UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

ELIAS JOSÉ PORTES BIRAL

O limite termodinâmico do modelo de Axelrod
unidimensional de duas características e dois estados

São Carlos

2016

ELIAS JOSÉ PORTES BIRAL

**O limite termodinâmico do modelo de Axelrod
unidimensional de duas características e dois estados**

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Física do Instituto de Física
de São Carlos da Universidade de São Paulo,
para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica
Orientador: Prof. Dr. José Fernando Fontanari

Versão Corrigida

(Versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos

2016

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica revisada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Biral, Elias José Portes

O limite termodinâmico do modelo de Axelrod
unidimensional de duas características e dois estados
/ Elias José Portes Biral; orientador José Fernando
Fontanari - versão corrigida -- São Carlos, 2016.
66 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos,
Universidade de São Paulo, 2016.

1. Modelo de Axelrod. 2. Mecânica estatística. 3.
Simulação de Monte Carlo. 4. Dinâmica cultural. I.
Fontanari, José Fernando, orient. II. Título.

Ao meu pai, Olivier.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade e força. Aos meus pais e namorada, que me apoiaram incondicionalmente. Ao meu orientador, pela atenção e paciência. Ao Instituto de Física de São Carlos e à USP, pela infraestrutura. À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro.

Resumo

BIRAL, E. J. P. *O limite termodinâmico do modelo de Axelrod unidimensional de duas características e dois estados*. 2016. 66 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

Em meados de 1990, o cientista político Robert Axelrod propôs um modelo, baseado em agentes, de disseminação cultural, em que os agentes interagem localmente de acordo com os princípios da homofilia e influência social, visando responder à pergunta: “Se as pessoas interagem umas com as outras e, através da interação, tornam-se mais semelhantes, por que existem diferenças culturais em nossa sociedade?”. Cada agente é considerado um elemento de uma matriz (um sítio em uma rede) e é modelado por uma lista de F características culturais, cada qual assumindo q estados possíveis. Essa lista é a identidade cultural do agente. As identidades culturais iniciais de cada agente são definidas de modo aleatório com igual probabilidade para as q^F identidades diferentes. Em cada vez, escolhemos um agente ao acaso (o agente alvo), assim como um de seus vizinhos. Esses dois agentes interagem com uma probabilidade igual a sua semelhança cultural, definida como a fração de características idênticas nas suas listas culturais. Quanto mais semelhantes forem, maior a probabilidade de sua interação - este é o princípio da homofilia. Uma interação consiste em selecionar aleatoriamente uma das características distintas, fazendo o estado da característica escolhida do agente alvo igual ao estado correspondente do seu vizinho - este é o princípio da influência social. Esse procedimento é repetido até que o sistema fique congelado numa configuração absorvente. Observamos configurações monoculturais absorventes, em que todos os agentes têm a mesma identidade cultural, e configurações multiculturais, em que existem diferentes domínios culturais na rede. Contudo, no modelo unidimensional com $F = q = 2$, simulações de Monte Carlo mostram convergência para as configurações monoculturais em cerca de 30% das escolhas das condições iniciais, enquanto os resultados analíticos exatos indicam que a convergência monocultural deve acontecer sempre. Nessa dissertação, estudamos o modelo de Axelrod unidimensional com $F = q = 2$, usando simulações de Monte Carlo. Mostramos que a discrepância entre as simulações e os resultados exatos acontece devido à não-comutação do limite termodinâmico, em que o tamanho da rede tende para o infinito, e o limite de tempo assintótico, em que o tempo de simulação vai para infinito. Nossos resultados oferecem uma melhor compreensão do modelo de Axelrod unidimensional e promovem a importância do acordo entre teoria e simulações na ciência.

Palavras-chave: Modelo de Axelrod. Mecânica estatística. Simulações de Monte Carlo. Dinâmica cultural.

Abstract

BIRAL, E. J. P. *The thermodynamic limit of the one-dimensional Axelrod model with two features and two states*. 2016. 66 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

In the mid 1990s, the political scientist Robert Axelrod proposed an agent based-model of cultural dissemination, in which agents interact locally according to the principles of homophily and social influence, aiming at answering the question: “If people interact with each other and, through the interaction, become more similar, why are there cultural differences in our society?”. Each agent is considered as an element of an array (a site in a lattice) and is modeled by a list of F cultural features, each of which assuming q possible states. This list is the cultural identity of the agent. The initial cultural identities of each agent are set randomly with equal probability for the q^F different identities. At each time we pick an agent at random (the target agent) as well as one of its neighbors. These two agents interact with probability equal to their cultural similarity, defined as the fraction of identical features in their cultural lists. The more similar they are, the greater the likelihood of their interaction – this is the homophily principle. An interaction consists of selecting at random one of the distinct features, and making the state of the selected feature of the target agent equal to the corresponding state of its neighbor – this is the social influence principle. This procedure is repeated until the system is frozen into an absorbing configuration. We observe monocultural absorbing configurations, in which all agents have the same cultural identity, and multicultural configurations, in which there are different cultural domains in the lattice. In the one-dimensional model with $F = q = 2$, however, Monte Carlo simulations show convergence to the monocultural configurations in about 30% of the choices of the initial conditions, while the exact analytical results indicate that the monocultural convergence should always happen. In this thesis, we study the one-dimensional Axelrod model for $F = q = 2$ using Monte Carlo simulations. We show that the discrepancy between the simulations and the exact results is due to the non-commutation of the thermodynamic limit, in which the chain size goes to infinity, and the time-asymptotic limit, in which the simulation time goes to infinity. Our results offer a better understanding of the one-dimensional Axelrod model and promote the importance of the agreement between theory and simulations in science.

Keywords: Axelrod model. Statistical mechanics. Monte Carlo simulations. Culture dynamics.

Lista de Figuras

- Figura 1 - Diagrama esquemático da ciência formado pela coexistência de três conjuntos circulares que caracterizam cada um, teoria, experimento e simulações. Há regiões onde teoria e experimento se sobrepõem, não necessariamente garantindo a existência da ciência, ou seja, da explicação científica de fenômenos da natureza. O mesmo para regiões com teoria e simulação, simulação e experimentos e regiões onde somente existe um único círculo. A região central na qual há intersecção completa dos três círculos corresponde à ciência em sua forma ideal. 25
- Figura 2 - Forma topológica de um toro. A matriz bidimensional ganha essa forma quando utilizamos condições periódicas de contorno. Unindo as laterais da matriz, temos um cilindro. Unindo as pontas do cilindro, formamos um toro. 30
- Figura 3 - Exemplo de matriz inicial para $L=100$, $F=4$ e $q=7$. Os sítios são uma distribuição aleatória de números que formam sua cultura. Existem sítios completamente incapazes de interagir com seus vizinhos, pois não possuem sequer uma característica em comum com os mesmos, como é o caso do sítio $s_{1,1}$ (lê-se “esse um um”, pois é o sítio da linha 1, coluna 1). Não são utilizadas condições periódicas de contorno, de modo que os vizinhos do sítio $s_{1,1}$ são apenas os sítios $s_{1,2}$ e $s_{2,1}$. . . 31
- Figura 4 - Exemplo de matriz final para estado absorvente de monocultura para $L=100$, $F=4$ e $q=7$. As características assumiram os valores 2566 para todos os sítios da rede, caracterizando uma única região cultural. A matriz convergiu para um estado monocultural. 33

- Figura 5 - Exemplo de matriz final para estado absorvente multicultural para $L=100$, $F=4$ e $q=7$. As características assumiram valores diversos ao longo dos sítios da rede. Temos cinco regiões culturais distintas. Os sítios da mesma região cultural são iguais entre si e, por isso, não podem interagir. Sítios de regiões culturais diferentes não podem interagir, pois não possuem nenhuma característica em comum. . . . 34
- Figura 6 - Exemplo de matriz final multicultural para aplicação do algoritmo de Hoshen e Kopelman. A matriz é formada por 3 regiões distintas. A primeira com 8 elementos e traços 1 e 4, a segunda com 1 elemento e traços 2 e 3 e a terceira com 7 elementos e traços 2 e 2. O algoritmo serve para que o computador possa fazer essa contagem de forma eficiente. 34
- Figura 7 - Exemplo de matriz de regiões culturais da matriz final da figura 6 na qual o algoritmo de Hoshen e Kopelman já foi finalizado, fornecendo a contagem correta do número de regiões culturais e o número de sítios de cada região. Cada sítio mantém sua posição geográfica da matriz inicial e em seu lugar é colocado o número da região à qual ele pertence. 35
- Figura 8 - Matriz de regiões culturais para a figura 4 montada com o algoritmo de Hoshen e Kopelman. Como a matriz é monocultural, todos os sítios estão na mesma região, que é a região 1. 36
- Figura 9 - Matriz de regiões culturais para a figura 5, montada com o algoritmo de Hoshen e Kopelman. (64) Esta matriz permite ao programador enxergar as regiões presentes com facilidade. 36
- Figura 10 - Figura original de Axelrod, mostrando o número médio de regiões estáveis pela largura do território. Os parâmetros utilizados são $F=5$ e $q=15$. Cada ponto foi replicado 40 vezes, exceto para territórios maiores que são uma média sobre 10 rodadas. 41

Figura 11 - Reprodução da figura 10 com os mesmos parâmetros, mostrando o número médio de regiões estáveis M pela largura do território N . O comportamento de nossa figura é bom, respeitada a aleatoriedade das simulações de Monte Carlo. A reprodução da figura original indica que nosso código está correto.	42
Figura 12 - Média do número de sítios S da maior região cultural em relação à largura do território N . Axelrod descreveu o comportamento deste gráfico qualitativamente sem plotá-lo. O comportamento do gráfico é intuitivamente esperado, pois quanto maior o território, mais espaço existe para a maior das regiões culturais. Os parâmetros e pontos utilizados são os mesmos da figura 11.	43
Figura 13 - Número de regiões culturais N_R em função do tempo de relaxação τ^* . Utilizamos uma matriz com $N=100$, com $F=5$ e $q=15$. O gráfico varia cada vez que é construído devido às aleatoriedades das simulações de Monte Carlo. O número inicial de regiões é 10000 e o número final é 5.	44
Figura 14 - Exemplo de rede inicial para o modelo de Axelrod unidimensional com $F=q=2$. O tamanho da rede é $L=10$ sítios com condições periódicas de contorno, ou seja, a rede se fecha em um anel. Apenas o sítio 2 não pode interagir com seus vizinhos mais próximos, os sítios 1 e 3, sendo chamado inativo. A rede é formada de maneira aleatória, e cada traço, 0 ou 1, possui 50% de chance de existirem em cada característica dos sítios na formação da rede inicial.	48
Figura 15 - Exemplo da topologia de anel formada pelas condições periódicas de contorno. A rede é a mesma da figura 14 onde o sítio 1 é aquele no topo do círculo e seguimos no sentido horário até o sítio 10. O sítio final se conecta com o sítio inicial formando um par de vizinhos. Os traços entre os sítios estão expostos apenas para fins didáticos, representando a ligação sítio-sítio. Esta figura do anel unidimensional é análoga à figura 2 do toro formado pela matriz bidimensional.	49

Figura 16 - Configuração final com o estado absorvente de monocultura para uma rede com $L=10$ sítios. Todos os sítios possuem a primeira característica com $q=0$ e a segunda característica com $q=1$. Esta é uma das quatro configurações possíveis de monocultura no modelo de Axelrod unidimensional com $F=q=2$. As outras configurações monoculturais podem ser com as culturas $(1,0)$, $(1,1)$ ou $(0,0)$ para cada sítio. 50

Figura 17 - Configuração final com o estado absorvente de multicultura para uma rede com $L=10$ sítios. Este exemplo possui a formação de duas regiões culturais: uma com 5 sítios do tipo $(0,1)$ e outra com 5 sítios do tipo $(1,0)$. Os sítios de diferentes regiões culturais não interagem por possuírem todas as características diferentes entre si e os sítios de mesma região cultural não interagem, pois são completamente iguais. Devido às condições periódicas de contorno, os sítios L e 1 estão na mesma região cultural. 50

Figura 18 - Regiões culturais para a rede da figura 16. Todos os sítios estão na mesma região. Aplicamos o algoritmo de Hoshen e Kopelman conforme explicado no texto, que é muito mais simples para o modelo de Axelrod unidimensional com $F=q=2$. O valor mostrado é o da região cultural à qual pertence o sítio, e a localização dos números na figura corresponde à localização dos sítios na figura 16. 50

Figura 19 - Rede de regiões culturais para a rede da figura 17. Temos a formação de duas regiões culturais, ambas com 5 sítios cada. Utilizando o algoritmo de Hoshen e Kopelman, considerando condições periódicas de contorno, uma única região passa pelo fim do anel retornando para seu início. Os valores apresentados consistem nas regiões culturais às quais pertencem os sítios, e a localização dos números na figura corresponde à localização dos sítios de 1 até 10 na figura 17. 51

Figura 20 - Nesta figura temos a fração de estados absorventes monoculturais ξ em função do tamanho da rede L . A variação em ξ é muito pequena com L , caracterizando uma dependência fraca com L . Os pontos são os resultados computacionais rodados 10^6 vezes cada, ou seja, 10^6 configurações iniciais diferentes e a linha é a curva de ajuste $\xi = 0.33 + 0.017 \exp(-L/387)$ 52

Figura 21 - Fração média N_d/L do número de regiões culturais em função do tamanho da rede L . Esta figura é construída com apenas estados absorventes de multicultura. Os pontos são computacionais rodados 10^6 vezes cada. A linha sólida é a curva de ajuste $N_d/L = 1.41L^{-2\psi}$ com $\psi = 0.36$. A linha pontilhada é a mesma curva de ajuste com $\psi = 1/3$ para compararmos nossos resultados com o de Vilone et al (80) (ver final desta seção). O número de regiões N_d cresce com o tamanho da rede L conforme a lei $L^{1-2\psi}$ com $\psi = 0.36$. Isto indica um grande número de regiões culturais no limite termodinâmico. . . 53

