UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

LEONARDO ANDRETA DE CASTRO

Teoria de correção de erros quânticos durante operações lógicas e medidas
de diagnóstico de duração finita

São Carlos
2012

LEONARDO ANDRETA DE CASTRO

Teoria de correção de erros quânticos durante operações lógicas
e medidas de diagnóstico de duração finita

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano

Versão corrigida
(original se encontra disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos
2012

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC
com os dados fornecidos pelo autor

de Castro, Leonardo Andreta

Teoria de correção de erros quânticos durante operações lógicas e medidas de diagnóstico de duração finita/ Leonardo Andreta de Castro; orientador Reginaldo de Jesus Napolitano - versão corrigida – São Carlos, 2012.

143 p.

Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-graduação em Física Básica) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2012.

1. Teoria quântica de correção de erros. 2. Medidas de tempo finito.
I. Napolitano, Reginaldo de Jesus, orient. II. Título.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano, por haver me acolhido, muitos anos atrás, nessa empreitada da computação quântica; pelo apoio prestado na solução das mais difíceis equações; e pelas discussões sobre os mais bizarros aspectos do mundo microscópico.

A Carlos Alexandre Brasil, por ser pioneiro, desenvolvendo as teorias nas quais me refugiaria depois; por sua ajuda na interminável batalha contra o $\text{\LaTeX}$; e por sua insistência em levar-me às distantes paragens do meridiano.

A Paulo Eduardo Marques Furtado de Mendonça, pelas sugestões e histórias durante os quase periódicos encontros de quinta-feira.

Aos companheiros de sala, Diego Paiva Pires, Guilherme Nery Prata e Guilherme da Costa Pereira Innocentini, ao nosso lado durante as horas mais escuras.

Aos meus pais, Maria Lúcia Andreta e Antônio Carlos de Castro, pelo apoio moral.

À FAPESP, que financiou este trabalho (processo n. 2009/12460-0).

“I love deadlines.

I love the whooshing noise they make as they go by.”

Douglas Noel Adams

RESUMO

DE CASTRO, L. A. **Teoria de correção de erros quânticos durante operações lógicas e medidas de diagnóstico de duração finita**. 2012. 143p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2012.

Neste trabalho, estudamos a teoria quântica de correção de erros, um dos principais métodos de prevenção de perda de informação num computador quântico. Este método, porém, normalmente é estudado considerando-se condições ideais em que a atuação das portas lógicas que constituem o algoritmo quântico não interfere com o tipo de erro que o sistema sofre. Além disso, as medidas de síndrome empregadas no método tradicional são consideradas instantâneas. Nossos objetivos neste trabalho serão avaliar como a alteração dessas duas suposições modificaria o processo de correção de erros. Com relação ao primeiro objetivo, verificamos que, para erros causados por ambientes externos, a atuação de uma porta lógica simultânea ao ruído pode gerar erros que, a princípio, podem não ser corrigíveis pelo código empregado. Propomos em seguida um método de correção a pequenos passos que pode ser usado para tornar desprezíveis os erros incorrigíveis, além de poder ser usado para reduzir a probabilidade de erros corrigíveis. Para o segundo objetivo, estudamos primeiro como medidas de tempo finito afetam a descoerência de apenas um qubit, concluindo que esse tipo de medida pode na verdade proteger o estado que está sendo medido. Motivados por isso, mostramos que, em certos casos, medidas de síndrome finitas realizadas conjuntamente ao ruído são capazes de proteger o estado dos qubits contra os erros mais eficientemente do que se as medidas fossem realizadas instantaneamente ao fim do processo.

Palavras-chave: *Teoria quântica de correção de erros. Medidas de tempo finito.*

ABSTRACT

DE CASTRO, L. A. **Quantum error-correction theory during logical gates and finite-time syndrome measurements.** 2012. 143p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2012.

In this work, we study the theory of quantum error correction, one of the main methods of preventing loss of information in a quantum computer. This method, however, is normally studied under ideal conditions in which the operation of the quantum gates that constitute the quantum algorithm do not interfere with the kind of error the system undergoes. Moreover, the syndrome measurements employed in the traditional method are considered instantaneous. Our aims with this work are to evaluate how altering these two suppositions would modify the quantum error correction process. In respect with the first objective, we verify that, for errors caused by external environments, the action of a logical gate simultaneously to the noise can provoke errors that, in principle, may not be correctable by the code employed. We subsequently propose a short-step correction method that can be used to render negligible the uncorrectable errors, besides being capable of reducing the probability of occurrence of correctable errors. For the second objective, we first study how finite-time measurements affect the decoherence of a single qubit, concluding that this kind of measurement can actually protect the state under scrutiny. Motivated by that, we demonstrate, that, in certain cases, finite syndrome measurements performed concurrently with the noise are capable of protecting more efficiently the state of the qubits against errors than if the measurements had been performed instantaneously at the the end of the process.

Keywords: *Quantum error-correction theory. Finite-time measurements.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 5.1 – Comparação da evolução temporal da população para diferentes valores do acoplamento com o ambiente, η . Conforme η aumenta, vemos um crescimento também na taxa da variação da população. Todas as curvas calculadas com $\lambda = 2\omega_c^{1/2}$	94
Figura 5.2 – Comparação da evolução temporal das populações, na base em que a medida anticomutante é realizada, para diversas intensidades de medida e dois valores fracos para a interação com o ambiente.	97
Figura 5.3 – Comparação da evolução temporal das populações, na base em que a medida anticomutante é realizada, para diversas intensidades de medida e dois valores fortes para a interação com o ambiente.	98
Figura 5.4 – Comparação da evolução temporal da parte imaginária da coerência, na base em que a medida anticomutante é realizada, para diversas intensidades de medida e dois valores, um forte e outro fraco, para a interação com o ambiente.	99
Figura 6.1 – Evolução temporal da probabilidade de encontrar-se o sistema dentro do subespaço do código, $p_C(t)$, em função do tempo, medido em unidades do inverso da frequência de corte, ω_c . Em todas as curvas, escolhemos o valor pequeno $\eta = 0,05$ para o acoplamento com o ambiente.	115

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Resultados da medida de síndrome para cada tipo de erro. Repare que apenas quaisquer duas colunas são necessárias para determinar-se o erro ocorrido.	54
Tabela 6.1 – Resultado da expressão $f_{i,r,j}(1 - f_{i,r,k})$, presente na exponencial, em termos dos possíveis valores de $f_{i,r,j}$ e $f_{i,r,k}$	107

SUMÁRIO

Introdução	19
1 Introdução à computação quântica	21
1.1 Informação quântica	21
1.2 Portas lógicas quânticas	24
1.3 Emaranhamento	27
1.4 Ambientes bosônicos	28
1.5 Estados coerentes e operadores de deslocamento	30
2 Sistemas quânticos abertos	35
2.1 Equação de von Neumann	35
2.2 Operadores de Kraus	37
2.3 Equação de Lindblad	39
2.4 Perturbações	42
2.5 Equação-mestra híbrida	46
3 Teoria de correção de erros quânticos	51
3.1 Código de correção de um erro de fase	52
3.2 Dinâmica de um canal com ruído de fase	55
3.3 Densidade espectral ôhmica	58
4 Correção a passos curtos	59
4.1 Fundamentos matemáticos	60
4.2 O método	62
4.3 Construção das portas lógicas	64
4.4 Aplicação ao código de três qubits	66
5 Efeitos protetivos de medidas de tempo finito	71
5.1 Soluções exatas	71
5.2 Soluções da equação-mestra	75
5.2.1 Caso comutativo	78
5.2.2 Caso anticomutativo	81
5.3 Método numérico: operador partido ao meio	86
5.3.1 Densidade espectral ôhmica	91
5.4 Resultados	94

6	Correção contínua de erros	101
6.1	Aplicação a códigos estabilizados	101
6.2	Aplicação a erros de fase	107
6.3	Caso do código de dois qubits	110
6.4	Simulações numéricas	114
	Conclusões e perspectivas	116
	REFERÊNCIAS	119
	Apêndice A Cálculo dos traços do ambiente	123
A.1	Valor esperado do número de bósons	123
A.2	Traço do ruído de fase	124
A.3	Traço para o algoritmo	126
	Apêndice B Lema de Hadamard	131
	Apêndice C Identidade de Snider	133
C.1	Fórmula para operadores	133
C.2	Fórmula para superoperadores	134
	Apêndice D Listagem de programa	137
	Apêndice E Positividade da integral dupla de $I(\tau)$	141

Introdução

A teoria quântica, desenvolvida nos início do século XX, representou uma revolução para a ciência, revelando aspectos inusitados do comportamento do universo. Apesar de já estabelecida nos anos 1920, foi só no final do século passado que a mecânica quântica passou a despertar interesse para a construção de computadores (1). Percebeu-se, pela primeira vez, que poderia haver tarefas que a matéria quântica seria capaz de executar com mais eficiência que os bits clássicos, levando à emergência do estudo da computação quântica.

A principal razão para a maior eficiência da computação quântica encontra-se no fato de que um sistema quântico de dois níveis é capaz de estar em qualquer de uma infinidade de superposições de estados, enquanto que os sistemas clássicos equivalentes só podem se encontrar num ou noutro. Isso permite a realização de cálculos de forma distinta dos computadores clássicos, já que a superposição de estados permite o chamado paralelismo quântico: operações em estados clássicos distintos podem ser feitas simultaneamente no mesmo sistema quântico, que pode estar em vários estados ao mesmo.

O paralelismo, porém, não se trata de uma panaceia. A natureza do fenômeno da medida na teoria quântica significa que os resultados dessas diferentes operações não estarão todos disponíveis para leitura ao final do algoritmo. Assim, é necessária certa criatividade para que a informação requerida possa ser extraída com grande probabilidade ao final da computação.

As primeiras indicações de que isso seria possível ocorreram na década de 1980 e início da década de 1990, quando Deutsch e Josza mostraram (2), com seu algoritmo das caixas pretas, uma situação simples em que um computador quântico daria uma resposta mais rapidamente que qualquer computador clássico. Essa demonstração, porém, apenas ilustrava essa possibilidade, mas não apresentava nenhuma aplicação prática. Alguns anos depois, com o algoritmo de Shor (3), concluiu-se que computadores quânticos poderiam ter uma utilidade muito real na solução de problemas insolúveis eficientemente em seus equivalentes clássicos.

Surgiu, porém, a questão de como resolver o problema da inevitável interação com o ambiente,

que poderia destruir os preciosos estados quânticos que carregam os resultados dos algoritmos (4). Diversos esquemas foram propostos para a superação deste obstáculo, entre eles aquele que nos irá interessar neste trabalho: a teoria da correção de erros (5, 6). Este esquema consiste em se codificar os estados lógicos em um conjunto maior de estados físicos, de forma que haja uma redundância de informação que possa ser usada, após os erros ocorrerem, para recuperar o estado original.

Este método, porém, é normalmente empregado com algumas simplificações. Primeiro, não se considera que a atuação simultânea das portas lógicas ao ruído é capaz de alterar o tipo de erro que ocorre (7–9). Segundo, considera-se que as medidas ocorrem instantaneamente, o que, apesar de constituir a hipótese padrão da mecânica quântica (10), pode ser substituído pela mais interessante formulação da medida como um processo dinâmico que dura um tempo finito. Nosso objetivo neste trabalho é, portanto, substituir essas suposições pelas ideias de que os pares erro e porta lógica ou erro e medida são processos dinâmicos que podem interferir entre si, observando quais serão as consequências de sua ação simultânea.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: o primeiro capítulo apresenta uma introdução à computação quântica, fornecendo os fundamentos para este estudo. O segundo capítulo desenvolve os formalismos matemáticos da descrição dos erros e das medidas, necessários para a continuidade do estudo nos capítulos seguintes. O terceiro capítulo apresenta a teoria quântica de correção de erros, que será necessária para o entendimento dos capítulos quatro e seis. As contribuições originais desta dissertação iniciam-se no capítulo quatro, onde apresentamos um método de correção de erros que permite a recuperação de estados do sistema mesmo quando este está exposto a uma porta lógica quântica, o que cumpre o primeiro objetivo da dissertação. No capítulo cinco, analisamos como uma medida de tempo finito pode afetar a evolução de um sistema quântico de dois níveis, dando especial atenção ao fato de que o sistema pode ser protegido pela ação da medida. Isso nos motiva ao estudo apresentado no capítulo seis, onde vemos como a medida pode ser usada em conjunto com a codificação dos estados do sistema para a realização de uma computação quântica mais segura, com o que concluímos o segundo objetivo da dissertação.

Capítulo 1 Introdução à computação quântica

Neste capítulo, veremos os conceitos fundamentais de computação quântica necessários para a compreensão deste trabalho. Escrito com o intuito de permitir o entendimento do neófito, este capítulo pressupõe do leitor apenas um conhecimento de cálculo e álgebra linear. Aqueles que já estiverem familiarizados com computação quântica poderão facilmente compreender o restante da dissertação sem o auxílio deste capítulo, desde que conheçam também a segunda quantização e os estados coerentes, apresentados nas duas últimas seções.

1.1 Informação quântica

Qualquer sistema isolado, na mecânica quântica, pode ser descrito por um vetor de estado (10), também conhecido como função de onda quando projetado numa base de uma variável contínua, como posição ou momento. O vetor de estado encapsula toda a informação que temos sobre o sistema, e o ato de obter-se tais informações de um sistema quântico, transportando-as para o ambiente clássico onde podemos analisá-las, é chamado de medida. Dessa forma, as funções de onda são dadas em termos dos resultados de possíveis medidas sobre o sistema que elas representam.

Suponhamos que uma certa medida possa ter uma série de resultados distintos: $r_0, r_1, r_2, \dots$. Por uma questão de simplicidade que se encaixa no espírito dos problemas que trataremos nesta dissertação, vamos supor que esses resultados são discretos, mas podem ser infinitos. Para representar o estado de um sistema quântico logo após uma medida que determine-o como sendo r_n , usamos a chamada representação de Dirac, e escrevemos $|r_n\rangle$. O conjunto de todos os vetores

de estado correspondendo a todos os possíveis resultados de uma certa medida é uma base do chamado espaço de Hilbert, que representaremos pelo símbolo $\mathcal{H}$.

Um espaço vetorial não contém apenas os vetores que pertencem à base, mas também combinações lineares deles. Assim, anteriormente à medida, quando o seu estado ainda não está bem determinado, o sistema pode estar numa combinação de diversos estados clássicos diferentes, o que chamamos de superposição. Tal fenômeno é popularmente ilustrado no exemplo do gato de Schrödinger (11), no qual o felino epônimo está num estado que mistura a vida e a morte. No exemplo que usamos acima, um estado geral do sistema que pode ser medido com os valores $r_0, r_1, r_2, \dots$ será:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |r_n\rangle, \quad (1.1)$$

onde os c_n são coeficientes complexos. O valor destes não é aleatório: a probabilidade de encontrar o sistema no estado $|r_n\rangle$ é proporcional ao valor do módulo quadrado do coeficiente que multiplica tal vetor de estado.

A medida desta variável é representada pelo operador cujos autovetores são aqueles da base, e os autovalores correspondentes são os resultados possíveis da medida, que neste caso representaremos por R :

$$R|r_n\rangle = r_n|r_n\rangle. \quad (1.2)$$

Desde que a base $\{|r_n\rangle\}$ seja ortonormal (o que se representa em notação de Dirac por $\langle r_n|r_m\rangle = \delta_{n,m}$), o elemento de matriz $\langle\psi|R|\psi\rangle$ representa o valor esperado de uma medida R de um sistema inicialmente no estado $|\psi\rangle$:

$$\langle\psi|R|\psi\rangle = \sum_n r_n |c_n|^2 = \langle R\rangle, \quad (1.3)$$

desde que o vetor de estado $|\psi\rangle$ seja também normalizado, ou seja, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, o que equivale a:

$$\sum_n |c_n|^2 = 1. \quad (1.4)$$

Como afirmamos acima, ao término de uma medida que resulte em r_n , o estado do sistema torna-se $|r_n\rangle$. Vemos, portanto, que a medida na mecânica quântica é um processo que envolve a alteração do estado do sistema, após sua interação com um aparato de medida, levando-o de

uma superposição a um estado bem definido classicamente. A compreensão da medida como um processo em que, devido à interação com um ambiente externo, o sistema perde seu estado de superposição, será a que usaremos para modelá-la como um processo contínuo.

A evolução temporal de processos que não envolvem medidas não requer uma interpretação probabilística. Pelo contrário, ela pode ser representada por um operador de evolução temporal $U(t)$ que atua sobre os vetores de estado, levando-os a um resultado final específico:

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle. \quad (1.5)$$

Os vetores de estado têm sua evolução regida pela equação de Schrödinger, que é apresentada como um postulado desprovido de necessidade de demonstração, e que aqui escreveremos em termos do operador evolução temporal $U(t)$:

$$\frac{d}{dt}U(t) = -\frac{i}{\hbar}H(t)U(t), \quad (1.6)$$

onde $H(t)$ é o hamiltoniano, a observável das energias. Em alguns trabalhos da área, escolhe-se as unidades de forma que $\hbar = 1$ (12), com o propósito de eliminar esta constante das expressões. Aqui, sempre escreveremos $\hbar$ explicitamente.

A partir da equação de Schrödinger, é simples provar que a evolução é unitária, isto é, que ela é reversível pela aplicação do conjugado $U^\dagger(t)$. Para comprovarmos isso, primeiro confirmemos que a unitariedade é verdadeira para o instante $t = 0$. De fato, nesse instante a evolução temporal é igual à identidade e, portanto,

$$U(0)U^\dagger(0) = U^\dagger(0)U(0) = 1. \quad (1.7)$$

Agora, multipliquemos a equação de Schrödinger (1.6) pela esquerda por $U^\dagger(t)$ e somemos com o conjugado da mesma equação multiplicado à direita por $U(t)$. Da soma resulta que:

$$\frac{d}{dt} [U^\dagger(t)U(t)] = -\frac{i}{\hbar}U^\dagger(t)H(t)U(t) + \frac{i}{\hbar}U^\dagger(t)H(t)U(t) = 0. \quad (1.8)$$

Assim, como o valor de $U^\dagger(t)U(t)$ não varia com o tempo, a evolução temporal deve permanecer unitária para todos os instantes, conforme queríamos demonstrar.

A unitariedade da evolução demonstra um fato importante com respeito a algoritmos quânticos que os diferencia dos clássicos: eles devem ser desenvolvidos de forma que a

informação não se perca durante o processamento, isto é, eles devem ser reversíveis. Excetuam-se, é claro, as situações em que medidas são realizadas.

1.2 Portas lógicas quânticas

A computação quântica, assim como as formas mais difundidas de computação clássica, trabalha com o armazenamento de informações em objetos que podem assumir estados discretos. Assim como classicamente existe o bit como unidade mínima de informação, em computação quântica define-se o qubit como qualquer sistema que pode ser medido em apenas dois estados distintos (13). Representaremos tais estados por $|0\rangle$ e $|1\rangle$, cada um com uma representação matricial correspondente:

$$|0\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Assim como na computação clássica as operações são realizadas sobre os bits através de sua passagem por portas lógicas como NOT, AND ou XOR, num esquema usual de computação quântica chamamos de porta lógica o processo durante o qual permite-se que o sistema evolua sob a atuação de um certo hamiltoniano durante um período adequado de tempo. Para apenas um qubit, as opções de portas lógicas retringem-se àquelas que podem ser representadas como matrizes 2×2 . É, portanto, útil decompô-la numa base do espaço dessas matrizes, que consistirá de quatro elementos. Para formar essa base, empregaremos as três matrizes de Pauli:

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

que, combinadas com a identidade, podem formar qualquer matriz 2×2 . De fato, todas as matrizes de Pauli apresentam traço (soma dos elementos da diagonal principal) nulo. Por isso, se definirmos o produto interno entre duas matrizes A e B como a operação $\text{Tr}\{A^\dagger B\}$, concluiremos que elas são ortogonais:

$$\text{Tr}\{\sigma_r \sigma_s\} = 2\delta_{r,s}, \quad (1.11)$$

onde substituímos cada um dos índices x, y, z pelos números 1, 2, 3, como faremos recorrentemente neste trabalho.

As matrizes de Pauli são utilizadas extensivamente neste trabalho, de forma que é necessário reconhecer algumas de suas propriedades importantes. Primeiro, elas, em conjunto com a identidade, são fechadas ao produto matricial, formando um grupo (convenientemente referido como grupo de Pauli):

$$\sigma_r \sigma_s = \delta_{r,s} + i\varepsilon_{r,s,t} \sigma_t. \quad (1.12)$$

Dessa propriedade do produto, segue-se que a seguinte relação de comutação:

$$[\sigma_r, \sigma_s] = 2i\varepsilon_{r,s,t} \sigma_t. \quad (1.13)$$

Finalmente, muitas vezes nos referiremos a tais matrizes por um vetor tridimensional que as inclua, $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \sigma_x \hat{\mathbf{x}} + \sigma_y \hat{\mathbf{y}} + \sigma_z \hat{\mathbf{z}}. \quad (1.14)$$

Com esse vetor, podemos obter a seguinte identidade:

$$(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + i(\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.15)$$

que pode ser usada duas vezes para escrever:

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) &= (\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + i[(\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \boldsymbol{\sigma}](\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \\ &= (\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + i(\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{m}} - [(\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \hat{\mathbf{m}}] \cdot \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Como $\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{n}}$ é perpendicular a $\hat{\mathbf{m}}$, a expressão (1.16) perde o segundo termo do lado direito. Além disso, como $\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{m}} = 1$, teremos:

$$(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = 2(\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (1.17)$$

É claro que não é necessário expressar os estados do sistema apenas em termos da base $|0\rangle$ e $|1\rangle$, que é aquela dos autovetores do operador σ_z . É possível também expressá-los em termos da

base de autovetores de σ_x :

$$|0\rangle_x \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad (1.18)$$

$$|1\rangle_x \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (1.19)$$

Pode-se obter a nova base a partir da original com a aplicação da chamada porta de Hadamard. Esta é definida conforme:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_z + \sigma_x), \quad (1.20)$$

de forma que:

$$H|0\rangle = |0\rangle_x, \quad (1.21)$$

$$H|1\rangle = |1\rangle_x, \quad (1.22)$$

$$H|0\rangle_x = |0\rangle, \quad (1.23)$$

$$H|1\rangle_x = |1\rangle. \quad (1.24)$$

Em (1.20), vemos que a porta de Hadamard pode ser expressa como combinação linear de identidades e matrizes de Pauli, assim como, aliás, qualquer operador que atue somente sobre um qubit. Além dessas combinações, que chamamos de rotações, para a criação de um circuito quântico qualquer é necessário o emprego de mais uma porta lógica quântica que permita atuar sobre dois qubits. Para esses casos, ordinariamente escolhe-se a porta lógica CNOT, que, conforme o nome, atua como uma porta lógica NOT (σ_x , em nossa notação) sobre um dos qubits (chamado qubit alvo) apenas quando o valor do qubit de controle for $|1\rangle$. Escolhendo o primeiro qubit como sendo o controle e o segundo como sendo o alvo, a CNOT atua conforme:

$$U_{\text{CNOT}} |0\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle, \quad (1.25)$$

$$U_{\text{CNOT}} |0\rangle \otimes |1\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle, \quad (1.26)$$

$$U_{\text{CNOT}} |1\rangle \otimes |0\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle, \quad (1.27)$$

$$U_{\text{CNOT}} |1\rangle \otimes |1\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle, \quad (1.28)$$

onde o significado preciso do símbolo $\otimes$, que separa os estados dos dois qubits, será explicado na próxima seção.

1.3 Emaranhamento

Na nossa descrição de computadores quânticos, não bastará descrever qubits isolados. Precisaremos tratá-los como partes de sistemas maiores, que podem tanto envolver outros qubits quanto objetos de natureza diferente. Para descrevê-los, emprega-se o produto tensorial, que transforma dois espaços de Hilbert que contêm bases que podem ser medidas independentemente por um espaço total que combina todos os possíveis resultados das duas medidas. Assim, se $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$ são dois espaços de Hilbert cujas bases são $\{|\phi_i\rangle_A\}$ e $\{|\phi_j\rangle_B\}$, respectivamente, então o espaço de Hilbert que resulta do produto tensorial $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ conterá todas as combinações lineares da base composta de todos os possíveis $|\varphi_{i,j}\rangle$:

$$|\varphi_{i,j}\rangle \equiv |\phi_i\rangle_A \otimes |\phi_j\rangle_B. \quad (1.29)$$

Um estado qualquer no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ pode ser expresso como:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j} |\varphi_{i,j}\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j} (|\phi_i\rangle_A \otimes |\phi_j\rangle_B). \quad (1.30)$$

Se o estado ainda puder ser descrito como produto tensorial de dois estados pertencentes a cada um dos espaços de Hilbert em separado, as medidas que se realizem apenas sobre um dos espaços não afetarão as que são realizadas no outro, como no seguinte estado:

$$|\psi\rangle = \left(\sum_i c_i |\psi_i\rangle_A \right) \otimes \left(\sum_j d_j |\psi_j\rangle_B \right). \quad (1.31)$$

O emaranhamento ocorre justamente quando tal separação não é possível, de forma que medidas realizadas em $\mathcal{H}_A$ afetam aquelas que serão realizadas em $\mathcal{H}_B$. Essa é uma propriedade da matéria quântica sem análogo na clássica, notada na década de 1930 por Erwin Schrödinger (14), inspirado pelo paradoxo de Einstein-Podolsky-Rosen (15), que alertava justamente para o fato de que, na mecânica quântica, uma medida em uma partícula pode afetar imediatamente uma partícula distante.

Pela definição da porta CNOT dada nas equações de (1.25), (1.26), (1.27) e (1.28), essa porta não parece satisfazer a condição necessária de emaranhamento de (1.30). Isso é apenas uma questão de aplicá-la ao estado inicial apropriado. Por exemplo:

$$U_{\text{CNOT}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle), \quad (1.32)$$

certamente é um estado emaranhado.

O emaranhamento é um recurso importante para a informação quântica, já que permite estabelecer relações entre os estados de qubits mais fortes do que aquelas que podem ser obtidas com bits clássicos. Porém, neste trabalho nos concentraremos principalmente nos efeitos detrimentalmente que podem haver quando o qubit se emaranha com um ambiente externo. Isto altera o estado do qubit, que já não poderá ser descrito independentemente, acarretando em falhas na computação. O objetivo deste trabalho é estudar métodos que permitam-nos contornar tais falhas, de forma a corrigir tais erros. Na próxima seção, veremos como modelam-se os ambientes que poremos em contato com os qubits.

1.4 Ambientes bosônicos

Os ambientes que descreveremos serão modelados como um banho bosônico. Está além do escopo deste trabalho explicar detalhadamente tal modelo, que pode ser encontrado em livros avançados de mecânica quântica que tratem da segunda quantização (16), mas podemos explicá-lo superficialmente, nos mesmos termos apresentado acima.

Primeiramente, o espaço de Hilbert do ambiente (que simbolizaremos por $\mathcal{H}_A$, de forma a distingui-lo do espaço do sistema sob estudo, $\mathcal{H}_S$) é, na verdade, composto pelo produto tensorial de infinitos espaços, cada um caracterizado por uma frequência ω_k . Cada um desses espaços de Hilbert tem uma base de estados infinita, mas discreta. Os autoestados do hamiltoniano, que formam a chamada base de Fock, serão identificados pelo índice n , de forma que o n -ésimo estado, $|n\rangle_k$, terá energia correspondente $\hbar\omega_k n$. Ou seja, se H_A é o hamiltoniano do ambiente,

$$H_A |n\rangle_k = \hbar\omega_k n |n\rangle_k. \quad (1.33)$$

Para manipular esses estados, empregaremos os operadores de criação $a_k^\dagger$ e aniquilação a_k . Estes são definidos para levar de um estado da base de Fock aos seus vizinhos de índices, somando ou subtraindo 1:

$$a_k^\dagger |n\rangle_k = \sqrt{n+1} |n+1\rangle_k, \quad (1.34)$$

$$a_k |n\rangle_k = \sqrt{n} |n-1\rangle_k. \quad (1.35)$$

Vê-se que, se atua sobre o chamado estado de vácuo, $|0\rangle_k$, o operador aniquilação não produz um estado $|-1\rangle_k$, mas apenas o vetor nulo, devido à presença do fator $\sqrt{0}$. Nota-se ainda que os estados da base de Fock são autovetores das combinações $a_k^\dagger a_k$ e $a_k a_k^\dagger$, como se pode deduzir de suas combinações:

$$a_k a_k^\dagger |n\rangle_k = (n+1) |n\rangle_k, \quad (1.36)$$

$$a_k^\dagger a_k |n\rangle_k = n |n\rangle_k. \quad (1.37)$$

Finalmente, da subtração dessas duas definições operacionais, obtém-se a relação de comutação:

$$[a_k, a_\ell^\dagger] = \delta_{k,\ell}, \quad (1.38)$$

de onde o delta de Kronecker justifica-se pelo fato de que operadores que atuam sobre diferentes espaços de Hilbert sempre comutam entre si.

Empregando os operadores a_k e $a_k^\dagger$, e o valor da energia para cada estado da base de Fock,

conseguimos construir um hamiltoniano para o ambiente:

$$H_A = \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k. \quad (1.39)$$

Trabalhamos até aqui com a base de Fock, mas é claro que não precisamos lidar exclusivamente com a base de autovetores do hamiltoniano. Na verdade, muitas vezes é útil trabalhar com uma base alternativa, como veremos na próxima seção.

1.5 Estados coerentes e operadores de deslocamento

Chamamos de estados coerentes os autovetores do operador destruição. Não é difícil expressar um estado coerente $|\alpha\rangle_k$ em termos da base de Fock, basta resolver a equação de autovalores:

$$a |\alpha\rangle_k = \alpha |\alpha\rangle_k, \quad |\alpha\rangle_k = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle_k. \quad (1.40)$$

Substituindo a expressão para $|\alpha\rangle_k$ em termos da base de Fock e igualando os coeficientes que multiplicam os mesmos vetores dos dois lados, obtemos a fórmula de recorrência:

$$\sqrt{n+1} c_{n+1} = \alpha c_n, \quad (1.41)$$

que, iterativamente, permite expressar qualquer dos coeficientes em termos de c_0 :

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0. \quad (1.42)$$

Empregando-se a expansão da exponencial em série de potências, pode-se escrever o estado coerente também da forma:

$$|\alpha\rangle_k = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_k, \quad (1.43)$$

onde a constante c_0 foi escolhida de forma a normalizar o vetor de estado.

