Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos

Invariantes Diferenciais do Grupo Simplético

Marconi Soares Barbosa

Tese apresentada ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para a obtenção do Título de **Doutor** em Ciências:
Física Básica

Orientador: Prof. Dr. *Esmerindo de Sousa Bernardes*

Departamento de Física e Ciência dos Materiais
São Carlos 2002

Invariantes Diferenciais do Grupo Simplético

/Marconi Soares Barbosa, São Carlos 2002. < 109 >p.

Tese(Doutorado)-Instituto de Física de São Carlos, 2002

Orientador: Prof. Dr. Esmerindo de Sousa Bernardes

1. Invariantes Diferenciais 2. Modelos Algébricos I. Título.

Agradecimentos

- ✂ À todos que contribuíram, de uma forma ou de outra, para transformar a possibilidade desta tese em realidade.
- ✂ Ao Prof. Esmerindo, pelo crédito, estímulo e colaboração.
- ✂ To Prof. Ian Stewart, for the Warwick experience.
- ✂ À Marcella, por tudo.

Silence is the universal refuge, the sequel to all dull discourses and all foolish acts, a balm to our every chagrin, as welcome after satiety as after disappointment; that background which the painter may not daub, be he master or bungler, and which, however awkward a figure we may have made in the foreground, remains ever our inviolable asylum, where no indignity can assail, no personality can disturb us.

Henry David Thoreau (1817-62), U.S. philosopher, author, naturalist. A Week on the Concord and Merrimac Rivers, "Friday" (1849).

Este trabalho é dedicado à minha Família.

Abstract

The symplectic algebra $sp(2n)$ is realized, via the technique of boson operators, its local group action taking place on a section of a jet-space associated with the independent variables. The dependent variables are held untouched by the flow. Nonetheless, its derivatives transform under the action of the prolonged vector fields, implied by the action of the vector field on the independent variables. The existence of an invariant contact coframe allows us to exhibit invariant differential operators which produce differential invariants by differentiating lower order ones. We present explicitly the second-order differential invariants for $sp(2n), n = 1, 2, 3$. Higher-order invariants may be produced at will by further differentiation. These differential invariants so obtained yield an explicit functional basis for locally symmetric partial differential equations whose solutions are related by symplectic operations. This new class of non-linear partial differential equations with pre-defined symmetry not just offer its well known symmetry related operational benefits, but restrains the form that a variational problem with such symmetry would exhibit.

Resumo

A álgebra simpléctica $sp(2)$ é realizada em termos de operadores bosônicos e sua ação local acontece numa porção de um *jet-space* associado com as variáveis independentes. Entretanto as derivadas da variável dependente, que é mantida fixa, se transformam sob a ação dos campos vetoriais prolongados. A existência de um *coframe* invariante neste *jet-space* nos permite construir operadores diferenciais invariantes que produzem invariantes diferenciais através de sua ação em invariantes de ordem menor. Apresentamos explicitamente neste trabalho invariantes diferenciais de segunda ordem para $sp(2n)$, $n = 1, 2, 3$. Todos invariantes de ordem maior podem ser obtidos mediante diferenciação. Estes invariantes diferenciais assim obtidos constituem uma base funcional explícita para equações diferenciais parciais invariantes pela ação local do grupo simpléctico. Esta nova classe de equações diferenciais parciais com simetria pré-determinada não somente oferece seu cardápio usual de benefícios operacionais relacionados com a simetria carregada, mas restringe o formato que um problema variacional com tal simetria pode apresentar.

Conteúdo

I	Preliminares	11
1	Introdução	12
1.1	Resumo do Projeto	12
1.2	Resultados	13
2	Fundamentos Geométricos	17
2.1	Ação de Grupos de Lie	17
2.2	Campos Vetoriais	18
2.3	Invariância Diferencial	19
2.4	Invariantes Diferenciais	22
2.5	Formas de Contato	25
2.5.1	Objetos Duais Invariantes	25
2.6	Operadores Diferenciais Invariantes	26
3	Realização Polinomial	28
3.1	Realização bosônica de álgebras simpléticas	28
3.1.1	Introdução	28
3.1.2	Realização bosônica	29
3.1.3	A estrutura da álgebra $sp(4)$ e $sp(6)$	30
3.1.4	Representações unitárias	31
3.1.5	Invariantes simpléticos	34
II	Invariantes Diferenciais	36
4	Invariantes diferenciais para $sp(2)$	37
4.1	Introdução	37
4.2	Realização com dois bósons; Invariantes até segunda ordem	38
4.2.1	Características e seus invariantes ordinários	38

4.2.2	Prolongações de primeira ordem e seus invariantes diferenciais	39
4.2.3	Prolongações de segunda ordem e seus invariantes diferenciais	41
4.3	Mais que dois bósons, Ordem qualquer	44
4.3.1	Prolongações além de segunda ordem	44
4.3.2	Formas de contato	45
4.4	Um único bóson; Ordem qualquer	48
4.4.1	Um algoritmo eficiente	50
5	Invariantes diferenciais para $sp(2j + 1)$	53
5.1	Introdução	53
5.2	Invariantes diferenciais simpléticos, $n_b \geq 2j + 1$	53
5.2.1	Prolongações para álgebras simpléticas	53
5.2.2	Invariantes diferenciais via <i>frame</i> Invariante	54
5.3	Invariantes diferenciais simpléticos, $n_b < 2j + 1$	57
5.3.1	Invariantes diferenciais até segunda ordem para $sp(4)$: um bóson	57
5.3.2	Invariantes diferenciais até segunda ordem para $sp(4)$: dois bósons	60
5.3.3	Invariantes diferenciais até segunda ordem para $sp(6)$: um bóson	66
5.3.4	Invariantes diferenciais até segunda ordem para $sp(6)$: dois bósons	69
5.3.5	Invariantes diferenciais até segunda ordem para $sp(6)$: três bósons	69
6	Conclusões e Perspectivas	72
III	Apêndices	75
A	Método das características para EDPs de primeira ordem	76
B	Invariantes diferenciais para $SO(n)$	78
C	Simetria em Equações Diferenciais	81
C.1	Preliminares	81
C.2	Invariância Infinitesimal	86
C.3	Soluções Por Similaridade	86
D	Constantes de Movimento em Sistemas Hamiltonianos	89
D.1	Introdução	89
D.2	Método direto	90
D.3	Teorema de Noether	94

E Rotinas Algébricas	97
E.0.1 Realização bosônica	97
E.0.2 Prolongações	99
E.0.3 Invariantes diferenciais	103
E.0.4 Rotinas auxiliares	104

Parte I

Preliminares

Capítulo 1

Introdução

1.1 Resumo do Projeto

Grande parte das teorias modernas da Física começa por postular um grupo de simetria e estabelecer equações de campo baseadas num problema variacional invariante pela ação desse grupo de simetria. Como primeiramente observado por Lie, qualquer problema variacional invariante pode ser escrito em termos de invariantes diferenciais. As equações de Euler-Lagrange associadas herdam a simetria do problema variacional e portanto podem ser também escritas em termos destes invariantes diferenciais. Em tais situações, o conhecimento de todas as equações diferenciais com a simetria prescrita e a ênfase nas propriedades simétricas de suas soluções constitui, não somente um conjunto de ferramentas de análise, mas também representa uma restrição do universo de possibilidades no qual a simetria de interesse tem um papel dominante.

De acordo com o projeto de pesquisa proposto, nosso objetivo é construir equações diferenciais parciais invariantes pela ação local do grupo simplético. Mais especificamente, pela ação infinitesimal de sua álgebra associada, sendo esta realizada por operadores bosônicos e prolongados até a ordem da equação procurada. O primeiro passo para a obtenção destas equações é a produção de invariantes da ação prolongada ou simplesmente invariantes diferenciais do grupo simplético. Em algumas circunstâncias estes invariantes podem levar não somente a uma redução de ordem mas a uma integração completa da equação diferencial associada. Independentemente de questões de integrabilidade, esses invariantes formam uma base funcional em termos da qual qualquer equação diferencial invariante segundo aquela ação específica, pode ser expressa. Nosso interesse imediato é a produção de equações diferenciais invariantes e o estudo de condições de integrabilidade para casos particulares, que envolva uma escolha de cadeias específicas de subgrupos. Generalizações para sistemas de equações invariantes, realizações mais gerais da álgebra (*e.g* Lie-Backlund), e álgebras de posto (*rank*) maior serão avaliadas de acordo com o interesse em aplicações e com a demanda computacional. As perspectivas dentro do formalismo empregado nesta tese são amplas. De interesse imediato, o estudo de sistemas que exibam quebra de simetria com simetria inicial e final

pré-estabelecida é um passo natural dentro desta linha de investigação.

Os objetivos deste projeto se encaixam na necessidade de construção de sistemas dinâmicos que possam dar um suporte microscópico a modelos algébricos que utilizam as álgebras de Lie para gerar espectros [1]. Dentre os modelos onde a simetria simpléctica deve ditar a dinâmica ou simplesmente se preservar durante a evolução do sistema, mencionamos aqui a descoberta recente da invariância simpléctica associada à massa do neutrino, [2, 3], e à evolução das degenerescências no código genético [4, 5]. A invariância simpléctica determinada no caso do código genético, ainda por ser justificada, deve produzir um sistema evolutivo natural. Este por sua vez precisa ser adequado às observações fenomenológicas consensuais [6].

1.2 Resultados

Introdução

Apresentamos nesta tese os avanços incorporados ao projeto de pesquisa inicial. Em termos práticos, obtivemos uma base para equações diferenciais parciais de qualquer ordem invariantes por (todas) transformações dos grupos $sp(2j + 1)$, com j semi inteiro, cuja álgebra é realizada com um número de bósons igual ao dobro do seu *rank*, $n_p = 2j + 1$. Nos casos que fogem da prescrição acima apresentamos uma rota alternativa e apresentamos explicitamente uma base para equações invariantes até segunda ordem (ordem qualquer para $sp(2)$). A ação destes grupos foi implementada pelo método polinomial que contempla tanto representações irredutíveis simétricas como mistas. O conjunto destes resultados, inéditos na literatura dos grupos simplécticos, é fruto da interpretação da ação prolongada de um campo vetorial e da teoria de formas de contato para casos multi-dimensionais. Estes resultados, bem como o procedimento para obtê-los, são apresentados detalhadamente na Part II.

Organização

A apresentação dos objetivos atingidos nesta tese, bem como os mecanismos usados para obtê-los está organizada da seguinte maneira. A Parte I consiste de material estritamente básico. No Capítulo 2, revemos inicialmente a descrição sucinta de *jet-space* e a formulação geométrica da idéia de simetria de equações diferenciais parciais, prolongação de campos vetoriais e formas de contato. No Capítulo 3 descrevemos brevemente a técnica polinomial de construção das representações dos grupos simplécticos, baseada numa realização por meio de operadores bosônicos.

Em seguida, na Parte II, apresentamos os invariantes diferenciais simplécticos e descrevemos com detalhes o procedimento usado para obtê-los. Estes invariantes são simultâneos a todos os operadores prolongados associados a transformações simplécticas no *jet-space* correspondente. Neste contexto geométrico, estes invariantes ou funcionais deles representam uma variedade invariante e como tal descrevem equações diferenciais invariantes pelo grupo simpléctico, no sentido que as transformações finitas deste grupo levam soluções em soluções. No Capítulo 4 apresentamos os invariantes diferenciais, de ordem qualquer, da

álgebra $sp(2)$ realizada com uma e com dois bósons. No Capítulo 5 apresentamos inicialmente os invariantes diferenciais, de ordem qualquer, para álgebras simpléticas de *rank* arbitrário desde que realizadas com um número de bósons igual ou maior que o dobro do *rank*. Apresentamos ainda neste Capítulo 5 os invariantes diferenciais até segunda ordem para álgebras simpléticas de *rank* menor (1,2,3) realizadas com um, dois, e três bósons.

Na Parte III, entendendo o documento de tese como um instrumento de caráter também didático, agrupamos nos apêndices alguns estudos de artigos recentes, correlacionados entre si e com o tema central desta tese. Um destes estudos constitui essencialmente a monografia apresentada para o Exame Geral de Qualificação do IFSC, e tem como intenção justificar o interesse por propriedades de simetria e invariância em equações diferenciais parciais.

Descrição e Comentários

Como a apresentação desta tese não segue necessariamente a ordem cronológica de nossas descobertas, descrevemos nesta seção brevemente e de maneira informal nossos resultados e as dificuldades encontradas no decorrer deste empreendimento.

O problema prático de encontrar invariantes diferenciais é equivalente a resolver um conjunto de equações diferenciais parciais para uma função incógnita P cujos argumentos são coordenadas num dado *jet-space* de dimensão m . Este sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem é proveniente de uma condição de invariância imposta sobre a ação dos elementos de uma álgebra que é expressa em termos de campos vetoriais. Este conjunto de equações pode ser, pelo menos em princípio, resolvido pelo método das curvas características, detalhado no Apêndice A, Parte III. Outro método de encontrar invariantes diferenciais é construindo operadores diferenciais invariantes. Estes operadores têm a propriedade de gerar invariantes diferenciais quando agindo em invariantes.

Para a álgebra simplética $sp(2)$, realizada com dois bósons, implementamos com sucesso os dois métodos. Construímos um conjunto de operadores diferenciais invariantes com os quais, a partir dos invariantes ordinários produzimos todos os invariantes de segunda ordem. Durante o período no qual implementamos a técnica para produção destes operadores, a rotina `pdsolve` [7] (*Maple 6*), era incapaz de resolver sistemas de equações diferenciais parciais. Contudo na nova versão deste *software*, *Maple 7*, o sistema de equações que determina os invariantes diferenciais no caso de $sp(2)$ é passível de solução. Obtivemos, com esta nova versão e como era de se esperar, os mesmos resultados que obtivemos com os operadores diferenciais.

Para o caso da álgebra $sp(4)$, também realizada com dois bósons a solução do sistema que determina os invariantes diferenciais apresenta dificuldades. O uso da rotina mencionada acima, que essencialmente implementa o método das características, é uma tarefa proibitiva. Mesmo restringindo-se o formato da dependência funcional dos invariantes, não foi possível encontrar um único invariante de segunda ordem após mais de 24 horas de computação algébrica (Pentium III-800MHz/512MB).

Na passagem do $sp(2)$ para $sp(4)$, a construção de operadores diferenciais invariantes se destaca do método das características de forma prática, oferecendo soluções parciais para este problema. Fomos capazes de implementar este método obtendo vários invariantes diferenciais de segunda ordem, numa rotina simples que consome poucos segundos de processamento.

Entretanto a estrutura das álgebras simpléticas de posto maior que 2 é complexa. Nem todos invariantes de segunda ordem produzidos para $sp(4)$ parecem ser os mais simples da respectiva ordem. Este fato decorre da forma como produzimos os operadores diferenciais invariantes para $sp(4)$.

No caso da álgebra $sp(2)$ foi possível construir, a partir dos invariantes ordinários, todos os outros de ordem maior porque existe um *frame* invariante de mesma dimensão que o espaço no qual a álgebra é realizada (dimensão quatro, com dois bósons). Este *frame* invariante consiste de todos os campos vetoriais que comutam com a álgebra em questão. A existência deste *frame* invariante, constituído de campos vetoriais invariantes, implica na existência de um *coframe* dual invariante, constituído de 1-formas diferenciais. Este *coframe* de 1-formas invariantes é o material necessário para a construção de operadores diferenciais invariantes. Quanto mais simples o *coframe* mais simples os invariantes que procuramos. A situação é bem diferente para o caso da álgebra $sp(4)$. Nossa realização para $sp(4)$ com dois bósons acontece num espaço vetorial de dimensão oito. Contudo existem somente quatro campos vetoriais que comutam com todos os 10 geradores deste grupo.

A existência deste *frame* invariante, como primeiramente observado no caso de $sp(2)$ com dois bósons, marca a importante divisão apresentada na organização deste documento de tese. Como mostrado com detalhes na Parte II, este *frame* existe sempre que a álgebra é realizada com um número de bósons igual ou maior que o dobro de seu *rank*. Com a verificação desta conjectura fomos então capazes de exibir uma fórmula completamente geral para invariantes de qualquer ordem de qualquer álgebra simplética realizada dentro desta especificação.

Existe entretanto outra maneira de produzir um *coframe* invariante, que não faz uso do *frame* invariante ausente quando o número de bósons é menor que o dobro do *rank* da álgebra considerada, descrita com detalhes também na Parte II. Com este procedimento, tratamos o caso $sp(4)$ realizado com dois bósons, construindo formas de contato invariantes tomando a derivada total dos dois invariantes ordinários, dos cinco de primeira ordem e um de segunda ordem. Com estas oito 1-formas construímos um *coframe* invariante com a dimensão necessária oito e exibimos portanto os operadores diferenciais invariantes. Desta maneira, com a ação destes operadores nos invariantes conhecidos, obtemos 49 equações diferenciais invariantes de ordem até três.

Uma análise detalhada da forma destes invariantes, sobretudo a possibilidade de escrevê-los em forma matricial, foi concluída. Nesta análise dos invariantes obtidos descobrimos uma maneira matricial para descrevê-los que fornece um esquema para generalizações para lidar com realizações arbitrárias da álgebra $sp(6)$ onde a ausência do *frame* invariante ocorre.

Apresentamos ainda o estudo da estrutura de órbitas maximais para as álgebras simpléticas de menor

rank $sp(2)$, $sp(4)$ e $sp(6)$, com um, dois e três bósons. Este estudo é fundamental para podermos determinar precisamente o número exato de invariantes diferenciais de uma dada ordem. Observamos assim que aumentando o número de bósons na realização a dimensão das órbitas se estabiliza em $J^{(0)}$, ou seja no espaço base. Foi com este resultado que mostramos ser viável construir um coframe invariante totalmente concebido neste espaço base para qualquer álgebra simpléctica em casos onde o número de bósons é igual ou superior ao dobro do *rank* da álgebra em questão. Desta maneira, os invariantes diferenciais exibem o formato mais simples possível. E ainda, os operadores diferenciais invariantes assim construídos formam o conjunto de operadores mais simples que leva a todos os invariantes de ordem maior. Este resultado é inédito na literatura dos grupos simplécticos e possui generalidades ausentes mesmo em realizações mais simples como as do grupo de rotações e suas extensões em [8] e [9].

Capítulo 2

Fundamentos Geométricos

2.1 Ação de Grupos de Lie

Nesta seção nos preocupamos em definir de maneira concisa alguns conceitos que tem um papel indispensável no procedimento que implementamos nesta tese. Cada tópico tratado neste capítulo possui uma vasta literatura de exemplos e particularidades importantes, veja por exemplo [10],[11] ou [12], que não temos a intenção de contemplar neste resumo.

Definição 1 Um mapa suave $w : G \times M \mapsto M$ define uma *ação* de um grupo G numa variedade M se satisfaz as seguintes propriedades:

$$w(e, z) = z, \quad w(a, w(b, z)) = w(ab, z), \quad (2.1)$$

para qualquer $z \in M$, $a, b \in G$. Uma ação será denotada por multiplicação, $w(a, z) = a \cdot z$, sempre que não gerar confusão.

Um importante caso particular é a ação local de um grupo.

Definição 2 Uma *ação local* de um grupo G numa variedade M é dada por subconjunto aberto $\mathcal{U} \subset G \times M$, tal que $\{e\} \times M \subset \mathcal{U}$, que é o domínio de definição da ação do grupo, e um mapa suave $w : \mathcal{U} \mapsto M$ tal que se $(g, z) \in \mathcal{U}$ implica que $(g^{-1}, w(g, z)) \in \mathcal{U}$ e as duas propriedades dadas em (2.1) são satisfeitas sempre que a ação w é definida.

A natureza da ação de um grupo numa variedade é melhor compreendida através da observação da estrutura de órbitas induzidas em M .

Definição 3 A *órbita* $\mathcal{O}_z$ por um ponto $z \in M$ é a imagem do mapa $w_z : G \mapsto M$ dado por $w_z(g) = w(g, z)$. Cada ponto de M pertence à uma única órbita. Se existe somente uma órbita em M , então $\mathcal{O}_z = M$ e a ação é chamada *transitiva*.

Definição 4 O grupo de isotropia de um ponto $x \in M$ é dado por todos elementos que fixam x

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

O subgrupo de isotropia global é o subgrupo

$$G_M = \bigcap_{x \in M} G_x = \{g \in G \mid gx = x \forall x \in M\}$$

que consiste daqueles elementos do grupo que fixam todos pontos em M .

Em particular se $G_x = G$ então x é um ponto fixo da ação.

Definição 5 Um grupo G age *efetivamente* se elementos diferentes tem ações diferentes, de forma que $g \cdot x = h \cdot x$ para todo $x \in M$ se e somente se $g = h$.

Isto é equivalente a dizer que o único elemento agindo como a transformação identidade é o elemento identidade de G ou seja, em outras palavras G age efetivamente se e somente se $G_M = \{e\}$.

Definição 6 Um grupo age *livremente* se o subgrupo de isotropia de cada ponto é trivial. Ou seja, se $g \neq e$ temos $g \cdot x \neq x$, para todo $x \in M$.

Fica claro que o conceito de ação livre é mais restritivo. Uma ação livre certamente é efetiva, já que a intersecção em G_M consta apenas do elemento $\{e\}$. Contudo a afirmação recíproca nem sempre é verdadeira, pois qualquer ponto que produza um subgrupo de isotropia não trivial, retirando o atributo de livre da ação, não retira a efetividade da ação porque a intersecção continua contendo somente $\{e\}$.

Definição 7 A ação de um grupo G em M é chamada *semi-regular* se todas suas órbitas têm a mesma dimensão. A ação é chamada *regular* se cada ponto $z \in M$ tem uma vizinhança arbitrariamente pequena cuja intersecção com cada órbita é subconjunto conectado (ponto a ponto) da órbita.

2.2 Campos Vetoriais

Um vetor tangente a uma variedade M num ponto $\mathbf{x} \in M$ é geometricamente definido como o vetor tangente a uma curva que passa pelo ponto x . Em coordenadas locais, o vetor tangente à curva parametrizada $\mathbf{x} = \phi(t)$ é determinado pela derivada $\dot{\phi}(t)$ em $\mathbf{x}$. A coleção de tais vetores forma o plano tangente $TM_{\mathbf{x}}$ de M em $\mathbf{x}$. Cada espaço tangente $TM_{\mathbf{x}}$ é um espaço vetorial de mesma dimensão que M . Um campo vetorial v é uma associação de vetores tangentes $v|_{\mathbf{x}} \in TM_{\mathbf{x}}$ para todo $\mathbf{x}$. Em coordenadas locais temos

$$v = \sum \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (2.2)$$

Considere o mapa

$$\mathbf{x} = e^{tv} \mathbf{x}_0, \quad v = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0). \quad (2.3)$$

Como $vx = y$, $vvx = -x$, $vvvx = -y$, $vvvvx = x$, ... e $vy = -x$, $vvv = -y$, $vvvv = x$, $vvvvv = y$, ..., então temos

$$e^{tv}x = (1 + tv + \frac{t^2}{2!}v^2 + \frac{t^3}{3!}v^3 + \frac{t^4}{4!}v^4 + \dots)x = x \cos t + y \sin t \quad (2.4)$$

$$e^{tv}y = (y + t(-x) + \frac{t^2}{2!}(-y) + \frac{t^3}{3!}(x) + \frac{t^4}{4!}(y) + \dots) = -x \sin t + y \cos t. \quad (2.5)$$

Então o mapa (2.3) representa uma maneira parametrizada de representar a curva $\phi(t) = e^{tv}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$, que nesse caso é de fato uma circunferência que passa por $\mathbf{x}_0$ em $t = 0$. Agora um vetor tangente a essa curva é num ponto $\mathbf{x}$ dado por

$$v|_{e^{tv}\mathbf{x}_0} = \dot{\phi}(t) = \frac{d}{dt}(e^{tv}\mathbf{x}_0). \quad (2.6)$$

No caso em que $t = 0$, essa expressão justifica a notação em (2.2) usada até aqui. Por exemplo, seja novamente $v = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$, que já sabemos gera a rotação (2.4). O campo vetorial (2.2) associa ao ponto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, em $t = 0$, o vetor tangente

$$v|_{\mathbf{x}_0} = \frac{d}{dt}(e^{tv}\mathbf{x}_0)|_{t=0} = (v.\mathbf{x})|_0 = (y, -x)|_0 = (y_0, -x_0), \quad (2.7)$$

e igualmente associa um vetor tangente ao ponto $\mathbf{x}$ num tempo t .

2.3 Invariância Diferencial

Nesta seção apresentamos algumas definições básicas e a terminologia usada nas seções subsequentes; para mais detalhes veja [10] e [11]. Nem toda generalidade dos resultados apresentados aqui será necessária neste estágio, porém, a título de referência futura, não os omitimos. Suponha que o espaço das variáveis independentes $x = (x^1, \dots, x^p)$, seja denotado por X e que o espaço das variáveis dependentes $u(x) = (u^1, \dots, u^q)$ seja denotado por U . Definimos a extensão do espaço básico $X \times U$ de forma a incluir também as derivadas parciais das variáveis dependentes. Para tal, observamos que dada uma função real bem comportada $f(x) = f(x^1, \dots, x^p)$ de p variáveis independentes, existem $p_k = \binom{p+k-1}{k}$ derivadas parciais de f , de ordem $k = k_1 + \dots + k_p$ e independentes:

$$f_{\{k\}} = \partial_{\{k\}}f(x) \equiv \left\{ \frac{\partial^k f(x)}{(\partial x^1)^{k_1} \dots (\partial x^p)^{k_p}}, \dots \right\}, \quad \{k_1 + \dots + k_p = k, \dots\}. \quad (2.8)$$

Por exemplo, para $k = 2$ e $x = (x^1, x^2)$, $\{2 + 0 = k, 1 + 1 = k, 0 + 2 = k\}$, teremos

$$\partial_{\{2\}}f = \{f_{x^1x^1}, f_{x^1x^2}, f_{x^2x^2}\} = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2} \right\}.$$

Representamos por U_k o espaço formado por todas as qp_k derivadas parciais $u_{\{k\}}$ de $u(x)$, de ordem k . Então, podemos formar o espaço $U^{(n)} = U \times U_1 \times \dots \times U_n$ contendo as variáveis dependentes u e todas as suas derivadas $u_{\{k\}}$ até ordem n , $k \in \{1, \dots, n\}$. O espaço completo $J^{(n)} = X \times U^{(n)}$ será denominado de n -ésimo espaço prolongado (*jet-space*) [10, 12] do espaço básico $X \times U$.

Figura 2.1: Equações diferenciais vistas como sub-variedades em um *jet space*.

Dada uma função suave $u = f(x)$, com $f : X \mapsto U$, existe uma função induzida $\text{pr}^{(n)}f(x)$, chamada de n -ésima prolongação de u , $X \mapsto U^{(n)}$, que é definida pelas coordenadas

$$u_{\{k\}} = \partial_{\{k\}}u = \partial_{\{k\}}f. \quad (2.9)$$

Assim, $\text{pr}^{(n)}u$ é uma aplicação do espaço X para o espaço $U^{(n)}$: para cada x em X , $\text{pr}^{(n)}u$ é um vetor cujas coordenadas representam os valores de u e suas derivadas de ordem até n . Por exemplo, a segunda prolongação $\text{pr}^{(2)}u$, com $q = 1$ e $p = 2$, é dada por

$$(u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = \left(f; \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right). \quad (2.10)$$

Desta forma podemos descrever um sistema de equações diferenciais parciais como sendo a sub-variedade

$$\mathcal{L}_\Delta = \{(x, u^{(n)}) : \Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0\} \subset X \times U^{(n)} \quad (2.11)$$

e sua solução como sendo uma função, $u = f(x)$, tal que o grafo de sua n -ésima prolongação esteja contido na sub-variedade $\mathcal{L}_\Delta$. Exemplos desta construção é mostrado na Figura 2.3. Um grupo de simetria G desse sistema de equações diferenciais $\mathcal{L}_\Delta$ é definido como um grupo de transformações locais, atuando em $X \times U$, transformando as soluções $u(x)$ em outras soluções. Suponhamos agora um grupo G agindo localmente em $X \times U$, sendo $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ o resultado da ação em $u = f(x)$. Pode ser mostrado que há uma ação local de G em $X \times U^{(n)}$ induzida pela operação de prolongação de ordem n a qual deixa o sistema $\mathcal{L}_\Delta$ invariante [10], isto é, $\text{pr}^{(n)}g \cdot (x, u^{(n)}) \in \mathcal{L}_\Delta$ para todo $g \in G$ e $(x, u^{(n)}) \in \mathcal{L}_\Delta$. No entanto, é conveniente estabelecer a ação infinitesimal para a ação local de G em $X \times U^{(n)}$. Seja $\mathbf{v}$ um dos geradores infinitesimais

de G , os quais são campos vetoriais da forma

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (2.12)$$

onde $x = (x^1, \dots, x^p)$ e $u = (u^1, \dots, u^q)$. A n -ésima prolongação $\text{pr}^{(n)}$ de $\mathbf{v}$ é dada por [10]

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \quad (2.13)$$

onde a segunda soma percorre todos os multi-índices $J = (j_1 \dots j_k)$, com $1 < j_k < p$. Os coeficientes ϕ_J^α em (2.13) são dados por

$$\phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) \equiv D_J \left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha, \quad (2.14)$$

com $D_J = \{D_{j_1} D_{j_2} \dots D_{j_k}, \dots\}$, $1 < k < p$ e sendo D_i a derivada total de uma função $f(x, u^{(n)})$ com relação à variável x^i

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J u_{J,i}^\alpha \frac{\partial f}{\partial u_J^\alpha}, \quad (2.15)$$

com

$$u_{J,i}^\alpha = \frac{\partial u_J^\alpha}{\partial x^i} = \frac{\partial^{k+1} u^\alpha}{\partial x^i \partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_k}}. \quad (2.16)$$

Esta fórmula para o cálculo direto das prolongações de ordem n aparece pela primeira vez na literatura em [13] e uma prova detalhada é apresentada em [10]. Contudo a fórmula recursiva,

$$\phi_\alpha^{J,i} = D_i \phi_\alpha^J - \sum_{j=1}^p D_i \xi^j u_{J,j}^\alpha, \quad (2.17)$$

com o multi-índice $J = (j_1 \dots j_k)$, $1 \leq j_\nu \leq p$, já era conhecida por Sophus Lie, [14]. As características associadas a um campo vetorial do tipo (2.12) são definidas por

$$Q_\alpha(x, u^{(1)}) = \phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha \quad (2.18)$$

Em termos desta característica a expressão (2.14) fica

$$\phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) \equiv D_J(Q_\alpha) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha. \quad (2.19)$$

A tradução infinitesimal do fato de G ser um grupo de simetria de $\mathcal{L}_\Delta$ é a condição

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{v}[\Delta_\nu(x, u^{(n)})] = 0, \quad \nu = 1 \dots l, \quad \text{sempre que} \quad \Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad (2.20)$$

para cada gerador $\mathbf{v}$ de G . Assim, o procedimento para a determinação do grupo de simetria para um sistema de equações diferenciais consiste em determinar os coeficientes ξ e ϕ da condição de invariância (2.20).

