UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Fabio Henrique Olini

**Aproximantes de Padé e a série perturbativa da QCD nos
decaimentos $\tau \rightarrow (\text{hádrons}) + \nu_\tau$**

São Carlos

2018

Fabio Henrique Oliani

**Aproximantes de Padé e a série perturbativa da QCD nos
decaimentos $\tau \rightarrow (\text{hádrons}) + \nu_\tau$**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. Diogo Rodrigues Boito

Versão corrigida

(versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos

2018

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Oliani, Fabio Henrique

Aproximantes de Padé e a série perturbativa da QCD nos decaimentos hadrônicos do Tau / Fabio Henrique Oliani; orientador Diogo Rodrigues Boito - versão corrigida -- São Carlos, 2018.

111 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Tau. 2. Grupo de renormalização. 3. QCD. 4. Acoplamento forte. I. Boito, Diogo Rodrigues, orient. II. Título.

A Deus, à minha esposa Viviane e aos meus familiares.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, que me salvou e têm guiado a minha vida, me sustentado e cumprindo Sua palavra de que nada faltará.

Gostaria de agradecer à minha esposa Viviane, por estar comigo nos últimos anos. Você é a minha base e inspiração de todos os dias. Me suporta mesmo quando nem eu mesmo me suporto. Obrigado por todo carinho, companheirismo, cuidado e amor e por me apoiar em todas as minhas decisões. Eu não teria conseguido sem você.

Também gostaria de agradecer aos meus pais, por me encorajarem, me darem suporte durante meus anos de estudo e por terem me ensinado a ser uma pessoa de caráter. Obrigado aos meus outros familiares, em especial as minhas sobrinhas Bia e Valentina, que trouxeram alegrias, amor e momentos inesquecíveis para nossa família.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Diogo Rodrigues Boito, por todo o suporte, ensinamentos, orientação e paciência durante os últimos dois anos e meio.

E, por fim, gostaria de agradecer ao IFSC, por todo suporte técnico e providenciar tudo que foi necessário para realização desta dissertação, e a FAPESP (processo 2016/01341-4) pelo suporte financeiro.

“A conclusão dos assuntos é melhor que seu início, e a paciência vale sempre mais do que a arrogância.”

Rei Salomão

RESUMO

OLIANI, F. H. **Aproximantes de Padé e a série perturbativa da QCD nos decaimentos $\tau \rightarrow (\text{hádrons}) + \nu_\tau$** . 2018. 111p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

As correções perturbativas da QCD aos decaimentos hadrônicos do tau são obtidas a partir da expansão da função de Adler. Acredita-se que esta série é assintótica e melhor entendida quando sua transformada de Borel é considerada. Usamos o método matemático dos Aproximantes de Padé para reconstruir a transformada de Borel da série e extrair informação sobre as correções de ordens mais altas bem como os pólos devidos aos renormalons associados com a divergência da série. Primeiramente, testamos o método no limite large- β_0 da QCD, onde a série perturbativa é conhecida em todas as ordens. Neste limite observamos que a variação de esquema de renormalização do acoplamento forte, α_s , pode ser útil para a construção de aproximantes que convergem mais rapidamente. Aplicamos o método na QCD completa para obtermos previsões sobre as principais características da série. Em QCD a estrutura analítica da transformada de Borel da função de Adler torna as aproximações com Padés menos eficientes, o que se reflete em incertezas maiores. Chegamos ao resultado de 570 ± 285 para o coeficiente do termo α_s^5 . Devido ao fato de a série prevista pelos aproximantes apresentar comportamento divergente de sinal não-alternado, há uma indicação de que singularidades do tipo infra-vermelho contribuem mais para os coeficientes da série em ordens intermediárias. Além disso, apesar de os resultados para a soma de Borel da função $\delta^{(0)}$ serem compatíveis com as duas prescrições mais usadas para fixar a escala de renormalização em decaimentos do tau, o Padé apresenta uma leve preferência pela prescrição de ordem fixa (ou FOPT).

Palavras-chave: τ . Grupo de renormalização. QCD. Acoplamento forte.

ABSTRACT

OLIANI, F. H. **Padé Approximants and perturbative series of QCD in τ decays.** . 2018. 111p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

Perturbative QCD corrections to hadronic tau decays are obtained from the expansion of the Adler function. This series is believed to be asymptotic and is better understood when its Borel transform is considered. We use the mathematical method of Padé approximants to reconstruct the Borel transformed series and extract information about higher order corrections as well as renormalon poles associated with the divergence of the series. First, the method is tested in the large- β_0 limit of QCD, where the perturbative series is known to all orders. In this limit, we observe that the renormalization scheme variation of the strong coupling, α_s , can be useful in constructing approximants that converge faster. We apply the method in complete QCD to obtain predictions about the main characteristics of the series. In QCD, the analytical structure of the Borel transform of the Adler function makes the approximations with Padés less efficient, which is reflected in larger uncertainties. We obtain the result 570 ± 285 for the coefficient of the term α_s^5 . The fixed sign nature of the series predicted by the PAs indicates that there is an indication that infrared singularities contribute more to the coefficients of the series in intermediate orders. In addition, although the results for the Borel sum of the function $\delta^{(0)}$ are compatible with the two most frequently used prescriptions for setting the renormalization scale in tau decays, Padé approximants show a slight preference for fixed order prescription (or FOPT).

Keywords: τ . Renormalization group. QCD. Strong coupling.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – $e^+e^- \rightarrow$ hádrons	27
Figura 2 – Decaimentos do τ	27
Figura 3 – Dados experimentais da razão $R_{e^+e^-}$	28
Figura 4 – Decaimentos $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	29
Figura 5 – Interação entre glúons e quarks	32
Figura 6 – Interação entre 3 glúons	32
Figura 7 – Interação entre 4 glúons	32
Figura 8 – Correção em 1-loop do propagador do quark.	33
Figura 9 – Evolução de α_s	38
Figura 10 – Determinação de α_s reunidas pelo Particle Data Group.	39
Figura 11 – Acoplamento $\hat{a}(M_\tau) \equiv a'_s(M_\tau)$ como função de C	41
Figura 12 – Teorema óptico aplicado aos decaimentos do τ	46
Figura 13 – Dados do ALEPH para a função espectral do τ usando $\alpha_s(M_Z^2) = 0.120$	46
Figura 14 – Contorno de integração.	47
Figura 15 – Série assintótica a função de Stieltjes usando $\epsilon = 0, 15$	55
Figura 16 – $B[f_1](t) = \frac{1}{1-t}$	57
Figura 17 – $B[f_2](t) = \frac{1}{1+t}$	57
Figura 18 – Comparação entre os resultados exato, a expansão em Taylor e o PA da função $f(x) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}x}}{(1+2x)^2}$	59
Figura 19 – Erro relativo da previsão do primeiro coeficiente desconhecido (σ_{rel}) em função do número de parâmetros do Padé utilizando o Padé P_2^M e a função $f(x) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}x}}{(1+2x)^2}$. Esse é o caso do teorema de Montessus de Ballore.	63
Figura 20 – Localização dos pólos do Padé P_2^M em função do número de parâmetros do Padé utilizando a função $f(x) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}x}}{(1+2x)^2}$	64
Figura 21 – Erro relativo da previsão do primeiro coeficiente desconhecido (σ_{rel}) em função do número de parâmetros do Padé utilizando o Padé P_N^N e a função $f(x) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}x}}{(1+2x)^2}$. Esse é o caso do teorema de Pommerenke.	65
Figura 22 – Erro relativo da previsão do primeiro coeficiente desconhecido (σ_{rel}) em função do número de parâmetros do Padé utilizando a função $g(x) = \sqrt{\frac{1+2x}{1+x}}$, que é uma função com uma linha de corte, e o Padé P_N^N	66
Figura 23 – Localização dos pólos no plano complexo da variável x do Padé $P_{12}^{12}(x)$ construído a partir da função $g(x) = \sqrt{\frac{1+2x}{1+x}}$ que têm uma linha de corte em $[-1, -1/2]$	66
Figura 24 – Propagador do glúon corrigido por uma cadeia de loops de férmions.	70
Figura 25 – Correções dominantes em large- β_0 à função de Adler.	70
Figura 26 – Acoplamento $\hat{a}_s^C(m_\tau)$ como função de C no limite large- β_0	77

Figura 27 – Resultados da expansão perturbativa da função de Adler no limite large- β_0 usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$	79
Figura 28 – Resultados para a função $\delta^{(0)}$ usando a prescrição FOPT e $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$	79
Figura 29 – Resultados para a função $\delta^{(0)}$ usando a prescrição CIPT e $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$	79
Figura 30 – Erro relativo da primeira previsão do coeficiente da função de Adler para diferentes sequências de Padé.	81
Figura 31 – Resultados da soma de Borel para diferentes sequências de Padé usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$. A banda horizontal é dada pela ambiguidade imaginária do valor verdadeiro.	82
Figura 32 – Resultados da expansão perturbativa da função de Adler no limite large- β_0 usando $C = -5/3$ e $\alpha_s(m_\tau) = 0,5074$	83
Figura 33 – Erro relativo da primeira previsão do coeficiente da função de Adler para diferentes sequências de Padé usando $C = -5/3$	84
Figura 34 – Resultados da soma de Borel para diferentes sequências de Padé usando $C = -5/3$ e $\alpha_s(m_\tau) = 0,5074$. A banda horizontal é dada pela ambiguidade imaginária do valor verdadeiro.	85
Figura 35 – Resultados da expansão perturbativa da função de Adler no limite large- β_0 contruído no esquema $C = -5/3$ e então transferido para o esquema $\overline{\text{MS}}$ usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$	86
Figura 36 – Resultados para a função $\delta^{(0)}$ usando a prescrição FOPT construído no esquema $C = -5/3$ e então transferido para o esquema $\overline{\text{MS}}$ e $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$	87
Figura 37 – Resultados para a função $\delta^{(0)}$ usando a prescrição CIPT construído no esquema $C = -5/3$ e então transferido para o esquema $\overline{\text{MS}}$ e $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$	87
Figura 38 – Resultados da expansão perturbativa da função de Adler no limite large- β_0 no esquema $\overline{\text{MS}}$ usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$ e os aproximantes de Padé.	88
Figura 39 – Resultados para a função $\delta^{(0)}$ usando a prescrição FOPT no esquema $\overline{\text{MS}}$ usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$ e os aproximantes de Padé.	89
Figura 40 – Resultados para a função $\delta^{(0)}$ usando a prescrição CIPT no esquema $\overline{\text{MS}}$ usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$ e os aproximantes de Padé.	89
Figura 41 – Expansão perturbativa da função de Adler no $\overline{\text{MS}}$ usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$ e PPAs.	91
Figura 42 – Resultados da expansão perturbativa da função de Adler na QCD completa usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$ e no esquema $\overline{\text{MS}}$	95

Figura 43 – Resultados da expansão perturbativa da função de $\delta^{(0)}$ na QCD completa usando as prescrições FOPT e CIPT, $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$ e no esquema $\overline{\text{MS}}$.	96
Figura 44 – Resultados da expansão perturbativa da função de Adler na QCD completa usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$, calculados no esquema $C = 0,33$ e então transferidos para o $\overline{\text{MS}}$.	99
Figura 45 – Resultados da expansão perturbativa da função de $\delta^{(0)}$ na QCD completa usando as prescrições FOPT e CIPT e $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$, calculados no esquema $C = 0,33$ e então transferidos para o $\overline{\text{MS}}$.	100

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Resultado para a integral de Borel em large- β_0 usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$.	80
Tabela 2	– Coeficientes da função de Adler no limite large- β_0 usando os esquemas $\overline{\text{MS}}$ e $C = -5/3$ e usando diferentes Padés.	86
Tabela 3	– Coeficientes da função de Adler no limite large- β_0 e no esquema $\overline{\text{MS}}$ usando aproximantes de Padés construídos a partir dos primeiros quatro coeficientes.	88
Tabela 4	– Coeficientes da função de Adler na QCD completa e no esquema $\overline{\text{MS}}$ usando aproximantes de Padés construídos a partir dos primeiros quatro coeficientes.	94
Tabela 5	– Coeficientes da função de Adler na QCD completa calculados no esquema $C = 0,33$ e então transferidos para o $\overline{\text{MS}}$ usando aproximantes de Padés construídos a partir dos primeiros quatro coeficientes.	98

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	CROMODINÂMICA QUÂNTICA	25
2.1	Evidências da Carga de cor	26
2.2	A lagrangiana da QCD	29
2.3	Renormalização da QCD	32
2.4	A evolução de α_s e a Variação de Esquema de Renormalização	36
3	QCD NOS DECAIMENTO DO TAU	43
3.1	Decaimentos hadrônicos	44
3.2	FOPT e CIPT	49
4	SÉRIES ASSINTÓTICAS E APROXIMANTES DE PADÉ	53
4.1	Séries Assintóticas e Transformada de Borel	53
4.2	Aproximantes de Padé	57
5	RESULTADOS EM LARGE- β_0	69
5.1	Renormalons em Large- β_0	69
5.2	Aproximantes de Padé no limite large- β_0	74
5.2.1	Esquema $\overline{MS}$	77
5.2.2	Variação de esquemas	81
5.2.3	Aproximantes de Padé utilizando os primeiros quatro coeficientes	85
5.3	Aproximantes de Padé Parciais no limite large- β_0	89
5.4	Conclusões parciais	91
6	RESULTADOS EM QCD	93
6.1	Função de Adler no esquema $\overline{MS}$	93
6.2	Variação de esquemas na QCD	96
6.3	Conclusões parciais	99
7	CONCLUSÕES	103
	REFERÊNCIAS	107

1 INTRODUÇÃO

Desenvolvida a partir da década de 70, a Cromodinâmica Quântica (QCD, do inglês *Quantum Chromodynamics*)¹⁻³ é a teoria de calibre não-abeliana que explica a interação forte das partículas elementares. Esta teoria, baseada na existência de partículas fermiônicas, os quarks, que interagem entre si através da troca dos bósons de gauge, os glúons, têm simetria $SU(3)_c$ e, portanto, os glúons, além de interagirem com os quarks, também interagem com outros glúons. A intensidade das interações é governada pelo acoplamento forte da teoria, α_s , e a determinação precisa deste acoplamento, representa um teste fundamental da consistência interna do Modelo Padrão⁴⁻⁷ da Física de Partículas. Este acoplamento é o ingrediente chave para os cálculos de todos os processos envolvendo QCD perturbativa e sua determinação em diferentes escalas de energia comprova propriedades importantes da teoria, como, por exemplo, a liberdade assintótica.^{8,9}

A extração de α_s a partir dos decaimentos hadrônicos do lépton τ ¹⁰⁻¹³ é de especial interesse principalmente porque é feita em energias relativamente baixas, perto do limite de validade da QCD perturbativa. Portanto, a evolução de α_s a partir da escala de massa do τ para a escala de massa do Z representa um dos testes mais não-triviais da liberdade assintótica,¹⁴ como predito pela função beta da QCD.^{15,16} Na massa do τ , a QCD perturbativa ainda é válida, mas efeitos não-perturbativos não podem ser negligenciados. Esses efeitos são menores por um fator dez quando comparados com a contribuição perturbativa da QCD, mas devem ser levados em conta cuidadosamente em determinações precisas do acoplamento.^{11,17} Estes efeitos estão codificados na OPE (do inglês, *Operator Product Expansion*) e nas contribuições relacionadas com as violações da dualidade quark-hádron, ou, simplesmente violações de dualidade (DVs, do inglês *duality violations*).¹⁸⁻²² Nesta dissertação nosso interesse principal diz respeito a contribuição perturbativa.

Outra importante fonte de incerteza decorre da definição da escala de renormalização na contribuição perturbativa. Teoricamente, os decaimentos $\tau \rightarrow (\text{hádrons}) + \nu_\tau$ são expressos em termos da integral ponderada da função espectral hadrônica sobre a massa invariante, cujos limites são zero e m_τ^2 . Como a teoria de perturbação não é válida em baixas energias recorremos às Regras de Soma a Energia Finita (FESRs, do inglês *Finite Energy Sum Rules*) que relacionam esta integral a uma integral de linha sobre um contorno fechado no plano complexo com $|s| = m_\tau^2$. Neste processo, um procedimento deve ser adotado para definir a escala de renormalização. Os dois procedimentos mais comumente utilizados são conhecidos como Fixed Order Perturbation Theory (FOPT)²³ e Contour Improved Perturbation Theory (CIPT)²⁴ (eles serão discutidos em mais detalhes no Capítulo 3). Eles levam a diferentes séries perturbativas e, portanto, a diferentes valores de α_s . A eliminação

desta ambiguidade apresenta uma dificuldade inerente pois para resolver este problema é preciso conhecer os termos de ordens altas da expansão perturbativa. Desde 2008 a série é conhecida exatamente até quarta ordem (α_s^4).²⁵ Na ausência de cálculos exatos para os coeficientes de ordens mais altas, devemos atacar este problema utilizando métodos que permitam uma reconstrução parcial da série baseada nas informações disponíveis.

A estrutura geral da série perturbativa é admitida como sendo conhecida. É uma série assintótica (portanto divergente) com coeficientes que crescem fatorialmente. O comportamento divergente da série é governado pelos *renormalons*, que correspondem a singularidades ao longo do eixo real da transformada de Borel da série.²⁶ As posições das singularidades são conhecidas pois estão relacionadas com a dimensão dos operadores que participam na OPE do correlator relevante. Os expoentes das singularidades são relacionados com a dimensão anômala dos mesmos operadores e podem, em princípio, ser calculados. Por outro lado, nada, essencialmente, é conhecido sobre os resíduos das singularidades.

Esse conhecimento parcial tem sido usado para construir representações realistas da série completa aproximando sua transformada de Borel, que tem um número infinito de singularidades, por um pequeno número de singularidades dominantes.^{23,27} Esses modelos para a série da transformada de Borel são, em alguns casos, um tipo de aproximante *racional* ou de *Padé**. Motivados por este fato, nesta dissertação vamos investigar, sistematicamente, o uso da teoria de Padés^{28–30} para aproximar a transformada de Borel da série perturbativa que governa os decaimentos hadrônicos do τ . Uma das principais vantagens do uso de aproximantes racionais, quando comparados com os chamados modelos de renormalons,^{23,27} é que eles podem ser feitos independente de modelo. Além disso, em alguns casos, teoremas garantem a convergência de uma sequência de aproximantes para a função de interesse. Os resultados obtidos com aproximantes racionais podem servir como um guia para ordens altas da série e, também, comprovarem (ou não) os resultados dos modelos de renormalons.

Em meados da década de 90, aproximantes racionais foram utilizados no contexto dos decaimentos do τ no artigo de M. A. Samuel, J.R. Ellis e M. Karliner.³¹ Em particular, a observação de que sua convergência é melhorada quando se usa a transformada de Borel da série, em oposição à série em α_s , já foi feita neste artigo. (Este procedimento é as vezes chamado de “método Padé-Borel”.³²) Naquela ocasião, no entanto, a série perturbativa era conhecida uma ordem a menos, até ordem α_s^3 . Além disso, a conexão com renormalons em aplicações aos decaimentos do tau não havia sido feita explicitamente. Aqui, esta conexão é estabelecida e podemos usar diferentes tipos de aproximantes de Padé (como os Padés parciais) graças ao conhecimento disponível sobre estas singularidades.

Para validar nossa abordagem, antes de aplicar aproximantes de Padé na QCD

* Para ser mais preciso, os modelos de M. Beneke, D. Boito e M. Jamin,^{23,27} chamados modelos referência e alternativo, são parecidos com Aproximantes de Padé Parciais.²⁸

completa, vamos trabalhar com o limite large- β_0 . Neste limite, obtêm-se todas correções com maior potência de N_f em cada ordem de α_s na expansão perturbativa (sendo N_f o número de sabores de quarks leves). A aplicação deste procedimento para o decaimento do τ gera uma série assintótica em α_s que é conhecida em todas as ordens, e o resultado para a transformada de Borel da série pode ser escrito em uma forma compacta.^{33,34} A transformada de Borel é então uma função meromórfica no plano complexo: têm um raio finito de convergência e um número infinito de pólos ao longo do eixo real, mas não têm cortes. Assim sendo, a teoria de aproximantes de Padé a funções meromórficas, e em particular os teoremas de Pommerenke e de Montessus de Ballore, se aplicam.^{28,35,36} Vamos considerar sequências de Aproximantes de Padé, mas também iremos utilizar sequências dos chamados Aproximantes de Padé Parciais. Estes últimos exploram o conhecimento disponível sobre os renôrmalons da transformada de Borel fixando os pólos dominantes.

Outro aspecto que é explorado aqui é a dependência de esquema de renormalização da série perturbativa. O acoplamento forte não é um observável físico da teoria e sua definição é dependente de esquema. Parametrizando a dependência de esquema sugerido no trabalho recente de D. Boito, M. Jamin e R. Miravittas³⁷ podemos usá-la ao nosso favor, no sentido de melhorar a qualidade do aproximante de Padé. Como vamos mostrar, embora, intuitivamente, poder-se-ia esperar uma melhor aproximação nos casos de esquemas “mais perturbativos”, com menores valores de α_s , o uso de esquemas “menos perturbativos” podem levar a uma melhor reconstrução da série perturbativa.

Na QCD completa temos propriedades diferentes para a transformada de Borel da função de Adler, quando comparadas com o limite large- β_0 . Primeiro, os pólos devidos aos renôrmalons são transformados em cortes,²⁶ e como não temos uma teoria formulada sobre convergência de Padés para funções com cortes, fizemos testes com uma função deste tipo no Capítulo 4 para verificarmos se propriedades gerais da convergência de sequências de Padés são observadas, e também para verificarmos como o Padé reproduz o corte através de pólos. Veremos que, para funções com linhas de corte, os Padés reproduzem essas linhas com uma sequência de pólos e, mesmo com essa dificuldade adicionada, eles conseguem fazer uma boa previsão dos principais aspectos das séries. Outro fator importante é que em QCD, apesar de não termos conhecimentos sobre os resíduos dos pólos, tudo indica que o primeiro renôrmalon IR possui um resíduo grande comparado ao primeiro renôrmalon UV, logo, a série demora a apresentar comportamento de sinal alternado. Por fim iremos utilizar o método dos Padés, junto com a variação de esquemas na QCD completa, para estimarmos o quinto coeficiente da série, bem como para soma de Borel e também para o comportamento divergente da série.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2 apresentamos um resumo do que é importante e iremos utilizar de QCD. No Capítulo 3 descrevemos o essencial sobre a QCD nos decaimentos do tau em hádrons. No Capítulo 4 reunimos

a teoria matemática sobre séries assintótica e transformada de Borel, e também a teoria relevante para este trabalho sobre os aproximantes de Padé. No Capítulo 5, aplicamos os aproximantes de Padé no limite large- β_0 da QCD. É interessante utilizar este limite pois conhecemos a série em todas as ordens em α_s , então ele serve como um guia do que podemos esperar quando o método é aplicado na QCD completa. No Capítulo 6 apresentamos os resultados obtidos a partir do uso de Padés na QCD completa. E, finalmente, no Capítulo 7 apresentamos as conclusões.

2 CROMODINÂMICA QUÂNTICA

O Modelo Padrão da Física de Partículas⁴⁻⁷ (SM, do inglês *Standard Model*) é a teoria que descreve três das quatro interações fundamentais da natureza, a saber, as interações forte, fraca e eletromagnética. É uma teoria de calibre, ou de *gauge*, com simetria $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ onde os férmions, de spin-1/2, interagem entre si por troca de bósons de spin-1, que são os quanta dos campos de força. Para cada interação temos diferentes bósons, por exemplo, à interação forte correspondem oito glúons (que também podem interagir entre si), à eletromagnética, o fóton, e à interação fraca, os bósons $W^\pm$ e Z .

A matéria é formada pelos férmions da teoria, quarks e léptons, que são partículas elementares no sentido de que não possuem estrutura interna. Os quarks aparecem em seis sabores (up, down, strange, charm, bottom e top), têm carga elétrica fracionada (up, charm e top com carga $Q = 2/3$ e down, strange e bottom com carga $Q = -1/3$) e possuem um número quântico chamado “carga de cor”. Existem três “cores”, comumente chamadas de vermelho, verde e azul. Os léptons aparecem em três sabores (elétron, muon e tau) e cada lépton tem seu neutrino associado (ν_e , ν_μ e ν_τ), que são partículas sem massa no contexto do SM. Cada partícula têm sua antipartícula, com mesma massa, mas com números quânticos opostos.

Podemos agrupar os férmions em três gerações:

$$\begin{bmatrix} \nu_e & u \\ e^- & d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \nu_\mu & c \\ \mu^- & s \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \nu_\tau & t \\ \tau^- & b \end{bmatrix},$$

onde as únicas diferenças de uma geração para outra são o sabor e a massa. (Na divisão acima, os quarks foram identificados pelas suas iniciais, por exemplo, o quark up, chamamos de quark u , o quark down chamamos de d , e assim por diante.) As partículas que formam a matéria ordinária são, basicamente, as da primeira geração, que são as mais leves, já que as partículas de outras gerações decaem rapidamente nas partículas desta, e, portanto, a segunda e terceira gerações são observadas apenas em laboratório.

Bósons de gauge das interações fracas devem ser massivos, por mediarem uma interação de curto alcance. Porém, a invariância de gauge do SM não permite termos de massa na Lagrangiana para esses bósons. A geração de massa dos bósons $W^\pm$ e Z e dos férmions passa pelo mecanismo de Higgs e a Quebra Espontânea de Simetria (SSB, do inglês *Spontaneous Symmetry Breaking*). A ideia é simplesmente que o estado de mais baixa energia (vácuo) não respeita a simetria de gauge e induz massas para os férmions e os bósons da interação fraca se propagarem. A SSB faz com que $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow SU(3)_c \otimes U(1)_{QED}$, e essa quebra gera as massas dos férmions, dos bósons $W^\pm$ e Z , as misturas de quarks, e também faz surgir uma partícula escalar na teoria, chamada Bóson

de Higgs, proposto em 1964 por P. Higgs,³⁸ F. Englert e R. Brout³⁹ e G. Guralnik, C. Hagen e T. Kibble,⁴⁰ e que foi observado em 2012 pelas colaborações ATLAS⁴¹ e CMS⁴² do LHC (*Large Hadron Collider*).

O SM nos fornece uma descrição matemática precisa das interações forte, fraca e eletromagnética que é coerente com uma enorme quantidade de dados experimentais. Dentre os grandes êxitos que confirmam a teoria estão as previsões dos bósons $W^\pm$ e Z , a predição do bóson de Higgs, o valor do momento de dipolo magnético anômalo do elétron, que tem uma precisão de uma parte em um bilhão comparado ao valor experimental, previsões da existência dos quarks top e charm, entre outros. Por isso, é uma teoria extremamente bem sucedida.

Apesar do seu sucesso, ainda há falhas no modelo. O SM prevê que neutrinos não têm massa, mas na natureza é observada a oscilação de neutrinos, onde, um neutrino de um determinado sabor se converte em outro sabor (por exemplo $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$). Essa mudança indica que a massa do neutrino é, na realidade, não nula. Outro problema da teoria é ausência da gravidade, portanto, ainda não é uma teoria fechada para explicar todas as quatro interações fundamentais da natureza. Finalmente, outro exemplo da incompletude do SM é a assimetria matéria-antimatéria no universo. Como já dito anteriormente, a matéria é formada pelos férmions, e os antiférmions são partículas que têm mesma massa mas números quânticos oposto. O problema da assimetria bariônica é que no universo é observada uma quantidade muito maior de matéria do que de antimatéria. No SM uma condição para gerar essa assimetria é que um processo da matéria pode acontecer a uma taxa diferente de sua contraparte de antimatéria, problema chamado de violação de CP. A quantidade de violação de CP no SM é insuficiente para explicar a assimetria bariônica observada no universo.

A Cromodinâmica Quântica^{3,43,44} (QCD, do inglês *Quantum Chromodynamics*) é a teoria que explica as interações fortes entre quarks, mediadas por glúons. Têm simetria de gauge $SU(3)_c$, onde 3 é o número de cores e apresenta dois comportamentos bem distintos, para altas e baixas energias: liberdade assintótica e confinamento, respectivamente. Além disso, os parâmetros livres da teoria são o acoplamento, que é o tema central desse trabalho, e as massas dos quarks, que precisam ser determinadas. A QCD está incorporada ao SM por meio do seu setor $SU(3)_c$.