Figura 22 - Fração média de sítios s_m que pertencem à maior região em função do tamanho da rede L . Os pontos são os resultados computacionais para 10^6 rodadas. A linha é a curva de ajuste $s_m = 0.576 + 0.33/(L^{0.72})$ que dá o valor assintótico $s_m \rightarrow 0.576$. Somente foram contabilizadas estados absorventes com regiões multiculturais, diferentemente dos resultados de Vilone que contabilizam todos os estados. 54

Figura 23 - Tempo de relaxação τ^* em função do tamanho da rede L . τ^* é a média dos tempos para cada simulação em 10^6 simulações. Os símbolos vazios são para estados absorventes monoculturais e os símbolos cheios para multiculturais. Temos as curvas de ajuste $\tau^* = 0.37L^2$ para monocultura e $\tau^* = 0.11L^2$ para multicultura. Para ambos os estados absorventes temos $\tau^* \sim L^2$ e vemos que a dinâmica demora 3.4 vezes mais para convergir quando existem regiões monoculturais do que quando existem regiões multiculturais. 55

Figura 24 - Densidade de paredes n_F pelo tempo τ para redes com tamanho $L=5 \times 10^3(\square)$, $1 \times 10^4(\nabla)$, $2 \times 10^4(\triangle)$ e $5 \times 10^4(\circ)$. Símbolos abertos são para regiões que atingiram estados absorventes monoculturais e símbolos fechados, multiculturais. A linha sólida é a curva de ajuste $n_F = 0.52\tau^{-\psi}$ com $\psi = 0.36$. Os símbolos são resultados de simulações de Monte Carlo. A linha pontilhada é a curva de ajuste com o expoente fixo em $\psi = 1/3$ para compararmos nossos resultados com os de Vilone et al (80) (ver final desta seção). 56

Figura 25 - Densidade de sítios ativos n_A como função do tempo τ . A convenção de símbolos é a mesma da figura 24. A linha sólida é a curva de ajuste $n_A = 0.38\tau^{-1/2}$. Vemos um comportamento idêntico para rodadas que tenderam à monocultura e à multicultura até um valor aproximado de $\tau = 10^6$. Nas estatísticas de monocultura n_A , demora mais para tender a zero. 57

Sumário

1	<i>INTRODUÇÃO</i>	19
2	<i>O Modelo de Axelrod</i>	23
2.1	Dinâmica de Opiniões e Dinâmica Cultural	23
2.2	Ciência e Simulações de Monte Carlo	24
2.3	Motivações do Modelo Original	26
2.4	Algoritmo do modelo de Axelrod	29
2.5	Otimizações	37
2.6	Resultados preliminares	39
2.7	Modificações e modelos similares	45
3	<i>Resultados principais</i>	47
3.1	Introdução e motivações	47
3.2	Modelo de Axelrod unidimensional com $F=q=2$	48
3.3	Simulações de Monte Carlo no modelo de Axelrod 1-d com $F=q=2$	51
3.4	Monte Carlo de dinâmica com tempo finito	55
4	<i>CONCLUSÃO</i>	59
	Referências	61

1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos, as simulações se mostraram uma poderosa ferramenta científica para inúmeras áreas de conhecimento. Na física, elas são indispensáveis para o estudo de determinados sistemas que não possuem solução analítica exata. Quando existem soluções analíticas aproximadas, as simulações se tornam valiosas para a verificação destas, principalmente nos casos da impossibilidade de realização de experimentos. Por exemplo, na teoria de percolação (1), sempre que os dados experimentais podem ser verificados, corroborando ou não com a teoria previamente desenvolvida, as simulações computacionais se mostram corretas, enquanto que, dificilmente, as teorias analíticas mantêm sua veracidade. Esse é o curso natural da história até os dias de hoje na grande maioria das teorias científicas.

Em um problema em que simulações apresentam resultados diferentes dos obtidos com teorias analíticas exatas, existe uma discrepância teórica que não pode persistir. É necessário encontrar uma possível explicação para a discrepância, refazendo o cálculo analítico, refazendo as simulações, ou de qualquer outra maneira. Não podemos descartar as simulações porque elas são muito importantes. Mesmo quando não existem modelos matemáticos para um determinado problema, podemos fazer modelos computacionais e analisar propriedades de interesse dos sistemas de estudo. Neste trabalho, consideramos um modelo matemático os modelos com teorias analíticas e modelos computacionais os modelos com simulações computacionais. A existência de um modelo computacional não encerra o trabalho dos cientistas que ainda precisam fazer a teoria analítica (exata ou aproximada) e o experimento, se possível. O estudo computacional se desenvolveu em inúmeras áreas (por exemplo, ver Marro (2)) e se tornou fonte indispensável de conhecimento.

Dentre os estudos computacionais realizados, um modelo particularmente interessante

e estudado neste trabalho é o modelo do cientista político Robert Axelrod. (3) Este estuda como a cultura de um determinado indivíduo se transfere para outro através de uma interação simples. Interações locais geram polarizações globais na população, de modo que é possível prever estocasticamente comportamentos populacionais. Os indivíduos são chamados de atores e são representados por elementos de uma matriz, os sítios, onde a matriz toda é a população a ser estudada. Cada sítio permanece fixo numa posição geográfica e é capaz de interagir com seus vizinhos. Os sítios são formados por uma lista de F características, cada uma com q traços. O modelo original proposto por Axelrod é bidimensional (rede quadrada) e considera vários valores de F e q . As interações acontecem dependendo da similaridade cultural de dois indivíduos, de modo que quanto mais parecidos forem, maior a probabilidade de interagirem. Com dois sítios completamente iguais a interação acontece e não altera nenhum traço das características. Uma interação deste tipo, que não altera o sítio em questão, pode ser considerada uma não-interação. Quando uma interação acontece, um valor de uma característica aleatória F do sítio sorteado, inicialmente distinta entre os sítios, é alterada para o valor da característica do vizinho.

A matriz do modelo de Axelrod atinge um estado final chamado absorvente na teoria de probabilidade e estatística, pois o sistema permanece neste estado final para sempre. O estado final pode ser uma única região de indivíduos idênticos ou um conjunto de regiões distintas cada uma com indivíduos idênticos. Esses estados são absorventes, pois consideramos que sítios completamente iguais e completamente distintos não interagem. Como o estado inicial do modelo é formado por uma matriz montada aleatoriamente, observamos uma grande mudança na cultura final de seus sítios em relação à inicial. Um caso de particular interesse neste trabalho é o modelo de Axelrod unidimensional com os parâmetros $F=q=2$.

O modelo de Axelrod unidimensional com $F=q=2$ foi estudado analiticamente por Nicolas Lanchier. (4-5) Ele encontrou resultados exatos que discordam com os resultados de simulações computacionais para este modelo. (80) Lanchier demonstra que existe somente o estado final absorvente de monocultura, mas nas simulações computacionais esse estado ocorre conjuntamente com estados absorventes multiculturais. Esse tipo de desacordo não pode ocorrer na ciência.

Nessa dissertação estudamos o modelo de Axelrod original (Capítulo 2). Também

estudamos o modelo unidimensional com $F=q=2$ utilizando simulações de Monte Carlo e expomos nossos resultados (6) que explicam a discrepância entre as simulações e os resultados analíticos exatos de Lanchier (Capítulo 2).

2 *O Modelo de Axelrod*

2.1 Dinâmica de Opiniões e Dinâmica Cultural

Dinâmica de opiniões é o nome dado ao estudo do modo como opiniões de pessoas ou grupos sociais se espalham com o tempo numa população através de interações entre as pessoas. Dentre as inúmeras características passíveis de estudo na dinâmica de opiniões sociais, a concordância tem grande importância. (7) Ela apresenta um papel crucial no fortalecimento de relações políticas, possui grande impacto no mercado de livre consumo, permite relações sociais pacíficas e amplifica o impacto de uma decisão na sociedade.

A utilização de mecânica estatística na dinâmica de opiniões procura entender o complexo processo de concordância e discordância de indivíduos, definindo os estados de opiniões dos agentes e entendendo os processos elementares que determinam as transições entre esses estados.

Na dinâmica de opiniões, a opinião é representada por números e busca descrever o conjunto de possíveis escolhas que uma pessoa possui ao longo de sua vida. Cabe ao pesquisador encontrar um conjunto de regras que regem o comportamento da mudança de opiniões ao longo do tempo. Existem diversos modelos de opiniões que não serão estudados neste trabalho como os de Weidlich (8) e Galam. (9-10)

Em conjunto com a dinâmica de opiniões, também existe o estudo de dinâmica cultural. A definição de dinâmica cultural é vaga na comunidade científica. Sua fronteira com dinâmica de opiniões não é clara, porém nos últimos anos houve um considerável aumento de interesse no campo. O processo de estudo natural dos pesquisadores consiste em considerar uma opinião como uma variável escalar, enquanto a cultura como um todo de um único indivíduo é fornecida por uma lista de números, ou um vetor, cujos elementos estão conectados.

Algumas questões geralmente abordadas nesse campo são: Qual o resultado final da diversidade? As diferenças estão fadadas a persistirem ou poderão desaparecer ao

longo do tempo? Quais os mecanismos microscópicos que geram a formação de grupos culturais? Essas e outras questões se tornam foco da pesquisa e permitem um melhor desenvolvimento da área em questão.

Um dos grandes modelos desenvolvidos em dinâmica cultural é o modelo de Axelrod, estudado neste trabalho. (3) Esse modelo ficou particularmente famoso, tanto na física como nas ciências sociais, por possuir dois mecanismos especialmente importantes, que são: influência social, que é a tendência de indivíduos ficarem mais similares ao interagir, e homofilia, a tendência de indivíduos parecidos se atraírem de modo a interagirem mais frequentemente. O modelo de Axelrod é discutido qualitativamente e quantitativamente neste capítulo.

Tanto a dinâmica de opiniões como a dinâmica cultural sempre foram de campos considerados não conectados com a física, mas devido ao crescente uso de computadores no decorrer dos anos nas pesquisas realizadas, os físicos encontraram relações e parâmetros da mecânica estatística nessas áreas, por exemplo: estados estacionários, transições de fase, entre outros. Isso não seria possível se não fosse o advento e desenvolvimento da física computacional, já que esses sistemas são extremamente complexos e exigem a presença constante de simulações.

2.2 Ciência e Simulações de Monte Carlo

Com a chegada dos computadores, foi possível para os cientistas estudar problemas que antes estavam fora do alcance, permitindo a invenção de novos modelos teóricos para tratar de sistemas da natureza e resolvê-los por completo sem a necessidade de aproximações, conforme citaremos alguns exemplos adiante. Com o passar dos anos os computadores foram melhorados, ficando mais rápidos e mais eficientes também como os métodos computacionais. As simulações computacionais se tornaram uma nova maneira de fazer ciência, ora provendo os resultados experimentais desconhecidos, ora fornecendo bases teóricas. (11)

A figura 1 mostra um possível esquema de relações entre teoria, experimentos e simulações. Observamos regiões de pontos em comum para dois conjuntos quaisquer que demonstram coexistência de ambos os conceitos e ausência do terceiro. Na região de intersecção de teoria e simulação, temos a ausência de experimentos. Essa região

corresponde a fenômenos que já foram estudados analítica e computacionalmente, mas que ainda requerem um experimento. Esse é o caso deste trabalho. Essa região engloba uma variedade de casos em que é possível a realização de experimentos e outros em que ainda é impossível, como na teoria de cordas ou cosmologia. A região de intersecção de teoria e experimento representa o que foi feito na ciência ao longo dos anos quando ainda não havia simulações, ou mesmo trabalhos atuais que não tiveram suas simulações desenvolvidas. Temos regiões de simulações e experimentos sem uma teoria sólida que explique os fenômenos observados analiticamente. Há regiões nas quais cada um dos três conjuntos existem sozinhos correspondendo a fenômenos que somente foram explicados, medidos ou simulados, sendo ainda necessário um desenvolvimento de cooperação entre os diferentes conjuntos. A intersecção dos três conjuntos representa a abordagem científica mais completa, caracterizando uma análise ideal dos fenômenos da natureza. Onde existe a ausência de um ou mais conjuntos é natural e benéfico para a ciência a busca pela inclusão dos mesmos. As simulações, teoria e experimento são igualmente importantes na ciência em geral, mas neste trabalho destacamos a importância de simulações computacionais.

Figura 1 – Diagrama esquemático da ciência formado pela coexistência de três conjuntos circulares que caracterizam cada um, teoria, experimento e simulações. Há regiões onde teoria e experimento se sobrepõem, não necessariamente garantindo a existência da ciência, ou seja, da explicação científica de fenômenos da natureza. O mesmo para regiões com teoria e simulação, simulação e experimentos e regiões onde somente existe um único círculo. A região central na qual há intersecção completa dos três círculos corresponde à ciência em sua forma ideal.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Um método computacional de particular importância para este trabalho é a simulação de Monte Carlo. Não existe consenso na definição de simulações de Monte Carlo (12) , mas podemos dizer que são simulações nas quais são utilizados números aleatórios para

a resolução de um problema. (13–15) Repetimos o sorteio dos números aleatórios uma enorme quantidade de vezes para que, passo após passo, o resultado final seja encontrado. (16-17)

As simulações de Monte Carlo são utilizadas em inúmeras áreas de conhecimento, como finanças (18) , gerenciamento de projetos (19) , engenharia (20) , entre outras. São utilizadas em física, como física computacional (21) , físico-química (22) , cromodinâmica quântica, modelagem de transporte de radiação (23) , física de materiais (24) , mecânica de fluidos, física estatística (25) , biofísica (26–28) , astrofísica (29) , e em matemática (30–32) , em resolução de integrais definidas multidimensionais, amostragem estatística, geração de gráficos entre outras, substituindo o método analítico, que é, muitas vezes, difícil, ou até mesmo impossível de ser desenvolvido.

