{2} |\mathcal{F}(0)|^2 |C_0|^2 = \left(\frac{k^2 \Delta x^2}{4\pi} \right)^{1/2} |C_0|^2 \quad (3.21)$$

leva de forma direta ao módulo quadrado da amplitude do estado de vácuo. Neste passo utilizou-se uma superposição de Gaussianas, tal como os autores o fizeram. A distribuição Student remete a valores semelhantes, diferindo da Gaussiana por um fator numérico.

Quando se efetua a diferença entre as probabilidades de dois picos simétricos correspondentes para o mesmo valor de m , note que

$$\mathcal{P}_\varphi^m \equiv P(\varphi = \Lambda\sqrt{m}) - P(\varphi = -\Lambda\sqrt{m}) \cong \left(\frac{k^2 \Delta x^2}{\pi} \right)^{1/2} \Re \{ e^{i\varphi} C_{m-1}^* C_m \}. \quad (3.22)$$

Realizando o experimento duas vezes, uma com $\varphi = 0$ e outra com $\varphi = \pi/2$, um sistema de duas equações é construído. Após manipulações algébricas simples, obtêm-se enfim as relações de recorrência

$$|C_m| = \frac{\sqrt{\pi}}{|C_{m-1}| k \Delta x} \sqrt{(\mathcal{P}_{\varphi=0}^m)^2 + \left(\mathcal{P}_{\varphi=\pi/2}^m \right)^2}, \quad (3.23)$$

$$\varphi_m = \tan^{-1} \left(\frac{\mathcal{P}_{\varphi=\pi/2}^m}{\mathcal{P}_{\varphi=0}^m} \right) + \varphi_{m-1}, \quad (3.24)$$

para os módulos das amplitudes do campo e suas respectivas fases. Desta forma, a menos da fase de C_0 , todos os coeficientes do campo são determinados via contagem experimental de átomos defletidos.

Capítulo 4

Stern-Gerlach óptico de cavidades cruzadas

Até aqui, toda informação referente as deflexões do átomo esteve concentrada em apenas uma dimensão. No capítulo presente, buscou-se estender os efeitos do SGO para duas dimensões. Para tal, ao invés de interagir com um único modo, propõe-se que o pacote atômico de dois níveis sofra a ação simultânea de dois modos dispostos em cavidades cruzadas. Diferentemente do Stern-Gerlach óptico de cavidade única, além do intercâmbio de fótons efetuado entre o átomo e cada modo separadamente, também ocorre interação modo-modo mediada indiretamente pelo átomo. Espera-se que esse fator contribua efetivamente na caracterização da distribuição de momento do átomo.

Por agora, pretende-se apenas encontrar a expressão formal para a distribuição de momento atômico e particularizá-la com condições iniciais esclarecedoras. Nos capítulos seguintes, explorar-se-á os resultados e aplicações pertinentes. O que se caracteriza como novo no conteúdo da dissertação, consta a partir deste capítulo.

4.1 Formulação do problema

Considere um pacote atômico de dois níveis interagindo ressonante com dois modos do campo de radiação, cada qual em uma cavidade. Os eixos ópticos destas cavidades são perpendiculares entre si e formam o plano $x - y$, como ilustrado na Figura 4.1. Agora, a interação é governada pelo Hamiltoniano na representação de interação

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - i \left[\mathcal{E}_a \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u}_a(\mathbf{r}) a \sigma_+ - \mathcal{E}_a \boldsymbol{\mu}^* \cdot \mathbf{u}_a(\mathbf{r}) a^\dagger \sigma_- + \mathcal{E}_b \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u}_b(\mathbf{r}) b \sigma_+ - \mathcal{E}_b \boldsymbol{\mu}^* \cdot \mathbf{u}_b(\mathbf{r}) b^\dagger \sigma_- \right]. \quad (4.1)$$

Observe que a especificação das fases dos produtos $\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u}_i(\mathbf{r})$, efetuada no capítulo

Figura 4.1 – Arranjo experimental de cavidades cruzadas. O pacote atômico incide perpendicularmente ao plano formado pelos eixos ópticos das cavidades, na região onde os nodos das duas ondas estacionárias se superpõem. O círculo tracejado representa a fenda colimadora de raio muito menor que o comprimento de onda dos ressonadores. Neste caso, espera-se que os desvios de trajetória do átomo ocorram no plano $x - y$.

2, não procedeu aqui. O motivo reside na busca de uma solução mais geral. Veja que, além da interação descrita pelos operadores, a e $a^\dagger$, e os operadores de Pauli, σ_+ e σ_- , adiciona-se o termo de interação entre o átomo e o modo da cavidade em y , descrito pelos operadores de Pauli e b e $b^\dagger$. Agora, o Hamiltoniano contém dois campos vetoriais distintos: $\mathbf{u}_a(\mathbf{r})$ responsável pelo perfil do modo da cavidade com eixo óptico em x e $\mathbf{u}_b(\mathbf{r})$, que descreve o perfil do modo da cavidade com eixo óptico em y . Cada função $\mathbf{u}_i(\mathbf{r})$ deve também satisfazer a equação de Helmholtz e as condições de contorno nas paredes de uma cavidade condutora, separadamente.

Impondo que não exista propagação do campo em y na cavidade que contém modo a ($k_{y,a} = 0$) e que mesmo aconteça na direção x para a cavidade que contém modo b ($k_{x,b} = 0$), da solução das funções na caixa retangular (2.14), tem-se que

$$\mathbf{u}_a(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_y \sin(k_{x,a}x) \sin(\pi z/L_z), \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u}_b(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x \sin(k_{y,b}y) \sin(\pi z/L_z). \quad (4.3)$$

Para que o acoplamento entre o átomo e os modos sejam iguais, veja que $k_{x,a} = k_{y,b} = k$ e $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_b = \mathcal{E}_0$, e o módulo das componentes do momento de dipolo também devem ser iguais $\mu_x = \mu_y = \mu$. Assim, o Hamiltoniano (4.1) se torna

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - i\mathcal{E}_0\mu \sin(\pi z/L_z) \left[\sin kx (a\sigma_+ e^{i\varphi_y} - a^\dagger\sigma_- e^{-i\varphi_y}) + \sin ky (b\sigma_+ e^{i\varphi_x} - b^\dagger\sigma_- e^{-i\varphi_x}) \right]. \quad (4.4)$$

As fases das componentes do momento de dipolo atômico são denotadas por φ_x e φ_y . Do regime de Stern-Gerlach, insere-se uma fenda circular de largura $\Delta r \ll \lambda$ e a dependência espacial pode ser linearizada lançando-se mão das aproximações $\sin kx \approx kx$ e $\sin ky \approx ky$. Desta forma, expressão (4.4) adquire a forma

$$\mathcal{H} \approx \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - i\mathcal{E}_0\mu k \sin(\pi z/L_z) \left[\sigma_+ (xae^{i\varphi_y} + ybe^{i\varphi_x}) - \sigma_- (xa^\dagger e^{-i\varphi_y} + yb^\dagger e^{-i\varphi_x}) \right]. \quad (4.5)$$

A evolução temporal segundo este Hamiltoniano é não trivial e necessita de uma abordagem matemática mais sofisticada a ser considerada. Na próxima secção, propõe-se uma maneira elegante de alcançar este objetivo.

4.2 Diagonalização do Hamiltoniano do sistema

No sistema de coordenadas cilíndricas, a posição do centro de massa atômico pode ser parametrizada por

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z. \quad (4.6)$$

Isso induz o Hamiltoniano (4.5) para a forma

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - i\mathcal{E}_0\mu kr \sin(\pi z/L_z) \left[\sigma_+ (\cos \theta e^{i\varphi_y} a + \sin \theta e^{i\varphi_x} b) - \sigma_- (\cos \theta e^{-i\varphi_y} a^\dagger + \sin \theta e^{-i\varphi_x} b^\dagger) \right]. \quad (4.7)$$

Observe que, ao escolher a transformação de operadores

$$c = \cos \theta e^{i\varphi_y} a + \sin \theta e^{i\varphi_x} b, \quad d = -\sin \theta e^{i\varphi_y} a + e^{i\varphi_x} \cos \theta b, \quad (4.8)$$

tem-se o Hamiltoniano já familiar

$$\mathcal{H}_c(t) = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - i\mathcal{E}_0\mu kr \sin(\pi z/L_z) (\sigma_+ c - \sigma_- c^\dagger), \quad (4.9)$$

que independe dos operadores d e $d^\dagger$. Como demonstrado no Apêndice B, estes novos operadores obedecem as mesmas relações de comutação que os operadores originais, a , $a^\dagger$, b , $b^\dagger$ e apresentam a invariância relacionada com o número de fótons

$$c^\dagger c + d^\dagger d = a^\dagger a + b^\dagger b. \quad (4.10)$$

As relações (4.8) representam uma variação das “transformações de Bogoliubov”, e foi utilizada em (34) para uma escolha específica de θ . Com este artifício, toda a álgebra

associada aos operadores antigos pode ser reaproveitada em um cenário onde o átomo acopla-se com um único modo fictício. Em face disto, ainda permanece uma questão: como efetuar a expansão do estado dos campos em termos da base dos novos operadores? A resposta segue de uma propriedade crucial na diagonalização do problema. Note que

$$a |0, 0\rangle_{ab} = 0, \quad b |0, 0\rangle_{ab} = 0, \quad (4.11)$$

$$c |0, 0\rangle_{cd} = 0, \quad d |0, 0\rangle_{cd} = 0. \quad (4.12)$$

Assim, atuando os operadores c e d na base de a e b , obtêm-se

$$c |0, 0\rangle_{ab} = (\cos \theta e^{i\varphi_y} a + \sin \theta e^{i\varphi_x} b) |0, 0\rangle_{ab} = 0, \quad (4.13)$$

$$d |0, 0\rangle_{ab} = (-\sin \theta e^{i\varphi_y} a + e^{i\varphi_x} \cos \theta b) |0, 0\rangle_{ab} = 0. \quad (4.14)$$

Logo, conclui-se que

$$|0, 0\rangle_{ab} = |0, 0\rangle_{cd}, \quad (4.15)$$

ou seja, os operadores novos e os operadores antigos compartilham o mesmo estado de vácuo. Apoiando-se nesse resultado e no fato de que um estado de Fock arbitrário $|j, k\rangle_{ab}$ pode ser representado por meio de sucessivas ações dos operadores de criação, tem-se

$$\begin{aligned} |j, k\rangle_{ab} &= \frac{(a^\dagger)^j (b^\dagger)^k}{\sqrt{j!k!}} |0, 0\rangle_{ab} \\ &= \frac{e^{i(j\varphi_y + k\varphi_x)} (c^\dagger \cos \theta - d^\dagger \sin \theta)^j (c^\dagger \sin \theta + d^\dagger \cos \theta)^k}{\sqrt{j!k!}} |0, 0\rangle_{cd}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Neste passo valeu-se da transformação inversa de (4.8). A expansão binomial é bastante útil para calcular a expressão (4.16), a saber

$$(c^\dagger \cos \theta - d^\dagger \sin \theta)^j = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-1)^{j-l} (c^\dagger \cos \theta)^l (d^\dagger \sin \theta)^{j-l}, \quad (4.17)$$

$$(c^\dagger \sin \theta + d^\dagger \cos \theta)^k = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (c^\dagger \sin \theta)^m (d^\dagger \cos \theta)^{k-m}. \quad (4.18)$$

Como os operadores $c^\dagger$ e $d^\dagger$ comutam, a ordem de atuação pode ser alterada. Sendo assim, a expansão de um estado de Fock arbitrário na base de a, b em termos da base de c, d será dada por

$$\begin{aligned} |j, k\rangle_{ab} &= e^{i(j\varphi_y + k\varphi_x)} \sum_{l=0}^j \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^{j-l} \sqrt{j!k!} (m+l)! (k+j-m-l)!}{l!(j-l)!m!(k-m)!} \\ &\quad \times (\cos \theta)^{l+k-m} (\sin \theta)^{m+j-l} |m+l, k+j-m-l\rangle_{cd}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Uma maneira vantajosa de reindexar estas somatórias, consiste na definição

$$\begin{aligned} k &= N - q, & j &= q, \\ m &= n - m', & l &= m', \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde N é o número total de fótons nos dois modos e n é o número de fótons do modo c .

Figura 4.2 – Representação pictórica de estados de Fock de dois modos, onde cada ponto do gráfico representa um estado Fock. Após a reindexação (4.20), os estados dos dois modos passam a ser representados por $|q, N - q\rangle$, com N denotando o número total de fótons de um dado subespaço e $0 \leq q \leq N$.

A Figura 4.2 esclarece de forma ilustrativa a maneira que os novos índices reagrupa os termos da somatória. O resultado é a expansão

$$|q, N - q\rangle_{ab} = e^{iq\varphi_y + i(N-q)\varphi_x} \sum_{n=0}^N D_{q,n}^{(N)}(\theta) |n, N - n\rangle_{cd}, \quad (4.21)$$

bem mais operacional e compacta de ser trabalhada, onde retirando a "linha" do índice m' , define-se os coeficientes da expansão

$$D_{q,n}^{(N)}(\theta) \equiv \sum_{m=\max(0, q+n-N)}^{\min(n, q)} \overline{D}_{q,n,m}^{(N)} (\cos \theta)^{2m+N-q-n} (\sin \theta)^{n-2m+q}. \quad (4.22)$$

O fator numérico da expansão é definido por

$$\overline{D}_{q,n,m}^{(N)} \equiv \frac{(-1)^{q-m} \sqrt{q! (N-q)! n! (N-n)!}}{m! (q-m)! (n-m)! (N-q-n+m)!}. \quad (4.23)$$

Os coeficientes (4.22) formam a matriz $D^{(N)}(\theta)$ de mudança de base $a, b \rightarrow c, d$, com dimensão $N + 1$, para cada subespaço de N fótons. É importante ressaltar que as trocas

de índices (4.20) acoplaram as novas somatórias.