2.1 Evidências da Carga de cor

As tabelas de dados de partículas agrupadas pelo Particle Data Group⁴⁵ (PDG) mostram uma grande variedade no espectro hadrônico. Esse espectro é muito bem classificado pelo modelo de quarks (ainda sem a dinâmica associada ao grupo $SU(3)_c$), onde quarks de seis sabores, spin-1/2, cargas fracionadas e diferentes massas formam estados ligados de um quark e um antiquark ($q\bar{q}$), os mésons, e três quarks (qqq), os bárions. Essas

Figura 1 – $e^+e^- \rightarrow$ hádrons Figura 2 – Decaimentos do τ

Fonte: Elaborada pelo autor.

partículas recebem o nome coletivo de hádrons, e alguns exemplos são os prótons, nêutrons, píons, káons, etc.

Porém, o modelo de quarks e antiquarks não conseguiu lidar com o problema da estatística de Fermi-Dirac. Isso fica claro com a observação do bárion Δ^{++} , cujos números quânticos correspondem a um estado $|u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle$, que têm spin completamente simétrico, portanto, a estatística de Fermi para os quarks requer uma função de onda espacial antissimétrica. Além de violar o princípio de Pauli, já que essa partícula possui três quarks u com spin pra cima. O problema é resolvido postulando a existência de um novo número quântico: a carga de cor.^{1,2} Ou seja, são necessárias, pelo menos, três cores diferentes, assim, o estado Δ^{++} é totalmente antissimétrico nos índices de cor, respeitando o princípio de Pauli, com uma função de onda espacial simétrica.

Mas, apenas a hipótese de que quarks carregam carga de cor, abriria a possibilidade, em princípio, para novos estados coloridos, que nunca foram observados. Postulou-se então que estados assintóticos são incolores, ou, singletos perante rotação no espaço de cor, o que ficou conhecido como a hipótese do confinamento,⁴⁶ porque a implicação é que quarks livres não podem ser observados. Os quarks estão portanto confinados nos estados ligados hadrônicos.

Um teste direto da existência das cargas de cor pode ser obtido da razão entre a seção de choque de $e^+e^- \rightarrow$ hádrons normalizada pela seção de choque de $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

$$R_{e^+e^-} \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hádrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}. \quad (2.1)$$

A produção hadrônica acontece através de $e^+e^- \rightarrow \gamma, Z \rightarrow q\bar{q}$ como pode ser visto na Figura 1. Os quarks do estado final hadronizam e formam os hádrons, que são observados no detector. Como a probabilidade de hadronização dos quarks no estado final é um, é de se esperar que exista uma *dualidade* entre a seção de choque $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$, e aquela de fato observada, $e^+e^- \rightarrow$ (hádrons). Essa propriedade é conhecida como *dualidade quark-hádron*. A energias baixas (longe do pico Z), temos que a razão $R_{e^+e^-}$ numa abordagem partônica

Figura 3 – Dados experimentais da razão $R_{e^+e^-}$.

Fonte: PATRIGNANI et al.⁴⁵

é dada pela soma das cargas elétricas dos quarks ao quadrado:

$$R_{e^+e^-} \approx N_c \sum_{f=1}^{N_f} Q_f^2 = \begin{cases} \frac{2}{3} N_c = 2, (N_f = 3 : u, d, s), \\ \frac{10}{9} N_c = \frac{10}{3}, (N_f = 4 : u, d, s, c), \\ \frac{11}{9} N_c = \frac{11}{3}, (N_f = 5 : u, d, s, c, b). \end{cases} \quad (2.2)$$

Os resultados experimentais que podem ser comparados com os resultados da Eq. (2.2) podem ser vistos na Figura 3, onde a linha sólida (vermelha) é a predição teórica obtida a 3-loops em QCD perturbativa, a linha pontilhada (verde) é obtida do modelo partônico simples e os pontos (azuis) são os dados experimentais.⁴⁵ Como pode ser observado, as cargas de cor contam com forte evidência experimental e de uma análise desta figura pode ser extraído com razoável precisão que $N_c = 3$. É importante ressaltar que essa análise não é válida perto das ressonâncias, por exemplo, perto do pico de J/ψ , ou $\psi(2S)$, ou Υ , etc. Nessas regiões a dualidade quark-hádron é fortemente violada.

Outra evidência experimental de que $N_c = 3$ pode ser obtida dos decaimentos hadrônicos do lépton τ representados na Figura 2. Esses decaimentos ocorrem através do bóson $W^\pm$, e uma vez que o acoplamento do W com a corrente carregada é universal, há $(2 + N_c)$ contribuições iguais para a largura do decaimento do τ (desconsiderando as massas finais e a interação forte). Duas dessas contribuições correspondem aos decaimentos leptônicos, enquanto as outras N_c são associadas as possíveis cores dos quarks e antiquarks nos decaimentos hadrônicos. As razões de ramificação de diferentes canais devem ser, aproximadamente:

$$\begin{aligned} B_{\tau \rightarrow \text{lépton}} &\equiv Br(\tau^- \rightarrow \nu_l l^- \bar{\nu}_l) \approx \frac{1}{2 + N_c} = \frac{1}{5} = 20\%, \\ B_{\tau \rightarrow \text{hádrons}} &\equiv Br(\tau^- \rightarrow (\text{hádrons}) \nu_\tau) \approx 1 - \frac{2}{2 + N_c} = \frac{3}{5} = 60\%, \end{aligned} \quad (2.3)$$

Figura 4 – Decaimentos $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

que devem ser comparadas com as médias experimentais,⁴⁵ que para o caso do elétron é $B_{\tau \rightarrow e} = (17,8174 \pm 0,0399)\%$ e do múon $B_{\tau \rightarrow \mu} = (17,3936 \pm 0,0384)\%$. A concordância é bastante boa para $N_c = 3$.

Outro teste forte para a carga de cor é obtido a partir dos decaimentos $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, que ocorrem através de um loop triangular de quarks, que pode ser observado na Figura 4. O vértice denota o acoplamento do π^0 com a corrente axial $A_\mu \equiv (\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u - \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 d)$. Se considerarmos $N_c = 1$, a predição para a largura desses decaimentos difere do valor experimental de um fator 9, enquanto que pra $N_c = 3$ a predição é quase exata. Esses decaimentos também estão associados com anomalias quânticas: uma simetria global de sabor que é quebrada por efeitos quânticos. Essas anomalias nos fornecem outra razão teórica para adotarmos $N_c = 3$. As simetrias de gauge da interação fraca do SM também têm essas anomalias, que aparecem em diagramas do tipo da Figura 4. Essas anomalias de gauge destroem a propriedade de renormalização da teoria. Porém, se $N_c = 3$, as somas desses possíveis loops triangulares se cancelam, de forma que o SM fica bem definido assumindo a existência de três cores. Além disso, muitos outros observáveis, como larguras parciais dos bósons Z e $W^\pm$ também podem ser analisados de modo similar para se concluir que $N_c = 3$.

2.2 A lagrangiana da QCD

A interação entre quarks e glúons da QCD é descrita, matematicamente, por uma teoria quântica de campos de Yang-Mills invariante perante rotação do grupo de gauge não-abeliano $SU(3)_c$, onde c denota cor. A lagrangiana da QCD pode ser obtida impondo que a lagrangiana de um quark livre é invariante por transformações locais do grupo $SU(3)_c$. Tomando a normalização própria para o termo cinético do glúon, podemos escrever

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} \equiv -\frac{1}{4}G_a^{\mu\nu}G_{\mu\nu}^a + \sum_f \bar{q}_f(i\gamma^\mu D_\mu - m_f)q_f, \quad (2.4)$$

onde $G_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu + g_s f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu$, e $D_\mu \equiv \partial_\mu - ig_s \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a$. Então, expandindo os termos, ficamos com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} = & -\frac{1}{4}(\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu)(\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) + \sum_f \bar{q}_f^\alpha (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) q_f^\alpha + \\ & + g_s G_a^\mu \sum_f \bar{q}_f^\alpha \gamma_\mu \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{\alpha\beta} q_f^\beta - \\ & - \frac{g_s}{2} f^{abc} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) G_\mu^b G_\nu^c - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde q_f^α é o campo do quark de cor α e sabor f , m_f é a massa do respectivo sabor de quark, λ^a são os geradores da representação fundamental do grupo $SU(3)$ e obedecem a seguinte álgebra de Lie

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c, \quad (2.6)$$

onde f_{abc} são as constantes de estrutura do grupo, G_a^μ é o campo do glúon e g_s é o acoplamento forte da teoria. O índice a corre de 1, $\dots$, 8, e temos oito bósons de gauge, ou seja, oito glúons na teoria.

A primeira linha da Eq. (2.5) contém os termos cinéticos dos campos do quark e do glúon, que dão origem aos correspondentes propagadores. A interação de cor entre quarks e glúons é dada pela segunda linha, e ela pode ser interpretada da seguinte maneira, glúons, que carregam tanto uma cor como uma anticor, mudam a carga de cor dos quarks e dos antiquarks, e também de outros glúons. Finalmente, devido ao caráter não abeliano do grupo de cor, ou seja, ao fato de as matrizes λ^a não comutarem, o termo $G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a$ gera interações não lineares entre três glúons e quatro glúons, que estão na última linha da Eq. (2.5). A intensidade das interações é governada pelo acoplamento forte, g_s , e como pode-se ver, todas as interações são proporcionais ao acoplamento. Nesse sentido, o acoplamento é universal na QCD.

Para quantizarmos a Lagrangiana (2.5) basta quantizarmos os campos dos férmions e dos glúons. Os primeiros podem ser quantizados da mesma forma que na Eletrodinâmica Quântica (QED, do inglês *Quantum Electrodynamics*), onde escrevemos um campo genérico espinorial, $\psi(x)$, em termos de operadores de criação e aniquilação, $a(\vec{p}, \lambda)$ e $b^+(\vec{p}, \lambda)$, respectivamente

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} \sum_\lambda \left[u(\vec{p}, \lambda) a(\vec{p}, \lambda) e^{-ipx} + v(\vec{p}, \lambda) b^+(\vec{p}, \lambda) e^{ipx} \right]. \quad (2.7)$$

Os espinores $u(\vec{p}, \lambda)$ e $v(\vec{p}, \lambda)$ são soluções da equação de Dirac no espaço de momento, com λ representado a helicidade do espinor. Aplicando as relações de comutação para os operadores de criação e aniquilação (quantização canônica), podemos mostrar que o propagador de Feynman para o campo espinorial livre no espaço de configuração é dado por

$$iS(x-y) = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i0} e^{-ip(x-y)}, \quad (2.8)$$

onde T é o operador de ordenamento temporal, e o termo $i0$ desloca o pólo do propagador para manter a causalidade.

As complicações aparecem ao tentarmos quantizar os campos de gauge. Devido a auto-interação dos glúons, não é possível aplicarmos as relações de comutação canônicas apenas adicionando um termo de fixação do calibre à Lagrangiana (como é feito em QED). Em QCD, precisamos adicionar termos de *Faddeev-Popov*, chamados campos fantasmas (ou *ghosts*), que são campos não-físicos sem massa, que obedecem a estatística de Fermi-Dirac e acoplam apenas com o glúons. Adicionando esse termos, conseguimos obter o propagador do campo do glúon:

$$iD_{\mu\nu}(x-y) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i0} \left[-g_{\mu\nu} + (1-a) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i0} \right] e^{-ik(x-y)}, \quad (2.9)$$

onde a é o parâmetro de gauge a ser fixado. É importante ressaltar que os observáveis da teoria não podem depender do gauge utilizado, portanto para qualquer valor do parâmetro a , os resultados devem ser iguais.

Para cálculos em QCD perturbativa é interessante obter as Regras de Feynman. Os propagadores do glúon e do quark no espaço de momento são dados por

$$iS(p) = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i0}, \quad (2.10)$$

$$iD_{\mu\nu}(p) = i \frac{1}{k^2 + i0} \left[-g_{\mu\nu} + (1-a) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i0} \right]. \quad (2.11)$$

Esses termos aparecem nas regras de Feynman para os propagadores livres dos quarks e glúons. O próximo passo é obter as regras para os vértices de interação, que podem ser extraídas da parte de interação da Lagrangiana. Para a QCD temos três vértices possíveis (como dito anteriormente), um vértice de interação entre quarks e glúons, representado na Figura 5, dado por $-ig_s \frac{\lambda^a}{2}$, um vértice de interação entre três glúons representado na Figura 6, dado por $-g_s f_{abc} [g_{\mu\nu}(k-q)_\lambda + g_{\nu\lambda}(q-p)_\mu + g_{\lambda\mu}(p-k)_\nu]$ e um vértice de interação entre quatro glúons representado na Figura 7, dado por $-ig_s^2 [f_{abe} f_{cde} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}) + f_{ade} f_{bce} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}) + f_{ace} f_{dbe} (g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho})]$. Notemos que as intensidades das interações são governadas pelo acoplamento da teoria g_s , e com exceção do vértice de 4 glúons, onde a intensidade é proporcional a g_s^2 , os outros vértices são lineares no acoplamento.

Obtidas as regras de Feynman, podemos agora, calcular amplitudes de diagramas e utilizar teoria de perturbação para estudarmos QCD. Se olharmos para o caso da aniquilação $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ podemos observar dois comportamentos distintos. O primeiro comportamento é a altas energias (ou seja, a pequenas distâncias), onde a interação entre um par quark-antiquark ($q\bar{q}$) se torna fraca conforme aproximamos um do outro. Quando muito próximos, podemos negligenciar a interação, de forma que cada partícula se comporta como se fosse livre, e esse comportamento é chamado de liberdade assintótica,^{8,9}

Figura 5 – Interação entre glúons e quarks

Figura 6 – Interação entre 3 glúons

Figura 7 – Interação entre 4 glúons

Fonte: Elaborada pelo autor.

e os resultados obtidos nesta escala de energia se aproximam daqueles do modelo partônico. O outro comportamento é a baixas energias (ou seja, a grandes distâncias). Uma forma qualitativa de entendermos esse comportamento é pensarmos que a interação entre o par $q\bar{q}$ aumenta, de forma que, quando muito longe um do outro, a energia necessária para afastá-los é grande o suficiente para criar um novo par $q\bar{q}$. Conforme afastamos mais o par, mais energia é necessária, e mais pares podem ser criados. Esse é o chamado confinamento dos quarks, e implica na não observação de quarks livres na natureza. Na Seção 2.4, onde definiremos a função β ficará mais claro onde aparecem esses comportamentos.

Como a Lagrangiana envolve uma dependência no acoplamento, então, todos os fenômenos de interação forte devem ser descritos em termos deste único parâmetro e das massas dos quarks. Aplicando métodos de teoria de perturbação, podemos calcular correções aos propagadores e aos vértices da teoria, podendo assim obter medidas de precisão para o acoplamento e para as massas. Porém, essas correções (ou loops) nos levam a integrais divergentes e o modo de lidar com essas integrais é renormalizando a teoria.

2.3 Renormalização da QCD

Uma teoria quântica de campos é dita renormalizável se todas as divergências ultravioletas puderem ser absorvidas através da redefinição dos campos originais e dos parâmetros g_s e m_f . Vamos exemplificar esse procedimento com um exemplo concreto e importante para o nosso trabalho.

Consideremos o caso da correção ao propagador do quark representado na Figura 8, em 1-loop. No espaço de momento, as correções perturbativas são dada por:

$$S_{ij}(p) = -i \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T \{ q_i(x) q_j(0) e^{i \int d^4z \mathcal{L}_I(z)} \} | 0 \rangle, \quad (2.12)$$

onde i e j são os índices de cor, e $\mathcal{L}_I(z)$ é a parte de interação da Lagrangiana, dada pela segunda e terceira linha da Eq. (2.5). A única parte da Lagrangiana de interação que contribui nessa ordem é a interação entre quarks e glúons, e precisamos desse termo duas

Figura 8 – Correção em 1-loop do propagador do quark.

Fonte: Elaborada pelo autor.

vezes, já que o valor esperado no vácuo do campo do glúon sozinho se anula. Expandindo o termo $e^{i \int d^4 z \mathcal{L}_I(z)}$ no acoplamento da teoria, temos:

$$S_{ij}^{(1)}(p) = ig_s^2 \int d^4 x \int d^4 z_1 \int d^4 z_2 e^{ipx} \left[S^{(0)}(x - z_1) \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} S^{(0)}(z_1 - z_2) \gamma^\nu \frac{\lambda^a}{2} S^{(0)}(z_2) \right]_{ij} \times \\ \times D_{\mu\nu}^{(0)}(z_1 - z_2), \quad (2.13)$$

onde $S^{(0)}(x - y)$ e $D_{\mu\nu}^{(0)}$ são os propagadores livres do quark e do glúon. Substituindo esses propagadores, dados pelas Eq. (2.8) e (2.9), usando que $\left[\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^a}{2} \right]_{ij} = \frac{4}{3} \delta_{ij}$ quando $N_c = 3$, e realizando as integrações nas variáveis x , z_1 e z_2 , chegamos que:

$$S_{ij}^{(1)}(p) = ig_s^2 \frac{4}{3} \delta_{ij} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [S^{(0)}(p) \gamma^\mu S^{(0)}(p - k) \gamma^\nu S^{(0)}(p)] D_{\mu\nu}^{(0)}(k), \quad (2.14)$$

onde $S^{(0)}(p)$ é o propagador do quark e $D_{\mu\nu}^{(0)}(k)$ é o propagador do glúon no espaço dos momentos dados pelas Eq. (2.10) e (2.11).

Através dos formalismos de diagramas de Feynman e teoria de perturbação, podemos reescrever o propagador do quark da Eq. (2.12) usando os propagadores do quark e do glúon

$$S_{ij}(p) = \delta_{ij} S^{(0)}(p) + \delta_{ij} S^{(0)}(p) \Sigma(p) S^{(0)}(p) + \dots, \quad (2.15)$$

onde $\Sigma(p)$ é a função de autoenergia do quark que pode ser obtida a partir da Eq. (2.14), que na ordem g_s^2 é dada por:

$$\Sigma^{(1)}(p) = i \frac{4}{3} g_s^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [\gamma^\mu S^{(0)}(p - k) \gamma^\nu] D_{\mu\nu}^{(0)}(k). \quad (2.16)$$

Usando o gauge de Feynman ($a = 1$) e substituindo os propagadores do quark e do glúon no espaço de momento, ficamos com

$$\Sigma^{(1)}(p) = -ig_{\mu\nu} \frac{4}{3} g_s^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[\gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\nu]}{k^2 [(p - k)^2 - m^2]}. \quad (2.17)$$

A integral (2.17) diverge para $k \rightarrow \infty$, e para lidar com essa divergência é preciso regularizar a integral. Há diversas formas de se fazer essa regularização, uma delas, é a introdução de um *cut-off* no limite da integral, de forma que a divergência fique explícita através desse termo adicionado. Outra forma de se regularizar a integral é a chamada regularização dimensional. Esta é a mais utilizada porque preserva a invariância de gauge e é a que utilizaremos neste trabalho.

Da segunda forma nós transformamos a integral em 4-dimensões para uma integral em D -dimensões, fazendo $D = 4 - 2\epsilon$, e tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$, a divergência fica explícita na variável ϵ . Ao mudarmos a dimensão para D , precisamos levar em conta que a álgebra de Dirac também mudará, assim como as contrações das matrizes γ e também o tensor métrico de Minkowsky. Para começar, os índices gregos agora correm de $0, 1, \dots, D - 1$. Alguns exemplos de contrações que mudarão são:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} &= 4 \rightarrow g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = D, \\ \gamma_\mu\gamma^\mu &= 4 \rightarrow \gamma_\mu\gamma^\mu = D, \\ \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu &= -2\gamma_\nu \rightarrow \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu = (2 - D)\gamma_\nu. \end{aligned} \quad (2.18)$$

A relação de anti-comutação das matrizes γ , $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\gamma^{\mu\nu}$, não muda, logo os traços (que são utilizados para o cálculo das integrais) também não mudarão, já que para calculá-los, utilizamos apenas essa relação.

Ao passarmos a Eq. (2.17) de quatro para D dimensões é preciso adicionar o termo $\mu^{2\epsilon}\mu^{-2\epsilon}$, onde μ é a chamada escala de renormalização. Todas as integrais divergentes aparecem com um fator g_s do acoplamento, e, assim como em quatro dimensões, queremos que o fator do acoplamento seja adimensional ao passarmos para D dimensões. O termo $\mu^{-2\epsilon}$ restaura essa propriedade. Logo, ficamos com

$$\Sigma^{(1)}(p) = -ig_{\mu\nu}\mu^{-2\epsilon}\frac{4}{3}g_s^2\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{[\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\nu]}{k^2[(p - k)^2 - m^2]}. \quad (2.19)$$

Para resolver essa equação, precisamos fazer uso da parametrização de Feynman, dada por

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{[ax + b(1-x)]^{\alpha+\beta}}. \quad (2.20)$$

Fazendo $a = k^2$, $b = [(p - k)^2 - m^2]$, $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, obtemos

$$\Sigma^{(1)}(p) = -ig_{\mu\nu}\mu^{-2\epsilon}\frac{4}{3}g_s^2\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{[\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\nu]}{\{k^2 x + (1-x)[(p - k)^2 - m^2]\}^2}. \quad (2.21)$$

Trocando a ordem das integrais de k e x , podemos realizar deslocamentos na variável de integração da forma: $k' = k - xp$, de forma que $d^D k' = d^D k$, ficamos com

$$\Sigma^{(1)}(p) = -ig_{\mu\nu}\mu^{-2\epsilon}\frac{4}{3}g_s^2\mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\mu[\not{p}(1-x) - \not{k}' + m]\gamma^\nu}{[p^2 - 2p \cdot (k' + xp) - m^2](1-x)^2}. \quad (2.22)$$

Fazendo uma rotação de Wick, que transforma a variável temporal em uma variável imaginária, e usando que $\int_0^1 dx x^{\lambda-1} (1-x)^{\sigma-1} = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\lambda+\sigma)}$, podemos reescrever a autoenergia do quark da seguinte forma

$$\Sigma^{(1)}(p) = \not{p}\Sigma_p^{(1)} + m\Sigma_m^{(1)}, \quad (2.23)$$

e obtemos $\Sigma_p^{(1)}(p)$ e $\Sigma_m^{(1)}(p)$, que são⁴⁷

$$\Sigma_p^{(1)}(p) = 3 \frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} \left\{ \frac{-1}{\epsilon} + \gamma_E - \ln 4\pi + \ln \left(\frac{-p^2}{\mu^2} \right) - 1 \right\}, \quad (2.24)$$

$$\Sigma_m^{(1)}(p) = 3 \frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} \left\{ \frac{4}{\epsilon} - 4\gamma_E + 4 \ln 4\pi - 4 \ln \left(\frac{-p^2}{\mu^2} \right) + 6 \right\}, \quad (2.25)$$

onde γ_E é a constante de Euler dada por 0.57721, e $\alpha_s(\mu) = \frac{g_s^2 \mu^{-2\epsilon}}{4\pi}$ também é chamado de acoplamento da teoria e depende da escala de renormalização, de forma que, para cada valor de μ , $\alpha_s(\mu)$ têm um valor diferente. Para voltarmos a dimensão quatro, basta fazermos $\epsilon \rightarrow 0$, o que faz com que as Eq. (2.24 e (2.25)) vão para o infinito.

Para lidar com esses infinitos, precisamos renormalizar a teoria, ou seja, precisamos redefinir os campos, os acoplamentos e as massas originais, de forma que o infinito fique contido nessa redefinição, e então, obteremos um resultado finito. Para o nosso exemplo, precisamos redefinir o campo e a massa do quark. Fazemos, então, o seguinte

$$q_i(x) = Z_{2F}^{1/2} q_i^R(x) \quad \text{e} \quad m = Z_m m^R, \quad (2.26)$$

onde, do lado esquerdo das equações, temos a chamadas quantidades nuas, que levam a divergências nas funções de Green, enquanto do lado direito, com o sobrescrito R temos as quantidades renormalizadas, que levam a funções de Green finitas. Ou seja, os infinitos ficam restritos as constantes de renormalização.

Uma propriedade importante das constantes de renormalização é que elas podem ser expandidas em teoria de perturbação, pois são construídas de forma que as divergências se cancelem ordem a ordem. Portanto, considerando a expansão perturbativa das constantes de renormalização e o inverso do propagador do quark, podemos escrever (em primeira ordem em α_s):

$$S^{-1}(p) = \not{p} + \not{p} Z_{2F}^{(1)} \frac{\alpha_s}{\pi} - m^R - m^R \left(Z_m^{(1)} + Z_{2F}^{(1)} \right) \frac{\alpha_s}{\pi} - \not{p} \Sigma_p^{(1)}(p) - m^R \Sigma_m^{(1)}(p). \quad (2.27)$$

Para as divergências sumirem, basta definirmos as constantes $Z_m^{(1)}$ e $Z_{2F}^{(1)}$ de forma que contenham os infinitos que estão em $\Sigma_p^{(1)}(p)$ e $\Sigma_m^{(1)}(p)$ das Eq. (2.24) e (2.25), respectivamente. Logo:

$$Z_{2F}^{(1)} = -\frac{1}{3\hat{\epsilon}} \quad \text{e} \quad Z_m^{(1)} = -\frac{1}{\hat{\epsilon}}, \quad (2.28)$$

onde $\frac{1}{\hat{\epsilon}} = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi$. O fato de as divergências estarem no termo $\hat{\epsilon}$ é uma escolha, e essa forma de renormalizar a teoria é chamada de esquema $\overline{\text{MS}}$ (*Modified-Minimal-Subtraction*),⁴⁸ que é o esquema de renormalização mais popular hoje em dia. Existem

outros esquemas de renormalização, como o esquema MS (*Minimal-Subtraction*), onde apenas o termo divergente, $1/\epsilon$, é absorvido nas constantes de renormalização, e também o esquema OS (*On-Shell*) onde é utilizado o comportamento assintótico das partículas da teoria para fixar o termo divergente que será subtraído, entre outros esquemas.

2.4 A evolução de α_s e a Variação de Esquema de Renormalização

O foco deste trabalho está na renormalização do acoplamento da teoria, α_s . Há diversos diagramas que contribuem para esse cálculo, como a correção ao propagador do quark que discutimos na seção anterior, as correções ao propagador do glúon, onde precisamos levar em consideração a auto-interação dos glúons e os campos fantasmas, e também as correções aos vértices.

Na realização dos cálculos teóricos da renormalização precisamos escolher um esquema de renormalização utilizado. Porém, um observável $R(q, a_s, m)$, onde q denota o momento externo, a_s é o acoplamento α_s dividido por π e m é a massa do quark, não deve depender da escala arbitrária de renormalização μ . Essa independência nos leva a seguinte relação:

$$\mu \frac{d}{d\mu} R(q, a_s, m) = \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{da_s}{d\mu} \frac{\partial}{\partial a_s} + \mu \frac{dm}{d\mu} \frac{\partial}{\partial m} \right\} R(q, a_s, m) = 0, \quad (2.29)$$

que é conhecida como a Equação do Grupo de Renormalização (RGE, do inglês *Renormalization Group Equation*) homogênea. E, dela, podem ser definidas as funções do Grupo de Renormalização:

$$\beta(a_s) \equiv -\mu \frac{da_s}{d\mu} = \beta_1 a_s^2 + \beta_2 a_s^3 + \dots \quad \text{função } \beta, \quad (2.30)$$

$$\gamma(a_s) \equiv \frac{-\mu}{m} \frac{dm}{d\mu} = \gamma_1 a_s + \gamma_2 a_s^2 + \dots \quad \text{dimensão anômala da massa.} \quad (2.31)$$

A função β governa a dependência do acoplamento da teoria com a energia*, dada pela escala μ de renormalização, enquanto a função γ , governa a dependência da massa do quark com a energia. Como quarks não podem ser observados livres, é impossível realizar uma medida direta de suas massas, portanto, tanto a massa, como o acoplamento são apenas parâmetros da teoria. Neste sentido, não são observáveis e suas medidas precisam ser realizadas indiretamente.