2.4 Invariantes Diferenciais

Existe um problema complementar à determinação do grupo de simetria mais geral de um sistema de equações diferenciais. Tal problema consiste na determinação do tipo mais geral de um sistema de equações diferenciais que admite um dado grupo contínuo como seu grupo de simetria. A solução desse problema depende do conceito de invariantes diferenciais. Um invariante diferencial de ordem n de um grupo G , atuando em $X \times U$, é uma função $\Delta : X \times U^{(n)} \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\Delta\left(\text{pr}^{(n)}g \cdot (x, u^{(n)})\right) = \Delta(x, u^{(n)}), \quad \forall g \in G. \quad (2.21)$$

Os invariantes diferenciais são determinados pela condição infinitesimal

$$\text{pr}^{(r)}\mathbf{v} \Delta = 0. \quad (2.22)$$

Neste trabalho estamos considerando o conceito de invariância forte no qual (2.22) vale em todo o *jet-space*, e não somente em uma sub-variedade particular, que corresponderia à idéia de invariância fraca. Um invariante ordinário de um grupo G agindo sobre uma variedade M é uma função $I : M \mapsto \mathbb{R}$ que não é afetada pelas transformações do grupo. Um invariante diferencial é simplesmente um invariante, no sentido comum, da ação prolongada de um grupo de transformações agindo num *jet-space* J^n . Assim como um invariante ordinário serve para caracterizar equações invariantes, invariantes diferenciais servem para caracterizar completamente sistemas de equações diferenciais invariantes bem como problemas variacionais invariantes. Para ilustrar a situação tomemos o exemplo do grupo euclidiano, $\text{SE}(2)$, que age no plano (x, u) via rotações e translações. Os geradores associados sendo

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \mathbf{v}_2 = \partial_u, \mathbf{v}_3 = -u\partial_x + x\partial_u. \quad (2.23)$$

As suas prolongações de segunda ordem têm o seguinte formato,

$$\text{pr}^2\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 \quad (2.24)$$

$$\text{pr}^2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \quad (2.25)$$

$$\text{pr}^2\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3 + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}}, \quad (2.26)$$

onde os coeficientes são obtidos através da fórmula geral (2.13)

$$\phi^x = D_x(\phi - \xi u_x) + \xi u_{xx} = D_x(x + uu_x) - uu_{xx} = 1 + u_x^2, \quad (2.27)$$

$$\phi^{xx} = D_{xx}(\phi - \xi u_x) + \xi u_{xxx} = D_x^2(x + uu_x) - uu_{xxx} = 3u_x u_{xx}. \quad (2.28)$$

O grupo age transitivamente e livre no primeiro *jet-space* e portanto o primeiro invariante diferencial, a curvatura Euclidiana,

$$\kappa = \frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^{3/2}}, \quad (2.29)$$

aparece no segundo *jet-space* $J^{(2)}$. Um cálculo direto mostra que

$$\text{pr}^2 \mathbf{v}_i \{ \kappa(x, u^{(2)}) \} = 0, \quad (2.30)$$

para qualquer u_x e u_{xx} : invariância forte. Fazendo uma breve recordação da geometria diferencial de curvas no plano, verifiquemos que esta forma de expressar a curvatura é consequência de uma parametrização particular. Primeiro lembramos que no espaço euclidiano um vetor $v(t)$ de módulo constante tem a propriedade que $\dot{v}$ e v são ortogonais. De fato,

$$\frac{d}{dt}(|v|^2) = \frac{d}{dt} \langle v, v \rangle = \langle \dot{v}, v \rangle + \langle v, \dot{v} \rangle = 2 \langle v, \dot{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow v \perp \dot{v}. \quad (2.31)$$

A curvatura $k(t)$ de uma curva $r(t)$ é definida como a magnitude do vetor aceleração desde que a curva seja parametrizada pelo comprimento de arco $t = l$ (ou parâmetro natural) ou seja $|\dot{r}| = 1$,

$$\frac{dv}{dl} = k\hat{n}. \quad (2.32)$$

Que implica também na relação (como $|\hat{n}| = 1 \Rightarrow \dot{\hat{n}} \perp \hat{n}$)

$$\frac{d\hat{n}}{dl} = -k\hat{v}. \quad (2.33)$$

Quando a parametrização da curva não é natural, como $dl = |v_t|dt$, temos

$$v = \frac{dr}{dl} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{dl} = \frac{v_t}{|v_t|}, \quad (2.34)$$

A aceleração é então dada por

$$w_l = \frac{d}{dl} \frac{v_t}{|v_t|} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_t}{|v_t|} \right) \frac{dt}{dl} = \frac{1}{|v_t|} \frac{d}{dt} \frac{v_t}{|v_t|} = \frac{1}{|v_t|^2} \left(\frac{dv_t}{dt} - \frac{v_t}{|v_t|} \frac{d|v_t|}{dt} \right). \quad (2.35)$$

Ou ainda,

$$w_l = \frac{1}{|\dot{r}|^2} \left(\ddot{r} - \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|} \frac{d|\dot{r}|}{dt} \right). \quad (2.36)$$

Observe que como

$$\frac{d}{dt} |\dot{r}|^2 = 2|\dot{r}| \frac{d}{dt} (|\dot{r}|) \rightsquigarrow \frac{d}{dt} (|\dot{r}|) = \frac{1}{2|\dot{r}|} \frac{d}{dt} \{ |\dot{r}|^2 \}, \quad (2.37)$$

a aceleração pode então ser escrita por

$$w_l = \frac{1}{|\dot{r}|^2} \left(\ddot{r} - \frac{\dot{r}}{2|\dot{r}|^2} \frac{d\{|\dot{r}|^2\}}{dt} \right). \quad (2.38)$$

Levando em conta que

$$|\dot{r}|^2 = \langle \dot{r}, \dot{r} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \dot{r}, \dot{r} \rangle = \langle \ddot{r}, \dot{r} \rangle + \langle \dot{r}, \ddot{r} \rangle = 2 \langle \ddot{r}, \dot{r} \rangle = 2 \langle \ddot{r}, \dot{r} \rangle, \quad (2.39)$$

temos portanto

$$w_l = \frac{1}{|\dot{r}|^2} \left(\ddot{r} - \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|^2} \langle \dot{r}, \ddot{r} \rangle \right). \quad (2.40)$$

Em termos das componentes $(x(t), y(t))$ temos

$$w_l = \left(\frac{1}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right) [\ddot{x} - \dot{x} \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \ddot{y} - \dot{y} \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}], \quad (2.41)$$

e portanto o módulo da aceleração ou curvatura é dada finalmente por

$$|w_l|^2 = k^2 = \frac{(\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y})^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}. \quad (2.42)$$

Considere então uma curva expressa como função de x , ou seja, $r(x) = [x, y(x)]$. A expressão da curvatura euclideana (2.42) para um parâmetro qualquer se reduz a

$$k^2 = \frac{(-\ddot{y})^2}{(1 + \dot{y}^2)^3} \rightsquigarrow k = \ddot{y}(1 + \dot{y}^2)^{-3/2}, \quad (2.43)$$

que é a forma que obtivemos anteriormente.

Um *coframe* contato invariante neste caso consiste de uma única forma, o comprimento de arco infinitesimal:

$$ds = \sqrt{1 + u_x^2} dx, \quad (2.44)$$

ou numa forma parametrizada

$$ds = \| \dot{z} \| dt, \quad z(t) = (x(t), u(t)). \quad (2.45)$$

Invariantes de ordem maior podem ser obtidos tomando derivadas de κ com respeito ao comprimento de arco, ou em outras palavras aplicando o operador diferencial invariante

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}} D_x. \quad (2.46)$$

Por considerações dimensionais, somente um único invariante funcionalmente independente aparece em cada ordem de prolongação e portanto qualquer invariante diferencial é uma função de $\kappa, \kappa_s = \frac{d\kappa}{ds} = \mathcal{D}\kappa, \kappa_{ss} = \frac{d\kappa_s}{ds} = \mathcal{D}\kappa_s, \dots, etc.$ Então todo problema variacional invariante pela ação local do grupo Euclidiano tem a seguinte forma

$$\mathcal{I}[u] = \int \tilde{L}(\kappa, \kappa_s, \kappa_{ss}, \dots) ds. \quad (2.47)$$

Onde o invariante diferencial $\tilde{L}$ é chamado de Lagrangiano invariante. Como a equação de Euler-Lagrange $E(L) = 0$ para o Lagrangiano usual $L = \tilde{L} \| \dot{z} \|$ é também invariante, podemos então escrevê-la da mesma maneira

$$\Delta(\kappa, \kappa_s, \kappa_{ss}, \dots) = 0. \quad (2.48)$$

Por exemplo a equação de Euler-Lagrange para o funcional do comprimento de arco, $\int ds$ é $-\kappa = 0$, cujas soluções são retas –as curvas que minimizam o comprimento de arco. Similarmente o problema variacional $\int \frac{1}{2} \kappa^2 ds$ descreve a elástica de Euler, sua equação de Euler-Lagrange pode ser resolvida em termos de funções elípticas [15].

Historicamente o assunto sobre invariantes diferenciais, não necessariamente associado com problemas variacionais, foi iniciado por Haphen [16], e desenvolvido com detalhes por Sophus Lie [14] e Tresse [17].

Uma visão moderna com notas bibliográficas detalhadas é fornecida por P. J. Olver em [10] e [11]. Uma referência com uma linguagem mais coloquial e focalizada em aplicações físicas é dada por H. Stephani em [12] e por W. Bluman em [18].

2.5 Formas de Contato

Nesta seção voltamos aos fundamentos geométricos da teoria, lembrando somente conceitos essenciais para ilustrar um método heurístico de obtenção de invariantes a partir de invariantes diferenciais de ordem menor, eventualmente ordinários.

O Diferencial e Formas Diferenciais

Seja F um mapa entre duas variedades M e N . F induz um mapa entre os vetores tangentes $v|_{\mathbf{x}}$ em M e $w|_{\mathbf{y}}$ em N definido pela sua diferencial $dF : TM|_x \rightarrow TN|_y$ tal que

$$dF(v|_{\mathbf{x}}) = dF\left(\sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial F^j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial y_j} = w|_{\mathbf{y}}. \quad (2.49)$$

Os objetos duais aos campos vetoriais são as formas diferenciais. Dado um ponto $\mathbf{x} \in M$, uma função real $\omega : TM|_x \rightarrow \mathbb{R}$ define uma 1-forma em $\mathbf{x}$. A aplicação de ω sobre um campo vetorial v é indicada pelo operação bilinear $\langle \omega; v \rangle$. O espaço das 1-formas é o espaço dual do espaço tangente, e chamado de espaço cotangente. Dada uma função real $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sua diferencial $df = \sum_i^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ determina uma 1-forma cuja aplicação em um campo vetorial v é definida por $\langle df, v \rangle = v(f)$. Os diferenciais dx_i determinam uma base para o espaço cotangente em cada ponto $\mathbf{x}$ de M e constituem os duais da base ∂_{x_j} do espaço tangente. Em outras palavras $\langle dx_i, \partial_{x_j} \rangle = \delta_j^i$. Uma 1-forma genérica tem portanto, em coordenadas locais, a seguinte expressão

$$\omega = \sum_{i=1}^m h_i(x) dx_i \Rightarrow \langle \omega; v \rangle = \sum_{i=1}^m h_i(x) \xi^i(x). \quad (2.50)$$

Existe ainda um mapa $F^* : T^*N|_x \rightarrow T^*M|_y$ induzido sobre formas diferenciais, chamado de *pullback* que traz a forma diferencial em N de volta para M . Em coordenadas locais o mapa dF é implementado pelo Jacobiano de F , e o pullback pelo inverso transposto do Jacobiano de F , [11].

2.5.1 Objetos Duais Invariantes

Apesar do nosso interesse primário ser funções e equações invariantes pela ação de um grupo de transformações agindo numa variedade, veremos adiante que é importante a identificação de outros tipos de objetos invariantes.

Figura 2.2: Representação de 1-Formas e o *Pull Back*.

Campos Vetoriais Invariantes

Seja G um grupo de transformações conexo agindo numa variedade M , através de seus geradores infinitesimais v . Campos vetoriais invariantes W , agindo na mesma variedade M , são caracterizados pela condição

$$[W, v] = 0, \quad \forall \quad v. \quad (2.51)$$

A maneira direta para a construção desses campos invariantes é resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas para os coeficientes de um W arbitrário em M . As soluções linearmente independentes deste sistema constituem um *frame* invariante para a dada álgebra.

Formas de Contato Invariantes

Uma maneira de definir formas de contato invariantes é fazendo uso de sua relação dual com os campos vetoriais invariantes que acabamos de mencionar. Um conjunto de campos vetoriais invariantes $w_1 \dots w_n$ forma um *frame* invariante se e somente se as 1-formas de contato $\omega^1 \dots \omega^n$, definidas de forma que $\langle \omega^i, w_j \rangle = \delta_j^i$, formam um *coframe* invariante. Veremos adiante que a existência de tais frames é essencial para a construção de invariantes diferenciais de uma forma iterativa.

2.6 Operadores Diferenciais Invariantes

Uma coleção de 1-formas $\omega^i = \sum_j J_{ij}(x, u^{(n)}) dx_j$, $i = 1, 2, \dots, p$, forma um coframe invariante por contato se $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^m \neq 0$ de forma que a matriz $J = J_{ij}(x, u^{(n)})$ seja inversível. Os operadores diferenciais invariantes, $\mathcal{D}_j$, associados a este coframe determinado por J são dados por

$$\mathcal{D}_j = \sum_i K_{ij} D_i \quad \text{onde} \quad K = J^{-T}, \quad (2.52)$$

onde D_i são operadores de derivadas totais, definidos em (2.15). Estes são os operadores que têm a propriedade de gerar invariantes da ação prolongada quando empregados nos invariantes ordinários.

Considere por exemplo a ação do grupo de rotações agindo sobre as coordenadas independentes em $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, através do gerador $v = -y\partial_x + x\partial_y$. Existem dois invariantes ordinários evidentes $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ e u . A derivada total destes invariantes ordinários pode ser escrita como $\frac{1}{2}d(r^2) = \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$ e $du = \nabla u \cdot d\mathbf{x}$, fornecendo as seguintes formas de contato

$$\begin{aligned} \omega^1 &= xdx + ydy \\ \omega^2 &= u_x dx + u_y dy \end{aligned} \Rightarrow (J_{ij}) = \begin{pmatrix} x & y \\ u_x & u_y \end{pmatrix} \Rightarrow (K_{\mu\nu}) = (J_{ij})^{-T} = \frac{1}{xu_y - yu_x} \begin{pmatrix} u_y & -u_x \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Com a matriz J invertida, ou seja K , determinamos os operadores diferenciais invariantes

$$\mathcal{D}^1 = u_y D_x - u_x D_y, \quad (2.53)$$

$$\mathcal{D}^2 = -y D_x + x D_y, \quad (2.54)$$

Ou alternativamente $\mathcal{D}^3 = x D_x + y D_y$ proveniente da outra 1-forma invariante, $ydx - xdy$, ou seja, do campo vetorial invariante que comuta com v , $w = x\partial_x + y\partial_y$. Estes operadores agindo sobre os invariantes ordinários u e r levam a obtenção dos invariantes estritamente de primeira ordem $-yu_x + xu_y$ e $xu_x + yu_y$. Em suma, uma vez construído o conjunto completo de operadores diferenciais invariantes, advindo do conhecimento dos *coframes* contato invariante, o procedimento para obtenção de invariantes da ação prolongada consiste agora na aplicação sucessiva daqueles operadores.

Apresentamos aqui um teorema central, [11], *teorema 5.48*, de modo a fundamentar o resultado que foi diretamente usado, de forma funcional, nesta tese.

Teorema 1 Seja G um grupo de transformações agindo num espaço com p variáveis independentes e q dependentes. Suponha que $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_p$ formam um conjunto completo de operadores diferenciais invariantes provenientes de um *coframe* contato invariante de ordem n ou menor. Se existe um número maximal de invariantes estritamente de ordem n , $J_1, \dots, J_{q_n}$, então o conjunto de invariantes diferenciados $\mathcal{D}_i J_\nu$, $i=1, \dots, p, \nu = 1, \dots, q_n$, contém um conjunto maximal de invariantes de ordem estritamente $n + 1$.

Este resultado estabelece que, uma vez completado um conjunto maximal de invariantes de uma determinada ordem, os invariantes de ordem maior estão determinados, em princípio, com o conhecimento de um *coframe* invariante. Usamos este resultado como critério para estabelecer uma ordem máxima para apresentarmos explicitamente os invariantes diferenciais simpléticos.

Capítulo 3

Realização Polinomial

3.1 Realização bosônica de álgebras simpléticas

3.1.1 Introdução

Em geral, quando álgebras de Lie são utilizadas com a finalidade de gerar espectros (de massa ou energia) em aplicações físicas [1], se faz necessário o uso de diferentes representações irredutíveis de uma mesma álgebra, incluindo representações simétricas, anti-simétricas e/ou mistas. Em tais aplicações, é conveniente realizar as álgebras de Lie por operadores de criação e destruição (bósons) que satisfazem uma regra de comutação bosônica.

Neste capítulo, mostramos como as álgebras simpléticas podem ser realizadas em termos de operadores de criação e destruição apropriados para quaisquer de suas representações irredutíveis. Neste tipo de construção, o número de bósons é o fator importante que permite a descrição de representações irredutíveis mistas.

Uma construção explícita de uma representação irredutível de dimensão 64 para a álgebra $sp(6)$, é apresentada por Chacón e Moshinsky, [19]. Esta representação em particular está associada com uma descrição da evolução do código genético através de um modelo algébrico [4], baseado na simetria simplética. Na dissertação de mestrado [20], construímos explicitamente todos os 64 vetores de estado, como polinômios em operadores de criação, e classificamos a ação dos elementos da álgebra simplética $sp(6)$ de acordo com seu impacto na preservação do mecanismo de tradução do código genético, à luz de uma associação entre vetores e códons proposto pelo modelo algébrico [5]. Em [19], Chacón e Moshinsky sugerem ainda que as variáveis bosônicas devem ter um papel importante como “*basic building blocks*” em modelos desta natureza. Vale ressaltar que todos vetores de estado, em irrep qualquer, é constituído de variáveis associadas aos operadores de criação. Nesta tese, procuramos então por equações diferenciais parciais para funções de tais variáveis. Portanto tal classificação constitui um problema *per se* e de interesse imediato para modelos algébricos.

Apresentaremos aqui apenas uma realização bosônica, com número de bósons arbitrário, dando ênfase

às relações de comutação para álgebras particulares $sp(2n)$, $n = 1, 2, 3$, e seus polinômios invariantes, ferramentas essenciais para implementar nosso programa. Na Seção 3.1.2, apresentamos a notação básica para a realização de álgebras simpléticas por operadores diferenciais satisfazendo relações de comutação bosônicas. Esta realização é adaptada para proporcionar uma construção polinomial de representações irredutíveis quaisquer. Essencialmente, devemos introduzir uma quantidade de operadores bosônicos distintos igual à quantidade de componentes do peso máximo caracterizando a representação irredutível desejada [19, 21]. Na Seção 3.1.3, escrevemos os elementos da álgebra $sp(4)$ explicitamente em termos de uma realização bosônica com dois bósons. Uma tabela contendo todos os produtos de Lie também é apresentada. Na Seção 3.1.4, apresentamos os polinômios invariantes (invariantes ordinários) para álgebras simpléticas [19].

3.1.2 Realização bosônica

Os operadores de criação η_{kl} , com $|k| \leq j$ (j semi-inteiro) e $1 \leq l \leq n_p$ (n_b inteiro), e aniquilação ξ^{kl} , satisfazendo

$$[\xi^{kl}, \eta_{rs}] = \delta_k^r \delta_l^s, \quad \xi^{kl} = \frac{\partial}{\partial \eta_{kl}}, \quad (3.1)$$

realizam a álgebra unitária $u(n_p(2j+1))$ através dos produtos $\eta_{rs} \xi^{kl}$, [21, 22]. Esta álgebra unitária contém as sub-álgebras $u(2j+1)$ e $u(n_p)$, cujos geradores são, respectivamente,

$$C_r^s = \sum_{k=1}^{n_p} \eta_{rk} \xi^{sk}, \quad C_r^s = \sum_{k=-j}^j \eta_{kr} \xi^{ks}. \quad (3.2)$$

Em todas as quantidades, o primeiro índice será sempre um semi-inteiro positivo ou negativo, representando as componentes do momentum angular j , e o segundo índice será sempre um inteiro positivo não-nulo representando o número de bósons n_b . Os valores de j e n_b fixam, respectivamente, uma cadeia algébrica e uma família de representações irredutíveis. O número de bósons n_b também representa a quantidade de linhas no diagrama de Young de cada irrep ou a quantidade de componentes não-nulas do peso máximo, [23] e [24]. Os elementos (3.2) satisfazem as relações de comutação canônicas das álgebras unitárias:

$$\begin{aligned} [C_k^l, C_r^s] &= C_k^s \delta_r^l - C_r^l \delta_k^s, \\ [C_k^l, C_r^s] &= C_k^s \delta_r^l - C_r^l \delta_k^s. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Os elementos C_r^s ou C_r^s com $r = s$ geram a sub-álgebra de Cartan e aqueles com $r \leq |s|, r > 0$ estão associados às raízes positivas. Os elementos da álgebra simplética $sp(2j+1)$, na cadeia $u(2j+1) \supset sp(2j+1) \supset sp(2j-1) \oplus sp(2)$ são escritos na forma

$$\mathcal{L}_r^s = C_r^s + (-1)^{r+s} \bar{C}_{\bar{s}}^{\bar{r}}, \quad \mathcal{L}_{\bar{s}}^{\bar{r}} = (-1)^{r+s} \mathcal{L}_r^s, \quad \bar{r} = -r. \quad (3.4)$$

O comutador ou produto de Lie entre estes elementos são dados por

$$[\mathcal{L}_m^{m'}, \mathcal{L}_{m''}^{m'''}] = \mathcal{L}_m^{m'''} \delta_{m''}^{m'} - \mathcal{L}_{m''}^{m'} \delta_m^{m'''} + (-1)^{m''+m'''} \mathcal{L}_m^{-m''} \delta_{-m'''}^{m'} - (-1)^{m''+m'''} \mathcal{L}_{-m'''}^{m'} \delta_m^{-m''}. \quad (3.5)$$

3.1.3 A estrutura da álgebra $sp(4)$ e $sp(6)$

Consideremos no momento a álgebra $sp(4)$ explicitamente. Neste caso, $j = 3/2$ e, sendo a $sp(4)$ uma álgebra de *rank* $r = 2$, então $n_p = 2$ (dois bósons) é suficiente para construir a família mais geral das representações irredutíveis. A fim de evitarmos índices fracionários, omitiremos todos os denominadores no primeiro índice das variáveis independentes η_{ik} , onde $|i| \leq 3/2$ e $k = 1, 2$. Além disto, escreveremos todos os índices negativos como em $\bar{i}$. Assim, $\eta_{-1/2,1}$ será escrito como $\eta_{\bar{1}1}$. As derivadas parciais em relação a η_{ik} serão abreviadas a ∂_{ik} . Desta forma, de acordo com (3.4), temos:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \mathcal{L}_1^1 = \eta_{11}\partial_{11} - \eta_{\bar{1}1}\partial_{\bar{1}1} + \eta_{12}\partial_{12} - \eta_{\bar{1}2}\partial_{\bar{1}2}, \\
 v_2 &= \mathcal{L}_1^{\bar{1}} = 2(\eta_{11}\partial_{\bar{1}1} + \eta_{12}\partial_{\bar{1}2}), \\
 v_3 &= \mathcal{L}_{\bar{1}}^1 = 2(\eta_{\bar{1}1}\partial_{11} + \eta_{\bar{1}2}\partial_{12}), \\
 v_4 &= \mathcal{L}_3^3 = \eta_{31}\partial_{31} - \eta_{\bar{3}1}\partial_{\bar{3}1} + \eta_{32}\partial_{32} - \eta_{\bar{3}2}\partial_{\bar{3}2}, \\
 v_5 &= \mathcal{L}_3^{\bar{3}} = 2(\eta_{31}\partial_{\bar{3}1} + \eta_{32}\partial_{\bar{3}2}), \\
 v_6 &= \mathcal{L}_{\bar{3}}^3 = 2(\eta_{\bar{3}1}\partial_{31} + \eta_{\bar{3}2}\partial_{32}), \\
 v_7 &= \mathcal{L}_1^3 = \eta_{11}\partial_{31} + \eta_{\bar{1}1}\partial_{\bar{3}1} + \eta_{12}\partial_{32} + \eta_{\bar{1}2}\partial_{\bar{3}2}, \\
 v_8 &= \mathcal{L}_3^1 = \eta_{31}\partial_{11} + \eta_{\bar{3}1}\partial_{\bar{1}1} + \eta_{32}\partial_{12} + \eta_{\bar{3}2}\partial_{\bar{1}2}, \\
 v_9 &= \mathcal{L}_1^{\bar{3}} = \eta_{11}\partial_{\bar{3}1} - \eta_{\bar{1}1}\partial_{31} + \eta_{12}\partial_{\bar{3}2} - \eta_{\bar{1}2}\partial_{32}, \\
 v_{10} &= \mathcal{L}_{\bar{3}}^1 = \eta_{\bar{3}1}\partial_{11} - \eta_{\bar{1}1}\partial_{31} + \eta_{\bar{3}2}\partial_{12} - \eta_{\bar{1}2}\partial_{32}.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

As constantes de estrutura correspondentes estão na Tabela 3.1. Por uma inspeção direta nesta tabela, podemos identificar imediatamente quatro sub-álgebras $sp(2) \sim su(2)$. Duas destas são essencialmente álgebras $su(2)$ naturais : $\{\mathcal{L}_1^1, \mathcal{L}_1^{\bar{1}}, \mathcal{L}_1^1\}$, que representa uma restrição da mesma prescrição para $j = 1/2$, e $\{\mathcal{L}_3^3, \mathcal{L}_3^{\bar{3}}, \mathcal{L}_3^3\}$. As outras duas são álgebras $sp(2)$ genuínas: $\{\mathcal{L}_1^1 \pm \mathcal{L}_3^3, \mathcal{L}_1^3, \mathcal{L}_3^1\}$ e $\{\mathcal{L}_1^1 \pm \mathcal{L}_3^{\bar{3}}, \mathcal{L}_1^{\bar{3}}, \mathcal{L}_3^1\}$. A correspondência desta notação com a notação canônica (Cartan-Weyl ou Dynkin-Chevalley) usada em [25] é:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \mathcal{L}_1^1, \quad E_1^+ = \mathcal{L}_1^3, \quad E_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}_3^{\bar{3}}, \quad E_3^+ = \mathcal{L}_1^{\bar{3}}, \quad E_4^+ = \mathcal{L}_1^{\bar{1}}, \\
 H_2 &= \mathcal{L}_3^3, \quad E_1^- = \mathcal{L}_3^1, \quad E_2^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}_3^3, \quad E_3^- = \mathcal{L}_3^1, \quad E_4^- = \mathcal{L}_1^1.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Vale destacar que os elementos da sub-álgebra de Cartan, $\mathcal{L}_1^1$ e $\mathcal{L}_3^3$, bem como os elementos $\mathcal{L}_1^{\bar{1}}$ e $\mathcal{L}_1^{\bar{3}}$ (e seus conjugados $\mathcal{L}_1^1$ e $\mathcal{L}_3^3$) podem ser definidos a partir dos demais:

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{L}_3^3 &= [\mathcal{L}_3^{\bar{3}}, \mathcal{L}_3^3], \quad \mathcal{L}_1^1 - \mathcal{L}_3^3 = [\mathcal{L}_1^3, \mathcal{L}_3^1], \\
 2\mathcal{L}_1^{\bar{3}} &= [\mathcal{L}_1^3, \mathcal{L}_3^{\bar{3}}], \quad \mathcal{L}_1^{\bar{1}} = [\mathcal{L}_1^{\bar{3}}, \mathcal{L}_3^1].
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Portanto, os quatro operadores $\{\mathcal{L}_1^3, \mathcal{L}_3^1, \mathcal{L}_3^{\bar{3}}, \mathcal{L}_3^3\}$ ou $\{\mathcal{L}_1^1, \mathcal{L}_3^3, \mathcal{L}_1^3, \mathcal{L}_3^1\}$, geram toda a álgebra simplética $sp(4)$ e portanto qualquer função invariante com relação a estes geradores será automaticamente invariante da álgebra inteira. Esta situação é completamente análoga para a álgebra $sp(6)$, bastando tomar por exemplo

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
v_1	0	$2v_2$	$-2v_3$	0	0	0	v_7	$-v_8$	v_9	$-v_{10}$
v_2	$-2v_2$	0	$4v_{11}$	0	0	0	0	$2v_9$	0	$-2v_7$
v_3	$2v_3$	$-4v_1$	0	0	0	0	$-2v_{10}$	0	$2v_8$	0
v_4	0	0	0	0	$2v_5$	$-2v_6$	$-v_7$	v_8	v_9	$-v_{10}$
v_5	0	0	0	$-2v_5$	0	$4v_4$	$-2v_9$	0	0	$2v_8$
v_6	0	0	0	$2v_6$	$-4v_4$	0	0	$2v_{10}$	$-2v_7$	0
v_7	$-v_7$	0	$2v_{10}$	v_7	$2v_9$	0	0	$v_1 - v_4$	$-v_2$	$-v_6$
v_8	v_8	$-2v_9$	0	$-v_8$	0	$-2v_{10}$	$-v_1 + v_4$	0	v_5	v_3
v_9	$-v_9$	0	$-2v_8$	$-v_9$	0	$2v_7$	v_2	$-v_5$	0	$v_1 + v_4$
v_{10}	v_{10}	$2v_7$	0	v_{10}	$-2v_8$	0	v_6	$-v_3$	$-v_1 - v_4$	0

Tabela 3.1: Constantes de estrutura da álgebra $sp(4)$, calculadas usando o produto de Lie dado em (3.1.2).

os operadores associados com as raízes simples na Tabela 3.2 e os geradores da sub-álgebra de Cartan. Na Tabela 3.2, apresentamos as raízes não-nulas, também provenientes do uso de (3.1.2), associadas aos 18 elementos que estão fora da sub-álgebra de Cartan.

Gerador	Raiz	Gerador	Raiz	Gerador	Raiz
$\mathcal{L}_1^3$	$[1, -1, 0]^\dagger$	$\mathcal{L}_1^{-1}$	$[2, 0, 0]$	$\mathcal{L}_{-1}^1$	$[-2, 0, 0]$
$\mathcal{L}_1^5$	$[1, 0, -1]$	$\mathcal{L}_3^{-3}$	$[0, 2, 0]$	$\mathcal{L}_{-3}^3$	$[0, -2, 0]$
$\mathcal{L}_3^1$	$[-1, 1, 0]$	$\mathcal{L}_5^{-5}$	$[0, 0, 2]^\dagger$	$\mathcal{L}_{-5}^5$	$[0, 0, -2]$
$\mathcal{L}_5^1$	$[-1, 0, 1]$	$\mathcal{L}_3^{-1}$	$[1, 1, 0]$	$\mathcal{L}_{-1}^3$	$[-1, -1, 0]$
$\mathcal{L}_3^5$	$[0, 1, -1]^\dagger$	$\mathcal{L}_5^{-1}$	$[1, 0, 1]$	$\mathcal{L}_{-1}^5$	$[-1, 0, -1]$
$\mathcal{L}_5^3$	$[0, -1, 1]$	$\mathcal{L}_5^{-3}$	$[0, 1, 1]$	$\mathcal{L}_{-3}^5$	$[0, -1, -1]$

Tabela 3.2: Raízes da álgebra $sp(6)$. As raízes marcadas com $\dagger$ são simples, e portanto o conjunto $\{\mathcal{L}_1^3, \mathcal{L}_3^5, \mathcal{L}_5^{-5}, \mathcal{L}_1^1, \mathcal{L}_3^3, \mathcal{L}_5^5\}$ pode ser tomado como geradores da álgebra.

3.1.4 Representações unitárias

As relações de comutação (3.1) implicam que os operadores de aniquilação ξ^{kl} podem ser interpretados como operadores diferenciais atuando em polinômios P formados pelos operadores de criação η_{kl} ,

$$\xi^{kl} = \frac{\partial P(\eta)}{\partial \eta_{kl}}. \quad (3.9)$$

Os polinômios (linearmente independentes) da forma $P = P(\eta_{\mu s})$ que satisfazem as equações

$$C_s^s P = h_s P, \quad C_s^{s'} P = 0, \quad s < s' \quad (3.10)$$

formam uma base para uma representação irredutível de $u(2j+1)$ caracterizada pelo conjunto de inteiros não negativos $[h_1, h_2, \dots, h_{n_p}]$. A solução de (3.10) pode ser dada em termos dos determinantes [19]

$$\Delta_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r}^{s_1, s_2, \dots, s_r} = \det \begin{pmatrix} \eta_{\mu_1 s_1} & \eta_{\mu_1 s_2} & \cdots & \eta_{\mu_1 s_r} \\ \eta_{\mu_2 s_1} & \eta_{\mu_2 s_2} & \cdots & \eta_{\mu_2 s_r} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \eta_{\mu_r s_1} & \eta_{\mu_r s_2} & \cdots & \eta_{\mu_r s_r} \end{pmatrix} = \sum_{\wp} (-1)^{\wp} \wp(\eta_{\mu_1 s_1} \eta_{\mu_2 s_2} \cdots \eta_{\mu_r s_r}), \quad (3.11)$$

onde $\wp$ significa uma permutação dos índices s_i . Explicitamente, esta solução é dada por

$$P = (\Delta_1^1)^{h_1-h_2} (\Delta_{12}^{12})^{h_2-h_3} \cdots (\Delta_{1\dots 2j+1}^{1\dots 2j+1})^{h_{2j+1}} \times Q\left(\frac{\Delta_\mu^1}{\Delta_1^1}, \frac{\Delta_{1\mu}^{12}}{\Delta_{12}^{12}}, \frac{\Delta_{12\dots \mu}^{12\dots 2j}}{\Delta_{12\dots 2j}^{12\dots 2j}}\right) \quad (3.12)$$

sendo Q nesta expressão um polinômio qualquer nas razões indicadas. O polinômio que satisfaz, além de (3.10), as equações

$$\mathcal{C}_\mu^\mu P = K_\mu P, \quad \mathcal{C}_\mu^{\mu'} P = 0, \quad \mu < \mu', \quad (3.13)$$

é dado por [19]

$$P = (\Delta_1^1)^{h_1-h_2} (\Delta_{12}^{12})^{h_2-h_3} (\Delta_{1\dots 2j+1}^{1\dots 2j+1})^{h_{2j+1}}. \quad (3.14)$$

Pode-se mostrar [22] que (3.14) é único com $K_\mu = h_\mu$ e portanto candidato natural, pelo teorema de Cartan, à assumir o papel de polinômio de maior peso numa irrep de $u(2j+1)$ caracterizada pela partição $[h_1, \dots, h_{n_p}]$. Notemos que a ação de $\mathcal{C}_\mu^{\mu'}$ com $\mu < \mu'$ em um típico determinante (3.11) é dada por

$$\mathcal{C}_\mu^{\mu'} \Delta_{12\dots r-1\mu}^{12\dots r-1r} = \delta_{\mu''}^{\mu'} \Delta_{12\dots r-1\mu''}^{12\dots r-1r}. \quad (3.15)$$

Nesta igualdade fica claro que μ deve ser diferente de $(1, 2, \dots, r-1)$ pois ao contrário teremos duas linhas iguais na matriz resultante.

