UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física de São Carlos

Rafael Bruno Barbosa Lima

Testemunha de emaranhamento generalizada

São Carlos
2015

Rafael Bruno Barbosa Lima

Testemunha de emaranhamento generalizada

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica
Orientador: Prof. Dr. Diogo de Oliveira Soares
Pinto

Versão Corrigida
(Versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)
São Carlos

2015

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Bruno Barbosa Lima, Rafael
Testemunha de emaranhamento generalizada / Rafael
Bruno Barbosa Lima; orientador Diogo de Oliveira
Soares Pinto - versão corrigida -- São Carlos, 2015.
103 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos,
Universidade de São Paulo, 2015.

1. Critério de emaranhamento. 2. Covariância. 3.
Modelo de Heisenberg. I. de Oliveira Soares Pinto,
Diogo, orient. II. Título.

Agradecimentos

Inicialmente gostaria de agradecer ao meu orientador Diogo de Oliveira S. Pinto por toda paciência e compreensão. Posso dizer que ao longo desses quase dois anos nossa relação foi muito mais que de orientador e orientando, nos tornamos amigos.

Agradeço também a toda minha família, em especial aos meus pais João e Ivana, por todo carinho com minha criação, pelo esforço e por sempre me apoiarem e acreditarem em mim, obrigado por serem meus pais. Ao meu irmão Antonio e minha cunhada Renata, por todas as brincadeiras que aguentaram, vocês são mais que especiais na minha vida. Também quero agradecer aos meus avós: Armando (*in memoriam*) e Oneide, por terem ajudado também em minha criação e por todo amor recebido, e Antonio e Heleni. Agradeço aos meus primos, em especial ao Wellington (Tom), por todas as horas de alegrias trazidas a São Carlos e tios. Amo muito vocês e sem o apoio recebido, eu não estaria aqui.

Agradeço aos meus amigos do ensino médio Maiser, Marcos (Paraíba), Marsiel e Roberto, pela amizade, risadas e brincadeiras ao longo dos anos. Adoro vocês.

Quero agradecer aos meus amigos do IFSC: Alexandre (Frutilly), Anderson, Carlos (Sombra), Felipe (Café), Genival (Ronaldo), Gladiane (Loba), Júlio (Verva), Leandro (Link), Leonardo (Nardão), Luís Gustavo (Banana), Millena, Rodolfo (Careta), Tahiana (Flex), Uilson (Delícia), Vinícius (Kiwi) e Vitor (B2). Foram muitas conversas, risadas, brincadeiras, churrascos e horas de estudos. Vocês todos são igualmente importantes durante quase sete anos de convívio. Agradeço por sempre estarem comigo.

O pessoal do kung-fú: Ana, Emerson, Guilherme, João Victor, Leandro, Márcio (Marcinho), Mariana e Vinícius. O meu muito obrigado pelas reuniões com muita comida e sessões de cinema.

As amizades feitas após o início da pós-graduação: Carlos (Quake), pelo fornecimento desse layout em LATE χ , Charlie e Diego, que me ajudou muito com os cálculos da dissertação e sempre disposto a tirar dúvidas, Isabela e Oigres. Muito Obrigado.

Queria agradecer ao IFSC e seus funcionários, pela infraestrutura, conhecimento e atenção recebidas para a conclusão da minha formação acadêmica.

Por último, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro recebido.

*"O que sabemos é uma gota,
O que ignoramos é um oceano".*

Isaac Newton

Resumo

LIMA, R. B. B. **Testemunha de emaranhamento generalizada**. 2015. 103 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

Desde o surgimento da mecânica quântica no início do século XX, ela vem sendo alvo de diversos estudos e suas características fazem com que a mesma seja descrita de forma totalmente diferente da teoria clássica. Com o aprofundamento em suas áreas, surgiram novos conceitos e a compreensão sobre a teoria da informação e computação quântica foi radicalmente mudada devido a uma propriedade básica da mecânica quântica, o emaranhamento. Assim, a popularização da ideia do computador quântico trouxe consigo uma série de pesquisas relacionadas a informação quântica e suas aplicações no mundo real.

Nesta dissertação apresentamos um estudo sobre a construção de um critério de emaranhamento geral, no qual podemos aplicá-lo a quaisquer sistemas possuindo um Hamiltoniano descrito por cadeias de spins, seja ele bipartido ou multipartido. Esse critério é baseado na covariância de um observável geral que pode ou não possuir termos de interações entre os spins. Entretanto, esse critério pode ser facilmente reduzido a variância, uma vez que esta é muito mais adequada para a aplicação em sistemas físicos. Desta maneira, podemos utilizar a susceptibilidade magnética e o calor específico como testemunhas de emaranhamento para o critério, em razão da sua facilidade de medidas experimentais.

Palavras-chaves: Critério de emaranhamento. Covariância. Modelo de Heisenberg.

Abstract

LIMA, R. B. B. **Generalized entanglement witness**. 2015. 103 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

Since the advent of quantum mechanics in the early twentieth century, it has been the subject of several studies and their features cause it to be described quite differently from classical theory. With the deepening in their fields, there were new concepts and understanding about information theory and quantum computing has been radically changed due to a basic property of quantum mechanics, the entanglement. Thus, the popularization of the idea of the quantum computer has brought a lot of research related to quantum information and its applications in the real world. In this thesis we present a study about a construction of a general criterion of entanglement, in which we can apply it to any system having a Hamiltonian described by spin chains, either bipartite or multipartite. This criterion is based on general observables covariance that may or may not possess terms of interactions between spins. However, this criterion can be easily reduced to the variance, since this is more suitable for use in physical systems. In this way, we can use the magnetic susceptibility and the specific heat as witnesses of entanglement for the criterion, because of their ease of experimental measurements.

Key-words: Criteria of entanglement. Covariance. Heisenberg model.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Interpretação geométrica da testemunha de emaranhamento e sua otimização.	30
Figura 2 – Esquema das classes para estados tripartidos, onde S representa o caso separável.	35
Figura 3 – Esquema das testemunhas de emaranhamento, onde EW representa o caso sem os estados biseparáveis.	40
Figura 4 – Susceptibilidade magnética em função da temperatura.	47
Figura 5 – Estrutura do composto $\text{Na}_2\text{Cu}_5\text{Si}_4\text{O}_{14}$ onde os círculos azuis são os átomos de cobre e os vermelhos são os de oxigênio. (a)Visão lateral, (b) visão superior e (c) Representação do sistema dímero-trímero	47
Figura 6 – Testemunha de emaranhamento baseada na susceptibilidade magnética do $\text{Na}_2\text{Cu}_5\text{Si}_4\text{O}_{14}$. Em azul $EW(N = 5)$, em vermelho $EW(N = 3)$ e verde $EW(N = 2)$	48
Figura 7 – Testemunha de emaranhamento para o dímero calculada pela equação (4.22), com a constante de acoplamento (a) $J < 0$ e (b) $J > 0$	50
Figura 8 – Testemunha de emaranhamento utilizando a equação (4.11). A curva em cinza representa a testemunha de emaranhamento, $0.4197/T^2$ e a curva preta o calor específico com $ J = k_B = 1$, $J > 0$ e $H = 2T$	52
Figura 9 – (a) Testemunha de emaranhamento baseada na equação (4.28) e (b) concorrência do sistema.	52
Figura 10 – Heisenberg XYZ : Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada na susceptibilidade em função da temperatura e do campo magnético.	74
Figura 11 – Heisenberg XYZ : Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada no calor específico em função da temperatura e do campo magnético.	75
Figura 12 – Heisenberg XY isotrópico: Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada na susceptibilidade em função da temperatura e do campo magnético.	77
Figura 13 – Heisenberg XY isotrópico: Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada no calor específico em função da temperatura e do campo magnético.	78
Figura 14 – Heisenberg XY anisotrópico: Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada na susceptibilidade em função da temperatura e do campo magnético.	80

Figura 15 – Heisenberg XY anisotrópico: Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada no calor específico em função da temperatura e do campo magnético.	81
Figura 16 – Heisenberg XXZ : Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada na susceptibilidade em função da temperatura e do campo magnético.	83
Figura 17 – Heisenberg XXZ : Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada no calor específico em função da temperatura e do campo magnético.	84
Figura 18 – Heisenberg XXX : Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada na susceptibilidade em função da temperatura e do campo magnético.	86
Figura 19 – Heisenberg XXX : Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada no calor específico em função da temperatura e do campo magnético.	87
Figura 20 – Ising: Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada na susceptibilidade em função da temperatura e do campo magnético. . .	90
Figura 21 – Ising: Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada no calor específico em função da temperatura e do campo magnético.	91
Figura 22 – Heisenberg XX tripartido: Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada na susceptibilidade em função da temperatura e do campo magnético. Onde $EW(ABC)$ representa a testemunha tripartida e $EW(AB)$ a bipartida.	92
Figura 23 – Heisenberg XX tripartido: Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada no calor específico em função da temperatura e do campo magnético. Onde $EW(ABC)$ representa a testemunha tripartida e $EW(AB)$ a bipartida.	93

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
2	EMARANHAMENTO BIPARTIDO	19
2.1	O que é emaranhamento?	19
2.2	Desigualdade de Bell	20
2.2.1	Desigualdade CHSH	21
2.3	Definição de emaranhamento	22
2.4	Crítérios de separabilidade	23
2.4.1	Crítério de Peres-Horodecki	23
2.4.2	Crítério de mapa positivo	24
2.4.3	Crítério de redução	25
2.5	Medidas do emaranhamento	25
2.5.1	Requisitos para uma medida do emaranhamento	25
2.5.2	Negatividade	27
2.5.3	Emaranhamento de formação	27
2.6	Testemunhas de emaranhamento	28
2.6.1	Construção da testemunha de emaranhamento	29
2.6.2	Optimização da testemunha de emaranhamento	30
3	EMARANHAMENTO MULTIPARTIDO	33
3.1	Emaranhamento tripartido	33
3.1.1	Estados puros	33
3.1.2	Estados mistos	34
3.2	Emaranhamento multipartido	34
3.2.1	Famílias de estados multipartidos	36
3.2.1.1	Estados GHZ	36
3.2.1.2	Estados Dicke e W	36
3.2.1.3	Estados singletos de multi-q-bits	37
3.2.2	Crítérios de separabilidade	37
3.2.2.1	Crítério de permutação	37
3.2.2.2	Desigualdades quadráticas de Bell	38
3.3	Testemunhas de emaranhamento para sistemas multipartidos	38
3.3.1	Testemunhas de emaranhamento para sistemas tripartidos	39
3.3.2	Testemunhas de emaranhamento para sistemas multipartidos	40
4	EMARANHAMENTO TÉRMICO	43

4.1	Definição de emaranhamento térmico	43
4.2	Testemunhas de emaranhamento termodinâmicas	44
4.3	Medidas experimentais do emaranhamento termodinâmico	46
4.3.1	Susceptibilidade magnética como testemunha térmica	46
4.3.1.1	Magnetos Moleculares	46
4.3.1.2	Dímeros de spin S	48
4.3.2	Calor específico como testemunha térmica	49
4.3.2.1	Modelo de Ising transverso	49
4.3.2.2	Nitrato de cobre	50
5	TESTEMUNHAS DE EMARANHAMENTO GENERALIZADA .	53
5.1	Introdução	53
5.2	CrITÉRIOS baseados em relações de incertezas	54
5.3	Testemunha de emaranhamento generalizada para sistemas bipartidos	57
5.3.1	Demonstração da relação de incerteza	57
5.3.2	Resultado geral com interação entre os spins	59
5.3.3	Aplicação a susceptibilidade	62
5.3.4	Aplicação ao calor específico	63
5.4	Testemunha de emaranhamento generalizada para sistemas tripartidos	65
5.4.1	Aplicação a susceptibilidade	69
5.4.2	Aplicação ao calor específico	70
5.5	Resultados para sistemas bipartidos	71
5.5.1	Modelo de Heisenberg XYZ	71
5.5.2	Modelo de Heisenberg XY isotrópico	73
5.5.3	Modelo de Heisenberg XY anisotrópico	76
5.5.4	Modelo de Heisenberg XXZ	79
5.5.5	Modelo de Heisenberg XXX	82
5.5.6	Modelo de Ising	85
5.6	Resultados para sistemas tripartidos	88
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	95
	Referências	97

1 Introdução

A mecânica quântica tem se mostrado fascinante desde o seu nascimento no início do século XX. Ela nos trouxe uma nova maneira de enxergarmos o mundo ao nosso redor, pois problemas que antes pareciam sem solução passaram a ser resolvidos. Ela também trouxe uma série de novos conceitos como o emaranhamento quântico, que possui múltiplos papéis na mecânica quântica. Ele foi descrito primeiramente por Einstein, Podolsky, e Rosen ¹ e Schrödinger ² como um estranho fenômeno, mas hoje é visto como um recurso para a execução de tarefas de forma mais rápida ou mais segura. Devido ao rápido progresso experimental no campo da mecânica quântica, houve um rápido crescimento no interesse sobre a teoria emaranhamento e hoje em dia muitas experiências visam a geração de emaranhamento a fim de estudar diversas áreas como a criptografia quântica, ³ a teleportação ⁴ e a fim de utilizar tal fenômeno no desenvolvimento da computação quântica. ⁵ Juntamente com esse crescimento, é necessário conhecimentos mais profundos no intuito de desenvolver maneiras mais eficientes de quantificar e entender o emaranhamento. O sistema bipartido é a forma mais simples de se estudar o emaranhamento, porém nenhuma solução geral é ainda conhecida para o estudo desse fenômeno. ⁶ Várias propostas para detectar o emaranhamento vem surgindo, entre elas podemos destacar testemunhas de emaranhamento como uma das principais propostas utilizadas para executar tal tarefa. Esse critério é baseado em desigualdades para os valores médios de observáveis e a violação dessas desigualdades implica em emaranhamento. ⁷ Recentemente foi proposta uma nova classe de testemunhas, em que são utilizadas relações de incertezas locais baseadas nas variâncias de observáveis na construção da testemunha de emaranhamento para sistemas bipartidos. ⁸ Porém esses observáveis possuem estruturas simples que não levam em consideração termos de interação entre eles. Nosso trabalho foi desenvolver um critério de emaranhamento considerando observáveis de spin gerais incluindo termos de interações entre eles e aplicados a testemunhas de emaranhamento térmicas, como a susceptibilidade magnética e o calor específico.

A organização dessa dissertação está da seguinte maneira: no capítulo (2) apresentamos os aspectos gerais do emaranhamento bipartido sendo feita inicialmente uma breve contextualização histórica sobre o paradoxo de Einstein, Podolsky e Rosen e a desigualdade de Bell. Depois, um conteúdo teórico sobre as propriedades do emaranhamento são enunciadas brevemente, tais como uma definição matemática de estados emaranhados, critérios de separabilidade, medidas e testemunhas de emaranhamento.

No capítulo (3) tratamos sobre o emaranhamento multipartido, onde basicamente fazemos uma generalização e extensão dos conceitos apresentados para sistemas bipartidos, como critérios de separabilidade e testemunhas, mostrando ainda as classes de

emaranhamento tripartidos e suas respectivas biseparabilidades.

Posteriormente, no capítulo (4), apresentamos diversos estudos publicados na literatura demonstrando que o emaranhamento também pode existir em sólidos a temperaturas finitas, o qual denominamos de emaranhamento térmico. Ainda nesse capítulo, mostramos que tanto a susceptibilidade como o calor específico podem ser usados para a detecção do emaranhamento, na forma de testemunhas térmicas.

Por fim, no capítulo (5), desenvolvemos um critério de emaranhamento baseado em observáveis gerais de spin para sistemas bipartidos e tripartidos. Para a construção desse critério utilizamos a covariância dos observáveis que em seguidas foram reduzidos a variância, pois esta é mais adequada para a aplicação em sistemas físicos. Com isso aplicamos nossos resultados nos modelos de Ising transversal⁹ e Heisenberg: XYZ ¹⁰, XY simétrico, XY antisimétrico¹¹, XXZ ¹² e XXX ¹³. Em todos os modelos o critério foi aplicado para as condições ferromagnética ($J > 0$) e antiferromagnética ($J < 0$).

2 Emaranhamento bipartido

Neste capítulo faremos uma breve contextualização histórica sobre a importância do emaranhamento e posteriormente será apresentada uma discussão sobre as noções básicas do emaranhamento em sistemas bipartidos. Primeiramente será discutido, sucintamente, o paradoxo de Einstein-Podolsky-Rose (EPR) e a desigualdade de Bell. Em seguida, introduzimos conceitos como a definição de estados quânticos emaranhados e as formas de caracterização através de quantificadores de emaranhamento. Por fim, discutiremos sobre testemunhas de emaranhamento e sua interpretação geométrica. A discussão da teoria para emaranhamentos tripartidos e multipartidos será dada no capítulo (3).

2.1 O que é emaranhamento?

Podemos começar nos perguntando, afinal o que é emaranhamento? Essa é uma pergunta complexa de ser respondida, pois o entendimento a cerca do que é emaranhamento foi mudando ao longo dos anos. Grandes cientistas do século XX escreveram suas opiniões a respeito do emaranhamento, veja abaixo algumas delas ⁶

J. Bell: ...uma correlação que é mais forte que qualquer correlação clássica.

D. Mermin: ...uma correlação que contradiz a teoria dos elementos da realidade.

A. Peres: ...um truque que mágicos quânticos usam para produzir fenômenos que mágicos clássicos não podem imitar.

C. Bennett: ...um recurso que permite a teleportação quântica.

P. Shor: ...uma estrutura global da função de onda permitindo algoritmos mais rápidos.

A. Ekert: uma ferramenta para comunicação segura.

Família Horodecki: ...a necessidade das primeiras aplicações de mapas positivos em física.

Entretanto ainda hoje não temos uma definição concreta sobre o que é emaranhamento. Essa propriedade acarretou em uma nova área de pesquisa, chamada informação quântica. Com o desenvolvimento dessa área surgiram novas aplicações para o emaranhamento, como por exemplo o computador quântico, um dispositivo extremamente poderoso capaz de realizar operações antes impossíveis com os computadores normais. Isso só foi possível devido as propriedades do emaranhamento quântico, pois ele é capaz de processar grandes quantidades de dados em um intervalo de tempo menor. ¹⁴

Um dos problemas iniciais da teoria da informação quântica era distinguir os estados emaranhados quânticos dos clássicos e uma importante medida para diferenciar tal propriedade foi a desigualdade de Bell.^{15, 16} A seguir faremos uma breve discussão a respeito dessa desigualdade.

2.2 Desigualdade de Bell

A mecânica quântica, uma das mais surpreendentes teoria da física, já foi objeto de inúmeros estudos e experimentos ao longo do século XX, entre eles podemos citar o famoso problema pensado do gato de Schödinger e os experimentos de Stern-Gerlach, dupla fenda, Franck-Hertz, corpo negro, entre outros.^{17, 18} Todos eles ajudaram a consolidar os conceitos teóricos propostos e ajudou no desenvolvimento de novas áreas da física, como a matéria condensada e a própria teoria da informação quântica. A mecânica quântica possui diversos aspectos que a diferem da mecânica clássica como, por exemplo, o fato dela não ser uma teoria determinística. Isso a primeira vista pode gerar receios a respeito de inconsistências devido as diferenças dos formalismos, mas felizmente todos se mostraram consistentes com os inúmeros experimentos realizados.¹⁹

Uma das inconsistências mais famosas geradas foi proposta em 1935 por Einstein, Podolsky e Rosen denominado de paradoxo EPR. Os autores defendem a ideia de que a mecânica quântica seria uma teoria incompleta basendo-se na concepção de realismo local, em outras palavras, que as medidas do sistema independem do processo da qual são realizadas e que, se dois observadores estiverem distantes tal que não ocorra troca de informações entre eles, a medida de um observador não influencia nas realizadas pelo outro.¹

Se ambas as hipóteses forem incorporadas a mecânica quântica, teremos uma inconsistência. Entretanto, para contornar tal problema foram incluídas as chamadas variáveis ocultas na teoria quântica (variáveis que não pertencem ao mundo quântico, mas introduzidas pra explicar tal incompatibilidade).²⁰ Porém, John Bell em 1964 descobriu que na mecânica quântica existem certas correlações que não podem ser explicadas por uma teoria de variáveis ocultas. Tais correlações podem ser caracterizadas através de um teste envolvendo uma desigualdade, denominada desigualdade de Bell. Em seus estudos teóricos, Bell supôs sistemas físicos ideais, entretanto para a aplicação em sistemas reais tais hipóteses se tornam praticamente impossíveis. Assim, os pesquisadores Clauser, Horne, Shimony e Holt, adaptaram a desigualdade de Bell para um sistema físico real, acarretando no desenvolvimento da desigualdade CHSH.²¹

2.2.1 Desigualdade CHSH

Para entendermos melhor essa desigualdade considere um sistemas bipartido no qual o observador $\mathcal{A}$ (Alice) mede dois observáveis A_1 e A_2 , enquanto o observador $\mathcal{B}$ (Bob)* mede B_1 e B_2 , de tal modo que as medidas dos observadores são independentes. Por simplicidade, suponha que as medições resultem em $+1$ ou -1 . A correlação entre os observáveis $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ pode ser escrita como

$$\langle A_i B_j \rangle = \int p(\lambda, a, b) a(\lambda, i) b(\lambda, j) d\lambda, \quad (2.1)$$

onde $p(\lambda, a, b)$ é a distribuição de probabilidades conjunta dos observáveis, $a(\lambda, i)$ é o resultado da medida de A_i e $b(\lambda, j)$ é o resultado da medida de B_j . Com isso, podemos definir o operador de Bell como

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B} \rangle &= \langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_1 B_2 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle - \langle A_2 B_2 \rangle \\ &= \int p(\lambda, a, b) a(\lambda, 1) b(\lambda, 1) d\lambda + \int p(\lambda, a, b) a(\lambda, 1) b(\lambda, 2) d\lambda \\ &\quad + \int p(\lambda, a, b) a(\lambda, 2) b(\lambda, 1) d\lambda - \int p(\lambda, a, b) a(\lambda, 2) b(\lambda, 2) d\lambda, \end{aligned} \quad (2.2)$$

Utilizando a simplificação mencionada acima, $a(\lambda, i) = \pm 1$ e $b(\lambda, j) = \pm 1$, temos que a equação (2.2), resulta em

$$\begin{aligned} &a(\lambda, 1) b(\lambda, 1) + a(\lambda, 1) b(\lambda, 2) + a(\lambda, 2) b(\lambda, 1) - a(\lambda, 2) b(\lambda, 2) \\ &= a(\lambda, 1) [b(\lambda, 1) + b(\lambda, 2)] + a(\lambda, 2) [b(\lambda, 1) - b(\lambda, 2)] = \pm 2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Da equação (2.3), temos que ou $a(\lambda, 1) [b(\lambda, 1) + b(\lambda, 2)] = 0$ e $a(\lambda, 2) [b(\lambda, 1) - b(\lambda, 2)] = \pm 2$, ou $a(\lambda, 1) [b(\lambda, 1) + b(\lambda, 2)] = \pm 2$ e $a(\lambda, 2) [b(\lambda, 1) - b(\lambda, 2)] = 0$. Logo,

$$-2 \leq \int p(\lambda, a, b) \{a(\lambda, 1) [b(\lambda, 1) + b(\lambda, 2)] + a(\lambda, 2) [b(\lambda, 1) - b(\lambda, 2)]\} d\lambda \leq 2. \quad (2.4)$$

Comparando as quantidade da equação (2.4) com (2.2), resulta na desigualdade CHSH

$$-2 \leq CHSH \leq 2. \quad (2.5)$$

Entretanto Tsirelson²² mostrou que para a mecânica quântica os limites para a desigualdade CHSH são na verdade $\pm 2\sqrt{2}$, resultando na violação da equação (2.5). Isso mostra que a mecânica quântica nem sempre é compatível com a hipótese de realismo local, ou seja, em algumas situações devemos abrir mão de tal pressuposto.²³

* Na teoria da informação quântica comumente associamos os nomes Alice e Bob para os sistemas quânticos.

2.3 Definição de emaranhamento

Até o presente momento apresentamos somente uma contextualização sobre o emaranhamento. Entretanto, para sabermos se um estado quântico é ou não emaranhado, precisamos de uma definição matemática para tal investigação. Dessa forma, consideremos dois sistemas quânticos $\mathcal{A}$ (Alice) e $\mathcal{B}$ (Bob), associado aos espaços de Hilbert $\mathcal{E}_A$ de dimensão d_A , e $\mathcal{E}_B$ de dimensão d_B , respectivamente. Então, qualquer estado puro conjunto $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_A \otimes \mathcal{E}_B$ que puder ser escrito como

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle, \quad (2.6)$$

é dito separável, caso contrário, emaranhado.²⁴ Onde $|\psi_A\rangle \in \mathcal{E}_A$ e $|\psi_B\rangle \in \mathcal{E}_B$. Um exemplo de estado puro separável é $|\psi\rangle = |00\rangle$, enquanto para estados puros emaranhados, temos os estados de Bell[†]

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle), \quad (2.7)$$

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle). \quad (2.8)$$

Porém, nem sempre estaremos trabalhando com estados puros. Na maioria das vezes temos sistemas nos quais não sabemos qual o seu estado quântico, somente as probabilidades associadas a cada estado. Esses sistemas são denominados mistos e requerem outra abordagem para determinação da separabilidade de seus estados. Assim, ao invés de ser descrita por uma função de onda, a situação é regida por um operador densidade ρ_{AB} . Dessa forma, um estado misto é separável se o operador densidade puder ser escrito como a soma convexa de estados na forma^{‡25, 26}

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i, \quad (2.9)$$

caso contrário ele é dito ser emaranhado. Acima, as probabilidades associadas aos estados obedecem a condição de normalização $\sum_i p_i = 1$. Um exemplo de um estado misto dito separável é $\rho = \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$. Para estados emaranhados, um exemplo é o estado de Werner dado por

$$\rho_{AB}^W = \frac{(1-p)}{4} \mathbb{1} + p |\phi^+\rangle\langle \phi^+|, \quad (2.10)$$

onde para existir emaranhamento, devemos ter $1/3 < p \leq 1$ e usamos o fato que $\mathbb{1} = \mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B$ é o operador identidade. Adiante, na seção (2.4.1) aplicaremos um critério de separabilidade para mostrar o porque desse intervalo para p .