Atualmente, tanto a função β como a função γ são conhecidas, em teoria de perturbação, até quinta ordem.^{16, 49} Para a função β , utilizando $N_c = 3$, os coeficientes no

* Definimos a função β através dos coeficientes $\beta_1, \dots, \beta_5$, para estar de acordo com as principais referências deste trabalho.^{23, 27, 37} Como veremos no Capítulo 4, iremos trabalhar com o chamado “limite large- β_0 ” da QCD. Na nossa notação este limite seria, estritamente, “large- β_1 ”. Neste limite consideramos apenas o coeficiente β_1 da Eq. (2.30) e iremos zerar os outros coeficientes.

esquema $\overline{\text{MS}}$ são⁵⁰:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{11}{2} - \frac{1}{3}N_f, \quad \beta_2 = \frac{51}{4} - \frac{19}{12}N_f, \quad \beta_3 = \frac{2857}{64} - \frac{5033}{576}N_f + \frac{325}{1728}N_f^2, \\
\beta_4 &= \frac{149753}{768} + \frac{891}{32}\zeta_3 - \left(\frac{1078361}{20736} + \frac{1627}{864}\zeta_3\right)N_f + \left(\frac{50065}{20736} + \frac{809}{1296}\zeta_3\right)N_f^2 + \frac{1093}{93312}N_f^3, \\
\beta_5 &= \frac{8157455}{8192} + \frac{621885}{1024}\zeta_3 - \frac{88209}{1024}\zeta_4 - \frac{144045}{256}\zeta_5 \\
&\quad - \left(\frac{336460813}{995328} + \frac{1202791}{10368}\zeta_3 - \frac{33935}{3072}\zeta_4 - \frac{1358995}{13824}\zeta_5\right)N_f \\
&\quad + \left(\frac{25960913}{995328} + \frac{698531}{41472}\zeta_3 - \frac{5263}{2304}\zeta_4 - \frac{5965}{648}\zeta_5\right)N_f^2 \\
&\quad - \left(\frac{630559}{2985984} + \frac{24361}{62208}\zeta_3 - \frac{809}{6912}\zeta_4 - \frac{115}{1152}\zeta_5\right)N_f^3 + \left(\frac{1205}{1492992} - \frac{19}{5184}\zeta_3\right)N_f^4,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

onde apenas os termos β_1 e β_2 são invariantes de esquema de renormalização.³

A função β têm um papel essencial no entendimento da liberdade assintótica. Podemos analisar a dependência do acoplamento da teoria com a escala de renormalização através dessa função, e analisar seu comportamento para altas e baixas energias. Pela liberdade assintótica e o confinamento esperamos que para baixas energias, α_s tenha um valor alto, enquanto para altas energias, α_s tenha um valor baixo.

Integrando os dois lados a função β da Eq. (2.30), obtemos:

$$\int_{a_s(\mu_1)}^{a_s(\mu_2)} \frac{da_s}{\beta(a_s)} = - \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\mu} = \ln\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right). \tag{2.33}$$

A 1-loop, podemos calcular exatamente a integral acima, já que a função β é dada somente por $\beta(a_s) = \beta_1 a_s^2$. Substituindo na integral obtemos

$$\int_{a_s(\mu_1)}^{a_s(\mu_2)} \frac{da_s}{\beta_1 a_s^2} = \frac{1}{\beta_1} \left[\frac{1}{a_s(\mu_1)} - \frac{1}{a_s(\mu_2)} \right] = \ln\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right), \tag{2.34}$$

e isolando $a_s(\mu_2)$ ficamos com:

$$a_s(\mu_2) = \frac{a_s(\mu_1)}{[1 - a_s(\mu_1)\beta_1 \ln(\frac{\mu_1}{\mu_2})]}. \tag{2.35}$$

Como o coeficiente β_1 é positivo, então, para $\mu_2 > \mu_1$, a Eq. (2.35) decresce logaritmicamente, e se anula quando $\mu_2 \rightarrow \infty$, como sugerido pela propriedade da liberdade assintótica

Figura 9 – Evolução de α_s .

Fonte: Elaborada pelo autor.

da QCD. Além disso, se fizermos $\mu_2 \rightarrow 0$, o valor de $a_s(\mu_2)$ vai para infinito e a teoria de perturbação deixa de ser válida.

Quando levamos em conta os outros termos da função β , podemos fazer o cálculo numericamente, e o resultado da evolução de α_s considerando diferentes ordens da função β pode ser visto na Figura 9, onde a curva sólida preta indica o resultado da evolução usando os cinco termos conhecidos da função β na Eq. (2.33), enquanto a curva verde pontilhada, é o resultado exato mostrado na Eq. (2.35), usando apenas o termo β_1 , e usando como entrada o valor do acoplamento na massa do τ no esquema $\overline{\text{MS}}$, dado por $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160 \pm 0,0010$, que a média do PDG⁴⁵ evoluída a partir do valor do acoplamento na massa do bóson Z . Neste caso utilizamos $N_f = 3$, onde levamos em consideração apenas os quark leves (u , d e s). Nessa figura fica claro que, a altas energias, o acoplamento tem um valor baixo, e, nesse regime, é possível utilizarmos teoria de perturbação para estudarmos a QCD.

A Figura 10 mostra as diferentes determinações, feitas em diferentes energias do acoplamento da QCD. Nesta figura vemos a coerência entre a predição teórica da função β e os valores de α_s em diferentes escalas. Na legenda os termos NLO, NNLO e N³LO indicam a ordem de teoria de perturbação usado para a extração do acoplamento.

A evolução de a_s pode ser caracterizada a partir de qualquer valor inicial $a_s(\mu_1)$, ou do ponto Λ onde o acoplamento diverge, que é também chamado de pólo de Landau. Para o resultado exato da Eq. (2.35), onde usamos apenas o termo β_1 , esse é o ponto onde

Figura 10 – Determinação de α_s reunidas pelo Particle Data Group.

Fonte: PATRIGNANI et al.⁴⁵

o denominador zera, dado por

$$1 - a_s(\mu_1)\beta_1 \ln \frac{\mu_1}{\Lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \mu_1 e^{\frac{-1}{\beta_1 a_s(\mu_1)}}, \quad (2.36)$$

e podemos reescrever a Eq. (2.35) como função de Λ :

$$a_s(\mu) = \frac{1}{\beta_1 \log(\frac{\mu}{\Lambda})}. \quad (2.37)$$

A constante Λ não depende da escala, pois

$$\frac{d\Lambda}{d\mu_1} = e^{\frac{-1}{\beta_1 a_s(\mu_1)}} \left[1 + \mu_1 \frac{da_s(\mu_1)}{d\mu_1} \frac{1}{\beta_1 a_s^2(\mu_1)} \right] = 0, \quad (2.38)$$

onde usamos a definição da função β dada pela Eq. (2.30). Portanto, Λ é uma quantidade invariante pelo grupo de renormalização e estabelece uma escala de energia para a QCD. Para o esquema de renormalização $\overline{\text{MS}}$, $\Lambda \approx 200\text{MeV}$. É através dessa escala que pode-se definir quando o acoplamento da teoria se torna demasiado grande para podermos aplicar teoria de perturbação. Quando consideramos os cinco termos da função β , essa quantidade é dada por

$$\Lambda \equiv \mu_1 e^{\frac{-1}{\beta_1 a_s(\mu_1)}} [a_s(\mu_1)]^{\frac{\beta_2}{\beta_1^2}} \exp \left(\int_0^{a_s(\mu_1)} \frac{da}{\tilde{\beta}(a)} \right), \quad (2.39)$$

onde

$$\frac{1}{\tilde{\beta}(a)} \equiv \frac{1}{\beta(a)} - \frac{1}{\beta_1 a^2} + \frac{\beta_2}{\beta_1^2 a}. \quad (2.40)$$

Como o acoplamento, em geral, depende do que esquema de renormalização utilizado, podemos escrever uma transformação perturbativa de esquema que leva a variável a_s para uma nova variável a'_s , que tem a seguinte forma geral

$$a'_s \equiv a_s + c_1 a_s^2 + c_2 a_s^3 + c_3 a_s^4 + \dots \quad (2.41)$$

Com essa transformação, o parâmetro Λ vai para um parâmetro Λ' , que depende apenas do termo c_1 . A relação precisa é dada⁵¹

$$\Lambda' = \Lambda e^{c_1/\beta_1}. \quad (2.42)$$

Neste trabalho, vamos considerar um tipo particular de mudança de esquema, que são mudanças do tipo MS. Como a relação entre Λ e Λ' envolve apenas uma constante, podemos reescrever a transformação de a_s para a'_s como função desse único parâmetro. O novo acoplamento será parametrizado de maneira contínua através da variação C , e esta relaciona as escalas Λ e Λ' através da variável $c_1 = -\frac{9C}{4}$. A relação entre os acoplamentos é dada por³⁷

$$\begin{aligned} \frac{1}{a'_s} + \frac{\beta_2}{\beta_1} \ln a'_s &\equiv \beta_1 \left(\ln \frac{\mu_1}{\Lambda} + \frac{C}{2} \right) \\ &= \frac{1}{a_s} + \frac{\beta_1}{2} C + \frac{\beta_2}{\beta_1} \ln a_s - \beta_1 \int_0^{a_s} \frac{da}{\hat{\beta}(a)}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Esta relação ficará mais clara no Capítulo 5, onde estudaremos o limite large- β_0 da QCD e apenas o termo β_1 da função β é considerado. A introdução do termo logarítmico do lado esquerdo da Eq. (2.43) é feita para lidar com o termo logarítmico do lado direito. Esta equação pode ser resolvida iterativamente, no viés de teoria de perturbação, de forma que podemos obter uma relação direta entre o novo acoplamento (a'_s) e o antigo (a_s). Usando $N_f = 3$ e com os coeficientes $\beta_1, \dots, \beta_5$ da Eq. (2.32)

$$\begin{aligned} a'_s(a_s) &= a_s - \frac{9}{4} C a_s^2 - \left(\frac{3397}{2592} + 4C - \frac{81}{16} \right) a_s^3 - \left(\frac{741103}{186624} + \frac{233}{192} C - \frac{45}{2} C^2 + \frac{729}{64} C^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{445}{144} \zeta_3 \right) a_s^4 - \left(\frac{727240925}{80621568} - \frac{869039}{41472} C - \frac{26673}{512} C^2 + \frac{351}{4} C^3 - \frac{6561}{256} C^4 - \frac{445}{32} \zeta_3 C \right. \\ &\quad \left. + \frac{10375693}{373248} \zeta_3 - \frac{1335}{256} \zeta_4 - \frac{534385}{20736} \zeta_5 \right) a_s^5 + \mathcal{O}(a_s^6), \end{aligned} \quad (2.44)$$

Figura 11 – Acoplamento $\hat{a}(M_\tau) \equiv a'_s(M_\tau)$ como função de C .

Fonte: BOITO; JAMIN; MIRAVITLLAS.³⁷

e, invertendo a equação acima, podemos obter a_s em função de a'_s :

$$\begin{aligned}
 a_s(a'_s) = & a'_s + \frac{9}{4}C a_s'^2 + \left(\frac{3397}{2592} + 4C + \frac{81}{16} \right) a_s'^3 + \left(\frac{741103}{186624} + \frac{18383}{1152}C + \frac{45}{2}C^2 + \frac{729}{64}C^3 \right. \\
 & \left. + \frac{445}{144}\zeta_3 \right) a_s'^4 + \left(\frac{1142666849}{80621568} + \frac{1329359}{20736}C + \frac{28623}{256}C^2 + \frac{351}{4}C^3 + \frac{6561}{256}C^4 \right. \\
 & \left. + \frac{445}{16}\zeta_3 C + \frac{10375693}{373248}\zeta_3 - \frac{1335}{256}\zeta_4 - \frac{534385}{20736}\zeta_5 \right) a_s'^5 + \mathcal{O}(a_s'^6),
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

onde $\zeta_i \equiv \zeta(i)$ representa a função ζ de Riemman.

A Figura 11 mostra como a'_s varia em função de C .³⁷ Novamente, foi utilizado como valor de entrada $\alpha_s(M_\tau) = 0,316(10)$, que é a média do PDG.⁴⁵ A banda amarela na figura corresponde a variação de α_s conforme a sua incerteza.

Pela figura, temos que uma alteração do valor de C , ou seja, uma mudança de esquema de renormalização, pode nos levar a séries mais ou menos perturbativas, ou seja, com valores de α_s menores ou maiores. No Capítulo 5 veremos como a mudança no esquema de renormalização pode melhorar resultados práticos e como, ao utilizarmos Aproximantes de Padé, esses resultados melhoram ou pioram dependendo do esquema utilizado.

3 QCD NOS DECAIMENTO DO TAU

O tau (τ) faz parte da terceira geração de léptons e foi descoberto⁵² em 1975 no SPEAR, um experimento liderado por M. L. Perl, que estudava a aniquilação (e^+e^-). Trata-se portanto de um férmion de spin-1/2 com carga elétrica negativa, que têm seu neutrino associado (ν_τ), assim como os outros léptons. Desde sua descoberta o τ vêm sendo estudado tanto teoricamente como experimentalmente e, hoje em dia, suas propriedades^{10,14} são bem conhecidas, sendo testadas, sistematicamente, nos experimentos ALEPH e OPAL do LEP no CERN, e em outros experimentos, como Belle e BaBar. (Perl recebeu o prêmio Nobel de física em 1995 por esta descoberta.)

Por fazer parte da terceira geração de léptons, é o mais massivo dentre eles, com massa de $1776,86 \pm 0,12 \text{ MeV}$ ⁴⁵ (cerca de 3500 vezes mais pesado que o elétron, lépton da primeira geração). Associada ao τ , existe sua antipartícula, o antitau ($\bar{\tau}$). Como se trata de um lépton, o τ é uma partícula elementar, ou seja, não é formado por outras partículas, não possui uma estrutura interna, como dito anteriormente.

Por ter massa tão grande é o único lépton capaz de decair em hádrons. Esses decaimentos, que são o objeto central desta dissertação, são conhecidos como semileptônicos (pois o estado final contém ν_τ) ou simplesmente hadrônicos, e alguns exemplos são

$$\tau^- \rightarrow \begin{cases} \pi^- + \nu_\tau \\ \pi^- + \pi^0 + \nu_\tau \\ \vdots \end{cases} .$$

O tau também pode decair nos léptons da primeira e segunda geração conhecidos como decaimentos puramente leptônicos

$$\tau^- \rightarrow \begin{cases} \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \\ e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau \end{cases} .$$

Os decaimentos do τ ocorrem através do bóson $W^\pm$ da interação fraca, como vemos na Figura 2 na página 27. Esses decaimentos são um bom laboratório para estudos da universalidade dos acoplamentos dos léptons com o bóson W , e também, como possíveis estados finais dos decaimentos são formados por hádrons, é um bom laboratório para estudos de QCD. Além disso, ao estudarmos a produção leptônica do τ na aniquilação de e^+e^- , em altas energias, quando a contribuição do bóson Z se torna importante, podemos estudar parâmetros eletrofracos dos léptons. Portanto, é possível fazer uma grande variedade de estudos de física de partículas, com grande precisão, através do τ .

Os tipos de decaimentos podem ser agrupados em três grupos.⁵³ O primeiro grupo, chamado decaimentos leptônicos exclusivos têm como estado final os léptons, são

nesses decaimentos que podemos estudar a universalidade dos acoplamentos dos léptons, por exemplo. O segundo grupo, chamado decaimentos semileptônicos exclusivos tem no estado final mésons e estuda apenas uma componente dos possíveis estados finais. E o terceiro grupo, que será o foco desse trabalho, chamado decaimentos semileptônicos inclusivos, ou simplesmente hadrônicos, têm como estados final também os mésons, porém, todos os possíveis estados finais são incluídos nos cálculos. Devido a dualidade quark-hádron podemos realizar cálculos inclusivos dos decaimentos hadrônicos, e estes devem ser compatíveis com os resultados que observamos em experimentos.

A escala da massa do τ é alta o suficiente para que a QCD perturbativa ainda possa ser utilizada, já que nessa escala, o acoplamento $\alpha_s(m_\tau^2) \approx 0.30$. Porém, efeitos não perturbativos não são suficientemente suprimidos a ponto de poderem ser ignorados. Quando juntamos a descrição teórica dos decaimentos $\tau \rightarrow (\text{hádrons}) + \nu_\tau$ com os dados experimentais, é possível extrair informações sobre vários aspectos da QCD, em especial, o acoplamento forte da teoria, α_s .^{10–12,54}

3.1 Decaimentos hadrônicos

Uma quantidade experimental importante nos estudos de QCD com o lépton τ é a razão entre as larguras dos decaimentos em hádrons normalizada pela largura dos decaimentos do τ em elétrons⁵⁵

$$R_\tau = \frac{\Gamma(\tau \rightarrow (\text{hádrons}) + \nu_\tau)}{\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau e \nu_e)} = 3,6280 \pm 0,0094. \quad (3.1)$$

Como o τ é mais leve que qualquer hádron formado por quarks charm, as amplitudes dos decaimentos semileptônicos envolvem as correntes fracas dos quarks u , d e s

$$J^\mu = V_{ud} \bar{d} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) u + V_{us} \bar{s} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) u, \quad (3.2)$$

onde, $V_{ud} = 0,97434^{+0,00011}_{-0,00012}$ e $V_{us} = 0,22506 \pm 0,00050$ são os elementos relevantes da matriz CKM.^{56,57} Ignorando todas as massas dos estados finais e efeitos associados a hadronização dos quarks, chegamos a

$$R_\tau \approx N_c [|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2] \approx N_c = 3, \quad (3.3)$$

onde $|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 = 0,9999 \approx 1$, e não influencia no cálculo de R_τ . Portanto, partindo de uma abordagem puramente partônica, temos que $R_\tau = 3$, que contém um erro de aproximadamente 20% com relação ao valor experimental dado pela Eq. (3.1).

A análise teórica rigorosa de R_τ pode ser feita calculando as diferentes contribuições associadas as diferentes correntes de quarks. Podemos dividir essas contribuições vindas do quark s , e vindas dos quarks u e d , além disso, a última contribuição pode ser dividida em vetorial (V) e vetor axial (A). Mas, experimentalmente, os decaimentos do τ em partículas

formadas pelo quark s não podem ser resolvidos em contribuições vetorial e vetor axial, portanto, vamos dividir nossas predições para R_τ em três categorias

$$R_\tau = R_{\tau,V} + R_{\tau,A} + R_{\tau,S}, \quad (3.4)$$

onde $R_{\tau,V}$ é a contribuição vetorial, $R_{\tau,A}$ é a contribuição vetor axial (ambas incluem apenas os quarks u e d) e $R_{\tau,S}$ é a contribuição do quark s . Experimentalmente, $R_{\tau,V}$ e $R_{\tau,A}$ são identificados a partir do número par ou ímpar de píons no estado final (paridade G^{58}), enquanto $R_{\tau,S}$ é identificado através do número ímpar de káons no estado final dos decaimentos. Novamente, utilizando uma abordagem partônica, a predição para essas três razões são $R_{\tau,V} = R_{\tau,A} = (N_c/2)|V_{ud}|^2 = 1,4240$ e $R_{\tau,S} = N_c|V_{us}|^2 = 0,1519$, e os resultados experimentais obtidos são^{13,59}

$$R_{\tau,V} = 1,782 \pm 0,009 \quad , \quad R_{\tau,A} = 1,694 \pm 0,010 \quad \text{e} \quad R_{\tau,S} = 0,1615 \pm 0,0040. \quad (3.5)$$

Uma forma elegante de se realizar o cálculo da contribuição perturbativa para R_τ , é aplicarmos o teorema óptico aos decaimentos do τ . O teorema óptico diz que o cálculo da amplitude de um diagrama aberto é proporcional a parte imaginária do cálculo da amplitude de um diagrama fechado.⁶⁰ Para o caso do τ ver Figura 12. Logo, as quantidades centrais para o cálculo de R_τ são os correlatores de dois pontos vetorial, $V_{ij}^\mu = \bar{\psi}_j \gamma^\mu \psi_i$, e vetor axial, $A_{ij}^\mu = \bar{\psi}_j \gamma^\mu \gamma_5 \psi_i$:

$$\Pi_{ij,\mathcal{J}}^{\mu\nu}(q) \equiv i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T(\mathcal{J}_{ij}^\mu(x) \mathcal{J}_{ij}^\nu(0)^\dagger) | 0 \rangle, \quad (3.6)$$

onde, $i, j = u, d, s$, que são os quarks leves, e $\mathcal{J} = V, A$. A Eq. (3.6) tem a seguinte decomposição de Lorentz

$$\Pi_{ij,\mathcal{J}}^{\mu\nu}(q) = (-g^{\mu\nu} q^2 + q^\mu q^\nu) \Pi_{ij,\mathcal{J}}^{(1)}(q^2) + q^\mu q^\nu \Pi_{ij,\mathcal{J}}^{(0)}(q^2), \quad (3.7)$$

onde o sobrescrito ($J = 0, 1$) denota o momento angular no referencial de repouso dos hádrons.

A parte imaginária dos correlatores $\Pi_{ij,\mathcal{J}}^{(J)}(q^2)$ é proporcional a função densidade espectral para os hádrons, que é dada por

$$\rho(s) \equiv \frac{1}{\pi} \text{Im} \Pi(s), \quad (3.8)$$

que é um observável. A largura de decaimento do τ em hádrons pode ser escrita como uma integral da função espectral na massa invariante s do estado final

$$R_\tau = 12\pi \int_0^{m_\tau^2} \frac{ds}{m_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \left[\left(1 + 2\frac{s}{m_\tau^2}\right) \text{Im} \Pi^{(1)}(s) + \text{Im} \Pi^{(0)}(s) \right], \quad (3.9)$$

e os correlatores são dados por

$$\Pi^{(J)}(s) \equiv |V_{ud}|^2 \left(\Pi_{ud,V}^{(J)}(s) + \Pi_{ud,A}^{(J)}(s) \right) + |V_{us}|^2 \left(\Pi_{us,V}^{(J)}(s) + \Pi_{us,A}^{(J)}(s) \right). \quad (3.10)$$

Figura 12 – Teorema óptico aplicado aos decaimentos do τ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 13 – Dados do ALEPH para a função espectral do τ usando $\alpha_s(M_Z^2) = 0.120$.

Fonte: [DAVIER et al.¹³](#)

Em 2013, a colaboração ALEPH¹³ publicou a medida mais recente para a função espectral. Essa medida é uma reanálise dos dados do LEP e pode ser vista na Figura 13. Na figura, do lado esquerdo temos a função espectral vetorial, e do lado direito a função espectral vetor axial. As curvas preenchidas representam as diferentes contribuições dos canais de decaimentos exclusivos do τ .

Expandindo as Eq. (3.9) e (3.10) pode-se chegar na decomposição feita na Eq. (3.4). O problema é que o correlator só pode ser calculado em altas energias, onde teoria de perturbação pode ser aplicada. Uma das formas de lidar com esse problema é utilizando as Regras de Soma à Energia Finita (FESRs). O método consiste em transformar a integral da Eq. (3.9) em uma integral de linha no contorno complexo da Figura 14 utilizando propriedades de analiticidade do correlator de dois pontos. Portanto, o cálculo teórico de

Figura 14 – Contorno de integração.

Fonte: [PICH](#).¹⁴

R_τ fica

$$R_\tau = 6\pi i \oint_{|s|=m_\tau^2} \frac{ds}{m_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \left[\left(1 + 2\frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \Pi^{(0+1)}(s) - 2\frac{s}{m_\tau^2} \Pi^{(0)}(s) \right], \quad (3.11)$$

onde $\Pi^{(0+1)}(s)$ é a soma das contribuições de $\Pi^{(0)}(s)$ e $\Pi^{(1)}(s)$, definida como $\Pi^{(0+1)}(s) = \Pi^{(0)}(s) + \Pi^{(1)}(s)$. A grande vantagem do uso das FESRs é que o cálculo do correlator é feito apenas para $|s| = m_\tau^2$. E a desvantagem é que, em alguns casos, pode ser necessário avaliar o correlator próximo ao eixo real, onde a teoria de perturbação não é mais válida.

Os correladores de dois pontos $\Pi^{(0+1)}(s)$ e $\Pi^{(0)}(s)$ não são físicos, já que dependem da escala e do esquema de renormalização, logo eles não obedecem a RGE homogênea. Usando integração parcial, podemos escrever R_τ em termos das funções correlações físicas $D^{(1+0)}(s)$ e $D^{(0)}(s)$:

$$D^{(1+0)}(s) \equiv -s \frac{d}{ds} \left[\Pi^{(1+0)}(s) \right], \quad D^{(0)}(s) \equiv \frac{s}{m_\tau^2} \frac{d}{ds} \left[s \Pi^{(0)}(s) \right], \quad (3.12)$$

onde o primeiro termo é a conhecida função de Adler.⁶¹

Nesta dissertação iremos trabalhar com o limite quiral da QCD. Neste limite, as massas dos quarks são nulas, logo, ele é aproximadamente válido apenas quando levamos em consideração os quarks leves. Também neste limite, as contribuições vetorial e vetor axial coincidem e temos que $D^{(0)}(s) = 0$.

Utilizando a variável de integração adimensional $x \equiv s/m_\tau^2$, a Eq. (3.9) se torna

em termos da função de Adler

$$R_\tau = -3i\pi \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 (1+x) D^{(1+0)}(m_\tau^2 x). \quad (3.13)$$

Como dito anteriormente, os termos não perturbativos não podem ser negligenciados e são incluídos através da OPE (*Operator Product Expansion*) e das contribuições das violações da dualidade quark-hádron (DVs).^{18–22} Portanto, adicionando esses termos na Eq. (3.13) podemos escrever R_τ da seguinte maneira^{23,27}

$$R_\tau = \frac{N_c}{2} S_{\text{EW}} |V_{ud}|^2 \left[1 + \delta^{(0)} + \delta'_{\text{EW}} + \sum_{D \geq 2} \delta_{ud,V/A}^{(D)} + \delta_{ud,V/A}^{\text{DVs}} \right], \quad (3.14)$$

onde $S_{\text{EW}} = 1,0198 \pm 0,0006$ e $\delta'_{\text{EW}} = 0,0010 \pm 0,0010$ são correções eletrofracas,^{62,63} $\delta^{(0)}$ é a correção perturbativa da QCD, que é o interesse central do projeto, $\delta_{ud,V/A}^{(D)}$ denota as correções da massa do quark e de operadores com dimensões D maiores, $\delta_{ud,V/A}^{\text{DVs}}$ denota as violações de dualidade quark-hádron e V_{ud} é o elemento da matriz CKM, como dito anteriormente.

Para o cálculo de $\delta^{(0)}$ precisamos da expansão perturbativa do correlator $\Pi_V^{(1+0)}$ dada por

$$\Pi_V^{(1+0)}(s) = -\frac{N_c}{12\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_\mu^n \sum_{k=0}^{n+1} c_{n,k} L^k, \quad L \equiv \ln \frac{-s}{\mu^2}, \quad (3.15)$$

com $a_\mu \equiv a(\mu^2) \equiv \alpha_s(\mu)/\pi$ e μ é a escala de renormalização. Então, a partir da eq. (3.15) podemos obter a expansão perturbativa para a função de Adler

$$D_V^{(1+0)}(s) = \frac{N_c}{12\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_\mu^n \sum_{k=1}^{n+1} k c_{n,k} L^{k-1}. \quad (3.16)$$

A função de Adler é uma quantidade física, ou seja, não depende da escala de renormalização nem do esquema de renormalização. Portanto, ela deve obedecer a RGE homogênea

$$-\mu \frac{d}{d\mu} D_V^{(1+0)}(s) = \left[2 \frac{\partial}{\partial L} + \beta(a_\mu) \frac{\partial}{\partial a_\mu} \right] D_V^{(1+0)}(s) = 0. \quad (3.17)$$

Ao resolver a eq. (3.17) é possível escrever todos os coeficientes $c_{n,k}$, para $k \neq 1$, em função de $c_{n,1}$, e dos coeficientes da função β . Portanto, apenas os coeficientes $c_{n,1}$ são independentes, enquanto os coeficientes $c_{n,0}$ não aparecem em quantidades mensuráveis, e $c_{n,n+1} = 0$ para $n \geq 1$. Alguns exemplos são

$$\begin{aligned} c_{2,2} &= -\frac{\beta_1}{4} c_{1,1}, & c_{3,3} &= \frac{\beta_1^2}{12} c_{1,1}, & c_{3,2} &= -\frac{1}{4} (\beta_2 c_{1,1} + 2\beta_1 c_{2,1}), \\ c_{4,4} &= -\frac{\beta_1^3}{32} c_{1,1}, & c_{4,3} &= \frac{\beta_1}{24} (5\beta_2 c_{1,1} + 6\beta_1 c_{2,1}), \\ c_{4,2} &= -\frac{1}{4} (\beta_3 c_{1,1} + 2\beta_2 c_{2,1} + 3\beta_1 c_{3,1}), & \cdots &, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde os coeficientes $c_{n,1}$ foram calculados analiticamente até quarta ordem, e, utilizando $N_c = 3$, $N_f = 3$ e o esquema de renormalização $\overline{\text{MS}}$, são dados por^{25,64}

$$\begin{aligned} c_{0,1} = c_{1,1} &= 1, & c_{2,1} &= \frac{259}{24} - 9\zeta_3 = 1,640, \\ c_{3,1} &= \frac{58057}{288} - \frac{4433}{12}\zeta_3 + \frac{75}{2}\zeta_5 = 6,371, \\ c_{4,1} &= \frac{78631453}{20736} - \frac{1704247}{432}\zeta_3 + \frac{4185}{8}\zeta_3^2 + \frac{34165}{96}\zeta_5 - \frac{1995}{16}\zeta_7 = 49,076. \end{aligned} \quad (3.19)$$

A dificuldade do cálculo exato desses coeficientes fica clara pelo intervalo de tempo entre os cálculos dos coeficientes de terceira⁶⁴ e quarta²⁵ ordem. O primeiro foi calculado em 1991, enquanto o segundo, em 2008, 17 anos depois. Devido a auto-interação dos glúons, a quantidade de loops cresce rapidamente, o que torna os cálculos mais complicados e demorados. Não é claro se será possível calcular o termo de quinta ordem num futuro próximo, e por isso, é importante desenvolver métodos para previsão desse termo e das ordens superiores para o entendimento da série em ordens mais altas, como fazemos neste trabalho.