4.3 Evolução temporal do estado

Com a transformação *à la* Bogoliubov (4.8), o Hamiltoniano de interação (4.9) torna-se muito parecido com aquele (2.1) deduzido no capítulo 2. Portanto, a aplicação de todas as simplificações lá descritas é direta para o caso atual. A primeira se refere ao tratamento clássico da direção z , devido a hipótese de variação lenta das amplitudes de probabilidade. Assim, ao invés de tratar quanticamente três graus de liberdade espaciais, aborda-se apenas dois. No caso bidimensional, o Hamiltoniano efetivo que dita a interação entre o modo c e o átomo, depende da coordenada r . Isto posto, a informação sobre as deflexões dos átomos devem constar no plano $x - y$ e a aproximação de Raman-Nath reporta-se ao negligenciamento da energia cinética associada a p_x e p_y , durante o tempo de interação. Após essas considerações, o Hamiltoniano efetivo final será dependente do tempo e expresso por

$$\mathcal{H}_c(t) = -i\mathcal{E}_0\mu kr \sin(\pi t/\tau) (\sigma_{+c} - \sigma_{-c}^\dagger). \quad (4.24)$$

Como $\mathcal{H}_c(t)$ comuta com ele próprio em tempos distintos, a evolução temporal pode ser calculada via

$$|\Psi(r, \theta, \tau)\rangle = U_c(\tau) |\Psi(r, \theta, 0)\rangle, \quad (4.25)$$

onde

$$U_c(\tau) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int dt' \mathcal{H}_c(t') \right\}. \quad (4.26)$$

A integral no tempo tem valor $\frac{2}{\pi}\tau$ e o parâmetro de interação $\Lambda(\tau)$ é idêntico ao definido no capítulo 3 (3.5). Logo,

$$U_c(\tau) = \exp \left\{ -\Lambda(\tau) kr (\sigma_{+c} - \sigma_{-c}^\dagger) \right\}. \quad (4.27)$$

O estado inicial do problema é o produto tensorial de todos os graus de liberdade que estão sendo tratados via formalismo quântico. Como no caso de uma cavidade, fez-se uso da notação

$$\langle r, \theta | \Psi(0) \rangle = |\Psi(r, \theta, 0)\rangle = rf(r, \theta) \otimes (C_g |g\rangle + C_e |e\rangle) \otimes \sum_{j,k=0}^{\infty} C_{j,k} |j, k\rangle_{ab}. \quad (4.28)$$

Os coeficientes

$$C_{j,k} = C_j^{(a)} C_k^{(b)} \quad (4.29)$$

são definidos convenientemente como o produto das amplitudes de probabilidade do modo a com as amplitudes de probabilidade do modo b . O estado interno atômico está em uma superposição geral preparada inicialmente por um campo clássico, semelhante ao caso de uma cavidade. A distribuição espacial bidimensional, normalizada e centrada em $r = 0$, é expressa por $|f(r, \theta)|^2$, sendo que o desvio padrão $\Delta r \ll \lambda$ é delimitado pela largura da fenda colimadora. Reescrevendo o estado inicial na base dos novos operadores c, d através de (4.21), tem-se

$$|\Psi(r, \theta, 0)\rangle = rf(r, \theta) \otimes (C_g |g\rangle + C_e |e\rangle) \otimes \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{q,n=0}^N \mathcal{C}_{q,N-q} D_{q,n}^{(N)}(\theta) |n, N-n\rangle_{cd}, \quad (4.30)$$

onde, por simplicidade, redefiniu-se os coeficientes do campo

$$\mathcal{C}_{q,N-q} = C_q^{(a)} e^{iq\varphi_y} C_{N-q}^{(b)} e^{i(N-q)\varphi_x}, \quad (4.31)$$

em termos das fases das componentes do momento de dipolo.

Em consequência do procedimento utilizado na diagonalização do problema, de forma fictícia o átomo se desacopla do modo d . Então, é conveniente escrever o estado inicial em termo dos estados vestidos do hamiltoniano (4.24), que se referem somente ao átomo e o modo c . Mas antes disto, é importante reindexar o estado (4.30) na forma

$$\begin{aligned} |\Psi(r, \theta, 0)\rangle = & C_g rf(r, \theta) \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{q=0}^N \mathcal{C}_{q,N-q} D_{q,0}^{(N)}(\theta) |g, 0, N\rangle_{cd} \\ & + rf(r, \theta) \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^N \left(C_g \sum_{q=0}^N \mathcal{C}_{q,N-q} D_{q,n}^{(N)}(\theta) |g, n\rangle_c \right. \\ & \left. + C_e \sum_{q=1}^N \mathcal{C}_{q-1,N-q} D_{q-1,n-1}^{(N-1)}(\theta) |e, n-1\rangle_c \right) |N-n\rangle_d, \quad (4.32) \end{aligned}$$

onde o termo associado a $n = 0$ é explicitado na expressão e efetuou-se as trocas

$$\mathcal{C}_{q,N-q} \rightarrow \mathcal{C}_{q-1,N-q}, \quad (4.33)$$

$$D_{q,n}^{(N)}(\theta) \rightarrow D_{q-1,n-1}^{(N-1)}(\theta), \quad (4.34)$$

$$|n, N-n\rangle_{cd} \rightarrow |n-1, N-n\rangle_{cd}. \quad (4.35)$$

no segundo termo entre parênteses. O efeito dessas mudanças levam o índice N a denotar o número total de fótons do sistema. O índice n deixa de ser o número de fótons do modo c e passa a ser o número de fótons do subsistema átomo-modo c .

A não particularização das fases das componentes do momento de dipolo leva a um operador evolução um pouco diferente do caso tradicional. Portanto, os estados vestidos

referentes ao átomo e o modo c , a saber

$$|\pm, n\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|g, n\rangle_c \pm i |e, n-1\rangle_c \right), \quad (4.36)$$

apresentam um número complexo i multiplicando o termo $|e, n-1\rangle_c$. Dito isso, o estado inicial pode expresso por

$$\begin{aligned} |\Psi(r, \theta, 0)\rangle &= C_g r f(r, \theta) \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{q=0}^N \mathcal{C}_{q, N-q} D_{q,0}^{(N)}(\theta) |g, 0, N\rangle_{cd} \\ &+ \frac{r f(r, \theta)}{\sqrt{2}} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^N |N-n\rangle_d \left[\left(C_g \sum_{q=0}^N \mathcal{C}_{q, N-q} D_{q,n}^{(N)}(\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i C_e \sum_{q=1}^N \mathcal{C}_{q-1, N-q} D_{q-1, n-1}^{(N-1)}(\theta) \right) |+, n\rangle_c \right. \\ &\quad \left. + \left(C_g \sum_{q=0}^N \mathcal{C}_{q, N-q} D_{q,n}^{(N)}(\theta) + i C_e \sum_{q=1}^N \mathcal{C}_{q-1, N-q} D_{q-1, n-1}^{(N-1)}(\theta) \right) |-, n\rangle_c \right], \quad (4.37) \end{aligned}$$

evidenciando a desacoplamento do átomo com o modo d com a fatoração de $|N-n\rangle_d$.

Agora, o vetor estado evolui no intervalo $0 \leq t \leq \tau$ de acordo com a interação (4.24) e, por meio das equações de autovalores

$$U_c(\tau) |\pm, n\rangle_c = e^{\pm i \Lambda k r \sqrt{n}} |\pm, n\rangle_c, \quad U(\tau) |g, 0\rangle_c = |g, 0\rangle_c, \quad (4.38)$$

obtêm-se o estado final dependente do tempo de interação

$$\begin{aligned} |\Psi(r, \theta, \tau)\rangle &= C_g r f(r, \theta) \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{q=0}^N \mathcal{C}_{q, N-q} D_{q,0}^{(N)}(\theta) |g, 0, N\rangle_{cd} \\ &+ \frac{r f(r, \theta)}{\sqrt{2}} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^N |N-n\rangle_d \left[\left(C_g \sum_{q=0}^N \mathcal{C}_{q, N-q} D_{q,n}^{(N)}(\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i C_e \sum_{q=1}^N \mathcal{C}_{q-1, N-q} D_{q-1, n-1}^{(N-1)}(\theta) \right) e^{i \Lambda k r \sqrt{n}} |+, n\rangle_c \right. \\ &\quad \left. + \left(C_g \sum_{q=0}^N \mathcal{C}_{q, N-q} D_{q,n}^{(N)}(\theta) + i C_e \sum_{q=1}^N \mathcal{C}_{q-1, N-q} D_{q-1, n-1}^{(N-1)}(\theta) \right) e^{-i \Lambda k r \sqrt{n}} |-, n\rangle_c \right]. \quad (4.39) \end{aligned}$$

Nesta evolução temporal, percebe-se o surgimento de fases dependentes de r , responsáveis matematicamente pela informação concernente as deflexões. Portanto, é evidente que os desvios de trajetória estão diretamente ligados a n . Logo, observando os limites $0 \leq n \leq N$, é possível concluir que cada subespaço de N fótons deve apresentar N deflexões possíveis, diferentemente do caso de uma cavidade, onde cada subespaço contribui

com apenas uma deflexão. Veja que o momento transferido para o átomo nunca será proporcional a raiz de um número de fótons maior do que o sistema contém. Portanto, para um dado N , o máximo recoil que o átomo sofre deve ser proporcional a $\sqrt{N}$. Por outro lado, há sempre desvios de trajetória relativos a um número de fótons menor do que o existente no sistema. De alguma maneira isso ocorre devido a interação modo-modo. Como exemplo, considerando o estado do sistema na base não vestida, a evolução mais geral do estado inicial $|g, 2, 0\rangle$ será

$$r f(r, \theta) |g, 2, 0\rangle \rightarrow B_1(r, \theta, \tau) |g, 2, 0\rangle + B_2(r, \theta, \tau) |g, 1, 1\rangle \\ + B_3(r, \theta, \tau) |g, 0, 2\rangle + B_4(r, \theta, \tau) |e, 1, 0\rangle + B_5(r, \theta, \tau) |e, 0, 1\rangle, \quad (4.40)$$

com $B_i(r, \theta, \tau)$ denotando os coeficientes de cada termo da evolução. Veja que esta evolução não foge do subespaço de $N = 2$, apresentando 5 possibilidades finais diferentes. Então, o átomo pode retirar fótons de uma cavidade e lançar em outra de várias maneiras possíveis, mesmo sendo um átomo de dois níveis. Isso reflete no número de possibilidades de transferência de momento que o átomo pode receber, levando-se em conta duas direções possíveis e dois sentidos diferentes. Para um específico número de fótons N , por indução, é simples notar que o número de evoluções possíveis de um determinado estado inicial aumenta com $2N + 1$.

4.4 Distribuição de momento atômico

Em um tempo $t \geq \tau$, os átomos portadores de momento no plano $r - \theta$ seguem como partículas livres. Assim, como discutido no caso de uma cavidade, a distribuição espacial final do átomo em um anteparo distante do ressonador é a imagem de sua distribuição de momento no instante $t = \tau$. A fim de verificar-se a distribuição de momento do átomo defletido, aplica-se a transformada de Fourier no estado (4.39), tal que

$$|\Psi(p, \phi, \tau)\rangle = C_g \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{q=0}^N \mathcal{C}_{q, N-q} \mathcal{F}_{q,0(N)}^g(p, \phi, \tau) |g, 0, N\rangle_{cd} \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^N |N - n\rangle_d \left[\left(C_g \sum_{q=0}^N \mathcal{C}_{q, N-q} \mathcal{F}_{q,n(N)}^g(p, \phi, \tau) \right. \right. \\ \left. \left. - i C_e \sum_{q=1}^N \mathcal{C}_{q-1, N-q} \mathcal{F}_{q,n(N)}^e(p, \phi, \tau) \right) |+, n\rangle_c \right. \\ \left. + \left(C_g \sum_{q=0}^N \mathcal{C}_{q, N-q} \mathcal{F}_{q,n(N)}^{g*}(p, \phi, \tau) + i C_e \sum_{q=1}^N \mathcal{C}_{q-1, N-q} \mathcal{F}_{q,n(N)}^{e*}(p, \phi, \tau) \right) |-, n\rangle_c \right], \quad (4.41)$$

onde define-se as integrais de Fourier bidimensionais

$$\mathcal{F}_{q,n(N)}^g(p, \phi, \tau) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \theta) D_{q,n}^{(N)}(\theta) e^{-ir[p \cos(\theta-\phi)/\hbar - \Lambda k \sqrt{n}]} r d\theta dr, \quad (4.42)$$

$$\mathcal{F}_{q,n(N)}^e(p, \phi, \tau) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \theta) D_{q-1,n-1}^{(N-1)}(\theta) e^{-ir[p \cos(\theta-\phi)/\hbar - \Lambda k \sqrt{n}]} r d\theta dr, \quad (4.43)$$

com as coordenadas polares de momento expressas por

$$p_x = p \cos \phi, \quad p_y = p \sin \phi. \quad (4.44)$$

Escrevendo essas expressões em termos do momento atômico $\wp = p/k\hbar$ e fazendo uma mudança de variável na integral tal que $u = kr$, tem-se

$$\mathcal{F}_{q,n(N)}^g(\wp, \phi, \tau) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f\left(\frac{u}{k}, \theta\right) D_{q,n}^{(N)}(\theta) e^{-iu[\wp \cos(\theta-\phi) - \Lambda \sqrt{n}]} u d\theta du, \quad (4.45)$$

$$\mathcal{F}_{q,n(N)}^e(\wp, \phi, \tau) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f\left(\frac{u}{k}, \theta\right) D_{q-1,n-1}^{(N-1)}(\theta) e^{-iu[\wp \cos(\theta-\phi) - \Lambda \sqrt{n}]} u d\theta du, \quad (4.46)$$

com o estado final na representação de momento expresso por

$$\begin{aligned} |\Psi(\wp, \phi, \tau)\rangle &= \hbar k C_g \sum_{N=0}^\infty \sum_{q=0}^N \mathcal{C}_{q,N-q} \mathcal{F}_{q,0(N)}^g(\wp, \phi) |g, 0, N\rangle_{cd} \\ &\quad + \frac{\hbar k}{\sqrt{2}} \sum_{N=1}^\infty \sum_{n=1}^N |N-n\rangle_d \left[\left(C_g \sum_{q=0}^N \mathcal{C}_{q,N-q} \mathcal{F}_{q,n(N)}^g(\wp, \phi, \tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i C_e \sum_{q=1}^N \mathcal{C}_{q-1,N-q} \mathcal{F}_{q,n(N)}^e(\wp, \phi, \tau) \right) |+, n\rangle_c \right. \\ &\quad \left. + \left(C_g \sum_{q=0}^N \mathcal{C}_{q,N-q} \mathcal{F}_{q,n(N)}^{g*}(\wp, \phi, \tau) + i C_e \sum_{q=1}^N \mathcal{C}_{q-1,N-q} \mathcal{F}_{q,n(N)}^{e*}(\wp, \phi, \tau) \right) |-, n\rangle_c \right], \quad (4.47) \end{aligned}$$

normalizado pelo fator $\hbar k$.

Uma vez que o objeto de análise em questão é a a distribuição de momento do centro de massa do átomo, deve-se aplicar o traço parcial no operador densidade do sistema sobre os graus de liberdade dos modos e sobre o grau de liberdade interno atômico. O resultado é será

$$\begin{aligned} W(\wp, \phi) &= \sum_{N=0}^\infty \left| \langle g, 0 |_c \langle N |_d |\Psi(\wp, \phi, \tau)\rangle \right|^2 \\ &\quad + \sum_{N=1}^\infty \sum_{n=1}^N \left[\left| \langle +, n |_c \langle N-n |_d |\Psi(\wp, \phi, \tau)\rangle \right|^2 + \left| \langle -, n |_c \langle N-n |_d |\Psi(\wp, \phi, \tau)\rangle \right|^2 \right]. \quad (4.48) \end{aligned}$$

O estado do modo desacoplado d e os estados vestidos relacionados com os estados internos do átomo e o modo c obedecem as relações de ortogonalidade

$$\begin{aligned}\langle \pm, n | \pm, n' \rangle_c &= \delta_{n,n'}, & \langle \pm, n | \mp, n' \rangle_c &= \langle \pm, n | g, 0 \rangle_c = 0 \\ \langle N - n | N' - n' \rangle_d &= \delta_{N,N'} \delta_{n,n'},\end{aligned}\quad (4.49)$$

com $n \geq 1$ e $N \geq 1$. Assim, obtêm-se finalmente a solução formal da distribuição de momento atômico

$$\begin{aligned}W(\wp, \phi) &= \hbar^2 k^2 |C_g|^2 \sum_{N=0}^{\infty} \left| \sum_{q=0}^N C_{q,N-q} \mathcal{F}_{q,0(N)}^g(\wp, \phi) \right|^2 \\ &+ \frac{\hbar^2 k^2}{2} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^N \left[\left| C_g \sum_{q=0}^N C_{q,N-q} \mathcal{F}_{q,n(N)}^g(\wp, \phi, \tau) - iC_e \sum_{q=1}^N C_{q-1,N-q} \mathcal{F}_{q,n(N)}^e(\wp, \phi, \tau) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| C_g \sum_{q=0}^N C_{q,N-q} \mathcal{F}_{q,n(N)}^{g*}(\wp, \phi, \tau) + iC_e \sum_{q=1}^N C_{q-1,N-q} \mathcal{F}_{q,n(N)}^{e*}(\wp, \phi, \tau) \right|^2 \right].\end{aligned}\quad (4.50)$$

Esta expressão evidencia a dependência de $W(\wp, \phi)$ com as amplitudes de probabilidade do átomo e dos modos, assim como, no problema de uma cavidade.