[†] Na teoria de informação quântica, definimos $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

[‡] Uma soma é dita ser convexa quando as probabilidades associadas aos estados são normalizadas, ou seja, $\sum_i p_i = 1$.

Infelizmente fazer a decomposição do estado como na equação (2.9) não é uma tarefa simples, pois encontrar a decomposição dos estados onde possamos escrevê-los em uma soma convexa se torna uma tarefa complexa. Entretanto, existem outros critérios mais operacionais para determinar se um estado é emaranhado. Um fato importante a ser destacado é que devido a estarmos trabalhando com sistemas bipartidos, qualquer estado puro emaranhado pertence a família dos estados de Bell. Uma discussão um pouco mais detalhada sobre as famílias dos estados emaranhados será apresentada no capítulo (3).

Na próxima seção serão apresentados alguns critérios de separabilidade e suas propriedades.

2.4 Critérios de separabilidade

Nesta seção apresentaremos os principais critérios de separabilidade para sistemas bipartidos, como os critérios Peres-Horodecki, redução e mapas positivos. Outros critérios e detalhes podem ser encontrados em ref.(27, 6).

2.4.1 Critério de Peres-Horodecki

Temos que o critério de Peres-Horodecki ^{28, 7} ou transposição parcial positiva (PPT)[§], como o próprio nome diz, realiza a troca dos índices da matriz de apenas um subsistema. Assim temos de uma maneira matemática a seguinte relação de troca dos elementos da matriz $\langle i, j | \rho_{AB} | k, l \rangle \rightarrow \langle i, l | \rho_{AB} | k, j \rangle$ para um sistema bipartido descrito pela matriz densidade ρ_{AB}

$$\rho_{AB}^{TB} = \sum_{i,j,k,l} p_{ij,kl} |i, l\rangle \langle k, j|, \quad (2.11)$$

onde $p_{il,kj}$ é a probabilidade conjunta associada aos estados $|i, j\rangle$ e $|k, l\rangle$. Como a transposição dos índices da matriz densidade não alteram suas características, podemos dizer que ρ_{AB}^{TB} também é uma matriz densidade com a propriedade de ser semidefinida. Deste modo para estados emaranhados devemos ter $\rho_{AB}^{TB} < 0$. Em outras palavras, se a transposição parcial de uma matriz densidade apresenta autovalores negativos, então o estado representado pela matriz original está emaranhado. No entanto, esse critério de separabilidade somente se torna uma condição necessária e suficiente para sistemas de dimensões $2 \otimes 2$ e $2 \otimes 3$.⁷ Para os sistemas de dimensões maiores o critério se mostra apenas uma condição necessária ao emaranhamento do sistema.

Para mostrar como esse critério pode ser aplicado, vamos fazer um exemplo. Deste modo, considere o estado de Werner dado pela equação (2.10)

$$\rho_{AB}^W = \frac{(1-p)}{4} \mathbb{1} + p |\phi^+\rangle \langle \phi^+|, \quad (2.12)$$

[§] do inglês *Positive Partial Transpose*.

onde $|\phi^+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ (equação (2.7)) e usamos o fato que $\mathbb{1} = \mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B$. Assim, podemos calcular explicitamente o operador densidade

$$\begin{aligned} \rho_{AB}^W &= \frac{(1+p)}{4} (|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) + \frac{p}{2} (|00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00|) \\ &+ \frac{(1-p)}{4} (|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|), \end{aligned} \quad (2.13)$$

e finalmente podemos calcular o operador transposto parcial denotado por $(\rho_{AB}^W)^{T_B}$

$$\begin{aligned} (\rho_{AB}^W)^{T_B} &= \frac{(1+p)}{4} (|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) + \frac{p}{2} (|01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01|) \\ &+ \frac{(1-p)}{4} (|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+p)/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-p)/2 & p & 0 \\ 0 & p & (1-p)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+p)/2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Com o cálculo dessa matriz em mãos, podemos fazer sua diagonalização para obter os autovalores e as respectivas autofunções da matriz

$$\lambda_1 = \frac{(1+p)}{4} \Rightarrow |00\rangle, \quad (2.15)$$

$$\lambda_2 = \frac{(1+p)}{4} \Rightarrow |11\rangle, \quad (2.16)$$

$$\lambda_+ = \frac{(1+p)}{4} \Rightarrow |\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle), \quad (2.17)$$

$$\lambda_- = \frac{(1-3p)}{4} \Rightarrow |\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle). \quad (2.18)$$

Para estados emaranhados, a matriz densidade transposta parcial deve obedecer a condição $(\rho_{AB}^W)^{T_B} < 0$. Todavia, essa condição somente é satisfeita para o autovalor λ_- , o que implica $p > 1/3$. Levando também em conta a condição de normalização $\sum_i p_i = 1$, temos o intervalo para p mostrado anteriormente: $1/3 < p \leq 1$.

2.4.2 Critério de mapa positivo

Um mapa positivo nada mais é que uma transformação feita sobre a matriz densidade que leva operadores positivos para operadores positivos. ⁷ Isso se traduz da seguinte forma,

$$\Lambda(\rho_{AB}) \geq 0 \quad \forall \quad \rho_{AB} \geq 0. \quad (2.19)$$

Entretanto a extensão de um mapa positivo ($\mathbb{1} \otimes \Lambda$) não é necessariamente uma quantidade positiva, o que nos habilita a utilizarmos essa propriedade e aplicá-la como

critério de separabilidade.²⁹ Por conseguinte, considere uma matriz densidade ρ_{AB} separável de forma que ao aplicarmos a operação de extensão no estado, temos que

$$(\mathbb{1} \otimes \Lambda)(\rho_{AB}) = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \Lambda(\rho_B^i). \quad (2.20)$$

Utilizando da mesma propriedade mostrada na equação (2.19) temos que $\Lambda(\rho_B^i) \geq 0$, consequentemente gerando $(\mathbb{1} \otimes \Lambda)(\rho_{AB}) \geq 0$ também. Como o critério foi construído para uma matriz densidade separável, a violação da desigualdade acarreta na obtenção de um estado emaranhado.²⁹

2.4.3 Critério de redução

De acordo com esse critério, se a matriz densidade ρ_{AB} é separável, então podemos escrever

$$\rho_A \otimes \mathbb{1} - \rho_{AB} \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{1} \otimes \rho_B - \rho_{AB} \geq 0, \quad (2.21)$$

onde $\rho_A \in \mathcal{H}_A$ e $\rho_B \in \mathcal{H}_B$. Esse critério basicamente é uma aplicação do mapa positivo, conforme visto anteriormente. Assim, um mapa positivo aplicado a um subsistema, preserva as propriedades da matriz densidade (conforme o critério $\mathcal{PPT}$), ou seja, se um estado violar a desigualdade (2.21), temos emaranhamento. Análogo ao $\mathcal{PPT}$, esse critério é uma condição necessário e suficiente apenas para sistemas de dimensões $2 \otimes 2$ e $2 \otimes 3$.³⁰

2.5 Medidas do emaranhamento

Com o passar dos anos uma série de estudos relacionados a informação quântica, mais precisamente sobre emaranhamento quântico e suas propriedades foram realizados, conforme mencionado na seção (2.1). Uma de suas propriedades está relacionada com o fato de podermos realizar transmissões de informações entre sistemas quânticos, utilizando o emaranhamento.^{6, 27} Consequentemente, se torna necessário entender alguns aspectos e propriedades principais do emaranhamento como, por exemplo, de que maneira podemos fazer medidas do emaranhamento e saber em que condições ele sobrevive. Para isso, nessa seção apresentaremos alguns princípios básicos das medidas de sistemas quânticos emaranhados.

2.5.1 Requisitos para uma medida do emaranhamento

Uma medida do emaranhamento $E(\rho_{AB})$ deve cumprir uma série de propriedades básicas.^{31, 32} É importante salientar que algumas das medidas propostas na literatura nem sempre cumprem com todas as propriedades.⁶ Abaixo temos as características que $E(\rho_{AB})$ deve satisfazer pelo menos em parte

1. Se ρ_{AB} for separável, então $E(\rho_{AB}) = 0$.
2. Para um estado puro $\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|$, utilizamos a entropia de von Neumann como medida

$$E(\rho_{AB}) = -\text{Tr}(\rho_{AB} \log_2 \rho_{AB}) = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i, \quad (2.22)$$

neste caso denominada entropia de emaranhamento. Geralmente utilizamos a equação do lado direito devido ao fato dela ser mais operacional, onde λ_i são os autovalores do operador densidade ρ_{AB} .

3. **Normalização** um estado maximamente emaranhado ρ_{AB} d -dimensional, é dado por

$$E(\rho_{AB}) = \log_2 d. \quad (2.23)$$

4. O emaranhamento do estado não pode aumentar em média aplicando-se protocolos de operações locais e comunicações clássicas, ou seja

$$E(\Lambda_{OLCC}) \leq E(\rho_{AB}). \quad (2.24)$$

5. **Continuidade:** no limite em que a distância entre dois estados tende a zero, a diferença entre seus emaranhamentos deve também tender a zero,

$$E(\rho_{AB}) - E(\sigma_{AB}) \rightarrow 0, \quad \text{para } \|\rho_{AB} - \sigma_{AB}\|_2 \rightarrow 0, \quad (2.25)$$

onde $\|A\|_2 = \sqrt{A^\dagger A}$.

6. **Aditividade:** n cópias idênticas do estado ρ_{AB} , contém n vezes o emaranhamento de uma cópia,

$$E(\rho_{AB}^{\otimes n}) = nE(\rho_{AB}). \quad (2.26)$$

7. **Convexidade:** A medida do emaranhamento deve ser uma função convexa. Em termos matemáticos isso é equivalente a

$$E(\lambda\rho_{AB} + (1-\lambda)\sigma_{AB}) \leq \lambda E(\rho_{AB}) + (1-\lambda)E(\sigma_{AB}). \quad (2.27)$$

Embora tenhamos apresentamos algumas propriedades que $E(\rho_{AB})$ deve satisfazer acima, o problema da medida do emaranhamento quântico continua em aberto. ^{6, 33, 24, 27} A seguir vamos apresentar as medidas mais utilizadas em sistemas de dois q-bits para estados mistos, chamadas de negatividade e emaranhamento de formação. Entretanto outras propostas de medidas presentes na literatura podem ser encontradas com maiores detalhes em ref.(6, 27).

2.5.2 Negatividade

A negatividade ou simplesmente $\mathcal{N}(\rho_{AB})$ é basicamente a violação do critério $\mathcal{PPT}$ (ver seção (2.4.1)). Então, podemos definir a negatividade como a seguinte equação,^{34, 35}

$$\mathcal{N}(\rho_{AB}) = \frac{\|\rho_{AB}^{T_B}\| - 1}{2}, \quad (2.28)$$

onde $\|A\|_1 = \text{Tr}\sqrt{A^\dagger A}$. Uma das vantagens da negatividade é que tal medida é facilmente calculada para sistemas de quaisquer dimensões,³⁶ porém conforme discutido na seção (2.4.1), essa medida do emaranhamento somente é uma condição necessária e suficiente para sistemas $2 \otimes 2$ e $2 \otimes 3$. Entretanto esse critério não é capaz de distinguir a separabilidade de estados que possuem transposição parcial positiva, denominados de estados de fronteira[¶]. Essa classe específica de estados pode ser vista com maiores detalhes em ref.(37).

2.5.3 Emaranhamento de formação

O emaranhamento de formação ou simplesmente $E_F(\rho_{AB})$, é uma medida na qual idealizamos que qualquer estado misto pode ser decomposto em uma combinação de estados puros³⁸. Assim, $E_F(\rho_{AB})$ seria a média da entropia de von Neumann da matriz densidade reduzida dos estados puros,

$$E_F(\rho_{AB}) = \min \sum_i p_i S(\rho_A^i), \quad (2.29)$$

onde o mínimo é tomado sobre todas as possíveis decomposições em estados puros de $\rho_{AB} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ e $S(\rho_A^i)$ é a entropia reduzida com relação ao subsistema $\mathcal{A}$. Uma característica especial do emaranhamento de formação é o fato dele possuir solução analítica para sistemas bipartidos, tornando-o largamente utilizado como medida de emaranhamento. A expressão é dado por³⁹

$$E_F(\rho_{AB}) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2(\rho_{AB})}}{2}\right), \quad (2.30)$$

com

$$h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x). \quad (2.31)$$

Onde $C(\rho_{AB})$ é chamada de concorrência e definida por

$$C(\rho) = \max \left\{ \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4} \right\}, \quad (2.32)$$

em que λ_i , $i = 1..4$ são os autovalores em ordem decrescente da matriz M dada por

$$M = \rho_{AB} (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho_{AB}^* (\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad (2.33)$$

e ρ_{AB}^* é a matriz complexa conjugada de ρ_{AB} .

[¶] do inglês *Bound States*.

Um caso importante para a concorrência que nos leva a uma solução analítica para a mesma são as matrizes densidades denominadas estado X, que possuem um alto grau de simetria. Para entender melhor observe a matriz abaixo,

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & e \\ 0 & b & f & 0 \\ 0 & f^* & c & 0 \\ e^* & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

por conseguinte podemos escrever a concorrência da seguinte forma,

$$C(\rho_{AB}) = 2 \max\{0, C_1, C_2\}, \quad (2.35)$$

onde $C_1 = |f| - \sqrt{ad}$ e $C_2 = |e| - \sqrt{bc}$ ^{40, 41}. Uma propriedade importante a se destacar, é o fato de que para sistemas bipartidos, o emaranhamento de formação é uma função monotônica da concorrência, conforme visto na equação (2.30). Desta maneira, temos que a concorrência também pode ser usada como medida de emaranhamento.

Para casos mais complexos nos quais não temos simetria no operador densidade, temos que utilizar métodos numéricos para a determinação da solução das quantidades desejadas ^{42, 43}.

2.6 Testemunhas de emaranhamento

Vamos agora introduzir um novo critério de separabilidade chamado testemunha de emaranhamento, ou simplesmente *EW* ^{44, 7, 45, 46}. Esse critério foi criado devido a necessidade de termos um método mais operacional para a detecção de emaranhamento, visto que os critérios de separabilidade apresentados na seção (2.4) não se mostram de fácil aplicação. Assim, para definirmos matematicamente o que é uma testemunhas de emaranhamento, suponha um operador densidade ρ_{AB} tal que exista um observável *EW* em que

$$\text{Tr}(EW\rho_{AB}) \geq 0. \quad (2.36)$$

Se existirem estados emaranhados em ρ_{AB} a desigualdade será violada. É importante salientar que a testemunha de emaranhamento não é capaz de detectar todos os estados emaranhados, ou seja, para a condição de $\text{Tr}(EW\rho_{AB}) < 0$, temos que o sistema possui emaranhamento, porém para $\text{Tr}(EW\rho_{AB}) \geq 0$ não necessariamente temos separabilidade.

Vamos utilizar de um aspecto geométrico para entendermos melhor como funciona uma testemunha de emaranhamento. Para isso observe a Fig. (1) ⁴⁶. Seja $\mathcal{S}$ e $\mathcal{E}$ um conjunto de estados convexos e separáveis, respectivamente, e ρ_{AB} um operador densidade tal que representa ponto pertencente ao conjunto $\mathcal{E}$. Assim, podemos determinar um plano *EW* no

^{||} do inglês *Entanglement Witness*.

qual separamos os dois conjuntos. Entretanto, ao fazermos essa separação provavelmente não selecionaremos todos os estados emaranhados. A correção desse problema pode ser realizada com a otimização da testemunha de emaranhamento, onde quanto mais próximo o plano EW estiver do conjunto de estados separáveis $\mathcal{S}$, melhor será o resultado. Na situação ideal, precisaremos de inúmeras testemunhas para isolarmos o conjunto $\mathcal{S}$. Discutiremos um pouco mais sobre a otimização da testemunha na seção (2.6.2). Maiores detalhes podem ser encontrados em ref.(27).

2.6.1 Construção da testemunha de emaranhamento

Vamos agora discutir como podemos construir uma testemunha de emaranhamento. Para isso vamos mostrar alguns exemplos contidos na literatura. Além desses métodos mostrados abaixo, temos outros que podem ser usados para a construção da testemunha. Para informações veja ²⁷.

1. Considere um operador densidade denotado por ρ_{AB} . Então existe um autovalor negativo $\lambda_- < 0$ de $\rho_{AB}^{T_A}$ e um correspondente autovetor $|\psi\rangle$. Assim, podemos definir a testemunha de emaranhamento como

$$EW = |\psi\rangle \langle \psi|^{T_A}, \quad (2.37)$$

onde para estados emaranhados temos

$$\text{Tr}(EW \rho_{AB}) = \text{Tr}(|\psi\rangle \langle \psi|^{T_A} \rho_{AB}) = \text{Tr}(|\psi\rangle \langle \psi| \rho_{AB}^{T_A}) = \lambda_- < 0 \quad (2.38)$$

e para estados separáveis $\text{Tr}(EW \rho_{AB}) = \text{Tr}(|\psi\rangle \langle \psi| \rho_{AB}^{T_A}) \geq 0$.

2. Outro exemplo para a construção da testemunha de emaranhamento é no qual partimos da hipótese que, perto de um estado emaranhado também deve ser emaranhado ²⁷. Assim, podemos construir a testemunha utilizando o projetor de um estado puro $|\psi\rangle$

$$EW = \alpha \mathbb{1} - |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (2.39)$$

Essa testemunha pode ser interpretada como: seja $\text{Tr}(\rho_{AB} |\psi\rangle \langle \psi|) = \langle \psi | \rho_{AB} | \psi \rangle$ o valor esperado do estado $|\psi\rangle$ para um estado misto ρ_{AB} , então se este valor esperado extrapolar um valor crítico α , também temos um valor esperado negativo para a testemunha e ρ_{AB} deve ser necessariamente um estado emaranhado ²⁷. Esse valor α representa o menor valor para o qual EW ainda permanece positivo. Ele é calculado segundo ⁴⁷

$$\alpha = \max_{\rho_A \otimes \rho_B} \text{Tr}(\rho_{AB} |\psi\rangle \langle \psi|) = \max_{|\phi\rangle=|a\rangle \otimes |b\rangle} |\langle \psi | \phi \rangle|^2 \quad (2.40)$$

Figura 1 – Interpretação geométrica da testemunha de emaranhamento e sua otimização.

Fonte: Adaptada de BRUSS.⁶

3. Seja ρ_{AB} um estado emaranhado e σ_{AB} o estado separável mais próximo de ρ_{AB} . Então podemos definir uma testemunha de emaranhamento como

$$EW = \frac{1}{\mathcal{N}} \{ \sigma_{AB} - \rho_{AB} + \text{Tr} [\sigma_{AB} (\rho_{AB} - \sigma_{AB})] \cdot \mathbf{1} \}, \quad (2.41)$$

onde $\mathcal{N} = \|\rho_{AB} - \sigma_{AB}\|$ e $\|X\| = \sqrt{\text{Tr}(X^\dagger X)}$ é a normalização.

4. Outro critério que resulta em uma testemunha de emaranhamento é o baseado em covariâncias ou variâncias dos estados, como por exemplo a susceptibilidade magnética e o calor específico. Esse tópico especificamente será tratado com mais detalhes no capítulo (5).

2.6.2 Otimização da testemunha de emaranhamento

Conforme discutido na seção (2.6), podemos otimizar uma testemunha de emaranhamento para obtermos melhores resultados. Nessa seção discutiremos com maiores detalhes sobre tal otimização. Assim, considere duas testemunhas EW onde EW_1 é mais refinada que EW_2 , no sentido de detectar os mesmos estados mais um adicional⁴⁶. Logo, podemos definir

$$EW_2 = EW_1 + P, \quad (2.42)$$

onde P é um operador positivo. Conforme discutido anteriormente, uma condição necessária para a testemunha ser otimizada é isolar o conjunto de estados separáveis (ver Fig.(1)), mas essa não é uma condição suficiente. As testemunhas que cumprem essa circunstância são chamadas as vezes de fracamente otimizadas.²⁷

A otimização da testemunha pode ser feita da seguinte forma: seja EW uma testemunha de emaranhamento e P um operador positivo, tal que cumprem as seguintes

propriedades $\langle \psi | EW | \psi \rangle = \langle a_i b_i | EW | a_i b_i \rangle = 0$ e $\langle \psi | P | \psi \rangle = \langle a_i b_i | P | a_i b_i \rangle = 0$.⁴⁶ Então $E\tilde{W} = EW - \lambda P$ é uma testemunha mais refinada que EW se

$$\lambda \leq \lambda_0 := \inf_a \min_{\text{autovalores}} \left[\frac{1}{\sqrt{P_a}} EW_a \frac{1}{\sqrt{P_a}} \right], \quad (2.43)$$

com $\inf$ = inferior, $X_a = \langle a | X | a \rangle$, $|a\rangle \in \mathcal{H}_A$ e $|b\rangle \in \mathcal{H}_B$.

Para deixar um pouco mais claro os conceitos apresentados acima, vejamos um exemplo prático da construção e otimização de uma testemunha de emaranhamento^{48, 49}. Deste modo, considere um estado puro $|\psi\rangle \langle \psi|$ adicionado algum grau de mistura. Assim, o sistema pode ser descrito por um estado misto da seguinte forma

$$\rho_{AB}(p) = p |\psi\rangle \langle \psi| + (1-p) \frac{\mathbb{1}}{4}. \quad (2.44)$$

Com a construção do estado, podemos fazer a otimização do mesmo. Se o estado $|\psi\rangle$ puder ser escrito segundo a decomposição $|\psi\rangle = a |01\rangle + b |10\rangle$, então o operador densidade se torna

$$\begin{aligned} \rho_{AB}(p) &= \frac{(1-p)}{4} (|00\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 11|) + \left(pa^2 + \frac{1-p}{4} \right) |01\rangle \langle 01| \\ &+ \left(pb^2 + \frac{1-p}{4} \right) |10\rangle \langle 10| + pab (|01\rangle \langle 10| + |10\rangle \langle 01|), \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde usamos o fato de que $\mathbb{1} = \mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B$. Desta maneira, o operador transposto $\rho_{AB}(p)^{T_B}$ fica

$$\begin{aligned} \rho_{AB}^{T_B}(p) &= \frac{(1-p)}{4} (|00\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 11|) + \left(pa^2 + \frac{1-p}{4} \right) |01\rangle \langle 01| \\ &+ \left(pb^2 + \frac{1-p}{4} \right) |10\rangle \langle 10| + pab (|00\rangle \langle 11| + |11\rangle \langle 00|) \\ &= \begin{pmatrix} (1+p)/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p/2 & 0 \\ 0 & p/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+p)/4 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

e seus autovalores e os respectivos autovetores são

$$\lambda_1 = \frac{(1-p)}{4} + pa^2 \Rightarrow |01\rangle \quad (2.47)$$

$$\lambda_2 = \frac{(1-p)}{4} + pb^2 \Rightarrow |10\rangle \quad (2.48)$$

$$\lambda_+ = \frac{(1-p)}{4} + pab \Rightarrow |\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \quad (2.49)$$

$$\lambda_- = \frac{(1-p)}{4} - pab \Rightarrow |\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle) \quad (2.50)$$

Portanto $\rho_{AB}(p)^{T_B}$ é emaranhado se $p > 1/(1+4ab)$, sendo λ_- o menor autovalor correspondente ao autoestado $|\phi^-\rangle$. Então a testemunha de emaranhamento é dada pela

transposição parcial do projetor para esse autoestado (equação (2.37)) e pode ser escrita como

$$EW = |\phi_{-}\rangle \langle \phi_{-}|^{T_B} = \frac{1}{2} \mathbb{1} - |\psi_{+}\rangle \langle \psi_{+}| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

onde $|\psi_{+}\rangle = (|01\rangle + |10\rangle) / \sqrt{2}$.

3 Emaranhamento multipartido

Nesse capítulo serão discutidos tópicos centrais relacionados ao emaranhamento tripartido e multipartido. Inicialmente será discutido a separabilidade para estados tripartidos. Posteriormente, será apresentado uma generalização para o caso multipartido e apresentação das famílias dos estados emaranhados, como os estados: GHZ , Werner, Dicke, entre outros. Após, apresentaremos os critérios de separabilidade e por fim as da testemunha de emaranhamento. Discussões mais detalhadas a respeito dos tópicos apresentados acima podem ser encontradas em ref.(27).

3.1 Emaranhamento tripartido

Faremos agora uma extensão e generalização dos conceitos apresentados no capítulo anterior sobre emaranhamento bipartido. Inicialmente vamos apresentar uma definição matemática para analisar se um estado possui emaranhamento. Para uma melhor apresentação dos conceitos, dividiremos essa seção para os casos de estados puros e mistos.