Como a função de Adler obedece a RGE homogênea, podemos escolher qualquer valor de μ^2 . Se escolhermos $\mu^2 = -s \equiv Q^2$, os logaritmos contidos na Eq. (3.16) são somados, de forma que podemos escrever a função de Adler de uma maneira simples

$$D_V^{(1+0)}(Q^2) = \frac{N_c}{12\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,1} a_Q^n, \quad (3.20)$$

onde a_Q é o acoplamento da teoria na escala de energia Q , $\alpha_s(Q)$, dividido por π .

Nesta dissertação iremos trabalhar com a função de Adler reduzida, denotada por $\widehat{D}(Q^2)$ e definida como

$$D_V^{(1+0)}(Q^2) = \frac{N_c}{12\pi^2} (1 + \widehat{D}(Q^2)) = \frac{N_c}{12\pi^2} \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} r_n \alpha_s^{n+1}\right), \quad (3.21)$$

onde $r_n = c_{n+1,1}/\pi^{n+1}$. Com essa definição, a expansão perturbativa da função de Adler reduzida, no esquema $\overline{\text{MS}}$ e usando $N_f = 3$, é

$$\widehat{D}(Q^2) = a_Q + 1,640a_Q^2 + 6,371a_Q^3 + 49,076a_Q^4 + c_{5,1}a_Q^5 + \dots \quad (3.22)$$

É importante ressaltar que a série perturbativa é uma série divergente e se supõe que deve ser uma expansão assintótica^{65,66} ao verdadeiro valor da função que está sendo expandida. Um modo muito conveniente de trabalhar com essas séries é o da transformada de Borel, onde o termo que diverge fatorialmente é suprimido. Esse assunto será discutido em detalhe no Capítulo 4.

3.2 FOPT e CIPT

Para estudarmos a correção perturbativa da QCD a R_τ , ou seja, o termo $\delta^{(0)}$ da Eq. (3.14), precisamos integrar a expansão perturbativa da função de Adler ao longo do

círculo complexo $|s| = m_\tau^2$. Explicitamente, encontramos⁶⁷

$$\delta^{(0)} = -2\pi i \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 (1+x) D_V^{(1+0)}(m_\tau^2 x), \quad (3.23)$$

onde já usamos a variável de integração adimensional x definida anteriormente. Para realizarmos a integral da Eq. (3.23), precisamos adotar um procedimento para definir a escala μ de renormalização. Isso é possível pois, como a função de Adler é invariante pelo grupo de renormalização, a função $\delta^{(0)}$ também o é, então, ambas não dependem em princípio da escala μ .

Como veremos, adotar uma prescrição para o uso do grupo de renormalização gera a principal fonte de incerteza teórica na determinação de α_s através dos decaimentos do τ . Como conhecemos a série em α_s até quarta ordem, a forma de definir a escala de renormalização nos leva a valores bem distintos, gerando uma incerteza de cerca de 10% no valor de α_s , e seria interessante poder reduzi-la.

Substituindo a Eq. (3.16) na Eq. (3.23), obtemos

$$\delta^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n k c_{n,k} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 (1+x) a_\mu^n \ln^{k-1} \left(\frac{-m_\tau^2 x}{\mu^2} \right), \quad (3.24)$$

onde as contribuições do correlator axial vetor já foram levadas em consideração.

A primeira maneira de se realizar o cálculo da integral (3.24) é escolhendo $\mu^2 = m_\tau^2$. Essa prescrição é chamada de *Fixed-Order Perturbation Theory* (FOPT). Isso nos leva a

$$\delta_{\text{FO}}^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} a(m_\tau^2)^n \sum_{k=1}^n k c_{n,k} J_{k-1}^{\text{FO}}, \quad \text{com} \quad J_n^{\text{FO}} \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 (1+x) \ln^n(-x). \quad (3.25)$$

Para resolver a integral J_n^{FO} , fazemos $x = e^{i\gamma}$, e a integral fica

$$J_n^{\text{FO}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\gamma (1 - e^{i\gamma})^3 (1 + e^{i\gamma}) \ln^n(-e^{i\gamma}), \quad (3.26)$$

que pode ser resolvida analiticamente. Os primeiros quatro valores dessa integral, necessários para obtermos $\delta_{\text{FO}}^{(0)}$ até quarta ordem são

$$J_0 = 1, \quad J_1 = -\frac{19}{12}, \quad J_2 = \frac{265}{72} - \frac{1}{3}\pi^2, \quad J_3 = -\frac{3355}{288} + \frac{19}{12}\pi^2. \quad (3.27)$$

Usando os valores das Eq. (2.32), (3.18) e (3.19), podemos escrever a expansão perturbativa até quarta ordem para $\delta_{\text{FO}}^{(0)}$ no esquema $\overline{\text{MS}}$ e usando $N_f = 3$

$$\delta_{\text{FO}}^{(0)} = 1 + a_\tau + 5,202a_\tau^2 + 26,37a_\tau^3 + 127,1a_\tau^4 + (307,8 + c_{5,1})a_\tau^5 + \dots, \quad (3.28)$$

onde definimos $a_\tau \equiv a(m_\tau^2)$.

Outra prescrição muito utilizada é a chamada *Contour-Improved Perturbation Theory* (CIPT).^{24,68} Essa prescrição soma os logaritmos da Eq. (3.24) com a escolha $\mu^2 = -m_\tau^2 x$. Notemos que nessa segunda maneira, μ varia no contorno de integração. Com essa escolha de μ , ficamos com

$$\delta_{\text{CI}}^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,1} J_n^{\text{CI}}(m_\tau^2), \quad \text{com} \quad J_n^{\text{CI}} \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 (1+x) a^n(-m_\tau^2 x). \quad (3.29)$$

Ao contrário de FOPT, onde o acoplamento é calculado em uma energia fixa e, portanto, sai da integral, em CIPT, precisamos calcular a evolução de α_s com a energia, dada pela Eq. (2.33), portanto, esse método ressona a evolução do acoplamento ao longo do contorno de integração e, conseqüentemente, apenas o coeficiente $c_{n,1}$ entra na expressão para cada n . Notemos também que usando essa prescrição não é possível obtermos uma expressão analítica para a série perturbativa no acoplamento da teoria, e a integral J_n^{CI} pode ser calculada apenas numericamente.

Substituindo os valores dos coeficientes da Eq. (3.19) e $\alpha_s = 0,316$, podemos obter o valor numérico das correções da QCD para o decaimento do τ utilizando as prescrições FOPT e CIPT:

$$\begin{aligned} \alpha_s^1 & \quad \alpha_s^2 & \quad \alpha_s^3 & \quad \alpha_s^4 \\ \delta_{\text{FO}}^{(0)} &= 0,1006 + 0,0526 + 0,0268 + 0,0130 = 0,1931, \\ \delta_{\text{CI}}^{(0)} &= 0,1361 + 0,0258 + 0,0102 + 0,0071 = 0,1791. \end{aligned} \quad (3.30)$$

A série CIPT se estabiliza mais rapidamente do que a série FOPT, mas as duas séries parecem não convergir para um mesmo valor conforme adicionamos termos sucessivos. Somando as séries até quarta ordem, a diferença entre as duas somas é de $\delta_{\text{FO}}^{(0)} - \delta_{\text{CI}}^{(0)} = 0,014$, que é da ordem do último termo adicionado na série FO e cerca de duas vezes maior que último termo adicionado na série CI. Sabemos que as séries em Teoria de Campos são, na melhor das hipóteses, assintóticas, sendo assim, para qualquer prescrição que usarmos $\delta^{(0)}$ irá divergir. Entendermos qual prescrição fornece previsões mais compatíveis com resultados experimentais é interessante para podermos obter uma maior precisão nas medidas dos parâmetros da QCD.

Essa diferença entre os valores obtidos utilizando as duas prescrições é a maior fonte de incerteza na extração de α_s a partir dos decaimentos do τ . Entender o comportamento da função $\delta^{(0)}$ e da função de Adler em ordens altas, é crucial para poder reduzir a incerteza desta extração do acoplamento forte. Utilizando Aproximantes de Padé, que são aproximantes racionais, e variação de esquemas no limite large- β_0 da QCD, iremos construir um método que melhora as previsões das principais características da série da função de Adler. Depois, utilizaremos esse método na QCD completa, para extrairmos informações sobre a série perturbativa em ordens mais altas e assim, possivelmente, contribuirmos para a redução da incerteza de α_s .

4 SÉRIES ASSINTÓTICAS E APROXIMANTES DE PADÉ

4.1 Séries Assintóticas e Transformada de Borel

A série em α_s é uma série perturbativa, e, em Teoria Quântica de Campos realistas, essas séries são, na melhor das hipóteses, assintóticas. Uma série assintótica é uma expansão divergente de uma função que têm a propriedade de prover uma boa aproximação a esta função se truncada em um número finito de termos. Antes de 1952, acreditava-se que a divergência das séries em QFT eram porque essas séries representavam a amplitude de espalhamento de uma partícula livre em circunstâncias onde a partícula têm a possibilidade de ser capturada em um estado ligado permanente. Isto era válido em casos relativísticos e não-relativísticos, mas não se esperava que traria alguma limitação no uso do método da renormalização. Porém, na QED viu-se que não era válido esse argumento então Dyson, em 1952, publicou seu argumento para divergência dessa série.⁶⁵ O argumento diz que a série em α_{em} (acoplamento da QED) não pode ser convergente devido ao fato de uma continuação analítica para α_{em} negativo produzir uma teoria com vácuo instável, ou seja, a série têm raio zero de convergência. Esse argumento foi primeiramente feito para a QED, mas a conclusão também é válida para QCD.

A característica principal de uma série assintótica é que o valor dos coeficientes diminuem até uma certa ordem da série, tendo um comportamento assintótico, e então crescem sem limites. Seja $f(\epsilon)$ uma função qualquer, e ϵ suficientemente pequeno, então, uma série de potências é assintótica a $f(\epsilon)$ se, para um N fixo^{66,69,70}

$$\left| f(\epsilon) - \sum_{j=0}^N a_j \epsilon^j \right| \sim \mathcal{O}(\epsilon^{N+1}). \quad (4.1)$$

Se mantivermos ϵ fixo e fizermos $N \rightarrow \infty$, a série terá um comportamento assintótico ao valor verdadeiro e depois irá divergir. Dada a série assintótica a $f(\epsilon)$, uma informação importante é sabermos quão bem essa série se aproxima do valor exato da função, portanto, queremos saber em que ordem devemos truncar a série.

Para um dado ϵ , o erro mínimo em uma série assintótica é usualmente alcançado ao truncarmos a série em seu menor termo, descartando todos os termos de ordem superior. Ao realizarmos esse truncamento, o erro, em geral, é da $\mathcal{O}(e^{-1/\epsilon})$, que é um termo essencialmente não perturbativo. Esse truncamento é chamado de truncamento ótimo, ou em inglês de *Optimal Truncation*. Notemos que esse truncamento é uma prescrição e não há uma teoria que garante que isso seja válido para todas as séries, mas em geral, empiricamente, é válido.

Para exemplificar os argumentos acima, vamos considerar a função de Stieltjes,

definida como⁷⁰

$$S(\epsilon) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 + \epsilon t} dt, \quad (4.2)$$

onde ϵ é um parâmetro positivo. Usando a seguinte identidade da série geométrica válida para qualquer N inteiro

$$\sum_{j=0}^N (-1)^j (\epsilon t)^j = \frac{1 - (-\epsilon t)^{N+1}}{1 + \epsilon t}, \quad (4.3)$$

podemos reescrever a função de Stieltjes da seguinte forma

$$S(\epsilon) = \sum_{j=0}^N (-1)^j \epsilon^j \int_0^{\infty} e^{-t} t^j dt + E_N(\epsilon), \quad (4.4)$$

onde definimos

$$E_N(\epsilon) \equiv \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} (-\epsilon t)^{N+1}}{1 + \epsilon t} dt. \quad (4.5)$$

A integral da Eq. (4.4) é um caso específico da função gama e tem uma expressão analítica dada por

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^j dt = \Gamma(j + 1) = j!, \quad (4.6)$$

onde, substituindo este resultado na Eq. (4.4), chegamos na seguinte expressão para a função de Stieltjes

$$S(\epsilon) = \sum_{j=0}^N (-1)^j j! \epsilon^j + E_N(\epsilon). \quad (4.7)$$

Notemos que a primeira parte da Eq. (4.7) é claramente divergente devido ao $j!$ que vai ganhar de ϵ^j quando j vai para o infinito. Até o momento, todos os resultados obtidos são exatos, mas se negligenciarmos o termo $E_N(\epsilon)$, teremos que o somatório dos $(N + 1)$ primeiros termos terá um valor assintótico ao valor real da função de Stieltjes, como exemplificado na Figura 15. Na figura, a linha contínua horizontal laranja é o resultado exato da integral (4.2) que é 0,8819. Se truncarmos a série em seu menor termo, que para o caso é $N = 6$, indicado pelo quadrado azul na Figura 15, chegamos em 0,8860, portanto, a série assintótica a função de Stieltjes nos fornece um erro de aproximadamente 0,45%.

Notemos que, fora do raio de convergência da expansão de $1/(1 + \epsilon t)$, o integrando decresce exponencialmente. Para vermos isso, vamos dividir a integral (4.2) em duas partes

$$S(\epsilon) = S_{\text{con}}(\epsilon) + S_{\text{div}}(\epsilon), \quad (4.8)$$

onde

$$S_{\text{con}}(\epsilon) \equiv \int_0^{1/\epsilon} \frac{e^{-t}}{1 + \epsilon t} dt, \quad S_{\text{div}}(\epsilon) \equiv \int_{1/\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 + \epsilon t} dt. \quad (4.9)$$

Figura 15 – Série assintótica a função de Stieltjes usando $\epsilon = 0,15$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como o integrando $e^{-t}/(1 + \epsilon t)$ é majorado por $e^{-t}/2$, para todo $t \geq 1/\epsilon$, segue que

$$S_{\text{div}}(\epsilon) \leq \frac{e^{-1/\epsilon}}{2}. \quad (4.10)$$

Portanto, podemos aproximar a função de Stieltjes por

$$S(\epsilon) \approx S_{\text{con}}(\epsilon) + \mathcal{O}(e^{-1/\epsilon}), \quad (4.11)$$

o que sugere que o melhor que conseguiremos de uma expansão assintótica será um erro da $\mathcal{O}(e^{-1/\epsilon})$, como dito anteriormente.

Para obtermos resultados físicos, precisamos somar as séries providas de teoria de perturbação, mas, em QFT essas séries são, na melhor das hipóteses, assintóticas e divergem fatorialmente. Um método bastante utilizado para “somar” séries que divergem fatorialmente é o método da transformada de Borel. O método de Borel⁷¹ se inspira na representação integral da função fatorial, dada pela Eq. (4.6).

Seja $R = \sum_{j=0}^{\infty} r_n \alpha^{n+1}$ a expansão assintótica de um observável R . Multiplicando e dividindo por $n!$, temos

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \alpha^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} r_n \alpha^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-u} u^n du \frac{r_n}{n!} \alpha^{n+1}. \quad (4.12)$$

Trocando a ordem do somatório com a integral

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \alpha^{n+1} = \alpha \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n}{n!} u^n \alpha^n \right) e^{-u} du. \quad (4.13)$$

Fazendo a seguinte substituição de variáveis $u\alpha = t$ os limites de integração não mudam e ficamos com

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \alpha^{n+1} = \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n}{n!} t^n \right) e^{-t/\alpha} dt = \int_0^{\infty} B[R](t) e^{-t/\alpha} dt, \quad (4.14)$$

onde $B[R](t)$ é a transformada de Borel, definida como²⁶

$$B[R](t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \frac{t^n}{n!}, \quad (4.15)$$

ou seja, a divergência fatorial de R é suprimida nesta transformada e espera-se que esta seja mais bem comportada que a série R . Notemos que a última igualdade da Eq. (4.14) é a transformada Laplace, logo $B[R](t)$ é a transformada inversa de Laplace.

Para obtermos o valor de R somado no sentido de Borel, basta calcularmos a “integral de Borel” dada pela Eq. (4.14). Notemos que se $B[R](t)$ não tiver singularidades no eixo real positivo da variável t , então a integral é feita sem problemas, e nesses casos dizemos que a função é *Borel somável*. Porém, podem existir casos em que existem singularidades em $\mathbb{R}^+$, e nesses casos, é preciso contornar os pólos ao realizar a integração. Esse contorno pode ser realizado de mais de uma maneira e isso faz com que apareça a chamada *ambiguidade da integral de Borel*. Nesses casos a função não é Borel somável, e por isso existe essa ambiguidade.

Outro aspecto importante é que a localização dos pólos da transformada de Borel governa o comportamento divergente da série. Esse comportamento pode ser de sinal alternado ou de sinal não-alternado e depende da localização dos pólos como segue abaixo:

- Pólos em $\text{Re}\{t\} > 0 \implies$ Coeficientes com sinal não-alternado em ordens altas,
- Pólos em $\text{Re}\{t\} < 0 \implies$ Coeficientes com sinal alternado em ordens altas.

Como exemplos vamos considerar os seguintes casos em que a transformada de Borel de duas funções f_1 e f_2 possam ser somadas e suas somas são dadas por

$$B[f_1](t) = \frac{1}{1-t} \quad \text{e} \quad B[f_2](t) = \frac{1}{1+t}, \quad (4.16)$$

ou seja, para $B[f_1](t)$ temos um pólo em $t = 1$, e para $B[f_2](t)$ temos um pólo em $t = -1$. Assim, para o primeiro caso, temos uma série de sinal não-alternado, e para o segundo caso, uma série de sinal alternado. Esses comportamentos podem ser vistos nas Figuras 16 e 17. Este fato fica visualmente claro nos termos de ordem mais alta, quando a série já

Figura 16 – $B[f_1](t) = \frac{1}{1-t}$

Figura 17 – $B[f_2](t) = \frac{1}{1+t}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

está divergindo. Para obtermos esses gráficos, utilizamos como valor de entrada $\alpha = 0, 15$. Nas figuras, a linha laranja horizontal é o resultado da integral de Borel, e na Figura 16, o sombreado amarelo em torno da integral de Borel é a ambiguidade da integral dividido por π . No caso da transformada de Borel da função f_1 , a ambiguidade é obtida contornando o pólo em $t = 1$. Para isso nós realizamos a integral no eixo positivo em t até $t = 1 - \epsilon$, então, contornamos o pólo no semicírculo de raio ϵ no sentido horário ou anti-horário, e finalmente integramos de $t = 1 + \epsilon$ até o infinito. Esse contorno pode ser por baixo ou por cima do pólo e no final tomamos $\epsilon \rightarrow 0$. A ambiguidade é imaginária e surge das duas possibilidades de contorno dos pólos. Na Figura 17 não há esse sombreado pois não há nenhum pólo no caminho de integração.

Outro aspecto importante acontece quando aparecem mais de um pólo no eixo real da transformada de Borel da função. Consideremos o caso em que a transformada de Borel de uma função qualquer têm dois pólos, um em $x = p_1$ e outro em $x = p_2$, com $|p_1| > |p_2|$. Esses pólos contribuem para o n -ésimo coeficiente do somatório como $(1/p_1^{n+1} + 1/p_2^{n+1})$. Como $|p_1| > |p_2|$, para ordens altas de n temos que a contribuição de p_1 é suprimida pela contribuição de p_2 , assim, *o pólo mais próximo da origem domina o comportamento divergente da função*.

Um último aspecto importante da transformada de Borel de uma função é que ela pode servir como geradora dessa função. Por exemplo, se conhecermos os coeficientes da transformada de Borel de R , dado pela Eq. (4.15), conseguimos obter a série original apenas multiplicando os coeficientes de ordem n por $n!$, chegando assim na expansão perturbativa de R .

4.2 Aproximantes de Padé

Neste trabalho nosso objetivo é utilizar a teoria de Aproximantes de Padé para estudar a transformada de Borel da série perturbativa da QCD nos decaimento $\tau \rightarrow$

(hádrons) + ν_τ . Aqui faremos uma revisão sobre os conceitos mais importantes de Aproximantes de Padé (PA, do inglês *Padé Approximant*) que são relevantes para este trabalho.

Consideremos uma função $f(z)$ que pode ser escrita como uma expansão em série no plano complexo em torno de $z = 0$ da seguinte maneira

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + f_3 z^3 + \dots \quad (4.17)$$

Um Aproximante de Padé^{28,69} para $f(z)$, denotado por $P_N^M(z)$, é definido como a razão de dois polinômios na variável z de ordem M e N , $Q_M(z)$ e $R_N(z)$, respectivamente, com a definição $R_N(0) = 1$

$$P_N^M(z) = \frac{Q_M(z)}{R_N(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_M z^M}{1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_N z^N}, \quad (4.18)$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_N$ são coeficientes a serem determinados a partir da expansão em série da função $f(z)$. O PA faz um *contato* de ordem $M + N$ com a expansão de $f(z)$ em torno de $z = 0$. Isso significa que o PA reproduz os primeiros $M + N + 1$ coeficientes da Eq. (4.17) exatamente.

O método de construção de um Padé consiste em fazer uma expansão em série de $P_N^M(x)$, e, comparando termos de ordens iguais dessa expansão com a Eq. (4.17), determinamos os coeficientes do Padé. Em seguida, o Padé é reconstruído e podemos utilizá-lo para obter uma previsão para termos de ordem superior. Vamos usar como exemplo a função $f(x) = \frac{\sqrt{1+x/2}}{(1+2x)^2}$ e o Padé $P_1^1(x)$. Expandindo $f(x)$ em série, temos

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{2}x}}{(1 + 2x)^2} \approx 1 - \frac{15x}{4} + \frac{351x^2}{32} - \frac{3695x^3}{128} + \dots \quad (4.19)$$

Considerando $M = N = 1$, e expandindo $P_1^1(x)$ em série, temos

$$P_1^1(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x} \approx a_0 + (a_1 - a_0 b_1)x + (a_0 b_1^2 - a_1 b_1)x^2 + \dots \quad (4.20)$$

Comparando termo a termo os três primeiros coeficientes, obtemos os parâmetros a_0 , a_1 e b_1

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{33}{40}, \quad \text{e} \quad b_1 = \frac{117}{40}, \quad (4.21)$$

e podemos reconstruir o Padé

$$P_1^1(x) = \frac{1 - \frac{33}{40}x}{1 + \frac{117}{40}x}. \quad (4.22)$$

Então, comparando as séries de potências de $f(x)$ e de $P_1^1(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &\approx 1 - 3,75x + 10,969x^2 - 28,867x^3 + 71,591x^4 - 170,896x^5 + \dots, \\ P_1^1(x) &\approx 1 - 3,75x + 10,969x^2 - 32,084x^3 + 93,845x^4 - 274,495x^5 + \dots, \end{aligned} \quad (4.23)$$

Figura 18 – Comparação entre os resultados exato, a expansão em Taylor e o PA da função $f(x) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}x}}{(1+2x)^2}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

podemos ver que o PA fornece previsões para ordens mais altas da série. No caso, os erros relativos para as previsões dos termos de ordem três e quatro são, respectivamente, 11% e 31%, o que é bastante bom para a quantidade de parâmetros utilizados.

Também podemos fazer previsões para a localização dos pólos. Para o nosso exemplo, a função $f(x)$ tem um pólo duplo em $x = -0,5$, e o PA contém um pólo simples em $x = -0,3419$, portanto, a previsão do PA para a localização do pólo tem um erro relativo de 32%. O que é bom, considerando que, para esse caso, o PA só consegue fazer a previsão de um pólo simples. É importante ressaltar que em um caso onde há muitos pólos, um Padé com poucos parâmetros faz uma boa previsão para os pólos que estão mais perto da origem. Para os pólos mais distantes a previsão piora.

Na Figura 18 podemos ver os comportamentos de $f(x)$ (linha sólida preta), da série de Taylor truncada no termo de segunda ordem de $f(x)$ (linha pontilhada azul) e do Aproximante de Padé $P_1^1(x)$ da Eq. (4.22) (linha traço-ponto vermelha). Claramente, o PA tem um grande poder na previsão do comportamento da função em comparação com a série de Taylor truncada já que, para construir o PA, utilizamos a mesma quantidade de informação que a série de Taylor.

Neste trabalho, a transformada de Borel da função de Adler reduzida faz o papel de $f(z)$, e os pólos desta transformada, os renôrmalons que serão discutidos no Capítulo 5,

contém informações sobre a maneira como a série perturbativa da QCD diverge. Dado que o PA é uma razão entre polinômios, podemos utilizá-lo para fazer previsões da localização dos renômalons. É importante notarmos que se $f(z)$ é uma função meromórfica, ou seja, é uma função cujo domínio apresenta singularidades que tornam a função não diferenciável nesses pontos, alguns pólos (e resíduos) do aproximante $P_N^M(z)$ podem ser complexos, mesmo quando a função original não tenha pólos complexos. Esses pólos não podem ser identificados com nenhum renômalon, e não impedem o uso do PA para estudar a função desde que estejamos numa região longe destes pólos.³⁰

Podemos também adicionar alguma informação sobre os pólos utilizando os chamados Aproximantes de Padé Parciais (PPA, do inglês *Partial Padé Approximants*). Um PPA é definido como

$$\mathbb{P}_{N,K}^M(z) = \frac{Q_M(z)}{R_N(z)T_K(z)}, \quad (4.24)$$

onde o polinômio $T_K(z)$, de ordem K , é construído de forma a ter K zeros nas exatas localizações dos primeiros K pólos da função que está sendo aproximada

$$T_K(z) = (z + z_1)(z + z_2) \dots (z + z_K). \quad (4.25)$$

Os coeficientes de Q_M e R_N são determinados da mesma maneira que anteriormente, e, para uma função meromórfica qualquer, também podem aparecer pólos complexos no PPA.

Neste trabalho, estamos interessados em sequências de Padés, em especial sequências do tipo $M = N + J$, onde J é um inteiro, logo o Padé fica P_N^{N+J} . Para $J \neq 0$, temos a chamada sequência perto da diagonal, enquanto para $J = 0$, temos a sequência diagonal. Não existe uma teoria geral sobre a convergência dos Padés conforme aumentamos a ordem N do PA. Porém, existem vários teoremas que garantem que para certos tipos de funções, sob alguma restrição, o Padé irá convergir para a função original. Para o caso de uma função meromórfica qualquer, temos dois teoremas que garantem a convergência dos PAs, o teorema de *Montessus de Ballore* e o teorema de *Pommerenke*.

O teorema de Montessus de Ballore³⁵ é aplicado a funções meromórficas que tenham pólos, não necessariamente simples. O teorema diz

Teorema 1 (Teorema de Montessus de Ballore). *Seja $f(z)$ uma função meromórfica em um disco $|z| \leq R$, com m pólos em pontos distintos $z_1, z_2, \dots, z_m$ com*

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_m| < R.$$

Os pólos em z_k têm multiplicidade v_k , e a multiplicidade total $\sum_{k=1}^m v_k = M$, precisamente. Então

$$\lim_{L \rightarrow \infty} P_M^L = f(z) \quad (4.26)$$

uniformemente em qualquer subconjunto compacto de

$$\mathcal{D}_M = \{z, |z| \leq R, z \neq z_k, k = 1, 2, \dots, m\}.$$

As grandes vantagens desse teorema são que ele garante uma convergência uniforme da aproximação dentro do círculo definido por $|z_m| < R$, e nenhum pólo vindo de fora dessa aproximação irá aparecer dentro do disco. E, conforme tomamos $\lim_{L \rightarrow \infty}$ na Eq. (4.26) as posições dos M pólos serão determinadas corretamente, dadas a quantidade de pólos e a multiplicidade M . Mas, uma das dificuldade é que não existe uma taxa de convergência comprovada, apenas sabemos que irá convergir, o que nos impede de irmos muito além.

O teorema de Pommerenke³⁶ é uma extensão do teorema de Montessus de Ballore. Esse teorema diz que sequências de PAs diagonal, ou perto da diagonal, construídos a partir de uma função meromórfica é convergente em qualquer lugar de um conjunto compacto de um plano complexo, exceto em um conjunto de área nula.