Neste trabalho utilizamos constantemente o sorteio de variáveis aleatórias em várias etapas do código construído. Os números aleatórios são utilizados para gerar a rede inicial do código de forma que, cada vez que o programa roda, uma rede completamente distinta da anterior é gerada. Para o modelo bidimensional não otimizado (explicamos otimização nas seções adiante), também são utilizados números aleatórios para gerar a linha da matriz, outro para a coluna, fornecendo as coordenadas do sítio sorteado e outro número para o sítio vizinho. Na verdade, quanto mais otimizado, ou seja, melhor trabalhado o código computacional, menos números aleatórios utilizamos e mais simples e veloz fica o programa. Para o programa unidimensional posteriormente criado, utilizamos apenas dois números aleatórios, um para gerar a linha inicial e outro para definir uma variável “*fluxo*” necessária para a otimização.

O padrão utilizado nas simulações de Monte Carlo consiste basicamente em três etapas. Primeiro definimos o conjunto possível de entradas e sorteamos o valor aleatório de entrada a partir desse conjunto inicial. Em segundo lugar, efetuamos uma computação determinística com as entradas e, em último lugar, observamos e analisamos os resultados obtidos. Os códigos desenvolvidos neste trabalho seguem, basicamente, essa receita.

2.3 Motivações do Modelo Original

Robert Axelrod é um cientista político que trabalhava na Escola de Política Pública na Universidade de Michigan quando publicou seu famoso artigo (3) em 1997. Como todo

cientista político, ele construiu um modelo que busca entender as relações interpessoais de socialização da humanidade. Esse modelo original foi puramente computacional, ou seja, o autor não desenvolveu uma explicação analítica com cálculos matemáticos (sua dinâmica será explicada na próxima seção). O modelo trabalha com a ideia de que pessoas interagem socialmente com aqueles que possuem alguma característica em comum. Iniciadas as interações sociais e com o passar do tempo, as pessoas se tornam ainda mais similares, adicionando para o seu leque de características culturais fatores comuns com seus semelhantes. A pergunta principal cujo mecanismo do modelo Axelrod busca responder é: se todos interagimos com semelhantes e tendemos a ficar ainda mais semelhantes então por que não somos todos iguais? O termo para descrever a interação entre duas pessoas e sua consequente assimilação de características é chamado convergência local. E o fato de a interação pessoal levar à formação de pessoas diferentes na sociedade como se formassem grupos ou polos é chamado de polarização global.

Como é muito difícil medir o nível de socialização de duas pessoas, o autor define cultura como o conjunto de atributos individuais que estão sujeitos à influência social. O modelo é utilizado para medir o quanto duas pessoas se conectam socialmente, comparando uma lista de atributos de uma pessoa com a lista de outra. Para a formação de ideia de cultura, devem ser especificados alguns parâmetros para realizar a dinâmica e esse conjunto de parâmetros forma, não somente a cultura de um indivíduo, mas também a cultura da população como um todo, conforme será visto na próxima seção. Por exemplo, culturalmente muitos fatores formam um único ser humano: seu estilo musical, sua opinião política, o gosto por comida, o modo de vestir, preferência sexual, crenças religiosas, hobbies pessoais, práticas esportivas, entre outros. Dentro de cada um desses tópicos, podemos escolher inúmeras opções para a formação de um cidadão que, seguindo as possíveis características culturais desse exemplo, pode nos fornecer uma pessoa com os traços culturais: rock, capitalista, comida japonesa, casual, heterossexual, budista, ler, polo aquático. Fornecendo o conjunto de características, cada uma com seu conjunto de traços culturais, formamos a lista de atributos correspondente à cultura de um indivíduo. Quem estiver construindo o mecanismo computacional define os parâmetros culturais a serem utilizados. Esse foi um exemplo ilustrativo de como poderia ser trabalhada a especificação de cultura de um indivíduo, mas é importante notar que o significado dos elementos escolhidos como parâmetros não importa no modelo original de Axelrod, pois

ele é geral. O ponto principal a ser estudado por Axelrod é a dinâmica da socialização com o objetivo de responder à pergunta principal vista no parágrafo anterior.

O modelo em particular pode ser aplicado para tópicos específicos como formação de estados políticos (33–36) , guerras civis e disputas intranacionais em geral, disputas domésticas (37–41) entre outros contextos, sempre procurando entender os efeitos da mudança cultural, ou seja, o modo como a cultura se espalha, se modifica, se estabelece em uma determinada população. A disseminação de uma cultura em escala mundial pode ser benéfica para o ser humano, como por exemplo, ideias de paz, de preservação ambiental, de combate ao preconceito racial, de campanhas de doação de alimentos entre outras temáticas, como também pode ser maligna destruindo culturas de outros povos, havendo dominação cultural de um povo sobre outro, seja na música, filmes, roupas, comida entre tantos outros itens.

Existem alguns mecanismos de manutenção de diferenças culturais que não serão explorados neste trabalho. (42–50) Nesses mecanismos, as pessoas propositalmente se mantêm diferentes de outras pessoas ou de grupos aos quais elas não pertencem. É importante notar que a comunicação pessoal não é o fator essencial nesses mecanismos, mas sim no modelo de Axelrod. Neste, sítios que possuem maior número de características com traços iguais tendem a se comunicar mais facilmente entre si do que os que possuem menor ou nenhum número de características com traços iguais. Depois da comunicação, uma característica que era diferente se torna igual, para esses sítios. Eles ficam ainda mais propícios a futuras interações. Essa qualidade do modelo, que diz que pessoas similares interagem mais entre si, é chamada homofilia. Como o próprio autor diz, “...comunicação é mais eficiente entre pessoas similares...”. (3)

Resumindo, o conceito de cultura utilizado no presente modelo deve satisfazer duas exigências: a primeira é que as pessoas tendem a interagir mais com outras pessoas que possuem maior número de características culturais com traços iguais, e a segunda é que a comunicação entre essas pessoas vai aumentar o seu grau de similaridade cultural. O conceito de cultura já era conhecido em 1997 quando o estudo de Axelrod foi publicado, mas baseado nessas definições o modelo de Axelrod mostra inovações para sua época: ele considera que os efeitos em uma característica cultural dependem da presença ou não de outras características culturais e leva em consideração que indivíduos culturalmente mais similares entre si estão mais sujeitos à interação e, conseqüente, à influência do que

pessoas menos similares.

O modelo de Axelrod é um modelo baseado em agentes (51–58) , ou seja, os mecanismos de mudança são especificados para sítios locais e são estudadas as propriedades que surgem no sistema todo quando muitos sítios interagem entre si. Não há uma autoridade central na população. Isso significa que todos os elementos da matriz em questão possuem a mesma capacidade de influenciar e serem influenciados por meio das interações aleatórias, de modo que nenhum sítio se destaca por ser um agente ativo de disseminação de traços culturais como, por exemplo, um ministro de igreja seria em uma comunidade local. Os sítios do modelo de Axelrod não agem racionalmente, isto é, não tomam decisões por si próprios ou considerando a escolha de seus sítios vizinhos, como seria se utilizassem teoria dos jogos. (59) Eles interagem seguindo regras pré-estabelecidas de influência cultural, considerando os traços de suas respectivas características.

Discutimos qualitativamente o modelo de Axelrod. Na próxima seção, fazemos um tratamento mais quantitativo, expondo as hipóteses e dinâmica do modelo.

2.4 Algoritmo do modelo de Axelrod

O modelo de Axelrod explicado neste capítulo é o modelo original (3) e foi reconstruído no início do mestrado com as intenções de introduzi-lo ao aluno, de checar se as simulações estavam corretas e de focar no aprendizado de otimização computacional deixando o código mais veloz.

O modelo bidimensional é caracterizado por uma matriz de $L=N \times N$ elementos, onde cada elemento da matriz é um sítio. L é definido como o número total de sítios e N é a largura do território. Os elementos da matriz serão listas de F características, cada uma com q traços, variando de 0 a $q-1$. Os valores N , F e q são escolhidos pelo programador, caracterizando variáveis na montagem do código, ou seja, quando o programa roda esses valores são fixos, mas se desejarmos rodar o código com diferentes valores isso deve ser possível. Um exemplo de parâmetros é $N=10$, $F=5$ e $q=2$, o que pode fornecer para um sítio a combinação 01101 que é um dos 100 elementos da matriz. As matrizes são quadradas, fornecendo uma distribuição geográfica fixa dos sítios porque seguimos o modelo original. Nos sítios, são modificados os q traços de sua configuração de F características ao longo da dinâmica. Essa qualidade do modelo permite que cada sítio

possa ser considerado como uma vila, ou uma população inteira se desejado, embora essa escolha em particular seja irrelevante para os nossos propósitos. Os possíveis vizinhos de um sítio são os das direções vertical e horizontal com sentidos para cima e baixo, direita e esquerda. Esses são os chamados vizinhos mais próximos. Essa configuração de rede é adotada no modelo original cujos elementos da matriz possuem quatro vizinhos mais próximos, exceto pelos das bordas laterais e verticais, que possuem três vizinhos e sítios nas quinas da matriz, que possuem dois vizinhos. As configurações de vizinhos mais próximos foram utilizadas neste trabalho, tanto para o modelo bidimensional (2-d) como para o modelo unidimensional (1-d). A configuração de quatro vizinhos mais próximos para todos os sítios da matriz só é possível com condições periódicas de contorno. Com essas condições, os vizinhos da direita da coluna da direita da matriz são os da coluna da esquerda e os vizinhos mais próximos de cima na linha de cima são os da linha de baixo da matriz. Desse modo, a matriz bidimensional possui a forma topológica de um toro, conforme a figura 2. Existem outras topologias possíveis, ou seja, outras combinações de vizinhos para os sítios não levadas em conta neste trabalho. (61) No modelo bidimensional, não utilizamos condições periódicas de contorno, como o próprio autor, mas no modelo unidimensional do próximo capítulo sim.

Figura 2 – Forma topológica de um toro. A matriz bidimensional ganha essa forma quando utilizamos condições periódicas de contorno. Unindo as laterais da matriz, temos um cilindro. Unindo as pontas do cilindro, formamos um toro.

Fonte: Adaptada de SIMPLE ... (60)

Na figura 3, mostramos uma matriz com $L=100$, $F=4$ e $q=7$. Essa figura representa uma possível configuração inicial aleatória dentre as muitas possíveis. A configuração inicial da matriz é sensível aos parâmetros F , q , L e à dimensão do modelo. Dependendo dos valores dos parâmetros, a matriz tende a ter mais sítios iguais na configuração inicial

ou não. Analisaremos a probabilidade de interação de dois sítios com a figura 3.

$$\begin{pmatrix} 2104 & 1326 & 6501 & 1305 & 2433 & 2310 & 0011 & 3206 & 4035 & 3652 \\ 5636 & 2445 & 2114 & 4354 & 3060 & 2606 & 6453 & 4462 & 3326 & 0042 \\ 1605 & 2636 & 6301 & 2012 & 5062 & 4551 & 2003 & 0462 & 3015 & 6445 \\ 0403 & 5263 & 2560 & 4510 & 6130 & 6222 & 2312 & 1612 & 4163 & 3506 \\ 4661 & 5114 & 3542 & 0653 & 3665 & 6014 & 1005 & 6053 & 0545 & 6622 \\ 4655 & 6313 & 3013 & 0202 & 3012 & 1651 & 5364 & 2206 & 1551 & 2646 \\ 0621 & 2345 & 3504 & 5663 & 2614 & 1243 & 0243 & 2223 & 1543 & 1225 \\ 1336 & 2234 & 2423 & 6060 & 3345 & 5020 & 6640 & 2663 & 3225 & 5620 \\ 4544 & 5351 & 6205 & 3262 & 2334 & 3200 & 5354 & 3150 & 6255 & 6365 \\ 6642 & 2454 & 1115 & 4252 & 6302 & 4634 & 2121 & 4204 & 2464 & 2413 \end{pmatrix}$$

Figura 3 – Exemplo de matriz inicial para $L=100$, $F=4$ e $q=7$. Os sítios são uma distribuição aleatória de números que formam sua cultura. Existem sítios completamente incapazes de interagir com seus vizinhos, pois não possuem sequer uma característica em comum com os mesmos, como é o caso do sítio $s_{1,1}$ (lê-se “esse um um”, pois é o sítio da linha 1, coluna 1). Não são utilizadas condições periódicas de contorno, de modo que os vizinhos do sítio $s_{1,1}$ são apenas os sítios $s_{1,2}$ e $s_{2,1}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A interação entre dois sítios quaisquer na dinâmica depende da similaridade cultural de ambos. A probabilidade de interação entre dois sítios é dada pelo número de características em comum sobre o número total de características. A primeira característica do primeiro sítio deve ser comparada com a primeira característica do segundo sítio, a segunda característica do primeiro sítio com a segunda do segundo sítio e assim por diante. Sítios totalmente iguais não interagem apesar de possuírem similaridade cultural de 100%. Sítios sem característica cultural em comum não interagem, pois possuem probabilidade de interação igual a 0.