Mesmo sendo possível a normalização, não podemos construir os estados coerentes de forma a mantê-los ortogonais como fazíamos com a base de Fock. De fato, o produto interno de estados distintos $|\alpha\rangle_k$ e $|\beta\rangle_k$ resulta no seguinte, de acordo com a definição:

$$\langle \beta | \alpha \rangle_k = e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2 + \alpha\beta^*}. \quad (1.44)$$

É interessante notar que a passagem para a representação de interação só adiciona uma fase ao estado coerente:

$$e^{-iH_A t} |\alpha\rangle_k = e^{-i\omega_k a_k^\dagger a_k t} |\alpha\rangle_k = |e^{-i\omega_k t} \alpha\rangle_k. \quad (1.45)$$

Sendo essa uma base de autoestados contínua, qualquer vetor de estados expresso nela deve ser escrito com o auxílio de uma integral:

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{C}} d^2\alpha f(\alpha) |\alpha\rangle_k. \quad (1.46)$$

Além disso, a relação de completeza não é escrita tão trivialmente quanto numa base em que os vetores sejam ortonormais. De fato, se escrevermos simplesmente:

$$\int_{\mathbb{C}} d^2\alpha |\alpha\rangle_k \langle \alpha|_k = \sum_{m,n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{C}} d^2\alpha e^{-|\alpha|^2} (\alpha^*)^m \alpha^n \frac{|m\rangle_k \langle n|}{\sqrt{m!n!}}, \quad (1.47)$$

vemos que a relação de completeza na base de Fock ainda não está evidente. Para encontrá-la, devemos fazer a integração em α , para a qual é necessário primeiro dividir a variável complexa em seu módulo r e o argumento θ , de forma que:

$$\alpha = r e^{i\theta}. \quad (1.48)$$

Com as novas variáveis a integral dupla torna-se:

$$\int_{\mathbb{C}} d^2\alpha e^{-|\alpha|^2} (\alpha^*)^m \alpha^n = \int_0^{\infty} dr r e^{-r^2} r^{m+n} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta(m-n)}. \quad (1.49)$$

A integral em θ equivale à delta de Dirac $2\pi\delta_{m,n}$, de forma que na verdade temos

$$\int_{\mathbb{C}} d^2\alpha e^{-|\alpha|^2} (\alpha^*)^m \alpha^n = 2\pi\delta_{m,n} \int_0^{\infty} dr e^{-r^2} r^{2m+1}. \quad (1.50)$$

Mudando a variável da integral restante para $w = r^2$, encontramos uma função gama, que pode ser traduzida num fatorial:

$$\int_{\mathbb{C}} d^2\alpha e^{-|\alpha|^2} (\alpha^*)^m \alpha^n = \pi \delta_{m,n} \int_0^\infty dw e^{-w} w^m = \pi \delta_{m,n} (m+1)!. \quad (1.51)$$

Portanto, obtém-se:

$$\int_{\mathbb{C}} d^2\alpha |\alpha\rangle_k \langle\alpha|_k = \pi \sum_{m=0}^{\infty} |m\rangle_k \langle m|_k, \quad (1.52)$$

o que significa que a relação de completeza escreve-se com o acréscimo de um π^{-1} multiplicando a integral:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2\alpha |\alpha\rangle_k \langle\alpha|_k = 1. \quad (1.53)$$

A mais importante consequência deste resultado é que o traço tomado na base de estados coerentes terá que ser normalizado por π . Provamos isso adicionando a relação de completeza (1.53) a um traço tomado na base de Fock:

$$\text{Tr}_k \{X\} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|_k X |n\rangle_k = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|_k X \int_{\mathbb{C}} d^2\alpha |\alpha\rangle_k \langle\alpha|_n \rangle_k, \quad (1.54)$$

e invertendo a ordem dos elementos de matriz, de forma que a relação de completeza na base de Fock fique explícita:

$$\text{Tr}_k \{X\} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \langle\alpha|_n \rangle_k \langle n|_k X |\alpha\rangle_k = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2\alpha \langle\alpha|_k X |\alpha\rangle_k. \quad (1.55)$$

Tendo definido os estados coerentes, passemos à definição dos operadores deslocamento, que levam um estado coerente a outro, através da adição de um deslocamento α . Assim, um operador de deslocamento $D(\alpha)$ age no estado de vácuo conforme:

$$D(\alpha) |0\rangle_k = |\alpha\rangle_k. \quad (1.56)$$

Um operador que atua dessa forma é facilmente construído a partir da definição de um estado coerente e dos operadores de criação:

$$|\alpha\rangle_k = \left[e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a^\dagger)^n \right] |0\rangle_k = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle_k. \quad (1.57)$$

Pode-se adicionar um $e^{-\alpha^* a}$ à frente do estado de vácuo, sem alterar a expressão acima, pois

só o primeiro termo da expansão em série de potências do operador exponencial, proporcional à identidade, produz efeito não-nulo sobre o estado $|0\rangle_k$. Usando-se adicionalmente a relação de comutação entre os operadores criação e aniquilação (1.38), pode-se usar a expansão de Zassenhaus (18) para escrever o operador deslocamento como:

$$D(\alpha) = e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)} = e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} e^{[\alpha^\dagger, a]|\alpha|^2/2}. \quad (1.58)$$

A adição do termo de aniquilação, que poderia parecer arbitrária, na verdade permite que o deslocamento satisfaça:

$$D(-\alpha) = D^\dagger(\alpha). \quad (1.59)$$

Usando a mesma expansão de Zassenhaus, podemos expandir uma combinação de dois deslocamentos:

$$D(\alpha + \alpha_0) = e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) + (\alpha_0 a^\dagger - \alpha_0^* a)} = D(\alpha) D(\alpha_0) e^{-(\alpha \alpha_0^* - \alpha^* \alpha_0)/2}. \quad (1.60)$$

Daí, fica claro que tais operadores produzem não apenas um deslocamento num estado coerente qualquer $|\alpha_0\rangle_k$, mas também adicionam uma certa fase:

$$D(\alpha) |\alpha_0\rangle_k = D(\alpha) D(\alpha_0) |0\rangle_k = e^{(\alpha \alpha_0^* - \alpha^* \alpha_0)/2} |\alpha_0 + \alpha\rangle_k. \quad (1.61)$$

Finalmente, podemos empregar esse operador para criar um operador aniquilação cujos autovalores estejam deslocados de um valor α . Para isso aplicamos:

$$D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) |\alpha_0\rangle_k = (\alpha_0 + \alpha) |\alpha_0\rangle_k, \quad (1.62)$$

o que pode ser empregado inclusive em exponenciais, como a expansão em série revela:

$$e^{a+\alpha} = D^\dagger(\alpha) e^a D(\alpha). \quad (1.63)$$

O último resultado (1.63) será necessário no Apêndice A para o cálculo de traços com a utilização de estados coerentes.

Estas são todas as regras que precisaremos saber para entender a evolução de sistemas que não estejam interagindo com outros. Porém, caso não tenhamos acesso a todas as partes que

evoluem em conjunto, teremos de considerar a teoria de sistemas abertos, descrita no próximo capítulo, na qual levamos em conta a situação em que o sistema possa estar interagindo com o restante do universo.

Capítulo 2 Sistemas quânticos abertos

Desde o princípio da computação quântica, sabe-se que uma descrição realista de um computador quântico deve levar em conta não apenas os qubits, mas também as interações acidentais que estes têm com um ambiente externo gerando resultados inesperados com os quais precisamos lidar (4).

A descrição dos sistemas abertos é obtida adicionando-se um espaço de Hilbert para o ambiente bosônico, $\mathcal{H}_A$, ao espaço já reservado ao sistema de qubits, $\mathcal{H}_S$. O espaço de Hilbert total, obtido com o produto tensorial dos dois estados originais, deverá ser empregado nas equações que utilizaremos para descrever a dinâmica do sistema, já que o sistema total é isolado, e, portanto, evolui unitariamente e deterministicamente de acordo com a equação de Schrödinger. A diferença é que o ambiente será descartado ao final, de forma que a evolução de apenas o sistema que nos interessa, $\mathcal{H}_S$, não será mais unitária, mas probabilística.

2.1 Equação de von Neumann

Em situações como essa, o sistema S emaranha-se com o ambiente A . A evolução unitária dos dois permite que o estado total de ambos possa ser descrito em termos de um vetor de estado bem determinado. Porém, o fato de os dois estarem emaranhados impede que o estado do sistema isoladamente seja passível de ser descrito da mesma forma. Pelo contrário, haverá mais de uma função de onda capaz de ser associada com o sistema de interesse, como pode ser visto se tentarmos separar um estado emaranhado como (1.30).

Por isso, descreveremos o estado do sistema através do operador densidade, que permite a descrição tanto de estados puros (representáveis por vetores estado) ou misturas, que representam *ensembles* estatísticos de vários estados puros possíveis. Assim, a forma mais geral de qualquer operador densidade ρ pode ser escrita em termos de um conjunto de vetores de estado $|\psi_i\rangle$, cada

um associado com uma probabilidade p_i :

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad \sum_i p_i = 1. \quad (2.1)$$

O valor esperado da medida de um sistema descrito por um operador densidade, portanto, será dado pela operação de traço:

$$\sum_i p_i \langle R \rangle_i = \sum_i \langle \psi_i | p_i R | \psi_i \rangle = \text{Tr} \left\{ \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| R \right\} = \text{Tr} \{ \rho R \}. \quad (2.2)$$

Pela definição, a soma dos elementos da diagonal da representação matricial de um operador densidade é sempre igual a 1, o que equivale a dizer que o traço é unitário:

$$\text{Tr} \{ \rho \} = \sum_i p_i \langle \psi_i | \psi_i \rangle = 1. \quad (2.3)$$

Os elementos da diagonal principal, numa certa base, são as chamadas populações, enquanto que os elementos fora dela são as coerências. Como estados do tipo $|\psi_i\rangle \langle \psi_i|$, escolhida a base apropriada, só contêm termos na diagonal, vemos que a superposição está relacionada com as coerências. Por isso, o processo de medida estará relacionado com a perda do valor dessas coerências.

A evolução de um sistema isolado deste tipo é dada pela equação de von Neumann, derivada diretamente da equação de Schrödinger (1.6), sujeitando os vetores de estado da definição (2.1) à sua equação de evolução apropriada:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \rho(t)]. \quad (2.4)$$

A solução de tal equação é bastante simples. Dado que o operador evolução temporal do sistema é $U(t)$, a evolução é certamente escrita como:

$$\rho(t) = U(t) \rho(0) U^\dagger(t). \quad (2.5)$$

Essa equação necessariamente refere-se a todas as porções do sistema, isto é, a matriz densidade $\rho(t)$ deve ser a matriz densidade total, assim como o hamiltoniano deve ser aquele que descreve os estados de energia de todo o sistema. Quando retiramos de nossa descrição as porções do sistema que não nos interessam, encontramos as novas equações não-unitárias que levam à evolução irreversível dos sistemas abertos, responsáveis tanto pelos fenômenos de erros

quânticos quanto pelas medidas.

A obtenção de tal informação é feita pelo procedimento de traço parcial, no qual os graus de liberdade que não pertencem ao sistema de interesse são descartados. Ao final dela, obtemos um operador que descreve apenas o sistema em consideração, como se tivéssemos considerado apenas a evolução dele desde o princípio. Sendo $\{|\phi_j\rangle_A\}$ uma base do espaço de Hilbert do ambiente $\mathcal{H}_A$, o traço parcial é obtido através de:

$$\rho_S = \text{Tr}_A \{\rho_{SA}\} = \sum_j \langle \phi_j |_A \rho_{SA} | \phi_j \rangle_A. \quad (2.6)$$

O operador resultante, ρ_S , chamado de operador densidade reduzido, representa apenas o estado da parte do sistema que é relevante para este estudo.

2.2 Operadores de Kraus

Enquanto que a evolução de um sistema isolado sempre pode ser descrita através da aplicação de um operador unitário (1.5), a evolução de um sistema aberto pode ser descrita pela generalização direta desses operadores, chamados de operadores de Kraus. A demonstração de sua origem é deveras simples. Primeiro, consideramos o sistema completo, formado pelo espaço de Hilbert total $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$, que evolui unitariamente segundo o operador de evolução temporal $U(t)$:

$$\rho_{SA}(t) = U(t)\rho_{SA}(0)U^\dagger(t). \quad (2.7)$$

Tomando o traço parcial (2.6), encontramos a evolução apenas do sistema, que não pode mais ser descrita em termos tão simples:

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_A \left\{ U(t)\rho_{SA}(0)U^\dagger(t) \right\}. \quad (2.8)$$

Desde que o sistema seja inicialmente separável do ambiente, como nos casos que trataremos neste trabalho (já que, por hipótese, o sistema só começa a emaranhar-se com o ambiente em $t > 0$), podemos escrever o estado inicial da matriz densidade como:

$$\rho_{SA}(0) = \rho_S(0) \otimes \sum_i p_i |\psi_i\rangle_A \langle\psi_i|_A. \quad (2.9)$$

Dessa forma, escolhendo uma base completa $\{|\phi_j\rangle_A\}$, o traço parcial pode ser expresso conforme:

$$\rho_S(t) = \sum_{i,j} p_i \langle\phi_j|_A U(t) |\psi_i\rangle_A \rho_S(0) \langle\psi_i|_A U^\dagger(t) |\phi_j\rangle_A. \quad (2.10)$$

Definindo os operadores de Kraus como:

$$E_{i,j}(t) \equiv \sqrt{p_i} \langle\phi_j|_A U(t) |\psi_i\rangle_A, \quad (2.11)$$

a evolução completa do sistema pode ser expressa em termos deles:

$$\rho_S(t) = \sum_{i,j} E_{i,j}(t) \rho_S(0) E_{i,j}^\dagger(t). \quad (2.12)$$

É importante notar que os operadores de Kraus satisfazem a seguinte propriedade, obtida a partir de sua definição (2.11) e equivalente à unitariedade dos operadores de evolução temporal:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} E_{i,j}^\dagger(t) E_{i,j}(t) &= \sum_i p_i \langle\psi_i|_A U^\dagger(t) \left(\sum_j |\phi_j\rangle_A \langle\phi_j|_A \right) U(t) |\psi_i\rangle_A \\ &= \sum_i p_i \langle\psi_i|_A U^\dagger(t) U(t) |\psi_i\rangle_A \\ &= \sum_i p_i \langle\psi_i| \psi_i\rangle_A \\ &= \sum_i p_i \\ &= 1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nas aplicações seguintes desses operadores, vamos unificar os índices num só, para manter o número de somatórias mais compacto.

2.3 Equação de Lindblad

A equação de Lindblad é uma equação diferencial para o operador densidade reduzido $\rho_S(t)$, equivalente à função que a equação de von Neumann desempenha para o operador densidade total $\rho_{SA}(t)$, mas que emprega a aproximação markoviana para simplificar a evolução do sistema. Sabendo que a evolução de tais sistemas é dada pelos operadores de Kraus acima, podemos obter a equação diferencial a partir deles. A demonstração abaixo é semelhante à encontrada em (17).

Os operadores que atuam no sistema certamente podem ser expressos como elementos de um espaço vetorial, assim como os vetores de estado pertencem ao espaço de Hilbert. Nesse espaço, denominado espaço de Liouville, definimos o produto interno como sendo o traço tomado sobre o operador e seu hermitiano conjugado, de forma que uma base ortonormal $\{F_i\}$ de operadores satisfaz:

$$\text{Tr}_S \{F_i F_j^\dagger\} = \delta_{i,j}. \quad (2.14)$$

Em termos dessa base independente do tempo, expressam-se os operadores de Kraus conforme:

$$E_i(t) = \sum_j c_{i,j}(t) F_j, \quad (2.15)$$

de forma que, o que era uma dependência temporal sobre operadores agora torna-se de escalares:

$$\rho_S(t) = \sum_k \sum_{r,s} [c_{k,r}(t) c_{k,s}^*(t)] F_r \rho_S(0) F_s^\dagger. \quad (2.16)$$

Suponhamos que um dos elementos do conjunto ortonormal é proporcional à identidade. Vamos representá-lo pelo índice 0, e dá-lo uma constante de normalização α , tal que:

$$\alpha^{-1} = \text{Tr}_S \{1\}, \quad (2.17)$$

de forma que a equação agora poderá ser representada como:

$$\begin{aligned} \rho_S(t) = & |\alpha|^2 \sum_k [c_{k,0}(t)c_{k,0}^*(t)] \rho_S(0) + \alpha \sum_{s \neq 0} \sum_k [c_{k,0}(t)c_{k,s}^*(t)] \rho_S(0) F_s^\dagger \\ & + \alpha^* \sum_{r \neq 0} \sum_k [c_{k,r}(t)c_{k,0}^*(t)] F_r \rho_S(0) + \sum_{r,s \neq 0} \sum_k [c_{k,r}(t)c_{k,s}^*(t)] F_r \rho_S(0) F_s^\dagger. \end{aligned} \quad (2.18)$$

O diferencial da equação de Lindblad é que ela usa a aproximação markoviana: a evolução da matriz densidade reduzida só depende de seu estado presente, ignorando a sua evolução em momentos anteriores. Isso quer dizer que podemos tratar a evolução do sistema como se a variação do instante t ao instante $t + \Delta t$ fosse a mesma que regesse a evolução inicial até Δt . Nesse caso,

$$\rho_S(t + \Delta t) = \sum_k E_k(\Delta t) \rho_S(t) E_k^\dagger(\Delta t). \quad (2.19)$$

A derivada temporal da matriz densidade reduzida é dada por:

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho_S(t + \Delta t) - \rho_S(t)}{\Delta t}, \quad (2.20)$$

o que, usando tanto a aproximação markoviana quanto a expressão em termos da base $\{F_i\}$, torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_S(t) = & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\alpha|^2 d_{0,0}(\Delta t) - 1}{\Delta t} \rho_S(t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha \sum_{s \neq 0} \frac{d_{0,s}(\Delta t)}{\Delta t} \rho_S(t) F_s^\dagger \\ & + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha^* \sum_{r \neq 0} \frac{d_{r,0}(\Delta t)}{\Delta t} F_r \rho_S(t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{r,s \neq 0} \frac{d_{r,s}(\Delta t)}{\Delta t} F_r \rho_S(t) F_s^\dagger, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde substituímos os escalares $c_{k,r}(\Delta t)$ por:

$$d_{r,s}(t) \equiv \sum_k c_{k,r}(t) c_{k,s}^*(t). \quad (2.22)$$

Se expandirmos essa nova função em termos de uma série de potências no tempo, encontraremos, se impusermos o respeito das condições iniciais:

$$d_{r,s}(\Delta t) = |\alpha|^{-2} \delta_{r,0} \delta_{s,0} + \Delta t d_{r,s}^{(1)} + O(\Delta t^2), \quad (2.23)$$

o que leva ao seguinte valor da derivada:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = |\alpha|^2 d_{0,0}^{(1)}\rho_S(t) + \alpha \sum_{s \neq 0} d_{0,s}^{(1)}\rho_S(t)F_s^\dagger + \alpha^* \sum_{r \neq 0} d_{r,0}^{(1)}F_r\rho_S(t) + \sum_{r,s \neq 0} d_{r,s}^{(1)}F_r\rho_S(t)F_s^\dagger. \quad (2.24)$$

Se definirmos os operadores:

$$\begin{aligned} G &\equiv \frac{|\alpha|^2}{2} * d_{0,0}^{(1)} + \left(\alpha^* \sum_{r \neq 0} d_{r,0}^{(1)}F_r + \alpha \sum_{s \neq 0} d_{0,s}^{(1)}F_s^\dagger \right), \\ H &\equiv i\hbar \left(\alpha^* \sum_{r \neq 0} d_{r,0}^{(1)}F_r - \alpha \sum_{s \neq 0} d_{0,s}^{(1)}F_s^\dagger \right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

podemos representar a evolução temporal por meio de um comutador e um anticomutador:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho_S(t)] + \{G, \rho_S(t)\} + \sum_{r,s \neq 0} d_{r,s}^{(1)}F_r\rho_S(t)F_s^\dagger. \quad (2.26)$$

Como o traço do operador densidade deve permanecer constante e igual a um, encontramos a condição:

$$\text{Tr}_S \left\{ \left[2G + \sum_{r,s \neq 0} d_{r,s}^{(1)}F_s^\dagger F_r \right] \rho_S(t) \right\} = 0, \quad (2.27)$$

que é válida para qualquer $\rho_S(t)$ apenas se tivermos:

$$G = -\frac{1}{2} \sum_{r,s \neq 0} d_{r,s}^{(1)}F_s^\dagger F_r, \quad (2.28)$$

de forma que a equação diferencial torna-se:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho_S(t)] + \sum_{r,s \neq 0} d_{r,s}^{(1)} \left[F_s^\dagger \rho_S(t) F_r - \frac{1}{2} \left\{ F_s^\dagger F_r, \rho_S(t) \right\} \right]. \quad (2.29)$$

Como só fixamos um elemento da base $\{F_i\}$, ao qual impusemos uma proporcionalidade com a identidade, temos bastante liberdade para a escolha dos demais operadores F_r . Escolhendo-os de forma que $d_{r,s}^{(1)} = \delta_{r,s}$, obtemos a equação de Lindblad:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho_S(t)] + \sum_r \left[F_r^\dagger \rho_S(t) F_r - \frac{1}{2} \{ F_r^\dagger F_r, \rho_S(t) \} \right]. \quad (2.30)$$

É importante lembrar que a equação de Lindblad é uma generalização para sistemas abertos da evolução markoviana típica de operadores densidade de sistemas fechados. Portanto, ela deve ser capaz de recuperar a equação de von Neumann para uma escolha adequada dos operadores de Lindblad $\{F_r\}$. Dessa forma, é natural identificar o operador H com o hamiltoniano do sistema isolado, conforme a própria notação escolhida sugere. Por essa razão, o primeiro termo do lado direito da equação (2.30) é denotado de liouvilliano, enquanto o segundo representa o lindbladiano. Nos cálculos subsequentes, representaremos o primeiro por $\mathcal{L}$ e o segundo por $\mathcal{M}$:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}\rho_S(t) + \mathcal{M}\rho_S(t). \quad (2.31)$$

É importante lembrar que, devido à forma da equação de Lindblad (2.30), o lindbladiano e o liouvilliano não são meros operadores, mas sim superoperadores, já que eles incluem comutadores ou anticomutadores, ou seja, são operadores que atuam sobre operadores.

Neste trabalho, a equação de Lindblad será empregada para representar a evolução de medidas finitas ruidosas. O termo lindbladiano $\mathcal{M}$, markoviano, será usado para representar a medida, atuando somente no sistema, enquanto o termo não-markoviano $\mathcal{L}$ é empregado para representar o ruído, incluindo, portanto, termos que atuam também no ambiente.

A modelagem da medida é simples: substituímos um único operador de Lindblad F_r pela observável que queremos medir multiplicada por uma constante real λ , que encapsula a intensidade da medida. Como veremos nos capítulos 5 e 6, isso fará com que as coerências na base dessa medida vão a zero, como é esperado da medida de uma observável. Para mais de uma medida simultânea, como necessitaremos no capítulo 6, vamos simplesmente adicionar quantos lindbladianos necessitarmos.

2.4 Perturbações

Nestes problemas, estamos sempre considerando que o sistema S modifica-se principalmente através de sua própria evolução, apenas sofrendo modificações pequenas devido ao efeito de

sua interação com o ambiente A . Assim, se dividirmos o hamiltoniano em termos que atuam individualmente em cada um dos espaços de Hilbert, que chamaremos de H_S e H_A , e um termo de interação que atua nos dois, que denotamos por H_{int} , devemos sempre poder escrever este último como multiplicado por um número pequeno η :

$$H = H_S + H_A + \eta H_{\text{int}}. \quad (2.32)$$

Sendo esse termo η realmente pequeno, podemos escrever o estado do sistema como uma expansão em séries de potências dele, desprezando aqueles de maior ordem. Normalmente, estes são conservados até segunda ordem:

$$\rho(t) = \rho^{(0)}(t) + \eta \rho^{(1)}(t) + \eta^2 \rho^{(2)}(t) + O(\eta^3). \quad (2.33)$$

Esta é, portanto, uma teoria de perturbação dependente do tempo adaptada ao nosso problema, que envolve operadores densidade e que será expressa em termos de operadores de evolução temporal, ou seja, das portas lógicas às quais nossos qubits estarão sujeitos.

Expandindo a evolução temporal numa série de potências da intensidade da perturbação, encontramos:

$$U(t) = U_S(t)U_A(t) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \eta^k C_k(t) \right], \quad (2.34)$$

onde os $U_S(t)$ e $U_A(t)$ são evoluções devidas apenas aos hamiltonianos H_S e H_A , isoladamente. A condição de unitariedade do operador densidade nos permite escrever os hermitianos conjugados dos $C_k(t)$:

$$C_k^\dagger(t) = -C_k(t) - \sum_{j=1}^{k-1} C_j(t) C_{k-j}^\dagger(t). \quad (2.35)$$

Até a segunda ordem, que contém os termos que nos interessam, os $C_k(t)$ são:

$$\begin{aligned} C_1^\dagger(t) &= -C_1(t), \\ C_2^\dagger(t) &= C_1(t)C_1(t) - C_2(t). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Com esse conjunto de operadores, podemos escrever o estado final do sistema como:

$$\begin{aligned} \rho_{SA}(t) = & U_S(t)U_A(t) \left\{ \rho_{SA}(0) + \eta [C_1(t), \rho_{SA}(0)] - \eta^2 [C_1(t), \rho_{SA}(0)C_1(t)] + \eta^2 [C_2(t), \rho_{SA}(0)] \right\} \\ & \times U_S^\dagger(t)U_A^\dagger(t) + O(\eta^3). \end{aligned} \quad (2.37)$$

A dificuldade restante é obter os operadores $C_k(t)$. A partir de sua definição na equação (2.34), podemos obter cada um deles pela derivada:

$$C_k(t) = U_S^\dagger(t)U_A^\dagger(t) \left. \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} U(t) \right|_{\eta=0}. \quad (2.38)$$

O valor de cada uma das derivadas parciais pode ser determinado através do emprego da identidade de Snider (C.5). Com auxílio desta conclui-se que:

$$C_1(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' U_S^\dagger(t') H_I(t') U_S(t') \quad (2.39)$$

$$C_2(t) = \frac{1}{2} [C_1(t)]^2 - \frac{1}{2\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \left[U_S^\dagger(t') H_I(t') U_S(t'), U_S^\dagger(t'') H_I(t'') U_S(t'') \right], \quad (2.40)$$

onde empregamos o hamiltoniano na representação de interação $H_I(t) \equiv U_A^\dagger(t) H_{\text{int}} U_A(t)$.

De posse das expressões para os dois primeiros $C_k(t)$, tomamos o traço parcial sobre $\rho_{SA}(t)$, já que estamos interessados apenas no operador densidade reduzido do ambiente:

$$\begin{aligned} \rho_S(t) = & U_S(t) \left\{ \rho_S(0) - \frac{i}{\hbar} \eta \left[\int_0^t dt' U_S^\dagger(t') \text{Tr}_A \{ H_I(t') \rho_A(0) \} U_S(t'), \rho_S(0) \right] \right. \\ & + \frac{\eta^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' U_S^\dagger(t') \text{Tr}_A \left\{ H_I(t') U_S(t') \rho_{SA}(0) U_S^\dagger(t'') H_I(t'') \right\} U_S(t'') \\ & - \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \text{Tr}_A \left\{ \left[U_S^\dagger(t') H_I(t') U_S(t') U_S^\dagger(t'') H_I(t'') U_S(t''), \rho_{SA}(0) \right] \right\} \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \text{Tr}_A \left\{ \left[\left[U_S^\dagger(t') H_I(t') U_S(t'), U_S^\dagger(t'') H_I(t'') U_S(t'') \right], \rho_{SA}(0) \right] \right\} \right\} \\ & \times U_S^\dagger(t) + O(\eta^3), \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde usamos o fato de que, como o sistema e o ambiente estão inicialmente não-emaranhados, seus estados são separáveis:

$$\rho_{SA}(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_A(0). \quad (2.42)$$

Usualmente faz-se a hipótese de que $\text{Tr}_A \{H_I(t')\rho_A(0)\} = 0$, (17) para que os termos de primeira ordem na perturbação se anulem. Isso é especialmente válido para os casos em que o ambiente é modelado como um banho bosônico, em cujo caso o hamiltoniano de interação geralmente pode ser escrito como uma soma de termos que incluem apenas um operador de criação ou de destruição atuando sobre o ambiente. Como o valor esperado de qualquer um desses operadores sempre se anula

$$\text{Tr}_A \{a\rho_A(0)\} = \text{Tr}_A \{a^\dagger\rho_A(0)\} = 0, \quad (2.43)$$

desde que suponhamos o ambiente inicialmente num estado térmico:

$$\rho_A(0) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H_A}, \quad Z = \text{Tr}_A \{e^{-\beta H_A}\}, \quad (2.44)$$

o traço do hamiltoniano com a matriz densidade também se anula, levando ao desaparecimento dos termos de primeira ordem, conforme o esperado. Vamos aproveitar esse ponto para também incorporar a evolução devida à porta lógica à interação, definindo um novo hamiltoniano de interação $\tilde{H}_I(t) \equiv U_S^\dagger(t)H_I(t)U_S(t)$, e um operador densidade na representação de interação $\tilde{\rho}_S(t) = U_S^\dagger(t)\rho_S(t)U_S(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_S(t) = & \rho_S(0) + \frac{\eta^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \text{Tr}_A \{ \tilde{H}_I(t')\rho_A(0)\rho_S(0)\tilde{H}_I(t'') \} \\ & - \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \left\{ \text{Tr}_A \{ \tilde{H}_I(t')\tilde{H}_I(t'')\rho_A(0) \}, \rho_S(0) \right\} \\ & - \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \left[\text{Tr}_A \{ [\tilde{H}_I(t'), \tilde{H}_I(t'')] \rho_A(0) \}, \rho_S(0) \right] \\ & + O(\eta^3). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Tomando a primeira derivada temporal da expressão (2.45), encontramos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = -\frac{\eta^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_A \left\{ [\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(t'), \rho_A(0)\rho_S(0)]] \right\} + O(\eta^3), \quad (2.46)$$

que, em conjunto com a aproximação $\tilde{\rho}_S(t) = \rho_S(0) + O(\eta^2)$ e com a incorporação dos η aos hamiltonianos de interação, nos dá a equação-mestra de Redfield (19), válida para pequenos valores de η :

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \operatorname{Tr}_A \left\{ \left[\tilde{H}_I(t), \left[\tilde{H}_I(t'), \rho_A(0)\tilde{\rho}_S(t) \right] \right] \right\}. \quad (2.47)$$

A equação-mestra, como a sua derivação nos mostra, dá a evolução aproximada do sistema para situações de interação fraca. Apesar de não usarmos a equação de Redfield diretamente nesta dissertação, sua derivação correta ilustra como este método perturbativo funciona e servirá de ponto de partida para a derivação da equação-mestra híbrida, esta utilizada para o cálculo aproximado da evolução das medidas ruidosas.

2.5 Equação-mestra híbrida

Agora que já vimos como derivar a equação-mestra a partir da equação de von Neumann (2.4), vamos ver como ela pode ser derivada de uma equação de Lindblad (2.30), necessária para nossa descrição de uma medida ruidosa. Isso será feito pela substituição, no procedimento anterior, dos operadores hamiltoniano e de evolução temporal por superoperadores equivalentes. Assim, se originalmente o operador evolução temporal obedecia uma equação diferencial derivada da equação de Schrödinger, a evolução do operador densidade total $\rho_{SA}(t)$ agora será dada por um superoperador $\mathcal{U}(t)$:

$$\rho_{SA}(t) = \mathcal{U}(t)\rho_{SA}(0), \quad (2.48)$$

que deverá satisfazer a equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U}(t) = [\mathcal{L} + \mathcal{M}]\mathcal{U}(t), \quad (2.49)$$

onde $\mathcal{L}$ representa o liouvilliano, responsável pela evolução unitária do sistema e do ambiente, enquanto $\mathcal{M}$ é o lindbladiano, responsável por modelar a medida. Note que estamos supondo que nenhum dos dois depende do tempo, o que é suficiente para nossos propósitos.