Como exemplo específico deste método usemos a cadeia natural da álgebra unitária em três dimensões, $u(3) \supset u(2) \supset u(1)$. Podemos caracterizar uma representação irredutível de $u(3)$, requerendo que seu polinômio de peso $[k_1, k_2, k_3]$ seja de peso $[q_1, q_2]$ definido no subgrupo $u(2)$. De maneira semelhante que, em $SO(3)$, uma representação irredutível é caracterizada por l mais a condição adicional $L_z P = mP$. O primeiro passo é conseguir o polinômio de peso máximo em $u(2)$, que deve obedecer

$$\mathcal{C}_1^1 P = q_1 P, \quad (3.16)$$

$$\mathcal{C}_2^2 P = q_2 P, \quad (3.17)$$

$$\mathcal{C}_1^2 P = 0. \quad (3.18)$$

O polinômio de peso máximo $[K_1 = h_1, K_2 = h_2, K_3 = h_3]$ em $u(3)$ é dado por (3.14)

$$\mathcal{P} = (\Delta_1^1)^{h_1-h_2} (\Delta_{12}^{12})^{h_2-h_3} (\Delta_{123}^{123})^{h_3} \quad (3.19)$$

Notemos que a equação (3.18) pede que o polinômio de peso máximo em $u(2)$ deva ser da forma

$$\mathcal{P}_{q_1, q_2}^{h_1, h_2, h_3} = (\Delta_1^1)^\alpha (\Delta_3^1)^\beta (\Delta_{12}^{12})^\gamma (\Delta_{13}^{12})^\sigma (\Delta_{123}^{123})^{h_3}, \quad (3.20)$$

pois por (3.15) essa é a forma mais geral que é constante para $\mathcal{C}_1^2$. Mas $\mathcal{P}_{q_1, q_2}^{h_1, h_2, h_3}$ deve obedecer (3.16) e (3.17), enquanto mantendo seu peso no grupo (gerado por $C_{ss'}$) complementar:

$$C_{ss} \mathcal{P}_{q_1, q_2}^{h_1, h_2, h_3} = h_s \mathcal{P}_{q_1, q_2}^{h_1, h_2, h_3}, \quad C_{ss'} \mathcal{P}_{q_1, q_2}^{h_1, h_2, h_3} = 0 \quad s' > s = 1, 2, 3. \quad (3.21)$$

Portanto obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} \alpha + \gamma + \sigma + h_3 = q_1 \\ \gamma + h_3 = q_2 \\ \alpha + \beta + \gamma + \sigma + h_3 = h_1 \\ \gamma + \sigma + h_3 = h_2 \end{cases} \quad (3.22)$$

cuja solução nos fornece

$$\mathcal{P}_{q_1, q_2}^{h_1, h_2, h_3} = (\Delta_1^1)^{-h_2+q_1} (\Delta_3^1)^{h_1-q_1} (\Delta_{12}^{12})^{-h_3+q_2} (\Delta_{13}^{12})^{h_2-q_2} (\Delta_{123}^{123})^{h_3}. \quad (3.23)$$

Extraímos de (3.23), naturalmente, as regras de ramificação de $u(3) \supset u(2)$

$$h_1 \geq q_1 \geq h_2 \geq q_2 \geq h_3. \quad (3.24)$$

Podemos conseguir polinômios de qualquer peso em $u(2)$ usando seu operador de abaixamento $\mathcal{C}_2^1$. Apenas notando que

$$\mathcal{C}_1^2, \frac{1}{2}(\mathcal{C}_2^2 - \mathcal{C}_1^1), \mathcal{C}_2^1, \quad (3.25)$$

satisfazem as mesmas regras de comutação que L_+, L_0, L_- . Finalmente obtemos a base explícita para uma representação irredutível de $U(3)$ caracterizada por $h_1, h_2, h_3, q_1, q_2, \tau$ na cadeia canônica acima:

$$\mathcal{P}_{q_1, q_2, \tau}^{h_1, h_2, h_3} = \left[\frac{(t+\tau)!}{(t-\tau)!(2t)!} \right]^{\frac{1}{2}} (\mathcal{C}_2^1)^{t-\tau} [(\Delta_1^1)^{-h_2+q_1} (\Delta_3^1)^{h_1-q_1} (\Delta_{12}^{12})^{-h_3+q_2} (\Delta_{13}^{12})^{h_2-q_2} (\Delta_{123}^{123})^{h_3}], \quad (3.26)$$

onde $t = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)$, $\tau = t, t-1, \dots, -t$.

Resumindo, lembramos que a trinca $[h_1, h_2, h_3]$ é usada como etiqueta da representação de $U(3)$ pois é o valor máximo que $[k_1, k_2, k_3]$ pode tomar. Esta trinca, $[h_1, h_2, h_3]$, é ainda o peso máximo numa determinada representação, geralmente redutível, do grupo complementar à $U(2j+1), U(n)$.

Como exemplo de manipulação destes resultados, vejamos como fica o caso mais simples da representação fundamental $[1, 0, 0]$ de $u(3)$ em termos destes polinômios. Pela regra (3.24) $q_1 = 1, 0$ e $q_2 = 0$, portanto

$$\mathcal{P}_{q_1 0}^{100} = (\Delta_1^1)^{q_1} (\Delta_3^1)^{1-q_1} \begin{cases} \mathcal{P}_{10}^{100} = \Delta_1^1 \\ \mathcal{P}_{00}^{100} = \Delta_3^1 \end{cases} \quad (3.27)$$

para $t = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}$, obtemos um terceiro polinômio aplicando (3.26) com $t = \frac{1}{2}$ e $\tau = -\frac{1}{2}$

$$\mathcal{P}_{10-\frac{1}{2}}^{100} = \mathcal{C}_2^1 \Delta_1^1 = \Delta_2^1. \quad (3.28)$$

A base completa é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{10\frac{1}{2}}^{100} &= \Delta_1^1 \\ \mathcal{P}_{10-\frac{1}{2}}^{100} &= \Delta_2^1 \\ \mathcal{P}_{000}^{100} &= \Delta_3^1 \end{aligned}$$

Um estudo detalhado deste tipo de construção para a álgebra simpléctica $sp(6)$, envolvendo análise de suas regras de ramificação da representação irredutível de dimensão 64 é efetuado em [20], baseado em [22] e [19].

3.1.5 Invariantes simplécticos

Em princípio, uma representação irredutível (irrep) de $sp(2n)$ pode ser construída a partir do polinômio de peso máximo (3.14) e os operadores de abaixamento, associados com raízes negativas da álgebra (3.4). Contudo, procedendo desta forma não permitimos que polinômios pertencentes a irreps diferentes das sub-álgebras sejam identificados. Para tal é necessário definir um produto escalar de forma que polinômios em irreps diferentes sejam ortogonais. Este processo de ortogonalização da cadeia só é possível através do uso dos invariantes (ordinários). Neste contexto, os invariantes aparecem como “constantes de integração” em relação à ação do grupo que é realizado por operadores diferenciais.

Explicitamente, para as álgebras $sp(2)$, $sp(4)$ e $sp(6)$, temos, respectivamente, os seguintes invariantes (ordinários) numa realização com dois bósons:

$$Z^{1/2} = \Delta_{1-1}^{12} = \sum_{m=-1/2}^{1/2} (-1)^{1/2+m} \eta_{m1} \eta_{-m2}, \quad (3.29)$$

$$Z^{3/2} = \Delta_{3-3}^{12} - Z^{1/2} = \sum_{m=-3/2}^{3/2} (-1)^{3/2+m} \eta_{m1} \eta_{-m2}, \quad (3.30)$$

$$Z^{5/2} = -\Delta_{5-5}^{12} + Z^{3/2} = \sum_{m=-5/2}^{5/2} (-1)^{5/2+m} \eta_{m1} \eta_{-m2}. \quad (3.31)$$

Mencionamos aqui que estes polinômios são os únicos invariantes ordinários dos grupo simpléctico, ou seja qualquer função invariante pela ação dos geradores (3.4) será uma função destes invariantes.

O produto escalar é implementado pela métrica simpléctica, dada aqui com índices duplos

$$g_{m,m'}^{s,s'} = (-1)^{j+m'} \delta_{m,-m'} \delta^{s,s'}. \quad (3.32)$$

Para um único bóson, apesar dos invariantes (3.31) não existirem, esta métrica define a matriz simplética fundamental, por exemplo em $sp(4)$,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Esta matriz S tem as conhecidas propriedades,

$$S^2 = -I, \quad S^{-1} = -S, \quad S^T = -S, \quad S^T S = I. \quad (3.34)$$

Uma propriedade das matrizes simpléticas M , usualmente definidas pela igualdade

$$M^T S M = S, \quad (3.35)$$

muito relevante dentro do contexto abordado nesta tese, é o fato destas matrizes serem invertidas facilmente

$$M^{-1} = S M^T S^{-1}, \quad M^{-T} = S M S^{-1}. \quad (3.36)$$

Veremos que este fato simplifica a matriz que define o *coframe* invariante, (2.52), justamente por esta matriz ter propriedades simpléticas.

Parte II

Invariantes Diferenciais

Capítulo 4

Invariantes diferenciais para $sp(2)$

4.1 Introdução

Neste capítulo, determinamos uma base para as equações diferenciais parciais, invariantes pela ação de álgebras simpléticas do tipo $sp(2)$. A realização escolhida para a ação dos elementos destas álgebras é implementada por operadores diferenciais bosônicos construídos de modo a permitir a construção de qualquer tipo de representação irredutível (irrep) para qualquer álgebra simplética [19], como discutido brevemente na Seção 3.1.

Na primeira Seção 4.2, obtemos todos os invariantes diferenciais até segunda ordem para a álgebra $sp(2)$ numa realização por dois tipos de bósons. Esta seção deve ser entendida como um laboratório básico, pois todos os resultados nela obtidos servem de referência para as demais álgebras simpléticas, discutidas em seções futuras.

Na Seção 4.3, obtemos os mesmos invariantes de segunda ordem obtidos na primeira seção 4.2, construindo objetos geométricos que nos permite ir além da segunda ordem por meio de um processo iterativo. Mostramos como obter uma expressão analítica para as prolongações (de qualquer ordem) para uma álgebra realizada por campos vetoriais com um formato particular, `linear`¹ nas coordenadas, como implementada pelo método polinomial descrito na Seção 3.1.

Ainda nesta seção, também procuramos ilustrar a aplicação dos principais resultados (teoremas e lemas) envolvidos na caracterização de invariantes diferenciais, incluindo além do uso do conceito de prolongações, o uso e obtenção de formas diferenciais (de contato) invariantes (*coframe*) [11] e sua importância na construção de operadores diferenciais invariantes. Ilustramos então o uso destes operadores diferenciais invariantes, cuja ação consecutiva em invariantes produz invariantes de ordem maior.

Na Seção 4.4, obtemos os invariantes para $sp(2)$ com apenas um bóson. Este exemplo também é de referência para as álgebras de dimensão maior, e mostra claramente a natureza patológica de casos onde

¹Posteriormente, no próximo capítulo, mostraremos como esta expressão pode ser especializada para qualquer álgebra simplética realizada por operadores bosônicos.

as órbitas ainda não atingiram sua dimensão maximal. Contudo, mesmo na ausência de um *coframe* invariante inteiramente em $J^{(0)}$, construímos um coframe invariante em $J^{(1)}$. Esta providência nos habilita calcular invariantes de qualquer ordem também neste caso, contudo o procedimento não é analítico. Neste caso particular podemos também recorrer alternativamente à elaboração de um algoritmo baseado em construções matriciais para obter invariantes de ordem qualquer como descrito na Seção 4.4.1.

4.2 Realização com dois bósons; Invariantes até segunda ordem

4.2.1 Características e seus invariantes ordinários

Vimos em (3.6) que a álgebra $sp(2)$ pode ser gerada pelos seguintes operadores ($j = 1/2, n_p = 2$):

$$\begin{aligned} v_1 &= \mathcal{L}_1^1 = \eta_{11}\partial_{11} - \eta_{\bar{1}1}\partial_{\bar{1}1} + \eta_{12}\partial_{12} - \eta_{\bar{1}2}\partial_{\bar{1}2}, \\ v_2 &= \mathcal{L}_1^{\bar{1}} = 2(\eta_{11}\partial_{\bar{1}1} + \eta_{12}\partial_{\bar{1}2}), \\ v_3 &= \mathcal{L}_1^1 = 2(\eta_{\bar{1}1}\partial_{11} + \eta_{\bar{1}2}\partial_{12}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Estamos mantendo $n_p = 2$, pois estamos interessados numa realização polinomial que possibilite a construção de qualquer representação irredutível para a álgebra $sp(4)$. Buscando uma notação mais concisa, escrevemos

$$(\eta_{11}, \eta_{\bar{1}1}, \eta_{12}, \eta_{\bar{1}2}) = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, w). \quad (4.2)$$

Nesta nova notação, os operadores (4.1) podem ser reescritos na forma²

$$v_k = \sum_{i=1}^m \xi_{ki} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^m \xi_{ki} \partial_i, \quad m = 4, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.3)$$

e suas características associadas, Q_k , na forma

$$Q_k = -v_k u = -\sum_{i=1}^4 \xi_{ki} u_i, \quad u_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x^i}, \quad (4.4)$$

onde ξ_{ki} são os coeficientes das derivadas nas expressões (4.1),

$$\Xi = (\xi_{ki}) = \begin{pmatrix} x & -y & z & -w \\ 0 & 2x & 0 & 2z \\ 2y & 0 & 2w & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Calculando as características (4.4) explicitamente, teremos:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -xu_x + yu_y - zu_z + wu_w, \\ Q_2 &= -2xu_y - 2zu_w, \\ Q_3 &= -2yu_x - 2wu_z. \end{aligned} \quad (4.6)$$

²Esta forma dos campos vetoriais implica em transformações infinitesimais internas, sendo a variável u preservada na transformação induzida. Simetrias externas, i.e, realizações do tipo (2.12) com $\phi \neq 0$ deverão ser tratadas em trabalho futuro.

As soluções simultâneas $u = f(x)$ do sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem $Q_k = 0$, $k = 1, 2, 3$, são invariantes ordinários no espaço das coordenadas independentes x^i , $i = 1, \dots, 4$. A solução geral é uma função arbitrária do invariante básico

$$Z^1 = xw - yz, \quad (4.7)$$

que é precisamente o polinômio invariante apresentado em (3.29). Podemos notar que este invariante pode ser escrito também, além do determinante (3.29), como um produto escalar entre os vetores (x, y) e (z, w) com a seguinte métrica simpléctica de dimensão dois:

$$I_{01} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = xw - yz. \quad (4.8)$$

Temos ainda um outro invariante em J^0 , além de Z^1 ,

$$Z^2 = u. \quad (4.9)$$

De fato, como em $J^{(0)}$ as coordenadas $\{x, y, z, w, u\}$ são tratadas como se fossem independentes, então $Q_k(g(u)) = 0$ é sempre verdadeira para qualquer função de u apenas. Em termos práticos, o *rank* da matriz (4.5), indicando quantos geradores são funcionalmente independentes, é igual à dimensão máxima das órbitas em $J^{(0)}$. Esta situação é análoga para os demais *jet-spaces* [12, 11]. Estes dois invariantes ordinários em $J^{(0)}$ são os únicos porque o *rank* da matriz de coeficientes (4.5) é 3 e a dimensão de $J^{(0)}$ é 5 e portanto temos 5-3 invariantes de ordem zero. Devido ao ordenamento das dimensões máximas s_n , dado por

$$s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq r, \quad (4.10)$$

teremos sempre $s_n = 3$ para qualquer n . Dizemos então que a dimensão das órbitas estabilizou em $J^{(0)}$, fato que como veremos na Seção 4.4 não se estende para qualquer realização das álgebras simpléticas. Portanto, os geradores e suas prolongações agem neste caso intransitivamente em todos os *jet-spaces*, e localmente livre e regular. Isto significa que esperamos encontrar no máximo $i_1 = \dim J^{(1)} - s_1 = 9 - 3 = 6$ invariantes até a primeira ordem e no máximo $i_2 = \dim J^{(2)} - s_2 = 19 - 3 = 16$ invariantes até a segunda ordem para a álgebra $sp(2)$.

4.2.2 Prolongações de primeira ordem e seus invariantes diferenciais

De acordo com a notação da Seção 2.1, estamos tratando aqui do caso $q = 1$ e $p = 4$ com $\phi = 0$. De (2.13), a primeira prolongação para este campo vetorial é dada por

$$\text{pr}^1 v_k = v_k + \sum_{i=1}^m \Phi_{ki} \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad (m = 4), \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.11)$$

onde

$$\Phi_{ki} = D_i Q_k + \sum_{j=1}^m \xi_{kj} u_{ij} = - \sum_{j=1}^m \xi_{kj,i} u_j, \quad (4.12)$$

sendo que, em primeira ordem, a derivada total D_i (2.15) é dada por

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{j=1}^m u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j}. \quad (4.13)$$

Devemos manter em mente que as variáveis x^i , u e u_i , formando o *jet-space* $J^{(1)}$ de primeira ordem devem ser sempre consideradas independentes. Explicitamente, os coeficientes (4.12) são:

$$\Phi = (\phi_{ki}) = \begin{pmatrix} -u_x & u_y & -u_z & u_w \\ -2u_y & 0 & -2u_w & 0 \\ 0 & -2u_x & 0 & -2u_z \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Enquanto que as características são utilizadas para determinar funções invariantes (denominadas de invariantes ordinários), as prolongações são utilizadas para determinar invariantes diferenciais. Estes invariantes diferenciais são as soluções simultâneas do sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem em $J^{(1)}$:

$$\text{pr}^1 v_k F(J^{(1)}) = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.15)$$

Este sistema pode ser resolvido sem dificuldades usando o método das características, ou qualquer outro procedimento, por exemplo a rotina `pdsolve` [7] contida no pacote algébrico `PDEtools` para o Maple (versão 7 somente). Assim, a menos de um denominador (normalização) dado por Z^1 , os invariantes diferenciais básicos de primeira ordem são:

$$\begin{aligned} P^1 &= x u_x + y u_y, \\ P^2 &= z u_x + w u_y, \\ P^3 &= x u_z + y u_w, \\ P^4 &= z u_z + w u_w. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Deve ser enfatizado que apenas as prolongações associadas aos elementos de $\mathfrak{sp}(2)$ correspondentes às raízes simples e suas negativas (v_2 e v_3 , no presente caso) são necessárias para a determinação destes invariantes. Estes quatro invariantes são funcionalmente independentes. A independência funcional é garantida sempre que

$$dP^1 \wedge dP^2 \wedge \dots \wedge dP^k \neq 0, \quad (4.17)$$

onde

$$dP^k = \sum_{i=1}^m \frac{\partial P^k}{\partial u_i} du_i, \quad (m = 4), \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (4.18)$$

Efetuada estes cálculos explicitamente, teremos

$$\begin{aligned} dP^1 &= x du_x + y du_y + 0 du_z + 0 du_w, \\ dP^2 &= z du_x + w du_y + 0 du_z + 0 du_w, \\ dP^3 &= 0 du_x + 0 du_y + x du_z + y du_w, \\ dP^4 &= 0 du_x + 0 du_y + z du_z + w du_w. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Assim, a condição (4.17) é equivalente à

$$dP^1 \wedge dP^2 \wedge dP^3 \wedge dP^4 = \det J du_x \wedge du_y \wedge du_z \wedge du_w, \quad (4.20)$$

onde J é a matriz jacobiana associada às formas diferenciais dP^k , formada pelos coeficientes destas formas,

$$J = \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 \\ z & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & w \end{pmatrix}, \quad \det J = (xw - yz)^2 = (Z^1)^2. \quad (4.21)$$

Portanto, sempre que $Z^1 \neq 0$, os invariantes diferenciais de primeira ordem P^k serão todos funcionalmente independentes. Podemos reconhecer a forma diagonal por blocos desta matriz como uma consequência da realização feita por dois bósons independentes. Vale mencionar que J é uma matriz simpléctica, isto é, $J^{-1} = -SJ^T S$, onde $JJ^{-1} = I \det J$, com uma métrica simpléctica dada por, ver (3.32)

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Os invariantes (4.16) podem ser reescritos numa notação matricial da seguinte forma. A partir dos vetores

$$X_1^T = (x, y), \quad X_2^T = (z, w), \quad (\nabla^1 u)^T = (u_x, u_y), \quad (\nabla^2 u)^T = (u_z, u_w), \quad (4.23)$$

formamos todos os produtos escalares

$$P^{ij} = X_i^T (\nabla^j u), \quad (4.24)$$

com uma métrica euclidiana bidimensional. Desta forma, os invariantes (4.16) podem ser identificados como

$$P^1 = X_1^T (\nabla^1 u), \quad P^2 = X_2^T (\nabla^1 u), \quad P^3 = X_1^T (\nabla^2 u), \quad P^4 = X_2^T (\nabla^2 u). \quad (4.25)$$

Veremos adiante que de fato esta forma matricial para os invariantes diferenciais de primeira ordem é bastante útil no estudo das demais álgebras simplécticas.

4.2.3 Prolongações de segunda ordem e seus invariantes diferenciais

Nesta seção calculamos as prolongações de segunda ordem para os geradores (4.1), utilizando e estendendo parte dos resultados obtidos na seção anterior. Neste caso, como visto em (2.13), temos

$$\text{pr}^2 v_k = \text{pr}^1 v_k + \sum_{s \geq r=1}^m \Phi_{krs} \frac{\partial}{\partial u_{rs}}, \quad (m = 4), \quad (4.26)$$

onde

$$\Phi_{krs} = D_{rs} Q_k + \sum_{i=1}^m \xi_{ki} u_{irs} = - \sum_{i=1}^m (\xi_{ki,r} u_{is} + \xi_{ki,s} u_{ir}), \quad (4.27)$$

e, considerando que as características Q_k dadas em (4.6) não dependem explicitamente de u ,

$$D_{rs} = D_r D_s, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{l=1}^m u_{il} \frac{\partial}{\partial u_l} + \sum_{t \geq l=1}^m u_{ilt} \frac{\partial}{\partial u_{lt}}. \quad (4.28)$$

De fato, podemos calcular as quantidades Φ_{krs} notando primeiro que os coeficientes ξ_{ki} são funções lineares nas coordenadas x^i . Neste caso, a derivada total $D_s Q_k$ pode ser escrita como

$$D_s Q_k = - \sum_{i=1}^4 (\xi_{ki,s} u_i + \xi_{ki} u_{is}). \quad (4.29)$$

Atuando com D_r neste resultado, obtemos

$$D_r D_s Q_k = - \sum_{i=1}^4 (\xi_{ki,r} u_{is} + \xi_{ki,s} u_{ir} + \xi_{ki} u_{irs}). \quad (4.30)$$

Substituindo este resultado no termo central da expressão (4.27), obtemos a importante relação

$$\Phi_{krs} = - \sum_{i=1}^4 (\xi_{ki,r} u_{is} + \xi_{ki,s} u_{ir}). \quad (4.31)$$

Observamos que este mesmo resultado pode ser obtido usando a forma recursiva (2.17) para o cálculo das prolongações,

$$\begin{aligned} \Phi_{krs} &= D_s \Phi_{kr} - \sum_{i=1}^4 (D_s \xi_{ki}) u_{ri} \\ &= - \sum_{i=1}^4 \left(\xi_{ki,r} \sum_{j=1}^4 u_{js} \delta_{ij} + \xi_{ki,s} u_{ir} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^4 (\xi_{ki,r} u_{is} + \xi_{ki,s} u_{ir}). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Após cálculos explícitos, os coeficientes Φ_{krs} podem ser agrupados em três matrizes triangulares:

$$\begin{aligned} \Phi_1 = (\Phi_{1rs}) &= \begin{pmatrix} -2u_{xx} & 0 & -2u_{xz} & 0 \\ & 2u_{yy} & 0 & 2u_{yw} \\ & & -2u_{zz} & 0 \\ & & & 2u_{ww} \end{pmatrix}, \\ \Phi_2 = (\Phi_{2rs}) &= \begin{pmatrix} -4u_{xy} & -2u_{yy} & -2(u_{xw} + u_{yz}) & -2u_{yw} \\ & 0 & -2u_{yw} & 0 \\ & & -4u_{zw} & -2u_{ww} \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \\ \Phi_3 = (\Phi_{3rs}) &= \begin{pmatrix} 0 & -2u_{xx} & 0 & -2u_{xz} \\ & -4u_{xy} & -2u_{xz} & -2(u_{xw} + u_{yz}) \\ & & 0 & -2u_{zz} \\ & & & -4u_{zw} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

A cada uma destas matrizes está associado um campo vetorial prolongado de segunda ordem conforme a prescrição dada em (4.26). Vale observar que a Eq. (4.26) é a mesma para qualquer campo vetorial da forma (4.3), com coeficientes ξ lineares nas variáveis independentes x .

Procedendo como na seção anterior, os invariantes básicos que são soluções simultâneas das três equações diferenciais $\text{pr}^2 v_k F(J^{(2)}) = 0$ são:

$$\begin{aligned}
S_{1111} &= X_1^T U_{11} X_1 = x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy}, \\
S_{1112} &= X_1 U_{11} X_2 = xz u_{xx} + (xw + yz) u_{xy} + yw u_{yy}, \\
S_{2112} &= X_2^T U_{11} X_2 = z^2 u_{xx} + 2zw u_{xy} + w^2 u_{yy}, \\
S_{1121} &= X_1^T U_{12} X_1 = x^2 u_{xz} + xy(u_{xw} + u_{yz}) + y^2 u_{yw}, \\
S_{1122} &= X_1^T U_{12} X_2 = xz u_{xz} + xw u_{xw} + yz u_{yz} + yw u_{yw}, \\
S_{2121} &= X_2^T U_{12} X_1 = xz u_{xz} + yz u_{xw} + xw u_{yz} + yw u_{yw}, \\
S_{2122} &= X_2^T U_{12} X_2 = z^2 u_{xz} + zw(u_{xw} + u_{yz}) + w^2 u_{yw}, \\
S_{1221} &= X_1^T U_{22} X_1 = x^2 u_{zz} + 2xy u_{zw} + y^2 u_{ww}, \\
S_{1222} &= X_1^T U_{22} X_2 = xz u_{zz} + (xw + yz) u_{zw} + yw u_{ww}, \\
S_{2222} &= X_2^T U_{22} X_2 = z^2 u_{zz} + 2zw u_{zw} + w^2 u_{ww}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Como no caso anterior, estes invariantes diferenciais são funcionalmente independentes sempre que o invariante ordinário $Z^1 = xw - yz$ for não-nulo. Vale ressaltar que todos estes invariantes calculados até segunda ordem, foram obtidos usando apenas os geradores v_2 e v_3 . A relação de comutação $[v_2, v_3] = 4v_1$ garante a invariância perante v_1 (sub-álgebra de Cartan). Podemos escrever estes invariantes numa forma matricial de acordo com a seguinte prescrição. Primeiro construímos os vetores X_1 e X_2 e a matriz Hessiana H contendo as derivadas de segunda ordem

$$X_1^T = (x \ y), \quad X_2^T = (z \ w), \quad H = \left(\begin{array}{c|c} U_{11} & U_{12} \\ \hline U_{12}^T & U_{22} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} & u_{xw} \\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yz} & u_{yw} \\ \hline u_{zx} & u_{zy} & u_{zz} & u_{zw} \\ u_{wx} & u_{wy} & u_{wz} & u_{ww} \end{array} \right), \tag{4.35}$$

onde U_{ij} são sub-matrizes 2×2 , conforme indicado acima. Note que U_{11} e U_{22} , localizadas nos blocos na diagonal principal, são simétricas. Os invariantes (4.34) são dados pelos produtos matriciais

$$S_{ijkl} = X_i^T U_{kl} X_j. \tag{4.36}$$

A correspondência completa está exibida na segunda coluna de (4.34). Vale mencionar que todos os invariantes até ordem dois para a álgebra $sp(2)$ nesta seção foram obtidos resolvendo diretamente os sistemas de equações diferenciais parciais de primeira ordem advindos da ação dos geradores prolongados (usando o método das características e/ou formas de contato, ou usando a rotina `pdsolve`). A distinção prática entre estes métodos aparece naturalmente com o aumento das dimensões envolvidas, e será notória no próximo capítulo.

4.3 Mais que dois bósons, Ordem qualquer

4.3.1 Prolongações além de segunda ordem

As prolongações de terceira ordem dadas pela fórmula geral em (2.13) quando particularizadas para o presente caso têm o seguinte formato

$$\mathfrak{pr}^3 v_k = \mathfrak{pr}^2 v_k + \sum_{t \geq s \geq r=1}^m \Phi_{krst} \frac{\partial}{\partial u_{rst}}, \quad (m=4), \quad (4.37)$$

onde os coeficientes Φ_{krst} podem ser calculados da maneira recursiva (2.17)

$$\begin{aligned} \Phi_{krst} &= D_s \Phi_{kr} - \sum_{i=1}^m (D_s \xi_{ki}) u_{ri} \\ &= - \sum_{i=1}^m (\xi_{ki,r} u_{ist} + \xi_{ki,t} u_{irs} + \xi_{ki,s} u_{irt}). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Notemos que este resultado envolve uma permutação cíclica dos índices do primeiro termo. Logo esta expressão pode ser generalizada para prolongações de ordem arbitrária associadas a campos vetoriais da forma

$$v_k = \sum_{i=1}^m \xi_{ki} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (4.39)$$

onde os coeficientes ξ_{ki} são lineares nas coordenadas independentes x^i . Neste caso, tendo em vista os resultados (4.11), (4.26) e (4.37), as prolongações podem ser calculadas recursivamente:

$$\mathfrak{pr}^n v_k = \mathfrak{pr}^{n-1} v_k + \sum_{i_n \dots i_1=1}^m \Phi_{ki_1 \dots i_n} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_n}}, \quad (m \geq 1), \quad (4.40)$$

onde

$$\Phi_{ki_1 \dots i_n} = - \sum_{j=1}^m (\xi_{kj, i_1} u_{ji_2 \dots i_n} + \text{perm. circ. } i_1 i_2 \dots i_n). \quad (4.41)$$

Esta expressão analítica para as prolongações dos operadores simplécticos será muito importante para a obtenção e verificação de invariantes diferenciais de ordem superior, principalmente quando a ordem de estabilização for zero, isto é, a dimensão máxima s_0 das órbitas em $J^{(0)}$ for igual à dimensão da álgebra³. Vale ainda ressaltar que este resultado vale também para realizações com um número arbitrário de bósons, pois a única influência do número de bósons é no limite superior m presente nas somas. Esta facilidade possibilita realizar um estudo sobre a estabilização das órbitas. Na Tabela 4.1, mostramos as dimensões máximas s_i das órbitas para as álgebras $\mathfrak{sp}(2)$, $\mathfrak{sp}(4)$ e $\mathfrak{sp}(6)$, realizadas usando até seis bósons. Podemos perceber que a estabilidade em $J^{(0)}$ sempre ocorre quando o número de bósons n_b for igual ao dobro do *rank* (1, 2 e 3, respectivamente) destas álgebras: $n_p = 2j + 1$.

³Neste caso o procedimento, apresentado no próximo capítulo, para determinação de invariantes via formas de contato revela todo o seu potencial fornecendo de maneira analítica os invariantes de ordem qualquer.

	$sp(2)$		$sp(4)$			$sp(6)$			
n_b	s_0	s_1	s_0	s_1	s_2	s_0	s_1	s_2	s_3
1	2	3	4	7	10	6	11	18	$21^\dagger$
2	3^*	3	7	10	10	11	$18^\dagger$	$21^\dagger$	21
3	3	3	9	10	10	15	$21^\dagger$	21	21
4	3	3	10^*	10	10	18	$21^\dagger$	21	21
5	3	3	10	10	10	$20^\dagger$	21	21	21
6	3	3	10	10	10	21^*	21	21	21

Tabela 4.1: Dimensões máximas s_n das órbitas para as álgebras $sp(2)$, $sp(4)$ e $sp(6)$ em função da quantidade de bósons independentes n_b , obtidos diretamente do rank da matriz dos coeficientes das prolongações em $J^{(n)}$. Os números marcados com $\dagger$ mostram nosso limite computacional. Os marcados com $*$ revelam a existência de um *frame* invariante, veja Seção 4.3.2.