3.1.1 Estados puros

Assim, considere um sistema quântico composto por três subsistemas denominados A , B e C , associados aos espaços de Hilbert $\mathcal{E}_A$, $\mathcal{E}_B$ e $\mathcal{E}_C$, respectivamente. Então qualquer estado puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ do sistema que puder ser escrito como

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \otimes |\psi_C\rangle, \quad (3.1)$$

onde $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$ e $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_i$ com $i = A, B, C$, é dito totalmente separável, caso contrário, é dito emaranhado.⁶ Entretanto, podemos ter outro tipo de separabilidade para os estados denominado biseparável, na qual temos somente dois dos três q-bits emaranhados. Deste modo temos,

$$|\psi\rangle_{A \otimes BC} = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_{BC}\rangle. \quad (3.2)$$

As outras possibilidades para as biseparabilidades são $|\psi\rangle_{B \otimes AC} = |\psi_B\rangle \otimes |\psi_{AC}\rangle$ e $|\psi\rangle_{C \otimes AB} = |\psi_C\rangle \otimes |\psi_{AB}\rangle$.⁶ Estados que não possuem essa propriedade são chamado de genuinamente tripartido.²⁷ Dois exemplos importantes dessa condição são o estado GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger)^{50, 51} e o estado W ⁵²

$$|\psi\rangle_{GHZ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle), \quad (3.3)$$

$$|\psi\rangle_W = \frac{1}{\sqrt{3}} (|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle), \quad (3.4)$$

É importante salientar que existe somente duas classes de emaranhamento genuinamente tripartido, que são os estados das equações (3.3) e (3.4).⁶ Esses estados apresentam características importantes: o estado GHZ é maximamente emaranhado e uma generalização dos estados de Bell.⁵³ O estado W é mais resistente a perda de informação, por exemplo, sua matriz densidade reduzida* é emaranhada ao passo que para o estado GHZ é separável. Além disso, o estado W possui a maior possibilidade de conter emaranhamento biseparável.^{52, 54}

3.1.2 Estados mistos

Para estados mistos podemos ter três tipos de classificações: separáveis, biseparáveis e totalmente emaranhados. Para estados separáveis, considere um operador densidade ρ escrito da seguinte forma

$$\rho_{A \otimes B \otimes C} = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i \otimes \rho_C^i, \quad (3.5)$$

onde $p_i \geq 0$ e $\sum_i p_i = 1$. Se o operador densidade não obedecer essa condição, temos emaranhamento.⁶ Já para o caso biseparável, podemos escrever

$$\rho_{A \otimes BC} = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_{BC}^i. \quad (3.6)$$

Lembrando que podemos ter mais dois casos para as biseparabilidades: $B \otimes AC$ e $C \otimes AB$. Finalmente, para os estados totalmente emaranhados ou também denominado genuinamente tripartido, temos

$$\rho_{ABC} = \sum_i p_i \rho_{ABC}^i. \quad (3.7)$$

Entretanto, temos dois casos para essa condição, as classes GHZ e W . Para deixar mais claro as ideias, podemos fazer um esquema das classes dos estados tripartidos, como mostrado na Fig. (2). Podemos escrever o operador densidade para a circunstância geral, em que temos emaranhamento genuinamente tripartido (contabilizando as biseparabilidades)

$$\rho = \sum_i (p_i \rho_{AB}^i \otimes \rho_C^i + q_i \rho_{AC}^i \otimes \rho_B^i + r_i \rho_A^i \otimes \rho_{BC}^i), \quad (3.8)$$

onde as probabilidades satisfazem as propriedades de serem semidefinidas $p_i, q_i, r_i \geq 0$ e normalizadas $\sum_i (p_i + q_i + r_i) = 1$.

3.2 Emaranhamento multipartido

Vamos agora apresentar os mesmos conceitos da seção (3.1) para o caso geral de sistemas multipartidos. Para isso, faremos basicamente uma generalização das propriedades

* Temos que uma matriz densidade reduzida é gerada ao tomarmos o traço parcial sobre um dos subsistemas, por exemplo, $\rho_{AB} = Tr_C(\rho_{ABC})$

Figura 2 – Esquema das classes para estados tripartidos, onde S representa o caso separável.

Fonte: Adaptada de GUHNE.²⁷

apresentadas para o caso tripartido, sendo primeiramente feito para a condição de estados puros e posteriormente aplicado a estados mistos.

Assim, considere um estado puro $|\psi\rangle$ composto de N estados $|\phi_i\rangle$. Então, se o estado for separável, temos²⁴

$$|\psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_N\rangle. \quad (3.9)$$

Para estados mistos, o processo é análogo a equação (3.9),

$$\rho = \sum_i p_i \rho_1^i \otimes \rho_2^i \otimes \dots \otimes \rho_N^i. \quad (3.10)$$

Podemos entretanto, classificar os estados conforme sua separabilidade, para isso considere um número k obedecendo a relação $1 < k < N$. Isso significa que temos separabilidade até o estado k , enquanto os outros estados permanecem emaranhados. Nessa condição, dizemos que o estado é k -separável. Entretanto, se $k = N$ temos que o sistema é completamente separável. Essas definições são aplicadas tanto em estados puros quanto mistos.^{55, 56, 57}

Além da definição dos estados em relação a separabilidade, temos também a classificação perante ao número máximo de estados emaranhados do sistema. Desta forma, considere um estado puro $|\psi\rangle$ contendo $m < N$ estados emaranhados tal que

$$|\psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_m\rangle. \quad (3.11)$$

A essa condição denominamos que o estado é m -emaranhado.²⁷ Essa classificação pode ser facilmente estendida para o caso de estado misto. Assim, uma matriz densidade é dita

m -separável se puder ser escrita como

$$\rho = \sum_i p_i \rho_1^i \otimes \rho_2^i \otimes \dots \otimes \rho_m^i. \quad (3.12)$$

3.2.1 Famílias de estados multipartidos

Conforme apresentado na seção (3.1), podemos fazer a extensão os conceitos de classes ou famílias dos estados para o caso multipartido, que contém uma literatura mais abrangente que o caso tripartido. Vamos entretanto mostrar as principais famílias, para informações mais detalhadas veja ref.(27).

3.2.1.1 Estados GHZ

Considere um sistema possuindo N q-bits. Desta forma, definimos o estado GHZ como

$$|\psi_{GHZ}^N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N} \right), \quad (3.13)$$

com $|k\rangle^{\otimes N} = |k_1 \dots k_N\rangle$ e $k = 1, 2$. Os estados GHZ possuem muitas aplicações como: metrologia quântica,^{58, 59} computação quântica,⁶⁰ protocolos de criptografia,^{61, 62} entre outros. Foi demonstrado também que os estados GHZ são os únicos que violam maximamente a desigualdade de Bell.⁵³

3.2.1.2 Estados Dicke e W

Descoberto por R. H. Dicke em 1954 durante seus estudos sobre a emissão de luz a partir de uma nuvem de átomos,⁶³ esses estados são autoestados simultâneos dos operadores momento angular L_z e L^2 . Dicke observou que a intensidade da radiação é maior para estados emaranhados e menor se os átomos emitirem luz independentemente. Assim, podemos definir um estado de Dicke de N q-bits como

$$|\psi_D^{k,N}\rangle = \binom{N}{k}^{-\frac{1}{2}} \sum_j \Pi_j \left\{ |1\rangle_j^{\otimes k} \otimes |0\rangle_j^{\otimes N-k} \right\}, \quad (3.14)$$

onde $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$ representa todas as combinações dos estados, $k = N/2 - m$ tal que $L_z |\lambda\rangle = m\hbar |\lambda\rangle$ e $\sum_j \Pi_j \{ \dots \}$ denota todas as permutações possíveis dos q-bits.

Já o estado W é apenas um exemplo dos estados da equação (3.14), ele corresponde a $|\psi_D^{1,3}\rangle$.⁶⁴ Além desse estado, temos também outro importante exemplo a ser considerado, o estado de quatro q-bits, cuja relevância vem do fato dele ser resistente à decoerência do sistema.⁶⁵ Esse estado é definido por

$$|\psi_D^{2,4}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|0011\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1100\rangle). \quad (3.15)$$

3.2.1.3 Estados singletos de multi-q-bits

Outra interessante família que podemos citar, são os estados singlete multipartido. Esses estados são invariantes perante a operação de rotação sobre todos os q-bits, ou seja, $R^{\otimes N} |\psi\rangle = e^{i\phi} |\psi\rangle$, onde ϕ é uma fase global. Tais estados singletos existem somente para condição de N par.²⁷

Para o caso bipartido esse estado possui uma importante aplicação a ser destacada que frequentemente aparece em modelos físicos como, por exemplo, o modelo de Heisenberg XXX .¹³ Nesse modelo, especificamente, o singlete é o estado fundamental para a condição anti-ferromagnética (condição em que temos a constante de acoplamento $J < 0$). Deste modo, escrevemos o singlete como

$$|\psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle - |01\rangle). \quad (3.16)$$

Entretanto, podemos ter singletos para espaços de dimensões maiores, como no caso de quatro q-bits⁶⁶ definido por

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[|0011\rangle + |1100\rangle - \frac{1}{2} |\psi^{+}\rangle |\psi^{+}\rangle \right], \quad (3.17)$$

com $|\psi^{+}\rangle = (1/\sqrt{2}) (|01\rangle + |10\rangle)$.

3.2.2 Critérios de separabilidade

Como visto nas sessões (3.1) e (3.2), apresentamos condições para a separabilidade dos estados, entretanto tais condições são extremamente difíceis de serem aplicadas, gerando processos não operacionais. Felizmente assim como discutido na seção (2.4) sobre sistemas bipartidos, temos critérios mais operacionais no qual podemos utilizar para decidir se um estado possui emaranhamento. Abaixo vamos apresentar dois desses critérios.

3.2.2.1 Critério de permutação

Este critério consiste em uma generalização do critério $\mathcal{PPT}$ (ver seção (2.4.1)) para o caso multipartido.⁶⁷ Assim, considere um sistema de N q-bits em que escrevemos a matriz densidade ρ da seguinte forma,

$$\rho = \sum_{i_1, k_1 \dots i_N, k_N} \rho_{i_1, k_1 \dots i_N, k_N} |i_1\rangle \langle k_1| \otimes \dots \otimes |i_N\rangle \langle k_N|. \quad (3.18)$$

Deste modo, para estados separáveis temos

$$\|\rho_{\Pi(i_1, k_1 \dots i_N, k_N)}\| \leq 1, \quad (3.19)$$

onde $\Pi(\dots)$ representa uma permutação arbitrária dos índices. Para o caso de dois q-bits temos somente uma permutações possíveis, enquanto que para três q-bits seis^{68, 69} e para quatro q-bits são vinte e duas permutações.

3.2.2.2 Desigualdades quadráticas de Bell

Esse critério foi demonstrado por ref.(70, 71). Para sistemas bipartidos, considere o conjunto de operadores

$$A_{\pm}^{(2)} = \frac{1}{2} (A_1 \otimes A_2 \mp B_1 \otimes B_2), \quad (3.20)$$

$$B_{\mp}^{(2)} = \frac{1}{2} (B_1 \otimes A_2 \pm A_1 \otimes B_2), \quad (3.21)$$

$$C_{\pm}^{(2)} = \frac{1}{2} (C_1 \otimes \mathbb{1}_2 \pm \mathbb{1}_1 \otimes C_2), \quad (3.22)$$

$$I_{\pm}^{(2)} = \frac{1}{2} (\mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \pm C_1 \otimes C_2), \quad (3.23)$$

onde $A^{(2)}, B^{(2)}, C^{(2)}$ são operadores ortogonais de spin, isto é, matrizes de Pauli. Assim, para estados separáveis podemos escrever a relação

$$\max_{\pm} \left\{ \left\langle A_{\mp}^{(2)} \right\rangle^2 + \left\langle B_{\pm}^{(2)} \right\rangle^2 \right\} \leq \min_{\pm} \left\{ \left\langle I_{\pm}^{(2)} \right\rangle^2 - \left\langle C_{\pm}^{(2)} \right\rangle^2 \right\}. \quad (3.24)$$

Esse critério é uma condição necessária e suficiente para sistemas bipartidos.⁷² Analogamente, é possível escrever esses conjuntos de operadores para o caso tripartido. Assim temos,

$$A_{\mp}^{(3)} = \frac{1}{2} \left(A_1 \otimes A_{\mp}^{(2)} \mp B_1 \otimes B_{\mp}^{(2)} \right) \quad (3.25)$$

$$B_{\pm}^{(3)} = \frac{1}{2} \left(B_1 \otimes A_{\mp}^{(2)} \mp A_1 \otimes B_{\pm}^{(2)} \right) \quad (3.26)$$

$$C_{\pm}^{(3)} = \frac{1}{2} \left(C_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mp \mathbb{1}_1 \otimes C_{\pm}^{(2)} \right) \quad (3.27)$$

$$I_{\pm}^{(3)} = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mp C_1 \otimes C_{\pm}^{(2)} \right). \quad (3.28)$$

Podemos também escrever a equação (3.24) para o caso acima,

$$\max_{\pm} \left\{ \left\langle A_{\mp}^{(3)} \right\rangle^2 + \left\langle B_{\pm}^{(3)} \right\rangle^2 \right\} \leq \min_{\pm} \left\{ \left\langle I_{\pm}^{(3)} \right\rangle^2 - \left\langle C_{\pm}^{(3)} \right\rangle^2 \right\}. \quad (3.29)$$

3.3 Testemunhas de emaranhamento para sistemas multipartidos

Aqui vamos estender do conceito de testemunha de emaranhamento, apresentado na seção (2.6), para sistemas multipartidos. Além de detectar, essas testemunhas são capazes de distinguir as diferentes famílias de emaranhamento.⁶ Para uma melhor apresentação dos conceitos matemáticos, vamos dividir a seção para os casos tripartido e multipartido.

3.3.1 Testemunhas de emaranhamento para sistemas tripartidos

Uma testemunha de emaranhamento para a circunstância em que temos três q-bits pode ser definida de maneira equivalente ao caso apresentado para sistemas bipartidos. Assim, uma testemunha de emaranhamento deve satisfazer a seguinte propriedade para estados emaranhados ⁶

$$\text{Tr}(EW) < 0. \quad (3.30)$$

Todavia, as testemunhas tripartidas podem ser construídas como sendo

$$EW = \alpha \mathbb{1} - |\psi\rangle \langle \psi|, \quad (3.31)$$

onde α é a máxima sobreposição entre $|\psi\rangle$ e os estados biseparáveis. O cálculo de α pode ser feito da seguinte maneira ⁴⁷

$$\alpha = \max_{\text{biseparabilidades}} \left\{ \max_{\text{coef Schmidt}} [C_k]^2 \right\}. \quad (3.32)$$

Entretanto podemos definir a testemunha para emaranhamento genuinamente tripartido (considerando as biseparabilidades) ou somente tripartido (excluindo os estados biseparáveis). ²⁷ Além disso, as testemunhas podem ser definidas para alguma família de estados desejada, como por exemplo os estados GHZ e W . Em cada caso, as testemunhas detectam apenas emaranhamento para as classes no qual foram definidas, ou seja, para as famílias na qual não estão aptas a realizarem medidas, elas possuem valor esperado positivo $\text{Tr}(EW) \geq 0$. Para entendermos melhor a colocação anterior observe a Fig. (3). Temos também que em todos os casos as testemunhas de emaranhamento devem obedecer a relação da equação (3.30). Exemplos dessas testemunhas são: ²⁷

1. Estados GHZ :

$$EW_{GHZ} = \frac{3}{4} \mathbb{1} - |\psi_{GHZ}\rangle \langle \psi_{GHZ}|, \quad (3.33)$$

onde $\alpha = 3/4$ é a sobreposição máxima entre os estados GHZ e a classe de estados puros W . ⁷³

2. Estados genuinamente tripartidos :

$$EW_{Tri} = \frac{2}{3} \mathbb{1} - |\psi_W\rangle \langle \psi_W|, \quad (3.34)$$

com $\alpha = 2/3$ sendo a sobreposição entre os estados W e os genuinamente tripartidos. ⁶

Figura 3 – Esquema das testemunhas de emaranhamento, onde EW representa o caso sem os estados biseparáveis.

Fonte: Adaptada de GUHNE.²⁷

3.3.2 Testemunhas de emaranhamento para sistemas multipartidos

Para o caso geral no qual temos sistemas de N q-bits, as testemunhas de emaranhamento são definidas de forma equivalente ao apresentado na seção (3.3.1). Abaixo mostraremos alguns exemplos delas

1. **Estados GHZ multipartidos:** considere um sistema possuindo N q-bits. Então a testemunha de emaranhamento é definida como

$$EW_{GHZ}^N = \frac{1}{2} \mathbb{1} - |\psi_{GHZ}^N\rangle \langle \psi_{GHZ}^N|, \quad (3.35)$$

com $\alpha = 1/2$.⁷⁴

2. **Estados de Dicke:** para os estados de Dicke simétricos $|\psi_D^{\frac{N}{2}, N}\rangle$

$$EW_D^N = \frac{1}{2} \left(\frac{N}{N-1} \right) \mathbb{1} - |\psi_D^{\frac{N}{2}, N}\rangle \langle \psi_D^{\frac{N}{2}, N}|, \quad (3.36)$$

onde $\alpha = 1/2$.⁶⁴

3. **Estados W :** para os estados W

$$EW_W^N = \left(\frac{N-1}{N} \right) \mathbb{1} - |\psi_W^N\rangle \langle \psi_W^N|, \quad (3.37)$$

em que $\alpha = 1/2$.⁶⁴

As construções destas testemunhas de emaranhamento são apenas exemplos simples. Casos mais complexos bem como a otimização da testemunha e o uso em algumas aplicações experimentais podem ser vistos em ref.(27). Além do método apresentado acima, podemos ter outros procedimentos de construções para testemunhas de sistemas multipartidos, como por exemplo, em que utilizamos argumentos geométricos ^{75, 76} ou usamos as propriedades da função de correlação. ⁷⁷

4 Emaranhamento térmico

Neste capítulo serão apresentados alguns tópicos relacionados ao emaranhamento térmico. Primeiramente apresentaremos uma breve definição do emaranhamento térmico e posteriormente discutiremos sobre as testemunhas de emaranhamento termodinâmicas destacando as importantes testemunhas como a susceptibilidade magnética e o calor específico. Por fim, mostraremos alguns resultados experimentais presentes na literatura utilizando estas testemunhas. Parte dos resultados apresentados neste capítulo estão descritos em ref.(78), sendo reproduzidos por clareza de exposição.

4.1 Definição de emaranhamento térmico

Inicialmente pensava-se que o emaranhamento quântico somente existia em sistemas de escalas atômicas e regimes de baixas temperaturas, pois sistemas de escalas maiores possuem estruturas mais complexas com um número muito maior de átomos que podem interagir com eles e o ambiente.⁷⁸ Entretanto foi demonstrado que esse fenômeno também podem existir em sólidos para a condição de temperaturas finitas.^{16, 79} Desse modo, para sistemas que possuem emaranhamento obedecendo estas características, são denominamos de emaranhamento térmico. Estudos relacionados a essa classe específica de emaranhamento são importantes devido a necessidade do desenvolvimento de novos materiais para a computação quântica e o conhecimento dos seus limites em relação a temperatura.⁸⁰

Para apresentar uma formulação mais formal sobre o emaranhamento térmico, considere um sistema em contato com um reservatório térmico onde ambos estão na condição de equilíbrio e seus autoestados são definidos pelo Hamiltoniano $\mathcal{H}$. Neste caso, sua matriz densidade pode ser escrita da seguinte forma

$$\rho = \frac{e^{-\beta\mathcal{H}}}{Z}, \quad (4.1)$$

onde $\beta = 1/k_B T$, k_B é a constante de Boltzmann, $Z = \text{Tr}(e^{-\beta\mathcal{H}}) = \sum_i e^{-\beta E_i}$ é a função partição do sistema e E_i são as energias dos autoestados. A partir disso, podemos expandir o operador densidade na base dos autoestados da energia $|e\rangle$

$$\rho = \frac{e^{-\beta E_0}}{Z} |e_0\rangle \langle e_0| + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} |e_i\rangle \langle e_i|, \quad (4.2)$$

em que o estado $|e_0\rangle$ representa o estado fundamental. Conforme apresentado nos capítulos anteriores, se não for possível escrever a matriz densidade na forma separável, ou seja, $\rho = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i \otimes \dots \otimes \rho_N^i$, diremos que o sistema apresenta emaranhamento térmico.

Estudos foram realizados na tentativa de quantificar o emaranhamento térmico.^{81, 82} Contudo devido a dificuldade dessa quantificação, podemos utilizar as testemunhas de emaranhamento para realizar tal tarefa.

4.2 Testemunhas de emaranhamento termodinâmicas

Conforme apresentado nas sessões (2.6) e (3.3), uma testemunha de emaranhamento deve ser operacional. Para sistemas de matéria condensada a temperatura finita, podemos utilizar funções termodinâmicas como testemunhas térmicas. Várias propostas delas podem ser encontradas na literatura, como a magnetização,⁸³ a energia interna,⁵⁶ e a capacidade térmica.⁸⁴

Todavia, foi demonstrado que a susceptibilidade magnética pode ser usada como testemunha de emaranhamento,⁸⁵ e pode ser definida para N spins S . Devido a essa sua característica, a susceptibilidade é largamente aplicada em sistemas térmicos como testemunha de emaranhamento. Na seção (4.3) apresentaremos alguns resultados experimentais encontrados na literatura. Porém, temos que o Hamiltonianos $\mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_1$ devem comutar, ou seja, $[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1] = 0$, onde $\mathcal{H}_0 = \sum_{i,j=1}^N J_{ij} S_z^i S_z^j$, $\mathcal{H}_1 = h \sum_{i=1}^N S_z^i$ e h é um campo magnético externo aplicado na direção z .⁸⁵ Desse modo podemos escrever a susceptibilidade magnética como

$$\chi_z = \frac{(g\mu_B)^2}{k_B T} \Delta^2 M_z = \frac{(g\mu_B)^2}{k_B T} \left(\sum_{i,j=1}^N \langle S_z^i S_z^j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^N S_z^i \right\rangle^2 \right), \quad (4.3)$$

onde g é o fator de Landé, μ_B o magneton de Bohr e $\Delta^2 M_z$ a variância da magnetização na direção z .

Com a equação (4.3), podemos construir uma testemunha de emaranhamento térmica, para isso considere as relações abaixo para uma partícula de spin S ,

$$\langle (S_x)^2 \rangle + \langle (S_y)^2 \rangle + \langle (S_z)^2 \rangle = S(S+1), \quad (4.4)$$

e

$$\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2 + \langle S_z \rangle^2 \leq S. \quad (4.5)$$

A primeira relação é devido a $s(s+1)$ ser autovalor do operador de spin S^2 e a segunda pode ser demonstrada observando que qualquer projeção do spin em outra direção não pode ser maior que s . Subtraindo as equações (4.4) e (4.5), temos

$$\Delta^2 S = \Delta^2 S_x + \Delta^2 S_y + \Delta^2 S_z \geq s. \quad (4.6)$$

Conforme apresentado na seção (4.1), qualquer estado separável de N spins pode ser escrito como:

$$\rho = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i \otimes \dots \otimes \rho_N^i. \quad (4.7)$$

Substituindo a equação (4.7) na susceptibilidade magnética média $\bar{\chi}$, obtemos

$$\bar{\chi} = \frac{\chi_x + \chi_y + \chi_z}{3} = \frac{(g\mu_B)^2}{k_B T} (\Delta^2 M_x + \Delta^2 M_y + \Delta^2 M_z), \quad (4.8)$$

e consequentemente obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\chi} &= \frac{(g\mu_B)^2}{k_B T} \sum_n p_n \sum_{i=1}^N [(\Delta^2 S_x)_i^n + (\Delta^2 S_y)_i^n + (\Delta^2 S_z)_i^n] \\ &= \frac{(g\mu_B)^2}{k_B T} \sum_n p_n \sum_{i=1}^N \Delta^2 S_i^n \\ &\geq \frac{(g\mu_B)^2 N S}{k_B T}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Observe que na última passagem matemática utilizamos a equação (4.6) e consideramos que a cadeia possui N spins idênticos de módulo s , ou seja, $\sum_{i=1}^N \Delta^2 S_i \geq N S$. Assim sendo, definimos a testemunha de emaranhamento térmica como:

$$EW(N) = \frac{3k_B T \bar{\chi}}{(g\mu_B)^2 N S} - 1 < 0, \quad (4.10)$$

Além da susceptibilidade magnética, podemos também utilizar o calor específico como testemunha de emaranhamento.^{86, 87} A construção dessa testemunha será feita de maneira análoga ao caso da susceptibilidade magnética mostrado acima.

Considere por simplicidade um sistema de dois q-bits regidos por um Hamiltoniano $\mathcal{H}$. Deste modo, podemos definir o calor específico como

$$C = \frac{\Delta^2 \mathcal{H}}{k_B T^2} = \frac{1}{k_B T^2} (\langle \mathcal{H}^2 \rangle - \langle \mathcal{H} \rangle^2). \quad (4.11)$$

Entretanto, para a construção da testemunha, devemos utilizar a seguinte relação de incerteza, demonstrada por ref.(8)

$$\Delta^2(\mathcal{O}_A + \mathcal{O}_B) \geq U_A + U_B, \quad (4.12)$$

onde $\mathcal{O}_i$, $i = A, B$ são dois operadores positivos quaisquer e U_i , $i = A, B$ são operadores positivos representando o mínimo referente a cada subsistema. Traduzindo a relação (4.12) em palavras, ela nos diz que a variância total do sistema é maior ou igual a soma das variâncias dos subsistemas. Desta maneira, aplicando-a na equação (4.11), obtemos a testemunha de emaranhamento desejada

$$C_{AB} - C_A - C_B \geq 0. \quad (4.13)$$

Maiores detalhes sobre construção desta testemunha serão apresentados no capítulo (5).