Na figura 3, o sítio $s_{1,3}$ (lê-se “esse um três”, pois é o sítio da linha 1, coluna 3), formado pelo arranjo 6501, possui três vizinhos: à esquerda, o sítio $s_{1,2}$ formado pelo arranjo 1326, à direita, o sítio $s_{1,4}$ com o número 1305 e abaixo, o sítio $s_{2,3}$ com o número 2114. O sítio $s_{1,3}$ não possui traço em comum com seu vizinho de baixo, o sítio $s_{2,3}$, nem com seu vizinho da esquerda $s_{1,2}$. A probabilidade de interação entre eles é 0, caso eles sejam sorteados para interagir. Mas o sítio $s_{1,3}$ possui uma característica em comum com seu vizinho da direita, $s_{1,4}$, correspondente à terceira característica de valor $q=0$. Eles têm probabilidade

de $1/4$ de interagir, pois possuem uma característica em comum das quatro possíveis. Digamos que aconteça o sorteio e que dada à probabilidade também aconteça a interação, as características restantes no sítio original sorteado são as com valores $q=6$, $q=5$ e $q=1$. Uma delas é escolhida aleatoriamente, todas com igual probabilidade. Supondo que seja sorteada a característica com traço $q=6$, o valor das características do sítio sorteado será, após a interação, 1501. A característica do sítio sorteado foi alterada para o valor do traço da característica análoga do vizinho. Ressaltamos que o sítio sorteado é o alterado e não o vizinho sorteado. Isso ocorre propositadamente para que todos os sítios da rede tenham chance de serem sorteados e alterados. Os sítios vizinhos permaneceram inalterados nesse exemplo, mas o valor do sítio sorteado foi mudado. Analisando as probabilidades de interação com seus vizinhos novamente, vemos que, agora, o sítio $s_{1,3}$ possui a primeira e a terceira características em comum com seu vizinho da direita, $s_{1,4}$ e agora eles têm probabilidade de interagir de $1/2$. Ainda não há chance de interação com o sítio de baixo e a probabilidade de interação com o sítio da esquerda, agora, é $1/4$.

A dinâmica do código tem início considerando o sorteio aleatório de um sítio da matriz. Depois é sorteado um sítio vizinho aleatoriamente. A interação ocorre com probabilidade fornecida pela similaridade cultural dos dois sítios escolhidos, conforme já explicado. O sorteio de um sítio, de um vizinho e uma possível interação é chamado de evento. Com a interação, sítios mais similares tendem a ficar ainda mais similares, sendo essa a ideia discutida na seção anterior. Em seguida, na dinâmica, é realizado novamente um sorteio de um sítio e um vizinho correspondente de forma aleatória e isso se repete em um “*loop*” (laço de repetição computacional) até que a matriz não possua mais sítios passíveis de interação. A simulação é feita considerando um evento de cada vez para evitar que aconteçam ativações simultâneas do mesmo sítio. (62)

Quando a dinâmica termina, o sistema alcança um estado absorvente. (63) Isso quer dizer que uma vez nesse estado, o sistema permanece nele para sempre. Existem dois tipos de estados absorventes no modelo de Axelrod como mostram as figuras 4 e 5. Em um deles, todos os sítios possuem a mesma configuração cultural final. Dizemos que esse estado possui uma única região cultural, sendo chamado monocultural e esse sistema é chamado homogêneo. Uma região cultural é basicamente um conjunto de sítios contíguos que possuem todos a mesma cultura. Esse estado é intuitivamente esperado pois as interações entre sítios tendem a torná-los mais similares. Outro estado possível é caracterizado

$$\begin{pmatrix} 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 \\ 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 \\ 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 \\ 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 \\ 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 \\ 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 \\ 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 \\ 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 \\ 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 \\ 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 & 2566 \end{pmatrix}$$

Figura 4 – Exemplo de matriz final para estado absorvente de monocultura para $L=100$, $F=4$ e $q=7$. As características assumiram os valores 2566 para todos os sítios da rede, caracterizando uma única região cultural. A matriz convergiu para um estado monocultural.

Fonte: Elaborada pelo autor.

pela existência de duas ou mais regiões culturais, chamado estado multicultural. Regiões distintas não interagem entre si. E mesmo que possuam a mesma configuração final, regiões que não se encostam geograficamente são consideradas diferentes. Esse estado absorvente multicultural é considerado contra-intuitivo levando em conta as interações do modelo.

É importante estudarmos a matriz final, caracterizando o sistema de acordo com o número de regiões culturais e com o tamanho de cada uma delas. Para a contagem do número de regiões na matriz final, utilizamos um algoritmo famoso chamado algoritmo de Hoshen e Kopelman (64), que também é conhecido como algoritmo do rótulo de rótulos. Nesse algoritmo, percorremos a matriz, elemento por elemento, de cima para baixo, da esquerda para a direita. Ao encontrarmos um sítio, comparamos cada característica com a do vizinho da esquerda e com a do vizinho de cima. Se um sítio possui os mesmos traços para todas as características que seu vizinho apresenta, ele é colocado na mesma região, caso contrário ele é colocado em uma região distinta. Mas algumas complicações surgem na rotulação de regiões 1, 2, 3... e assim podemos dar um rótulo errado para um determinado sítio, ou seja, elementos da mesma região são nomeados como pertencentes a regiões distintas. O algoritmo busca consertar isso, nomeando um determinado rótulo como ruim. Depois que toda a matriz foi classificada, basta retirar os rótulos ruins e

$$\begin{pmatrix} 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 \\ 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 \\ 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 \\ 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 5405 & 5405 & 6362 & 6362 & 6362 \\ 1654 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 5405 & 5405 & 6362 & 6362 & 6362 \\ 1654 & 1654 & 1654 & 1654 & 1654 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 \\ 1654 & 1654 & 1654 & 1654 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 \\ 3332 & 1654 & 1654 & 1654 & 1654 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 \\ 1654 & 1654 & 1654 & 1654 & 1654 & 1654 & 6362 & 6362 & 6362 & 6362 \\ 1654 & 1654 & 1654 & 1654 & 1654 & 6362 & 6362 & 3241 & 6362 & 6362 \end{pmatrix}$$

Figura 5 – Exemplo de matriz final para estado absorvente multicultural para $L=100$, $F=4$ e $q=7$. As características assumiram valores diversos ao longo dos sítios da rede. Temos cinco regiões culturais distintas. Os sítios da mesma região cultural são iguais entre si e, por isso, não podem interagir. Sítios de regiões culturais diferentes não podem interagir, pois não possuem nenhuma característica em comum.

Fonte: Elaborada pelo autor.

substituir por bons.

$$\begin{pmatrix} 14 & 14 & 23 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 14 \\ 22 & 22 & 22 & 14 \\ 22 & 22 & 22 & 22 \end{pmatrix}$$

Figura 6 – Exemplo de matriz final multicultural para aplicação do algoritmo de Hoshen e Kopelman. A matriz é formada por 3 regiões distintas. A primeira com 8 elementos e traços 1 e 4, a segunda com 1 elemento e traços 2 e 3 e a terceira com 7 elementos e traços 2 e 2. O algoritmo serve para que o computador possa fazer essa contagem de forma eficiente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como exemplo, aplicaremos o algoritmo de Hoshen e Kopelman (64) na figura 6. O primeiro elemento $s_{1,1}$ da matriz recebe a nomenclatura da região 1. Comparamos o elemento $s_{1,2}$ com o já nomeado e vemos que ele é idêntico, também recebendo a nomenclatura 1. O elemento $s_{1,3}$ é diferente e pertence a uma nova região, a região 2. Em seguida, classificamos o elemento $s_{1,4}$. Podemos ver claramente pela simples matriz fornecida que esse elemento pertence à região 1, pois estará conectado ao elemento $s_{1,1}$ pela linha 2. Mas o algoritmo nomeará este comparando-o com o elemento anterior $s_{1,3}$

e, como eles são diferentes, o rótulo do sítio $s_{1,4}$ será 3. Seguindo para a linha dois, comparamos os elementos $s_{2,1}$ e $s_{1,1}$. Com são idênticos, o rótulo de $s_{2,1}$ é 1. O sítio $s_{2,2}$ fica com rótulo 1. O $s_{2,3}$ fica com rótulo 1, pois é igual ao elemento da esquerda e diferente do de cima. Com $s_{2,4}$ temos um problema, pois o sítio em questão é igual a ambos os sítios vizinhos de cima e da esquerda, porém cada um está com um rótulo diferente, o da esquerda com rótulo 1 e o de cima com rótulo 3. Armazenamos então o rótulo menor, 1, para o sítio $s_{2,4}$ e rotulamos o rótulo 3 como ruim. Quando a matriz for totalmente rotulada, o rótulo ruim 3 terá de ser substituído pelo rótulo correto 1. A rotulação segue como $R(1)=1$, $R(2)=2$ e $R(3)=1$, pois utilizando um vetor R como rótulo dos rótulos, vemos que o rótulo ruim 3 deve ser substituído pelo rótulo 1. Esse algoritmo garante a rotulação com eficiência e é utilizado até os dias atuais. A matriz de regiões culturais formada mostra no lugar dos sítios o valor da região à qual eles pertencem.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Figura 7 – Exemplo de matriz de regiões culturais da matriz final da figura 6 na qual o algoritmo de Hoshen e Kopelman já foi finalizado, fornecendo a contagem correta do número de regiões culturais e o número de sítios de cada região. Cada sítio mantém sua posição geográfica da matriz inicial e em seu lugar é colocado o número da região à qual ele pertence.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A matriz final desse exemplo fica com a forma exposta na figura 7, na qual observamos a formação de três regiões. A região 1 possui 8 elementos, a região 2, 1 elemento e a região 3, 7 elementos.

Para as matrizes das figuras 4 e 5, representamos a matriz de regiões culturais nas figuras 8 e 9, respectivamente.

Os efeitos da interação social com o passar do tempo levam a conclusões interessantes que são destacadas a seguir.

Com a formação da configuração inicial dada, observamos que os sítios possuem, em geral, características bem distintas entre si, ou seja, possuem pouca similaridade cultural e dificilmente começam sua distribuição geográfica formando uma região cultural por menor que seja. Isto ocorre devido à aleatoriedade do problema, que tende a gerar configurações culturais muito diferentes quanto maior forem os valores dos parâmetros escolhidos pelo programador. Apesar disso, conforme a dinâmica acontece, as similaridades culturais

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 8 – Matriz de regiões culturais para a figura 4 montada com o algoritmo de Hoshen e Kopelman. Como a matriz é monocultural, todos os sítios estão na mesma região, que é a região 1.

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 9 – Matriz de regiões culturais para a figura 5, montada com o algoritmo de Hoshen e Kopelman. (64) Esta matriz permite ao programador enxergar as regiões presentes com facilidade.

Fonte: Elaborada pelo autor.

tendem a aparecer e crescer na matriz.

É natural a formação de regiões culturais com o passar do tempo na dinâmica. Isso ocorre devido ao fato de a interação deixar os sítios cada vez mais similares e então possuírem maior chance de interação no futuro. A existência de regiões é inevitável devido à construção do algoritmo do problema.

Com esse algoritmo, as mudanças culturais se tornam impossíveis com o tempo devido à formação de regiões. Dois sítios que pertencem à mesma região possuem todas as características culturais idênticas. Esses podem ser sorteados para interação, mas não efetuarão alterações culturais entre si. No caso de dois sítios vizinhos que pertencem a regiões distintas (a parede entre eles é denominada uma fronteira cultural) eles possuem

todas as características completamente diferentes e também não irão alterar suas culturas. Com essas condições, uma fronteira somente pode ser desfeita se um dos sítios em questão tiver suas características culturais modificadas por algum outro vizinho. Somente então, esse sítio pode passar a ter alguma característica em comum com o vizinho da antiga fronteira e então ter probabilidade de interagir com o mesmo. Caso isso não ocorra, a fronteira não será desfeita e permanecerá constante até o programa convergir, ou seja, acabar. O número de regiões culturais começa praticamente igual ao número de sítios na matriz e diminui drasticamente com a dinâmica do código.

As regiões culturais finais têm suas origens bem definidas em eventos muito anteriores à convergência do código, caracterizando uma dependência de caminho. (65) Isso é um fato observado nas simulações, porém o contrário não é válido, ou seja, quando olhamos o número de regiões estáveis no meio do decorrer do código, não conseguimos distinguir qual irá sobreviver até o fim do programa.

2.5 Otimizações

O modelo de Axelrod é uma inovação na modelagem cultural de ciências sociais. Porém, para os fins da física - cujo interesse é estudar suas transições de fase, seus parâmetros finais e propriedades relacionadas à dimensionalidade etc. - o modelo é devagar no tempo de execução do código. Inicialmente construímos o código de uma maneira não ótima de modo que ele reproduz corretamente os resultados do artigo original de Axelrod (conforme exposto na próxima seção), porém leva tempo demais para convergir. O processo no qual trabalhamos num código que já funciona para deixá-lo mais rápido é chamado de otimização e constitui uma característica fundamental nos bons físicos computacionais e programadores.

Nesta seção listamos uma série de otimizações realizadas no código para deixá-lo mais eficiente. Estas constituem parte do processo de aprendizado envolvido no projeto, além de garantir que os resultados sejam alcançados no tempo previsto de pesquisa. O código inicial possuía cerca de 1000 linhas de programação. Com todas as mudanças realizadas para a otimização, o código final passou a ter cerca de 300 linhas. Quanto mais otimizado for o código, menor tende a ser seu tamanho, menos variáveis utilizamos e menos memória do computador consumimos.

Utilizamos funções para separar o programa em partes distintas, deixando o mesmo melhor escrito e facilitando sua leitura. As funções permitem a utilização de variáveis globais que minimizam a utilização de memória. Essas são declaradas fora do loop principal e podem ser utilizadas em todo o código, evitando a declaração de variáveis iguais mais de uma vez. Esse processo evita o consumo de linhas desnecessárias e o atraso de execução do programa.

Ao invés trabalhar com uma matriz para o caso do modelo bidimensional, escolhemos utilizar um vetor. Por exemplo, ao escrever a variável `sítio[10][10][2]` estamos montando uma matriz 10x10 com $F=2$. Podemos montar uma variável `sítio[100][2]` que é um vetor de 100 elementos com $F=2$. Ambas as notações são equivalentes, porém a notação de matriz utiliza mais memória do computador e requer mais loops no código.