4.3.2 Formas de contato

Os campos vetoriais que usamos para realizar as álgebras simplécticas têm a forma particular

$$v_k = \sum_{i=1}^m \xi_{ki} \partial_i, \quad k = 1, \dots, r, \quad (4.42)$$

onde r é a dimensão da álgebra e m o número de coordenadas independentes. Sempre que a dimensão máxima das órbitas em $J^{(0)}$ igualar à dimensão r da álgebra ($s_0 = r$), ou equivalentemente o número de bósons for igual ao dobro do *rank* da álgebra teremos m campos vetoriais invariantes,

$$A_l = \sum_{i=1}^m A_{ki} \partial_i, \quad (4.43)$$

isto é, satisfazendo [11]

$$\begin{aligned} [v_k, A_l]F &= \sum_{i,j=1}^m \left[\xi_{ki} \partial_i (A_{lj} F_{,j}) - A_{kj} \partial_j (\xi_{li} F_{,i}) \right] \\ &= \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=1}^m (\xi_{ki} A_{kj,i} - \xi_{kj,i} A_{ki}) \right] F_j = 0, \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^m (\xi_{ki} A_{kj,i} - \xi_{kj,i} A_{ki}) = 0, \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde $F(\{x_i\})$ é uma função arbitrária das coordenadas em $J^{(0)}$. Os objetos

$$B_l = \sum_{i=1}^m B_{li} dx^i, \quad B_k(A_l) \propto \delta_{kl}, \quad (4.45)$$

duais aos campos invariantes A_l , são as 1-formas invariantes, isto é, satisfazendo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{v_k} B_l &= \sum_{i=1}^m \left[v_k(B_{li}) dx^i + B_{li} d\xi_{ki} \right] \\ &= \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=1}^m (\xi_{ki} B_{lj,i} + \xi_{ki,j} B_{li}) \right] dx^j = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^m (\xi_{ki} B_{lj,i} + \xi_{ki,j} B_{li}) = 0,\end{aligned}\tag{4.46}$$

onde $\mathcal{L}_{v_k}$ é a derivada de Lie em relação ao vetor tangente v_k . O conjunto destas formas é denominado de *coframe* invariante [11]. As 1-formas B_k são funcionalmente independentes, $dB_1 \wedge \dots \wedge dB_m \neq 0$.

Resolvendo⁴ então as equações diferenciais (4.44) para o caso da álgebra $\mathfrak{sp}(2)$ com $m = 4$ (dois bósons), encontraremos de fato os quatro campos vetoriais:

$$A_1 = x\partial_x + y\partial_y, \quad A_2 = z\partial_x + w\partial_y, \quad A_3 = x\partial_z + y\partial_w, \quad A_4 = z\partial_z + w\partial_w.\tag{4.47}$$

Os coeficientes destes campos podem ser agrupados da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} x & y & 0 & 0 \\ z & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & w \end{bmatrix}.\tag{4.48}$$

Esta matriz tem *rank* quatro, confirmando a independência funcional destes campos invariantes (*frame*). As 1-formas correspondentes podem ser obtidas invertendo esta matriz ou resolvendo diretamente as equações diferenciais (4.46). A menos de um fator de normalização (uma função do invariante ordinário Z^1), temos:

$$B_1 = w\partial_x - z\partial_y, \quad B_2 = -y\partial_x + x\partial_y, \quad B_3 = w\partial_z - z\partial_w, \quad B_4 = -y\partial_z + x\partial_w.\tag{4.49}$$

Os coeficientes destas 1-formas formam uma matriz de *rank* quatro

$$B = \begin{bmatrix} w & -z & 0 & 0 \\ -y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & -z \\ 0 & 0 & -y & x \end{bmatrix}.\tag{4.50}$$

Notemos que estas duas matrizes são simpléticas (a menos de uma normalização) e são portanto fáceis de inverter

$$A^{-1} = SB^T S^{-1} = -B^T, \quad B^{-1} = SA^T S^{-1} = -A^T, \quad AB^T = BA^T = Z^1 I,\tag{4.51}$$

⁴Como veremos adiante não há necessidade de resolver estas equações. De fato, para as realizações tratadas nesta tese, usando uma notação de dois índices, existe uma expressão analítica imediata para estes campos invariantes

onde S é a soma direta de duas matrizes associadas com a métrica simpléctica usual, (3.32), com $j = 1/2$:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

A inversa da matriz B dos coeficientes das 1-formas invariantes (4.50) pode ser usada para gerar invariantes diferenciais de ordem maior, segundo a prescrição do Capítulo 2 (mais detalhes em [11]). Com esta matriz construímos os operadores diferenciais invariantes

$$\hat{I}_k = \sum_{i=1}^m (B_{ki}^T)^{-1} D_i, \quad D_i = \partial_i + u_i \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{j=1}^m u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} + \cdots \quad (4.53)$$

Para o exemplo anterior, temos imediatamente $B^{-1} = -A^T$. Portanto,

$$P^k = \hat{I}_k u = \sum_{i=1}^m A_{ki} u_i, \quad (m = 4) \quad (4.54)$$

são os invariantes diferenciais de primeira ordem, que já apresentamos em (4.16). Note que foram gerados todos os invariantes de primeira ordem neste processo a partir do invariante ordinário $Z^2 = u$. Repetindo este procedimento para cada invariante de primeira ordem, obtemos outros invariantes diferenciais (de segunda ordem)

$$\begin{aligned} S^{kl} &= \hat{I}_k P^l = \sum_{i,j=1}^m A_{ki} D_i (A_{lj} u_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^m A_{ki} A_{lj,i} u_j + \sum_{i,j=1}^m A_{ki} A_{lj} u_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^m A_{ki} \frac{\partial I_{1l}}{\partial x^i} + \sum_{i,j=1}^m A_{ki} A_{lj} u_{ij} = A_k P^l + \sum_{i,j=1}^m A_{ki} A_{lj} u_{ij}, \quad (m = 4). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Considerando que os operadores v_k e A_k comutam e que os campos invariantes A_k envolvem apenas derivadas nas coordenadas independentes, então $A_k P^l$ deve ser uma função dos invariantes P^l ,

$$[v_k, A_k] P^l = v_k (A_k P^l) = 0 \Rightarrow A_k P^l = f(P^l). \quad (4.56)$$

Portanto, os invariantes estritamente de segunda ordem são

$$S^{kl} = \sum_{i,j=1}^4 A_{ki} A_{lj} u_{ij}, \quad S^{kl} = S^{lk}. \quad (4.57)$$

Para o presente caso, teremos 10 novos invariantes diferenciais (todos de segunda ordem). Naturalmente, estes invariantes precisam ser os mesmos obtidos em (4.36). De fato, dada a forma diagonal por blocos

da matriz A em (4.48), estes invariantes calculados aqui podem ser escritos na forma matricial (4.36). A mesma observação vale para os invariantes de primeira ordem P^k . Continuando com esse processo, podemos escrever todos os invariantes diferenciais, de qualquer ordem, para a álgebra $sp(2)$ realizada com dois ou mais bósons.

O exemplo desta seção sugere que para realizações que estabilizam em ordem zero e portanto com a dimensão das órbitas igual à dimensão da álgebra, o uso de 1-formas invariantes é suficiente para o cálculo completo dos invariantes diferenciais de maneira analítica. De fato esta conjectura foi verificada e apresentamos no próximo capítulo um resultado extremamente abrangente para álgebras simpléticas cuja realização por operadores bosônicos possui órbitas estabilizadas ou, equivalentemente, cujo número de bósons coincide com, ou supera, o dobro do *rank* da álgebra.

4.4 Um único bóson; Ordem qualquer

Nesta seção consideramos a álgebra simplética $sp(2)$ realizada por um único bóson. Esta seção tem como objetivo ressaltar as dificuldades que encontramos quando interessados em invariantes diferenciais para realizações onde a dimensão das órbitas é sub-maximal. Os campos vetoriais para a álgebra $sp(2)$ realizada com um bóson, uma restrição direta de (4.1), são dados por

$$v_1 = 2x \frac{\partial}{\partial y}, \quad v_2 = 2y \frac{\partial}{\partial x}, \quad v_3 = 2x \frac{\partial}{\partial x} - 2y \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.58)$$

com as seguintes prolongações até terceira ordem obtidas com as fórmulas especializadas (4.40) e (4.41)

$$\begin{aligned} \text{pr}^3 v_1 &= v_1 - 2u_y \partial_{u_x} - 4u_{xy} \partial_{u_{xx}} - 2u_{yy} \partial_{u_{xy}} - 6u_{xxy} \partial_{u_{xxx}} - 4u_{xyy} \partial_{u_{xxy}} - 2u_{yyy} \partial_{u_{xyy}}, \\ \text{pr}^3 v_2 &= v_2 - 2u_x \partial_{u_y} - 2u_{xx} \partial_{u_{xy}} - 4u_{xy} \partial_{u_{yy}} - 2u_{xxx} \partial_{u_{xxy}} - 4u_{xxy} \partial_{u_{xyy}} - 6u_{xyy} \partial_{u_{yyy}}, \\ \text{pr}^3 v_3 &= v_3 - u_x \partial_{u_x} + u_y \partial_{u_y} - 2u_{xx} \partial_{u_{xx}} + 2u_{yy} \partial_{u_{yy}} - 3u_{xxx} \partial_{u_{xxx}} - u_{xxy} \partial_{u_{xxy}} \\ &\quad + u_{xyy} \partial_{u_{xyy}} + 3u_{yyy} \partial_{u_{yyy}}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Neste caso ($n_p = 1$), existe apenas um campo vetorial que comuta com todos geradores do grupo: $x\partial_x + y\partial_y$. Este campo fornece a 1-forma de contato-invariante $-ydx + xdy$. Outra 1-forma de contato-invariante é produzida tomando-se a derivada total de invariantes. A mais simples delas sendo $Du = u_x dx + u_y dy$. De forma que um coframe contato-invariante, $\omega^i = \sum_j J_j^i(x, u^{(n)}) dx_j$, $i = 1, 2, \dots, p$, é definido pela matriz

$$J = \begin{pmatrix} -y & x \\ u_x & u_y \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

Operadores diferenciais invariantes são então definidos pela matriz $K = J^{-T}$ e relacionados com os operadores de derivadas totais por

$$\mathcal{D}_j = \sum_i K_{ij} D_i, \quad (4.61)$$

onde

$$K = J^{-T} = \begin{pmatrix} x & y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

Logo temos dois destes operadores diferenciais invariantes

$$\mathcal{D}_1 = xD_x + yD_y, \quad \mathcal{D}_2 = -u_y D_x + u_x D_y. \quad (4.63)$$

Lembramos que a dimensão das órbitas nesta realização é dois (veja Tabela 4.1). A dimensão da variedade $J^{(0)}$ sobre a qual os campos vetoriais agem é três e portanto temos somente um invariante ordinário: u . A dimensão do primeiro espaço prolongado $J^{(1)}$ é cinco. Nesta ordem a dimensão das órbitas assume seu valor maximal três. Logo devemos esperar apenas dois invariantes de ordem até um. De fato além do invariante ordinário u , fazendo uso dos operadores diferenciais invariantes acima, obtemos

$$P = \mathcal{D}_1 u = xu_x + yu_y. \quad (4.64)$$

Em segunda ordem o espaço prolongado $J^{(2)}$ é de dimensão oito. A dimensão das órbitas já estabilizou em seu valor maximal três. Logo devemos ter cinco invariantes funcionalmente independentes até segunda ordem. Encontramos,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 P &= xu_x + yu_y + u_{xx}x^2 + 2xu_{xy}y + u_{yy}y^2 = P + A \\ \mathcal{D}_2 P &= u_x u_{xy}x + u_x u_{yy}y - u_y u_{xx}x - u_y u_{xy}y = B. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Observe que junto com o termo de segunda ordem na primeira expressão re-obtemos o invariante de primeira ordem. Esta ocorrência sugere que o mesmo aconteça em ordens maiores. Obtemos até aqui quatro invariantes até segunda ordem. Repetimos então o procedimento, aplicamos novamente os operadores diferenciais invariantes, mantendo apenas os termos de segunda ordem. Com este procedimento esperamos obter o invariante que falta. A única ação que traz alguma novidade é

$$\mathcal{D}_2 B = -2u_y u_x u_{xy} + u_x^2 u_{yy} + u_y^2 u_{xx} + P\{u_{xy}^2 + u_{xx}u_{yy}\}. \quad (4.66)$$

Reconhecemos em (4.66) dois termos de segunda ordem independentes entre si que são invariantes diferenciais separadamente,

$$H = u_{xy}^2 + u_{xx}u_{yy}, \quad J = -2u_y u_x u_{xy} + u_x^2 u_{yy} + u_y^2 u_{xx}. \quad (4.67)$$

Como não podemos ter mais que cinco invariantes⁵ de ordem até segunda, então deve existir uma dependência funcional entre eles. De fato, podemos verificar que

$$B^2 - JA + P^2 H = 0. \quad (4.68)$$

⁵Observamos que a invariância de escala em (4.16) e (4.34) é perdida com a retirada de um bóson.

Portanto temos um conjunto maximal de invariantes de segunda ordem para a álgebra $sp(2)$ realizada com um bóson,⁶ por exemplo $L^{(2)} = \{A, B, H\}$.

Desta ordem em diante podemos obter conjuntos maximais de invariantes para qualquer ordem, aplicando os operadores diferenciais invariantes neste conjunto $L^{(2)}$. Verifiquemos este fato para a próxima ordem. A dimensão do terceiro espaço prolongado $J^{(3)}$ é 12. Portanto em terceira ordem devemos esperar $9-5=4$ invariantes estritamente de terceira ordem. Aplicando os operadores diferenciais invariantes em $L^{(2)}$ obtemos

$$\mathcal{D}_1 H = I_1 = -xu_{xxx}u_{yy} + 2xu_{xxy}u_{xy} - xu_{xyy}u_{xx} - yu_{xxy}u_{yy} + 2yu_{xyy}u_{xy} - yu_{yyy}u_{xx}, \quad (4.69)$$

$$\mathcal{D}_2 H = I_2 = u_y u_{xxx} u_{yy} - 2u_y u_{xxy} u_{xy} + u_y u_{xyy} u_{xx} - u_x u_{xxy} u_{yy} + 2u_x u_{xyy} u_{xy} - u_x u_{yyy} u_{xx}, \quad (4.70)$$

$$\mathcal{D}_1 A = I_3 + P + 3A = u_{xxx}x^3 + 3u_{xxy}x^2y + 3xu_{xyy}y^2 + u_{yyy}y^3 + P + 3A, \quad (4.71)$$

$$\mathcal{D}_2 A = I_4 + 3B = -u_y u_{xxx}x^2 - 2u_y u_{xxy}xy - u_y u_{xyy}y^2 + u_x u_{xxy}x^2 + 2u_x u_{xyy}xy + u_x u_{yyy}y^2 + 3B. \quad (4.72)$$

Neste cálculo podemos observar que as operações $\mathcal{D}_1 B$ e $\mathcal{D}_2 B$ geram invariantes funcionalmente dependentes dos outros invariantes $L^{(3)} = \{u, A, B, H, P, I_1 \dots I_4\}$. Este fato pode ser concluído checando o *rank* da matriz Jacobiana associada a $L^{(3)}$ que é nove como esperado. Portanto obtivemos todos os nove invariantes até terceira ordem utilizando o *coframe* contato-invariante inicial (4.60) que determina $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2\}$. Qualquer outro invariante de terceira ordem será uma combinação funcional destes invariantes. Qualquer outro invariante de ordem maior pode ser obtido pela sucessiva aplicação destes operadores diferenciais invariantes nesta base $L^{(3)}$ de invariantes diferenciais de ordem até três. Este exemplo ilustra as dificuldades na utilização do *coframe* invariante quando a dimensão não é maximal em $J^{(0)}$. Na próxima seção, baseado no conhecimento acumulado até aqui elaboramos um algoritmo alternativo para tratar este caso de forma mais eficiente junto com uma rotina algébrica que o implementa.

É importante lembrar do isomorfismo entre esta realização de $sp(2)$ e aquela da álgebra $sl(2)$ associada à transformação $(x, y, u) \mapsto (ax + by, cx + dy, u)$, com $ad - bc = 1$. Reconhecemos, neste contexto, os invariantes J e H , a menos de um fator, como a curvatura das curvas de nível de u e a curvatura Gaussiana do grafo de u respectivamente, [26].

4.4.1 Um algoritmo eficiente

Embora as equações diferenciais dos campos prolongados para a álgebra $sp(2)$ ($j = 1/2$) realizada com uma partícula ($n_p = 1$) possam ser resolvidas diretamente, usaremos um *ansatz* polinomial para os invariantes diferenciais com o objetivo de acelerar o processo de determinação dos invariantes. Vamos exemplificar este método polinomial determinando os invariantes diferenciais de segunda ordem em $J^{(2)} = \{x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\}$. Antes, porém, faremos um estudo breve para sabermos a quantidade

⁶Note que dado o formato dos invariantes diferenciais para $sp(2)$ com um bóson, (4.65) e (4.67), observamos que restringindo o resultado obtido para $sp(2)$ com dois bósons, (4.34), eliminando simplesmente as variáveis de uma delas, aproveitamos somente um único invariante, A .

de invariantes diferenciais funcionalmente independentes. Para $j = 1/2$ e $n_p = 1$ temos duas coordenadas independentes: $p = (2j + 1)n_p = 2$. Lembrando que temos $q = 1$ sempre, a quantidade j_n de invariantes estritamente de ordem n é $j_n = n + 1 - (s_n - s_{n-1})$, onde s_n é a dimensão máxima das órbitas em $J^{(n)}$. Para os valores apresentados na Tabela 5.1, temos $j_1 = 1$ e $j_n = n + 1$ para $n \geq 2$. De volta ao exemplo $n = 2$, podemos inicialmente procurar por invariantes na forma

$$I_1^{(2)} = c_1 x^2 u_{xx} + c_2 x^2 u_{xy} + c_3 x^2 u_{yy} + c_4 xy u_{xx} + c_5 xy u_{xy} + c_6 xy u_{yy} + c_7 xy u_{xx} + c_8 xy u_{xy} + c_9 y u_{yy} x + c_{10} y^2 u_{xx} + c_{11} y^2 u_{xy} + c_{12} y^2 u_{yy}, \quad (4.73)$$

onde c_i são constantes arbitrárias. Estas constantes podem ser determinadas de forma recursiva, usando as equações diferenciais para as prolongações de segunda ordem para os campos $v_2 = L_{1\bar{1}}$ e $v_3 = L_{\bar{1}1}$:

$$\begin{aligned} \text{pr}^2 v_2 &= 2x \partial_y - 2u_y \partial_{u_x} - 4u_{xy} \partial_{u_{xx}} - 2u_{yy} \partial_{u_{xy}}, \\ \text{pr}^2 v_3 &= 2y \partial_x - 2u_x \partial_{u_y} - 4u_{xy} \partial_{u_{yy}} - 2u_{xx} \partial_{u_{xy}}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Requerendo que o invariante $I_1^{(2)}$ seja uma solução, ou uma família de soluções, destas duas equações, então as relações seguintes devem ser obedecidas:

$$\begin{aligned} c_2 &= c_3 = c_{10} = c_{11} = 0, \\ c_1 &= c_{12}, \quad c_4 = -c_7, \quad c_6 = -c_9, \\ c_5 &= -c_8 + 2c_{12}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Substituindo estes valores em (4.73), obteremos após algumas simplificações

$$I_1^{(2)} = c_{12} (x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy}). \quad (4.76)$$

Claramente, podemos escolher $c_{12} = 1$. Desta forma, um invariante diferencial de segunda ordem é encontrado. Caso houvesse mais constantes indeterminadas além de c_{12} , então todo o processo deveria ser repetido. Assim, invariantes diferenciais com uma forma polinomial específica podem ser determinados rapidamente. Este procedimento é limitado apenas pela quantidade de parâmetros arbitrários c_i , a qual cresce rapidamente para ordens mais altas e também com o número de partículas. Este procedimento está implementado algebricamente na rotina **Psolve** descrita no Apêndice E. Em suma, obtemos assim três invariantes diferenciais de segunda ordem, os quais podem ser reescritos numa forma matricial:

$$I_1^{(2)} = X H X^T, \quad I_2^{(2)} = X H U^T, \quad I_3^{(2)} = U H U^T, \quad U = \tilde{U} S, \quad X = (x, y), \quad \tilde{U} = (u_x, u_y) = \nabla u, \quad (4.77)$$

onde H é a Hessiana de u e S é a métrica simpléctica para $j = 1/2$,

$$H = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.78)$$

respectivamente. Podemos ver de (4.65) que $I_1^{(2)} = A$, $I_2^{(2)} = B$ e de (4.67) que $I_2^{(3)} = J$. A fim de ilustrar as dificuldades inerentes à determinação de invariantes diferenciais para a realização feita com apenas uma

partícula ($n_p = 1$), determinamos a seguir também os invariantes de terceira e quarta ordem usando o mesmo procedimento anterior.

Os quatro invariantes de terceira ordem também podem ser escritos numa forma matricial similar àquela dos invariantes de segunda ordem. No entanto, há diferenças importantes. Primeiro, temos agora duas matrizes Hessianas, de u_x e u_y , respectivamente:

$$H_1 = \begin{pmatrix} u_{xxx} & u_{xxy} \\ u_{xxy} & u_{xyy} \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} u_{xxy} & u_{xyy} \\ u_{xxy} & u_{xyy} \end{pmatrix}. \quad (4.79)$$

Portanto, podemos formar os três vetores seguintes (similares aos invariantes de segunda ordem):

$$\begin{aligned} V_1 &= (XH_1X^T, XH_2X^T), \\ V_2 &= (XH_1U^T, XH_2U^T), \\ V_3 &= (UH_1U^T, UH_2U^T), \end{aligned} \quad (4.80)$$

onde X e U são os mesmos definidos em (4.77). Finalmente, os invariantes são escritos como:

$$I_i^{(3)} = XV_i^T, \quad i = 1, 2, 3, \quad I_4^{(3)} = UV_3^T. \quad (4.81)$$

Os cinco invariantes de quarta ordem podem ser determinados de forma inteiramente análoga e escritos como

$$I_i^{(4)} = XV_i^T, \quad i = 1, \dots, 4, \quad I_5^{(4)} = UV_4^T. \quad (4.82)$$

Porém, neste caso os vetores V_i são determinados da maneira seguinte:

$$\begin{aligned} V_1 &= (XA_1^T, XA_2^T), \quad A_i = (XH_iX^T, XH_{i+1}X^T), \quad i = 1, 2, \\ V_2 &= (XA_1^T, XA_2^T), \quad A_i = (XH_iU^T, XH_{i+1}U^T), \quad i = 1, 2, \\ V_3 &= (XA_1^T, XA_2^T), \quad A_i = (UH_iU^T, UH_{i+1}U^T), \quad i = 1, 2, \\ V_4 &= (UA_1^T, UA_2^T), \quad A_i = (UH_iU^T, UH_{i+1}U^T), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.83)$$

onde H_i são as Hessianas de u_{xx} , u_{xy} e u_{yy} , respectivamente,

$$H_1 = \begin{pmatrix} u_{xxx} & u_{xxy} \\ u_{xxy} & u_{xyy} \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} u_{xxy} & u_{xyy} \\ u_{xxy} & u_{xyy} \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} u_{xxy} & u_{xyy} \\ u_{xyy} & u_{yyy} \end{pmatrix}. \quad (4.84)$$

Este algoritmo foi generalizado para determinar os invariantes de ordem maiores e implementado algebricamente pela rotina `ln1`. As matrizes Hessianas com derivadas em u até ordem n são calculadas pela rotina `Hn`. Ambas rotinas estão descritas no Apêndice E.

Como veremos no próximo capítulo os invariantes diferenciais para $sp(2)$ realizada com duas ou mais partículas podem ser também determinados analiticamente (5.17) para qualquer ordem. Temos então implementado computacionalmente a determinação eficiente de qualquer invariante diferencial para a álgebra $sp(2)$ realizada com um número de partículas também arbitrário.

Capítulo 5

Invariantes diferenciais para $\mathfrak{sp}(2j + 1)$

5.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos os invariantes para as álgebras simpléticas de *rank* maior que um. Esta tarefa é realizada aplicando e aprimorando resultados sugeridos no capítulo anterior.

Nosso resultado mais extensivo é apresentado na primeira seção deste capítulo, Seção 5.2, onde exibimos uma fórmula geral para os invariantes de ordem arbitrária para álgebras simpléticas realizadas com um número de bósons maior que o dobro do *rank* da álgebra. Nesta situação exploramos a notação natural de dois índices introduzida inicialmente no Capítulo 3.

Em seguida procuramos agrupar na Seção 5.3 todos os casos excepcionais não contemplados com a estabilidade das dimensões das órbitas em $J^{(0)}$. Nestes casos o uso de um *coframe* invariante, não necessariamente provenientes de *frame* invariante, mas obtido através da derivação total de invariantes é aplicável. De fato, uma vez encontrados todos os invariantes de uma dada ordem, este *coframe* gera invariantes de ordens maiores de maneira completa. Vale ressaltar que fizemos uso constante de formas matriciais para simplificar a apresentação destes invariantes.

5.2 Invariantes diferenciais simpléticos, $n_b \geq 2j + 1$

5.2.1 Prolongações para álgebras simpléticas

Nesta seção mostramos uma maneira geral de expressar as prolongações dos campos vetoriais associados à álgebras simpléticas. Mostramos aqui como o fato dos campos serem lineares nas coordenadas simplifica o processo recursivo para determinação dos coeficientes destas prolongações. Considere os geradores da

álgebra simplética¹ realizados como em (3.4),

$$\mathcal{L}^{rs} = \sum_{\alpha=1}^{n_p} \{ \eta_{r\alpha} \partial_{s\alpha} + (-1)^{(\frac{r+s}{2})} \eta_{\bar{s}\alpha} \partial_{\bar{r}\alpha} \}. \quad (5.1)$$

Suas prolongações de ordem n têm a estrutura usual,

$$\text{pr}^n \mathcal{L}^{rs} = \mathcal{L}^{rs} + \sum_{t\alpha} \phi_{t\alpha}^{rs} \frac{\partial}{\partial u_{t\alpha}} + \sum_{t\alpha q\beta} \phi_{t\alpha q\beta}^{rs} \frac{\partial}{\partial u_{t\alpha q\beta}} + \cdots, \quad (5.2)$$

onde os coeficientes $\{\phi_{t\alpha}^{rs}, \phi_{t\alpha q\beta}^{rs}, \dots\}$ são quantidades a serem determinadas somente pelo conhecimento das características de $\mathcal{L}^{rs}$. Logo o primeiro passo é o cálculo destas características que são obtidas usando (2.18),

$$Q^{rs} = -\mathcal{L}^{rs} u(\eta_{j1}, \dots, \eta_{-j1}, \dots, \eta_{jn_p}, \dots, \eta_{-jn_p}) = -\sum_{\alpha} \{ \eta_{r\alpha} u_{s\alpha} + (-1)^{(\frac{r+s}{2})} \eta_{\bar{s}\alpha} u_{\bar{r}\alpha} \}. \quad (5.3)$$

O coeficiente da primeira prolongação é calculado a partir de (2.19),

$$\phi_{t\alpha}^{rs} = D_{t\alpha} Q^{rs} + \sum_{\beta} \{ \eta_{r\beta} u_{t\alpha s\beta} + (-1)^{(\frac{r+s}{2})} \eta_{\bar{s}\beta} u_{t\alpha \bar{r}\beta} \}. \quad (5.4)$$

Observando que o operador de derivada total, (2.15), $D_{t\alpha}$ é dado aqui por

$$D_{t\alpha} = \partial_{t\alpha} + u_{t\alpha} \partial_u + \sum_{t'\alpha'} u_{t\alpha t'\alpha'} \partial_{u_{t'\alpha'}} + \cdots, \quad (5.5)$$

a expressão (5.4) pode ser calculada explicitamente,

$$\phi_{t\alpha}^{rs} = -\sum_{\beta} \{ (D_{t\alpha} \eta_{r\beta}) u_{s\beta} + (-1)^{(\frac{r+s}{2})} (D_{t\alpha} \eta_{\bar{s}\beta}) u_{\bar{r}\beta} \} = -\{ u_{s\alpha} \delta_{tr} + (-1)^{(\frac{r+s}{2})} u_{\bar{r}\alpha} \delta_{t\bar{s}} \}. \quad (5.6)$$

Tendo calculado o primeiro coeficiente, os demais podem ser calculados recursivamente usando (2.17). Por exemplo, o coeficiente de segunda ordem é dado por

$$\begin{aligned} \phi_{t\alpha p\beta}^{rs} &= D_{t\alpha} \phi_{p\beta}^{rs} - \sum_{\gamma} (D_{t\alpha} \eta_{r\gamma}) u_{p\beta s\gamma} - (-1)^{(\frac{r+s}{2})} \sum_{\gamma} (D_{t\alpha} \eta_{\bar{s}\gamma}) u_{p\beta \bar{r}\gamma} \\ &= u_{t\alpha s\beta} \delta_p^r + (-1)^{(\frac{r+s}{2})} u_{t\alpha \bar{r}\beta} \delta_p^{\bar{s}} - \sum_{\gamma} \delta_{rt} \delta_{\alpha\gamma} u_{p\beta s\gamma} - (-1)^{(\frac{r+s}{2})} \sum_{\gamma} \delta_{\bar{s}t} \delta_{\alpha\gamma} u_{p\beta \bar{r}\gamma} \\ &= \delta_p^r u_{t\alpha s\beta} - \delta_t^r u_{p\beta s\alpha} + (-1)^{(\frac{r+s}{2})} \{ \delta_p^{\bar{s}} u_{t\alpha \bar{r}\beta} + \delta_t^{\bar{s}} u_{p\beta \bar{r}\alpha} \} \end{aligned} \quad (5.7)$$

5.2.2 Invariantes diferenciais via *frame* Invariante

Nesta seção calculamos os operadores diferenciais invariantes através da determinação dos campos vetoriais invariantes, ou *frame* invariante. Observe primeiramente que qualquer campo vetorial que comute com $\mathcal{L}^{rs}$ é dado por uma combinação dos campos, dados em (3.2),

$$C_a^b = \sum_{m=-j}^j \eta_{ma} \partial_{mb}. \quad (5.8)$$

¹Nesta seção índices gregos estão relacionados aos bósons e portanto percorrem os valores $1, \dots, n_p$. Índices latinos estão relacionados com as coordenadas num espaço de dimensão $2j+1$ com j semi-inteiro, e percorrem os valores $-j, \dots, j$. Contudo nos limitamos a escrever o numerador de j somente, introduzindo o fator $1/2$ explicitamente quando necessário.

De fato, escrevendo os geradores da álgebra simplética na forma,

$$\mathcal{L}^{rs} = \sum_{\alpha} \{ \eta_{r\alpha} \partial_{s\alpha} + (-1)^{(\frac{r+s}{2})} \eta_{\bar{s}\alpha} \partial_{\bar{r}\alpha} = \mathcal{C}_r^s + (-1)^{(\frac{r+s}{2})} \mathcal{C}_{\bar{s}}^{\bar{r}}, \quad (5.9)$$

calculamos

$$[C_a^b, C_r^s] = \sum_{\alpha m} \eta_{r\alpha} \delta_s^m \delta_{\alpha}^a \partial_{mb} + \sum_{\alpha m} \eta_{r\alpha} \eta_{ma} \partial_{s\alpha mb} - \sum_{m\alpha} \eta_{ma} \delta_m^r \delta_b^{\alpha} \partial_{s\alpha} - \sum_{\alpha m} \eta_{ma} \eta_{r\alpha} \partial_{mbs\alpha} = 0. \quad (5.10)$$

Sabendo que C_a^b são os operadores que comutam com todos os geradores da álgebra, podemos escrever imediatamente os operadores diferenciais invariantes associados a este *frame* invariante com a seguinte combinação de derivadas totais

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \sum_{m=-j}^j \eta_{m\alpha} D_{m\beta} \quad (5.11)$$

Esta expressão para os operadores diferenciais invariantes permite a obtenção analítica de invariantes diferenciais de ordem qualquer mediante sua aplicação sucessiva como veremos adiante.