4.3 Medidas experimentais do emaranhamento termodinâmico

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados experimentais presentes na literatura, das medidas de emaranhamento térmico utilizando a susceptibilidade magnética e o calor específico como testemunhas de emaranhamento. Ambas testemunhas são muito importantes, pois do ponto de vista experimental, são grandezas que podem ser facilmente medidas em laboratório.

4.3.1 Susceptibilidade magnética como testemunha térmica

A primeira evidência de que o emaranhamento pode existir em sólidos em escala de baixas temperaturas ($T < 1K$) foi mostrada por Gosh e colaboradores no sal isolante $\text{LiHo}_x\text{Y}_{1-x}\text{F}_4$.⁸⁸ Nesse trabalho, os autores utilizaram pela primeira vez a susceptibilidade magnética como testemunha de emaranhamento. Tratando-se agora sucintamente sobre o experimento, os pesquisadores mediram em laboratório a susceptibilidade do isolante e mostraram que ela desviava do padrão de comportamento da lei de Curie. A divergência dos dados experimentais somente pode ser explicada, levando-se em consideração o emaranhamento presente no sistema (ver Fig.(4)).

Após isso, novos experimentos surgiram mostrando importantes resultados a serem considerados. Como por exemplo, o estudo em que os pesquisadores Vértesi e Bene descobriram que o emaranhamento pode existir a temperatura ambiente, onde utilizaram o composto $\text{Na}_2\text{V}_3\text{O}_7$ e a susceptibilidade magnética como testemunha.⁸⁹ Também foram realizados outros experimentos no qual reforçaram a ideia de que a susceptibilidade pode ser usada como testemunha de emaranhamento.^{85, 90, 91}

4.3.1.1 Magnetos Moleculares

Além dos experimentos citados acima, podemos aplicar a susceptibilidade com testemunha de emaranhamento térmico em uma classe de materiais denominada magnetos moleculares.⁹² Seu comportamento pode ser aproximadamente descrito por uma cadeia de spins devido suas interações intermoleculares serem mais fracas que as intramoleculares.

Como o modelo de Heisenberg,⁹² os magnetos moleculares podem ter seu estado fundamental emaranhado. A separação de energia entre os estados excitados e emaranhado é extremamente importante, pois determina a temperatura onde o emaranhamento deixa de existir no magneto molecular. A seguir mostraremos um resultado experimental do composto $\text{Na}_2\text{Cu}_5\text{Si}_4\text{O}_{14}$ ⁹³ utilizando a equação (4.10) como testemunha térmica, mas primeiramente faremos uma breve contextualização teórica sobre o composto, maiores detalhes podem ser encontrados em ref.(94, 95, 96).

O composto possui átomos de oxigênio e de cobre (spin $s = 1/2$) divididos em dois grupos, um com dois íons e outro com três (ver Fig. (5a) e (5b)). Deste modo, sua estrutura

Figura 4 – Susceptibilidade magnética em função da temperatura.

Fonte: GOSH.⁸⁸Figura 5 – Estrutura do composto $\text{Na}_2\text{Cu}_5\text{Si}_4\text{O}_{14}$ onde os círculos azuis são os átomos de cobre e os vermelhos são os de oxigênio. (a) Visão lateral, (b) visão superior e (c) Representação do sistema dímero-trímero Fonte: SOUZA.⁹³

pode ser vista como dois conjuntos denominados dímero e trímeros, respectivamente.⁷⁸ Utilizando a notação da Fig. (5c), podemos escrever o Hamiltoniano do sistema como

$$\mathcal{H} = -J_1 (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3) - J_2 (\mathbf{S}_A \cdot \mathbf{S}_B) - J_3 (\mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_5) - g\mu_B \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}, \quad (4.14)$$

onde g é o fator de Landé, μ_B é o magneton de Bohr, $\mathbf{H}$ é o campo magnético externo, $\mathbf{S}_A = \mathbf{S}_4 + \mathbf{S}_5$ é o spin total do dímero, $\mathbf{S}_B = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3$ é o spin total do trímero e as constantes de troca J_i com $i = 1, 2, 3$ foram determinadas experimentalmente como sendo $J_1/k_B = -224.9K$, $J_2/k_B = -8.01K$ e $J_3/k_B = 40.22K$.⁹⁴

A partir do Hamiltoniano da equação (4.14), podemos utilizar a equação (4.3) para calcular a susceptibilidade magnética, pois o comutador dessas grandezas é nulo, ou

Figura 6 – Testemunha de emaranhamento baseada na susceptibilidade magnética do $\text{Na}_2\text{Cu}_5\text{Si}_4\text{O}_{14}$. Em azul $EW(N = 5)$, em vermelho $EW(N = 3)$ e verde $EW(N = 2)$.

Fonte: SOUZA.⁹³

seja, $[\mathcal{H}, S_z] = 0$. Com o cálculo da susceptibilidade em mãos, o substituímos na equação (4.10), resultando na testemunha térmica necessária para a verificação do emaranhamento presente no composto $\text{Na}_2\text{Cu}_5\text{Si}_4\text{O}_{14}$, Fig. (6)

4.3.1.2 Dímeros de spin S

O comportamento do sistema pode ser descrito pelo Hamiltoniano de Heisenberg ⁹⁷

$$\mathcal{H} = -J\mathbf{S}_A \cdot \mathbf{S}_B - g\mu_B \mathbf{H} \cdot (\mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B), \quad (4.15)$$

em que J é a constante de acoplamento, $\mathbf{S}_{A,B}$, são os operadores de spin, g é o fator de Landé, μ_B o magneton de Bohr e $\mathbf{H}$ o campo magnético externo. Para as condições em que temos $\mathbf{S}_A = \mathbf{S}_B$ e $\mathbf{H} \rightarrow 0$, podemos escrever a susceptibilidade magnética como ⁹⁷

$$\chi^{(S)}(T) = \frac{2N(g\mu_B)^2}{k_B T} \mathcal{F}^{(S)}(J, T), \quad (4.16)$$

onde N é o número de dímeros e $\mathcal{F}^{(S)}(J, T)$ é uma função em que podemos adaptar conforme os valores dos spins. Observe abaixo onde consideramos $|\mathbf{S}_A| = |\mathbf{S}_B| = S$

- $S = 5/2$:

$$\mathcal{F}^{(S=5/2)}(J, T) = \frac{e^x + 5e^{3x} + 14e^{6x} + 30e^{10x} + 55e^{15x}}{1 + 3e^x + 5e^{3x} + 7e^{6x} + 9e^{10x} + 11e^{15x}}, \quad (4.17)$$

- $S = 2$:

$$\mathcal{F}^{(S=2)}(J, T) = \frac{e^x + 5e^{3x} + 14e^{6x} + 30e^{10x}}{1 + 3e^x + 5e^{3x} + 7e^{6x} + 9e^{10x}}, \quad (4.18)$$

- $S = 3/2$:

$$\mathcal{F}^{(S=3/2)}(J, T) = \frac{e^x + 5e^{3x} + 14e^{6x}}{1 + 3e^x + 5e^{3x} + 7e^{6x}}, \quad (4.19)$$

- $S = 1$:

$$\mathcal{F}^{(S=1)}(J, T) = \frac{e^x + 5e^{3x}}{1 + 3e^x + 5e^{3x}}, \quad (4.20)$$

- $S = 1/2$:

$$\mathcal{F}^{(S=1/2)}(J, T) = \frac{e^x}{1 + 3e^x} = \frac{1}{3 + e^{-x}}, \quad (4.21)$$

em que $x = J/k_B T$. Note que para cada valor de spin retiramos os últimos termos do numerador e denominador das equações.

Como $[\mathcal{H}, S_z] = 0$, podemos usar a equação (4.3) e assim utilizarmos a susceptibilidade magnética para a construção da testemunha de emaranhamento do dímero⁹⁸

$$EW(N) = \frac{3k_B T \chi^{(S)}(T)}{(g\mu_B)^2 N S} - 1, \quad (4.22)$$

onde N é o número de partículas de spin S e $\chi^{(S)}(T)$ é dado pela equação (4.16). Como apresentado na seção (2.6), para estados emaranhados, as testemunhas de emaranhamento devem satisfazer a condição $EW(N) < 0$. Aplicando isso nas equações (4.16) e (4.22) obtemos uma condição necessário para o emaranhamento em dímeros

$$\mathcal{F}^{(S)}(J, T) < \frac{S}{3}. \quad (4.23)$$

Desta maneira, na Fig.(7) é apresentado o resultado da testemunha de emaranhamento para os diferentes valores de spin.⁹⁸

4.3.2 Calor específico como testemunha térmica

Assim como mostrado na seção (4.3.1), podemos utilizar o calor específico como testemunha de emaranhamento. Mostraremos a seguir dois exemplos contidos na literatura, em que os sistemas estão em equilíbrio térmico, para uma melhor exposição dos fatos. Os resultados serão expostos de maneira sucinta, pois nosso objetivo principal é apenas mostrar que a equação (4.11) pode ser utilizada como uma testemunha. Informações mais detalhadas sobre os experimentos podem ser encontradas nas referências indicadas no final das sessões (4.3.2.1) e (4.3.2.2)

4.3.2.1 Modelo de Ising transversal

O primeiro exemplo foi um experimento realizado por Wieśniak e Vedral. Nele os pesquisadores usaram o modelo de Ising transversal, de N spins $S = 1/2$ na presença de um campo magnético transversal H . Desta forma, seu Hamiltoniano é composto por

Figura 7 – Testemunha de emaranhamento para o dímero calculada pela equação (4.22), com a constante de acoplamento (a) $J < 0$ e (b) $J > 0$.

Fonte: SOARES-PINTO.⁹⁸

dois termos, o primeiro representando a interação da cadeia de spins e o segundo sendo o Hamiltoniano externo. Assim temos,

$$\mathcal{H}_{ising} = J \sum_{i=1}^N \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + H \sum_{i=1}^N \sigma_i^x, \quad (4.24)$$

onde J é a constante de acoplamento, σ_i^k , $k = x, z$ são as matrizes de Pauli e supomos condições de contorno periódicas $i + N = i$. Sendo assim, podemos utilizar a equação (4.11) para desenvolver a testemunha de emaranhamento (ver Fig.(8)). Desta maneira

$$C = \frac{\Delta^2 \mathcal{H}}{k_B T^2} = \frac{1}{k_B T^2} (\langle \mathcal{H}^2 \rangle - \langle \mathcal{H} \rangle^2), \quad (4.25)$$

onde $\Delta^2 \mathcal{H}_{ising} = \langle \mathcal{H}_{ising}^2 \rangle - \langle \mathcal{H}_{ising} \rangle^2$, dado por

$$\begin{aligned} \Delta^2 \mathcal{H}_{ising} = & N - \sum_{i=1}^N \langle \sigma_i^z \rangle^2 \langle \sigma_{i+1}^z \rangle^2 + 2 \sum_{i=1}^N \langle \sigma_i^z \rangle \langle \sigma_{i+1}^z \rangle - \sum_{i=1}^N \langle \sigma_i^z \rangle \langle \sigma_{i+1}^z \rangle^2 \langle \sigma_{i+2}^z \rangle \\ & - 2H \sum_{i=1}^N \langle \sigma_i^z \rangle \langle \sigma_{i+1}^z \rangle (\langle \sigma_i^x + \sigma_{i+1}^x \rangle) + H^2 \left(N - \sum_{i=1}^N \langle \sigma_i^z \rangle \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Podemos substituir a equação (4.26) em (4.25) e calcular o calor específico. Assim, foi feito um gráfico do mesmo em função da temperatura, juntamente com uma testemunha térmica para mostrar que podemos utilizar o calor específico como testemunha de emaranhamento térmico. Fizemos apenas uma breve apresentação dos resultados, informações mais detalhadas podem ser encontradas em ref.(84).

4.3.2.2 Nitrato de cobre

Outro experimento que mostrou a utilização do calor específico como testemunha térmica foi realizado por Singh, Chakraborty e outros pesquisadores. Nele foi utilizado uma

amostra nitrato de cobre $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2 \cdot 2.5\text{H}_2\text{O}$, cujo Hamiltoniano pode ser representado por

$$\mathcal{H} = J' \sum_i [\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1} + \alpha (\mathbf{S}_{i+1} \cdot \mathbf{S}_{i+2})] + g\mu_B H \sum_i S_i^z, \quad (4.27)$$

com $J' = 4J$, J é a constante de acoplamento e $\alpha = 0.27$.⁹⁹ As demais grandezas seguem as notações equivalentes a mostradas em exemplos anteriores. O calor específico foi medido em função da temperatura, para o intervalo de $T = 400\text{mK}$ até $T = 15\text{K}$ e vários valores do campo magnético externo, variando de $H = 0T$ até $H = 7T$.

Porém, devido ao fato que um estado separável também pode ser autoestado do Hamiltoniano desse sistema, os autores utilizaram a energia interna U como testemunha de emaranhamento. Ela pode ser expressada em termos do calor específico, como sendo $U = U_0 + \int C_p(T) dT$, onde U_0 é a energia do estado fundamental. Assim, a testemunha de emaranhamento para campo magnético nulo é

$$\frac{|U|}{NJ} > 1. \quad (4.28)$$

O resultado do experimento pode ser visto na Fig.(9). No gráfico abaixo, vemos uma concordância entre a testemunha de emaranhamento e a concorrência, logo podemos concluir que a equação (4.28) pode ser usada para tal propósito. Maiores informações podem ser vistas em ref.(87).

Nesse capítulo discutimos o papel das testemunhas de emaranhamento para a detecção do mesmo em sistemas térmicos. Vimos que tais testemunhas podem ser relacionadas a funções termodinâmicas capazes de serem medidas em laboratórios. No próximo capítulo discutiremos uma generalização dessas testemunhas nos baseando no conceito de covariância. Mostraremos que dependendo do observável podemos obter, para sistemas térmicos, tanto a susceptibilidade magnética quanto o calor específico como testemunhas.

Figura 8 – Testemunha de emaranhamento utilizando a equação (4.11). A curva em cinza representa a testemunha de emaranhamento, $0.4197/T^2$ e a curva preta o calor específico com $|J| = k_B = 1$, $J > 0$ e $H = 2T$.

Fonte: WIEŚNIAK.⁸⁴

Figura 9 – (a) Testemunha de emaranhamento baseada na equação (4.28) e (b) concorrência do sistema.

Fonte: SINGH.⁸⁷

5 Testemunhas de emaranhamento generalizada

Neste capítulo discutiremos a construção e aplicação das testemunhas de emaranhamento baseadas em relações de incerteza de observáveis. Primeiramente na seção (5.1) será apresentado uma introdução sobre a motivação que nos levou a criação desse critério. A seguir, na seção (5.2) será feita uma breve apresentação teórica sobre o assunto, mostrando alguns resultados presentes na literatura.^{8, 100, 101} Depois na seção (5.3), mostraremos os cálculos realizados por nós, para a construção da testemunha utilizando a covariância de um observável de spin geral contendo interação entre os subsistemas. Ainda nessa seção, foi aplicado a redução da covariância a variância do observável, pois esta é mais adequada a aplicação nos modelos físicos propostos. Os cálculos foram feitos tanto para o caso de sistemas bipartidos quanto sua extensão para o tripartido. Por fim, na seção (5.5) serão apresentados os resultados do critério aplicados aos modelos de Ising⁹ e Heisenberg: XYZ ,¹⁰ XY simétrico, XY antisimétrico,¹¹ XXZ ¹² e XXX ¹³ utilizando a susceptibilidade e o calor específico^{*} como testemunhas de emaranhamento.

5.1 Introdução

A identificação e quantificação do emaranhamento é um dos principais problemas da teoria da informação quântica. Nos últimos anos foi descoberto que o emaranhamento poderia ser usado em aplicações tecnológicas como criptografia quântica^{102, 103} e processamento de sinais.^{104, 105} Essas descobertas, geraram uma série de estudos teóricos e experimentais na tentativa de entender melhor o emaranhamento, pois para a implementação dele como recurso tecnológico, é necessário possuímos "ferramentas" capazes de medir o emaranhamento quântico.^{27, 24, 8} Isso acarretou na criação de diversos critérios de medição, porém até hoje nenhuma proposta se mostrou geral, capaz de medir qualquer situação de sistemas emaranhados. No caso de sistemas bipartidos com um certo grau de simetria, já são conhecidos excelentes quantificadores como o emaranhamento de formação e concorrência (ver seção (2.5.3)). Entretanto, para sistemas tripartidos e multipartidos temos poucas propostas devido ao alto grau de complexidade dos mesmos. Um dos mais famosos critérios, foi proposto em 2003 pelos pesquisadores Hofmann e Takeuchi.⁸ Para a construção desse critério, os autores utilizaram relações de incerteza baseadas na variância de observáveis.

* A susceptibilidade e o calor específico citados não são as quantidades termodinâmicas usuais, são apenas grandezas construídas a partir da variância da magnetização e da energia do sistema, respectivamente.

Nosso critério seguiu a mesma linha de raciocínio no qual construímos uma testemunha de emaranhamento utilizando a covariância de um observável de spin. Entretanto, foi realizado uma generalização do critério onde incluímos os termos de interações entre os spins no desenvolvimento. A grande vantagem dessa testemunha se deve ao fato dela poder ser aplicada a sistemas bipartidos, tripartidos ou ainda multipartidos. Para a aplicação em sistemas físicos reais, reduzimos a covariância do observável na variância, possibilitando assim o uso da susceptibilidade e o calor específico como testemunhas de emaranhamento, conforme discutido na seção (4.2).

A seguir vamos discutir um pouco mais sobre o critério criado por Hofmann e Takeuchi e também sobre outros critérios que se baseiam na ideia da variância do observável.

5.2 Critérios baseados em relações de incertezas

Primeiramente vamos discutir o critério de emaranhamento proposto em 2003 pelos pesquisadores Hofmann e Takeuchi. Este critério mostra que a precisão para estados locais de um sistema quântico, podem ser definidos por relações de incertezas baseadas na variância de um observável pertencente a esse sistema. Desta maneira, a violação dessas relações podem ser usadas como testemunhas de emaranhamento.⁸ A seguir, apresentaremos de maneira breve, os resultados obtidos pelos pesquisadores.

Considere um sistema quântico descrito por um operador densidade ρ e possuindo um conjunto de operadores Hermitianos $\{A_i\}$. Assim, a incerteza para um estado quântico é definido como

$$\Delta^2 A_i = \langle (A_i - \langle A_i \rangle)^2 \rangle = \langle A_i^2 \rangle - \langle A_i \rangle^2, \quad (5.1)$$

onde $\langle A_i \rangle = \text{Tr}(\rho A_i)$. Podemos ainda definir outro operador $U > 0$ que representa o mínimo da incerteza para qualquer estado quântico. Desse modo, podemos escrever

$$\sum_i \Delta^2 A_i \geq U, \quad (5.2)$$

desde que os operadores não compartilhem um autoestado comum a ambos. Todavia, esses resultados podem ser facilmente estendidos a sistemas bipartidos. Desse modo, considere um sistema bipartido regido por um operador densidade ρ_{AB} composto por dois subsistemas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ com observáveis A_i e B_i , respectivamente. Usando a equação (5.2) podemos escrever a relação de incerteza para o sistema

$$\sum_i \Delta^2 (A_i \otimes \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \otimes B_i) \geq U_A + U_B, \quad (5.3)$$

$$\text{com } \rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B, \quad \sum_i p_i = 1 \text{ e } p_i \geq 0, \quad (5.4)$$

onde $\mathbb{1}_k$, $k = A, B$ é o operador identidade em relação ao subsistema k . Observe que a equação (5.3) é construída para estados separáveis, então qualquer estado que violar a desigualdade é considerado emaranhado.

Podemos aplicar esse critério de emaranhamento a um sistema de dois spins. Assim, usando as equações (4.4) e (4.5) descritas abaixo

$$\langle (S_x)^2 \rangle + \langle (S_y)^2 \rangle + \langle (S_z)^2 \rangle = s(s+1), \quad (5.5)$$

$$\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2 + \langle S_z \rangle^2 \leq s, \quad (5.6)$$

podemos escrever a incerteza do spin S

$$\begin{aligned} \Delta^2 S &= \Delta^2 \langle S_x \rangle + \Delta^2 \langle S_y \rangle + \Delta^2 \langle S_z \rangle \\ &= \underbrace{\langle S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 \rangle}_{=s(s+1)} - \underbrace{(\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2 + \langle S_z \rangle^2)}_{\leq s^2} \geq s. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Extendendo resultado da equação (5.7) para o sistema de dois spins, temos

$$\Delta^2 (\langle S_A^x \rangle + \langle S_B^x \rangle) + \Delta^2 (\langle S_A^y \rangle + \langle S_B^y \rangle) + \Delta^2 (\langle S_A^z \rangle + \langle S_B^z \rangle) \geq 2s. \quad (5.8)$$

As relações de incerteza apresentadas nas equações (5.7) para sistemas de um spin e (5.8) para dois, são úteis pois não requerem uma caracterização completa da estatística do operador densidade.⁸

Além do exemplo mostrado acima, podemos aplicar essas relações de incerteza a outros operadores, como por exemplo, os operadores de momento angular. Esses outros exemplos podem ser encontrados com maiores detalhes em ref.(8).

Outro critério utilizando relações de incerteza foi proposto em 2010 pelo pesquisador Huang. Neste artigo, o autor também usa a variância de observáveis arbitrários para a detecção de emaranhamento para o caso de espaços dimensionais finito e infinito.¹⁰¹ Abaixo, mostraremos resumidamente seus resultados.

Assim, considere um espaço de Hilbert n -dimensional denotado por $\mathcal{E}$, duas bases ortonormais $\{|a_i\rangle\}$ e $\{|b_j\rangle\}$, com $i, j = 1, 2, \dots, n$ e dois operadores Hermitianos definidos por

$$A = \sum_{i=1}^n a_i |a_i\rangle \langle a_i|, \quad (5.9)$$

$$B = \sum_{j=1}^n b_j |b_j\rangle \langle b_j|, \quad (5.10)$$

onde $A |a_i\rangle = a_i |a_i\rangle$ e $B |b_j\rangle = b_j |b_j\rangle$.

Para um estado quântico $|\psi\rangle \in \mathcal{E}$, a variância e a entropia de Shannon são definidas como

$$\Delta^2 A = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2, \quad (5.11)$$

$$S_A = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i. \quad (5.12)$$

Então para qualquer $\alpha > 0$, temos usando a desigualdade $e^x > 1 + x$

$$\Delta^2 A \geq \frac{1}{\alpha} \left(S_A - \ln \sum_{k=1}^n e^{-\alpha(a_k - \beta_A)^2} \right), \quad (5.13)$$

onde $a_k = \langle a_k | A | a_k \rangle$, $\beta_A = \langle \psi | A | \psi \rangle$ e para o operador B a desigualdade é definida de forma similar. Para um sistema bipartido, podemos somar as desigualdades definidas pela equação (5.13) e obter

$$\Delta^2 A + \Delta^2 B \geq \frac{1}{\alpha} \left(C - \ln \sum_{k=1}^n e^{-\alpha(a_k - \beta_A)^2} - \ln \sum_{k=1}^n e^{-\alpha(b_k - \beta_B)^2} \right), \quad (5.14)$$

onde $S_A + S_B \geq C$. Podemos ainda generalizar esse critério da equação (5.14) para um sistema possuindo m operadores Hermitianos definidos por $\{A^l\}$, com $l = 1, 2, \dots, m$

$$\sum_{l=1}^m \Delta^2 A^l \geq \frac{1}{\alpha} \left(C - \sum_{l=1}^m \ln \sum_{k=1}^n e^{-\alpha(a_k^l - \beta_l)^2} \right), \quad (5.15)$$

com $\sum_{l=1}^m S_A^l \geq C$ e $\alpha > 0$.

A seguir, para deixar mais claro as ideias propostas desse critério da equação (5.15), vamos mostrar dois exemplos de aplicações em sistemas físicos.

1. Sejam σ_i , $i = x, y, z$ as matrizes de Pauli e $\alpha = 0.597$, aplicando a equação (5.15) implica

$$\Delta^2 \sigma_x + \Delta^2 \sigma_y + \Delta^2 \sigma_z > 1.7243, \quad (5.16)$$

onde usamos o fato que $C = 2 \ln 2$.

2. Considere os autoestados das matrizes ξ_k , com $k = 1, 2, 3, 4$ definidas como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{e^{i\pi/3}}{\sqrt{3}} & 0 & e^{i5\pi/3} & e^{i4\pi/3} \\ 1 & 0 & e^{i3\pi/3} & \\ e^{i\pi} & e^{i2\pi} & 0 & \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{i\pi/6}}{\sqrt{3}} & 0 & e^{i5\pi/3} & e^{i4\pi/3} \\ 1 & 0 & e^{i3\pi/3} & \\ e^{i\pi/3} & e^{i2\pi/3} & 0 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{e^{-i\pi/6}}{\sqrt{3}} & 0 & e^{-i5\pi/3} & e^{-i4\pi/3} \\ 1 & 0 & e^{-i3\pi/3} & \\ e^{-i\pi/3} & e^{-i2\pi/3} & 0 & \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Usando a equação (5.15) obtemos o critério para a separabilidade dos autoestados

$$\sum_{k=1}^4 \Delta^2 \xi_k > 0.9083, \quad (5.18)$$

com $C = 4 \ln 2$.