Teorema 2 (Teorema de Pommerenke). *Seja a função $f(z)$, analítica na origem e em todo o plano z , exceto por um número contável de pólos isolados e singularidades essenciais. Então, a sequência de aproximantes P_M^L com $L/M = \lambda$ ($\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \infty$) satisfaz*

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P_M^{\lambda M} = f(z), \quad (4.27)$$

em qualquer conjunto compacto do plano z .

Neste teorema, para uma dada região compacta do plano complexo, os pólos estranhos do PA se movem para longe da origem, conforme aumentamos a ordem do Padé, ou eles aparecem em duplas, perto de zeros da função tornando-se os chamados *defeitos* ou *dubletos de Froissart*.²⁸ Um corolário importante deste teorema diz que podemos generalizá-lo para uma sequência de Padé do tipo P_N^{N+k} , para k fixo, e ainda assim a sequência irá convergir para a função original, conforme $N \rightarrow \infty$.

A principal vantagem do teorema de Pommerenke em contraste com o teorema de Montessus de Ballore é que ao aplicarmos o primeiro, não precisamos saber quantos pólos e qual a multiplicidade desses pólos que estão no espaço de convergência. Mas uma desvantagem é que, ao aumentarmos a ordem do Padé, é preciso adicionar dois parâmetros de entrada, logo, nas previsões, não conseguimos fazer previsões termo a termo, apenas poderemos fazer previsões a cada dois termos.

Para exemplificar, vamos novamente utilizar a função $f(x) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}x}}{(1+2x)^2}$. Primeiro, vamos utilizar o método dos PPAs. Vamos fixar $T_1(x) = 1 + 2x$, e então construir o Padé $\mathbb{P}_{1,1}^1(x)$, e comparar as previsões obtidas com o Padé comum e com o Padé parcial.

Expandindo o PPA $\mathbb{P}_{1,1}^1(x)$ em série obtemos

$$\mathbb{P}_{1,1}^1(x) = \frac{a_0 + a_1x}{(1+2x)(1+b_1x)} \approx a_0 + (a_1 - 2a_0 - a_0b_1)x + (4a_0 - 2a_1 + 2a_0b_1 - a_1b_1 + a_0b_1^2)x^2 + \dots \quad (4.28)$$

Comparando termo a termo com a Eq. (4.19), obtemos

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{13}{56} \quad \text{e} \quad b_1 = \frac{111}{56}, \quad (4.29)$$

e podemos reconstruir o Padé

$$\mathbb{P}_{1,1}^1(x) = \frac{1 + \frac{13}{56}x}{(1 + 2x)(1 + \frac{111}{56}x)}. \quad (4.30)$$

Logo, expandindo em série de potências obtemos

$$\mathbb{P}_{1,1}^1(x) \approx 1 - 3,75x + 10,969x^2 - 28,813x^3 + 71,255x^4 - 169,522x^5 + \dots \quad (4.31)$$

A primeira previsão fornecida pelo PPA é a do termo de ordem três, onde o erro relativo ao resultado da Eq. (4.19) é de 0,18%, em comparação a 11% obtido com o Padé simples. Podemos também comparar a previsão da localização do pólo. Como estamos utilizando um PPA, já utilizamos uma informação de que existe um pólo em $x = -0,5$. Porém $f(x)$ contém um pólo duplo neste ponto, logo, a previsão do PPA para o outro pólo é $x = -0,5045$, tendo um erro relativo de 0,9%, e ao compararmos com a previsão do Padé simples, que tem um erro relativo de 32%, vemos quão poderoso é esse método. Portanto, se soubermos alguma informação sobre a localização dos pólos, o método dos PPAs é muito mais eficaz do que usar apenas os PAs.

Vamos utilizar a mesma função exemplo para também estudarmos os teoremas de convergência. Começamos pelo teorema de Montessus de Ballore. Para verificar a convergência, vamos analisar os erros relativos das previsões dos primeiros coeficientes desconhecidos, definidos como

$$\sigma_{rel} = \left| \frac{c_{n,1}^P - c_{n,1}}{c_{n,1}} \right|, \quad (4.32)$$

onde $c_{n,1}^P$ é o coeficiente extraído do Aproximante de Padé, em função do número de parâmetros de entrada. Como a função original tem um pólo duplo em $x = -0,5$, vamos utilizar o Padé P_2^M , onde $M = 0, 1, 2, \dots$. Na Figura 19 podemos ver a convergência da sequência de Padé utilizada, pois, conforme aumentamos a ordem do Padé, a previsão do próximo coeficiente da expansão de Taylor de $f(x)$ diminui exponencialmente, como pode ser verificado pela escala logarítmica do gráfico.

Podemos analisar também a convergência da localização do pólo para a posição correta. Para o nosso caso, a função analisada tem um pólo duplo e estamos utilizando o Padé que têm ordem dois no denominador, portanto, podemos prever a localização dos dois pólos. Analisando a Figura 20 vemos que, conforme aumentamos a ordem do Padé, os dois pólos previstos por este convergem para o resultado exato, dado pela linha amarela horizontal contínua. Podemos concluir que, dados poucos coeficientes da expansão em Taylor da função $f(x)$, podemos prever com razoável precisão a localização dos pólos da função com este método.

Portanto, conforme previsto pelo teorema de Montessus de Ballore, mantendo fixa a ordem do denominador do Padé, este converge para função estudada, e também os pólos do Padé convergem para o resultado exato.

Figura 19 – Erro relativo da previsão do primeiro coeficiente desconhecido (σ_{rel}) em função do número de parâmetros do Padé utilizando o Padé P_2^M e a função $f(x) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}x}}{(1+2x)^2}$. Esse é o caso do teorema de Montessus de Ballore.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para estudarmos o teorema de Pommerenke, vamos utilizar novamente a função $f(x) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}x}}{(1+2x)^2}$, mas agora vamos utilizar a sequência de Padé diagonal, ou seja $M = N$. Nesta sequência temos que o Padé é dado por $P_N^N(x)$ com $N = 1, 2, \dots$. Ao utilizar esse tipo de sequência nós perdemos a previsão termo a termo da função, já que, ao aumentarmos o valor de N de uma unidade, adicionamos um parâmetro no numerador e um parâmetro no denominador do Padé, logo, aumentamos em dois a ordem do Padé, perdendo a previsão de um dos coeficientes da série original. Esse teorema nos diz que, conforme aumentamos o valor de N do Padé, os pólos estranhos, que não correspondem aos pólos exatos da função, se movem para longe da origem. Isso pode ser visto quando utilizamos $N = 5$, por exemplo. Para este caso, o PA é dado por

$$P_5^5(x) = \frac{1 + 1,0768x + 0,3767x^2 + 0,0458x^3 + 0,00109x^4 + 0,000013x^5}{1 + 4,8268x + 7,5085x^2 + 4,1258x^3 + 0,8589x^4 + 0,0539x^5}, \quad (4.33)$$

cujos pólos são

$$x_1 = -0,5000, \quad x_2 = -0,4999, \quad x_3 = -2,2918, \quad x_4 = -3,5677, \quad x_5 = -9,0757. \quad (4.34)$$

Como podemos ver, os dois primeiros pólos, x_1 e x_2 fazem a previsão quase exata da localização dos pólos enquanto os outros x_3 , x_4 e x_5 se distanciam da origem, já que são pólos estranhos.

Figura 20 – Localização dos pólos do Padé P_2^M em função do número de parâmetros do Padé utilizando a função $f(x) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}x}}{(1+2x)^2}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos estudar também a convergência de $P_N^N(x)$ à função $f(x)$ conforme $N \rightarrow \infty$. Para isso, vamos novamente fazer um gráfico do erro relativo da previsão do próximo coeficiente (σ_{rel}) em função do número de parâmetros. Esse gráfico pode ser visto na Figura 21, e novamente a melhora é exponencial conforme aumentamos o valor de N .

Diferente dos casos que estudamos até agora, onde aplicamos a teoria dos Padés em uma função meromórfica, a transformada de Borel da função de Adler reduzida na QCD completa contém cortes, em vez de pólos. É importante ressaltar que não há uma teoria de Padés definida para funções com cortes, nem teoremas de convergência. Podemos, ainda assim, repetir os exercícios realizados acima para este tipo de função.

Portanto, vamos considerar o caso de uma função com cortes, por exemplo $g(x) = \sqrt{\frac{1+2x}{1+x}}$ e estudar como os aproximantes de Padé são capazes de aproximar uma função deste tipo. Essa função tem uma linha de corte na região $[-1, -1/2]$. Expandindo em série de potências $g(x)$ em torno da origem temos

$$g(x) = \sqrt{\frac{1+2x}{1+x}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + \frac{13}{16}x^3 + \dots \quad (4.35)$$

Utilizando o Padé $P_1^1(x)$ e impondo a igualdade termo a termo para os três primeiros coeficientes da Eq. (4.20) encontramos

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{7}{4}, \quad \text{e} \quad b_1 = \frac{5}{4}, \quad (4.36)$$

Figura 21 – Erro relativo da previsão do primeiro coeficiente desconhecido (σ_{rel}) em função do número de parâmetros do Padé utilizando o Padé P_N^N e a função $f(x) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}x}}{(1+2x)^2}$. Esse é o caso do teorema de Pommerenke.

Fonte: Elaborada pelo autor.

e podemos reconstruir o Padé

$$P_1^1(x) = \frac{1 + \frac{7}{4}x}{1 + \frac{5}{4}x}. \quad (4.37)$$

Comparando as séries de potências de $g(x)$ e de $P_1^1(x)$

$$\begin{aligned} g(x) &\approx 1 + 0,5x - 0,625x^2 + 0,8125x^3 - 1,1016x^4 + 1,5586x^5 + \dots, \\ P_1^1(x) &\approx 1 + 0,5x - 0,625x^2 + 0,7813x^3 - 0,9766x^4 + 1,2207x^5 + \dots, \end{aligned} \quad (4.38)$$

vemos que o Padé reproduz a série exatamente até seu terceiro coeficiente e fornece previsões para ordens mais altas. Claramente essas previsões para os termos de ordens mais altas da série são boas fornecendo erros relativos de aproximadamente 4% e 11% para os coeficientes de terceira e quarta ordem, respectivamente, o que é muito bom para a quantidade de parâmetros utilizados. E também contém um pólo em $x = -0,8$ que fica entre -1 e $-1/2$, ou seja, na região da linha de corte.

Para analisarmos a convergência do Padé iremos utilizar a sequência $M = N$. O erro relativo da previsão do primeiro coeficiente desconhecido em função de $M + N$ é mostrado na Figura 22 e vemos que, conforme aumentamos a ordem do Padé, este erro diminui exponencialmente. Portanto, mesmo para uma função com corte, o Padé, pelo menos aparentemente, converge para o resultado exato.

Figura 22 – Erro relativo da previsão do primeiro coeficiente desconhecido (σ_{rel}) em função do número de parâmetros do Padé utilizando a função $g(x) = \sqrt{\frac{1+2x}{1+x}}$, que é uma função com uma linha de corte, e o Padé P_N^N .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 23 – Localização dos pólos no plano complexo da variável x do Padé $P_{12}^{12}(x)$ construído a partir da função $g(x) = \sqrt{\frac{1+2x}{1+x}}$ que têm uma linha de corte em $[-1, -1/2]$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

É interessante também estudarmos o que acontece quando adicionamos mais pólos. Utilizando $M = N = 12$, temos o Padé $P_{12}^{12}(x)$, que têm 12 pólos. Na Figura 23 podemos

ver a localização desses pólos. É possível observar que os pólos do Padé se aglomeram na linha de corte da função, portanto, um Padé com muitos pólos “tenta” reproduzir esse corte através da acumulação de pólos.

Pudemos ver que os resultados obtidos com aproximantes de Padé para a função $g(x)$ são razoáveis, portanto, mesmo não havendo uma teoria de convergência de sequências de Padés para função com cortes, podemos esperar que nestes casos também funcione o método, assim como nos casos em que há teoremas de convergência.

Além dos casos específicos discutidos aqui em algum detalhe, existem também teorias de convergência isoladas para funções de Stieltjes, frações continuadas, funções hipergeométricas, funções de Bessel, etc. Porém, neste trabalho, iremos utilizar funções meromórficas e funções com cortes, logo, os teoremas enunciados acima são suficientes para o nosso propósito.

Entendidas as propriedades e teoremas de convergência dos Padés, vamos utilizá-los, primeiro como teste no limite large- β_0 da QCD (Capítulo 5), e então extrair um método eficaz de análise para previsão da localização dos renormalons, previsão do coeficiente $c_{5,1}$ da função de Adler, e previsão da integral de Borel, que é o valor somado no sentido de Borel da série de Adler. Após isso, iremos aplicar o método na QCD verdadeira (Capítulo 6).

5 RESULTADOS EM LARGE- β_0

Um bom laboratório para a ideia que apresentamos no Capítulo 4 é o chamado limite large- β_0 da QCD. Para chegarmos neste limite, precisamos primeiro tomar o limite de grande número de sabores*, N_f . É importante ressaltar que o limite é tomado mantendo constante o produto $\alpha_s N_f$,† logo, a contagem de potências da série perturbativa se altera e temos $\alpha_s N_f \sim \mathcal{O}(1)$. Portanto, o diagrama em que o propagador do glúon é corrigido por uma bolha de $q\bar{q}$ tem um caráter especial, pois é proporcional a $\alpha_s N_f$. Os diagramas da Figura 24 são as correções ao propagador do glúon de uma cadeia de loops de $q\bar{q}$, e eles devem ser ressomados, logo, o propagador do glúon, neste limite é uma série infinita em α_s que contém todos os termos dominantes em N_f da QCD verdadeira. Cada loop de $q\bar{q}$ contribui com um fator β_{0f} , que é a contribuição fermiônica a 1-loop da função β e é proporcional a N_f . Em seguida realizamos o processo denominado na literatura de *non-abelianization*, que será discutido na próxima seção, onde substituímos β_{0f} por $\beta_0 = \frac{\beta_1}{2\pi}$, e chegamos no limite large- β_0 . Neste limite nós truncamos a série da função β , definida pela Eq. (2.30) da Página 36 em seu primeiro termo, a_μ^2 , que, na nossa notação, se torna o limite large- β_1 , e nesse caso, apenas o primeiro loop da evolução de α_s é considerado. Vale notar que todos os termos presentes neste limite também se encontram na QCD completa.

5.1 Renormalons em Large- β_0

Neste trabalho iremos utilizar a transformada de Borel da série perturbativa da QCD. Na Seção 4.1 vimos que singularidades na transformada de Borel de uma função governam o comportamento divergente da mesma. Quando essas singularidades aparecem devido a regiões de alto ou baixo momento de um diagrama de loop, elas levam o nome de *renormalons*, e são uma das fontes de divergência das séries perturbativas de QFT. O nome renormalon foi dado por 't Hooft⁷³ em 1977, aparentemente, devido ao fato de a única outra fonte de divergência conhecida ser o íntanton. Como neste caso estamos lidando com teoria de campos renormalizáveis, deu-se o nome de renormalon.

As singularidades devidas a renormalons não são devidas ao crescimento do número de diagramas conforme aplicamos teoria de perturbação em ordens mais altas. Essas singularidades aparecem de diagramas simples que contribuem com um fator $n!$ em ordem n para a amplitude. Diagramas desse tipo são aqueles onde o propagador do glúon é corrigido por uma cadeia de loops de férmions.

* É importante notarmos que não se trata do limite de grande número de cores, ou seja, $N_c \rightarrow \infty$, que é mais usado do que o limite de grande número de sabores, que significa $N_f \rightarrow \infty$.

† Da mesma forma que no limite de grande número de cores, N_c .⁷²

$$- - - - = \text{gluon loop} + \text{fermion loop} + \text{fermion loop with gluon loop} + \dots$$

Figura 24 – Propagador do glúon corrigido por uma cadeia de loops de férmions.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 25 – Correções dominantes em large- β_0 à função de Adler.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Consideremos os decaimentos do τ discutidos no Capítulo 3. Como dito, esses decaimentos ocorrem através do bóson W e a principal quantidade que governa esses cálculos é o correlator de dois pontos definido pela Eq. (3.6) da Página 45, cujo observável obtido a partir desse correlator é a função de Adler definida pela Eq. (3.12). Corrigindo o propagador do glúon através de uma cadeia de loops de férmions, Figura 25, podemos calcular a função de Adler através de diagramas de Feynman em ordem dominante em large- β_0 , como faremos abaixo.

Como estamos trabalhando no limite quiral, temos que as massas dos quarks leves são nulas neste limite, logo, considerando isso, cada loop de férmion renormalizado contribui com um fator

$$-\beta_{0f}\alpha_s[\ln(-k^2/Q^2) + C - 5/3], \quad (5.1)$$

onde C é a constante que depende do esquema de renormalização utilizado, e que vale zero no $\overline{\text{MS}}$, e β_{0f} é a contribuição fermiônica a 1-loop da função β . Como temos infinitos vértices e cada vértice contribui com um fator do loop de férmion renormalizado, precisamos somar todos e também integrar sobre os momentos do glúon. Definindo $k_E^2 = -k^2$, onde k_E^2 é o momento euclideano. A contribuição dos diagramas da Figura 25 à função de Adler pode ser escrita, no $\overline{\text{MS}}$, da seguinte forma^{33,34}

$$D(Q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_s(Q^2) \int_0^{\infty} \frac{dk_E^2}{k_E^2} f(k_E^2, Q^2) \left[\frac{\beta_1}{2\pi} \alpha_s(Q^2) \ln \left(\frac{k_E^2 e^{-5/3}}{Q^2} \right) \right]^n, \quad (5.2)$$

onde $f(k_E^2, Q^2)$ é a função de distribuição de momentos de loop independente de esquema de renormalização e definida a partir da transformada de Borel da série (sua expressão analítica completa pode ser encontrada no artigo de Neubert⁷⁴), e Q^2 é o momento externo. Fizemos também a substituição $\beta_{0f} \rightarrow \beta_0 = \frac{\beta_1}{2\pi}$. Essa substituição inverte a posição dos pólos já que os sinais de β_0 e β_{0f} são diferentes, portanto, os pólos IR passam a ser UV e vice-versa[‡]. Trocando a ordem da soma com a integral chegamos a

$$D(Q^2) = \int_0^\infty \frac{dk_E^2}{k_E^2} f(k_E^2, Q^2) \sum_{n=0}^\infty \alpha_s^{n+1}(Q^2) \left(\frac{\beta_1}{2\pi} \right)^n \left[\ln \left(\frac{k_E^2 e^{-5/3}}{Q^2} \right) \right]^n. \quad (5.3)$$

Mas o somatório dentro da integral é a evolução de α_s a 1-loop, dado pela Eq. (2.35) da Página 37, então a função de Adler é expressada pela seguinte integral

$$D(Q^2) = \int_0^\infty \frac{dk_E^2}{k_E^2} f(k_E^2, Q^2) \alpha_s(k_E^2 e^{-5/3}). \quad (5.4)$$

Notemos que $f(k_E^2, Q^2)$ é independente de esquema, porém, na evolução de α_s temos o termo $e^{-5/3}$, que está diretamente ligado à escolha de C . Logo, o cálculo feito acima, depende da escolha de C .

Podemos estudar a integral (5.4) nos limites de altas ($k_E^2 \gg Q^2$) e baixas ($k_E^2 \ll Q^2$) energias. Nestes limites a expressão da função $f(k_E^2, Q^2)$ é dada por²⁶

$$\begin{aligned} f_{\text{UV}}(k_E^2, Q^2) &\approx \left[\ln \left(\frac{k_E^2}{Q^2} \right) + A \right] \left(\frac{Q^2}{k_E^2} \right), & \text{altas energias,} \\ f_{\text{IR}}(k_E^2, Q^2) &\approx \left(\frac{k_E^2}{Q^2} \right)^2, & \text{baixas energias,} \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde A é uma constante e vale 5/6 e os subscritos UV e IR são devidos a região de momento do loop que estamos estudando. Como estamos interessados apenas na posição e multiplicidade dos pólos ignoramos as constantes que multiplicam as aproximações de $f(k_E^2, Q^2)$.

Começamos analisando o caso de altas energias, quando $k_E^2 \gg Q^2$. Para esse caso, substituindo a aproximação $f_{\text{UV}}(k_E^2, Q^2)$ na Eq. (5.4) temos

$$D_{\text{UV}} \approx \int_{Q^2}^\infty \frac{dk_E^2}{k_E^2} \left[\ln \left(\frac{k_E^2}{Q^2} \right) + A \right] \left(\frac{Q^2}{k_E^2} \right) \alpha_s(k_E^2). \quad (5.6)$$

Para resolver a integral acima, vamos começar expandindo em série de potências a evolução de α_s , então

$$D_{\text{UV}} = \sum_n \int_{Q^2}^\infty \frac{dk_E^2}{k_E^2} \left[\ln \left(\frac{k_E^2}{Q^2} \right) + A \right] \left(\frac{Q^2}{k_E^2} \right) \left(-\frac{\beta_1}{2\pi} \right)^n \ln^n \left(\frac{k_E^2}{Q^2} \right) \alpha_s^{n+1}(Q^2). \quad (5.7)$$

[‡] Esse procedimento de substituição de β_{0f} por β_0 é importante e não é trivial, justamente por causa da inversão dos pólos. Sem esse procedimento, QCD viraria algo parecido com QED o que seria inútil. O nome desse procedimento é, em inglês, *non-abelianization* e é discutido em mais detalhes no trabalho de M. Beneke e V. M. Braun.⁷⁵

Agora, vamos realizar a seguinte substituição de variáveis $k_E^2/Q^2 = t$, logo

$$D_{UV} = \sum_n \int_1^\infty \frac{dt}{t} (\ln t + A) t^{-1} \left(-\frac{\beta_1}{2\pi} \right)^n \ln^n(t) \alpha_s^{n+1}(Q^2). \quad (5.8)$$

Realizando uma nova troca de variáveis, $t = e^y$, ficamos com

$$\begin{aligned} D_{UV} &= \sum_n \int_0^\infty dy (y + A) e^{-y} \left(-\frac{\beta_1}{2\pi} \right)^n y^n \alpha_s^{n+1}(Q^2) \\ &= \sum_n \left(-\frac{\beta_1}{2\pi} \right)^n \alpha_s^{n+1}(Q^2) \int_0^\infty dy (y^{n+1} + A y^n) e^{-y} \\ &= \sum_n \left(-\frac{\beta_1}{2\pi} \right)^n \alpha_s^{n+1}(Q^2) [(n+1)n! + An!]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Notemos que a série acima é divergente devido ao fator $n!$ nos coeficientes, portanto, para qualquer valor de α_s a série irá divergir. Portanto, usando a Eq. (4.15) da Página 56 vamos realizar a transformada de Borel de D_{UV} , então

$$B[D_{UV}] = \sum_n \frac{1}{n!} \left(-\frac{\beta_1}{2\pi} \right)^n [(n+1)n! + An!] t^n, \quad (5.10)$$

e, chamando $\frac{\beta_1 t}{2\pi} = u$, chegamos a

$$B[D_{UV}] = \sum_n (-1)^n u^n [(n+1) + A]. \quad (5.11)$$

Agora, realizando a soma em n através da série geométrica, ficamos com

$$B[D_{UV}] = \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{A}{1+u}. \quad (5.12)$$

Portanto, a primeira contribuição em altas energias da integral é mapeada em um pólo duplo em $u = -1$ na transformada de Borel da função de Adler. Se levarmos em consideração toda a expressão de $f(k_E^2, Q^2)$, teremos pólos em $u = -1, -2, -3, \dots$.²⁶ Essas singularidades no eixo real negativo do plano complexo de Borel são chamadas de renôrmalons ultravioletas (UV), pois são devidas a contribuição de altas energias nas correções do propagador do glúon em diagramas do tipo cadeia de loops. Lembremos também que este tipo de pólo gera séries com alternância de sinais, como discutido no capítulo anterior.

Consideremos agora o caso de baixas energias, onde $k_E^2 < Q^2$. Substituindo a aproximação para baixas energias $f_{IR}(k_E^2, Q^2)$ da Eq (5.5) na Eq. (5.4) temos

$$D_{IR} \approx \int_0^{Q^2} \frac{dk_E^2}{k_E^2} \left(\frac{k_E^2}{Q^2} \right)^2 \alpha_s(k_E^2). \quad (5.13)$$

Realizando os passos análogos ao primeiro caso, ficamos com

$$\begin{aligned}
D_{\text{IR}} &= \sum_n \int_0^{Q^2} \frac{dk_E^2}{k_E^2} \left(\frac{k_E^2}{Q^2} \right)^2 \left(-\frac{\beta_1}{2\pi} \right)^n \ln^n \left(\frac{k_E^2}{Q^2} \right) \alpha_s^{n+1}(Q^2) \\
&= \sum_n \int_0^1 \frac{dt}{t} t^2 \left(-\frac{\beta_1}{2\pi} \right)^n \ln^n(t) \alpha_s^{n+1}(Q^2) \\
&= \sum_n \left(\frac{\beta_1}{2\pi} \right)^n \alpha_s^{n+1}(Q^2) \int_0^\infty dy e^{-2y} y^n \\
&= \sum_n \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_1}{4\pi} \right)^n n! \alpha_s^{n+1}(Q^2).
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Neste caso temos de novo o fator $n!$ nos coeficientes, indicando que a série irá divergir para qualquer valor de α_s . Novamente, realizando a transformada de Borel de D_{IR} e chamando $\frac{\beta_1 t}{2\pi} = u$, chegamos

$$B[D_{\text{IR}}] = \sum_n \frac{1}{2} \left(\frac{u}{2} \right)^n = \frac{1}{2-u}. \tag{5.15}$$

A primeira contribuição em energias baixas da integral (5.4) é mapeada em um pólo em $u = 2$ na transformada de Borel da função de Adler. Se levarmos em conta toda a expressão para $f(k_E^2, Q^2)$ teremos pólos em $u = 2, 3, \dots$.²⁶ Essas singularidades no eixo real positivo do plano de Borel são chamadas de renôrmalons infravermelhos (IR, do inglês *infrared*). O único pólo simples que aparece na transformada de Borel da função de Adler é em $u = 2$, todos os outros são pólos duplos.

Para um renôrmalon IR na posição $u = p$ podemos escrever a transformada de Borel da seguinte forma

$$B[D_{\text{IR}}](u) = \frac{1}{p-u} = \frac{1}{p} \frac{1}{(1-\frac{u}{p})} = \frac{1}{p} \sum_n \left(\frac{u}{p} \right)^n, \tag{5.16}$$

onde $p = 2, 3, \dots$. Usando a transformada de Borel como função geratriz para a função de Adler, temos

$$D_{\text{IR}}(\alpha_s) = \sum_n n! \left(\frac{\beta_1}{2\pi} \right)^n \left(\frac{\alpha_s}{p} \right)^{n+1}. \tag{5.17}$$

Sabemos que D_{IR} é uma série divergente fatorialmente, e estamos supondo que ela é assintótica, portanto, truncando a série em seu menor termo N chegamos a

$$D_{\text{IR}} = \sum_{n=0}^N \left(\frac{\beta_1}{2\pi} \right)^n \left(\frac{\alpha_s}{p} \right)^{n+1} + \mathcal{O}(e^{\frac{-2\pi|p|}{\beta_1 \alpha_s}}). \tag{5.18}$$

onde o termo exponencial que aparece já foi discutido no Capítulo 4. Este termo exponencial está relacionado com as correções de potências⁷⁶ que aparecem na OPE de Wilson⁷⁷ devido à evolução logarítmica de α_s , dada pela Eq. (2.37), para esse caso

$$e^{\frac{-2\pi|p|}{\beta_1 \alpha_s}} \sim \left(\frac{\Lambda^2}{Q^2} \right)^p, \tag{5.19}$$

onde Λ é o parâmetro de escala da QCD. Essas correções de potências estão ligadas com termos não perturbativos. Por exemplo, quando consideramos $p = 2$, temos $(\Lambda/Q)^4$, que tem a mesma dependência do condensado de glúons da OPE. Esses termos aparecem justamente devido à região IR dos diagramas, onde a QCD perturbativa não é válida. Para cada valor de p outros condensados aparecem e, cada um deles, está relacionado com uma posição de um renôrmalon IR, portanto, vemos uma estrita ligação entre a série perturbativa e termos não perturbativos. Isso também explica a ausência de renôrmalon IR em $u = 1$, já que o condensado de menor dimensão que é possível construir é o condensado de glúons, que têm dimensão quatro.[§]

Ao passarmos do limite large- β_0 para a QCD completa esperamos que a posição dos pólos IR e UV não mudem. Portanto, as posições calculadas acima para os pólos, como $u = -1$ e $u = 2$, por exemplo, não mudam, porém, na QCD completa, esses pólos simples e duplos se transformam em cortes.²⁶ Logo, ainda assim haverá uma correspondência entre pólos IR e termos não-perturbativos, já que essa correspondência está ligada apenas à posição do pólo.⁷⁸ Usaremos este fato de que a posição do pólo não muda quando discutirmos os resultados em QCD, no Capítulo 6.