Invariantes diferenciais de primeira ordem

Tendo escrito de maneira compacta os operadores diferenciais invariantes (5.11) podemos obter expressões fechadas para os invariantes diferenciais. Em primeira ordem temos

$$I_{\alpha\beta}^{(1)} = \mathcal{D}_{\alpha\beta} u = \sum_{m=-j}^j \eta_{m\alpha} u_{m\beta}, \quad (5.12)$$

ou

$$I_{\alpha_1\alpha_2}^{(1)} = \sum_{m_1=-j}^j \eta_{m_1\alpha_1} u_{m_1\alpha_2}. \quad (5.13)$$

Podemos checar imediatamente sua invariância,

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(1)} \mathcal{L}^{rs} \{ I_{\mu\nu}^{(1)} \} &= \eta_{r\mu} u_{s\nu} + (-1)^{(\frac{r+s}{2})} \eta_{\bar{s}\mu} u_{\bar{r}\nu} - \sum_{p\alpha} \{ u_{s\alpha} \delta_p^r + (-1)^{(\frac{r+s}{2})} u_{r\alpha} \delta_p^{\bar{s}} \} \frac{\partial}{\partial u_{p\alpha}} \sum_m \eta_{m\mu} u_{m\nu} \\ &= \eta_{r\mu} u_{s\nu} + (-1)^{(\frac{r+s}{2})} \eta_{\bar{s}\mu} u_{\bar{r}\nu} - u_{s\nu} \eta_{r\mu} - (-1)^{(\frac{r+s}{2})} u_{\bar{r}\nu} \eta_{\bar{s}\mu} = 0. \end{aligned}$$

Invariantes diferenciais de segunda ordem

De maneira inteiramente análoga, calculamos os invariantes diferenciais de segunda ordem atuando os operadores diferenciais invariantes (5.11) sobre os invariantes diferenciais de primeira ordem (5.12)

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha\beta\gamma\sigma}^{(2)} &= \mathcal{D}_{\gamma\sigma}(I_{\alpha\beta}^{(1)}) = \mathcal{D}_{\gamma\sigma}\left\{\sum_{m=-j}^j \eta_{m\alpha} u_{m\beta}\right\} \\
 &= \sum_{m=-j}^j \{\mathcal{D}_{\gamma\sigma}(\eta_{m\alpha}) u_{m\beta} + \mathcal{D}_{\gamma\sigma}(u_{m\beta}) \eta_{m\alpha}\} \\
 &= \sum_{m,k} \{\eta_{k\gamma} u_{m\beta} \delta_k^m \delta_\sigma^\alpha + \eta_{k\gamma} \eta_{m\alpha} \sum_{m'\alpha'} u_{k\sigma m'\alpha'} \delta_m^{m'} \delta_\beta^{\alpha'}\} \\
 &= \delta_\alpha^\sigma I_{\gamma\beta}^{(1)} + \sum_{m,k} \eta_{k\gamma} \eta_{m\alpha} u_{k\sigma m\beta}.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Portanto os invariantes estritamente de segunda ordem, ignorando o termo de primeira ordem $\delta_\alpha^\sigma I_{\gamma\beta}^{(1)}$ em (5.14), são dados por

$$I_{\alpha\beta\gamma\sigma}^{(2)} = \sum_{m,k} \eta_{k\gamma} \eta_{m\alpha} u_{k\sigma m\beta}, \tag{5.15}$$

ou

$$I_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}^{(2)} = \sum_{m_1, m_2} \eta_{m_1\alpha_1} \eta_{m_2\alpha_3} u_{m_1\alpha_2 m_2\alpha_4}. \tag{5.16}$$

Invariantes diferenciais de ordem qualquer

Com base nestes exemplos de ordem menor, (5.13) e (5.16), podemos escrever uma expressão analítica para os invariantes simpléticos estritamente de ordem n ,

$$I_{\{\alpha_1 \dots \alpha_{2n}\}}^{(n)} = \sum_{m_1, \dots, m_n} \prod_{i=1}^n \eta_{m_i \alpha_{2i-1}} u_{\{m_1, \alpha_2, \dots, m_n, \alpha_{2n}\}}, \quad -j \leq m_i \leq j, \quad 1 \leq \alpha_i \leq n_p. \tag{5.17}$$

A invariância desta expressão é garantida pelo Teorema 1, pois estes invariantes são obtidos através de um *coframe* de formas diferenciais invariantes, dual ao *frame* formado pelos campos vetoriais invariantes (5.8). Como este *frame* invariante já existe em $J^{(0)}$ os invariantes ordinários constituem o conjunto maximal necessário. Esta expressão foi também verificada em vários exemplos para as álgebras simpléticas de *rank* menor (1,2,3), fazendo uso extensivo das rotinas algébricas, descritas no Apêndice E, que incorporam a expressão analítica para as prolongações de ordem qualquer, obtida em (5.2). Este resultado, inédito na literatura das álgebras simpléticas, parece sugerir ainda uma forma de tratar outras álgebras de Lie realizadas pelo mesmo mecanismo. Vale ainda mencionar que tal expressão analítica para invariantes diferenciais de qualquer ordem para qualquer álgebra simplética, desde que realizada com um número de bósons igual ou superior ao dobro do *rank*, não é conhecida na literatura de álgebras de Lie nem para realizações mais simples como as do grupo de rotações e suas extensões em [8] e [9].

5.3 Invariantes diferenciais simplécticos, $n_b < 2j + 1$.

Nesta seção descrevemos invariantes diferenciais para os casos onde a dimensão das órbitas é sub-maximal. Limitamos a apresentar os invariantes de até segunda ordem para $sp(6)$ com três bósons, pelo fato de todas as representações irredutíveis de $sp(6)$ poderem ser implementadas com três bósons (três linhas no *Tableaux* de Young), entendendo entretanto que a obtenção destes invariantes para ordens maiores e álgebras de dimensão maior segue as mesmas linhas gerais. Na Tabela 5.1 apresentamos a multiplicidade esperada dos invariantes diferenciais simplécticos até ordem três. Esta informação é determinada com a Tabela 4.1 para estabilização de órbitas e o conhecimento da dimensão $Dim(J^{(n)})$ de cada *jet-space*

$$i_n = Dim(J^{(n)}) - s_n = p + \binom{p+n}{n} - s_n = p + \frac{(p+n)!}{n!p!} - s_n, \quad (5.18)$$

onde $p = (2j + 1)n_p$ é o número de coordenadas independentes em $J^{(0)}$.

	$sp(2)$				$sp(4)$				$sp(6)$			
n_b	i_0	j_1/i_1	j_2/i_2	j_3/i_3	i_0	j_1/i_1	j_2/i_2	j_3/i_3	i_0	j_1/i_1	j_2/i_2	j_3/i_3
1	1/1	1/2	3/5	4/9	1/1	1/2	7/9	20/29	1/1	1/2	16/18	51/69
2	2/2	4/6	10/16	20/36	2/2	5/7	36/43	120/163	2/2	5/7	73/82	364/446
3	4/4	6/10	21/31	56/87	4/4	11/15	78/93	364/457	4/4	12/16	171/187	1140/1327

Tabela 5.1: Multiplicidade dos invariantes diferenciais para as álgebras simplécticas de menor *rank* em função da quantidade de bósons independentes n_b presentes na realização. Nesta tabela i_n é o número total de invariantes até ordem n e j_n conta estritamente os invariantes daquela ordem.

5.3.1 Invariantes diferenciais até segunda ordem para $sp(4)$: um bóson

Este caso é muito interessante por representar um acréscimo considerável de complexidade, pois o *rank* passa de três para 10 em $J^{(2)}$, e no entanto podemos apresentar um tratamento completo. Apresentamos explicitamente nesta seção todos os invariantes de segunda ordem para a álgebra $sp(4)$ realizada com um bóson e indicamos o procedimento para encontrar os de ordem maior. Usando a seguinte prescrição para estender os índices

$$(\eta_{31}, \eta_{11}, \eta_{\bar{1}1}, \eta_{\bar{3}1}) = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, w), \quad (5.19)$$

e lembrando que os geradores usuais de $\mathfrak{sp}(4)$, $\{H_1, H_2, E_1^+, E_2^+\}$, na sua realização padrão com um bóson e prolongados até a segunda ordem, são dados respectivamente por

$$\begin{aligned} \text{pr}^2 \mathcal{L}_1^1 &= x\partial_x - w\partial_w - u_x\partial_{u_x} + u_w\partial_{u_w} - 2u_{xx}\partial_{u_{xx}} - u_{xy}\partial_{u_{xy}} - u_{xz}\partial_{u_{xz}} + u_{yw}\partial_{u_{yw}} + u_{zw}\partial_{u_{zw}} + 2u_{uw}\partial_{u_{uw}}, \\ \text{pr}^2 \mathcal{L}_3^3 &= y\partial_y - z\partial_z - u_y\partial_{u_y} + u_z\partial_{u_z} - u_{xy}\partial_{u_{xy}} + u_{xz}\partial_{u_{xz}} - 2u_{yy}\partial_{u_{yy}} - u_{yw}\partial_{u_{yw}} + 2u_{zz}\partial_{u_{zz}} + u_{zw}\partial_{u_{zw}}, \\ \text{pr}^2 \mathcal{L}_3^3 &= 2w\partial_x - 2u_x\partial_{u_w} - 2u_{xx}\partial_{u_{xw}} - 2u_{xy}\partial_{u_{yw}} - 2u_{xz}\partial_{u_{zw}} - 4u_{xw}\partial_{u_{xw}}, \\ \text{pr}^2 \mathcal{L}_1^3 &= y\partial_x + w\partial_z - u_x\partial_{u_y} - u_z\partial_{u_w} - u_{xx}\partial_{u_{xy}} - u_{xz}\partial_{u_{xw}} - 2u_{xy}\partial_{u_{yy}} \\ &\quad - u_{xz}\partial_{u_{yz}} + (-u_{yz} - u_{xw})\partial_{u_{yw}} - u_{zz}\partial_{u_{zw}} - 2u_{zw}\partial_{u_{uw}}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Qualquer um dos 10 elementos desta álgebra, descritos explicitamente em (3.6), pode ser obtido destes usando as regras de comutação da álgebra. Logo qualquer função em $J^{(2)}$ que seja invariante à estes quatro campos vetoriais é automaticamente invariante aos demais. Este fato fica evidente do terceiro conjunto de relações de comutação na forma de Cartan-Weyl,

$$[H_i, H_j] = 0 \quad (5.21)$$

$$[H_i, E_j^\pm] = \pm(\alpha_j)_i E_j^\pm \quad (5.22)$$

$$[E_i^+, E_i^-] = (\alpha_i)_1 H_1 + (\alpha_i)_2 H_2, \quad (5.23)$$

Observe que os operadores diferenciais invariantes, análogos aos que construímos para $\mathfrak{sp}(2)$, veja (4.63), são dados por,

$$\mathcal{D}_1 = xD_x + yD_y + zD_z + wD_w, \quad \mathcal{D}_2 = u_w D_x - u_z D_y + u_y D_z - u_x D_w. \quad (5.24)$$

Se existisse um frame invariante completo teríamos quatro destes operadores totalmente em ordem zero. Neste caso, diferentemente de $\mathfrak{sp}(2)$, mesmo em primeira ordem ainda não temos as quatro formas de contato invariantes necessárias, temos apenas duas. Contudo da ação sucessiva deste operadores, conseguimos obter todos os invariantes de segunda ordem de acordo com o seguinte procedimento. Primeiro, obtemos o invariante de primeira ordem²,

$$P = \mathcal{D}_1 u = xu_x + yu_y + zu_z + wu_w. \quad (5.25)$$

Obtemos um invariante estritamente de segunda ordem aplicando $\mathcal{D}_2$ neste invariante de primeira ordem

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2 P = S_1 &= -u_w u_{xx} x - u_w u_{xy} y - u_w z u_{xz} - u_w w u_{xw} + u_z x u_{xy} + u_z u_{yy} y + u_z z u_{yz} + u_z w u_{yw} \\ &\quad - u_y x u_{xz} - u_y y u_{yz} - u_y z u_{zz} - u_y w u_{zw} + u_x x u_{xw} + u_x y u_{yw} + u_x z u_{zw} + u_x w u_{ww}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

enquanto que aplicando $\mathcal{D}_1$ obtemos novamente P e outro invariante de segunda ordem

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 P = P + S_2 &= P + u_{xx} x^2 + 2xu_{xy} y + 2xz u_{xz} + 2xw u_{xw} + u_{yy} y^2 + 2yz u_{yz} + 2yw u_{yw} \\ &\quad + z^2 u_{zz} + 2zw u_{zw} + w^2 u_{ww}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

²Observe que não existe outro invariante ordinário além de u . Outros aparecem quando temos mais que um bóson, veja (3.30)

Continuando este procedimento, com a expectativa gerada pelo comportamento dos invariantes no caso de $sp(2)$ com um bóson, encontramos, retendo apenas os termos de segunda ordem

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_2 S_2 = & z u_z u_{yz}^2 + u_x^2 u_{ww} + u_y^2 u_{zz} + y u_y u_{yz}^2 + u_z^2 u_{yy} + u_w^2 u_{xx} - 2 u_z u_y u_{yz} - 2 u_w u_x u_{xw} \\
& + 2 u_w u_y u_{xz} - 2 u_w u_z u_{xy} - 2 u_y u_x u_{zw} + 2 u_z u_x u_{yw} - x u_{xx} u_x u_{ww} + w u_w u_{xw}^2 \\
& - w u_{ww} u_w u_{xx} - w u_{ww} u_y u_{xz} - z u_{xz} u_x u_{ww} + x u_x u_{xw}^2 + z u_{xz} u_w u_{xw} + x u_{xw} u_z u_{xy} \\
& + y u_{xy} u_w u_{xw} - x u_{xw} u_y u_{xz} - x u_{xz} u_z u_{yy} - y u_{yy} u_w u_{xz} - z u_{yz} u_w u_{xz} + x u_{xy} u_z u_{yz} \\
& + y u_{yz} u_w u_{xy} + x u_{xz} u_y u_{yz} - x u_{xx} u_z u_{yw} - y u_{yw} u_w u_{xx} - x u_{xz} u_x u_{yw} - y u_{yw} u_y u_{xz} \\
& - z u_{xz} u_z u_{yw} - w u_{yw} u_w u_{xz} + y u_{yw} u_x u_{xw} - w u_{xw} u_z u_{yw} - y u_{yz} u_x u_{yw} + w u_{yw} u_z u_{yz} \\
& - x u_{xy} u_y u_{zz} + z u_{zz} u_w u_{xy} - z u_{zz} u_z u_{yy} - y u_{yy} u_y u_{zz} - w u_{yw} u_y u_{zz} - z u_{zz} u_x u_{yw} \\
& + z u_{zw} u_z u_{xy} + x u_{xy} u_x u_{zw} + y u_{xy} u_y u_{zw} - z u_{zw} u_w u_{xx} + x u_{xx} u_y u_{zw} + w u_{zw} u_w u_{xy} \\
& + z u_{zw} u_x u_{xw} + w u_{xw} u_y u_{zw} - w u_{zw} u_z u_{yy} + y u_{yy} u_x u_{zw} + z u_{yz} u_x u_{zw} + w u_{zw} u_y u_{yz} \\
& + w u_{ww} u_z u_{xy} - y u_{xy} u_x u_{ww} = S_3 + S_4.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Onde chamamos de S_3 os termos lineares em u_{ij} e S_4 os termos quadráticos em u_{ij} . S_3 e S_4 são invariantes diferenciais estritamente de segunda ordem e são independentes entre si.

Neste ponto é interessante buscar uma notação mais compacta para estes invariantes. Como veremos adiante podemos fazer uso de uma estrutura recorrente neste processo. Observe que com o uso da métrica simplética e da matriz Hessiana de $u(x, y, z, w)$,

$$S = \begin{pmatrix} & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} & u_{xw} \\ u_{xy} & u_{yy} & u_{yz} & u_{yw} \\ u_{xz} & u_{yz} & u_{zz} & u_{zw} \\ u_{xw} & u_{yw} & u_{zw} & u_{ww} \end{pmatrix}, \tag{5.29}$$

e dos vetores,

$$X^T = (x, y, z, w), \quad (\nabla u)^T = (u_x, u_y, u_z, u_w), \tag{5.30}$$

podemos escrever os invariantes obtidos até então na forma matricial

$$P = X^T \nabla u, \tag{5.31}$$

$$S_1 = X^T H (S \nabla u), \tag{5.32}$$

$$S_2 = X^T H X, \tag{5.33}$$

$$S_3 = (S \nabla u)^T H (S \nabla u), \tag{5.34}$$

$$S_4 = X^T H S H (S \nabla u). \tag{5.35}$$

Esta possibilidade parece ser um dos benefícios de usarmos uma notação com índices estendidos nos casos tratados neste capítulo. Outro benefício imediato, é aparente na computação algébrica, onde o manuseio destas expressões fica muito complicado quando se usa a notação de dois índices usada na seção anterior.

Cabe aqui a mesma observação feita na nota da página 50, neste caso aproveitaríamos apenas a forma do invariante S_2 se restringíssemos o resultado geral com quatro bósons dado por (5.17) eliminando todas as variáveis referentes à três bósons quaisquer.

Com esta maneira concisa de escrever os invariantes, efetuamos ainda um passo no procedimento anterior usando os dois operadores diferenciais invariantes até encontrar

$$S_5 = X^T \text{HSHSH}(S\nabla u), \quad (5.36)$$

$$S_6 = X^T \text{HSHSH}(X), \quad (5.37)$$

$$S_7 = (S\nabla u)^T \text{HSHSH}(S\nabla u). \quad (5.38)$$

De acordo com a Tabela 5.1 obtivemos um conjunto maximal de invariantes diferenciais para a álgebra $\mathfrak{sp}(4)$ na segunda ordem de prolongação. Observamos que existem dois invariantes alternativos

$$S'_6 = \text{tr}(HS)^2, \quad S'_7 = \det H. \quad (5.39)$$

Verificamos contando o número de termos em cada um destes invariantes,

$$S_1 \rightarrow 10, S_2 \rightarrow 16, S_3 \rightarrow 10, S_4 \rightarrow 48, S_5 \rightarrow 84, S_6 \rightarrow 140, S_7 \rightarrow 84, S'_6 \rightarrow 6, S'_7 \rightarrow 10, \quad (5.40)$$

que de fato S'_6 e S'_7 são mais simples, apesar de serem de quarta ordem em u_{ij} . Percebemos ainda que invariantes de ordem maior em u_{ij} podem ser obtidos de

$$S^* = \text{tr}(\text{HS})^{2n} \quad (5.41)$$

observando que as potências ímpares não trazem novidade

$$\text{tr}(\text{HS})^{2n+1} = 0. \quad (5.42)$$

Com este conjunto de invariantes podemos construir um *coframe* de quatro 1-formas constituído de derivadas totais destes invariantes, por exemplo os quatro invariantes mais simples u, P, S_1, S_2 . Com este *coframe* agindo sucessivamente sobre o conjunto maximal de invariantes de segunda ordem podemos obter, em princípio, todos os demais invariantes de ordem maior, caso haja interesse e necessidade.

5.3.2 Invariantes diferenciais até segunda ordem para $\mathfrak{sp}(4)$: dois bósons

Características e seus invariantes ordinários

Nesta seção usamos uma notação com os índices estendidos da seguinte maneira

$$\begin{aligned} (\eta_{31}, \eta_{11}, \eta_{\bar{1}1}, \eta_{\bar{3}1}) &= (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x_1, y_1, z_1, w_1), \\ (\eta_{32}, \eta_{12}, \eta_{\bar{1}2}, \eta_{\bar{3}2}) &= (x^5, x^6, x^7, x^8) = (x_2, y_2, z_2, w_2). \end{aligned} \quad (5.43)$$

A primeira igualdade se refere à uma forma eficiente com a qual as rotinas algébricas que elaboramos se referem às coordenadas e a segunda uma maneira intuitiva com a qual analisamos os resultados destas rotinas. Nesta nova notação, os operadores (3.6) podem ser expressos na forma,

$$v_k = \sum_{i=1}^8 \xi_{ki} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad k = 1, 2, \dots, 10, \quad (5.44)$$

onde os coeficientes ξ_{ki} são dados pelos coeficientes dos operadores de derivadas parciais com relação às coordenadas nas expressões que definem a realização da álgebra $sp(4)$ com dois bósons, dada em (3.6),

$$\Xi = (\xi_{ki}) = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & 0 & z_1 & 0 & x_2 & 0 & z_2 \\ 0 & 0 & x_1 & -y_1 & 0 & 0 & x_2 & -y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_1 & 0 & 0 & 0 & 2x_2 \\ 0 & 0 & 2y_1 & 0 & 0 & 0 & 2y_2 & 0 \\ y_1 & 0 & w_1 & 0 & y_2 & 0 & w_2 & 0 \\ z_1 & -w_1 & 0 & 0 & z_2 & -w_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2z_1 & 0 & 0 & 0 & 2z_2 & 0 & 0 \\ 2w_1 & 0 & 0 & 0 & 2w_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & -w_1 & x_2 & 0 & 0 & -w_2 \\ 0 & y_1 & -z_1 & 0 & 0 & y_2 & -z_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.45)$$

O *rank* desta matriz é sete, indicando que a dimensão máxima das órbitas em J^0 é sete, $s_0 = 7$. Isto significa que teremos $9 - 7 = 2$ invariantes ordinários, conforme mostrado na Tabela 5.1.

As características Q_k associadas aos campos vetoriais (5.45) são:

$$Q_k = -v_k u = -\sum_{i=1}^8 \xi_{ki} u_i. \quad (5.46)$$

As soluções simultâneas do sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem $Q_k = 0$, $k = 1, \dots, 10$, são invariantes ordinários no espaço das coordenadas independentes x^i , $i = 1, \dots, 8$. O único invariante deste tipo é

$$Z = w_2 x_1 + y_2 z_1 - z_2 y_1 - x_2 w_1, \quad (5.47)$$

ou seja, o invariante já apresentado anteriormente em (3.30). Temos então dois invariantes ordinários no *jet-space* $J^{(0)}$: u e Z . Desde já é importante observar que invariante ordinário Z pode ser escrito como um produto escalar semelhante àquele em (4.8),

$$Z = X_2^T S X_1, \quad (5.48)$$

onde

$$X_1^T = (x_1, y_1, z_1, w_1), \quad X_2^T = (x_2, y_2, z_2, w_2), \quad (5.49)$$

e S é a mesma matriz da métrica simpléctica dada em (5.29). Esta notação, que faz referência direta às coordenadas de cada bóson, se mostrou crucial para o reconhecimento de invariantes em expressões provenientes da ação de operadores diferenciais invariantes em casos como este de dimensão alta.

Prolongações de primeira ordem e seus invariantes diferenciais

Naturalmente, todos os resultados sobre as prolongações de primeira (e segunda) ordem para a álgebra $\mathfrak{sp}(2)$ podem ser aproveitados integralmente aqui com apenas duas modificações: I) as somas indicadas devem ser feitas no espaço de dimensão oito das variáveis independentes; II) a matriz $\Xi = (\xi_{ki})$ deve ser aquela dada em (5.45). Desta forma, de (4.40), as prolongações de primeira ordem para a álgebra $\mathfrak{sp}(4)$ podem ser escritas como:

$$\mathbf{pr}^1 v_k = \sum_{i=1}^8 \left(\xi_{ki} \frac{\partial}{\partial x^i} + \Phi_{ki} \frac{\partial}{\partial u_i} \right), \quad k = 1, 2, \dots, 10, \quad (5.50)$$

onde

$$\Phi_{ki} = - \sum_{j=1}^8 \xi_{kj,i} u_j. \quad (5.51)$$

O *rank* da matriz 10×16 formada pelos coeficientes de todas as coordenadas em $J^{(1)}$, exceto u , é 10. Assim, $s_1 = 10$ coincide com a dimensão da álgebra $\mathfrak{sp}(4)$ e, portanto, $s_n = 10$, $n \geq 1$. Uma vez tendo atingido a estabilidade para as possíveis dimensões para as órbitas, podemos prever a quantidade dos invariantes diferenciais de qualquer ordem. Entre os $17 - 10 = 7$ invariantes até ordem um, $7 - 2 = 5$ são invariantes diferenciais de primeira ordem, ou seja, são soluções do sistema $\mathbf{pr}^1 v_k F = 0$, onde F é uma função arbitrária no *jet-space* $J^{(1)}$ de dimensão 17. Ao contrário da situação encontrada para a álgebra $\mathfrak{sp}(2)$, a rotina `pdsolve` não é ineficiente³ para resolver completamente este sistema em $J^{(1)}$. No entanto, ela é capaz de encontrar os invariantes da forma $F(u_{x_1}, \dots, u_{w_2})$. Há apenas um invariante deste tipo, que é dado por

$$P^5 = u_{x_1} u_{w_2} - u_{y_1} u_{z_2} + u_{z_1} u_{y_2} - u_{w_1} u_{x_2}. \quad (5.52)$$

Este invariante foi também obtido por um *ansatz* baseado nas formas de contato para a álgebra $\mathfrak{sp}(2)$, antes de tomarmos contato com a nova versão da rotina `pdsolve`. Este invariante quadrático nas derivadas pode ser escrito com a notação matricial,

$$P^5 = (\nabla^2 u)^T S (\nabla^1 u), \quad (5.53)$$

onde

$$(\nabla^1 u)^T = (u_{x_1}, u_{y_1}, u_{z_1}, u_{w_1}), \quad (\nabla^2 u)^T = (u_{x_2}, u_{y_2}, u_{z_2}, u_{w_2}), \quad (5.54)$$

e S é a métrica simpléctica dada em (5.29).

³Estabelecemos um limite padrão de 24 horas de processamento.

Outros invariantes de primeira ordem podem ser obtidos por indução, sugerida pelas formas matriciais invariantes (4.24) encontradas no caso da álgebra $sp(2)$. A situação análoga à prescrição (4.24) para o presente caso é:

$$P_{ij}^k \rightarrow X_i(\nabla^j u)^T, \quad (5.55)$$

onde os vetores X_1 e X_2 estão definidos em (5.49) e U_1 e U_2 em (5.54). Explicitamente, estes invariantes são:

$$\begin{aligned} P_{11}^1 &= X_1(\nabla^1 u)^T = u_{w_1} w_1 + x_1 u_{x_1} + y_1 u_{y_1} + u_{z_1} z_1, \\ P_{12}^2 &= X_1(\nabla^2 u)^T = x_2 u_{x_1} + y_2 u_{y_1} + z_2 u_{z_1} + w_2 u_{w_1}, \\ P_{21}^3 &= X_2(\nabla^1 u)^T = x_1 u_{x_2} + y_1 u_{y_2} + z_1 u_{z_2} + w_1 u_{w_2}, \\ P_{22}^4 &= X_2(\nabla^2 u)^T = x_2 u_{x_2} + y_2 u_{y_2} + z_2 u_{z_2} + w_2 u_{w_2}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

De fato estes cinco invariantes sugeridos acima satisfazem as dez equações $\text{pr}^1 v_r \{P^5, P_{ij}^k\} = 0$. Estes cinco invariantes diferenciais de primeira ordem são funcionalmente independentes, segundo o critério (4.17), e constituem uma base para os invariantes diferenciais de primeira ordem. Em outras palavras, qualquer equação diferencial de primeira ordem com as mesmas variáveis, invariante pela ação deste grupo, deve ser uma função destes cinco invariantes.

Operadores Diferenciais Invariantes

Como mostrado na Tabela 4.1, a álgebra $sp(4)$ realizada com dois bósons tem os seus 10 elementos v_k funcionalmente dependentes. Apenas sete destes elementos são funcionalmente independentes ($s_0 = 7$). Neste caso existem apenas quatro soluções das equações diferenciais (4.44) que nos permite construir os campos vetoriais invariantes:

$$A_k = \sum_{i=1}^8 A_{ki} \partial_i, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (5.57)$$

onde

$$A = (A_{ki}) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

Esta multiplicidade dos campos vetoriais invariantes é governada pelo número de bósons⁴ e em geral são dados por (5.10).

⁴Este fato foi inicialmente percebido por nós pelo fato de fazermos uso constante da notação estendida. Apesar da solução de sistemas do tipo (4.44) ser trivial, a percepção deste fato levou diretamente à generalização realizada na Seção 5.2.

Os operadores invariantes $\mathcal{D}_k$, definidos em (4.53), com $m = 8$, são

$$\mathcal{D}_1 = X_1^T D_1 = x_1 D_{x_1} + y_1 D_{y_1} + z_1 D_{z_1} + w_1 D_{w_1}, \quad (5.59)$$

$$\mathcal{D}_2 = X_2^T D_1 = x_2 D_{x_1} + y_2 D_{y_1} + z_2 D_{z_1} + w_2 D_{w_1}, \quad (5.60)$$

$$\mathcal{D}_3 = X_1^T D_2 = x_1 D_{x_2} + y_1 D_{y_2} + z_1 D_{z_2} + w_1 D_{w_2}, \quad (5.61)$$

$$\mathcal{D}_4 = X_2^T D_2 = x_2 D_{x_2} + y_2 D_{y_2} + z_2 D_{z_2} + w_2 D_{w_2}, \quad (5.62)$$

onde

$$(D_s)^T = (D_{x_s}, D_{y_s}, D_{z_s}, D_{w_s}), \quad s = 1, 2. \quad (5.63)$$

O segundo operador diferencial em (5.24) fornece a sugestão necessária para obter um quinto operador diferencial invariante

$$\mathcal{D}_5 = (S\nabla^1 u)^T \cdot D_2 = -u_{w_1} D_{x_2} + u_{z_1} D_{y_2} - u_{y_1} D_{z_2} + u_{x_1} D_{w_2}, \quad (5.64)$$

A ação destes operadores invariantes em u , nos fornece os quatro invariantes de primeira ordem lineares em u_{x_i} e o invariante quadrático em u_{x_i} , apresentados em (5.56) e (5.53) encontrados pela solução do sistema de equações diferenciais resultantes da condição de invariância⁵. Este procedimento parece ser de fato o caminho natural para a obtenção dos invariantes de primeira ordem. É importante observar que as construções

$$(\nabla^1 u)^T S (D_1 u) = (\nabla^1 u)^T S (\nabla^1 u) = 0, \quad (5.65)$$

$$(\nabla^2 u)^T S (D_2 u) = (\nabla^2 u)^T S (\nabla^2 u) = 0, \quad (5.66)$$

não trazem nenhuma informação nova.

Prolongações de segunda ordem e seus invariantes diferenciais

Procedendo como nas sessões anteriores, as prolongações de segunda ordem são dadas por

$$\text{pr}^2 v_k = \text{pr}^1 v_k + \sum_{s \geq r=1}^8 \Phi_{krs} \frac{\partial}{\partial u_{rs}}, \quad (5.67)$$

onde

$$\Phi_{krs} = - \sum_{i=1}^8 (\xi_{ki,r} u_{is} + \xi_{ki,s} u_{ir}), \quad (5.68)$$

e os coeficientes ξ_{ki} são dados em (5.45). Como $s_2 = 10$, devemos ter até $53 - 10 = 43$ invariantes em $J^{(2)}$, dentre os quais $43 - 7 = 36$ são invariantes diferenciais estritamente de segunda ordem.

⁵Em nossa investigação, com a inabilidade da rotina `pdsolve` de resolver este sistema de equações diferenciais, e com a ausência de um *coframe* invariante completo, elaboramos na época uma rotina baseada em *ansatz* polinomiais, ver Seção 4.4.1, que fornece todos os cinco invariantes.

Neste caso, a rotina `pdsolve` é também ineficiente para resolver as equações diferenciais resultantes em $J^{(2)}$ (de dimensão 53) ou mesmo em qualquer subespaço particular. Como alternativa, construímos um *coframe* em $J^{(1)}$ com os dois invariantes ordinários (Z, u) , os cinco invariantes de primeira ordem, (5.56) e (5.53), e um de segunda ordem, obtido por *ansatz* polinomial no início de nossas investigações⁵,

$$S_{anz} := u_{y_1 z_2} - u_{z_1 y_2} - u_{x_1 w_2} + u_{w_1 x_2}. \quad (5.69)$$

O próximo passo é a inversão da matriz J que define os operadores diferenciais invariantes, (2.52). Percebemos que tal matriz possuía propriedades de transformação do grupo simplético facilitando sua inversão, e conseqüentemente fornecendo operadores numa forma passível de análise. A aplicação sucessiva destes operadores invariantes levaria eventualmente à um sistema maximal de invariantes de segunda ordem. Omitimos neste documento a forma explícita deste *coframe* e dos operadores diferenciais invariantes associados, bem como dos invariantes diferenciais fornecidos por ele. Contudo descrevemos a seguir o benefício que esta operação trouxe no sentido de revelar a estrutura matricial na qual estes invariantes podem ser inseridos. Analisando os 49 (funcionalmente ou linearmente dependentes) invariantes de primeira, segunda e alguns de terceira ordem que aparecem como resultado da ação destes operadores diferenciais em invariantes diferenciais conhecidos, determinamos a estrutura recorrente que nos leva a estabelecer o seguinte mecanismo de obtenção para invariantes de segunda ordem.