Um ponto importante a ser destacado é que nos exemplos mostrados acima, os observáveis utilizados no critério em questão são uma classe específica denominada de bases mutuamente imparciais (*MUBs*)[†]. Para o cálculo da constante C da equação (5.15) nos exemplos, foi usado a seguinte equação¹⁰⁶

$$\sum_{k=1}^{n+1} \Delta^2 S_A^k \geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \ln \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \ln \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil. \quad (5.19)$$

Vale ressaltar que apenas mostramos o critério desenvolvido por Huang de forma simplista, não exibindo todos os resultados e passagens algébricas das equações desenvolvidos por ele. Ainda em seu artigo, há também outros exemplos interessantes que podem ser consultados. Para maiores esclarecimentos veja ref.(101).

5.3 Testemunha de emaranhamento generalizada para sistemas bipartidos

Nesta seção primeiramente será demonstrado um critério utilizando uma relação de incerteza baseada na covariância de um observável de dois q-bits, porém sem o termo de interação. Após, será demonstrado o critério desenvolvido por nós. Assim como mostrado na seção (5.2), nosso critério também faz uso de relações de incertezas, onde consideramos observáveis gerais de spins. Um aspecto importante a ser mencionado é que nossos resultados são mais gerais do que os presentes na literatura, pois foi adicionado termos de interações entre os spins no desenvolvimento das equações. Assim, nosso objetivo final é aplicar esse resultado em testemunhas térmicas baseadas na susceptibilidade e no calor específico, já que os mesmos podem ser escritos como uma variância, conforme visto na seção (4.2). Até o presente momento, nenhum critério de emaranhamento com essa propriedade foi encontrado na literatura, fazendo com que nosso resultado seja novo.

5.3.1 Demonstração da relação de incerteza

A covariância de dois observáveis X_k e X_l é definida como

$$\text{cov}(X_k, X_l) = \langle X_k X_l \rangle - \langle X_k \rangle \langle X_l \rangle. \quad (5.20)$$

[†] Duas bases ortonormais $\{|a_i\rangle\}$ e $\{|b_j\rangle\}$ são ditas bases mutuamente imparciais (do inglês *Mutually Unbiased Bases*) se obedecerem a relação $|\langle a_i | b_j \rangle| = 1/\sqrt{n}$ para qualquer $1 \leq i, j \leq n$.

Para sistemas bipartidos podemos escrever o observável X_k e o operador densidade, sendo

$$X_k = A_k \otimes \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \otimes B_k, \quad (5.21)$$

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i, \quad \sum_i p_i = 1, \text{ e } p_i \geq 0, \quad (5.22)$$

onde o observável X_l é definido de maneira análoga em que basta trocarmos o índice $k \rightarrow l$. Com essas definições, é possível calcular o primeiro termo do lado direito da equação (5.20)

$$\begin{aligned} \langle X_k X_l \rangle &= \text{Tr}(\rho_{AB} X_k X_l) \\ &= \text{Tr} \left[\sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i (A_k \otimes \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \otimes B_k) (A_l \otimes \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \otimes B_l) \right] \\ &= \langle A_k, A_l \rangle_i + \langle B_k, B_l \rangle_i + \langle A_k \rangle_i \langle B_l \rangle_i + \langle A_l \rangle_i \langle B_k \rangle_i, \end{aligned} \quad (5.23)$$

e similarmente o segundo termo

$$\begin{aligned} \langle X_k \rangle \langle X_l \rangle &= \text{Tr}(\rho_{AB} X_k) \text{Tr}(\rho_{AB} X_l) \\ &= \text{Tr} \left[\sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i (A_k \otimes \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \otimes B_k) \right] \text{Tr} \left[\sum_j p_j \rho_A^j \otimes \rho_B^j (A_l \otimes \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \otimes B_l) \right] \\ &= (\langle A_k \rangle_i + \langle B_k \rangle_i) (\langle A_l \rangle_j + \langle B_l \rangle_j) \\ &= \langle A_k \rangle_i \langle A_l \rangle_j + \langle B_k \rangle_i \langle B_l \rangle_j + \langle A_k \rangle_i \langle B_l \rangle_j + \langle A_l \rangle_j \langle B_k \rangle_i. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Deste modo, podemos substituir as equações (5.23) e (5.24) em (5.20), resultando

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_k, X_l) &= \underbrace{\langle A_k A_l \rangle_i - \langle A_k \rangle_i \langle A_l \rangle_j}_{\text{cov}(A_k, A_l)} + \underbrace{\langle B_k B_l \rangle_i - \langle B_k \rangle_i \langle B_l \rangle_j}_{\text{cov}(B_k, B_l)} \\ &\quad + \underbrace{\langle A_k \rangle_i \langle B_l \rangle_j - \langle A_k \rangle_i \langle B_l \rangle_j + \langle A_l \rangle_j \langle B_k \rangle_i - \langle A_l \rangle_j \langle B_k \rangle_i}_{\geq 0}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

resultando finalmente na desigualdade desejada

$$\text{cov}(X_k X_l) \geq \text{cov}(A_k, A_l) + \text{cov}(B_k, B_l). \quad (5.26)$$

Podemos interpretar esse resultado como sendo: a covariância total do sistema é maior ou igual a soma das variâncias dos subsistemas. Além disso, podemos fazer a conexão entre as equações (5.3) e (5.26), para isso, basta escolher $U_\delta = \text{cov}(\delta_k, \delta_l) \mid \delta = A, B$. Esta demonstração foi feita, pois na próxima seção será usado seu resultado para a construção da nossa testemunha térmica geral.

5.3.2 Resultado geral com interação entre os spins

Vamos agora construir uma testemunha de emaranhamento geral adicionada de uma interação entre os spins. Deste modo, considere um sistema de dois q-bits, onde temos um observável geral de spin $\mathcal{O}_{AB}^k$ e um operador densidade bipartido ρ_{AB} descritos da seguinte forma

$$\mathcal{O}_{AB}^k = \boldsymbol{\xi}_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k + \boldsymbol{\xi}_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k + \mathbf{S}_A^k \cdot \boldsymbol{\xi}_3^k \cdot \mathbf{S}_B^k, \quad (5.27)$$

$$\rho_{AB} = \sum_n p_n \rho_A^n \otimes \rho_B^n, \quad \sum_n p_n = 1, \text{ e } p_n \geq 0 \quad (5.28)$$

onde $\mathbf{S}_{A,B}$ é o operador de spin. Abaixo temos as definições das grandezas apresentadas

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{A,B}^k &= \left(S_{A,B}^{x,k}, S_{A,B}^{y,k}, S_{A,B}^{z,k} \right), \\ \boldsymbol{\xi}_{1,2}^k &= \left(\xi_{1,2}^{x,k}, \xi_{1,2}^{y,k}, \xi_{1,2}^{z,k} \right), \\ \boldsymbol{\xi}_3^k &= \begin{pmatrix} J_{xx}^k & J_{xy}^k & J_{xz}^k \\ J_{yx}^k & J_{yy}^k & J_{yz}^k \\ J_{zx}^k & J_{zy}^k & J_{zz}^k \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Calculando somente o termo de interação da equação (5.27), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_A^k \cdot \boldsymbol{\xi}_3^k \cdot \mathbf{S}_B^k &= \begin{pmatrix} S_A^{x,k} & S_A^{y,k} & S_A^{z,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{xx}^k & J_{xy}^k & J_{xz}^k \\ J_{yx}^k & J_{yy}^k & J_{yz}^k \\ J_{zx}^k & J_{zy}^k & J_{zz}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_B^{x,k} \\ S_B^{y,k} \\ S_B^{z,k} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i,j=x,y,z} J_{ij}^k S_{A,k}^i S_{B,k}^j. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Nosso objetivo é calcular a covariância do observável $\mathcal{O}_{AB}^k$, definida por

$$\text{cov}(\mathcal{O}_{AB}^k, \mathcal{O}_{AB}^l) = \langle \mathcal{O}_{AB}^k \mathcal{O}_{AB}^l \rangle - \langle \mathcal{O}_{AB}^k \rangle \langle \mathcal{O}_{AB}^l \rangle, \quad (5.31)$$

em que para o observável $\mathcal{O}_{AB}^k$, basta trocar o índice $k \rightarrow l$. Desta forma, calculando primeiramente a média do observável $\mathcal{O}_{AB}^k$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{AB}^k \rangle &= \text{Tr}(\rho_{AB} \mathcal{O}_{AB}^k) \\ &= \text{Tr} \left[\sum_n p_n \rho_A^n \otimes \rho_B^n \left(\boldsymbol{\xi}_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k + \boldsymbol{\xi}_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k + \sum_{i,j=x,y,z} J_{ij}^k S_{A,k}^i S_{B,k}^j \right) \right] \\ &= \boldsymbol{\xi}_1^k \cdot \langle \mathbf{S}_A^k \rangle_n + \boldsymbol{\xi}_2^k \cdot \langle \mathbf{S}_B^k \rangle_n + \sum_{i,j=x,y,z} J_{ij}^k \langle S_{A,k}^i \rangle_n \langle S_{B,k}^j \rangle_n, \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde embutimos o termo $\sum_n p_n$ dentro da média e utilizamos a propriedade do traço $\text{Tr}(u \otimes v) = \text{Tr}(u) \otimes \text{Tr}(v)$, sendo u e v dois observáveis quaisquer. Com o cálculo da média feito, estamos aptos a escrever o segundo termo do lado direito da equação (5.31)

$$\langle \mathcal{O}_{AB}^k \rangle \langle \mathcal{O}_{AB}^l \rangle = \boldsymbol{\xi}_1^k \cdot \langle \mathbf{S}_A^k \rangle_n \boldsymbol{\xi}_1^l \cdot \langle \mathbf{S}_A^l \rangle_u + \boldsymbol{\xi}_1^k \cdot \langle \mathbf{S}_A^k \rangle_n \boldsymbol{\xi}_2^l \cdot \langle \mathbf{S}_B^l \rangle_u$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{r,s=x,y,z} J_{rs}^l \xi_1^k \cdot \langle \mathbf{S}_A^k \rangle_n \langle S_{A,l}^r \rangle_u \langle S_{B,l}^s \rangle_u \\
& + \xi_2^k \cdot \langle \mathbf{S}_B^k \rangle_n \xi_1^l \cdot \langle \mathbf{S}_A^l \rangle_u + \xi_2^k \cdot \langle \mathbf{S}_B^k \rangle_n \xi_2^l \cdot \langle \mathbf{S}_B^l \rangle_u \\
& + \sum_{r,s=x,y,z} J_{rs}^l \xi_2^k \cdot \langle \mathbf{S}_B^k \rangle_n \langle S_{A,l}^r \rangle_u \langle S_{B,l}^s \rangle_u \\
& + \sum_{i,j=x,y,z} J_{ij}^k \xi_1^k \cdot \langle \mathbf{S}_A^l \rangle_u \langle S_{A,k}^i \rangle_l \langle S_{B,k}^j \rangle_l + \sum_{i,j=x,y,z} J_{ij}^k \xi_2^l \cdot \langle \mathbf{S}_B^l \rangle_u \langle S_{A,k}^i \rangle_n \langle S_{B,k}^j \rangle_n \\
& + \sum_{i,j=x,y,z} J_{ij}^k \sum_{r,s=x,y,z} J_{rs}^l \langle S_{A,k}^i \rangle_n \langle S_{B,k}^j \rangle_n \langle S_{A,l}^r \rangle_u \langle S_{B,l}^s \rangle_u. \tag{5.33}
\end{aligned}$$

De forma equivalente, podemos calcular também o primeiro termo do lado direito da equação (5.31)

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{O}_{AB}^k \mathcal{O}_{AB}^l \rangle &= \text{Tr}(\rho_{AB} \mathcal{O}_{AB}^k \mathcal{O}_{AB}^l) \\
&= \langle (\xi_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k) (\xi_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l) \rangle_n + \xi_1^k \cdot \langle \mathbf{S}_A^k \rangle_n \xi_2^l \cdot \langle \mathbf{S}_B^l \rangle_n \\
&+ \sum_{r,s=x,y,z} J_{rs}^l \langle (\xi_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k) S_{A,l}^r \rangle_n \langle S_{B,l}^s \rangle_n \\
&+ \xi_2^k \cdot \langle \mathbf{S}_B^k \rangle_n \xi_1^l \cdot \langle \mathbf{S}_A^l \rangle_n + \langle (\xi_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k) (\xi_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l) \rangle_n \\
&+ \sum_{r,s=x,y,z} J_{rs}^l \langle (\xi_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k) S_{B,l}^r \rangle_n \langle S_{A,l}^s \rangle_n \\
&+ \sum_{i,j=x,y,z} J_{ij}^k \langle S_{A,k}^i (\xi_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l) \rangle_n \langle S_{B,k}^j \rangle_n + \sum_{i,j=x,y,z} J_{ij}^k \langle S_{B,k}^i (\xi_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l) \rangle_n \langle S_{A,k}^j \rangle_n \\
&+ \sum_{i,j=x,y,z} J_{ij}^k \sum_{r,s=x,y,z} J_{rs}^l \langle S_{A,k}^i S_{A,l}^r \rangle_n \langle S_{B,k}^j S_{B,l}^s \rangle_n. \tag{5.34}
\end{aligned}$$

Assim, substituindo as equações (5.34) e (5.33) na covariância (5.31), obtemos

$$\begin{aligned}
\text{cov}(\mathcal{O}_{AB}^k \mathcal{O}_{AB}^l) &= \underbrace{\langle (\xi_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k) (\xi_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l) \rangle_n - \xi_1^k \cdot \langle \mathbf{S}_A^k \rangle_n \xi_1^l \cdot \langle \mathbf{S}_A^l \rangle_u}_{=\text{COV}(\xi_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k, \xi_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l)} \\
&+ \underbrace{\langle (\xi_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k) (\xi_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l) \rangle_n - \xi_2^k \cdot \langle \mathbf{S}_B^k \rangle_n \xi_2^l \cdot \langle \mathbf{S}_B^l \rangle_u}_{=\text{COV}(\xi_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k, \xi_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l)} \\
&+ \underbrace{\sum_{\substack{i,j=x,y,z \\ r,s=x,y,z}} J_{ij}^k J_{rs}^l \langle S_{A,k}^i S_{A,l}^r \rangle_n \langle S_{B,k}^j S_{B,l}^s \rangle_n - \sum_{\substack{i,j=x,y,z \\ r,s=x,y,z}} J_{ij}^k J_{rs}^l \langle S_{A,k}^i \rangle_n \langle S_{B,k}^j \rangle_n \langle S_{A,l}^r \rangle_u \langle S_{B,l}^s \rangle_u}_{=\sum_{\substack{i,j=x,y,z \\ r,s=x,y,z}} J_{ij}^k J_{rs}^l \text{COV}(S_{A,k}^i S_{A,l}^r, S_{B,k}^j S_{B,l}^s)} \\
&+ \xi_1^k \cdot \langle \mathbf{S}_A^k \rangle_n \xi_2^l \cdot \langle \mathbf{S}_B^l \rangle_n - \xi_1^k \cdot \langle \mathbf{S}_A^k \rangle_n \xi_2^l \cdot \langle \mathbf{S}_B^l \rangle_u \\
&+ \xi_2^k \cdot \langle \mathbf{S}_B^k \rangle_n \xi_1^l \cdot \langle \mathbf{S}_A^l \rangle_n - \xi_2^k \cdot \langle \mathbf{S}_B^k \rangle_n \xi_1^l \cdot \langle \mathbf{S}_A^l \rangle_u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,j=x,y,z} J_{ij}^k \langle S_{A,k}^i (\boldsymbol{\xi}_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l) \rangle_n \langle S_{B,k}^j \rangle_n - \boldsymbol{\xi}_1^k \cdot \langle \mathbf{S}_A^l \rangle_u \sum_{i,j=x,y,z} J_{ij}^k \langle S_{A,k}^i \rangle_l \langle S_{B,k}^j \rangle_l \\
& + \sum_{i,j=x,y,z} J_{ij}^k \langle S_{B,k}^i (\boldsymbol{\xi}_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l) \rangle_n \langle S_{A,k}^j \rangle_n - \boldsymbol{\xi}_2^k \cdot \langle \mathbf{S}_B^l \rangle_u \sum_{i,j=x,y,z} J_{ij}^k \langle S_{A,k}^i \rangle_n \langle S_{B,k}^j \rangle_n \\
& + \sum_{r,s=x,y,z} J_{rs}^l \langle (\boldsymbol{\xi}_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k) S_{A,l}^r \rangle_n \langle S_{B,l}^s \rangle_n - \boldsymbol{\xi}_1^k \cdot \langle \mathbf{S}_A^k \rangle_n \sum_{r,s=x,y,z} J_{rs}^l \langle S_{A,l}^r \rangle_u \langle S_{B,l}^s \rangle_u \\
& + \sum_{r,s=x,y,z} J_{rs}^l \langle (\boldsymbol{\xi}_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k) S_{B,l}^r \rangle_n \langle S_{A,l}^s \rangle_n - \boldsymbol{\xi}_2^k \cdot \langle \mathbf{S}_B^k \rangle_n \sum_{r,s=x,y,z} J_{rs}^l \langle S_{A,l}^r \rangle_u \langle S_{B,l}^s \rangle_u.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Utilizando as equações (5.35) e (5.25), obtemos a relação de incerteza geral para sistemas bipartidos com interação entre os spins

$$\begin{aligned}
\text{cov}(\mathcal{O}_{AB}^k \mathcal{O}_{AB}^l) & \geq \text{cov}(\boldsymbol{\xi}_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k, \boldsymbol{\xi}_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l) + \text{cov}(\boldsymbol{\xi}_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k, \boldsymbol{\xi}_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l) \\
& + \sum_{i,j} \sum_{r,s} J_{ij}^k J_{rs}^l \text{cov}(S_{A,k}^i S_{A,l}^r, S_{B,k}^j S_{B,l}^s),
\end{aligned} \tag{5.36}$$

onde $\text{cov}(S_{A,k}^i S_{A,l}^r, S_{B,k}^j S_{B,l}^s) = \langle S_{A,k}^i S_{A,l}^r \rangle_n \langle S_{B,k}^j S_{B,l}^s \rangle_n - \langle S_{A,k}^i \rangle_n \langle S_{B,k}^j \rangle_n \langle S_{A,l}^r \rangle_u \langle S_{B,l}^s \rangle_u$ é definida como a covariância do termo de interação e as somas $\sum_{i,j} \{\dots\}$, $\sum_{r,s} \{\dots\}$ são feitas para $i, j = (x, y, z)$ e $r, s = (x, y, z)$, respectivamente.

Todavia, podemos construir uma testemunha de emaranhamento geral com a equação (5.36). Deste modo temos

$$\begin{aligned}
EW_{AB} & = \text{cov}(\mathcal{O}_{AB}^k \mathcal{O}_{AB}^k) - \text{cov}(\boldsymbol{\xi}_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k, \boldsymbol{\xi}_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l) - \text{cov}(\boldsymbol{\xi}_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k, \boldsymbol{\xi}_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l) \\
& - \sum_{i,j} \sum_{r,s} J_{ij}^k J_{rs}^l \text{cov}(S_{A,k}^i S_{A,l}^r, S_{B,k}^j S_{B,l}^s) \geq 0,
\end{aligned} \tag{5.37}$$

onde qualquer sistema que violar a desigualdade, é dito possuir estados emaranhados. Entretanto, podemos reduzir o resultado da equação (5.37) a variância dos observáveis. Para isso, basta aplicarmos a condição $k = l$ nos índices, gerando outra testemunha de emaranhamento geral

$$EW_{AB} = \Delta^2(\mathcal{O}_{AB}) - \Delta^2(\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \mathbf{S}_A) - \Delta^2(\boldsymbol{\xi}_2 \cdot \mathbf{S}_B) - \sum_{i,j} \sum_{r,s} J_{ij} J_{rs} \Delta^2(S_A^i S_A^r, S_B^j S_B^s) < 0 \tag{5.38}$$

em que $\Delta^2(\dots)$ representa a variância do observável.

É importante mencionar que com critério da testemunha de emaranhamento para sistemas bipartidos da equação (5.38), podemos aplicá-lo a funções baseadas na variância de observáveis, pois como mostrado anteriormente na seção (4.2), a susceptibilidade e o calor específico podem ser escritos como uma variância de observáveis e usadas como testemunhas de emaranhamento térmicas.

5.3.3 Aplicação a susceptibilidade

Vamos agora aplicar nosso resultado da equação (5.38) a susceptibilidade. Para isso, utilizaremos a equação (4.3) escrita abaixo para uma melhor clareza de apresentação

$$\chi_{AB} = \frac{1}{k_B T} \Delta^2 M_{AB} = \frac{1}{k_B T} (\langle M_{AB}^2 \rangle - \langle M_{AB} \rangle^2). \quad (5.39)$$

Para escrevermos a magnetização M_{AB} do sistema, basta adaptarmos o observável $\mathcal{O}_{AB}$ e suas definições descritas nas equações (5.27) e (5.29). Assim, devemos escolher as quantidades como

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{AB} &\rightarrow M_{AB} \\ M_{AB} &= \boldsymbol{\xi}_1 \cdot \mathbf{S}_A + \boldsymbol{\xi}_2 \cdot \mathbf{S}_B, \\ \mathbf{S}_{A,B} &= (S_{A,B}^x, S_{A,B}^y, S_{A,B}^z), \\ \boldsymbol{\xi}_{1,2} &= (\xi_{1,2}^x, \xi_{1,2}^y, \xi_{1,2}^z), \\ \boldsymbol{\xi}_3^k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Desse modo, podemos escrever a magnetização total M_{AB} do sistema e dos subsistemas como sendo

$$\begin{aligned} M_{AB} &= (\xi_1^x, \xi_1^y, \xi_1^z) \cdot (S_A^x, S_A^y, S_A^z) + (\xi_2^x, \xi_2^y, \xi_2^z) \cdot (S_B^x, S_B^y, S_B^z) \\ &= \sum_{i=x,y,z} (\xi_1^i S_A^i + \xi_2^i S_B^i), \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$M_A = \boldsymbol{\xi}_1 \cdot \mathbf{S}_A = \sum_{i=x,y,z} \xi_1^i S_A^i, \quad (5.42)$$

$$M_B = \boldsymbol{\xi}_2 \cdot \mathbf{S}_B = \sum_{i=x,y,z} \xi_2^i S_B^i, \quad (5.43)$$

Substituindo as equações acima na (5.39), estamos capazes de escrever a susceptibilidade total do sistema χ_{AB} e dos subsistemas χ_A e χ_B

$$\begin{aligned} \chi_{AB} &= \frac{1}{k_B T} \Delta^2 M_{AB} = \frac{(g\mu_B)^2}{k_B T} \Delta^2 \left(\sum_{i=x,y,z} \xi_1^i S_A^i + \xi_2^i S_B^i \right) \\ &= \frac{(g\mu_B)^2}{k_B T} \sum_{i=x,y,z} [\Delta^2 (\xi_1^i S_A^i) + \Delta^2 (\xi_2^i S_B^i)] = \frac{(g\mu_B)^2}{k_B T} \Delta^2 (\mathcal{O}_{AB}), \end{aligned}$$

$$\chi_A = \frac{1}{k_B T} \Delta^2 M_A = \frac{(g\mu_B)^2}{k_B T} \sum_{i=x,y,z} \Delta^2 (\xi_1^i S_A^i) = \frac{(g\mu_B)^2}{k_B T} \Delta^2 (\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \mathbf{S}_A),$$

$$\chi_B = \frac{1}{k_B T} \Delta^2 M_B = \frac{(g\mu_B)^2}{k_B T} \sum_{i=x,y,z} \Delta^2 (\xi_2^i S_B^i) = \frac{(g\mu_B)^2}{k_B T} \Delta^2 (\boldsymbol{\xi}_2 \cdot \mathbf{S}_B), \quad (5.44)$$

em que para os subsistemas utilizamos a definição da susceptibilidade como sendo $\chi_{A,B} = (1/k_B T) \Delta^2 M_{A,B}$. Usando os resultados acima e os aplicando na equação (5.38), temos finalmente a testemunha de emaranhamento térmico usando a susceptibilidade para sistemas de dois q-bits, que para estados emaranhados obedece a desigualdade

$$\chi_{AB} - \chi_A - \chi_B < 0. \quad (5.45)$$

Uma grande vantagem dessa testemunha baseada na susceptibilidade é que ela não depende do Hamiltoniano do sistema, podendo ser quantificada em experimentos feitos em laboratórios. Suas aplicações em sistemas térmicos serão feitas posteriormente na seção (5.5). A seguir faremos a construção de outra testemunha térmica utilizando a equação (5.38), baseada no calor específico, pois desse modo temos que levar em conta o termo de interação entre os spins.