A otimização mais importante de todas é a criação de uma lista de ativos. Ela consiste no armazenamento das ligações entre os sítios que podem interagir. Sorteando um sítio da rede e seu vizinho, estamos sorteando sítios que estão presentes na lista de ativos. Isso garante que o código não perca tempo sorteando sítios que não podem interagir e diminui o tempo total do programa consideravelmente. Também construímos uma vizinhança onde armazenamos, para cada sítio, o número total de vizinhos e quem eles são. Esses valores guardados no começo do código são facilmente consultados, evitando seu cálculo ao longo da dinâmica. Conjuntamente criamos a lista inversa de ativos. Se o sítio 3 é o primeiro ativo, a variável `LA[1]=3` indica isso. A lista de inversa armazena `LI[3]=1`. Ela serve para a atualização da lista de ativos ao longo da dinâmica, conforme são sorteados os sítios, de modo que não precisamos percorrer toda a matriz para atualizar a lista de ativos cada vez que uma interação ocorre.

A criação de uma lista de ativos permite que o programa pare sozinho, ou seja, quando o código chega à conclusão de que não existem mais sítios ativos na matriz o programa está finalizado e não é necessário realizar outro sorteio. Sem a lista de ativos, isso não pode ocorrer, cabendo ao programador adivinhar quantos sorteios são necessários para convergir o modelo. Assim, ora o código roda mais que o necessário, ora menos, desperdiçando tempo de computação ou não convergindo a matriz, respectivamente.

Na tabela 1, apresentamos o resultado de várias rodadas do código com e sem a lista de ativos. As rodadas sem lista de ativos necessitam que o programador escolha um número final de eventos, ou seja, o número de vezes que serão sorteados sítio, vizinho e interação

no loop principal. Como esse número, é escolhido por tentativa e erro, o chamamos de ansatz, representado pela letra A e exposto na última coluna da tabela. Na primeira coluna, temos a largura do território N de sítios em uma matriz NxN. Foram realizadas oito rodadas com a lista de ativos sendo a rodada 1 representada por R1, rodada 2 por R2,...,rodada 8 por R8. As 8 rodadas estão otimizadas para cada valor de N e armazenam o número final de eventos. Na penúltima coluna, expomos a média aritmética $\langle R \rangle$ das 8 rodadas realizadas. Com o código otimizado pela lista de ativos, as rodadas realizam muito menos eventos. Nesta tabela está claro que essa otimização é essencial para que o programa rode eficientemente permitindo ao programador resultados mais rápidos e evitando perda desnecessária de tempo.

Tabela 1 – Número de eventos do código com e sem a lista de ativos para diferentes valores de N.

N	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	$\langle R \rangle$	A
5	138	1060	500	1544	157	717	1030	277	677,87	10000
6	136	390	563	1569	395	986	285	6115	1304,87	15000
7	2161	4539	548	1360	345	6209	2207	11279	3581	20000
8	1078	1838	3116	3527	2741	13075	1871	4328	3946,75	20000
9	1884	2251	5881	4092	8203	1062	7341	13844	5569,75	40000
10	4832	4528	9661	2792	5168	19985	16462	3873	8412,62	60000

Fonte: Elaborada pelo autor.

Outras otimizações no código consistem em uma função para o cálculo de médias, desvios padrão e variâncias. Essas não deixam o código mais rápido, porém são necessárias para os estudos realizados neste trabalho. Outras pequenas modificações também foram realizadas, mas não serão citadas aqui por serem menos importantes.

2.6 Resultados preliminares

Nesta seção apresentamos a reprodução dos resultados originais de Axelrod. (3) Realizamos isso para a familiarização do aluno com a área e conhecimento de que as simulações realizadas estavam corretas.

O autor argumenta que o modelo pode ser utilizado para vários propósitos, entre eles estudar a abrangência dos valores de possibilidades culturais. Variando o número

das variáveis F e q , podemos deixar a cultura e , conseqüentemente, as simulações mais simples ou mais complexas. É natural e intuitivo pensar que quanto maiores forem F e q mais regiões culturais teremos na matriz final, porém a tabela 2 mostra que não podemos confiar em intuição no modelo de Axelrod.

A tabela 2 apresenta a reprodução exata da tabela 2 do artigo de Axelrod. (3) Os códigos foram gerados numa matriz com largura de território $N=10$ e são uma média de dez rodadas cada. Axelrod não utilizou condições periódicas de contorno e nós também não. A utilização de condições periódicas pouco afeta os resultados finais, pois quanto maior for a matriz em questão, menor será a contribuição dos sítios de suas bordas em relação ao número total de sítios. No limite termodinâmico, isto é, com o tamanho da rede tendendo ao infinito, as interações das bordas são completamente desprezíveis.

Tabela 2 – Tabela original de Axelrod com o número médio de regiões estáveis para diferentes valores de F e q .

	$q=5$	$q=10$	$q=15$
$F=5$	1.0	3.2	20.0
$F=10$	1.0	1.0	1.4
$F=15$	1.0	1.0	1.4

Fonte: Adaptada de AXELROD. (3)

A tabela 2 mostra o número médio de regiões culturais na matriz final para cada combinação de valores $F=5, 10, 15$ e $q=5, 10, 15$. Mantendo q constante e aumentando F , temos menos regiões culturais na matriz final, na maioria dos casos e nunca temos mais regiões em todos os casos. Isso demonstra um resultado contra-intuitivo e inesperado no modelo de Axelrod, pois com mais características culturais, mais traços em comum os sítios vizinhos terão e, assim, maior probabilidade de interagir, resultando em maior chance de haver uma única região na matriz final.

Aumentando o número q e mantendo F fixo, vemos o resultado oposto. Existe uma maior chance de que a matriz final seja multicultural. Com poucos valores de F e muitos de q , é esperado que os sítios apresentem poucos traços culturais em comum e tenham pouca ou nenhuma chance de interagir entre si, resultando na existência de diversas regiões culturais.

Na tabela 3 apresentamos nossos resultados na reprodução da tabela 2 de Axelrod. (3) Há uma boa concordância com os resultados originais. Os resultados não são perfeitamente

reprodutíveis devido à natureza estatística das simulações de Monte Carlo, mas isso é esperado. Os resultados seriam mais precisos se o autor tivesse utilizado um número maior de rodadas e não apenas 10. Em nosso trabalho, fazemos uma média sobre 12 rodadas.

Tabela 3 – Nossos dados para o número médio de regiões estáveis para diferentes valores de F e q

	$q=5$	$q=10$	$q=15$
$F=5$	1.06	3.93	19.04
$F=10$	1.00	1.08	1.66
$F=15$	1.00	1.00	1.01

Fonte: Elaborada pelo autor.

Esses resultados mostram que quanto maior o número de características culturais, menos regiões culturais teremos na matriz final e quanto maior o número de traços, mais regiões. Isso é muito difícil de se prever intuitivamente e somente devido às simulações encontramos tais resultados.

Figura 10 – Figura original de Axelrod, mostrando o número médio de regiões estáveis pela largura do território. Os parâmetros utilizados são $F=5$ e $q=15$. Cada ponto foi replicado 40 vezes, exceto para territórios maiores que são uma média sobre 10 rodadas.

Fonte: Adaptada de AXELROD. (3)

Outro resultado reproduzido do artigo original de Axelrod (3) é o comportamento do modelo bidimensional em relação às modificações na largura do território N . A hipótese inicial é de que, com maior número de sítios, teremos mais regiões finais. Mantemos fixo os parâmetros $F=5$ e $q=15$, maximizando o número de regiões finais. Novamente não

Figura 11 – Reprodução da figura 10 com os mesmos parâmetros, mostrando o número médio de regiões estáveis M pela largura do território N . O comportamento de nossa figura é bom, respeitada a aleatoriedade das simulações de Monte Carlo. A reprodução da figura original indica que nosso código está correto.

Fonte: Elaborada pelo autor.

utilizamos condições periódicas de contorno, pois elas podem ser desprezadas conforme já explicado.

A figura 10 mostra o resultado original de Axelrod que foi rodado 40 vezes para matrizes com largura de território até $N=35$ e 10 vezes para territórios maiores. Esse resultado também foi reproduzido por Axtell. (66) O número médio de regiões culturais é sensível à largura dos territórios, pois os de tamanho mediano possuem maior número de regiões em comparação com os muito grandes ou muito pequenos. Territórios pequenos possuem menos regiões culturais, pois não há espaço o suficiente para as mesmas. O comportamento de regiões maiores é explicado mais adiante no texto.

A figura 11 mostra que reproduzimos a figura de Axelrod com boa precisão. Ela mostra o comportamento do número médio de regiões estáveis M em função da largura do território N . Utilizamos os mesmos parâmetros F e q , mas não selecionamos os mesmo pontos para a largura do território $N < 50$, visando melhor precisão.

Construímos um gráfico adicional que não consta no trabalho original, analisando o comportamento do número médio de sítios S da maior região cultural em função da

largura do território N . O resultado está exposto na figura 12. Existe um crescimento significativo do número médio de sítios S da maior região cultural com o aumento da largura do território N . Isso é intuitivamente esperado, pois quanto maior o território, mais espaço existe para a maior das regiões culturais.

Figura 12 – Média do número de sítios S da maior região cultural em relação à largura do território N . Axelrod descreveu o comportamento deste gráfico qualitativamente sem plotá-lo. O comportamento do gráfico é intuitivamente esperado, pois quanto maior o território, mais espaço existe para a maior das regiões culturais. Os parâmetros e pontos utilizados são os mesmos da figura 11.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Estudamos o comportamento do número de regiões culturais N_R em função do tempo de relaxação τ^* . O resultado é apresentado na figura 13, na qual as regiões culturais não são estáveis, pois o programa ainda não convergiu. A região utilizada é com largura $N=100$ com parâmetros $F=5$ e $q=15$. Utilizamos o conceito de tempo de relaxação. Um tempo na figura 13 é um evento por sítio, assim, sua unidade de medida é eventos/ L . Um evento de Axelrod já foi explicado nas seções anteriores. Fazemos o tempo igual a eventos por sítio, como o próprio autor, pois vários sítios podem estar ativos no mesmo instante, permitindo que estudemos territórios de tamanhos diferentes com uma medida de mesmo peso. O nome relaxação vem do fato do sistema relaxar até o estado absorvente.

Os resultados obtidos na figura 13 estão corretos se comparados com a figura 3

Figura 13 – Número de regiões culturais N_R em função do tempo de relaxação τ^* . Utilizamos uma matriz com $N=100$, com $F=5$ e $q=15$. O gráfico varia cada vez que é construído devido às aleatoriedades das simulações de Monte Carlo. O número inicial de regiões é 10000 e o número final é 5.

Fonte: Elaborada pelo autor.

original do artigo, respeitadas as flutuações estatísticas das simulações de Monte Carlo. A formação inicial de sítios é aleatória, existindo uma boa flutuação no número de regiões iniciais. É preciso levar em conta que, dependendo do sorteio da configuração inicial e do decorrer do código, o tempo final de interação pode variar bastante, conforme já foi visto na tabela 1 deste trabalho.

As fronteiras entre regiões culturais se dissolvem na média com o passar do tempo. Em territórios muito grandes, existe espaço para muitas regiões estáveis na matriz final, porém a alteração de características culturais ocorre por tanto tempo que as fronteiras culturais desaparecem. Isso explica o comportamento da figura 10 para matrizes muito grandes.

Resumindo, não podemos confiar na intuição, trabalhando com o modelo de Axelrod. Existem estados absorventes polarizados, ou seja, com muitas regiões (polos) culturais distintas apesar da interação social levar a um maior grau de similaridade entre os sítios. Regiões de monocultura podem surgir sem que haja qualquer relação entre as diferentes

características escolhidas.

2.7 Modificações e modelos similares

O modelo de Axelrod pode ser modificado, possuindo comportamentos distintos do original. O número de modificações realizadas é grande. Algumas modificações são: a inclusão de uma mídia externa e uma mudança na topologia do sistema, aumentando o número de vizinhos mais próximos. (61) Existe apenas a mudança na topologia realizada por Klemm. (67) Kennedy modificou a forma do cálculo da probabilidade de interação entre sítio e vizinho. (68) Em outros trabalhos de Klemm, houve a inclusão de um ruído externo chamado de drift cultural (69) e ainda estudos sobre o papel da dimensionalidade. (70-71) Simulações computacionais foram feitas por Castellano para estudar a transição de fase entre situações de monocultura e multicultura conforme se alteram os parâmetros do modelo. (72) Centola analisou uma versão estendida do modelo de Axelrod, introduzindo a ideia de homofilia de rede na dinâmica de interação cultural (73), ou seja, neste modelo a rede de interação social não é arbitrariamente fixa, mas ela evolui em conjunto com as ações dos indivíduos como uma função da variação de suas similaridades e diferenças culturais. Outra modificação que pode ser citada é a de Gatherer na qual há a exploração de novos modos de transmissão e seleção de traços culturais. (74) O modelo de Axelrod foi aplicado no estudo de processos históricos de formação de comunidades cívicas no trabalho de Bhavnani. (75) O efeito de mídia massiva no processo de difusão cultural também foi destacado por Gonzáles-Avella. (76) Por fim citamos a investigação da evolução de tecnologias competitivas feita por Leydesdorff. (77)

As modificações no modelo original e o próprio são puramente computacionais. Faltam modelos analíticos para corroborarem ou discordarem das simulações. Existem trabalhos matemáticos que explicam casos especiais do modelo de Axelrod, mais especificamente para o modelo unidimensional com $F=q=2$. É neste modelo em que focamos o próximo capítulo dessa dissertação.

3 *Resultados principais*

3.1 Introdução e motivações

A comunidade da física (7,70,72,78) observou uma dinâmica rica em transições de fase de não equilíbrio no modelo de Axelrod. (3) Uma característica nesse modelo é que os estados estacionários da dinâmica são estados absorventes e podem ser monoculturais (consenso) ou multiculturais, conforme já visto. Os estudos realizados para entendermos o comportamento do modelo de Axelrod em redes regulares foram feitos com simulações de Monte Carlo. Nessas simulações, estudamos uma rede de tamanho L finito e depois extrapolamos os resultados para o limite termodinâmico $L \rightarrow \infty$.