4.5 Integrais bidimensionais de Fourier

O cálculo as integrais de Fourier bidimensionais (4.45) e (4.46) foi parte marcante do projeto de mestrado. A fim de visualizar algum exemplo particular da distribuição de momento do átomo, deve-se escolher o estado inicial espacial experimentalmente configurado pela fenda anteposta as cavidades. A analiticidade do caso particular escolhido depende fortemente da solução das integrais de Fourier não triviais, com integrando proporcional a distribuição da fenda. Esta cálculo tem caráter bastante matemático e optou-se por inseri-lo no Apêndice C.

Sem perda de generalidade, é razoável supor um fenda circular com simetria azimutal tal que $f\left(\frac{u}{k}, \theta\right) = f\left(\frac{u}{k}\right)$. Quando essa função é uma Gaussiana, as integrais de Fourier não possuem solução analítica conhecida. A alternativa foi buscar uma outra função normalizável, que multiplicada pelas exponenciais $e^{\pm i\Lambda u \sqrt{n}}$ advindas da interação, apresentasse solução analítica e descrevesse de forma razoável os efeitos decorrentes da fenda. Por este motivo foi introduzida a função exponencial no capítulo 3 (3.16). Para deflexões atômicas causadas pela ação de um único campo quântico, o uso desta função resultou em uma distribuição de momento muito parecida com a obtida em (21), via função Gaussiana.

Trazendo para o contexto de coordenadas polares, a distribuição exponencial normalizada que possibilita o calculo da transformada de Fourier, discutida no Apêndice C, deve ser

$$f\left(\frac{u}{k}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\Delta r k \pi}} e^{-\frac{u}{2k\Delta r}}, \quad (4.51)$$

de desvio padrão $\Delta r \ll \lambda$. Observe sua forma na Figura 4.3.

Figura 4.3 – Gráfico da distribuição exponencial bidimensional com $\Delta r = 1$.

A partir de cálculos extremamente demorados, as transformadas de Fourier bidimensionais são completamente determinadas por

$$\mathcal{F}_{q,n(N)}^g(\wp, \phi, \tau) = \frac{1}{2\pi\hbar k} \sum_{m=\max(0, q+n-N)}^{\min(n,q)} \sum_{s=0}^{N-\nu} \sum_{t=0}^{\nu} \bar{F}_{q,n,m}^{g(N),s,t,\nu} \mathcal{R}_{s,t,n}^{g(N)}(\wp, \tau) (ie^{i\phi})^v, \quad (4.52)$$

$$\mathcal{F}_{q,n(N)}^e(\wp, \phi, \tau) = \frac{1}{2\pi\hbar k} \sum_{m=\max(0, q+n-N-1)}^{\min(n-1, q-1)} \sum_{s=0}^{N-\nu+1} \sum_{t=0}^{\nu-2} \bar{F}_{q,n,m}^{e(N),s,t,\nu} \mathcal{R}_{s,t,n}^{e(N)}(\wp, \tau) (ie^{i\phi})^{v+1}, \quad (4.53)$$

onde

$$\mathcal{R}_{s,t,n}^{g(N)}(\wp, \tau) = \frac{\pm}{2\sqrt{\Delta r k \pi}} \left[\frac{|v|}{\wp^2 + \gamma^2} + \frac{\gamma}{(\wp^2 + \gamma^2)^{3/2}} \right] \left[\frac{(\wp/\gamma)}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\wp}{\gamma}\right)^2}} \right]^{|v|}, \quad (4.54)$$

$$\mathcal{R}_{s,t,n}^{e\pm(N)}(\wp, \tau) = \frac{\pm}{2\sqrt{\Delta r k \pi}} \left[\frac{|v+1|}{\wp^2 + \gamma^2} + \frac{\gamma}{(\wp^2 + \gamma^2)^{3/2}} \right] \left[\frac{(\wp/\gamma)}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\wp}{\gamma}\right)^2}} \right]^{|v+1|}. \quad (4.55)$$

com $v = 2(s + t) - N$. Os coeficientes numéricos são definidos por

$$\overline{F}_{q,n,m}^{g(N),s,t,\nu} \equiv \overline{D}_{q,n,m}^{(N)} \frac{\pi}{2^{N-1}i^\nu} \binom{N-\nu}{s} \binom{\nu}{t} (-1)^{\nu-t}, \quad (4.56)$$

$$\overline{F}_{q,n,m}^{e(N),s,t,\nu} \equiv \overline{D}_{q-1,n-1,m}^{(N-1)} \frac{\pi}{2^{N-2}i^{\nu-2}} \binom{N-\nu+1}{s} \binom{\nu-2}{t} (-1)^{\nu-2-t}. \quad (4.57)$$

É válido ressaltar que $\nu(q, n, m) = q + n - 2m$. Perceba que a dependência angular dessas funções são exponenciais complexas. Isso sugere que a parte radial da distribuição de momento deve ser modulada por funções trigonométricas $\sin a\phi$ e $\cos b\phi$, com a e b números inteiros.

Capítulo 5

Padrões de deflexões bidimensionais

A depender do número de fótons do sistema, observou-se que a distribuição de momento pode apresentar-se de maneira bastante complicada. Isso é verificado de forma simples na expressão (4.50) onde todas as somatórias dependem do número total de fótons N . Assim sendo, dedicou-se o presente capítulo a análise da distribuição de momento atômico, calculada a partir de estados iniciais do sistema átomo-dois modos, que são caracterizados por um número de fótons pequeno. Desta forma, o resultado obtido pode ser examinado de um ponto de vista intuitivo, dando margem para possíveis avaliações pertinentes.

Nos gráficos subsequentes, tem-se a função distribuição de momento atômico $W(\wp, \phi)$ no eixo z , versus as componentes do momento atômico $\wp_x$ e $\wp_y$. Em todos os casos, fixou-se o parâmetro de interação adimensional dependente do tempo de interação em $\Lambda = 10$. O desvio padrão, relacionado com a largura da fenda, em todo o restante da dissertação foi escolhido como $\Delta r = \lambda/10$, satisfazendo a condição para o regime de Stern-Gerlach $\Delta r \ll \lambda$. Vale lembrar que os resultados são válidos para qualquer comprimento de onda do campo que seja suficientemente maior que a fenda do experimento e que o acoplamento esteja dentro do permitido para a aproximação de dipolo elétrico.

5.1 Modos no estado de vácuo

O caso mais simples de ser analisado trata-se da interação entre o átomo de dois níveis e os dois modos das cavidades no estado de vácuo, ou seja, o único coeficiente diferente de zero é $C_{0,0}$. Se o átomo é preparado no estado fundamental, o número de fótons do sistema é $N = 0$. Por não existir possibilidade de interação, a probabilidade de ocorrer deflexão é nula e a distribuição de momento deve permanecer concentrada na origem. Isso deve ocorrer independentemente da geometria da fenda escolhida para o problema. O gráfico da Figura 5.1 expressa exatamente este resultado, onde os maiores pesos de $W(\wp, \phi)$ concentram-se em torno do momento transversal zero.

Figura 5.1 – Distribuição de momento atômico transversal $W(\varphi, \phi)$ via estado inicial $|g, 0, 0\rangle$, ou seja, $C_{0,0} = C_g = 1$.

Outro caso simples compreende o átomo ser preparado em seu estado excitado combinado com o estado de vácuo dos dois modos. Pelo que foi discutido nos capítulos anteriores, espera-se que o átomo sofra alguma transferência de momento relacionada com o número de fótons $n = 1$. Além disso, o gráfico deve evidenciar que não existe direção privilegiada para a ocorrência de transferência de momento, pois a probabilidade do fóton que está no átomo ir para qualquer cavidade é a mesma. No gráfico da Figura 5.2 observa-se uma função independente do ângulo polar e bastante concentrada nas proximidades do círculo $\varphi = \Lambda\sqrt{1}$, sendo o primeiro indício nos gráficos de que a transferência de momento para o átomo é quantizada e depende do número de fótons do sistema. Pelo fato do átomo estar inicialmente preparado em $|e\rangle$, proporcionando $N = 1$, a probabilidade de que ele não sofra transferência de momento é nula e o pico central não existe mais. Devido a distribuição de pesos em uma "área de momento" maior, o valor máximo de $W(\varphi, \phi)$ com $|e, 0, 0\rangle$ é bem menor se comparado ao caso $|g, 0, 0\rangle$, conservando a probabilidade total.

Figura 5.2 – Distribuição de momento atômico transversal $W(\varphi, \phi)$ via estado inicial $|e, 0, 0\rangle$, ou seja, $C_{0,0} = C_e = 1$.

5.2 Modos nos estados $|0, 1\rangle$ e $|1, 0\rangle$

Quando o estado inicial do sistema contém um fóton situado em um dos modos, surgem variações angulares na distribuição de momento. O gráfico da Figura 5.3 expressa a função $W(\wp, \phi)$ considerando a existência de um fóton localizado no modo x e o átomo em seu estado fundamental. Note a existência do ganho de momento atômico em torno da circunferência $\wp = \Lambda\sqrt{1}$, superposto com uma estrutura deformada em torno do centro. O gráfico indica que o átomo não deflete somente no eixo cujo modo está no estado de vácuo, ou seja, eixo y . Na direção x , observa-se deflexão em torno no raio de momento $\wp = \Lambda\sqrt{1}$, eixo onde encontra-se o modo que contém um fóton sendo.

Figura 5.3 – Distribuição de momento atômico transversal $W(\wp, \phi)$ via estado inicial $|g, 1, 0\rangle$, ou seja $C_{1,0} = C_g = 1$.

Se o fóton estiver no modo da cavidade com eixo óptico situado no eixo y , deve-se observar o mesmo gráfico de $|g, 1, 0\rangle$ rotacionado de $\pi/2$ em torno do eixo z , como visto no gráfico da Figura 5.4. Com ambas condições iniciais $|g, 1, 0\rangle$ e $|g, 0, 1\rangle$, só é possível ocorrer transferência de momento para a circunferência $\wp = \Lambda\sqrt{1}$ nas regiões próximas ao eixo onde o fóton se propaga. Devido ao fato dos campos se superporem na origem do sistema de coordenadas, estando o fóton em qualquer um dos modos, é improvável que o átomo continue com momento nulo. Isso se manifesta com uma lacuna entre dois picos simétricos próximos da origem. Em outras palavras, a distribuição inicial com média na origem foi deformada pela interação do átomo com os campos.

Nos dois últimos gráficos comentados e nos que se seguem por este capítulo, fica evidente que os desvios de trajetória possíveis que o o átomo sofre são sempre simétricos em relação a origem. Portanto, a mesma analogia feita no caso de uma cavidade, com o experimento de Stern-Gerlach original, pode ser admitida aqui. Esse fato motivou a escolha do título desta dissertação.

Figura 5.4 – Distribuição de momento atômico transversal $W(\varphi, \phi)$ via estado inicial $|g, 0, 1\rangle$, ou seja $C_{0,1} = C_g = 1$.

Se o átomo incidir na onda estacionária em seu estado excitado, combinado com um fóton no modo em x ($|e, 1, 0\rangle$), o número de fótons total do sistema passa a ser $N = 2$. Pelos gráficos da Figura 5.5 e 5.6, onde optou-se por esta condição inicial, novamente a probabilidade do átomo permanecer na origem é nula. Na Figura 5.5, onde o gráfico foi construído a partir do estado inicial $|e, 1, 0\rangle$, surgem probabilidades de deflexão em torno das circunferências $\varphi = \Lambda\sqrt{1}$ e $\varphi = \Lambda\sqrt{2}$. Entretanto, devido a existência de um fóton no modo com propagação em x , somado ao fóton do átomo, só ocorre desvio relativo a dois fótons na direção de x . A direção y contém somente a deflexão proporcional a raiz de um fóton, pois o modo correspondente a esta direção está no vácuo.

Figura 5.5 – Distribuição de momento atômico transversal $W(\varphi, \phi)$ via estado inicial $|e, 1, 0\rangle$, ou seja $C_{1,0} = C_e = 1$.

Se o estado inicial é $|e, 0, 1\rangle$, o gráfico deve ser o mesmo do caso $|e, 1, 0\rangle$, mas rotacionado de $\pi/2$ em torno do eixo z , como visto na Figura 5.6. De forma mais resumida, é

fácil perceber que a presença do fóton no átomo faz com que o padrão de deflexão seja todo promovido de uma quantidade $\Lambda(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. Note que a partir dos casos vistos até aqui, os resultados sugerem que a distribuição de momento expressa uma superposição de prováveis deflexões proporcionais a raiz do número de fótons “átomo + modo x ” e “átomo + modo y ”, com a dependência angular modulada segundo a localização do fóton nas cavidades.

Figura 5.6 – Distribuição de momento atômico transversal $W(\varphi, \phi)$ via estado inicial $|e, 0, 1\rangle$, ou seja $C_{0,1} = C_e = 1$.

5.3 Modos no estado $|1, 1\rangle$

Outra condição inicial importante de ser mencionada pressupõe um fóton em cada modo. Portanto, se antes da interação o átomo está em $|g\rangle$, o número total de fótons do sistema continua $N = 2$. O gráfico da Figura 5.7 evidencia que, para este estado inicial, a distribuição de momento apresenta simetria de rotação $\pi/2$ em torno do eixo z decorrente do número de fótons nos modos serem iguais. Veja que a estrutura central possui uma lacuna entre dois picos para cada eixo, que são os eixos das cavidades onde os campos se propagam. Na direção destes eixos é possível observar novamente que a probabilidade do átomo estar com momento nulo é zero.

Diferentemente dos outros casos analisados, aqui observa-se o aparecimento de possíveis deflexões em ângulos polares situados entre os eixos cartesianos. Note a existência da probabilidade do átomo ganhar momento $\Lambda\sqrt{1}$ na direção x e $\Lambda\sqrt{1}$ na direção y , levando a uma resultante $\varphi = \Lambda\sqrt{2}$ para os ângulos $(2k+1)\pi/4$, com k inteiro. Então, a distribuição de momento expressa três casos possíveis ao mesmo tempo: desvio de trajetória devido ao número de fótons “átomo + modo x ”, “átomo + modo y ” e ainda um "recoil" proporcional a raiz do número de fótons total “átomo + modo x + modo y ”. Este é o

primeiro indício gráfico de que a transferência de momento na direção angular também é quantizada. Pela definição do índice $n = m + l$, que está diretamente ligado com as deflexões possíveis, o mesmo valor de n pode ser obtido com várias combinações de m e l , proporcionando pesos diferentes para ângulos distintos no plano de deflexão.

Figura 5.7 – Distribuição de momento atômico transversal $W(\phi, \phi)$ via estado inicial $|g, 1, 1\rangle$, ou seja $C_{1,1} = C_g = 1$.