Novamente considerando a interação entre o ambiente e o sistema como fraca e proporcional a um número pequeno η , podemos expandir o superoperador de evolução temporal numa série de potências de η :

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_0(t) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \eta^k \mathcal{C}_k(t) \right]. \quad (2.50)$$

onde $\mathcal{U}_0(t)$ representa a evolução temporal no caso em que não há interação sistema-ambiente, ou seja, quando $\eta = 0$. Analogamente ao procedimento da seção anterior, podemos encontrar expressões para os $\mathcal{C}_k(t)$:

$$\mathcal{C}_k(t) = \mathcal{U}_0(-t) \left. \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} \mathcal{U}(t) \right|_{\eta=0}. \quad (2.51)$$

De posse dessa expressão e da fórmula de Snider para superoperadores (C.11), derivada no Apêndice C, encontramos os dois primeiros desses $\mathcal{C}_k(t)$:

$$\mathcal{C}_1(t) = \int_0^t dt' \mathcal{U}_0(-t') \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \mathcal{U}_0(t'), \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2(t) = & \frac{1}{2} [\mathcal{C}_1(t)]^2 + \frac{1}{2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \left[\mathcal{U}_0(-t') \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \mathcal{U}_0(t') \mathcal{U}_0(-t'') \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \mathcal{U}_0(t'') \right] \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \left[\mathcal{U}_0(-t') \mathcal{U}_0(t'') \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \mathcal{U}_0(-t'') \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \mathcal{U}_0(t') \right]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Conhecidas tais funções, tomamos a derivada e o traço parcial da expressão (2.48), de forma a obtermos uma equação diferencial aproximada para a evolução da matriz densidade reduzida:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_S(t) = & \text{Tr}_A \left\{ \frac{d}{dt} \mathcal{U}_0(t) \rho_{SA}(0) \right\} + \text{Tr}_A \left\{ \eta \mathcal{U}_0(t) \frac{d}{dt} \mathcal{C}_1(t) \rho_{SA}(0) \right\} \\ & + \text{Tr}_A \left\{ \eta^2 \mathcal{U}_0(t) \frac{d}{dt} \mathcal{C}_2(t) \rho_{SA}(0) \right\} + O(\eta^3). \end{aligned} \quad (2.54)$$

De acordo com os resultados acima, as derivadas dos $\mathcal{C}_k(t)$ são:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{C}_1(t) = \mathcal{U}_0(-t)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta}\mathcal{U}_0(t), \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{C}_2(t) &= \frac{1}{2} \left[\int_0^t dt' \mathcal{U}_0(-t') \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} \mathcal{U}_0(t') \right] \mathcal{U}_0(-t) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} \mathcal{U}_0(t) \\ &\quad + \mathcal{U}_0(-t) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} \mathcal{U}_0(t) \left[\int_0^t dt' \mathcal{U}_0(-t') \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} \mathcal{U}_0(t') \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathcal{U}_0(-t) \left[\int_0^t dt' \mathcal{U}_0(t') \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} \mathcal{U}_0(-t') \right] \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} \mathcal{U}_0(t). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Usando a propriedade $\mathcal{U}(t_1)\mathcal{U}(t_2) = \mathcal{U}(t_1 + t_2)$, válida pois estes não passam de exponenciais de superoperadores multiplicados pelo tempo, podemos mudar de variável de integração de t' para $t - t'$, de forma que encontraremos a igualdade:

$$\mathcal{U}_0(-t) \left[\int_0^t dt' \mathcal{U}_0(t') \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} \mathcal{U}_0(-t') \right] = \left[\int_0^t dt' \mathcal{U}_0(-t') \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} \mathcal{U}_0(t') \right] \mathcal{U}_0(-t). \quad (2.57)$$

Portanto, a derivada de $\mathcal{C}_2(t)$ simplifica-se para:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{C}_2(t) = \mathcal{U}_0(-t) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} \mathcal{U}_0(t) \left[\int_0^t dt' \mathcal{U}_0(-t') \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} \mathcal{U}_0(t') \right]. \quad (2.58)$$

Substituindo essas duas derivadas na equação diferencial, encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S(t) &= \text{Tr}_A \left\{ \frac{d}{dt} \mathcal{U}_0(t) \rho_{SA}(0) \right\} + \eta \text{Tr}_A \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} \mathcal{U}_0(t) \rho_{SA}(0) \right\} \\ &\quad + \eta^2 \text{Tr}_A \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} \mathcal{U}_0(t) \left[\int_0^t dt' \mathcal{U}_0(-t') \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} \mathcal{U}_0(t') \right] \rho_{SA}(0) \right\} + O(\eta^3). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Agora torna-se conveniente abrir o liouvilliano explicitamente nas partes que agem no sistema, no ambiente, e no termo de interação proporcional a η , de forma que sua derivada será:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta}\rho = -\frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial\eta} [H_A + H_S + \eta H_{\text{int}}, \rho] = -\frac{i}{\hbar} [H_{\text{int}}, \rho]. \quad (2.60)$$

Já o superoperador $\mathcal{U}_0(t)$ pode ser expresso da forma:

$$\mathcal{U}_0(t)\rho = e^{-iH_A t/\hbar} [e^{\mathcal{S}t}\rho] e^{iH_A t/\hbar}, \quad (2.61)$$

onde o superoperador $\mathcal{S}$ inclui todos os termos que atuam somente sobre o sistema, que são o

hamiltoniano H_S e o lindbladiano de medida $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{S}\rho \equiv -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho] + \mathcal{M}\rho. \quad (2.62)$$

Substituindo esses resultados na equação diferencial, encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S(t) &= \text{Tr}_A \left\{ (\mathcal{L} + \mathcal{M})_{\eta=0} \mathcal{U}_0(t) \rho_{SA}(0) \right\} \\ &\quad - \frac{\eta^2}{\hbar^2} \text{Tr}_A \left\{ \left[H_{\text{int}}, \mathcal{U}_0(t) \int_0^t dt' \mathcal{U}_0(-t') [H_{\text{int}}, \mathcal{U}_0(t') \rho_{SA}(0)] \right] \right\} + O(\eta^3). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Empregando o hamiltoniano da representação de interação $H_I(t) \equiv e^{iH_A t/\hbar} H_{\text{int}} e^{-iH_A t/\hbar}$, encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S(t) &= e^{\mathcal{S}t} \text{Tr}_A \left\{ (\mathcal{L} + \mathcal{M})_{\eta=0} \rho_{SA}(0) \right\} \\ &\quad - \frac{\eta^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_A \left\{ \left[H_I(t), e^{\mathcal{S}(t-t')} [H_I(t'), e^{\mathcal{S}t'} \rho_{SA}(0)] \right] \right\} + O(\eta^3). \end{aligned} \quad (2.64)$$

De acordo com a definição de $\mathcal{S}$, teremos:

$$\begin{aligned} \rho_S(t) \rho_A(0) &= \text{Tr}_A \{ \rho_{SA}(t) \} \rho_A(0) \\ &= \text{Tr}_A \{ \mathcal{U}_0(t) \rho_{SA}(0) \} \rho_A(0) + O(\eta) \\ &= \text{Tr}_A \{ e^{\mathcal{S}t} \rho_{SA}(0) \} \rho_A(0) + O(\eta) \\ &= e^{\mathcal{S}t} \rho_{SA}(0) + O(\eta) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Além disso, como $\text{Tr}_A \{ [H_A, \rho_{SA}(0)] \} = 0$, e pela mesma consideração que descartou o termo de primeira ordem na equação de Redfield, encontramos:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{S}\rho_S(t) - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_A \left\{ \left[H_I(t), e^{\mathcal{S}(t-t')} [H_I(t'), e^{-\mathcal{S}(t-t')} \rho_S(t) \rho_A(0)] \right] \right\}, \quad (2.66)$$

onde já descartamos os termos de ordem maior e incorporamos os parâmetros η aos hamiltonianos de interação.

Como geralmente escolhemos $\rho_A(0)$ no estado térmico (2.44), temos $[\rho_A(0), e^{\pm iH_A t/\hbar}] = 0$, o que podemos empregar para reescrever a equação diferencial conforme:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{S}\rho_S(t) - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \operatorname{Tr}_A \left\{ \left[H_I(t-t'), e^{\mathcal{S}(t-t')} \left[H_I(0), e^{-\mathcal{S}(t-t')} \rho_S(t) \rho_A(0) \right] \right] \right\}. \quad (2.67)$$

Mudando a variável de integração para $\tau = t - t'$, encontramos uma fórmula mais simples:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{S}\rho_S(t) - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \operatorname{Tr}_A \left\{ \left[H_I(\tau), e^{\mathcal{S}\tau} \left[H_I(0), e^{-\mathcal{S}\tau} \rho_S(t) \rho_A(0) \right] \right] \right\}. \quad (2.68)$$

Esta última equação, chamada de equação-mestra híbrida e derivada de maneira diversa por Carlos Alexandre Brasil e Reginaldo de Jesus Napolitano (20), completa o conjunto de equações que necessitaremos para tratar de sistemas abertos nesta dissertação. No próximo capítulo, veremos uma aplicação direta de como tratar os qubits como sistema aberto, mostrando como podem ser corrigidos os erros originários dessa interação.

Capítulo 3 Teoria de correção de erros quânticos

Diversas formas de superar as dificuldades impostas pelas incorreções que podem surgir durante a computação quântica foram sugeridas desde a década de 1990 (5, 22). A correção de erros especificamente adapta a teoria clássica de códigos – com suas origens remontando aos primeiros computadores clássicos, em 1950 (21) – para o contexto quântico, de forma a permitir a recuperação do estado original do sistema após o erro já haver ocorrido.

Assim como no caso clássico, a teoria quântica de correção de erros emprega medidas de síndrome (ou diagnóstico) para determinar que erro ocorreu, para, após isso, aplicar-se uma medida de correção que leva o sistema ao seu estado original. Os correspondentes quânticos dos efeitos clássicos, porém, apresentam certas dificuldades. Em primeiro lugar, as medidas de síndrome devem ser feitas com cuidado para não revelar a informação guardada pelos qubits, pois uma perda do estado de superposição arruinaria a computação. A única solução é que as medidas de síndrome meçam apenas o erro, e não o estado do sistema.

Outra questão é que os erros quânticos podem ser muito mais complexos do que os erros clássicos. Classicamente, um bit pode sofrer apenas uma modificação, a mudança para um valor oposto, também chamada de *bit flip*. Esse processo é equivalente à aplicação da matriz de Pauli σ_x . Quanticamente, um qubit pode receber qualquer rotação, expressa pela exponencial do produto de um vetor qualquer pelo vetor das matrizes de Pauli (1.14), o que sempre pode ser decomposto numa combinação linear das três matrizes de Pauli e a identidade. Assim, além do caso em que não há erros, representado pela identidade, há três erros linearmente independentes que podem ocorrer com cada qubit:

$$(\hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) |\psi\rangle = u_x \sigma_x |\psi\rangle + u_y \sigma_y |\psi\rangle + u_z \sigma_z |\psi\rangle. \quad (3.1)$$

O primeiro problema, que é a necessidade de medidas de síndrome que não prejudiquem a

superposição, é resolvido pela redundância de informação, obtida codificando cada estado de k qubits lógicos em $n > k$ de qubits físicos. Os estados propriamente codificados formarão um subespaço de dimensão 2^k , menor do que o total de 2^n dimensões do espaço de Hilbert total dos qubits $\mathcal{H}_S$. Chamaremos tal subespaço de código, $\mathcal{C}$.

As medidas de síndrome efetivamente nos dizem se o sistema está dentro do subespaço do código. Para lidar com a multiplicidade de erros possíveis, que é o segundo problema enfrentado pela teoria de correção de erros quânticos, cada código deve ser projetado de forma que os erros que ele possa corrigir levem os estados do sistema para fora do subespaço do código. Assim, a tarefa da síndrome torna-se determinar em que subespaço do espaço de Hilbert total se está. Se estiver dentro do código, o estado não sofreu nenhum erro; se não estiver, a medida deve ser capaz de identificar que erro ocorreu através da localização do estado dentro de $\mathcal{H}_S$, para que o procedimento de correção adequado possa ser aplicado.

Para identificar os estados do código, empregaremos o subscrito L, que representa o fato de que o estado referido é um estado lógico, em oposição ao estado físico equivalente. Usaremos o mesmo índice para indicar portas lógicas que façam o mesmo papel que as portas físicas equivalentes. Assim, se um estado físico $|\psi\rangle$ sofre a ação de uma operação U até tornar-se $|\psi'\rangle$:

$$U |\psi\rangle = |\psi'\rangle, \quad (3.2)$$

os seus equivalentes lógicos, se propriamente construídos, atuarão conforme:

$$U_L |\psi\rangle_L = |\psi'\rangle_L. \quad (3.3)$$

Na próxima seção, veremos como construir um código simples de correção de erros, além de mostrar como constroem-se as portas lógicas que sobre ele devem operar.

3.1 Código de correção de um erro de fase

O código de correção mais simples que se pode construir corrige apenas um dos três tipos de erros que podem ocorrer, e apenas se ele ocorrer a não mais que um dos qubits. É comum escolher esse como sendo o erro de fase, associado ao conhecido processo de descoerência. A

construção desse código é análogo ao código de clássico de tripla repetição, que funciona por voto majoritário. Classicamente, os bits são transmitidos três vezes seguidas, o que equivale a:

$$(0)_L = (000), \quad (3.4)$$

$$(1)_L = (111). \quad (3.5)$$

Se um erro ocorre, um dos valores triplamente repetidos estará diferente dos demais. Vendo que valor aparece mais vezes, o processo de determinar qual o valor original da transmissão torna-se trivial. O único problema é que o método falha sempre que mais de um erro ocorrer com bits diferentes, o que pode ser contornado se considerarmos que a probabilidade de que qualquer erro ocorra é muito pequena. Juntamente com a hipótese de que os erros são independentes, isto tornará a probabilidade de que dois erros ou mais ocorram algo tão raro que poderá ser certamente desprezado.

A construção do análogo quântico para erros de *bit flip* seguir-se-ia diretamente: bastava empregar três qubits com o mesmo valor como base computacional:

$$|0\rangle_L = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle, \quad (3.6)$$

$$|1\rangle_L = |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle. \quad (3.7)$$

No caso de erros de fase, ou seja, aqueles representados por σ_z , devemos repetir a base de autovetores de σ_x , o que equivale a passar cada um dos três qubits repetidos de (3.6) e (3.7) por uma transformação de Hadamard (1.20). Isso nos leva aos estados de superposição:

$$|0\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{8}} \left\{ \begin{array}{l} |000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle \\ + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle \end{array} \right\}, \quad (3.8)$$

$$|1\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{8}} \left\{ \begin{array}{l} |000\rangle - |001\rangle - |010\rangle + |011\rangle \\ - |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle - |111\rangle \end{array} \right\}, \quad (3.9)$$

onde, para simplificar a expressão, deixamos todos os produtos tensoriais subentendidos. Tal fórmula pode ser mais compactamente expressa como:

$$|i\rangle_L = \bigotimes_{j=1}^3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^1 (-1)^{ik} |k\rangle \right), \quad (3.10)$$

onde i pode assumir os valores 0 e 1.

Suponhamos agora que o sistema sofreu um erro de fase no n -ésimo qubit. De acordo com a definição das matrizes de Pauli, o erro de fase levará o sistema ao estado:

$$\sigma_{n,z} |i\rangle_L = \bigotimes_{j=1}^3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^1 (-1)^{ik+\delta_{j,n}k} |k\rangle \right). \quad (3.11)$$

Conforme é necessário para que os erros sejam corrigíveis, deve haver um conjunto de medidas de síndrome capazes de identificar esse erro sem identificar se o sistema está no estado lógico $|0\rangle_L$ ou $|1\rangle_L$. Como só há dois bits de informação necessários para dizer em qual dos três qubits há erro, a síndrome deverá ser constituída por dois operadores do grupo de Pauli, cada um com dois valores possíveis para a medida. É fácil ver que esses são quaisquer dois – exceto a identidade – que pertençam ao grupo estabilizador:

$$\mathcal{S} = \{1, \sigma_{1,x}\sigma_{2,x}, \sigma_{2,x}\sigma_{3,x}, \sigma_{3,x}\sigma_{1,x}\}, \quad (3.12)$$

que é o grupo de operadores para os quais todos os estados do código são autovetores com autovalor 1 (22). De fato, se aplicarmos um operador que contenha duas matrizes σ_x atuando em qubits distintos, que rotularemos pelas letras r e s , encontramos:

$$\begin{aligned} \sigma_{r,x}\sigma_{s,x}(\sigma_{n,z}|i\rangle_L) &= \bigotimes_{j=1}^3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^1 (-1)^{i(k+\delta_{j,r}+\delta_{j,s})+\delta_{j,n}(k+\delta_{j,r}+\delta_{j,s})} |k\rangle \right) \\ &= (-1)^{\delta_{n,r}+\delta_{n,s}} (\sigma_{n,z}|i\rangle_L). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Tabela 3.1 – Resultados da medida de síndrome para cada tipo de erro. Repare que apenas quaisquer duas colunas são necessárias para determinar-se o erro ocorrido.

	$\sigma_{1,x}\sigma_{2,x}$	$\sigma_{2,x}\sigma_{3,x}$	$\sigma_{3,x}\sigma_{1,x}$
$ i\rangle_L$	+1	+1	+1
$\sigma_{1,z} i\rangle_L$	-1	+1	-1
$\sigma_{2,z} i\rangle_L$	-1	-1	+1
$\sigma_{3,z} i\rangle_L$	+1	-1	-1

Portanto, é possível construir uma tabela de valores de medida para cada tipo de erro que

ocorra (Tabela 3.1). Uma vez determinado em que qubit o erro ocorreu, basta aplicar uma porta lógica σ_z sobre o qubit afetado para retornar o sistema ao seu estado original. Da mesma tabela, vê-se que a primeira coluna é suficiente para determinar se houve um erro nos dois primeiros qubits, apesar de não saber-se qual. Portanto, é possível construir um código de apenas dois qubits que não permita corrigir os erros, mas apenas detectá-los. Esse é o código mais simples possível, o código de detecção, que será retomado no capítulo 6.

3.2 Dinâmica de um canal com ruído de fase

Agora que já vimos como atua o código que protege contra erros de fase, vejamos como funciona a dinâmica que gera tais erros. Para facilitar a obtenção das soluções que buscamos, esse canal será o que empregaremos por toda esta dissertação. Tal dinâmica pode ser resolvida exatamente através do emprego da equação de von Neumann, que, como estamos tratando de um qubit na memória, deve envolver apenas o ambiente e sua interação com o sistema:

$$H = \hbar \sum_k \left[\omega_k a_k^\dagger a_k + g_k^* \sigma_z a_k + g_k \sigma_z a_k^\dagger \right], \quad (3.14)$$

onde os g_k são constantes que podem ser complexas. A equação de von Neumann, portanto, assume a forma:

$$\frac{d}{dt} \rho_{SA}(t) = -i \sum_k \left[\omega_k a_k^\dagger a_k + g_k^* \sigma_z a_k + g_k \sigma_z a_k^\dagger, \rho_{SA}(t) \right]. \quad (3.15)$$

Na equação acima, estamos considerando apenas os erros que ocorrem sobre um qubit, mas a dinâmica pode ser prontamente generalizada para tantos qubits quanto forem necessários, desde que seja feita a hipótese de erros independentes.

Como já visto em (2.5), a solução da equação de von Neumann é simples de ser obtida:

$$\begin{aligned} \rho_{SA}(t) = & \exp \left\{ -i \sum_k \left[\omega_k a_k^\dagger a_k + g_k^* \sigma_z a_k + g_k \sigma_z a_k^\dagger \right] t \right\} \rho_{SA}(0) \\ & \times \exp \left\{ i \sum_k \left[\omega_k a_k^\dagger a_k + g_k^* \sigma_z a_k + g_k \sigma_z a_k^\dagger \right] t \right\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Deve-se, então, tomar o traço parcial sobre o ambiente para ver o efeito exclusivamente sobre o qubit:

$$\begin{aligned} \rho_S(t) = \text{Tr}_A \left\{ \exp \left\{ -i \sum_k \omega_k \left(\sigma_z a_k + \frac{g_k}{\omega_k} \right)^\dagger \left(\sigma_z a_k + \frac{g_k}{\omega_k} \right) t \right\} \rho_{SA}(0) \right. \\ \left. \times \exp \left\{ i \sum_k \omega_k \left(\sigma_z a_k + \frac{g_k}{\omega_k} \right)^\dagger \left(\sigma_z a_k + \frac{g_k}{\omega_k} \right) t \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

o resultado de cujo traço pode ser encontrado ao tomarmos os elementos individuais da matriz densidade reduzida. Se buscarmos os valores das populações é fácil perceber que o traço torna-se igual ao valor inicial do elemento diagonal, indicando, portanto, que o valor das populações permanece constante durante este processo:

$$\rho_{(0,0)}(t) = \rho_{(0,0)}(0), \quad (3.18)$$

onde os elementos de matriz do operador densidade na base de autovetores de σ_z são:

$$\rho_{(i,j)}(t) = \langle i | \rho_S(t) | j \rangle \quad (3.19)$$

Com relação às coerências, devemos resolver o traço de:

$$\begin{aligned} \rho_{(0,1)}(t) = \text{Tr}_A \left\{ \exp \left\{ -i \sum_k \omega_k \left(a_k + \frac{g_k}{\omega_k} \right)^\dagger \left(a_k + \frac{g_k}{\omega_k} \right) t \right\} \rho_A(0) \right. \\ \left. \times \exp \left\{ i \sum_k \omega_k \left(a_k - \frac{g_k}{\omega_k} \right)^\dagger \left(a_k - \frac{g_k}{\omega_k} \right) t \right\} \right\} \rho_{(0,1)}(0), \end{aligned} \quad (3.20)$$

o resultado do qual encontra-se no Apêndice A (A.16):

$$\rho_{(0,1)}(t) = \exp \left\{ -8 \sum_k \left| \frac{g_k}{\omega_k} \right|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_k t}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega_k}{2} \right) \right\} \rho_{(0,1)}(0). \quad (3.21)$$

Neste momento, passamos as frequências ao limite do contínuo, de forma que possamos escrever o resultado na forma de integral de uma função de densidade espectral $J(\omega)$, a qual definimos como:

$$J(\omega) = \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega - \omega_k), \quad (3.22)$$

e sobre a qual nada afirmaremos, exceto que é uma função positiva, como sua definição requer.

De (3.22), obtemos a seguinte igualdade:

$$\sum_k \left| \frac{g_k}{\omega_k} \right|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_k t}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega_k}{2} \right) = \int_0^\infty d\omega J(\omega) \omega^{-2} \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right), \quad (3.23)$$

a qual permite escrever a coerência como:

$$\rho_{(0,1)}(t) = \exp \left\{ -8 \int_0^\infty d\omega J(\omega) \omega^{-2} \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right\} \rho_{(0,1)}(0). \quad (3.24)$$

Sabendo que a exponencial acima está no intervalo $(0; 1]$, já que a integral constitui-se apenas de funções não-negativas, a evolução temporal da matriz densidade reduzida pode ser expressa como:

$$\begin{pmatrix} \rho_{(0,0)}(t) & \rho_{(0,1)}(t) \\ \rho_{(1,0)}(t) & \rho_{(1,1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{(0,0)}(0) & (1-2p)\rho_{(0,1)}(0) \\ (1-2p)\rho_{(1,0)}(0) & \rho_{(1,1)}(0) \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

onde

$$p \equiv \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp \left\{ -8 \int_0^\infty d\omega J(\omega) \omega^{-2} \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right\} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.26)$$

Assim, é possível dividir a evolução temporal na atuação de dois operadores de Kraus:

$$\begin{pmatrix} \rho_{(0,0)}(t) & \rho_{(0,1)}(t) \\ \rho_{(1,0)}(t) & \rho_{(1,1)}(t) \end{pmatrix} = (1-p) \begin{pmatrix} \rho_{(0,0)}(0) & \rho_{(0,1)}(0) \\ \rho_{(1,0)}(0) & \rho_{(1,1)}(0) \end{pmatrix} + p \sigma_z \begin{pmatrix} \rho_{(0,0)}(0) & \rho_{(0,1)}(0) \\ \rho_{(1,0)}(0) & \rho_{(1,1)}(0) \end{pmatrix} \sigma_z. \quad (3.27)$$

Portanto, o erro equivalente à descoerência é representado pela matriz de Pauli σ_z , enquanto que a identidade multiplicada por uma probabilidade representa o caso em que nenhum erro ocorre.

Para os três qubits que consitituem o código, considerando erros independentes, a generalização seria simples:

$$\rho_S(t) = (1 - 3p)\rho_S(0) + p\sigma_{1,z}\rho_S(0)\sigma_{1,z} + p\sigma_{2,z}\rho_S(0)\sigma_{2,z} + p\sigma_{3,z}\rho_S(0)\sigma_{3,z} + O(p^2). \quad (3.28)$$

Notemos que a probabilidade de erros em dois ou mais qubits ficou legada a termos de ordem superior.

3.3 Densidade espectral ôhmica

Para conseguirmos calcular a integral das frequências, é necessário fornecer um valor para a função de densidade espectral $J(\omega)$. Neste trabalho, sempre que for necessário o cálculo numérico, escolheremos a densidade ôhmica:

$$J(\omega) = \eta\omega e^{-\omega/\omega_c}, \quad (3.29)$$

onde η é uma constante adimensional e ω_c é a frequência de corte, ou seja, um limite máximo para as frequências, de forma que a função se anule após algum tempo. Nesse caso, a probabilidade p de que ocorra um erro torna-se:

$$p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp \left\{ -8\eta \int_0^\infty d\omega \, \omega e^{-\omega/\omega_c} \left[\frac{1}{\omega} \sin \left(\frac{\omega t}{2} \right) \right]^2 \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right\}. \quad (3.30)$$

Além da exponencial, o termo ω que aparece em (3.29) é útil para que a função não divirja. Quando $\omega \rightarrow 0$, o seno hiperbólico presente na exponencial aproxima-se de zero, o que só não faz com que a integral divirja devido à presença do termo ω no integrando. Portanto, a densidade espectral ôhmica contém o mínimo necessário para estabelecer uma integral bem comportada e que seja caracterizada por uma frequência de corte ω_c , e por isso será essa densidade empregada nos capítulos seguintes para extrair resultados numéricos. É importante ressaltar, porém, que os métodos desenvolvidos à frente são válidos para qualquer $J(\omega)$, servindo o caso ôhmico como ilustração.

Capítulo 4 Correção a passos curtos

Tendo em vista que a correção de erros tradicional, conforme descrita no capítulo anterior, foi originalmente criada para prevenir erros que ocorriam enquanto o sistema estava desprovido da aplicação de uma porta lógica, aqui verificaremos como ela deve ser modificada para o caso em que a porta lógica está ocorrendo. Na década de 1990, esse problema foi atacado por diversos pesquisadores, levando ao desenvolvimento da teoria de tolerância a falhas (23). Esta teoria busca impedir que os erros se propaguem de um bloco de qubits codificados para outros, de forma a manter os erros ainda corrigíveis. Porém, a tolerância a falhas não leva em consideração que os erros são processos dinâmicos que podem ocorrer conjuntamente à porta lógica. Pelo contrário, nessa teoria supõe-se que eles ocorrem posteriormente à sua atuação da porta (7–9), como se os dois processos não interferissem entre si.

Essa abordagem não é suficiente para nossos propósitos. Enquanto a teoria de tolerância a falhas não se preocupa com a forma como os erros surgem, nós consideramos os erros como fenômenos dinâmicos que decorrem da interação do sistema com um ambiente, levando a conclusões diversas daquelas obtidas quando considera-se o erro apenas como mero construto matemático, como veremos abaixo.

É importante lembrar que neste capítulo ainda não consideramos o tempo da medida de síndrome, de forma que esta última será tratada como um fenômeno instantâneo e livre de erros. Apenas levaremos em consideração o efeito de dois fenômenos simultâneos: a aplicação da porta lógica e os erros provocados pelo ambiente externo. Este último normalmente é modelado como um banho bosônico, conforme descrito no capítulo 1, mas esta hipótese não será estritamente necessária para a validade de nossos resultados.

4.1 Fundamentos matemáticos

Para este modelo, empregaremos a expansão perturbativa da evolução do sistema sob a ação de um ambiente até segunda ordem da perturbação, conforme visto no capítulo 2. Primeiro, vejamos como se dá a evolução do sistema quando não há portas lógicas atuando. Essa evolução, que representa aquela em que ocorrem os erros que o código foi projetado para proteger, será escrita da seguinte forma:

$$\rho_S(t) = \rho_S(0) + t^2 \eta^2 \text{Tr} \{ \mathcal{E}_0(t) \rho_{SA}(0) \} + O(\eta^3), \quad (4.1)$$

onde $\mathcal{E}_0(t)$ representa os erros corrigíveis e lembramos que η é a ordem de grandeza da interação fraca com o ambiente. Assim como na derivação das equações-mestras, estamos considerando que não há termos de primeira ordem na interação, de forma que os erros mais prováveis (aqueles que o código é capaz de corrigir) são de segunda ordem em η .

Quando a porta lógica é ligada, surgem novos tipos de erros que podem ser corrigíveis ou não. Representaremos o superoperador dessa nova classe de erros pelo símbolo $\mathcal{E}(t)$, que, de acordo com (2.45), é escrito como:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) \rho_{SA}(0) \equiv & \frac{1}{\hbar^2} \int_0^1 du \int_0^1 dv \text{Tr}_A \left\{ \tilde{H}_I(ut) \rho_A(0) \rho_S(0) \tilde{H}_I(vt) \right\} \\ & - \frac{1}{2\hbar^2} \int_0^1 du \int_0^1 dv \left\{ \text{Tr}_A \left\{ \tilde{H}_I(ut) \tilde{H}_I(vt) \rho_A(0) \right\}, \rho_S(0) \right\} \\ & - \frac{1}{2\hbar^2} \int_0^1 du \int_0^u dv \left[\text{Tr}_A \left\{ \left[\tilde{H}_I(ut), \tilde{H}_I(vt) \right] \rho_A(0) \right\}, \rho_S(0) \right], \end{aligned} \quad (4.2)$$

que estão presentes na nova evolução temporal de $\rho_S(t)$ como:

$$\rho_S(t) = U_S(t) \rho_S(0) U_S^\dagger(t) + t^2 \eta^2 U_S(t) \text{Tr} \{ \mathcal{E}(t) \rho_{SA}(0) \} U_S^\dagger(t) + O(\eta^3). \quad (4.3)$$

Vale lembrar que os hamiltonianos $\tilde{H}_I(t)$ e $H_I(t)$ relacionam-se com o hamiltoniano de interação H_{int} e com os operadores de evolução temporal do ambiente e da porta lógica, $U_S(t)$ e $U_A(t)$, respectivamente, através de:

$$\tilde{H}_I(t) \equiv U_S^\dagger(t) H_I(t) U_S(t), \quad (4.4)$$

e

$$H_I(t) \equiv U_A^\dagger(t) H_{\text{int}} U_A(t). \quad (4.5)$$

O caso dos qubits na memória, em que não há porta lógica sendo aplicada ($U_S = 0$), é obtido através da substituição dos hamiltonianos de interação $\tilde{H}_I(t)$ na expressão (4.2) pelos $H_I(t)$, que não envolvem a presença de operadores de evolução representem portas lógicas:

$$\mathcal{E}_0(t) \equiv \mathcal{E}(t)|_{H_S=0} = \mathcal{E}(t)|_{\tilde{H}_I=H_I}. \quad (4.6)$$

Portanto, os erros sem e com porta lógica serão os mesmos desde que $\tilde{H}_I(t) = H_I(t)$, o que ocorre se o operador da porta lógica comutar com o hamiltoniano de interação, pois se $[U_S(t), H_{\text{int}}] = 0$:

$$\tilde{H}_I(t) = U_S^\dagger(t) \left[U_A^\dagger(t) H_{\text{int}} U_A(t) \right] U_S(t) = \left[U_S^\dagger(t) U_S(t) \right] \left[U_A^\dagger(t) H_{\text{int}} U_A(t) \right] = H_I(t). \quad (4.7)$$

Nos casos em que a comutação ocorre, o processo de correção não precisa de qualquer modificação durante a aplicação da porta lógica, a mesma técnica aplicada na memória funcionará com igual eficiência. Aí, portanto, é válido considerar-se que os erros ocorrem separadamente das portas lógicas.