Apesar desses resultados bem estabelecidos, para o caso particular do modelo de Axelrod unidimensional com $F=q=2$, o matemático Lanchier afirmou com seus estudos (4-5) que as simulações de Monte Carlo de Vilone et al (80) forneciam previsões que pareciam discordar de seus resultados analíticos. (4) Os resultados de Monte Carlo indicam a presença de configurações absorventes multiculturais no limite termodinâmico, enquanto que o resultado de Lanchier mostra que existem apenas configurações absorventes de monocultura nesse limite. Isso caracteriza uma discrepância dos resultados analíticos com os computacionais. Nesse trabalho explicamos essa discrepância, pois essa situação científica é desapropriada e não deve persistir na física.

Os resultados apresentados neste capítulo são de nosso artigo. (6) Argumentamos que o motivo para a discordância dos resultados analíticos e computacionais é a ordem na qual o limite assintótico de tempo $\tau \rightarrow \infty$ e o limite do tamanho da rede $L \rightarrow \infty$ são tomados nas simulações. Nestas, a abordagem comum é tomar primeiro o limite $\tau \rightarrow \infty$ e depois $L \rightarrow \infty$. Para reproduzir os dados analíticos de Lanchier, que considera $L \rightarrow \infty$ logo no início de seu raciocínio, tomamos primeiramente o limite $L \rightarrow \infty$ e depois $\tau \rightarrow \infty$, invertendo a ordem costumeira da física estatística. Com isso, conseguimos reproduzir os resultados de Lanchier com simulações computacionais mostrando consenso para o modelo

de Axelrod unidimensional com $F=q=2$.

3.2 Modelo de Axelrod unidimensional com $F=q=2$

Neste capítulo, estudamos o modelo de Axelrod unidimensional com $F=q=2$. Esse modelo é muito mais simples do que o modelo bidimensional visto no capítulo anterior. O modelo unidimensional é caracterizado por representar todos os sítios em uma linha ao invés de uma matriz. Novamente, cada elemento da linha é um sítio, que pode representar uma pessoa, uma vila entre outros. Os valores $F=q=2$ são fixos nas simulações com $q=0$ ou 1. As características do modelo são mantidas, de modo que cada sítio permanece numa posição fixa, sendo modificados apenas os valores dos traços de suas características ao longo da dinâmica. Os vizinhos mais próximos são o sítio imediatamente à esquerda e à direita, simplificando consideravelmente as interações. Os sítios são da forma $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ ou $(1,0)$, onde, por exemplo, o sítio $(0,0)$ apenas pode interagir com os sítios $(1,0)$ ou $(0,1)$. Cada traço, 0 ou 1, possui 50% de chance de ser sorteado para preencher cada característica dos sítios da rede inicial.

00 11 00 10 10 00 00 10 00 10

Figura 14 – Exemplo de rede inicial para o modelo de Axelrod unidimensional com $F=q=2$. O tamanho da rede é $L=10$ sítios com condições periódicas de contorno, ou seja, a rede se fecha em um anel. Apenas o sítio 2 não pode interagir com seus vizinhos mais próximos, os sítios 1 e 3, sendo chamado inativo. A rede é formada de maneira aleatória, e cada traço, 0 ou 1, possui 50% de chance de existirem em cada característica dos sítios na formação da rede inicial.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na figura 14 temos um exemplo de uma linha de $L=10$ sítios para o modelo de Axelrod unidimensional com $F=q=2$. A figura é montada de forma aleatória, como no caso bidimensional. Existem nove elementos ativos, ou seja, que podem interagir com um ou dois vizinhos. São eles, da esquerda para a direita, os elementos 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10. A probabilidade de interação sítio-sítio, quando possível, é sempre de 50% nesse modelo particular. Sítios que não possuem nenhum traço cultural idêntico, tanto quanto sítios completamente iguais, não podem interagir. Na figura 14, o sítio 3 não interage com o sítio 2, por não possuir similaridade cultural, porém, interage com o sítio 4, pois ambos possuem a segunda característica com traço cultural igual a 0. O sítio 2 não é ativo, como vemos, se compararmos seus traços com os dos seus vizinhos.

Figura 15 – Exemplo da topologia de anel formada pelas condições periódicas de contorno. A rede é a mesma da figura 14 onde o sítio 1 é aquele no topo do círculo e seguimos no sentido horário até o sítio 10. O sítio final se conecta com o sítio inicial formando um par de vizinhos. Os traços entre os sítios estão expostos apenas para fins didáticos, representando a ligação sítio-sítio. Esta figura do anel unidimensional é análoga à figura 2 do toro formado pela matriz bidimensional.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Estamos utilizando condições periódicas de contorno, de modo que, em uma rede com L sítios, os vizinhos do sítio L são, à esquerda, $L-1$ e, à direita, 1. Analogamente, os vizinhos do sítio 1 são, à esquerda, L e, à direita, 2. Conectamos o último sítio ao primeiro, formando uma configuração topológica de um anel com a linha da rede, conforme mostrado na figura 15. Fazemos isso para simplificar a montagem computacional, pois no limite termodinâmico, ou seja, com $L \rightarrow \infty$, os efeitos de condições periódicas de contorno são desprezíveis, conforme já visto.

A dinâmica segue sorteando sítio, vizinho e depois uma interação, que agora possui o valor de probabilidade fixo em 50%. Seguimos os procedimentos até que um estado absorvente seja atingido. Exemplos de estados de monocultura e de multicultura estão mostrados na figura 16 e 17, respectivamente.

Novamente, podemos utilizar o algoritmo de Hoshen e Kopelman (64) para contar o número de regiões culturais da rede final. As figuras 18 e 19 mostram a rede de regiões culturais das respectivas figuras 16 e 17. Uma região cultural que envolva os sítios L e 1 deve passar pelo fim da rede e voltar para o começo, pois esses sítios estão conectados.

Para o caso do modelo de Axelrod unidimensional com $F=q=2$, o algoritmo de Hoshen e Kopelman (64) se torna muito mais simples em comparação com o caso do capítulo anterior. O algoritmo começa igual ao caso bidimensional, nomeando o sítio 1 com o

01 01 01 01 01 01 01 01 01 01

Figura 16 – Configuração final com o estado absorvente de monocultura para uma rede com $L=10$ sítios. Todos os sítios possuem a primeira característica com $q=0$ e a segunda característica com $q=1$. Esta é uma das quatro configurações possíveis de monocultura no modelo de Axelrod unidimensional com $F=q=2$. As outras configurações monoculturais podem ser com as culturas $(1,0)$, $(1,1)$ ou $(0,0)$ para cada sítio.

Fonte: Elaborada pelo autor.

01 01 10 10 10 10 10 01 01 01

Figura 17 – Configuração final com o estado absorvente de multicultura para uma rede com $L=10$ sítios. Este exemplo possui a formação de duas regiões culturais: uma com 5 sítios do tipo $(0,1)$ e outra com 5 sítios do tipo $(1,0)$. Os sítios de diferentes regiões culturais não interagem por possuírem todas as características diferentes entre si e os sítios de mesma região cultural não interagem, pois são completamente iguais. Devido às condições periódicas de contorno, os sítios L e 1 estão na mesma região cultural.

Fonte: Elaborada pelo autor.

rótulo 1. Se o próximo sítio, o sítio 2, for diferente, ganhará um rótulo diferente, no caso, o rótulo 2. Se o sítio 2 for igual ao anterior, ganhará o mesmo rótulo. Seguimos com esse raciocínio até o final do anel, sendo necessária, apenas, a comparação das características de cada sítio com seu vizinho anterior. Somente no final do anel é possível a existência de uma nomenclatura ruim, pois comparamos as características do sítio 1 com as do sítio L , que são vizinhos devido às condições de contorno. Caso o sítio L e o sítio 1 possuam as mesmas características, deverão pertencer à mesma região cultural, sendo necessária a re-rotulação da última região da rede com a nomenclatura 1.

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

Figura 18 – Regiões culturais para a rede da figura 16. Todos os sítios estão na mesma região. Aplicamos o algoritmo de Hoshen e Kopelman conforme explicado no texto, que é muito mais simples para o modelo de Axelrod unidimensional com $F=q=2$. O valor mostrado é o da região cultural à qual pertence o sítio, e a localização dos números na figura corresponde à localização dos sítios na figura 16.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O modelo de Axelrod pode ser visto como F modelos do eleitor (81) acoplados. O modelo unidimensional visto neste capítulo pode ser estudado como o modelo do eleitor de três opiniões restrito. Para tal, é feita a identificação das culturas $(1,0)$ e $(0,1)$ com uma única opinião central rotulada por 0 e as outras duas culturas $(0,0)$ e $(1,1)$, com

opiniões esquerdistas e direitistas nomeadas - e +, respectivamente. (82-83) As interações elementares entre esses rótulos garante que esquerdistas e direitistas não interagem entre si. Esquerdistas e centristas podem interagir entre si, também como direitistas e centristas. Eles seguem as regras usuais do modelo do eleitor. (81) O tempo de relaxação para o modelo de Axelrod é duas vezes mais longo do que no modelo do eleitor restrito. Isto ocorre porque no modelo do eleitor restrito uma interação elementar (entre 0 e +, por exemplo) acontece com probabilidade 1 enquanto que uma interação elementar no modelo de Axelrod entre (1,0) e (1,1) acontece com probabilidade 1/2, implicando numa reescala de tempo. Ademais, o consenso centrista (0 como cultura final monocultural) deve ser interpretado como consenso de uma das culturas (1,0) ou (0,1) ou como uma coexistência multicultural dessas duas culturas. No modelo do eleitor restrito, simulações de Monte Carlo mostram consenso das três opiniões existentes, como também coexistência multicultural entre as duas opiniões extremistas (82) , assim como no modelo de Axelrod. (80)

1 1 2 2 2 2 2 1 1 1

Figura 19 – Rede de regiões culturais para a rede da figura 17. Temos a formação de duas regiões culturais, ambas com 5 sítios cada. Utilizando o algoritmo de Hoshen e Kopelman, considerando condições periódicas de contorno, uma única região passa pelo fim do anel retornando para seu início. Os valores apresentados consistem nas regiões culturais às quais pertencem os sítios, e a localização dos números na figura corresponde à localização dos sítios de 1 até 10 na figura 17.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O modelo de Axelrod para o caso unidimensional com $F=q=2$ é significativamente simplificado em relação ao modelo original. Na próxima seção estudaremos as simulações de Monte Carlo para esse modelo em particular.

3.3 Simulações de Monte Carlo no modelo de Axelrod 1-d com $F=q=2$

A abordagem natural da mecânica estatística consiste em tomar o limite $\tau \rightarrow \infty$ para um determinado valor de L fixo e em seguida extrapolar o resultados de L finito para o limite termodinâmico. Desse modo, sempre atingimos um estado absorvente, seja monocultural ou multicultural, para um valor de L . A extrapolação é feita refazendo

o código para um valor L maior que o rodado anteriormente e novamente atingindo o estado absorvente. Gradativamente, aumentamos o valor de L para cada rodada e atingimos o estado absorvente em todas as rodadas, de modo que, conseguimos entender o comportamento dos gráficos desejados no limite termodinâmico. Essa abordagem, para o modelo de Axelrod unidimensional de dois estados, já foi realizada por Vilone et al. (80) Vamos segui-la nesta seção, encontrando os mesmos resultados de Vilone e, por vezes, expandindo-os.

Figura 20 – Nesta figura temos a fração de estados absorventes monoculturais ξ em função do tamanho da rede L . A variação em ξ é muito pequena com L , caracterizando uma dependência fraca com L . Os pontos são os resultados computacionais rodados 10^6 vezes cada, ou seja, 10^6 configurações iniciais diferentes e a linha é a curva de ajuste $\xi = 0.33 + 0.017 \exp(-L/387)$.

Fonte: Adaptada de BIRAL. (6)

Estamos considerando que as quatro culturas possíveis $((1,0), (1,1), (0,0)$ e $(0,1))$ se apresentam na mesma proporção inicial. Estudando o número e tipo de configurações finais, vemos que uma fração ξ das configurações finais se apresenta como monocultura e a outra fração, $1 - \xi$, como multicultura. Na figura 20, mostramos a dependência de ξ , a fração de configurações monoculturais, com o tamanho da rede L . Nosso gráfico mostra que $\xi \rightarrow 0.33$ quando $L \rightarrow \infty$.

Estudamos o comportamento da densidade média de regiões culturais N_d/L como função do tamanho da rede L para as configurações multiculturais. Esse estudo está exposto na figura 21. Nossa curva de ajuste mostra que o número médio de regiões N_d cresce com L de acordo com a lei de potência $L^{1-2\psi}$ com $\psi = 0.36$. Isso nos diz que o

Figura 21 – Fração média N_d/L do número de regiões culturais em função do tamanho da rede L . Esta figura é construída com apenas estados absorventes de multicultura. Os pontos são computacionais rodados 10^6 vezes cada. A linha sólida é a curva de ajuste $N_d/L = 1.41L^{-2\psi}$ com $\psi = 0.36$. A linha pontilhada é a mesma curva de ajuste com $\psi = 1/3$ para compararmos nossos resultados com o de Vilone et al (80) (ver final desta seção). O número de regiões N_d cresce com o tamanho da rede L conforme a lei $L^{1-2\psi}$ com $\psi = 0.36$. Isto indica um grande número de regiões culturais no limite termodinâmico.

Fonte: Adaptada de BIRAL. (6)

número médio de regiões aumenta significativamente conforme aumentamos o tamanho da rede e que, no limite termodinâmico, esperamos um número muito grande de regiões.

