

O grupo unitário simplético: Propriedades gerais e estados coerentes

Alexandre Ferreira Ramos

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências: Física Básica.

Orientador: Prof. Dr. José Eduardo Martinho Hornos 

São Carlos – 2004

USP/IFSC/SBI



8-2-001638

IFSC-USP SERVIÇO DE BIBLIOTECA
INFORMAÇÃO

IFSC - SBI
CLASS.....
CUTTER.....
TOMBO.....

Ramos, Alexandre Ferreira

“O grupo unitário simplético: Propriedades gerais e estados coerentes.”
Alexandre Ferreira Ramos – São Carlos, 2004

Dissertação (Mestrado) – Área de Física Básica do Instituto de Física de São
Carlos da Universidade de São Paulo
2004 - Páginas: 149

Orientador: Prof. Dr. José Eduardo Martinho Hornos

1. grupo unitário simplético; medida de Haar; estados coerentes.

I. Título



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE
MESTRADO DE ALEXANDRE FERREIRA RAMOS APRESENTADA AO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO,
EM 21-09-2004.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. José Eduardo Martinho Hornos (Orientador e Presidente) - IFSC/USP

Prof. Dr. Marcos César de Oliveira - UNICAMP

Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira - IFSC/USP

Esta tese é dedicada aos meus avós
Trasíbulo(in memorian), Joana, Rafael e Cândinha.

Este trabalho teve o apoio financeiro da CAPES.

Agradecimentos

- Agradeço ao Zé Edu, pela orientação, confiança e investimento na minha formação para a carreira científica. Este foi um período de bastante crescimento pessoal e intelectual e com certeza o Zé Edu teve participação relevante neste processo.
- Agradeço à USP, IFSC e seus professores pela oportunidade e investimento em minha formação profissional.
- Agradeço também aos funcionários deste instituto, em especial a Wla, Cris e Samira, pela prontidão com que me auxiliaram sempre que foi necessário.
- Agradeço à UFSCar, pela formação básica que possibilitou-me iniciar a tão almejada carreira científica.
- Agradeço à CAPES, que fomentou este trabalho.
- Agradeço à Graça, minha madrinha, sem ela e seu apoio estes sete anos em São Carlos teriam sido muito mais difíceis.
- Agradeço aos meus pais pelo amor, compreensão, amizade e apoio constante, muito do que fiz foi inspirado por eles.
- Agradeço a todos os meus familiares em especial meus avôs e avós Trasíbulo, Joana, Rafael e Cândinha por estarem sempre tão perto.
- Agradeço às minhas irmazinhas queridas, Paula e Maíra pela amizade e cumplicidade tão rara entre irmãos.
- Agradeço a todos os meus amigos. Aos de infância, Mauro e João. Aos de escola, Lidiane, Salata e Belório. Aos mais velhos, Tio, Celsão e Clóvis. Aos de graduação Tiagão, André, Gil, Paulão, Paty, Dani, Norba (valeu o incentivo a vir para a USP), Eliezer, Letícia, Agda, Carol, Heloisa, Melissa. Aos da

capoeira Da Lua e Pé-de-Chumbo. Aos que apareceram durante o mestrado o Guilhermão, o Luis Felipe, a Di, a Lu, a Le, a Iara, a Paula, à meninas da TO, à Tânia, à Nat, à Camila, à Josi. Ao pessoal aqui da USP, o Gui, o João T., o Passa, o Marco, Newtinho, o Rafa, o Emanuel, à Ligia, Lia, Marcel, ao Zé Fernando, o Goiano.

- Agradeço enfim, a todos aqueles que de alguma forma participaram desta conquista, desde o pescador desconhecido de Itaúnas que disse esperar que a juventude melhore este país, até a existência da instituição universidade pública que proporcionou-me desenvolvimento intelectual para adentrar e participar da evolução da ciência do Brasil.

TERESA

A primeira vez que vi Teresa
Achei que ela tinha pernas estúpidas
Achei também que a cara parecia uma perna

Quando vi Teresa de novo
Achei que os olhos eram muito mais velhos que o resto do
[corpo
(Os olhos nasceram e ficaram dez anos esperando que o res-
[to do corpo nascesse)

Da terceira vez não vi mais nada
Os céus se misturaram com a terra
E o espírito de Deus voltou a se mover sobre a face das águas.

Manuel Bandeira, Libertinagem

Sumário

1	Introdução	12
2	Álgebras e Grupos de Lie	15
2.1	Álgebras de Lie	15
2.1.1	Definições	15
2.1.2	Álgebras de Lie Clássicas	17
2.1.3	Representações Adjuntas das Álgebras de Lie	22
2.1.4	Álgebras Solúveis e Nilpotentes	24
2.1.5	Forma de Killing	26
2.1.6	Os operadores de Casimir	27
2.1.7	Forma canônica de Cartan-Weyl: Raízes	28
2.1.8	Representações das Álgebras de Lie	31
2.1.9	Pesos	31
2.2	Grupos de Lie	33
2.2.1	Definições	33
2.2.2	A aplicação exponencial	35
2.2.3	O grupo geral linear	35
2.2.4	O grupo especial linear	35
2.2.5	O grupo unitário	36
2.2.6	Grupo especial unitário	37
2.2.7	Grupo ortogonal	38
2.2.8	Grupo especial ortogonal	38
2.2.9	Grupo Simplético	39
3	A Simetria Unitária Simplética	41
3.1	Definição	41
3.1.1	A álgebra unitária simplética	41
3.1.2	Subálgebras e Cadeias de Quebra de Simetria	47
3.1.3	O Grupo Unitário Simplético	51
3.2	Elementos de matriz do grupo $\text{Sp}(4, \mathbb{C})$	54
3.3	Decomposição de Gauss	58
3.4	Coordenadas renormalizadas do grupo $\text{USp}(4)$	62
3.5	Regras de multiplicação do grupo $\text{USp}(4)$	69
3.6	Operadores diferenciais da álgebra $\text{usp}(4)$	73
3.7	A métrica de Haar do grupo $\text{USp}(4)$	76

4 Estados Coerentes do $USp(4)$	80
4.1 Definição	80
4.2 Resolução da unidade	82
4.3 Ação dos elementos da álgebra	85
4.4 Valores médios dos operadores de $usp(4)$	88
4.5 Forma simplética	89
5 Conclusões	94
A Quebras de simetria por termos de Majorana	96
B Códigos	103

Lista de Figuras

3.1	Diagrama de raízes da álgebra $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$	45
3.2	Representação gráfica das regras de multiplicação	69
A.1	Parâmetro de ligamento/desligamento da Hamiltoniana efetiva	99
A.2	Evolução dos auto-valores de H_e para $a = y, b = y, c = 0$, e $\rho = 1 - y$	101
A.3	Evolução dos auto-valores de H_e para $a = y, b = y, c = 2y$, e $\rho = 1 - y$	102

Resumo

Neste trabalho fizemos uma revisão geral e encontramos resultados novos sobre a simetria unitária simplética. Obtivemos uma fórmula simples para a exponencial da álgebra de Lie simplética complexa em quatro dimensões, $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$. A partir da decomposição de Gauss do referido grupo, impusemos a unitariedade para obtermos expressões analíticas para esta decomposição. Ao impormos a condição unitária ao grupo simplético, formamos o grupo unitário simplético e obtivemos as regras de multiplicação deste grupo, as quais estão implementadas simbolicamente tendo em mente aplicações futuras. Como uma consequência encontramos uma representação da álgebra de Lie em termos de operadores diferenciais. Uma segunda e mais importante consequência foi a obtenção da métrica de Haar deste grupo, a qual é fundamental no estudo dos estados coerentes. Um rápido estudo da quebra de simetria entre a cadeia canônica e a cadeia de termos Majorana é apresentada no apêndice tendo em vista futuras aplicações ao estudo algébrico do código genético. Os estados coerentes do grupo $U\mathfrak{sp}(4)$ foram calculados para uma representação arbitrária e a supercompleteza foi demonstrada devido a métrica de Haar, isto completa o programa iniciado por Novaes em sua tese de PhD. Os valores médios dos geradores da álgebra de Lie foram obtidos tendo em mente a aplicação a um hamiltoniano algébrico. Por fim, obtivemos a forma simplética numa representação arbitrária, preparando o campo para aplicações aos sistemas dinâmicos.

Abstract

In this work we take a general revision and take new results on the unitary symplectic symmetry. We have obtained a simple form for the exponential of the complex symplectic Lie algebra on four dimensions, $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$. With the Gauss decomposition for this group, we impose the unitarity to obtain analytical expressions for that Gauss decomposition. Imposing the analytical expressions to the Gauss decomposition for the complex symplectic algebra, we have been obtained explicit multiplication formulas for the unitarian group and implemented symbolically have in mind further application. As a consequence a representation of the Lie algebra in terms of differential operators have been obtained. The Haar measure that plays a fundamental role in the study of coherent states is calculated in an arbitrary representation. An early study involving the symmetry breaking of canonical $\mathrm{Sp}(4)$ tree by Majorana operators is presented in the appendix in the spirit of algebraic approach to genetic code. The coherent states of $\mathrm{USp}(4)$ have been calculated for an arbitrary representation and the overcompleteness is demonstrated thanks to the Haar measure, the program initiated by Novaes in his PhD thesis is now fully completed. The mean values of the Lie algebra generators in a coherent state base are calculated having in mind application to algebraic hamiltonian. Finally we obtained the symplectic form in a arbitrary representation have also been calculated preparing the field for applications to dynamical systems.

Capítulo 1

Introdução

A teoria dos grupos e álgebras de Lie são ferramentas indispensáveis para a ciência contemporânea. Uma das áreas mais frutíferas para a aplicação desta teoria é a mecânica quântica, em que a obtenção de espectros atômicos e moleculares é bem sucedida. Estas aplicações foram iniciadas por Wigner e Weyl [1, 2], à mecânica quântica.

A aplicação à física nuclear, a partir da obtenção da invariância de isospin por Heisenberg e de sabor por Gell-Mann e Ne'eman coroou o uso da teoria dos grupos, já que através deste modelo, Gell-Mann previu a massa de repouso e os números quânticos da partícula Ω^- , [3, 4].

As aplicações à física nuclear e molecular também tinham como intuito a obtenção de espectros e amplitudes de transição nucleares e moleculares. Os trabalhos foram iniciados por Iachello e Arima [5] para física nuclear e por Iachello e Levine [6] para física molecular.

Há aproximadamente 2 décadas nosso grupo iniciou sua investigação de fenômenos físicos tendo como ferramenta principal a teoria dos grupos de Lie. As aplicações iniciais em ciências moleculares, com a obtenção de espectros moleculares [7], devido a uma colaboração com Iachello, e [8] mostraram-se bem sucedidas e abriram caminho para a investigação em genética molecular iniciada por Hornos e Hornos [9, 10] em

1993. As investigações no campo da genética molecular continuam sendo foco de nossa atenção e motivaram muito do que foi feito durante este trabalho.

Os estados coerentes foram definidos primeiro para o oscilador harmônico como estados quânticos de mínima incerteza com comportamento quase-clássico[11]. Perelomov generalizou os estados coerentes para os grupos de Lie [12]. Esta abordagem necessita apenas que o sistema possua uma simetria de Lie para que seus estados coerentes sejam definidos. A partir de uma hamiltoniana com simetria de Lie podemos investigar o limite clássico (funções associadas à observáveis, parêntese de Poisson associado a um comutador) de sistemas quânticos. Por exemplo, o caos que é uma propriedade típica dos sistemas clássicos, foi obtida a partir de uma hamiltoniana algébrica por Novaes et al em [13, 14, 15].

O trabalho desenvolvido por Novaes e Hornos sobre os estados coerentes para o grupo unitário simplético nos serviram como incentivo para voltarmos nossa atenção a esta área e assim completar sua investigação buscando os estados coerentes para uma representação arbitrária do grupo unitário simplético em quatro dimensões, já que havia sido obtido apenas para representações simétricas. Para isso, a obtenção da métrica de Haar do grupo é imprescindível, bem como a base de polinômios dos estados coerentes, os quais foram obtidos neste trabalho. O conhecimento adquirido com o estudo do grupo simplético em 4 dimensões, será de grande valia para o estudo do grupo simplético em 6 dimensões, que é o grupo de simetria do código genético.

No capítulo 2 faremos uma revisão de conceitos de álgebras e grupos de Lie necessários ao desenvolvimento de nosso trabalho. No capítulo 3, abordaremos a simetria unitária simplética, tanto a álgebra quanto o grupo, partindo de suas definições. Daremos a representação matricial da álgebra e também a representação por operadores diferenciáveis. Para o grupo, apresentamos a aplicação exponencial da álgebra simplética complexa, mostraremos a parametrização do grupo simplético para que este forme o grupo unitário simplético, as regras de multiplicação e por fim a métrica de Haar, que é fundamental para o estudo dos estados coerentes deste

grupo. O capítulo 4 é reservado aos estados coerentes, cálculo da decomposição na unidade e o método de obtenção de uma base de polinômios neste espaço. Além disso, calculamos os valores médios e uma representação dos operadores da álgebra neste espaço e a forma bilinear do mesmo, o que possibilita resolver um sistema dinâmico neste espaço para representações arbitrárias. No apêndice A fazemos um estudo sobre sistemas que evoluem entre as sub-simetrias de uma simetria maior, uma delas é a simetria canônica, a outra a simetria Majorana da simetria $Sp(4)$. O apêndice B contém os códigos em maple 8 referentes aos resultados obtidos nos capítulos 3 e 4, sendo o primeiro e o terceiro códigos referentes ao capítulo 3 e o segundo código referente ao capítulo 4.

Capítulo 2

Álgebras e Grupos de Lie

Este capítulo possui duas grandes secções, a primeira é uma revisão de álgebras de Lie, a segunda é devotada à uma revisão de grupos de Lie. Ambas as revisões são feitas apenas para recuperarmos conceitos que serão importantes nos capítulos finais desta dissertação.

2.1 Álgebras de Lie

Esta secção é devotada à uma revisão geral de conceitos de álgebras de Lie que serão úteis nos capítulos adiante. Nosso objetivo é apenas tomar resultados e conceitos que serão úteis nos próximos capítulos, sem preocuparmo-nos em demonstrar todos. A maioria das demonstrações dos resultados aqui obtidos estão escritas de forma bastante simples em [16].

2.1.1 Definições

Um espaço vetorial V construído sobre um corpo K , complexo (real), dotado de um produto $(X, Y) \rightarrow [X, Y]$ que satisfaz

$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z], \quad \alpha, \beta \in K \quad (\text{linearidade}), \quad (2.1)$$

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad \forall X, Y \text{ anti-simetria,} \quad (2.2)$$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0, \quad \forall X, Y, Z, \in V, \quad (2.3)$$

é denominado *álgebra de Lie*. A relação 2.3 é a *identidade de Jacobi*. A álgebra de Lie V será complexa (real) se for definida sobre um corpo K complexo (real). O produto $[\ , \]$ é denominado *produto de Lie*.

Uma álgebra de Lie é definida *comutativa* ou *abeliana* se, dados $X, Y \in V$, $[X, Y] = 0, \forall X, Y$. Uma *subálgebra* de Lie é definida por um subespaço $N \subset V$, tal que dados $X, Y \in N$, $[X, Y] \in N$. Esta subálgebra será um *ideal* se dados $X \in N$ e $Y \in V$, $[X, Y] \in N$, o qual será um *ideal maximal* se $[X, Y] = 0$.

O espaço vetorial V possui uma base, e_1, e_2, \dots, e_n , que devido à linearidade, nos permite escrever

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad (2.4)$$

onde c_{ij}^k são as *constantes de estrutura* da álgebra com propriedades advindas das equações 2.2 e 2.3 respectivamente

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \quad (2.5)$$

$$c_{ij}^l c_{lk}^m + c_{jk}^l c_{li}^m + c_{ki}^l c_{lj}^m = 0, \quad (2.6)$$

sendo que acima e adiante utilizaremos a notação de Einstein.

De acordo com o teorema de Ado [17], toda álgebra de Lie pode ser representada por uma matriz, neste caso o produto de Lie fica

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i, \quad (2.7)$$

e $X_i X_j$ é o produto usual de matrizes. Daqui por diante representaremos álgebras de Lie por matrizes e o produto de Lie será dado pela equação 2.7.

O conjunto de todas as matrizes $(n \times n)$ complexas, representado por $gl(n, \mathbb{C})$, dotado de adição e multiplicação por escalar forma o espaço vetorial complexo de dimensão n^2 . Se este espaço for munido do produto de Lie definido pela equação 2.7, formará a álgebra de Lie $gl(n, \mathbb{C})$.

A base desta álgebra é dada pelas matrizes de Weyl e_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, cujos elementos de matriz são dados por

$$(e_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}, \quad (2.8)$$

de forma que uma matriz da álgebra $gl(n, \mathbb{C})$ é escrita como uma combinação linear das matrizes de Weyl. As matrizes de base de uma álgebra também são chamadas de geradoras desta álgebra.

Uma álgebra de Lie é definida por suas relações de comutação. Por exemplo, as relações de comutação da base da álgebra $gl(n, \mathbb{C})$, são dadas abaixo por

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}, \quad (2.9)$$

sendo que acima utilizamos o resultado para o produto entre duas matrizes de Weyl dado por $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$.

2.1.2 Álgebras de Lie Clássicas

Nesta secção apresentaremos as álgebras de Lie clássicas. Esta classificação foi dada por Cartan e Killing que mostraram haver 8 tipos de álgebras de Lie, sendo que as álgebras clássicas são A_n , B_n , C_n e D_n .

A simetria A_{n-1} é formada pela álgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ (especial¹ linear) de dimensão $n^2 - 1$. Suas matrizes possuem traço nulo,

$$\text{Tr} X = 0, \quad (2.10)$$

¹Utilizaremos a palavra especial para designar álgebras cujas matrizes possuem traço nulo.

sendo X um elemento da álgebra.

Além da condição 2.10, as matrizes X devem ser anti-hermiteanas,

$$X + X^\dagger = 0. \quad (2.11)$$

Uma possível base para estas matrizes é escrita como

$$X_{ii} = e_{ii} - e_{i+1,i+1}, \quad X_{ij} = e_{ij}, \quad (2.12)$$

sendo X_{ij} os geradores da álgebra $sl(n, \mathbb{C})$. As relações de comutação desta álgebra na base acima são

$$[X_{ii}, X_{kl}] = (\delta_{ki} - \delta_{il} - \delta_{k,i+1} - \delta_{i+1,l})X_{kl}, \quad (2.13)$$

$$[X_{ij}, X_{ji}] = e_{ii} - e_{jj}, \quad (2.14)$$

$$[X_{ii}, X_{jj}] = 0, \quad (2.15)$$

$$[X_{ij}, X_{kl}] = \delta_{kj}X_{il} - \delta_{il}X_{kj}. \quad (2.16)$$

Um exemplo é a álgebra $sl(2, \mathbb{C})$ cuja base é

$$X_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

e as relações de comutação são dadas por

$$[X_{11}, X_{12}] = 2X_{12}, \quad (2.18)$$

$$[X_{11}, X_{21}] = -2X_{21}, \quad (2.19)$$

$$[X_{12}, X_{21}] = X_{11}. \quad (2.20)$$

As simetrias B_n e D_n são correspondentes às álgebras especiais ortogonais

$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$, de dimensões ímpares e pares respectivamente. As matrizes $n \times n$ desta álgebra são anti-simétricas,

$$X + X^T = 0, \quad (2.21)$$

sendo X^T a transposta da matriz X da álgebra. As matrizes anti-simétricas $(2n + 1) \times (2n + 1)$ formam a álgebra especial ortogonal $\mathfrak{so}(2n + 1, \mathbb{C})$ (B_n) e as matrizes $2n \times 2n$ formam a álgebra $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ (D_n). As dimensões destas álgebras são $n(2n + 1)$ e $n(2n - 1)$, respectivamente.

As matrizes de base desta álgebra são

$$X_{ij} = e_{ij} - e_{ji}. \quad (2.22)$$

Como exemplo, consideremos a álgebra $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$, cuja base é

$$X_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

e relações de comutação são

$$[X_{12}, X_{13}] = -X_{23}, \quad (2.24)$$

$$[X_{12}, X_{23}] = X_{13}, \quad (2.25)$$

$$[X_{23}, X_{13}] = X_{12}. \quad (2.26)$$

Podemos reescrever $X_{23} = L_1$, $X_{13} = L_2$ e $X_{12} = L_3$, tal que as relações de comutação ficam

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k. \quad (2.27)$$

Outra forma de escrevermos estas matrizes é

$$J_0 = iL_3, \quad J_{\pm} = \frac{i}{\sqrt{2}}(L_1 \pm iL_2),$$

tal que suas relações de comutação ficam

$$[J_0, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = J_0.$$

Na forma acima as constantes de estrutura da $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ são iguais às da $\mathfrak{sl}(2)$ se dividirmos todos os seus geradores por 2. Duas álgebras são denominadas *isomorfas* se suas constantes de estrutura forem idênticas, isto é, há uma transformação inversível que leva um a um os elementos de uma álgebra na outra, o isomorfismo entre as álgebras $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ e $\mathfrak{sl}(2)$ é representado por

$$\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \sim \mathfrak{sl}(2).$$

A simetria C_n é formada pela álgebra simplética $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ cujas matrizes $2n \times 2n$, satisfazem

$$X^T J + JX = 0, \tag{2.28}$$

onde J é a matriz $2n \times 2n$ abaixo

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.29}$$

e 1_n é a matriz identidade de ordem n .

Para resolver a 2.28 escrevemos X na forma de blocos $n \times n$,

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

e a substituímos na 2.28 para obtermos a matriz geral da $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ abaixo

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

onde A, B e C são matrizes complexas $n \times n$ sendo B e C simétricas. A matriz A possui n^2 parâmetros complexos e B e C por serem simétricas $n(n+1)/2$ cada uma. Segue-se que a álgebra $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ possui $n(2n+1)$ parâmetros complexos ou $2n(2n+1)$ parâmetros reais.

As matrizes A , B , e C são escritas na notação de Weyl como

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} e_{ij} & 0 \\ 0 & -e_{ji} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (2.32)$$

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & e_{ij} + e_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n, \quad (2.33)$$

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{ij} + e_{ji} & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n. \quad (2.34)$$

As matrizes geradoras desta álgebra possuem as seguintes relações de comutação:

$$[A_{ij}, A_{kl}] = \delta_{jk}A_{il} - \delta_{il}A_{kj}, \quad (2.35)$$

$$[A_{ij}, B_{kl}] = \delta_{jk}B_{il} + \delta_{jl}B_{ik}, \quad (2.36)$$

$$[A_{ij}, C_{kl}] = -\delta_{ik}C_{jl} - \delta_{il}C_{jk}, \quad (2.37)$$

$$[B_{ij}, B_{kl}] = 0 = [C_{ij}, C_{kl}], \quad (2.38)$$

$$[B_{ij}, C_{kl}] = \delta_{ik}A_{jl} + \delta_{jk}A_{il} + \delta_{il}A_{jk} + \delta_{jl}A_{ik}. \quad (2.39)$$

A álgebra simplética $\mathfrak{sp}(2)$, cujos geradores são

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

e possuem as seguintes relações de comutação

$$[A_{11}, B_{11}] = 2B_{11}, \quad (2.41)$$

$$[A_{11}, C_{11}] = -2C_{11}, \quad (2.42)$$

$$[B_{11}, C_{11}] = A_{11}, \quad (2.43)$$

e portanto é isomorfa às álgebras $\mathfrak{sl}(2)$ e $\mathfrak{so}(3)$, já que suas constantes de estrutura são idênticas se dividirmos os geradores de $\mathfrak{sl}(2)$ e $\mathfrak{sp}(2)$ por dois. Sendo assim, escrevemos

$$\mathfrak{sl}(2) \sim \mathfrak{so}(3) \sim \mathfrak{sp}(2). \quad (2.44)$$

2.1.3 Representações Adjuntas das Álgebras de Lie

Dado um gerador X qualquer de uma álgebra de Lie V , definimos

$$ad(X) : Z \rightarrow [X, Z], \quad \forall Z \in V, \quad (2.45)$$

como a transformação *adjunta* desta álgebra.

Esta transformação é linear,

$$ad(X)(Y + Z) = ad(X)Y + ad(X)Z. \quad (2.46)$$

A partir da transformação "ad" obtemos a representação adjunta da álgebra de Lie V .

Como exemplo, vamos calcular a representação adjunta da álgebra $\mathfrak{so}(3)$, para a qual temos $ad(L_1)L_1 = 0$, $ad(L_1)L_2 = L_3$, $ad(L_1)L_3 = -L_2$, portanto

$$ad(L_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_1, \quad (2.47)$$

$ad(L_2)L_1 = -L_3$, $ad(L_2)L_2 = 0$, $ad(L_2)L_3 = L_1$, portanto

$$ad(L_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_2, \quad (2.48)$$

$ad(L_3)L_1 = L_2$, $ad(L_3)L_2 = -L_1$ e $ad(L_3)L_3 = 0$, e

$$ad(L_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_3, \quad (2.49)$$

e suas relações de comutação são dadas por

$$[M_i, M_j] = \epsilon_{ijk}M_k. \quad (2.50)$$

Soma Direta

Dada uma álgebra de Lie V , esta pode ser dividida em soma direta de subálgebras de Lie se, para todo par de subálgebras V_i, V_j , temos $V_i \cap V_j = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$, tal que

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n. \quad (2.51)$$

2.1.4 Álgebras Solúveis e Nilpotentes

Dado N um ideal de uma álgebra V , então $[N, N]$ (comutador entre dois elementos de N) é também um ideal de N , já que

$$[L, [N, N]] \subset [N, [N, L]] + [N, [L, N]] \subset [N, N]. \quad (2.52)$$

Dada uma álgebra V ideal, obteremos um ideal $[V, V]$, porém menor que V . Se escrevermos a sequência

$$V^{(0)} = V, \quad V^{(1)} = [V^{(0)}, V^{(0)}], \quad \dots, \quad V^{(n+1)} = [V^{(n)}, V^{(n)}], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.53)$$

resultando em $V^{(n)} = 0$, para $n \in \mathbb{N}$, definiremos V como uma álgebra *solúvel*.

Agora, consideremos a sequência

$$V_{(0)} = V, \quad V_{(1)} = [V_{(0)}, V], \quad \dots, \quad V_{(n+1)} = [V_{(n)}, V], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.54)$$

uma álgebra de Lie é definida *nilpotente* se existe $V_{(n)} = 0$, para $\forall n$.

De acordo com as definições acima, uma álgebra de Lie nilpotente é necessariamente solúvel, mas uma álgebra solúvel não precisa ser nilpotente.

Um exemplo simples de álgebras solúveis é dado pelas álgebras de Lie formadas pelas matrizes triangulares superiores. Para o caso de matrizes 3×3 , temos

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} g & h & i \\ 0 & j & k \\ 0 & 0 & l \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

o comutador destas matrizes resulta em,

$$[M_1, M_2] = \begin{pmatrix} 0 & h(a-d) + b(f-g) & i(a-f) + c(l-g) + bk - if \\ 0 & 0 & k(d-f) + e(l-j) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M^2, \quad (2.56)$$

já o comutador entre matrizes do tipo M^2 , fica

$$M_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & m & n \\ 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[M_1^2, M_2^2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & mr - ps \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M^3 \quad (2.57)$$

sendo fácil ver que

$$[M_1^3, M_2^3] = 0. \quad (2.58)$$

Um exemplo simples de álgebra nilpotente é dado pelas matrizes triangulares superiores de elementos diagonais nulos,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

note que as matrizes acima são casos particulares das matrizes utilizadas para exemplificar solubilidade,

$$[M_1, M_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & af - cd \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N_2. \quad (2.60)$$

É fácil ver que o comutador entre matrizes do tipo M com matrizes do tipo N é nulo,

$$[M_1, N_2] = 0. \quad (2.61)$$

Os exemplos acima são bastante ilustrativos. A partir deles, verificamos que a álgebra nilpotente é também solúvel, sendo fácil verificar que as matrizes utilizadas para exemplificar solubilidade não são nilpotentes.

2.1.5 Forma de Killing

Sabemos que as constantes de estrutura definem uma álgebra de Lie. Definiremos um tensor simétrico em termos destas constantes, denominado *tensor métrico* ou *forma de Killing*,

$$g_{\sigma\lambda} = g_{\lambda\sigma} = c_{\sigma\rho}^{\tau} c_{\lambda\tau}^{\rho}, \quad (2.62)$$

onde somamos sobre índices repetidos. Este tensor pode ser representado por uma matriz $n \times n$, onde n é a quantidade de geradores da álgebra.

A partir da definição da forma de Killing, Cartan formulou um critério para definir se uma álgebra de Lie é *semi-simples*.

- Uma álgebra de Lie A é definida *simples* se não contiver nenhum ideal além de A e $\{0\}$.
- Uma álgebra de Lie A é definida *semi-simples* se não contiver nenhum ideal Abelian.

Toda álgebra de Lie simples é necessariamente semi-simples, o inverso não necessariamente.

De acordo com o teorema demonstrado por Cartan, a álgebra de Lie V é semi-simples se e somente se o determinante da matriz $|g_{\alpha\beta}|$ for diferente de 0. Ou seja,

podemos concluir que a forma de Killing é uma matriz inversível para toda álgebra de Lie semi-simples,

$$g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (2.63)$$

A matriz inversa da forma de Cartan nos permitirá definir o operador de Casimir da álgebra de Lie na secção seguinte.

2.1.6 Os operadores de Casimir

Dada a álgebra de Lie V e $\{X_{\rho}\}$ o conjunto de seus geradores, definimos a quantidade quadrática

$$C^2 = g^{\rho\sigma} X_{\rho} X_{\sigma}, \quad (2.64)$$

tal que C^2 é o operador que comuta com todos os outros operadores da álgebra. Note que ele foi definido em função da matriz inversa da forma de Killing, ou seja esta definição é válida para álgebras de Lie semi-simples, e é denominado *operador de Casimir*.

Um exemplo bastante conhecido a partir da física é dado pelo operador

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2,$$

que comuta com todos os outros operadores da álgebra do momento angular em mecânica quântica, também conhecida como álgebra $su(2)$.

Racah propôs a **generalização dos operadores de Casimir** [18], considerando os operadores

$$I_n = c_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2} c_{\alpha_2\beta_2}^{\beta_3} \dots c_{\alpha_n\beta_n}^{\beta_1} X^{\alpha_1} X^{\alpha_2} \dots X^{\alpha_n}, \quad (2.65)$$

que também comutam com todos os elementos da álgebra de Lie semi-simples.

2.1.7 Forma canônica de Cartan-Weyl: Raízes

Uma álgebra de Lie é escrita sobre uma base, formada pelos geradores desta álgebra. Até aqui, não definimos nenhum critério de escolha para essa base.

Nesta secção definiremos um critério para a escolha da base de uma álgebra de Lie semi-simples.

Suponhamos que existam dois sub-conjuntos de geradores da álgebra de Lie, tal que

$$[A, X] = \rho X, \quad (2.66)$$

sendo A e X combinações lineares arbitrárias dos geradores desta álgebra de Lie. A equação acima é uma equação de auto-valor matricial, sendo que X é o auto-vetor correspondente ao auto-valor ρ .

Tomemos então o caso em que $\rho = 0$. Cartan mostrou que somente o auto-valor $\rho = 0$ será degenerado [18]. Neste caso, deveremos ter l geradores da álgebra formando uma base do subespaço l -dimensional do espaço n -dimensional da álgebra V . Os auto-vetores de A correspondentes à $\rho = 0$ são denominados H_i e desde que

$$[A, H_i] = 0,$$

podemos escrever A como combinação linear de H_i ,

$$A = \lambda^i H_i, \quad i = 1, \dots, l. \quad (2.67)$$

Os geradores da base H_i formam juntos uma subálgebra Abeliãna, já que $[H_i, H_j] = 0$, chamada de subálgebra (núcleo) de Cartan. A quantidade l de geradores da subálgebra de Cartan deve ser máxima para que apenas o auto-valor $\rho = 0$ seja degenerado. A degenerescência deste auto-valor é chamada *rank* da álgebra.

Para os outros valores de ρ , escrevemos a equação de auto-valor na forma

$$[A, E_\alpha] = \alpha E_\alpha, \quad (2.68)$$

a qual será útil para demonstração de propriedades e vantagens em escrevermos os geradores de uma álgebra nesta base.

O comutador $[H_i, E_\alpha]$ é um auto-vetor de auto-valor α do operador A , pois

$$\begin{aligned} [A, [H_i, E_\alpha]] &= [A, H_i E_\alpha] - [A, E_\alpha H_i], \\ \Rightarrow [A, [H_i, E_\alpha]] &= \alpha [H_i, E_\alpha], \end{aligned} \quad (2.69)$$

Da equação acima concluímos que há l auto-vetores $[H_i, E_\alpha]$ de mesmo auto-valor α . Mas de acordo com o que foi demonstrado por Cartan, este auto-valor é não-degenerado. Ou seja, os comutadores $[H_i, E_\alpha]$ são proporcionais à E_α , portanto

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha. \quad (2.70)$$

Sabemos que $A = \lambda^i H_i$, portanto escrevemos

$$[A, E_\alpha] = [\lambda^i H_i, E_\alpha] = \lambda^i \alpha_i E_\alpha \quad (2.71)$$

$$\Rightarrow \alpha = \lambda^i \alpha_i, \quad i = 1, \dots, l, \quad (2.72)$$

e podemos concluir que α_i são as componentes de um vetor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, denominado raiz do elemento E_α , num espaço l -dimensional do *rank* da álgebra.

Resta-nos investigar as relações de comutação entre operadores não pertencentes ao núcleo de Cartan H_i . Assim, devemos investigar as relações de comutação do tipo $[E_\alpha, E_\beta]$. Para isto, escrevemos a identidade de Jacobi

$$[A, [E_\alpha, E_\beta]] + [E_\alpha, [E_\beta, A]] + [E_\beta, [A, E_\alpha]] = 0, \quad (2.73)$$

$$[A, [E_\alpha, E_\beta]] = (\alpha + \beta) [E_\alpha, E_\beta]. \quad (2.74)$$

Se tivermos $\beta = -\alpha$, então A comuta com $[E_\alpha, E_\beta]$, portanto este será uma combinação linear de H_i ,

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = c_{\alpha, -\alpha}^i H_i, \quad (2.75)$$

que após uma normalização adequada pode ser reescrita como

$$[E_\alpha, E_\beta] = \alpha_i H_i. \quad (2.76)$$

Se a soma de raízes $\alpha + \beta$ ainda for uma raiz da álgebra, então escrevemos

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}, \quad \text{ou} \quad c_{\alpha\beta}^{\alpha+\beta} = N_{\alpha\beta}, \quad (2.77)$$

se não for raiz, então

$$[E_\alpha, E_\beta] = 0. \quad (2.78)$$

De posse destas relações de comutação escrevemo-nas todas na *forma canônica de Cartan-Weyl*

$$[H_i, H_j] = 0, \quad i, k = 1, \dots, l, \quad (2.79)$$

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, \quad (2.80)$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha E_{\alpha+\beta}}, \quad \text{se } \alpha + \beta \neq 0, \quad (2.81)$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha_i H_i. \quad (2.82)$$

Dentro desta base obtemos 3 teoremas importantes,

- Para toda raiz α de uma álgebra de Lie semi-simples existe uma raiz $-\alpha$;
- Se α e β são raízes, então $2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$ é um inteiro e $\beta - 2\alpha(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$ é uma raiz. O parêntese $(,)$ define o produto escalar;
- Se α é uma raiz, então seus únicos múltiplos são $\pm\alpha$.

Uma raiz é definida **positiva** se sua primeira componente não-nula for positiva e **simples** se não for combinação linear de duas raízes positivas.

2.1.8 Representações das Álgebras de Lie

Nesta secção apresentaremos o conceito de representação de uma álgebra de Lie, o qual será muito útil no capítulo seguinte.

Seja V uma álgebra de Lie sobre um corpo K e seja H um espaço linear, uma representação de A em H é um homomorfismo $X \rightarrow T(X)$ de V sobre o conjunto de operadores lineares em H , isto é, para X e Y em A e α e β em K ,

$$\alpha X + \beta Y \rightarrow \alpha T(X) + \beta T(Y), \quad (2.83)$$

$$[X, Y] \rightarrow [T(X), T(Y)] \equiv T(X)T(Y) - T(Y)T(X). \quad (2.84)$$

Devido à 2.84, a identidade de Jacobi é satisfeita. Outra forma de verificar se um determinado conjunto de operadores representa a álgebra V é verificar se este conjunto satisfaz as relações de comutação da álgebra.

Uma representação é dita *irredutível* se não existe outro invariante no espaço H além da identidade, caso contrário, se houver algum subespaço invariante em H a representação será definida *reduzível*.

As matrizes de Weyl $n \times n$ da álgebra $\mathfrak{gl}(n)$ formam a base para a representação fundamental desta álgebra. Assim, dadas as álgebras $\mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$ e $\mathfrak{sp}(n)$, suas representações fundamentais serão dadas por matrizes $n \times n$.

2.1.9 Pesos

Sabemos encontrar as relações de comutação para uma álgebra de Lie, já que para isso basta encontrar as matrizes da representação fundamental desta álgebra. Mas pode ser conveniente ou necessário representar esta álgebra por matrizes (irreduzíveis) de outras dimensões. Para isso, definiremos os pesos.

Peso é um vetor no espaço das raízes cujas componentes são auto-valores dos geradores da subálgebra de Cartan.

Uma representação ϕ de dimensão $N(\phi)$ deverá ter l matrizes H_i , $N(\phi) \times N(\phi)$, onde l é o rank da álgebra representada ou o número de geradores da subálgebra de Cartan. O restante dos elementos representará os geradores E_α desta álgebra.

Esta representação satisfaz as relações de comutação postas na forma de Cartan. A representação ϕ atuará no espaço R_ϕ . Dadas as l matrizes do núcleo de Cartan, construímos um conjunto $|u\rangle$ de auto-vetores destas matrizes no espaço R_ϕ ,

$$H_{\alpha_i}|u\rangle = \Lambda_i|u\rangle, \quad (2.85)$$

onde Λ_i são as componentes do vetor Λ e este vetor é definido como peso do estado $|u\rangle$.