5.3.4 Aplicação ao calor específico

De maneira análoga ao que foi demonstrado na seção (5.3.3), faremos a construção de uma testemunha térmica usando o calor específico. Então, considere um sistema bipartido governado por um Hamiltoniano $\mathcal{H}_{AB}$. Segundo a equação (4.11) o calor específico é definido como

$$C_{AB} = \frac{1}{k_B T^2} \Delta^2 \mathcal{H}_{AB} = \frac{1}{k_B T^2} (\langle \mathcal{H}_{AB}^2 \rangle - \langle \mathcal{H}_{AB} \rangle^2). \quad (5.46)$$

Novamente temos que adaptar as equações do observável $\mathcal{O}_{AB}$ e suas definições presentes nas equações (5.27) e (5.29). Todavia, as adaptações devem ser consistentes com o Hamiltoniano do sistema. Deste modo considere por questões de simplicidade

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{AB} &\rightarrow \mathcal{H}_{AB} \\ \boldsymbol{\xi}_{1,2} &= (0, 0, h), \\ \boldsymbol{\xi}_3^k &= \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Com as definições, podemos escrever o calor específico total do sistema C_{AB} , dos subsistemas C_A e C_B e somente da interação C_{int}

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{AB} &= J_x S_A^x S_B^x + J_y S_A^y S_B^y + J_z S_A^z S_B^z + h(S_A^z + S_B^z) \\ &= \sum_{i=x,y,z} J_i S_A^i S_B^i + h(S_A^z + S_B^z),\end{aligned}\quad (5.48)$$

$$\mathcal{H}_A = h S_A^z, \quad (5.49)$$

$$\mathcal{H}_B = h S_B^z, \quad (5.50)$$

$$H_{int} = \sum_{i=x,y,z} J_i S_A^i S_B^i, \quad (5.51)$$

onde $J_i \mid i = (x, y, z)$ são as constantes de acoplamento e h é o campo magnético externo aplicado ao sistema. Substituindo as equações acima na (5.46), obtemos

$$\begin{aligned}C_{AB} &= \frac{1}{k_B T^2} \Delta^2 \mathcal{H}_{AB} = \frac{1}{k_B T^2} \Delta^2 \left[\sum_{i=x,y,z} J_i S_A^i S_B^i + h(S_A^z + S_B^z) \right] \\ &= \frac{1}{k_B T^2} \sum_{i=x,y,z} [J_i^2 \Delta^2 (S_A^i S_B^i) + \Delta^2 (h S_A^z) + \Delta^2 (h S_B^z)] \\ &= \frac{1}{k_B T^2} \Delta^2 (\mathcal{O}_{AB}), \\ C_A &= \frac{1}{k_B T^2} \Delta^2 \mathcal{H}_A = \frac{1}{k_B T^2} \Delta^2 (h S_A^z) = \frac{1}{k_B T^2} \Delta^2 (\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \mathbf{S}_A), \\ C_B &= \frac{1}{k_B T^2} \Delta^2 \mathcal{H}_B = \frac{1}{k_B T^2} \Delta^2 (h S_B^z) = \frac{1}{k_B T^2} \Delta^2 (\boldsymbol{\xi}_2 \cdot \mathbf{S}_B), \\ C_{int} &= \frac{1}{k_B T^2} \Delta^2 \mathcal{H}_{int} = \frac{1}{k_B T^2} \Delta^2 \left(\sum_{i=x,y,z} J_i S_A^i S_B^i \right) \\ &= \frac{1}{k_B T^2} \sum_{i=x,y,z} J_i^2 \Delta^2 (S_A^i, S_B^i).\end{aligned}\quad (5.52)$$

Substituindo os resultados apresentados acima na equação (5.38), temos a testemunha de emaranhamento térmico baseado no calor específico do sistema, que para estados emaranhados é definida como

$$C_{AB} - C_A - C_B - C_{int} < 0. \quad (5.53)$$

Assim como a susceptibilidade, o calor específico também pode ser aplicado como uma testemunha térmica e facilmente ser medida em um laboratório. As aplicações dessa testemunha serão realizada na seção (5.5). Na próxima seção, faremos a extensão dos resultados apresentados acima considerando sistemas tripartidos.

5.4 Testemunha de emaranhamento generalizada para sistemas tripartidos

Até o presente momento deste capítulo, todos os resultados apresentados anteriormente foram desenvolvidos apenas para sistemas de dois q-bits. Dito isso, faremos a extensão desses resultados para o caso de sistemas tripartidos.

Assim considere um sistema de três q-bits possuindo um observável $\mathcal{O}_{ABC}^k$ e um operador densidade ρ_{ABC} completamente separável definidos da seguinte forma

$$\mathcal{O}_{ABC}^k = \xi_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k + \xi_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k + \xi_3^k \cdot \mathbf{S}_C^k + \mathbf{S}_A^k \cdot \xi_4^k \cdot \mathbf{S}_B^k + \mathbf{S}_A^k \cdot \xi_5^k \cdot \mathbf{S}_C^k + \mathbf{S}_B^k \cdot \xi_6^k \cdot \mathbf{S}_C^k, \quad (5.54)$$

$$\rho_{ABC} = \sum_{i,j,m} p_{ijm} \rho_A^i \otimes \rho_B^j \otimes \rho_C^m, \quad \sum_{i,j,m} p_{ijm} = 1, \text{ e } p_{ijm} \geq 0, \quad (5.55)$$

onde $\mathbf{S}_{A,B,C}$ são os operadores de spin. Um fato importante a ser mencionado é que não levaremos em conta a existência de emaranhamento bipartido compondo o emaranhamento tripartido, ou seja, não adicionaremos as possíveis biseparabilidades do operador densidade, conforme apresentado na equação (5.55). Abaixo temos as definições das grandezas apresentadas

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{A,B,C}^k &= \left(S_{A,B,C}^{x,k}, S_{A,B,C}^{y,k}, S_{A,B,C}^{z,k} \right), \\ \xi_{1,2,3}^k &= \left(\xi_{1,2,3}^{x,k}, \xi_{1,2,3}^{y,k}, \xi_{1,2,3}^{z,k} \right), \\ \xi_{3,4,5}^k &= \begin{pmatrix} J_{xx}^{k3,4,5} & J_{xy}^{k3,4,5} & J_{xz}^{k3,4,5} \\ J_{yx}^{k3,4,5} & J_{yy}^{k3,4,5} & J_{yz}^{k3,4,5} \\ J_{zx}^{k3,4,5} & J_{zy}^{k3,4,5} & J_{zz}^{k3,4,5} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Com as definições, podemos calcular a média do observável dado por

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{ABC}^k \rangle &= \text{Tr} (\rho_{ABC} \mathcal{O}_{ABC}^k) \\ &= \text{Tr} \left[\sum_{i,j,m} p_{ijm} \rho_A^i \otimes \rho_B^j \otimes \rho_C^m \left(\xi_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k + \xi_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k + \xi_3^k \cdot \mathbf{S}_C^k + \sum_{r,s=x,y,z} J_{ij}^{k4} S_{A,k}^r S_{B,k}^s \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{r,s=x,y,z} J_{rs}^{k5} S_{A,k}^r S_{C,k}^s + \sum_{r,s=x,y,z} J_{rs}^{k6} S_{B,k}^r S_{C,k}^s \right) \right] \\ &= \xi_1^k \cdot \langle \mathbf{S}_A^k \rangle + \xi_2^k \cdot \langle \mathbf{S}_B^k \rangle + \xi_3^k \cdot \langle \mathbf{S}_C^k \rangle + \sum_{r,s=x,y,z} J_{rs}^{k4} \langle S_{A,k}^r \rangle_i \langle S_{B,k}^s \rangle \\ &\quad + \sum_{r,s=x,y,z} J_{rs}^{k5} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle S_{C,k}^s \rangle + \sum_{r,s=x,y,z} J_{rs}^{k6} \langle S_{B,k}^r \rangle \langle S_{C,k}^s \rangle. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Feito isso, utilizamos a equação (5.57) e calculamos o segundo termo da equação (5.31)

$$\langle \mathcal{O}_{ABC}^k \rangle \langle \mathcal{O}_{ABC}^l \rangle = \text{Tr} (\rho_{ABC} \mathcal{O}_{ABC}^k) (\rho_{ABC} \mathcal{O}_{ABC}^l)$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\langle \xi_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k \rangle \langle \xi_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l \rangle}_{(1)} + \langle \xi_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k \rangle \langle \xi_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l \rangle + \langle \xi_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k \rangle \langle \xi_3^l \cdot \mathbf{S}_C^l \rangle \\
&+ \sum_{u,v} J_{uv}^{l_4} \langle \xi_4^k \cdot \mathbf{S}_A^k \rangle \langle S_{A,l}^u \rangle \langle S_{B,l}^v \rangle + \sum_{u,v} J_{uv}^{l_5} \langle \xi_5^k \cdot \mathbf{S}_A^k \rangle \langle S_{A,l}^u \rangle \langle S_{C,l}^v \rangle \\
&+ \sum_{u,v} J_{uv}^{l_6} \langle \xi_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k \rangle \langle S_{B,l}^u \rangle \langle S_{C,l}^v \rangle \\
&+ \langle \xi_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k \rangle \langle \xi_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l \rangle + \underbrace{\langle \xi_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k \rangle \langle \xi_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l \rangle}_{(2)} + \langle \xi_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k \rangle \langle \xi_3^l \cdot \mathbf{S}_C^l \rangle \\
&+ \sum_{u,v} J_{uv}^{l_4} \langle S_{A,l}^u \rangle \langle \xi_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k \rangle \langle S_{B,l}^v \rangle + \sum_{u,v} J_{uv}^{l_5} \langle S_{A,l}^u \rangle \langle \xi_2^k \cdot \mathbf{S}_A^k \rangle \langle S_{C,l}^v \rangle \\
&+ \sum_{u,v} J_{uv}^{l_6} \langle \xi_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k \rangle \langle S_{B,l}^u \rangle \langle S_{C,l}^v \rangle \\
&+ \langle \xi_3^k \cdot \mathbf{S}_C^k \rangle \langle \xi_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l \rangle + \langle \xi_3^k \cdot \mathbf{S}_C^k \rangle \langle \xi_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l \rangle + \underbrace{\langle \xi_3^k \cdot \mathbf{S}_C^k \rangle \langle \xi_3^l \cdot \mathbf{S}_C^l \rangle}_{(3)} \\
&+ \sum_{u,v} J_{uv}^{l_4} \langle S_{A,l}^u \rangle \langle S_{B,l}^v \rangle \langle \xi_3^k \cdot \mathbf{S}_C^k \rangle + \sum_{u,v} J_{uv}^{l_5} \langle S_{A,l}^u \rangle \langle \xi_3^k \cdot \mathbf{S}_C^k \rangle \langle S_{C,l}^v \rangle \\
&+ \sum_{u,v} J_{uv}^{l_6} \langle S_{B,l}^u \rangle \langle \xi_3^k \cdot \mathbf{S}_C^k \rangle \langle S_{C,l}^v \rangle \\
&+ \sum_{r,s} J_{rs}^{k_4} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle \xi_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l \rangle \langle S_{B,k}^s \rangle + \sum_{r,s} J_{rs}^{k_4} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle S_{B,k}^s \rangle \langle \xi_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l \rangle \\
&+ \sum_{r,s} J_{rs}^{k_4} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle S_{B,k}^s \rangle \langle \xi_3^l \cdot \mathbf{S}_C^l \rangle + \underbrace{\sum_{r,s,u,v} J_{rs}^{k_4} J_{uv}^{l_4} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle S_{A,l}^u \rangle \langle S_{B,k}^s \rangle \langle S_{B,l}^v \rangle}_{(4)} \\
&+ \sum_{r,s,u,v} J_{rs}^{k_4} J_{uv}^{l_5} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle S_{A,l}^u \rangle \langle S_{B,k}^s \rangle \langle S_{C,l}^v \rangle \\
&+ \sum_{r,s,u,v} J_{rs}^{k_4} J_{uv}^{l_6} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle S_{B,k}^s \rangle \langle S_{B,l}^u \rangle \langle S_{C,l}^v \rangle \\
&+ \sum_{r,s} J_{rs}^{k_5} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle \xi_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l \rangle \langle S_{C,k}^s \rangle + \sum_{r,s} J_{rs}^{k_5} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle \xi_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l \rangle \langle S_{C,k}^s \rangle \\
&+ \sum_{r,s} J_{rs}^{k_5} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle S_{C,k}^s \rangle \langle \xi_3^l \cdot \mathbf{S}_C^l \rangle + \sum_{r,s,u,v} J_{rs}^{k_5} J_{uv}^{l_4} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle S_{A,l}^u \rangle \langle S_{B,l}^v \rangle \langle S_{C,k}^s \rangle \\
&+ \underbrace{\sum_{r,s,u,v} J_{rs}^{k_5} J_{uv}^{l_5} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle S_{A,l}^u \rangle \langle S_{C,k}^s \rangle \langle S_{C,l}^v \rangle}_{(5)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{r,s,u,v} J_{rs}^{k_5} J_{uv}^{l_6} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle S_{B,k}^u \rangle \langle S_{C,k}^s \rangle \langle S_{C,l}^v \rangle \\
& + \sum_{r,s} J_{rs}^{k_6} \langle \xi_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l \rangle \langle S_{B,l}^r \rangle \langle S_{C,l}^s \rangle + \sum_{r,s} J_{rs}^{k_6} \langle S_{B,k}^r \rangle \langle \xi_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l \rangle \langle S_{C,k}^s \rangle \\
& + \sum_{r,s} J_{rs}^{k_6} \langle S_{B,k}^r \rangle \langle S_{C,k}^s \rangle \langle \xi_3^l \cdot \mathbf{S}_C^l \rangle + \sum_{r,s,u,v} J_{rs}^{k_6} J_{uv}^{l_4} \langle S_{A,l}^u \rangle \langle S_{B,k}^r \rangle \langle S_{B,l}^v \rangle \langle S_{C,k}^s \rangle \\
& + \sum_{r,s,u,v} J_{rs}^{k_6} J_{uv}^{l_5} \langle S_{A,l}^u \rangle \langle S_{B,k}^r \rangle \langle S_{C,k}^s \rangle \langle S_{C,l}^v \rangle \\
& + \underbrace{\sum_{r,s,u,v} J_{rs}^{k_6} J_{uv}^{l_6} \langle S_{B,k}^r \rangle \langle S_{B,l}^u \rangle \langle S_{C,k}^s \rangle \langle S_{C,l}^v \rangle}_{(6)} \tag{5.58}
\end{aligned}$$

e consequentemente calculamos o primeiro termo de (5.31)

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{O}_{ABC}^k \mathcal{O}_{ABC}^l \rangle &= \text{Tr} (\rho_{ABC} \mathcal{O}_{ABC}^k \mathcal{O}_{ABC}^l) \\
&= \underbrace{\langle (\xi_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k) (\xi_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l) \rangle}_{(1)} + \langle \xi_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k \rangle \langle \xi_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l \rangle + \langle \xi_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k \rangle \langle \xi_3^l \cdot \mathbf{S}_C^l \rangle \\
&+ \sum_{u,v} J_{uv}^{l_4} \langle (\xi_4^k \cdot \mathbf{S}_A^k) S_{A,l}^u \rangle \langle S_{B,l}^v \rangle + \sum_{u,v} J_{uv}^{l_5} \langle (\xi_5^k \cdot \mathbf{S}_A^k) S_{A,l}^u \rangle \langle S_{C,l}^v \rangle \\
&+ \sum_{u,v} J_{uv}^{l_6} \langle \xi_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k \rangle \langle S_{B,l}^u \rangle \langle S_{C,l}^v \rangle \\
&+ \langle \xi_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k \rangle \langle \xi_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l \rangle + \underbrace{\langle (\xi_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k) (\xi_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l) \rangle}_{(2)} + \langle \xi_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k \rangle \langle \xi_3^l \cdot \mathbf{S}_C^l \rangle \\
&+ \sum_{u,v} J_{uv}^{l_4} \langle S_{A,l}^u \rangle \langle (\xi_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k) S_{B,l}^u \rangle + \sum_{u,v} J_{uv}^{l_5} \langle S_{A,l}^u \rangle \langle \xi_2^k \cdot \mathbf{S}_A^k \rangle \langle S_{C,l}^v \rangle \\
&+ \sum_{u,v} J_{uv}^{l_6} \langle (\xi_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k) S_{B,l}^u \rangle \langle S_{C,l}^v \rangle \\
&+ \langle \xi_3^k \cdot \mathbf{S}_C^k \rangle \langle \xi_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l \rangle + \langle \xi_3^k \cdot \mathbf{S}_C^k \rangle \langle \xi_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l \rangle + \underbrace{\langle (\xi_3^k \cdot \mathbf{S}_C^k) (\xi_3^l \cdot \mathbf{S}_C^l) \rangle}_{(3)} \\
&+ \sum_{u,v} J_{uv}^{l_4} \langle S_{A,l}^u \rangle \langle S_{B,l}^v \rangle \langle \xi_3^k \cdot \mathbf{S}_C^k \rangle + \sum_{u,v} J_{uv}^{l_5} \langle S_{A,l}^u \rangle \langle (\xi_3^k \cdot \mathbf{S}_C^k) S_{C,l}^v \rangle \\
&+ \sum_{u,v} J_{uv}^{l_6} \langle S_{B,l}^u \rangle \langle (\xi_3^k \cdot \mathbf{S}_C^k) S_{C,l}^v \rangle \\
&+ \sum_{r,s} J_{rs}^{k_4} \langle S_{A,k}^r (\xi_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l) \rangle \langle S_{B,k}^s \rangle + \sum_{r,s} J_{rs}^{k_4} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle S_{B,k}^s (\xi_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l) \rangle \\
&+ \sum_{r,s} J_{rs}^{k_4} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle S_{B,k}^s \rangle \langle \xi_3^l \cdot \mathbf{S}_C^l \rangle + \underbrace{\sum_{r,s,u,v} J_{rs}^{k_4} J_{uv}^{l_4} \langle S_{A,k}^r S_{A,l}^u \rangle \langle S_{B,k}^s S_{B,l}^v \rangle}_{(4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{r,s,u,v} J_{rs}^{k_4} J_{uv}^{l_5} \langle S_{A,k}^r S_{A,l}^u \rangle \langle S_{B,k}^s \rangle \langle S_{C,l}^v \rangle \\
& + \sum_{r,s,u,v} J_{rs}^{k_4} J_{uv}^{l_6} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle S_{B,k}^s S_{B,l}^u \rangle \langle S_{C,l}^v \rangle \\
& + \sum_{r,s} J_{rs}^{k_5} \langle S_{A,k}^r (\boldsymbol{\xi}_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l) \rangle \langle S_{C,k}^s \rangle + \sum_{r,s} J_{rs}^{k_5} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle \boldsymbol{\xi}_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l \rangle \langle S_{C,k}^s \rangle \\
& + \sum_{r,s} J_{rs}^{k_5} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle S_{C,k}^s (\boldsymbol{\xi}_3^l \cdot \mathbf{S}_C^l) \rangle + \sum_{r,s,u,v} J_{rs}^{k_5} J_{uv}^{l_4} \langle S_{A,k}^r S_{A,l}^u \rangle \langle S_{B,l}^v \rangle \langle S_{C,k}^s \rangle \\
& + \underbrace{\sum_{r,s,u,v} J_{rs}^{k_5} J_{uv}^{l_5} \langle S_{A,k}^r S_{A,l}^u \rangle \langle S_{C,k}^s S_{C,l}^v \rangle}_{(5)} + \sum_{r,s,u,v} J_{rs}^{k_4} J_{uv}^{l_6} \langle S_{A,k}^r \rangle \langle S_{B,k}^u \rangle \langle S_{C,k}^s S_{C,l}^v \rangle \\
& + \sum_{r,s} J_{rs}^{k_6} \langle \boldsymbol{\xi}_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l \rangle \langle S_{B,l}^r \rangle \langle S_{C,l}^s \rangle + \sum_{r,s} J_{rs}^{k_6} \langle S_{B,k}^r (\boldsymbol{\xi}_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l) \rangle \langle S_{C,k}^s \rangle \\
& + \sum_{r,s} J_{rs}^{k_6} \langle S_{B,k}^r \rangle \langle S_{C,k}^s (\boldsymbol{\xi}_3^l \cdot \mathbf{S}_C^l) \rangle + \sum_{r,s,u,v} J_{rs}^{k_6} J_{uv}^{l_4} \langle S_{A,l}^u \rangle \langle S_{B,k}^r S_{B,l}^v \rangle \langle S_{C,k}^s \rangle \\
& + \sum_{r,s,u,v} J_{rs}^{k_6} J_{uv}^{l_5} \langle S_{A,l}^u \rangle \langle S_{B,k}^r \rangle \langle S_{C,k}^s S_{C,l}^v \rangle + \underbrace{\sum_{r,s,u,v} J_{rs}^{k_6} J_{uv}^{l_6} \langle S_{B,k}^r S_{B,l}^u \rangle \langle S_{C,k}^s S_{C,l}^v \rangle}_{(6)}.
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Desta maneira, estamos aptos a calcular a testemunha de emaranhamento baseado na covariância dos observáveis, bastando apenas juntar os termos destacados em vermelho nas equações (5.58) e (5.59). Então temos,

$$\begin{aligned}
EW_{ABC} &= \text{cov}(\mathcal{O}_{ABC}^k, \mathcal{O}_{ABC}^l) - \text{cov}(\boldsymbol{\xi}_1^k \cdot \mathbf{S}_A^k, \boldsymbol{\xi}_1^l \cdot \mathbf{S}_A^l) \\
& - \text{cov}(\boldsymbol{\xi}_2^k \cdot \mathbf{S}_B^k, \boldsymbol{\xi}_2^l \cdot \mathbf{S}_B^l) - \text{cov}(\boldsymbol{\xi}_3^k \cdot \mathbf{S}_C^k, \boldsymbol{\xi}_3^l \cdot \mathbf{S}_C^l) \\
& - \sum_{r,s} \sum_{u,v} J_{rs}^{k_4} J_{uv}^{l_4} \text{cov}(S_{A,k}^r S_{A,l}^u, S_{B,k}^s S_{B,l}^v) - \sum_{r,s} \sum_{u,v} J_{rs}^{k_5} J_{uv}^{l_5} \text{cov}(S_{A,k}^r S_{A,l}^u, S_{C,k}^s S_{C,l}^v) \\
& - \sum_{r,s} \sum_{u,v} J_{rs}^{k_6} J_{uv}^{l_6} \text{cov}(S_{B,k}^r S_{B,l}^u, S_{C,k}^s S_{C,l}^v) \geq 0,
\end{aligned} \tag{5.60}$$

onde as somas são feitas para $\lambda = (x, y, z) \mid \lambda = rs, uv$ e para estados emaranhados temos a violação da desigualdade. Podemos ainda reduzir a covariância do observável a variância, pois como apresentado nas seções (5.3.3) e (5.3.4), é possível fazer a conexão entre essa testemunha e as grandezas como a susceptibilidade e o calor específico. Desta maneira,

temos

$$\begin{aligned}
EW_{ABC} &= \Delta^2(\mathcal{O}_{ABC}) - \Delta^2(\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \mathbf{S}_A) - \Delta^2(\boldsymbol{\xi}_2 \cdot \mathbf{S}_B) - \Delta^2(\boldsymbol{\xi}_3 \cdot \mathbf{S}_C) \\
&\quad - \sum_{r,s} \sum_{u,v} J_{rs}^{k_4} J_{uv}^{l_4} \Delta^2(S_{A,k}^r S_{A,l}^u, S_{B,k}^s S_{B,l}^v) - \sum_{r,s} \sum_{u,v} J_{rs}^{k_5} J_{uv}^{l_5} \Delta^2(S_{A,k}^r S_{A,l}^u, S_{C,k}^s S_{C,l}^v) \\
&\quad - \sum_{r,s} \sum_{u,v} J_{rs}^{k_6} J_{uv}^{l_6} \Delta^2(S_{B,k}^r S_{B,l}^u, S_{C,k}^s S_{C,l}^v) \geq 0
\end{aligned} \tag{5.61}$$

em que $\Delta^2(\dots)$ representa a variância do observável. A seguir faremos a conexão entre as funções citadas acima e a equação (5.61).

5.4.1 Aplicação a susceptibilidade

Para construirmos a testemunha usando a susceptibilidade, vamos primeiramente definir os termos da equação (5.56),

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{ABC} &\rightarrow M_{ABC} \\
M_{ABC} &= \boldsymbol{\xi}_1 \cdot \mathbf{S}_A + \boldsymbol{\xi}_2 \cdot \mathbf{S}_B + \boldsymbol{\xi}_3 \cdot \mathbf{S}_C, \\
\mathbf{S}_{A,B,C} &= (S_{A,B,C}^x, S_{A,B,C}^y, S_{A,B,C}^z), \\
\boldsymbol{\xi}_{1,2,3} &= (\xi_{1,2,3}^x, \xi_{1,2,3}^y, \xi_{1,2,3}^z), \\
\boldsymbol{\xi}_{4,5,6}^k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{5.62}$$

resultando nas magnetizações

$$\begin{aligned}
M_{ABC} &= \sum_{i=x,y,z} (\xi_1^i S_A^i + \xi_2^i S_B^i + \xi_3^i S_C^i), \\
M_\lambda &= \sum_{i=x,y,z} \xi_\mu^i S_\lambda^i,
\end{aligned} \tag{5.63}$$

com os índices sendo $\lambda = A, B, C$ e $\mu = 1, 2, 3$. Substituindo a equação (5.63) na susceptibilidade, temos

$$\begin{aligned}
\chi_{ABC} &= \frac{1}{k_B T} \Delta^2 M_{AB} = \frac{(g\mu_B)^2}{k_B T} \sum_{i=x,y,z} [\Delta^2(\xi_1^i S_A^i) + \Delta^2(\xi_2^i S_B^i) + \Delta^2(\xi_3^i S_C^i)] \\
&= \frac{(g\mu_B)^2}{k_B T} \Delta^2(\mathcal{O}_{ABC}),
\end{aligned} \tag{5.64}$$

$$\chi_\lambda = \frac{1}{k_B T} \Delta^2 M_\lambda = \frac{(g\mu_B)^2}{k_B T} \sum_{i=x,y,z} \Delta^2(\xi_\mu^i S_\lambda^i) = \frac{(g\mu_B)^2}{k_B T} \Delta^2(\boldsymbol{\xi}_\mu \cdot \mathbf{S}_\lambda). \tag{5.65}$$

Dessa forma, aplicando os resultados na equação (5.61), temos uma testemunha de emaranhamento térmica definida como

$$\chi_{ABC} - \chi_A - \chi_B - \chi_C \geq 0. \tag{5.66}$$

De maneira análoga, podemos fazer essa construção da testemunha para o caso do calor específico.