5.2 Aproximantes de Padé no limite large- β_0

Na seção anterior introduzimos os renôrmalons no limite large- β_0 , onde aproximamos os cálculos da função de Adler em altas e baixas energias e ignoramos as constantes que multiplicavam os cálculos, pois estávamos interessados numa análise qualitativa das localizações dos pólos. Nesta seção iremos aplicar a teoria de Padés estudada no Capítulo 4 na transformada de Borel da função de Adler Reduzida, definida pela Eq. (3.21) da Página 49, no limite large- β_0 . Como já dito, neste limite conhecemos a série em todas as ordens, logo, também conhecemos a sua transformada de Borel em todas as ordens, e ela pode ser escrita de uma forma fechada, com todas as constantes antes ignoradas, dada por^{26,33,34}

$$B[\widehat{D}_{L\beta}](u) = \frac{32}{3\pi} \frac{e^{(C+5/3)u}}{2-u} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{[k^2 - (1-u)^2]^2}, \quad (5.20)$$

onde u , β_1 e C são os mesmos definidos acima. A Eq. (5.20) claramente mostra a localização dos renôrmalons IR, que estão todos ao longo do eixo real positivo e dos renôrmalons UV, que estão no eixo real negativo. Todos os pólos são duplos, com exceção do primeiro pólo IR, em $u = 2$, que é simples e está relacionado com o condensado de glúons, como dito na seção anterior. Notemos que os primeiros pólos, em $u = -1$ e $u = 2$, são os mesmos obtidos na seção anterior, quando fizemos a aproximação de altas e baixas energias, o que era de se esperar, já que a equação acima é a forma completa das Eq. (5.12) e (5.15). Outro

[§] É importante lembrarmos que nossos cálculos são feitos no limite quiral, onde a massa dos quarks leves são nulas ($m = 0$), portanto, termos do tipo $m\langle q\bar{q} \rangle$ não aparecem na OPE do correlator de dois pontos $\Pi^{(1)}(s)$.

fator importante é a independência da posição dos pólos com relação a C . Pela Eq. (5.20) fica claro que somente os resíduos dos renômalons são dependentes de esquema. O pólo mais próximo da origem, e portanto aquele que irá governar o comportamento divergente da série, é um pólo duplo em $u = -1$, portanto, a série em ordens altas apresentará um comportamento divergente de sinal alternado. Notemos também que a transformada de Borel da função de Adler reduzida é uma função meromórfica, mas é importante ressaltar que ela não é uma função do tipo Stieltjes[¶]. Os coeficientes $c_{n,1}$ podem ser reconstruídos expandindo a igualdade acima em torno de $u = 0$ e usando a Eq. (4.15).

Os primeiros seis coeficientes da função de Adler reduzida no limite large- β_0 , denotada aqui por $\widehat{D}_{L\beta}$, usando $N_f = 3$ e no esquema $\overline{\text{MS}}$ são

$$\widehat{D}_{L\beta}(a_Q) = a_Q + 1,556a_Q^2 + 15,71a_Q^3 + 24,83a_Q^4 + 787,8a_Q^5 - 1991a_Q^6 + \dots, \quad (5.21)$$

que devem ser comparados com os coeficientes conhecidos da expansão perturbativa da QCD, dados pela Eq. (3.22). Notemos que o comportamento de sinal alternado devido ao renômalon UV mais próximo da origem ($u = -1$) começa na ordem seis da expansão. Usando a prescrição FOPT podemos escrever a série perturbativa da função $\delta^{(0)}$ neste limite como

$$\delta_{\text{FO},L\beta}^{(0)}(a_Q) = a_Q + 5,119a_Q^2 + 28,78a_Q^3 + 156,7a_Q^4 + 900,8a_Q^5 + 4867a_Q^6 + \dots, \quad (5.22)$$

que deve ser comparada com a Eq. (3.28). O limite large- β_0 é uma boa aproximação apenas até ordem a_Q^2 para a função de Adler reduzida, enquanto que para a prescrição FOPT da função $\delta^{(0)}$ é uma boa aproximação até o último termo conhecido da QCD que é o termo de ordem quatro. A razão para essa melhora está no fato de que os coeficientes de FOPT dependem tanto dos coeficientes da função β , que são amplamente dominados pelo termo β_1 em QCD, como das integrais da Eq. (3.25).

Abaixo nós usaremos diferentes aproximantes de Padé para obter previsões para os coeficientes de ordens mais altas da função de Adler reduzida no limite large- β_0 . Neste caso, a precisão do método pode ser sempre aferida por comparação com os resultados exatos.

Uma característica especial deste limite é a maneira simples com que a dependência de esquema aparece através do fator $e^{(C+5/3)u}$ na Eq. (5.20). O parâmetro C mede o afastamento do esquema $\overline{\text{MS}}$. Fica claro que os resíduos dos renômalons é dependente de esquema, já que têm valores diferentes para diferentes valores de C , enquanto sua posição, que é relacionada com a dimensão de operadores na OPE, é independente de esquema. Resultados físicos devem ser independentes de esquema. Sabemos que o acoplamento α_s é

[¶] É possível verificar que não é uma função do tipo Stieltjes através de determinantes obtidos a partir dos coeficientes da expansão em série da função. Todos os determinantes devem, necessariamente, ser positivos, caso algum deles não seja, a função não é tipo Stieltjes. Uma explicação detalhada pode ser encontrada no livro do Baker.²⁸

dependente de esquema, pois possui valores diferentes para diferentes procedimentos de renormalização. Então, a expansão perturbativa em α_s também será dependente de esquema. Mas, independente do esquema utilizado, a expansão perturbativa é uma aproximação de um resultado físico, logo a qualidade da aproximação irá depender do esquema utilizado. Além disso, dado o fato de que a série em α_s é assintótica, logo, é divergente, o melhor esquema depende da quantidade de termos da série que são conhecidos. Um esquema mais perturbativo, com um valor menor de α_s , pode dar uma boa aproximação apenas para ordens mais altas, enquanto um esquema com um valor alto de α_s , ou seja, menos perturbativo, pode aproximar séries mais rapidamente, e são preferíveis para aplicações práticas. Abaixo vamos explorar esta dependência de esquema da transformada de Borel com o uso de aproximantes de Padé.

Neste contexto, o resultado físico é dado pela integral de Borel, Eq. (4.14) da Página 56, em que a dependência de esquema da transformada de Borel é cancelada pela dependência de esquema do acoplamento α_s . Podemos reescrever a transformada de Borel como

$$B[\widehat{D}](u) = e^{Cu} f(u), \quad (5.23)$$

onde a função $f(u)$ é independente do esquema de renormalização. Então, o resultado físico, que deve independe do esquema, dado pela integral de Borel, é

$$\widehat{D}(\alpha_s) \equiv \int_0^\infty dt \exp \left[-t \left(\frac{1}{\alpha_s^C} - \frac{\beta_1 C}{2\pi} \right) \right] f \left(\frac{\beta_1 t}{2\pi} \right), \quad (5.24)$$

onde o C de α_s^C explicita o esquema que estamos usando, logo, $\alpha_s^0 \equiv \alpha_s^{\overline{\text{MS}}}$. A combinação $\frac{1}{\alpha_s^C} - \frac{\beta_1 C}{2\pi}$ é invariante de esquema e isto nos permite escrever o acoplamento $\alpha_s^C \equiv \hat{\alpha}_s$ em termos do acoplamento no esquema mais usual, o $\overline{\text{MS}}$, como

$$\frac{1}{\alpha_s^C} \equiv \frac{1}{\hat{\alpha}_s} = \frac{1}{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}} + \frac{\beta_1 C}{2\pi} \quad (5.25)$$

logo, para $C = 0$ temos o esquema $\overline{\text{MS}}$ e, conforme tomamos valores negativos para C , o valor de α_s^C aumenta e temos os casos menos perturbativos, e se tomamos valores positivos de C , o valor de α_s^C diminui, e temos os casos mais perturbativos. A Eq. (5.25) é um caso específico da Eq. (2.43). Como o limite large- β_0 leva em conta apenas o termo β_1 , se fizermos nulos os outros termos da função β na Eq. (2.43), retomamos a Eq. (5.25). Notemos também que, como a função β da QCD é dominada por β_1 , o comportamento qualitativo de $\hat{\alpha}_s$ com relação a C permanece o mesmo neste limite, como podemos ver pela Figura 26, onde $\hat{\alpha}_s^C(m_\tau)$ é o acoplamento $\hat{\alpha}_s(m_\tau)$ dividido por π .

Aqui, iremos explorar a liberdade de escolha de esquema no sentido de otimizar a aproximação racional da transformada de Borel da função de Adler reduzida. É particularmente importante notarmos que os esquemas com valores de C negativos, portanto, menos perturbativos, introduzem uma supressão dos resíduos dos pólos IR. Nestes esquemas, as

Figura 26 – Acoplamento $\hat{a}_s^C(m_\tau)$ como função de C no limite large- β_0 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

contribuições dos pólos IR são amplamente dominadas pelos primeiros pólos, muito mais do que em esquemas com $C > 0$. Por outro lado, os pólos UV são realçados, e esperamos que o comportamento de sinal alternado da série se mostre em baixas ordens. Para cálculos perturbativos, esses esquemas com altos valores de $\hat{a}_s$ são essencialmente sem utilidade, mas vamos mostrar que para aproximantes racionais eles melhoram os resultados práticos obtidos, tais como previsões de termos desconhecidos da série, integral de Borel, etc.

5.2.1 Esquema $\overline{\text{MS}}$

Vamos começar usando aproximantes de Padé para estudar a expansão perturbativa da função de Adler e da função $\delta^{(0)}$ no esquema $\overline{\text{MS}}$. Como em large- β_0 conhecemos o resultado exato, podemos avaliar a qualidade da aproximação e refinar o método que iremos aplicar em QCD. No restante dessa seção nós iremos elaborar uma estratégia para extrair a maior quantidade possível de informação sobre a série usando aproximantes racionais.

A primeira questão que surge é qual, ou quais sequências de Padé utilizar? Nas nossas convenções, o esquema $\overline{\text{MS}}$ corresponde a $C = 0$, o que significa que a transformada de Borel exata diverge exponencialmente quando $u \rightarrow \infty$. Como não temos um comportamento simples de divergência do tipo de potência para altos valores de u , não podemos utilizar este limite para determinar a melhor sequência, como feito, por exemplo, no trabalho de P. Masjuan e S. Peris.³⁰ Portanto, estudaremos mais do que uma sequência, mantendo

em mente que em QCD temos apenas os primeiros quatro coeficientes da função de Adler. Relembrando o que já foi discutido no Capítulo 4, para construirmos o Padé P_N^M , precisamos de $M + N + 1$ coeficientes.

Vamos iniciar com a sequência $P_N^{N+1}(u)$. Como estamos interessados na previsão do comportamento da série em ordens altas, começaremos estudando a qualidade da estimativa do primeiro coeficiente que não usamos para construir o Padé. Cada P_N^{N+1} precisa de $2N + 2$ parâmetros para ser construído, então usaremos os primeiros $2N + 2$ coeficientes da transformada de Borel da função de Adler e fixaremos os parâmetros do Padé conforme discutido no Capítulo 4. O Padé é reconstruído e expandido a fim de produzir uma estimativa para o coeficiente $c_{2N+3,1}$. Para o primeiro caso não trivial ($N = 1$), temos o Padé P_1^2 , e precisamos dos coeficientes $c_{1,1}$, $c_{2,1}$, $c_{3,1}$ e $c_{4,1}$ para fixar os parâmetros, logo, encontramos

$$P_1^2(u) = \frac{1,359 + 0,6221u + 1,889u^2}{4,271 - u}, \quad (5.26)$$

a partir do qual nós extraímos o valor 52,33 para $c_{5,1}$, que deve ser comparado com o valor exato 787,8, dado pela Eq. (5.21), claramente não temos uma boa previsão. Para a série FOPT, obtemos o valor 165,3 para o quinto coeficiente, que deve ser comparado com 900,8, dado pela Eq. (5.22). O PA apresenta um pólo em $u = 4,271$, que não pode ser associado de forma direta como nenhum pólo da transformada de Borel exata. Como dito anteriormente, em um Padé com muitos pólos, podemos esperar que apenas o pólos mais próximos da origem possam ser identificados com pólos da função original, portanto, como o PA P_1^2 têm apenas um pólo, é de se esperar que esse pólo não reproduza nenhum pólo da função original. Uma representação visual da qualidade da aproximação pode ser vista na Figura 27, que mostra o resultado exato da função de Adler no limite large- β_0 e o resultado reconstruído a partir de $P_1^2(u)$, enquanto os resultados para $\delta^{(0)}$ em FOPT e CIPT são mostrados nas Figura 28 e 29.

É ilustrativo considerarmos o próximo aproximante de Padé nesta sequência, $P_2^3(u)$, e comparar os resultados. Neste caso, encontramos

$$P_2^3(u) = \frac{0,3385 + 0,4005u + 0,3219u^2 + 0,1609u^3}{(0,8024 + u)(1,325 - u)}. \quad (5.27)$$

Agora, o primeiro coeficiente que pode ser previsto é o $c_{7,1}$, para o qual encontramos o valor de 125.745, que deve ser comparado com o valor exato 98.572,8. O coeficiente de sétima ordem da série FOPT também têm uma previsão muito melhor: 59.456,6, que deve ser comparado com o coeficiente exato 32.284,3. Este aproximante é capaz de reproduzir qualitativamente o comportamento da função de Adler e da série FOPT em ordens altas, principalmente devido ao fato de que ele exibe um pólo em $u = -0,8024$, que emula o primeiro pólo UV em $u = -1$. Isto é suficiente para garantir coeficientes de sinais alternados em ordens altas, como mostra a Figura 27. O aproximante P_2^3 também tem um

Figura 27 – Resultados da expansão perturbativa da função de Adler no limite large- β_0 usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 28 – Resultados para a função $\delta^{(0)}$ usando a prescrição FOPT e $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$.

Figura 29 – Resultados para a função $\delta^{(0)}$ usando a prescrição CIPT e $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

segundo pólo no eixo real positivo em 1,3250, inferior ao valor exato do primeiro pólo IR em $u = 2$.

Os aproximantes de Padé também podem ser usados como uma maneira de ressonar a série original. No nosso caso, a integral de Borel pode ser feita com o Padé reconstruído usando a Eq. (4.14), para produzir uma estimativa para a soma de Borel da série. Na segunda linha da Tabela 1 nós mostramos o resultado obtido com P_1^2 no $\overline{\text{MS}}$, enquanto na terceira linha, mostramos o resultado obtido com P_2^3 . Notemos que o resultado com P_2^3 é compatível com o valor exato.

Tabela 1 – Resultado para a integral de Borel em large- β_0 usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$.

	Integral de Borel
Large- β_0 (exato)	$0,1481 \pm 0,0030i$
P_1^2	$0,135624 \pm 0,000001i$
P_2^3	$0,143 \pm 0,011i$
P_3^4	$0,1464 \pm 0,0086i$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nas Figuras 27, 28 e 29 as linhas sólidas pretas representam os resultados exatos no limite large- β_0 , as linhas traço-ponto vermelhas são os resultados obtidos a partir do Padé P_1^2 , as linhas tracejadas azuis são os resultados obtidos a partir do Padé P_2^3 , a linha laranja sólida horizontal é o resultado da soma de Borel exata, enquanto a banda amarela é a ambiguidade da integral de Borel.

É interessante investigar sistematicamente a convergência da sequência de Padés com relação a N . Na Figura 30 mostramos o comportamento do erro relativo, Eq. (4.32), da estimativa do coeficiente $c_{2N+3,1}$ para a sequência P_N^{N+1} com função de N . Finalmente, na Figura 31 mostramos os resultados para a integral de Borel como função de N . Como esperado, as aproximações se tornam cada vez melhores, mas os erros se tornam significativamente pequenos apenas para altos valores de N . Na realidade, em QCD, nós temos apenas os quatro primeiros coeficientes e apenas um Padé dessa sequência pode ser utilizado, que é o P_1^2 , que não atende a precisão necessária para permitir qualquer conclusão definitiva sobre as ordens mais altas.

Investigamos também várias outras sequências de Padés, tais como P_N^{N+2} , P_N^N , P_{N+1}^N , P_{N+2}^N e P_{N+3}^N . Os resultados são qualitativamente similares; em todos os casos a convergência para o resultado exato acontece rapidamente conforme aumentamos o valor de N . A Figura 30 mostra o erro relativo do primeiro coeficiente previsto para quatro diferentes sequências como função de $M + N$. Observamos que a melhora na predição conforme aumentamos N de uma unidade nas sequências, o que corresponde ao aumento de $M + N$ de duas unidades, é em torno de uma ordem de magnitude ou mais. Existem alguns casos em que o aumento de N em uma unidade não representa uma melhora, algumas vezes ocorre um aumento do erro relativo. Contudo, a tendência geral é que os resultados melhorem, e isso sempre acontece quando tomamos valores altos de N . Por exemplo, quando $N = 4$, em todas as sequências os resultados são ordens de magnitude melhores quando comparados com o primeiro Padé da sequência. Observemos ainda que a convergência dessas sequências em large- β_0 já havia sido estudada por M. Samuel, J. Ellis e M. Karliner³¹ e confirmamos os seus resultados. Na Figura 31 mostramos os resultados da

Figura 30 – Erro relativo da primeira previsão do coeficiente da função de Adler para diferentes seqüências de Padé.

Fonte: Elaborada pelo autor.

integral de Borel para as mesmas quatro seqüências como função de $M + N$. Os resultados convergem bastante rápido conforme aumentamos N . Outra observação interessante é que os aproximantes de Padé com valores altos de N tendem a ter pólos que podem ser identificados com os primeiros renôrmalons — pelo menos para os que estão mais próximos da origem. Em todos os casos, contudo, valores realísticos de N ($N = 1$ para P_N^{N+1} e P_{N+1}^N e $N = 0$ para P_{N+3}^N) ainda não provêem uma boa aproximação, como podemos ver nas Figuras 27, 28, 29, 30 e 31. Como na realidade apenas os quatro primeiros coeficientes da função de Adler são conhecidos na QCD completa, seria desejável obter uma melhor aproximação para esses valores inferiores de N . Na próxima seção, iremos discutir como as variações de esquema podem ser usadas para este fim.

5.2.2 Variação de esquemas

O resultado exato da transformada de Borel da função de Adler no limite large- β_0 , Eq. (5.20), exhibe explicitamente uma importante propriedade: os resíduos do pólos renormalômicos são dependentes do esquema de renormalização, mas suas localizações não são. Aqui, iremos explorar esta característica no sentido de melhorar os resultados preditos na seção anterior.

Uma das dificuldades do uso de Padés com poucos parâmetros está no fato de que eles tentam emular um número infinito de pólos renormalômicos e sua inter-relação complicada com apenas alguns pólos. No $\overline{\text{MS}}$, em baixas ordens, os primeiros pólos UV e IR contribuem consideravelmente para os coeficientes.^{23,27} Contudo, usando esquemas com valores de C negativos a transformada de Borel começa a ser muito mais dominada

Figura 31 – Resultados da soma de Borel para diferentes sequências de Padé usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$. A banda horizontal é dada pela ambiguidade imaginária do valor verdadeiro.

Fonte: Elaborada pelo autor.

pelo primeiro pólo UV, devido ao fator $e^{(C+5/3)u}$ e a alternância de sinal deveria aparecer em baixas ordens. Por causa dessa dominância, fica mais fácil para o aproximante de Padé reproduzirem esta série. É importante lembrar que valores negativos de C tornam o valor de α_s alto³⁷ como podemos ver pela Eq. (2.35). Esses esquemas são ruins para cálculos perturbativos mas podem ser úteis, por exemplo, para obter estimativas da soma de Borel da série, já que este é um resultado independente de esquema. Finalmente, os resultados para os coeficientes com valores negativos de C podem ser traduzidos para o $\overline{\text{MS}}$ usando a relação entre os dois acoplamentos, e vamos mostrar que isto nos leva a melhores resultados para coeficientes de ordens altas.

Escolhemos trabalhar com $C = -5/3$ pois este é o exato valor em que o termo exponencial se anula na Eq. (5.20). Neste esquema o valor do acoplamento é $\hat{\alpha}_s(m_\tau) = 0,5074$. Os primeiros seis coeficientes da função de Adler no limite large- β_0 para $C = -5/3$, denotado por $\widehat{D}_{L\beta}^{(C=-5/3)}$, são ($N_f = 3$)

$$\widehat{D}_{L\beta}^{(C=-5/3)}(\hat{a}_Q) = \hat{a}_Q - 2,194\hat{a}_Q^2 + 18,10\hat{a}_Q^3 - 139,0\hat{a}_Q^4 + 1610\hat{a}_Q^5 - 20759\hat{a}_Q^6 + \dots \quad (5.28)$$

Observamos que, como esperado, a alternância de sinal dos coeficientes da série começa em ordens muito mais baixas, neste caso começa a partir do segundo coeficiente. O resultado exato para a função de Adler no limite large- β_0 para $C = -5/3$ pode ser visto na Figura 32. Pela figura fica claro que a assintoticidade se instala bem antes também devido ao alto valor do parâmetro de expansão $\hat{\alpha}_s$.

Vamos considerar de novo o Padé $P_1^2(u)$, mas agora no esquema $C = -5/3$. Neste

Figura 32 – Resultados da expansão perturbativa da função de Adler no limite $\text{large-}\beta_0$ usando $C = -5/3$ e $\alpha_s(m_\tau) = 0,5074$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

novo esquema encontramos

$$P_1^2(u) = \frac{0,2798 + 0,0455u + 0,1899u^2}{0,8790 + u}, \quad (C = -5/3). \quad (5.29)$$

Agora, para o coeficiente $c_{5,1}$ o resultado é 1423, que deve ser comparado com o valor exato 1610 na Eq. (5.28), um erro relativo de apenas 0,12 — uma melhora de cerca de uma ordem de grandeza com relação ao resultado em $\overline{\text{MS}}$. O resultado para $c_{6,1}$, uma ordem mais alta, ainda é muito bom: -18.212 . O Padé também apresenta um pólo em $-0,8790$, próximo ao renôrmalon dominante UV, e que reproduz o comportamento de sinal alternado dos coeficientes. Finalmente, a integral de Borel, agora é 0,1416, muito próxima ao valor exato da primeira linha da Tabela 1. Na Figura 32 vemos que a concordância com o valor exato da função de Adler é boa mesmo em ordens mais altas. Claramente, P_1^2 neste esquema provê uma predição muito mais precisa da função verdadeira do que a sua contraparte no $\overline{\text{MS}}$.

Para $C = -5/3$, os resultados para P_1^2 são tão bons que a melhora quando usamos o P_2^3 é modesta. Encontramos

$$P_2^3(u) = \frac{0,2299 - 0,2080u + 0,0769u^2 - 0,1283u^3}{(0,8757 - u)(0,8248 + u)}, \quad (C = -5/3). \quad (5.30)$$

A predição do sétimo coeficiente tem agora um erro relativo de 0,10 e a posição do pólo mais próximo à origem é similar à previsão do aproximante anterior: $-0,8248$. A predição para a integral de Borel novamente é boa: $0,1394 \pm 0,0048i$, mas ocorre uma piora em relação ao resultado previsto pelo P_1^2 .

Figura 33 – Erro relativo da primeira previsão do coeficiente da função de Adler para diferentes sequências de Padé usando $C = -5/3$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para o próximo Padé na sequência, P_3^4 , a previsão do nono coeficiente têm um erro relativo de $1,9 \times 10^{-3}$, cerca de duas ordens de magnitude melhor do que no $\overline{\text{MS}}$. Um fator interessante é que esse Padé têm dois pólos perto de $u = -1$, um em $-1,1312$ e outro em $-0,9385$ que imita o fato de que o pólo dominante UV é, de fato, um pólo duplo. Ele apresenta também um pólo em $1,788$, que é próximo da localização do primeiro pólo IR, que fica em $u = 2$. Finalmente, a integral de Borel é quase igual ao valor exato: $0,1476 \pm 0,0084i$, que deve ser comparada com $0,1481 \pm 0,0030i$ da Tabela 1.

Na Figura 32 a linha sólida preta é o resultado exato da função de Adler no limite large- β_0 usando $C = -5/3$, a linha traço-ponto vermelha é o resultado usando o Padé P_1^2 , a linha pontilhada azul é o resultado usando o Padé P_2^3 , a linha horizontal laranja é o resultado da integral de Borel, e a banda amarela é a ambiguidade da integral.

Na Figura 33 mostramos o erro relativo da previsão do primeiro coeficiente não usado como entrada usando as mesmas quatro sequências da Figura 30. A comparação com os resultados em $\overline{\text{MS}}$, mostrados na Figura 30, claramente mostra a vantagem de se utilizar esquemas menos perturbativos. Por exemplo, os resultados para P_N^{N+1} , para $N = 1$ são tão bons quanto os resultados do $\overline{\text{MS}}$ para $N = 3$, mas requer quatro parâmetros a menos. Os resultados para a soma de Borel, que é independente de esquema para qualquer sequência de Padé, seguem o exemplo e também são significativamente melhores do que no $\overline{\text{MS}}$, como mostra a Figura 34. É importante ressaltar que os resultados são ainda melhores se tomarmos valores de C ainda mais negativos que $-5/3$. Isto significa que a melhora do resultado não deve ser atribuída ao cancelamento da exponencial e sim ao domínio do pólo UV.

Figura 34 – Resultados da soma de Borel para diferentes sequências de Padé usando $C = -5/3$ e $\alpha_s(m_\tau) = 0,5074$. A banda horizontal é dada pela ambiguidade imaginária do valor verdadeiro.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste ponto é legítimo perguntar qual é o uso do aproximante de Padé construído para $C = -5/3$, já que na prática, queremos estudar a série perturbativa no esquema $\overline{\text{MS}}$. Primeiro, a soma de Borel da série é uma quantidade invariante de esquema e, portanto, pode-se utilizar Padés com outros valores de C para obter uma estimativa para a soma de Borel. Mas podemos aproveitar também o fato de que os coeficientes da série perturbativa são bem reconstruídos em esquemas com valores negativos de C . A expansão da Eq. (5.25) nos fornece a seguinte relação perturbativa entre dois esquemas diferentes

$$\hat{a}_Q = a_Q + \frac{C\beta_1}{2}a_Q^2 + \left(\frac{C\beta_1}{2}\right)^2 a_Q^3 + \left(\frac{C\beta_1}{2}\right)^3 a_Q^4 + \dots, \quad (5.31)$$

onde na direita nós temos a_Q no $\overline{\text{MS}}$ e a esquerda $\hat{a}_Q \equiv a_Q^C$. Aplicando esta relação perturbativa para uma expansão tal como da Eq. (5.28) podemos reconstruir o resultado no $\overline{\text{MS}}$ a partir de sua contraparte em um esquema com diferente valor de C . Realizando este procedimento para o resultado obtido a partir de $P_1^2(u)$ construído em $C = -5/3$, chegamos em predições muito melhores para os coeficientes de ordens mais altas, como a Tabela 2 mostra. As predições são muito superiores às obtidas quando os Padés foram construídos diretamente no $\overline{\text{MS}}$. Vamos fechar essa seção mostrando a melhora no comportamento da função de Adler e da função $\delta^{(0)}$ através das Figuras 35, 36 e 37.

5.2.3 Aproximantes de Padé utilizando os primeiros quatro coeficientes

O propósito desta seção é utilizar os resultados obtidos em large- β_0 para construir um algoritmo que possa ser usado em QCD com intuito de obter uma estimativa de $c_{5,1}$ usando apenas os primeiros quatro coeficientes da função de Adler como valores de

Tabela 2 – Coeficientes da função de Adler no limite large- β_0 usando os esquemas $\overline{\text{MS}}$ e $C = -5/3$ e usando diferentes Padés.

	$c_{5,1}$	$c_{6,1}$	$c_{7,1}$	$c_{8,1}$	$c_{9,1}$
Large- β_0 (exato)	787,8	-1991	$9,857 \times 10^4$	$-1,078 \times 10^6$	$2,775 \times 10^7$
P_1^2 ($\overline{\text{MS}}$)	52,33	137,9	$4,358 \times 10^2$	$1,605 \times 10^3$	$2,186 \times 10^4$
P_1^2 ($C = -5/3$)	600,5	-2958	$7,022 \times 10^4$	$-1,134 \times 10^6$	$2,382 \times 10^7$
P_2^3 ($\overline{\text{MS}}$)	entrada	entrada	$1,257 \times 10^5$	$-1,372 \times 10^6$	$4,566 \times 10^7$
P_2^3 ($C = -5/3$)	entrada	entrada	$1,311 \times 10^5$	$-9,721 \times 10^5$	$5,123 \times 10^7$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 35 – Resultados da expansão perturbativa da função de Adler no limite large- β_0 contruído no esquema $C = -5/3$ e então transferido para o esquema $\overline{\text{MS}}$ usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$

Fonte: Elaborada pelo autor.

entrada. Esta estimativa não faz uso do nosso conhecimento prévio sobre as singularidades renormalômicas ou da forma exata da transformada de Borel, mas faz uso das variações de esquema descritas acima.