Dado $|u\rangle$, cujo peso é Λ , então $E_\beta|u\rangle$ é um estado de peso $\Lambda + \beta$, onde β é uma raiz da álgebra. A demonstração é dada abaixo

$$\begin{aligned} [H_{\alpha_i}, E_\beta]|u\rangle &= \beta E_\beta|u\rangle, \\ H_{\alpha_i}E_\beta|u\rangle - E_\beta H_{\alpha_i}|u\rangle &= \beta E_\beta|u\rangle \\ H_{\alpha_i}E_\beta|u\rangle &= (\Lambda + \beta)E_\beta|u\rangle. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Um peso Λ é *positivo* se sua primeira componente não nula for positiva e um peso é *maior* que outro se a diferença entre estes for positiva. Um peso é *fundamental* se ele não for uma combinação linear entre outros pesos positivos.

Escrevemos abaixo alguns importantes teoremas sobre os pesos de uma representação irredutível

- Seja Λ um peso e α uma raiz, então $n = 2(\Lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ é um inteiro e $\Lambda - n\alpha$ é um peso;
- Toda representação ϕ tem um peso máximo;

- Se a representação ϕ é irredutível, seu peso máximo é fundamental;
- Duas representações ϕ_1 e ϕ_2 são equivalentes se seus pesos máximos são iguais;
- Para Λ ser o peso máximo de alguma representação ϕ irredutível de G é necessário e suficiente que todos os números

$$\Lambda_\alpha = 2 \frac{(\Lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)},$$

sejam inteiros não negativos, sendo α uma raiz positiva.

2.2 Grupos de Lie

Nesta secção faremos uma revisão geral de conceitos de grupos de Lie que serão úteis nos capítulos subsequentes. Faremos uma abordagem bastante direta, provando poucos resultados e formulando conceitos que serão úteis nos próximos capítulos .

2.2.1 Definições

Um conjunto G dotado de um produto " \circ " tal que $G \times G \rightarrow G$ e satisfaz à

$$G \circ G_0 = G_0 \circ G = G, \quad \text{Identidade,} \quad (2.87)$$

$$G \circ (G)^{-1} = G_0 \quad \text{Inversa,} \quad (2.88)$$

$$G \circ (G' \circ G'') = (G \circ G') \circ G'' = G \circ G' \circ G'', \quad \text{Associatividade,} \quad (2.89)$$

é denominado um *grupo*.

Grupos de Lie

Um grupo abstrato G é dito um grupo de Lie se

1. Os elementos de G são etiquetados por parâmetros contínuos sobre um espaço suave, infinitamente diferenciável;

-
2. Dados dois elementos G e G' etiquetados por parâmetros contínuos, o produto entre estes elementos $G'' = GG'$ deve ser etiquetado por parâmetros que são funções contínuas dos parâmetros de G e G' .

O exemplo mais simples de grupo de Lie é dado pelas rotações de um vetor bidimensional em torno de um eixo fixo. Este grupo é denominado $SO(2)$, Grupo Especial Ortogonal em duas dimensões. Um elemento deste grupo atua sobre um vetor no espaço bidimensional, inicialmente na posição θ_1 em relação ao eixo horizontal gira por um ângulo θ_2 a partir de sua posição inicial e chega à posição θ_3 em relação ao eixo horizontal. Mas sabemos que

$$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2,$$

é uma função contínua. Além disso, um elemento arbitrário deste grupo é representado pela matriz 2×2 abaixo,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.90)$$

que satisfaz todos os requisitos para formar um grupo.

A partir deste exemplo podemos esclarecer alguns pontos.

- Há apenas um parâmetro θ que etiqueta um elemento do grupo. Este parâmetro forma o *espaço de parâmetros do grupo*;
- Um elemento do grupo atua sobre um vetor pertencente ao espaço euclidiano bi-dimensional, ou seja, atua como uma transformação sobre elementos de um outro espaço vetorial. Este conjunto forma um *grupo de transformações*.

2.2.2 A aplicação exponencial

As álgebras de Lie possuem parâmetros sobre o espaço tangente ao espaço dos parâmetros do grupo de Lie correspondente. Devido a essa relação entre estes espaços, os elementos do grupo, em torno do elemento identidade do mesmo, são escritos como a exponencial de um elemento arbitrário da álgebra de Lie, [19]. Assim, dado V uma álgebra de Lie,

$$g = e^V, \quad \in G, \quad (2.91)$$

forma o grupo de Lie correspondente à esta álgebra, na região da identidade.

2.2.3 O grupo geral linear

O grupo geral linear, $GL(n)$, é formado pelas matrizes $n \times n$ inversíveis (determinante não-nulo). Se estas matrizes forem formadas por números complexos, teremos o $GL(n, \mathbb{C})$, com n^2 parâmetros complexos, ou $2n^2$ parâmetros reais, sendo que a variação contínua de cada um dos $2n^2$ parâmetros reais gera todo o grupo, formando assim um grupo caracterizado por $2n^2$ parâmetros num espaço $2n^2$ dimensional. Isto é, cada elemento de matriz representa uma coordenada do espaço de parâmetros. Se utilizarmos somente a parte real dos parâmetros complexos, teremos o grupo geral linear real, $GL(n, \mathbb{R})$, com n^2 parâmetros

$$GL(n, \mathbb{C}) \supset GL(n, \mathbb{R}). \quad (2.92)$$

O $GL(n, \mathbb{C})$ forma um conjunto de matrizes (transformações) que atua sobre um espaço vetorial n -dimensional.

2.2.4 O grupo especial linear

O subconjunto das matrizes de $GL(n)$ que possuem determinante igual a 1, forma o grupo especial linear, $SL(n, \mathbb{C})$, que é caracterizado por $n^2 - 1$ parâmetros

complexos ou $2(n^2 - 1)$ parâmetros reais

$$GL(n, \mathbb{C}) \supset SL(n, \mathbb{C}) \supset SL(n, \mathbb{R}). \quad (2.93)$$

A restrição à parte real destas matrizes gera o grupo $SL(n, \mathbb{R})$ de $n^2 - 1$ parâmetros reais

$$GL(n, \mathbb{R}) \supset SL(n, \mathbb{R}) \quad (2.94)$$

2.2.5 O grupo unitário

O grupo unitário, $U(n)$, é formado pelas matrizes $n \times n$ de n^2 parâmetros, tal que atuando sobre um espaço vetorial complexo n -dimensional preserva a forma

$$z_1 z_1^* + z_2 z_2^* + \dots + z_n z_n^*. \quad (2.95)$$

Dado o vetor $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ após este sofrer a ação de um elemento de $U(n)$, transforma-se em $\mathbf{z}' = A\mathbf{z}$, $A \in U(n)$ tal que:

$$\begin{aligned} z'_1 z_1'^* + z'_2 z_2'^* + \dots + z'_n z_n'^* &= z_1 z_1^* + z_2 z_2^* + \dots + z_n z_n^*, \\ \rightarrow z'^\dagger A^\dagger A z &= z^\dagger z, \\ \Rightarrow A^\dagger A &= \mathbf{1}_n. \end{aligned} \quad (2.96)$$

As matrizes que satisfazem esta forma são chamadas Unitárias. $\mathbf{1}_n$ é a matriz identidade de ordem n e A^\dagger é o transposto conjugado de A .

Este grupo possui espaço de parâmetros *compacto*. Ou seja seus parâmetros assumem valores finitos dentro de um intervalo do espaço complexo. Demonstramos isto facilmente se tomarmos a equação 2.96 e reescrevermos

$$(A^\dagger)_{ik} A_{kj} = \delta_{ij}, \quad (2.97)$$

$$|A_{1i}|^2 + |A_{2i}|^2 + \dots + |A_{ni}|^2 = 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.98)$$

Da análise da equação acima, obtemos que os elementos de matriz têm módulo $|A_{ij}|^2 \leq 1$, já que módulos possuem valores positivos e caso algum módulo possua valor superior a 1, 2.98 não será satisfeita. Desta forma, concluímos que o grupo $U(n)$ é compacto, já que cada um de seus parâmetros está limitado a uma circunferência de raio 1 do plano complexo.

O número de parâmetros deste grupo pode ser analisado a partir da equação 2.96. Para o caso de $i = j$ teremos n equações reais conforme a equação 2.98. Já para $i \neq j$ temos

$$A_{1i}^* A_{1j} + A_{2i}^* A_{2j} + \dots = 0,$$

$$A_{1i}^* A_{1j} + A_{2i}^* A_{2j} + \dots = 0,$$

e estas equações são apenas conjugados uma da outra, ou seja estas equações são simétricas, de forma que temos equações complexas independentes apenas para o caso de $i > j$. Teremos então $n(n-1)/2$ equações complexas ou $n(n-1)$ equações reais. Sabemos que as matrizes $n \times n$ complexas possuem $2n^2$ parâmetros reais de forma que teremos

$$2n^2 - n(n-1) - n = n^2,$$

parâmetros reais.

2.2.6 Grupo especial unitário

O grupo especial unitário, $SU(n)$, é formado pela intersecção entre $U(n)$ e $SL(n, \mathbb{C})$, de forma que nos restringimos às matrizes unitárias de determinante 1

dotadas de $n^2 - 1$ parâmetros reais

$$SU(n) = SL(n, \mathbb{C}) \cap U(n). \quad (2.99)$$

2.2.7 Grupo ortogonal

O grupo ortogonal, $O(n, \mathbb{C})$, formado pelas matrizes $n \times n$ de $n(n-1)$ parâmetros independentes, devem satisfazer

$$A^T A = A A^T = 1, \quad (2.100)$$

onde A^T é a matriz transposta de A . Estas matrizes são chamadas Ortogonais.

Vejamos a conectividade do grupo ortogonal

$$\begin{aligned} \det|A^T A| &= \det|1|, \\ \det|A^T| \det|A| &= 1, \\ \det|A|^2 &= 1, \\ \det|A| &= \pm 1, \end{aligned} \quad (2.101)$$

Em 2.101 há dois valores para o determinante de A , sendo que não podemos tomá-los continuamente, de forma que obtemos um grupo *desconexo*, formado por 2 sub-espacos, um deles composto pelas matrizes de determinante 1 e o outro pelas matrizes de determinante -1. A parte que contém o determinante 1 forma o grupo especial ortogonal

2.2.8 Grupo especial ortogonal

O grupo especial ortogonal, $SO(n, \mathbb{C})$, é formado através da intersecção entre $O(n, \mathbb{C})$ e $SL(n, \mathbb{C})$, formando um grupo de $n(n-1)$ parâmetros reais e determinante

1.

$$SO(n, \mathbb{C}) = O(n, \mathbb{C}) \cap SL(n, \mathbb{C}). \quad (2.102)$$

Estas transformações conservam

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2. \quad (2.103)$$

Se nos limitarmos à parte real deste grupo, teremos o grupo $SO(n, \mathbb{R})$

$$SO(n, \mathbb{R}) = O(n, \mathbb{R}) \cap SL(n, \mathbb{R}), \quad (2.104)$$

que preserva

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \quad (2.105)$$

e cujo espaço de parâmetros reais será de dimensão $n(n-1)/2$.

2.2.9 Grupo Simplético

O grupo simplético, $Sp(2n, \mathbb{C})$, é formado pelo conjunto das matrizes $2n \times 2n$ que mantém invariante forma bilinear

$$x_1 y_{n+1} - x_{n+1} y_1 + \dots + x_n y_{2n} - x_{2n} y_n, \quad (2.106)$$

O espaço dos parâmetros será de dimensão $2n(2n+1)$. Note que a dimensão do grupo simplético é sempre par.

O grupo $USp(2n)$, dado pela intersecção entre $Sp(2n, \mathbb{C})$ e $U(2n)$, é chamado grupo unitário simplético e possui $n(2n+1)$ parâmetros,

$$USp(2n) = U(2n) \cap Sp(2n),$$

este grupo será estudado com detalhes no capítulo seguinte.

Capítulo 3

A Simetria Unitária Simplética

Neste capítulo e no subsequente dissertaremos acerca dos resultados obtidos durante este trabalho. Este capítulo é dedicado à definição da álgebra unitária simplética e do grupo unitário simplético, obtenção das coordenadas renormalizadas deste grupo, obtenção das regras de multiplicação do grupo, representação da álgebra por operadores diferenciais sobre espaço tangente ao espaço de parâmetros do grupo e o cálculo da métrica de Haar do espaço de parâmetros do grupo.

3.1 Definição

Esta secção é constituída por duas partes. Na primeira delas, definimos a álgebra unitária simplética, suas raízes e pesos, representação matricial e tensor de Killing. Na segunda secção definimos o grupo unitário simplético, a forma bilinear simplética e a forma geral de uma matriz pertencente à este grupo.

3.1.1 A álgebra unitária simplética

Uma matriz X , pertencente a álgebra unitária simplética $usp(2n)$, deve satisfazer tanto a condição simplética dada na página seguinte,

$$XJ + JX^T = 0, \quad (3.1)$$

onde J é a matriz,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

quanto a condição unitária,

$$X^\dagger + X = 0. \quad (3.3)$$

Para obtermos a forma geral da matriz da representação fundamental da álgebra $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$, escrevemos X' como na equação 2.30,

$$X' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

sendo A, B, C e D matrizes blocos $n \times n$ e a substituímos na equação 3.1 para obtermos

$$X' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

onde

$$B = B^T, \quad C = C^T, \quad (3.6)$$

sendo os elementos de matriz complexos.

No caso da álgebra $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$, teremos 10 geradores complexos, ou 20 geradores reais. Escreveremos os 10 geradores abaixo,

$$X'_1 = \begin{pmatrix} -e_{11} & 0 \\ 0 & e_{11} \end{pmatrix}, \quad X'_2 = \begin{pmatrix} -e_{22} & 0 \\ 0 & e_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

onde e_{ij} são as matrizes de Weyl 2×2 e 0 são matrizes nulas 2×2 . Note que X'_1 e X'_2 são diagonais, portanto comutam e formam o núcleo de Cartan.

As matrizes X'_3 e X'_5 abaixo formam as raízes simples da álgebra $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$, conforme veremos adiante através das relações de comutação desta álgebra,

$$X'_3 = \begin{pmatrix} -e_{21} & 0 \\ 0 & e_{12} \end{pmatrix}, \quad X'_4 = \begin{pmatrix} -e_{12} & 0 \\ 0 & e_{21} \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

$$X'_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2}e_{22} & 0 \end{pmatrix}, \quad X'_6 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}e_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

já as matrizes restantes podem ser todas obtidas através das relações de comutação entre as matrizes X'_3 e X'_5 ou a partir da equação 3.5,

$$X'_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_{12} + e_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad X'_8 = \begin{pmatrix} 0 & e_{12} + e_{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$X'_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2}e_{11} & 0 \end{pmatrix}, \quad X'_{10} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}e_{11} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

note que

$$X'_\alpha = (X'_{\alpha-1})^\dagger, \quad \alpha = 4, 6, 8, 10. \quad (3.12)$$

Colocamos as relações comutação desta álgebra na forma de Cartan-Weyl,

$$[X'_j, X'_k] = 0, \quad j, k = 1, 2, \quad (3.13)$$

$$[X'_j, X'_k] = i(\alpha_k)_j X'_k, \quad j = 1, 2 \text{ e } k = 3, 4, \dots, 10, \quad (3.14)$$

$$[X'_j, (X'_j)^\dagger] = -i(\alpha_j)_k X'_k, \quad j = 3, 5, \dots, 9, \quad k = 1, 2. \quad (3.15)$$

A partir das relações de comutação acima, obtemos o tensor de Killing desta álgebra, que é dado por

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Esta álgebra de Lie, por ser complexa é *não-compacta* e além disso seu tensor de Killing é *não definido*, já que seus elementos não estão apenas na diagonal da matriz, de acordo com [18].

As constantes de estrutura α_j formam os vetores

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= [1, -1], & \alpha_5 &= [0, 2], & \alpha_7 &= [1, 1], & \alpha_9 &= [2, 0], \\ \alpha_4 &= [-1, 1], & \alpha_6 &= [0, -2], & \alpha_8 &= [-1, -1], & \alpha_{10} &= [-2, 0], \end{aligned} \quad (3.17)$$

que são as raízes da álgebra simplética em quatro dimensões. As raízes de 3, 5, 7 e 9 são as raízes de positivas e representam operadores de levantamento. As raízes de 4, 6, 8 e 10 são as raízes de negativas e representam operadores de abaixamento.

As raízes da álgebra são visualizadas no diagrama de Van der Waerden da página seguinte.

A partir de um diagrama de Van der Waerden podemos verificar, a menos das constantes de estrutura, todas as relações de comutação de sua respectiva álgebra.

Para isso, dados dois operadores quaisquer, calculamos o operador resultante de seu comutador se somarmos as componentes das raízes que representam estes operadores. Se o resultado desta soma for outra raiz, o operador representado pela mesma será o operador resultante desta comutação. Se o resultado não for outra raiz, então os operadores comutam. Por exemplo,

$$[X'_3, X'_5] = \sqrt{2}X'_7, \quad \rightarrow \quad \alpha_3 + \alpha_5 = [1, -1] + [0, 2] = [1, 1] = \alpha_7, \quad (3.18)$$

$$[X'_5, X'_7] = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_5 + \alpha_7 = [0, 2] + [1, 1] = [1, 3] \neq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, 10. \quad (3.19)$$

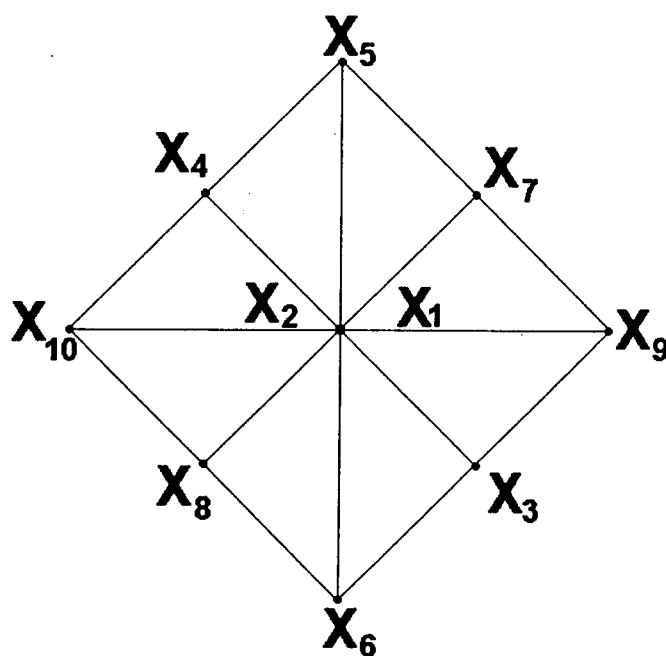


Figura 3.1: Diagrama de raízes da álgebra $sp(4, \mathbb{C})$

A matriz geral da álgebra $usp(2n)$ é obtida a partir da imposição de unitariedade à matriz da equação 3.5, advinda da equação 3.3. Destas relações obtemos

$$D = -A^T, \quad A^\dagger = -A, \quad B = -C^\dagger, \quad C = C^T. \quad (3.20)$$

Portanto, escrevemos a matriz X ,

$$X = \begin{pmatrix} A & -C^\dagger \\ C & -A^T \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

A álgebra $\mathfrak{usp}(2n)$ está sobre um espaço vetorial de dimensão $n(2n + 1)$.

A álgebra $\mathfrak{usp}(4)$ possui 10 geradores, ou elementos de base. Escreveremos estes geradores como combinações lineares dos geradores da álgebra $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$. Fazendo combinações lineares entre os geradores da álgebra $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$, escrevemos os geradores da álgebra $\mathfrak{usp}(4)$ abaixo,

$$X_k = iX'_k, \quad k = 1, 2, \quad (3.22)$$

$$X_j = X'_j - X'_{j+1}, \quad j = 3, 5, 7, 9, \quad (3.23)$$

$$X_{j+1} = i(X'_j + X'_{j+1}), \quad j = 3, 5, 7, 9. \quad (3.24)$$

As relações de comutação desta álgebra são dadas em função das relações de comutação da álgebra $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$. O tensor de Killing desta álgebra é dado abaixo, note que seus elementos de matriz são todos diagonais e negativos, sendo portanto *negativo definido*

$$\begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

se o tensor de Killing de uma álgebra for negativo definido, esta será uma álgebra *compacta*.

3.1.2 Subálgebras e Cadeias de Quebra de Simetria

Pesos

A cadeia de quebra de simetria canônica, associada à álgebra $\mathfrak{sp}(4)$ é dada abaixo,

$$\begin{aligned} \mathfrak{sp}(4) \supset \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \supset \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1), \\ (\lambda_1, \lambda_2) \quad \kappa_1 \quad \kappa_2 \quad h_1 \quad h_2 \end{aligned} \tag{3.26}$$

sendo os números $\{(\lambda_1, \lambda_2), (\kappa_1, \kappa_2), (h_1, h_2)\}$ referentes às representações irredutíveis das álgebras da cadeia de quebra de simetria acima.

A soma direta das subálgebras $\mathfrak{su}(2)$, forma a subálgebra maximal de $\mathfrak{sp}(4)$. Estas subálgebras são formadas pelos subconjuntos $\{X_1, X_9, X_{10}\}$ e $\{X_2, X_5, X_6\}$, cujas relações de comutação são verificadas na figura 3.1.

As subálgebras $\mathfrak{u}(1)$ são formadas pelos subconjuntos $\{X_1\}$ e $\{X_2\}$. Ambas são Abelianas.

A partir da cadeia 3.26 obtemos o conjunto completo de números quânticos para etiquetar univocamente os vetores de uma representação arbitrária da álgebra $\mathfrak{sp}(4)$, de acordo com [20]. Uma das formas de obter os elementos de matriz desta álgebra é dada em [21].

As representações irredutíveis são definidas pelo par de números inteiros λ_1 e λ_2 , onde $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Os vetores de base são escritos na formulação dada em [20] a partir da cadeia canônica:

$$\mathfrak{sp}(4) \supset \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \supset \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1),$$

$$\left| \begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \gamma_{12} & h_2 \\ \omega_{11} & \\ & h_1 \end{array} \right\rangle \equiv |\kappa_1, \kappa_2(\gamma_{12}), h_1, h_2\rangle, \quad (3.27)$$

$$\lambda_1 \geq \gamma_{12} \geq \lambda_2, \gamma_{12} \geq \omega_{11} \geq \gamma_{12} - \lambda_2, \quad (3.28)$$

$$\kappa_1 = \omega_{11}, \quad \kappa_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \kappa_1 - 2\gamma_{12}, \quad (3.29)$$

$$h_i = \kappa_i, \quad \kappa_i - 2, \quad \dots, \quad -\kappa_i \quad i = 1, 2, \quad (3.30)$$

sendo que os números κ_i dão as representações irredutíveis de $\mathfrak{su}(2)$.

Elementos de matriz

Os operadores diagonais da álgebra $\mathfrak{sp}(4)$ são

$$X'_i |\kappa_1, \kappa_2, h_1, h_2\rangle = h_i |\kappa_1, \kappa_2, h_1, h_2\rangle, \quad i = 1, 2, \quad (3.31)$$

$$J_i^2 |\kappa_1, \kappa_2, h_1, h_2\rangle = \kappa_i(\kappa_i + 2) |\kappa_1, \kappa_2, h_1, h_2\rangle, \quad i = 1, 2 \quad (3.32)$$

$$K^2 |\kappa_1, \kappa_2, h_1, h_2\rangle = [\lambda_1(\lambda_1 + 4) + \lambda_2(\lambda_2 + 2)] |\kappa_1, \kappa_2, h_1, h_2\rangle, \quad (3.33)$$

sendo os operadores J_i^2 os operadores de Casimir das subálgebras $\mathfrak{su}(2)$ e K^2 o operador de Casimir da álgebra $\mathfrak{sp}(4)$. Nas equações 3.32 e 3.33 os operadores de Casimir são dados por

$$J_1^2 = X_1'^2 + [X_9', X_{10}']_+, \quad J_2^2 = X_2'^2 + [X_5', X_6']_+, \quad (3.34)$$

$$K^2 = X_1'^2 + X_2'^2 + \sum_i [X_i', (X_i')^\dagger]_+, \quad i = 3, 5, 7, 9, \quad (3.35)$$

sendo $[A, B]_+ = AB + BA$.

Os operadores $X'_{5,6}$ e $X'_{9,10}$, por pertencerem às subálgebras $\mathfrak{su}(2)$, agem

analogamente aos J^\pm da álgebra do momento angular

$$X'_{5,6}|\kappa_1, \kappa_2, h_1, h_2\rangle = \left\{ \frac{1}{2}(\kappa_1 \mp h_1)(\sigma_1 \pm h_1 + 2) \right\}^{\frac{1}{2}} |\kappa_1, \kappa_2, h_1 \pm 2, h_2\rangle, \quad (3.36)$$

$$X'_{9,10}|\kappa_1, \kappa_2, h_1, h_2\rangle = \left\{ \frac{1}{2}(\kappa_2 \mp h_2)(\sigma_2 \pm h_2 + 2) \right\}^{\frac{1}{2}} |\kappa_1, \kappa_2, h_1, h_2 \pm 2\rangle, \quad (3.37)$$

sendo que utilizamos a notação $X'_{i,i+1} \equiv X'^{\pm}$, $i \equiv +$, $i+1 \equiv -$. Note que estes operadores acoplam representações irredutíveis da subálgebra $u(1)$.

A ação dos operadores $X'_{3,4}$, $X'_{7,8}$ é dada abaixo

$$X'_{3,4}|\kappa_1, \kappa_2, h_1, h_2\rangle = A^\pm|\kappa_1 + 1, \kappa_2 + 1, h_1 \pm 1, h_2 \mp 1\rangle \quad (3.38)$$

$$\pm B^\pm|\kappa_1 + 1, \kappa_2 - 1, h_1 \pm 1, h_2 \mp 1\rangle \quad (3.39)$$

$$\mp C^\pm|\kappa_1 - 1, \kappa_2 + 1, h_1 \pm 1, h_2 \mp 1\rangle \quad (3.40)$$

$$+D^\pm|\kappa_1 - 1, \kappa_2 - 1, h_1 \pm 1, h_2 \mp 1\rangle \quad (3.41)$$

e

$$X'_{7,8}|\kappa_1, \kappa_2, h_1, h_2\rangle = \mp A'^{\pm}|\kappa_1 + 1, \kappa_2 + 1, h_1 \pm 1, h_2 \pm 1\rangle \quad (3.42)$$

$$+B'^{\pm}|\kappa_1 + 1, \kappa_2 - 1, h_1 \pm 1, h_2 \pm 1\rangle \quad (3.43)$$

$$+C'^{\pm}|\kappa_1 - 1, \kappa_2 + 1, h_1 \pm 1, h_2 \pm 1\rangle \quad (3.44)$$

$$\pm D'^{\pm}|\kappa_1 - 1, \kappa_2 - 1, h_1 \pm 1, h_2 \pm 1\rangle, \quad (3.45)$$

onde os símbolos com linha são obtidos a partir dos símbolos sem linha por uma simples troca de sinal em h_2

$$R'^{\pm} = R^\pm(h_2 \rightarrow -h_2), \quad R, R' \in \{A, B, C, D\}. \quad (3.46)$$

Os coeficientes A^+ e B^+ conforme mostrado em [21], são dados por

$$A^+ = \left[\frac{(\lambda_+ - \kappa_+)(\lambda_+ + \kappa_+ + 6)(\kappa_+ - \lambda_- + 2)(\kappa_+ + \lambda_- + 4)}{64(\kappa_1 + 1)(\kappa_1 + 2)(\kappa_2 + 1)(\kappa_2 + 2)} \times (\kappa_1 + h_1 + 2)(\kappa_2 - h_2 + 2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.47)$$

$$B^+ = \left[\frac{(\kappa_- + \lambda_- + 2)(\lambda_- - \kappa_-)(\lambda_+ - \kappa_- + 2)(\kappa_- + \lambda_+ + 4)}{64(\kappa_1 + 1)(\kappa_1 + 2)\kappa_2(\kappa_2 + 1)} \times (\kappa_1 + h_1 + 2)(\kappa_2 + h_2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.48)$$

onde $\lambda_{\pm} = \lambda_1 \pm \lambda_2$ e $\kappa_{\pm} = \kappa_1 \pm \kappa_2$. Os coeficientes C^+ and D^+ se relacionam com A^+ e B^+ por simples mudanças em seus argumentos

$$C^+(\kappa_1, \kappa_2, h_1, h_2) = B^+(\kappa_1 - 1, \kappa_2 - 1, -(h_1 + 1), -(h_2 - 1)), \quad (3.49)$$

$$D^+(\kappa_1, \kappa_2, h_1, h_2) = A^+(\kappa_1 - 1, \kappa_2 + 1, -(h_1 + 1), -(h_2 - 1)), \quad (3.50)$$

e os coeficientes dos operadores de abaixamento são dados por

$$\begin{aligned} A^-(\kappa_1, \kappa_2, h_1, h_2) &= D^+(\kappa_1 + 1, \kappa_2 + 1, h_1 - 1, h_2 + 1), \\ B^-(\kappa_1, \kappa_2, h_1, h_2) &= C^+(\kappa_1 + 1, \kappa_2 - 1, h_1 - 1, h_2 + 1), \\ C^-(\kappa_1, \kappa_2, h_1, h_2) &= B^+(\kappa_1 - 1, \kappa_2 + 1, h_1 - 1, h_2 + 1), \\ D^-(\kappa_1, \kappa_2, h_1, h_2) &= A^+(\kappa_1 - 1, \kappa_2 - 1, h_1 - 1, h_2 + 1). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Note que a ação dos operadores $X'_{3,4}$, $X'_{7,8}$ acopla representações irredutíveis das subálgebras $\mathfrak{su}(2)$.

3.1.3 O Grupo Unitário Simplético

A forma bilinear definida na equação 2.106

$$x_1 y_{n+1} - x_{n+1} y_1 + \dots + x_n y_{2n} - x_{2n} y_n,$$

é satisfeita se ao definirmos o produto escalar entre os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} utilizarmos

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix},$$

que é a métrica simplética.

Portanto, dados os vetores $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{2n})^T$ e $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{2n})^T$, sua forma bilinear é dada por $\mathbf{x}^T J \mathbf{y}$ através do produto usual de matrizes. O conjunto de matrizes g que atuam sobre \mathbf{x} e \mathbf{y} , tal que $\mathbf{x}' = g\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}' = g\mathbf{y}$ possuem invariante a forma bilinear dada acima,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'^T J \mathbf{y}' &= \mathbf{x}^T J \mathbf{y}, \\ \mathbf{x}'^T g^T J g \mathbf{y} &= \mathbf{x}^T J \mathbf{y}, \end{aligned} \tag{3.52}$$

forma o grupo simplético $Sp(2n)$ de matrizes g $2n \times 2n$, tal que g satisfaz

$$g^T J g = J. \tag{3.53}$$

Tanto a equação 3.53 quanto a forma bilinear definida na equação 2.106 definem o grupo simplético. Uma das formas reais deste grupo é a forma real *unitária* (compacta) $USp(2n)$, obtida a partir da intersecção

$$USp(2n) \equiv Sp(2n, \mathbb{C}) \cap U(2n), \tag{3.54}$$

sendo este o grupo de que nos ocupamos em investigar durante este trabalho.

Para investigarmos o grupo $USp(2n)$, devemos investigar concomitantemente suas propriedades simpléticas e unitárias.

Num grupo $U(2n)$ as matrizes devem satisfazer à

$$g^\dagger g = gg^\dagger = \mathbf{1}_{2n}. \quad (3.55)$$

De forma que as matrizes g do grupo $USp(2n)$ devem satisfazer ambas as equações 3.55 e 3.53.

Nesta secção encontraremos a quantidade de parâmetros independentes da matriz g pertencente ao grupo $USp(2n)$. Para tal, multiplicaremos a equação 3.53 à direita por g^\dagger

$$g^T J g g^\dagger = J g^\dagger, \quad (3.56)$$

mas $g g^\dagger = \mathbf{1}_{2n}$, portanto

$$g^T J = J g^\dagger. \quad (3.57)$$

Neste ponto definiremos uma matriz g , $2n \times 2n$, por blocos $n \times n$

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

onde $\{A, B, C, D\}$ são seus blocos $n \times n$. Substituímos esta matriz na equação 3.57,

$$\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\dagger & C^\dagger \\ B^\dagger & D^\dagger \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

tal que sua solução fica

$$\begin{pmatrix} -C^T & A^T \\ -D^T & B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^\dagger & D^\dagger \\ -A^\dagger & -C^\dagger \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

que implica em

$$B = -C^*, \quad D = A^*. \quad (3.61)$$

Portanto g assume a forma geral

$$g = \begin{pmatrix} A & -C^* \\ C & A^* \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

A equação 3.62 foi obtida da equação 3.53, ou seja, resta-nos substituir a equação 3.62 na equação 3.55 para obtermos o número de parâmetros do grupo $\text{USp}(2n)$. Resolvendo a equação 3.55 da esquerda obtemos duas matrizes $n \times n$

$$-C^T A + A^T C = 0 \rightarrow C_{ki} A_{kj} = A_{ki} C_{kj}, \quad (3.63)$$

$$A^\dagger A + C^\dagger C = 1_n \rightarrow A_{ki}^* A_{kj} + C_{ki}^* C_{kj} = \delta_{ij}. \quad (3.64)$$

A equação 3.63 é simétrica se $i \neq j$ e nula se $i = j$, portanto possui $n(n-1)$ equações reais ou $n(n-1)/2$ equações complexas.

A equação 3.64 é simétrica se $i \neq j$ e real se $i = j$, portanto possui $n + n(n-1)$ equações reais.

Portanto o número de parâmetros reais do grupo $\text{USp}(4)$ é dado por

$$4n^2 - [n(n-1) + n(n-1) + n] = n(2n+1). \quad (3.65)$$

3.2 Elementos de matriz do grupo $Sp(4, \mathbb{C})$

Nesta secção calcularemos a forma geral de um elemento do grupo $Sp(4, \mathbb{C})$ para a representação fundamental.

O elemento geral g do grupo $Sp(4, \mathbb{C})$ é dado pela exponencial $g = \exp(X)$, onde X é a matriz

$$X = \sum_{i=1}^{10} x_i X'_i, \quad (3.66)$$

dada explicitamente por

$$X = \begin{pmatrix} -x_1 & -x_4 & \sqrt{2}x_{10} & x_8 \\ -x_3 & -x_2 & x_8 & \sqrt{2}x_6 \\ \sqrt{2}x_9 & x_7 & x_1 & x_3 \\ x_7 & \sqrt{2}x_5 & x_4 & x_2 \end{pmatrix}, \quad (3.67)$$

onde $\{x_1, x_9, x_{10}\}$ e $\{x_2, x_5, x_6\}$ referem-se às subálgebras $su(2)$ e $\{x_3, x_4, x_7, x_8\}$ são coordenadas referentes às raízes puras da álgebra $sp(4, \mathbb{C})$. Ressaltamos que $\{x_i\} \in \mathbb{C}$.

O resultado da exponencial pode ser expressado por

$$g = \frac{2}{\sqrt{E_2}} \left\{ I_4 \cosh \frac{\Theta^+}{2} + X \frac{2}{\Theta^-} \sinh \frac{\Theta^-}{2} + Mp \left(\cosh \frac{\Theta^+}{2} - \cosh \frac{\Theta^-}{2} \right) + \frac{\Theta^+}{2} MP \left(\frac{2}{\Theta^+} \sinh \frac{\Theta^+}{2} - \frac{2}{\Theta^-} \sinh \frac{\Theta^-}{2} \right) \right\}, \quad (3.68)$$

onde

$$\Theta^\pm = \sqrt{E_1 \pm 2\sqrt{E_2}}, \quad (3.69)$$

e E_1 e E_2 são dados por polinômios,

$$E_1 = 2(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3x_4 + 2x_5x_6 + 2x_7x_8 + 2x_9x_{10}), \quad (3.70)$$

$$E_2 = \left(\frac{E_1}{2}\right)^2 - 4(x_1x_2 + x_3x_4 + x_7x_8)^2 + 4(E_3 + \tilde{E}_3), \quad (3.71)$$

sendo E_3 o polinômio abaixo

$$E_3 = (2x_5x_9x_8^2 + 2x_1x_2x_3x_4 + 2\sqrt{2}x_2x_3x_7x_{10} + 2\sqrt{2}x_1x_4x_6x_7 - 2x_6x_9x_4^2 - 2x_5x_6x_9x_{10} - x_9x_{10}x_2^2 - x_5x_6x_1^2), \quad (3.72)$$

e \tilde{E}_3 é obtido por uma permutação nos argumentos do polinômio E_3

$$\tilde{E}_3 = E_3(x_1, x_2, x_4, x_3, x_6, x_5, x_8, x_7, x_{10}, x_9). \quad (3.73)$$

I_4 e X são respectivamente a identidade 4×4 e 3.67. Mp e MP são matrizes cujos elementos são polinômios. Mp possui forma geral dada por

$$Mp = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p_{11} & p_{21} & 0 & -p_{23} \\ p_{21} & \frac{1}{2}(2\sqrt{E_2} - p_{11}) & p_{23} & 0 \\ 0 & p_{23} & \frac{1}{2}p_{11} & p_{21} \\ -p_{23} & 0 & p_{21} & \frac{1}{2}(2\sqrt{E_2} - p_{11}) \end{pmatrix}, \quad (3.74)$$

e seus elementos são

$$p_{11} = x_1^2 - x_2^2 + 2(x_9x_{10} - x_5x_6) + \sqrt{E_2}, \quad (3.75)$$

$$p_{21} = x_1x_3 + x_2x_3 + \sqrt{2}(x_7x_6 + x_8x_9), \quad (3.76)$$

$$p_{23} = x_1x_7 - x_2x_7 + \sqrt{2}(x_3x_5 - x_4x_9), \quad (3.77)$$

note que as estruturas de p_{21} e p_{23} são semelhantes.