Apesar de existir a possibilidade do átomo sofrer desvios para ângulos intermediários relativo ao número de fótons dos dois modos simultaneamente, é simples notar pelo gráfico da Figura 5.7 que a probabilidade deste fenômeno ocorrer é consideravelmente menor do que o átomo permanecer na região central. Se só alguns ângulos possuem deflexão, consequentemente, outros devem permanecer na distribuição central.

Quando o átomo está inicialmente no estado excitado, como já observado, não existe probabilidade deste permanecer em torno da origem. Devido a contribuição de mais um fóton localizado no átomo, tudo o que ocorre com $|g, 1, 1\rangle$ também ocorre com $|e, 1, 1\rangle$, diferindo por um translado de $\Lambda(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ na direção radial do momento atômico.

Figura 5.8 – Distribuição de momento atômico transversal $W(\phi, \phi)$ via estado inicial $|e, 1, 1\rangle$, ou seja $C_{1,1} = C_e = 1$.

Baseando-se nesses gráficos, verifica-se que a ocorrência de transferência de momento para o átomo depende fortemente da maneira com que os fótons estão distribuídos nos modos. Intuitivamente, para número de fótons pequenos, pode-se deduzir quais são as condições iniciais do sistema abordado. Além disso, observa-se uma simetria espacial nas deflexões, sendo igualmente provável ganhos de momento opostos e de mesmo módulo, como no caso de uma cavidade, mas generalizado no plano polar. Superposições de Fock, ou mesmo estados emaranhados, exibirão uma distribuição de momento com a soma das contribuições apresentadas aqui.

5.4 Estados Coerentes

O estado coerente é uma superposição infinita de estados de Fock. Para dois modos do campo, sua estatística é caracterizada por

$$C_{q,N-q} = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \frac{\alpha^q \beta^{N-q}}{\sqrt{q! (N-q)!}}, \quad (5.1)$$

onde α e β são as intensidades dos modos em x e em y , respectivamente, com número de fótons médio total $\bar{n} = |\alpha|^2 + |\beta|^2$. Por meio da superposição atômica

$$C_g = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad C_e = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}, \quad (5.2)$$

com $\varphi = \pi/4$, na Figura 5.9 exibe-se o gráfico referente ao cálculo da distribuição $W(\phi, \phi)$ com $\alpha = 1.5e^{i\pi/2}$ e $\beta = 2e^{i\pi/5}$. Como o pico central é muito maior que as deflexões, para melhor visualizá-las fora feito um corte no eixo z .

Figura 5.9 – Gráfico da distribuição $W(\varphi, \phi)$ com o estado coerente nos dois modos, para $\alpha = 1.5e^{i\pi/2}$, $\beta = 2e^{i\pi/5}$ e $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Como a distribuição central é muito maior que as deflexões, para melhor visualizá-las, foi feito um corte no eixo z .

Note que o caráter discreto da direção radial permanece, mas devido as várias contribuições de estados de Fock contabilizadas, a discretização angular é ocultada ou suavizada. Ao contrário de simples estados de Fock com número de fótons pequeno, descobrir condições iniciais do sistema para superposições com mais termos, ou mesmo estados emaranhados, deixa de ser trivial. A medida que o número de termos aumenta, mais funções contribuem para cada circunferência de deflexão. Nesses casos, a função $W(\varphi, \phi)$ apresenta aparência mais complicada e contém um número de parâmetros relativamente grande que a caracteriza. Para que seja possível determinar de forma mais precisa qual é o estado do campo na base de Fock, é mais apropriado apelar para o método matemático da tomografia, introduzido no capítulo 3. Esse procedimento será discutido no capítulo que se segue.

Capítulo 6

Aplicações

Pretende-se mostrar aqui uma associação entre os coeficientes dos modos com as probabilidades mensuráveis, similar a explanada no capítulo 3. Para isso, no regime de Λ suficientemente grande, demonstra-se graficamente que a parte radial da distribuição de momento age como uma superposição de funções delta. Desta feita, a tomografia dos coeficientes dos campos pode ser implementada com os dois modos ativos, simultaneamente.

No regime de parâmetros de interação pequenos, discute-se a aplicação do SGO de cavidades cruzadas para litografia atômica decorrente de efeitos puramente quânticos. Essa aplicação, de cunho tecnológico, decorre da escolha específica dos parâmetros dos modos. Em todo o capítulo, os cálculos foram propostos com estados coerentes, fixando as fases das componentes do momento de dipolo em $\varphi_x = \varphi_y = 3\pi/2$.

6.1 Tomografia de dois modos

Expandindo os módulos quadrados da expressão formal (4.50), com algumas manipulações algébricas, tem-se a equação

$$\begin{aligned}
 W(\wp, \phi) = & 2|C_g|^2 \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{q', q=0}^N \mathcal{C}_{q', N-q'}^* A_{q', q, 0}^{g(N)}(\wp, \phi) \mathcal{C}_{q, N-q} \\
 & + 2 \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^N \left[|C_g|^2 \sum_{q', q=0}^N \mathcal{C}_{q', N-q'}^* A_{q', q, n}^{g(N)}(\wp, \phi) \mathcal{C}_{q, N-q} \right. \\
 & + |C_e|^2 \sum_{q', q=1}^N \mathcal{C}_{q'-1, N-q'}^* A_{q'-1, q-1, n}^{e(N)}(\wp, \phi) \mathcal{C}_{q-1, N-q} \\
 & \left. + \sum_{q'=0}^N \sum_{q=1}^N \left(C_g^* C_e \mathcal{C}_{q', N-q'}^* A_{q', q-1, n}^{ge(N)}(\wp, \phi) \mathcal{C}_{q-1, N-q} + c.c \right) \right], \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

mais útil de ser trabalhada na tomografia, onde definiu-se os coeficientes dependentes de $\wp$ e ϕ

$$A_{q',q,n}^{g(N)}(\wp, \phi) \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2} \mathcal{F}_{q',q(N)}^{g*}(\wp, \phi) \mathcal{F}_{q,q(N)}^g(\wp, \phi) \quad (6.2)$$

$$A_{q'-1,q-1,n}^{e(N)}(\wp, \phi) \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2} \mathcal{F}_{q',n(N)}^{e*}(\wp, \phi) \mathcal{F}_{q,n(N)}^e(\wp, \phi) \quad (6.3)$$

$$A_{q',q-1,n}^{ge(N)}(\wp, \phi) \equiv -\frac{\hbar^2 k^2}{2} \Im \left\{ \mathcal{F}_{q',n(N)}^g(\wp, \phi) \mathcal{F}_{q,n(N)}^{e*}(\wp, \phi) \right\}. \quad (6.4)$$

Apesar da tomografia poder ser realizada para qualquer estado expresso na base de Fock, o estado coerente (5.1), aliado com a mesma superposição atômica (5.2), é um bom exemplo para visualizar os efeitos da variação do parâmetro de interação Λ na distribuição de momento do átomo. Nos gráficos expostos a seguir, cuja soluções de $W(\wp, \phi)$ foram calculadas para $\Lambda = 5, 10$ e 20 , optou-se por $\alpha = 2e^{i\pi/2}$ e $\beta = 2$. Fixou-se a fase da superposição atômica em $\varphi = 0$.

Figura 6.1 – Distribuição de momento atômico transversal $W(\wp, \phi)$ com os dois modos inicialmente em estados coerentes para $\Lambda = 5$.

Figura 6.2 – Distribuição de momento atômico transversal $W(\wp, \phi)$ com os dois modos inicialmente em estados coerentes para $\Lambda = 10$.

Figura 6.3 – Distribuição de momento atômico transversal $W(\varphi, \phi)$ com os dois modos inicialmente em estados coerentes para $\Lambda = 20$. Corte no eixo de $W(\varphi, \phi)$.

Note que a medida que Λ é aumentado, os desvios circulares concêntricos ficam cada vez mais distantes uns dos outros, com peso muito concentrado nas circunferências definidas por $\varphi = \Lambda\sqrt{n}$. Ou seja, no limite de $\Lambda \gg 1$, a parte radial de cada termo da expressão (6.1), correspondente a um dado n , comporta-se como função delta. Devido a força da interação ser controlada por Λ , com seu aumento os raios dos círculos ficam cada vez maiores, espalhando a probabilidade por uma "área de momento" cada vez maior. Como o pico central não sofre esse processo, acaba por sobressair demasiado no gráfico. Desta forma, a fim de visualizar melhor a discretização da transferência de momento, na Figura 6.3 fez-se um corte no eixo de $W(\varphi, \phi)$ enfatizando as deflexões.

Na figura 6.1, com $\Lambda = 5$, $W(\varphi, \phi)$ ainda é bem suave e as circunferências não são bem resolvidas. Quando $\Lambda = 10$, como na Figura 6.2, e para $\Lambda = 20$, tal como na Figura 6.3, as deflexões discretas já estão muito bem definidas e mais distantes umas das outras. Portanto, para parâmetros de interação grandes, a mesma ideia utilizada na tomografia do estado de um modo pode ser utilizada aqui para a coordenada radial. Ao calcular $W(\varphi = \Lambda\sqrt{n}, \phi)$, somente a função caracterizada por n tem valor não nulo e a somatória em n pode ser retirada. Isso permite encontrar um conjunto de n equações que correspondem a distribuição angular de momento para cada círculo situado no ponto $\varphi = \Lambda\sqrt{n}$. Assim, mantendo a mesma superposição atômica (5.2) e considerando coeficientes

dos campos arbitrários novamente, tem-se

$$\begin{aligned} \left. \frac{dP_n}{d\phi} \right|_{\varphi=\Lambda\sqrt{n}} &\cong \sum_{N=1}^{\infty} \left[\sum_{q',q=0}^N \mathcal{C}_{q',N-q'}^* A_{q',q,n}^{g(N)} (\Lambda\sqrt{n}, \phi) \mathcal{C}_{q,N-q} \right. \\ &\quad + \sum_{q',q=1}^N \mathcal{C}_{q'-1,N-q'}^* A_{q'-1,q-1,n}^{e(N)} (\Lambda\sqrt{n}, \phi) \mathcal{C}_{q-1,N-q} \\ &\quad \left. + \sum_{q'=0}^N \sum_{q=1}^N A_{q',q-1,n}^{ge(N)} (\Lambda\sqrt{n}, \phi) \left(\mathcal{C}_{q',N-q'}^* \mathcal{C}_{q-1,N-q} e^{i\varphi} + c.c \right) \right], \quad (6.5) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{dP_0}{d\phi} \right|_{\varphi=0} \cong \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{q',q=0}^N \mathcal{C}_{q',N-q'}^* A_{q',q,0}^{g(N)} (0, \phi) \mathcal{C}_{q,N-q}. \quad (6.6)$$

Observe que $dP_n/d\phi$ denota a probabilidade de se encontrar o átomo, que está no círculo $\varphi = \Lambda\sqrt{n}$, no intervalo $[\phi, \phi + d\phi]$. É conveniente expressar esse sistema de equações como um produto matricial, a saber

$$\left. \frac{dP_n}{d\phi} \right|_{\varphi=\Lambda\sqrt{n}} = \mathcal{C}^\dagger \left\{ \mathcal{A}_n^g(\phi) + \mathcal{A}_n^e(\phi) + \mathcal{A}_n^{ge}(\phi, \varphi) \right\} \mathcal{C}, \quad (6.7)$$

$$\left. \frac{dP_0}{d\phi} \right|_{\varphi=0} = \mathcal{C}^\dagger \mathcal{A}_0^g(\phi) \mathcal{C}, \quad (6.8)$$

onde ocultando as dependências em ϕ dos elementos dessas matrizes, definiu-se

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{0,0} \\ \mathcal{C}_{0,1} \\ \mathcal{C}_{1,0} \\ \mathcal{C}_{0,2} \\ \mathcal{C}_{1,1} \\ \mathcal{C}_{2,0} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_n^g(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{0,0,n}^{g(1)} & A_{0,1,n}^{g(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{1,0,n}^{g(1)} & A_{1,1,n}^{g(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{0,0,n}^{g(2)} & A_{0,1,n}^{g(2)} & A_{0,2,n}^{g(2)} \\ 0 & 0 & 0 & A_{1,0,n}^{g(2)} & A_{1,1,n}^{g(2)} & A_{1,2,n}^{g(2)} \\ 0 & 0 & 0 & A_{2,0,n}^{g(2)} & A_{2,1,n}^{g(2)} & A_{2,2,n}^{g(2)} & \dots \\ \vdots & & & & & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_n^e(\phi) = \begin{pmatrix} A_{0,0,n}^{e(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{0,0,n}^{e(2)} & A_{0,1,n}^{e(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{1,0,n}^{e(2)} & A_{1,1,n}^{e(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{0,0,n}^{e(3)} & A_{0,1,n}^{e(3)} & A_{0,2,n}^{e(3)} \\ 0 & 0 & 0 & A_{1,0,n}^{e(3)} & A_{1,1,n}^{e(3)} & A_{1,2,n}^{e(3)} \\ 0 & 0 & 0 & A_{2,0,n}^{e(3)} & A_{2,1,n}^{e(3)} & A_{2,2,n}^{e(3)} & \dots \\ \vdots & & & & & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_n^{ge}(\phi, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 & A_{0,0,n}^{ge(1)} e^{-i\varphi} & A_{1,0,n}^{ge(1)} e^{-i\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ A_{0,0,n}^{ge(1)} e^{i\varphi} & 0 & 0 & A_{0,0,n}^{ge(2)} e^{-i\varphi} & A_{1,0,n}^{ge(2)} e^{-i\varphi} & A_{2,0,n}^{ge(2)} e^{-i\varphi} \\ A_{1,0,n}^{ge(1)} e^{i\varphi} & 0 & 0 & A_{0,1,n}^{ge(2)} e^{-i\varphi} & A_{1,1,n}^{ge(2)} e^{-i\varphi} & A_{2,1,n}^{ge(2)} e^{-i\varphi} \\ 0 & A_{0,0,n}^{ge(2)} e^{i\varphi} & A_{0,1,n}^{ge(2)} e^{i\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{1,0,n}^{ge(2)} e^{i\varphi} & A_{1,1,n}^{ge(2)} e^{i\varphi} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A_{2,0,n}^{ge(2)} e^{i\varphi} & A_{2,1,n}^{ge(2)} e^{i\varphi} & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_0^g(\phi) = \begin{pmatrix} A_{0,0,0}^{g(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{0,0,0}^{g(1)} & A_{0,1,0}^{g(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{1,0,0}^{g(1)} & A_{1,1,0}^{g(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{0,0,0}^{g(2)} & A_{0,1,0}^{g(2)} & A_{0,2,0}^{g(2)} \\ 0 & 0 & 0 & A_{1,0,0}^{g(2)} & A_{1,1,0}^{g(2)} & A_{1,2,0}^{g(2)} \\ 0 & 0 & 0 & A_{2,0,0}^{g(2)} & A_{2,1,0}^{g(2)} & A_{2,2,0}^{g(2)} & \dots \\ & & & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Apesar dessas matrizes apresentarem dimensão infinita, suas formas são bem determinadas. Evidentemente, todas essas matrizes são hermitianas, proporcionando que a probabilidade seja um número real. Veja que todas as matrizes são bloco diagonais, a menos da matriz $\mathcal{A}_n^{ge}$.