O problema, portanto, reduz-se a evitar que erros incorrigíveis surjam com probabilidade considerável quando uma porta não-comutante ocorra. Sendo os erros incorrigíveis originalmente da ordem de η^3 , nosso objetivo será encontrar um método que os mantenha restritos a essa grandeza.

4.2 O método

Nossa proposta para resolver esse problema é diminuir o tempo de aplicação da porta lógica até que o intervalo seja muito curto em comparação com o tempo típico em que os erros ocorrem. Em curtos intervalos Δt , o operador evolução temporal aproximadamente comuta com o hamiltoniano de interação,

$$\tilde{H}_I(\Delta t) = U_S^\dagger(\Delta t) H_I(\Delta t) U_S(\Delta t) = H_I(\Delta t) + O(\Delta t), \quad (4.8)$$

o que pode ser entendido a partir de uma expansão da Hadamard (ver Apêndice B):

$$U_S^\dagger(\Delta t) H_I(\Delta t) U_S(\Delta t) = e^{iH_S\Delta t/\hbar} H_I(\Delta t) e^{-iH_S\Delta t/\hbar} = H_I(\Delta t) + \frac{i\Delta t}{\hbar} [H_S, H_I(t)] + \dots \quad (4.9)$$

Dessa forma, os erros que ocorrem serão praticamente os mesmos que encontramos na memória:

$$\mathcal{E}(\Delta t) = \mathcal{E}_0(\Delta t) + O(\Delta t). \quad (4.10)$$

É claro que, se fosse possível simplesmente apressar a duração total da porta lógica até essa aproximação fosse aplicável, não haveria necessidade de aplicar-se este método. Portanto, para que a porta lógica possa ser aplicada com sucesso sem que os erros incorrigíveis tornem-se excessivamente grandes, devemos aplicá-la em N passos curtos de duração Δt , de forma que a duração total da porta lógica t é dada por:

$$t = N\Delta t. \quad (4.11)$$

Neste período curto, a evolução torna-se simplesmente:

$$\begin{aligned} \rho_S(\Delta t) &= U_S(\Delta t) \rho_S(0) U_S^\dagger(\Delta t) + \eta^2 N^{-2} t^2 U_S(\Delta t) \text{Tr} \{ \mathcal{E}_0(\Delta t) \rho_{SA}(0) \} U_S^\dagger(\Delta t) \\ &\quad + O(\eta^2 N^{-3}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Vamos escolher os passos curtos Δt como sendo da ordem de $\sqrt{\eta}t$, de forma a permitirmos um

número pequeno de passos seja necessário, ao mesmo tempo que mantemos os erros incorrigíveis de ordem menor que os corrigíveis. Nesse caso, teremos que aplicar $N \sim \eta^{-1/2}$ passos para terminar a porta lógica, o que, para sistemas ordinários em que os erros são da ordem de $\eta^2 \sim 10^{-4}$, resultam em não mais que $N \sim 10$ passos.

O primeiro fato de que devemos nos certificar neste método é que a probabilidade de que ocorra um erro incorrigível, depois de todos os passos terem ocorrido, não seja maior do que aquela para o caso de qubits na memória. Para sabermos a probabilidade de que ocorra um erro incorrigível durante todo o período de aplicação da porta lógica, multiplicamos a probabilidade de que ocorra tal erro em cada passo pelo número total de passos. Ou seja, sendo os termos que podem conter erros incorrigíveis da ordem de $\eta^2 N^{-3}$ para um simples passo (4.12), para N passos temos uma probabilidade da ordem de $N \eta^2 N^{-3} \sim \eta^2 N^{-2} \sim \eta^3$. Sendo essa a mesma probabilidade do caso da memória, verificamos que nosso método realmente consegue manter sob controle os novos tipos de erros que podem surgir.

Além disso, esse procedimento não aumenta consideravelmente o tempo total da computação. Admitindo medidas instantâneas e um tempo desprezível de processamento clássico da síndrome, o tempo de execução das portas será o mesmo, excetuando-se o que é adicionado devido à aplicação das portas de correção. Digamos que o tempo que esse procedimento de correção normalmente dure seja t_g . Se, na memória, havia uma probabilidade da ordem de η^2 de que esse procedimento fosse necessário, em média a correção ampliava cada porta lógica por um período de $\eta^2 t_g$. Por outro lado, se aplicamos a porta em passos pequenos, a probabilidade de que algum procedimento de correção tenha que ser aplicado será a probabilidade de que um erro ocorra em cada passo multiplicado pelo número total de passos, N . Sendo a probabilidade dada por $\eta^2 N^{-2}$ e o número de passos dado por $N \sim \eta^{-1/2}$, a probabilidade de que haja uma correção será da ordem de $\eta^{2+1/2}$. Portanto, o tempo adicionado a cada porta lógica será, em média, apenas de $\eta^{2+1/2} t_g$, o que é na verdade menor do que no caso comum, de forma que este método poderia ser usado, independentemente do fato de a porta lógica comutar com o hamiltoniano de interação, para tornar uma computação ruidosa mais rápida.

Tendo em vista as vantagens deste método, precisamos agora analisar em que situações ele pode ser aplicado. Dado que a única hipótese que fizemos é que as portas lógicas podem ser quebradas em blocos menores, as únicas restrições estarão em como construí-las.

4.3 Construção das portas lógicas

É essencial, para o emprego deste método, que as portas lógicas do código sejam construídas de forma que em nenhum momento de sua execução os qubits encontrem-se fora do subespaço do código. Do contrário, executar a porta em pequenos passos inevitavelmente iria acarretar em diversos falsos positivos na detecção de erros. Nesta seção, descreveremos como gerar uma rotação qualquer e uma porta CNOT que satisfaçam as condições de que necessitamos. Conjuntamente, elas formam um conjunto universal de portas lógicas, sendo capazes de executar qualquer algoritmo (22).

Primeiramente, suponhamos conhecidas as portas lógicas $\sigma_{L,x}$ e $\sigma_{L,z}$ para este código, ou seja, conheçamos dois operadores que satisfaçam:

$$\sigma_{L,x} |i\rangle_L = |i+1\rangle_L, \quad (4.13)$$

$$\sigma_{L,z} |i\rangle_L = (-1)^i |i\rangle_L, \quad (4.14)$$

onda a soma é feita módulo 2. É claro que exponenciais envolvendo esses operadores só poderão conter combinações de identidades e eles mesmos. Portanto, é impossível que um hamiltoniano que contenha apenas $\sigma_{L,x}$ e $\sigma_{L,z}$ gere um operador de evolução temporal que contenha algo que não pertença ao subespaço do código. Dessa forma, podemos combinar esses dois operadores num hamiltoniano do tipo:

$$H_{\text{rot}} = \hbar\omega_0 [u_x \sigma_{L,x} + i u_y \sigma_{L,x} \sigma_{L,z} + u_z \sigma_{L,z}], \quad (4.15)$$

de forma que sua exponencial seja apenas uma combinação dessas duas matrizes de Pauli e de $\sigma_{L,y} = i\sigma_{L,x}\sigma_{L,z}$. Um operador criado desta maneira, contendo apenas portas que não levam para fora do subespaço do código, só pode constituir-se de uma rotação que mantém os estados dentro do seu subespaço apropriado para qualquer instante de tempo.

De maneira análoga à que empregamos na derivação da rotação, precisamos expressar a porta CNOT em termos de $\sigma_{L,x}$ e $\sigma_{L,z}$. Conhecido o fato de que essa porta não altera o estado do sistema se o estado do primeiro qubit for $|0\rangle$, enquanto que o segundo qubit é submetido a um *bit flip* se o primeiro vale $|1\rangle$, podemos representar essa porta em termos de dois projetores:

$$U_{\text{CNOT}} = |0\rangle_1 \langle 0|_1 + |1\rangle_1 \langle 1|_1 \sigma_{2,x}, \quad (4.16)$$

onde o índice 1 representa o qubit de controle e o índice 2 representa o alvo.

Os projetores da representação acima podem ser substituídos por expressões que contenham $\sigma_{1,z}$:

$$U_{\text{CNOT}} = \frac{1 + \sigma_{1,z}}{2} + \frac{1 - \sigma_{1,z}}{2} \sigma_{2,x}. \quad (4.17)$$

É possível construir um hamiltoniano que gere essa porta contendo apenas essas duas matrizes de Pauli:

$$H_{\text{CNOT}} = \hbar\omega \frac{1 - \sigma_{1,z}}{2} \frac{1 - \sigma_{2,x}}{2}. \quad (4.18)$$

Podemos verificar a validade dessa hamiltoniana exponenciando-a, com a ajuda da expansão em série de potências:

$$\exp \left\{ -i\omega \frac{1 - \sigma_{1,z}}{2} \frac{1 - \sigma_{2,x}}{2} t \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[-i\omega \left(\frac{1 - \sigma_{1,z}}{2} \right) \left(\frac{1 - \sigma_{2,x}}{2} \right) \right]^n. \quad (4.19)$$

Vamos avaliar as potências somadas iterativamente, primeiro notando que os operadores entre parêntesis são projetores:

$$\left(\frac{1 - \sigma_{1,z}}{2} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sigma_{1,z}}{2} \right), \quad (4.20)$$

$$\left(\frac{1 - \sigma_{2,x}}{2} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sigma_{2,x}}{2} \right). \quad (4.21)$$

Unindo esses dois resultados, encontramos o seguinte valor para a potência que aparece na expansão:

$$\left[-i\omega \left(\frac{1 - \sigma_{1,z}}{2} \right) \left(\frac{1 - \sigma_{2,x}}{2} \right) \right]^n = (-i\omega)^n \left(\frac{1 - \sigma_{1,z}}{2} \right) \left(\frac{1 - \sigma_{2,x}}{2} \right), \quad \forall n \geq 1, \quad (4.22)$$

sendo importante lembrar que a expressão acima não é válida para o caso $n = 0$. Portanto, podemos escrever a evolução temporal na forma:

$$\exp \left\{ -i\omega \frac{1-\sigma_{1,z}}{2} \frac{1-\sigma_{2,x}}{2} t \right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^n}{n!} \left(\frac{1-\sigma_{1,z}}{2} \right) \left(\frac{1-\sigma_{2,x}}{2} \right). \quad (4.23)$$

Notando que a somatória presente nessa expressão é a expansão em série de uma exponencial com o primeiro termo excluído, podemos escrever:

$$\exp \left\{ -i\omega \frac{1-\sigma_{1,z}}{2} \frac{1-\sigma_{2,x}}{2} t \right\} = 1 + [e^{-i\omega t} - 1] \left(\frac{1-\sigma_{1,z}}{2} \right) \left(\frac{1-\sigma_{2,x}}{2} \right). \quad (4.24)$$

Portanto, basta escolher o tempo total de aplicação como sendo $t = \pi/\omega$, teremos $e^{-i\omega t} = -1$, que se traduz:

$$e^{-i\pi H_{\text{CNOT}}} = 1 - \frac{1-\sigma_{1,z}}{2}(1-\sigma_{2,x}) = \frac{1+\sigma_{1,z}}{2} + \frac{1-\sigma_{1,z}}{2}\sigma_{2,x} = U_{\text{CNOT}}. \quad (4.25)$$

É possível, portanto, construir uma porta lógica CNOT a partir do conhecimento das portas $\sigma_{L,x}$ e $\sigma_{L,z}$, bastando substituir as portas físicas no hamiltoniano (4.18) pelos equivalentes lógicos. Mais uma vez, como o hamiltoniano é formado de operadores que mantêm o sistema dentro do subespaço, não há como uma porta lógica gerada pelo hamiltoniano que prescrevemos, em qualquer instante de sua aplicação, levar para fora do subespaço do código.

4.4 Aplicação ao código de três qubits

Definido como o funciona o método em linhas gerais, vamos agora aplicá-lo ao caso específico do código de três qubits contra erros de fase, descrito pela primeira vez no capítulo 3. Este código, tem como portas lógicas:

$$\sigma_{L,x} \equiv \sigma_{1,z}\sigma_{2,z}\sigma_{3,z}, \quad (4.26)$$

$$\sigma_{L,z} \equiv \sigma_{1,x}. \quad (4.27)$$

Seu funcionamento pode ser verificado por:

$$\begin{aligned}
\sigma_{L,x} |i\rangle_L &= \sigma_{1,z} \sigma_{2,z} \sigma_{3,z} \left(\bigotimes_{k=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^1 (-1)^{ij} |j\rangle \right) \\
&= \left(\bigotimes_{k=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^1 (-1)^{ij+j} |j\rangle \right) \\
&= \left(\bigotimes_{k=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^1 (-1)^{(i+1)j} |j\rangle \right) \\
&= |i+1\rangle_L,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

e

$$\begin{aligned}
\sigma_{L,z} |i\rangle_L &= \sigma_{1,x} \left(\bigotimes_{k=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^1 (-1)^{ij} |j\rangle \right) \\
&= \left(\bigotimes_{k=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^1 (-1)^{ij} |j + \delta_{k,1}\rangle \right) \\
&= \left(\bigotimes_{k=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^1 (-1)^{i(j+\delta_{k,1})} |j\rangle \right) \\
&= (-1)^i |i\rangle_L,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

onde, mais uma vez, todas as somas são realizadas *módulo 2*.

Para a aplicação em passos curtos, precisamos empregar os operadores $\sigma_{L,x}$ e $\sigma_{L,z}$, multiplicados por um fator conveniente $\hbar\omega_0$ como hamiltonianos de forma que a evolução total do sistema será dada pela suas exponenciais:

$$e^{-i\sigma_{L,x}\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - i\sigma_{1,z}\sigma_{2,z}\sigma_{3,z}\text{sen}(\omega_0 t), \tag{4.30}$$

$$e^{-i\sigma_{L,z}\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - i\sigma_{1,x}\text{sen}(\omega_0 t), \tag{4.31}$$

o que é válido pois tanto $\sigma_{L,x}$ quanto $\sigma_{L,z}$ pertencem ao grupo de Pauli. Assim, a aplicação a passos curtos não irá retirar o sistema de dentro do subespaço do código, já que sua aplicação só envolve a aplicação de identidades e operações lógicas como $\sigma_{L,x}$ e $\sigma_{L,z}$.

Já uma rotação pode ser construída pela combinação desses dois operadores. Se uma rotação

regular pode ser escrita como:

$$\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = m_x \sigma_x - m_y i \sigma_z \sigma_x + m_z \sigma_z, \quad (4.32)$$

então, a operação lógica correspondente deverá ser:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_L &= m_x \sigma_{1,z} \sigma_{2,z} \sigma_{3,z} - i m_y \sigma_z \sigma_x + m_z \sigma_{1,x} \\ &= m_x \sigma_{1,z} \sigma_{2,z} \sigma_{3,z} - i m_y \sigma_{1,x} \sigma_{1,z} \sigma_{2,z} \sigma_{3,z} + m_z \sigma_{1,x}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

O processo para produzir a rotação que queremos é o mesmo para o caso da porta de *bit flip* e ou de fase: multiplicar por uma quantia $\hbar \omega_0$ e usar o operador obtido como hamiltoniano. A evolução temporal obtida com essa operação é dada pela seguinte exponencial:

$$\begin{aligned} e^{-i\omega_0(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_L)t} &= \cos(\omega_0 t) - i m_x \sigma_{1,z} \sigma_{2,z} \sigma_{3,z} \text{sen}(\omega_0 t) - m_y \sigma_{1,x} \sigma_{1,z} \sigma_{2,z} \sigma_{3,z} \text{sen}(\omega_0 t) \\ &\quad - i m_z \sigma_{1,x} \text{sen}(\omega_0 t), \end{aligned} \quad (4.34)$$

que, para qualquer instante de t , mantém o sistema dentro do subespaço do código, já que o operador resultante só contém identidades e $\sigma_{1,z} \sigma_{2,z} \sigma_{3,z}$ e $\sigma_{1,x}$.

Finalmente, constrói-se também o operador U_{CNOT} conforme a prescrição de (4.18), que faz com que a hamiltoniana seja:

$$H_{\text{CNOT}} = \hbar \omega \frac{1 - \sigma_{1,x}}{2} \frac{1 - \sigma_{4,z} \sigma_{5,z} \sigma_{6,z}}{2}. \quad (4.35)$$

Como os $\sigma_{L,x}$ e $\sigma_{L,z}$ satisfazem as mesmas propriedades operacionais das matrizes de Pauli, isto é:

$$[\sigma_{L,x}]^2 = [\sigma_{1,z} \sigma_{2,z} \sigma_{3,z}]^2 = 1, \quad (4.36)$$

$$[\sigma_{L,z}]^2 = [\sigma_{1,x}]^2 = 1, \quad (4.37)$$

$$\sigma_{L,z} \sigma_{L,x} = \sigma_{1,x} \sigma_{1,z} \sigma_{2,z} \sigma_{3,z} = -\sigma_{1,z} \sigma_{1,x} \sigma_{2,z} \sigma_{3,z} = -\sigma_{L,z} \sigma_{L,x}, \quad (4.38)$$

é evidente que a exponencial do hamiltoniano levará também a uma porta CNOT que, além de

conter apenas operadores que mantêm o sistema dentro do subespaço do código, opera sobre os estados do código como uma porta física atuaria sobre os estados não-codificados.

Vê-se, portanto, que a construção de tais portas lógicas é possível para um código simples, que ilustra nosso método como exemplo de aplicação. É importante notar que todas as manipulações que fizemos para este código de três qubits poderiam ser facilmente traduzidas para um código qualquer, desde que este contenha operadores $\sigma_{L,x}$ e $\sigma_{L,z}$ que comportem-se como matrizes de Pauli, ou seja, satisfaçam as propriedades (4.36), (4.37) e (4.38). Como essas propriedades decorrem diretamente de como esperamos que as matrizes de Pauli lógicas ajam sobre os estados do sistema, a construção de tais portas lógicas deve ser possível para qualquer código quântico.

Capítulo 5 Efeitos protetivos de medidas de tempo finito

No capítulo anterior, vimos como a atuação de uma porta lógica ao mesmo tempo em que o ambiente interfere com o sistema pode causar novos tipos de erro. Neste capítulo, veremos como uma medida ocorrendo simultaneamente ao erro pode afetar a evolução do sistema. O formalismo empregado nesta descrição será aquele dado no capítulo 2, onde apresenta-se a equação de Lindblad e sua equivalente equação-mestra híbrida para o tratamento de medidas ruidosas. Assim, lidamos com três objetos distintos: um ambiente, o sistema propriamente dito (qubits) – ambos aparecendo explicitamente nas equações – e um aparato de medida cuja atuação é representada pelos operadores de Lindblad. Aqui, trataremos o problema de apenas um qubit, de forma a ainda não incluirmos códigos quânticos. O ruído será do tipo de fase, enquanto que a medida será do tipo σ_z ou σ_x , ou seja, ela pode comutar ou anticomutar com o ruído.

Parte deste capítulo foi publicada em colaboração com Carlos Alexandre Brasil e Reginaldo de Jesus Napolitano (24). As soluções analíticas para a equação-mestra apresentadas são equivalentes às obtidas por Brasil no artigo, apesar de serem calculadas por vias diferentes. As soluções numéricas são as mesmas, por terem sido efetuadas pelo presente autor.

5.1 Soluções exatas

Com base nessas suposições de ruído e tipo de medida, a equação exata que rege o sistema será uma equação de Lindblad onde o hamiltoniano foi substituído por aquele de um canal que produz erros de fase (3.14) e o lindbladiano é o de uma medida de $\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_{SA}(t) = & -i \sum_k \left[\omega_k a_k^\dagger a_k + g_k \sigma_z a_k^\dagger + g_k^* \sigma_z a_k, \rho_{SA}(t) \right] \\ & + \lambda^2 [(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \rho_{SA}(t) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \rho_{SA}(t)]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Só é possível encontrar uma solução analítica para esta equação diferencial em certos casos específicos. Por exemplo, suponha que a medida seja do mesmo tipo que o ruído. Nesse caso, se aplicarmos $\langle 0|$ à esquerda e $|0\rangle$ à direita da equação acima, encontraremos uma equação diferencial em termos de:

$$\rho_{(0,0),A}(t) \equiv \langle 0| \rho_{AS}(t) |0\rangle, \quad (5.2)$$

que se relaciona com a população $\rho_{(0,0)}(t)$ por:

$$\rho_{(0,0)}(t) = \text{Tr}_A \{ \rho_{(0,0),A}(t) \}. \quad (5.3)$$

Essa equação diferencial assume a forma:

$$\frac{d}{dt}\rho_{(0,0),A}(t) = -i \sum_k \left[\omega_k a_k^\dagger a_k + g_k a_k^\dagger + g_k^* a_k, \rho_{(0,0),A}(t) \right] + \lambda^2 [\rho_{(0,0),A}(t) - \rho_{(0,0),A}(t)], \quad (5.4)$$

que é o mesmo, após tomarmos o traço parcial em A , que:

$$\frac{d}{dt}\rho_{(0,0)}(t) = 0, \quad (5.5)$$

pois o traço do comutador é zero. Isso significa que a população é uma constante, sendo apenas as coerências afetadas pela evolução do sistema, assim como ocorre no canal de fase descrito no capítulo 3.

Definindo, analogamente,

$$\rho_{(0,1),A}(t) \equiv \langle 0| \rho_{AS}(t) |1\rangle, \quad (5.6)$$

operador que transforma-se numa das coerências ao tomarmos o traço parcial, encontramos a seguinte equação ao aplicarmos $\langle 0|$ e $|1\rangle$ à equação diferencial (5.1):

$$\frac{d}{dt}\rho_{(0,1),A}(t) = -i \sum_k \left[\omega_k a_k^\dagger a_k, \rho_{(0,1),A}(t) \right] - i \sum_k \left\{ g_k a_k^\dagger + g_k^* a_k, \rho_{(0,1),A}(t) \right\} - 2\lambda^2 \rho_{(0,1),A}(t). \quad (5.7)$$

É trivial verificar que essa equação diferencial de operadores tem como solução:

$$\rho_{(0,1),A}(t) = e^{-2\lambda^2 t} e^{-i \sum_k [\omega_k a_k^\dagger a_k + g_k a_k^\dagger + g_k^* a_k] t} \rho_{(0,1),A}(0) e^{i \sum_k [\omega_k a_k^\dagger a_k - g_k a_k^\dagger - g_k^* a_k] t}. \quad (5.8)$$

O traço que tomamos agora é idêntico àquele calculado no apêndice A para o caso da descoerência.

O resultado que se obtém é:

$$\rho_{(0,1)}(t) = \exp \left\{ -2\lambda^2 t - 8 \sum_k \left| \frac{g_k}{\omega_k} \right|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_k t}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega_k}{2} \right) \right\} \rho_{(0,1)}(0). \quad (5.9)$$

Conclui-se, portanto, que no caso em que a medida e o ruído são do mesmo gênero, um processo contribui com o outro para uma descoerência mais rápida. Isso não é totalmente surpreendente: da forma como modelamos os erros que ocorrem ao nosso sistema, eles podem ser vistos como medidas inesperadas, provocadas pelo ambiente, que levam os estados de superposição para estados clássicos.

No caso de medidas que anticomutam com o ruído, escolhe-se $\hat{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{x}}$, de forma que a equação (5.1) torna-se, ao aplicarmos a ela $\langle 0|$ e $|0\rangle$:

$$\frac{d}{dt}\rho_{(0,0),A}(t) = -i \sum_k \left[\omega_k a_k^\dagger a_k + g_k a_k^\dagger + g_k^* a_k, \rho_{(0,0),A}(t) \right] + \lambda^2 [\rho_{(1,1),A}(t) - \rho_{(0,0),A}(t)]. \quad (5.10)$$

Novamente, se tomarmos o traço, perde-se o comutador, ficando apenas com:

$$\frac{d}{dt}\rho_{(0,0)}(t) = \lambda^2 [\rho_{(1,1)}(t) - \rho_{(0,0)}(t)]. \quad (5.11)$$

Trocando os vetores $|0\rangle$ por $|1\rangle$, encontramos uma equação diferencial análoga:

$$\frac{d}{dt}\rho_{(1,1)}(t) = -\lambda^2 [\rho_{(1,1)}(t) - \rho_{(0,0)}(t)]. \quad (5.12)$$

A subtração de (5.11) de (5.12) resulta na equação diferencial:

$$\frac{d}{dt} [\rho_{(1,1)}(t) - \rho_{(0,0)}(t)] = -2\lambda^2 [\rho_{(1,1)}(t) - \rho_{(0,0)}(t)], \quad (5.13)$$

que tem como simples solução:

$$[\rho_{(1,1)}(t) - \rho_{(0,0)}(t)] = e^{-2\lambda^2 t} [\rho_{(1,1)}(0) - \rho_{(0,0)}(0)], \quad (5.14)$$

Juntado-se a esse resultado o fato de que a soma das populações é sempre 1, podemos escrever as duas soluções na forma:

$$\rho_{(0,0)}(t) = \frac{1}{2} + e^{-2\lambda^2 t} \left[\rho_{(0,0)}(0) - \frac{1}{2} \right], \quad (5.15)$$

$$\rho_{(1,1)}(t) = \frac{1}{2} + e^{-2\lambda^2 t} \left[\rho_{(1,1)}(0) - \frac{1}{2} \right], \quad (5.16)$$

ou seja, cada uma das populações parte de seus valores iniciais, mas ao final tornam-se iguais, não importando como começaram. Esse é um fenômeno devido à medida simultânea de duas observáveis incompatíveis: enquanto o ambiente mede σ_z , o aparato experimental mede σ_x . O resultado final é que a probabilidade de encontrar-se em $|0\rangle$ fica igual à de encontrar-se em $|1\rangle$, destruindo a informação contida no sistema.

Por outro lado, ainda é preciso compreender o que se passa nesse meio tempo com as coerências. A equação para elas deverá ser:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{(0,1),A}(t) = & -i \sum_k \left[\omega_k a_k^\dagger a_k, \rho_{(0,1),A}(t) \right] - i \sum_k \left\{ g_k a_k^\dagger + g_k^* a_k, \rho_{(0,1),A}(t) \right\} \\ & - 2\lambda^2 [\rho_{(1,0),A}(t) - \rho_{(0,1),A}(t)], \end{aligned} \quad (5.17)$$

para a qual não conseguiremos encontrar soluções analíticas diretamente. Por isso, será necessário empregar a equação-mestra para obter resultados para acoplamentos fracos com o ambiente, os quais compararemos com um método numérico que permitirá encontrar soluções também para acoplamentos fortes.

5.2 Soluções da equação-mestra

A equação-mestra que devemos resolver é (2.68), que nos dá a solução aproximada até segunda ordem na interação com o ambiente, sendo válida para ruídos fracos, como deve ser o caso de um computador quântico utilizável:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{M}\rho_S(t) - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \operatorname{Tr}_A \left\{ [H_I(0), e^{\mathcal{M}\tau} [H_I(\tau), e^{-\mathcal{M}\tau} \rho_S(t) \rho_A(0)]] \right\}. \quad (5.18)$$

Para verificar sua utilidade, empregaremos a equação-mestra também para calcular resultados já obtidos na seção anterior por métodos exatos.

Neste ponto, é importante saber a atuação da exponencial do Lindbladiano, $e^{\mathcal{M}\tau}$. Para isso, devemos resolver a equação diferencial:

$$\frac{d}{dt} [e^{\mathcal{M}t} \rho] = \mathcal{M} [e^{\mathcal{M}t} \rho]. \quad (5.19)$$

O Lindbladiano $\mathcal{M}$ representa uma medida de intensidade λ na direção $\hat{\mathbf{m}}$, de forma que a equação torna-se:

$$\frac{d}{dt} [e^{\mathcal{M}t} \rho] = \mathcal{M} [e^{\mathcal{M}t} \rho] = \lambda^2 \{ (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) [e^{\mathcal{M}t} \rho] (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - [e^{\mathcal{M}t} \rho] \}. \quad (5.20)$$

É fácil verificar que essa solução dessa equação que é igual a ρ no instante inicial é:

$$e^{\mathcal{M}t} \rho = e^{-\lambda^2 t} [\cosh(\lambda^2 t) \rho + \sinh(\lambda^2 t) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \rho (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma})]. \quad (5.21)$$

Conhecida a solução (5.21), podemos substituí-la na equação-mestra (5.18):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho_S(t) = & \lambda^2 \{(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \rho_S(t) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \rho_S(t)\} \\
& - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \{ \cosh^2(\lambda^2 \tau) \text{Tr}_A \{ [H_I(0), [H_I(\tau), \rho_S(t) \rho_A(0)]] \} \\
& - \frac{1}{2} \sinh(2\lambda^2 \tau) \text{Tr}_A \{ [H_I(0), [H_I(\tau), (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \rho_S(t) \rho_A(0) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma})]] \} \\
& + \frac{1}{2} \sinh(2\lambda^2 \tau) \text{Tr}_A \{ [H_I(0), (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) [H_I(\tau), \rho_S(t) \rho_A(0)] (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma})] \} \\
& - \sinh^2(\lambda^2 \tau) \text{Tr}_A \{ [H_I(0), [(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) H_I(\tau) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \rho_S(t) \rho_A(0)]] \} \}, \quad (5.22)
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que operadores que atuam em espaços diferentes comutam entre si:

$$(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \rho_S(t) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \rho_A(0) = (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \rho_S(t) \rho_A(0) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (5.23)$$

e o fato de que $(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = 1$ para escrever:

$$[(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) H_I(\tau) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}), (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \rho_S(t) \rho_A(0) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma})] = (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) [H_I(\tau), \rho_S(t) \rho_A(0)] (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (5.24)$$

Como queremos erros de fase, os hamiltonianos serão tomados da seguinte forma (3.14):

$$H_I(t) = \hbar \sigma_z \sum_k B_k(t), \quad B_k(t) \equiv \left[g_k a_k^\dagger e^{i\omega_k t} + g_k^* a_k e^{-i\omega_k t} \right], \quad (5.25)$$

de forma que, com o uso de (1.17), podemos escrever:

$$(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) H_I(t) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \hbar [2 (\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \sigma_z] \sum_k B_k(t). \quad (5.26)$$

É importante notar que poderíamos ter escolhido o ruído em qualquer outra combinação $\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ e obter os mesmos resultados, desde que a medida $(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ seja alterada de forma a compensar por essa mudança. Tomar σ_z como o operador do equivale apenas a uma escolha do eixo Oz que simplifica os cálculos.