Os elementos \tilde{p}_{ij} são obtidos por uma permutação nos argumentos de p_{ij}

$$\tilde{p}_{ij} = p_{ij}(x_1, x_2, x_4, x_3, x_6, x_5, x_8, x_7, x_{10}, x_9). \quad (3.78)$$

MP possui forma geral dada por

$$MP = \begin{pmatrix} -P_{11} & -\tilde{P}_{21} & \tilde{P}_{31} & \tilde{P}_{32} \\ -P_{21} & -P_{22} & \tilde{P}_{32} & \tilde{P}_{42} \\ P_{31} & P_{32} & P_{11} & P_{21} \\ P_{32} & P_{42} & \tilde{P}_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.79)$$

e seus elementos diagonais são

$$P_{11} = x_1(x_1^2 - x_2^2) + 2x_3x_4(x_1 + x_2) + 2x_7x_8(x_1 - x_2) + 2\sqrt{2}(x_5x_8x_3 + x_7x_6x_4) + x_1(2x_9x_{10} - 2x_5x_6 + \sqrt{E_2}), \quad (3.80)$$

$$P_{22} = x_2(x_2^2 - x_1^2) + 2x_3x_4(x_1 + x_2) + 2x_7x_8(x_2 - x_1) + 2\sqrt{2}(x_3x_{10}x_7 + x_4x_8x_9) + x_2(2x_5x_6 - 2x_9x_{10} + \sqrt{E_2}), \quad (3.81)$$

note a semelhança em suas estruturas. Os elementos restantes são dados como

$$P_{21} = x_3[(x_1 + x_2)^2 + 2x_5x_6 + 2x_9x_{10} + \sqrt{E_2}] + 2\sqrt{2}(x_2x_8x_9 + x_1x_7x_6) - 4x_4x_6x_9, \quad (3.82)$$

$$P_{32} = x_7[(x_1 - x_2)^2 + 2x_5x_6 + 2x_9x_{10} + \sqrt{E_2}] + 2\sqrt{2}(x_2x_4x_9 + x_1x_3x_5) + 4x_8x_5x_9, \quad (3.83)$$

sendo que os elementos P_{21} e P_{32} possuem estrutura semelhante, o mesmo acontecendo com P_{31} e P_{42}

$$P_{31} = \sqrt{2}x_9(x_1^2 - x_2^2 + 2x_3x_4 - 2x_5x_6 + 2x_7x_8 + 2x_9x_{10} + \sqrt{E_2}) - 2\sqrt{2}(x_3^2x_5 + x_6x_7^2) + 4x_2x_3x_7,$$

$$P_{42} = \sqrt{2}x_5(x_2^2 - x_1^2 + 2x_3x_4 + 2x_5x_6 + 2x_7x_8 - 2x_9x_{10} + \sqrt{E_2}) + 2\sqrt{2}(x_{10}x_7^2 - x_9x_4^2) + 4x_7x_4x_1,$$

sendo \tilde{P}_{ij} dados por uma permutação nos argumentos de P_{ij}

$$\tilde{P}_{ij} = P_{ij}(x_1, x_2, x_4, x_3, x_6, x_5, x_8, x_7, x_{10}, x_9). \quad (3.84)$$

Certos polinômios de Mp e MP guardam semelhanças entre suas estruturas, conforme afirmamos nos parágrafos acima. Estes polinômios ocupam posições referentes às subálgebras da álgebra $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$. Por exemplo, P_{11} e P_{22} estão na diagonal, posição dos elementos do núcleo de Cartan. P_{21} e P_{32} estão nas posições das raízes puras da álgebra $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$. P_{31} e P_{42} estão nas posições das raízes da subálgebra $\mathfrak{su}(2)$. Uma possível conclusão é que elementos de matriz cujas raízes são semelhantes possuem polinômios semelhantes.

Já a relação entre os polinômios

$$P_{ji} = \tilde{P}_{ij} = P_{ij}(x_1, x_2, x_4, x_3, x_6, x_5, x_8, x_7, x_{10}, x_9)$$

pode ser verificada pela as matrizes Mp e MP e por 3.67. Conforme 3.67, x_{i+1} é a coordenada do elemento de matriz transposto ao elemento de coordenada x_i para $i = 3, 5, 7$ e 9 . Sendo assim, um polinômio cuja posição na matriz é transposta à de outro polinômio, deve ter estrutura semelhante àquele, mas sofre uma espécie de operação transposta ou permutação entre suas coordenadas referentes à elementos de matriz não diagonais.

Vamos verificar como fica uma matriz do espaço quociente

$$\frac{Sp(4, \mathbb{C})}{SU(2) \otimes SU(2)}.$$

Este espaço é calculado pela substituição de

$$x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = x_9 = x_{10} = 0,$$

na equação 3.68. Nesta substituição, a matriz fica

$$g = I_4 \cosh \frac{\Theta^+}{2} + X \frac{2}{\Theta^+} \sinh \frac{\Theta^+}{2}$$

$$g = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\Theta^+}{2} & -x_4 \frac{2}{\Theta^+} \sinh \frac{\Theta^+}{2} & 0 & x_8 \frac{2}{\Theta^+} \sinh \frac{\Theta^+}{2} \\ -x_3 \frac{2}{\Theta^+} \sinh \frac{\Theta^+}{2} & \cosh \frac{\Theta^+}{2} & x_8 \frac{2}{\Theta^+} \sinh \frac{\Theta^+}{2} & 0 \\ 0 & x_7 \frac{2}{\Theta^+} \sinh \frac{\Theta^+}{2} & \cosh \frac{\Theta^+}{2} & x_3 \frac{2}{\Theta^+} \sinh \frac{\Theta^+}{2} \\ x_7 \frac{2}{\Theta^+} \sinh \frac{\Theta^+}{2} & 0 & x_4 \frac{2}{\Theta^+} \sinh \frac{\Theta^+}{2} & \cosh \frac{\Theta^+}{2} \end{pmatrix},$$

onde $\Theta^+ = 2\sqrt{x_3x_4 + x_7x_8}$ e

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -x_4 & 0 & x_8 \\ -x_3 & 0 & x_8 & 0 \\ 0 & x_7 & 0 & x_3 \\ x_7 & 0 & x_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Devemos ressaltar que esta é uma aproximação e que este espaço quociente somente é válido na região ao redor do elemento identidade.

3.3 Decomposição de Gauss

A exponencial da secção anterior é muito complicada de ser manipulada. Nesta secção faremos a decomposição de Gauss, para o grupo $\text{Sp}(4, \mathbb{C})$. Esta decomposição é útil para a ação do grupo num estado coerente, para a parametrização do grupo simplético $\text{Sp}(2n, \mathbb{C})$ levando às coordenadas do grupo $\text{USp}(2n)$ e também por tornar simples a representação do grupo em dimensões superiores à fundamental, já que basta exponenciar as matrizes da álgebra na representação e depois multiplicar pelas coordenadas de Gauss.

Os enunciados abaixo estão demonstrados em [19].

1. Os operadores Abelianos da álgebra formam a subálgebra de Cartan e sua exponencial forma o subgrupo Abeliano.
2. Os operadores positivos da álgebra formam uma subálgebra positiva e sua exponencial o subgrupo positivo.
3. Os operadores negativos da álgebra formam uma subálgebra negativa e sua exponencial o subgrupo negativo.

Da decomposição de Cartan, sabemos que toda álgebra de Lie pode ser escrita numa base tal que, todos os seus operadores se dividem em operadores positivos, negativos e Abelianos. Portanto, obtemos o grupo todo pelo produto entre os subgrupos positivo, abeliano e negativo, PDN , sendo P o subgrupo positivo, D o subgrupo abeliano e N o subgrupo negativo. Abaixo, temos a decomposição de Gauss para o grupo $Sp(4, \mathbb{C})$,

$$g = \exp \left(\sum_{i=3}^9 x_i X'_i \right) \exp \left(\sum_{j=1}^2 x_j X'_j \right) \exp \left(\sum_{k=4}^{10} x_k X'_k \right), \quad (3.85)$$

$$i = 3, 5, 7, 9, \quad j = 1, 2, \quad k = 4, 6, 8, 10, \quad (3.86)$$

onde, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}$.

Nosso objetivo é simplificar ao máximo a exponencial da álgebra. Para isso, faremos a decomposição *um-a-um* da decomposição de Gauss. Desta decomposição obteremos um novo sistema de coordenadas, às quais chamamos de coordenadas de Gauss. A decomposição *um-a-um* consiste em escrever a exponencial de uma soma como um produto de exponenciais

$$\exp \left(\sum_{i=3}^9 x_i X'_i \right) = \prod_{i=3}^9 \exp(y_i X'_i). \quad (3.87)$$

As relações entre os sistemas de coordenadas \mathbf{y} e \mathbf{x} são calculadas através da de-

composição de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH), cujos resultados são dados abaixo

$$y_3 = x_3, \quad y_5 = x_5, \quad (3.88)$$

$$y_7 = x_7 - \frac{x_3 x_5}{\sqrt{2}}, \quad (3.89)$$

$$y_9 = x_9 - \frac{x_3 x_7}{\sqrt{2}} - \frac{x_3^2 x_5}{3}, \quad (3.90)$$

são as coordenadas das raízes positivas,

$$y_4 = x_4, \quad y_6 = x_6, \quad (3.91)$$

$$y_8 = x_8 - \frac{x_4 x_6}{\sqrt{2}}, \quad (3.92)$$

$$y_{10} = x_{10} - \frac{x_4 x_8}{\sqrt{2}} + \frac{x_4^2 x_6}{3}, \quad (3.93)$$

são as coordenadas das raízes negativas e

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad (3.94)$$

são as coordenadas do núcleo de Cartan onde, $\mathbf{y} \in \mathbb{C}$.

Desta forma, a matriz do grupo $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{C})$ pode ser escrita como

$$g = \left[\prod_{i=3}^9 \exp(y_i X_i) \right] \left[\exp(y_1 X_1 + y_2 X_2) \right] \left[\prod_{j=10}^4 \exp(y_j X_j) \right]. \quad (3.95)$$

Para verificarmos as transformações de coordenadas acima, devemos realizar a decomposição de BCH (Baker-Campbell-Hausdorff), resumida abaixo.

Dada p uma álgebra de Lie e sendo $\alpha, \beta \in p$, podemos sempre escrever a exponencial $e^{\alpha+\beta}$ em forma de produto de exponenciais

$$e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta e^{c_1} e^{c_2} \dots, \quad (3.96)$$

sendo que c_1, c_2, \dots também pertencem à p . A sequência de produtos é finita para o caso de álgebras nilpotentes. Para o caso das subálgebras positiva e negativa da álgebra $\mathfrak{sp}(4)$, o produto acaba em c_2 , já que estas subálgebras são nilpotentes. As fórmulas de c_1 e c_2 são, de acordo com [14]

$$c_1 = -\frac{1}{2}[\alpha, \beta], \quad (3.97)$$

$$c_2 = -\frac{1}{3}[[\alpha, \beta], \beta] - \frac{1}{6}[[\alpha, \beta], \alpha], \quad (3.98)$$

as fórmulas acima e para um elemento c_k qualquer é dado em [22].

Podemos verificar explicitamente a decomposição BCH na equação 3.95 calculando

$$\exp\left\{\sum_{i=3}^9 x_i X_i\right\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_3 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}x_9 - \frac{\sqrt{2}}{6}x_5x_3^2 & x_7 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3x_5 & 1 & x_3 \\ x_7 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3x_5 & \sqrt{2}x_5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.99)$$

$$\prod_{i=3}^9 \exp\{y_i X_i\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -y_3 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}y_9 + y_3y_7 & y_7 + \sqrt{2}y_3y_5 & 1 & y_3 \\ y_7 & \sqrt{2}y_5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.100)$$

em 3.100 fazemos a transformação de coordenadas dada nas equações 3.88-3.90 para obtermos

$$\prod_{i=3}^9 \exp\{y_i X_i\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_3 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}x_9 - \frac{\sqrt{2}}{6}x_5x_3^2 & x_7 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3x_5 & 1 & x_3 \\ x_7 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3x_5 & \sqrt{2}x_5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.101)$$

que é idêntica à equação 3.99, ou seja:

$$\exp \left\{ \sum_{i=3}^9 x_i X_i \right\} = \prod_{i=3}^9 \exp \{ y_i X_i \}. \quad (3.102)$$

Análise semelhante pode ser feita para o subgrupo negativo.

As matrizes X_1 e X_2 são diagonais, e sua exponencial é dada pela exponencial de seus elementos diagonais

$$\exp x_1 X_1 + x_2 X_2 = \begin{pmatrix} e^{-x_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{x_2} \end{pmatrix}, \quad (3.103)$$

no caso das matrizes diagonais, tanto faz escrever a exponencial da soma, quanto o produto de exponenciais, eles são idênticos, já que este é um subgrupo Abelian.

Nomeando

$$P = \prod_{i=3}^9 \exp \{ y_i X_i \}, \quad N = \prod_{j=10}^4 \exp \{ y_j X_j \} \quad \text{e} \quad D = \exp \{ y_1 X_1 + y_2 X_2 \},$$

obtemos uma matriz arbitrária do grupo $\text{Sp}(4, \mathbb{C})$, por

$$g = PDN.$$

3.4 Coordenadas renormalizadas do grupo $\text{USp}(4)$

Na secção anterior, encontramos as coordenadas de Gauss para o grupo $\text{Sp}(4, \mathbb{C})$. Estas coordenadas nos permitiram decompor a exponencial da soma num produto de exponenciais. Nesta secção definiremos um sistema de coordenadas que simplificam ao máximo a matriz geral do grupo $\text{Sp}(4, \mathbb{C})$. De posse destas coordenadas, imporemos unitariedade à matriz simplética para obter o que chamamos de *coordenadas*

renormalizadas do grupo $USp(4)$.

As coordenadas do subgrupo positivo são

$$z_3 = y_3, \quad z_5 = y_5, \quad z_7 = y_7, \quad z_9 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_9 - y_3 y_7), \quad (3.104)$$

as do subgrupo negativo são

$$z_4 = y_4, \quad z_6 = y_6, \quad z_8 = y_8, \quad z_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_{10} + y_4 y_8), \quad (3.105)$$

e as coordenadas diagonais ficam,

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = y_2, \quad (3.106)$$

onde, $z \in \mathbb{C}$.

Neste sistema de coordenadas, as matrizes P , D e N tomam as formas

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -z_3 & 1 & 0 & 0 \\ z_9 & z_7 + \sqrt{2}z_3 z_5 & 1 & z_3 \\ z_7 & \sqrt{2}z_5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.107)$$

a parte negativa fica

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -z_4 & z_{10} & z_8 - \sqrt{2}z_4 z_6 \\ 0 & 1 & z_8 & \sqrt{2}z_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z_4 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.108)$$

e a matriz diagonal é escrita como

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}, \quad (3.109)$$

onde

$$\delta_i = e^{z_i}, \quad i = 1, 2. \quad (3.110)$$

O produto PDN resulta em

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta_1} & ; & -z_4 \frac{1}{\delta_1} & ; & \\ \frac{-z_3}{\delta_1} & ; & z_4 \frac{z_3}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} & ; & \\ \frac{z_9}{\delta_1} & ; & -z_4 \frac{z_9}{\delta_1} + \frac{z_7 + \sqrt{2}z_3z_5}{\delta_2} & ; & \\ \frac{z_7}{\delta_1} & ; & -z_4 \frac{z_7}{\delta_1} + \frac{\sqrt{2}z_5}{\delta_2} & ; & \\ \\ z_{10} \frac{1}{\delta_1} & ; & & ; & \\ -z_{10} \frac{z_3}{\delta_1} + z_8 \frac{1}{\delta_2} & ; & & ; & \\ z_{10} \frac{z_9}{\delta_1} + z_8 \frac{(z_7 + \sqrt{2}z_3z_5)}{\delta_2} + \delta_1 + \delta_2 z_4 z_3 & ; & & ; & \\ z_{10} \frac{z_7}{\delta_1} + z_8 \frac{\sqrt{2}z_5}{\delta_2} + \delta_2 z_4 & ; & & ; & \\ \\ (z_8 - \sqrt{2}z_4z_6) \frac{1}{\delta_1} & & & & \\ -(z_8 - \sqrt{2}z_4z_6) \frac{z_3}{\delta_1} + \sqrt{2}z_6 \frac{1}{\delta_2} & & & & \\ (z_8 - \sqrt{2}z_4z_6) \frac{z_9}{\delta_1} + \sqrt{2}z_6 \frac{(z_7 + \sqrt{2}z_3z_5)}{\delta_2} + \delta_2 z_3 & & & & \\ (z_8 - \sqrt{2}z_4z_6) \frac{z_7}{\delta_1} + \sqrt{2}z_6 \frac{\sqrt{2}z_5}{\delta_2} + \delta_2 & & & & \end{pmatrix}. \quad (3.111)$$

Para simplificar nossa notação definiremos quatro vetores coluna em termos das

colunas da matriz P

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 1; & -z_3; & z_9; & z_7 \end{bmatrix}^T, \quad (3.112)$$

$$|2\rangle = \begin{bmatrix} 0; & 1; & z_7 + \sqrt{2}z_3z_5; & \sqrt{2}z_5 \end{bmatrix}^T, \quad (3.113)$$

$$|3\rangle = \begin{bmatrix} 0; & 0; & 1; & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (3.114)$$

$$|4\rangle = \begin{bmatrix} 0; & 0; & z_3; & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (3.115)$$

Verificamos na equação 3.111 que suas colunas podem ser escritas em função dos vetores acima

$$|C_1\rangle = \frac{|1\rangle}{\delta_1}, \quad |C_2\rangle = -z_4 \frac{|1\rangle}{\delta_1} + \frac{|2\rangle}{\delta_2}, \quad (3.116)$$

$$|C_3\rangle = z_{10} \frac{|1\rangle}{\delta_1} + z_8 \frac{|2\rangle}{\delta_2} + \delta_1 |3\rangle + \delta_2 z_4 |4\rangle, \quad (3.117)$$

$$|C_4\rangle = (z_8 - \sqrt{2}z_4z_6) \frac{|1\rangle}{\delta_1} + \sqrt{2}z_6 \frac{|2\rangle}{\delta_2} + \delta_2 |4\rangle. \quad (3.118)$$

Vale salientar que grupos simpléticos de dimensões superiores possibilitam abordagem análoga a esta que utilizamos. Ou seja, podemos definir vetores a partir das colunas da matriz positiva do grupo e em função destes vetores escrever as colunas da matriz do grupo.

O grupo $USp(4)$ é obtido da imposição da condição de unitariedade ao grupo $Sp(4, \mathbb{C})$. Em termos da matriz g , isto significa obter as coordenadas do subgrupo negativo como funções das coordenadas do subgrupo positivo. Estas funções são obtidas a partir da ortonormalidade das colunas de uma matriz unitária, que

podemos verificar em

$$A^\dagger A = 1_n \Rightarrow A_{ki}^* A_{kj} = \delta_{ij},$$

para o produto escalar complexo, ou seja $\langle C_i, C_j \rangle = 0$ e $\langle C_i, C_i \rangle = 1$.

Do módulo da coluna 1 obtemos o módulo de δ_1

$$\langle C_1, C_1 \rangle = 1, \quad \frac{\langle 1, 1 \rangle}{\delta_1^* \delta_1} = 1,$$

$$|\delta_1|^2 = \langle 1, 1 \rangle, \Rightarrow \delta_1 = |\delta_1| e^{i\phi_1} \quad (3.119)$$

como δ_1 é um número complexo, somente sua fase ϕ_1 é uma variável independente real, já que seu módulo depende das variáveis $\{z_3, z_3^*, z_7, z_7^*, z_9, z_9^*\}$.

Do produto escalar complexo entre as colunas 1 e 2 obtemos z_4

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_2 \rangle = 0, \quad -z_4 \frac{\langle 1, 1 \rangle}{|\delta_1|^2} + \frac{\langle 1, 2 \rangle}{\delta_1^* \delta_2} = 0 \\ \Rightarrow z_4 = \frac{\langle 1, 2 \rangle}{\delta_1^* \delta_2}, \end{aligned} \quad (3.120)$$

que juntamente com z_8 são funções de $\{\phi_1, \phi_2, z_3, z_3^*, z_5, z_5^*, z_7, z_7^*, z_9, z_9^*\}$. Isto é devido à z_4 e z_8 serem coordenadas referentes às raízes α_4 e α_8 , que contém componentes nos eixos 1 e 2 do diagrama de Van der Waerden.

O módulo de δ_2 é obtido a partir do módulo da coluna 2

$$\langle C_2, C_2 \rangle = 1$$

$$|\delta_2|^2 = \langle 2, 2 \rangle - \frac{\langle 2, 1 \rangle \langle 1, 2 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle}, \Rightarrow \delta_2 = |\delta_2| e^{i\phi_2} \quad (3.121)$$

e $|\delta_2|$ é uma função de $\{z_3, z_3^*, z_5, z_5^*, z_7, z_7^*, z_9, z_9^*\}$, sendo que somente a fase ϕ_2 é uma variável independente real em δ_2 .

A partir do produto escalar entre as colunas 2 e 4 obtemos z_6

$$\langle C_2, C_4 \rangle = 0,$$

$$\Rightarrow z_6 = -\frac{\delta_2}{\sqrt{2}\delta_2^*} \left(\langle 2, 4 \rangle - \frac{\langle 2, 1 \rangle \langle 1, 4 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \right), \quad (3.122)$$

z_6 independe de ϕ_1 , já que é uma coordenada referente à raiz α_6 , cuja coordenada no eixo 1 é nula.

Do produto escalar entre as colunas 1 e 4 obtemos z_8

$$\langle C_2, C_4 \rangle = 0,$$

$$\Rightarrow z_8 = -\frac{\delta_2}{\delta_1^*} \langle 1, 4 \rangle. \quad (3.123)$$

Por fim, z_{10} é obtido a partir do produto entre as colunas 1 e 4

$$\langle C_1, C_4 \rangle = 0,$$

$$\Rightarrow z_{10} = -\frac{\delta_1}{\delta_1^*} \langle 1, 3 \rangle, \quad (3.124)$$

z_{10} independe de ϕ_2 , pois é uma coordenada referente à raiz α_{10} , cuja coordenada em 2 é nula.

As parametrizações acima são denominadas como *coordenadas renormalizadas do grupo $USp(4)$* . Estas funções são analíticas (sem pólos).

Vale frisar que a parametrização dos $|\delta_i|^2$, dadas em termos dos produtos entre os vetores $|A\rangle$, $A = 1, 2, 3, 4$, será independente do sistema de coordenadas escolhido, já que a definição desses vetores é em termos das colunas da matriz P e não de suas coordenadas.

Neste sistema de coordenadas a matriz g fica

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta_1} & ; & -\frac{\Delta}{|\delta_1|^2 \delta_2} & ; & -\frac{z_9^*}{\delta_1^*} & ; & z_9^* \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2 \delta_2^*} - \frac{z_7^* + \sqrt{2} z_3^* z_5^*}{\delta_2^*} \\ \frac{-z_3}{\delta_1} & ; & z_3 \frac{\Delta}{|\delta_1|^2 \delta_2} + \frac{1}{\delta_2} & ; & -\frac{z_7^*}{\delta_1^*} & ; & z_7^* \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2 \delta_2^*} - \frac{\sqrt{2} z_5^*}{\delta_2^*} \\ \frac{z_9}{\delta_1} & ; & -z_9 \frac{\Delta}{|\delta_1|^2 \delta_2} + \frac{z_7 + \sqrt{2} z_3 z_5}{\delta_2} & ; & \frac{1}{\delta_1^*} & ; & -\frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2 \delta_2^*} \\ \frac{z_7}{\delta_1} & ; & -z_7 \frac{\Delta}{|\delta_1|^2 \delta_2} + \frac{\sqrt{2} z_5}{\delta_2} & ; & -\frac{z_3^*}{\delta_1^*} & ; & z_3^* \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2 \delta_2^*} + \frac{1}{\delta_2^*} \end{pmatrix}, \quad (3.125)$$

onde,

$$\Delta = \langle 1, 2 \rangle = -z_3^* + z_9^*(z_7 + \sqrt{2} z_3 z_5) + \sqrt{2} z_7^* z_5, \quad (3.126)$$

$$\delta_1 = |\delta_1| e^{i\phi_1}, \quad |\delta_1| = \sqrt{1 + |z_3|^2 + |z_7|^2 + |z_9|^2}, \quad (3.127)$$

$$\delta_2 = |\delta_2| e^{i\phi_2}, \quad |\delta_2| = \sqrt{1 + |z_7 + \sqrt{2} z_3 z_5|^2 + 2|z_5|^2 - \frac{|\Delta|^2}{|\delta_1|^2}}. \quad (3.128)$$

Para a representação fundamental as equações de z_6 , z_8 e z_{10} são desnecessárias. De acordo com 3.62, somente as duas primeiras colunas são suficientes para representarmos a matriz do grupo $\text{USp}(4)$. Assim, bastam-nos as coordenadas $|\delta_1|^2$, $|\delta_2|^2$ e z_4 , as quais são calculadas pela ortonormalidade das 2 primeiras colunas da matriz unitária simplética, conforme verificado nas equações acima. Tal situação se repete para grupos $\text{USp}(2n)$. O número de parâmetros do subgrupo negativo é obtido a partir de 3.63, da qual obtemos a quantidade de equações complexas, dadas por $n(n-1)/2$. A partir das n primeiras colunas e suas relações de ortonormalidade é possível calcularmos as coordenadas renormalizadas para os grupos $\text{USp}(2n)$.

3.5 Regras de multiplicação do grupo $USp(4)$

Nesta secção encontraremos as regras de multiplicação do grupo $USp(4)$. Com excessão do grupo $SO(2)$, estas regras são complicadas de se encontrar. Nós apresentaremos este resultado utilizando os elementos da matriz resultante do produto entre dois elementos do grupo, já que em termos das coordenadas este resultado seria muito complicado de apresentar. O uso de computação simbólica é indispensável.

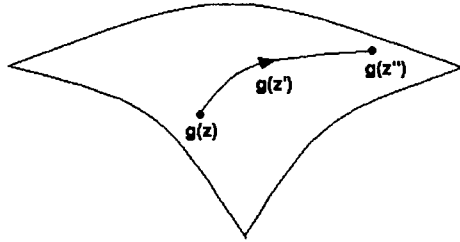


Figura 3.2: Representação gráfica das regras de multiplicação

Assim, dado

$$g''(\phi''_1, \phi''_2, \mathbf{z}'', \mathbf{z}''^*) = g(\phi_1, \phi_2, \mathbf{z}, \mathbf{z}^*)g'(\phi'_1, \phi'_2, \mathbf{z}', \mathbf{z}'^*),$$

onde $g''(\phi''_1, \phi''_2, \mathbf{z}'', \mathbf{z}''^*)$, $g'(\phi'_1, \phi'_2, \mathbf{z}', \mathbf{z}'^*)$, $g(\phi_1, \phi_2, \mathbf{z}, \mathbf{z}^*) \in USp(4)$ e possuem a forma geral

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta_1}; & -\frac{\Delta}{|\delta_1|^2\delta_2}; & & -\frac{z_9}{\delta_1^*}; & z_9^* \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2\delta_2^*} - \frac{z_7^* + \sqrt{2}z_3^*z_5^*}{\delta_2^*} \\ \frac{-z_3}{\delta_1}; & z_3 \frac{\Delta}{|\delta_1|^2\delta_2} + \frac{1}{\delta_2}; & & -\frac{z_7^*}{\delta_1^*}; & z_7^* \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2\delta_2^*} - \frac{\sqrt{2}z_5^*}{\delta_2^*} \\ \frac{z_9}{\delta_1}; & -z_9 \frac{\Delta}{|\delta_1|^2\delta_2} + \frac{z_7 + \sqrt{2}z_3z_5}{\delta_2}; & & \frac{1}{\delta_1^*}; & -\frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2\delta_2^*} \\ \frac{z_7}{\delta_1}; & -z_7 \frac{\Delta}{|\delta_1|^2\delta_2} + \frac{\sqrt{2}z_5}{\delta_2}; & & -\frac{z_3^*}{\delta_1^*}; & z_3^* \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2\delta_2^*} + \frac{1}{\delta_2^*} \end{pmatrix},$$

encontramos as regras de multiplicação deste grupo isolando os parâmetros da matriz

$g''(\phi_1'', \phi_2'', \mathbf{z}'', \mathbf{z}''^*)$ e igualando-os aos da matriz $g(\phi_1, \phi_2, \mathbf{z}, \mathbf{z}^*)g'(\phi_1', \phi_2', \mathbf{z}', \mathbf{z}'^*)$.

O parâmetro ϕ_1 é isolado com simplicidade

$$\frac{g_{33}}{g_{11}} = e^{2i\phi_1} \rightarrow \phi_1'' = \frac{1}{2i} \ln \frac{(g'')_{33}}{(g'')_{11}}, \quad (3.129)$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2i} \ln \frac{(gg')_{33}}{(gg')_{11}}, \quad (3.130)$$

sendo

$$\phi_1'' = \Phi_1(\phi_1, \phi_2, \mathbf{z}, \mathbf{z}^*; \phi_1', \phi_2', \mathbf{z}', \mathbf{z}'^*), \quad (3.131)$$

omitiremos os argumentos, mas $g'' \equiv g''(\phi_1'', \phi_2'', \mathbf{z}'', \mathbf{z}''^*)$, $g' \equiv g'(\phi_1', \phi_2', \mathbf{z}', \mathbf{z}'^*)$ e $g \equiv g(\phi_1, \phi_2, \mathbf{z}, \mathbf{z}^*)$.

Já o parâmetro ϕ_2 , por estar na 2ª coluna, é mais complicado de ser isolado, já que está somado a um elemento da coluna 1,

$$\frac{g_{44} - \frac{g_{43}g_{34}}{g_{33}}}{g_{22} - \frac{g_{21}g_{12}}{g_{11}}} = e^{i\phi_2} \rightarrow \phi_2'' = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{g_{44}'' - \frac{g_{43}''g_{34}''}{g_{33}''}}{g_{22}'' - \frac{g_{21}''g_{12}''}{g_{11}''}} \right), \quad (3.132)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{(gg')_{44} - \frac{(gg')_{43}(gg')_{34}}{(gg')_{33}}}{(gg')_{22} - \frac{(gg')_{21}(gg')_{12}}{(gg')_{11}}} \right), \text{ sendo} \quad (3.133)$$

$$\phi_2'' = \Phi_2(\phi_1, \phi_2, \mathbf{z}, \mathbf{z}^*; \phi_1', \phi_2', \mathbf{z}', \mathbf{z}'^*). \quad (3.134)$$

Os parâmetros \mathbf{z} são obtidos por operações entre os elementos das 2 primeiras colunas. O parâmetro z_3 é isolado com simplicidade, pois é um elemento de matriz da 1ª coluna dividido apenas por δ_1 , ou seja, basta eliminarmos δ_1 do denominador

para isolarmos z_3

$$-\frac{g_{21}}{g_{11}} = z_3 \rightarrow z_3'' = -\frac{g_{21}''}{g_{11}'}, \quad (3.135)$$

$$\Phi_3 = -\frac{(gg')_{21}}{(gg')_{11}}, \text{ sendo} \quad (3.136)$$

$$z_3'' = \Phi_3(\phi_1, \phi_2, \mathbf{z}, \mathbf{z}^*; \phi_1', \phi_2', \mathbf{z}', \mathbf{z}'^*). \quad (3.137)$$

O parâmetro z_5 está na 2ª coluna e além de estar dividido por δ_2 , soma-se a um elemento da 1ª coluna, isto torna sua regra multiplicação um pouco mais complicada

$$\frac{g_{42} - \frac{g_{41}g_{12}}{g_{11}}}{g_{22} - \frac{g_{21}g_{12}}{g_{11}}} = z_5 \rightarrow z_5'' = \frac{g_{42}'' - \frac{g_{41}''g_{12}''}{g_{11}''}}{g_{22}'' - \frac{g_{21}''g_{12}''}{g_{11}''}} \quad (3.138)$$

$$\Phi_5 = \frac{(gg')_{42} - \frac{(gg')_{41}(gg')_{12}}{(gg')_{11}}}{(gg')_{22} - \frac{(gg')_{21}(gg')_{12}}{(gg')_{11}}}, \text{ sendo} \quad (3.139)$$

$$z_5'' = \Phi_5(\phi_1, \phi_2, \mathbf{z}, \mathbf{z}^*; \phi_1', \phi_2', \mathbf{z}', \mathbf{z}'^*). \quad (3.140)$$

Os parâmetros z_7 e z_9 estão na 1ª coluna e só precisamos eliminar δ_1 de seus denominadores para isolá-los. O parâmetro z_7 é

$$\frac{g_{41}}{g_{11}} = z_7 \rightarrow z_7'' = \frac{g_{41}''}{g_{11}'}, \quad (3.141)$$

$$\Phi_7 = \frac{(gg')_{41}}{(gg')_{11}}, \text{ sendo} \quad (3.142)$$

$$z_7'' = \Phi_7(\phi_1, \phi_2, \mathbf{z}, \mathbf{z}^*; \phi_1', \phi_2', \mathbf{z}', \mathbf{z}'^*), \quad (3.143)$$

e o parâmetro z_9 é

$$\frac{g_{31}}{g_{11}} = z_9 \rightarrow z_9'' = \frac{g_{31}''}{g_{11}''}, \quad (3.144)$$

$$\Phi_9 = \frac{(gg')_{31}}{(gg')_{11}}, \text{ sendo} \quad (3.145)$$

$$z_9'' = \Phi_9(\phi_1, \phi_2, \mathbf{z}, \mathbf{z}^*; \phi_1', \phi_2', \mathbf{z}', \mathbf{z}'^*). \quad (3.146)$$

As regras de multiplicação dos parâmetros \mathbf{z}^* podem ser obtidas tanto a partir de relações entre os elementos das colunas 3 e 4 quanto pela observação de que

$$g = \begin{pmatrix} A & -C^* \\ C & A^* \end{pmatrix},$$

para matrizes do grupo $\text{USp}(4)$, onde A e B são matrizes 2×2 .

Optaremos pelo processo análogo ao utilizado para obtermos \mathbf{z} , mas daremos simplesmente os resultados. Pela equação 3.125, é fácil ver que z_3 está em A e portanto z_3^* está na mesma posição de A^* ,

$$\Phi_4 = -\frac{(gg')_{43}}{(gg')_{33}}, \quad (3.147)$$

$$z_3''^* = \Phi_4(\phi_1, \phi_2, \mathbf{z}, \mathbf{z}^*; \phi_1', \phi_2', \mathbf{z}', \mathbf{z}'^*), \quad (3.148)$$

já z_5 está em C e portanto, z_5^* está em $-C^*$,

$$\Phi_6 = -\frac{(gg')_{24} - \frac{(gg')_{23}(gg')_{34}}{(gg')_{33}}}{(gg')_{44} - \frac{(gg')_{43}(gg')_{34}}{(gg')_{33}}}, \quad (3.149)$$

$$z_5''^* = \Phi_6(\phi_1, \phi_2, \mathbf{z}, \mathbf{z}^*; \phi_1', \phi_2', \mathbf{z}', \mathbf{z}'^*), \quad (3.150)$$

os parâmetros z_7 e z_9 estão em C e seus parâmetros conjugados, z_7^* e z_9^* estão em $-C^*$,

$$\Phi_8 = -\frac{(gg')_{23}}{(gg')_{33}}, \quad (3.151)$$

$$z_7''^* = \Phi_8(\phi_1, \phi_2, \mathbf{z}, \mathbf{z}^*; \phi'_1, \phi'_2, \mathbf{z}', \mathbf{z}'^*), \quad (3.152)$$

e o parâmetro z_9^* é dado por

$$\Phi_{10} = -\frac{(gg')_{13}}{(gg')_{33}}, \quad (3.153)$$

$$z_9''^* = \Phi_{10}(\phi_1, \phi_2, \mathbf{z}, \mathbf{z}^*; \phi'_1, \phi'_2, \mathbf{z}', \mathbf{z}'^*). \quad (3.154)$$

Nestas regras de multiplicação fica claro que os elementos de matriz tanto de g'' quanto de gg' obedecem à equação 3.125. As regras de multiplicação deste grupo foram obtidas para as coordenadas renormalizadas. Caso seja tomado um outro sistema de coordenadas, elas deverão ser diferentes, mas o método para obtê-las será o mesmo, portanto há um caminho para obtenção de regras de multiplicação, para um grupo qualquer e para diferentes sistemas de coordenadas de um mesmo grupo.

3.6 Operadores diferenciais da álgebra $usp(4)$

Definiremos nesta secção os operadores diferenciais da álgebra $usp(4)$. Estes operadores são obtidos a partir das regras de multiplicação dadas na secção anterior e da definição

$$X^i = \sum_{j=1}^r \left(\frac{\partial \Phi_j(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\partial b_i} \right)_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} \frac{\partial}{\partial a_i}, \quad (3.155)$$

onde \mathbf{a} é o conjunto dos parâmetros que sofre a ação dos parâmetros \mathbf{b} , tal que obtemos o conjunto de parâmetros \mathbf{c} por meio de uma multiplicação de elementos do grupo e r é o número de parâmetros do grupo.

A obtenção dos operadores diferenciais é imprescindível para obtermos a métrica de Haar do grupo $\text{USp}(4)$. Já que os coeficientes

$$\left(\frac{\partial \Phi_j(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\partial b_i} \right)_{\mathbf{b}=\mathbf{0}},$$

são os elementos da matriz Jacobiana cujo determinante resulta na métrica de Haar.

Os 2 primeiros operadores, pertencentes ao núcleo de Cartan, possuem formas simples, dadas por

$$X^1 = \frac{\partial}{\partial \phi_1}, \quad (3.156)$$

$$X^2 = \frac{\partial}{\partial \phi_2}. \quad (3.157)$$

O operador X^3 fica

$$X^3 = \frac{1}{\delta_1^* \delta_2} \left[\frac{i\Delta}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_1} - \frac{\partial}{\partial \phi_2} \right) + |\delta_1|^2 \left(\frac{\partial}{\partial z_3} - \sqrt{2}z_5 \frac{\partial}{\partial z_7} - \sqrt{2}z_7 \frac{\partial}{\partial z_9} \right) \right], \quad (3.158)$$

onde $\Delta = -z_3^* + z_9^*(z_7 + \sqrt{2}z_3z_5) + \sqrt{2}z_7^*z_5$.

O comutador $[X^1, X^3] = iX^3$, e o comutador $[X^2, X^3] = -iX^3$, são calculados com simplicidade, pois os elementos entre colchetes do operador X^3 são independentes dos ϕ_i , sendo necessário derivarmos apenas o termo em evidência para obtermos raízes idênticas às do operador X_3 , demonstrando que esta é uma representação da álgebra unitária simplética.