Observamos, a partir da ação dos operadores diferenciais invariantes mencionados acima juntamente com a experiência com as realizações de dimensão menor, que podemos construir invariantes diferenciais de segunda ordem para esta realização de $sp(4)$ com dois bósons com a seguinte prescrição. Definimos as sub-matrizes Hessianas

$$U^{11} = \begin{pmatrix} u_{x_1 x_1} & u_{x_1 y_1} & u_{x_1 z_1} & u_{x_1 w_1} \\ u_{x_1 y_1} & u_{y_1 y_1} & u_{y_1 z_1} & u_{y_1 w_1} \\ u_{x_1 z_1} & u_{y_1 z_1} & u_{z_1 z_1} & u_{z_1 w_1} \\ u_{x_1 w_1} & u_{y_1 w_1} & u_{z_1 w_1} & u_{w_1 w_1} \end{pmatrix}, U^{12} = \begin{pmatrix} u_{x_1 x_2} & u_{x_1 y_2} & u_{x_1 z_2} & u_{x_1 w_2} \\ u_{x_1 y_2} & u_{y_1 y_2} & u_{y_1 z_2} & u_{y_1 w_2} \\ u_{x_1 z_2} & u_{y_1 z_2} & u_{z_1 z_2} & u_{z_1 w_2} \\ u_{x_1 w_2} & u_{y_1 w_2} & u_{z_1 w_2} & u_{w_1 w_2} \end{pmatrix}, U^{22} = \begin{pmatrix} u_{x_2 x_2} & u_{x_2 y_2} & u_{x_2 z_2} & u_{x_2 w_2} \\ u_{x_2 y_2} & u_{y_2 y_2} & u_{y_2 z_2} & u_{y_2 w_2} \\ u_{x_2 z_2} & u_{y_2 z_2} & u_{z_2 z_2} & u_{z_2 w_2} \\ u_{x_2 w_2} & u_{y_2 w_2} & u_{z_2 w_2} & u_{w_2 w_2} \end{pmatrix},$$

e os vetores associados a cada bóson já definidos anteriormente

$$X_1^T = (x_1, y_1, z_1, w_1), \quad X_2^T = (x_2, y_2, z_2, w_2), \\ (\nabla^1 u)^T = (u_{x_1}, u_{y_1}, u_{z_1}, u_{w_1}), \quad (\nabla^2 u)^T = (u_{x_2}, u_{y_2}, u_{z_2}, u_{w_2}).$$

Com esta definição construímos primeiramente os seguintes produtos matriciais

$$S_{ijkl}^1 = X_i^T U^{kl} X_j, \quad (5.70)$$

$$S_{ijkl}^2 = (S \nabla^i u)^T U^{kl} (S \nabla^j u), \quad (5.71)$$

$$S_{ijkl}^3 = (S \nabla^i u)^T U^{kl} X_j. \quad (5.72)$$

Destas expressões observamos que cada uma das primeiras, S_{ijkl}^1 e S_{ijkl}^2 , sugerem 10 candidatos à invariantes. Note que os termos envolvendo as matrizes simétricas são simétricos em i e j ,

$$\begin{aligned} X_i^T U^{kk} X_j &= X_j^T U^{kk} X_i, \\ (S\nabla^i u)^T U^{kk} (S\nabla^j u) &= (S\nabla^j u)^T U^{kk} (S\nabla^i u). \end{aligned}$$

Enquanto a terceira construção é não simétrica e temos todos os 12 candidatos. Vários destes termos aparecem no resultado da ação dos operadores diferenciais mencionada acima e fomos capazes de reconhecê-los. Verificamos a invariância de todos estes termos segundo a ação de todos operadores prolongados da álgebra $sp(4)$ até segunda ordem. Portanto estas expressões compreendem invariantes diferenciais de segunda ordem autênticos. É interessante notar que estas expressões mostram uma preservação de forma com as expressões A, B, J dos invariantes de segunda ordem para $sp(2)$ com um bóson, equações (4.65) e (4.67). É ainda necessário mais quatro invariantes para atingir o número maximal apresentado na Tabela 5.1. Procuremos então pelos termos mais simples, quadráticos em U . Notemos primeiramente que precisamos evitar os termos

$$X_a^T U^{aa} S U^{aa} X_a = 0. \quad (5.73)$$

Dentre outras possibilidades escolhemos

$$X_1^T U^{11} S U^{11} X_2, \quad X_1^T U^{22} S U^{22} X_2, \quad X_1^T U^{12} S U^{12} X_2, \quad X_2^T U^{12} S U^{12} X_1,$$

para completar o conjunto maximal de invariantes de segunda ordem. Notemos que este resultado é importante pois, em principio, todos os invariantes de ordem maior podem ser gerados a partir da ação de operadores diferenciais invariantes advindos de um coframe totalmente constituído da derivada total de oito destes invariantes de segunda ordem neste conjunto maximal de invariantes. Este mecanismo é garantido pelo Teorema 1. Contudo uma extensão do estudo realizado para segunda ordem pode levar à conjuntos maximais de ordem maior de maneira mais prática, se necessário.

Observamos com os exemplos estudados até aqui que o aumento do número de bósons na realização da álgebra simpléctica simplifica a forma dos invariantes de uma dada ordem. Este fato fica bem exemplificado quando construirmos os invariantes para $sp(6)$ com um bóson na seção seguinte. Como o número destes invariantes aumenta drasticamente, a maior parte deles num conjunto maximal para uma ordem baixa será altamente não-linear.

5.3.3 Invariantes diferenciais até segunda ordem para $sp(6)$: um bóson

A álgebra $sp(6)$ possui 21 elementos, com apenas seis deles independentes nesta realização com dois bósons em $J^{(0)}$ conforme a Tabela 4.1. Omitimos aqui tanto a estrutura destes geradores quanto as suas prolongações por causa da extensão de suas formulas. No entanto toda informação necessária, como prolongações de qualquer ordem, constantes de estrutura, etc., podem ser produzidas imediatamente com uso

das rotinas que desenvolvemos para qualquer álgebra simpléctica, apresentadas no Apêndice E. Neste caso aproveitamos o procedimento usado para obtenção dos invariantes para $sp(4)$ fazendo uma generalização direta e verificando a invariância dos termos construídos por esta sugestão. Contudo como a dimensão do espaço é maior se faz necessário tomar vários produtos de termos simetrizadores como relatado a seguir nesta seção. Nas próximas seções veremos que este fato é amenizado quando se adiciona mais bósons. Novamente começamos definindo os vetores,

$$X^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), \quad (\nabla u)^T = (u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}, u_{x_4}, u_{x_5}, u_{x_6}), \quad (5.74)$$

Temos aqui, como sempre no caso de uma realização com um bóson, um único invariante de primeira ordem

6

$$P = X^T \nabla u = x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} + u_{x_3} x_3 + u_{x_4} x_4 + x_5 u_{x_5} + x_6 u_{x_6}. \quad (5.75)$$

Em segunda ordem de prolongação procuramos os 16 invariantes mais simples. Os primeiros sete invariantes já conhecemos da estrutura vinda do exemplo de $sp(4)$ com um bóson,

$$S_1 = X^T H (S \nabla u) \quad n_t = 36 \quad (5.76)$$

$$S_2 = X^T H X \quad n_t = 21 \quad (5.77)$$

$$S_3 = (S \nabla u^T) H (S \nabla u) \quad n_t = 21 \quad (5.78)$$

$$S_4 = X^T H S H (S \nabla u) \quad n_t = 180 \quad (5.79)$$

$$S_5 = X^T H S H S H (S \nabla u) \quad n_t = 852 \quad (5.80)$$

$$S_6 = X^T H S H S H (X) \quad n_t = 474 \quad (5.81)$$

$$S_7 = (S \nabla u)^T H S H S H (S \nabla u) \quad n_t = 474, \quad (5.82)$$

onde n_t é o número de parcelas do invariante e as respectivas matrizes Hessiana H e simpléctica S , são como em (5.29), mas agora definidas num espaço de dimensão seis. Vale observar que existe um padrão de zeros nos termos da forma

$$\begin{aligned} X^T (HS)^{2n+1} H X &= 0, \\ S \nabla u^T (HS)^{2n+1} H S \nabla u &= 0. \end{aligned}$$

⁶Lembrando que não há outro invariante ordinário além de u .

Evitando portanto termos desta natureza, tomamos naturalmente os próximos nove termos no formato sugerido pelos sete primeiros acima,

$$S_8 = X^T (HS)^3 H \nabla u \quad n_t = 3222 \quad (5.83)$$

$$S_9 = X^T (HS)^4 HX \quad n_t = 12096 \quad (5.84)$$

$$S_{10} = X^T (HS)^4 H \nabla u \quad n_t = 6765 \quad (5.85)$$

$$S_{11} = \nabla u^T (HS)^4 H \nabla u \quad n_t = 6765 \quad (5.86)$$

$$S_{12} = X^T (HS)^5 H \nabla u \quad n_t = 36540 \quad (5.87)$$

$$S_{13} = X^T (HS)^6 HX \quad n_t = 68268 \quad (5.88)$$

$$S_{14} = X^T (HS)^6 H \nabla u \quad n_t = 68268 \quad (5.89)$$

$$S_{15} = \nabla u^T (HS)^6 H \nabla u \quad n_t = 120606 \quad (5.90)$$

$$S_{16} = X^T (HS)^7 H \nabla u \quad n_t = 320376. \quad (5.91)$$

A invariância de todos estes 16 termos foi conferida para todos os campos vetoriais, não somente os geradores, e são de fato invariantes de segunda ordem para álgebra simpléctica $\mathfrak{sp}(6)$ realizada com um bóson. Continuando a similaridade com o caso de $\mathfrak{sp}(4)$ com um bóson, notamos que invariantes diferenciais podem ser obtidos de

$$S^* = \text{tr}(HS^{2n}), \quad (5.92)$$

observando que as potências ímpares não trazem novidade

$$\text{tr}(HS^{2n+1}) = 0, \quad (5.93)$$

e do determinante da Hessiana H que é sempre um invariante. Geralmente os invariantes em (5.92) têm um número (n_t) menor de termos, porém com potências mais altas em u_{ij} . Ressaltamos a natureza conjectural desta base, sugerida pela experiência em dimensões menores tratadas anteriormente, pois quaisquer 16 termos entre os sugeridos aqui podem ser escolhidos para compor uma base. Contudo não temos ainda um procedimento para determinação da dependência funcional entre os invariantes ($S_1 \dots S_{16}$) e o determinante de H (ou os traços em (5.92)), como sugerido por (4.68).

Percebemos a consequência direta da limitação do número de bósons combinada com a dimensão alta da variedade: equações diferenciais invariantes de segunda ordem altamente não lineares. Contudo mesmo estas equações complicadas possuem soluções com propriedades interessantes, relacionadas com seu grupo de simetria, tais como discutidas brevemente no Apêndice C, e com maiores detalhes em [27],[10],[12]. Estes exemplos para álgebras simpléticas de *rank* até três sugere um procedimento para obtenção de invariantes diferenciais para álgebras com *rank* superior realizadas com um bóson.

5.3.4 Invariantes diferenciais até segunda ordem para $sp(6)$: dois bósons

Tanto em ordem zero como em primeira ordem este exemplo preserva totalmente a construção realizada para $sp(4)$ realizada com dois bósons, incluindo o fato do número de invariantes até primeira ordem ser o mesmo apesar da dimensão do espaço aumentar, veja Tabela 5.1. O outro invariantes ordinário além de u é $Z^{(5/2)}$, veja (3.31). Seguindo a prescrição usada anteriormente construímos os vetores

$$X_1^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), \quad X_2^T = (x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}), \quad (5.94)$$

$$(\nabla^1 u)^T = (u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}, u_{x_4}, u_{x_5}, u_{x_6}), \quad (\nabla^2 u)^T = (u_{x_7}, u_{x_8}, u_{x_9}, u_{x_{10}}, u_{x_{11}}, u_{x_{12}}). \quad (5.95)$$

Com estes vetores os invariantes diferenciais de primeira ordem são dados pela estrutura já conhecida

$$P^5 = (\nabla^2 u)^T S (\nabla^1 u), \quad P_{ij}^k \rightarrow X_i (\nabla^j u)^T, \quad k = 1 \dots 4, \quad i, j = 1 \dots 2, \quad (5.96)$$

onde S é a métrica simplética para $j = 5/2$, (3.32). O procedimento empregado nesta seção é também similar àquele usado na Seção 5.3.2 no que se refere as construções necessárias para se exibir os invariantes diferenciais de segunda ordem. Neste caso, como mostra a Tabela 5.1, devemos ter 73 invariantes de segunda ordem. Como veremos estes invariantes se encaixam na mesma prescrição matricial para a álgebra $sp(4)$ realizada com dois bósons. Contudo existe uma escolha ampla entre invariantes com o mesmo grau nas coordenadas do segundo *jet-space* $J^{(2)}$. Os 32 invariantes apresentados para $sp(4)$ com dois bósons esgotam as possibilidades lineares em u_{ij} ,

$$S_{ijkl}^1 = X_i^T U^{kl} X_j, \quad (5.97)$$

$$S_{ijkl}^2 = (S \nabla^i u)^T U^{kl} (S \nabla^j u), \quad (5.98)$$

$$S_{ijkl}^3 = (S \nabla^i u)^T U^{kl} X_j. \quad (5.99)$$

A próxima categoria deve incluir potências quadráticas em u_{ij} , de fato usamos quatro destes termos para preencher o conjunto maximal naquela ocasião. Nesta seção apresentamos todos os termos dentro desta categoria que são da forma,

$$X_a^T U^{rs} S U^{pq} X_b \quad (5.100)$$

$$(S \nabla^a u)^T U^{rs} S U^{pq} X_b \quad (5.101)$$

$$(S \nabla^a u)^T U^{rs} S U^{pq} (S \nabla^b u) \quad (5.102)$$

Todos os 64 termos não nulos desta categoria (5.100-5.102) são invariantes. Portanto existe uma variedade de escolhas para exibir uma base de 73 invariantes. Esta multiplicidade de invariantes desta categoria certamente será esgotada para uma álgebra de *rank* maior sendo então necessário incluir termos cúbicos.

5.3.5 Invariantes diferenciais até segunda ordem para $sp(6)$: três bósons

Nesta seção fica bem exemplificado o papel do número de bósons na construção dos invariantes diferenciais. Como visto na Seção 5.3.3 anterior os 16 invariantes de segunda ordem para a álgebra $sp(6)$ realizada com

um bóson envolvem potências elevadas da matriz Hessiana H . Veremos que com a introdução de mais dois bósons, todos os 171 invariantes de segunda ordem podem ser expressos em potências não maiores que quadráticas de derivadas segundas. O procedimento é análogo ao realizado para $\mathfrak{sp}(4)$ com dois bósons. Definimos as seguintes partições da Hessiana de dimensão seis,

$$H = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{U}^{11} & \mathbf{U}^{12} & \mathbf{U}^{13} \\ \hline \mathbf{U}^{12\mathrm{T}} & \mathbf{U}^{22} & \mathbf{U}^{23} \\ \hline \mathbf{U}^{13\mathrm{T}} & \mathbf{U}^{23\mathrm{T}} & \mathbf{U}^{33} \end{array} \right), \quad (5.103)$$

e os vetores

$$\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}} = (x_1, \dots, x_6), \quad \mathbf{X}_2^{\mathrm{T}} = (x_7, \dots, x_{12}), \quad \mathbf{X}_3^{\mathrm{T}} = (x_{13}, \dots, x_{18}), \quad (5.104)$$

$$(\nabla^1 u)^{\mathrm{T}} = (u_{x_1}, \dots, u_{x_6}), \quad (\nabla^2 u)^{\mathrm{T}} = (u_{x_7}, \dots, u_{x_{12}}), \quad (\nabla^3 u)^{\mathrm{T}} = (u_{x_{13}}, \dots, u_{x_{18}}). \quad (5.105)$$

Em ordem zero, além de u temos os invariantes ordinários

$$Z^1 = \mathbf{X}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \mathbf{X}_2, \quad Z^2 = \mathbf{X}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \mathbf{X}_3, \quad Z^3 = \mathbf{X}_2^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \mathbf{X}_3. \quad (5.106)$$

Enquanto que os invariantes de primeira ordem são dados pelos produtos:

$$\begin{array}{l|l} P^1 = (\nabla^1 u)^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \nabla^2 u & P^7 = (\nabla^2 u)^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \mathbf{X}_1 \\ P^2 = (\nabla^1 u)^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \nabla^3 u & P^8 = (\nabla^2 u)^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \mathbf{X}_2 \\ P^3 = (\nabla^2 u)^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \nabla^3 u & P^9 = (\nabla^2 u)^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \mathbf{X}_3 \\ P^4 = (\nabla^1 u)^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \mathbf{X}_1 & P^{10} = (\nabla^3 u)^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \mathbf{X}_1 \\ P^5 = (\nabla^1 u)^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \mathbf{X}_2 & P^{11} = (\nabla^3 u)^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \mathbf{X}_2 \\ P^6 = (\nabla^1 u)^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \mathbf{X}_3 & P^{12} = (\nabla^3 u)^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \mathbf{X}_3 \end{array} \quad (5.107)$$

Estes são os 12 invariantes de primeira ordem conforme a Tabela 5.1. Em segunda ordem é necessário considerar as matrizes,

$$\mathbf{U}^{11}, \mathbf{U}^{22}, \mathbf{U}^{33}, \mathbf{U}^{12}, \mathbf{U}^{13}, \mathbf{U}^{23}. \quad (5.108)$$

Construímos então os produtos

$$S_{ijkl}^1 = \mathbf{X}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{U}^{kl} \mathbf{X}_j, \quad (5.109)$$

$$S_{ijkl}^2 = (\mathbf{S} \nabla^i u)^{\mathrm{T}} \mathbf{U}^{kl} (\mathbf{S} \nabla^j u), \quad (5.110)$$

$$S_{ijkl}^3 = (\mathbf{S} \nabla^i u)^{\mathrm{T}} \mathbf{U}^{kl} \mathbf{X}_j. \quad (5.111)$$

A expressão (5.109) fornece seis invariantes para cada matriz simétrica ($\mathbf{U}^{11}$, $\mathbf{U}^{22}$ e $\mathbf{U}^{33}$) e nove invariantes para cada matriz não-simétrica ($\mathbf{U}^{12}$, $\mathbf{U}^{13}$, $\mathbf{U}^{23}$), totalizando 45 invariantes. O mesmo acontecendo com os termos da forma (5.110). A última expressão, (5.111), sendo totalmente não-simétrica fornece nove invariantes para todas as partições (5.108), ou seja 54 invariantes. Estas três expressões constituem então um conjunto de 144 invariantes de $\mathfrak{sp}(6)$ na realização considerada aqui. Segundo a Tabela 5.1 existem mais

27 elementos invariantes numa base para a segunda ordem. Podemos construir produtos, agora quadráticos em $u_{x_i x_j}$, no formato

$$S_{ijkl}^4 = X_i^T U^{kl} S U^{kl} X_j. \quad (5.112)$$

Termos com a matriz U^{kl} simétrica produzem três invariantes para cada matriz totalizando nove invariantes. Os termos com a matriz U^{kl} não-simétrica produzem seis invariantes para cada matriz totalizando 18 invariantes. Desta forma na única expressão (5.112) temos os 27 invariantes que faltam, completando a lista de 171 invariantes que esta base deve ter.

Com este exemplo final estabelecemos um procedimento baseado numa construção matricial, para obtenção explícita de todos os invariantes diferenciais de segunda ordem, e implícita pelo resultado do Teorema 1 para ordens maiores, de álgebras simplécticas realizadas com um número deficiente de bósons—denotando a ausência do *frame* invariante em $J^{(0)}$.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Conclusões

Como descrito com detalhes neste documento, obtivemos diversas equações diferenciais parciais não-lineares que pertencem a uma nova classe. As equações contidas nesta classe possuem a propriedade de invariância segundo transformações simpléticas. De fato, para o caso da álgebra $sp(2j+1)$, realizada com $2j+1$ bósons, fomos capazes de exibir uma base: toda equação diferencial invariante segundo $sp(2j+1)$, seja qual for a ordem, pode ser escrita como um funcional desta base e do produto de ações dos operadores diferenciais invariantes, também fornecidos, nesta base. No caso em que a realização foge do escopo desta prescrição apresentamos um procedimento geral para obtenção desta base de invariantes diferenciais baseado numa observação de casos particulares e implementado explicitamente até segunda ordem para álgebras de baixo *rank* ($j = 1/2, 3/2, 5/2$).

O conteúdo desta base de invariantes diferenciais deve ser também entendida como elementos de uma descrição intrínseca de superfícies invariantes num espaço multidimensional. Este espaço sendo de fato uma extensão ou prolongação de um espaço de fase usual.

É importante fazer uma observação a respeito da classe em que os invariantes obtidos neste projeto se encontram. Apresentamos invariantes de duas naturezas: Diferencial e Conjunta. A natureza conjunta provém da forma pela qual escolhemos realizar as álgebras simpléticas, um produto cartesiano dos espaços vetoriais associados a bósons independentes que acomoda representações mistas. Enquanto que a natureza diferencial é proveniente do processo de prolongação. Esta combinação de propriedades de invariância de um objeto lhe confere o status de multi-invariante, e representa uma teoria em processo de formalização [15]. Os resultados formais desta teoria podem significar uma perspectiva de aplicação até então inexplorada por nós.

Vale no entanto mencionar que existem outras maneiras de realizar a ação do grupo simplético numa dada variedade, que não foram exploradas aqui. Como exemplo, a ação da álgebra simplética $sp(4) \sim so(5)$

pode ser implementada [11] pelos seguintes campos vetoriais

$$\begin{aligned} v_1 &= \partial_u, v_2 = x\partial_u + \partial_p, v_3 = x^2\partial_u + 2x\partial_p, v_4 = u\partial_u + p\partial_p, v_5 = -\partial_x, v_6 = -x\partial_x + p\partial_p, \\ v_7 &= -2p\partial_x - p^2\partial_u, v_8 = -(x^2)\partial_x - 2xu\partial_u + 2u\partial_p, v_9 = (2xp - 2u)\partial_x + xp^2\partial_u + p^2\partial_p \\ v_{10} &= (-4u^2 + x^2p^2)\partial_u + (-4up + 2xp^2)\partial_p + (-4xu + 2x^2p)\partial_x. \end{aligned}$$

Estes campos vetoriais no entanto representam uma transformação num *jet-space* composto por $\{x, u, u_x = p\}$ e portanto mais ampla que as transformações realizadas nesta tese. Um estudo completo deste tipo de transformação passa por uma classificação, ainda por ser efetuada, das possíveis ações simpléticas neste espaço. Portanto uma investigação de invariantes diferenciais com realizações alternativas continua sendo um problema em aberto.

Numa comparação com trabalhos com o mesmo espírito, percebemos que enquanto Fushchich [8] constrói invariantes diferenciais para álgebras do grupo de rotações e suas extensões (Poincaré, Similitude e Conformal) de dimensão qualquer e limita à segunda ordem os seus invariantes diferenciais, Rideau [9] efetua primeiro uma classificação das possíveis realizações para estas álgebras num espaço tridimensional e então produz uma lista de invariantes também de segunda ordem. Com relação a ambos, nossos resultados representam avanços pois conseguimos implementar um algoritmo geral que nos leva aos invariantes além da segunda ordem. Nossas realizações, bem como o procedimento mostrado nesta tese, contemplam qualquer dimensão da álgebra, como em [8], mas não se restringe a realizações da álgebra que permitem somente a construções de representações irredutíveis simétricas: nossas realizações e exemplos não excluem nenhuma representação irredutível da álgebra simplética.

Perspectivas

Estes resultados certamente nos encorajam a repetir todo o processo para as demais famílias de álgebras de Lie (unitárias e a álgebra excepcional G_2) passíveis de serem realizadas no mesmo esquema polinomial com que estamos realizando as álgebras simpléticas [28, 19, 29, 21].

Um estudo exploratório das propriedades simétricas das equações obtidas neste trabalho, como sinalizado no Apêndice C deste documento, deve evidenciar as propriedades de integrabilidade referentes à simetria simplética que estas equações possuem.

As perspectivas dentro deste mesmo tema, que estão de fato compreendidas no estímulo inicial do projeto de pesquisa, percorre naturalmente o programa do estudo de quebra de simetrias por bifurcações genéricas, como presente numa larga classe de problemas (*e.g.* problema de Bérnard esférico e planar) veja por exemplo [30], [31], e mais detalhes deste programa em [32].

Além das perspectivas inerentes ao estudo de sistemas físicos evolutivos com simetria, uma outra área de pesquisa se abre com a compreensão que traz o estudo da descrição geométrica intrínseca de curvas e superfícies, veja (2.29), realizado nesta tese. Existe uma conexão direta de métodos geométricos em

processamento de imagens nos quais invariância é desejada e crucial, como por exemplo reconhecimento intrínseco de formas invariante por operações de um grupo de transformações nas coordenadas da câmera. Estes processos geralmente envolvem um largo conhecimento do comportamento de soluções de equações diferenciais bem como de suas simetrias. Esta conexão deve ser explorada num futuro próximo com o mesmo enfoque realizado nesta tese.

Parte III

Apêndices

Apêndice A

Método das características para EDPs de primeira ordem

O método de solução tradicional [33] para equações do tipo (2.22) é o método das curvas características. Considere uma equação diferencial parcial quasi-linear de primeira ordem dada por

$$P(x, y, \phi(x, y))\phi_x + Q(x, y, \phi(x, y))\phi_y = R(x, y, \phi(x, y)). \quad (\text{A.1})$$

Onde P, Q e R são funções diferenciáveis satisfazendo $P^2 + Q^2 \neq 0$. Suponha que a superfície (solução) $z = \phi(x, y)$ tenha sido determinada e considere os dois vetores $[P, Q, R]$ e $[p = \phi_x, q = \phi_y, -1]$, num ponto qualquer (x, y, z) desta superfície. Como a equação (A.1) indica que o produto escalar entre eles é nulo, os vetores são perpendiculares naquele ponto. Por outro lado a relação

$$d\phi = \phi_x dx + \phi_y dy, \quad (\text{A.2})$$

indica que o vetor $[p, q, -1]$ é sempre normal à superfície $z = \phi(x, y)$. Portanto a equação (A.1) pode ser interpretada geometricamente como um requerimento que qualquer superfície $z = \phi(x, y)$ que passa por um ponto $B(x, y, z)$ deva ser em B tangente à um vetor prescrito $[P, Q, R]$. Ou seja, que $[dx, dy, dz]$ seja para paralelo à $[P, Q, R]$

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad \text{em } B. \quad (\text{A.3})$$

Curvas na superfície $z = \phi(x, y)$, cujo vetor tangente é paralelo a $[P, Q, R]$ determinam as curvas características descritas parametricamente por

$$\frac{dx}{ds} = P(x, y, z), \frac{dy}{ds} = Q(x, y, z), \frac{dz}{ds} = R(x, y, z) \quad (\text{A.4})$$

Os invariantes $I(x)$ de um grupo à um parâmetro satisfazem a equação linear homogênea de primeira ordem

$$v = \sum_i \xi(x)^i \frac{\partial P}{\partial x^i} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Da discussão anterior podemos trocar a equação diferencial parcial (A.5) pelo sistema característico

$$\frac{dx^1}{\xi(x)^1} = \frac{dx^2}{\xi(x)^2} = \frac{dx^m}{\xi(x)^m}. \quad (\text{A.6})$$

A solução geral de (A.6) pode ser localmente escrita na forma $I_1(x) = c_1, \dots, I_{m-1} = c_{m-1}$ onde os c_i são constantes de integração. Para grupos à vários parâmetros, os invariantes são soluções simultâneas de um sistema de equações diferenciais parciais lineares homogêneas de primeira ordem. Um método viável de solução é procurar por invariantes de um gerador e tentar re-expressar os geradores subseqüentes em termos dos invariantes daquele gerador. Por exemplo, considere a ação do grupo unimodular $SL(2)$ em $\mathbb{R}^3$,

$$v_- = 2y\partial_x + z\partial_y, \quad v_0 = -2x\partial_x + 2z\partial_z, \quad v_+ = x\partial_y + 2y\partial_z. \quad (\text{A.7})$$

Resolvendo primeiro para v_0 , integramos $\frac{dx}{-2x} = \frac{dz}{2z}$ e obtemos os invariantes $\omega = xz$ e y . Reescrevemos

$$v_+ = x(\partial_y + 2y\partial_\omega).$$

Logo,

$$v_+ F(\omega, y) = x(F_y + 2yF_\omega) = 0,$$

a qual tem $F = \omega - y^2$ como solução. Pela regra de comutação da álgebra, a invariância segundo v_- é automática. Esse procedimento, no entanto, pode ficar um tanto quanto cansativo de implementar em função do *rank* da álgebra em questão.

Apêndice B

Invariantes diferenciais para $SO(n)$

É interessante notar a forma com que Fushchich e Yegorchenko [8] apresentam os invariantes de $so(n)$ para $n > 3$. Nesta seção nos limitaremos a verificar a validade dos resultados para $n = 3$ e ressaltar a conexão dessa estratégia com nossos objetivos no caso simplético. Neste artigo, a rota para a obtenção de equações invariantes se resume na construção de tensores covariantes como veremos a seguir.

Os geradores da álgebra do grupo de rotações para $n > 3$ são realizados por

$$J_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x_b} - x_b \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad (B.1)$$

e, explicitamente para $n = 3$,

$$J_{xy} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad (B.2)$$

$$J_{yz} = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, \quad (B.3)$$

$$J_{zx} = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}. \quad (B.4)$$

As prolongações de segunda ordem são dadas por¹:

$$\hat{J}_{xy} = J_{xy} - u_x \frac{\partial}{\partial u_y} - u_y \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{yx}} + 2u_{xy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + u_{xz} \frac{\partial}{\partial u_{yz}} - 2u_{xy} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} - u_{yy} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} - u_{yz} \frac{\partial}{\partial u_{xz}}, \quad (B.5)$$

e expressões semelhantes para $\hat{J}_{yz}$ e $\hat{J}_{zx}$. Usaremos, para expressar os invariantes, a seguinte denominação:

$$u_a \equiv \frac{\partial u}{\partial x_a}, u_{ab} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_a \partial x_b}, \quad (B.6)$$

$$S_k(u_{ab}) \equiv u_{a_1 a_2} u_{a_2 a_3} \dots u_{a_{k-1} a_k} u_{a_k a_1}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (B.7)$$

$$S_{jk}(u_{ab}, v_{ab}) \equiv u_{a_1 a_2} \dots u_{a_{j-1} a_j} v_{a_j a_{j+1}} \dots v_{a_k a_1}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (B.8)$$

$$R_k(u_a, u_{ab}) \equiv u_{a_1} u_{a_k} u_{a_1 a_2} u_{a_2 a_3} \dots u_{a_{k-1} a_k}. \quad (B.9)$$

¹Existe um erro menor no artigo [8] Eq. (1.5), onde o autor, numa tentativa de expressar as prolongações de maneira concisa, erra por um fator 2.