Como na seção anterior, vamos considerar apenas os casos em que os vetores são paralelos ($\hat{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{z}}$, ou seja, a medida é compatível com o ruído), ou quando são perpendiculares ($\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$, em cujo caso são incompatíveis). Nesses casos, podemos simplificar (5.26) para:

$$(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) H_I(t) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \pm H_I(t), \quad (5.27)$$

onde o sinal positivo representa o caso comutante, e o negativo o caso anticomutante. Notando adicionalmente que:

$$\begin{aligned} [H_I(t), (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) X (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma})] &= (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) [(\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) H_I(t) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}), X] (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \\ &= \pm (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) [H_I(t), X] (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \end{aligned} \quad (5.28)$$

podemos simplificar a equação-mestra para:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_S(t) &= \lambda^2 \{ (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \rho_S(t) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \rho_S(t) \} \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \{ [\cosh^2(\lambda^2 \tau) \mp \sinh^2(\lambda^2 \tau)] \text{Tr}_A \{ [H_I(0), [H_I(\tau), \rho_S(t) \rho_A(0)]] \} \\ &\quad - \frac{1}{2} (1 \mp 1) \sinh(2\lambda^2 \tau) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \text{Tr}_A \{ [H_I(0), [H_I(\tau), \rho_S(t) \rho_A(0)]] \} (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Dessa forma, os traços dos comutadores serão todos:

$$\text{Tr}_A \{ [H_I(0), [H_I(\tau), \rho_S(t) \rho_A(0)]] \} = 2\hbar^2 [\sigma_z, \sigma_z \rho_S(t)] \sum_k \Re \{ \text{Tr}_A \{ B_k(0) B_k(\tau) \rho_A(0) \} \}, \quad (5.30)$$

onde usamos

$$\text{Tr}_A \{ B_k(0) B_k(\tau) \rho_A(0) \} = [\text{Tr}_A \{ B_k(\tau) B_k(0) \rho_A(0) \}]^* \quad (5.31)$$

e

$$[\sigma_z, \rho_S(t) \sigma_z] = -[\sigma_z, \sigma_z \rho_S(t)]. \quad (5.32)$$

Como as condições iniciais do ambiente são a de um banho térmico a temperatura $T = (k\beta)^{-1}$:

$$\rho_A(0) = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hbar \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k}, \quad Z = \text{Tr}_A \left\{ e^{-\beta \hbar \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k} \right\}, \quad (5.33)$$

podemos calcular os traços parciais como sendo:

$$\text{Tr}_A \{B_k(0)B_k(\tau)\rho_A(0)\} = |g_k|^2 \left[e^{i\omega_k\tau} \langle a_k a_k^\dagger \rangle + e^{-i\omega_k\tau} \langle a_k^\dagger a_k \rangle \right]. \quad (5.34)$$

o que, com os resultados do apêndice A, equivale a:

$$\text{Tr}_A \{B_k(0)B_k(\tau)\rho_A(0)\} = |g_k|^2 \left[\frac{e^{-i\omega_k\tau}}{e^{\beta\hbar\omega_k} - 1} + \frac{e^{i\omega_k\tau} e^{\beta\hbar\omega_k}}{e^{\beta\hbar\omega_k} - 1} \right]. \quad (5.35)$$

Com todos os valores de traço que precisamos calculados. só nos resta tomar a parte real e ir para o limite do contínuo de frequências:

$$\Re \{ \text{Tr}_A \{B_k(0)B_k(\tau)\rho_A(0)\} \} = \int_0^\infty d\omega J(\omega) \cos(\omega\tau) \coth \left(\frac{\beta\hbar\omega}{2} \right). \quad (5.36)$$

Com esse resultado, encontramos a seguinte equação diferencial de (5.29):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_S(t) &= \lambda^2 \{ (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \rho_S(t) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \rho_S(t) \} \\ &\quad - \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega J(\omega) \cos(\omega\tau) \coth \left(\frac{\beta\hbar\omega}{2} \right) \\ &\quad \times \left\{ [\cosh^2(\lambda^2\tau) \mp \sinh^2(\lambda^2\tau)] [\sigma_z, \sigma_z \rho_S(t)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(1 \mp 1) \sinh(2\lambda^2\tau) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) [\sigma_z, \sigma_z \rho_S(t)] (\hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

A partir daqui, será mais útil considerar separadamente os casos o erro comuta ou anticomuta com a medida, o que faremos nas próximas duas subseções.

5.2.1 Caso comutativo

Neste caso, $\hat{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{z}}$, e equação diferencial (5.37) torna-se:

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = \left[\lambda^2 + \int_0^\infty d\omega J(\omega) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \coth \left(\frac{\beta\hbar\omega}{2} \right) \right] [\sigma_z \rho_S(t) \sigma_z - \rho_S(t)]. \quad (5.38)$$

Da equação acima, vê-se que as populações da base da medida, σ_z , não se modificam com o tempo. Isso é visto através da multiplicação da equação, pelos dois lados, por σ_z :

$$\frac{d}{dt} \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z = - \left[\lambda^2 + \int_0^\infty d\omega J(\omega) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right] [\sigma_z \rho_S(t) \sigma_z - \rho_S(t)]. \quad (5.39)$$

e sua soma à equação original, que resulta numa matriz na qual as coerências não estão presentes:

$$\frac{d}{dt} [\rho_S(t) + \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z] = 0. \quad (5.40)$$

O fato de que a matriz $[\rho_S(t) + \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z]$ é composta apenas das populações de $\rho_S(t)$ pode ser verificado decompondo a matriz em cada um de seus elementos:

$$\begin{aligned} \rho_S(t) + \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z &= \sum_{i,j=0}^1 \rho_{(i,j)}(t) |i\rangle \langle j| + \sum_{i,j=0}^1 \rho_{(i,j)}(t) \sigma_z |i\rangle \langle j| \sigma_z \\ &= \sum_{i,j=0}^1 [1 + (-1)^{i+j}] \rho_{(i,j)}(t) |i\rangle \langle j| \\ &= 2 \sum_{i=0}^1 \rho_{(i,i)}(t) |i\rangle \langle i|. \end{aligned} \quad (5.41)$$

O resultado de (5.40) é esperado e equivalente a (5.5): no caso em que o ruído e a medida são paralelas, os dois efeitos se somam para gerar descoerência na mesma base, mantendo as populações intactas.

Se subtrairmos (5.39) de (5.38), encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\rho_S(t) - \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z] &= -2 \left[\lambda^2 + \int_0^\infty d\omega J(\omega) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right] \\ &\quad \times [\rho_S(t) - \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z], \end{aligned} \quad (5.42)$$

que é uma função em termos de matrizes que só incluem as coerências, como pode ser visto da decomposição:

$$\begin{aligned}
\rho_S(t) - \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z &= \sum_{i,j=0}^1 \rho_{(i,j)}(t) |i\rangle \langle j| - \sum_{i,j=0}^1 \rho_{(i,j)}(t) \sigma_z |i\rangle \langle j| \sigma_z \\
&= \sum_{i,j=0}^1 [1 - (-1)^{i+j}] \rho_{(i,j)}(t) |i\rangle \langle j| \\
&= 2 \sum_{i=0}^1 \rho_{(i,i+1)}(t) |i\rangle \langle i+1|, \tag{5.43}
\end{aligned}$$

onde as somas são realizadas módulo 2.

O resultado (5.42) indica uma queda nos valores das coerências, que se aproximam assintoticamente de zero. Uma das coerências, por exemplo, evoluirá conforme:

$$\rho_{(0,1)}(t) = \exp \left\{ -2 \left[\lambda^2 t + \int_0^t dt' \int_0^\infty d\omega J(\omega) \frac{\sin(\omega t')}{\omega} \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right] \right\} \rho_{(0,1)}(0), \tag{5.44}$$

que, ao integrarmos temporalmente, encontramos o mesmo resultado de (5.9):

$$\rho_{(0,1)}(t) = \exp \left\{ -2 \left[\lambda^2 t + \int_0^\infty d\omega J(\omega) \omega^{-2} \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right] \right\} \rho_{(0,1)}(0). \tag{5.45}$$

Sendo a integral do lado direito necessariamente não-negativa, já que o integrando é constituído exclusivamente de funções que não podem assumir valor menor que zero na região de integração, vemos que a medida e o ruído contribuem conjuntamente para a descoerência do sistema. Um aumento tanto do ruído como da intensidade da medida têm o mesmo efeito de causar uma descoerência mais rapidamente.

Vamos ilustrar esse resultado no caso em que a densidade espectral assume a forma ditada por (3.29), ou seja, para ambientes ôhmicos.

$$\rho_{(0,1)}(t) = \exp \left\{ -2 \left[\lambda^2 t + \eta \int_0^\infty d\omega \omega^{-1} e^{-\omega/\omega_c} \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right] \right\} \rho_{(0,1)}(0). \tag{5.46}$$

5.2.2 Caso anticomutativo

No caso de medidas incompatíveis com o ruído, $\hat{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{x}}$, e a equação diferencial (5.37) torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S(t) &= \lambda^2 \{ \sigma_x \rho_S(t) \sigma_x - \rho_S(t) \} \\ &\quad - \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega J(\omega) \cos(\omega\tau) \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \\ &\quad \times \{ \cosh(2\lambda^2\tau) [\sigma_z, \sigma_z \rho_S(t)] - \sinh(2\lambda^2\tau) \sigma_x [\sigma_z, \sigma_z \rho_S(t)] \sigma_x \}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Multiplicando os dois lados da equação por σ_x , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma_x \rho_S(t) \sigma_x &= -\lambda^2 \{ \sigma_x \rho_S(t) \sigma_x - \rho_S(t) \} \\ &\quad - \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega J(\omega) \cos(\omega\tau) \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \\ &\quad \times \{ -\sinh(2\lambda^2\tau) [\sigma_z, \sigma_z \rho_S(t)] + \cosh(2\lambda^2\tau) \sigma_x [\sigma_z, \sigma_z \rho_S(t)] \sigma_x \}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Procedendo como na seção anterior, podemos somar as equações (5.47) e (5.48) para obter uma matriz que só contenha as populações:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\rho_S(t) + \sigma_x \rho_S(t) \sigma_x] &= - \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-2\lambda^2\tau} J(\omega) \cos(\omega\tau) \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \\ &\quad \times \{ [\sigma_z, \sigma_z \rho_S(t)] + \sigma_x [\sigma_z, \sigma_z \rho_S(t)] \sigma_x \}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

ou subtraí-las para obter uma matriz apenas com as coerências:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\rho_S(t) - \sigma_x \rho_S(t) \sigma_x] &= -2\lambda^2 [\rho_S(t) - \sigma_x \rho_S(t) \sigma_x] \\ &\quad - \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{2\lambda^2\tau} J(\omega) \cos(\omega\tau) \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \\ &\quad \times \{ [\sigma_z, \sigma_z \rho_S(t)] - \sigma_x [\sigma_z, \sigma_z \rho_S(t)] \sigma_x \}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Notando que $\sigma_x [\sigma_z, \sigma_z \rho_S(t)] \sigma_x = [\sigma_z, \sigma_z \sigma_x \rho_S(t) \sigma_x]$, pode-se reescrever as duas equações como:

$$\frac{d}{dt} P(t) = - \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-2\lambda^2 \tau} J(\omega) \cos(\omega \tau) \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right) [\sigma_z, \sigma_z P(t)], \quad (5.51)$$

$$\frac{d}{dt} C(t) = - \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{2\lambda^2 \tau} J(\omega) \cos(\omega \tau) \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right) [\sigma_z, \sigma_z C(t)], \quad (5.52)$$

onde definimos $P(t)$ e $C(t)$ como as matrizes que contêm apenas as populações ou apenas as coerências, respectivamente, mas adicionamos à última uma exponencial $e^{2\lambda^2 t}$:

$$P(t) \equiv \frac{1}{2} [\rho_S(t) + \sigma_x \rho_S(t) \sigma_x], \quad (5.53)$$

$$C(t) \equiv \frac{e^{2\lambda^2 t}}{2} [\rho_S(t) - \sigma_x \rho_S(t) \sigma_x]. \quad (5.54)$$

Aplicando σ_z aos dois lados das equações (5.51) e (5.52), encontramos:

$$\frac{d}{dt} \sigma_z P(t) \sigma_z = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-2\lambda^2 \tau} J(\omega) \cos(\omega \tau) \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right) [\sigma_z, \sigma_z P(t)], \quad (5.55)$$

$$\frac{d}{dt} \sigma_z C(t) \sigma_z = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{2\lambda^2 \tau} J(\omega) \cos(\omega \tau) \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right) [\sigma_z, \sigma_z C(t)]. \quad (5.56)$$

Agora, subtraímos (5.55) de (5.51) e (5.56) de (5.52), obtendo, assim:

$$\frac{d}{dt} [\sigma_z, \sigma_z P(t)] = -2 \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-2\lambda^2 \tau} J(\omega) \cos(\omega \tau) \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right) [\sigma_z, \sigma_z P(t)], \quad (5.57)$$

$$\frac{d}{dt} [\sigma_z, \sigma_z C(t)] = -2 \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{2\lambda^2 \tau} J(\omega) \cos(\omega \tau) \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right) [\sigma_z, \sigma_z C(t)]. \quad (5.58)$$

Para estes dois casos, temos soluções simples:

$$[\sigma_z, \sigma_z P(t)] = \exp \left\{ -2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-2\lambda^2 \tau} J(\omega) \cos(\omega \tau) \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right) \right\} \times [\sigma_z, \sigma_z P(0)], \quad (5.59)$$

$$[\sigma_z, \sigma_z C(t)] = \exp \left\{ -2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau \int_0^\infty d\omega e^{2\lambda^2 \tau} J(\omega) \cos(\omega \tau) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right\} \times [\sigma_z, \sigma_z C(0)]. \quad (5.60)$$

Similarmente, se houvéssemos somado (5.55) com (5.51) e (5.56) com (5.52), encontraríamos:

$$\frac{d}{dt} \{ \sigma_z, \sigma_z P(t) \} = 0, \quad (5.61)$$

$$\frac{d}{dt} \{ \sigma_z, \sigma_z C(t) \} = 0, \quad (5.62)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \{ \sigma_z, \sigma_z P(t) \} &= \{ \sigma_z, \sigma_z C(0) \}, \\ \{ \sigma_z, \sigma_z C(t) \} &= \{ \sigma_z, \sigma_z C(0) \}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Somando (5.59) a (5.63) e (5.60) a (5.63), isolamos os $P(t)$ e $C(t)$:

$$P(t) = \exp \left\{ -2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-2\lambda^2 \tau} J(\omega) \cos(\omega \tau) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right\} [\sigma_z, \sigma_z P(0)] + \{ \sigma_z, \sigma_z P(0) \}, \quad (5.64)$$

$$C(t) = \exp \left\{ -2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau \int_0^\infty d\omega e^{2\lambda^2 \tau} J(\omega) \cos(\omega \tau) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right\} [\sigma_z, \sigma_z C(0)] + \{ \sigma_z, \sigma_z C(0) \}. \quad (5.65)$$

Notando que, na base computacional de autovetores de σ_x , conforme definidos em (1.18) e (1.19), temos:

$$\langle 0 |_x [\sigma_z, \sigma_z P(0)] | 0 \rangle_x = \frac{1}{2} [\rho_{(0,0)}^{(x)}(0) - \rho_{(1,1)}^{(x)}(0)] = \rho_{(0,0)}^{(x)}(0) - \frac{1}{2}, \quad (5.66)$$

$$\langle 0 |_x \{ \sigma_z, \sigma_z P(0) \} | 0 \rangle_x = \frac{1}{2} [\rho_{(0,0)}^{(x)}(0) + \rho_{(1,1)}^{(x)}(0)] = \frac{1}{2}, \quad (5.67)$$

onde os $\rho_{(i,j)}^{(x)}(t)$ são elementos de matriz na base de autovetores de σ_x :

$$\rho_{(i,j)}^{(x)}(t) = \langle i |_x \rho_S(t) | j \rangle_x. \quad (5.68)$$

Aplicando os resultados (5.66) e (5.67) à solução (5.64), encontramos a evolução da população na base de autovetores de σ_x :

$$\begin{aligned} \rho_{(0,0)}^{(x)}(t) &= \frac{1}{2} + \exp \left\{ -2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau \int_0^\infty d\omega J(\omega) e^{-2\lambda^2 \tau} \cos(\omega \tau) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right\} \\ &\quad \times \left[\rho_{(0,0)}^{(x)}(0) - \frac{1}{2} \right]. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Neste caso, vemos que apenas o ruído é necessário para a mudança no valor da população, que se tornará cada vez mais próximo de 1/2 conforme o tempo vai a infinito. Mas a medida também afeta o valor, através de uma exponencial negativa que reduz o integrando conforme a constante de acoplamento λ aumenta. Se λ torna-se alto o suficiente, o integrando fica próximo de zero, de forma que espera-se que uma medida forte seja capaz de impedir o efeito destrutivo do ruído na população. Tal comportamento será verificado nos resultados exibidos nas figuras (5.3) e (5.2).

Com relação ao resultado (5.65), podemos empregar as identidades:

$$\langle 0 |_x [\sigma_z, \sigma_z C(0)] | 1 \rangle_x = \frac{1}{2} [\rho_{(0,1)}^{(x)}(0) - \rho_{(1,0)}^{(x)}(0)] = i \Im \left\{ \rho_{(0,1)}^{(x)}(0) \right\}, \quad (5.70)$$

$$\langle 0 |_x \{ \sigma_z, \sigma_z C(0) \} | 1 \rangle_x = \frac{1}{2} [\rho_{(0,1)}^{(x)}(0) + \rho_{(1,0)}^{(x)}(0)] = \Re \left\{ \rho_{(0,1)}^{(x)}(0) \right\}. \quad (5.71)$$

para extrair o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} e^{2\lambda^2 t} \rho_{(0,1)}^{(x)}(t) &= \Re \left\{ \rho_{(0,1)}^{(x)}(0) \right\} \\ &\quad + i \exp \left\{ -2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau \int_0^\infty d\omega e^{2\lambda^2 \tau} J(\omega) \cos(\omega \tau) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right\} \\ &\quad \times \Im \left\{ \rho_{(0,1)}^{(x)}(0) \right\}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Tomando as partes real e imaginária, encontramos:

$$\begin{aligned}
\Re \left\{ \rho_{(0,1)}^{(x)}(t) \right\} &= e^{-2\lambda^2 t} \Re \left\{ \rho_{(0,1)}^{(x)}(0) \right\}, \\
\Im \left\{ \rho_{(0,1)}^{(x)}(t) \right\} &= \exp \left\{ -2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau \int_0^\infty d\omega J(\omega) e^{2\lambda^2 \tau} \cos(\omega \tau) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right\} \\
&\quad \times e^{-2\lambda^2 t} \Im \left\{ \rho_{(0,1)}^{(x)}(0) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.73}$$

O resultado (5.73) é equivalente aos de (5.15) e (5.16), já que as representações da matriz densidade nas bases de autovetores de σ_z e σ_x relacionam-se pela aplicação das matrizes do operador de Hadamard (1.20):

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \rho_{(0,0)} & \rho_{(0,1)} \\ \rho_{(1,0)} & \rho_{(1,1)} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{(0,0)}^{(x)} & \rho_{(0,1)}^{(x)} \\ \rho_{(1,0)}^{(x)} & \rho_{(1,1)}^{(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 2\Re \left\{ \rho_{(0,1)}^{(x)} \right\} & 2\rho_{(0,0)}^{(x)} - 1 - i\Im \left\{ \rho_{(0,1)}^{(x)} \right\} \\ 2\rho_{(0,0)}^{(x)} - 1 + i\Im \left\{ \rho_{(0,1)}^{(x)} \right\} & 1 - 2\Re \left\{ \rho_{(0,1)}^{(x)} \right\} \end{pmatrix} \tag{5.74}
\end{aligned}$$

A equivalência das soluções (5.73) e (5.15) confirma a efetividade do método aproximado.

Com relação aos resultados sem equivalente exato, (5.69) e (5.73), dependem da forma dada à interação do sistema com o ambiente. Para podermos resolver as integrais explicitamente, iremos dar uma forma ôhmica à função densidade espectral e supor a temperatura do ambiente inicialmente nula (equivalente a tomar o limite $\beta \rightarrow \infty$), que resultam em:

$$\begin{aligned}
\rho_{(0,0)}^{(x)}(t) &= \frac{1}{2} + \exp \left\{ -2\eta \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\omega/\omega_c} e^{-2\lambda^2 \tau} \cos(\omega \tau) \right\} \\
&\quad \times \left[\rho_{(0,0)}^{(x)}(0) - \frac{1}{2} \right],
\end{aligned} \tag{5.75}$$

$$\begin{aligned}
\Im \left\{ \rho_{(0,1)}^{(x)}(t) \right\} &= \exp \left\{ -2\lambda^2 t - 2\eta \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\omega/\omega_c} e^{2\lambda^2 \tau} \cos(\omega \tau) \right\} \\
&\quad \times \Im \left\{ \rho_{(0,1)}^{(x)}(0) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.76}$$

A integral em ω pode ser resolvida facilmente:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty d\omega \, \omega e^{-\omega/\omega_c} \cos(\omega\tau) &= -\Re \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^\infty d\omega \, e^{-\alpha\omega} \Big|_{\alpha=(\omega_c^{-1}+i\tau)} \right\} \\
&= -\Re \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{\alpha} \Big|_{\alpha=(\omega_c^{-1}+i\tau)} \right\} \\
&= \Re \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \Big|_{\alpha=(\omega_c^{-1}+i\tau)} \right\} \\
&= \Re \left\{ \frac{1}{(\omega_c^{-1}+i\tau)^2} \right\} \\
&= \frac{\omega_c^{-2} - \tau^2}{(\omega_c^{-2} + \tau^2)^2}.
\end{aligned} \tag{5.77}$$

Fazendo, adicionalmente, a mudança de variáveis para

$$x = \omega_c \tau, \tag{5.78}$$

$$y = \omega_c t', \tag{5.79}$$

a população e a parte imaginária da coerência podem ser reescritas como:

$$\rho_{(0,0)}^{(x)}(t) = \frac{1}{2} + \exp \left\{ -2\eta \int_0^{\omega_c t} dx \int_0^x dy \, e^{-2\lambda^2 x} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \right\} \left[\rho_{(0,0)}^{(x)}(0) - \frac{1}{2} \right], \tag{5.80}$$

$$\Im \left\{ \rho_{(0,1)}^{(x)}(t) \right\} = \exp \left\{ -2\lambda^2 t - 2\eta \int_0^{\omega_c t} dx \int_0^x dy \, e^{2\lambda^2 x} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \right\} \Im \left\{ \rho_{(0,1)}^{(x)}(0) \right\} \tag{5.81}$$

desde que o λ seja medido em unidades de $\omega_c^{1/2}$. O resultado dessas integrações numéricas pode ser visto nas figuras da seção 5.4.

5.3 Método numérico: operador partido ao meio

Para conferir o resultado anterior, e ver o comportamento no caso em que o acoplamento com o ambiente é forte, empregamos um método numérico que resolve a equação sem necessitar da aproximação de interação fraca (25). Partindo da equação de Lindblad, onde $\mathcal{L}$ representa o

superoperador Liouvillian e $\mathcal{M}$ o operador Lindbladiano,

$$\frac{d}{dt}\rho_{SA}(t) = [\mathcal{L} + \mathcal{M}]\rho_{SA}(t), \quad (5.82)$$

escrevemos sua solução na forma:

$$\rho_{SA}(t) = e^{(\mathcal{L}+\mathcal{M})t}\rho_{SA}(0). \quad (5.83)$$

O processo de resolução numérica baseia-se no fato de conhecermos soluções analíticas para equação quando apenas o Lindbladiano ou apenas o Liouvillian estão presentes, ou seja, sabemos como atuam $e^{\mathcal{L}t}$ e $e^{\mathcal{M}t}$. Com essa informação, dividimos a atuação do superoperador que resolve a equação em N passos temporais curtos de duração $\Delta t = N^{-1}t$:

$$\rho_{SA}(t) = \left[e^{(\mathcal{L}+\mathcal{M})\Delta t} \right]^N \rho_{SA}(0), \quad (5.84)$$

e usamos o fato de que $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ comutam aproximadamente em intervalos curtos:

$$e^{(\mathcal{L}+\mathcal{M})\Delta t} = e^{\mathcal{L}\Delta t}e^{\mathcal{M}\Delta t} + O(\Delta t^2), \quad (5.85)$$

de forma que a evolução temporal completa pode ser calculada pela aplicação alternada dos $e^{\mathcal{L}\Delta t}$ e $e^{\mathcal{M}\Delta t}$:

$$\rho_{SA}(t) = \left[e^{\mathcal{L}\Delta t}e^{\mathcal{M}\Delta t} \right]^N \rho_{SA}(0) + O(\Delta t). \quad (5.86)$$

Este método numérico só precisará ser aplicado para o cálculo das coerências (na base de autovetores de σ_z) de uma medida anticomutante. Os outros casos são solúveis exatamente e, portanto, dispensam aproximações.

Para obter as coerências da matriz densidade reduzida, precisamos tomar o traço parcial:

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_A \left\{ \left[e^{\mathcal{L}\Delta t}e^{\mathcal{M}\Delta t} \right]^N \rho_{SA}(0) \right\} + O(\Delta t), \quad (5.87)$$

e depois expor a equação apenas em termos das coerências na base do ruído.

Para representar as coerências, usaremos a notação matricial de pseudo-spinors, representando cada coerência como um elemento da matriz-coluna:

$$\rho_S(t) \rightarrow \begin{pmatrix} \rho_{(0,1)}(t) \\ \rho_{(1,0)}(t) \end{pmatrix}. \quad (5.88)$$

Nessa notação, é evidente que o efeito da aplicação da exponencial do Liouvilliano terá como efeito:

$$e^{\mathcal{L}t} \begin{pmatrix} \rho_{(0,1)}(0) \\ \rho_{(1,0)}(0) \end{pmatrix} \otimes \rho_A(0) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{+1}(t) & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{-1}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho_{(0,1)}(0) \\ \rho_{(1,0)}(0) \end{pmatrix} \otimes \rho_A(0), \quad (5.89)$$

onde os superoperadores $\mathcal{A}_{\pm 1}$ são definidos como:

$$\mathcal{A}_{\pm 1}(t)\rho \equiv e^{-i \sum_k \omega_k \left(a_k \pm \frac{g_k}{\omega_k}\right)^\dagger \left(a_k \pm \frac{g_k}{\omega_k}\right)} \rho e^{i \sum_k \omega_k \left(a_k \mp \frac{g_k}{\omega_k}\right)^\dagger \left(a_k \mp \frac{g_k}{\omega_k}\right)}. \quad (5.90)$$

É importante notar que esta solução é equivalente a (3.16).

Já a evolução devida ao Lindbladiano deve envolver as duas coerências:

$$e^{\mathcal{M}t} \begin{pmatrix} \rho_{(0,1)}(0) \\ \rho_{(1,0)}(0) \end{pmatrix} = e^{-\lambda^2 t} \begin{pmatrix} \cosh(\lambda^2 t) & \sinh(\lambda^2 t) \\ \sinh(\lambda^2 t) & \cosh(\lambda^2 t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho_{(0,1)}(0) \\ \rho_{(1,0)}(0) \end{pmatrix}, \quad (5.91)$$

que é equivalente à (5.21). Com esses resultados, o algoritmo completo pode ser representado da forma:

$$\begin{pmatrix} \rho_{(0,1)}(t) \\ \rho_{(1,0)}(t) \end{pmatrix} = \text{Tr}_A \left\{ \left[\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{+1}(\Delta t) & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{-1}(\Delta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\lambda^2 \Delta t) & \sinh(\lambda^2 \Delta t) \\ \sinh(\lambda^2 \Delta t) & \cosh(\lambda^2 \Delta t) \end{pmatrix} \right]^N \rho_A(0) \right\} \\ \times e^{-\lambda^2 t} \begin{pmatrix} \rho_{(0,1)}(0) \\ \rho_{(1,0)}(0) \end{pmatrix}. \quad (5.92)$$

A forma como a expressão (5.92) está apresentada ainda não é prática para a elaboração do algoritmo, já que ela envolve a aplicação de superoperadores e a multiplicação de um número muito grande de matrizes. Portanto, precisamos simplificar o algoritmo, começando com a simplificação do produto matricial. Notando que o produto de duas dessas matrizes pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{+1}(\Delta t) & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{-1}(\Delta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\lambda^2 \Delta t) & \sinh(\lambda^2 \Delta t) \\ \sinh(\lambda^2 \Delta t) & \cosh(\lambda^2 \Delta t) \end{pmatrix} = \mathcal{A}_{+1}(\Delta t)B_{+1}(\Delta t) + \mathcal{A}_{-1}(\Delta t)B_{-1}(\Delta t), \quad (5.93)$$

onde definimos duas novas matrizes:

$$B_{+1}(\Delta t) \equiv \begin{pmatrix} c_{+1}(\Delta t) & c_{-1}(\Delta t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{-1}(\Delta t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_{-1}(\Delta t) & c_{+1}(\Delta t) \end{pmatrix}, \quad (5.94)$$

onde, por conveniencia de notação, estamos representando as funções hiperbólicas como:

$$c_{\pm 1}(\Delta t) \equiv \frac{e^{\lambda^2 \Delta t} \pm e^{-\lambda^2 \Delta t}}{2}. \quad (5.95)$$

Como os $\mathcal{A}_{\pm 1}(\Delta t)$ são superoperadores que atuam sobre o ambiente, enquanto que os $B_{\pm 1}(\Delta t)$ são matrizes que afetam o sistema, eles comutam entre si, permitindo que o produto das N matrizes, necessário para a elaboração de nosso algoritmo, possa ser escrito em forma de somatória:

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_{+1}(\Delta t)B_{+1}(\Delta t) + \mathcal{A}_{-1}(\Delta t)B_{-1}(\Delta t)]^N &= \sum_{q_1 \in \{-1, 1\}} \dots \sum_{q_N \in \{-1, 1\}} \left[\prod_{i=1}^N \mathcal{A}_{q_i}(\Delta t) \right] \\ &\quad \times \left[\prod_{j=1}^N B_{q_j}(\Delta t) \right]. \end{aligned} \quad (5.96)$$

As matrizes $B_{\pm 1}(\Delta t)$, em conjunto com $\sigma_x B_{\pm 1}(\Delta t)$, formam um grupo fechado à operação de produto matricial, como pode ser visto de:

$$B_{+1}(\Delta t)B_{+1}(\Delta t) = \begin{pmatrix} c_{+1}(\Delta t)c_{+1}(\Delta t) & c_{+1}(\Delta t)c_{-1}(\Delta t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = c_{+1}(\Delta t)B_{+1}(\Delta t), \quad (5.97)$$

$$B_{+1}(\Delta t)B_{-1}(\Delta t) = \begin{pmatrix} c_{-1}(\Delta t)c_{-1}(\Delta t) & c_{+1}(\Delta t)c_{-1}(\Delta t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = c_{-1}(\Delta t)\sigma_x B_{-1}(\Delta t) \quad (5.98)$$

$$B_{-1}(\Delta t)B_{+1}(\Delta t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_{-1}(\Delta t)c_{+1}(\Delta t) & c_{-1}(\Delta t)c_{-1}(\Delta t) \end{pmatrix} = c_{-1}(\Delta t)\sigma_x B_{+1}(\Delta t) \quad (5.99)$$

$$B_{-1}(\Delta t)B_{-1}(\Delta t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_{+1}(\Delta t)c_{-1}(\Delta t) & c_{+1}(\Delta t)c_{+1}(\Delta t) \end{pmatrix} = c_{+1}(\Delta t)B_{-1}(\Delta t), \quad (5.100)$$

que pode mais compactamente ser representado por:

$$B_{q_1}(\Delta t)B_{q_2}(\Delta t) = c_{q_1 q_2}(\Delta t) (\sigma_x)^{[1+(q_1+q_2)/2]} B_{q_2}(\Delta t). \quad (5.101)$$

Iterando N vezes, obtemos um resultado simples para o produto de todas as matrizes:

$$\left[\prod_{j=1}^N B_{q_j}(\Delta t) \right] = \left[\prod_{j=1}^{N-1} c_{q_j q_{j+1}}(\Delta t) \right] (\sigma_x)^{\sum_{j=1}^{N-1} [1+(q_j+q_{j+1})/2]} B_{q_N}(\Delta t). \quad (5.102)$$

Levando em conta que todos os q_i valem ± 1 , temos:

$$\left(1 + \frac{q_1 + q_2}{2} \right) + \left(1 + \frac{q_2 + q_3}{2} \right) = \begin{cases} 3 + \frac{q_1 + q_3}{2}, & \text{se } q_2 = +1, \\ 1 + \frac{q_1 + q_3}{2}, & \text{se } q_2 = -1. \end{cases} \quad (5.103)$$

Como o produto de uma matriz de Pauli por si mesma é igual à identidade, a aritmética empregada nas suas potências deve ser módulo 2, de forma que as expressões nos dois casos, $q_2 = 1$ e $q_2 = -1$, se igualam. Repetindo o procedimento para toda a somatória, concluímos que a presença de σ_x só depende de q_1 e q_N :

$$(\sigma_x)^{\sum_{j=1}^{N-1} [1+(q_j+q_{j+1})/2]} = (\sigma_x)^{1+(q_1+q_N)/2} \quad (5.104)$$

Resta ainda calcular o traço parcial sobre o ambiente para cada um das possíveis combinações de superoperadores $\mathcal{A}_{\pm}(\Delta t)$. Isso será feito com o auxílio dos estados coerentes e dos operadores deslocamento, como no capítulo 3. O cálculo é realizado no Apêndice A, no qual emprega-se a

hipótese de temperatura nula do banho para obter-se uma fórmula simples:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A \left\{ \left[\prod_{i=1}^N \mathcal{A}_{q_i}(\Delta t) \right] \rho_A(0) \right\} \\ = \exp \left\{ -8 \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega^2} \sin^2 \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) \sum_{m,n=1}^N q_m q_n \cos [\omega \Delta t (m - n)] \right\}, \end{aligned} \quad (5.105)$$

na qual já passamos para o limite contínuo de frequências. Unindo esse resultado com os anteriores, temos a seguinte forma para o algoritmo de evolução das coerências:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \rho_{(0,1)}(t) \\ \rho_{(1,0)}(t) \end{pmatrix} &= e^{-\lambda^2 t} \sum_{q_1 \in \{-1,1\}} \cdots \sum_{q_N \in \{-1,1\}} \left[\prod_{j=1}^{N-1} c_{q_j q_{j+1}}(\Delta t) \right] \\ &\times \exp \left\{ -8 \sum_{m,n=1}^N q_m q_n \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega^2} \sin^2 \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) \cos [\omega \Delta t (m - n)] \right\} \\ &\times (\sigma_x)^{1+(q_1+q_N)/2} B_{q_N}(\Delta t) \begin{pmatrix} \rho_{(0,1)}(0) \\ \rho_{(1,0)}(0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.106)$$

Temos, portanto, um algoritmo que foi simplificado de uma multiplicação de $2N$ matrizes 2×2 que envolviam superoperadores para uma somatória de 2^N de tais matrizes, agora só incluindo números reais.