O operador X^5 fica,

$$X^5 = \delta_2^2 \left[-\frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\Xi|\delta_1|^2 - (z_3z_9^* + z_7^*)\Delta}{|\delta_2|^2|\delta_1|^2} \right) \frac{\partial}{\partial \phi_2} + \frac{\partial}{\partial z_5} \right], \quad (3.159)$$

onde

$$\begin{aligned}\Xi &= (z_7^* + \sqrt{2}z_3^*z_5^*)z_3 + \sqrt{2}z_5^*, \\ |\delta_1|^2 &= 1 + |z_3|^2 + |z_7|^2 + |z_9|^2, \\ |\delta_2|^2 &= 1 + |z_7 + \sqrt{2}z_3z_5|^2 + 2|z_5|^2 - \frac{|\Delta|^2}{|\delta_1|^2}.\end{aligned}\tag{3.160}$$

Basta derivarmos X^5 em relação à ϕ_1 ou ϕ_2 para vermos que este operador possui as raízes iguais às do operador X_5 .

O operador X^7 pode ser obtido tanto via 3.155 quanto por $[X^3, X^5] = \sqrt{2}X^7$. Escolhemos utilizar a equação 3.155 e obtemos

$$\begin{aligned}X^7 &= \frac{\delta_1}{\delta_2^*} \left\{ \left\{ -\frac{i}{2} \left(z_7^* + \sqrt{2}z_3^*z_5^* - \frac{\Delta^*z_9^*}{|\delta_1|^2} \right) \frac{\partial}{\partial\phi_1} + \left(\Xi - \frac{(z_3z_9^* + z_7^*)\Delta}{|\delta_1|^2} \right) \frac{\partial}{\partial z_3} \right. \right. \\ &+ \left. \left[|\delta_2|^2 - \sqrt{2}z_5 \frac{\Xi|\delta_1|^2 - (z_3z_9^* + z_7^*)\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right] \frac{\partial}{\partial z_7} \right\} + \frac{|\delta_2|^2}{|\delta_1|^2} \left\{ \sqrt{2}\Delta \frac{\partial}{\partial z_5} - \frac{-i}{2} [z_3z_9^* + z_7^* \right. \\ &+ \left. \Delta \left(\frac{\Xi|\delta_1|^2 - (z_3z_9^* + z_7^*)\Delta^*}{|\delta_2|^2|\delta_1|^2} \right) \right] \frac{\partial}{\partial\phi_2} \right\} - \sqrt{2}z_7 \frac{\Xi|\delta_1|^2 - (z_3z_9^* + z_7^*)\Delta^*}{|\delta_1|^2} \frac{\partial}{\partial z_9} \left. \right\},\end{aligned}\tag{3.161}$$

seu comutador com X^1 e X^2 gera a raiz $[1, 1]$, que é idêntica à raiz de X_5 , portanto esta é uma representação para este operador.

Obtemos o operador X^9 por meio da equação 3.155, que é dado por

$$\begin{aligned}X^9 &= \frac{1}{\delta_1^{*2}} \left\{ |\delta_1|^2 \left[-\frac{iz_9^*}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial\phi_1} \sqrt{2}(z_3z_9^* + z_7^*) \frac{\partial}{\partial z_3} + \left[\Delta - \sqrt{2}z_5(z_3z_9^* + z_7^*) \right] \frac{\partial}{\partial z_7} \right. \right. \\ &+ \left. \left. [|\delta_1|^2 - 2z_9(z_3z_9^* + z_7^*)] \frac{\partial}{\partial z_9} \right] + \Delta \left[-\frac{i(z_3z_9^* + z_7^*)}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial\phi_2} + \Delta \frac{\partial}{\partial z_9} \right] \right\},\end{aligned}\tag{3.162}$$

e sua raiz é dada por $[2, 0]$, como podemos observar pela derivada de X^9 em relação

à ϕ_1 e ϕ_2 .

Os operadores de abaixamento são dados pelo conjugado dos operadores de levantamento, conforme podemos esperar se nos basearmos em $X_i \equiv X_j^\dagger$, $i = 4, 6, 8, 10$, $j = 3, 5, 7, 9$. Portanto,

$$X^{2i} \equiv X^{2i-1*}, \quad i = 2, 3, 4, 5. \quad (3.163)$$

Os operadores obtidos nesta secção satisfazem todas as relações de comutação da álgebra $\mathfrak{usp}(4)$ sendo portanto uma representação da mesma.

3.7 A métrica de Haar do grupo $\mathrm{USp}(4)$

Na secção anterior encontramos os operadores diferenciais da álgebra $\mathfrak{usp}(4)$, e conforme dissemos, seus coeficientes são elementos da matriz Jacobiana, cujo inverso do determinante [19] é a métrica de Haar do grupo $\mathrm{USp}(4)$.

$$V_{ij} = \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial b_i} \right)_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}. \quad (3.164)$$

O cálculo do determinante da matriz Jacobiana resulta em

$$|V| = \delta_1^4 \delta_1^{*4} \delta_2^2 \delta_2^{*2}, \quad (3.165)$$

e portanto, a métrica de Haar é dada por

$$d\mu(\mathbf{z}) = \frac{C d^2 z_3 d^2 z_5 d^2 z_7 d^2 z_9}{|\delta_1|^8 |\delta_2|^4} \quad (3.166)$$

$$d\mu(\mathbf{z}) = \frac{C d^2 z_3 d^2 z_5 d^2 z_7 d^2 z_9}{(\langle 1, 1 \rangle)^4 \left(\langle 2, 2 \rangle - \frac{\langle 2, 1 \rangle \langle 1, 2 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \right)^2}, \quad (3.167)$$

onde $d^2 z_i \equiv dz_i^* dz_i$ e C é a constante de normalização para que a métrica obedeça à

$$\int d\mu = 1, \quad (3.168)$$

em todo o espaço de parâmetros que, lembremos, é compacto.

No trabalho [14] a métrica de Haar foi obtida para as representações simétricas da álgebra $usp(4)$, já neste caso a obtivemos para uma representação arbitrária. Uma representação simétrica possui $\lambda_2 = 0$. Outro caminho para demonstrar a métrica obtida em [14] é desenvolver a integral abaixo

$$\int \frac{d^2 z_5}{\left(\langle 2, 2 \rangle - \frac{\langle 2, 1 \rangle \langle 1, 2 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \right)^2}$$

e encontrar um número finito. Isto porque $\langle 1, 1 \rangle$ é independente de z_5 .

Para demonstrar este resultado faremos a transformação de coordenadas

$$d^2 z_5 = r_5 d\theta_5 dr_5,$$

para obtermos

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r_5 d\theta_5 dr_5}{\left(\langle 2, 2 \rangle - \frac{\langle 2, 1 \rangle \langle 1, 2 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \right)^2},$$

calculamos a integral em $d\theta_5$, que possui a forma

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_5}{(A \cos \theta_5 + B \sin \theta_5 + C)^2}$$

cujo resultado é dado por

$$\frac{2C\pi}{(-B^2 + C^2 - A^2)^{3/2}},$$

onde A, B, C são polinômios de grau 2 em relação à r_3, r_5, r_7, r_9 e possui alguns termos multiplicados por $\sin \theta_3, \sin \theta_7, \sin \theta_9, \cos \theta_3, \cos \theta_7$ e $\cos \theta_9$.

A segunda parte da integral possui a forma geral

$$\int_0^\infty \frac{2\pi(Dr_5^2 + E)r_5 dr_5}{(D^2 r_5^4 + (F + 2DE)r_5^2 + E^2)^{3/2}},$$

onde D, E, F são polinômios de grau 2 em relação à r_3, r_7, r_9 e possuem termos multiplicados por $\text{sen}\theta_3, \text{sen}\theta_7, \text{sen}\theta_9, \text{cos}\theta_3, \text{cos}\theta_7$ e $\text{cos}\theta_9$. O resultado desta integral, após muitas simplificações é dado abaixo,

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r_5 d\theta_5 dr_5}{\left(\langle 2, 2 \rangle - \frac{\langle 2, 1 \rangle \langle 1, 2 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle}\right)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

As integrais relativas à $d^2 z_3 d^2 z_7 d^2 z_9$ são simples de se calcular, pois

$$\langle 1, 1 \rangle = 1 + |z_3|^2 + |z_7|^2 + |z_9|^2.$$

Portanto, a integral em 3.168 fica

$$\begin{aligned} \int d\mu &= \int \frac{C d^2 z_3 d^2 z_7 d^2 z_9}{(1 + |z_3|^2 + |z_7|^2 + |z_9|^2)^4} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r_5 d\theta_5 dr_5}{\left(\langle 2, 2 \rangle - \frac{\langle 2, 1 \rangle \langle 1, 2 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle}\right)^2}, \\ \int d\mu &= \frac{C\pi}{2} \int \frac{d^2 z_3 d^2 z_7 d^2 z_9}{(1 + |z_3|^2 + |z_7|^2 + |z_9|^2)^4} \end{aligned} \quad (3.169)$$

sendo que já está computado o resultado da integral no subespaço de z_5 . Abaixo faremos a transformação de coordenadas $d^2 z_i = r_i d\theta_i dr_i$ para os parâmetros restantes, obtendo

$$\int d\mu = \frac{C\pi}{2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r_3 r_7 r_9 d\theta_3 d\theta_7 d\theta_9 dr_3 dr_7 dr_9}{(1 + r_3^2 + r_7^2 + r_9^2)^4} \quad (3.170)$$

cujo resultado é

$$\int d\mu = \frac{C\pi^4}{24} \Rightarrow C = \frac{24}{\pi^4}, \quad (3.171)$$

Concluimos e demonstramos que

$$d\mu(\mathbf{z}) = \frac{24}{\pi^4} \frac{d^2 z_3 d^2 z_5 d^2 z_7 d^2 z_9}{|\delta_1|^8 |\delta_2|^4}, \quad (3.172)$$

é a métrica de Haar do grupo $\text{USp}(4)$. Este resultado é semelhante à resultados obtidos em outros grupos de rank 2 [23]. Por ser um invariante no espaço de parâmetros do grupo, a métrica de Haar é um pré-requisito básico para estudarmos um sistema dinâmico que contenha a simetria do grupo. Além do mais, a forma acima para a métrica de Haar, dependendo apenas de

$$|\delta_1|^8 |\delta_2|^4 = (\langle 1, 1 \rangle)^4 \left(\langle 2, 2 \rangle - \frac{\langle 2, 1 \rangle \langle 1, 2 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \right)^2$$

é sempre a mesma, independente do sistema de coordenadas escolhido, o que é esperado de acordo com os resultados obtidos em [19].

Capítulo 4

Estados Coerentes do $USp(4)$

Este capítulo é devotado à definição e obtenção dos estados coerentes do grupo unitário simplético em 4 dimensões e suas propriedades para representações arbitrárias da álgebra. Encontramos representações para os operadores da álgebra na base dos estados coerentes e seus valores médios nesta base. Encerramos o capítulo encontrando a forma bilinear simplética do espaço dos estados coerentes.

4.1 Definição

Há três possíveis critérios para definirmos os estados coerentes [11, 23]. A primeira definição consiste em tomar estados que minimizam o princípio da incerteza de Heisenberg. A segunda definição pode ser dada como sendo os auto-estados do operador de aniquilação.

Neste trabalho utilizamos a definição dada em [12], na qual se definem os estados coerentes generalizados. Os estados coerentes generalizados são obtidos pela ação do subgrupo positivo sobre o peso mínimo da álgebra. Definições com maior rigor e formalismo podem ser vistas em [12, 14, 23]. O conjunto obtido a partir desta operação define os estados coerentes do grupo correspondente e este conjunto forma uma base no espaço de estados coerentes, que demonstraremos ser supercompleta

na próxima secção.

De acordo com o terceiro critério para a definição dos estados coerentes, tomamos o peso mínimo de uma representação arbitrária $[\lambda_1, \lambda_2]$ da álgebra $\mathfrak{sp}(4)$

$$|0\rangle = |\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1, -\lambda_2\rangle,$$

e definimos o vetor $|\tilde{z}\rangle$ como

$$|\tilde{z}\rangle = g|0\rangle, \quad (4.1)$$

onde g é a matriz do grupo $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{C})$ obtida no capítulo anterior. Não escreveremos esta matriz por ser desnecessário. Para encontrarmos o conjunto dos estados coerentes, basta tomarmos a decomposição um-a-um do grupo, sem explicitarmos g ,

$$\begin{aligned} |\tilde{z}\rangle = & \exp(z_3 X_3) \exp(z_5 X_5) \exp(z_7 X_7) \exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_9 - z_3 z_7) X_9\right] \exp(z_1 X_1) \\ & \times \exp(z_2 X_2) \exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_{10} - z_4 z_8) X_{10}\right] \exp(z_8 X_8) \exp(z_6 X_6) \exp(z_4 X_4) |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.2)$$

A ação dos operadores de abaixamento sobre o peso mínimo possui auto-valor nulo e portanto suas exponenciais são iguais a 1. A ação dos operadores diagonais X_i possui auto-valores $-\lambda_i$, $i = 1, 2$, portanto temos

$$\begin{aligned} |\tilde{z}\rangle = & \exp(z_3 X_3) \exp(z_5 X_5) \exp(z_7 X_7) \exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_9 - z_3 z_7) X_9\right] \\ & \times \exp(-z_1 \lambda_1) \exp(-z_2 \lambda_2) |0\rangle. \end{aligned}$$

A equação acima pode ser reescrita na forma

$$|\tilde{z}\rangle = \frac{|z\rangle}{\delta_1^{\lambda_1} \delta_2^{\lambda_2}}, \quad (4.3)$$

onde $\delta_i = e^{z_i}$ e

$$|z\rangle = \exp(z_3 X_3) \exp(z_5 X_5) \exp(z_7 X_7) \exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_9 - z_3 z_7) X_9\right] |0\rangle. \quad (4.4)$$

Na equação acima, o subgrupo positivo de $\text{Sp}(4, \mathbb{C})$ atua sobre o peso mínimo de uma representação arbitrária da álgebra correspondente. De acordo com [12], o conjunto dos estados obtidos dessa operação são chamados estados coerentes do grupo. Os estados coerentes formam um espaço de parâmetros difeomórfico ao espaço coset formado por $\{z_3, z_5, z_7, (z_9 - z_3 z_7)/\sqrt{2}\}$.

4.2 Resolução da unidade

Nesta secção obteremos a resolução da unidade da base dos estados coerentes. Uma base que satisfaz a resolução da unidade é uma base supercompleta. A supercompletude é uma das propriedades dos estados coerentes, de acordo com a definição em [11]. Desta forma, os estados coerentes devem satisfazer

$$\int d_h \mu(z) |z\rangle \langle z| = \int d\mu(z) ||z\rangle \langle z|| = 1, \quad (4.5)$$

onde

$$d\mu(z) = \frac{6D_{\lambda_1, \lambda_2}}{\pi^4} \frac{d^2 z_3 d^2 z_5 d^2 z_7 d^2 z_9}{|\delta_1|^8 |\delta_2|^4},$$

conforme o resultado do capítulo anterior e $||z\rangle = |z\rangle/N(z, z^*)$ são os estados coerentes normalizados, sendo $N(z, z^*)$ a condição de normalização. A relação entre $d\mu(z)$ e $d_h \mu(z)$ é

$$d_h \mu(z) = d\mu(z)/N(z, z^*).$$

Aqui fizemos $C = 6D_{\lambda_1, \lambda_2}$, já que a constante de integração varia de acordo com a dimensão da representação, onde $D_{\lambda_1, \lambda_2} = (\lambda_1 + 2)(\lambda_2 + 1)(\lambda_1 - \lambda_2 + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 + 3)/6$.

A integral 4.5 possui forma semelhante à integral que resolvemos para demonstrar a métrica de Haar no capítulo anterior. Assim, resta-nos obter a norma de um estado coerente. Para isso calculamos o produto escalar complexo entre $\langle \tilde{z} | \tilde{z} \rangle$ que é dado por

$$\langle \tilde{z} | \tilde{z} \rangle = \frac{\langle z | z \rangle}{|\delta_1|^{2\lambda_1} |\delta_2|^{2\lambda_2}}, \quad (4.6)$$

se substituirmos $|\tilde{z}\rangle = g|0\rangle$ acima, obtemos

$$\langle 0 | g^\dagger g | 0 \rangle = \frac{\langle z | z \rangle}{|\delta_1|^{2\lambda_1} |\delta_2|^{2\lambda_2}}. \quad (4.7)$$

Na equação acima, imporemos a condição de unitariedade a g , tal que $g^\dagger g = 1$. A base de estados da álgebra $\mathfrak{sp}(4)$ é ortonormal, de forma que $\langle 0 | 0 \rangle = 1$. Aplicando estas informações à 4.7 obtemos

$$\langle 0 | g^\dagger g | 0 \rangle = 1$$

$$\Rightarrow \langle z | z \rangle = |\delta_1|^{2\lambda_1} |\delta_2|^{2\lambda_2} = N(z, z^*)^2. \quad (4.8)$$

Como impusemos a unitariedade, sabemos que

$$|\delta_1|^2 = 1 + |z_3|^2 + |z_7|^2 + |z_9|^2,$$

$$|\delta_2|^2 = 1 + |z_7 + \sqrt{2}z_3z_5|^2 + 2|z_5|^2 - \frac{|\Delta|^2}{|\delta_1|^2}, \quad \text{onde,}$$

$$\Delta = \langle 1, 2 \rangle = -z_3^* + z_9^*(z_7 + \sqrt{2}z_3z_5) + \sqrt{2}z_7^*z_5,$$

conforme resultados obtidos no capítulo anterior.

Em 4.8 obtivemos a norma de um estado coerente numa representação arbitrária da álgebra $\mathfrak{usp}(4)$. Portanto, os estados coerentes normalizados ficam

$$||z\rangle = \frac{|z\rangle}{|\delta_1|^{\lambda_1}|\delta_2|^{\lambda_2}}. \quad (4.9)$$

Se impusermos $\lambda_2 = 0$ obteremos as representações simétricas da álgebra $\mathfrak{usp}(4)$. Os estados coerentes desta classe de representações foram estudados detalhadamente em [14]. Nosso objetivo é investigar as representações arbitrárias desta álgebra. Naturalmente obteremos resultados complicados, porém tratáveis se utilizarmos computação simbólica.

De acordo com 4.4, os estados coerentes são obtidos pela ação do subgrupo positivo sobre o peso mínimo da álgebra $\mathfrak{usp}(4)$. Uma representação arbitrária $[\lambda_1, \lambda_2]$ de dimensão D_{λ_1, λ_2} , possui um conjunto de D_{λ_1, λ_2} elementos que formam a base dos estados coerentes.

Os estados coerentes podem ser expandidos na base de estados da álgebra $\mathfrak{usp}(4)$, tal que

$$|z\rangle = \sum \mathcal{F}_n(\sigma) |\kappa_1, \kappa_2, h_1, h_2\rangle. \quad (4.10)$$

Sendo que a soma acima é feita sobre todos os estados da representação e n são os números que etiquetam os estados quânticos da álgebra $\mathfrak{usp}(4)$. Os polinômios $\mathcal{F}_n(z)$ formam uma base de polinômios no espaço de Hilbert de dimensão D_{λ_1, λ_2} . Nesta base obtemos o produto escalar a partir de 4.5

$$\int \mathcal{F}_n^*(\sigma) \mathcal{F}_{n'}(\sigma) d_h \mu(z) = \delta_{nn'}. \quad (4.11)$$

A integral acima é semelhante àquela que resolvemos no capítulo 3 para obtermos a métrica de Haar. A resolução desta integral pode ser vista em código que está

escrito no apêndice. O mesmo código calcula os polinômios para representações arbitrárias. Neste caso, a equação 4.11 é satisfeita se

$$d_h \mu(z) = \frac{6D_{\lambda_1, \lambda_2}}{\pi^4} \frac{d^2 z_3 d^2 z_5 d^2 z_7 d^2 z_9}{|\delta_1|^{8+\lambda_1} |\delta_2|^{4+\lambda_2}}. \quad (4.12)$$

Os polinômios \mathcal{F}_n são os elementos de matriz da primeira coluna da matriz do subgrupo positivo. Isto ocorre por termos optado considerar o peso mínimo como o vetor coluna cujo único elemento não nulo está na linha 1, de forma que apenas a coluna 1 da matriz do subgrupo positivo forma o conjunto de todos os estados coerentes do grupo.

A métrica para esta representação é a mesma que foi obtida no capítulo 3. O fator $|\delta_1|^{\lambda_1} |\delta_2|^{\lambda_2}$ vêm da normalização dos estados coerentes e foi incluído como parte da métrica. Neste ponto fica clara a invariância da métrica de Haar no espaço de parâmetros do grupo.

4.3 Ação dos elementos da álgebra

Verificaremos como agem os operadores da álgebra sobre os estados coerentes. Esta ação é importante pois, em geral, os estados coerentes são estados quânticos cujas propriedades são as mais próximas possíveis das propriedades dos estados clássicos do sistema analisado.

Obtemos a ação de um operador da álgebra sobre os estados coerentes a partir da definição 4.4 e das relações de comutação entre os operadores da álgebra. A representação que obteremos difere da representação por operadores diferenciáveis obtida no capítulo 3, pois enquanto a representação obtida no capítulo 3 referia-se a todo o espaço de parâmetros, esta representação é dada sobre o espaço dos estados coerentes.

A ação dos operadores de levantamento sobre os estados coerentes é representada

pelos operadores diferenciais abaixo

$$X_3|\sigma\rangle \equiv [\partial_3 + z_7\partial_9]|\sigma\rangle, \quad (4.13)$$

$$X_5|\sigma\rangle \equiv [\partial_5 - \sqrt{2}z_3\partial_7]|\sigma\rangle, \quad (4.14)$$

$$X_7|\sigma\rangle \equiv [\partial_7 - z_3\partial_9]|\sigma\rangle, \quad (4.15)$$

$$X_9|\sigma\rangle \equiv \sqrt{2}\partial_9|\sigma\rangle, \quad (4.16)$$

onde ∂_i representa a derivada relativa à z_i . As relações de comutação dos operadores diferenciais, obtidos através da ação dos operadores de levantamento, são obtidas com sinal invertido, por exemplo

$$[X_3, X_5] = \sqrt{2}X_7, \quad \text{mas} \quad (4.17)$$

$$\left[\partial_3 + z_7\partial_9, \partial_5 - \sqrt{2}z_3\partial_7 \right] = -\sqrt{2}(\partial_3 - \sigma_1\partial_4). \quad (4.18)$$

O sinal acima é explicado da seguinte forma, considere $X_i \equiv D_i$, sendo D_i um operador diferencial qualquer na base dos estados coerentes referente ao operador X_i da álgebra. A ação $X_j X_i |z\rangle \equiv X_j D_i |z\rangle$, mas $D_i |z\rangle$ não é um estado coerente. Então devemos fazer $X_j D_i |z\rangle = D_i X_j |z\rangle \equiv D_i D_j |z\rangle$. Portanto, $[X_i, X_j] |z\rangle \equiv [D_j, D_i] |z\rangle$, e a 4.18 fica esclarecida.

A representação dos operadores diagonais é dada abaixo,

$$X_1|z\rangle \equiv [z_3\partial_3 + z_7\partial_7 + 2z_9\partial_9 - \lambda_1]|z\rangle, \quad (4.19)$$

$$X_2|z\rangle \equiv [-z_3\partial_3 + z_7\partial_7 + 2z_5\partial_5 - \lambda_2]|z\rangle, \quad (4.20)$$

note que eles podem ser escritos na forma

$$X_i|z\rangle \equiv [(\alpha_j)_i z_j \partial_j - \lambda_i]|z\rangle. \quad i = 1, 2 \text{ e } j = 3, 5, 7, 9, \quad (4.21)$$

onde somamos em j e

$$\alpha_3 = [1, -1], \alpha_5 = [0, 2], \alpha_7 = [1, 1], \alpha_9 = [2, 0],$$

A ação do operadores de abaixamento é representada de forma mais complicada,

$$X_4|z\rangle \equiv [-z_3^2\partial_3 + \sqrt{2}(z_7 + \sqrt{2}z_3z_7)\partial_7 + (z_9 - z_3z_7)\partial_7 - z_3z_9\partial_9 + z_3(\lambda_1 - \lambda_2)]|z\rangle, \quad (4.22)$$

$$X_6|z\rangle \equiv [-\sqrt{2}z_7\partial_3 - 2z_5^2\partial_5 + 2z_5\lambda_2]|z\rangle, \quad (4.23)$$

$$X_8|z\rangle \equiv [-(z_9 + z_3z_7)\partial_3 - 2z_5(z_7 + \sqrt{2}z_3z_5)\partial_5 - z_7^2\partial_7 - z_7z_9\partial_9 + (z_7 + 2\sqrt{2}z_3z_5)\lambda_2 + z_7\lambda_1]|z\rangle, \quad (4.24)$$

$$X_{10}|z\rangle \equiv \sqrt{2}[-z_3z_9\partial_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}(z_7 + \sqrt{2}z_3z_5)^2\partial_5 - z_7z_9\partial_7 - z_9^2\partial_9 + z_9\lambda_1 + z_3(z_7 + \sqrt{2}z_3z_5)\lambda_2]|z\rangle, \quad (4.25)$$

4.4 Valores médios dos operadores de $usp(4)$

De posse da ação dos operadores da álgebra sobre os estados coerentes, calcularemos seus valores médios neste espaço. Os valores médios são obtidos pela ação dos operadores diferenciais sobre os estados coerentes normalizados $||z\rangle$. Os valores médios dos operadores da álgebra sobre os estados coerentes são obtidos para investigarmos o comportamento de um sistema clássico análogo ao sistema quântico definido. Abaixo são dados os valores médios dos operadores de levantamento,

$$\langle z || \hbar X_3 || z \rangle \equiv \frac{\lambda_1(z_3^* + z_7 z_9^*)}{2|\delta_1|^2} + \frac{\lambda_2}{2|\delta_2|^2} \left\{ \sqrt{2}z_5(\sqrt{2}z_3^* z_5^* + z_7^*) \right. \\ \left. + \frac{1}{|\delta_1|^2} \left[-\sqrt{2}z_5 z_9^* \Delta^* + \Delta \left[1 - z_7(\sqrt{2}z_3^* z_5^* + z_7^*) + (z_3^* + z_7 z_9^*) \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right] \right] \right\} \quad (4.26)$$

$$\langle z || \hbar X_5 || z \rangle \equiv \frac{-\sqrt{2}\lambda_1 z_3 z_7^*}{2|\delta_1|^2} + \frac{\lambda_2}{2|\delta_2|^2} \left[2z_5^* \left(1 + \frac{z_3 \Delta}{|\delta_1|^2} \right) - \frac{\sqrt{2}z_7^* \Delta^*}{|\delta_1|^2} \left(1 - \frac{z_3 \Delta}{|\delta_1|^2} \right) \right] \quad (4.27)$$

$$\langle z || \hbar X_7 || z \rangle \equiv \frac{\lambda_1(z_7^* - z_3 z_9^*)}{2|\delta_1|^2} + \frac{\lambda_2}{2|\delta_2|^2} \left\{ (\sqrt{2}z_3^* z_5^* + z_7^*) \left(1 + \frac{z_3 \Delta}{|\delta_1|^2} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{|\delta_1|^2} \left[z_9^* \Delta^* + \sqrt{2}z_5^* \Delta - (z_7^* - z_3 z_9^*) \frac{|\Delta|^2}{|\delta_1|^2} \right] \right\} \quad (4.28)$$

$$\langle z || \hbar X_9 || z \rangle \equiv \frac{\sqrt{2}\lambda_1 z_9^*}{2|\delta_1|^2} + \frac{\sqrt{2}\lambda_2 \Delta}{2|\delta_2|^2 |\delta_1|^2} \left[-(\sqrt{2}z_3^* z_5^* + z_7^*) + \frac{z_9^* \Delta^*}{|\delta_1|^2} \right], \quad (4.29)$$

observe que os operadores puros da álgebra $usp(4)$ são mais complicados que os operadores referentes às subálgebras $su(2)$. Os operadores de Cartan são dados por,

$$\begin{aligned}
\langle z | \hbar X_1 | z \rangle \equiv & -\frac{\lambda_1(2 + |z_3|^2 + |z_7|^2)}{2|\delta_1|^2} + \frac{\lambda_2}{2|\delta_2|^2} \left\{ (z_3 - \sqrt{2}z_7z_5^*) \frac{\Delta}{|\delta_1|^2} \right. \\
& + (|z_3|^2 + |z_7|^2 + 2|z_9|^2) \frac{|\Delta|^2}{|\delta_1|^4} + |\sqrt{2}z_3z_5 + z_7|^2 \\
& \left. - (\sqrt{2}z_3z_5 + z_7) \frac{z_9^* \Delta^*}{|\delta_1|^2} - (\sqrt{2}z_3^*z_5^* + z_7^*) \frac{2z_9\Delta}{|\delta_1|^2} \right\} \quad (4.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle z | \hbar X_2 | z \rangle \equiv & \frac{\lambda_1(-|z_3|^2 + |z_7|^2)}{2|\delta_1|^2} + \frac{\lambda_2}{2|\delta_2|^2} \left\{ -(z_3 + \sqrt{2}z_7z_5^*) \frac{\Delta}{|\delta_1|^2} - 2|\delta_2|^2 \right. \\
& \left. + (-|z_3|^2 + |z_7|^2) \frac{|\Delta|^2}{|\delta_1|^4} + |\sqrt{2}z_3z_5 + z_7|^2 + 2|z_5|^2 - (z_9^*z_7 + z_5z_7^*) \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right\}, \quad (4.31)
\end{aligned}$$

e por fim, os valores médios dos operadores de abaixamento são dados pelo conjugado dos valores médios dos operadores de levantamento

$$\langle z | \hbar X_{2j} | z \rangle \equiv (\langle z | \hbar X_{2j-1} | z \rangle)^\dagger, \quad j = 2, 3, 4, 5. \quad (4.32)$$

Através dos valores médios dos operadores dá álgebra e da bi-forma do espaço coset, podemos escrever um sistema dinâmico com simetria $\mathfrak{usp}(4)$ sobre este espaço. A próxima secção é dedicada à obtenção da bi-forma deste espaço.

4.5 Forma simplética

Nesta secção calcularemos a métrica do espaço coset, com a qual investigamos sistemas dinâmicos de simetria $\mathfrak{usp}(4)$ dentro do formalismo de Hamilton. A expressão para $\langle z | z \rangle$ nos possibilita calcular explicitamente a métrica do espaço coset. Esta métrica é chamada *Kahleriana*, de acordo com [26]

$$\omega_{ij} = \frac{\partial^2 \ln \langle z | z \rangle}{\partial z_i \partial z_j^*}, \quad (4.33)$$

Da métrica acima obtemos a 2-forma fechada não-degenerada ou forma simplética do espaço coset,

$$\omega = i\hbar \sum_{i,j} \omega_{ij} dz_i \wedge dz_j^*, \quad (4.34)$$

e o seu parêntese de Poisson sobre o espaço coset

$$\{f, g\} = \frac{1}{i\hbar} \sum_{i,j} \omega^{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial g}{\partial z_j^*} - \frac{\partial f}{\partial z_j^*} \frac{\partial g}{\partial z_i} \right\}, \quad (4.35)$$

onde $\omega^{ik} \omega_{kj} = \delta_j^i$.

Neste trabalho calculamos explicitamente ω_{ij} , os quais podem ser considerados elementos de uma matriz hermitiana. Os elementos diagonais desta matriz são todos reais e dados por

$$\begin{aligned} \omega_{11} = & \frac{\lambda_1}{|\delta_1|^2} \left(1 - \frac{|z_3|^2}{|\delta_1|^2} \right) + \frac{\lambda_2}{|\delta_2|^2} \left\{ 2|z_5|^2 - \frac{1}{|\delta_1|^2} [1 + 2|z_5|^2|z_9|^2] \right. \\ & \left. + 2\mathcal{R}e \left\{ \frac{\Delta}{|\delta_1|^2} \left(-\sqrt{2}z_3^* z_5^* z_9 + z_3 \right) \right\} - \frac{|\Delta|^2}{|\delta_1|^2} \left(1 - \frac{2|z_3|^2}{|\delta_1|^2} \right) \right] \\ & \left. + \frac{1}{|\delta_2|^2} \left| \left(\sqrt{2}z_3 z_5 + z_7 \right) \sqrt{2}z_5^* + \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} - \sqrt{2}z_5^* z_9 \frac{\Delta}{|\delta_1|^2} + z_3 \frac{|\Delta|^2}{|\delta_1|^4} \right|^2 \right\}, \quad (4.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{22} = & \frac{\lambda_2}{|\delta_2|^2} \left\{ 2 + 2|z_3|^2 - \frac{2|z_3 z_9^* + z_7^*|^2}{|\delta_1|^2} - \frac{1}{|\delta_2|^2} \right. \\ & \left. \times \left| \sqrt{2}z_5 (\sqrt{2}z_3^* z_5^* + z_7^*) + 2z_5^* - \sqrt{2} \frac{\Delta}{|\delta_1|^2} (z_3^* z_9 + z_7) \right|^2 \right\}, \quad (4.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{33} = & \frac{\lambda_1}{|\delta_1|^2} \left(1 - \frac{|z_7|^2}{|\delta_1|^2} \right) + \frac{\lambda_2}{|\delta_2|^2} \left\{ 1 - \frac{1}{|\delta_1|^2} [|z_9|^2 + 2|z_5|^2] \right. \\ & \left. - 2\mathcal{R}e \left\{ (z_7 z_9^* + \sqrt{2}z_5 z_7^*) \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right\} - \frac{|\Delta|^2}{|\delta_1|^2} \left(1 - \frac{|z_7|^2}{|\delta_1|^2} \right) \right] \\ & \left. - \frac{1}{|\delta_2|^2} \left| \sqrt{2}z_3 z_5 + z_7 - \sqrt{2}z_5 \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} - z_9 \frac{\Delta}{|\delta_1|^2} + z_7 \frac{|\Delta|^2}{|\delta_1|^4} \right|^2 \right\}, \quad (4.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{44} = & \frac{\lambda_1}{|\delta_1|^2} \left(1 - \frac{|z_9|^2}{|\delta_1|^2}\right) + \frac{\lambda_2}{|\delta_2|^2} \left\{ -\frac{1}{|\delta_1|^2} \left[|\sqrt{2}z_3z_5 + z_7|^2 \right. \right. \\
& - 2\mathcal{R}e \left\{ z_9(\sqrt{2}z_3^*z_5^* + z_7^*) \frac{\Delta}{|\delta_1|^2} \right\} - \frac{|\Delta|^2}{|\delta_1|^2} \left(1 - 2\frac{|z_9|^2}{|\delta_1|^2}\right) \left. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{|\delta_2|^2} \left| -(\sqrt{2}z_3z_5 + z_7) \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} + z_9 \frac{|\Delta|^2}{|\delta_1|^4} \right|^2 \right\}, \quad (4.39)
\end{aligned}$$

observe que para representações simétricas $\lambda_2 = 0$, este resultado se torna muito mais simples e está de acordo com o resultado obtido em [14].

Os elementos pertencentes à linha 2 ou coluna 2 são dados abaixo. Para o caso de representações simétricas eles são todos nulos, conforme [14]

$$\begin{aligned}
\omega_{12} = & \frac{\lambda_2}{|\delta_2|^2} \left\{ 2z_3^*z_5 - \frac{1}{|\delta_1|^2} (z_3^*z_9 + z_7) \left(2z_5z_9^* - \sqrt{2}z_3^* \frac{\Delta}{|\delta_1|^2} \right) \right. \\
& + \frac{1}{|\delta_2|^2} \left[\sqrt{2}z_3^*(\sqrt{2}z_3z_5 + z_7) + 2z_5 - \sqrt{2}(z_3^*z_9 + z_7) \frac{\Delta}{|\delta_1|^2} \right] \\
& \left. \times \left[\sqrt{2}z_5 \left(\sqrt{2}z_3^*z_5^* + z_7^* - z_9^* \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right) + \frac{\Delta}{|\delta_1|^2} \left(1 + z_3^* \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right) \right] \right\}, \quad (4.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{23} = & \frac{\lambda_2}{|\delta_2|^2} \left\{ \sqrt{2}z_3^* - \frac{1}{|\delta_1|^2} \left[\sqrt{2}\Delta + 2z_3z_7^*|z_9|^2 - \sqrt{2}z_7(z_3z_9^* + z_7^*) \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right] \right. \\
& - \frac{1}{|\delta_2|^2} \left[z_7 + \sqrt{2}z_5 \left(z_3 - \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right) + \left(-z_9 + z_7 \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right) \frac{\Delta}{|\delta_1|^2} \right] \\
& \left. \times \left[\sqrt{2}z_3(\sqrt{2}z_3^*z_5^* + z_7^*) - \sqrt{2}(z_3z_9^* + z_7^*) \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right] \right\}, \quad (4.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{24} = & \frac{\lambda_2}{|\delta_2|^2} \left\{ \frac{1}{|\delta_1|^2} \left[\sqrt{2}z_3\Delta^* - \sqrt{2}z_9(z_3z_9^* + z_7^*) \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right] \right. \\
& - \frac{1}{|\delta_2|^2} \left[-\frac{\sqrt{2}z_3z_5 + z_7}{|\delta_1|^2} + z_9 \frac{|\Delta|^2}{|\delta_1|^4} \right] \\
& \left. \times \left[\sqrt{2}z_3(\sqrt{2}z_3^*z_5^* + z_7^*) + 2z_5^* - \sqrt{2}(z_3z_9^* + z_7^*) \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right] \right\}. \quad (4.42)
\end{aligned}$$

E por fim os elementos restantes da matriz. Observe que estes elementos de

matriz ficam bastante simples para o caso de representações simétricas,

$$\begin{aligned} \omega_{13} = & -\frac{\lambda_1 z_3^* z_7}{|\delta_1|^4} + \frac{\lambda_2}{|\delta_2|^2} \left\{ \sqrt{2} z_5 + \frac{1}{|\delta_2|^2} \left[\sqrt{2} z_5 \left(1 - |z_9|^2 + (z_3^* + z_7 z_9^*) \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right) \right. \right. \\ & + \left. \left. \left(z_9 z_3^* - z_7 - 2 z_3^* z_7 \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right) \frac{\Delta}{|\delta_1|^2} \right] - \frac{1}{|\delta_2|^2} \left[\sqrt{2} z_5 \left(z_3 - \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right) + z_7 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(z_9 - z_7 \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right) \frac{\Delta}{|\delta_1|^2} \right] \left[\sqrt{2} z_5 \left(\sqrt{2} z_3^* z_5^* + z_7^* - z_9^* \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right) - \left(1 - z_3^* \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right) \frac{\Delta}{|\delta_1|^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \omega_{14} = & -\frac{\lambda_1 z_9 z_3^*}{|\delta_1|^4} + \frac{\lambda_2}{|\delta_2|^2} \left\{ \frac{1}{|\delta_1|^4} \left[\sqrt{2} z_5 \left(z_3 - \Delta^* + (|z_3|^2 + |z_9|^2) \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right) \right. \right. \\ & + z_7 (z_3^* + 1) - z_9 \frac{\Delta}{|\delta_1|^2} \left(1 - 2 z_3^* \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right) \left. \right] - \frac{1}{|\delta_2|^2} \left[-(\sqrt{2} z_3 z_5 + z_7) \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right. \\ & \left. \left. + z_9 \frac{|\Delta|^2}{|\delta_1|^4} \right] \left[\sqrt{2} z_5 \left(\sqrt{2} z_3^* z_5^* + z_7^* - z_9^* \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right) + \frac{\Delta}{|\delta_1|^2} \left(1 + z_3^* \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \omega_{34} = & -\frac{\lambda_1 z_9 z_7^*}{|\delta_1|^4} + \frac{\lambda_2}{|\delta_2|^2} \left\{ -\frac{1}{|\delta_1|^2} \left[\Delta^* + \sqrt{2} (\sqrt{2} z_3 z_5 + z_7) z_5^* \right. \right. \\ & - \left. \left. \left(|z_9|^2 + \sqrt{2} z_3 z_5 z_7^* + |z_7|^2 \right) \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} - \sqrt{2} z_9 z_5^* \frac{\Delta}{|\delta_1|^2} + 2 z_9 z_7^* \frac{|\Delta|^2}{|\delta_1|^4} \right] \right. \\ & - \frac{1}{|\delta_2|^2} \left[-(\sqrt{2} z_3 z_5 + z_7) \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} + z_9 \frac{|\Delta|^2}{|\delta_1|^4} \right] \\ & \left. \times \left[\sqrt{2} z_3^* z_5^* + z_7^* - z_9^* \frac{\Delta^*}{|\delta_1|^2} - \sqrt{2} z_5^* \frac{\Delta}{|\delta_1|^2} - z_7^* \frac{|\Delta|^2}{|\delta_1|^4} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

e naturalmente,

$$\omega_{ji} = \omega_{ij}^* \quad i > j = 1, \dots, 4. \quad (4.46)$$

Como podemos ver, a forma simplética tem um aspecto complicado para representações arbitrárias, mas para o caso das representações simétricas há uma grande simplificação nesta forma, como podemos observar quando $\lambda_2 = 0$.