A probabilidade experimental P_n é obtida via contagem de átomos que defletem em uma dada região angular $\phi_i \leq \phi \leq \phi_f$, para cada desvio circular $\wp = \Lambda\sqrt{n}$. No intuito de obtê-la, deve-se calcular a integral angular de cada elemento das matrizes $\mathcal{A}$, a saber

$$P_0(0 \leq \phi \leq 2\pi) = \mathcal{C}^\dagger \left\{ \int_0^{2\pi} \mathcal{A}_0^g(\phi) d\phi \right\} \mathcal{C} \quad (6.9)$$

$$P_n(\phi_i \leq \phi \leq \phi_f, \varphi) = \mathcal{C}^\dagger \left\{ \int_{\phi_i}^{\phi_f} [\mathcal{A}_n^g(\phi) + \mathcal{A}_n^e(\phi) + \mathcal{A}_n^{ge}(\phi, \varphi)] d\phi \right\} \mathcal{C} \quad (6.10)$$

A dependência angular das funções (4.53) são exponenciais complexas, consequentemente, as integrais serão triviais. Para $\Lambda \gg 1$, os gráficos apresentados mostram que a distribuição central se torna praticamente uma delta na origem, dificultando a obtenção de informação experimental angular neste ponto. Por isso, a integral associada a P_0 deve ser calculada por todo o ângulo polar. Os valores $P_n(\phi_i \leq \phi \leq \phi_f, \varphi)$ dependem da fase atômica e representam a probabilidade do átomo estar com momento ($\wp = \Lambda\sqrt{n}, \phi_i \leq \phi \leq \phi_f$) muito bem definido radialmente, entre ângulos arbitrários a serem demarcados de forma eficaz pelo experimentador.

Utilizando o artifício proposto por Freyberger e Herkommer, ao realizar o experimento duas vezes, uma com a fase da superposição atômica $\varphi = 0$ e outra com $\varphi = \pi$, geralmente a distribuição de momento será diferente para cada caso. Porém, somente a matriz

$\mathcal{A}_n^{ge}(\phi, \varphi)$ depende da fase φ e a subtração

$$\mathcal{P}_n(\phi_i \leq \phi \leq \phi_f) \equiv P_n(\phi_i \leq \phi \leq \phi_f, 0) - P_n(\phi_i \leq \phi \leq \phi_f, \pi) \quad (6.11)$$

proporcionará a simplificação

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(\phi_i \leq \phi \leq \phi_f) &= \mathcal{C}^\dagger \left\{ \int_{\phi_i}^{\phi_f} [\mathcal{A}_n^{ge}(\phi, 0) - \mathcal{A}_n^{ge}(\phi, \pi)] d\phi \right\} \mathcal{C} \\ &= \mathcal{C}^\dagger \left\{ 2 \int_{\phi_i}^{\phi_f} \mathcal{A}_n^{ge}(\phi, 0) d\phi \right\} \mathcal{C}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Recordando que cada elemento do vetor $\mathcal{C}$ é proporcional ao produto entre as amplitudes de probabilidades do modo a com as amplitudes de probabilidade do modo b , note que as expressões (6.9) e (6.12) constituem um sistema não linear com infinitas equações e infinitas incógnitas. Cada termo destas equações possui um produto de quatro variáveis e, a depender do histograma levantado pelo detector, deve-se dividir o espaço em vários intervalos angulares, no intuito de obter o número de equações adequado para a obtenção de uma solução não trivial.

O número de círculos concêntricos que o observador encontra no anteparo permite deduzir quais amplitudes de probabilidade são diferentes de zero, sendo possível truncar a dimensão da matriz $\mathcal{A}_n^{ge}(\phi, 0)$. Portanto, ao perceber no detector somente uma distribuição em torno da origem, o único estado inicial do sistema possível é $|g, 0, 0\rangle$. Se além do centro for observado desvios relacionados com um e dois fóton, basta limitar a soma em $0 \leq N \leq 2$. Matematicamente, o número de intervalos angulares espaciais possíveis é ilimitado. Então, a precisão dos valores dos coeficientes dos modos depende da acurácia do experimento. Veja que a reindexação relacionada com o número total de fótons foi extremamente útil no truncamento da dimensão das matrizes.

6.2 Litografia atômica

A simetria circular dos resultados gráficos discutidos motiva a analogia do SGO de cavidades cruzadas com difração de luz por fenda circular. Apesar desses dois fenômenos possuírem soluções explícitas distintas, ambos exibem máximos e mínimos de probabilidade. A Figura 6.4 contém um gráfico da distribuição de momento do átomo calculada com os estados coerentes (5.1) e a superposição atômica (5.2), evidenciando os máximos de probabilidade nas regiões mais claras e os mínimos nas regiões mais escuras. O parâmetro α se refere ao modo que está no eixo x e β se refere ao modo que está no eixo y .

Apesar da aparência similar entre os dois fenômenos, as deflexões observadas via SGO de cavidades cruzadas não decorrem de um fenômeno ondulatório, mas sim da natureza

Figura 6.4 – SGO de cavidades cruzadas em analogia com difração de luz por fenda circular. Nesta caso, a escolha dos parâmetros foram $\Lambda = 10$, $\alpha = 1.5e^{i\pi/2}$, $\beta = 1.5$ e $\varphi = 0$.

quântica do campo de radiação. Neste caso é a estatística de fótons dos campos quânticos que discretizam os possíveis recuos do átomo. O acoplamento entre o átomo e cada modo depende do número total de fótons do sistema (ver capítulo 2). Como estes acoplamentos são idênticos, a força sofrida pelo átomo acaba sendo igual para todas as direções, proporcionando circunferências concêntricas de deflexão na distribuição de momento do átomo.

Ao aumentar os módulos das amplitudes dos estados coerentes $|\alpha|$ e $|\beta|$, é possível escolher um máximo como mais provável do que outros. Para isso, observe que os círculos concêntricos, em geral, possuem momento atômico radial médio individual

$$\bar{\varphi} = \Lambda\sqrt{\eta} \approx \Lambda\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}. \quad (6.13)$$

Olhando a Figura 6.4, com a escolha das amplitudes dos estado coerentes $\alpha = 1.5e^{i\pi/2}$ e $\beta = 1.5$, a menos do pico central, o máximo dominante acaba por ser o segundo círculo $n \approx 2$. A partir do oitavo máximo a probabilidade de deflexão é praticamente nula, desaparecendo completamente na Figura 6.4. A fim de estimar a distância entre os desvios circulares concêntricos, considere um átomo de ^{85}Rb atravessando os ressonadores no regime de micro-ondas $\lambda \sim 10^{-2}\text{m}$, com velocidade $v_z \sim 500\text{m/s}$. Após a interação, o átomo percorre uma distância $L_z \sim 0.5\text{m}$ até atingir uma plataforma de detecção. Levando em conta que o momento atômico é definido por $\varphi = p/k\hbar$, o deslocamento

transversal será aproximadamente

$$\ell_n = \frac{p}{m}t = \frac{\Lambda\sqrt{n}\hbar L_z}{mv_z} \approx \Lambda\sqrt{n}10^{-10}m, \quad (6.14)$$

A diferença entre os deslocamentos transversais possíveis leva a distância entre as circunferências concêntricas

$$\ell_{n+1} - \ell_n \sim \Lambda \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) 10^{-10}m. \quad (6.15)$$

Portanto, a depender do número de fótons do sistema e do parâmetro de interação, a distância entre dois máximos pode ser dezenas de vezes o raio de Bohr.

No limite $\Lambda \approx 1$, a distância entre os máximos tende a se anular ($\ell_{n+1} - \ell_n \rightarrow 0$) e o aspecto discreto da distribuição é substituído por picos superpostos concentrados em uma dada região com coordenadas médias $(\bar{\varphi}, \bar{\phi})$. Neste regime, o SGO de cavidades cruzadas pode contribuir como um direcionador de átomos. Para tal, a escolha de estados coerentes localizados em suas quadraturas de momento, a saber $\alpha = |\alpha| e^{\pm i\pi/2}$ e $\beta = |\beta| e^{\pm i\pi/2}$, permitem direcionar uma nuvem de probabilidade com momento médio radial

$$\bar{\varphi} = \sqrt{\bar{\varphi}_x^2 + \bar{\varphi}_y^2} \approx \sqrt{(\Lambda|\alpha|)^2 + (\Lambda|\beta|)^2}, \quad (6.16)$$

e ângulo médio

$$\tan \bar{\phi} \approx \frac{|\beta|}{|\alpha|}. \quad (6.17)$$

É simples ver que a tangente nunca será negativa, e portanto, a combinação correta dos sinais das fases (+) e (-) direcionam a deflexão para o quadrante desejado. Devido ao máximo central sobressair sobre o desvio atômico, os três primeiros gráficos que se seguem foram construídos sem o pico central para evidenciar a região de deflexão. Na Figura 6.5, devido a escolha $\alpha = \beta = 1.5i$ e $\varphi = 0$, os dois modos contribuem de forma equivalente para o recuo do átomo, o que resulta em um direcionamento da nuvem para o ponto médio $(\bar{\varphi} = 3/\sqrt{2}, \bar{\phi} = \pi/4)$, ou seja, no quadrante $(+, +)$.

Na Figura 6.6, a escolha $\alpha = 0$, $\beta = -3/\sqrt{2}i$ e $\varphi = 0$ direciona a probabilidade do átomo defletir em torno do ponto médio $(\bar{\varphi} = 3/\sqrt{2}, \bar{\phi} = 3\pi/2)$. Neste caso, a cavidade localizada em x não contribui com a deflexão, pois está no vácuo, o que favorece o mesmo módulo de momento atômico médio observado na Figura 6.5 em cima do eixo y negativo. Portanto, interpolando os valores das fases de α e β em $\pm\pi/2$, todos os quadrantes do espaço de momento são mapeados.

A Figura 6.7 foi construída com os mesmos α e β que os da figura 6.5, mas com a fase atômica alterada para $\varphi = \pi$. Veja que neste caso o átomo tem probabilidade de deflexão direcionada para o ângulo totalmente oposto ao da figura 6.5, efeito este análogo ao visualizado no caso de uma cavidade (ver Figura 3.2 gráficos *c* e *d*), mas generalizado

para o plano bidimensional. Além disso, o parâmetro de interação foi aumentado para $\Lambda = 3$ na tentativa de aumentar o raio do desvio. Então, observa-se o aparecimento ainda tímido dos círculos concêntricos, característico do regime $\Lambda \gg 1$, e o pico mais provável torna-se estreito radialmente. Porém este incremento da força do acoplamento proporciona perda de definição da nuvem de probabilidade na direção angular.

Figura 6.5 – Distribuição de momento do átomo com $\Lambda = 2$, $\alpha = \beta = 1.5i$ e $\varphi = 0$.

Figura 6.6 – Distribuição de momento do átomo com $\Lambda = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{3}{\sqrt{2}}i$ e $\varphi = 0$.

Figura 6.7 – Distribuição de momento do átomo com $\Lambda = 3$, $\alpha = \beta = 1.5i$ e $\varphi = \pi$.

Figura 6.8 – Distribuição de momento do átomo com $\Lambda = 2$, $\alpha = -2i$, $\beta = 2i$ e $\varphi = 0$.

Outra forma de aumentar o raio de deflexão é conceder mais energia aos modos. A Figura 6.8 foi calculada com valores de $|\alpha|$ e $|\beta|$ maiores do que na Figura 6.5, a saber $\beta = 2i$ e $\alpha = -2i$, e com a fase do modo localizado em x modificada por um sinal. Assim,

a probabilidade do átomo deixar do centro é maior, com aumento do raio de momento atômico direcionada para o quadrante $(-, +)$. Com o aumento das amplitudes dos estados coerentes também ocorre perda de definição da nuvem em ambas direções polares. Esse "borrão" surge devido a variância dos estados coerentes dependerem dos módulos $|\alpha|$ e $|\beta|$. Portanto, quanto mais enérgicos são os campos, mais difusa a nuvem de probabilidade se torna. Em especial na Figura 6.8, optou-se por incluir o pico central no gráfico com o intuito de demonstrar sua supremacia perante a nuvem de deflexão.

Para que seja possível realizar litografia atômica com o SGO de cavidades cruzadas, deve-se obter uma concentração da probabilidade de deflexão do átomo em uma região muito pequena do espaço. Desta forma, esta região reduzida poderia ser considerada tal qual um "pixel", possibilitando a crescimento de estruturas arbitrárias no plano. A utilização de estados comprimidos da luz é a alternativa pós mestrado para alcançar esta otimização.

Capítulo 7

Conclusões e perspectivas

No presente trabalho, buscou-se generalizar o Stern-Gerlach óptico para o caso de duas cavidades, as quais possuem eixos ópticos perpendiculares entre si. Nesse experimento, um pacote de onda atômico de dois níveis incide em uma pequena fração do volume ocupado por dois modos, na região onde os nodos das ondas estacionárias de cada modo se superpõem. O primeiro desafio enfrentado consistiu em encontrar o ferramental matemático adequado para diagonalizar o Hamiltoniano de interação. Este objetivo foi alcançado ao lançar-se mão de uma transformação de operadores específica, que ocasionou o acoplamento do átomo com um único modo fictício, ao invés de dois. Os novos operadores, associados a criação e aniquilação de fótons dos novos modos, obedecem as mesmas relações de comutação que os operadores originais. Esse fato permitiu a expansão do estado inicial do sistema na base desses novos operadores, e consequentemente, possibilitou o cálculo da evolução temporal do sistema e da expressão formal para a distribuição de momento do átomo.

A escolha particular de uma distribuição espacial, associada a largura do pacote atômico incidente, proveu uma solução analítica para distribuição de momento bidimensional do átomo. Assim sendo, pela análise gráfica desta distribuição, com números de fótons do sistema pequenos, observou-se que os desvios de trajetória que o átomo pode sofrer carregam informação sobre a estatística de fótons dos modos em questão. O acoplamento entre o átomo e cada modo depende do número total de fótons do sistema. Como estes acoplamentos são idênticos, a força sofrida pelo átomo acaba sendo igual para todas as direções, proporcionando circunferências concêntricas de deflexão na distribuição de momento do átomo.

Em casos simples, a informação sobre os campos pode até ser deduzida intuitivamente por meio da distribuição de momento bidimensional. Entretanto, o acesso a essa informação deixa de ser trivial para superposições de Fock com número de fótons maiores, sendo necessário um procedimento mais preciso para medir o campo, tal qual a tomografia de estados. A reconstrução de estados da luz, quando efetuada através de deflexões atômicas, depende de um regime de parâmetros de interação consideravelmente grandes

($\Lambda \geq 20$). Isso é observado tanto no capítulo 3, para um modo, como no capítulo 4, para dois modos cruzados. No contexto do SGO de cavidades cruzadas, para Λ grande, os picos de probabilidade relativos aos desvios do centro de massa do átomo, são muito bem resolvidos. Nessas condições, foi possível aproximar a densidade de probabilidade angular de momento, para cada circunferência, como o valor da função que a descreve no ponto $\varphi = \Lambda\sqrt{n}$. Ao integrá-la em um intervalo angular definido pelo experimental, obtêm-se a probabilidade do átomo estar neste intervalo, para cada circunferência. Por conseguinte, é estabelecido um sistema de equações não linear, que deve determinar uma solução não trivial para as amplitudes dos modos. A precisão desta solução depende da eficácia experimental da contagem dos átomos que defletem em um determinado intervalo angular, para cada circunferência mais provável no espaço.