5.3.1 Densidade espectral ôhmica

Essa expressão é geral para qualquer distribuição de frequências $J(\omega)$. Neste programa, porém, buscaremos uma solução específica para uma densidade ôhmica (3.29), assim como fizemos para os resultados (5.69) e (5.73) do cálculo com a equação-mestra híbrida. A escolha dessa função de densidade espectral permite que as integrais sejam feitas analiticamente, salvando-nos tempo de programa que seria gasto para seu cálculo numérico. Começamos por notar que:

$$\frac{2}{\omega} \text{sen}^2 \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) = \int_0^{\Delta t} du \text{sen}(\omega u), \quad (5.107)$$

o que substituímos na integral, por fim de torná-la dupla:

$$\begin{aligned} 8 \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) \cos[\omega \Delta t(m-n)] \\ = 4\eta \int_0^\infty d\omega e^{-\omega/\omega_c} \int_0^{\Delta t} du \text{sen}(\omega u) \cos[\omega \Delta t(m-n)]. \end{aligned} \quad (5.108)$$

A integral das frequências agora é facilmente executada se a separarmos em termos de exponenciais:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\omega e^{-\omega/\omega_c} \text{sen}(\omega u) \cos[\omega \Delta t(m-n)] &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega e^{-\omega/\omega_c} \text{sen}[\omega u + \omega \Delta t(m-n)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega e^{-\omega/\omega_c} \text{sen}[\omega u - \omega \Delta t(m-n)] \\ &= \frac{1}{2} \Im \left\{ \int_0^\infty d\omega e^{-\omega/\omega_c + i\omega u + i\omega \Delta t(m-n)} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \Im \left\{ \int_0^\infty d\omega e^{-\omega/\omega_c + i\omega u - i\omega \Delta t(m-n)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Sabendo que as exponenciais negativas integram-se conforme:

$$\int_0^\infty d\omega e^{-\omega/\omega_c + i\omega u \pm i\omega \Delta t(m-n)} = \frac{\omega_c}{1 - i\omega_c u \mp i\omega_c \Delta t(m-n)}, \quad (5.110)$$

obtemos ao final:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\omega e^{-\omega/\omega_c} \text{sen}(\omega u) \cos[\omega \Delta t(m-n)] \\ = \frac{\omega_c}{2} \frac{\omega_c u + \omega_c \Delta t(m-n)}{1 + [\omega_c u + \omega_c \Delta t(m-n)]^2} + \frac{\omega_c}{2} \frac{\omega_c u - \omega_c \Delta t(m-n)}{1 + [\omega_c u - \omega_c \Delta t(m-n)]^2} \\ = \frac{1}{4} \frac{d}{du} \ln \left\{ 1 + [\omega_c u + \omega_c \Delta t(m-n)]^2 \right\} + \frac{1}{4} \frac{d}{du} \ln \left\{ 1 + [\omega_c u - \omega_c \Delta t(m-n)]^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.111)$$

A derivada em u permite que integremos nessa variável sem dificuldades:

$$\begin{aligned}
& 4\eta \int_0^\infty d\omega e^{-\omega/\omega_c} \int_0^{\Delta t} du \sin(\omega u) \cos[\omega \Delta t(m-n)] \\
&= \eta \ln \left\{ \frac{1 + (\omega_c \Delta t)^2 [1 + (m-n)]^2}{1 + (\omega_c \Delta t)^2 (m-n)^2} \right\} + \eta \ln \left\{ \frac{1 + (\omega_c \Delta t)^2 [1 - (m-n)]^2}{1 + (\omega_c \Delta t)^2 (m-n)^2} \right\} \\
&= \eta \ln \left\{ \frac{1 + 2(\omega_c \Delta t)^2 [1 + (m-n)^2] + (\omega_c \Delta t)^4 [1 - (m-n)^2]^2}{[1 + (\omega_c \Delta t)^2 (m-n)^2]^2} \right\} \\
&= \eta \ln \left\{ 1 + \frac{2(\omega_c \Delta t)^{-2} + [1 - 2(m-n)^2]}{[(\omega_c \Delta t)^{-2} + (m-n)^2]^2} \right\}. \tag{5.112}
\end{aligned}$$

Como a integral estava presente numa exponencial, o logaritmo colabora para uma expressão mais simples:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \rho_{(0,1)}(t) \\ \rho_{(1,0)}(t) \end{pmatrix} &= e^{-\lambda^2 t} \sum_{q_1 \in \{-1,1\}} \cdots \sum_{q_N \in \{-1,1\}} \left[\prod_{j=1}^{N-1} c_{q_j q_{j+1}}(\Delta t) \right] \\
&\times \prod_{m,n=1}^N \left\{ 1 + \frac{2(\omega_c \Delta t)^{-2} + [1 - 2(m-n)^2]}{[(\omega_c \Delta t)^{-2} + (m-n)^2]^2} \right\}^{-\eta q_m q_n} \\
&\times (\sigma_x)^{1+(q_1+q_N)/2} B_{q_N}(\Delta t) \begin{pmatrix} \rho_{(0,1)}(0) \\ \rho_{(1,0)}(0) \end{pmatrix}. \tag{5.113}
\end{aligned}$$

O algoritmo (5.113), cuja complexidade cresce exponencialmente com o número de passos, foi o utilizado para o cálculo numérico das coerências. Felizmente, constatamos ao realizar as simulações que um número $N \sim 15$ já era suficiente para gerar resultados confiáveis dentro da nossa escolha de parâmetros. De qualquer forma, ao escrevermos o algoritmo, fizemos com que ele aumentasse progressivamente o valor de N até que a diferença entre a coerência calculada numa iteração e na outra fosse suficientemente pequena, como pode ser visto na listagem de algoritmo dada no Apêndice D. Usamos a diferença entre as duas iterações para estimar as barras, que são pequenas, mas são representadas em todos os gráficos.

Depois de calculadas as coerências na base de σ_z , obtemos o resultado da população e a parte imaginária da coerência na base de σ_x através da igualdade (5.74). Essa mudança de base é necessária para compará-los com os resultados devidos à equação-mestra.

5.4 Resultados

De posse de tanto métodos numéricos quanto analíticos para o cálculo da evolução temporal de um sistema durante uma medida ruidosa, realizamos diversas simulações para analisar como o ambiente e o aparato de medida interferiam na evolução do sistema.

Na figura 5.1, vemos a comparação dos dois métodos para diferentes acoplamentos sistema-ambiente. Nela, vemos que o método aproximado concorda melhor com os cálculos numéricos para pequenos valores da interação com o ambiente, o que era esperado pelo processo de dedução da equação-mestra híbrida.

Figura 5.1 – Comparação da evolução temporal da população para diferentes valores do acoplamento com o ambiente, η . Conforme η aumenta, vemos um crescimento também na taxa da variação da população. Todas as curvas calculadas com $\lambda = 2\omega_c^{1/2}$.

A evolução das populações, mostrada nas figuras 5.2 e 5.3, cai com o tempo conforme o ruído atua destruindo o estado original do sistema. Porém, vemos já o efeitos da atuação do aparato de medida: quanto maior o λ , mais devagar ocorre a degradação do estado. Isto permite-nos concluir que, quando a medida é incompatível com o erro que o ambiente causa, os seus dois efeitos são compensados, resultando numa manutenção de um estado mais próximo do original.

Cabe-nos, ainda, interpretar como essa abordagem contínua para as medidas diferencia-se daquela em que as medidas são consideradas instantâneas. Nas últimas, em qualquer instante t

que a medida ocorra, a probabilidade de medir-se o primeiro autovalor de σ_x terá diminuído de $\rho_{(0,0)}^{(x)}(0)$ para o $\rho_{(0,0)}^{(x)}(t)$ com $\lambda = 0$, representado por uma curva vermelha tracejada nas figuras – o resultado nesse caso é analítico e exato (3.30), de forma que uma diferenciação entre método numérico e equação-mestra é desnecessária. A diferença entre esses dois valores representa a probabilidade de que ocorra um erro na medida: deveríamos ter medido um autovalor, mas medimos outro. No primeiro caso, com medida finitas, se a medida atua no intervalo entre 0 e t , a variação do $\rho_{(0,0)}^{(x)}(t)$ terá sido menor, resultando numa também menor probabilidade de erro.

Conclui-se, pois, que uma medida finita suficientemente forte, anticomutante com o tipo de erro que afeta o qubit, é capaz de protegê-lo do ruído, algo que não era possível com medidas instantâneas. No próximo capítulo, aplicaremos essa ideia à proteção de conjuntos de qubits, com a teoria de códigos quânticos.

Também fizemos simulações da queda da parte imaginária da coerência (figura 5.4), para diferentes valores de λ e η . Vemos que a a coerência sempre tende a zero ao final de certo tempo, e que essa dependência é mais relacionada com a intensidade da medida que com a intensidade do ruído. Isso é natural: na base de autovetores de σ_x , a medida dessa observável é que deve ser a principal responsável pela descoerência, além de, por hipótese, estarmos supondo que a medida é muito mais forte que a interação que causa os erros. Mesmo assim, vê-se que o ruído também é responsável por certa parte da descoerência: afinal, como podemos ver de (5.74), a parte imaginária da coerência numa base depende diretamente da coerência da outra.

A combinação de resultados para a população e para a coerência levam-nos a concluir que, para tempos que tendem ao infinito, a matriz densidade reduzida tende ao estado:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_S(t) \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.114)$$

Como este resultado é proporcional à identidade, podemos tirar a conclusão de que ele será o mesmo em qualquer base, já que qualquer matriz de mudança de base comuta com a identidade. Isso significa que, para qualquer observável que meçamos, estaremos lidando não mais com um estado puro, mas sim uma mistura com igual probabilidade de encontrarmos qualquer resultado. Tal é o efeito para a longo prazo de duas medidas incompatíveis simultâneas: perde-se qualquer informação armazenada no sistema, assim como para medidas instantâneas, uma medida anterior de σ_x impede qualquer possibilidade de extrairmos alguma informação útil a partir de uma medida de σ_z .

Mesmo com os efeitos deletérios apresentados se deixarmos o sistema evoluir indefinidamente sob o efeito de ambos o ruído e o aparato de medida, ainda é verdade que a medida contínua tem efeitos protetivos a curto prazo (que sempre pode ser ampliado com um aumento de λ). Estes serão explorados no próximo capítulo para, através de uma escolha mais adequada da medida a ser feita, podermos proteger o estado de um sistema codificado.

Figura 5.2 – Comparação da evolução temporal das populações, na base em que a medida anticomutante é realizada, para diversas intensidades de medida e dois valores fracos para a interação com o ambiente.

Figura 5.3 – Comparação da evolução temporal das populações, na base em que a medida anticomutante é realizada, para diversas intensidades de medida e dois valores fortes para a interação com o ambiente.

Figura 5.4 – Comparação da evolução temporal da parte imaginária da coerência, na base em que a medida anticomutante é realizada, para diversas intensidades de medida e dois valores, um forte e outro fraco, para a interação com o ambiente.

Capítulo 6 Correção contínua de erros

Com base nos resultados dos dois capítulos anteriores, passaremos ao próximo desenvolvimento natural de nosso trabalho, isto é, determinar se podemos combinar o fato de que uma medida contínua protege o estado de um qubit físico com o fato de que medidas periódicas ajudam a proteger um estado codificado. A proposta é criar um método de correção de erros em que as medidas de síndrome sejam contínuas, ao contrário das medidas instantâneas empregadas no modelo tradicional de correção de erros. Adicionaremos a ideia de que a medida ocorra simultaneamente aos erros, com a intenção de reproduzir os efeitos protetivos encontrados no capítulo 5. Dessa forma, a evolução do sistema será regida, como no capítulo anterior, por uma equação de Lindblad que nós aproximaremos pela equação-mestra híbrida (2.68). A diferença agora é que a síndrome pode constituir-se de mais de uma observável, de forma que pode ser necessário que ocorra mais de uma medida simultaneamente.

6.1 Aplicação a códigos estabilizados

Quando há uma série de medidas realizadas conjuntamente, cada uma representada por um Lindbladiano $\mathcal{M}_i$, a equação-mestra híbrida assume a forma:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \sum_i \mathcal{M}_i \rho_S(t) - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \operatorname{Tr}_A \left\{ \left[H_I(\tau), e^{\sum_i \mathcal{M}_i \tau} \left[H_I(0), e^{-\sum_i \mathcal{M}_i \tau} \rho_S(t) \rho_A(0) \right] \right] \right\}. \quad (6.1)$$

Para facilitar a descrição de tal processo, consideraremos que o código analisado é estabilizado, ou seja, ele é definido por um grupo de operadores $\mathcal{S} = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ dos quais os estados do subespaço do código são autovetores com autovalor 1. Assim,

$$M_i |\psi\rangle = |\psi\rangle, \quad \forall M_i \in \mathcal{S}, \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{C}. \quad (6.2)$$

Conforme demonstrado por Gottesman (26), todos os elementos do grupo estabilizador $\mathcal{S}$ comutam entre si:

$$[M_i, M_j] = 0, \quad \forall M_i, M_j \in \mathcal{S}. \quad (6.3)$$

Adicionalmente, vamos supor que os elementos do estabilizador são também membros do grupo de Pauli, o que normalmente usa-se por conveniência. Como produtos tensoriais de identidades e matrizes de Pauli, sempre satisfarão:

$$M_i M_i = 1. \quad (6.4)$$

A equação-mestra nos dá a evolução de toda a matriz densidade reduzida durante o período de tempo analisado. Isso é mais informação do que necessitamos para a análise de como a medida simultânea aos erros protege o sistema contra os últimos: tudo o que precisamos saber é como a probabilidade de encontrar o estado dentro do subespaço do código $\mathcal{C}$ evolui com o tempo. Para obtermos essa informação, primeiro definimos um subconjunto do grupo estabilizador $\mathcal{S}$ que contenha o número mínimo de medidas de síndrome necessárias para afirmar com certeza se um erro ocorreu. Denotaremos esse número mínimo por m e escolheremos os índices do grupo estabilizador de forma que as medidas de síndrome sejam ordenadas de 1 a m : $M_1, M_2, \dots, M_m$.

Sabe-se que os elementos do grupo de Pauli, assim como as matrizes de Pauli, só possuem dois autovalores: -1 e 1 . Portanto, podemos construir operadores P_i que mantêm o estado ao qual são aplicados inalterado se ele passa na medida de síndrome, mas resultam em zero se a medida der -1 :

$$P_i \equiv \frac{1 + M_i}{2}. \quad (6.5)$$

O fato de que os P_i são projetores (operadores cujo quadrado é igual a si mesmo, $P^2 = P$) segue-se diretamente de $M_i^2 = 1$.

Combinando todos esses projetores, encontramos um projetor que leva ao subespaço do código $\mathcal{C}$:

$$P_C \equiv \prod_{i=1}^m P_i. \quad (6.6)$$

O traço do produto desse projetor com o operador densidade resulta na probabilidade de encontrar-se o estado do sistema dentro do código, ou seja, de encontrar o estado livre de erros. Denotaremos essa probabilidade por $p_C(t)$:

$$p_C(t) = \text{Tr}_S \{P_C \rho_S(t)\}. \quad (6.7)$$

Portanto, a equação diferencial que realmente precisamos resolver é aquela obtida multiplicando-se (6.1) à esquerda pelo projetor e tomando-se o traço:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_C(t) &= \sum_i \text{Tr}_S \{P_C \mathcal{M}_i \rho_S(t)\} - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \\ &\times \text{Tr}_{SA} \left\{ P_C \left[H_I(\tau), e^{\sum_i \mathcal{M}_i \tau} \left[H_I(0), e^{-\sum_i \mathcal{M}_i \tau} \rho_S(t) \rho_A(0) \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Para saber como comutam com os hamiltonianos da representação de interação $H_I(t)$ que estão presentes na equação (6.8), precisamos dar uma forma a esses operadores. Uma maneira geral de fazê-lo é escrevê-los em termos de operadores de Pauli que atuam independentemente em cada um dos N qubits:

$$H_I(t) = \hbar \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\sigma}_i \otimes \mathbf{E}_i(t). \quad (6.9)$$

Essa decomposição sempre é possível, já que o grupo de Pauli é uma base dos operadores dos qubits. Apenas eliminaram-se termos que atuassem em mais de um qubit simultaneamente para que os erros sejam independentes.

Além disso, para que os erros sejam realmente independentes, cada um dos $\mathbf{E}_i(t)$ deve atuar num ambiente distinto. Assim, o i -ésimo desses operadores só deve atuar sobre o i -ésimo ambiente:

$$\mathbf{E}_i(t) = \left[\begin{array}{c} i-1 \\ \bigotimes \\ j=1 \end{array} 1 \right] \otimes \mathbf{E}(t) \otimes \left[\begin{array}{c} N \\ \bigotimes \\ j=i+1 \end{array} 1 \right]. \quad (6.10)$$

Note que estamos supondo que todos os qubits sofrem o mesmo tipo de erro, de forma que os operadores $\mathbf{E}(t)$ têm todos a mesma forma.

Decompondo os comutadores com o auxílio de (6.9), a equação de movimento (6.8) torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_{\mathcal{C}}(t) = & - \sum_{r,s=1}^N \sum_{j,k=1}^3 \int_0^t d\tau \\ & \times \text{Tr}_{SA} \left\{ P_{\mathcal{C}} \left[\sigma_{r,j} E_{r,j}(\tau), e^{\sum_i \mathcal{M}_i \tau} \left[\sigma_{s,k} E_{s,k}(0), e^{-\sum_i \mathcal{M}_i \tau} \rho_S(t) \rho_A(0) \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Resta explicitar a atuação do superoperador Lindbladiano $\mathcal{M}_i$, que já conhecemos do capítulo anterior:

$$\mathcal{M}_i \rho = \lambda_i^2 [M_i \rho M_i - \rho], \quad (6.12)$$

onde estamos empregando o escalar λ_i para representar a intensidade da i -ésima medida de síndrome. Como $\mathcal{M}_i$ e $P_{\mathcal{C}}$ são compostos dos mesmos operadores pertencentes ao grupo estabilizador, que é abeliano, obviamente:

$$[\mathcal{M}_i, P_{\mathcal{C}}] = 0. \quad (6.13)$$

Daí,

$$\text{Tr}_S \{P_{\mathcal{C}} \mathcal{M}_i \rho_S(t)\} = \lambda_i^2 \text{Tr}_S \{M_i P_{\mathcal{C}} \rho_S(t) M_i\} - \lambda_i^2 \text{Tr}_S \{P_{\mathcal{C}} \rho_S(t)\}. \quad (6.14)$$

Empregando a propriedade cíclica do traço, e o fato de que as síndromes pertencem ao grupo de Pauli, concluímos que:

$$\text{Tr}_S \{M_i P_{\mathcal{C}} \rho_S(t) M_i\} = \text{Tr}_S \left\{ [M_i]^2 P_{\mathcal{C}} \rho_S(t) \right\} = \text{Tr}_S \{P_{\mathcal{C}} \rho_S(t)\}, \quad (6.15)$$

de onde obtemos:

$$\text{Tr}_S \{P_{\mathcal{C}} \mathcal{M}_i \rho_S(t)\} = 0, \quad (6.16)$$

o que elimina o primeiro termo à direita da equação diferencial (6.8).

Com relação ao segundo termo, podemos escrever explicitamente as exponenciais dos Lindbladianos conforme:

$$e^{\mathcal{M}_i t} \rho = e^{-\lambda_i^2 t} [\cosh(\lambda_i^2 t) \rho + \sinh(\lambda_i^2 t) M_i \rho M_i], \quad (6.17)$$

pois esta é a solução da equação diferencial:

$$\frac{d}{dt} [e^{\mathcal{M}_i t} \rho] = \mathcal{M}_i [e^{\mathcal{M}_i t} \rho] \quad (6.18)$$

que satisfaz a condição inicial $[e^{\mathcal{M}_i t} \rho]_{t=0} = \rho$.

Com o resultado de (6.17), podemos deduzir uma identidade útil que envolve tanto o comutador quanto o superoperador Lindbladiano. Começamos apenas expandindo:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{SA} \{P_C [\sigma_{r,j} E_{r,j}, e^{\mathcal{M}_i \tau} X]\} &= e^{-\lambda_i^2 \tau} \cosh(\lambda_i^2 \tau) \text{Tr}_{SA} \{P_C [\sigma_{r,j} E_{r,j}, X]\} \\ &+ e^{-\lambda_i^2 \tau} \sinh(\lambda_i^2 \tau) \text{Tr}_{SA} \{P_C [\sigma_{r,j} E_{r,j}, M_i X M_i]\}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Como o resultado agora depende de como M_i comuta com a matriz de Pauli, e como operadores do grupo de Pauli só podem comutar ou anticomutar entre si, definiremos um tensor $f_{i,r,j}$ que encapsula a informação sobre a comutação:

$$f_{i,r,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } [\sigma_{r,j}, M_i] = 0, \\ -1, & \text{se } \{\sigma_{r,j}, M_i\} = 0. \end{cases} \quad (6.20)$$

Com o auxílio de $f_{i,r,j}$, podemos escrever:

$$\text{Tr}_{SA} \{P_C [\sigma_{r,j} E_{r,j}, e^{\mathcal{M}_i \tau} X]\} = e^{-\lambda_i^2 \tau} [\cosh(\lambda_i^2 \tau) + f_{i,r,j} \sinh(\lambda_i^2 \tau)] \text{Tr}_{SA} \{P_C [\sigma_{r,j} E_{r,j}, X]\}, \quad (6.21)$$

o que pode ser ainda mais simplificado se empregarmos a definição dos senos e cossenos hiperbólicos para escrever:

$$\cosh \theta \pm \sinh \theta = e^{\pm \theta}, \quad (6.22)$$

de forma que a identidade será simplesmente:

$$\text{Tr}_{SA} \{P_C [\sigma_{r,j} E_{r,j}, e^{\mathcal{M}_i \tau} X]\} = e^{\lambda_i^2 (f_{i,r,j} - 1) \tau} \text{Tr}_{SA} \{P_C [\sigma_{r,j} E_{r,j}, X]\}. \quad (6.23)$$

Com a identidade (6.23), a equação de movimento torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p_C(t) = & - \sum_{r,s=1}^N \sum_{j,k=1}^3 e^{\sum_i \lambda_i^2 (f_{i,r,j}-1)\tau} \int_0^t d\tau \\ & \times \text{Tr}_{SA} \left\{ P_C \left[\sigma_{r,j} E_{r,j}(\tau), \left[\sigma_{s,k} E_{s,k}(0), e^{-\sum_i \mathcal{M}_i \tau} \rho_S(t) \rho_A(0) \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Repetindo o procedimento para o operador $e^{-\sum_i \mathcal{M}_i \tau}$, só devemos acumular dois dos $f_{i,r,j}$ (um para cada matriz de Pauli) e inverter o valor de τ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p_C(t) = & - \sum_{r,s=1}^N \sum_{j,k=1}^3 \int_0^t d\tau e^{\sum_i \lambda_i^2 f_{i,r,j}(1-f_{i,s,k})\tau} \\ & \times \text{Tr}_{SA} \{ P_C [\sigma_{r,j} E_{r,j}(\tau), [\sigma_{s,k} E_{s,k}(0), \rho_S(t) \rho_A(0)]] \}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Expandindo os comutadores, podemos dividir o traço numa porção que atua no ambiente e outra que atua no sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p_C(t) = & - \sum_{r,s=1}^N \sum_{j,k=1}^3 \int_0^t d\tau e^{\sum_i \lambda_i^2 f_{i,r,j}(1-f_{i,s,k})\tau} \text{Tr}_A \{ E_{r,j}(\tau) E_{s,k}(0) \rho_A(0) \} \\ & \times \text{Tr}_S \{ P_C [\sigma_{r,j}, \sigma_{s,k} \rho_S(t)] \} \\ & + \sum_{r,s=1}^N \sum_{j,k=1}^3 \int_0^t d\tau e^{\sum_i \lambda_i^2 f_{i,r,j}(1-f_{i,s,k})\tau} \text{Tr}_A \{ E_{s,k}(0) E_{r,j}(\tau) \rho_A(0) \} \\ & \times \text{Tr}_S \{ P_C [\sigma_{r,j}, \rho_S(t) \sigma_{s,k}] \}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Para banhos bosônicos, os operadores de acoplamento com o ambiente $E_{s,k}(0)$ geralmente contêm termos com apenas um operador criação ou aniquilação. Por isso, o traço de dois deles será nulo a menos que eles atuem sobre o mesmo banho, ou seja,

$$\text{Tr}_A \{ E_{s,k}(0) E_{r,j}(\tau) \rho_A(0) \} = \delta_{r,s} \text{Tr}_A \{ E_{r,k}(0) E_{r,j}(\tau) \rho_A(0) \}. \quad (6.27)$$

Notando adicionalmente que, como todos os operadores envolvidos são hermitianos:

$$\mathrm{Tr}_A \{E_{s,k}(0)E_{r,j}(\tau)\rho_A(0)\} = \mathrm{Tr}_A^* \{E_{r,j}(\tau)E_{s,k}(0)\rho_A(0)\}, \quad (6.28)$$

$$\mathrm{Tr}_S \{P_C [\sigma_{r,j}, \rho_S(t)\sigma_{s,k}]\} = -\mathrm{Tr}_S^* \{P_C [\sigma_{r,j}, \sigma_{s,k}\rho_S(t)]\}. \quad (6.29)$$

obtemos uma forma compacta para a equação de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p_C(t) = & -2 \sum_{r=1}^N \sum_{j,k=1}^3 \int_0^t d\tau e^{\sum_i \lambda_i^2 f_{i,r,j}(1-f_{i,r,k})\tau} \Re \{ \mathrm{Tr}_A \{E_{r,j}(\tau)E_{r,k}(0)\rho_A(0)\} \\ & \times \mathrm{Tr}_S \{P_C [\sigma_{r,j}, \sigma_{r,k}\rho_S(t)]\} \}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

A fórmula obtida apresenta a vantagem de ter um valor claramente real, como esperado para a taxa de variação de uma probabilidade. Apesar de não ficar imediatamente claro como a intensidade da medida afeta a evolução da taxa, podemos ver que, se todas as matrizes de Pauli forem iguais, teremos o coeficiente na exponencial, que multiplica λ_i^2 , sempre nulo ou menor que zero, como pode ser visto na diagonal da Tabela 6.1. Neste caso, desde que pelo menos uma medida de síndrome anticomute com cada um dos $\sigma_{r,j}$, os parâmetros de acoplamento λ_i estarão presentes sempre em exponenciais negativas. Portanto, um aumento da intensidade da medida diminuiria a taxa de variação de p_C .

Para analisar explicitamente um caso em que isso possa acontecer, vamos considerar, na próxima seção, a situação em que os erros são todos de fase.