Utilizando as expressões acima podemos calcular o parêntese de Poisson, já que

os ω_{ij} formam uma matriz cuja inversa tem como elementos os ω^{ij} . Um parêntese de Poisson nos possibilita investigar a transição de um sistema algébrico para um sistema contínuo ou Hamiltoniano. Assim, dados $X, Y \in \mathfrak{usp}(4)$, o parêntese de Poisson de seus valores médios \mathcal{X}, \mathcal{Y} se relaciona com seu comutador por

$$\frac{\hbar}{2\pi} \{ \langle \sigma | X | \sigma \rangle, \langle \sigma | Y | \sigma \rangle \} = i \langle \sigma | [X, Y] | \sigma \rangle \quad (4.47)$$

Trabalhos futuros utilizarão estes resultados para resolver a dinâmica Hamiltoniana de sistemas com simetria $\mathfrak{usp}(4)$.

Capítulo 5

Conclusões

Este trabalho completa a investigação iniciada por Hornos e Novaes do grupo unitário simplético em quatro dimensões. Neste trabalho, a obtivemos as coordenadas para intersecção entre os grupos simplético e unitário. Feito isso, calculamos as regras de multiplicação deste grupo e representação desta álgebra por operadores diferenciais no espaço de parâmetros. Este é um dos trajetos a serem percorridos na obtenção da métrica de Haar deste grupo que obtivemos explicitamente. A métrica de Haar de um grupo é o requisito básico para desenvolvermos um sistema dinâmico dentro desta simetria.

O passo seguinte ao estudo da álgebra e do grupo foi a introdução ao estudo dos estados coerentes. Os estados coerentes formam uma base, cujo espaço é adequado ao estudo de sistemas hamiltonianos ou clássicos. Nossa investigação percorreu dois campos bastante frutíferos da física teórica. Começamos pela álgebra, adequada para a investigação fenomenológica de sistemas discretos (quânticos). E chegamos aos estados coerentes que permitem uma abordagem "clássica" a sistemas algébricos.

Algumas das possibilidades de investigação são

- A investigação de sistemas dinâmicos dentro da simetria unitária simplética em quatro dimensões.
- A abordagem do grupo simplético em seis dimensões e a solução de sistemas

dinâmicos do código genético.

- O estudo do grupo simplético não-compacto em quatro dimensões e suas possíveis aplicações em ótica [24].

Apêndice A

Quebras de simetria por termos de Majorana

Neste apêndice descreveremos rapidamente a evolução temporal e as quebras de simetria que podem ocorrer dentro de uma simetria maior, neste caso a simetria C_2 . Neste apêndice apresentamos o conceito de quebra de simetria tencionando aplicá-lo à investigação da evolução do código genético entre o código padrão e o código mitocondrial.

Vimos no capítulo 3 que a álgebra $sp(4)$ possui uma cadeia de quebra de simetria canônica, dada por

$$sp(4) \supset su(2)_1 \oplus su(2)_2 \supset u(1)_1 \oplus u(1)_2, \quad (A.1)$$

sendo que não foi citada a cadeia de quebra de Majorana, que é dada por

$$sp(4) \supset su(2)_M \supset u(1)_M. \quad (A.2)$$

No trabalho [7] foram utilizados termos da subálgebra Majorana para a obtenção do espectro da molécula.

Ambas as cadeias acima são cadeias de quebra em subsimetrias A_1 da sime-

tria maior C_2 , [25]. Ou seja, o espaço de $\mathfrak{sp}(4)$ contém representações tanto de $\mathfrak{su}(2)_1 \oplus \mathfrak{su}(2)_2$ quanto de $\mathfrak{su}(2)_M$. Devido a isto podemos ter um sistema descrito pela simetria maior C_2 que evolui e transiciona entre as duas simetrias $(A_1)_1 \oplus (A_1)_2$ e $(A_1)_M$.

Suponhamos um sistema que inicialmente possua auto-valores advindos de $\mathfrak{su}(2)_M$ e após sofrer algum tipo de perturbação sofre uma quebra de simetria evoluindo para um sistema de auto-valores dados por $\mathfrak{su}(2)_1 \oplus \mathfrak{su}(2)_2$.

Este sistema terá auto-valores bem definidos no início, pois estará dentro da simetria $\mathfrak{su}(2)_M$. Após a quebra de simetria, os autovalores também serão bem-definidos, pertencendo à $\mathfrak{su}(2)_1 \oplus \mathfrak{su}(2)_2$. O interessante deste sistema é que durante a transição entre uma simetria e outra, seus auto-valores permacecem em estados ambíguos, podendo pertencer tanto à uma quanto à outra simetria ao mesmo tempo.

Verificaremos esta afirmação, escrevendo um sistema em que ocorrerá a quebra de simetria para a representação adjunta da álgebra $\mathfrak{sp}(4)$. Primeiro verificamos quais são os geradores das álgebras $\mathfrak{su}(2)_1$, $\mathfrak{su}(2)_2$, $\mathfrak{su}(2)_M$.

Os geradores da subálgebra $\mathfrak{su}(2)_1$ são dados pelos operadores X_1, X_9, X_{10} , os quais são definidos pelas relações de comutação

$$[X_1, X_9] = 2X_9, \quad [X_1, X_{10}] = -2X_{10} \quad [X_9, X_{10}] = 2X_1. \quad (\text{A.3})$$

Os geradores da subálgebra $\mathfrak{su}(2)_2$ são dados pelos operadores X_2, X_5, X_6 , os quais são definidos pelas relações de comutação

$$[X_2, X_5] = 2X_6, \quad [X_2, X_6] = -2X_6 \quad [X_5, X_6] = 2X_2. \quad (\text{A.4})$$

Os geradores da subálgebra $\mathfrak{su}(2)_M$ são combinações lineares dos geradores acima, e são dados por

$$Y_1 = 3X_1 + X_2, \quad Y_2 = \sqrt{3}X_9 + \sqrt{2}X_5, \quad Y_3 = \sqrt{3}X_{10} + \sqrt{2}X_6, \quad (\text{A.5})$$

cujas relações de comutação são

$$[Y_1, Y_2] = 2Y_2, \quad [Y_1, Y_3] = -2Y_3, \quad [Y_2, Y_3] = 2Y_1. \quad (\text{A.6})$$

A forma de Killing desta álgebra é dada por

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

sendo simples calcular sua inversa, que é dada pelo inverso dos elementos não-nulos.

O operador de Casimir da subálgebra $\text{su}(2)_1$ é dado por

$$J_1^2 = \frac{1}{12} (X_1^2 + X_9 X_{10} + X_{10} X_9), \quad (\text{A.8})$$

o operador de Casimir da subálgebra $\text{su}(2)_2$ é dado por

$$J_2^2 = \frac{1}{12} (X_2^2 + X_5 X_6 + X_6 X_5), \quad (\text{A.9})$$

e o operador de Casimir da subálgebra $\text{su}(2)_M$ é dado por

$$J_M^2 = \frac{1}{4} (Y_1^2 + 2Y_2 Y_3 + 2Y_3 Y_2), \quad (\text{A.10})$$

o operador de Casimir da subálgebra Majorana não é diagonal, diferente dos operadores de Casimir das outras subálgebras especiais unitárias.

Através destes operadores de Casimir vamos construir uma Hamiltoniana efetiva que contenha dois termos: um não-nulo e outro nulo no tempo inicial, e vice-versa no tempo final. Para isso definimos a função

$$y = \frac{1}{2} [\tanh(t - 4) + 1], \quad (\text{A.11})$$

representada abaixo por

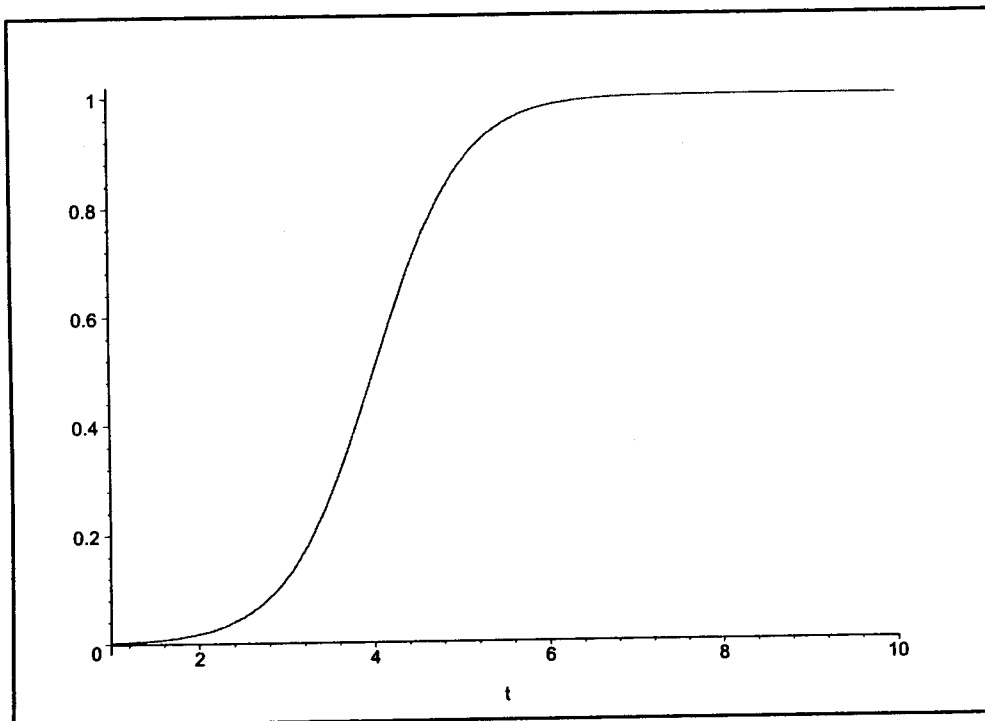


Figura A.1: Parâmetro de ligamento/desligamento da Hamiltoniana efetiva

Assim, podemos escrever nossa Hamiltoniana como

$$H_e = H_M + H, \quad (\text{A.12})$$

onde,

$$H_M = \rho J_M^2, \quad H = 3aJ_1^2 + 6bJ_2^2 + cX_1, \quad (\text{A.13})$$

sendo que escrevemos abaixo a matriz H_e já diagonalizada, e esta fica

$$H_e = \begin{pmatrix} A_+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_+ \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

onde os auto-valores são dados por

$$A_{\pm} = 2b + 7\rho + a \pm \sqrt{(2b - a)^2 + \rho(16b + 25\rho - 8a)}, \quad (\text{A.15})$$

$$B_{\pm} = 3a/4 + 3b/2 + 12\rho \pm c, \quad (\text{A.16})$$

$$C_{\pm} = 2a + 12\rho \pm 2c, \quad (\text{A.17})$$

$$D_{\pm} = c/2 + 3a/8 + 11b/4 + 7\rho \pm F, \quad (\text{A.18})$$

$$E_{\pm} = -c/2 + 3a/8 + 11b/4 + 7\rho \pm G, \quad (\text{A.19})$$

onde

$$F = 1/8\sqrt{(4c + 3a - 10b)^2 - 16\rho(4c + 3a - 10b - 100\rho)}, \quad (\text{A.20})$$

$$G = 1/8\sqrt{(4c - 3a + 10b)^2 + 16\rho(4c - 3a + 10b + 100\rho)}. \quad (\text{A.21})$$

De posse do operador hamiltoniano, podemos investigar diversos sistemas de acordo com valores determinados para os parâmetros a, b, c e ρ .

Abaixo expomos alguns gráficos que foram obtidos,

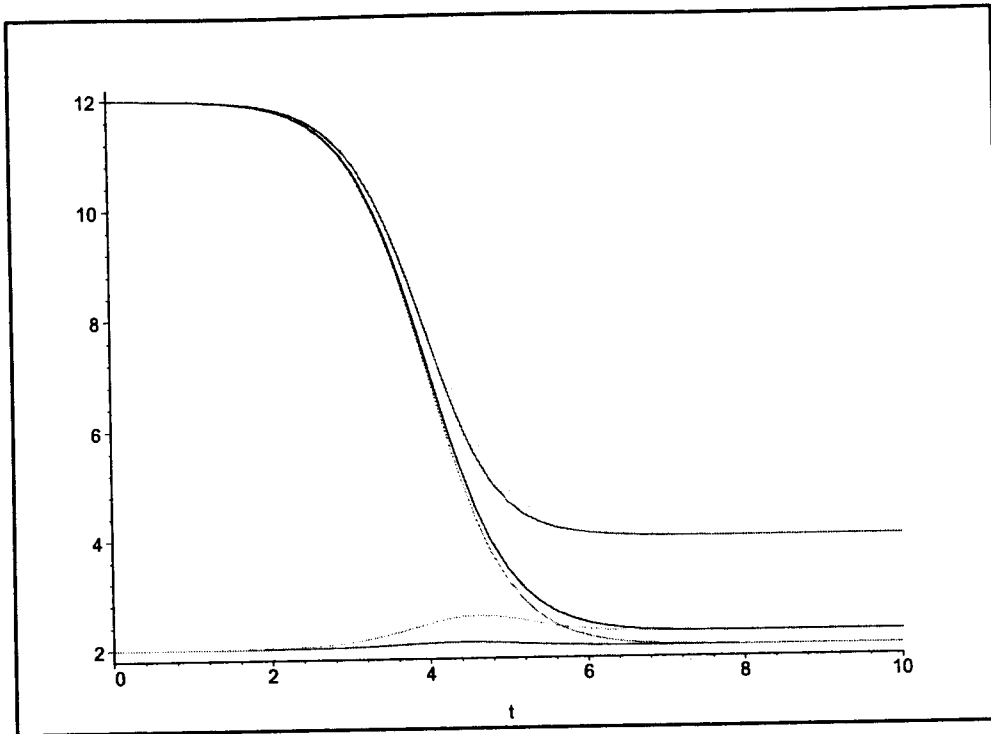


Figura A.2: Evolução dos auto-valores de H_e para $a = y, b = y, c = 0$, e $\rho = 1 - y$.

Na figura A.2, o sistema possui dois auto-valores $H_e = 2$ e $H_e = 12$, de degenerescência 3 e 7 respectivamente, para a hamiltoniana efetiva. A evolução temporal deste sistema leva a um desdobramento dos auto-valores da hamiltoniana efetiva, levando-nos à obtenção de três auto-valores $H_e = 2$, $H_e = 9/4$ e $H_e = 4$, de degenerescência 3, 4 e 3, respectivamente.

A quebra de simetria representada na figura A.2 pode ser justificada pela perturbação externa sobre o sistema. Sistemas físicos que após a ação de uma perturbação externa, sofrem um desdobramento em seus auto-valores, em geral são dotados de alguma simetria interna. Esta simetria não é necessariamente visível, em geral ela é abstrata. Exemplo deste tipo de situação é o efeito Zeeman, no qual níveis de energia para órbitas de um átomo se desdobram sob a ação de um campo magnético [4]. Isto é devido à simetria $su(2)$ do spin do elétron.

Outra situação interessante é dada abaixo.

Na figura A.3, obtemos a evolução de um sistema que é descrito por uma hamil-

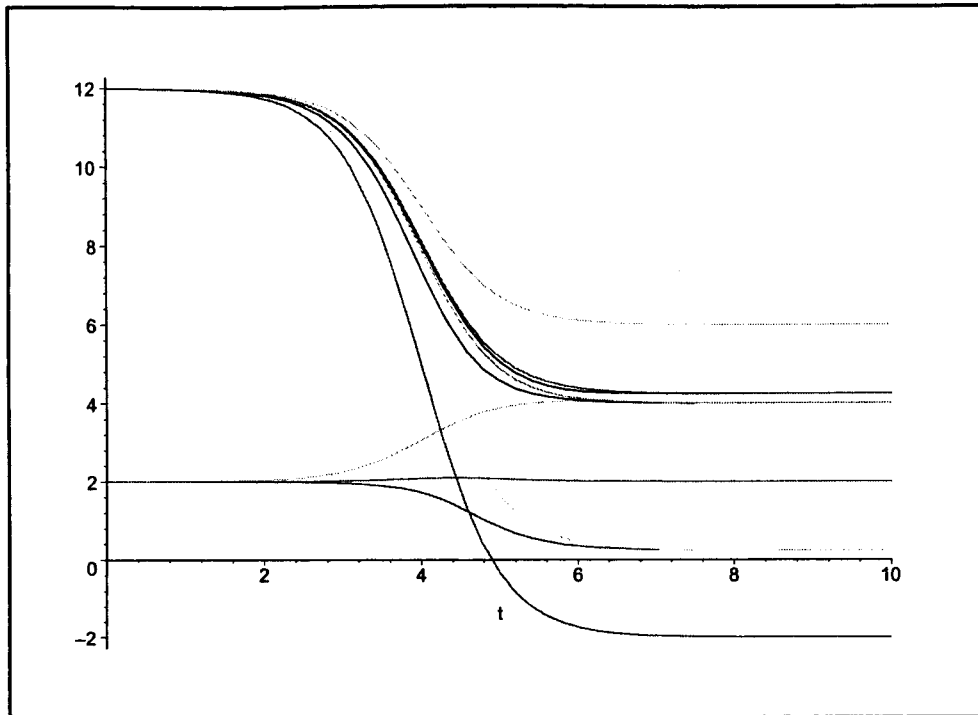


Figura A.3: Evolução dos auto-valores de H_e para $a = y, b = y, c = 2y$, e $\rho = 1 - y$.

toniana que além dos operadores de Casimir das subálgebras $su(2)$ canônica, foi adicionada do operador de Casimir da subálgebra canônica de $u(1)$. Esta nova forma da hamiltoniana leva a um maior desdobramento dos seus auto-valores. Ou seja, diminuimos bastante as degenerescências deste sistema.

Novamente, um sistema inicialmente com auto-valores $H_e = 2$ e $H_e = 12$ e degenerescência 3 e 7, sofre uma perturbação externa, evoluindo para os auto-valores $H_e = -2, H_e = 1/4, H_e = 2, H_e = 4, H_e = 17/4$ e $H_e = 6$ de degenerescências 1, 2, 1, 3, 2, 1, respectivamente.

Apêndice B

Códigos

Neste apêndice colocamos 3 dos códigos que foram desenvolvidos neste trabalho. Todos eles foram escritos em maple8.

O primeiro deles calcula todas as representações de uma álgebra $sp(4)$. Resolve a exponencial desta álgebra e obtém uma matriz do grupo correspondente. A partir daí calcula as coordenadas renormalizadas para a obtenção do grupo $USp(4)$. Fazemos a expansão da exponencial para verificar que as matrizes obtidas são da álgebra $usp(4)$. Após isso calculamos a regra de produto e os elementos da matriz Jacobiana que permitem o cálculo da métrica de Haar. Calculamos a matriz Jacobiana e seu determinante que resulta na métrica de Haar. Utilizamos a matriz Jacobiana para calcularmos uma representação por operadores diferenciais no espaço dos parâmetros do grupo e verificamos algumas de suas relações de comutação.

O segundo programa toma a exponencial das raízes positivas da álgebra $usp(4)$ e da sua primeira coluna obtemos os estados coerentes de uma representação arbitrária desta álgebra. Além disso, demonstramos que a integral da métrica de Haar obtida no programa anterior é finita e que os polinômios da coluna 1 são ortonormais, ou seja, a resolução da unidade dos estado coerentes.

O terceiro programa toma a exponencial total da álgebra $sp(4, \mathbb{C})$ para gerar a matriz do grupo $Sp(4)$. Também coloca a matriz obtida no formato do capítulo 3.

Program Haar Measure

This program calculate the Haar measure to the USp(4) group.

```

> restart;
> with(linalg):
> omega[1,2]:=1;
> omega[2,2]:=0;
> h[1]:=h1;h[2]:=h2;
> sigma[1]:=s1;sigma[2]:=s2;
> sigma[p]:=sigma[1]+sigma[2];
> sigma[m]:=sigma[1]-sigma[2];
> omega[p]:=omega[1,2]+omega[2,2];
> omega[m]:=omega[1,2]-omega[2,2];
> a:=sqrt((omega[p]-sigma[p])*(omega[p]+sigma[p]+6)*(-
omega[m]+sigma[p]+2)*(omega[m]+sigma[p]+4)/(64*(sigma[1]+1)*(sigma[1]+2)*(sigma[
2]+1)*(sigma[2]+2)))*sqrt((sigma[1]+h[1]+2)*(sigma[2]-h[2]+2)));
> d:=sqrt((omega[p]-sigma[p]+2)*(omega[p]+sigma[p]+4)*(-
omega[m]+sigma[p])*(omega[m]+sigma[p]+2)/(64*(sigma[1])*(sigma[1]+1)*(sigma[2])*(
sigma[2]+1)))*sqrt((sigma[1]-h[1])*(sigma[2]+h[2])));
> b:=sqrt((omega[m]+sigma[m]+2)*(omega[m]-sigma[m])*(omega[p]-
sigma[m]+2)*(omega[p]+sigma[m]+4)/(64*(sigma[1]+1)*(sigma[1]+2)*(sigma[2])*(sigma
[2]+1)))*sqrt((sigma[1]+h[1]+2)*(sigma[2]+h[2])));
> c:=sqrt((omega[m]+sigma[m])*(omega[m]-sigma[m]+2)*(omega[p]-
sigma[m]+4)*(omega[p]+sigma[m]+2)/(64*(sigma[1])*(sigma[1]+1)*(sigma[2]+1)*(sigma
[2]+2)))*sqrt((sigma[1]-h[1])*(sigma[2]-h[2]+2)));
> ni:=(omega[1,2]+2)*(omega[2,2]+1)*(omega[1,2]-
omega[2,2]+1)*(omega[1,2]+omega[2,2]+3)/6;
> for nh from 1 to ni do states[nh]:=[]: od:
> count:=0;
> for Delta[1,2] from omega[1,2] to omega[2,2] by -1 do
> for omega[1,1] from Delta[1,2] to Delta[1,2]-omega[2,2] by -1 do
> for h[1] from -omega[1,1] to 0 by 2 do
> s[2]:=omega[1,2]+omega[2,2]+omega[1,1]-2*Delta[1,2];
> for h[2] from -s[2] to 0 by 2 do
> count:=count+1;
> states[count]:=[s[2],omega[1,1],h[2],h[1]];
> print(states[count]);
> #pol[count]:=z1^((s[2]-
h[2])/2)*z3^((s[2]+h[2])/2)*z4^((omega[1,1]+h[1])/2)*sqrt(binomial(omega[1,2],omega[1,
1])*binomial(omega[1,1],(omega[1,1]+h[1])/2)*binomial(s[2],(s[2]+h[2])/2));
> #print(pol[count]);print(states[count]);
> #if h[1]=-omega[1,2] and h[2]=-omega[2,2] then print(count,omega[1,1],s[2],h[1],h[2])
fi;
> od;od;od;od;
> for Delta[1,2] from omega[1,2] to omega[2,2] by -1 do
> for omega[1,1] from Delta[1,2] to Delta[1,2]-omega[2,2] by -1 do
> for h[1] from omega[1,1] to 1 by -2 do

```

```

> s[2]:=omega[1,2]+omega[2,2]+omega[1,1]-2*Delta[1,2];
> for h[2] from -s[2] to 0 by 2 do
> count:=count+1;
> states[count]:=[s[2],omega[1,1],h[2],h[1]];
> print(states[count]);
> #pol[count]:=z1^((s[2]-
h[2])/2)*z3^((s[2]+h[2])/2)*z4^((omega[1,1]+h[1])/2)*sqrt(binomial(omega[1,2],omega[1,
1])*binomial(omega[1,1],(omega[1,1]+h[1])/2)*binomial(s[2],(s[2]+h[2])/2));
> #print(pol[count]);print(states[count]);
> #if h[1]=-omega[1,2] and h[2]=-omega[2,2] then print(count,omega[1,1],s[2],h[1],h[2])
fi;
> od;od;od;od;
> for Delta[1,2] from omega[1,2] to omega[2,2] by -1 do
> for omega[1,1] from Delta[1,2] to Delta[1,2]-omega[2,2] by -1 do
> for h[1] from omega[1,1] to 1 by -2 do
> s[2]:=omega[1,2]+omega[2,2]+omega[1,1]-2*Delta[1,2];
> for h[2] from s[2] to 1 by -2 do
> count:=count+1;
> states[count]:=[s[2],omega[1,1],h[2],h[1]];
> print(states[count]);
> #pol[count]:=z1^((s[2]-
h[2])/2)*z3^((s[2]+h[2])/2)*z4^((omega[1,1]+h[1])/2)*sqrt(binomial(omega[1,2],omega[1,
1])*binomial(omega[1,1],(omega[1,1]+h[1])/2)*binomial(s[2],(s[2]+h[2])/2));
> #print(pol[count]);print(states[count]);
> #if h[1]=-omega[1,2] and h[2]=-omega[2,2] then print(count,omega[1,1],s[2],h[1],h[2])
fi;
> od;od;od;od;
> for Delta[1,2] from omega[1,2] to omega[2,2] by -1 do
> for omega[1,1] from Delta[1,2] to Delta[1,2]-omega[2,2] by -1 do
> for h[1] from -omega[1,1] to 0 by 2 do
> s[2]:=omega[1,2]+omega[2,2]+omega[1,1]-2*Delta[1,2];
> for h[2] from s[2] to 1 by -2 do
> count:=count+1;
> states[count]:=[s[2],omega[1,1],h[2],h[1]];
> print(states[count]);
> #pol[count]:=z1^((s[2]-
h[2])/2)*z3^((s[2]+h[2])/2)*z4^((omega[1,1]+h[1])/2)*sqrt(binomial(omega[1,2],omega[1,
1])*binomial(omega[1,1],(omega[1,1]+h[1])/2)*binomial(s[2],(s[2]+h[2])/2));
> #print(pol[count]);print(states[count]);
> #if h[1]=-omega[1,2] and h[2]=-omega[2,2] then print(count,omega[1,1],s[2],h[1],h[2])
fi;
> od;od;od;od;
> count,ni;
> for nw from 1 to 10 do A[nw]:=array(1..ni,1..ni,sparse) od:
> for n1 from 1 to ni do
> for n2 from 1 to ni do
> aux1:=states[n1];

```

```

> S2:=aux1[1];
> S1:=aux1[2];
> H2:=aux1[3];
> H1:=aux1[4];
> aux2:=states[n2];
> s2:=aux2[1];
> s1:=aux2[2];
> h2:=aux2[3];
> h1:=aux2[4];
> if n1=n2 then A[1][n1,n1]:=h1;A[2][n1,n1]:=h2;fi;
> if S1=s1 and S2=s2 and H1=h1+2 and H2=h2 then
> A[9][n1,n2]:=sqrt(s1*(s1+2)-h1*(h1+2))/sqrt(2);
> fi;
> if S1=s1 and S2=s2 and H2=h2+2 and H1=h1 then
> A[5][n1,n2]:=sqrt(s2*(s2+2)-h2*(h2+2))/sqrt(2);
> fi;
> if H1=h1+1 and H2=h2-1 then
> #print(n1,n2,aux1,aux2);
> if S1=s1+1 and S2=s2+1 then
> A[3][n1,n2]:=a;
> #print(n1,n2,K[4][n1,n2]);
> fi;
> if S1=s1+1 and S2=s2-1 then
> A[3][n1,n2]:=b;
> #print(n1,n2,K[4][n1,n2]);
> fi;
>
> if S1=s1-1 and S2=s2+1 then
> #print(s1,s2,h1,h2);
>
> A[3][n1,n2]:=-c;
> #print(n1,n2,c);
> #print(s1,s2,h1,h2);
> fi;
> if S1=s1-1 and S2=s2-1 then
> A[3][n1,n2]:=d;
> fi;
> fi;
> od;od;
> A[4]:=transpose(A[3]);
> A[6]:=transpose(A[5]);
> A[10]:=transpose(A[9]);
> A[7]:=map(simplify,1/sqrt(2)*evalm(A[3]&*A[5]-A[5]&*A[3]));
> A[8]:=transpose(A[7]);
> map(simplify,evalm(A[3]&*A[5]-A[5]&*A[3]-A[7]*sqrt(2))):
The matrix Phi1 is the symplectic bilinear canonical form . A group elemnt obey transpose(g)
* Phi1 * G = Phi1;

```

```

> eta:=matrix([[0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1], [-1, 0, 0, 0], [0, -1, 0, 0]]);
Below we will evaluate the commutators of the algebra sp[4] and so we will take the
structure constants of the algebra.
> for i from 1 to 10 do
> for j from i to 10 do
> p[i,j] :=evalm((A[i]&*A[j])-(A[j]&*A[i]));
> p[j,i] :=-p[i,j];
> p[i,i] :=0
> od:od:
Coordinates of A3: (1,-1)
Coordinates of A4: (-1,1)
> evalm(p[1,3]-A[3]):
> evalm(p[2,3]+A[3]):
> evalm(p[1,4]+A[4]):
> evalm(p[2,4]-A[4]):
Coordinates of A5: (0,2)
Coordinates of A6: (0,-2)
> evalm(p[1,5]-0*A[5]):
> evalm(p[2,5]-2*A[5]):
> evalm(p[1,6]+0*A[6]):
> evalm(p[2,6]+2*A[6]):
Coordinates of A7: (1,1)
Coordinates of A8: (-1,-1)
> evalm(p[1,7]-1*A[7]):
> evalm(p[2,7]-1*A[7]):
> evalm(p[1,8]+1*A[8]):
> evalm(p[2,8]+1*A[8]):
Coordinates of A9: (2,0)
Coordinates of A10: (-2,0)
> evalm(p[1,9]-2*A[9]):
> evalm(p[2,9]-0*A[9]):
> evalm(p[1,10]+2*A[10]):
> evalm(p[2,10]+0*A[10]):
> evalm(p[3,4]-A[1]+A[2]):
> evalm(p[5,6]-2*A[2]):
> evalm(p[7,8]-1*A[2]-1*A[1]):
> evalm(p[9,10]-2*A[1]):
> map(simplify,evalm(p[3,5]-sqrt(2)*A[7]]):
> evalm(p[3,6]):
> map(simplify,evalm(p[3,7]-sqrt(2)*A[9]]):
> map(simplify,evalm(p[3,8]+sqrt(2)*A[6]]):
> evalm(p[3,9]):
> map(simplify,evalm(p[3,10]+sqrt(2)*A[8]]):
> evalm(p[4,5]):
> map(simplify,evalm(p[4,6]+sqrt(2)*A[8]]):
> map(simplify,evalm(p[4,7]-sqrt(2)*A[5]]):
> map(simplify,evalm(p[4,8]+sqrt(2)*A[10]]):

```

```

> map(simplify,evalm(p[4,9]-sqrt(2)*A[7])):
> evalm(p[4,10]):
> evalm(p[5,7]):
> map(simplify,evalm(p[5,8]-sqrt(2)*A[4])):
> evalm(p[5,9]):
> evalm(p[5,10]):
> map(simplify,evalm(p[6,7]+sqrt(2)*A[3])):
> evalm(p[6,8]):
> evalm(p[6,9]):
> evalm(p[6,10]):
> evalm(p[7,9]):
> map(simplify,evalm(p[7,10]-sqrt(2)*A[4])):
> map(simplify,evalm(p[8,9]+sqrt(2)*A[3])):
> evalm(p[8,10]):
> for k from 1 to 10 do
> trace(evalm(transpose(A[k])&*A[k]));od:

```

Below we calculate in another way and save in a vector the structure constants of the $sp(4)$ algebra. Then we evaluate the Cartan's tensor in a canonical form to $sp(4)$ algebra.

```

> for i from 1 to 10 do
> for j from i to 10 do
> for k from 1 to 10 do
> c[i,i,k] :=0;
> c[i,j,k] :=(trace(evalm(transpose(A[k])&*p[i,j])))/trace(evalm(transpose(A[k])&*A[k]));
> c[j,i,k] :=-c[i,j,k];
> od;od;od:
> for km from 1 to 10 do
> for k from 1 to 10 do
> ge[km,k] := 0;
> for i from 1 to 10 do
> for j from 1 to 10 do
> alpha:=c[km,i,j]*c[k,j,i];
> ge[km,k]:=ge[km,k]+alpha;
> od;od;od;od:
> G:=array(1..10,1..10):
> for j from 1 to 10 do
> for i from j to 10 do
> G[i,j]:=ge[i,j];
> G[j,i]:=G[i,j];
> od;od:
> evalm(G):
> inG:=evalm(inverse(G)):

```

Now we begin to calculate a general element of the group $Sp(4)$ by exponentiating the elements of algebra one by one. We call this process by Gauss decomposition, but we make one by one element.

```

> for ie from 3 to 10 do gg[ie]:=array(1..4,1..4)od:
> for ie from 3 to 10 do
> gg[ie]:=exponential(u[ie]*A[ie]);

```

```

> od;
> exponential(u[1]*A[1]);
> exponential(u[2]*A[2]);
> delta[1]=exp(u[1]);
> delta[2]=exp(u[2]);
> gg[1]:=array(1..4,1..4,sparse):
> gg[1][1,1]:=1/delta[1]:gg[1][2,2]:=1:gg[1][3,3]:=delta[1]:gg[1][4,4]:=1:
> evalm(gg[1]);
> gg[2]:=array(1..4,1..4,sparse):
> gg[2][1,1]:=1:gg[2][2,2]:=1/delta[2]:gg[2][3,3]:=1:gg[2][4,4]:=delta[2]:
> evalm(gg[2]);
> gp:=array(1..4,1..4):
> gp:=evalm(gg[3]&*gg[5]&*gg[7]&*gg[9]);
> gn:=array(1..4,1..4):
> gn:=evalm(gg[10]&*gg[8]&*gg[6]&*gg[4]);
> gh:=array(1..4,1..4):
> gh:=evalm(gg[1]&*gg[2]);
> g:=array(1..4,1..4):
> g:=evalm(gp&*gh&*gn);

```

Above we have the general matrix of the $Sp(4)$ group in function of ten parameters. Using complex parameters, and imposing unitarity, we will have ten real parameters. The parameters $|\delta[1]|$, $|\delta[2]|$, $u[4]$, $u[6]$, $u[8]$ and $u[10]$ will be write in function of the parameters $u[3]$, $u[5]$, $u[7]$ and $u[9]$ and its conjugates. This group is called $USp(4)$.

```

> eta:=array(1..4,1..4,[[0,0,1,0],[0,0,0,1],[-1,0,0,0],[0,-1,0,0]]);

```

Below we verify that the g matrix is symplectic.

```

> map(simplify,evalm(transpose(g)&*eta&*g-eta));

```

Here we define the ψ 's vectors. These vectors are in function of the odd parameters. Then we can define dependents variables in function of these vectors.

```

> evalm(g&*e[2]);
> psi[1]:=array(1..4,1..1,[[1],[-u[3]],[u[9]*sqrt(2)+u[3]*u[7]],[u[7]]]);
> psi[2]:=array(1..4,1..1,[[0],[1],[u[3]*u[5]*sqrt(2)+u[7]],[sqrt(2)*u[5]]]);
> psi[3]:=array(1..4,1..1,[[0],[0],[1],[0]]);
> psi[4]:=array(1..4,1..1,[[0],[0],[u[3]],[1]]);
> e[1]:=array(1..4,1..1,sparse):e[1][1,1]:=1:
> e[2]:=array(1..4,1..1,sparse):e[2][2,1]:=1:
> e[3]:=array(1..4,1..1,sparse):e[3][3,1]:=1:
> e[4]:=array(1..4,1..1,sparse):e[4][4,1]:=1:

```

Below we define the columns of the g in function of the ψ 's. $\beta[i]$ is the i column.

```

> map(simplify,evalm(g&*e[1]-psi[1]/delta[1]));
> beta[1]=psi[1]/delta[1];
> map(simplify,evalm(g&*e[2]+u[4]*psi[1]/delta[1]-psi[2]/delta[2]));
> beta[2]=-u[4]*psi[1]/delta[1]+psi[2]/delta[2];
> map(simplify,evalm(g&*e[3]-(u[10]*sqrt(2)+u[8]*u[4])*psi[1]/delta[1]-
(u[8]+sqrt(2)*u[6]*u[4])*psi[2]/delta[2]-delta[1]*psi[3]-delta[2]*u[4]*psi[4]));
>