O primeiro problema que surge é como obter o melhor valor de C sem conhecer o resultado exato da transformada de Borel. Propomos otimizar o valor de C a partir dos aproximantes de Padé que podem ser usados para fazer uma previsão do coeficiente $c_{4,1}$. Neste caso, temos P_2^0 e P_1^1 . Construímos esses aproximantes como função de C e então encontramos o valor de C que reproduz o valor do coeficiente $c_{4,1}$ corretamente (depois de evoluir os resultados de volta ao esquema $\overline{\text{MS}}$, como descrito na seção anterior). A partir deste exercício vemos que não existe um valor de C para P_1^1 , mas para P_2^0 nós

Figura 36 – Resultados para a função $\delta^{(0)}$ usando a prescrição FOPT construído no esquema $C = -5/3$ e então transferido para o esquema $\overline{\text{MS}}$ e $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$.

Figura 37 – Resultados para a função $\delta^{(0)}$ usando a prescrição CIPT construído no esquema $C = -5/3$ e então transferido para o esquema $\overline{\text{MS}}$ e $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

encontramos que $C = -1,162$ reproduz o valor exato de $c_{4,1}$. É importante ressaltar que o melhor valor de C aqui é negativo, como discutido na última seção. Em seguida atribuímos uma incerteza de 0,2 no valor de C para checar a estabilidade do resultado, logo, iremos trabalhar com $C = -1,16 \pm 0,20$.

Com o melhor valor de C determinado, prosseguimos com a “predição” de $c_{5,1}$ e coeficientes mais altos. Construímos os Padés P_3^0 , P_1^1 e P_2^1 em $C = \{-1, 36, -1, 16, -0, 96\}$. Para o nosso valor central de C , os Padés P_3^0 e P_2^1 são essencialmente degenerados em torno de $u \approx 0$. Logo, suas informações são redundantes e podemos reter apenas os Padés $P_1^1(u)$ e $P_2^1(u)$. Cada Padé fornece uma determinação para todos os coeficientes de ordens mais altas. Para cada coeficiente vamos utilizar o valor médio entre esses dois. Vamos tomar como a incerteza metade da distância entre os valores dos coeficientes em $C = -1, 16$ e adicionar em quadratura a incerteza vinda da variação de C . Esse procedimento fornece, para $c_{5,1}$, o seguinte resultado

$$c_{5,1}^{\text{Padés}} = 713 \pm 365 \pm 40, \quad (5.32)$$

onde a primeira incerteza é a metade da distância entre os valores dos coeficientes em $C = -1, 16$ e a segunda incerteza é devida a variação de C . Os resultados para os coeficientes de ordens mais altas são dados na Tabela 3. Os Padés são capazes de reproduzir o início do comportamento de sinal alternado a partir da sexta ordem. Isto é devido ao fato de quem em ambos os casos o pólo mais próximo da origem é um pólo UV que encontra-se nas proximidades do pólo dominante UV em $\text{large-}\beta_0$. Para P_1^2 o pólo é em $u = -1,155$, enquanto para P_2^1 o pólo mais próximo da origem fica em $u = -0,737$.

Uma estimativa para a soma de Borel da série pode também ser obtida usando o

Tabela 3 – Coeficientes da função de Adler no limite $\text{large-}\beta_0$ e no esquema $\overline{\text{MS}}$ usando aproximantes de Padés construídos a partir dos primeiros quatro coeficientes.

	$c_{5,1}$	$c_{6,1}$	$c_{7,1}$
$\text{large-}\beta_0$	787,8	-1991	$9,857 \times 10^4$
Aproximantes de Padé	713 ± 377	-1870 ± 779	$(1,18 \pm 0,97) \times 10^5$
	$c_{8,1}$	$c_{9,1}$	$c_{10,1}$
$\text{large-}\beta_0$	$-1,078 \times 10^6$	$2,775 \times 10^7$	$-2,581 \times 10^9$
Aproximantes de Padé	$(-1,26 \pm 1,01) \times 10^6$	$(4,8 \pm 4,4) \times 10^7$	$(-1,0 \pm 0,9) \times 10^9$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 38 – Resultados da expansão perturbativa da função de Adler no limite $\text{large-}\beta_0$ no esquema $\overline{\text{MS}}$ usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$ e os aproximantes de Padé.

Fonte: Elaborada pelo autor.

mesmo procedimento de médias, e isso nos fornece

$$B[\widehat{D}]^{(Padés)} = 0,1396 \pm 0,010 \pm 0,0005, \quad (5.33)$$

onde a primeira incerteza vem da ambiguidade imaginária da integral de Borel e a segunda incerteza vem da variação do valor de C e e da metade da distância dos valores obtidos com os três aproximantes.

Na Figura 38 mostramos a função de Adler obtida a partir do procedimento descrito acima, bem como a função exata. Os resultados em quinta e sexta ordem são bem reproduzidos, apesar de em sexta ordem a incerteza já começar a ser importante. Em sétima e oitava ordem, apesar do valor central estar de acordo com o valor exato, as

Figura 39 – Resultados para a função $\delta^{(0)}$ usando a prescrição FOPT no esquema $\overline{\text{MS}}$ usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$ e os aproximantes de Padé.

Figura 40 – Resultados para a função $\delta^{(0)}$ usando a prescrição CIPT no esquema $\overline{\text{MS}}$ usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$ e os aproximantes de Padé.

Fonte: Elaborada pelo autor.

incertezas se tornam muito grandes. Além da oitava ordem o resultado do aproximante de Padé não consegue reproduzir a função exata. Na Figura 39 vemos que para a prescrição FOPT o resultado é bastante razoável até sétima ordem, apesar de, novamente, a incerteza começar a ser muito grande. Além dessa ordem, os resultados do valor central são razoáveis, mas as incertezas são enormes, principalmente devido à diferença entre as previsões dos dois Padés. Em CIPT, Figura 40, a concordância é melhor, mas isso pode ser facilmente entendido: como a evolução de α_s é ressonada em todas as ordens ela têm uma importância relativa muito maior, quando comparada com os coeficientes individuais da função de Adler.

Nas Figuras 38, 39 e 40 a linha preta sólida representa o resultado exato no limite $\text{large-}\beta_0$ enquanto as linhas pontilhadas representam o resultados obtidos a partir dos aproximantes de Padés.

5.3 Aproximantes de Padé Parciais no limite $\text{large-}\beta_0$

O propósito da última seção foi construir aproximantes racionais que não utilizassem nosso conhecimento sobre a estrutura dos renômalons da transformada de Borel da função de Adler. Vimos que sequências de Padés parecem convergir para a transformada de Borel, como esperado pelos teoremas de convergência da Seção 4.2, mas em aplicações realistas, onde temos apenas os primeiros quatro coeficientes da série pode ser necessário empregar um método para acelerar a convergência, como a variação do esquema que discutimos anteriormente. Nesta seção vamos mostrar que usando o conhecimento sobre os renômalons podemos obter resultados significativamente melhores.

Vamos considerar os Aproximantes de Padé Parciais (PPA) como definidos na

Eq. (4.24) da Página 60. É suficiente para nossa discussão apresentar em detalhes os resultados obtidos a partir do aproximante $\mathbb{P}_{N,5}^M$. O polinômio $T_5(u)$ é construído de forma a reproduzir os primeiros cinco pólos da transformada de Borel da função de Adler

$$T_5(u) = (u+1)^2(u-2)(u-3)^2. \quad (5.34)$$

Podemos então estudar sequências próximas a diagonal como discutido na seção anterior, por exemplo, $\mathbb{P}_{N,5}^{N+1}$, $\mathbb{P}_{N+1,5}^N$, ou $\mathbb{P}_{N,5}^N$. É esperado que essas sequências forneçam resultados muito melhores pois a série perturbativa é dominada em ordens intermediárias e altas pelos pólos mais próximos da origem.

Vamos começar com os resultados para a sequência $\mathbb{P}_{N,5}^{N+1}$, construindo os PPAs no esquema de renormalização $\overline{\text{MS}}$. Na Figura 41 nós mostramos a função de Adler obtida a partir dos PPAs $\mathbb{P}_{1,5}^2$ e $\mathbb{P}_{2,5}^3$. A comparação visual com a Figura 27 mostra que os resultados agora são muito superiores. O erro relativo do coeficiente $c_{5,1}$ obtido a partir do $\mathbb{P}_{1,5}^2$ é 21 vezes menor do que o obtido com o P_1^2 . Os quatro coeficientes usados para fixar os parâmetros de $\mathbb{P}_{1,5}^2$ fornecem informação o suficiente para obtermos uma boa aproximação mesmo após o regime de assintoticidade, um exemplo disso é que o décimo coeficiente é previsto com um erro relativo de apenas 7,3%. Esta reprodução da série é obtida pela geração de um pólo em 1,750. Resultados vindos de $\mathbb{P}_{2,5}^3$ são tão similares a função original que não é possível distingui-los a olho. O aproximante $\mathbb{P}_{2,5}^3$ tem um par de pólos complexos em $2,854 \pm 0,992i$, que aparecem devido ao fato de que a função meromórfica que está sendo aproximada não é do tipo Stieltjes, como dito anteriormente.

O uso do esquema com $C = -5/3$ acelera ainda mais a convergência e ao compararmos os resultados vindos de $\mathbb{P}_{1,5}^2$ com o resultado exato, não conseguimos enxergar diferenças a olho nu, tanto nos gráficos da função de Adler, como para os resultados de FOPT e CIPT. Portanto, vamos nos abster de mostrá-los aqui.

Neste ponto é importante ressaltarmos uma observação. Se em vez de considerarmos pólos duplos para o segundo pólo IR e para o pólo dominante UV nós considerarmos pólos simples na Eq. (5.34) os resultados tornam-se muito piores. O coeficiente obtido a partir de $\mathbb{P}_{1,5}^2$ muda de 753,0 para 1803, que deve ser comparado com o resultado exato de 787,8. Isto mostra que adicionar pólos na posição correta mas com a multiplicidade errada não representa, necessariamente, uma melhora em comparação com a situação em que os pólos são livres. Um caso intermediário onde apenas o pólo subdominante em $u = 3$ tem o expoente incorreto produz resultados melhores comparados com os aproximantes de Padé usuais. Isto está de acordo com o trabalho de M. Beneke, D. Boito e M. Jamin,²⁷ onde foi mostrado que impor a estrutura correta dos dois pólos dominantes é o suficiente para obter uma boa descrição da função de Adler no limite large- β_0 .

A principal observação que pode ser feita aqui é que tendo informação sobre os dois ou três primeiros renôrmalons é suficiente para obter uma excelente reconstrução da

Figura 41 – Expansão perturbativa da função de Adler no $\overline{\text{MS}}$ usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$ e PPAs.

Fonte: Elaborada pelo autor.

série, até mesmo com apenas quatro coeficientes disponíveis.

5.4 Conclusões parciais

Vamos resumir as principais conclusões obtidas a partir do uso de aproximantes de Padés no limite large- β_0 da QCD.

- A aplicação de aproximantes de Padé na transformada de Borel da função de Adler no limite large- β_0 e no esquema $\overline{\text{MS}}$ exibe convergência. Com seis ou sete coeficientes é possível reproduzir muito bem todos os aspectos essenciais da série original: os coeficientes de ordem mais alta, a soma de Borel e também a posição dos pólos dominantes. Contudo, existem alguns casos em que, ao aumentarmos a ordem do Padé, as previsões da série pioram. Porém, a convergência é sempre observada quando adicionamos um grande número de parâmetros.
- Os resultados são significativamente menos impressionantes quando apenas quatro coeficientes são utilizados para a construção do Padé — que corresponde ao número de parâmetros disponíveis na QCD. Na ausência de mais coeficientes, exploramos estratégias para melhorar a aproximação à série original utilizando apenas quatro coeficientes. No caso de large- β_0 é possível construir aproximantes de Padé que reproduzem melhor os resultados exatos utilizando os mesmos números de parâmetros. No nosso caso, conseguimos melhorar os resultados utilizando esquemas menos

perturbativos, que correspondem a $C < 0$. A melhora é devido ao fato de que a transformada de Borel nestes esquemas se torna amplamente dominada pelo pólo UV: observamos a alternância de sinal dos coeficientes mais cedo e os Padés conseguem reproduzir facilmente o comportamento da série original. Usando a relação perturbativa entre estes esquemas e o $\overline{\text{MS}}$ conseguimos obter uma boa previsão para os coeficientes de ordem mais altas também no $\overline{\text{MS}}$, o que é altamente desejável.

- Testamos outras maneiras de melhorar os resultados obtidos com aproximantes de Padé no limite large- β_0 , tal como fixando os pólos, que corresponde ao uso de Aproximantes de Padé Parciais. Os resultados melhoram significativamente enquanto fixamos os pólos na posição correta e com o expoente correto. Com o uso de cinco pólos, conseguimos reproduzir quase que exatamente todos os aspectos da série original. E, utilizando variação de esquemas juntamente com aproximantes de Padé parciais, os resultados para a expansão perturbativa são essencialmente idênticos.
- Como um subproduto de variação de esquemas, dispomos de uma estratégia para estudar os efeitos do pólo dominante UV. Construindo séries para $C < 0$ a alternância de sinal dos coeficientes começa em ordens mais baixas, para ser preciso, no segundo coeficiente. No próximo capítulo iremos aplicar o mesmo procedimento na QCD verdadeira.
- Finalmente, os resultados obtidos aqui com aproximantes de Padé são independentes de modelo, ou seja, não utilizamos nenhum conhecimento sobre a posição e o expoente dos renômalons. É importante ressaltar que, com “dependente de modelo”, queremos dizer que conhecimentos sobre os renômalons são utilizados, e como esses conhecimentos são parciais em QCD e parte deles não são provados, permanece uma dependência de modelo. Para este trabalho, a dependência de modelo é implementada com o uso dos PPAs. Observamos que utilizando os primeiros 3 pólos dominantes com seus respectivos expoente corretos, obtivemos uma incrível melhora de 21 vezes, ainda em $\overline{\text{MS}}$, quando comparados aos Padés construídos sem essas informações no mesmo esquema. Portanto, podemos concluir que os resultados obtidos em large- β_0 numa abordagem dependente de modelo são superiores aos obtidos sem o uso dos conhecimentos sobre os renômalons, porém, o uso desses conhecimentos em QCD podem ser questionados.¹⁴

6 RESULTADOS EM QCD

No capítulo anterior estudamos sistematicamente o uso de aproximantes de Padé no limite large- β_0 da QCD, com o intuito de desenvolver um algoritmo que pudéssemos usar na QCD completa. Portanto, nossos esforços neste limite levaram em consideração o fato de que conhecemos a série perturbativa da QCD até quarta ordem. Em large- β_0 concluímos que o uso de aproximantes de Padé e de variação de esquemas melhora consideravelmente a previsão do primeiro coeficiente desconhecido, assim como a previsão da integral de Borel e aumenta a rapidez da convergência da série, conforme aumentamos a ordem dos Padés.

Neste capítulo, iremos estudar o uso dos aproximantes de Padé na QCD completa, primeiro no esquema $\overline{\text{MS}}$ e, depois, aplicando o mesmo método desenvolvido na Seção 5.2.3 iremos usar a variação de esquemas para fazer uma previsão do quinto coeficiente da série perturbativa da função de Adler e da função $\delta^{(0)}$, assim como da soma de Borel e do comportamento divergente da série. A ideia principal consiste em, apenas utilizando o que realmente sabemos da série, os primeiros quatro coeficientes, obtermos previsões para os termos de ordem mais alta, portanto, queremos obter resultados que sejam independentes de modelo.

6.1 Função de Adler no esquema $\overline{\text{MS}}$

No esquema $\overline{\text{MS}}$ a série perturbativa da função de Adler é dada pela Eq. (3.22) da Página 49. Vamos agora aplicar o método Padé-Borel na transformada de Borel da função de Adler neste esquema. Com apenas quatro coeficientes podemos construir apenas três Padés, como dito anteriormente, a saber: P_1^2 , P_2^1 e P_3^0 . Portanto, usando o método de construção dos aproximantes discutido no Capítulo 4 podemos reconstruí-los e obtemos

$$P_1^2(u) = \frac{0,279 - 0,115u - 0,056u^2}{0,876 - u}, \quad (6.1)$$

$$P_2^1(u) = \frac{0,245 - 0,470u}{(u - 0,501)(u - 1,535)}, \quad (6.2)$$

$$P_3^0(u) = \frac{1,693}{(0,990 - u)(u + 0,756 + 2,191i)(u + 0,756 - 2,191i)}. \quad (6.3)$$

Todos os PAs apresentam pólos infravermelhos, com exceção de P_3^0 , que, além do pólo dominante infravermelho, apresenta também dois pólos imaginários, que, como já dissemos anteriormente, são os chamados dubletos de Froissart e se movem para longe da origem conforme aumentamos a ordem do Padé. Esses pólos IR indicam que o comportamento da função de Adler em ordens altas previsto pelo PA será de sinal não-alternado.

Tabela 4 – Coeficientes da função de Adler na QCD completa e no esquema $\overline{\text{MS}}$ usando aproximantes de Padés construídos a partir dos primeiros quatro coeficientes.

	$c_{5,1}$	$c_{6,1}$	$c_{7,1}$
Aproximantes de Padé	538 ± 111	8261 ± 4208	$(3, 71 \pm 1, 39) \times 10^5$
	$c_{8,1}$	$c_{9,1}$	$c_{10,1}$
Aproximantes de Padé	$(4, 53 \pm 4, 82) \times 10^6$	$(1, 5 \pm 1, 8) \times 10^8$	$(5, 6 \pm 7, 5) \times 10^9$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como temos três Padés distintos vamos utilizar a média deles como valor central para construir a série perturbativa em ordens mais altas e como incerteza para previsão desses coeficientes vamos utilizar metade da distância entre os valores dos coeficientes preditos, assim como no capítulo anterior. Portanto, a nossa previsão para o quinto termo é dada por

$$c_{5,1}^{\text{Padés}} = 538 \pm 111, \quad (6.4)$$

e as previsões para os coeficientes de ordens mais altas podem ser vistas na Tabela 4. Podemos observar que da oitava ordem em diante as incertezas são maiores que 100%. Além disso, os valores centrais das previsões não apresentam comportamento de sinal alternado em ordens altas.

Vimos na Seção 5.1 que ao passarmos do limite large- β_0 para a QCD completa esperamos que as posições dos renôrmalons não se alterem. Portanto, como o renôrmalon mais próximo da origem é UV em $u = -1$, esperamos que a série apresente um comportamento divergente de sinal alternado. Porém, não é o que observamos na Tabela 4. Em ordens altas, os PAs prevêm um comportamento de mesmo sinal, e esse é o primeiro indicativo de que o resíduo do renôrmalon dominante IR é maior que o resíduo do renôrmalon dominante UV.

Utilizando os Padés também podemos prever o resultado da integral de Borel, que nos fornece um valor para o observável $\widehat{D}$. O valor central da soma de Borel obtida é a média dos valores dos Padés, e é dada por

$$B[\widehat{D}]^{(\text{Padés})} = 0, 127 \pm 0, 003 \pm 0, 002, \quad (6.5)$$

onde a primeira incerteza é a ambiguidade da integral, e a segunda incerteza é a metade da distância entre os valores dos PAs utilizados. Notemos que o valor é menor do que a soma de Borel no limite large- β_0 , o que era esperado, dado que, pelo menos até quarta ordem, os coeficientes da função de Adler na QCD são menores do que neste limite.

Na Figura 42 vemos a função de Adler prevista pelos Padés em função da ordem perturbativa. Na figura, também temos o valor da integral de Borel obtida com os Padés

Figura 42 – Resultados da expansão perturbativa da função de Adler na QCD completa usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$ e no esquema $\overline{\text{MS}}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

da Eq (6.5), dada pela linha laranja horizontal, bem como sua incerteza, que provém da ambiguidade da integral e dos diferentes valores obtidos com os PAs. O valor das incertezas aumenta consideravelmente conforme aumentamos a ordem perturbativa, de forma que, na sétima ordem já temos um valor bem alto para as incertezas.

Na Figura 43 mostramos o resultado da expansão perturbativa da função $\delta^{(0)}$. Na figura, a linha sólida vermelha mostra o resultado utilizando a prescrição FOPT, enquanto a linha pontilhada azul mostra o resultado utilizando a prescrição CIPT. Também temos na figura o valor obtido resolvendo a integral da função $\delta^{(0)}$, dada pela linha laranja horizontal, assim como sua incerteza.

Notemos que para ambas as prescrições o comportamento divergente é de sinal não-alternado, devido ao pólo dominante IR do Padé. Nossa expectativa era que, pelo menos em ordens muito altas, o comportamento fosse de sinal alternado, e não é o que acontece. Isso pode ser explicado devido ao fato de o resíduo do pólo IR em QCD ser muito maior que o resíduo do pólo UV, portanto, o Padé não consegue reproduzir o pólo em UV, que faria com que a série tivesse um comportamento divergente de sinal alternado. Notemos também que, se truncarmos a série na quarta ordem na Figura 43, como fazemos em QCD, não conseguimos distinguir qual prescrição fornece um resultado melhor para a soma de Borel, já que ambas são compatíveis com a barra amarela horizontal, embora CIPT pareça ser levemente favorecida.

Figura 43 – Resultados da expansão perturbativa da função de $\delta^{(0)}$ na QCD completa usando as prescrições FOPT e CIPT, $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$ e no esquema $\overline{\text{MS}}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesta seção fizemos os passos análogos ao da Seção 5.2.1 em $\text{large-}\beta_0$. Nesta última observamos que os Padés aplicados diretamente no esquema $\overline{\text{MS}}$ forneciam resultados discrepantes em comparação com o resultado exato. Isto nos levou a pensar em um método de melhorar os resultados obtidos, que foi o método de variação de esquema. Na próxima seção, iremos utilizar a variação de esquema em QCD para refinar os resultados obtidos aqui.

6.2 Variação de esquemas na QCD

Nesta seção iremos aplicar o método desenvolvido para o limite $\text{large-}\beta_0$ na Seção 5.2.3 na QCD completa. No capítulo anterior vimos que, em $\text{large-}\beta_0$, esquemas com $C < 0$ melhoram os resultados obtidos, agora, porém, não temos nenhuma garantia de que estes esquemas específicos irão melhorar os resultados. Como discutido, em $\text{large-}\beta_0$ os resíduos dos pólos são dependentes de C e para $C < 0$ a transformada de Borel se torna amplamente dominada pelo pólo dominante UV e a série apresenta alternância de sinal dos coeficientes logo nas primeiras ordens. Se utilizarmos o mesmo C da Seção 5.2.3, ou seja, $C = -1,16$, obtemos a seguinte expansão para a função de Adler da QCD completa

$$\widehat{D}_{\text{QCD}}^{(C=-1,16)}(\hat{a}_Q) = \hat{a}_Q - 1,060\hat{a}_Q^2 + 1,317\hat{a}_Q^3 + 23,14\hat{a}_Q^4 + \dots, \quad (6.6)$$

onde substituímos a Eq. (2.45) na Eq. (3.22) para obtermos esse resultado. Observemos que não há alternância sistemática de sinal até quarta ordem, diferente do que vemos, por exemplo, na Eq. (5.28). Isto é outro indicativo de que em QCD o pólo IR é mais dominante do que o pólo UV, portanto, têm seu resíduo maior e também explica o motivo de os Padés da seção anterior terem pólos IR. Notemos que para voltarmos os resultados para o esquema $\overline{\text{MS}}$, basta substituímos a Eq. (2.44) na Eq. (6.6).

Antes de aplicarmos o método desenvolvido, relembremos que este consiste em, utilizando Padés com três parâmetros (P_1^1 e P_2^0), determinamos o valor de C que fornece a melhor previsão do quarto coeficiente e então construímos Padés com quatro coeficientes (P_1^2 , P_2^1 e P_3^0) neste esquema determinado para realizarmos previsões para o quinto termo da série, para a integral de Borel, para as posições dos pólos, etc.

Utilizando os Padés P_1^1 e P_2^0 , que reproduzem a série exatamente até terceira ordem, e também a Eq. (2.45), reescrevemos os PAs como função de C , e então procuramos um valor de C que nos fornece a melhor previsão de $c_{4,1}$. Para ambos os PAs encontramos para C em torno de 0,33 uma previsão com precisão até sexta casa decimal. Assim como na Seção 5.2.3 vamos também variar C de 0,2 para avaliarmos a estabilidade do resultado com relação a variação de esquema, portanto, construímos os Padés com quatro parâmetros utilizando $C = \{0, 13, 0, 33, 0, 53\}$. Para o valor central de C os aproximantes são

$$P_3^0(u) = \frac{116,643}{(11,9768 + 16,3092i + u)(-11,9768 + 16,3092i + u)(0,895004 - u)}, \quad (6.7)$$

$$P_2^1(u) = \frac{18,7165 - 0,81169u}{(65,7025 + u)(0,894937 - u)}, \quad (6.8)$$

$$P_1^2(u) = \frac{0,28487 - 0,0166867u + 0,00025748u^2}{0,894946 - u}. \quad (6.9)$$

Neste caso da QCD completa temos algo diferente do que foi mostrado até o momento. Notemos que, no limite $u \rightarrow 0$, os três aproximantes são praticamente degenerados, de forma que, na essência, temos apenas um aproximante de Padé que têm um pólo IR em torno de 0,895, e isso acontece devido ao fato de todos os outros pólos estarem bastante distantes da origem. Logo, o comportamento divergente da série será de sinal não-alternado, e, agora, a incerteza atribuída não pode ser mais a metade da distância entre os valores dos Padés, já que temos na prática apenas um. Portanto, vamos utilizar uma incerteza de 50% para o valor da previsão do quinto coeficiente, assim como em large- β_0 . Logo nossa previsão para o quinto coeficiente utilizando variação de esquemas é dada por

$$c_{5,1}^{\text{Padé}} = 570 \pm 285. \quad (6.10)$$

As previsões dos demais coeficientes, assim como suas incertezas, podem ser encontradas na Tabela 5. O aumento das incertezas seguiram a mesma proporção do aumento das

Tabela 5 – Coeficientes da função de Adler na QCD completa calculados no esquema $C = 0,33$ e então transferidos para o $\overline{\text{MS}}$ usando aproximantes de Padés construídos a partir dos primeiros quatro coeficientes.

	$c_{5,1}$	$c_{6,1}$	$c_{7,1}$
Aproximantes de Padé	570 ± 285	7624 ± 4000	$(1,18 \pm 0,94) \times 10^5$
	$c_{8,1}$	$c_{9,1}$	$c_{10,1}$
Aproximantes de Padé	$(2,10 \pm 1,68) \times 10^6$	$(4,27 \pm 3,84) \times 10^7$	$(9,7 \pm 9,6) \times 10^8$

Fonte: Elaborada pelo autor.

incertezas dos coeficientes em $\text{large-}\beta_0$. É importante ressaltar que as incertezas geradas pela variação de C em 0,2 são insignificantes quando comparadas com as incertezas que estamos utilizando, portanto, as ignoramos.

Podemos, também, utilizar os Padés para realizar a previsão da soma de Borel para a função de Adler. Neste esquema, a previsão para a soma de Borel é dada por

$$B[\widehat{D}]^{(\text{Padés})} = 0,125 \pm 0,005 \pm 0,008, \quad (6.11)$$

onde a primeira incerteza vêm da ambiguidade ao realizarmos a integral e a segunda incerteza vêm da variação de C . Notemos que novamente o valor foi menor do que em $\text{large-}\beta_0$, o que pode ser entendido devido ao fato de os coeficientes serem menores do que neste limite. Agora, porém, a incerteza associada é maior do que a incerteza da seção anterior, devido a contribuição da variação de C .

O comportamento da função de Adler em termos da ordem perturbativa e o valor da soma de Borel podem ser vistos na Figura 44. Nesta figura, a linha sólida preta é a função de Adler enquanto a linha laranja sólida horizontal é a soma de Borel, e o sombreado amarelo é a incerteza da integral (6.11). Notemos que, novamente, o comportamento previsto pelos PAs é que a série têm comportamento divergente de sinal não-alternado, o que pode ser entendido devido ao fato de o pólo dominante do PA ser IR, porém, é diferente do comportamento que esperávamos para a QCD, que seria de sinal alternado em ordens altas, dado que a singularidade mais próxima da origem é UV. Este comportamento também é um indicativo de que em QCD o renôrmalon IR é dominante em ordens intermediárias sobre o renôrmalon UV.