No que diz respeito a aplicações tecnológicas, apesar da geometria circular das deflexões atrapalharem a focalização dos desvios, ainda sim o SGO de cavidades cruzadas pode contribuir como um direcionador de átomos no espaço. Os gráficos exibidos na segunda seção do capítulo 6 mostraram que os desvios de trajetória atômicos podem ser controlados pelas amplitudes dos estados coerentes. Essa aplicação pode ser viável na implementação de litografia atômica proveniente da natureza quântica do campo de radiação.

Quanto ao futuro, deve-se estender O SGO de cavidades cruzadas para o caso de mais cavidades, na tentativa de otimizar o controle das deflexões atômicas. Também, por meio de estados comprimidos, pretende-se concentrar a probabilidade de deflexão em uma pequena região do espaço, tal qual um pixel.

Para o caso de uma cavidade, conjectura-se a geração de estados do tipo gato de Schrödinger espaciais via superradiância de uma amostra atômica interagindo com um modo no regime de “bad-cavity”. Enfim, deve-se considerar a geração de estados emaranhados espacialmente.

Referências

- 1 IONICIOIU, R; TERNO, D. R. Proposal for a quantum delayed-choice experiment. **Physical Review Letters**, v. 107, n. 23, p. 230406, 2011.

- 2 AUCCAISE, R.; SERRA, R. M.; FILGUEIRAS, J. G.; SARTHOUR, R. S.; OLIVEIRA, I. S.; CÉLERI, L. C. Experimental analysis of the quantum complementarity principle. **Physical Review A**, v. 85, n. 3, p. 032121, 2012.

- 3 PERUZZO, A.; SHADBOLT, P.; BRUNNER, N.; POPESCU, S.; O'BRIEN, J. L. A Quantum delayed-choice experiment. **Science**, v. 338, n. 6107, p. 634-637, 2012.

- 4 KAISER, F.; COUDREAU, T.; MILMAN, P.; OSTROWSKY, D. B.; TANZILLI, S. Entanglement-enabled delayed-choice experiment. **Science**, v. 338, n. 6107, p. 637-640, 2012.

- 5 MEYSTRE, P. **Atom optics**. Berlin: Springer, 2001.

- 6 KAZANTSEV, A. P. Recoil effect in a strong resonant field. **Journal of Experimental and Theoretical Physics**, v. 40, n. 5, p. 825, 1975.

- 7 COOK, R. J.; BERNHARDT, A. F. Deflection of atoms by a resonant standing electromagnetic wave. **Physical Review A**, v. 18, n. 6, p. 2533-2537, 1978.

- 8 KAZANTSEV, A. P.; SMIRNOV, V. S.; SURDUTOVICH, G. I.; CHUDESNIKOV, D. O.; YAKOVLEV, V. P. Kinect phenomena of atomic motion in a light field. **Journal of the Optical Society of America B**, v. 2, n. 11, p. 1731-1742, 1985.

- 9 MEYSTRE, P.; STENHOLM, S. Introduction to feature on the mechanical effect of light. **Journal of the Optical Society of America B**, v. 2, n. 11, p. 1706, 1985.

- 10 KAPITZA, P. L.; DIRAC, P. A. M. The reflection of electrons from standing light waves. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 29, p.297-300, 1933.
- 11 ALTSHULER, S.; FRANTZ, L. M.; BRAUNSTEIN, R. Reflection of atoms from standing light waves. **Physical Review Letters**, v. 17, n. 5, p. 231-232, 1966.
- 12 GOULD, P. L.; RU, G. A.; PRITCHARD, D. E. Diffraction of atoms by light: the linear-resonant Kapitza-Dirac effect. **Physical Review Letters**, v. 56, n. 8, p. 827-830, 1986.
- 13 KUHR, S. et al. Ultrahigh finesse Fabry-Pérot superconducting resonator. **Applied Physics Letters**, v. 90, n. 16, p. 164101, 2007.
- 14 BRUNE, M.; SCHMIDT-KALER, F.; MAALI, A.; DREYER, J.; HAGLEY, E.; RAIMOND, J. M.; HAROCHE, S. Quantum Rabi oscillation: a direct test of field quantization in a cavity. **Physical Review Letters**, v. 76, n. 11, p. 1800-1803, 1996.
- 15 HAGLEY, E.; MAÎTRE, X.; NOGUES, G.; WUNDERLICH, C.; BRUNE, M.; RAIMOND, J. M.; HAROCHE, S. Generation of Einstein-Podolsky-Rosen pairs of atoms. **Physical Review Letters**, v. 79, n. 1, p. 1-5, 1997.
- 16 RAUSCHENBEUTEL, A.; NOGUES, G.; OSNAGHI, S.; BERTET, P.; BRUNE, M.; RAIMOND, J. M.; HAROCHE, S. Coherent operation of a tunable quantum phase gate in cavity QED. **Physical Review Letters**, v. 83, n. 24, p. 5166-05169, 1999.
- 17 MEYSTRE, P.; SCHUMACHER, E.; STENHOLM, S. Atomic beam deflection in a quantum field. **Optics Communications**, v. 73, n. 15, p. 443-447, 1989.
- 18 HOLLAND, M. J.; WALLS, D. F.; ZOLLER, P. Quantum non demolition measurements of photon number by atomic beam deflection. **Physical Review Letters**, v. 67, n. 13, p. 1716-1719, 1991.
- 19 AKULIN, V. M.; KIEN, F. L.; SCHLEICH, W. P. Deflection of atoms by a quantum field. **Physical Review A**, v. 44, n. 3, p. R1462_R1465, 1991.

-
- 20 HERKOMMER, A. M.; AKULIN, V. M.; SCHLEICH, W. P. Quantum demolition measurement of photon statistics by atomic beam deflection. **Physical Review Letters**, v. 69, n. 23, p. 3298-3301, 1992.
- 21 FREYBERGER, M.; HERKOMMER, A. M. Probing a quantum state via atomic deflection. **Physical Review Letters**, v. 72, n. 13, p. 1952-1955, 1994.
- 22 BARDROFF, P. J.; MAYR, E.; SCHLEICH, W. P. Quantum state endoscopy: measurement of the quantum state in a cavity. **Physical Review A**, v. 51, n. 6, p. 4963-4966, 1995.
- 23 BARDROFF, P. J.; MAYR, E.; SCHLEICH, W. P.; DOMOKOS, P.; BRUNE, M.; RAIMOND, J. M.; HAROCHE, S. Simulation of quantum-state endoscopy. **Physical Review A**, v. 53, n. 6, p. 2736-2741, 1996.
- 24 KHAN, A. A.; ZUBAIRY, M. S. Quantum non-demolition measurement of Fock states via atomic scattering in Bragg regime. **Physics Letters A**, v. 254, n. 6, p. 301-306, 1999.
- 25 KHOSA, A. H.; IKRAM, M.; ZUBAIRY, M. S. Measurement of entangled states via atomic beam deflection in Bragg's regime. **Physical Review A**, v. 70, n. 5, p. 052312, 2004.
- 26 KHOSA, A. H.; ZUBAIRY, M. S. Quantum-state measurement of two-mode entangled field-state in a high-Q cavity. **Physical Review A**, v. 72, n. 4, p. 042106, 2005.
- 27 GERLACH, W.; STERN, O. Das magnetische moment des silberatoms. **Zeitschrift für Physik**, v. 9, n. 1, p. 353-355, 1922.
- 28 SLEATOR, T.; PFAU, T.; BALKIN, V.; CARNAL, O.; MLYNEK, J. Experimental demonstration of the optical Stern-Gerlach effect. **Physical Review Letters**, v. 68, n. 13, p. 1996-2000, 1992.
- 29 BASEIA, B.; MARQUES, G.C.; BAGNATO, V.S. Probing a quantum state via electronic deflection. **Physics Letters A**, v. 200, n. 1, p. 1-7, 1995.

- 30 ABOVYAN, G. A.; DJOTYAN, G. P.; KRYUCHKYAN G. Y. Visualization of superposition states and Raman processes with two-dimensional atomic deflection. **Physical Review A**, v. 85, n. 1, p. 013846, 2012.
- 31 RAIMOND, J. M.; BRUNE, M.; HAROCHE, S. Colloquium: manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. **Reviews of Modern Physics**. v. 73, n. 3, p. 565-582, 2001.
- 32 HERKOMMER, A. M.; AKULIN, V. M.; SCHLEICH, W. P. Coherent evolution after the relaxation time. **Physical Review A**, v. 49, n. 4, p. 3127-3130, 1992.
- 33 MARTIN, J.; BASTIN, T. **Cold atom scattering by cavity fields in a two dimensional geometry**. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1002.0257v1>>. Acesso em: junho 2013.
- 34 ANGELO, R. M. **Aspectos quânticos e clássicos da dinâmica de emaranhamento em sistemas Hamiltonianos**. 2003. 134 p. Tese (Doutorado em Física) –Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.
- 35 BORN, M.; HEISENBERG, W.; JORDAN P. Zur quantenmechanik. **Zeitschrift für Physik**, v. 34, n. 1, p. 858-888, 1925.
- 36 SCHLEICH, W. P. **Quantum optics in phase space**. Berlin: Wiley-VCH, 2001. p. 264-266.
- 37 SCULLY, M. O.; ZUBARY, M. S. **Quantum optics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. p. 4.
- 38 TANNOUDJI, C. **Quantum mechanics**. Berlin: Wiley-VCH, 2001. v.1, p.742- 746
- 39 SCHLEICH, W. P. **Quantum optics in phase space**. Berlin: Wiley-VCH, 2001. p. 660-667.

Apêndice A

Interação radiação-matéria

A.1 Quantização do campo eletromagnético

Nesta secção encontra-se a quantização do campo eletromagnético em uma cavidade, seguindo o procedimento original adotado por M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan (35), que expressaram o potencial vetorial em termos de suas quadraturas. Além disso, expõe-se o cálculo explícito do campo vetorial que descreve os modos normais de propagação do campo em um ressonador retangular. Tal resultado é parte importante na compreensão dos Hamiltonianos de interação dependentes das coordenadas espaciais abordados por todo o corpo da dissertação.

A.1.1 Equação de onda para o potencial vetorial

Para demonstrar que os potenciais escalar $\Phi(\mathbf{r}, t)$ e vetorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ satisfazem a equação de onda, lança-se mão das equações de Maxwell no espaço livre de cargas e correntes

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (\text{A.4})$$

Por definição, c é a velocidade da luz no vácuo determinada pela relação $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$, onde ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo e μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo. Sabe-se que se o divergente de um campo é nulo, segue que esse campo pode

ser escrito como rotacional de outro campo. Assim, de (A.1) e (A.2), obtêm-se

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (\text{A.6})$$

Substituindo (A.5) e (A.6) em (A.4) e (A.3), e ainda utilizando a identidade vetorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.7})$$

têm-se

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \nabla \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right), \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi(\mathbf{r}, t)) + \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t))}{\partial t} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Considerando a invariância por transformação de Gauge das equações de Maxwell, é importante recorrer ao Gauge de Coulomb no contexto não relativístico

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Desta forma, encontra-se a equação de onda para o potencial vetorial no vácuo

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A.11})$$

A.1.2 Solução da equação de onda para um ressonador retangular

Considere um ressonador retangular de paredes condutoras ideais e arestas L_x, L_y e L_z . O ressonador comporta infinitos modos normais de propagação e, a fim de discretizá-los, propõe-se o ansatz

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_l A_l q_l(t) \mathbf{v}_l(\mathbf{r}). \quad (\text{A.12})$$

As funções vetoriais $\mathbf{v}_l(\mathbf{r})$, dependentes das coordenadas espaciais, formam um conjunto completo e devem ser ortogonais. As funções escalares $q_l(t)$ dependem somente do tempo e A_l são constantes de normalização a serem determinadas. Inserindo o ansatz em (A.11), tem-se imediatamente

$$\frac{\nabla^2 v_{i,l}(\mathbf{r})}{v_{i,l}(\mathbf{r})} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 q_l(t)}{\partial t^2}, \quad (\text{A.13})$$

onde $i = x, y, z$. Uma vez que o lado direito de (A.13) depende somente do tempo e o lado esquerdo apenas da posição dentro do ressonador, veja que ambos os lados são constantes. Devido a segunda derivada no tempo, é fácil deduzir que a constante de separação apresenta unidade de (comprimento)⁻². Convenientemente, a ela será referida a notação $-k^2$, onde $\mathbf{k}$ é o vetor de onda a ser determinado pelas condições de contorno. Note que o lado direito de (A.13) não depende da componente i , sendo a familiar equação diferencial de Helmholtz

$$\nabla^2 \mathbf{v}_l(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{v}_l(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{A.14})$$

para a parte espacial do potencial vetorial e a equação do oscilador harmônico simples para a parte temporal

$$\frac{\partial^2 q_l(t)}{\partial t^2} + \omega_l^2 q_l(t) = 0. \quad (\text{A.15})$$

A grandeza $\omega \equiv ck$ tem dimensão de frequência sendo determinada pelas condições de contorno por meio do vetor de onda.

De forma geral, o vetor de onda e o vetor posição podem ser expressos em coordenadas cartesianas como

$$\mathbf{k}_l = k_{x,l} \mathbf{e}_x + k_{y,l} \mathbf{e}_y + k_{z,l} \mathbf{e}_z \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z. \quad (\text{A.17})$$

Das condições de contorno sobre os campos, a componente tangencial de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ deve anular-se na superfície S condutora

$$\mathbf{e}_{\parallel}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|_S = \mathbf{e}_{\parallel}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}_l(\mathbf{r})|_S = 0. \quad (\text{A.18})$$

Nas paredes do ressonador retangular, essa condição se manifesta do seguinte modo:

$$\begin{aligned} v_{y,l}(x=0, y, z) &= v_{z,l}(x=0, y, z) = 0, \\ v_{x,l}(x, y=0, z) &= v_{z,l}(x, y=0, z) = 0, \\ v_{x,l}(x, y, z=0) &= v_{y,l}(x, y, z=0) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

As expressões (A.19) motiva o ansatz

$$\begin{aligned} v_{l,x}(x, y, z) &= N_l n_x \cos(k_{x,l}x) \sin(k_{y,l}y) \sin(k_{z,l}z), \\ v_{l,y}(x, y, z) &= N_l n_y \sin(k_{x,l}x) \cos(k_{y,l}y) \sin(k_{z,l}z), \\ v_{l,z}(x, y, z) &= N_l n_z \sin(k_{x,l}x) \sin(k_{y,l}y) \cos(k_{z,l}z), \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

onde N_l é um fator de normalização e $\mathbf{e} = (n_x, n_y, n_z)$ é um vetor unitário. Este ansatz

satisfaz a equação de Helmholtz! Impondo o Gauge Coulomb, obtêm-se

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_l(\mathbf{r}) = (n_x k_{x,l} + n_y k_{y,l} + n_z k_{z,l}) \sin(k_{x,l}x) \sin(k_{y,l}y) \sin(k_{z,l}z) = 0. \quad (\text{A.21})$$

Como esta condição deve ser satisfeita para todo $\mathbf{r}$, assumindo que nenhuma componente do vetor de onda é nula, tem-se

$$n_x k_{x,l} + n_y k_{y,l} + n_z k_{z,l} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (\text{A.22})$$

Esta é a conhecida condição de transversalidade do potencial vetor. Para que as componentes do vetor de onda sejam encontradas, basta aplicar a condição de contorno

$$\begin{aligned} v_{y,l}(x = L_x, y, z) &= v_{z,l}(x = L_x, y, z) = 0 \\ v_{x,l}(x, y = L_y, z) &= v_{z,l}(x, y = L_y, z) = 0 \\ v_{x,l}(x, y, z = L_z) &= v_{y,l}(x, y, z = L_z) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

sobre o ansatz (A.20). Assim,

$$k_{i,l} = \frac{l_{i,l}\pi}{L_i}, \quad (\text{A.24})$$

onde l_x, l_y e l_z são números inteiros. Este resultado indica que as condições de contorno sobre o ressonador leva a uma discretização do vetor de onda. É possível verificar que este ansatz também satisfaz a condição de contorno para a componente normal de $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (36).