```

```

beta[3]=(u[10]*sqrt(2)+u[8]*u[4])*psi[1]/delta[1]+(u[8]+sqrt(2)*u[6]*u[4])*psi[2]/delta[2]
+delta[1]*psi[3]+delta[2]*u[4]*psi[4];

```

```

> map(simplify,evalm(g&*e[4]-u[8]*psi[1]/delta[1]-sqrt(2)*u[6]*psi[2]/delta[2]-
delta[2]*psi[4]));
> beta[4]=u[8]*psi[1]/delta[1]+sqrt(2)*u[6]*psi[2]/delta[2]+delta[2]*psi[4];
Below we wil calculate | delta[1] |, | delta[2] | and u[4], using the orthonormality of the
USp(4) matrix.
From beta[1]* . beta[1] = 1, we calculate | delta[1] |.
From beta[1]* . beta[2] = 0, we calculate | u[4] |.
From beta[2]* . beta[2] = 1, we calculate | delta[2] |.
We put these variables in function of psi's products.
|delta[1]|^2 = <psi[1]|psi[1]>=ps[1,1].
|delta[1]|^2= (ps[1,1] . ps[2,2] - ps[1,2] . ps[2,1])/ps[1,1].
u[4]= ps[1,2]/ps[1,1] . delta[1]/delta[2].
> abs(delta[1])^2=evalm(htranspose(psi[1])&*psi[1])[1,1];
> abs(delta[1])^2=ps[1,1];
> -
evalm(htranspose(psi[1])&*psi[1])[1,1]*u[4]/delta[1]+evalm(htranspose(psi[1])&*psi[2])[
1,1]/delta[2];
>
evalm(htranspose(psi[1])&*psi[1])[1,1]*u[4]/delta[1]=evalm(htranspose(psi[1])&*psi[2])[
1,1]/delta[2];
> u[4]=ps[1,2]/ps[1,1]*delta[1]/delta[2];
> -
evalm(htranspose(psi[2])&*psi[1])[1,1]*u[4]/delta[1]/conjugate(delta[2])+evalm(htranspos
e(psi[2])&*psi[2])[1,1]/delta[2]/conjugate(delta[2])-1=0;
> -ps[2,1]*ps[1,2]/ps[1,1]+ps[2,2]-1*abs(delta[2])^2=0;
> 1*abs(delta[2])^2=simplify(-ps[2,1]*ps[1,2]/ps[1,1]+ps[2,2]);
Below we use the block struture of a symplectic matrix to find de coordinates of the
parameters u6 and u10.
> x:=array(1..2,1..2):
> y:=array(1..2,1..2):
> z:=array(1..2,1..2):
> w:=array(1..2,1..2):
> for ia from 1 to 2 do
> for ie from 1 to 2 do
> x[ia,ie]:=g[ia,ie];
> y[ia,ie]:=g[ia,ie+2];
> z[ia,ie]:=g[ia+2,ie];
> w[ia,ie]:=g[ia+2,ie+2];
> od;od;
> evalm(x);
> evalm(y);
> evalm(z);
> evalm(w);
> conjugate(z[2,2])+u[3]*conjugate(z[1,2]);
> y[2,2]+u[3]*y[1,2]=-conjugate(z[2,2])-u[3]*conjugate(z[1,2]);
> u[6]/delta[2]=conjugate(evalm(htranspose(psi[4])&*psi[1])[1,1]-
evalm(htranspose(psi[4])&*psi[3])[1,1]*evalm(htranspose(psi[3])&*psi[1])[1,1])*conjugat

```



```

e(u[4]/delta[1])-conjugate(evalm(htranspose(psi[4])&*psi[2])[1,1]-
evalm(htranspose(psi[4])&*psi[3])[1,1]*evalm(htranspose(psi[3])&*psi[2])[1,1])/conjugate
(delta[2])+evalm(htranspose(psi[3])&*psi[4])[1,1]*(evalm(htranspose(psi[1])&*psi[3])[1,1]
)*conjugate(u[4]/delta[1])-evalm(htranspose(psi[2])&*psi[3])[1,1]/conjugate(delta[2]));
> u[6]=delta[2]/conjugate(delta[2])*simplify((ps[1,4]-ps[3,4]*ps[1,3])*ps[2,1]/ps[1,1]-
ps[2,4]+ps[2,3]*ps[3,4]+ps[3,4]*ps[1,3]*ps[2,1]/ps[1,1]-ps[3,4]*ps[2,3]);
> u[10]=delta[1]*(evalm(htranspose(psi[1])&*psi[3])[1,1]*conjugate(u[4]/delta[1])-
evalm(htranspose(psi[2])&*psi[3])[1,1]/conjugate(delta[2]));
> u[10]=delta[1]/conjugate(delta[2])*simplify(ps[1,3]*ps[2,1]/ps[1,1]-ps[2,3]);
> y[1,1]+conjugate(z[1,1]);
> u[10]=solve(y[1,1]+conjugate(z[1,1]),u[10]);
> (-
ps[1,2]/ps[1,1]*delta[1]/delta[2]*delta[1]/conjugate(delta[2])*simplify(ps[1,3]*ps[2,1]/ps[1
,1]-ps[2,3])-conjugate(1/delta[1])*delta[1]*ps[1,3]);
> u[10]=delta[1]^2/ps[1,1]*simplify(-ps[1,2]/(ps[1,1]*ps[2,2]-
ps[1,2]*ps[2,1])*(ps[1,3]*ps[2,1]-ps[2,3]*ps[1,1])-ps[1,3]);
> assume(aa[1],real,aa[2],real,al[1],real,al[2],real);
> delta[1]=sqrt(ps[1,1])*exp(I*aa[1]);
> delta[2]=sqrt((ps[1,1]*ps[2,2]-ps[1,2]*ps[2,1])/ps[1,1])*exp(I*aa[2]);
> u[4]=ps[1,2]/sqrt(ps[1,1]*ps[2,2]-ps[1,2]*ps[2,1])*exp(I*(aa[1]-aa[2]));
> u[10] = ps[1,1]*(-ps[1,2]*ps[2,3]+ps[1,3]*ps[2,2])/(-
ps[1,1]*ps[2,2]+ps[1,2]*ps[2,1])*exp(2*I*aa[1])/sqrt(2);
> u[6]=(ps[2,1]*ps[1,4]-ps[2,4]*ps[1,1])/ps[1,1]/sqrt(2)*exp(2*I*aa[2]);
> u[8]=exp(I*(aa[1]+aa[2]))/sqrt((ps[1,1]*ps[2,2]-ps[1,2]*ps[2,1]))*(ps[1,3]*ps[2,1]-
ps[2,3]*ps[1,1]);
Now that we have the constraints that impose the unitary symplectic struture, we substitue
that on the symplectic matrix to obtain gn, belonging to USp(4) group.
> gn:=subs(delta[1]=sqrt(ps[1,1])*exp(I*aa[1]),delta[2]=sqrt((ps[1,1]*ps[2,2]-
ps[1,2]*ps[2,1])/ps[1,1])*exp(I*aa[2]),u[4]=ps[1,2]/(ps[1,1]*ps[2,2]-
ps[1,2]*ps[2,1])^(1/2)*exp(I*(aa[1]-aa[2])),u[10]=ps[1,1]*(-
ps[1,2]*ps[2,3]+ps[1,3]*ps[2,2])/(-
ps[1,1]*ps[2,2]+ps[1,2]*ps[2,1])*exp(2*I*aa[1])/sqrt(2),u[6]=(ps[2,1]*ps[1,4]-
ps[2,4]*ps[1,1])/ps[1,1]/sqrt(2)*exp(2*I*aa[2]),u[8]=exp(I*(aa[1]+aa[2]))/(ps[1,1]*ps[2,2]-
ps[1,2]*ps[2,1])^(1/2)*(ps[1,3]*ps[2,1]-ps[2,3]*ps[1,1]),evalm(g));
>
gn:=subs(ps[1,1]=evalm(htranspose(psi[1])&*psi[1])[1,1],ps[2,2]=evalm(htranspose(psi[2]
)&*psi[2])[1,1],ps[1,2]=evalm(htranspose(psi[1])&*psi[2])[1,1],ps[2,1]=evalm(htranspose(
psi[2])&*psi[1])[1,1],ps[1,3]=evalm(htranspose(psi[1])&*psi[3])[1,1],ps[2,3]=evalm(htran
sponse(psi[2])&*psi[3])[1,1],ps[2,4]=evalm(htranspose(psi[2])&*psi[4])[1,1],ps[1,4]=evalm
(htranspose(psi[1])&*psi[4])[1,1],conjugate(u[3])=p[4],conjugate(u[9])=p[10],conjugate(u[
5])=p[6],conjugate(u[7])=p[8],conjugate(u[9]*sqrt(2)+u[3]*u[7])=p[10]*sqrt(2)+p[4]*p[8],
conjugate(u[3]*u[5]*sqrt(2)+u[7])=p[4]*p[6]*sqrt(2)+p[8],evalm(gn));
Below we verify the matrices that belongs to the algebra usp(4) and verify these properties.
> gl1:=map(diff,evalm(gn),aa[1]);
>
ggl[1]:=simplify(evalm(subs(aa[1]=0,aa[2]=0,u[3]=0,u[5]=0,u[7]=0,u[9]=0,p[4]=0,p[6]=0,
p[8]=0,p[10]=0,evalm(gl1))*aa[1]));

```

```

> gl2:=map(diff,evalm(gn),aa[2]):
>
ggl[2]:=simplify(evalm(subs(aa[1]=0,aa[2]=0,u[3]=0,u[5]=0,u[7]=0,u[9]=0,p[4]=0,p[6]=0,
p[8]=0,p[10]=0,evalm(gl2))*aa[2]));
> gl3:=map(diff,evalm(gn),u[3]):
>
ggl[3]:=simplify(evalm(subs(aa[1]=0,aa[2]=0,u[3]=0,u[5]=0,u[7]=0,u[9]=0,p[4]=0,p[6]=0,
p[8]=0,p[10]=0,evalm(gl3))*q[3]));
> gl4:=map(diff,evalm(gn),p[4]):
>
ggl[4]:=simplify(evalm(subs(aa[1]=0,aa[2]=0,u[3]=0,u[5]=0,u[7]=0,u[9]=0,p[4]=0,p[6]=0,
p[8]=0,p[10]=0,evalm(gl4))*q[4]));
> gl5:=map(diff,evalm(gn),u[5]):
>
ggl[5]:=simplify(evalm(subs(aa[1]=0,aa[2]=0,u[3]=0,u[5]=0,u[7]=0,u[9]=0,p[4]=0,p[6]=0,
p[8]=0,p[10]=0,evalm(gl5))*q[5]));
> gl6:=map(diff,evalm(gn),p[6]):
>
ggl[6]:=simplify(evalm(subs(aa[1]=0,aa[2]=0,u[3]=0,u[5]=0,u[7]=0,u[9]=0,p[4]=0,p[6]=0,
p[8]=0,p[10]=0,evalm(gl6))*q[6]));
> gl7:=map(diff,evalm(gn),u[7]):
>
ggl[7]:=simplify(evalm(subs(aa[1]=0,aa[2]=0,u[3]=0,u[5]=0,u[7]=0,u[9]=0,p[4]=0,p[6]=0,
p[8]=0,p[10]=0,evalm(gl7))*q[7]));
> gl8:=map(diff,evalm(gn),p[8]):
>
ggl[8]:=simplify(evalm(subs(aa[1]=0,aa[2]=0,u[3]=0,u[5]=0,u[7]=0,u[9]=0,p[4]=0,p[6]=0,
p[8]=0,p[10]=0,evalm(gl8))*q[8]));
> gl9:=map(diff,evalm(gn),u[9]):
>
ggl[9]:=simplify(evalm(subs(aa[1]=0,aa[2]=0,u[3]=0,u[5]=0,u[7]=0,u[9]=0,p[4]=0,p[6]=0,
p[8]=0,p[10]=0,evalm(gl9))*q[9]));
> gl10:=map(diff,evalm(gn),p[10]):
>
ggl[10]:=simplify(evalm(subs(aa[1]=0,aa[2]=0,u[3]=0,u[5]=0,u[7]=0,u[9]=0,p[4]=0,p[6]=0,
p[8]=0,p[10]=0,evalm(gl10))*q[10]));
>
> gl:=evalm(sum(ggl[nn],nn=1..10));
> evalm(transpose(gl)&*eta+eta&*gl);
> conduit:=evalm(htranspose(gl)+gl);
>
subs(conjugate(q[3])=q[4],conjugate(q[4])=q[3],conjugate(q[5])=q[6],conjugate(q[6])=q[5],
conjugate(q[7])=q[8],conjugate(q[8])=q[7],conjugate(q[9])=q[10],conjugate(q[10])=q[9],e
valm(conduit));
> evalm(gl);
> gb:=array(1..4,1..4);
> evalm(g);

```

```

> g[4,2];
> gb[1,1]:=1/delta[1]:gb[2,1]:=-u[3]/delta[1]:gb[1,2]:=-
1/delta[1]*u[4]:gb[2,2]:=u[3]/delta[1]*u[4]+1/delta[2]:gb[3,1]:=(u[3]*u[7]+u[9]*2^(1/2))/d
elta[1]:gb[4,1]:=u[7]/delta[1]:gb[3,2]:=-
(u[3]*u[7]+u[9]*2^(1/2))/delta[1]*u[4]+(u[3]*u[5]*2^(1/2)+u[7])/delta[2]:gb[4,2]:=-
u[7]/delta[1]*u[4]+u[5]*2^(1/2)/delta[2]:gb[3,3]:=1/conjugate(delta[1]):gb[4,3]:=-
conjugate(u[3])/conjugate(delta[1]):gb[3,4]:=-
1/conjugate(delta[1])*conjugate(u[4]):gb[4,4]:=conjugate(u[3])/conjugate(delta[1])*conjug
ate(u[4])+1/conjugate(delta[2]):gb[1,3]:=-
(conjugate(u[3])*conjugate(u[7])+conjugate(u[9])*2^(1/2))/conjugate(delta[1]):gb[2,3]:=-
conjugate(u[7])/conjugate(delta[1]):gb[1,4]:=(conjugate(u[3])*conjugate(u[7])+conjugate(u
[9])*2^(1/2))/conjugate(delta[1])*conjugate(u[4])-
(conjugate(u[3])*conjugate(u[5])*2^(1/2)+conjugate(u[7]))/conjugate(delta[2]):gb[2,4]:=co
njugate(u[7])/conjugate(delta[1])*conjugate(u[4])-
conjugate(u[5])*2^(1/2)/conjugate(delta[2]):
Below we change the notation, just to simplify our calculations.
> gn:=(subs(conjugate(delta[1])=sqrt(ps[1,1])*exp(-
I*aa[1]),delta[1]=sqrt(ps[1,1])*exp(I*aa[1]),conjugate(delta[2])=sqrt((ps[1,1]*ps[2,2]-
ps[1,2]*ps[2,1])/ps[1,1])*exp(-I*aa[2]),delta[2]=sqrt((ps[1,1]*ps[2,2]-
ps[1,2]*ps[2,1])/ps[1,1])*exp(I*aa[2]),conjugate(u[4])=ps[2,1]/(ps[1,1]*ps[2,2]-
ps[1,2]*ps[2,1])^(1/2)*exp(-I*(aa[1]-aa[2])),u[4]=ps[1,2]/(ps[1,1]*ps[2,2]-
ps[1,2]*ps[2,1])^(1/2)*exp(I*(aa[1]-aa[2])),evalm(gb)));
>
gn:=subs(ps[1,1]=evalm(htranspose(psi[1])&*psi[1])[1,1],ps[1,2]=evalm(htranspose(psi[1]
)&*psi[2])[1,1],ps[2,1]=evalm(htranspose(psi[2])&*psi[1])[1,1],ps[2,2]=evalm(htranspose(
psi[2])&*psi[2])[1,1],conjugate(u[3])=v[4],conjugate(u[5])=v[6],conjugate(u[7])=v[8],conj
ugate(u[9])=v[10],u[3]=v[3],u[5]=v[5],u[7]=v[7],u[9]=v[9],conjugate(v[7]*v[3]+v[9]*2^(1
/2))=(v[8]*v[4]+v[10]*2^(1/2)),conjugate(v[3]*v[5]*2^(1/2)+v[7])=(v[4]*v[6]*2^(1/2)+v[
8]),evalm(gn)):
> evalm(gb);
> evalm(g);
>
>
>
Below we obtain the Jacobian matrix and the multiplication rules to USp(4)
> ggn:=array(1..4,1..4);
>
ggn:=subs(aa[1]=al[1],aa[2]=al[2],v[3]=vl[3],v[4]=vl[4],v[5]=vl[5],v[6]=vl[6],v[7]=vl[7],v
[8]=vl[8],v[9]=vl[9],v[10]=vl[10],evalm(gn)):
> ju:=evalm(gn&*ggn):
> V:=array(1..10,1..10);
> VV:=array(1..10,1..10);
> ln(gn[3,3]/gn[1,1]);
> all[1]:=(ln(ju[3,3])-ln(ju[1,1]))/2/I:
> d[1]:=diff(all[1],al[1]):
>
V[1,1]:=simplify(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]

```

```

]=0,vl[10]=0,d[1])):
> VV[1,1]:=1:
> d[2]:=diff(all[1],al[2]):
>
V[1,2]:=simplify(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]
]=0,vl[10]=0,d[2])):
> VV[1,2]:=0:
> d[3]:=diff(all[1],vl[3]):
>
V[1,3]:=simplify(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[3])):
> VV[1,3]:=1/2*I*(ps[1,2])/(delta[2]*conjugate(delta[1])):
> d[4]:=diff(all[1],vl[4]):
>
V[1,4]:=simplify(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[4])):
> VV[1,4]:=-1/2*I*(ps[2,1])/(delta[1]*conjugate(delta[2])):
> d[5]:=diff(all[1],vl[5]):
>
V[1,5]:=simplify(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[5])):
> VV[1,5]:=0:
> d[6]:=diff(all[1],vl[6]):
>
V[1,6]:=simplify(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[6])):
> VV[1,6]:=0:
> d[7]:=diff(all[1],vl[7]):
>
V[1,7]:=simplify(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[7])):
> VV[1,7]:=1/2*I*(ps[1,3]/delta[1]/conjugate(delta[1])*ps[2,1]-
ps[2,3]/conjugate(delta[2])*delta[1]):
> d[8]:=diff(all[1],vl[8]):
>
V[1,8]:=simplify(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[8])):
> VV[1,8]:=-1/2*I*(ps[1,2]/delta[1]/conjugate(delta[1])*ps[3,1]-
ps[3,2]*conjugate(delta[1])/delta[2]):
> d[9]:=diff(all[1],vl[9]):
>
V[1,9]:=simplify(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[9])):
> VV[1,9]:=-1/2*I*ps[1,3]/conjugate(delta[1])*2^(1/2)*delta[1]:
> d[10]:=diff(all[1],vl[10]):
>
V[1,10]:=simplify(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[

```

```

10]=0,d[10]):
> VV[1,10]:=-1/2*I*ps[1,3]*conjugate(delta[1])*2^(1/2)/delta[1]:
> (ln(simplify((gn[4,4]-gn[4,3]*gn[3,4]/gn[3,3])/(gn[2,2]-gn[2,1]*gn[1,2]/gn[1,1]))))/2/I:
> all[2]:=(ln((ju[4,4]-ju[4,3]*ju[3,4]/ju[3,3])/(ju[2,2]-ju[2,1]*ju[1,2]/ju[1,1])))/2/I:
> d[1]:=diff(all[2],al[1]):
>
V[2,1]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[1])):
> VV[2,1]:=0:
> d[2]:=diff(all[2],al[2]):
>
V[2,2]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[2])):
> VV[2,2]:=1:
> d[3]:=diff(all[2],vl[3]):
>
V[2,3]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[3])):
> VV[2,3]:=-1/2*I/conjugate(delta[1])/(delta[2])*ps[1,2]:
> d[4]:=diff(all[2],vl[4]):
>
V[2,4]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[4])):
> VV[2,4]:=1/2*I/conjugate(delta[2])/(delta[1])*ps[2,1]:
> d[5]:=diff(all[2],vl[5]):
>
V[2,5]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[5])):
> VV[2,5]:=1/2*I*delta[2]*(ps[1,4]/delta[1]/conjugate(delta[1])*ps[2,1]-
ps[2,4]/conjugate(delta[2])*2^(1/2)):
> d[6]:=diff(all[2],vl[6]):
>
V[2,6]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[6])):
> VV[2,6]:=-1/2*I/delta[2]*(ps[1,2]/delta[1]/conjugate(delta[1])*ps[4,1]-
ps[4,2]*conjugate(delta[2])*2^(1/2)):
> d[7]:=diff(all[2],vl[7]):
>
V[2,7]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[7])):
> VV[2,7]:=1/2*I*delta[2]*(-
ps[1,4]+(ps[1,4]/conjugate(delta[1])/delta[1])*ps[2,1]/conjugate(delta[2])/delta[2]-
ps[2,4]/conjugate(delta[2])/delta[2])*ps[1,2])/conjugate(delta[1]):
> d[8]:=diff(all[2],vl[8]):
>
V[2,8]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[8])):

```

```

> VV[2,8]:=-1/2*I/delta[1]*(-
ps[4,1]+(ps[1,2]/conjugate(delta[1])/delta[1]*ps[4,1]/conjugate(delta[2])/delta[2]-
ps[4,2]/conjugate(delta[2])/delta[2]*ps[2,1])*conjugate(delta[2]):
> d[9]:=diff(all[2],vl[9]):
>
V[2,9]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[9])):
> VV[2,9]:=-1/2*I*ps[1,4]/conjugate(delta[1])^2*2^(1/2)*ps[1,2]:
> d[10]:=diff(all[2],vl[10]):
>
V[2,10]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[
10]=0,d[10])):
> VV[2,10]:=1/2*I*ps[4,1]/delta[1]^2*2^(1/2)*ps[2,1]:
> -gn[2,1]/gn[1,1];
> all[3]:=-ju[2,1]/ju[1,1]:
> d[1]:=diff(all[3],al[1]):
>
V[3,1]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[1])):
> VV[3,1]:=0:
> d[2]:=diff(all[3],al[2]):
>
V[3,2]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[2])):
> VV[3,2]:=0:
> d[3]:=diff(all[3],vl[3]):
>
V[3,3]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[3])):
> VV[3,3]:=delta[1]/delta[2]:
> d[4]:=diff(all[3],vl[4]):
>
V[3,4]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[4])):
> VV[3,4]:=0:
> d[5]:=diff(all[3],vl[5]):
>
V[3,5]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[5])):
> VV[3,5]:=0:
> d[6]:=diff(all[3],vl[6]):
>
V[3,6]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[6])):
> VV[3,6]:=0:
> d[7]:=diff(all[3],vl[7]):
>

```

```

V[3,7]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[7])):
> VV[3,7]:=(-ps[1,4]/conjugate(delta[1])*ps[2,1]+ps[2,4]*delta[1])/conjugate(delta[2]):
> d[8]:=diff(all[3],vl[8]):
>
V[3,8]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[8])):
> VV[3,8]:=0:
> d[9]:=diff(all[3],vl[9]):
>
V[3,9]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[9])):
> VV[3,9]:=ps[1,4]/conjugate(delta[1])*2^(1/2)*delta[1]:
> d[10]:=diff(all[3],vl[10]):
>
V[3,10]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[10])):
> VV[3,10]:=0:
> evalm(gb);
> -gn[4,3]/gn[3,3];
> all[4]:=-ju[4,3]/ju[3,3]:
> d[1]:=diff(all[4],al[1]):
>
V[4,1]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[1])):
> VV[4,1]:=0:
> d[2]:=diff(all[4],al[2]):
>
V[4,2]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[2])):
> VV[4,2]:=0:
> d[3]:=diff(all[4],vl[3]):
>
V[4,3]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[3])):
> VV[4,3]:=0:
> d[4]:=diff(all[4],vl[4]):
>
V[4,4]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[4])):
> VV[4,4]:=conjugate(delta[1])/conjugate(delta[2]):
> d[5]:=diff(all[4],vl[5]):
>
V[4,5]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[5])):
> VV[4,5]:=0:
> d[6]:=diff(all[4],vl[6]):

```

```

>
V[4,6]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[6])):
> VV[4,6]:=0:
> d[7]:=diff(all[4],vl[7]):
>
V[4,7]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[7])):
> VV[4,7]:=0:
> d[8]:=diff(all[4],vl[8]):
>
V[4,8]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[8])):
> VV[4,8]:= (-ps[1,2]/delta[1]*ps[4,1]+ps[4,2]*conjugate(delta[1]))/delta[2]:
> d[9]:=diff(all[4],vl[9]):
>
V[4,9]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[9])):
> VV[4,9]:=0:
> d[10]:=diff(all[4],vl[10]):
>
V[4,10]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[10])):
> VV[4,10]:=ps[4,1]*conjugate(delta[1])*2^(1/2)/delta[1]:
>
> evalm(gb);
> (-gn[4,1]/gn[1,1]*gn[1,2]+gn[4,2])/sqrt(2)/(gn[2,2]-gn[2,1]*gn[1,2]/gn[1,1]);
> all[5]:= (-ju[4,1]/ju[1,1]*ju[1,2]+ju[4,2])/sqrt(2)/(ju[2,2]-ju[2,1]*ju[1,2]/ju[1,1]):
> d[1]:=diff(all[5],al[1]):
>
V[5,1]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[1])):
> VV[5,1]:=0:
> d[2]:=diff(all[5],al[2]):
>
V[5,2]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[2])):
> VV[5,2]:=0:
> d[3]:=diff(all[5],vl[3]):
>
V[5,3]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[3])):
> VV[5,3]:=0:
> d[4]:=diff(all[5],vl[4]):
>
V[5,4]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[4])):

```



```

> VV[5,4]:=0:
> d[5]:=diff(all[5],vl[5]):
>
V[5,5]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[5])):
> VV[5,5]:=delta[2]^2:
> d[6]:=diff(all[5],vl[6]):
>
V[5,6]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[6])):
> VV[5,6]:=0:
> d[7]:=diff(all[5],vl[7]):
>
V[5,7]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[7])):
> VV[5,7]:=-delta[2]/conjugate(delta[1])*2^(1/2)*ps[1,2]:
> d[8]:=diff(all[5],vl[8]):
>
V[5,8]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[8])):
> VV[5,8]:=0:
> d[9]:=diff(all[5],vl[9]):
>
V[5,9]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[9])):
> VV[5,9]:=ps[1,2]^2/conjugate(delta[1])^2:
> d[10]:=diff(all[5],vl[10]):
>
V[5,10]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[10])):
> VV[5,10]:=0:
> evalm(gb);
> (gn[2,3]/gn[3,3]*gn[3,4]-gn[2,4])/sqrt(2)/(gn[4,4]-gn[4,3]*gn[3,4]/gn[3,3]);
> all[6]:=(ju[2,3]/ju[3,3]*ju[3,4]-ju[2,4])/sqrt(2)/(ju[4,4]-ju[4,3]*ju[3,4]/ju[3,3]):
> d[1]:=diff(all[6],al[1]):
>
V[6,1]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[1])):
> VV[6,1]:=0:
> d[2]:=diff(all[6],al[2]):
>
V[6,2]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[2])):
> VV[6,2]:=0:
> d[3]:=diff(all[6],vl[3]):
>
V[6,3]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[3])):

```

```

0]=0,d[3])):
> VV[6,3]:=0:
> d[4]:=diff(all[6],vl[4]):
>
V[6,4]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[4])):
> VV[6,4]:=0:
> d[5]:=diff(all[6],vl[5]):
>
V[6,5]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[5])):
> VV[6,5]:=0:
> d[6]:=diff(all[6],vl[6]):
>
V[6,6]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[6])):
> VV[6,6]:=conjugate(delta[2])^2:
> d[7]:=diff(all[6],vl[7]):
>
V[6,7]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[7])):
> VV[6,7]:=0:
> d[8]:=diff(all[6],vl[8]):
>
V[6,8]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[8])):
> VV[6,8]:=1/delta[1]*conjugate(delta[2])*2^(1/2)*ps[2,1]:
> d[9]:=diff(all[6],vl[9]):
>
V[6,9]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[9])):
> VV[6,9]:=0:
> d[10]:=diff(all[6],vl[10]):
>
V[6,10]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[10])):
> VV[6,10]:=ps[2,1]^2/delta[1]^2:
> evalm(gb);
> gn[4,1]/gn[1,1];
> all[7]:=ju[4,1]/ju[1,1]:
> d[1]:=diff(all[7],al[1]):
>
V[7,1]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[1])):
> VV[7,1]:=0:
> d[2]:=diff(all[7],al[2]):
>

```

```

V[7,2]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[2])):
> VV[7,2]:=0:
> d[3]:=diff(all[7],vl[3]):
>
V[7,3]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[3])):
> VV[7,3]:= (-ps[4,2]+ps[4,3]*ps[3,2])/delta[2]*delta[1]:
> d[4]:=diff(all[7],vl[4]):
>
V[7,4]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[4])):
> VV[7,4]:=0:
> d[5]:=diff(all[7],vl[5]):
>
V[7,5]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[5])):
> VV[7,5]:=0:
> d[6]:=diff(all[7],vl[6]):
>
V[7,6]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[6])):
> VV[7,6]:=0:
> d[7]:=diff(all[7],vl[7]):
>
V[7,7]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[7])):
> VV[7,7]:= ((conjugate(delta[2])*delta[2]+(ps[1,4]*ps[2,1]-conjugate(delta[1])*delta[1]*ps[2,4]))*(ps[4,2]-ps[4,3]*ps[3,2])/conjugate(delta[1])/delta[1]))*delta[1]/conjugate(delta[2]):
> d[8]:=diff(all[7],vl[8]):
>
V[7,8]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[8])):
> VV[7,8]:=0:
> d[9]:=diff(all[7],vl[9]):
>
V[7,9]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[9])):
> VV[7,9]:= (ps[1,2]-ps[1,4]*(ps[4,2]-ps[4,3]*ps[3,2]))*delta[1]/conjugate(delta[1]):
> d[10]:=diff(all[7],vl[10]):
>
V[7,10]:= (subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[10])):
> VV[7,10]:=0:
> evalm(gb);
> gn[2,3]/gn[3,3];

```

```

> all[8]:=-ju[2,3]/ju[3,3]:
> d[1]:=diff(all[8],al[1]):
>
V[8,1]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[1])):
> VV[8,1]:=0:
> d[2]:=diff(all[8],al[2]):
>
V[8,2]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[2])):
> VV[8,2]:=0:
> d[3]:=diff(all[8],vl[3]):
>
V[8,3]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[3])):
> VV[8,3]:=0:
> d[4]:=diff(all[8],vl[4]):
>
V[8,4]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[4])):
> VV[8,4]:=(-ps[2,4]+ps[2,3]*ps[3,4])/conjugate(delta[2])*conjugate(delta[1]):
> d[5]:=diff(all[8],vl[5]):
>
V[8,5]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[5])):
> VV[8,5]:=0:
> d[6]:=diff(all[8],vl[6]):
>
V[8,6]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[6])):
> VV[8,6]:=0:
> d[7]:=diff(all[8],vl[7]):
>
V[8,7]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[7])):
> VV[8,7]:=0:
> d[8]:=diff(all[8],vl[8]):
>
V[8,8]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[8])):
> VV[8,8]:=(delta[2]*conjugate(delta[2])+(ps[2,4]-ps[2,3]*ps[3,4])*(ps[4,1]*ps[1,2]-
delta[1]*conjugate(delta[1])*ps[4,2])/delta[1]/conjugate(delta[1]))/delta[2]*conjugate(delta
[1]):
> d[9]:=diff(all[8],vl[9]):
>
V[8,9]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[1
0]=0,d[9])):

```

```

> VV[8,9]:=0:
> d[10]:=diff(all[8],vl[10]):
>
V[8,10]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[10])):
> VV[8,10]:=(ps[2,1]-ps[4,1]*(ps[2,4]-ps[2,3]*ps[3,4]))/delta[1]*conjugate(delta[1]):
> evalm(gb);
> simplify((gn[4,1]/gn[1,1]*gn[2,1]+gn[3,1])/gn[1,1]/sqrt(2));
> all[9]:=(ju[4,1]/ju[1,1]*ju[2,1]+ju[3,1])/ju[1,1]/sqrt(2):
> d[1]:=diff(all[9],al[1]):
>
V[9,1]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[1])):
> VV[9,1]:=0:
> d[2]:=diff(all[9],al[2]):
>
V[9,2]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[2])):
> VV[9,2]:=0:
> d[3]:=diff(all[9],vl[3]):
>
V[9,3]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[3])):
> VV[9,3]:=(-ps[4,1]+ps[4,3]*ps[3,1])/delta[2]*delta[1]*2^(1/2):
> d[4]:=diff(all[9],vl[4]):
>
V[9,4]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[4])):
> VV[9,4]:=0:
> d[5]:=diff(all[9],vl[5]):
>
V[9,5]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[5])):
> VV[9,5]:=0:
> d[6]:=diff(all[9],vl[6]):
>
V[9,6]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[6])):
> VV[9,6]:=0:
> d[7]:=diff(all[9],vl[7]):
>
V[9,7]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[7])):
> VV[9,7]:=(ps[1,4]*ps[2,1]-delta[1]*conjugate(delta[1])*ps[2,4])*(ps[4,1]-ps[4,3]*ps[3,1])/conjugate(delta[2])/conjugate(delta[1])*2^(1/2):
> d[8]:=diff(all[9],vl[8]):
>

```

```

V[9,8]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[8])):
> VV[9,8]:=0:
> d[9]:=diff(all[9],vl[9]):
>
V[9,9]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[9])):
> VV[9,9]:=(delta[1]*conjugate(delta[1])-2*ps[1,4]*(ps[4,1]-ps[4,3]*ps[3,1]))*delta[1]/conjugate(delta[1]):
> d[10]:=diff(all[9],vl[10]):
>
V[9,10]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[10])):
> VV[9,10]:=0:
> evalm(gb);
> -simplify((gn[2,3]/gn[3,3]*gn[4,3]+gn[1,3])/gn[3,3]/sqrt(2));
> all[10]:=(-ju[2,3]/ju[3,3]*ju[4,3]+ju[1,3])/ju[3,3]/sqrt(2):
> d[1]:=diff(all[10],al[1]):
>
V[10,1]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[1])):
> VV[10,1]:=0:
> d[2]:=diff(all[10],al[2]):
>
V[10,2]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[2])):
> VV[10,2]:=0:
> d[3]:=diff(all[10],vl[3]):
>
V[10,3]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[3])):
> VV[10,3]:=0:
> d[4]:=diff(all[10],vl[4]):
>
V[10,4]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[4])):
> VV[10,4]:=(-ps[1,4]+ps[1,3]*ps[3,4])/conjugate(delta[2])*conjugate(delta[1])*2^(1/2):
> d[5]:=diff(all[10],vl[5]):
>
V[10,5]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[5])):
> VV[10,5]:=0:
> d[6]:=diff(all[10],vl[6]):
>
V[10,6]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[10]=0,d[6])):
> VV[10,6]:=0:

```

```

> d[7]:=diff(all[10],vl[7]):
>
V[10,7]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[
10]=0,d[7])):
> VV[10,7]:=0:
> d[8]:=diff(all[10],vl[8]):
>
V[10,8]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[
10]=0,d[8])):
> VV[10,8]:=(ps[1,2]*ps[4,1]-delta[1]*conjugate(delta[1])*ps[4,2])*(ps[1,4]-
ps[1,3]*ps[3,4])/delta[2]/delta[1]*2^(1/2):
> d[9]:=diff(all[10],vl[9]):
>
V[10,9]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,vl[
10]=0,d[9])):
> VV[10,9]:=0:
> d[10]:=diff(all[10],vl[10]):
>
V[10,10]:=(subs(al[1]=0,al[2]=0,vl[3]=0,vl[4]=0,vl[5]=0,vl[6]=0,vl[7]=0,vl[8]=0,vl[9]=0,v
l[10]=0,d[10])):
> VV[10,10]:=(delta[1]*conjugate(delta[1])-2*ps[4,1]*(ps[1,4]-
ps[1,3]*ps[3,4]))/delta[1]*conjugate(delta[1]):
We can write the jacobian matrix and its determinant give us the haar measure to the
USp(4) group.
> evalm(VV);
>
> det(VV);

```

$$\delta_1^4 \delta_2^2 (\delta_2)^2 (\delta_1)^4$$

Below we have the differential operators to the usp(4) algebra.

```

> for ia from 1 to 10 do
> R[ia]:=0;
> for ie from 1 to 10 do
> R[ia]:=R[ia]+VV[ie,ia]*DER[ie];
> od:od:

```

Below we verify the comutation relations of these operators

```

> for ia from 1 to 10 do
> rp[ia]:=0;
> for ie from 1 to 10 do
> rp[ia]:=rp[ia]+V[ie,ia]*DER[ie];
> od:od:
>
> simplify(diff(rp[3],aa[1])-2*I*rp[3]);
> simplify(diff(rp[3],aa[2])+2*I*rp[3]);

```

```
> simplify(diff(rp[4],a[1])+I*rp[4]);
> simplify(diff(rp[4],a[2])-I*rp[4]);
> simplify(diff(rp[5],a[1])-2*I*rp[5]);
> simplify(diff(rp[5],a[2])-0*I*rp[5]);
> simplify(diff(rp[6],a[1])+2*I*rp[6]);
> simplify(diff(rp[6],a[2])-0*I*rp[6]);
> simplify(diff(rp[7],a[1])-0*I*rp[7]);
> simplify(diff(rp[7],a[2])-2*I*rp[7]);
> simplify(diff(rp[8],a[1])+0*I*rp[8]);
> simplify(diff(rp[8],a[2])+2*I*rp[8]);
> simplify(diff(rp[9],a[1])-1*I*rp[9]);
> simplify(diff(rp[9],a[2])-1*I*rp[9]);
> simplify(diff(rp[10],a[1])+1*I*rp[10]);
> simplify(diff(rp[10],a[2])+1*I*rp[10]);
>
```


Program Coherent States

> restart;
 > with(linalg):

This program calculate the coherent states to the USp(4) group. We take an arbitrary representation of the sp[4] algebra using the matrix elements calculated by Bernardes, E. S.. We use the Haar measure to the usp(4) calculated by us in the program USp(4)cs. To define an arbitrary coherent state we can use the action of the raising or lowering operator on the minimal or maximal weight of an algebra, but we use operators of the group, that is, the exponential of the operator gave by the algebra.