Os resultados obtidos com os PAs para as prescrições FOPT e CIPT podem ser vistos na Figura 45. Na figura, a linha vermelha sólida é o resultado para FOPT, a linha azul pontilhada é o resultado para CIPT, a linha laranja horizontal é o resultado da soma de Borel para a função $\delta^{(0)}$ e o sombreado amarelo é a incerteza obtida para esta função. Novamente, o comportamento divergente para ambas as prescrições é de sinal não-alternado, porém, agora, o resultado da soma de Borel para a função $\delta^{(0)}$, pelo menos

Figura 44 – Resultados da expansão perturbativa da função de Adler na QCD completa usando $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$, calculados no esquema $C = 0,33$ e então transferidos para o $\overline{\text{MS}}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

em ordens baixas, favorece a prescrição FOPT, porém, dadas as incertezas, ambas as prescrições são compatíveis com o resultado.

Em QCD os resultados utilizando variação de esquemas tiveram menos impacto do que em $\text{large-}\beta_0$. Isso se deve ao fato de que o melhor valor de C não é muito diferente do valor de C no esquema $\overline{\text{MS}}$ ($C = 0$). Portanto, tanto os resultados em $\overline{\text{MS}}$ como em $C = 0,33$ são parecidos. Porém, devido ao sucesso do método em $\text{large-}\beta_0$ ser tão impressionante ao utilizarmos a variação de esquemas, iremos usar, como resultado final, os resultados em $C = 0,33$, onde temos uma certa preferência do PA por FOPT.

6.3 Conclusões parciais

Aqui vamos resumir as principais conclusões obtidas a partir do uso de aproximantes de Padé na QCD completa.

- A nossa previsão para o quinto termo da série perturbativa da função de Adler é 570 ± 285 . Tanto no esquema $\overline{\text{MS}}$, como utilizando o método da variação de esquemas, os resultados obtidos foram próximos entre si. Isso é devido ao fato de que o melhor esquema obtido pelo método desenvolvido ser próximo ao $\overline{\text{MS}}$.

Figura 45 – Resultados da expansão perturbativa da função de $\delta^{(0)}$ na QCD completa usando as prescrições FOPT e CIPT e $\alpha_s(m_\tau) = 0,3160$, calculados no esquema $C = 0,33$ e então transferidos para o $\overline{\text{MS}}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

- O resultado obtido para a soma de Borel é coerente com as duas prescrições, FOPT e CIPT, utilizadas no cálculo da função $\delta^{(0)}$. Truncando a série no quarto termo, como fazemos em QCD, os dois resultados são válidos. Porém, o PA obtido com variação de esquemas, em ordens baixas, têm uma leve preferência pela prescrição FOPT. Enquanto o PA obtido no $\overline{\text{MS}}$, em ordens baixas, têm uma leve preferência pela prescrição CIPT.
- Diferentemente de $\text{large-}\beta_0$, na QCD completa, a variação de esquemas não altera significativamente os resultados. Isso pode ser visto ao compararmos os comportamentos da função de Adler em $\overline{\text{MS}}$ e em $C = 0,33$, assim como os resultados para o quinto termo da série, para a soma de Borel e para a localização dos pólos dominantes. Em ambos os esquemas, as principais propriedades da série perturbativa são coerentes entre si, com pequenas mudanças nas preferências entre FOPT e CIPT. Relembrando, isso pode ser explicado devido ao fato dos valores de C serem próximos nos dois esquemas.
- Os resultados também nos mostraram que o pólo IR parece ser mais dominante em QCD do que em $\text{large-}\beta_0$. Isso pode ser observado através dos PAs, que sempre previram pólos IR, e quando algum pólo UV apareceu, ele está bem longe da origem. Pode-se concluir isso também ao analisarmos a série perturbativa da QCD

em esquemas com valores de C negativos, por exemplo a Eq. (6.6). Utilizando $C = -1, 16$, mesmo valor utilizado na Seção 5.2.3 em $\text{large-}\beta_0$, onde, naquele caso, este valor de C aumentou o valor do resíduo do pólo UV e trouxe o comportamento de sinal alternado da série para os primeiros coeficientes, observamos que na QCD completa, não há alternância de sinal dos coeficientes em ordens baixas, indicando uma dominância do pólo IR.

- Finalmente, podemos concluir que a aplicação de aproximantes de Padé na QCD completa têm suas dificuldades, e a principal delas é a estrutura analítica da transformada de Borel da função de Adler. O fato dos renormalons serem cortes torna o Padé menos eficiente em suas previsões. Mas mesmo com essas dificuldades, conseguimos extrair informações sobre algumas propriedades da série, como as listadas acima.

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho estudamos sistematicamente o uso de Aproximantes de Padé na transformada de Borel da série perturbativa da QCD nos decaimentos hadrônicos do τ . Antes de obtermos nossos resultados na QCD completa, aplicamos estes aproximantes racionais no limite large- β_0 da QCD, onde a série perturbativa é conhecida em todas as ordens e podemos aferir a qualidade dos resultados.

No Capítulo 5 discutimos os resultados obtidos no limite large- β_0 . Nossos esforços neste limite sempre levaram em consideração que em QCD temos apenas quatro coeficientes conhecidos, portanto, procuramos um método para melhorar os resultados obtidos com PAs utilizando somente estes primeiros coeficientes. Primeiro aplicamos o método Padé-Borel na série perturbativa no esquema $\overline{\text{MS}}$, que é o esquema de renormalização mais utilizado. Neste esquema, o resultado para função de Adler, Figura 27, mostra, claramente que, com apenas quatro coeficientes, através do Padé P_1^2 , não conseguimos reproduzir a série perturbativa, nem seus principais aspectos. Porém, o PA seguinte da sequência P_N^{N+1} , ou seja, P_2^3 , nos fornece resultados próximos ao exato, com erro relativo na previsão do sétimo coeficiente de 0,28, e também este PA reproduz, qualitativamente, o pólo dominante UV, logo, em ordens altas temos um comportamento de sinal alternado.

Nas Figuras 30 e 31 confirmamos o que esperávamos pelos teoremas de convergência dos Padés, em especial o teorema de Pommerenke. Nestas figuras vemos que, com 6 ou 7 coeficientes, os resultados obtidos com Padés para diferentes sequências fornecem previsões boas para todos os aspectos da série, tanto as previsões para os coeficientes desconhecidos, como as previsões para a soma de Borel, para as posições dos pólos dominantes e também para o comportamento divergente da série.

Como não obtivemos bons resultados utilizando apenas quatro coeficientes no esquema $\overline{\text{MS}}$, exploramos métodos para melhorá-los. No nosso caso, utilizando esquemas com $C < 0$ obtivemos uma melhora significativa. Esta melhora é devido ao fato de a transformada de Borel nestes esquemas ser amplamente dominada pelo pólo UV, logo, observamos a alternância de sinal mais cedo e os Padés conseguem reproduzir facilmente o comportamento da série original. Utilizando variação de esquemas a melhora nas previsões dos coeficientes é de cerca de uma ordem de grandeza em comparação com as previsões em $\overline{\text{MS}}$. Nas Figuras 33 e 34 vemos essa melhora através da aceleração na convergência da série. Após voltarmos ao esquema $\overline{\text{MS}}$, a série pode ser vista na Figura 35.

A seguir desenvolvemos um método que pudesse ser aplicado em QCD. Utilizando os três primeiros coeficientes da série, construímos Padés como função de C e determinamos o valor de C que fornecia a melhor previsão para $c_{4,1}$. E, então, construímos Padés com

quatro coeficientes neste esquema determinado para realizarmos previsões sobre a série. Através da Figura 38 vemos que este método fornece uma boa previsão para os valores centrais até a oitava ordem da série. Além disso, nossa previsão para a soma de Borel foi coerente com o resultado exato, indicando que este é um bom método para ser utilizado. Apesar de conseguirmos boas previsões para os valores centrais dos coeficientes utilizando este método, é importante manter em mente que as incertezas associadas não são pequenas, justamente pelo fato de termos disponíveis apenas quatro termos da série perturbativa.

Também exploramos métodos que utilizam, além dos primeiros quatro coeficiente da série, informações sobre os renôrmalons, que são os chamados Aproximantes de Padé Parciais. Introduzindo a informação sobre a posição e o expoente dos primeiros três renôrmalons conseguimos reproduzir a série quase que exatamente, ainda no $\overline{\text{MS}}$, como pode ser visto na Figura 41. Isto está de acordo com trabalhos anteriores,²⁷ onde foi mostrado que impor a estrutura correta dos pólos dominantes é suficiente para obter uma boa descrição da função de Adler no limite large- β_0 .

Uma observação importante é que, utilizando apenas os primeiro quatro coeficientes e variação de esquemas, obtivemos resultados que são independentes de modelo. Logo, nenhuma informação sobre os renôrmalons foi utilizada e isso é desejável já que em QCD essas informações são parciais e parte delas ainda não são provadas.

No Capítulo 6 discutimos os resultados obtidos com aproximantes de Padé na QCD completa. Neste capítulo, além de aplicarmos os Padés na série em $\overline{\text{MS}}$, também utilizamos o método das variações de esquemas desenvolvido no Capítulo 5 para reconstruirmos a série perturbativa em ordens altas.

Ao utilizarmos variação de esquemas, obtivemos que o esquema que fornece a melhor previsão para o quarto termo é $C = 0,33$. Este valor de C é próximo ao valor que corresponde ao $\overline{\text{MS}}$. Portanto, os resultados para ambos os esquemas são parecidos, e isso pode ser observado nas Figuras 42 e 44. Esta é a primeira diferença entre QCD e large- β_0 . O valor positivo para C indica que o renôrmalon dominante IR possui um resíduo maior do que o renôrmalon dominante UV. Essa dominância do renôrmalon IR é refletida no fato de que os PAs não conseguem reproduzir a singularidade UV apenas com a informação disponível nos quatro primeiros coeficientes. É importante lembrarmos também que em QCD, as singularidades devidas aos renôrmalons são cortes, por isso, devido à estrutura analítica da transformada de Borel da função de Adler, as previsões com Padés se tornam menos eficientes.

A nossa previsão para o quinto termo da série perturbativa da QCD é

$$c_{5,1} = 570 \pm 285. \quad (7.1)$$

Essa previsão é feita independente de modelo, e ao compararmos com resultados da literatura que utilizam informações sobre os renôrmalons,²³ vemos que nosso resultado é

aproximadamente o dobro do utilizado nestes outros trabalhos. Porém, considerando a incerteza, são resultados compatíveis. Nossa previsão também é quatro vezes maior do que resultados que utilizam outros princípios,^{79,80} porém, esses outros trabalhos foram realizados antes da determinação exata do quarto coeficiente, e suas previsões para o quarto coeficiente foram menores do que o resultado exato, portanto, podemos esperar que o quinto coeficiente também seja maior do que o obtido nestes trabalhos. Nosso principal resultado está na Figura 45. Nesta figura vemos as séries obtidas com PAs e variação de esquemas para a função $\delta^{(0)}$ usando as prescrições FOPT e CIPT. A nossa previsão para a soma de Borel, dada por $0,21 \pm 0,02$ é coerente com resultados obtidos utilizando outros métodos.^{23,27,37} Nesta figura vemos que, ao truncarmos a série no quarto termo, o resultado da soma de Borel é compatível com ambas as prescrições. Porém, em ordens intermediárias, o PA apresenta uma leve preferência pela prescrição FOPT. Outro aspecto importante é que o comportamento divergente para ambas as prescrições é de sinal não-alternado, ao contrário do que esperávamos para a QCD.²⁶

Existem outras estratégias para tentarmos melhorar os resultados obtidos, já que dificilmente iremos ter mais coeficientes calculados exatamente, e um exemplo são os DLog Padés.²⁸ Neste método, aplica-se o logaritmo na transformada de Borel da série perturbativa que, de um modo geral, pode escrita como $f(u) \approx (u - p)^{-\gamma}$. Devido as propriedades dos logaritmos podemos escrever $\ln(f(u)) = -\gamma \ln(u - p)$, portanto, o expoente do renôrmalon, que no caso da QCD é um corte, é escrito nesse caso como um coeficiente. Então, toma-se a derivada do logaritmo e utiliza-se os Padés nesta derivada para obtermos as previsões. Esta é uma forma de se contornar o problema dos cortes na transformada de Borel, que tornam o uso de aproximantes de Padé menos eficientes. Esse método, apesar de ser interessante, é um pouco mais heurístico, pois não existem teoremas que nos garantam a validade dos resultados obtidos com DLog Padés. O uso de métodos deste tipo deverá ser investigado por nós num futuro próximo.⁸¹

REFERÊNCIAS

- 1 GELL-MAN, M. Quarks. **Acta Physica Austriaca Supplement**, v. 9, p. 733–761, 1972.
- 2 FRITZSCH, H.; GELL-MANN, M.; LEUTWYLER, H. Advantages of the color octet gluon picture. **Physics Letters B**, v. 47, n. 4, p. 365–368, 1973.
- 3 GREINER, W.; SCHRAMM, S.; STEIN, E. **Quantum chromodynamics**. Berlin: Springer, 2002. (Physics and astronomy online library).
- 4 GLASHOW, S. L. Partial symmetries of weak interactions. **Nuclear Physics**, v. 22, n. 4, p. 579–588, 1961.
- 5 WEINBERG, S. A model of leptons. **Physical Review Letters**, v. 19, p. 1264–1266, 1967. doi/10.1103/PhysRevLett.19.1264.
- 6 GLASHOW, S. L.; ILIOPOULOS, J.; MAIANI, L. Weak interactions with lepton-hadron symmetry. **Physical Review D**, v. 2, p. 1285–1292, 1970. doi/10.1103/PhysRevD.2.1285.
- 7 PICH, A. The standard model of electroweak interactions. In: EUROPEAN SCHOOL HIGH-ENERGY PHYSICS, 18., 2010. Raseborg, Finland: **Proceedings...** Raseborg, Finland: ESHEP, 2010.
- 8 GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. **Physical Review Letters**, v. 30, n. 26, p. 1343–1346, 1973. doi/10.1103/PhysRevLett.30.1343.
- 9 POLITZER, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions? **Physical Review Letters**, v. 30, n. 26, p. 1346–1349, 1973. doi/10.1103/PhysRevLett.30.1346.
- 10 BRAATEN, E.; NARISON, S.; PICH, A. QCD analysis of the tau hadronic width. **Nuclear Physics B**, v. 373, n. 3, p. 581–612, 1992.
- 11 BOITO, D. et al. Strong coupling from the revised ALEPH data for hadronic τ decays. **Physical Review D**, v. 91, n. 3, p. 034003, 2015.
- 12 PICH, A.; RODRÍGUEZ-SÁNCHEZ, A. Determination of the QCD coupling from ALEPH τ decay. **Physical Review D**, v. 94, n. 3, p. 034027, 2016.
- 13 DAVIER, M. et al. Update of the ALEPH non-strange spectral functions from hadronic τ decays. **European Physical Journal C**, v. 74, n. 3, p. 2803, 2014.
- 14 PICH, A. Precision tau physics. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v. 75, n. 1, p. 41–85, 2014.
- 15 RITBERGEN, T. v.; VERMASEREN, J. A. M.; LARIN, S. A. The four loop beta function in quantum chromodynamics. **Physics Letters B**, v. 400, p. 379–384, 1997. doi/10.1016/S0370-2693(97)00370-5.
- 16 BAIKOV, P. A.; CHETYRKIN, K. G.; KÜHN, J. H. Five-Loop Running of the QCD coupling constant. **Physical Review Letters**, v. 118, n. 8, p. 082002, 2017.

- 17 BOITO, D. et al. Strong coupling from τ hadronic decays: a critical appraisal. **Physical Review D**, v. 95, n. 3, p. 034024, 2017.
- 18 SHIFMAN, M. A. Quark hadron duality. In: FESTSCHRIFT, B. I. (ED.). **At the frontier of particle physics**. Singapore: World Scientific, 2001. p. 1447–1494. (Handbook of QCD, v. 1-3).
- 19 CATA, O.; GOLTERMAN, M.; PERIS, S. Duality violations and spectral sum rules. **Journal of High Energy Physics**, n. 8, p. 076, 2005. doi:10.1088/1126-6708/2005/08/076.
- 20 BOITO, D.; CAPRINI, I. Towards tests of quark-hadron duality with functional analysis and spectral function data. **Physical Review D**, v. 95, n. 7, p. 074027, 2017.
- 21 PERIS, S. et al. The case for duality violations in the analysis of hadronic τ decays. **Modern Physics Letters A**, A31, n. 30, p. 1630031, 2016.
- 22 BOITO, D. et al. **Hyperasymptotics and quark-hadron duality violations in QCD**. 2017. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1711.10316.pdf>>. Acesso em: 16 jan. 2018.
- 23 BENEKE, M.; JAMIN, M. $\alpha(s)$ and the tau hadronic width: fixed-order, contour-improved and higher-order perturbation theory. **Journal of High Energy Physics**, v. 09, p. 044, 2008. doi:10.1088/1126-6708/2008/09/044.
- 24 DIBERDER, F. L.; PICH, A. The perturbative QCD prediction to $R(\tau)$ revisited. **Physics Letters B**, v. 286, n. 1-2, p. 147–152, 1992.
- 25 BAIKOV, P. A.; CHETYRKIN, K. G.; KUHN, J. H. Order $\alpha^4(s)$ QCD corrections to Z and tau decays. **Physical Review Letters**, v. 101, n. 1, p. 012002, 2008.
- 26 BENEKE, M. Renormalons. **Physics Reports**, v. 317, p. 1–142, 1999. doi:10.1016/S0370-1573(98)00130-6.
- 27 BENEKE, M.; BOITO, D.; JAMIN, M. Perturbative expansion of tau hadronic spectral function moments and α_s extractions. **Journal of High Energy Physics**, v. 01, p. 125, 2013. doi:10.1007/JHEP01(2013)125.
- 28 BAKER, G. **Essentials of Padé approximants**. New York: Academic Press, 1975.
- 29 PERIS, S. Large- $N(c)$ QCD and Pade approximant theory. **Physical Review D**, v. 74, n. 5, p. 054013, 2006.
- 30 MASJUAN, P.; PERIS, S. A rational approach to resonance saturation in large- $N(c)$ QCD. **Journal of High Energy Physics**, v. 05, p. 040, 2007. doi:10.1088/11266708/2007/05/040.
- 31 SAMUEL, M. A.; ELLIS, J. R.; KARLINER, M. Comparison of the Pade approximation method to perturbative QCD calculations. **Physical Review Letters**, v. 74, n. 22, p. 4380–4383, 1995.
- 32 BAKER, G. A. et al. Ising model critical indices in three-dimensions from the Callan-Symanzik equation. **Physical Review Letters**, v. 36, n. 23, p. 1351–1354, 1976.

-
- 33 BENEKE, M. Large order perturbation theory for a physical quantity. **Nuclear Physics B**, v. 405, n. 2-3, p. 424–450, 1993.
- 34 BROADHURST, D. J. Large n expansion of qed: asymptotic photon propagator and contributions to the muon anomaly, for any number of loops. **Zeitschrift für Physik C: particles and fields**, v. 58, n. 2, p. 339–345, 1993. doi.org/10.1007/BF01560355.
- 35 BALLORE, R. d. M. d. Sur les fractions continues algébriques. **Bulletin de la Société Mathématique de France**, v. 30, p. 28–36, 1902. doi:10.24033/bsmf.653.
- 36 POMMERENKE, C. Padé approximants and convergence in capacity. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 41, n. 3, p. 775, 1975.
- 37 BOITO, D.; JAMIN, M.; MIRAVITLLAS, R. Scheme variations of the QCD coupling and hadronic τ decays. **Physical Review Letters**, v. 117, n. 15, p. 152001, 2016.
- 38 HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. **Physical Review Letters**, v. 13, p. 508–509, 1964. doi:10.1103/PhysRevLett.13.508.
- 39 ENGLERT, F.; BROUT, R. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. **Physical Review Letters**, v. 13, p. 321–323, 1964. doi/10.1103/PhysRevLett.13.321.
- 40 GURALNIK, G. S.; HAGEN, C. R.; KIBBLE, T. W. B. Global conservation laws and massless particles. **Physical Review Letters**, v. 13, p. 585–587, 1964. doi: 10.1103/PhysRevLett.13.585.
- 41 AAD, G. et al. Observation of a new particle in the search for the standard model higgs boson with the atlas detector at the lhc. **Physics Letters B**, v. 716, n. 1, p. 1–29, 2012.
- 42 CHATRCHYAN, S. et al. Observation of a new boson at a mass of 125 gev with the cms experiment at the lhc. **Physics Letters B**, v. 716, n. 1, p. 30–61, 2012.
- 43 PICH, A. **Aspects of quantum chromodynamics**. 1999. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/hep-ph/0001118.pdf>>. Acesso em 16 jan. 2017.
- 44 ECKER, G. Quantum chromodynamics. In: EUROPEAN SCHOOL OF HIGH-ENERGY PHYSICS, 2005, Kitzbuehel, Austria. **Proceedings ...** Kitzbuehel, Austria, 2005. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/hep-ph/0604165.pdf>>. Acesso em 23 jan. 2017.
- 45 PATRIGNANI, C. et al. Review of particle physics. **Chinese Physics C**, v. 40, n. 10, p. 100001, 2016.
- 46 AITCHISON, I.; HEY, A. **Gauge theories in particle physics**. 3rd. ed. New York: CRC Press, 2002. (Graduate student series in physics).
- 47 PASCUAL, P.; TARRACH, R. **QCD: renormalization for the practitioner**. Berlin: Springer-Verlag, 1984. 277 p.
- 48 BARDEEN, W. A. et al. Deep-inelastic scattering beyond the leading order in asymptotically free gauge theories. **Physical Review D**, v. 18, p. 3998–4017, 1978. doi/10.1103/PhysRevD.18.3998.

- 49 BAIKOV, P. A.; CHETYRKIN, K. G.; KÜHN, J. H. Quark mass and field anomalous dimensions to $\mathcal{O}(\alpha_s^5)$. **Journal of High Energy Physics**, v. 10, p. 076, 2014. doi:10.1007/JHEP10(2014)076.
- 50 JAMIN, M.; MIRAVITLLAS, R. Scalar correlator, Higgs decay into quarks, and scheme variations of the QCD coupling. **Journal of High Energy Physics**, v. 10, p. 059, 2016. doi.org/10.1007/JHEP10(2016)059.
- 51 CELMASTER, W.; GONSALVES, R. J. Renormalization-prescription dependence of the quantum-chromodynamic coupling constant. **Physical Review D**, v. 20, p. 1420–1434, Sep 1979. doi/10.1103/PhysRevD.20.1420.
- 52 PERL, M. L. et al. Evidence for anomalous lepton production in $e^+ - e^-$ annihilation. **Physical Review Letters**, v. 35, p. 1489–1492, 1975. doi:10.1103/PhysRevLett.35.1489.
- 53 DONOGHUE, J. F.; GOLOWICH, E.; HOLSTEIN, B. R. **Dynamics of the standard model**. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. (Cambridge monographs on particle physics, nuclear physics, and cosmology).
- 54 BOITO, D. et al. Hadronic tau decays and the strong coupling. **Journal of Physics: conference series**, v. 912, n. 1, p. 012003, 2017.
- 55 AMHIS, Y. et al. **Averages of B-Hadron, C-Hadron, and tau-lepton properties as of early 2012**. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1207.1158.pdf>>. Acesso em: 23 jan. 2017.
- 56 CABIBBO, N. Unitary symmetry and leptonic decays. **Physical Review Letters**, v. 10, p. 531–533, 1963. doi:10.1103/PhysRevLett.10.531.
- 57 KOBAYASHI, M.; MASKAWA, T. CP violation in the renormalizable theory of weak interaction. **Progress of Theoretical Physics**, v. 49, n. 2, p. 652–657, 1973.
- 58 LEE, T. D.; YANG, C. N. Charge conjugation, a new quantum number, and selection rules concerning a nucleon-antinucleon system. **Il Nuovo Cimento Series 10**, v. 3, n. 4, p. 749–753, 1956. doi:10.1007/BF02744530.
- 59 DAVIER, M. et al. The determination of $\alpha(s)$ from tau decays revisited. **European Physical Journal C**, v. 56, p. 305–322, 2008. doi:10.1140/epjc/s10052-008-0666-7.
- 60 PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. **An Introduction to quantum field theory**. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995.
- 61 ADLER, S. L. Some simple vacuum-polarization phenomenology: $e^+e^- \rightarrow$ hadrons; the muonic-atom x-ray discrepancy $g_\mu - 2$. **Physical Review D**, v. 10, p. 3714–3728, 1974. doi:10.1103/PhysRevD.10.3714.
- 62 MARCIANO, W. J.; SIRLIN, A. Electroweak radiative corrections to τ decay. **Physical Review Letters**, v. 61, p. 1815–1818, 1988. doi/10.1103/PhysRevLett.61.1815.
- 63 BRAATEN, E.; LI, C.-S. Electroweak radiative corrections to the semihadronic decay rate of the tau lepton. **Physical Review D**, v. 42, n. 11, p. 3888–3891, 1990.
- 64 GGORISHNII, S. G.; KATAEV, A. L.; LARIN, S. A. The $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ -corrections to $\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$ and $\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau + \text{hadrons})$ in QCD. **Physics Letters B**, v. 259, n. 1-2, p. 144–150, 1991.

-
- 65 DYSON, F. J. Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics. **Physical Review**, v. 85, n. 4, p. 631–632, 1952.
- 66 DINGLE, R. **Asymptotic expansions: their derivation and interpretation**. New York: Academic Press, 1973.
- 67 JAMIN, M. **QCD and renormalization group methods**. 2006. Disponível em: <<http://www.maria-laach.tp.nt.uni-siegen.de/downloads/files/2006/Jamin-2006.pdf>>. Acesso em: 23 jan. 2017.
- 68 PIVOVAROV, A. A. Renormalization group analysis of the tau lepton decay within QCD. **Zeitschrift für Physik C**, v. 53, p. 461–464, 1992. doi:10.1007/BF01625906.
- 69 BENDER, C.; ORSZAG, S. **Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: asymptotic methods and perturbation theory**. Berlin: Springer, 1978. (Advanced mathematical methods for scientists and engineers).
- 70 BOYD, J. P. The devil's invention: asymptotic, superasymptotic and hyperasymptotic series. **Acta Applicandae Mathematica**, v. 56, n. 1, p. 1–98, 1999. doi.org/10.1023/A:1006145903624.
- 71 BOREL, E. Mémoire sur les séries divergentes. **Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure**, v. 16, p. 9–131, 1899.
- 72 HOOFT, G. t. A planar diagram theory for strong interactions. **Nuclear Physics B**, v. 72, n. 3, p. 461, 1974.
- 73 ZICHINE, A. **The whys of subnuclear physics**. New York: Plenum Press, 1979.
- 74 NEUBERT, M. Scale setting in qcd and the momentum flow in feynman diagrams. **Physical Review D**, v. 51, p. 5924–5941, 1995. doi/10.1103/PhysRevD.51.5924.
- 75 BENEKE, M.; BRAUN, V. M. Naive nonAbelianization and resummation of fermion bubble chains. **Physics Letters B**, v. 348, p. 513–520, 1995. doi:10.1016/0370-2693(95)00184M.
- 76 _____. **Renormalons and power corrections**. 2000. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/hep-ph/0010208.pdf>>. Acesso em: 23 jan. 2017.
- 77 WILSON, K. G. Non-Lagrangian models of current algebra. **Physical Review**, v. 179, n. 5, p. 1499–1512, 1969.
- 78 BENEKE, M.; BRAUN, V. M. Resummation of threshold corrections in QCD to power accuracy: the Drell-Yan cross-section as a case study. **Nuclear Physics B - proceedings supplements**, v. 51, n. 3, p. 217–226, 1996.
- 79 KATAEV, A. L.; STARSHENKO, V. V. Estimates of the higher order QCD corrections to $R(s)$, $R(\tau)$ and deep inelastic scattering sum rules. **Modern Physics Letters A**, v. 10, p. 235–250, 1995.
- 80 BAIKOV, P. A.; CHETYRKIN, K. G.; KÜHN, J. H. Towards order $\alpha(s)^{**4}$ accuracy in tau decays. **Physical Review D**, v. 67, n. 7, p. 074026, 2003.
- 81 BOITO, D.; OLIANI, F.; MASJUAN, P. **Padé approximants and hadronic tau decays**. 2018. (em preparação).