Também estudamos o comportamento da fração média de sítios s_m que pertencem à maior região cultural em função do tamanho da rede L , considerando estados absorventes multiculturais. A figura 22 mostra, no limite termodinâmico, o valor de $s_m \rightarrow 0.576$. Como esse valor é diferente de zero e considerando os resultados da figura 21, no limite termodinâmico, temos um regime multicultural caracterizado por pelo menos uma região macroscópica (em comparação com as outras regiões) e inúmeras regiões microscópicas (de tamanho desprezível em relação ao tamanho da maior região). Como as figuras 21 e 22 somente consideram rodadas cujos estados absorventes são regiões multiculturais, nosso valor de s_m fica diferente de Vilone et al (80), onde foram consideradas rodadas monoculturais e multiculturais. Podemos encontrar esse resultado com a equação:

$$\hat{s}_m = \xi + (1 - \xi)s_m \quad (1)$$

onde $\hat{s}_m$ é o s_m de Vilone et al (80), ξ é a fração de estados absorventes monoculturais,

Figura 22 – Fração média de sítios s_m que pertencem à maior região em função do tamanho da rede L . Os pontos são os resultados computacionais para 10^6 rodadas. A linha é a curva de ajuste $s_m = 0.576 + 0.33/(L^{0.72})$ que dá o valor assintótico $s_m \rightarrow 0.576$. Somente foram contabilizadas estados absorventes com regiões multiculturais, diferentemente dos resultados de Vilone que contabilizam todos os estados.

Fonte: Adaptada de BIRAL. (6)

$(1 - \xi)$ é a fração de estados absorventes multiculturais e s_m é o nosso valor para a fração média de sítios da maior região. No limite termodinâmico, temos:

$$\hat{s}_m = 0.33 + (1 - 0.33) * 0.576 = 0.717 \quad (2)$$

O resultado encontrado nas figuras 21 e 22 está em grande desacordo com o resultado analítico proposto por Lanchier (4), que diz que o modelo de Axelrod unidimensional com $F=q=2$ alcança regiões monoculturais no limite termodinâmico sempre. Esses resultados aqui encontrados complementam a literatura já existente de Vilone et al. (80)

Ainda estudamos o comportamento do tempo de relaxação τ^* com o tamanho da rede L . Esse tempo é o mesmo da figura 13 e difere de τ da próxima seção, por ser o tempo de relaxação. O tempo τ é o tempo de passos de Monte Carlo medido em eventos/sítio sem atingir convergência, ou seja, sem o sistema relaxar. Ressaltamos que o tempo já é escalado com o tamanho da rede L , sendo sua unidade de medida eventos/ L . Estudando o modelo tanto para estados absorventes monoculturais como para estados absorventes multiculturais, construímos a figura 23. Encontramos $\tau^* \sim L^2$. A dinâmica demora 3.4 vezes mais para convergir quando existem regiões monoculturais do que quando existem

Figura 23 – Tempo de relaxação τ^* em função do tamanho da rede L . τ^* é a média dos tempos para cada simulação em 10^6 simulações. Os símbolos vazios são para estados absorventes monoculturais e os símbolos cheios para multiculturais. Temos as curvas de ajuste $\tau^* = 0.37L^2$ para monocultura e $\tau^* = 0.11L^2$ para multicultura. Para ambos os estados absorventes temos $\tau^* \sim L^2$ e vemos que a dinâmica demora 3.4 vezes mais para convergir quando existem regiões monoculturais do que quando existem regiões multiculturais.

Fonte: Adaptada de BIRAL. (6)

regiões multiculturais.

3.4 Monte Carlo de dinâmica com tempo finito

Até agora, estudamos as simulações para o modelo de Axelrod unidimensional com $F=q=2$, seguindo a abordagem comum da física, que consiste em tomar o limite $\tau \rightarrow \infty$ mantendo L fixo. Para estudar o modelo de Axelrod em comparação com os resultados de Lanchier devemos comutar esta ordem, ou seja, primeiramente tomamos $L \rightarrow \infty$ mantendo τ fixo. Fazemos isso, pois o artigo de Lanchier (4) segue esse raciocínio. Tratamos esse procedimento pelo nome de dinâmica com tempo finito.

Definimos n_F como a densidade de ligações entre sítios que não possuem característica em comum, ou seja, o número de ligações sobre L . Os sítios conectados por essas ligações não podem interagir, assim, podemos chamar essas ligações de paredes. Para uma rede com condições periódicas de contorno, a densidade de paredes n_F é igual à densidade de regiões culturais N_d/L quando o código já convergiu para as configurações absorventes multiculturais. Por exemplo, supondo duas regiões culturais, temos $n_F = N_d/L = 2/L$.

A figura 24 mostra a evolução temporal da densidade de paredes n_F . Para qualquer dos valores mostrados de L , a estatística sobre rodadas que terminam em configurações absorventes de multicultura resulta em um valor de n_F diferente de zero, mesmo no limite $\tau \rightarrow \infty$, estando de acordo com o capítulo anterior. Para rodadas que terminam em estados absorventes monoculturais, temos $n_F = 0$. Somente quando τ fica da ordem de L^2 podemos distinguir os casos monocultural e multicultural. Pela figura 24, quando $L \rightarrow \infty$ com τ finito, os resultados caem na função de potência $n_F \sim \tau^{-\psi}$ com $\psi = 0.36$. Daí, vemos que $n_F \rightarrow 0$ com $\tau \rightarrow \infty$, concordando com Lanchier. (4)

Figura 24 – Densidade de paredes n_F pelo tempo τ para redes com tamanho $L=5 \times 10^3$ ($\square$), 1×10^4 (∇), 2×10^4 ($\triangle$) e 5×10^4 ($\circ$). Símbolos abertos são para regiões que atingiram estados absorventes monoculturais e símbolos fechados, multiculturais. A linha sólida é a curva de ajuste $n_F = 0.52\tau^{-\psi}$ com $\psi = 0.36$. Os símbolos são resultados de simulações de Monte Carlo. A linha pontilhada é a curva de ajuste com o expoente fixo em $\psi = 1/3$ para compararmos nossos resultados com os de Vilone et al (80) (ver final desta seção).

Fonte: Adaptada de BIRAL. (6)

Definimos uma densidade de ligações n_A que conectam sítios que possuem exatamente uma característica em comum. Essas ligações são chamadas ligações ativas. Com as definições de n_F e de n_A , estamos nos adequando à terminologia de Vilone et al (80), na qual n_F é a densidade de ligações que conectam sítios que diferem por todas as F características. Na terminologia de Lanchier (4), n_F e n_A são as densidades 0-aresta e 1-aresta, respectivamente, que desaparecem para o limite assintótico $\tau \rightarrow \infty$ numa rede infinita.

Na figura 25, vemos que a densidade de sítios ativos n_A tende a zero, tanto para

Figura 25 – Densidade de sítios ativos n_A como função do tempo τ . A convenção de símbolos é a mesma da figura 24. A linha sólida é a curva de ajuste $n_A = 0.38\tau^{-1/2}$. Vemos um comportamento idêntico para rodadas que tenderam à monocultura e à multicultura até um valor aproximado de $\tau = 10^6$. Nas estatísticas de monocultura n_A , demora mais para tender a zero.

Fonte: Adaptada de BIRAL. (6)

configurações absorventes monoculturais como para multiculturais, para L finito e τ grande. No limite $L \rightarrow \infty$, temos $n_A \sim \tau^{-1/2}$ para grande τ . Essa figura também mostra que as rodadas que tendem a estados absorventes monoculturais demoram mais para convergir que rodadas que tendem a estados multiculturais. Essa demora em convergir se dá próxima ao final das rodadas quando a densidade de sítios ativos se estabiliza antes de retomar seu decaimento em direção a zero.

Analisando a forma de escala proposta por Vilone et al (80) :

$$n_F(\tau, L) = \tau^{-\psi} g_F(\tau/L^2) \quad (3)$$

onde $g_F(x) = \text{constante}$ para $x \ll 1$ e $\sim x^\psi$ para $x \gg 1$. Fazendo $x = \tau/L^2$ e tomando os limites na ordem $\tau \rightarrow \infty$, depois $L \rightarrow \infty$, teremos $x \gg 1$. Isso nos dá $n_F \sim L^{-2\psi}$. Se trocarmos a ordem dos limites, teremos $x \ll 1$, o que dá $n_F = \tau^{-\psi}$. Temos a mesma lei de escala encontrada em nossas simulações, mas com valor de ψ diferente de Vilone. Na equação 3, n_F representa uma média sobre todas as rodadas ou, para nossos estudos, sobre rodadas que culminam em estados absorventes multiculturais. Para estas, pela figura 21, temos $n_F \sim N_d/L \sim L^{-2\psi}$ para $\tau \gg L^2$. O valor que Vilone encontrou para ψ foi $1/3$ para redes de tamanho $L=5 \times 10^3$. Nosso valor é $\psi = 0.36$. Em relação à figura 21, nosso

valor não é bom se comparado com o de Vilone. Por outro lado, na escala da figura 24, nosso valor é praticamente idêntico ao de Vilone. Embora nosso valor de ψ não seja o mesmo de Vilone, isso não é prejudicial ao nosso trabalho, pois encontramos leis de escala equivalentes à equação 3. Na verdade, ψ não parece refletir nenhuma importante propriedade do modelo já que ele varia com a frequência inicial de culturas, como mostrado no contexto no modelo do eleitor restrito. (82)

Resumindo, a função de escala dada pela equação 3 é validada pelas simulações de Monte Carlo. Ela explica como a ordem dos limites de τ e L indo para o infinito determina a natureza das configurações absorventes no modelo de Axelrod unidimensional com $F=q=2$ e mostra que, na verdade, não há contradição entre os resultados de Monte Carlo e os de Lanchier.

4 CONCLUSÃO

Nesta dissertação estudamos o modelo de Axelrod original (3) e o caso unidimensional com $F=q=2$. O modelo original foi reproduzido no capítulo 2 para familiarização com as simulações de Monte Carlo e com otimização computacional, estudo de dinâmica cultural, introdução à pesquisa científica e checagem das simulações. Encontramos resultados que corroboram com as ideias do autor principal de que não podemos confiar na intuição quando trabalhamos com esse modelo, de que as simulações de Monte Carlo são uma ferramenta essencial no estudo de dinâmica cultural e que a diversidade cultural é um assunto complexo, proporcionando um rico ambiente de transições de fase de não equilíbrio que recebe cada vez mais atenção da comunidade de física estatística.

Para F fixo e aumentando q no modelo original, a matriz final tende a ser multicultural, enquanto que, mantendo q fixo e aumentando F , a tendência é ter menos regiões culturais finais (vide tabela 3). O número médio de regiões culturais finais é maximizado para regiões de tamanho mediano porque territórios muito pequenos não proporcionam largura suficiente para a formação de muitas regiões culturais. E territórios muito grandes permitem que as alterações culturais ocorram por tanto tempo que as fronteiras culturais desaparecem, favorecendo o aparecimento de um número menor de regiões culturais (vide figura 11). Também vemos que o número médio de sítios da maior região cultural cresce com a largura do território, o que implica numa região cultural macroscópica dominante em territórios muito grandes (vide figura 12). Por fim, o número de regiões culturais varia grandemente ao longo da dinâmica do modelo, sofrendo clara influência da aleatoriedade das interações sociais (vide figura 13). No modelo de Axelrod unidimensional com $F=q=2$ visto no capítulo 3, as simulações de Monte Carlo mostram um rico regime de multicultural no estado absorvente $(6,80)$, caracterizado pela existência de uma região macroscópica no limite termodinâmico. Essas simulações discordam dos resultados analíticos de Lanchier

(4) , que dizem que o modelo em questão atinge um estado absorvente monocultural sempre. Com uma metodologia nova, de inverter a ordem dos limites normalmente executados pela comunidade científica em simulações de Monte Carlo, reproduzimos fielmente os resultados analíticos de Lanchier com simulações (vide figura 24). (6) Com isso, mostramos que a existência de monocultura ou não no modelo em questão depende da ordem tomada dos limites $\tau \rightarrow \infty$ e $L \rightarrow \infty$. Isso já era suspeito devido ao estudo de Vilone et al (80) , que encontrou uma equação (vide equação 3) para descrever o comportamento do modelo que já dependia da ordem dos limites tomados. Nossos valores para curvas de ajuste de nossas figuras proporcionaram o mesmo valor assintótico que a equação de Vilone (vide figuras 21 e 24), mas com valores para o expoente distintos. Argumentamos que esse valor distinto não tem importância para nossos resultados, pois ele não reflete propriedades importantes do modelo. Na verdade, nossos resultados são mais precisos, pois utilizamos um maior número de simulações (10^6) e redes maiores (mais próximas do limite termodinâmico) que Vilone. Um trabalho futuro pode realizar uma melhor investigação desse expoente.

A dinâmica cultural do modelo de Axelrod apresenta uma grande riqueza de resultados e requer uma análise cautelosa. Com este trabalho esperamos ter esclarecido melhor, para a comunidade científica, a discrepância dos resultados analíticos de Lanchier e os resultados de simulações de Monte Carlo.