O fator de normalização N_l deve ser encontrado da relação de ortogonalidade para os modos em uma caixa retangular

$$\int_V d^3r \mathbf{v}_l(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}_{l'}(\mathbf{r}) = \delta_{l,l'}. \quad (\text{A.25})$$

Este cálculo, encontrado em (37), é dado por

$$N_l = \sqrt{\frac{8}{V}}. \quad (\text{A.26})$$

Primeiramente nota-se que, para o caso de uma caixa retangular, a constante de normalização não depende do modo. Porém, esta simplificação só ocorre para este exemplo específico. Além disso, percebe-se que N_l é determinado por uma fração do volume total. Com o intuito de generalizar N_l , defini-se o volume efetivo do modo l como

$$\mathcal{V}_l \equiv \frac{V}{8}. \quad (\text{A.27})$$

Esta definição torna-se mais clara ao relembrar que as funções ortogonais que descrevem

o perfil dos modos são produtos de senos ou cossenos. No cálculo do volume do modo, a integração é feita sobre o quadrado dessas funções, resultando em um fator $1/2$. Para três direções, este cálculo rende o fator $1/8$. O conceito de volume efetivo é útil para ressonadores com formato arbitrário e, por conveniência, define-se também as funções do modo

$$\mathbf{v}_l(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}_l}} \mathbf{u}_l(\mathbf{r}). \quad (\text{A.28})$$

O campo vetorial $\mathbf{u}_l(\mathbf{r})$, adimensional, tem papel de suma importância nesta dissertação. Este descreverá a perfil do modo, característico de uma onda estacionária, dentro de uma cavidade no capítulo 3 e em duas cavidades no capítulo 4. O átomo deverá incidir em um dos nodos dessas ondas estacionárias para que ocorra a interação.

A.1.3 O campo como um conjunto de osciladores desacoplados

Uma vez calculado o fator de normalização de cada modo para um ressonador arbitrário, e levando em conta a definição (A.28), o potencial vetorial torna-se

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mathcal{V}_l}} q_l(t) \mathbf{u}_l(\mathbf{r}). \quad (\text{A.29})$$

A permissividade elétrica foi incluída para adequação da dimensão do potencial vetorial. A energia eletromagnética de um ressonador arbitrário é dada por

$$H_{campo} = \frac{1}{2} \int d^3r \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right), \quad (\text{A.30})$$

com a integração se estendendo por todo o espaço. De (A.6) e (A.5), a energia é expressa apenas em termos do potencial vetor. Com a condição de ortogonalidade (A.25) aliada ao teorema de Gauss para integrações vetoriais (38), chega-se ao resultado

$$\begin{aligned} H_{campo} &= \sum_l \mathcal{H}_l \\ &= \frac{1}{2} \sum_l \left(\dot{q}_l^2 + \omega_l^2 q_l^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Veja que a equação (A.31) nada mais é do que uma somatória das energias de vários osciladores harmônicos desacoplados. Por isso, é extremamente vantajoso quantizar o campo eletromagnético da mesma maneira que o oscilador harmônico, introduzindo as amplitudes complexas

$$a_l = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_l}} (\omega_l q_l + i p_l) \quad (\text{A.32})$$

$$a_l^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_l}} (\omega_l q_l - i p_l), \quad (\text{A.33})$$

onde $p_l = \dot{q}_l$. A fim de quantizar cada modo do campo, postula-se a relação de comutação para as variáveis conjugadas

$$[\hat{q}_l, \hat{p}_{l'}] = i\hbar\delta_{l,l'}, \quad (\text{A.34})$$

de posição e momento. Consequentemente, as amplitudes a_l^* e a_l são promovidas aos conhecidos operadores de criação $\hat{a}_l^\dagger$ e aniquilação $\hat{a}_l$. Logo,

$$\hat{q}_l = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l}} (\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger), \quad (\text{A.35})$$

$$\hat{p}_l = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2}} (\hat{a}_l - \hat{a}_l^\dagger), \quad (\text{A.36})$$

e por meio das relações de comutação

$$[\hat{a}_l, \hat{a}_{l'}] = [\hat{a}_l, \hat{a}_{l'}^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}_l, \hat{a}_{l'}^\dagger] = \delta_{l,l'} \quad (\text{A.37})$$

finalmente o Hamiltoniano do campo eletromagnético adquire sua forma quantizada

$$\hat{H}_{campo} = \sum_l \hbar\omega_l \left(\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.38})$$

A dependência temporal do potencial vetorial fica a cargo dos operadores $\hat{a}_l$ e $\hat{a}_l^\dagger$. De fato, quando recorre-se as equações de movimento de Heisenberg para o operador de aniquilação, com ajuda das relações de comutação (A.37), obtêm-se

$$\begin{aligned} \hat{a}_l(t) &= \hat{a}_l(0) e^{-i\omega_l t}, \\ \hat{a}_l^\dagger(t) &= \hat{a}_l^\dagger(0) e^{i\omega_l t}. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Concluindo esta secção, o operador potencial vetorial será

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_l V_l}} \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) \left(\hat{a}_l(0) e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger(0) e^{i\omega_l t} \right), \quad (\text{A.40})$$

para um ressonador com perfil espacial arbitrário. Note que a partir do operador potencial vetorial quantizado, tanto o operador campo magnético como o operador campo elétrico podem ser derivados.

A.2 Interação átomo-campo

Como demonstrado em (39), a interação entre uma partícula carregada e o campo eletromagnético é descrita pelo Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m} [\mathbf{p}_e - e\mathbf{A}(\mathbf{r}_e, t)]^2 + e\Phi(\mathbf{r}_e) + H_{campo}, \quad (\text{A.41})$$

onde e , m , $\mathbf{p}_e$ e $\mathbf{r}_e$ são respectivamente a carga, a massa, o momento e a posição da partícula em questão. Ao considerar um átomo, a expressão (A.41) sofre modificações consideravelmente complicadas. Nesta secção, será construída a interação entre campo e o átomo mais elementar, composto de um próton e um elétron, recorrendo a aproximação de dipolo elétrico. Por toda esta secção será suprimido o termo livre da energia do campo

$$H_{campo} = \sum_l \hbar\omega_l \left(\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.42})$$

A.2.1 Aproximação de dipolo atômico

Um procedimento bastante comum na resolução do problema de dois corpos consiste reescrever o Hamiltoniano em termos das coordenadas relativas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$, e das coordenadas do centro de massa $\mathbf{R}$ e $\mathbf{P}$ do próton e do elétron. A coordenada relativa está associada a grandeza $e\mathbf{r}$ conhecida como dipolo elétrico. Considerando que o potencial vetorial não varie consideravelmente nas redondezas do raio atômico, é lícito impor que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_e, t) \approx \mathbf{A}(\mathbf{r}_p, t) \approx \mathbf{A}(\mathbf{R}, t). \quad (\text{A.43})$$

Esta aproximação é conhecida como aproximação de dipolo e reduz drasticamente o Hamiltoniano exato (39) do sistema átomo-campo. Justificando esta aproximação, basta comparar o comprimento de onda da luz com a dimensão do raio atômico típico. Estimando $r_{atom} \sim 10^{-10}m$, o comprimento de onda da luz no regime óptico em $\lambda_{optico} \sim 10^{-7}m$ e no regime de micro-ondas $\lambda_{micro} \sim 10^{-2}m$, conclui-se que o regime da aproximação de dipolo é quase sempre atingido. Em razão disso, o Hamiltoniano do sistema átomo-campo torna-se

$$\hat{H}_{AC} = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{1}{2m_r} [\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{R}, t)]^2 + V(|\mathbf{r}|), \quad (\text{A.44})$$

onde m_r é a massa reduzida, M a massa do centro de massa e $V(|\mathbf{r}|)$ o potencial de Coulomb; todos referentes ao sistema próton-elétron.

Dentro da validade da aproximação de dipolo, ao negligenciar o movimento do centro de massa, é possível mostrar a equivalência os Hamiltonianos

$$\hat{H}_{\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}} = \frac{1}{2m_r} [\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{R}, t)]^2 + V(|\mathbf{r}|) \quad (\text{A.45})$$

$$\hat{H}_{\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_r} + V(|\mathbf{r}|) - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = H_{\text{átomo}} + H_{\text{int}}. \quad (\text{A.46})$$

Para isso, considere a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m_r} [\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{R}, t)]^2 + V(|\mathbf{r}|) \right] \psi(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.47})$$

Na mecânica quântica, os Hamiltonianos (A.45) e (A.46) estão conectados pela transformação de Gauge

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{R}, t)} \phi(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.48})$$

Substituindo (A.48) em (A.47), é simples mostrar que

$$i\hbar \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m_r} + V(|\mathbf{r}|) + e\mathbf{r} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{R}, t) \right] \phi(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.49})$$

Finalmente, por meio da relação

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{R}, t)}{\partial t} \quad (\text{A.50})$$

a equação A.49 torna-se

$$i\hbar \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m_r} + V(|\mathbf{r}|) - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) \right] \phi(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.51})$$

demonstrando a equivalência proposta.

A.2.2 Hamiltoniano atômico

Até o presente momento, todos os níveis atômicos de energia foram considerados. Uma simplificação bastante útil é propor que apenas uma transição entre dois níveis de energia atômicos seja ressonante com a frequência do campo. Este efeito é factível em laboratório através de um bombeio óptico e se tornou extremamente importante para muitos problemas em eletrodinâmica quântica de cavidades. Tipicamente são utilizados níveis de Rydberg com frequências transição no regime de micro-ondas $\lambda \sim 10^{-2}m$, ou outros níveis com frequência de transição no regime óptico $\lambda \sim 10^{-7}m$.

O operador atômico pode ser escrito por meio da relação de completeza

$$H_{\text{átomo}} = \mathbf{1} H_{\text{átomo}} \mathbf{1} = \sum_{i,j=g,e} |i\rangle \langle i| H_{\text{átomo}} |j\rangle \langle j|. \quad (\text{A.52})$$

Ao atuar o operador atômico em seus auto-estados obtêm-se os autovalores

$$H_{\text{átomo}} |g\rangle = E_g |g\rangle \quad H_{\text{átomo}} |e\rangle = E_e |e\rangle, \quad (\text{A.53})$$

com $E_g = \hbar\omega_g$ e $E_e = \hbar\omega_e$. Assim,

$$H_{\text{átomo}} = E_g |g\rangle \langle g| + E_e |e\rangle \langle e| = \begin{pmatrix} E_e & 0 \\ 0 & E_g \end{pmatrix}. \quad (\text{A.54})$$

Definindo a frequência de transição $\omega_0 \equiv \omega_e - \omega_g$ e $E \equiv \frac{1}{2}(E_e - E_g)$, note que

$$H_{\text{átomo}} = E\mathbf{1} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.55})$$

$$= E\mathbf{1} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \sigma_z. \quad (\text{A.56})$$

Como a constante de energia é irrelevante, esta será ocultada. Portanto, o Hamiltoniano atômico é diagonal e pode ser escrito como em termos da componente z da matriz

$$H_{\text{átomo}} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \sigma_z. \quad (\text{A.57})$$

A.2.3 Hamiltoniano de interação

Utilizando novamente a relação de completeza, veja que o operador momento de dipolo pode ser escrito via

$$e\mathbf{r} = e \sum_{i,j=g,e} |i\rangle \langle i| \mathbf{r} |j\rangle \langle j|, \quad (\text{A.58})$$

com seu valor esperado calculado por

$$\langle i| e\mathbf{r} |j\rangle = e \int d^3r \psi_i^*(\mathbf{r}) \mathbf{r} \psi_j(\mathbf{r}). \quad (\text{A.59})$$

Os elementos diagonais $i = j$ da expressão (A.59) apresentam integrando antissimétrico, portanto são nulos. Restam os elementos não diagonais

$$e \langle e| \mathbf{r} |g\rangle = e \int d^3r \psi_e^*(\mathbf{r}) \mathbf{r} \psi_g(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\mu}, \quad (\text{A.60})$$

$$e \langle g | \mathbf{r} | e \rangle = e \int d^3r \psi_e^*(\mathbf{r}) \mathbf{r} \psi_g(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\mu}^*. \quad (\text{A.61})$$

Assim, operador de dipolo escrito na linguagem das matrizes de Pauli é dado por

$$e\mathbf{r} = \boldsymbol{\mu} |e\rangle \langle g| + \boldsymbol{\mu}^* |g\rangle \langle e| = \boldsymbol{\mu} \sigma_+ + \boldsymbol{\mu}^* \sigma_-, \quad (\text{A.62})$$

onde os operadores de criação σ_+ e aniquilação σ_- de excitações atômicas terão representação matricial

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.63})$$

Restringindo o tratamento para um único modo do campo, ressonante com a transição atômica, por meio do potencial vetorial (A.40) e da relação (A.50) calcula-se o campo elétrico quantizado

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{R}, t) = -i\mathcal{E}_0 \mathbf{u}(\mathbf{R}) (a^\dagger e^{i\omega t} - a e^{-i\omega t}), \quad (\text{A.64})$$

onde define-se o campo elétrico por fóton, como

$$\mathcal{E}_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 \mathcal{V}_0}}. \quad (\text{A.65})$$

Em posse de (A.64) e do operador de dipolo escrito em termos dos operadores de Pauli, imediatamente encontra-se

$$H_{int} = -i\mathcal{E}_0 (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{R}) \sigma_+ + \boldsymbol{\mu}^* \cdot \mathbf{u}(\mathbf{R}) \sigma_-) (a^\dagger e^{i\omega t} - a e^{-i\omega t}). \quad (\text{A.66})$$

A.2.4 Aproximação de ondas girantes

A menos de constantes irrelevantes, o Hamiltoniano total que descreve a interação do sistema átomo-campo, agora recuperando o termo livre do campo de um modo, é descrito por

$$H_{AC} = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \sigma_z - i\mathcal{E}_0 (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{R}) \sigma_+ + \boldsymbol{\mu}^* \cdot \mathbf{u}(\mathbf{R}) \sigma_-) (a^\dagger e^{i\omega t} - a e^{-i\omega t}). \quad (\text{A.67})$$

Este Hamiltoniano tem solução analítica sofisticada e extremamente trabalhosa de ser utilizada. Portanto, em algumas situações é mais fácil recorrer a aproximação de ondas girantes. Para compreensão desta aproximação, deve-se primeiramente escrever H_{AC} na representação de interação

$$H_I = U_0^\dagger H_{int} U_0, \quad (\text{A.68})$$

onde $U_0 = e^{-iH_0 t/\hbar}$ e H_0 é o Hamiltoniano livre. Da expansão de Baker-Hausdorff

$$e^{\xi A} B e^{-\xi A} = B + \xi [A, B] + \frac{\xi^2}{2!} [A, [A, B]] + \frac{\xi^3}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots, \quad (\text{A.69})$$

o Hamiltoniano na representação de interação terá a forma

$$H_I = -i\mathcal{E}_0 [\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{R}) a^\dagger \sigma_+ e^{i(\omega+\omega_0)t} + \boldsymbol{\mu}^* \cdot \mathbf{u}(\mathbf{R}) a^\dagger \sigma_- e^{-i(\omega_0-\omega)t} - h.c]. \quad (\text{A.70})$$