Here we use the raising operators acting on the minimal weight of the usp(4) algebra. Then the coherent state is defined by :

$$|z\rangle = \exp(z_3 * E_3) . \exp(z_5 * E_5) . \exp(z_7 * E_7) . \exp[1/\sqrt{2} * (z_9 - z_3 * z_7) * E_9] |w_{12}, w_{22}, -w_{12}, w_{22}\rangle,$$

where the positive roots are:

$$a_3 = [1, -1], \quad a_5 = [0, 2], \quad a_7 = [1, 1], \quad a_9 = [2, 0].$$

We will define:

$$G_p = \exp(z_3 * E_3) . \exp(z_5 * E_5) . \exp(z_7 * E_7) . \exp[1/\sqrt{2} * (z_9 - z_3 * z_7) * E_9],$$

G_p is the raising part of USp(4) group after the Gauss decomposition.

The coherent state obeys the decomposition of unity that is given by:

$$\int dm(z) |z\rangle \langle z| = \text{SOMATÓRIO} \{ |S_1, S_2, h_1, h_2\rangle \langle S_1, S_2, h_1, h_2| \} = 1$$

where $dm(z)$ is obtained from the Haar measure.

The norma of this coherent state in an arbitrary representation is:

$$\langle z | z \rangle = (\langle \Psi_1 | \Psi_1 \rangle)^{2 \cdot h_1} * (\langle \Psi_2 | \Psi_2 \rangle - \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle \cdot \langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle / \langle \Psi_1 | \Psi_1 \rangle)^{2 \cdot h_2},$$

where $|\Psi_1\rangle$ and $|\Psi_2\rangle$ are vectors defined from the column 1 and 2 of the G_p matrix in the fundamental representation.

It are:

$$|\Psi_1\rangle = \text{Transpose}(1; -z_3; z_9; z_7);$$

$$|\Psi_2\rangle = \text{Transpose}(0; 1; z_3 \cdot z_5 \cdot \sqrt{2} + z_7; \sqrt{2} \cdot z_5);$$

The Haar measure in this coordinates is given by :

$$dm(z) = 1/2 * (\langle \Psi_1 | \Psi_1 \rangle)^{-4} * (\langle \Psi_2 | \Psi_2 \rangle - \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle \cdot \langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle / \langle \Psi_1 | \Psi_1 \rangle)^{-2}$$

We know, from the USp(4)cs program, that :

$$|D_1|^2 = \langle \Psi_1 | \Psi_1 \rangle,$$

$$|D_2|^2 = (\langle \Psi_2 | \Psi_2 \rangle - \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle \cdot \langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle / \langle \Psi_1 | \Psi_1 \rangle),$$

and $|D_1|$ don't depends of z_5 , this is importante because in the symmetric representations, $w_{22}=0$, the integral on z_5 of

$|D_2|^{-4}$, is a constant, $\pi/2$, and we can use just $|D_1|^{-8}$ to calculate the integral of $dm(z)$.

Then to an arbitrary representation of the usp(4) algebra, the measure is given by:

$$dm(z) = \frac{(w_{12}+2) \cdot (w_{22}+1) \cdot (w_{12}-w_{22}+1) \cdot (w_{12}+w_{22}+3) \cdot r_3 \cdot r_5 \cdot r_7 \cdot r_9 \cdot (df_3 \cdot df_5 \cdot df_7 \cdot df_9 \cdot dr_3 \cdot dr_5 \cdot dr_7 \cdot dr_9)}{}$$

$$\frac{\pi^4 * 2 * (\langle \text{Psi1} | \text{Psi1} \rangle)^{(4+w12)} * (\langle \text{Psi2} | \text{Psi2} \rangle - \langle \text{Psi1} | \text{Psi2} \rangle * \langle \text{Psi2} | \text{Psi1} \rangle / \langle \text{Psi1} | \text{Psi1} \rangle)^{(2+w22)}}{}$$

Using this measure we can do the decomposition of unity.

```

> omega[1,2]:=2;
> omega[2,2]:=1;
> h[1]:=h1;h[2]:=h2;
> sigma[1]:=s1;sigma[2]:=s2;
> sigma[p]:=sigma[1]+sigma[2];
> sigma[m]:=sigma[1]-sigma[2];
> omega[p]:=omega[1,2]+omega[2,2];
> omega[m]:=omega[1,2]-omega[2,2];
> a:=sqrt((omega[p]-sigma[p])*(omega[p]+sigma[p]+6)*(-
omega[m]+sigma[p]+2)*(omega[m]+sigma[p]+4)/(64*(sigma[1]+1)*(sigma[1]+2)*(sig
ma[2]+1)*(sigma[2]+2)))*sqrt((sigma[1]+h[1]+2)*(sigma[2]-h[2]+2)));
> d:=sqrt((omega[p]-sigma[p]+2)*(omega[p]+sigma[p]+4)*(-
omega[m]+sigma[p])*(omega[m]+sigma[p]+2)/(64*(sigma[1])*(sigma[1]+1)*(sigma[2])
*(sigma[2]+1)))*sqrt((sigma[1]-h[1])*(sigma[2]+h[2])));
> b:=sqrt((omega[m]+sigma[m]+2)*(omega[m]-sigma[m])*(omega[p]-
sigma[m]+2)*(omega[p]+sigma[m]+4)/(64*(sigma[1]+1)*(sigma[1]+2)*(sigma[2])*(sig
ma[2]+1)))*sqrt((sigma[1]+h[1]+2)*(sigma[2]+h[2])));
> c:=sqrt((omega[m]+sigma[m])*(omega[m]-sigma[m]+2)*(omega[p]-
sigma[m]+4)*(omega[p]+sigma[m]+2)/(64*(sigma[1])*(sigma[1]+1)*(sigma[2]+1)*(sig
ma[2]+2)))*sqrt((sigma[1]-h[1])*(sigma[2]-h[2]+2)));
> ni:=(omega[1,2]+2)*(omega[2,2]+1)*(omega[1,2]-
omega[2,2]+1)*(omega[1,2]+omega[2,2]+3)/6;
> for nh from 1 to ni do states[nh]:=[]: od;
> count:=0;
> for Delta[1,2] from omega[1,2] to omega[2,2] by -1 do
> for omega[1,1] from Delta[1,2] to Delta[1,2]-omega[2,2] by -1 do
> for h[1] from -omega[1,1] to 0 by 2 do
> s[2]:=omega[1,2]+omega[2,2]+omega[1,1]-2*Delta[1,2];
> for h[2] from -s[2] to 0 by 2 do
> count:=count+1;
> states[count]:=[s[2],omega[1,1],h[2],h[1]];
> print(states[count]);
> pol[count]:=z1^((s[2]-
h[2])/2)*z3^((s[2]+h[2])/2)*z4^((omega[1,1]+h[1])/2)*sqrt(binomial(omega[1,2],omega[
1,1])*binomial(omega[1,1],(omega[1,1]+h[1])/2)*binomial(s[2],(s[2]+h[2])/2));
> #print(pol[count]);print(states[count]);
> if h[1]=-omega[1,2] and h[2]=-omega[2,2] then print(count,omega[1,1],s[2],h[1],h[2])
fi;

```

```

> od;od;od;od;
> for Delta[1,2] from omega[1,2] to omega[2,2] by -1 do
> for omega[1,1] from Delta[1,2] to Delta[1,2]-omega[2,2] by -1 do
> for h[1] from omega[1,1] to 1 by -2 do
> s[2]:=omega[1,2]+omega[2,2]+omega[1,1]-2*Delta[1,2];
> for h[2] from -s[2] to 0 by 2 do
> count:=count+1;
> states[count]:=[s[2],omega[1,1],h[2],h[1]];
> print(states[count]);
> pol[count]:=z1^((s[2]-
h[2])/2)*z3^((s[2]+h[2])/2)*z4^((omega[1,1]+h[1])/2)*sqrt(binomial(omega[1,2],omega[
1,1])*binomial(omega[1,1],(omega[1,1]+h[1])/2)*binomial(s[2],(s[2]+h[2])/2));
> #print(pol[count]);print(states[count]);
> if h[1]=-omega[1,2] and h[2]=-omega[2,2] then print(count,omega[1,1],s[2],h[1],h[2])
fi;
> od;od;od;od;
> for Delta[1,2] from omega[1,2] to omega[2,2] by -1 do
> for omega[1,1] from Delta[1,2] to Delta[1,2]-omega[2,2] by -1 do
> for h[1] from omega[1,1] to 1 by -2 do
> s[2]:=omega[1,2]+omega[2,2]+omega[1,1]-2*Delta[1,2];
> for h[2] from s[2] to 1 by -2 do
> count:=count+1;
> states[count]:=[s[2],omega[1,1],h[2],h[1]];
> print(states[count]);
> pol[count]:=z1^((s[2]-
h[2])/2)*z3^((s[2]+h[2])/2)*z4^((omega[1,1]+h[1])/2)*sqrt(binomial(omega[1,2],omega[
1,1])*binomial(omega[1,1],(omega[1,1]+h[1])/2)*binomial(s[2],(s[2]+h[2])/2));
> #print(pol[count]);print(states[count]);
> if h[1]=-omega[1,2] and h[2]=-omega[2,2] then print(count,omega[1,1],s[2],h[1],h[2])
fi;
> od;od;od;od;
> for Delta[1,2] from omega[1,2] to omega[2,2] by -1 do
> for omega[1,1] from Delta[1,2] to Delta[1,2]-omega[2,2] by -1 do
> for h[1] from -omega[1,1] to 0 by 2 do
> s[2]:=omega[1,2]+omega[2,2]+omega[1,1]-2*Delta[1,2];
> for h[2] from s[2] to 1 by -2 do
> count:=count+1;
> states[count]:=[s[2],omega[1,1],h[2],h[1]];
> print(states[count]);
> pol[count]:=z1^((s[2]-
h[2])/2)*z3^((s[2]+h[2])/2)*z4^((omega[1,1]+h[1])/2)*sqrt(binomial(omega[1,2],omega[
1,1])*binomial(omega[1,1],(omega[1,1]+h[1])/2)*binomial(s[2],(s[2]+h[2])/2));
> #print(pol[count]);print(states[count]);
> if h[1]=-omega[1,2] and h[2]=-omega[2,2] then print(count,omega[1,1],s[2],h[1],h[2])
fi;
> od;od;od;od;

```

```

> count,ni;
> for i from 1 to ni do print(pol[i]) od;
> for nw from 1 to 10 do A[nw]:=array(1..ni,1..ni,sparse) od:
> for n1 from 1 to ni do
> for n2 from 1 to ni do
> aux1:=states[n1];
> S2:=aux1[1];
> S1:=aux1[2];
> H2:=aux1[3];
> H1:=aux1[4];
> aux2:=states[n2];
> s2:=aux2[1];
> s1:=aux2[2];
> h2:=aux2[3];
> h1:=aux2[4];
> if n1=n2 then A[1][n1,n1]:=h1;A[2][n1,n1]:=h2;fi;
> if S1=s1 and S2=s2 and H1=h1+2 and H2=h2 then
> A[9][n1,n2]:=sqrt(s1*(s1+2)-h1*(h1+2))/sqrt(2);
> fi;
> if S1=s1 and S2=s2 and H2=h2+2 and H1=h1 then
> A[5][n1,n2]:=sqrt(s2*(s2+2)-h2*(h2+2))/sqrt(2);
> fi;
> if H1=h1+1 and H2=h2-1 then
> #print(n1,n2,aux1,aux2);
> if S1=s1+1 and S2=s2+1 then
> A[3][n1,n2]:=a;
> #print(n1,n2,K[4][n1,n2]);
> fi;
> if S1=s1+1 and S2=s2-1 then
> A[3][n1,n2]:=b;
> #print(n1,n2,K[4][n1,n2]);
> fi;
>
> if S1=s1-1 and S2=s2+1 then
> #print(s1,s2,h1,h2);
>
> A[3][n1,n2]:=-c;
> #print(n1,n2,c);
> #print(s1,s2,h1,h2);
> fi;
> if S1=s1-1 and S2=s2-1 then
> A[3][n1,n2]:=d;
> fi;
> fi;
> od;od;
> A[4]:=transpose(A[3]);

```

```

> A[6]:=transpose(A[5]):
> A[10]:=transpose(A[9]):
> A[7]:=map(simplify,1/sqrt(2)*evalm(A[3]&*A[5]-A[5]&*A[3])):
> A[8]:=transpose(A[7]):
> map(simplify,evalm(A[3]&*A[5]-A[5]&*A[3]-A[7]*sqrt(2))):
We define a coherent state by the action of raising operators on the minimal weight of an
arbitrary representation of the algebra.
> for ie from 3 to 9 by 2 do gg[ie]:=array(1..ni,1..ni)od:
> for ie from 3 to 8 by 2 do
> gg[ie]:=exponential(u[ie]*A[ie]);
> od;
> gg[9]:=exponential((u[9]/sqrt(2)-u[3]*u[7]/sqrt(2))*A[9]);
> gp:=array(1..ni,1..ni):
> gp:=map(simplify,evalm(gg[3]&*gg[5]&*gg[7]&*gg[9]));
> e[1]:=array(1..ni,1..1,sparse):e[1][1,1]:=1:
> psi[1]:=array(1..ni,1..1,sparse):
> phi[1]:=array(1..ni,1..1,sparse):
> psi[1]:=evalm(gp&*e[1]):
> evalm(gp&*e[1]-psi[1]);evalm(psi[1]);
> phi[1]:=subs(u[3]=u[4],u[5]=u[6],u[7]=u[8],u[9]=u[10],evalm(psi[1]));
> for i from 1 to ni do print(pol[i],psi[1][i,1],states[i]);od;
>
> e[2]:=array(1..ni,1..1,sparse):e[2][2,1]:=1:
> psi[2]:=array(1..ni,1..1,sparse):
> phi[2]:=array(1..ni,1..1,sparse):
> psi[2]:=evalm(gp&*e[2]):
> phi[2]:=subs(u[3]=u[4],u[5]=u[6],u[7]=u[8],u[9]=u[10],evalm(psi[2]));
>
> torta:=1+(u[4]*u[6]*2^(1/2)+u[8])*(u[3]*u[5]*2^(1/2)+u[7])+2*u[6]*u[5]-(-
u[4]+u[10]*(u[3]*u[5]*2^(1/2)+u[7])+u[8]*u[5]*2^(1/2))*(-
u[3]+(u[4]*u[6]*2^(1/2)+u[8])*u[9]+u[6]*2^(1/2)*u[7])/(1+u[4]*u[3]+u[10]*u[9]+u[8]*
u[7]);
> torta:=subs(u[3]=r[3]*exp(I*f[3]),u[4]=r[3]*exp(-
I*f[3]),u[5]=r[5]*exp(I*f[5]),u[6]=r[5]*exp(-
I*f[5]),u[7]=r[7]*exp(I*f[7]),u[8]=r[7]*exp(-
I*f[7]),u[9]=r[9]*exp(I*f[9]),u[10]=r[9]*exp(-I*f[9]),torta);
> (((torta)));
> simplify(1+(r[3]*exp(-I*f[3])*r[5]*exp(-I*f[5])*2^(1/2)+r[7]*exp(-
I*f[7]))*(r[3]*exp(f[3]*I)*r[5]*exp(f[5]*I)*2^(1/2)+r[7]*exp(f[7]*I))+2*r[5]^2*exp(-
I*f[5])*exp(f[5]*I)-simplify(expand((-r[3]*exp(-I*f[3])+r[9]*exp(-
I*f[9]))*(r[3]*exp(f[3]*I)*r[5]*exp(f[5]*I)*2^(1/2)+r[7]*exp(f[7]*I))+r[7]*exp(-
I*f[7])*r[5]*exp(f[5]*I)*2^(1/2))*(-r[3]*exp(f[3]*I)+(r[3]*exp(-I*f[3])*r[5]*exp(-
I*f[5])*2^(1/2)+r[7]*exp(-I*f[7]))*r[9]*exp(f[9]*I)+r[5]*exp(-
I*f[5])*2^(1/2)*r[7]*exp(f[7]*I))/(1+r[3]^2*exp(-I*f[3])*exp(f[3]*I)+r[9]^2*exp(-
I*f[9])*exp(f[9]*I)+r[7]^2*exp(-I*f[7])*exp(f[7]*I)));

```

```

> expand(2*cos(f[3]+f[5]-f[7])*2^(1/2)*r[7]*r[3]*r[5]-2*cos(f[3]+f[5]-
f[7])*r[9]^2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]/A+2*cos(f[3]+f[5]-
f[7])*2^(1/2)*r[7]*r[3]*r[5]/A+2*r[9]^2*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)*cos(-f[9]+2*f[3]+f[5])/A-
2*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)*cos(f[9]-2*f[7]+f[5])/A+H);
> aux:=L*sin(f[5])+M*cos(f[5])+H;
> int(1/aux^2,f[5]=0..2*Pi);
> ln((-I*(M-H)/(-M^2+H^2-L^2)^(1/2))/((M-H)/(-M^2+H^2-L^2)^(1/2)*I));
> bux:=2*H*Pi/(-M^2+H^2-L^2)^(3/2);
> subs(H=1+2*r[5]^2*r[3]^2+r[7]^2+2*r[5]^2-(-2*cos(f[9]-f[7]-
f[3])*r[9]*r[7]*r[3]+4*cos(f[9]-f[7]-
f[3])*r[7]*r[5]^2*r[9]*r[3]+r[3]^2+2*r[9]^2*r[3]^2*r[5]^2+2*r[7]^2*r[5]^2+r[9]^2*r[7]
^2)/A,L=(2*r[9]^2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]/A*sin(f[3])*cos(f[7])-
2*r[9]^2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]/A*cos(f[3])*sin(f[7])-
2*2^(1/2)*r[7]*r[3]*r[5]/A*sin(f[3])*cos(f[7])+2*2^(1/2)*r[7]*r[3]*r[5]/A*cos(f[3])*sin
(f[7])-
2*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)/A*sin(f[9])+4*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)/A*sin(f[9])*cos(f[7])
^2-4*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)/A*cos(f[9])*sin(f[7])*cos(f[7])-
2*r[9]*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)/A*sin(f[9])+4*r[9]*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)/A*sin(f[9])*cos(f[3])
^2-
4*r[9]*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)/A*cos(f[9])*sin(f[3])*cos(f[3])+2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]*co
s(f[3])*sin(f[7])-2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]*sin(f[3])*cos(f[7])),M=(-
2*r[9]^2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]/A*cos(f[3])*cos(f[7])+4*r[9]*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)/A*co
s(f[9])*cos(f[3])^2+2*2^(1/2)*r[7]*r[3]*r[5]/A*sin(f[3])*sin(f[7])+2*2^(1/2)*r[7]*r[3]*r
[5]/A*cos(f[3])*cos(f[7])-2*r[9]^2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]/A*sin(f[3])*sin(f[7])-
4*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)/A*sin(f[9])*sin(f[7])*cos(f[7])-
4*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)/A*cos(f[9])*cos(f[7])^2+2*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)/A*cos(f
[9])+4*r[9]*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)/A*sin(f[9])*sin(f[3])*cos(f[3])-
2*r[9]*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)/A*cos(f[9])+2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]*cos(f[3])*cos(f[7])+2*
r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]*sin(f[3])*sin(f[7])),bux);
> cux:=2*(N*r[5]^2+P)*Pi/((Q+2*N*P)*r[5]^2+N^2*r[5]^4+P^2)^(3/2);
> int(r[5]*cux,r[5]);
> res:=limit(subs(r[5]=JJ,int(r[5]*cux,r[5])),JJ=infinity)-subs(r[5]=0,int(r[5]*cux,r[5]));
> simplify(res);
> res:=2*Pi*2/(Q+4*N*P);
> res:=subs(N=(2*r[3]^2+2-4*cos(f[9]-f[7]-f[3])*r[7]*r[9]*r[3]/A-2*r[9]^2*r[3]^2/A-
2*r[7]^2/A),P=r[7]^2+1-(-2*cos(f[9]-f[7]-
f[3])*r[9]*r[7]*r[3]+r[3]^2+r[9]^2*r[7]^2)/A,Q=(-((-
2*r[9]^2*r[3]*2^(1/2)*r[7]/A*cos(f[3])*cos(f[7])+4*r[9]*r[3]^2*2^(1/2)/A*cos(f[9])*co
s(f[3])^2+2*2^(1/2)*r[7]*r[3]/A*sin(f[3])*sin(f[7])+2*2^(1/2)*r[7]*r[3]/A*cos(f[3])*cos
(f[7])-2*r[9]^2*r[3]*2^(1/2)*r[7]/A*sin(f[3])*sin(f[7])-
4*r[9]*r[7]^2*2^(1/2)/A*sin(f[9])*sin(f[7])*cos(f[7])-
4*r[9]*r[7]^2*2^(1/2)/A*cos(f[9])*cos(f[7])^2+2*r[9]*r[7]^2*2^(1/2)/A*cos(f[9])+4*r[
9]*r[3]^2*2^(1/2)/A*sin(f[9])*sin(f[3])*cos(f[3])-
2*r[9]*r[3]^2*2^(1/2)/A*cos(f[9])+2*r[3]*2^(1/2)*r[7]*cos(f[3])*cos(f[7])+2*r[3]*2^(1/
2)*r[7]*sin(f[3])*sin(f[7]))^2-((2*r[9]^2*r[3]*2^(1/2)*r[7]/A*sin(f[3])*cos(f[7])-
2*r[9]^2*r[3]*2^(1/2)*r[7]/A*cos(f[3])*sin(f[7])-

```

```

2*2^(1/2)*r[7]*r[3]/A*sin(f[3])*cos(f[7])+2*2^(1/2)*r[7]*r[3]/A*cos(f[3])*sin(f[7])-
2*r[9]*r[7]^2*2^(1/2)/A*sin(f[9])+4*r[9]*r[7]^2*2^(1/2)/A*sin(f[9])*cos(f[7])^2-
4*r[9]*r[7]^2*2^(1/2)/A*cos(f[9])*sin(f[7])*cos(f[7])-
2*r[9]*r[3]^2*2^(1/2)/A*sin(f[9])+4*r[9]*r[3]^2*2^(1/2)/A*sin(f[9])*cos(f[3])^2-
4*r[9]*r[3]^2*2^(1/2)/A*cos(f[9])*sin(f[3])*cos(f[3])+2*r[3]*2^(1/2)*r[7]*cos(f[3])*sin
(f[7])-2*r[3]*2^(1/2)*r[7]*sin(f[3])*cos(f[7])^2),A=(1+r[3]^2+r[9]^2+r[7]^2),res);
> (simplify(res));
>
1/2*Pi*(1+r[3]^2+r[9]^2+r[7]^2)^2/expand(1+r[9]^4+8*r[9]^2*r[7]^2*sin(f[7])*cos(f[7]
)*r[3]^2*sin(f[3])*cos(f[3])-
8*r[9]^2*r[7]^2*cos(f[7])^2*r[3]^2*cos(f[3])^2+4*r[9]^2*r[7]^2*cos(f[7])^2*r[3]^2+4*
r[9]^2*r[7]^2*r[3]^2*cos(f[3])^2+2*r[9]^2*r[7]^2+2*r[9]^2*r[3]^2+2*r[7]^2+2*r[3]^2
+2*r[9]^2+2*r[3]^2*r[7]^2-8*r[9]^2*r[7]^2*cos(f[9])^2*cos(f[7])^2*r[3]^2-
4*r[3]*r[7]^3*sin(f[3])*sin(f[7])*r[9]*cos(f[9])+4*r[3]^3*r[7]*sin(f[3])*sin(f[7])*r[9]*c
os(f[9])+16*r[9]^2*r[3]^2*cos(f[9])^2*cos(f[3])^2*r[7]^2*cos(f[7])^2+16*r[9]^2*r[3]^2
*cos(f[9])*cos(f[3])^2*r[7]^2*sin(f[9])*sin(f[7])*cos(f[7])-
2*r[9]*r[3]^5*sin(f[9])*r[7]*cos(f[3])*sin(f[7])-
2*r[9]*r[3]^5*sin(f[9])*r[7]*sin(f[3])*cos(f[7])-
16*r[9]^2*r[7]^2*cos(f[9])^2*sin(f[7])*cos(f[7])*r[3]^2*sin(f[3])*cos(f[3])+2*r[9]*r[7]
^5*sin(f[9])*r[3]*cos(f[3])*sin(f[7])+4*r[3]*r[7]^3*sin(f[3])*cos(f[7])*r[9]*sin(f[9])+2*
r[9]*r[7]^5*sin(f[9])*r[3]*sin(f[3])*cos(f[7])+4*r[3]*r[7]^3*cos(f[3])*sin(f[7])*r[9]*sin(
f[9])-4*r[3]^3*r[7]*cos(f[3])*sin(f[7])*r[9]*sin(f[9])-
4*r[3]^3*r[7]*sin(f[3])*cos(f[7])*r[9]*sin(f[9])+2*r[3]^5*cos(f[9]-f[7]-f[3])*r[9]*r[7]-
4*cos(f[9]-f[7]-f[3])*r[9]*r[7]^3*r[3]-2*cos(f[9]-f[7]-f[3])*r[9]*r[7]^5*r[3]-4*cos(f[9]-
f[7]-f[3])^2*r[9]^2*r[7]^2*r[3]^2+4*r[3]^3*cos(f[9]-f[7]-
f[3])*r[9]*r[7]+2*r[9]*r[3]^5*cos(f[9])*r[7]*sin(f[3])*sin(f[7])+2*r[9]*r[7]^5*cos(f[9])
*r[3]*cos(f[3])*cos(f[7])-2*r[9]*r[7]^5*cos(f[9])*r[3]*sin(f[3])*sin(f[7])-
2*r[9]*r[3]^5*cos(f[9])*r[7]*cos(f[3])*cos(f[7])-
8*r[9]^2*r[7]^2*cos(f[9])*r[3]^2*sin(f[9])*sin(f[3])*cos(f[3])-
8*r[9]^2*r[7]^2*sin(f[9])*sin(f[7])*cos(f[7])*r[3]^2*cos(f[9])+16*r[9]^2*r[7]^2*cos(f[9]
)*cos(f[7])^2*r[3]^2*sin(f[9])*sin(f[3])*cos(f[3])-
4*r[3]^3*r[7]*cos(f[3])*cos(f[7])*r[9]*cos(f[9])+4*r[3]*r[7]^3*cos(f[3])*cos(f[7])*r[9]*
cos(f[9])-
8*r[9]^2*r[3]^2*cos(f[9])^2*cos(f[3])^2*r[7]^2+4*r[9]^2*r[7]^2*cos(f[9])^2*r[3]^2+r[
3]^4+r[7]^4);
>
1/2*Pi*(1+r[3]^2+r[9]^2+r[7]^2)^2/simplify(1+r[9]^4+8*r[9]^2*r[7]^2*sin(f[7])*cos(f[7]
)*r[3]^2*sin(f[3])*cos(f[3])-
8*r[9]^2*r[7]^2*cos(f[7])^2*r[3]^2*cos(f[3])^2+4*r[9]^2*r[7]^2*cos(f[7])^2*r[3]^2+4*
r[9]^2*r[7]^2*r[3]^2*cos(f[3])^2+2*r[9]^2*r[7]^2+2*r[9]^2*r[3]^2+2*r[7]^2+2*r[3]^2
+2*r[9]^2+2*r[3]^2*r[7]^2-
8*r[9]^2*r[7]^2*cos(f[9])^2*cos(f[7])^2*r[3]^2+12*r[9]^2*r[3]^2*cos(f[9])^2*cos(f[3])
^2*r[7]^2*cos(f[7])^2+8*r[9]^2*r[3]^2*cos(f[9])*cos(f[3])^2*r[7]^2*sin(f[9])*sin(f[7])
*cos(f[7])-8*r[9]^2*r[7]^2*cos(f[9])^2*sin(f[7])*cos(f[7])*r[3]^2*sin(f[3])*cos(f[3])-
8*r[9]^2*r[7]^2*cos(f[9])*r[3]^2*sin(f[9])*sin(f[3])*cos(f[3])-
8*r[9]^2*r[7]^2*sin(f[9])*sin(f[7])*cos(f[7])*r[3]^2*cos(f[9])+8*r[9]^2*r[7]^2*cos(f[9]

```

```

)*cos(f[7])^2*r[3]^2*sin(f[9])*sin(f[3])*cos(f[3])-
8*r[9]^2*r[3]^2*cos(f[9])^2*cos(f[3])^2*r[7]^2+4*r[9]^2*r[7]^2*cos(f[9])^2*r[3]^2+r[
3]^4+r[7]^4-
4*r[3]^2*r[7]^2*r[9]^2*cos(f[9])^2*sin(f[7])^2*sin(f[3])^2+8*r[3]^2*r[7]^2*r[9]^2*cos
(f[9])*sin(f[7])^2*sin(f[3])*sin(f[9])*cos(f[3])+8*r[3]^2*r[7]^2*r[9]^2*cos(f[9])*sin(f[7
])*sin(f[3])^2*sin(f[9])*cos(f[7])-
8*r[3]^2*r[7]^2*r[9]^2*sin(f[9])^2*sin(f[7])*cos(f[3])*cos(f[7])*sin(f[3])-
4*r[3]^2*r[7]^2*r[9]^2*sin(f[9])^2*cos(f[7])^2*sin(f[3])^2-
4*r[3]^2*r[7]^2*r[9]^2*sin(f[9])^2*sin(f[7])^2*cos(f[3])^2);
>
1/2*Pi*(1+r[3]^2+r[9]^2+r[7]^2)^2/factor(1+r[9]^4+2*r[9]^2*r[3]^2+2*r[9]^2+r[3]^4+2
*r[9]^2*r[7]^2+2*r[7]^2+2*r[3]^2*r[7]^2+r[7]^4+2*r[3]^2);
> II:=
subs(r[3]=0,int(int(int(int(r[3]*r[7]*r[9]*1/2*Pi/(1+r[3]^2+r[9]^2+r[7]^2)^4,f[3]=0..2*Pi
),f[7]=0..2*Pi),f[9]=0..2*Pi),r[3]));
> -subs(r[9]=0,int(-subs(r[7]=0,int(II,r[7])),r[9]))/2;
>
>
>
> N=(2*r[3]^2+2-4*cos(f[9]-f[7]-f[3])*r[7]*r[9]*r[3]/A-2*r[9]^2*r[3]^2/A-
2*r[7]^2/A),P=r[7]^2+1-(-2*cos(f[9]-f[7]-
f[3])*r[9]*r[7]*r[3]+r[3]^2+r[9]^2*r[7]^2)/A,Q=(-((-
2*r[9]^2*r[3]*2^(1/2)*r[7]/A*cos(f[3])*cos(f[7])+4*r[9]*r[3]^2*2^(1/2)/A*cos(f[9])*co
s(f[3])^2+2*2^(1/2)*r[7]*r[3]/A*sin(f[3])*sin(f[7])+2*2^(1/2)*r[7]*r[3]/A*cos(f[3])*cos
(f[7])-2*r[9]^2*r[3]*2^(1/2)*r[7]/A*sin(f[3])*sin(f[7])-
4*r[9]*r[7]^2*2^(1/2)/A*sin(f[9])*sin(f[7])*cos(f[7])-
4*r[9]*r[7]^2*2^(1/2)/A*cos(f[9])*cos(f[7])^2+2*r[9]*r[7]^2*2^(1/2)/A*cos(f[9])+4*r[
9]*r[3]^2*2^(1/2)/A*sin(f[9])*sin(f[3])*cos(f[3])-
2*r[9]*r[3]^2*2^(1/2)/A*cos(f[9])+2*r[3]*2^(1/2)*r[7]*cos(f[3])*cos(f[7])+2*r[3]*2^(1/
2)*r[7]*sin(f[3])*sin(f[7]))^2-((2*r[9]^2*r[3]*2^(1/2)*r[7]/A*sin(f[3])*cos(f[7])-
2*r[9]^2*r[3]*2^(1/2)*r[7]/A*cos(f[3])*sin(f[7])-
2*2^(1/2)*r[7]*r[3]/A*sin(f[3])*cos(f[7])+2*2^(1/2)*r[7]*r[3]/A*cos(f[3])*sin(f[7])-
2*r[9]*r[7]^2*2^(1/2)/A*sin(f[9])+4*r[9]*r[7]^2*2^(1/2)/A*sin(f[9])*cos(f[7])^2-
4*r[9]*r[7]^2*2^(1/2)/A*cos(f[9])*sin(f[7])*cos(f[7])-
2*r[9]*r[3]^2*2^(1/2)/A*sin(f[9])+4*r[9]*r[3]^2*2^(1/2)/A*sin(f[9])*cos(f[3])^2-
4*r[9]*r[3]^2*2^(1/2)/A*cos(f[9])*sin(f[3])*cos(f[3])+2*r[3]*2^(1/2)*r[7]*cos(f[3])*sin
(f[7])-2*r[3]*2^(1/2)*r[7]*sin(f[3])*cos(f[7]))^2);
>
> A=(1+r[3]^2+r[9]^2+r[7]^2),H=1+2*r[5]^2*r[3]^2+r[7]^2+2*r[5]^2-(-2*cos(f[9]-f[7]-
f[3])*r[9]*r[7]*r[3]+4*cos(f[9]-f[7]-
f[3])*r[7]*r[5]^2*r[9]*r[3]+r[3]^2+2*r[9]^2*r[3]^2*r[5]^2+2*r[7]^2*r[5]^2+r[9]^2*r[7]
^2)/A,L=(2*r[9]^2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]/A*sin(f[3])*cos(f[7])-
2*r[9]^2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]/A*cos(f[3])*sin(f[7])-
2*2^(1/2)*r[7]*r[3]*r[5]/A*sin(f[3])*cos(f[7])+2*2^(1/2)*r[7]*r[3]*r[5]/A*cos(f[3])*sin
(f[7])-
2*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)/A*sin(f[9])+4*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)/A*sin(f[9])*cos(f[7])

```



```

^2-4*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)/A*cos(f[9])*sin(f[7])*cos(f[7])-
2*r[9]*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)/A*sin(f[9])+4*r[9]*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)/A*sin(f[9])*cos(f[3])
^2-
4*r[9]*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)/A*cos(f[9])*sin(f[3])*cos(f[3])+2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]*co
s(f[3])*sin(f[7])-2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]*sin(f[3])*cos(f[7])),M=(-
2*r[9]^2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]/A*cos(f[3])*cos(f[7])+4*r[9]*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)/A*co
s(f[9])*cos(f[3])^2+2*2^(1/2)*r[7]*r[3]*r[5]/A*sin(f[3])*sin(f[7])+2*2^(1/2)*r[7]*r[3]*r
[5]/A*cos(f[3])*cos(f[7])-2*r[9]^2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]/A*sin(f[3])*sin(f[7])-
4*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)/A*sin(f[9])*sin(f[7])*cos(f[7])-
4*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)/A*cos(f[9])*cos(f[7])^2+2*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)/A*cos(f
[9])+4*r[9]*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)/A*sin(f[9])*sin(f[3])*cos(f[3])-
2*r[9]*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)/A*cos(f[9])+2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]*cos(f[3])*cos(f[7])+2*
r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]*sin(f[3])*sin(f[7]));
> int(r[5]^4/aux^4,f[5]=0..2*Pi);
> ln((-I*(M-H)/(-M^2+H^2-L^2)^(1/2))/((M-H)/(-M^2+H^2-L^2)^(1/2)*I));
>
> bux:=2*H*Pi*r[5]^2/(-M^2+H^2-L^2)^(5/2);
> subs(H=1+2*r[5]^2*r[3]^2+r[7]^2+2*r[5]^2-(-2*cos(f[9]-f[7]-
f[3])*r[9]*r[7]*r[3]+4*cos(f[9]-f[7]-
f[3])*r[7]*r[5]^2*r[9]*r[3]+r[3]^2+2*r[9]^2*r[3]^2*r[5]^2+2*r[7]^2*r[5]^2+r[9]^2*r[7]
^2)/A,L=(2*r[9]^2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]/A*sin(f[3])*cos(f[7])-
2*r[9]^2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]/A*cos(f[3])*sin(f[7])-
2*2^(1/2)*r[7]*r[3]*r[5]/A*sin(f[3])*cos(f[7])+2*2^(1/2)*r[7]*r[3]*r[5]/A*cos(f[3])*sin
(f[7])-
2*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)/A*sin(f[9])+4*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)/A*sin(f[9])*cos(f[7])
^2-4*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)/A*cos(f[9])*sin(f[7])*cos(f[7])-
2*r[9]*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)/A*sin(f[9])+4*r[9]*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)/A*sin(f[9])*cos(f[3])
^2-
4*r[9]*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)/A*cos(f[9])*sin(f[3])*cos(f[3])+2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]*co
s(f[3])*sin(f[7])-2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]*sin(f[3])*cos(f[7])),M=(-
2*r[9]^2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]/A*cos(f[3])*cos(f[7])+4*r[9]*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)/A*co
s(f[9])*cos(f[3])^2+2*2^(1/2)*r[7]*r[3]*r[5]/A*sin(f[3])*sin(f[7])+2*2^(1/2)*r[7]*r[3]*r
[5]/A*cos(f[3])*cos(f[7])-2*r[9]^2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]/A*sin(f[3])*sin(f[7])-
4*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)/A*sin(f[9])*sin(f[7])*cos(f[7])-
4*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)/A*cos(f[9])*cos(f[7])^2+2*r[9]*r[7]^2*r[5]*2^(1/2)/A*cos(f
[9])+4*r[9]*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)/A*sin(f[9])*sin(f[3])*cos(f[3])-
2*r[9]*r[3]^2*r[5]*2^(1/2)/A*cos(f[9])+2*r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]*cos(f[3])*cos(f[7])+2*
r[3]*r[5]*2^(1/2)*r[7]*sin(f[3])*sin(f[7])),bux);
> cux:=2*(N*r[5]^2+P)*Pi*r[5]^2/((Q+2*N*P)*r[5]^2+N^2*r[5]^4+P^2)^(5/2);
> int(r[5]*cux,r[5]=0..infinity);
> res:=4/3*Pi*(2)/(Q^2+8*Q*N*P+16*N^2*P^2);
> res:=limit(subs(r[5]=JJ,int(r[5]*cux,r[5])),JJ=infinity)-subs(r[5]=0,int(r[5]*cux,r[5]));
> simplify(res);
> res:=8/3*Pi/(Q^2+8*Q*N*P+16*N^2*P^2);
> res:=subs(N=(2*r[3]^2+2-4*cos(f[9]-f[7]-f[3])*r[7]*r[9]*r[3]/A-2*r[9]^2*r[3]^2/A-
2*r[7]^2/A),P=r[7]^2+1-(-2*cos(f[9]-f[7]-