Tabela 6.1 – Resultado da expressão $f_{i,r,j}(1 - f_{i,r,k})$, presente na exponencial, em termos dos possíveis valores de $f_{i,r,j}$ e $f_{i,r,k}$

	$f_{i,r,j} = 1$	$f_{i,r,j} = -1$
$f_{i,r,k} = 1$	0	0
$f_{i,r,k} = -1$	2	-2

6.2 Aplicação a erros de fase

Para modelar erros de fase ocorrendo a um conjunto de N qubits, escolhemos o hamiltoniano de forma que os operadores $E_{r,j}(t)$ serão:

$$E_{r,j}(t) = \delta_{r,3} \sum_k \left[g_k^* e^{-i\omega_k t} a_{r,k} + g_k e^{i\omega_k t} a_{r,k}^\dagger \right], \quad (6.31)$$

onde empregamos o índice j para distinguir em que banho atua cada par de criação e aniquilação ($a_{r,k}, a_{r,k}^\dagger$). Vale lembrar aqui que, mesmo que os erros não sejam necessariamente de fase, mas possam ser expressos da forma:

$$H_I(t) = \hbar \sum_{r=1}^N (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_r) \sum_k \left[g_k^* e^{-i\omega_k t} a_{r,k} + g_k e^{i\omega_k t} a_{r,k}^\dagger \right], \quad (6.32)$$

as conclusões tiradas com relação aos erros de fase continuarão sendo válidas, desde que rotacionemos as medidas de síndrome de maneira análoga.

Seguindo, pois, na análise do caso em que apenas as matrizes de Pauli σ_z estão presentes no hamiltoniano de interação, a equação de movimento (6.30) para esse caso será simplificada a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_C(t) = & -2 \sum_{r=1}^N \int_0^t d\tau e^{\sum_i \lambda_i^2 f_{i,r,3} (1-f_{i,r,3}) \tau} \Re \{ \text{Tr}_A \{ E_{r,3}(\tau) E_{r,3}(0) \rho_A(0) \} \\ & \times \text{Tr}_S \{ P_C [\sigma_{r,3}, \sigma_{r,3} \rho_S(t)] \} \}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

O traço ambiental é do mesmo tipo obtido no capítulo 3 para o caso da descoerência de um qubit apenas:

$$\text{Tr}_A \{ E_{r,3}(\tau) E_{r,3}(0) \rho_A(0) \} = \sum_k |g_k|^2 \left(e^{i\omega_k \tau} \langle a_{r,k}^\dagger a_{r,k} \rangle + e^{-i\omega_k \tau} \langle a_{r,k} a_{r,k}^\dagger \rangle \right). \quad (6.34)$$

Empregando os resultados do Apêndice A, encontramos:

$$\text{Tr}_A \{ E_{r,3}(\tau) E_{r,3}(0) \rho_A(0) \} = \sum_k |g_k|^2 \frac{e^{i\omega_k \tau} + e^{-i\omega_k \tau} e^{\beta \hbar \omega_k}}{e^{\beta \hbar \omega_k} - 1} = \sum_k |g_k|^2 \left[\frac{2 \cos(\omega_k \tau)}{e^{\beta \hbar \omega_k} - 1} + e^{-i\omega_k \tau} \right]. \quad (6.35)$$

Tomando o limite contínuo das frequências, encontraremos a seguinte equação de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_C(t) = & -2 \sum_{r=1}^N \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega J(\omega) e^{\sum_i \lambda_i^2 f_{i,r,3} (1-f_{i,r,3}) \tau} \Re \left\{ \left[\frac{2 \cos(\omega \tau)}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} + e^{-i\omega \tau} \right] \right\} \\ & \times \text{Tr}_S \{ P_C \rho_S(t) - \sigma_{r,3} P_C \sigma_{r,3} \rho_S(t) \}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

onde empregamos o fato de que tanto P_C e $\sigma_{r,3}P_C\sigma_{r,3}$ são projetores para concluir que seus valores esperados são necessariamente reais. Tomando a parte real do termo que resta, encontramos:

$$\Re \left\{ \frac{2\cos(\omega\tau)}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} + e^{-i\omega\tau} \right\} = \cos(\omega\tau) \frac{e^{\beta\hbar\omega} + 1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = \cos(\omega\tau) \coth \left(\frac{\beta\hbar\omega}{2} \right). \quad (6.37)$$

Neste ponto, definiremos uma nova função $\tilde{p}_{r,C}(t)$:

$$\tilde{p}_{r,C} \equiv \text{Tr}_S \{ \sigma_{r,3} P_C \sigma_{r,3} \rho_S(t) \}, \quad (6.38)$$

para que possamos escrever compactamente a equação de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_C(t) &= -2 \sum_{r=1}^N \int_0^t d\tau e^{\sum_i \lambda_i^2 f_{i,r,3} (1-f_{i,r,3}) \tau} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \cos(\omega\tau) \coth \left(\frac{\beta\hbar\omega}{2} \right) \\ &\quad \times [p_C(t) - \tilde{p}_{r,C}(t)]. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Para encontrar a solução dessa equação, precisaremos saber o valor dos $\tilde{p}_{r,C}(t)$. Consideremos, primeiro, o caso em que a matriz $\sigma_{r,3}$ comute com todos os operadores de síndrome M_i . Nesse caso, $f_{i,r,3} = 1, \forall i$, de forma que as exponenciais iniciais serão:

$$e^{\sum_i \lambda_i^2 f_{i,r,3} (1-f_{i,r,3}) \tau} = e^0 = 1. \quad (6.40)$$

Por outro lado, nesse caso também $\sigma_{r,3}$ comutará com P_C , de forma que:

$$\tilde{p}_{r,C} = \text{Tr}_S \{ \sigma_{r,3} P_C \sigma_{r,3} \rho_S(t) \} = \text{Tr}_S \{ P_C \rho_S(t) \} = p_C(t), \quad (6.41)$$

fazendo com que todos os termos que continham exponenciais negativas se anulassem.

Ficamos, portanto, com uma equação na qual todas as parcelas da somatória do lado direito apresentam exponenciais negativas dependentes da intensidade da medida, λ_i :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_C(t) &= -2 \sum_{r, [\sigma_{r,3}, P_C] \neq 0} \int_0^t d\tau e^{-\sum_i (1-f_{i,r,3}) \lambda_i^2 \tau} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \cos(\omega\tau) \coth \left(\frac{\beta\hbar\omega}{2} \right) \\ &\quad \times [p_C(t) - \tilde{p}_{r,C}(t)]. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Estando a exponencial negativa presente em todos os termos, é claro que, ampliando a

intensidade das medidas, podemos fazer com que a variação da probabilidade chegue tão próxima de zero quanto se queira, provando que esse método é capaz de fazer com que os erros gerados por uma interação do tipo (6.32) fiquem arbitrariamente pequenos. A única condição requerida é que haja pelo menos um operador de síndrome que anticomute com o hamiltoniano de interação. Esse sempre deverá ser o caso, pois a alternativa, em que todas as síndromes comutam, representa o caso em que não ocorrem erros corrigíveis pelo código, já que não sobram termos não-nulos na somatória:

$$\frac{d}{dt}p_C(t) = 0. \quad (6.43)$$

Ilustraremos a dinâmica dessa proteção contra erros com simulações para um caso simples: o código de detecção de erros de apenas dois qubits.

6.3 Caso do código de dois qubits

Um código de detecção de erros se diferencia de um código de correção por sua maior simplicidade: ele não permite que os erros sejam corrigidos, apenas que saibamos se um erro ocorreu ou não. Dessa forma, um algoritmo de detecção faz com que toda a computação seja descartada quando um erro ocorre. Essa pareceria uma grande desvantagem desses códigos, mas se levarmos em conta que dessa forma economiza-se na quantidade de qubits e medidas necessárias, a troca pode ser vantajosa em certos tipos de computação.

Tal código é construído da mesma forma que o de três qubits, apresentado no capítulo 3. Se para corrigirmos um erro classicamente necessitávamos de uma tripla repetição, para detectá-lo basta uma dupla:

$$0_L = (00), \quad (6.44)$$

$$1_L = (11). \quad (6.45)$$

Quanticamente, para detectarmos um erro de fase, transformamos os bits em qubits e aplicamos uma porta Hadamard sobre cada um deles:

$$|0\rangle_L = \frac{1}{2} [|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle], \quad (6.46)$$

$$|1\rangle_L = \frac{1}{2} [|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle], \quad (6.47)$$

ou, de maneira mais compacta:

$$|i\rangle_L = \frac{1}{2} \bigotimes_{k=1}^2 \left[\sum_{j=0}^1 (-1)^{ij} |j\rangle \right]. \quad (6.48)$$

Ocorrido um erro, o estado transforma-se em:

$$\sigma_{n,z} |i\rangle_L = \frac{1}{2} \bigotimes_{k=1}^2 \left[\sum_{j=0}^1 (-1)^{(i+\delta_{k,n})j} |j\rangle \right]. \quad (6.49)$$

Como pode ser facilmente verificado que o operador $\sigma_{1,x}\sigma_{2,x}$ estabiliza esse código, usaremos-lo como medida de síndrome. De fato, aplicando-o ao estado com erro, obtemos:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,x}\sigma_{2,x} (\sigma_{n,z} |i\rangle_L) &= \frac{1}{2} \bigotimes_{k=1}^2 \left[\sum_{j=0}^1 (-1)^{(i+\delta_{k,n})j} |j+1\rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} \bigotimes_{k=1}^2 \left[\sum_{j=0}^1 (-1)^{(i+\delta_{k,n})(j+1)} |j\rangle \right] \\ &= (-1)^{2i+\delta_{n,1}+\delta_{n,2}} (\sigma_{n,z} |i\rangle_L), \end{aligned} \quad (6.50)$$

onde empregamos sempre somas *módulo 2*. Como -1 elevado a qualquer número par é sempre 1, a medida de $\sigma_{1,x}\sigma_{2,x}$ somente resulta em -1 se um dos dois qubits tiver sofrido um erro, isto é, se $n = 1$ ou $n = 2$.

Sendo, portanto, este o operador cuja medida deve ser realizada, podemos expressar o projetor que leva ao subespaço do código em termos dele:

$$P_C = \frac{1 + \sigma_{1,x}\sigma_{2,x}}{2} = |0\rangle_L \langle 0|_L + |1\rangle_L \langle 1|_L. \quad (6.51)$$

Assim sendo, a equação de movimento para a probabilidade de estar-se dentro do subespaço do código (6.42) torna-se mais simples, contendo apenas as expressões para dois qubits, cujas matrizes $\sigma_{r,z}$ correspondentes todas comutam com a medida de síndrome $\sigma_{1,x}\sigma_{2,x}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_C(t) = & -2 \sum_{r=1}^2 \int_0^t d\tau e^{-2\lambda^2 \tau} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \cos(\omega\tau) \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \\ & \times [p_C(t) - \tilde{p}_{r,C}(t)], \end{aligned} \quad (6.52)$$

onde representamos a única constante de acoplamento com o aparato de medida por λ .

Resta-nos identificar o $\tilde{p}_{r,C}(t)$, de forma que a equação possa ser resolvida. Pela definição do P_C empregado aqui, devemos ter:

$$p_C(t) - \tilde{p}_{r,C}(t) = \text{Tr}_S \left\{ \left[\frac{1 + \sigma_{1,x}\sigma_{2,x}}{2} - \sigma_{r,z} \frac{1 + \sigma_{1,x}\sigma_{2,x}}{2} \sigma_{r,z} \right] \rho_S(t) \right\} = \text{Tr}_S \{ \sigma_{1,x}\sigma_{2,x} \rho_S(t) \}. \quad (6.53)$$

Notando que a derivada da probabilidade $p_C(t)$ também depende exclusivamente desse traço, a equação de movimento (6.52) pode ser expressa diretamente através dele:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Tr}_S \{ \sigma_{1,x}\sigma_{2,x} \rho_S(t) \} = & -8 \int_0^t d\tau e^{-2\lambda^2 \tau} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \cos(\omega\tau) \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \\ & \times \text{Tr}_S \{ \sigma_{1,x}\sigma_{2,x} \rho_S(t) \}, \end{aligned} \quad (6.54)$$

cuja solução é trivial, por ser uma equação diferencial de primeira ordem que não envolve matrizes:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_S \{ \sigma_{1,x}\sigma_{2,x} \rho_S(t) \} = & \exp \left\{ -8 \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau e^{-2\lambda^2 \tau} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \cos(\omega\tau) \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \right\} \\ & \times \text{Tr}_S \{ \sigma_{1,x}\sigma_{2,x} \rho_S(0) \}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Como o traço de qualquer matriz densidade é igual a 1, devemos ter:

$$p_C(t) = \text{Tr}_S \left\{ \frac{1 + \sigma_{1,x}\sigma_{2,x}}{2} \rho_S(t) \right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{Tr}_S \{ \sigma_{1,x}\sigma_{2,x} \rho_S(t) \}, \quad (6.56)$$

o que nos permite reescrever a solução (6.55) novamente em termos de $p_C(t)$:

$$p_C(t) = \frac{1}{2} + \exp \left\{ -8 \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau e^{-2\lambda^2 \tau} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \cos(\omega\tau) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right\} \times \left[p_C(0) - \frac{1}{2} \right]. \quad (6.57)$$

Como estamos supondo que, no início, o sistema está desacoplado do ambiente e, portanto, ainda não sofreu erros, devemos ter certeza de que no instante inicial o estado do sistema pertence ao subespaço do código. Em nossa notação, isso expressa-se por $p_C(0) = 1$, o que simplifica ainda mais a equação:

$$p_C(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \exp \left\{ -8 \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau e^{-2\lambda^2 \tau} I(\tau) \right\} \right\}, \quad (6.58)$$

onde $I(\tau)$ é uma função que depende do tipo de interação com o ambiente e com a temperatura inicial do banho térmico:

$$I(\tau) \equiv \int_0^\infty d\omega J(\omega) \cos(\omega\tau) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right). \quad (6.59)$$

Analisemos o significado da solução (6.58). No instante inicial, conforme impusemos, a probabilidade de que haja erros é nula. Com o passar do tempo, é de se esperar que o valor de $p_C(t)$ caia, já que é inadmissível que uma probabilidade tenha valor maior do que 1. Essa é uma característica da função estrutural $I(\tau)$, que é provado no Apêndice E. Isso se dá por um aumento no valor da integral tripla, que torna a exponencial negativa cada vez mais próxima de zero, até que, no limite para infinito, alcança-se uma probabilidade 1/2 de que se esteja no subespaço do código.

A probabilidade final de 1/2 é, com efeito, o estado de máxima incerteza com relação a ocorrência de um erro. Não o é $p_C = 0$, como poder-se-ia pensar inicialmente, já que este representa a certeza da ocorrência de um erro, o que fornece mais informação do que a situação em que a probabilidade de ocorrência de erros é igual à probabilidade de que não tenham ocorrido.

Mas o principal desta solução encontra-se no fato de que a função $I(\tau)$ está multiplicada pela exponencial $e^{-2\lambda^2 t}$, de forma que ela pode ser reduzida o quanto quisermos pelo aumento da intensidade do acoplamento com o aparato de medida. Faremos simulações numéricas na próxima seção para verificarmos esse comportamento.

6.4 Simulações numéricas

Para as soluções numéricas, precisaremos de formas mais bem definidas das integrais presentes em (6.58). Novamente, empregaremos a simplificação de temperatura zero, de forma a livrarmos da cotangente hiperbólica, e consideraremos o ambiente ôhmico, para que seja dada uma forma simples à densidade espectral:

$$p_C(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \exp \left\{ -8\eta \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau e^{-2\lambda^2 \tau} \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\omega/\omega_c} \cos(\omega\tau) \right\} \right\}. \quad (6.60)$$

Com o resultado da integral em ω dada em (5.77), a expressão que precisamos calcular torna-se simplesmente:

$$p_C(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \exp \left\{ -8\eta \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau e^{-2\lambda^2 \tau} \omega_c^2 \frac{1 - (\omega_c \tau)^2}{[1 + (\omega_c \tau)^2]^2} \right\} \right\}. \quad (6.61)$$

Para conveniência do cálculo numérico, é útil representar as integrais em termos $\omega_c \tau$, em vez de τ simplesmente. Por isso, fazemos as mudanças de variável:

$$x = \omega_c t', \quad (6.62)$$

$$y = \omega_c \tau, \quad (6.63)$$

encontrando a expressão:

$$p_C(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \exp \left\{ -8\eta \int_0^{\omega_c t} dx \int_0^x dy e^{-2\lambda^2 y} \frac{1 - y^2}{(1 + y^2)^2} \right\} \right\}, \quad (6.64)$$

onde eliminamos o ω_c na exponencial medindo a intensidade λ em unidades de $\omega_c^{1/2}$.

Integrando numericamente a integral dupla restante, conseguimos encontrar a forma da evolução temporal da probabilidade, como pode ser visto na figura 6.1.

Verifica-se do gráfico como o aumento da intensidade da medida realmente mantém o estado mais próximo do original, isto é, com maior probabilidade de estar dentro do subespaço do código $\mathcal{C}$. Vê-se também um grande aumento na proteção quando passa-se de $\lambda = \omega_c^{1/2}$ para $\lambda = 2\omega_c^{1/2}$,

Figura 6.1 – Evolução temporal da probabilidade de encontrar-se o sistema dentro do subespaço do código, $p_C(t)$, em função do tempo, medido em unidades do inverso da frequência de corte, ω_c . Em todas as curvas, escolhemos o valor pequeno $\eta = 0,05$ para o acoplamento com o ambiente.

o que se explica pelo fato de o acoplamento λ estar presente na forma da exponencial negativa do seu quadrado. Este aumento significativo que obtém-se dobrando a intensidade da medida é um indício de que não seriam precisas medidas muito fortes atuando concomitantemente ao erro para produzir uma proteção considerável.

Também é importante ter em mente o significado da manutenção de um valor alto de $p_C(t)$ neste exemplo: isso significa que após o período em que a medida foi deixada ocorrendo juntamente com o ruído, há uma probabilidade maior de não precisar descartar o estado do sistema do que se tivéssemos deixado-o evoluir livremente e depois realizado uma medida instantânea. A interpretação para o caso em que os códigos não são de detecção, mas sim de correção, seria que haveria uma probabilidade menor de precisar aplicar o algoritmo de correção se a medida de síndrome tivesse sido realizada enquanto os erros ocorriam.

Pode-se, portanto, traçar um paralelo entre esse método, que reduz a probabilidade de que um erro ocorra na memória, e aquele apresentado no capítulo 4, que pode ser usado para reduzir erros que ocorram simultaneamente a portas lógicas.

Conclusões e perspectivas

Neste trabalho, conseguimos chegar a dois novos métodos de como proceder com a correção de erros. O primeiro, de divisão em pequenos passos, foi proposto no contexto em que se tentava prevenir os erros ambientais que ocorriam concomitantes a portas lógicas; o segundo, de medidas de síndrome finitas, insere-se no estudo da atuação simultânea de medidas e ruído. Os dois, porém, encapsulam o mesmo princípio fundamental: a constante medida de um sistema não permite que ele deixe seu estado inicial. Neste contexto, isso significa que a medida impede que os erros ocorram ao projetar o estado do sistema novamente para o subespaço do código.

Com relação à primeira parte, delineamos um procedimento que, superando as simplificações necessárias para o tradicional método de tolerância a falhas, pode ser aplicado a um erro ambiental geral e exemplificamos com um caso particular simples. Podem-se, agora, propor novos códigos para os quais esse método poderia ser aplicado, além de tentar sua realização experimental. Os requisitos necessários para a aplicação são poucos: apenas a capacidade de produzir-se portas lógicas a partir de combinações das matrizes de Pauli lógicas, o que, a princípio, é válido para qualquer código, de correção ou de detecção; e uma capacidade experimental de aplicar a porta lógica em cerca de uma dezena de passos. Nada impede, porém, que o método possa ser modificado para incluir outras construções de portas lógicas, desde que elas mantenham o sistema dentro do subespaço do código ao fim de cada passo.

Além do acima exposto, verificamos que esse método pode ser empregado mesmo em situações em que a porta lógica comuta com o erro – o que torna desnecessária qualquer modificação no processo de correção de erros tradicional – ou mesmo para qubits na memória, que não estão expostos a nenhuma porta lógica. O interesse em seu uso proviria do fato de que, realizando a medida de síndrome em intervalos curtos Δt , a probabilidade de que um erro ocorra diminui significativamente com relação ao caso em que deixamos os qubits expostos ao ambiente por longo tempo. Como não há limite teórico em quantos passos N é possível dividir o período em que o erro ocorre, a princípio é possível empregar este método para a reduzir tanto quanto se

queira o ruído do ambiente. Há limitações, porém: se os passos ficarem muito curtos, é possível que o tempo finito da medida, que neste método consideramos instantâneo, comece a influir na duração do processo. Nesse caso, seria mais vantajoso empregar o segundo método: medidas finitas atuando continuamente para proteger o estado do sistema.

Em respeito ao segundo método, concluímos que ele funciona bem para erros do tipo (6.32) e códigos estabilizados. Empregamos para isso uma equação-mestra híbrida (2.68), a qual se mostrou de grande valia (tendo sua correção sido verificada com a comparação com os métodos numéricos apresentados no capítulo 5) para o estudo de medidas ruidosas. Futuros trabalhos poderiam estudar a validade do método para outros tipos de código, além de considerar como uma medição contínua forte poderia ser realizada experimentalmente.

A compreensão de como uma medida finita pode ter sua intensidade variada seria de grande valia para a melhor elucidação do fenômeno de obtenção de informações de um estado quântico, assim como o estudo do tempo exato de duração de uma medida, assunto fora do escopo desta dissertação. Não é absurdo especular que a proposta de uma aplicação prática de como medidas finitas poderiam ser empregadas em computação quântica, como fazemos aqui, poderá ser capaz de futuramente prover-nos de uma melhor intuição sobre fenômenos que desafiam o senso comum, como o colapso da função de onda.

REFERÊNCIAS

- 1 DEUTSCH, D. Quantum Theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. **Proceedings of the Royal Society of London A**, Londres, v. 400, n. 1818, p. 97-117, 1985.

- 2 DEUTSCH, D.; JOSZA, R. Rapid solutions of problems by quantum computation. **Proceedings of the Royal Society of London A**, Londres, v. 439, n. 1907, p. 553-558, 1992.

- 3 SHOR, P. W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. In: ANNUAL SYMPOSIUM ON FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE, 35., 1994, Santa Fe. **Proceedings...** Los Alamitos: IEEE Press, 1994. p. 124-134.

- 4 UNRUH, W. G. Maintaining coherence in quantum computers. **Physical Review A**, College Park, v. 51, n. 2, p. 992-997, 1995.

- 5 SHOR, P. W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. **Physical Review A**, College Park, v. 52, n. 4, p. R2493-R2496, 1995.

- 6 STEANE, A. M. Error correcting codes in quantum theory. **Physical Review Letters**, College Park, v. 77, n. 5, p. 793-797, 1996.

- 7 STEANE, A. M. Space, time, parallelism and noise requirements for reliable quantum computing. **Fortschritte der Physik**, v. 46, n. 4-5, p. 443-457, 1998.

- 8 KNILL, E.; LAFLAMME, R.; ZUREK, W. H. Resilient quantum computation. **Science**, v. 79, n. 5349, p. 342-345, 1997.

- 9 RAUSSENDORF, R.; HARRINGTON, J. Fault-tolerant quantum computation with high threshold in two dimensions. **Physical Review Letters**, College Park, v. 98, n. 190504, p. 1-4, 2007.

-
- 10 COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Mécanique quantique**, Paris: Hermann, 1973. 890 p.
- 11 WHEELER, J. A.; ZUREK, W. H (Ed.). **Quantum theory and measurement**, Princeton: Princeton University Press, 1983. 811 p.
- 12 RUARK, A. E. Natural units for atomic problems. **Physical Review**, College Park, v. 38, n. 12, p. 2240-2244, 1931.
- 13 SCHUMACHER, B. Quantum coding. **Physical Review A**, College Park, v. 51, n. 4, p. 2738-2747, 1995.
- 14 SCHRÖDINGER, E. Probability relations between separated systems. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge, v. 32, n. 3, p. 446-451, 1936.
- 15 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Physical Review**, College Park, v. 44, n. 10, p. 777-780, 1935.
- 16 SAKURAI, J.J. **Modern quantum mechanics**, Reading: Addison-Wesley Publishing Company, 1994. 500 p.
- 17 BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. **The theory of open quantum systems**, Oxford: Oxford University Press, 2002. 625 p.
- 18 WILCOX, R. W. Exponential operators and parameter differentiation in quantum physics. **Journal of Mathematical Physics**, v. 8, n. 4, p. 962-982, 1967.
- 19 FANCHINI, F. F. 2008. **Desacoplamento dinâmico de estados quânticos via campos contínuos de alta frequência**. 2008. Tese (Doutorado em Física Básica) – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.
- 20 BRASIL, C. A.; NAPOLITANO, R. D. J. The master equation for the reduced open-system dynamics, including a Lindbladian description of finite-time duration measurement. **The European Physical Journal Plus**, Bolonha, v. 126, n. 91, p. 1-12. 2011.
- 21 HAMMING, R. W. Error detecting and error correcting codes. **Bell Systems Technical Journal**, v. 29, n. 2, p. 147-160, 1950.

-
- 22 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum computation and quantum information**, Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 676 p.
- 23 SHOR, P. W. Fault-tolerant quantum computation. In: ANNUAL SYMPOSIUM ON FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE, 37., 1996, Burlington. **Proceedings...** Los Alamitos: IEEE Press, 1996. p. 56-65.
- 24 BRASIL, C. A.; DE CASTRO, L. A.; NAPOLITANO, R. D. J. Protecting a quantum state from environmental noise by an incompatible finite-time measurement. **Physical Review A**, College Park, v. 84, n. 022112, p. 1-16, 2011.
- 25 PRESS, W. H. et al. **Numerical recipes**. New York: Cambridge University Press, 2007.
- 26 GOTTESMAN, D. Class of quantum error-correcting codes saturating the quantum Hamming bound. **Physical Review A**, College Park, v. 54, n. 3, p. 1862-1868, 1996.

Apêndice A – Cálculo dos traços do ambiente

Neste trabalho, diversos resultados para o valor de traços são calculados para o ambiente, envolvendo operadores de criação e destruição do banho bosônico. Aqui veremos como seus valores são calculados.

A.1 Valor esperado do número de bósons

Em diversos traços do hamiltoniano ambiental, precisamos calcular o valor esperado do número de bósons de um certo modo de vibração. Esse valor é dado por:

$$\left\langle a_k^\dagger a_k \right\rangle_{\rho_A(0)} = \frac{1}{Z} \text{Tr}_A \left\{ a_k^\dagger a_k e^{-\beta \hbar \sum_\ell \omega_\ell a_\ell^\dagger a_\ell} \right\}. \quad (\text{A.1})$$

Este traço é mais facilmente calculado na base de Fock, que é a base dos autoestados dos operadores presentes no traço. Nesse caso, temos:

$$\left\langle a_k^\dagger a_k \right\rangle_{\rho_A(0)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega_k n}} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta \hbar \omega_k n}, \quad (\text{A.2})$$

que pode ser expressa diretamente em termos da função de partição Z :

$$\left\langle a_k^\dagger a_k \right\rangle_{\rho_A(0)} = -\frac{1}{\hbar \omega_k} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z. \quad (\text{A.3})$$

Como o logaritmo da função de partição é facilmente calculável como:

$$\ln Z = \ln \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega_k n} \right] = -\ln \left[1 - e^{-\beta \hbar \omega_k} \right], \quad (\text{A.4})$$

encontramos o seguinte valor para o traço:

$$\left\langle a_k^\dagger a_k \right\rangle_{\rho_A(0)} = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_k} - 1}. \quad (\text{A.5})$$

Similarmente, se trocarmos a posição dos operadores de criação e destruição, encontramos:

$$\left\langle a_k a_k^\dagger \right\rangle_{\rho_A(0)} = 1 + \left\langle a_k^\dagger a_k \right\rangle_{\rho_A(0)} = \frac{e^{\beta \hbar \omega_k}}{e^{\beta \hbar \omega_k} - 1}. \quad (\text{A.6})$$

A.2 Traço do ruído de fase

Vamos calcular o traço encontrado no estudo do canal de fase. Este traço não será mais tomado na base de Fock, mas sim na base de estados coerentes, descrita no primeiro capítulo. Com ajuda desses estados e dos operadores deslocamento, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A \left\{ e^{-i \sum_k \omega_k \left(a_k + \frac{g_k}{\omega_k} \right)^\dagger \left(a_k + \frac{g_k}{\omega_k} \right) t} \rho_A(0) e^{i \sum_k \omega_k \left(a_k - \frac{g_k}{\omega_k} \right)^\dagger \left(a_k - \frac{g_k}{\omega_k} \right) t} \right\} \\ = \prod_k \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2 \alpha \left\langle \alpha \right| D^\dagger \left(\frac{g_k}{\omega_k} \right) e^{-i \omega_k a_k^\dagger a_k t} D \left(\frac{g_k}{\omega_k} \right) \rho_k(0) D \left(\frac{g_k}{\omega_k} \right) e^{i \omega_k a_k^\dagger a_k t} D^\dagger \left(\frac{g_k}{\omega_k} \right) \left| \alpha \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde dividimos o operador densidade inicial do ambiente $\rho_A(0)$ em porções $\rho_k(0)$ que atuam sobre cada modo do banho:

$$\rho_A(0) = \prod_k \rho_k(0), \quad \rho_k(0) \equiv \frac{e^{-\beta \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k}}{\sum_n e^{-\beta \hbar \omega_k n}}. \quad (\text{A.8})$$