5.4.2 Aplicação ao calor específico

A construção será feita de maneira breve, pois o processo é equivalente aos mostrados anteriormente. Como mencionado na seção (5.3.4) temos que conhecer previamente o Hamiltoniano do sistema, então podemos definir os termos da equação (5.56) como

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{ABC} &\rightarrow \mathcal{H}_{ABC} \\ \boldsymbol{\xi}_{1,2,3} &= (0, 0, h), \\ \boldsymbol{\xi}_{4,5,6}^k &= \begin{pmatrix} J_x^{k_4, k_5, k_6} & 0 & 0 \\ 0 & J_y^{k_4, k_5, k_6} & 0 \\ 0 & 0 & J_z^{k_4, k_5, k_6} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (5.67)$$

Feito isso, definimos o Hamiltoniano e o calor específico para o sistema tripartido

$$\begin{aligned}C_{ABC} &= \frac{1}{k_B T^2} \Delta^2 \mathcal{H}_{ABC} = \frac{1}{k_B T^2} (\langle \mathcal{H}_{ABC}^2 \rangle - \langle \mathcal{H}_{ABC} \rangle^2) \\ \mathcal{H}_{ABC} &= \sum_{i=x,y,z} J_i^{k_4} S_A^i S_B^i + \sum_{i=x,y,z} J_i^{k_5} S_A^i S_C^i + \sum_{i=x,y,z} J_i^{k_6} S_B^i S_C^i + h(S_A^z + S_B^z + S_C^z),\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_\lambda = h S_\lambda^z, \quad \lambda = A, B, C$$

$$\mathcal{H}_{\mu\nu}^{int} = \sum_{\substack{i=x,y,z \\ \mu, \nu=A,B,C \\ \mu \neq \nu}} J_i S_\mu^i S_\nu^i. \quad (5.68)$$

Assim, substituindo os resultados no calor específico C_{ABC} , resulta em

$$\begin{aligned}C_{ABC} &= \frac{1}{k_B T^2} \Delta^2 \left[\sum_{i=x,y,z} J_i^{k_4} S_A^i S_B^i + \sum_{i=x,y,z} J_i^{k_5} S_A^i S_C^i + \sum_{i=x,y,z} J_i^{k_6} S_B^i S_C^i + h(S_A^z + S_B^z + S_C^z) \right] \\ &+ \frac{1}{k_B T^2} \sum_{i=x,y,z} \left[J_{i,k_4}^2 \Delta^2 (S_A^i S_B^i) + J_{i,k_5}^2 \Delta^2 (S_A^i S_C^i) + J_{i,k_6}^2 \Delta^2 (S_B^i S_C^i) \right] \\ &+ \frac{1}{k_B T^2} [\Delta^2 (h S_A^z) + \Delta^2 (h S_B^z) + \Delta^2 (h S_C^z)] = \frac{1}{k_B T^2} \Delta^2 (\mathcal{O}_{ABC})\end{aligned}$$

$$C_\lambda = \frac{1}{k_B T^2} \Delta^2 (h S_\lambda^z) = \frac{1}{k_B T^2} \Delta^2 (\boldsymbol{\xi}_\mu \cdot \mathbf{S}_\lambda),$$

$$C_{\mu\nu}^{int} = \sum_{i=x,y,z} J_i^2 \Delta^2 (S_\mu^i S_\nu^i), \quad (5.69)$$

Com os cálculos dos calores específicos, podemos aplicar o critério da equação (5.61) para a construção da testemunha de emaranhamento térmica, definida por

$$C_{ABC} - (C_A + C_B + C_C) - (C_{AB} + C_{AC} + C_{BC}) \geq 0, \quad (5.70)$$

onde estados emaranhados violam a desigualdade e C_{AB} é o calor específico do termo de interação (S_A, S_B) dos spins. A generalização do critério para sistemas multipartidos é feita de maneira análoga a apresentada, onde devemos considerar todas as interações par a par dos spins. Conforme dito no início, não foi levado em conta as biseparabilidades do sistema, fazendo com que nossa testemunha não seja genuinamente tripartida.

Com isso, apresentamos um critério de emaranhamento utilizando observáveis gerais de spins para sistemas bipartidos e tripartidos, contendo ou não interações entre eles. Esse critério entretanto, pode ser aplicado como testemunhas de emaranhamento construídas a partir da variância de observáveis, como foi mostrado para o caso da susceptibilidade e do calor específico, lembrando que as definições dessas grandezas não são as usuais definidas segundo a termodinâmica. Na próxima seção apresentaremos os resultados obtidos por nós usando tal critério aplicado a sistemas físicos.

5.5 Resultados para sistemas bipartidos

Nesta seção mostraremos os resultados da aplicação das testemunhas de emaranhamento térmicas desenvolvidas nas seções (5.3) e (5.4) para sistemas bipartidos e tripartidos. No caso de sistemas bipartidos, a aplicação foi feita nos modelos de Ising transversal⁹ e Heisenberg: XYZ ,¹⁰ XY simétrico, XY antisimétrico,¹¹ XXZ ¹² e XXX .¹³ Em todos os modelos aplicamos as testemunhas para as condições ferromagnética ($J > 0$) e antiferromagnética ($J < 0$) pois, como veremos adiante, o estado fundamental dos modelos é suscetível a mudanças conforme a escolha do sinal da constante de acoplamento J .

5.5.1 Modelo de Heisenberg XYZ

Considere o modelo de Heisenberg XYZ adicionado de um campo magnético externo na direção z . O Hamiltoniano desse sistemas pode ser escrito como¹⁰

$$\mathcal{H}_{AB} = (\Sigma - \Delta) S_A^x S_B^x + (\Sigma + \Delta) S_A^y S_B^y + J_z S_A^z S_B^z + h (S_A^z + S_B^z), \quad (5.71)$$

onde as constantes são: $\Sigma = J_x + J_y$ e $\Delta = J_x - J_y$. As autoenergias e os autoestados do Hamiltoniano são dados por

$$E_1 = \Sigma - J_z \Rightarrow |\psi^1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle), \quad (5.72)$$

$$E_2 = -(\Sigma - J_z) \Rightarrow |\psi^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle), \quad (5.73)$$

$$E_3 = J_z + \eta \Rightarrow |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + 1}} (\lambda_1 |00\rangle + |11\rangle), \quad (5.74)$$

$$E_4 = J_z - \eta \Rightarrow |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 + 1}} (\lambda_2 |00\rangle - |11\rangle), \quad (5.75)$$

em que $\lambda_1 = \Delta/(\eta - 2h)$, $\lambda_2 = -\Delta/(\eta + 2h)$ e $\eta = \sqrt{\Delta^2 + 4h^2}$. Conforme podemos ver, todos os autoestados do sistema são emaranhados e sua matriz densidade pode ser calculada como $\rho_{AB} = e^{-\mathcal{H}/k_B T}/Z$ e é escrita da seguinte forma

$$\rho_{AB} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{12} \\ 0 & b_{11} & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{12} & b_{11} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (5.76)$$

onde $a_{11} = e^{-\alpha} [\cosh(\beta) - h \sinh(\beta)/\eta]$, $a_{12} = -\Delta e^{-\alpha} \sinh(\beta)/\eta$, $a_{22} = e^{-\alpha} [\cosh(\beta) + h \sinh(\beta)/\eta]$, $b_{11} = e^{\alpha} \cosh(\gamma)$, $b_{12} = -e^{\alpha} \sinh(\gamma)$ e $Z = 2[e^{-\alpha} \cosh(\beta) + e^{\alpha} \cosh(\gamma)]$, onde as grandezas são definidas como $\alpha = J_z/(k_B T)$, $\beta = \eta/(k_B T)$ e $\gamma = \Sigma/(k_B T)$. Desse modo, podemos calcular as probabilidades de ocupação do sistema, definidos por $p_i = e^{-E_i/k_B T}/Z$. Os gráficos das probabilidades serão feitos mais adiante juntamente com os das testemunhas térmicas para podermos discutir suas propriedades de maneira mais adequada. Além disso, sendo o operador de spin do sistema escrito como $\mathbf{S}_{AB} = S_{AB}^x \hat{x} + S_{AB}^y \hat{y} + S_{AB}^z \hat{z}$ é possível escrever a magnetização $\langle \mathbf{M}_{AB} \rangle$ e $\langle M_{AB}^2 \rangle$ do sistema

$$\langle \mathbf{M}_{AB} \rangle = \text{Tr}(\rho_{AB} \mathbf{S}_{AB}) = -\frac{4h}{\eta} \frac{e^{-\alpha}}{Z} \sinh(\beta) \hat{z}, \quad (5.77)$$

$$\langle M_{AB}^2 \rangle = \text{Tr}(\rho_{AB} M_{AB}^2) = \frac{8}{Z} [e^{-\alpha} \cosh(\beta) + e^{\alpha-\gamma}], \quad (5.78)$$

para assim obtermos a susceptibilidade total χ_{AB} dada por

$$\chi_{AB} = \frac{8}{T} \frac{e^{-\alpha}}{Z} \left[\cosh(\beta) - e^{-\gamma} - \frac{2}{Z} \left(\frac{h}{\eta} \right)^2 \sinh^2(\beta) \right]. \quad (5.79)$$

Para as susceptibilidades dos sistemas reduzidos o cálculo é feito de forma análoga, porém temos que tomar o traço parcial do operador densidade ρ_{AB} , ou seja, $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$. Devido a simetria do sistema temos ainda que $\rho_A = \rho_B$,

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & 0 \\ 0 & b_{11} + a_{22} \end{pmatrix}. \quad (5.80)$$

Calculando assim as quantidades da equação da equação (5.78) para o sistema reduzido e a susceptibilidade

$$\langle \mathbf{M}_A \rangle = \text{Tr}(\rho_A \mathbf{S}_A) = -\frac{4h}{\eta} \frac{e^{-\alpha}}{Z} \sinh(\beta), \quad (5.81)$$

$$\langle M_A^2 \rangle = 3, \quad (5.82)$$

$$\chi_A = \frac{1}{k_B T} \left[3 - \left(\frac{4h}{\eta} \frac{e^{-\alpha}}{Z} \right)^2 \sinh^2(\beta) \right] \quad (5.83)$$

Assim, substituindo as equações (5.79) e (5.83) na (5.45) obtemos a testemunha de emaranhamento térmica baseada na susceptibilidade. Esses cálculos foram feitos apenas

para exemplificar como construímos nossa testemunha utilizando um sistema físico, no caso o modelo de Heisenberg XYZ . De maneira análoga a mostrada acima, podemos também construir a testemunha de emaranhamento baseada no calor específico.

A seguir mostraremos os resultados obtidos para o modelo em questão. Observe que nas Figs. (10a), (10b), (11a) e (11b) temos as probabilidades p_i do sistema, calculadas por $p_i = e^{E_i/k_B T}/Z$, onde E_i são as energias do sistema definidas na equação (5.75). Os gráficos das probabilidades foram colocadas juntamente com os das testemunhas para podermos fazer uma melhor comparação dos resultados. Com eles podemos notar que o estado fundamental do sistema é emaranhado, pois os autoestados $|\psi_i\rangle$ associados as probabilidades p_i possuem emaranhamento. Essa característica ocorre tanto para o caso $J > 0$ como $J < 0$.

Os outros gráficos representam nossa testemunha de emaranhamento EW construída a partir da susceptibilidade. Com elas podemos observar que para o caso de $J > 0$ e EW em função da temperatura (Fig. (10c)), obtivemos um resultado razoável, pois a concorrência nos mostra que o emaranhamento desaparece depois de uma certa temperatura (denominamos esse ponto de temperatura de emaranhamento ou TE), enquanto que a testemunha revela que ainda temos emaranhamento além dessa temperatura. Para o caso de $J > 0$ e EW em função do campo magnético (Fig. (10d)), obtivemos um melhor resultado, visto que a intervalo em que a EW detectou emaranhamento ficou bem próximo da concorrência. É importante mencionar que a concorrência ainda nos mostra que o emaranhamento deixa de existir em dois pontos, onde temos a condição $p_2 = p_4$. Essa igualdade resulta em dois valores do campo dados por $h = \pm\sqrt{JxJy}$. Já para a condição de $J < 0$ nossa testemunha não detectou emaranhamento em função da temperatura nem do campo, devido a termos $EW > 0$, mesmo esse existindo conforme mostra a concorrência nas Figs. (10e) e (10f).

A seguir temos os resultados de EW baseada no calor específico. Para $J > 0$ temos: na Fig. (11c), EW gerou um resultado bom, pois a testemunha ficou próxima de TE . No caso em que variamos o campo magnético (Fig. (11d)), não obtivemos um resultado tão preciso quanto o anterior, mas foi detectado emaranhamento. No caso de $J < 0$: ao contrário da susceptibilidade, a testemunha revelou a existência de emaranhamento, porém desta vez a condição de $EW = 0$ foi antes da temperatura de emaranhamento Fig. (11e). Por fim, na Fig. (11f), foi constatado apenas a presença de emaranhamento.

5.5.2 Modelo de Heisenberg XY isotrópico

O modelo Heisenberg XY isotrópico com campo magnético na direção z ,¹¹ também foi utilizado para testarmos a eficiência do nosso critério. Para esse modelo especificamente temos que: $J_x = J_y = J$ e $J_z = 0$. Desta maneira, basta escolhermos os parâmetros $\Sigma = 2J$ e $\Delta = 0$ apresentados do modelo de Heisenberg XYZ . Com essa escolha, as autoenergias

Figura 10 – Heisenberg XYZ : Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada na susceptibilidade em função da temperatura e do campo magnético.

[Onde: (a) $\Sigma = 3, \Delta = 1, J_z = 3, J > 0$ e $T = 1$; (b) $\Sigma = -3, \Delta = -1, J_z = -3, J < 0$ e $T = 1$; (c) $\Sigma = 3, \Delta = 1, J_z = 3, J > 0$ e $h = 1$; (d) $\Sigma = 3, \Delta = 1, J_z = 3, J > 0$ e $T = 1$; (e) $\Sigma = -3, \Delta = -1, J_z = -3, J < 0$ e $h = 1$; (f) $\Sigma = -3, \Delta = -1, J_z = -3, J < 0$ e $T = 1$.]

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 11 – Heisenberg XYZ : Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada no calor específico em função da temperatura e do campo magnético.

[Onde: (a) $\Sigma = 3, \Delta = 1, J_z = 3, J > 0$ e $T = 1$; (b) $\Sigma = -3, \Delta = -1, J_z = -3, J < 0$ e $T = 1$; (c) $\Sigma = 3, \Delta = 1, J_z = 3, J > 0$ e $h = 1$; (d) $\Sigma = 3, \Delta = 1, J_z = 3, J > 0$ e $T = 3$; (e) $\Sigma = -3, \Delta = -1, J_z = -3, J < 0$ e $h = 0.5$; (f) $\Sigma = -3, \Delta = -1, J_z = -3, J < 0$ e $T = 1$.]

Fonte: Elaborada pelo autor.

e autoestados do sistema são

$$E_1 = \Sigma = 2J \Rightarrow |\psi^1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle), \quad (5.84)$$

$$E_2 = -\Sigma = -2J \Rightarrow |\psi^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle), \quad (5.85)$$

$$E_3 = 2h \Rightarrow |\psi_3\rangle = |00\rangle, \quad (5.86)$$

$$E_4 = -2h \Rightarrow |\psi_4\rangle = |11\rangle. \quad (5.87)$$

Conforme podemos ver, somente os autoestados $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ possuem emaranhamento, enquanto que os autoestados $|00\rangle$ e $|11\rangle$ são separáveis. Com as autoenergias da apresentadas na equação (5:103), podemos calcular as respectivas probabilidades de ocupação do sistema, onde são definidas como $p_i = e^{E_i/k_B T}/Z$. Essas probabilidades podem ser vistas nas Figs. (12a), (12b). Observando essas figuras, vemos que para a condição $J > 0$ o estado fundamental do sistema permanece emaranhado somente entre o intervalo $h = \pm J$, sendo nesse caso $|\psi_2\rangle$. No caso de $J < 0$ o processo se dá de maneira similar, onde apenas ocorre a troca do estado fundamental para $|\psi_1\rangle$.

Os gráficos das testemunhas são distribuídos da mesma forma que no modelo de Heisenberg XYZ . Assim para $J > 0$, EW foi capaz de detectar emaranhamento, porém não de forma muito eficaz (Fig. (12c)). Já para o caso da testemunha em função do campo magnético, ela se mostrou mais precisa (Fig. (12d)). Considerando a constante de acoplamento na condição de $J < 0$, ambas as testemunhas não foram capazes constatar a existência do emaranhamento presente no sistema (Fig. (12e)) e (12f). Já para o caso das testemunhas baseadas a partir do calor específico e $J > 0$, a testemunha em função da temperatura obteve um ótimo resultado no processo de verificação do emaranhamento, pois a temperatura de emaranhamento ficou muito próxima da condição em que temos $EW = 0$ (ver Fig. (13c)). Com relação a testemunha em função do campo, ela ainda foi capaz de detectar o emaranhamento, porém ela se mostrou menos eficaz que o caso anterior (13d). Por fim, no para de $J < 0$, a detecção do emaranhamento se deu de forma equivalente a circunstância anterior, ao passo que a testemunha em função da temperatura obteve melhores resultados (ver Figs. (13e) e (13f)).

5.5.3 Modelo de Heisenberg XY anisotrópico

Outro modelo também utilizado para testarmos nosso critério, foi o Heisenberg XY anisotrópico com campo magnético na direção z .¹¹ Para esse modelos, temos que as constantes de acoplamento seguem as seguintes propriedades: $J_x \neq J_y$ e $J_z = 0$. Desta maneira, basta escolhermos os parâmetros $\Sigma = J_x + J_y$ e $\Delta = J_x - J_y$. Isso resulta nas seguintes autoenergias e os respectivos autoestados

Figura 12 – Heisenberg XY isotrópico: Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada na susceptibilidade em função da temperatura e do campo magnético.

[Onde: (a) $\Sigma = 4$, $\Delta = 0$, $J_z = 0$, $J > 0$ e $T = 1$; (b) $\Sigma = -4$, $\Delta = 0$, $J_z = 0$, $J < 0$ e $T = 1$; (c) $\Sigma = 6$, $\Delta = 0$, $J_z = 0$, $J > 0$ e $h = 1$; (d) $\Sigma = 6$, $\Delta = 0$, $J_z = 0$, $J > 0$ e $T = 1$; (e) $\Sigma = -6$, $\Delta = 0$, $J_z = 0$, $J < 0$ e $h = 1$; (f) $\Sigma = -2$, $\Delta = 0$, $J_z = 0$, $J < 0$ e $T = 1$.]

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 13 – Heisenberg XY isotrópico: Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada no calor específico em função da temperatura e do campo magnético.

[Onde: (a) $\Sigma = 4$, $\Delta = 0$, $J_z = 0$, $J > 0$ e $T = 1$; (b) $\Sigma = -4$, $\Delta = 0$, $J_z = 0$, $J < 0$ e $T = 1$; (c) $\Sigma = 6$, $\Delta = 0$, $J_z = 0$, $J > 0$ e $h = 1$; (d) $\Sigma = 6$, $\Delta = 0$, $J_z = 0$, $J > 0$ e $T = 1$; (e) $\Sigma = -6$, $\Delta = 0$, $J_z = 0$, $J < 0$ e $h = 1$; (f) $\Sigma = -2$, $\Delta = 0$, $J_z = 0$, $J < 0$ e $T = 1$.]

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$E_1 = \Sigma \Rightarrow |\psi^1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle), \quad (5.88)$$

$$E_2 = -\Sigma \Rightarrow |\psi^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle), \quad (5.89)$$

$$E_3 = \eta \Rightarrow |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + 1}} (\lambda_1 |00\rangle + |11\rangle), \quad (5.90)$$

$$E_4 = -\eta \Rightarrow |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 + 1}} (\lambda_2 |00\rangle - |11\rangle). \quad (5.91)$$

Como podemos observar, todos os estados são emaranhados. As probabilidades p_i do sistema podem ser vistas nas Figs. (14a), (14b). A única diferença nos gráficos é que entre a região $h = \pm\sqrt{J_x J_y}$ o estado fundamental do sistema é $|\psi_2\rangle$ e $|\psi_1\rangle$, para $J > 0$ e $J < 0$, respectivamente.

Com relação a EW baseada na susceptibilidade, as testemunhas de emaranhamento das Figs. (14c) e (14d) mostram que a mesma em função do campo magnético foi mais eficiente. Já nas Figs. (14e) e (14f), EW não foi capaz de observar emaranhamento.

Já para as testemunhas baseadas no calor específico, as Figs. (15c) e (15d) mostram que EW conseguiu observar emaranhamento com a mesma eficácia, enquanto que nas Figs. (15e) e (15f), o caso com $J > 0$ se mostrou mais eficaz.

5.5.4 Modelo de Heisenberg XXZ

Outro modelo utilizado para verificarmos a existência de emaranhamento térmico usando nossas testemunhas, foi o modelo de Heisenberg XXZ com campo magnético na direção z .¹² Nele, temos que considerar as relações entre as constantes de acoplamento da forma $J_x = J_y = J$ e $J_z \neq J$, gerando os seguintes parâmetros $\Sigma = 2J$ e $\Delta = 0$. Assim, as autoenergias e os respectivos autoestados do modelo são

$$E_1 = \Sigma - J_z \Rightarrow |\psi^1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle), \quad (5.92)$$

$$E_2 = -\Sigma - J_z \Rightarrow |\psi^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle), \quad (5.93)$$

$$E_3 = J_z + 2h \Rightarrow |\psi_3\rangle = |00\rangle, \quad (5.94)$$

$$E_4 = J_z - 2h \Rightarrow |\psi_4\rangle = |11\rangle, \quad (5.95)$$

onde somente os estados $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ são emaranhados.

Nas Figs. (16a), (16b) temos as probabilidades do modelo. Podemos observar que somente para $J > 0$ e no intervalo $h = \pm J$ o estado fundamental do sistema é emaranhado, sendo nesse caso $|\psi_2\rangle$, enquanto nos outros casos ele é separável.

Figura 14 – Heisenberg XY anisotrópico: Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada na susceptibilidade em função da temperatura e do campo magnético.

[Onde: (a) $\Sigma = 3, \Delta = 1, J_z = 0, J > 0$ e $T = 1$; (b) $\Sigma = -3, \Delta = -1, J_z = 0, J < 0$ e $T = 1$; (c) $\Sigma = 3, \Delta = 1, J_z = 0, J > 0$ e $h = 1$; (d) $\Sigma = 3, \Delta = 1, J_z = 0, J > 0$ e $T = 1$; (e) $\Sigma = -3, \Delta = -1, J_z = 0, J < 0$ e $h = 1$; (f) $\Sigma = -3, \Delta = -1, J_z = 0, J < 0$ e $T = 1$.]

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 15 – Heisenberg XY anisotrópico: Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada no calor específico em função da temperatura e do campo magnético.

[Onde: (a) $\Sigma = 3, \Delta = 1, J_z = 0, J > 0$ e $T = 1$; (b) $\Sigma = -3, \Delta = -1, J_z = 0, J < 0$ e $T = 1$; (c) $\Sigma = 3, \Delta = 1, J_z = 0, J > 0$ e $h = 1$; (d) $\Sigma = 3, \Delta = 1, J_z = 0, J > 0$ e $T = 1$; (e) $\Sigma = -3, \Delta = -1, J_z = 0, J < 0$ e $h = 1$; (f) $\Sigma = -3, \Delta = -1, J_z = 0, J < 0$ e $T = 1$.]

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com relação a *EW* baseada na susceptibilidade, as Figs. (16c) e (16d), mostram melhores resultados para a testemunha de emaranhamento em função do campo magnético. Para a condição $J < 0$ vistas nas Figs. (16e) e (16f), podemos observar que o modelo não apresenta emaranhamento, pois o estado fundamental nessas condições é dito separável. Esse fato pode ser afirmado devido a concorrência do sistema ser nula. Da mesma forma, nossa testemunha não constatou a existência de emaranhamento, ficando de acordo com os resultados teóricos desse modelo.

Já as testemunhas construídas a partir do calor específico, das Figs. (17c) e (17d), exibem um resultado mais eficaz para a testemunha em função da temperatura. Com a constante de acoplamento $J < 0$, os resultados são semelhantes ao caso da susceptibilidades, ou seja, a testemunha não detecta a presença de emaranhamento (ver Figs.(17e) e (17f)).

5.5.5 Modelo de Heisenberg XXX

O modelo de Heisenberg XXX com campo magnético na direção z .¹³ também foi usado para verificar a eficácia do nosso método. Nele, temos as seguintes relações entre as constantes de acoplamento $J_x = J_y = J_z = J$, resultando nos parâmetros $\Sigma = 2J$ e $\Delta = 0$. Dito isso, podemos calcular as autoenergias e os autoestados desse modelo,

$$E_1 = \frac{1}{2}\Sigma \Rightarrow |\psi^1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad (5.96)$$

$$E_2 = -\frac{3}{2}\Sigma \Rightarrow |\psi^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \quad (5.97)$$

$$E_3 = \frac{1}{2}\Sigma + 2h \Rightarrow |\psi_3\rangle = |00\rangle, \quad (5.98)$$

$$E_4 = \frac{1}{2}\Sigma - 2h \Rightarrow |\psi_4\rangle = |11\rangle. \quad (5.99)$$

Com isso, vemos que somente os estados $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ possuem emaranhamento, enquanto os outros autoestados são separáveis.