Referências

- 1 STAUFFER, D.; AHARONY, A. *Introduction to percolation theory*. 2nd ed. London: Taylor & Francis, 1994.
 - 2 MARRO, J.; DICKMAN, R. *Nonequilibrium phase transitions in lattice models*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
 - 3 AXELROD, R. The Dissemination of culture: a model with local convergence and global polarization. *Journal of Conflict Resolution*, v. 41, n. 2, p. 203-226, 1997.
 - 4 LANCHIER, N. The Axelrod model for the dissemination of culture revisited. *The Annals of Applied Probability*, v. 22, n. 2, p. 860-880, 2012.
 - 5 LANCHIER, N.; SCHWEINSBERG, J. Consensus in the two-state Axelrod model. *Stochastic Processes and their Applications*, v. 122, n. 11, p. 3701-3717, 2012.
 - 6 BIRAL, E. J. P.; TILLES, P. F. C.; FONTANARI, J. F. The consensus in the two-feature two-state one-dimensional Axelrod model revisited. *Journal of Statistical Mechanics: theoretical and experimental*, 2015. doi: 10.1088/1742-5468/2015/04/P04006. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/1502.00809v3.pdf>>. Acesso em: 15 nov. 2015.
 - 7 CASTELLANO, C.; FORTUNATO, S.; LORETO, V. Statistical physics of social dynamics. *Reviews of Modern Physics*, v. 81, n. 2, p. 591-646, 2009.
 - 8 WEIDLICH, W. The statistical description of polarization phenomena in society. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, v. 24, n. 2, p. 251-266, 1971.
 - 9 GALAM, S.; GEFEN, Y.; SHAPIR, Y. Sociophysics: a new approach of sociological collective behaviour. I. mean-behaviour description of a strike. *Journal of Mathematical Sociology*, v. 9, n. 1, p. 1-13, 1982.
 - 10 GALAM, S.; MOSCOVICI, S. Towards a theory of collective phenomena: consensus and attitude changes in groups. *European Journal of Social Psychology*, v. 21, n. 1, p. 49-74, 1991.
 - 11 LANDAU, D. P.; BINDER, K. *A guide to Monte-Carlo simulations in statistical physics*. 3rd ed. New York: Cambridge University Press, 2009.
 - 12 MONTE Carlo method. Apresenta explicações do assunto. Disponível em <https://en.wikipedia.org/wiki/Monte_Carlo_method>. Acesso em: 29 nov. 2015.
-

- 13 ANDERSON, H. L. Metropolis, Monte Carlo and the MANIAC. *Los Alamos Science*, n. 14, p. 96–107, 1986. Disponível em: <<http://permalink.lanl.gov/object/tr?what=info:lanl-repo/lareport/LA-UR-86-2600-05>>. Acesso em: 28 nov. 2015.
 - 14 ECKHARDT, R. *Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo method*. 1987, p. 131–137. Disponível em: <<http://library.lanl.gov/cgi-bin/getfile?00326867.pdf>>. Acesso em: 29 nov. 2015.
 - 15 HAMMERSLEY, J. M.; HANDSCOMB, D. C. *Monte Carlo methods*. London: Methuen & CO Ltda., 1975.
 - 16 METROPOLIS, N. The beginning of the Monte Carlo method. *Los Alamos Science*, n. 15, p. 125–130, 1987. Disponível em: <<http://jackman.stanford.edu/mcmc/metropolis1.pdf>>. Acesso em 27 dez. 2015
 - 17 FISHMAN, G. S. *Monte Carlo: concepts, algorithms, and applications*. New York: Springer, 1995.
 - 18 HUBBARD, D. W. *How to measure anything: finding the value of intangibles in business*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2007.
 - 19 HUBBARD, D. W. *The failure of risk management: why it's broken and how to fix it*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2009.
 - 20 SHIRANGI, M. G. History matching production data and uncertainty assessment with an efficient TSVD parameterization algorithm. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 113, p. 54–71, 2014. doi:10.1016/j.petrol.2013.11.025.
 - 21 GOULD, H.; TOBOCHNIK, J. *An introduction to computer simulation methods: part 2, applications to physical systems*. Reading: Addison-Wesley. 1988.
 - 22 METROPOLIS, N. et al. Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, v. 21, n. 6, p. 1087–1092, 1953.
 - 23 GOLDEN, L. M. The effect of surface roughness on the transmission of microwave radiation through a planetary surface. *Icarus*, v. 38, n. 3, p. 451–455, 1979.
 - 24 BINDER, K. et al. *The Monte Carlo method in condensed matter physics*. 2nd ed. New York: Springer, 1995.
 - 25 BERG, B. A. *Markov chain Monte Carlo simulations and their statistical analysis* (with web-based fortran code). Hackensack, NJ: World Scientific. 2004.
 - 26 MILIK, M.; SKOLNICK, J. Insertion of peptide chains into lipid membranes: an off-lattice Monte Carlo dynamics model. *Proteins*, v. 15, n. 1, p. 10–25, 1993.
 - 27 OJEDA, P. et al. Monte Carlo simulations of proteins in cages: influence of confinement on the stability of intermediate states. *Biophysical Journal*, v. 96, n. 3, p. 1076–1082, 2009.
 - 28 FORASTERO, C. et al. A Monte Carlo tool to simulate breast cancer screening programmes. *Physics in Medicine and Biology*, v. 55, n. 17, p. 5213–5229, 2010.
-

-
- 29 MACGILLIVRAY, H. T.; DODD, R. J. Monte-Carlo simulations of galaxy systems. V. computer models of galaxy fields. *Astrophysics and Space Science*, v. 86, n. 2, p. 437-452, 1982.
 - 30 TARANTOLA, A. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
 - 31 CRISAN, D.; GAINES, J.; LYONS, T. Convergence of a branching particle method to the solution of the Zakai. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 58, n. 5, p. 1568–1590, 1998.
 - 32 DEL MORAL, P.; MICLO, L. Branching and interacting particle systems approximations of Feynman-Kac formulae with applications to non-linear filtering. *Séminaire de Probabilités*, v. 34, p. 1–145, 2000. Disponível em: <http://archive.numdam.org/ARCHIVE/SPS/SPS_2000__34_/SPS_2000__34__1_0/SPS_2000__34__1_0.pdf>. Acesso em: 27 dez. 2015.
 - 33 DEUTSCH, K. W. *Nationalism and social communication: an inquiry in the foundations of nationality*. Cambridge: Technology Press, 1953.
 - 34 DEUTSCH, K. W. *Nationalism and its alternatives*. New York: Alfred A. Knopf, 1969.
 - 35 GIDDENS, A. *The constitution of society*. Berkeley: University of California Press, 1979.
 - 36 ANDERSON, B. *Imagined communities: reflections on the origin and spread of nationalism*. 2nd ed. London: Verso, 1991.
 - 37 LIPSET, S. M.; TROW, M. A.; COLEMAN, J. S. *Union democracy*. Glencoe, IL: Free Press, 1956.
 - 38 CAMPBELL, A. et al. *The American voter*. New York: John Wiley, 1960.
 - 39 KEY, V. O. *Public opinions and American democracy*. New York: Knopf, 1961.
 - 40 COLEMAN, J. S. *Community conflict*. New York: Free Press, 1957.
 - 41 PUTNAM, R. D. Political attitudes and the local community. *American Political Science Review*, v. 60, n. 3, p. 640-654, 1966.
 - 42 SIMMEL, G. *Conflict and the web of group-affiliations*. New York: Free Press, 1955.
 - 43 BARTH, F. *Ethnic groups and boundaries*. Bergen: Universitets Forlaget, 1969.
 - 44 HANNAN, M. T. The dynamics of ethnic boundaries in modern states. In: MEYER, J.; HANNAN, M. (Ed). *National development and world system*. Chicago: University of Chicago Press, 1979. p. 253-327.
 - 45 ABELSON, R.; BERNSTEIN, A. A computer simulation model of community referendum controversies. *Public Opinion Quarterly*, v. 27, n. 1, p. 93-122, 1963.
 - 46 NOWAK, A.; JACEK S.; LATANE, B. From private attitude to public opinion: a dynamic theory of social impact. *Psychological Review*, v. 97, n. 3, p. 362-376, 1990.
-

- 47 LATANE, B.; NOWAK, A.; LIU, J. H. Measuring emergent social phenomena: dynamism, polarization and clustering as order parameters of social systems. *Behavioral Science*, v. 39, n. 1, p. 1-24, 1994.
- 48 SCHELLING, T. *Micromotives and macrobehavior*. New York: Free Press, 1978.
- 49 FRIEDKIN, N. E.; JOHNSEN, E. C. Social influence and opinions. *Journal of Mathematical Sociology*, v. 15, n. 3-4, p. 193-205, 1990.
- 50 MARSDEN, P. V.; FRIEDKIN, N. E. Network studies of social influence. *Sociological Methods and Research*, v. 22, p. 127-151, 1993. doi: 10.1177/0049124193022001006.
- 51 BREMER, S. A.; MIHALKA, M. Machiavelli in machina: or politics among hexagons. In: DEUTSCH, K. et al. (Ed.). *Problems of world modeling*. Cambridge, MA: Ballinger, 1977.
- 52 SCHRODT, P. A. Conflict as a determinant of territory. *Behavioral Science*, v. 26, n. 1, p. 37-50, 1981.
- 53 CUSACK, T. R.; STOLL, R. Exploring realpolitik: probing international relations theory with computer simulation. *Canadian Journal of Political Science*, v. 26, n. 4, p. 834-835, 1990.
- 54 AXELROD, R. A model of the emergence of new political actors. In: GILBERT, N.; CONTE (Ed.) *Artificial societies: the computer simulation of social life*. London: University College Press, 1994. p. 19-39.
- 55 CEDERMAN, L. E. *Emergent actors in world politics: how states and nations develop and dissolve*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1997.
- 56 HUCKFELDT, R.; SPRAGUE, J. Discussant effects on vote choice: intimacy, structure, and interdependence. *Journal of Politics*, v. 53, n. 1, p. 122-158, 1991.
- 57 BROWN, T. A.; MCBURNETT, M. Emergence of political elites. In: EUROPEAN CONFERENCE ON ARTIFICIAL, 2, 1993, Brussels, Belgium. *Proceedings...* Bruxelles: Universite Libre Bruxelles, 1993. p. 113-136.
- 58 EPSTEIN, J. M.; AXTELL, R. *Growing artificial societies: social science from the bottom up*. Washington, D.C.: The Brookings Institution, 1996.
- 59 FUDENBERG, D.; TIROLE, J. *Game theory*. Cambridge: MIT Press, 1991.
- 60 SIMPLE TORUS. Disponível em <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Simple_Torus.svg>. Acesso em: 29 dez. 2015.
- 61 PERES, L. V. G. R. *A modelagem estocástica aplicada à manutenção da diversidade cultural*. 2010. 84 p. Dissertação (Mestrado em Física Básica) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.
- 62 HUBERMAN, B. A.; GLANCE, N. S. Evolutionary games and computer simulations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 90, n. 16, p. 7716-7718, 1993.
- 63 FELLER, W. *An introduction to probability theory and its applications*. 3rd ed. New York; London: John Wiley & Sons: Chapman & Hall, 1966.
-

-
- 64 HOSHEN, J.; KOPELMAN, R. Percolation and cluster distribution. i. cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm. *Physical Review B*, v. 14, n. 8, p. 3438-3445, 1976.
- 65 ARTHUR, W. B. Urban systems and historical path dependence. In: AUSUBEL, J.; HERMAN, R. *Cities and their viral systems*. Washington D.C.: National Academy Press, 1988. p. 85-97.
- 66 AXTELL, R. et al. Aligning simulation models: a case study and results. *Computational and Mathematical Organization Theory*, v. 1, n. 2, p. 123-141, 1996.
- 67 KLEMM K, et al. Nonequilibrium transitions in complex networks: a model of social interaction. *Physical Review E*, v. 67, n. 2, p. 026120, 2003.
- 68 KENNEDY, J. Thinking is social: experiments with the adaptive culture model. *Journal of Conflict Resolution*, v. 42, n. 1, p. 56-76, 1998.
- 69 KLEMM, K. et al. Global culture: a noise-induced transition in finite systems. *Physical Review E*, v. 67, n. 4, p. 045101, 2003.
- 70 KLEMM, K. et al. Role of dimensionality in Axelrod's model for the dissemination of culture. *Physica A: statistical mechanics and its applications*, v. 327, n. 1-2, p. 1-5, 2003.
- 71 KLEMM, K. et al. Globalization, polarization and cultural drift. *Journal of Economic Dynamics & Control*, v. 29 n. 1-2, p. 321-334, 2005.
- 72 CASTELLANO, C.; MARSILI, M.; VESPIGNANI, A. Nonequilibrium phase transition in a model for social influence. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 16, p. 3536-3539, 2000.
- 73 CENTOLA, D. et al. Homophily, cultural drift, and the co-evolution of cultural groups. *Journal of Conflict Resolution*, v. 51, n. 6, p. 905-929, 2007.
- 74 GATHERER, D. Identifying cases of social contagion using memetic isolation: comparison of the dynamics of a multisociety simulation with an ethnographic data set. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, v. 5, n. 4, 2002.
- 75 BHAVNANI, R. Adaptive agents, political institutions and civic traditions in modern Italy. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, v. 6, n. 4, 2003.
- 76 GONZÁLEZ-AVELLA, J. et al. Information feedback and mass media effects in cultural dynamics. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, v. 10, n. 3, 2007.
- 77 LEYDESDORFF, L. Technology and culture: the dissemination and the potential "lock-in" of new technologies. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, v. 4, n. 3, 2001.
- 78 BARBOSA, L. A.; FONTANARI, J. F. Culture-area relation in Axelrod's model for culture dissemination. *Theory Biosciences*, v. 128, n. 4, p. 205-210, 2009.
- 79 JENSEN, I. DICKMAN, R. Nonequilibrium phase-transitions in systems with infinitely many absorbing states. *Physical Review E*, v. 48, n. 3, p. 1710, 1993.
-

- 80 VILONE, D.; VESPIGNANI, A.; CASTELLANO, C. Ordering phase transition in the one-dimensional Axelrod model. *European Physical Journal B*, v. 30, n. 3, p. 399-406, 2002.
- 81 LIGGET, T. M. *Interacting particle systems*. New York: Springer, 1985.
- 82 VAZQUEZ, F.; KRAPIVSKY, P. L.; REDNER, S. Constrained opinion dynamics: freezing and slow evolution. *Journal of Physics A: mathematical and general*, v. 36, p. L61-L68, 2003.
- 83 VAZQUEZ, F.; REDNER, S. Ultimate fate of constrained voters. *Journal of Physics A: mathematical and general*, v. 37, p. 8479-8494, 2004.
-