Agora, aplicamos os operadores sobre os estados coerentes:

$$\begin{aligned} D \left(\frac{g_k}{\omega_k} \right) e^{i \omega_k a_k^\dagger a_k t} D^\dagger \left(\frac{g_k}{\omega_k} \right) \left| \alpha \right\rangle &= e^{-(e^{i \omega_k t} \alpha g_k^* - e^{-i \omega_k t} \alpha^* g_k)/2 \omega_k} e^{(\alpha g_k^* - \alpha^* g_k)/2 \omega_k} \\ &\times e^{i \text{sen}(\omega_k t) |g_k/\omega_k|^2} \left| e^{i \omega_k t} \left(\alpha - \frac{g_k}{\omega_k} \right) + \frac{g_k}{\omega_k} \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Se sabemos que, dado um operador A , sua atuação sobre um ket $|\alpha\rangle$ resulta em $|\alpha'\rangle$, então concluímos que $\langle \alpha' | = \langle \alpha | A^\dagger$. Daí, conclui-se que:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | D^\dagger \left(\frac{g_k}{\omega_k} \right) e^{-i\omega_k a_k^\dagger a_k t} D \left(\frac{g_k}{\omega_k} \right) &= e^{-(e^{i\omega_k t} \alpha g_k^* - e^{-i\omega_k t} \alpha^* g_k)/2\omega_k} e^{(\alpha g_k^* - \alpha^* g_k)/2\omega_k} \\ &\times e^{-i \operatorname{sen}(\omega_k t) |g_k/\omega_k|^2} \left\langle e^{i\omega_k t} \left(\alpha + \frac{g_k}{\omega_k} \right) - \frac{g_k}{\omega_k} \right|, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

de forma que o traço torna-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}_A &\left\{ e^{-i \sum_k \omega_k \left(a_k + \frac{g_k}{\omega_k} \right)^\dagger \left(a_k + \frac{g_k}{\omega_k} \right) t} \rho_A(0) e^{i \sum_k \omega_k \left(a_k - \frac{g_k}{\omega_k} \right)^\dagger \left(a_k - \frac{g_k}{\omega_k} \right) t} \right\} \\ &= \prod_k \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2 \alpha e^{-(e^{i\omega_k t} \alpha g_k^* - e^{-i\omega_k t} \alpha^* g_k)/2\omega_k} e^{(\alpha g_k^* - \alpha^* g_k)/2\omega_k} \left\langle e^{i\omega_k t} \alpha - (1 - e^{i\omega_k t}) \frac{g_k}{\omega_k} \right| \\ &\times \rho_k(0) \left| e^{i\omega_k t} \alpha + (1 - e^{i\omega_k t}) \frac{g_k}{\omega_k} \right\rangle e^{-(e^{i\omega_k t} \alpha g_k^* - e^{-i\omega_k t} \alpha^* g_k)/2\omega_k} e^{(\alpha g_k^* - \alpha^* g_k)/2\omega_k}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Agora, precisamos tomar o elemento de matriz do operador densidade restante:

$$\begin{aligned} \langle \alpha' | \rho_k(0) | \alpha \rangle &= \langle \alpha' | e^{-\beta \hbar \omega_k} \alpha \rangle e^{-|\alpha|^2/2} e^{|\alpha e^{-\beta \hbar \omega_k}|^2/2} \left(1 - e^{-\beta \hbar \omega_k} \right) \\ &= e^{-(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2)/2} e^{-\beta \hbar \omega_k} \alpha (\alpha')^* \left(1 - e^{-\beta \hbar \omega_k} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

de forma a obtermos o seguinte traço:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}_A &\left\{ e^{-i \sum_k \omega_k \left(a_k + \frac{g_k}{\omega_k} \right)^\dagger \left(a_k + \frac{g_k}{\omega_k} \right) t} \rho_A(0) e^{i \sum_k \omega_k \left(a_k - \frac{g_k}{\omega_k} \right)^\dagger \left(a_k - \frac{g_k}{\omega_k} \right) t} \right\} \\ &= \prod_k \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2 \alpha e^{[(1 - e^{i\omega_k t}) \alpha g_k^* - (1 - e^{-i\omega_k t}) \alpha^* g_k]/\omega_k} \left(1 - e^{-\beta \hbar \omega_k} \right) e^{-|\alpha|^2 - 2(1 - \cos \omega_k t) |g_k/\omega_k|^2} \\ &\times e^{-\beta \hbar \omega_k \{ |\alpha|^2 - 2(1 - \cos \omega_k t) |g_k/\omega_k|^2 + [(1 - e^{i\omega_k t}) \alpha g_k^* - (1 - e^{-i\omega_k t}) \alpha^* g_k]/\omega_k \}} \\ &= \prod_k \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2 \alpha e^{(1 + e^{-\beta \hbar \omega_k}) [(1 - e^{i\omega_k t}) \alpha g_k^* - (1 - e^{-i\omega_k t}) \alpha^* g_k]/\omega_k} \left(1 - e^{-\beta \hbar \omega_k} \right) \\ &\times e^{-(1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}) |\alpha|^2} e^{-2(1 + e^{-\beta \hbar \omega_k}) (1 - \cos \omega_k t) |g_k/\omega_k|^2} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

As integrais restantes são calculadas se dividirmos a variável complexa α na suas partes real ($x = \Re\{\alpha\}$) e imaginária ($y = \Im\{\alpha\}$) e as integrarmos separadamente:

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}_A \left\{ e^{-i \sum_k \omega_k \left(a_k - \frac{g_k}{\omega_k}\right)^\dagger \left(a_k - \frac{g_k}{\omega_k}\right) t} \rho_A(0) e^{i \sum_k \omega_k \left(a_k + \frac{g_k}{\omega_k}\right)^\dagger \left(a_k + \frac{g_k}{\omega_k}\right) t} \right\} \\
&= \prod_k \frac{1}{\pi} \left(1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}\right) e^{-2(1+e^{-\beta \hbar \omega_k})(1-\cos \omega_k t)|g_k/\omega_k|^2} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(1-e^{-\beta \hbar \omega_k})[x^2 + x \coth(\beta \hbar \omega_k/2)(1-e^{-i \omega_k t})g_k/\omega_k - x \coth(\beta \hbar \omega_k/2)(1-e^{i \omega_k t})g_k^*/\omega_k]} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(1-e^{-\beta \hbar \omega_k})[y^2 - i y \coth(\beta \hbar \omega_k/2)(1-e^{-i \omega_k t})g_k/\omega_k - i y \coth(\beta \hbar \omega_k/2)(1-e^{i \omega_k t})g_k^*/\omega_k]}.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Completando os quadrados, conseguimos resolver as duas integrais de gaussianas como valendo $\sqrt{\pi/(1 - e^{-\beta \hbar \omega_k})}$:

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}_A \left\{ e^{-i \sum_k \omega_k \left(a_k - \frac{g_k}{\omega_k}\right)^\dagger \left(a_k - \frac{g_k}{\omega_k}\right) t} \rho_A(0) e^{i \sum_k \omega_k \left(a_k + \frac{g_k}{\omega_k}\right)^\dagger \left(a_k + \frac{g_k}{\omega_k}\right) t} \right\} \\
&= \exp \left\{ -2 \sum_k \left| \frac{g_k}{\omega_k} \right|^2 (1 - \cos \omega_k t) (1 + e^{-\beta \hbar \omega_k}) \left[1 + \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega_k}{2} \right) \right] \right\}, \tag{A.15}
\end{aligned}$$

que pode ser simplificado para:

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}_A \left\{ e^{-i \sum_k \omega_k \left(a_k - \frac{g_k}{\omega_k}\right)^\dagger \left(a_k - \frac{g_k}{\omega_k}\right) t} \rho_A(0) e^{i \sum_k \omega_k \left(a_k + \frac{g_k}{\omega_k}\right)^\dagger \left(a_k + \frac{g_k}{\omega_k}\right) t} \right\} \\
&= \exp \left\{ -8 \sum_k \left| \frac{g_k}{\omega_k} \right|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_k t}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega_k}{2} \right) \right\}. \tag{A.16}
\end{aligned}$$

A.3 Traço para o algoritmo

Calcularemos aqui o traço empregado no algoritmo numérico do operador partido ao meio, empregando as definições dos superoperadores $\mathcal{A}_\pm(\Delta t)$, dadas no capítulo 5:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_A \left\{ \left[\prod_{i=1}^N \mathcal{A}_{q_i}(\Delta t) \right] \rho_A(0) \right\} &= \prod_k \frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha \\
&\times \langle \alpha | \prod_{j=1}^N \left[D^\dagger \left(q_j \frac{g_k}{\omega_k} \right) e^{-i\omega_k a_k^\dagger a_k \Delta t} D \left(q_j \frac{g_k}{\omega_k} \right) \right] \\
&\times (1 - e^{-\hbar\beta\omega_k}) e^{-\beta\hbar\omega_k a_k^\dagger a_k} \\
&\times \left[\prod_{j=0}^{N-1} D \left(q_{N-j} \frac{g_k}{\omega_k} \right) e^{i\omega_k a_k^\dagger a_k \Delta t} D^\dagger \left(q_{N-j} \frac{g_k}{\omega_k} \right) \right] | \alpha \rangle.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Empregando os resultados da seção anterior, sabemos que:

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha | D^\dagger \left(q_1 \frac{g_k}{\omega_k} \right) e^{-i\omega_k a_k^\dagger a_k \Delta t} D \left(q_1 \frac{g_k}{\omega_k} \right) X D \left(q_1 \frac{g_k}{\omega_k} \right) e^{i\omega_k a_k^\dagger a_k \Delta t} D^\dagger \left(q_1 \frac{g_k}{\omega_k} \right) | \alpha \rangle \\
&= \exp \left\{ q_1 (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) \alpha \frac{g_k^*}{\omega_k} - q_1 (1 - e^{-i\omega_k \Delta t}) \alpha^* \frac{g_k}{\omega_k} \right\} \\
&\times \left\langle e^{i\omega_k \Delta t} \alpha - q_1 (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) \frac{g_k}{\omega_k} \middle| X \middle| e^{i\omega_k \Delta t} \alpha + q_1 (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) \frac{g_k}{\omega_k} \right\rangle,
\end{aligned} \tag{A.18}$$

onde usamos o fato de que $|q_1| = 1$. Repetindo o procedimento, encontramos:

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha | \prod_{j=1}^N \left[D^\dagger \left(q_j \frac{g_k}{\omega_k} \right) e^{-i\omega_k a_k^\dagger a_k \Delta t} D \left(q_j \frac{g_k}{\omega_k} \right) \right] \rho_k(0) \\
&\times \prod_{j=1}^N \left[D \left(q_{N-j} \frac{g_k}{\omega_k} \right) e^{i\omega_k a_k^\dagger a_k \Delta t} D^\dagger \left(q_{N-j} \frac{g_k}{\omega_k} \right) \right] | \alpha \rangle \\
&= \exp \left\{ \sum_{j=1}^N \left[q_j e^{i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) \alpha \frac{g_k^*}{\omega_k} - q_j e^{-i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{-i\omega_k \Delta t}) \alpha^* \frac{g_k}{\omega_k} \right] \right\} \\
&\times \left\langle e^{i\omega_k \Delta t} \alpha - \sum_{j=1}^N q_j e^{i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) \frac{g_k}{\omega_k} \middle| \rho_k(0) \right. \\
&\quad \left. \middle| e^{i\omega_k \Delta t} \alpha + \sum_{j=1}^N q_j e^{i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) \frac{g_k}{\omega_k} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Resta calcular o elemento de matriz do operador densidade, que pode ser obtido como na seção anterior:

$$\begin{aligned}
& \left\langle e^{i\omega_k \Delta t} \alpha - \sum_{j=1}^N q_j e^{i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) \frac{g_k}{\omega_k} \middle| \rho_A(0) \middle| e^{i\omega_k \Delta t} \alpha + \sum_{j=1}^N q_j e^{i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) \frac{g_k}{\omega_k} \right\rangle \\
&= (1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}) \exp \left\{ -(1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}) |\alpha|^2 - (1 + e^{-\beta \hbar \omega_k}) \left| \sum_{j=1}^N q_j e^{i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) \frac{g_k}{\omega_k} \right|^2 \right\} \\
&\times \exp \left\{ e^{-\beta \hbar \omega_k} \sum_{j=1}^N \left[q_j e^{-i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) \alpha \frac{g_k^*}{\omega_k} - q_j e^{+i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{-i\omega_k \Delta t}) \alpha^* \frac{g_k}{\omega_k} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Neste ponto, é necessário fazer a aproximação de temperatura nula, para que $\beta \rightarrow \infty$ e $e^{-\beta \hbar \omega_k} \rightarrow 0$, de forma que possamos escrever a integral de maneira mais simplificada:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\beta \rightarrow \infty} \text{Tr}_A \left\{ \left[\prod_{i=1}^N \mathcal{A}_{q_i}(\Delta t) \right] \rho_A(0) \right\} \\
&= \prod_k \frac{1}{\pi} \exp \left\{ - \left| \sum_{j=1}^N q_j e^{i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) \frac{g_k}{\omega_k} \right|^2 \right\} \\
&\times \int d^2 \alpha \, e^{-|\alpha|^2 + \sum_{j=1}^N [q_j e^{i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) \alpha g_k^* - q_j e^{-i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{-i\omega_k \Delta t}) \alpha^* g_k] / \omega_k}.
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Mais uma vez, realiza-se a integral dividindo a variável em partes real e imaginária e calculando a integral das duas gaussianas restantes:

$$\begin{aligned}
& \int d^2 \alpha \, e^{-|\alpha|^2 + \sum_{j=1}^N [q_j e^{i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) \alpha g_k^* - q_j e^{-i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{-i\omega_k \Delta t}) \alpha^* g_k] / \omega_k} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-x^2 + \sum_{j=1}^N [q_j e^{i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) g_k^* - q_j e^{-i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{-i\omega_k \Delta t}) g_k] x / \omega_k} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dy \, e^{-y^2 + \sum_{j=1}^N [q_j e^{i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) g_k^* + q_j e^{-i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{-i\omega_k \Delta t}) g_k] i y / \omega_k} \\
&= \pi \exp \left\{ - \left| \sum_{j=1}^N q_j e^{i(N-j)\omega_k \Delta t} (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) \frac{g_k}{\omega_k} \right|^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Removendo da somatória os termos que não dependem do índice, encontramos:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \text{Tr}_A \left\{ \left[\prod_{i=1}^N \mathcal{A}_{q_i}(\Delta t) \right] \rho_A(0) \right\} = \exp \left\{ -4 \sum_k \left| \frac{g_k}{\omega_k} \right|^2 (1 - \cos \omega_k \Delta t) \left| \sum_{j=1}^N q_j e^{i(N-j)\omega_k \Delta t} \right|^2 \right\}, \quad (\text{A.23})$$

o qual podemos simplificar se expandirmos o módulo:

$$\left| \sum_{j=1}^N q_j e^{i(N-j)\omega_k \Delta t} \right|^2 = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N q_m q_n e^{i(m-n)\omega_k \Delta t}, \quad (\text{A.24})$$

e dividirmos o termo do lado direito em dois, trocando a ordem da somatória do segundo:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^N q_j e^{i(N-j)\omega_k \Delta t} \right|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N q_m q_n \left[e^{i(m-n)\omega_k \Delta t} + e^{-i(m-n)\omega_k \Delta t} \right] \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N q_m q_n \cos [\omega_k \Delta t (m - n)]. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Daí, conseguimos a expressão final para o traço:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \text{Tr}_A \left\{ \left[\prod_{i=1}^N \mathcal{A}_{q_i}(\Delta t) \right] \rho_A(0) \right\} \\ = \exp \left\{ -8 \sum_k \left| \frac{g_k}{\omega_k} \right|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_k \Delta t}{2} \right) \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N q_m q_n \cos [\omega_k \Delta t (m - n)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Apêndice B – Lema de Hadamard

O lema de Hadamard é muito utilizado para obter-se a forma de um operador na representação de interação. Ele nos dá uma expansão para o cálculo da forma de um operador (aqui representado por A) cercado por duas exponenciais de um operador diferente (que chamaremos de H), quando multiplicado por sinais diferentes de um escalar α :

$$\tilde{A} = e^{\alpha H} A e^{-\alpha H}. \quad (\text{B.1})$$

Agora, expandimos o operador acima numa série de potências do escalar α :

$$\tilde{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(A, H), \quad (\text{B.2})$$

onde os P_n são operadores. Vamos igualar essa expansão com aquela obtida quando se escreve explicitamente a série de potências que representa cada exponencial:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\alpha^{r+s}}{r!s!} H^r A H^s = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(A, H). \quad (\text{B.3})$$

Para conseguir igualar os dois lados, vamos mudar a variável da somatória do lado esquerdo para $n = r + s$. Dessa forma, é possível igualar coeficientes iguais de α^n nos dois lados:

$$\sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{1}{(n-s)!s!} H^{n-s} A H^s = P_n(A, H). \quad (\text{B.4})$$

De posse de uma expressão para $P_n(A, H)$, passemos agora a simplificá-la. Para isso, tentaremos encontrar uma relação de recorrência entre os diferentes P_n , o que pode ser obtido se expressarmos o próximo elemento da sequência em termos do anterior:

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(A, H) &= \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^s \frac{1}{(n+1-s)!s!} H H^{n-s} A H^s \\
&= \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^s \frac{(n+1-s) + s}{n+1} \frac{1}{(n+1-s)!s!} H^{n+1-s} A H^s \\
&= \frac{1}{n+1} \left[H \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{1}{(n-s)!s!} H^{n-s} A H^s \right. \\
&\quad \left. + \sum_{s=1}^{n+1} (-1)^s \frac{1}{(n-s)!(s-1)!} H^{n+1-s} A H^s \right]. \tag{B.5}
\end{aligned}$$

Acima, dividimos a somatória em duas através da inclusão de uma fração cujo valor é unitário. Tal procedimento eliminou o último elemento da primeira somatória, já que quando $s = n+1$, $n+1-s = 0$. O mesmo ocorreu com a parcela $s = 0$ da segunda somatória. Vamos torná-las iguais pela mudança de variável de $s \rightarrow s+1$ na segunda somatória:

$$P_{n+1}(A, H) = \frac{1}{n+1} \left[H, \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{1}{(n-s)!s!} H^{n-s} A H^s \right]. \tag{B.6}$$

Reconhecendo $P_n(A, H)$ dentro do comutador, podemos iterar n vezes o procedimento para escrever qualquer um desses operadores em termos de $P_0(A, H)$:

$$P_n(A, H) = \frac{1}{n!} \underbrace{[H, [H, \dots [H, P_0(A, H)] \dots]]}_{n \text{ comutadores}}. \tag{B.7}$$

Como $P_0(A, H)$ é obviamente o único termo da expansão quando $\alpha = 0$, temos:

$$P_0(A, H) = e^{0H} A e^{-0H} = A, \tag{B.8}$$

o que permite-nos escrever a forma final do lema de Hadamard:

$$e^{\alpha H} A e^{-\alpha H} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \underbrace{[H, [H, \dots [H, A] \dots]]}_{n \text{ comutadores}}. \tag{B.9}$$

Apêndice C – Identidade de Snider

C.1 Fórmula para operadores

A identidade de Snider nos permite calcular a derivada parcial de operadores com respeito a variáveis reais. Aqui, demonstramos como ela é derivada para o caso específico de operadores de evolução temporal, os quais faremos dependentes de hamiltonianas $H(t, \eta)$, dependentes tanto do tempo quanto de alguma outra variável η . Assim, a evolução temporal será dependente das duas variáveis, além de dever obedecer a equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(\eta, t) = H(\eta, t) U(\eta, t). \quad (\text{C.1})$$

Derivando os dois lados com respeito a η , e multiplicando pela esquerda por $U^\dagger(\eta, t)$, encontramos:

$$i\hbar U^\dagger(\eta, t) \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta} U(\eta, t) = U^\dagger(\eta, t) \left[\frac{\partial}{\partial \eta} H(\eta, t) \right] U(\eta, t) + U^\dagger(\eta, t) H(\eta, t) \left[\frac{\partial}{\partial \eta} U(\eta, t) \right]. \quad (\text{C.2})$$

Similarmente, tomemos o conjugado da equação (C.1) e multipliquemos pela direita pela derivada de $U(\eta, t)$ com respeito a η :

$$i\hbar \left[\frac{d}{dt} U^\dagger(\eta, t) \right] \frac{\partial}{\partial \eta} U(\eta, t) = -U^\dagger(\eta, t) H(\eta, t) \left[\frac{\partial}{\partial \eta} U(\eta, t) \right], \quad (\text{C.3})$$

onde usa-se o fato de que o hamiltoniano é hermitiano.

A soma das duas últimas equações permite-nos escrever:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \left[U^\dagger(\eta, t) \frac{\partial}{\partial \eta} U(\eta, t) \right] = U^\dagger(\eta, t) \left[\frac{\partial}{\partial \eta} H(\eta, t) \right] U(\eta, t), \quad (\text{C.4})$$

que, quando integrada no tempo, nos dá a identidade de Snider:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} U(\eta, t) = -\frac{i}{\hbar} U(\eta, t) \int_0^t dt' U^\dagger(\eta, t') \left[\frac{\partial}{\partial \eta} H(\eta, t') \right] U(\eta, t'), \quad (\text{C.5})$$

pois $U(\eta, 0) = 1$, anulando sua derivada parcial com relação a η .

C.2 Fórmula para superoperadores

Vamos ver como funciona o caso equivalente para superoperadores. Nesse caso, conforme prescrito pela equação de Lindblad, o superoperador de evolução temporal será dado como:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{U}(t) = [\mathcal{L} + \mathcal{M}] \mathcal{U}(t), \quad (\text{C.6})$$

onde estamos propositalmente supondo que tanto o Liouvilliano quanto o Lindbladiano independem do tempo, o que será suficiente para os propósitos desta dissertação. Neste caso, a forma do superoperador é uma simples exponencial:

$$\mathcal{U}(t) = e^{(\mathcal{L} + \mathcal{M})t}. \quad (\text{C.7})$$

De tal definição, temos que existe um superoperador $\mathcal{U}(-t)$ tal que $\mathcal{U}(t)\mathcal{U}(-t) = \mathcal{U}(-t)\mathcal{U}(t) = 1$. Portanto, podemos derivar a equação diferencial com respeito a um parâmetro η e multiplicá-la pela esquerda pelo operador inverso:

$$\mathcal{U}(-t) \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(-t) \frac{\partial [\mathcal{L} + \mathcal{M}]}{\partial \eta} \mathcal{U}(t) + \mathcal{U}(-t) [\mathcal{L} + \mathcal{M}] \frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{U}(t). \quad (\text{C.8})$$

Repetindo a equação com o tempo invertido e multiplicando pela direita pela derivada parcial de $\mathcal{U}(t)$ com respeito ao parâmetro η , encontramos:

$$-\left[\frac{d}{dt} \mathcal{U}(-t) \right] \frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(-t) [\mathcal{L} + \mathcal{M}] \frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{U}(t), \quad (\text{C.9})$$

onde usamos o fato de que $[\mathcal{L} + \mathcal{M}]$ e $\mathcal{U}(t)$ comutam.

Suporemos que apenas o Liouvilliano depende do parâmetro η , já que o Lindbladiano representa a medida, que deve ser forte em comparação com o ruído. Portanto, ao subtrairmos

ambas equações, encontramos:

$$\frac{d}{dt} \left[\mathcal{U}(-t) \frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{U}(t) \right] = \mathcal{U}(-t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \mathcal{U}(t). \quad (\text{C.10})$$

Integrando, encontramos finalmente a fórmula de Snider para tais superoperadores:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(t) \int_0^t dt' \mathcal{U}(-t') \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \mathcal{U}(t'). \quad (\text{C.11})$$

Apêndice D – Listagem de programa

O programa empregado no capítulo 5 para o cálculo numérico através do emprego do método do operador partido ao meio é aqui apresentado, escrito em C.

```
#include <stdio.h>

#include <math.h>

#include <malloc.h>

long double eta= /* escolher valor para interação com ambiente */;

long double lambda2= /* escolher valor para intensidade da medida */;

long double Dt, t2;

typedef struct {

    long double Re, Im;

} complex;

long double I (long double m2)

{

    return 1. + (2.*t2+(1.-2.*m2))/pow( t2+ m2, 2.);

}

int main ( int argc, char **argv )

{

    long double passo= 1e-2; /* distância entre pontos */

    long double erro= 1.5e-4; /* erro tolerado */

    long double b[2];

    complex coer0[2], coer[2];

    long double t, tmp, prev, diff;

    long double *Y;

    int N;

    long int i,r,s;
```

```
short int *k;

/* Estado inicial */
coer0[0].Re= 1./sqrt(8.);
coer0[0].Im= 1./sqrt(8.);
coer0[1].Re= coer0[0].Re;
coer0[1].Im= -coer0[0].Im;

/* loop principal: calcula a coerência a cada instante de tempo */
N= 0;
for ( t=passo ; t<1. ; t+=passo )
{
    prev= coer0[0].Re;
    do {
        N+= 1;

        /* Cria vetor para guardar integrais */
        Y= malloc ( N*sizeof(long double) );

        /* Cria a sequência de ks */
        k= malloc ( N*sizeof(short int) );

        for ( i=0 ; i<N ; i++ ) k[i]=1;

        Dt= t/N;

        t2= 1./(Dt*Dt);

        /* Calcula os senos e cossenos hiperbólicos */
        b[0]= cosh(lambda2*Dt);
        b[1]= sinh(lambda2*Dt);

        /* Calcula as integrais numericamente */
        for ( i=0 ; i<N ; i++ )
        {
            Y[i]= pow( I(i*i) , -eta);
        }

        coer[0].Re= 0.;
        coer[0].Im= 0.;
        coer[1].Re= 0.;
        coer[1].Im= 0.;
    }
}
```

```

/* Agora, a somatória que calcula os estados finais */
for ( i=0 ; i<(1<<N) ; i++ )
{
    tmp= 1.;
    for ( r=0; r<N ; r++ )
for ( s=0 ; s<N ; s++ )
{
    if (k[r]==k[s]) tmp*= Y[abs(r-s)];
    else tmp/= Y[abs(r-s)];
};

    for ( r=0; r<(N-1) ; r++ )
    {
if (k[r]==k[r+1]) tmp*= b[0];
else tmp*= b[1];
    }
    switch ( k[0] )
    {
case 1:
    switch ( k[N-1] )
    {
        case 1: coer[0].Re+= tmp*( b[0]*coer0[0].Re + b[1]*coer0[1].Re );
                coer[0].Im+= tmp*( b[0]*coer0[0].Im + b[1]*coer0[1].Im );
        break;
        case -1:coer[0].Re+= tmp*( b[1]*coer0[0].Re + b[0]*coer0[1].Re );
                coer[0].Im+= tmp*( b[1]*coer0[0].Im + b[0]*coer0[1].Im );
    }
    break;
case -1:
    switch ( k[N-1] )
    {
        case 1: coer[1].Re+= tmp*( b[0]*coer0[0].Re + b[1]*coer0[1].Re );

```

```

        coer[1].Im+= tmp*( b[0]*coer0[0].Im + b[1]*coer0[1].Im );
break;
case -1:coer[1].Re+= tmp*( b[1]*coer0[0].Re + b[0]*coer0[1].Re );
        coer[1].Im+= tmp*( b[1]*coer0[0].Im + b[0]*coer0[1].Im );
}
}
/* vai à próxima sequência de ks */
r=0;
do {
k[r]*= -1;
r++;
    } while ( k[r-1]== 1 && r<N );
}
/* Multiplica resultado por e^{-lambda^2 t}$ */
tmp= exp(-lambda2*t);
coer[0].Re*= tmp;
coer[0].Im*= tmp;
coer[1].Re*= tmp;
coer[1].Im*= tmp;
fprintf ( stderr, "t= %Le \t N= %d \n" , t , N );
diff= fabs(coer[0].Re - prev);
prev= coer[0].Re;
free (k);
free (Y);
} while (diff>erro);
/* Imprime resultado final em t */
printf ("%Le\t %Le\t %Le\t %Le\t %Le \t %Le \n", t, coer[0].Re, coer[0].Im,
coer[1].Re, coer[1].Im , erro );
N-= 2;
}
return 0;
}

```

Apêndice E – Positividade da integral dupla de $I(\tau)$

Para que a probabilidade de que o estado do sistema encontre-se dentro do subespaço do código caia com o tempo, isto é, para que os erros ocorram, é necessário que seja sempre positiva a integral dupla:

$$\mathfrak{J} \equiv \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau e^{-2\lambda^2\tau} I(\tau), \quad (\text{E.1})$$

onde $I(\tau)$ representa uma outra integral:

$$I(\tau) \equiv \int_0^\infty d\omega J(\omega) \cos(\omega\tau) \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right). \quad (\text{E.2})$$

Sabe-se que a densidade espectral $J(\omega)$ é não-negativa, assim como a exponencial $e^{-2\lambda^2\tau}$ e o cotangente hiperbólica. Apenas o cosseno pode contribuir para que a equação possa ser negativa, de forma que devemos tomar a integral temporal que o envolve com o objetivo de eliminar esse fator do integrando:

$$\begin{aligned} \int_0^{t'} d\tau e^{-2\lambda^2\tau} \cos(\omega\tau) &= \Re \left\{ \int_0^{t'} d\tau e^{-(2\lambda^2+i\omega)\tau} \right\} \\ &= \Re \left\{ \frac{1 - e^{-(2\lambda^2+i\omega)t'}}{2\lambda^2 + i\omega} \right\} \\ &= \frac{2\lambda^2 - e^{-2\lambda^2 t'} [2\lambda^2 \cos(\omega t') - \omega \sin(\omega t')]}{4\lambda^4 + \omega^2} \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Portanto, a integral $\mathfrak{J}$ pode ser dividida em duas partes:

$$\begin{aligned}\mathfrak{J} &= 2\lambda^2 \int_0^t dt' \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{4\lambda^4 + \omega^2} \left[1 - e^{-2\lambda^2 t'} \cos(\omega t') \right] \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \\ &\quad + \int_0^t dt' \int_0^\infty d\omega \frac{\omega J(\omega)}{4\lambda^4 + \omega^2} e^{-2\lambda^2 t'} \sin(\omega t') \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right).\end{aligned}\quad (\text{E.4})$$

Como, para todo $t' \geq 0$ temos $e^{-2\lambda^2 t'} \cos(\omega t') \leq 1$, de forma que todas os fatores do primeiro integrando do lado direito da equação de $\mathfrak{J}$ são não-negativas. Por isso, se provarmos que também é não negativo o segundo termo, que representaremos por $\mathfrak{K}$:

$$\mathfrak{K} \equiv \int_0^t dt' \int_0^\infty d\omega \frac{\omega J(\omega)}{4\lambda^4 + \omega^2} e^{-2\lambda^2 t'} \sin(\omega t') \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right), \quad (\text{E.5})$$

teremos também demonstrado que não é negativo $\mathfrak{J}$. Para essa nova integral dupla, o único termo que pode assumir valores abaixo de zero é o seno. Por isso, vamos novamente tomar a integral temporal para tentar eliminá-lo:

$$\begin{aligned}\int_0^t dt' e^{-2\lambda^2 t'} \sin(\omega t') &= \Im \left\{ \int_0^t dt' e^{-(2\lambda^2 - i\omega)t'} \right\} \\ &= \Im \left\{ \frac{1 - e^{-(2\lambda^2 - i\omega)t}}{2\lambda^2 - i\omega} \right\} \\ &= \frac{\omega - e^{-2\lambda^2 t} [\omega \cos(\omega t) + 2\lambda^2 \sin(\omega t)]}{4\lambda^4 + \omega^2}.\end{aligned}\quad (\text{E.6})$$

Como o denominador é certamente positivo, precisamos apenas nos certificar que o numerador será maior que zero. Para isso, empregaremos as seguintes desigualdades, a primeira apenas válida para $\omega t \geq 0$, que corresponde à região de integração das frequências:

$$\begin{aligned}\sin(\omega t) &\leq \omega t, \\ \cos(\omega t) &\leq 1.\end{aligned}\quad (\text{E.7})$$

De posse delas, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\omega \left[1 - e^{-2\lambda^2 t} \cos(\omega t) \right] - 2\lambda^2 e^{-2\lambda^2 t} \sin(\omega t) &\geq \omega \left[1 - e^{-2\lambda^2 t} \right] - 2\lambda^2 e^{-2\lambda^2 t} (\omega t) \\
&\geq \omega e^{-2\lambda^2 t} \left[e^{2\lambda^2 t} - 1 - 2\lambda^2 t \right].
\end{aligned} \tag{E.8}$$

Já que a variável ω é sempre não-negativa na região em que integramos,

$$\omega e^{-2\lambda^2 t} \geq 0. \tag{E.9}$$

Portanto, só precisamos provar que o termo entre colchetes é maior ou igual a zero. Isso é simples se empregarmos a expansão em série de potências da exponencial:

$$e^{2\lambda^2 t} = 1 + 2\lambda^2 t + \frac{4\lambda^4 t^2}{2} + \dots \tag{E.10}$$

Como todos os termos do lado direito são não-negativos, temos que:

$$e^{2\lambda^2 t} - 1 - 2\lambda^2 t = \frac{4\lambda^4 t^2}{2} + \dots \geq 0. \tag{E.11}$$

Isso é tudo do que necessitávamos para provar que $\mathfrak{K} \geq 0$, que tem por consequência que $\mathfrak{J} \geq 0$.