```

```

f[3])*r[9]*r[7]*r[3]+r[3]^2+r[9]^2*r[7]^2)/A,Q=-((-
2*r[9]^2*r[3]*2^(1/2)*r[7]/A*cos(f[3])*cos(f[7])+4*r[9]*r[3]^2*2^(1/2)/A*cos(f[9])*co
s(f[3])^2+2*2^(1/2)*r[7]*r[3]/A*sin(f[3])*sin(f[7])+2*2^(1/2)*r[7]*r[3]/A*cos(f[3])*cos
(f[7])-2*r[9]^2*r[3]*2^(1/2)*r[7]/A*sin(f[3])*sin(f[7])-
4*r[9]*r[7]^2*2^(1/2)/A*sin(f[9])*sin(f[7])*cos(f[7])-
4*r[9]*r[7]^2*2^(1/2)/A*cos(f[9])*cos(f[7])^2+2*r[9]*r[7]^2*2^(1/2)/A*cos(f[9])+4*r[
9]*r[3]^2*2^(1/2)/A*sin(f[9])*sin(f[3])*cos(f[3])-
2*r[9]*r[3]^2*2^(1/2)/A*cos(f[9])+2*r[3]*2^(1/2)*r[7]*cos(f[3])*cos(f[7])+2*r[3]*2^(1/
2)*r[7]*sin(f[3])*sin(f[7]))^2-((2*r[9]^2*r[3]*2^(1/2)*r[7]/A*sin(f[3])*cos(f[7])-
2*r[9]^2*r[3]*2^(1/2)*r[7]/A*cos(f[3])*sin(f[7])-
2*2^(1/2)*r[7]*r[3]/A*sin(f[3])*cos(f[7])+2*2^(1/2)*r[7]*r[3]/A*cos(f[3])*sin(f[7])-
2*r[9]*r[7]^2*2^(1/2)/A*sin(f[9])+4*r[9]*r[7]^2*2^(1/2)/A*sin(f[9])*cos(f[7])^2-
4*r[9]*r[7]^2*2^(1/2)/A*cos(f[9])*sin(f[7])*cos(f[7])-
2*r[9]*r[3]^2*2^(1/2)/A*sin(f[9])+4*r[9]*r[3]^2*2^(1/2)/A*sin(f[9])*cos(f[3])^2-
4*r[9]*r[3]^2*2^(1/2)/A*cos(f[9])*sin(f[3])*cos(f[3])+2*r[3]*2^(1/2)*r[7]*cos(f[3])*sin
(f[7])-2*r[3]*2^(1/2)*r[7]*sin(f[3])*cos(f[7]))^2),A=(1+r[3]^2+r[9]^2+r[7]^2),res);
> with(PDEtools);
>
eqd1:=z1*D[1](F)(z1,z2,z3,z4)+z3*D[3](F)(z1,z2,z3,z4)+2*z4*D[4](F)(z1,z2,z3,z4)=(ww12+mm1)*(F)(z1,z2,z3,z4);
> eqd2:=
z1*D[1](F)(z1,z2,z3,z4)+2*z2*D[2](F)(z1,z2,z3,z4)+z3*D[3](F)(z1,z2,z3,z4)=(ww22+
mm2)*(F)(z1,z2,z3,z4);
> eqd3:=
(1+2*ww12)*(z1*D[1](F)(z1,z2,z3,z4)+z3*D[3](F)(z1,z2,z3,z4))+z1^2*D[1,1](F)(z1,z2,
z3,z4)+z3^2*D[3,3](F)(z1,z2,z3,z4)+z1*z3*(D[1,3](F)(z1,z2,z3,z4)+D[3,1](F)(z1,z2,z3,
z4))-
sqrt(2)*(z3+sqrt(2)*z1*z2)^2*(D[2,4](F)(z1,z2,z3,z4)+D[4,2](F)(z1,z2,z3,z4))+4*z1*(z3
+z1*z2)*ww22*D[4](F)(z1,z2,z3,z4)=(SS1*(SS1+2)-
ww12*(ww12+1))*(F)(z1,z2,z3,z4);
> eqd4:=(3+2*ww22)*z1*D[1](F)(z1,z2,z3,z4)+((3-2*ww22)*z3-
4*sqrt(2)*z1*z2*ww22)*D[3](F)(z1,z2,z3,z4)+z1^2*D[1,1](F)(z1,z2,z3,z4)+z3^2*D[3,3
](F)(z1,z2,z3,z4)-
(2*z1*z2+sqrt(2)*z3)*(D[1,2](F)(z1,z2,z3,z4)+D[2,1](F)(z1,z2,z3,z4))+z1*z3*(D[1,3](F
)(z1,z2,z3,z4)+D[3,1](F)(z1,z2,z3,z4))+2*(z3+sqrt(2)*z1*z2)*z2*(D[2,3](F)(z1,z2,z3,z4
)+D[3,2](F)(z1,z2,z3,z4))=(SS2*(SS2+2)-ww22*(ww22+2))*(F)(z1,z2,z3,z4);
>
> pdsolve({eqd1,eqd2,eqd3,eqd4},F(z1,z2,z3,z4));
> F(x,y,w,v) = F1(y,w/x,v/x^2)*x
>
> eqd2:=
x*D[1]((F1)(y,w/x,v/x^2)*x)+2*y*D[2]((F1)(y,w/x,v/x^2)*x)+x*D[1]((F1)(y,w/x,v/x^2)
*x);
>
> (simplify(res));
>

```

```

> for ju from 1 to ni do
> pint[ju]:=evalm(psi[1][ju,1]*phi[1]);
> od:
> for jo from 1 to ni do
> pin[jo]:=subs(u[3]=r[3]*exp(I*f[3]),u[4]=r[3]*exp(-
I*f[3]),u[5]=r[5]*exp(I*f[5]),u[6]=r[5]*exp(-
I*f[5]),u[7]=r[7]*exp(I*f[7]),u[8]=r[7]*exp(-
I*f[7]),u[9]=r[9]*exp(I*f[9]),u[10]=r[9]*exp(-I*f[9]),evalm(pint[jo]));
> od:
>
Haar:=(1+u[3]*u[4]+2*u[9]*u[10]+u[7]*u[8])^4*((1+u[3]*u[4]+2*u[9]*u[10]+u[7]*u[8]
)*(1+(u[4]*u[6]*2^(1/2)+u[8])*(u[3]*u[5]*2^(1/2)+u[7])+2*u[6]*u[5])-
u[4]+2^(1/2)*u[10]*(u[3]*u[5]*2^(1/2)+u[7])+u[8]*u[5]*2^(1/2))*(-
u[3]+(u[4]*u[6]*2^(1/2)+u[8])*2^(1/2)*u[9]+u[6]*2^(1/2)*u[7]))^4;
> norma:=(1+u[3]*u[4]+2*u[9]*u[10]+u[7]*u[8])^(omega[1,2]-
omega[2,2])*((1+u[3]*u[4]+2*u[9]*u[10]+u[7]*u[8])*(1+(u[4]*u[6]*2^(1/2)+u[8])*(u[3]
)*u[5]*2^(1/2)+u[7])+2*u[5]*u[6])-
u[4]+2^(1/2)*u[10]*(u[3]*u[5]*2^(1/2)+u[7])+u[8]*u[5]*2^(1/2))*(-
u[3]+(u[4]*u[6]*2^(1/2)+u[8])*2^(1/2)*u[9]+u[6]*2^(1/2)*u[7]))^omega[2,2];
> metr:=simplify(norma*Haar);
> assume(r[3],real,r[5],real,r[7],real,r[9],real);
> met:=subs(u[3]=r[3]*exp(I*f[3]),u[4]=r[3]*exp(-
I*f[3]),u[5]=r[5]*exp(I*f[5]),u[6]=r[5]*exp(-
I*f[5]),u[7]=r[7]*exp(I*f[7]),u[8]=r[7]*exp(-
I*f[7]),u[9]=r[9]*exp(I*f[9]),u[10]=r[9]*exp(-I*f[9]),metr);
> me:=simplify(met);
> subs(r[5]=0,r[7]=0,r[3]=0,me);
> for xi from 1 to ni do
> for xo from 1 to ni do
>
inte[xi,xo]:=int(int(int(int(int(int(pin[xi][xo,1]*r[3]*r[7]*r[9]/(1+r[3]^2+2*r[9]^2+r[7]^2
)^(4+omega[1,2]),r[9]=0..infinity),r[7]=0..infinity),r[3]=0..infinity),f[3]=0..2*Pi),f[7]=0..
2*Pi),f[9]=0..2*Pi);
> if inte[xi,xo]<>0 then print(xi,xo,inte[xi,xo]) fi;
> od:od:

```

Program Total Exponential

This program calculate the total exponential of matrix belonging to $sp(4,C)$ algebra

```

> restart;
> with(linalg):
> omega[1,2]:=1;
> omega[2,2]:=0;
> h[1]:=h1;h[2]:=h2;
> sigma[1]:=s1;sigma[2]:=s2;
> sigma[p]:=sigma[1]+sigma[2];
> sigma[m]:=sigma[1]-sigma[2];
> omega[p]:=omega[1,2]+omega[2,2];
> omega[m]:=omega[1,2]-omega[2,2];
> a:=sqrt((omega[p]-sigma[p])*(omega[p]+sigma[p]+6)*(-
omega[m]+sigma[p]+2)*(omega[m]+sigma[p]+4)/(64*(sigma[1]+1)*(sigma[1]+2)*(sig
ma[2]+1)*(sigma[2]+2)))*sqrt((sigma[1]+h[1]+2)*(sigma[2]-h[2]+2)));
> d:=sqrt((omega[p]-sigma[p]+2)*(omega[p]+sigma[p]+4)*(-
omega[m]+sigma[p])*(omega[m]+sigma[p]+2)/(64*(sigma[1])*(sigma[1]+1)*(sigma[2])
*(sigma[2]+1)))*sqrt((sigma[1]-h[1])*(sigma[2]+h[2])));
> b:=sqrt((omega[m]+sigma[m]+2)*(omega[m]-sigma[m])*(omega[p]-
sigma[m]+2)*(omega[p]+sigma[m]+4)/(64*(sigma[1]+1)*(sigma[1]+2)*(sigma[2])*(sig
ma[2]+1)))*sqrt((sigma[1]+h[1]+2)*(sigma[2]+h[2])));
> c:=sqrt((omega[m]+sigma[m])*(omega[m]-sigma[m]+2)*(omega[p]-
sigma[m]+4)*(omega[p]+sigma[m]+2)/(64*(sigma[1])*(sigma[1]+1)*(sigma[2]+1)*(sig
ma[2]+2)))*sqrt((sigma[1]-h[1])*(sigma[2]-h[2]+2)));
> ni:=(omega[1,2]+2)*(omega[2,2]+1)*(omega[1,2]-
omega[2,2]+1)*(omega[1,2]+omega[2,2]+3)/6;
> for nh from 1 to ni do states[nh]:=[]: od;
> count:=0;
> for Delta[1,2] from omega[1,2] to omega[2,2] by -1 do
> for omega[1,1] from Delta[1,2] to Delta[1,2]-omega[2,2] by -1 do
> for h[1] from -omega[1,1] to 0 by 2 do
> s[2]:=omega[1,2]+omega[2,2]+omega[1,1]-2*Delta[1,2];
> for h[2] from -s[2] to 0 by 2 do
> count:=count+1;
> states[count]:=[s[2],omega[1,1],h[2],h[1]];
> print(states[count]);
> #pol[count]:=z1^((s[2]-
h[2])/2)*z3^((s[2]+h[2])/2)*z4^((omega[1,1]+h[1])/2)*sqrt(binomial(omega[1,2],omega[
1,1])*binomial(omega[1,1],(omega[1,1]+h[1])/2)*binomial(s[2],(s[2]+h[2])/2));
> #print(pol[count]);print(states[count]);
> #if h[1]=-omega[1,2] and h[2]=-omega[2,2] then print(count,omega[1,1],s[2],h[1],h[2])
fi;
> od;od;od;od;
> for Delta[1,2] from omega[1,2] to omega[2,2] by -1 do
> for omega[1,1] from Delta[1,2] to Delta[1,2]-omega[2,2] by -1 do

```

```

> for h[1] from omega[1,1] to 1 by -2 do
> s[2]:=omega[1,2]+omega[2,2]+omega[1,1]-2*Delta[1,2];
> for h[2] from -s[2] to 0 by 2 do
> count:=count+1;
> states[count]:=s[2],omega[1,1],h[2],h[1]];
> print(states[count]);
> #pol[count]:=z1^((s[2]-
h[2])/2)*z3^((s[2]+h[2])/2)*z4^((omega[1,1]+h[1])/2)*sqrt(binomial(omega[1,2],omega[
1,1])*binomial(omega[1,1],(omega[1,1]+h[1])/2)*binomial(s[2],(s[2]+h[2])/2));
> #print(pol[count]);print(states[count]);
> #if h[1]=-omega[1,2] and h[2]=-omega[2,2] then print(count,omega[1,1],s[2],h[1],h[2])
fi;
> od;od;od;od;
> for Delta[1,2] from omega[1,2] to omega[2,2] by -1 do
> for omega[1,1] from Delta[1,2] to Delta[1,2]-omega[2,2] by -1 do
> for h[1] from omega[1,1] to 1 by -2 do
> s[2]:=omega[1,2]+omega[2,2]+omega[1,1]-2*Delta[1,2];
> for h[2] from s[2] to 1 by -2 do
> count:=count+1;
> states[count]:=s[2],omega[1,1],h[2],h[1]];
> print(states[count]);
> #pol[count]:=z1^((s[2]-
h[2])/2)*z3^((s[2]+h[2])/2)*z4^((omega[1,1]+h[1])/2)*sqrt(binomial(omega[1,2],omega[
1,1])*binomial(omega[1,1],(omega[1,1]+h[1])/2)*binomial(s[2],(s[2]+h[2])/2));
> #print(pol[count]);print(states[count]);
> #if h[1]=-omega[1,2] and h[2]=-omega[2,2] then print(count,omega[1,1],s[2],h[1],h[2])
fi;
> od;od;od;od;
> for Delta[1,2] from omega[1,2] to omega[2,2] by -1 do
> for omega[1,1] from Delta[1,2] to Delta[1,2]-omega[2,2] by -1 do
> for h[1] from -omega[1,1] to 0 by 2 do
> s[2]:=omega[1,2]+omega[2,2]+omega[1,1]-2*Delta[1,2];
> for h[2] from s[2] to 1 by -2 do
> count:=count+1;
> states[count]:=s[2],omega[1,1],h[2],h[1]];
> print(states[count]);
> #pol[count]:=z1^((s[2]-
h[2])/2)*z3^((s[2]+h[2])/2)*z4^((omega[1,1]+h[1])/2)*sqrt(binomial(omega[1,2],omega[
1,1])*binomial(omega[1,1],(omega[1,1]+h[1])/2)*binomial(s[2],(s[2]+h[2])/2));
> #print(pol[count]);print(states[count]);
> #if h[1]=-omega[1,2] and h[2]=-omega[2,2] then print(count,omega[1,1],s[2],h[1],h[2])
fi;
> od;od;od;od;
> count,ni;
> for nw from 1 to 10 do A[nw]:=array(1..ni,1..ni,sparse) od:
> for n1 from 1 to ni do

```

```

> for n2 from 1 to ni do
> aux1:=states[n1];
> S2:=aux1[1];
> S1:=aux1[2];
> H2:=aux1[3];
> H1:=aux1[4];
> aux2:=states[n2];
> s2:=aux2[1];
> s1:=aux2[2];
> h2:=aux2[3];
> h1:=aux2[4];
> if n1=n2 then A[1][n1,n1]:=h1;A[2][n1,n1]:=h2;fi;
> if S1=s1 and S2=s2 and H1=h1+2 and H2=h2 then
> A[9][n1,n2]:=sqrt(s1*(s1+2)-h1*(h1+2))/sqrt(2);
> fi;
> if S1=s1 and S2=s2 and H2=h2+2 and H1=h1 then
> A[5][n1,n2]:=sqrt(s2*(s2+2)-h2*(h2+2))/sqrt(2);
> fi;
> if H1=h1+1 and H2=h2-1 then
> #print(n1,n2,aux1,aux2);
> if S1=s1+1 and S2=s2+1 then
> A[3][n1,n2]:=a;
> #print(n1,n2,K[4][n1,n2]);
> fi;
> if S1=s1+1 and S2=s2-1 then
> A[3][n1,n2]:=b;
> #print(n1,n2,K[4][n1,n2]);
> fi;
>
> if S1=s1-1 and S2=s2+1 then
> #print(s1,s2,h1,h2);
>
> A[3][n1,n2]:=-c;
> #print(n1,n2,c);
> #print(s1,s2,h1,h2);
> fi;
> if S1=s1-1 and S2=s2-1 then
> A[3][n1,n2]:=d;
> fi;
> fi;
> od;od;
> A[4]:=transpose(A[3]);
> A[6]:=transpose(A[5]);
> A[10]:=transpose(A[9]);
> A[7]:=map(simplify,1/sqrt(2)*evalm(A[3]&*A[5]-A[5]&*A[3]));
> A[8]:=transpose(A[7]);

```

```

> map(simplify,evalm(A[3]&*A[5]-A[5]&*A[3]-A[7]*sqrt(2))):
> aa:=array(1..4,1..4,sparse):
> aa:=map(simplify,evalm(sum(x[i]*A[i],i=1..10)));
> B:=array(1..4,1..4,sparse):
> B:=evalm(exponential(aa)):
> eta:=array(1..4,1..4):eta[1,3]=1:eta[2,4]=1:eta[3,1]=-1:eta[4,2]=-1:
> bl:=array(1..4,1..4,sparse):
> br:=array(1..4,1..4,sparse):
> for i from 1 to 4 do
> for j from 1 to 4 do
>
bl[i,j]:=simplify(limit(expand(subs(x[10]=0,x[9]=0,x[2]=0,x[3]=0,x[4]=0,x[5]=0,x[6]=0,
x[7]=0,x[8]=0,B[i,j])),x[1]=0,left));od;od;
> for i from 1 to 4 do
> for j from 1 to 4 do
>
br[i,j]:=simplify(limit(expand(subs(x[10]=0,x[9]=0,x[2]=0,x[3]=0,x[4]=0,x[5]=0,x[6]=0,
x[7]=0,x[8]=0,B[i,j])),x[1]=0,right));od;od;
> print(bl,br);
> for k from 1 to 10 do
> Gl[k]:=array(1..4,1..4):od:
> for k from 3 to 4 do
> for i from 1 to 4 do
> for j from 1 to 4 do
>
Gl[k][i,j]:=simplify(limit(expand(subs(x[10]=0,x[9]=0,x[2]=0,x[3]=0,x[4]=0,x[5]=0,x[6]
=0,x[7]=0,x[8]=0,diff(B[i,j],x[k])),x[1]=0,left));od;od;od;
> for k from 7 to 10 do
> for i from 1 to 4 do
> for j from 1 to 4 do
>
Gl[k][i,j]:=simplify(limit(expand(subs(x[10]=0,x[9]=0,x[2]=0,x[3]=0,x[4]=0,x[5]=0,x[6]
=0,x[7]=0,x[8]=0,diff(B[i,j],x[k])),x[1]=0,left));od;od;od;
> for k from 5 to 6 do
> for i from 1 to 4 do
> for j from 1 to 4 do
>
Gl[k][i,j]:=simplify(limit(expand(subs(x[10]=0,x[9]=0,x[1]=0,x[3]=0,x[4]=0,x[5]=0,x[6]
=0,x[7]=0,x[8]=0,diff(B[i,j],x[k])),x[2]=0,left));od;od;od;
> for k from 1 to 10 do
> Gr[k]:=array(1..4,1..4):od:
> for k from 3 to 4 do
> for i from 1 to 4 do
> for j from 1 to 4 do

```

```

>
Gr[k][i,j]:=simplify(limit(expand(subs(x[10]=0,x[9]=0,x[2]=0,x[3]=0,x[4]=0,x[5]=0,x[6]
=0,x[7]=0,x[8]=0,diff(B[i,j],x[k])),x[1]=0,right));od;od;od;
> for k from 7 to 10 do
> for i from 1 to 4 do
> for j from 1 to 4 do
>
Gr[k][i,j]:=simplify(limit(expand(subs(x[10]=0,x[9]=0,x[2]=0,x[3]=0,x[4]=0,x[5]=0,x[6]
=0,x[7]=0,x[8]=0,diff(B[i,j],x[k])),x[1]=0,right));od;od;od;
> for k from 5 to 6 do
> for i from 1 to 4 do
> for j from 1 to 4 do
>
Gr[k][i,j]:=simplify(limit(expand(subs(x[10]=0,x[9]=0,x[1]=0,x[3]=0,x[4]=0,x[5]=0,x[6]
=0,x[7]=0,x[8]=0,diff(B[i,j],x[k])),x[2]=0,right));od;od;od;
> for i from 1 to 4 do
> for j from 1 to 4 do
> Gl[1][i,j]:=limit(limit(expand(subs(2*x[1]^2+2*(x[1]^4)^(1/2)=p,2*x[1]^2-
2*(x[1]^4)^(1/2)=n,(subs(x[10]=0,x[9]=0,x[2]=0,x[3]=0,x[4]=0,x[5]=0,x[6]=0,x[7]=0,x[
8]=0,diff(B[i,j],x[1])))),x[1]=0,right),p=0,left);od;od;
> for i from 1 to 4 do
> for j from 1 to 4 do
> Gr[1][i,j]:=limit(limit(expand(subs(2*x[1]^2+2*(x[1]^4)^(1/2)=p,2*x[1]^2-
2*(x[1]^4)^(1/2)=n,(subs(x[10]=0,x[9]=0,x[2]=0,x[3]=0,x[4]=0,x[5]=0,x[6]=0,x[7]=0,x[
8]=0,diff(B[i,j],x[1])))),x[1]=0,right),p=0,right);od;od;
> for i from 1 to 4 do
> for j from 1 to 4 do
> Gl[2][i,j]:=limit(limit(expand(subs(2*x[2]^2+2*(x[2]^4)^(1/2)=p,2*x[2]^2-
2*(x[2]^4)^(1/2)=n,(subs(x[10]=0,x[9]=0,x[1]=0,x[3]=0,x[4]=0,x[5]=0,x[6]=0,x[7]=0,x[
8]=0,diff(B[i,j],x[2])))),x[2]=0,right),p=0,left);od;od;
> for i from 1 to 4 do
> for j from 1 to 4 do
> Gr[2][i,j]:=limit(limit(expand(subs(2*x[2]^2+2*(x[2]^4)^(1/2)=p,2*x[2]^2-
2*(x[2]^4)^(1/2)=n,(subs(x[10]=0,x[9]=0,x[1]=0,x[3]=0,x[4]=0,x[5]=0,x[6]=0,x[7]=0,x[
8]=0,diff(B[i,j],x[2])))),x[2]=0,right),p=0,right);od;od;
> for i from 1 to 10 do print (i,Gl[i],Gr[i]) od;
> #map(simplify,evalm(transpose(BB)&*eta&*BB-eta));
>
BB:=(subs(8*x[7]*x[8]*x[5]*x[6]+4*x[9]^2*x[10]^2+4*x[5]^2*x[6]^2+8*x[9]*x[10]*x
[3]*x[4]+8*x[9]*x[10]*x[7]*x[8]+8*x[3]*x[4]*x[5]*x[6]+8*x[7]^2*x[10]*x[6]-
8*x[9]*x[6]*x[4]^2+8*x[9]*x[5]*x[8]^2-
8*x[9]*x[5]*x[10]*x[6]+8*x[3]*x[7]*x[10]*2^(1/2)*x[2]+8*x[1]*x[7]*x[6]*2^(1/2)*x[
4]+8*x[1]*x[5]*2^(1/2)*x[8]*x[3]+8*x[9]*2^(1/2)*x[4]*x[8]*x[2]-2*x[1]^2*x[2]^2-
4*x[5]*x[6]*x[1]^2-4*x[9]*x[10]*x[2]^2+8*x[1]*x[2]*x[3]*x[4]-
8*x[1]*x[7]*x[8]*x[2]-
8*x[5]*x[10]*x[3]^2+x[1]^4+x[2]^4+4*x[1]^2*x[3]*x[4]+4*x[1]^2*x[7]*x[8]+4*x[2]^

```



```

2*x[5]*x[6]+4*x[2]^2*x[3]*x[4]+4*x[2]^2*x[7]*x[8]+4*x[9]*x[10]*x[1]^2=e2,4*x[5]*
x[6]+2*x[2]^2+4*x[9]*x[10]+2*x[1]^2+4*x[3]*x[4]+4*x[7]*x[8]-2*e2^(1/2)=e1-
2*e2^(1/2),4*x[5]*x[6]+2*x[2]^2+4*x[9]*x[10]+2*x[1]^2+4*x[3]*x[4]+4*x[7]*x[8]+2
*e2^(1/2)=e1+2*e2^(1/2),e1+2*e2^(1/2)=F1,e1-
2*e2^(1/2)=F2,exp(1/2*F1^(1/2))=EE1,exp(1/2*F2^(1/2))=EE2,exp(-
1/2*F1^(1/2))=EE3,exp(-1/2*F2^(1/2))=EE4,evalm(B)):
> BB1:=subs(map(diff,BB,EE1)):
> BB3:=subs(map(diff,BB,EE3)):
> BB31:=map(simplify,evalm(BB1-BB3)):
> BB13:=subs(F1-F2=4*e2^(1/2),F1=e1+2*e2^(1/2),F2=e1-
2*e2^(1/2),map(simplify,evalm(BB1+BB3)));
> BB2:=map(diff,BB,EE2):
> BB4:=map(diff,BB,EE4):
> BB42:=subs(map(simplify,evalm(BB2-BB4))):
> BB24:=map(simplify,subs(F1=e1+2*e2^(1/2),F2=e1-
2*e2^(1/2),map(simplify,evalm(BB2+BB4))));
> subs(F1-F2=4*e2^(1/2),map(simplify,evalm(BB13+BB24)));
>
BB42:=subs(4*x[5]*x[6]+2*x[2]^2+4*x[9]*x[10]+2*x[1]^2+4*x[3]*x[4]+4*x[7]*x[8]-
2*e2^(1/2)=F2,map(simplify,subs(F2=4*x[5]*x[6]+2*x[2]^2+4*x[9]*x[10]+2*x[1]^2+4
*x[3]*x[4]+4*x[7]*x[8]-
2*e2^(1/2),F1=4*x[5]*x[6]+2*x[2]^2+4*x[9]*x[10]+2*x[1]^2+4*x[3]*x[4]+4*x[7]*x[8
]+2*e2^(1/2),map(simplify,BB42))));
>
BB31:=subs(4*x[5]*x[6]+2*x[2]^2+4*x[9]*x[10]+2*x[1]^2+4*x[3]*x[4]+4*x[7]*x[8]+
2*e2^(1/2)=F1,map(simplify,subs(F2=4*x[5]*x[6]+2*x[2]^2+4*x[9]*x[10]+2*x[1]^2+4
*x[3]*x[4]+4*x[7]*x[8]-
2*e2^(1/2),F1=4*x[5]*x[6]+2*x[2]^2+4*x[9]*x[10]+2*x[1]^2+4*x[3]*x[4]+4*x[7]*x[8
]+2*e2^(1/2),map(simplify,BB31))));
>
map(simplify,evalm(map(simplify,(evalm(BB42*sqrt(F2))+evalm(BB31*sqrt(F1))))/2));
> subs(2*x[1]*x[4]*x[3]-2*x[7]*x[8]*x[2]-2*x[5]*x[6]*x[1]-
x[1]*x[2]^2+x[1]^3+2*x[2]*x[3]*x[4]+x[1]*e2^(1/2)+2*x[5]*2^(1/2)*x[8]*x[3]+2*x[7]
*x[6]*2^(1/2)*x[4]+2*x[1]*x[10]*x[9]+2*x[1]*x[8]*x[7]=P11,-
4*x[5]*x[10]*x[3]+2*x[4]*x[6]*x[5]+x[4]*x[2]^2+2*x[10]*x[9]*x[4]+x[4]*x[1]^2+x[4
]*e2^(1/2)+2*x[5]*2^(1/2)*x[8]*x[1]+2*x[7]*x[10]*2^(1/2)*x[2]+2*x[4]*x[1]*x[2]=P1
2,x[10]*2^(1/2)*x[1]^2-
x[10]*2^(1/2)*x[2]^2+2*x[10]^2*2^(1/2)*x[9]+2*x[4]*x[10]*2^(1/2)*x[3]+x[10]*2^(1/
2)*e2^(1/2)+2*x[5]*2^(1/2)*x[8]^2-
2*x[5]*2^(1/2)*x[10]*x[6]+2*x[10]*2^(1/2)*x[8]*x[7]-
2*x[6]*2^(1/2)*x[4]^2+4*x[4]*x[8]*x[2]=P13,4*x[7]*x[10]*x[6]+x[8]*x[2]^2+x[8]*x[
1]^2+2*x[10]*x[8]*x[9]+2*x[8]*x[6]*x[5]-
2*x[2]*x[8]*x[1]+x[8]*e2^(1/2)+2*x[4]*x[6]*2^(1/2)*x[1]+2*x[2]*x[10]*2^(1/2)*x[3]
=P14,x[3]*x[2]^2+x[3]*e2^(1/2)+x[3]*x[1]^2+2*x[2]*x[8]*x[9]*2^(1/2)+2*x[6]*2^(1/2
)*x[7]*x[1]+2*x[3]*x[6]*x[5]-
4*x[6]*x[9]*x[4]+2*x[2]*x[3]*x[1]+2*x[3]*x[10]*x[9]=P21,2*x[1]*x[4]*x[3]+2*x[4]*

```

```

x[8]*x[9]*2^(1/2)+2*x[3]*x[10]*2^(1/2)*x[7]+2*x[2]*x[6]*x[5]-
2*x[2]*x[9]*x[10]+x[2]^3+2*x[7]*x[8]*x[2]+2*x[2]*x[3]*x[4]-2*x[1]*x[8]*x[7]-
x[2]*x[1]^2+x[2]*e2^(1/2)=P22,2*x[6]^2*2^(1/2)*x[5]+x[6]*2^(1/2)*x[2]^2-
2*x[6]*2^(1/2)*x[9]*x[10]-
x[6]*2^(1/2)*x[1]^2+2*x[3]*x[4]*x[6]*2^(1/2)+2*x[8]*x[6]*2^(1/2)*x[7]+x[6]*2^(1/2)
*e2^(1/2)+4*x[3]*x[8]*x[1]+2*x[8]^2*x[9]*2^(1/2)-2*x[10]*2^(1/2)*x[3]^2=P24,-
2*x[9]*2^(1/2)*x[5]*x[6]-
x[9]*2^(1/2)*x[2]^2+2*x[9]^2*2^(1/2)*x[10]+x[9]*2^(1/2)*x[1]^2+2*x[9]*2^(1/2)*x[4
]*x[3]+2*x[9]*2^(1/2)*x[8]*x[7]+x[9]*2^(1/2)*e2^(1/2)-
2*x[3]^2*x[5]*2^(1/2)+2*x[6]*2^(1/2)*x[7]^2+4*x[7]*x[3]*x[2]=P31,2*x[9]*2^(1/2)*
x[4]*x[2]+x[7]*e2^(1/2)+2*x[1]*x[3]*x[5]*2^(1/2)+x[7]*x[1]^2+x[7]*x[2]^2-
2*x[1]*x[7]*x[2]+2*x[7]*x[6]*x[5]+2*x[9]*x[10]*x[7]+4*x[9]*x[8]*x[5]=P32,2*x[10]
*2^(1/2)*x[7]^2-2*x[9]*2^(1/2)*x[4]^2+2*x[5]*2^(1/2)*x[4]*x[3]-
2*x[5]*2^(1/2)*x[9]*x[10]+2*x[7]*x[8]*x[5]*2^(1/2)+2*x[5]^2*2^(1/2)*x[6]+x[5]*2^(
1/2)*x[2]^2-
x[5]*2^(1/2)*x[1]^2+4*x[7]*x[4]*x[1]+x[5]*2^(1/2)*e2^(1/2)=P42,evalm(BB31*sqrt(F
1)));
> subs(x[1]^2-x[2]^2+e2^(1/2)+2*x[9]*x[10]-
2*x[5]*x[6]=p11,x[8]*x[5]*2^(1/2)+x[10]*2^(1/2)*x[7]+x[1]*x[4]+x[4]*x[2]=p12,-
x[8]*x[1]+x[8]*x[2]+x[10]*2^(1/2)*x[3]-
x[6]*2^(1/2)*x[4]=p14,x[6]*2^(1/2)*x[7]+x[8]*x[9]*2^(1/2)+x[3]*x[1]+x[2]*x[3]=p21,
-x[2]^2-e2^(1/2)+x[1]^2-2*x[5]*x[6]+2*x[9]*x[10]=p22,x[3]*x[5]*2^(1/2)-
x[7]*x[2]+x[1]*x[7]-x[9]*2^(1/2)*x[4]=p23,map(simplify,evalm(BB13)));
>

```

VOU-ME EMBORA PARA PASÁRGADA

Vou-me embora pra Pasárgada
Lá sou amigo do rei
Lá tenho as mulheres que eu quero
Na cama que escolherei
Vou-me embora pra Pasárgada

Vou-me embora pra Pasárgada
Aqui eu não sou feliz
Lá a existência é uma aventura
De tal modo inconseqüente
Que Joana a Louca de Espanha
Rainha e falsa demente
Vem a ser contraparente
Da nora que nunca tive

E como farei ginástica
Andarei de bicicleta
Montarei em burro brabo
Subirei no pau-de-sebo
Tomarei banhos-de-mar!
E quando estiver cansado
Deito na beira do Rio
Mando chamar a mãe-d'água
Pra me contar as histórias
Que no tempo de eu menino
Rosa vinha me contar
Vou-me embora pra Pasárgada

Em Pasárgada tem tudo

É outra civilização

Tem processo seguro

De impedir a concepção

Tem telefone automático

Tem alcalóide à vontade

Tem prostitutas bonitas

Para a gente namorar

E quando eu estiver mais triste

mas triste de não ter jeito

Quando de noite me der

Vontade de me matar

-Lá sou amigo do rei-

Terei a mulher que eu quero

Na cama que escolherei

Vou-me embora pra Pasárgada.

Manuel Bandeira, Libertinagem.

Referências Bibliográficas

- [1] E. P. Wigner, *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren* (Vieweg, Braunschweig, 1931).
- [2] H. Weyl *The theory of groups and quantum mechanics* (Dover, New York, 1950).
- [3] Gell-mann M Ne'eman, *The eight fold way* (Benjamin, New York, 1964).
- [4] R. Eisberg e R. Resnick *Física Quântica. Átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas* (Campus, Rio de Janeiro, 1979).
- [5] A. Arima e F. Iachello, *The Interacting Boson Model* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [6] F. Iachello e R. D. Levine, *Algebraic Theory of Molecules* (Oxford University Press, Oxford, 1995).
- [7] Hornos J Iachello F. The overtone spectrum of acetylene in the vibron model. *J. Chem. Phys.* **90** 10 (1990).
- [8] Bernardes E S. Hornos J E M. The overtone spectrum of monochloroacetylene (HCCCl) in the algebraic approach. *Chem. Phys.* **3** 295 (1999).
- [9] J.E.M. Hornos and Y.M.M. Hornos. Algebraic model for the evolution of the genetic code *Phys. Rev. Lett* **71**, 4401 (1993); J.E.M. Hornos, Y.M.M. Hornos

- and M. Forger. Symetry and symetry breaking: An algebraic approach to the genetic code. *Int. J. Mod. Phys. B* **13**, 2795 (1999).
- [10] José Eduardo M. Hornos, Lígia Braggion, Marcio Magini and Michael Forger. Symmetry preservation in the evolution of the genetic Code. *Life* **56** 125 (2004).
- [11] J.R.Klauder, B-S. Skagertam *Coherent states: Applications in physics and mathematical physics*. (Eds). World Scientific, Singapore (1985).
- [12] Perelomov A. *Generalized coherent states and their applications* 1986 Springer.
- [13] M. Novaes, *Estados Coerentes: O Grupo Simplético e Generalizações*, Tese de Doutorado, USP, São Carlos, 2003.
- [14] M. Novaes and J. E. M. Hornos. Coherent states for the unitary symplectic group. *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 3159 (2004).
- [15] Novaes M . de Aguiar M A M . Hornos J E M . Generalized coherent states for the double-well potential. *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 5773 (2003).
- [16] L. Braggion, *Procura por simetrias de Lie na Evolução do Código Genético*, Dissertação de Mestrado, USP, São Carlos, 1998.
- [17] I. D. Ado. The representation of Lie Algebras by matrices. *Am. Math. Soc. Transl.* (1), **9**, 308 (1962)
- [18] Wybourne B. G. *Classical group for physists* 1974 (New York: Wiley).
- [19] Barut A. O. Raczka R. *Theory of Group Representations and Applications* 1977 (Warsahw: PWN-Polish Scientific).
- [20] M. Cerkaski. Branching rules for $Sp(2n)$ algebra on the chain $Sp(2n - 2) \otimes Sp(2)$. *J. Math. Phys.* **28**, 989 (1987).

- [21] E.S. Bernardes. Matrix elements for the symplectic $sp(4)$ Lie algebra. *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 6295 (1999).
- [22] W. Magnus. On the exponential solution of differential equations for a linear operator. *Comm. Pure Appl. Math.* **7**, 649 (1954).
- [23] S. Gnutzmann and M. Kuś. Coherent states and the classical limit on irreducible SU_3 representations. *J. Phys. A: Math. Gen.* **31**, 9871 (1998).
- [24] A. Wünsche. Symplectic groups in quantum optics. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **2**, 73 (2000); A. Wünsche. The quantum-mechanical inhomogeneous symplectic group. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **4**, 1 (2002).
- [25] Mackay W.G. Patera J. *Tables of Dimensions, Indices, and Branching Rules for Representations of Simple Lie Algebras* 1981 (New York: Dekker)
- [26] S. Helgason *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*. Academic Press, 1978.