Nestas expressões, soma em índices repetidos devem ser subentendidas de 1 a n . Não se discerne índices latinos pela sua posição,

$$x_a x_a \equiv x_a x^a \equiv x^a x_a \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2. \quad (\text{B.10})$$

Os invariantes para um conjunto de funções escalares $u^r, r = 1, 2, \dots, m$, podem sempre ser representados como funções quaisquer das expressões

$$S_{jk}(u_{ab}^1, u_{ab}^r), R_k(u_a^r, u_{ab}^1). \quad (\text{B.11})$$

Considere o caso com $n = 3$ e $r = 1$. Temos as seguintes expressões para S_k :

$$\begin{aligned} S_1(u_{ab}) &= u_{a_1 a_1} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \\ S_2(u_{ab}) &= u_{a_1 a_2} u_{a_2 a_1} = u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2 + 2(u_{xy}^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2), \\ S_3(u_{ab}) &= u_{a_1 a_2} u_{a_2 a_3} u_{a_3 a_1} = u_{xx}^3 + u_{yy}^3 + u_{zz}^3 + 3u_{xx}u_{xy}^2 + 3u_{xx}u_{xz}^2 + 3u_{yy}u_{yz}^2 + 3u_{yy}u_{xy}^2 \\ &\quad + 3u_{zz}u_{xz}^2 + 3u_{zz}u_{yz}^2 + 6u_{xy}u_{yz}u_{zx}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

É interessante verificar a forma em que de fato $\hat{J}_{ab}S_k = 0$. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \hat{J}_{xy}S_1(u_{ab}) &= 2u_{xy}1 - 2u_{xy}1 = 0, \\ \hat{J}_{xy}S_2(u_{ab}) &= u_{xx}4u_{xy} + 2u_{xy}2u_{yy} + u_{xz}4u_{yz} - 2u_{xy}2u_{xx} - u_{yy}4u_{xy} - u_{yz}4u_{xz} = 0, \\ \hat{J}_{xy}S_3(u_{ab}) &= u_{xx}\{3u_{xx}2u_{xy} + 3u_{yy}2u_{xy} + 6u_{yz}u_{zx}\} + 2u_{xy}\{3u_{yy}^2 + 3u_{yz}^2 + 3u_{xy}^2\} \\ &\quad + u_{xz}\{3u_{yy}2u_{yz} + 3u_{zz}2u_{yz} + 3u_{xy}2u_{zx}\} - 2u_{xy}\{3u_{xx}^2 + 3u_{xy}^2 + 3u_{xz}^2\} \\ &\quad - u_{yy}\{3u_{xx}2u_{xy} + 3u_{yy}2u_{xy} + 3u_{yz}2u_{zx}\} - u_{yz}\{3u_{xx}2u_{xz} + 3u_{zz}2u_{xz} + 3u_{xy}2u_{yz}\} = 0. \end{aligned}$$

E de forma similar $\hat{J}_{yz}$ e $\hat{J}_{zx}$ produzem também ações nulas. Repetindo o processo para R_k temos,

$$\begin{aligned} R_1(u_a, u_{ab}) &= u_{a_1} u_{a_1} = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2, \\ R_2(u_a, u_{ab}) &= u_{a_1} u_{a_2} u_{a_1 a_2} = u_x^2 u_{xx} + u_y^2 u_{yy} + u_z^2 u_{zz} + 2u_x u_y u_{xy} + 2u_x u_z u_{xz} + 2u_y u_z u_{yz}, \\ R_3(u_a, u_{ab}) &= u_{a_1} u_{a_3} u_{a_1 a_2} u_{a_2 a_3} = u_x^2 u_{xy}^2 + u_x^2 u_{xz}^2 + u_y^2 u_{xy}^2 + u_y^2 u_{yz}^2 + u_z^2 u_{xz}^2 + u_z^2 u_{yz}^2 + u_x^2 u_{xx}^2 + u_y^2 u_{yy}^2 + u_z^2 u_{zz}^2 \\ &\quad + 2\{u_x u_y u_{xz} u_{zy} + u_x u_z u_{xy} u_{yz} + u_y u_z u_{yx} u_{xz}\} + 2\{u_x u_y u_{xy} u_{yy} + u_y u_z u_{yz} u_{zz} + u_z u_x u_{zx} u_{xx}\} \\ &\quad + 2\{u_x u_y u_{xy} u_{xx} + u_y u_z u_{yz} u_{yy} + u_z u_x u_{zx} u_{zz}\}. \end{aligned}$$

Como outro exemplo, a ação de $\hat{J}_{ab}R_k$ fornece,

$$\begin{aligned}
\hat{J}_{xy}R_1 &= u_x 2u_y - u_y 2u_x = 0, \\
\hat{J}_{xy}R_2 &= u_x \{2u_x u_{xy} + 2u_y u_{yy} + 2u_z u_{yz}\} - u_y \{2u_x u_{xx} + 2u_y u_{xy} + 2u_z u_{xz}\} + u_{xx} \{2u_x u_y\} \\
&\quad + 2u_{xy} \{u_y^2\} + u_{xz} \{2u_y u_z\} - 2u_{xy} \{u_x^2\} - u_{yy} \{2u_x u_y\} - u_{yz} \{2u_x u_z\} = 0, \\
\hat{J}_{xy}R_3 &= 2u_x \{u_y u_{xy}^2 + u_y u_{yz}^2 + u_y u_{yy}^2 + u_x u_{xz} u_{xy} + u_x u_{xy} u_{yy} + u_x u_{xy} u_{xx} + u_z u_{yx} u_{xz} + u_z u_{yz} u_{zz} + u_z u_{yz} u_{yy}\} \\
&\quad - 2u_y \{u_x u_{xy}^2 + u_x u_{xz}^2 + u_x u_{xx}^2 + u_y u_{yz} u_{zy} + u_y u_{xy} u_{xx} + u_y u_{xy} u_{yy} + u_z u_{yx} u_{yz} + u_z u_{xz} u_{zz} + u_z u_{xz} u_{xx}\} \\
&\quad + 2(u_{xx} - u_{yy}) \{u_x^2 u_{xy} + u_y^2 u_{xy} + u_x u_z u_{yz} + u_x u_y u_{yy} + u_y u_z u_{xz} + u_x u_y u_{xx}\} \\
&\quad + 4u_{xy} \{u_y^2 u_{yy} + u_x u_y u_{xy} + u_y u_z u_{yz}\} - 4u_{xy} \{u_x^2 u_{xx} + u_z u_x u_{xz} + u_x u_y u_{xy}\} \\
&\quad + 2u_{xz} \{u_y^2 u_{yz} + u_z^2 u_{yz} + u_x u_y u_{xz} + u_x u_z u_{xy} + u_y u_z u_{zz} + u_y u_z u_{yy}\} \\
&\quad - 2u_{yz} \{u_x^2 u_{xz} + u_z^2 u_{xz} + u_x u_y u_{zy} + u_y u_z u_{yx} + u_x u_z u_{xx} + u_z u_x u_{zz}\} = 0.
\end{aligned}$$

É interessante notar que as expressões para os invariantes $S_k(u_{ab})$ e $R_k(u_a, u_{ab})$ acima podem ser escritas em termos da matriz $U = (u_{ab})$ e suas potências e do vetor $u_a = (u_1, \dots, u_n)$:

$$S_k(u_{ab}) = \text{Tr}(U^k), \quad R_k(u_a, u_{ab}) = (u_a)U^{k-1}(u_a)^T. \quad (\text{B.13})$$

Desta maneira, separamos os invariantes de acordo com a potência em que as derivadas aparecem. Estes resultados podem ser usados para a obtenção de bases de invariantes da ação de grupos que contenham o grupo de rotação como subgrupo. Teremos interesse em detalhes desta abordagem na parte do projeto que concernem à bifurcações.

Numa comparação com Rideau *et al* [9], apenas uma realização, se bem que de dimensão arbitrária, das álgebras no *jet-space* foi levada em consideração por Fushchich *et al* [8]. Da maneira apresentada, esses resultados ilustram como seria uma forma geral e compacta para expressar os invariantes simpléticos que procuramos. Contudo apresentados na forma de teoremas, estes resultados não estabelecem uma rota sistemática para a produção de tensores covariantes segundo a ação prolongada do grupo.

Apêndice C

Simetria em Equações Diferenciais

C.1 Preliminares

Elaboramos na primeira seção deste anexo uma introdução à exploração de simetrias em equações diferenciais que não exige formalismo nenhum, porém exigindo extensa manipulação algébrica. Esta seção foi totalmente baseada nas referências [27] e [34], com a diferença que não usamos o procedimento moderno [10] e [27] para determinar o sistema de equações que definem as simetrias possíveis. Este exemplo fornece uma idéia imediata, mas de forma alguma completa, da razão do interesse que temos em equações que exibem um certo grau de simetria.

Na segunda seção deste anexo reproduzimos quase que integralmente a monografia apresentada para o Exame de Qualificação do IFSC, pelo fato deste trabalho esclarecer e também justificar a necessidade da formalização utilizada na procura por invariantes diferenciais utilizando métodos geométricos que representa o produto principal desta tese de doutoramento. Este trabalho de qualificação, aprovado pela banca examinadora em 21/12/2001, consiste na análise de um método direto para obter invariantes diferenciais para sistemas Hamiltonianos não-autônomos [35]. A conexão com o método geométrico que implementamos no trabalho de tese fica estabelecida com a aplicação do teorema de Noether no final desta seção.

Nesta primeira seção investigamos de uma maneira *artesanal* as simetrias da equação diferencial parcial para uma onda num meio não homogêneo. A intenção aqui é de estimular uma introdução heurística no campo das operações de simetrias, sem contudo engendrar pelo o formalismo abstrato que facilita e potencializa este estudo.

Este procedimento artesanal difere do usual na literatura por envolver um tratamento direto e intuitivo na obtenção do sistema de equações que determinam as simetrias de uma dada equação diferencial. Este procedimento, apesar de muito tedioso, quando feito com a ajuda de um programa de computador pode ser muito ilustrativo. De fato, logo de início se percebe o valor da extensa formalização empreendida nos últimos anos num esforço para simplificar os cálculos, ou pelo menos organizá-los, numa maneira mais

eficiente de se implementar numa rotina algébrica genérica.

Nesta simples incursão presenciaremos a eficiência do uso da invariância da equação dada em oferecer um *menu* de soluções exatas e possuidoras de propriedades de simetria.

Quando confrontado com uma equação parcial não linear, temos à disposição um enorme catálogo de algoritmos numéricos com os quais soluções bastante precisas podem ser obtidas com custo computacional moderado na maioria dos casos. Contudo a existência de soluções exatas fornece uma referência segura para rotinas de integração, além da visão global do papel dos parâmetros num dado sistema.

Começamos esta investigação considerando a equação de onda

$$c(x)^2 u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad (\text{C.1})$$

e a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + \epsilon \xi(x, t) + O(\epsilon^2) \\ \bar{t} &= t + \epsilon \tau(x, t) + O(\epsilon^2) \\ \bar{u} &= u + \epsilon f(x, t)u + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Procuramos por funções $\xi(x, t)$, $\tau(x, t)$, $f(x, t)$ que deixam a equação (C.1) invariante. Portanto devemos exigir que

$$c(\bar{x})^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2}. \quad (\text{C.3})$$

Da regra da cadeia, obtemos para uma função $z = F(\bar{x}(x, t), \bar{t}(x, t))$ as relações

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial t}, \quad (\text{C.4})$$

que determinam a matriz

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} & \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Invertendo estas relações acima temos

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{x}} = A \frac{\partial z}{\partial x} + B \frac{\partial z}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{t}} = C \frac{\partial z}{\partial x} + D \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (\text{C.5})$$

Onde A , B , C e D são funções somente de x e t e não de z ,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = T^{-1}.$$

Derivando novamente, obtemos, por exemplo

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ A \frac{\partial z}{\partial x} + B \frac{\partial z}{\partial t} \right\} = A \frac{\partial}{\partial x} \left\{ A \frac{\partial z}{\partial x} + B \frac{\partial z}{\partial t} \right\} + B \frac{\partial}{\partial t} \left\{ A \frac{\partial z}{\partial x} + B \frac{\partial z}{\partial t} \right\}. \quad (\text{C.6})$$

Usando as duas primeiras relações em (C.2), mantendo somente a primeira ordem em ϵ obtemos, a menos de um fator G comum às duas expressões

$$G \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \epsilon \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\xi_x + 3\tau_t) - 2\tau_x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \xi_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial t} \right\} + O(\epsilon^2) \quad (C.7)$$

$$G \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \epsilon \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (3\xi_x + \tau_t) - 2\xi_t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \xi_{tt} \frac{\partial u}{\partial x} - \tau_{tt} \frac{\partial u}{\partial t} \right\} + O(\epsilon^2). \quad (C.8)$$

Expandindo a função $c(\bar{x})^2$ em torno de x , temos

$$c(\bar{x})^2 = 1 + \frac{d(c^2)}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=x} (\bar{x} - x)^1 + O((\bar{x} - x)^2) \quad (C.9)$$

$$= 1 + 2c(x)c'(x)\epsilon\xi. \quad (C.10)$$

Nosso problema se resume em impor que, em primeira ordem, a equação (C.3) se verifique, ou seja

$$(1 + 2c(x)c'(x)\epsilon\xi) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \epsilon(\dots) \right\} (1 + \epsilon f)u(x, t) = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \epsilon(\dots) \right\} (1 + \epsilon f)u(x, t). \quad (C.11)$$

Obtemos então, igualando os coeficientes dos monômios $(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt})$ e reconhecendo $u_{tt} = c(x)^2 u_{xx}$, as seguintes relações impostas sobre as funções $\xi(x, t), \tau(x, t), f(x, t)$:

$$u_{xt} \rightsquigarrow \xi_t - c^2 \tau_x = 0, \quad (C.12)$$

$$u_{xx} \rightsquigarrow c(\tau_t - \xi_x) + c'\xi = 0, \quad (C.13)$$

$$u_t \rightsquigarrow \tau_{tt} - 2f_t - c^2 \tau_{xx} = 0, \quad (C.14)$$

$$u_x \rightsquigarrow \xi_{tt} + c^2(2f_x - \xi_{xx}) = 0, \quad (C.15)$$

$$u \rightsquigarrow f_{tt} - c^2 f_{xx} = 0. \quad (C.16)$$

Este sistema de equações, obtido aqui de maneira intuitiva, é o mesmo sistema que seria obtido, usando o conceito mais sofisticado de prolongação da ação de um grupo com geradores dados por

$$v = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (C.17)$$

A prolongação de campos vetoriais desta natureza tem a forma

$$\text{pr}^{(2)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}, \quad (C.18)$$

onde os coeficientes $\phi^x, \dots, \phi^{tt}$ são dados pela fórmula geral 2.13. por exemplo,

$$\begin{aligned} \phi^{xx} &= D_x^2(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} \\ &= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_xu_t - \xi_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2u_t \\ &\quad + (\phi_u - 2\xi_x)u_xx - 2\tau_xu_{xt} - 3\xi_uu_xu_{xx} - \tau_uu_tu_{xx} - 2\tau_{uu}u_xu_xx. \end{aligned}$$

O procedimento agora consiste em aplicar a condição de invariância 2.22 para a equação C.1 e coletar os termos associados as coordenadas do jet-space $(u_x, \dots, u_{tt})$. Assim o mesmo sistema de equações é produzido.

Este sistema de equações parciais não impõe dificuldades para um cálculo manual. Começemos pela equação (C.12) e (C.13) de onde tiramos, igualando as derivadas cruzadas de τ e ξ ,

$$\xi_{xx} - \frac{\xi_{tt}}{c^2} - [H\xi]_x = 0, \quad H = c'/c, \quad (\text{C.19})$$

$$H\xi_t = \tau_{tt} - c^2\tau_{xx} \quad (\text{C.20})$$

Usando (C.15) em (C.19), obtemos

$$f = \frac{H\xi}{2} + s(t). \quad (\text{C.21})$$

Usando (C.14) e (C.20), percebemos que na verdade $s(t) = \text{const} = s$ e portanto

$$f = \frac{H\xi}{2} + s. \quad (\text{C.22})$$

Desta expressão obtemos as derivadas segundas de f , f_{xx} e f_{tt} , e as substituímos em (C.16), obtendo

$$H\xi_{tt} - c^2(H_{xx}\xi + 2H_x\xi_x + \xi_{xx}H) = 0. \quad (\text{C.23})$$

Usando a relação (C.19), obtemos após alguns rearranjos

$$\frac{d}{dx} \{ (2H_x + H^2)\xi^2 \} = 0. \quad (\text{C.24})$$

Deve ser mantido em mente que procuramos quatro funções, a velocidade $c(x)$ e as funções $\xi(x, t)$, $\tau(x, t)$, $f(x, t)$, tais que a equação de onda fique invariante. Para cada forma da velocidade $c(x)$ teremos um conjunto de funções $\xi(x, t)$, $\tau(x, t)$, $f(x, t)$ à determinar. Temos portanto três casos a considerar mas para a argumentação desenvolvida aqui basta um caso particular, com complexidade suficiente, para ilustrar o mecanismo do uso de simetrias que queremos enfatizar.

Caso particular: $2H_x + H^2 \neq 0$, $\xi \neq 0$

Observe que podemos separar a dependência funcional de $\xi(x, t)$

$$\xi = \alpha(x)\beta(t), \quad (\text{C.25})$$

desde que $\alpha(x)$ satisfaça

$$\alpha^2 = (2H_x + H^2)^{-1}. \quad (\text{C.26})$$

Isto implica, pela equação (C.24), na igualdade

$$\frac{d}{dx} \{ \beta(t)^2 \} = 0, \quad (\text{C.27})$$

que é sempre verdadeira. Usando $f = \frac{H\xi}{2} + s$ e $\xi = \alpha\beta$ em (C.15), obtemos

$$\frac{\beta_{tt}}{\beta} = \frac{c^2}{\alpha} \{ (\alpha_x - H\alpha)_x \} = \sigma^2 = \text{const}. \quad (\text{C.28})$$

Novamente enfrentamos dois casos: $\sigma = 0$ ou $\sigma \neq 0$. Consideremos somente o caso $\sigma = 0$. Desta maneira temos as relações

$$\frac{\beta_{tt}}{\beta} = 0 \Rightarrow \beta = p + qt, \quad \alpha_x = H\alpha + C. \quad (\text{C.29})$$

De $f = \frac{H\xi}{2} + s$ e de $f_{tt} - c^2 f_{xx} = 0$, lembrando que $H = \frac{c'}{c}$, temos

$$(H\alpha)_{xx} = 0 \Rightarrow H\alpha = A + 2Bx, \quad (\text{C.30})$$

onde A e B são constantes de integração. Portanto, de (C.29),

$$\alpha_x = (A + 2Bx) + C. \quad (\text{C.31})$$

Logo, por integração direta,

$$\alpha = Bx^2 + (A + C)x + D. \quad (\text{C.32})$$

E finalmente, com uma redefinição da constante arbitrária C , obtemos

$$H = \frac{c'}{c} = \frac{A + 2Bx}{Bx^2 + Cx + D}. \quad (\text{C.33})$$

Então, para uma velocidade de propagação inhomogênea da forma

$$c(x) = (Bx^2 + Cx + D)e^{(A-C) \int \frac{dx}{Bx^2 + Cx + D}}, \quad (\text{C.34})$$

calculamos agora as funções $\xi(x, t)$, $\tau(x, t)$, $f(x, t)$ que determinam a simetria que procuramos neste caso. Sabendo α e H , usando $\xi = \alpha\beta$ e $f = \frac{H\xi}{2} + s$, obtemos ξ e f :

$$\xi = (Bx^2 + Cx + D)(p + qt) \quad f = \frac{1}{2}(A + 2Bx)(p + qt) + s. \quad (\text{C.35})$$

A função τ pode ser obtida diretamente de (C.12):

$$\tau = \int \frac{\xi_t}{c^2} dx + K(t). \quad (\text{C.36})$$

Substituindo os resultados anteriores em (C.13) obtemos,

$$\tau_t = \xi_x - H\xi = (p + qt)(2Bx + C) - 2f - s = (p + qt)(C - A) \quad (\text{C.37})$$

$$K'(t) = (p + qt)(C - A) \Rightarrow K(t) = (C - A)(pt + \frac{qt^2}{2}) + r. \quad (\text{C.38})$$

E por fim, obtemos

$$\tau = \int \frac{q(Bx^2 + Cx + D)}{c^2} dx + (C - A)(pt + \frac{qt^2}{2}) + r. \quad (\text{C.39})$$

Como nossa intenção aqui é chegar, de maneira direta, aos resultados que se pode obter explorando simetrias, devemos ter em mente que estamos buscando sempre soluções particulares no universo de todas possibilidades. Na próxima seção examinamos as conseqüências de se tomar uma forma particular da velocidade $c(x)$.

C.2 Invariância Infinitesimal

Considere um operador do tipo

$$L = \xi(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t) \frac{\partial}{\partial t} + f(x, t) u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (\text{C.40})$$

Notemos que dada uma função $F(x, t, u)$, se $LF = 0$ então, em primeira ordem, devemos ter

$$e^{\epsilon L} F = \{1 + \epsilon L + O(\epsilon^2)\} F = F. \quad (\text{C.41})$$

A condição $LF = 0$ é denominada condição infinitesimal de invariância. Para o caso onde $c(x) = (Bx^2 + Cx + D)e^{(A-C) \int \frac{dx}{Bx^2 + Cx + D}}$, construímos os seguintes operadores, etiquetados pelas constantes de integração $\{p, q, r, s\}$:

$$L_p = (Bx^2 + Cx + D) \frac{\partial}{\partial x} + (C - A)t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}(A + 2Bx)u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (\text{C.42})$$

$$L_q = t(Bx^2 + Cx + D) \frac{\partial}{\partial x} + \left\{ \frac{1}{2}(C - A)t^2 + \int \frac{Bx^2 + Cx + D}{c^2} dx \right\} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}t(A + 2Bx)u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (\text{C.43})$$

$$L_r = \frac{\partial}{\partial t}, \quad L_s = u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (\text{C.44})$$

Estes operadores formam uma álgebra de Lie, caracterizada pelas seguintes regras de comutação

$$[L_p, L_q] = (C - A)L_q, \quad [L_q, L_r] = L_p, \quad (\text{C.45})$$

$$[L_p, L_r] = (A - C)L_r, \quad [L_{\{pqr\}}, L_s] = 0. \quad (\text{C.46})$$

Esta álgebra consiste de operações infinitesimais associadas a um grupo de transformações contínuas que age num espaço de coordenadas (x, t, u) . A transformação mais genérica deste grupo é implementada pela composição

$$e^{\epsilon(qL_q + pL_p + rL_r + sL_s)}. \quad (\text{C.47})$$

C.3 Soluções Por Similaridade

Como exemplo de prático de obtenção de soluções simétricas, consideramos um caso simples onde a velocidade tem forma linear $c(x) = Ax + B$. Temos os geradores

$$L_p = (Ax + B) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}Au \frac{\partial}{\partial u}, \quad (\text{C.48})$$

$$L_q = t(Ax + B) \frac{\partial}{\partial x} + \left\{ \frac{1}{A} \ln(Ax + B) \right\} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}tAu \frac{\partial}{\partial u}, \quad (\text{C.49})$$

$$L_r = \frac{\partial}{\partial t}, \quad L_s = u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (\text{C.50})$$

Procuramos por soluções da equação de onda invariantes segundo uma classe de transformações obtida quando tomamos os parâmetros, $p = r = 0$, $q = 1$, e s arbitrário. Ou seja, produzimos a transformação contínua

$$L_q + sL_s \Rightarrow e^{\epsilon(L_q + sL_s)}. \quad (\text{C.51})$$

A equação de onda mais simples neste caso é, tomando $A = 1$ e $B = 0$ $x^2 u_{xx} = u_{tt}$. Impomos sua invariância da equação segundo a transformação induzida pelo campo vetorial particular

$$v = 2xt \frac{\partial}{\partial x} + 2 \ln(x) \frac{\partial}{\partial t} + u(t+2s) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (\text{C.52})$$

Funções de (x, t, u) invariantes sob a ação de v correspondem (Apêndice A) as soluções do sistema característico

$$\frac{dx}{2tx} = \frac{dt}{2 \ln(x)} = \frac{du}{(t+2s)u}. \quad (\text{C.53})$$

Da primeira igualdade temos $z = t^2 - \ln(x)^2$. Passando para a segunda igualdade

$$\int \frac{(t+2s)dt}{2\sqrt{(t^2-z)}} = \frac{du}{u}, \quad (\text{C.54})$$

temos

$$\frac{\sqrt{(t^2-z)}}{2} + s \ln(t + \sqrt{(t^2-z)}) + F(z; s) = \ln(u). \quad (\text{C.55})$$

Ou seja

$$u = x^{\frac{1}{2}} |\ln(x) + t|^s F(z; s). \quad (\text{C.56})$$

Agora, a exigência que $u(x, t)$ satisfaça a equação de onda $x^2 u_{xx} = u_{tt}$ impõe que $F(z; s)$ satisfaça a seguinte equação diferencial ordinária

$$16z^2 F_{zz} + 16(1+s)z F_z - zF = 0. \quad (\text{C.57})$$

e portanto as soluções da equação de onda invariantes por operações de simetria induzidas por (C.52), o que chamamos de soluções simétricas, são dadas por $u = x^{\frac{1}{2}} |\ln(x) + t|^s F(z; s)$ onde $F(z; s)$ se expressa em termos das funções de Bessel J e Y

$$F(z; s) = C_1 z^{-1/2s} J(s, 1/2 \sqrt{z}) + C_2 z^{-1/2s} Y(s, 1/2 \sqrt{z}) \quad (\text{C.58})$$

Existe claramente um campo enorme para questionamentos que não mencionaremos aqui. Aspectos da classificação de soluções simétricas em classes de equivalência, tanto em relação as possíveis combinações dos parâmetros p, q, r, s quanto às várias formas equivalentes da velocidade $c(x)$ foram omitidos. Tais classificações compreendem todas as formas simétricas das correspondentes soluções exatas e podem ser encontradas na referência [27], [34] junto com a discussão de formas particulares da velocidade $c(x)$ que representam sistemas físicos interessantes porém tratáveis exatamente.

Para explorarmos um pouco mais as simetrias de uma equação diferencial, mesmo que ainda neste procedimento informal, mencionamos um fato que poderia ser considerado negativo: a simetria das equações diferenciais dependem da forma como elas são escritas, mesmo que representem o mesmo sistema físico. Portanto abrimos um leque para explorar simetrias de uma forma que não são simetrias de outra forma da mesma equação levando a soluções exatas e não simétricas. Consideremos à equação de onda

$$c(x)^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad (\text{A})$$

o seguinte sistema associado

$$v_t = u_x, \quad v_x = \frac{u_t}{c(x)^2}. \quad (\text{B})$$

E ainda uma equação relacionada importante,

$$(c(x)^2 v_x)_x - v_{tt} = 0. \quad (\text{C})$$

Vários problemas físicos levam à estas equações. Equação A é familiar no estudo de pequenas vibrações transversas numa corda de densidade variável, o sistema B aparece no estudo de linhas de transmissão com capacitância ou resistência variável, e equação C no estudo de pequenas vibrações longitudinais de uma barra com módulo de Young variável, [27]. Estas equações são equivalentes no seguinte sentido:

- Se $\{u, v\}$ satisfazem B então u resolve A e v resolve C.
- Se $u = F$ satisfaz A então $(u, v) = (F_t, F_x)$ resolve B e $v = F_x$ resolve C.
- Se $v = G$ satisfaz C então $(u, v) = (c^2 G_x, G_t)$ resolve B e $u = c^2 G_x$ resolve A.

Apesar equivalência de uma única EDP e seu correspondente sistema de EDP's não segue necessariamente que seus respectivos grupos de invariância por transformações pontuais sejam os mesmos. De fato o que pode ocorrer é que soluções por similaridade de um sistema de EDP's levam à soluções não invariantes da correspondente equação única, e vice e versa. Este fato abre o leque de possibilidades na produção de soluções exatas, simétricas ou não, de equações parciais pela exploração de simetrias das diversas formas que estas equações apresentam.

Apêndice D

Constantes de Movimento em Sistemas Hamiltonianos

D.1 Introdução

Obter invariantes ou constantes de movimento é um objetivo *per-si* no estudo de sistemas físicos descritos pelo formalismo Hamiltoniano. Se tivermos sucesso em isolar uma grandeza conservada, por qualquer método, associado a ela sempre encontraremos alguma propriedade fundamental do sistema. No caso mais direto de um sistema autônomo, a própria função Hamiltoniana se mostra invariante, evidenciando a propriedade de conservação de energia ao longo da evolução deste sistema.

Contudo, como é o caso da vasta maioria dos sistemas físicos reais, o Hamiltoniano pode mostrar uma dependência temporal explícita minando assim esta rota que imediatamente leva à uma grandeza conservada.

Um dos primeiros mecanismos para a obtenção de constantes de movimento para sistemas com dependência temporal explícita faz uso das conclusões do trabalho de *Emmy Amalie Noether* [18], que relaciona grandezas conservadas de um sistema Lagrangiano à um grupo contínuo de transformações agindo num espaço de fase estendido ou prolongado, que deixa a integral de ação invariante. Às críticas a esta abordagem são fundamentadas na visão de que este procedimento é prolixo, [36]. Esta argumentação procede certamente quando é o caso de não se ter interesse na álgebra associada do grupo de transformações ou se o grupo de transformações é desinteressante por si mesmo.

Nosso objetivo nas próximas seções é mostrar alguns métodos de obtenção para uma classe de sistemas não autônomos. Com isso esperamos lidar de forma heurística com a crescente necessidade de uma linguagem formal e abrangente que contemple os aspectos geométricos da idéia de invariância sem contudo desviar a atenção de problemas mais simples onde estes aspectos já ocorrem, mesmo que indiretamente, como veremos adiante.

D.2 Método direto

Nesta seção, procuramos seguir os passos dados pelos autores de um PRL recente [35] para a obtenção de uma constante do movimento para um sistema de N partículas idênticas, carregadas, e sob a influência de um potencial confinador. Considere o movimento não relativístico de N partículas de mesma espécie governado pelo Hamiltoniano

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2} + V(\{x\}, t), \quad (\text{D.1})$$

onde os parênteses em $\{x\} = x_1, \dots, x_N$ indicam todas as coordenadas do espaço de configuração, considerado por ora N -dimensional. A evolução deste sistema é descrita pelo conjunto de equações canônicas

$$\dot{x}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial V(\{x\}, t)}{\partial x_i}. \quad (\text{D.2})$$

Investigamos, seguindo o *ansatz* dos autores, a existência de uma função escalar que seja invariante durante a evolução do sistema, com a seguinte dependência funcional

$$I = \sum_i [f_2(t)p_i^2 + f_1(x_i, t)p_i] + f_0(\{x\}, t). \quad (\text{D.3})$$

A invariância de $I = I(\{x\}, \{p\}, t)$ é garantida se

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \sum_i \left[\frac{\partial I}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial I}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] = 0. \quad (\text{D.4})$$

O conjunto de funções que compreendem o *ansatz*, $\{f_2, f_1, f_0\}$, e que devem conduzir I à invariância, precisa ser determinado. Com as equações de movimento (D.2), a invariância de (D.3) determinada por (D.4) significa explicitamente

$$\sum_i \left[p_i^2 \frac{df_2}{dt} + p_i \frac{\partial f_1}{\partial t} + p_i^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - (2p_i f_2 + f_1) \frac{\partial V}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial f_0}{\partial t} = 0. \quad (\text{D.5})$$

A estratégia agora é investigar se é possível eliminar as funções f_0 e f_1 contidas em (D.5), transferindo as atribuições arbitrárias à função f_2 . Tendo isso em mente, organizamos a equação (D.5) segundo potências dos momenta p_i obtendo

$$\sum_i \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{df_2}{dt} \right\} p_i^2 + \sum_i \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - 2f_2 \frac{\partial V}{\partial x_i} \right\} p_i + \frac{\partial f_0}{\partial t} - \sum_i f_1 \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0. \quad (\text{D.6})$$

A equação (D.6) é satisfeita se exigirmos que os coeficientes das potências de p_i sejam nulos para cada partícula. Dos termos quadráticos em p_i ,

$$\dot{f}_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_i} = 0, \quad (\text{D.7})$$

observamos, integrando (D.7), que f_1 deve ser no máximo linear em x_i

$$f_1(x_i, t) = -\dot{f}_2(t)x_i + b_{x_i}(t), \quad (\text{D.8})$$

onde a constante de integração $b_{x_i}(t)$ é uma função arbitrária do tempo. Dos termos lineares nos momenta temos

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = 2f_2 \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\partial f_0}{\partial x_i}, \quad (\text{D.9})$$

e por outro lado, derivando parcialmente (D.8) obtemos

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = -\ddot{f}_2 x_i + \dot{b}_{x_i}. \quad (\text{D.10})$$

De (D.9) e (D.10), isolamos a função ainda desconhecida $f_0(\{x\}, t)$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i} = -\dot{b}_{x_i} + \ddot{f}_2 x_i + 2f_2 \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad (\text{D.11})$$

de onde integrando, encontramos

$$f_0 = 2f_2 V + \sum_i \left\{ \frac{x_i^2}{2} \ddot{f}_2 - \dot{b}_{x_i} x_i \right\} + c(t). \quad (\text{D.12})$$

Estratégia cumprida, temos (f_0, f_1) se soubermos f_2 . A procura agora é por uma equação diferencial para f_2 . Dos coeficientes que acompanham p_i^0 , escrevemos usando (D.8)

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \sum_i \left[\dot{f}_2(t) x_i - b_{x_i}(t) \right] \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0. \quad (\text{D.13})$$

Para eliminar a função f_0 de (D.13), derivamos (D.12) parcialmente com relação ao tempo

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = 2f_2 \frac{\partial V}{\partial t} + 2\dot{f}_2 V + \sum_i \left[\frac{x_i^2}{2} \ddot{f}_2 - \ddot{b}_{x_i} x_i \right] + \dot{c}(t). \quad (\text{D.14})$$

Inserindo esta expressão em (D.13) temos finalmente uma equação diferencial que determina $f_2(t)$,

$$\begin{aligned} 2f_2 \frac{\partial V}{\partial t} + 2\dot{f}_2 V + \sum_i \left[\frac{x_i^2}{2} \ddot{f}_2 - \ddot{b}_{x_i} x_i \right] + \sum_i \left[\dot{f}_2 x_i - b_{x_i} \right] \frac{\partial V}{\partial x_i} + \dot{c}(t) &= 0, \quad \text{ou} \\ 2f_2 \frac{\partial V}{\partial t} + 2\dot{f}_2 V + \sum_i \left[\frac{x_i^2}{2} \ddot{f}_2 + \dot{f}_2 \left(x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \right] + \sum_i \left[b_{x_i} \ddot{x}_i - \ddot{b}_{x_i} x_i \right] + \dot{c}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Nesta expressão, $b_{x_i}(t)$ aparece como uma função independente de f_2 dependendo arbitrariamente de t pela sua definição como constante de integração em (D.8). O mesmo acontecendo com $c(t)$ pela sua definição como constante de integração em (D.12). Portanto a última soma em (D.15) assim como $\dot{c}(t)$ devem ser igual a zero separadamente.

$$2f_2 \frac{\partial V}{\partial t} + 2\dot{f}_2 V + \sum_i \left[\frac{x_i^2}{2} \ddot{f}_2 + \dot{f}_2 \left(x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \right] = 0, \quad (\text{D.16})$$

$$\sum_i \left[b_{x_i} \ddot{x}_i - \ddot{b}_{x_i} x_i \right] = 0 \quad (\text{D.17})$$

$$\dot{c}(t) = 0. \quad (\text{D.18})$$

Com f_2 representando uma solução da equação (D.16) anterior, reescrevemos a definição do invariante *ansatz* (D.3), usando as expressões para f_1 e f_0 (D.8,D.12) e o Hamiltoniano (D.1), como

$$\begin{aligned} I &= \sum_i [p_i^2 f_2(t) + p_i f_1(x_i, t)] + f_0(\{x, t\}) \\ &= \sum_i \left[p_i^2 f_2 + p_i \{-\dot{f}_2 x_i + b_{x_i}\} \right] + 2f_2 V + \sum_i \left\{ \frac{x_i^2}{2} \ddot{f}_2 - \dot{b}_{x_i} x_i \right\} \\ &= 2f_2 H + \sum_i \left[-p_i \dot{f}_2(t) x_i + \ddot{f}_2 \frac{x_i^2}{2} - \dot{b}_{x_i} x_i + b_{x_i} p_i \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Tendo em vista (D.16-D.18), encontramos na verdade os invariantes funcionalmente independentes

$$I_{f_2} = 2f_2 H + \sum_i \left[-p_i \dot{f}_2(t) x_i + \ddot{f}_2 \frac{x_i^2}{2} \right], \quad (\text{D.20})$$

$$I_b = \sum_i \left[b_{x_i} p_i - \dot{b}_{x_i} x_i \right] \quad (\text{D.21})$$

$$I_c = \text{const} \quad (\text{D.22})$$

Neste ponto, é importante ressaltar as implicações das medidas tomadas para obtenção de (D.19). Seguindo o *ansatz* (D.3), identificamos uma quantidade que é conservada ao longo de um caminho, que representa a evolução do sistema no espaço de fase. Para obter (D.19) inserimos as equações de movimento na condição de invariância (D.4). Logo, o domínio de invariância de (D.19) e da equação diferencial (D.15) para f_2 é restrito ao caminho no espaço de fase que a evolução do sistema segue. Em suma, numa particular maneira de ver a situação, podemos assumir que as equações de movimento tenham sido resolvidas *a priori*. Então, a trajetória $\{x(t)\}$, o potencial $V(\{x(t), t\})$ e suas derivadas constituem um conjunto de coeficientes parametrizados somente pelo tempo para a equação diferencial que determina f_2 , equação (D.15). Com esse entendimento, nosso invariante (D.19) segue da solução da equação (D.15) para f_2 e da trajetória $(\{x(t)\}, \{p(t)\})$.