Na ressonância $\omega \approx \omega_0$, tem-se que $\omega + \omega_0 \gg \omega_0 - \omega$. Logo, constata-se que o primeiro termo oscila muito mais rápido no tempo se comparado com o segundo. Pelo cálculo da média de (A.70), estima-se que para um determinado período de interação τ , os termos proporcionais a $e^{i(\omega+\omega_0)t}$ podem ser desprezados no regime $(\omega + \omega_0)\tau \gg 1$. Assim, recuperando a energia do centro de massa na expressão e trocando suas coordenadas de maiúsculas por minúsculas, o Hamiltoniano na representação de interação será aproximadamente

$$H_I \approx \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - i\mathcal{E}_0 |\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})| (a\sigma_+ e^{i\varphi} - a^\dagger \sigma_- e^{-i\varphi}). \quad (\text{A.71})$$

No caso em que a função $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ é real, a fase φ provem exclusivamente do momento de dipolo atômico. No capítulo 4, o Hamiltoniano (A.71) será fundamental para a derivação do Hamiltoniano efetivo que dita a interação de dois modos com um átomo de dois níveis. Particularizando $\varphi = 3\pi/2$, obtêm-se o Hamiltoniano que será utilizado no capítulo 2

$$H_I = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - \mathcal{E}_0 |\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})| (a\sigma_+ + a^\dagger \sigma_-). \quad (\text{A.72})$$

Apêndice B

Transformação de Bogoliubov

Considere as relações canônicas de comutação

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= [b, b^\dagger] = 1, \\ [b, a^\dagger] &= [a, b^\dagger] = 0, \\ [a, a] &= [b, b] = 0, \end{aligned}$$

para os operadores bosônicos de criação e aniquilação de fótons. As transformações

$$c = u_c a + v_c b, \quad d = u_d a + v_d b, \quad (\text{B.1})$$

onde u_k e v_k são números complexos, levam a novas relações canônicas

$$\begin{aligned} [c, c^\dagger] &= |u_c|^2 [a, a^\dagger] + |v_c|^2 [b, b^\dagger], \\ [d, d^\dagger] &= |u_d|^2 [a, a^\dagger] + |v_d|^2 [b, b^\dagger], \\ [c, d^\dagger] &= u_c u_d^* [a, a^\dagger] + v_c v_d^* [b, b^\dagger], \\ [d, c^\dagger] &= u_d u_c^* [a, a^\dagger] + v_d v_c^* [b, b^\dagger], \\ [c, c] &= [d, d] = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

O novo operador associado a contagem de fótons dos modos será

$$c^\dagger c + d^\dagger d = (|u_c|^2 + |u_d|^2) a^\dagger a + (|v_c|^2 + |v_d|^2) b^\dagger b.$$

Se os números complexos u_k e v_k são

$$\begin{aligned} u_c &= \cos \theta e^{i\varphi_y}, & u_d &= -\sin \theta e^{i\varphi_y}, \\ v_c &= \sin \theta e^{i\varphi_x}, & v_d &= \cos \theta e^{i\varphi_x}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

obtém-se as mesmas relações de comutação que os operadores antigos obedecem, a saber

$$\begin{aligned}[c, c^\dagger] &= [d, d^\dagger] = 1, \\ [c, d^\dagger] &= [d, c^\dagger] = 0,\end{aligned}$$

e a invariância

$$c^\dagger c + d^\dagger d = a^\dagger a + b^\dagger b.$$

Apêndice C

Integrais Bidimensionais de Fourier

As integrais de Fourier discutidas na secção 4 tem solução analítica se a distribuição da fenda que colima os átomos for descrita pela função exponencial. Apresentar-se-á o referido cálculo neste apêndice.

Na secção 4.2 foram definidos os coeficientes da matriz de mudança de base $a, b \rightarrow c, d$, a saber

$$D_{q,n}^{(N)}(\theta) \equiv \sum_{m=\max(0,q+n-N)}^{\min(n,q)} \overline{D}_{q,n,m}^{(N)} (\cos \theta)^{2m+N-q-n} (\sin \theta)^{n-2m+q} \quad (\text{C.1})$$

com $\overline{D}_{q,n,m}^{(N)}$ sendo um coeficiente numérico. Explicitando sua somatória nas integrais

$$\mathcal{F}_{q,n(N)}^g(\wp, \phi, \tau) = \frac{1}{2\pi\hbar k} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f\left(\frac{u}{k}, \theta\right) D_{q,n}^{(N)}(\theta) e^{-iu[\wp \cos(\theta-\phi) - \Lambda\sqrt{n}]} u d\theta du, \quad (\text{C.2})$$

$$\mathcal{F}_{q,n(N)}^e(\wp, \phi, \tau) = \frac{1}{2\pi\hbar k} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f\left(\frac{u}{k}, \theta\right) D_{q-1,n-1}^{(N-1)}(\theta) e^{-iu[\wp \cos(\theta-\phi) - \Lambda\sqrt{n}]} u d\theta du, \quad (\text{C.3})$$

veja que

$$\mathcal{F}_{q,n(N)}^g(\wp, \phi, \tau) = \frac{1}{2\pi\hbar k} \sum_{m=\max(0,q+n-N)}^{\min(n,q)} \overline{D}_{q,n,m}^{(N)} I_{q,n,m}^{g(N)}(\wp, \phi, \tau) \quad (\text{C.4})$$

$$\mathcal{F}_{q,n(N)}^e(\wp, \phi, \tau) = \frac{1}{2\pi\hbar k} \sum_{m=\max(0,q+n-N-1)}^{\min(n-1,q-1)} \overline{D}_{q-1,n-1,m}^{(N-1)} I_{q,n,m}^{e(N)}(\wp, \phi, \tau) \quad (\text{C.5})$$

onde as integrais dependentes de todos os índices inteiros são definidas por

$$I_{q,n,m}^{g(N)}(\wp, \phi, \tau) \equiv \int_0^\infty u e^{i\Lambda u \sqrt{n}} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{u}{k}, \theta\right) (\cos \theta)^{N-\nu} (\sin \theta)^\nu e^{-iu\wp \cos(\theta-\phi)} d\theta du \quad (\text{C.6})$$

$$I_{q,n,m}^{e(N)}(\wp, \phi, \tau) \equiv \int_0^\infty u e^{i\Lambda u \sqrt{n}} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{u}{k}, \theta\right) (\cos \theta)^{N-\nu+1} (\sin \theta)^{\nu-2} e^{-iu\wp \cos(\theta-\phi)} d\theta du, \quad (\text{C.7})$$

com

$$\nu = q + n - 2m. \quad (\text{C.8})$$

É razoável supor que a fenda do experimento independa do ângulo polar $f\left(\frac{u}{\kappa}, \theta\right) = f\left(\frac{u}{\kappa}\right)$, sendo conveniente calcular a integral mais geral

$$I_{a,b}(\wp, \phi, \tau) = \int_0^\infty u f\left(\frac{u}{k}\right) e^{i\Lambda u \sqrt{n}} du \int_0^{2\pi} \cos^a \theta \sin^b \theta e^{-i u \wp \cos(\theta - \phi)} d\theta, \quad (\text{C.9})$$

onde a e b são números inteiros. Focando na integral angular, pode-se expandir as funções trigonométricas como séries binomiais, a saber

$$\cos^a \theta = \frac{1}{2^a} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^a = \frac{1}{2^a} \sum_{s=0}^a \binom{a}{s} e^{i\theta(2s-a)}, \quad (\text{C.10})$$

$$\sin^b \theta = \frac{1}{(2i)^b} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^b = \frac{1}{2^b i^b} \sum_{t=0}^b \binom{b}{t} (-1)^{b-t} e^{i\theta(2t-b)}. \quad (\text{C.11})$$

Desta forma, a integral (C.9) se torna

$$I_{a,b}(\wp, \phi, \tau) = \sum_{s=0}^a \sum_{t=0}^b \bar{I}_{s,t}^{a,b} \int_0^\infty u f\left(\frac{u}{k}\right) e^{i\Lambda u \sqrt{n}} \int_0^{2\pi} e^{i[\theta(2s+2t-a-b) - u \wp \cos(\theta - \phi)]} d\theta du, \quad (\text{C.12})$$

onde o fator numérico $\bar{I}_{s,t}^{a,b}$ é definido por

$$\bar{I}_{s,t}^{a,b} \equiv \frac{\pi}{2^{a+b-1} i^b} \binom{a}{s} \binom{b}{t} (-1)^{b-t}. \quad (\text{C.13})$$

Através da mudança de variável $\Theta = \theta - \phi$, os limites da integral angular permanecem os mesmos e

$$I_{a,b}(\wp, \phi, \tau) = \sum_{s=0}^a \sum_{t=0}^b \bar{I}_{s,t}^{a,b} \mathcal{R}_{s,t,n}^{a,b}(\wp, \tau) (ie^{i\phi})^{(2s+2t-a-b)}, \quad (\text{C.14})$$

com integral radial definida por

$$\mathcal{R}_{s,t,n}^{a,b}(\wp, \tau) = \int_0^\infty u f\left(\frac{u}{k}\right) e^{i\Lambda u \sqrt{n}} J_{2s+2t-a-b}(-u\wp) du. \quad (\text{C.15})$$

Nesta passagem valeu-se da representação integral das funções de Bessel

$$J_{2s+2t-a-b}(-u\wp) = \frac{i^{-(2s+2t-a-b)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[\Theta(2s+2t-a-b) - u\wp \cos \Theta]} d\Theta \quad (\text{C.16})$$

de ordem $2s + 2t - a - b$. Reconhecendo os números inteiros a e b por meio das definições (C.6) e (C.7), tem-se

$$I_{q,n,m}^{g(N)}(\wp, \phi, \tau) = \sum_{s=0}^{N-\nu} \sum_{t=0}^{\nu} \bar{I}_{s,t,\nu}^{g(N)} \mathcal{R}_{s,t,n}^{g(N)}(\wp, \tau) (ie^{i\phi})^{2(s+t)-N}, \quad (\text{C.17})$$

$$I_{q,n,m}^{e(N)}(\wp, \phi, \tau) = \sum_{s=0}^{N-\nu+1} \sum_{t=0}^{\nu-2} \bar{I}_{s,t,\nu}^{e(N)} \mathcal{R}_{s,t,n}^{e(N)}(\wp, \tau) (ie^{i\phi})^{2(s+t)-N+1}, \quad (\text{C.18})$$

onde

$$\bar{I}_{s,t,\nu}^{g(N)} = \frac{\pi}{2^{N-1}i^{\nu}} \binom{N-\nu}{s} \binom{\nu}{t} (-1)^{\nu-t}, \quad (\text{C.19})$$

$$\mathcal{R}_{s,t,n}^{g(N)}(\wp, \tau) = \int_0^{\infty} u f\left(\frac{u}{k}\right) e^{i\Lambda u \sqrt{n}} J_{2(s+t)-N}(-u\wp) du, \quad (\text{C.20})$$

$$\bar{I}_{s,t,\nu}^{e(N)} = \frac{\pi}{2^{N-2}i^{\nu-2}} \binom{N-\nu+1}{s} \binom{\nu-2}{t} (-1)^{\nu-2-t}, \quad (\text{C.21})$$

$$\mathcal{R}_{s,t,n}^{e(N)}(\wp, \tau) = \int_0^{\infty} u f\left(\frac{u}{k}\right) e^{i\Lambda u \sqrt{n}} J_{2(s+t)-N+1}(-u\wp) du. \quad (\text{C.22})$$

Desta forma, as integrais radiais serão transformadas de Hankel de ordem inteira da distribuição exponencial, saber

$$\mathcal{R}_{s,t,n}^{g(N)}(\wp, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\Delta r k \pi}} \int_0^{\infty} u e^{\gamma u} J_{2(s+t)-N}(-u\wp) du, \quad (\text{C.23})$$

$$\mathcal{R}_{s,t,n}^{e(N)}(\wp, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\Delta r k \pi}} \int_0^{\infty} u e^{\gamma u} J_{2(s+t)-N+1}(-u\wp) du, \quad (\text{C.24})$$

onde a dependência temporal está implícita em

$$\gamma(\tau) = -\frac{1}{2k\Delta r} + i\Lambda(\tau)\sqrt{n}. \quad (\text{C.25})$$

Essas integrais apresentam solução

$$\mathcal{R}_{s,t,n}^{g(N)}(\wp, \tau) = \frac{\pm}{2\sqrt{\pi\Delta r k}} \left[\frac{|v|}{\wp^2 + \gamma^2} + \frac{\gamma}{(\wp^2 + \gamma^2)^{3/2}} \right] \left[\frac{(\wp/\gamma)}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\wp}{\gamma}\right)^2}} \right]^{|v|}, \quad (\text{C.26})$$

$$\mathcal{R}_{s,t,n}^{e\pm(N)}(\wp, \tau) = \frac{\pm}{2\sqrt{\pi\Delta r k}} \left[\frac{|v+1|}{\wp^2 + \gamma^2} + \frac{\gamma}{(\wp^2 + \gamma^2)^{3/2}} \right] \left[\frac{(\wp/\gamma)}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\wp}{\gamma}\right)^2}} \right]^{|v+1|}. \quad (\text{C.27})$$

para $v = 2(s + t) - N$, onde utilizou-se a paridade das funções de Bessel

$$J_v(-u\wp) = (-1)^v J_{|v|}(-u\wp), \quad (\text{C.28})$$

$$J_{v+1}(-u\wp) = (-1)^{v+1} J_{|v+1|}(-u\wp). \quad (\text{C.29})$$

Finalmente, as transformadas de Fourier bidimensionais são completamente determinadas

$$\mathcal{F}_{q,n(N)}^g(\wp, \phi, \tau) = \frac{1}{2\pi\hbar k} \sum_{m=\max(0, q+n-N)}^{\min(n, q)} \sum_{s=0}^{N-\nu} \sum_{t=0}^{\nu} \overline{F}_{q,n,m}^{g(N),s,t,\nu} \mathcal{R}_{s,t,n}^{g(N)}(\wp, \tau) (ie^{i\phi})^v, \quad (\text{C.30})$$

$$\mathcal{F}_{q,n(N)}^e(\wp, \phi, \tau) = \frac{1}{2\pi\hbar k} \sum_{m=\max(0, q+n-N-1)}^{\min(n-1, q-1)} \sum_{s=0}^{N-\nu+1} \sum_{t=0}^{\nu-2} \overline{F}_{q,n,m}^{e(N),s,t,\nu} \mathcal{R}_{s,t,n}^{e(N)}(\wp, \tau) (ie^{i\phi})^{v+1}, \quad (\text{C.31})$$

com os novos coeficientes numéricos definidos por

$$\begin{aligned} \overline{F}_{q,n,m}^{g(N),s,t,\nu} &\equiv \overline{D}_{q,n,m}^{(N)} \overline{I}_{s,t,\nu}^{g(N)}, \\ \overline{F}_{q,n,m}^{e(N),s,t,\nu} &\equiv \overline{D}_{q-1,n-1,m}^{(N-1)} \overline{I}_{s,t,\nu}^{e(N)}. \end{aligned}$$

É válido lembrar que $\nu(q, n, m) = q + n - 2m$.