Como exemplo, considere um oscilador não linear com o Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} \omega(t)^2 x^2 + a(t) x^3, \quad (\text{D.23})$$

e sua equação de movimento associada

$$\ddot{x} + \omega(t)^2 x + 3a(t)x^2 = 0. \quad (\text{D.24})$$

As funções $f_2(t)$ e $b(t)$ são dadas como solução das respectivas equações diferenciais

$$\ddot{f}_2 + 4\dot{f}_2 \omega^2 + 4f_2 \omega \dot{\omega} + x(t)(4f_2 \dot{a} + 10\dot{f}_2 a), \quad b\ddot{x} - \ddot{b}x = 0 \quad (\text{D.25})$$

que seguem da expressão para f_2 , equação (D.15). Estas equações devem ser resolvida simultaneamente com a equação de movimento (D.24) e as duas soluções inseridas na expressão do invariante (D.19), que

Figura D.1: Exemplo de uma integração do sistema descrito por (D.24) simultaneamente com (D.25).

neste caso é dado por

$$I_{f_2} = f_2(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 + 2ax^3) - \dot{f}_2 x \dot{x} + \frac{1}{2}(\ddot{f}_2 x^2) \quad (D.26)$$

$$I_b = b\dot{x} - \dot{b}x.$$

A figura D.1(a) mostra uma integração numérica simultânea da equação de movimento (D.24) e da equação auxiliar (D.25), para um caso particular. Os coeficientes que caracterizam o potencial de (D.23) nesta integração foram tomados por $\omega(t) = \cos(t/2)$, e $a(t) = 5 \times 10^{-3} \sin(t/3)$. As condições iniciais assumidas foram $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0, f_2(0) = 1, \dot{f}_2(0) = 0, \ddot{f}_2(0) = 0, b(0) = 10, \dot{b}(0) = 10$. Definindo portanto, de acordo com equação (D.26), um invariante $I_{f_2} = 1/2$, e outro $I_b = -10$. Figura D.1(b) mostra a dependência temporal do Hamiltoniano (D.23) e a *constância* dos invariantes (D.26). Numa escala mais fina podemos ter uma idéia do erro intrínseco dos processos numéricos envolvidos. Este desvio é mostrado na D.2(b) para o invariante I_{f_2} . Na figura D.2(a) mostramos o caminho seguido pela partícula no espaço de fase ao longo do tempo.

A equação diferencial de terceira ordem (D.25) pode ser convertida num sistema de equações de segunda e primeira ordem. Substituindo $\rho(t)^2 = f_2(t)$, a equação de segunda ordem fica

$$\ddot{\rho} + \omega(t)^2 \rho - \frac{g(t)}{\rho^3} = 0, \quad (D.27)$$

desde que a função $g(t)$ introduzida na equação (D.27) anterior obedeça

$$\dot{g}(t) = -x(t) [2a\rho^4 + 10a\rho^3 \dot{\rho}] \quad (D.28)$$

Em termos de eficiência no processo de integração numérica se ganha efetivamente muito pouco com isso, a menos da eliminação da derivada de $\omega(t)$. Obtemos com isso o invariante na forma

$$I_{\{\rho, g\}} = (\rho \dot{x} - \dot{\rho} x)^2 + \frac{x^2}{\rho^2} g + 2a\rho^2 x^3. \quad (D.29)$$

Figura D.2: A visão do espaço de fase na mesma integração descrita na D.1(a) e o desvio devido ao erro numérico envolvido na integração de (D.24) e independentemente de (D.25).

O invariante (D.29) se particulariza no formato da solução de Lewis para um invariante do oscilador harmônico dependente do tempo, quando $a(t) \equiv 0$. Já era evidente da equação (D.25) que o desacoplamento de f_2 com relação à trajetória $x(t)$, somente ocorreria para sistemas lineares, ou seja $a(t) \equiv 0$.

É interessante notar que para um oscilador ordinário, $a(t) \equiv 0$ e $\omega(t) = \text{const}$, temos a equação para a função auxiliar f_2

$$\ddot{f}_2 + 4\dot{f}_2\omega^2 = 0 \quad (\text{D.30})$$

e que $f_2 = \text{const}$ é uma solução imediata levando ao invariante $I_{f_2} = f_2(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) \propto H$. O que era de se esperar considerando que neste caso o sistema é autônomo. Porém equação D.30 admite, dependendo das condições iniciais escolhidas (lembre que f_2 é uma função arbitrária), admite soluções não constantes: $f_2 = a + b\sin(2\omega t) + c\cos(2\omega t)$. Levando ao invariante não trivial $I_{f_2} = Hf_2 - \dot{f}_2 x \dot{x} + \frac{1}{2}(\ddot{f}_2 x^2)$. As constantes arbitrárias da função auxiliar f_2 determinam o valor do invariante em $t = 0$. A figura 3 mostra esta situação. Como não poderia deixar de ser, o valor do Hamiltoniano não muda nas duas simulações, pois somente as condições iniciais da função arbitrária foi mudado.

D.3 Teorema de Noether

O mesmo invariante obtido na seção anterior pode ser obtido no âmbito do teorema de Noether. Suponha que um grupo à um parâmetro opere num espaço de fase estendido através de seu gerador infinitesimal

$$v = \xi(t) \frac{\partial}{\partial t} + \sum_i \eta_i(q_i, t) \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_i (\dot{\eta}_i(q_i, t) - \dot{q}_i \dot{\xi}) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}. \quad (\text{D.31})$$

onde

$$\dot{\eta}_i(q_i, t) = \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \frac{\partial \eta_i}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (\text{D.32})$$

(a) Caso trivial: $f_2 = \text{const}$ e $I_{f_2} = H$. Condições iniciais: $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0, f_2(0) = 1, \dot{f}_2(0) = 0, \ddot{f}_2(0) = 0$.

(b) Caso não trivial: I_{f_2} difere de H . Condições iniciais: $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0, f_2(0) = 1, \dot{f}_2(0) = 1, \ddot{f}_2(0) = 1$.

Figura D.3: Invariantes não triviais ($f_2 \neq \text{const}$) em sistemas autônomos: Caso do oscilador ordinário.

Se esta ação preserva o valor do Lagrangiano $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ o resultado de Noether garante que a evolução do sistema, governada pela solução das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad (\text{D.33})$$

admite a grandeza conservada

$$I = \sum_i (\xi \dot{q}_i - \eta_i) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \xi L + f(\{q_i\}, t). \quad (\text{D.34})$$

Tomando a derivada total de D.34 temos

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) (\xi \dot{q}_i - \eta_i) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{\xi} \dot{q}_i + \xi \ddot{q}_i - \dot{\eta}_i) \right\} - (\dot{\xi} L + \xi \frac{dL}{dt}) + \frac{df}{dt} \\ &= \sum_i \left\{ \eta_i \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \xi \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \xi \ddot{q}_i \right\} + \xi \frac{\partial L}{\partial t} - v \cdot L - (\dot{\xi} L + \xi \frac{dL}{dt}) + \frac{df}{dt} \\ &= \sum_i \xi \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \right\} - v \cdot L - (\dot{\xi} L + \xi \frac{dL}{dt}) + \frac{df}{dt} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{df}{dt} - v \cdot L - \dot{\xi} L. \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

Com o Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} \sum_i \dot{q}_i^2 - V(\{q_i\}, t), \quad (\text{D.36})$$

e impondo a condição de invariância escrevemos

$$v \cdot L + \dot{\xi} L = \sum_i \left\{ \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \frac{\partial \eta_i}{\partial q_i} \dot{q}_i \right\} \dot{q}_i - \frac{\dot{\xi}}{2} \sum_i \dot{q}_i^2 - \xi \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_i \eta_i \frac{\partial V}{\partial q_i} - \dot{\xi} V = \sum \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (\text{D.37})$$

Dos coeficientes de $\dot{q}_i^2$ obtemos a relação

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial q_i} = \frac{\dot{\xi}}{2} \rightarrow \eta_i = \frac{\dot{\xi}}{2} + \psi(t). \quad (\text{D.38})$$

Da parte linear obtemos

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\ddot{\xi}}{2} q_i + \dot{\psi} \rightarrow f = \frac{\ddot{\xi}}{4} q_i^2 + \dot{\psi} q_i. \quad (\text{D.39})$$

Dos termos livres temos a relação

$$\xi \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_i \eta_i \frac{\partial V}{\partial q_i} - \dot{\xi} V + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (\text{D.40})$$

Finalmente, usando as relações (D.38) e (D.39) obtemos

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_i \left\{ \frac{\dot{\xi} q_i}{2} + \psi \right\} \frac{\partial V}{\partial t} + \dot{\xi} V + \sum_i \left(\frac{\ddot{\xi} q_i^2}{4} + \ddot{\psi} q_i \right) &= 0 \\ \xi \frac{\partial V}{\partial t} + \dot{\xi} V + \sum_i \frac{\dot{\xi} q_i}{2} \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_i \frac{\ddot{\xi} q_i^2}{4} + \sum_i (\psi \frac{\partial V}{\partial t} + \ddot{\psi} q_i) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$

Esta equação é idêntica àquela para a função arbitrária f_2 essencial no método direto. Aqui esta função arbitrária determina um grupo de simetria particular através da parte temporal do seu gerador $\xi(t)$. A parte espacial da transformação está vinculada a esta escolha.

Como descrito nas seções anteriores, em termos de resultados práticos relatamos a existência de uma quantidade conservada, procurada dentro de uma classe com forma funcional pré-fixada, e que pode ser obtida de maneira direta para sistemas dependentes do tempo. Este invariante contém uma função incógnita f_2 e suas derivadas primeiras e segundas que são determinadas pela solução de uma equação diferencial de terceira ordem. Esta equação possui geralmente uma dependência com as coordenadas espaciais do sistema e portanto somente pode ser integrada após ou simultaneamente com as equações de movimento.

Este invariante pode ser tratado como a energia conservada global para um sistema não-autônomo, numa espécie de balanço energético incluindo a energia extraída ou adicionada ao sistema.

A existência deste invariante ainda significa a possibilidade de se transformar o sistema descrito pelo Hamiltoniano com dependência temporal explícita num sistema autônomo através de uma transformação canônica. Com esta transformação, o novo invariante é exatamente o invariante encontrado aqui.

É importante ressaltar que o teorema de noether faz a ponte que unifica os conceitos de invariância. Por um lado temos invariantes diferenciais, o Lagrangiano, e por outro as constantes de movimento associadas àquela simetria do Lagrangiano.

A constante de movimento, obtida de uma maneira direta (D.20) ou indireta (D.41), pode ser usado para checar resultados de simulações numéricas de tais sistemas. Ambas tarefas numéricas, a integração das equações de movimento, e a subsequente integração da equação auxiliar contribuem para um desvio efetivo ao longo do tempo do valor inicial do invariante. Portanto, como estas tarefas são independentes do ponto de vista da tolerância de erro específica das rotinas, este desvio fornece um teste dos dois processos numéricos. Na sua forma mais óbvia, este teste pode ser incorporado numa eventual rotina de integração onde o passo varia de acordo com critérios baseados no desvio do invariante, numa analogia com integradores simpléticos ordinários em sistemas autônomos.

Apêndice E

Rotinas Algébricas

E.0.1 Realização bosônica

Rotina 1 (indsp)

- Finalidade: Escreve os índices duplos dos elementos $\mathcal{L}_r^s$ de uma álgebra simplética e os índices duplos das variáveis independentes $\eta_{m\alpha}$.

- Uso: $\text{indsp}(J, n_b)$

- Argumentos:

J : Numerador do momentum angular $j = J/2$ caracterizando a álgebra $\text{sp}(2j + 1)$;

n_b : Número de bósons.

- Resultado: $[Lrs, Lm\alpha]$, onde Lrs é uma lista contendo todos os índices duplos para os elementos da álgebra, ordenados de forma que se $r > 0$ então $r \leq |s|$, e $Lm\alpha$ é uma lista contendo todos os numeradores dos índices duplos para as coordenadas independentes, ordenadas de j para $-j$.
- Limitações: Nenhuma.
- Desempenho: Excelente.

Rotina 2 (sortrs)

- Finalidade: Ordena os índices duplos de um elemento $\mathcal{L}_r^s$ de forma que se $r > 0$ então $r \leq |s|$.

- Uso: $\text{sortrs}(a)$

- Argumentos:

a : Lista $[r, s]$ contendo os índices duplos.

- Resultado: Lista $[(-1)^{(r+s)/2}, [-s, -r]]$ contendo os novos índices duplos e a fase respectiva se $-s > 0$ e $-s \leq -r$.

- Limitações: Nenhuma.
- Desempenho: Excelente.

Rotina 3 (Comuta)

- Finalidade: Calcula o comutador $[\mathcal{L}_r^s, \mathcal{L}_k^l]$.
- Uso: $\text{Comuta}(a, b)$
- Argumentos:
 - a : Lista $[r, s]$ contendo os índices duplos do primeiro elemento;
 - b : Lista $[k, l]$ contendo os índices duplos do segundo elemento.
- Resultado: $[[c.e., [i, j]], \dots]$, onde $c.e.$ é uma constante de estrutura e $[i, j]$ são os índices (ordenados) do elemento resultante. Caso o comutador resulte no valor nulo, então a saída é a lista nula $[]$.
- Limitações: Nenhuma.
- Desempenho: Excelente.

Rotina 4 (CE)

- Finalidade: Calcula todas as constantes de estrutura para uma determinada álgebra simpléctica.
- Uso: $\text{CE}(Els)$
- Argumentos:
 - Els : Lista contendo os índices duplos de todos os elementos da álgebra. Esta lista deve ser calculada pela rotina `indsp`.
- Resultado: Tabela (triangular superior, cujos os índices duplos denotam o produto entre dois elementos da álgebra) contendo uma lista com as constantes de estrutura e respectivos elementos especificados pelas suas posições na lista de entrada Els .
- Limitações: Nenhuma.
- Desempenho: Excelente.

Rotina 5 (MSp)

- Finalidade: Escreve a métrica simpléctica associada à álgebra $\text{sp}(J + 1)$.
- Uso: $\text{MSp}(J)$
- Argumentos:
 - J : Numerador do momentum angular $j = J/2$ caracterizando a álgebra $\text{sp}(2j + 1)$.

- Resultado: Matriz.
- Limitações: Nenhuma.
- Desempenho: Excelente.

E.0.2 Prolongações

Rotina 6 (dimJ)

- Finalidade: Calcula a dimensão do espaço prolongado $J^{(n)}$ contendo $p = q * (2j + 1)$ variáveis independentes e q variáveis dependentes para a álgebra $\text{sp}(2j + 1)$ realizada com n_b bósons.
- Uso: $\text{dimJ}(n, p, q)$
- Argumentos:
 - n : Ordem do espaço prolongado $J^{(n)}$;
 - p : Quantidade de variáveis independentes;
 - q : Quantidade de variáveis dependentes.
- Resultado: Inteiro positivo.
- Limitações: Nenhuma.
- Desempenho: Excelente.

Rotina 7 (dimdJ)

- Finalidade: Calcula a dimensão do subespaço formado pelas derivadas parciais de ordem n da variável dependente.
- Uso: $\text{dimdJ}(n, p, q)$
- Argumentos:
 - n : Ordem das derivadas parciais;
 - p : Quantidade de variáveis independentes;
 - q : Quantidade de variáveis dependentes.
- Resultado: Inteiro positivo.
- Limitações: Nenhuma.
- Desempenho: Excelente.

Rotina 8 (Xn)

- Finalidade: Escreve uma lista contendo as variáveis independentes.

- Uso: $Xn(J, n_b, x)$
- Argumentos:
 - J : Álgebra $\text{sp}(2j + 1)$, $J = 2j$;
 - n_b : Número de bósons;
 - x : Nome para as variáveis independentes.
- Resultado: Lista $[x_1, \dots, x_p]$ (índices numéricos).
- Limitações: Nenhuma.
- Desempenho: Excelente.

Rotina 9 (Un)

- Finalidade: Escreve uma lista contendo as derivadas de ordem n da variável dependente.
- Uso: $Un(n, J, n_b, u)$
- Argumentos:
 - n : Ordem das derivadas parciais;
 - J : Álgebra $\text{sp}(2j + 1)$, $J = 2j$;
 - n_b : Número de bósons;
 - u : Nome para a variável dependente.
- Resultado: Lista contendo todas as derivadas parciais de ordem n de u (índices dados por caracteres).
- Limitações: Nenhuma.
- Desempenho: Excelente.

Rotina 10 (Jn)

- Finalidade: Escreve uma lista contendo todas as variáveis em $J^{(n)}$.
- Uso: $Jn(n, J, n_b, x, u)$
- Argumentos:
 - n : Ordem do espaço prolongado $J^{(n)}$;
 - J : Álgebra $\text{sp}(2j + 1)$, $J = 2j$;
 - n_b : Número de bósons;
 - x : Nome para as variáveis independentes;

u : Nome para a variável dependente.

- Resultado: Lista.
- Limitações: Nenhuma.
- Desempenho: Excelente.

Rotina 11 (Dkn)

- Finalidade: Derivada total D_k em $J^{(n)}$.
- Uso: $\text{Dkn}(k, n, J, n_b, x, u, F)$
- Argumentos:

k : Índice da coordenada independente x_k ;

n : Ordem do espaço prolongado $J^{(n)}$;

J : Álgebra $\text{sp}(2j + 1)$, $J = 2j$;

n_b : Número de bósons;

x : Nome para as variáveis independentes;

u : Nome para a variável dependente;

F : Função em $J^{(n)}$.

- Resultado: Expressão algébrica.
- Limitações: Nenhuma.
- Desempenho: Excelente.

Rotina 12 (CamposMJn)

- Finalidade: Calcula (numa forma matricial) todas as prolongações $\text{pr}^n v_k$ em $J^{(n)}$ para uma determinada álgebra $\text{sp}(2j + 1)$, $J = 2j$.
- Uso: $\text{CamposMJn}(n, J, n_b, x, u)$
- Argumentos:

n : Ordem do espaço prolongado $J^{(n)}$;

J : Álgebra $\text{sp}(2j + 1)$, $J = 2j$;

n_b : Número de bósons;

x : Nome para as variáveis independentes;

u : Nome para a variável dependente.

- Resultado: Matriz.
- Limitações: Nenhuma.
- Desempenho: Excelente.

Rotina 13 (Phi)

- Finalidade: Calcula cada um dos coeficientes $[i_1, \dots, i_n]$ da prolongação $\text{pr}^n v_k$ em $J^{(n)}$.
- Uso: $\text{Phi}(k, x, u, \Xi)$
- Argumentos:
 - k : Índice (esticado) do campo vetorial v_k ;
 - x : Nome para as variáveis independentes;
 - u : Nome para a variável dependente.
 - Ξ : Coeficientes dos campos vetoriais em $J^{(0)}$, calculados pela rotina `CamposMJn` com $n = 0$.
- Resultado: Expressão algébrica.
- Limitações: Nenhuma.
- Desempenho: Excelente.

Rotina 14 (CamposDJn)

- Finalidade: Calcula (numa forma diferencial) a ação de todas as prolongações $\text{pr}^n v_k$ em uma função F arbitrária em $J^{(n)}$ para uma determinada álgebra $\text{sp}(2j+1)$, $J = 2j$.
- Uso: $\text{CamposDJn}(n, J, n_b, x, u, F)$
- Argumentos:
 - n : Ordem do espaço prolongado $J^{(n)}$;
 - J : Álgebra $\text{sp}(2j+1)$, $J = 2j$;
 - n_b : Número de bósons;
 - x : Nome para as variáveis independentes;
 - u : Nome para a variável dependente;
 - F : Função arbitrária em $J^{(n)}$.
- Resultado: Lista contendo equações diferenciais.
- Limitações: Nenhuma.
- Desempenho: Excelente.

Rotina 15 (Orbita)

- Finalidade: Calcula a dimensão máxima das órbitas em $J^{(n)}$.
- Uso: $\text{Orbita}(n, J, n_b)$
- Argumentos:

n : Ordem do espaço prolongado $J^{(n)}$;

J : Álgebra $\text{sp}(2j+1)$, $J = 2j$;

n_b : Número de bósons.
- Resultado: Inteiro positivo.
- Limitações: A dimensão das órbitas é calculada através do *rank* da matriz dos coeficientes dos campos prolongados. Portanto, há uma limitação dada pela complexidade dos elementos de matriz e pela dimensão daquela matriz.
- Desempenho: Lento para matrizes cujos os elementos são expressões algébricas complicadas.

E.0.3 Invariantes diferenciais**Rotina 16 (In)**

- Finalidade: Calcula (analiticamente) os invariantes diferenciais de qualquer ordem para qualquer álgebra $\text{sp}(2j+1)$ realizadas com $n_b = 2j+1$ bósons.
- Uso: $\text{In}(a, C, x, u)$
- Argumentos:

a : Índices (bósons) dos invariantes diferenciais $I_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2n_b}}$ no formato de lista: $a = [\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_2, \alpha_4, \dots]$;

C : Lista com todos os índices duplos das variáveis independentes, como calculado pela rotina `indsp`;

x : Nome para as variáveis independentes;

u : Nome para a variável dependente.
- Resultado: Expressão algébrica.
- Limitações: Nenhuma.
- Desempenho: Excelente. Em geral, é muito mais eficiente que a rotina `pdsolve`.

Rotina 17 (In1)

- Finalidade: Encontra os invariantes diferenciais de primeira ordem para $\text{sp}(2)$ realizada com uma partícula.
- Uso: $\text{In1}(n, x, u)$

- Argumentos:
 - n : Ordem dos invariantes diferenciais;
 - x : Nome para as variáveis independentes;
 - u : Nome para a variável dependente.
- Resultado: Lista contendo todos os invariantes.
- Limitações: Calcula os invariantes diferenciais de ordem qualquer apenas para a álgebra $\mathfrak{sp}(2)$ realizada com uma partícula.
- Desempenho: Excelente. Em geral, é muito mais eficiente que a rotina `pdsolve`.

Rotina 18 (**Psolve**)

- Finalidade: Determina as constantes arbitrárias de um invariante escrito como um polinômio geral.
- Uso: `Psolve( $P, Cts, J^{(n)}, C, F$ )`
- Argumentos:
 - P : Tentativa polinomial para o invariante diferencial;
 - Cts : Lista contendo as constantes arbitrárias em P ;
 - $J^{(n)}$: Lista contendo todas as variáveis em $J^{(n)}$;
 - C : Equações diferenciais para as prolongações;
 - F : Nome da função arbitrária em $J^{(n)}$ utilizada para escrever as equações diferenciais C .
- Resultado: Expressão algébrica.
- Limitações: Nenhuma.
- Desempenho: Torna-se lenta com o número de constantes arbitrárias (a partir de 10000). Em geral, é mais eficiente que a rotina `pdsolve`.

E.0.4 Rotinas auxiliares

Rotina 19 (**Hn**)

- Finalidade: Calcula as matrizes Hessianas
- Uso: `Hn( $n, u, p$ )`
- Argumentos:
 - n : Ordem dos invariantes diferenciais;
 - u : Nome para a variável dependente;

p : Quantidade de variáveis independentes.

- Resultado:
- Limitações: Nenhuma.
- Desempenho: Excelente.

Rotina 20 (Jacob)

- Finalidade: Calcula a matriz Jacobiana de um conjunto de invariantes dado.
- Uso: $\text{Jacob}(\text{Invs}, Un)$
- Argumentos:

Invs: Lista contendo os invariantes diferenciais estritamente de ordem n ;

Un: Lista contendo todas as derivadas de ordem n para a variável dependente.

- Resultado:
- Limitações: Nenhuma.
- Desempenho: Excelente.

Bibliografia

- [1] A. Bohm and Y. Ne'eman. Dynamical groups and spectrum generating algebras. In A. Bohm, Y. Ne'eman, and A. O. Barut, editors, *Dynamical Groups and Spectrum Generating Algebras*, volume 1, page 3. World Scientific, 1988. [13](#), [28](#)
- [2] N. Öztürk. Symplectic symmetry of the Neutrino mass for many Neutrino flavors . *Physica Scripta*, T93:41–43, 2001. [13](#)
- [3] A. B. Balantekin and N. Öztürk. Symplectic symmetry of the Neutrino mass and the seesaw mechanism. *Physical review D*, 62:053002, 1999. [13](#)
- [4] J. E. M. Hornos, Y. M. M. Hornos, and M. Forger. Symmetry and symmetry breaking: an algebraic approach to the genetic code. *Int. J. Mod. Phys. B*, 13(23):2795, 1999. [13](#), [28](#)
- [5] M. S. Barbosa. Symplectic transitions under the genetic code rules. *Em redação*, 2002. [13](#), [28](#)
- [6] E. N. Trifonov. Consensus Temporal order of amino acids and evolution of the triplet code. *Gene*, 2612000:139–151, 1999. [13](#)
- [7] E.S. Cheb-Terrab and K. von Bulow. A Computational Approach for the Analytical Solving of Partial Differential Equations. *Computer Physics Communications*, 90:102–116, 1995. [14](#), [40](#)
- [8] W. I. Fushchich and I. A. Yegorchenko. 2nd-order differential invariants of the rotation group $\mathfrak{o}(n)$ and of its extensions - $\mathfrak{e}(n)$, $\mathfrak{p}(1,n)$, $\mathfrak{g}(1,n)$. *Acta Appl. Math.*, 28:69–92, 1992. [16](#), [56](#), [73](#), [78](#), [80](#)
- [9] G. Rideau and P. Winternitz. Nonlinear equations invariant under the poicare, similitude, and conformal groups in 2-dimensional space-time. *J. Math. Phys.*, 31:1095–1105, 1990. [16](#), [56](#), [73](#), [80](#)
- [10] P. J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, volume 107 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1993. [17](#), [19](#), [20](#), [21](#), [25](#), [68](#), [81](#)
- [11] P. J. Olver. *Equivalence, Invariants, and Symmetry*. Cambridge, 1995. [17](#), [19](#), [25](#), [27](#), [37](#), [39](#), [45](#), [46](#), [47](#), [73](#)
- [12] H. Stephani. *Differential Equations. Their solutions using symmetries*. Cambridge, 1989. [17](#), [19](#), [25](#), [39](#), [68](#)

- [13] P. J. Olver. Symmetry groups and group invariant solutions of partial differential equations. *J. Diff. Geom.*, 14, 1979. 21
- [14] M. S. Lie. Sophus Lie's 1884 differential invariant paper. In N. Wallach and R. Hermann, editors, *Lie Groups: History, Frontiers and Applications*, volume III. Math Sci Press, 1976. 21, 24
- [15] P. J. Olver. *Classical Invariant Theory*, volume 44 of *London Mathematical Society Student texts*. Cambridge, 1999. 24, 72
- [16] G. H. Halphen. *Sur les invariant différentiels*. Gauthiers-Villards, Paris, 1913. in: *Oeuvres*, vol. 2. 24
- [17] A. Tresse. Sur les invariant différentiels des groupes continus de transformations. *Acta Math.*, 18, 1894. 24
- [18] W. Bluman and S. Kumei. *Symmetries and differential equations*. Springer-Verlag, 1996. Applied Mathematical Sciences 81. 25, 89
- [19] E. Chacón and M. Moshinsky. Basis of irreps of the chain of Lie algebras $sp(6) \supset sp(4) \oplus su(2) \supset su(2) \oplus su(2) \oplus su(2)$. In V.C. Aguilara-Navarro, D. Galetti, B. M. Pimentel, and L. Tomio, editors, *Topics in Theoretical Physics—A Festschrift for Paulo L. Ferreira*, page 337. IFT, 1995. 28, 29, 32, 34, 37, 73
- [20] M. S. Barbosa. *Construção da Representação Simplética Irredutível para o Modelo Algébrico de Evolução do Código Genético*. Teses de Mestrado do IFSC-USP, 1996. 28, 34
- [21] M. Moshinsky. The harmonic oscillator and supermultiplet theory. (I) The single shell picture. *Nucl. Phys.*, 31:384, 1962. 29, 73
- [22] M. Moshinsky. Bases for irreducible representations of unitary groups and some applications. *J. Math. Phys.*, 4:1128, 1963. 29, 32, 34
- [23] Jin-Quan Chen. *Group Representation Theory for Physicists*. World Scientific, 1989. 29
- [24] B. G. Wybourne. *Classical Group for Physicists*. John Wiley, 1974. 29
- [25] E. S. Bernardes. Matrix elements for the symplectic $sp(4)$ Lie algebra. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 32(35):6295, 1999. 30
- [26] H. W. Guggenheimer. *Diferencial Geometry*. McGraw-Hill, New York, 1963. 50
- [27] W. Bluman and S. Kumei. On invariance properties of the wave equation. *J. Math. Phys.*, 28(2), 1987. 68, 81, 87, 88
- [28] B. R. Judd. Lie groups for atomic shells. *Phys. Rep.*, 285(1-2):1, 1997. 73

- [29] E. Chacón, P. Hess, and M. Moshinsky. Collectivity and geometry. VI. Spectra and shapes in the three-dimensional case. *J. Math. Phys.*, 30(5):970, 1989. 73
- [30] G. Cicogna. Symmetry breakdown from bifurcations. *Nuovo Cimento*, 31 600, 1981. 73
- [31] M. Manoel and I. Stewart. The classification of bifurcations with hidden symmetries. *Proc. London Math. Soc.*, 80(3):198, 2000. 73
- [32] Giuseppe Gaeta. Reduction and Equivariant Branching Lemma: Dynamical Systems, Evolution PDEs, and Gauge Theories. *Acta Appl. Math.*, 28:43–68, 1992. 73
- [33] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, volume II. Interscience, 1994. 76
- [34] W. Bluman and S. Kumei. Exact solutions for wave equation of two layered media with smooth transition. *J. Math. Phys.*, 29(1), 1988. 81, 87
- [35] Struckmeier and Riedel C. Exact Invariants for a class of three-dimensional time-dependent classical hamiltonians. *Phys. Rev. Lett.*, 85:3830–, 2000. 81, 90
- [36] R. Lewis and P.G.L. Leach. A direct approach to finding exact invariants for one-dimensional time-dependent classical hamiltonians. *J. Math. Phys.*, 23:2371–2374, 1982. 89