As probabilidades desse modelo podem ser vistas nas Figs. (18a), (18b). Através delas podemos concluir que para a condição $J > 0$, temos emaranhamento somente entre o intervalo $h = \pm 2J$. Isso ocorre porque apenas dentro desse intervalo o estado fundamental do sistema é emaranhado, enquanto que fora dele é separável. Já para a constante de acoplamento $J < 0$ o estado fundamental sempre é separável. Desta maneira, esperamos obter emaranhamento somente para a circunstância em que $J > 0$. Essa propriedade específica do modelo pode ser vista nas testemunhas baseadas na susceptibilidade das Figs. (18c), (18d), (18e) e (18f). Com elas concluímos de fato que o emaranhamento existe apenas quando temos $J > 0$. Ainda vale ressaltar que as testemunhas utilizando o calor específico apresentam a mesma propriedade, em outras palavras, possuem emaranhamento somente para $J > 0$ (Figs. (19c), (19d), (19e) e (19f)).

Figura 16 – Heisenberg XXZ : Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada na susceptibilidade em função da temperatura e do campo magnético.

[Onde: (a) $\Sigma = 4$, $\Delta = 0$, $J_z = 2$, $J > 0$ e $T = 1$; (b) $\Sigma = -4$, $\Delta = 0$, $J_z = -2$, $J < 0$ e $T = 1$; (c) $\Sigma = 2$, $\Delta = 0$, $J_z = 3$, $J > 0$ e $h = 1$; (d) $\Sigma = 2$, $\Delta = 0$, $J_z = 3$, $J > 0$ e $T = 1$; (e) $\Sigma = -4$, $\Delta = 0$, $J_z = -3$, $J < 0$ e $h = 1$; (f) $\Sigma = -4$, $\Delta = 0$, $J_z = -3$, $J < 0$ e $T = 1$.]

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 17 – Heisenberg XXZ : Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada no calor específico em função da temperatura e do campo magnético.

[Onde: (a) $\Sigma = 2, \Delta = 0, J_z = 3, J > 0$ e $T = 1$; (b) $\Sigma = -2, \Delta = 0, J_z = -3, J < 0$ e $T = 1$; (c) $\Sigma = 2, \Delta = 0, J_z = 3, J > 0$ e $h = 1$; (d) $\Sigma = 2, \Delta = 0, J_z = 3, J > 0$ e $T = 3$; (e) $\Sigma = -6, \Delta = 0, J_z = -3, J < 0$ e $h = 1$; (f) $\Sigma = -6, \Delta = 0, J_z = -3, J < 0$ e $T = 1.5$.]

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.5.6 Modelo de Ising

Por fim vamos considerar o modelo de Ising transversal,⁹ onde vamos considerar as constantes de acoplamento $J_x = 0$, $J_y = J$ e $J_z = 0$. Com essas definições temos os que $\Sigma = J$ e $\Delta = -J$ e podemos escrever os autoestados e as autoenergias do modelo. Então, temos

$$E_1 = \Sigma \Rightarrow |\psi^1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle), \quad (5.100)$$

$$E_2 = -\Sigma \Rightarrow |\psi^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle), \quad (5.101)$$

$$E_3 = -\sqrt{\Sigma^2 + 4h^2} \Rightarrow |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + 1}} (\lambda_1 |00\rangle + |11\rangle), \quad (5.102)$$

$$E_4 = \sqrt{\Sigma^2 + 4h^2} \Rightarrow |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 + 1}} (\lambda_2 |00\rangle - |11\rangle), \quad (5.103)$$

onde todos os autoestados são emaranhados.

Nas Figs. (20a), (20b) temos as probabilidades do modelo, que nos mostra o fato que o estado fundamental é sempre emaranhado, no caso o estado $|\psi_3\rangle$. Com relação a testemunha baseada na susceptibilidade, das Figs. (20c) e (20d) ($J > 0$), ambas apresentam resultados razoáveis na detecção do emaranhamento. Para o caso em que $J < 0$ as testemunhas não foram capazes constatar a existência de emaranhamento, mesmo esse existindo para essa condição no modelo, conforme podemos ver nas Figs. (20e) e (20f).

Para as testemunhas, das Figs. (21c), (21d), (21e) e (21f) (construídas utilizando o calor específico) apresentam melhores resultados, pois nesse caso a testemunha foi capaz de detectar emaranhamento tanto para $J > 0$ quanto $J < 0$. Podemos notar também que para ambas as condições de J os gráficos das testemunhas são iguais, devido ao estado fundamental do modelo ser o mesmo.

Com isso terminamos a discussão dos resultados para os modelos bipartidos. Podemos entretanto ressaltar alguns pontos interessantes que surgiram. Entre eles o fato que nossa testemunha se mostrou bem eficiente na verificação da existência de emaranhamento em certos modelos como o Heisenberg XXZ e o XXZ . Em ambos os modelos os resultados obtidos estão de acordo com os teóricos. Em outros modelos como o XYZ , XY isotrópico, XY anisotrópico e de Ising, o critério proposto baseado na susceptibilidade conseguiu identificar emaranhamento apenas para a condição $J > 0$. Por último, a testemunha construída utilizando o calor específico foi capaz de sempre identificar emaranhamento presentes nos sistemas, independentemente do modelo e dos valores da constante de acoplamento. Na próxima seção apresentaremos os resultados obtidos para um modelo tripartido.

Figura 18 – Heisenberg XXX : Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada na susceptibilidade em função da temperatura e do campo magnético.

[Onde: (a) $\Sigma = 4$, $\Delta = 0$, $J_z = 2$, $J > 0$ e $T = 1$; (b) $\Sigma = -4$, $\Delta = 0$, $J_z = -2$, $J < 0$ e $T = 1$; (c) $\Sigma = 6$, $\Delta = 0$, $J_z = 3$, $J > 0$ e $h = 1$; (d) $\Sigma = 2$, $\Delta = 0$, $J_z = 1$, $J > 0$ e $T = 1$; (e) $\Sigma = -6$, $\Delta = 0$, $J_z = -3$, $J < 0$ e $h = 1$; (f) $\Sigma = -2$, $\Delta = 0$, $J_z = -1$, $J < 0$ e $T = 1$.]

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 19 – Heisenberg XXX : Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada no calor específico em função da temperatura e do campo magnético.

[Onde: (a) $\Sigma = 4$, $\Delta = 0$, $J_z = 2$, $J > 0$ e $T = 1$; (b) $\Sigma = -4$, $\Delta = 0$, $J_z = -2$, $J < 0$ e $T = 1$; (c) $\Sigma = 4$, $\Delta = 0$, $J_z = 2$, $J > 0$ e $h = 1$; (d) $\Sigma = 4$, $\Delta = 0$, $J_z = 2$, $J > 0$ e $T = 3$; (e) $\Sigma = -4$, $\Delta = 0$, $J_z = -2$, $J < 0$ e $h = 3$; (f) $\Sigma = -4$, $\Delta = 0$, $J_z = -2$, $J < 0$ e $T = 2$.]

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.6 Resultados para sistemas tripartidos

Nesta seção mostraremos os resultados da aplicação da testemunha de emaranhamento térmica desenvolvida na seção (5.4) para sistemas tripartidos. A aplicação foi feita utilizando a susceptibilidade e o calor específico. Assim, considere um sistema de três q-bits descrito pelo Hamiltoniano ¹⁰⁷

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{J}{2} \left(S_A^x \otimes S_B^x \otimes \mathbb{1}_C + \mathbb{1}_A \otimes S_B^x \otimes S_C^x + S_A^x \otimes \mathbb{1}_B \otimes S_C^x \right. \\ & \left. + S_A^y \otimes S_B^y \otimes \mathbb{1}_C + \mathbb{1}_A \otimes S_B^y \otimes S_C^y + S_A^y \otimes \mathbb{1}_B \otimes S_C^y \right) \\ & + \frac{h}{2} (S_A^z \otimes \mathbb{1}_B \otimes \mathbb{1}_C + \mathbb{1}_A \otimes S_B^z \otimes \mathbb{1}_C + \mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B \otimes S_C^z). \end{aligned} \quad (5.104)$$

As autoenergias e respectivos autoestados do Hamiltoniano são

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{3h}{2} \Rightarrow |000\rangle, \\ E_1 &= \frac{-3h}{2} \Rightarrow |111\rangle, \\ E_{W_1} &= \frac{1}{2} (h + 4J) \Rightarrow |W_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle), \\ E_{W_2} &= \frac{1}{2} (h - 2J) \Rightarrow |W_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|001\rangle + q|010\rangle + q^2|100\rangle), \\ E_{W_3} &= \frac{1}{2} (h - 2J) \Rightarrow |W_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|001\rangle + q^2|010\rangle + q|100\rangle), \\ E_{W_4} &= -\frac{1}{2} (h - 4J) \Rightarrow |W_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|011\rangle + |101\rangle + |110\rangle), \\ E_{W_5} &= -\frac{1}{2} (h + 2J) \Rightarrow |W_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|011\rangle + q|101\rangle + q^2|110\rangle), \\ E_{W_6} &= -\frac{1}{2} (h + 2J) \Rightarrow |W_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|011\rangle + q^2|101\rangle + q|110\rangle), \end{aligned} \quad (5.105)$$

onde $q = e^{2\pi i/3}$. Assim, para o sistema em equilíbrio térmico, o operador densidade é escrito como $\rho_{ABC} = e^{-\beta\mathcal{H}}/Z$, em que $\beta = 1/k_B T$ e $Z = 2 \cosh(3\beta h/2) + 2e^{-2\beta J} \cosh(\beta h/2) + 4e^{\beta J} \cosh(\beta h/2)$ é a função partição do sistema.

As probabilidades do sistema podem ser vistas nas Figs. (22a) e (22b). Para a condição $J > 0$ podemos notar que somente entre o intervalo $h = \pm J$ o estado fundamental do sistema é emaranhado. Para $J < 0$ o processo é similar, porém temos que o intervalo é $h = \pm 2J$. Os outros gráficos representam nossa testemunha de emaranhamento tripartida construída a partir da susceptibilidade. Com elas podemos observar que para o caso de $J > 0$, apresentadas nas Figs. (22c) e (22d), as testemunhas apesar de detectarem o emaranhamento não se mostraram eficientes para tal modelo. Já para $J < 0$ as testemunhas infelizmente não foram capazes de observar emaranhamento (ver Figs. (22e) e (22f)). Considerando agora as testemunhas baseadas no calor específico, notamos que elas conseguiram observar o emaranhamento de maneira um pouco mais eficiente que

o caso anterior, tanto para as constantes de acoplamento $J > 0$ como $J < 0$ (ver Figs. (23c), (23d), (23e) e (23f)) Entretanto, ainda estamos longe dos resultados obtidos para os sistemas bipartidos mostrados anteriormente na seção (5.5). Desta maneira, encerramos a discussão dos resultados apresentados sobre as testemunhas de emaranhamento térmicas obtidas a partir de um critério geral estabelecido nas seções (5.3) e (5.4).

Figura 20 – Ising: Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada na susceptibilidade em função da temperatura e do campo magnético.

[Onde: (a) $\Sigma = 1$, $\Delta = -1$, $J_z = 0$, $J > 0$ e $T = 1$; (b) $\Sigma = -1$, $\Delta = 1$, $J_z = 0$, $J < 0$ e $T = 1$; (c) $\Sigma = 1$, $\Delta = -1$, $J_z = 0$, $J > 0$ e $h = 1$; (d) $\Sigma = 1$, $\Delta = -1$, $J_z = 0$, $J > 0$ e $T = 1$; (e) $\Sigma = -1$, $\Delta = 1$, $J_z = 0$, $J < 0$ e $h = 1$; (f) $\Sigma = -1$, $\Delta = 1$, $J_z = 0$, $J < 0$ e $T = 1$.]

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 21 – Ising: Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada no calor específico em função da temperatura e do campo magnético.

[Onde: (a) $\Sigma = 1, \Delta = -1, J_z = 0, J > 0$ e $T = 1$; (b) $\Sigma = -1, \Delta = 1, J_z = 0, J < 0$ e $T = 1$; (c) $\Sigma = 1, \Delta = -1, J_z = 0, J > 0$ e $h = 1$; (d) $\Sigma = 1, \Delta = -1, J_z = 0, J > 0$ e $T = 1$; (e) $\Sigma = -1, \Delta = 1, J_z = 0, J < 0$ e $h = 1$; (f) $\Sigma = -1, \Delta = 1, J_z = 0, J < 0$ e $T = 1$.]

Figura 22 – Heisenberg XX tripartido: Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada na susceptibilidade em função da temperatura e do campo magnético. Onde $EW(ABC)$ representa a testemunha tripartida e $EW(AB)$ a bipartida.

[Os valores das constantes são: (a) $J = 1$ e $T = 1$; (b) $J = -1$ e $T = 1$; (c) $J = 1$ e $h = 1$; (d) $J = 1$ e $T = 1$; (e) $J = -1$ e $h = 1$; (f) $J = -1$ e $T = 1$.]

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 23 – Heisenberg XX tripartido: Probabilidades e testemunha de emaranhamento baseada no calor específico em função da temperatura e do campo magnético. Onde $EW(ABC)$ representa a testemunha tripartida e $EW(AB)$ a bipartida.

[Os valores das constantes são: (a) $J = 1$ e $T = 1$; (b) $J = -1$ e $T = 1$; (c) $J = 1$ e $h = 1$; (d) $J = 1$ e $T = 1$; (e) $J = -1$ e $h = 1$; (f) $J = -1$ e $T = 1$.]

Fonte: Elaborada pelo autor.

6 Conclusões e perspectivas

Nessa dissertação desenvolvemos um critério para a detecção de emaranhamento quântico, em que utilizamos observáveis gerais de spin adicionando termos de interações entre eles. A construção desse critério foi baseada na covariância do observável e posteriormente reduzida a variância do mesmo, já que esta é mais adequada para a aplicação em sistemas físicos. Assim, com essa redução fomos capazes de aplicar nosso critério a grandezas como a susceptibilidade e o calor específico, pois ambas são quantidades também definidas usando variâncias. A motivação de aplicarmos nosso critério a essas funções, foi descrita no capítulo (4). Nele, foi demonstrado que tanto a susceptibilidade como o calor específico podem ser aplicadas como testemunhas de emaranhamento térmicas. Esse fato nos permitiu determinar a existência de emaranhamento em sistemas de matéria condensada na condição de temperaturas finitas.

No capítulo (5) foi feito o desenvolvimento do nosso critério geral, sendo que primeiramente foi elaborado para sistemas bipartidos e depois para sistemas tripartidos. Além disso, em ambos os casos mostramos como podemos fazer a conexão do critério com a susceptibilidade e o calor específico, obtendo dessa maneira testemunhas de emaranhamento baseadas na variância dos observáveis. A vantagem dessa testemunha se deve ao fato dela poder ser aplicada a sistemas bipartidos, tripartidos ou ainda multipartidos, onde para o último caso, basta generalizar os resultados obtidos considerando todas as interações entre os spins. É importante mencionar que para a construção da testemunha tripartida, não levamos em conta a existência de emaranhamento bipartido compondo o sistema. Por fim aplicamos nossa testemunha nos modelos de Ising transversal⁹ e Heisenberg: XYZ ,¹⁰ XY simétrico, XY antisimétrico,¹¹ XXZ ¹² e XXX ¹³. Em todos os modelos o critério foi aplicado para as condições ferromagnética ($J > 0$) e antiferromagnética ($J < 0$).

Os resultados do nosso critério se mostraram eficientes na verificação da existência de emaranhamento nos modelos de Heisenberg XXZ e o XXZ , sendo que no dois casos os resultados ficaram de acordo com o esperado teoricamente. Nos modelos de Heisenberg XYZ , XY isotrópico, XY anisotrópico e de Ising, o critério baseado na susceptibilidade conseguiu identificar emaranhamento apenas para a condição $J > 0$, enquanto que para $J < 0$ não, mesmo a concorrência mostrando que o sistema continha emaranhamento. Já a testemunha baseada no calor específico se mostrou mais eficiente, sendo capaz de sempre identificar emaranhamento presentes nos sistemas, independentemente do modelo e dos valores da constante de acoplamento. Para o caso tripartido, o critério não obteve resultados satisfatórios, sendo que a testemunha baseada na susceptibilidade apesar de detectar o emaranhamento, elas não se mostraram eficientes para tal modelo. Enquanto que as testemunhas baseadas no calor específico conseguiram observar emaranhamento,

tanto para $J > 0$ como $J < 0$, de maneira um pouco mais eficiente.

Talvez seja interessante no futuro, fazermos a otimização dessas testemunhas e no caso tripartido adicionar as biseparabilidades do sistema. Além disso, aplicarmos nossa testemunha em outros modelos de três q-bits para verificarmos se ela também se mostra mais eficiente. Outro aspecto interessante seria tentar usar esse critério em modelos multipartidos.

Referências

- 1 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, v. 47, n. 10, p. 777, 1935.
- 2 SCHRÖDINGER, E. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, v. 23, n. 49, p. 823–828, 1935.
- 3 EKERT, A. K. Quantum cryptography based on Bell's theorem. *Physical Review Letters*, v. 67, n. 6, p. 661, 1991.
- 4 BENNETT, C. H. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters*, v. 70, n. 13, p. 1895, 1993.
- 5 RAUSSENDORF, R.; BRIEGEL, H. J. A one-way quantum computer. *Physical Review Letters*, v. 86, n. 22, p. 5188, 2001.
- 6 BRUSS, D. Characterizing entanglement. *Journal of Mathematical Physics*, v. 43, n. 9, p. 4237–4251, 2002.
- 7 HORODECKI, M.; HORODECKI, P.; HORODECKI, R. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A*, v. 223, n. 1, p. 1–8, 1996.
- 8 HOFMANN, H. F.; TAKEUCHI, S. Violation of local uncertainty relations as a signature of entanglement. *Physical Review A*, v. 68, n. 3, p. 032103, 2003.
- 9 OSBORNE, T. J.; NIELSEN, M. A. Entanglement in a simple quantum phase transition. *Physical Review A*, v. 66, n. 3, p. 032110, 2002.
- 10 RIGOLIN, G. Thermal entanglement in the two-qubit Heisenberg XYZ model. *International Journal of Quantum Information*, v. 2, n. 03, p. 393–405, 2004.
- 11 ANTENEODO, C.; SOUZA, A. M. Enhancement of thermal entanglement in two-qubit XY models. *Journal of Optics B*, v. 5, n. 1, p. 73, 2003.
- 12 ROSSIGNOLI, R.; CANOSA, N. Global thermal entanglement in n-qubit systems. *Physical Review A*, v. 72, n. 1, p. 012335, 2005.
- 13 WANG, X.; ZANARDI, P. Quantum entanglement and Bell inequalities in Heisenberg spin chains. *Physics Letters A*, v. 301, n. 1, p. 1–6, 2002.
- 14 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum computation and quantum information*. New York: Cambridge University Press, 2010.
- 15 BELL, J. S. et al. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics*, v. 1, n. 3, p. 195–200, 1964.
- 16 BELL, J. S.; ASPECT, A. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- 17 OLIVEIRA, I. S. *Física moderna para iniciados, interessados e aficionados*. São Paulo: Livraria da Física, 2005.

- 18 OLIVEIRA, I. S. *Física moderna para iniciados, interessados e aficionados*. São Paulo: Livraria da Física, 2005.
- 19 PESSOA JUNIOR, O. *Conceitos de física quântica 1*. São Paulo: Livraria da Física, 2003.
- 20 GENOVESE, M. Research on hidden variable theories: a review of recent progresses. *Physics Reports*, v. 413, n. 6, p. 319–396, 2005.
- 21 CLAUSER, J. F. et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical Review Letters*, v. 23, n. 15, p. 880, 1969.
- 22 CIREL'SON, B. S. Quantum generalizations of Bell's inequality. *Letters in Mathematical Physics*, v. 4, n. 2, p. 93–100, 1980.
- 23 AHARONOV, Y.; ROHRLICH, D. *Quantum paradoxes: quantum theory for the perplexed*. Berlin: Wiley-VCH, 2005.
- 24 HORODECKI, R. et al. Quantum entanglement. *Reviews of Modern Physics*, v. 81, n. 2, p. 865, 2009.
- 25 WERNER, R. F. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Physical Review A*, v. 40, n. 8, p. 4277, 1989.
- 26 SPERLING, J.; VOGEL, W. Necessary and sufficient conditions for bipartite entanglement. *Physical Review A*, v. 79, n. 2, p. 022318, 2009.
- 27 GÜHNE, O.; TÓTH, G. Entanglement detection. *Physics Reports*, v. 474, n. 1, p. 1–75, 2009.
- 28 PERES, A. Separability criterion for density matrices. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 8, p. 1413, 1996.
- 29 MINTERT, F. et al. Measures and dynamics of entangled states. *Physics Reports*, v. 415, n. 4, p. 207–259, 2005.
- 30 HORODECKI, M.; HORODECKI, P. Reduction criterion of separability and limits for a class of distillation protocols. *Physical Review A*, v. 59, n. 6, p. 4206, 1999.
- 31 VEDRAL, V.; PLENIO, M. B. Entanglement measures and purification procedures. *Physical Review A*, v. 57, n. 3, p. 1619, 1998.
- 32 DONALD, M. J.; HORODECKI, M.; RUDOLPH, O. The uniqueness theorem for entanglement measures. *Journal of Mathematical Physics*, v. 43, n. 9, p. 4252–4272, 2002.
- 33 PLENIO, M. B.; VIRMANI, S. *An introduction to entanglement measures*. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0504163v3.pdf>>. Acesso em: 16 de outubro de 2014.
- 34 ŻYCZKOWSKI, K. et al. Volume of the set of separable states. *Physical Review A*, v. 58, n. 2, p. 883, 1998.
- 35 EISERT, J.; PLENIO, M. B. A comparison of entanglement measures. *Journal of Modern Optics*, v. 46, n. 1, p. 145–154, 1999.

- 36 VIDAL, G.; WERNER, R. F. Computable measure of entanglement. *Physical Review A*, v. 65, n. 3, p. 032314, 2002.
- 37 BRANDAO, F. G. *Entanglement theory and the quantum simulation of many-body physics*. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/0810.0026v2.pdf>>. Acesso em: 5 de novembro de 2014.
- 38 BENNETT, C. H. et al. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Physical Review A*, v. 54, n. 5, p. 3824, 1996.
- 39 WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, v. 80, n. 10, p. 2245, 1998.
- 40 FUBINI, A. et al. Reading entanglement in terms of spin configurations in quantum magnets. *The European Physical Journal D*, v. 38, n. 3, p. 563–570, 2006.
- 41 YU, T.; EBERLY, J. Evolution from entanglement to decoherence of bipartite mixed X states. *Quantum Information & Computation*, v. 7, n. 5, p. 459–468, 2007.
- 42 AUDENAERT, K.; VERSTRAETE, F.; MOOR, B. D. Variational characterizations of separability and entanglement of formation. *Physical Review A*, v. 64, n. 5, p. 052304, 2001.
- 43 GITTINGS, J.; FISHER, A. *An efficient numerical method for calculating the entanglement of formation of arbitrary mixed quantum states of any dimension*. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0302018v2.pdf>>. Acesso em: 11 de novembro de 2014.
- 44 BRUSS, D. et al. Reflections upon separability and distillability. *Journal of Modern Optics*, v. 49, n. 8, p. 1399–1418, 2002.
- 45 TERHAL, B. M. Bell inequalities and the separability criterion. *Physics Letters A*, v. 271, n. 5, p. 319–326, 2000.
- 46 LEWENSTEIN, M. et al. Optimization of entanglement witnesses. *Physical Review A*, v. 62, n. 5, p. 052310, 2000.
- 47 BOURENNANE, M. et al. Experimental detection of multipartite entanglement using witness operators. *Physical Review Letters*, v. 92, n. 8, p. 087902, 2004.
- 48 GÜHNE, O. et al. Experimental detection of entanglement via witness operators and local measurements. *Journal of Modern Optics*, v. 50, n. 6-7, p. 1079–1102, 2003.
- 49 GÜHNE, O. et al. Detection of entanglement with few local measurements. *Physical Review A*, v. 66, n. 6, p. 062305, 2002.
- 50 SVETLICHNY, G. Distinguishing three-body from two-body nonseparability by a Bell-type inequality. *Physical Review D*, v. 35, n. 10, p. 3066, 1987.
- 51 GREENBERGER M. A. HORNE, A. Z. D. M. Going beyond Bell's theorem. In: KAFATOS, M. (Ed.). *Bell's theorem, quantum theory, and conceptions of the Universe*. Berlin: Springer, 1989. v. 37, p. 69–72.
- 52 DÜR, W.; VIDAL, G.; CIRAC, J. I. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Physical Review A*, v. 62, n. 6, p. 062314, 2000.

- 53 SCARANI, V.; Gisin, N. Spectral decomposition of Bell's operators for qubits. *Journal of Physics A*, v. 34, n. 30, p. 6043, 2001.
- 54 KOASHI, M.; BUŽEK, V.; IMOTO, N. Entangled webs: tight bound for symmetric sharing of entanglement. *Physical Review A*, v. 62, n. 5, p. 050302, 2000.
- 55 SEEVINCK, M.; UFFINK, J. Sufficient conditions for three-particle entanglement and their tests in recent experiments. *Physical Review A*, v. 65, n. 1, p. 012107, 2001.
- 56 GÜHNE, O.; TÓTH, G.; BRIEGEL, H. J. Multipartite entanglement in spin chains. *New Journal of Physics*, v. 7, n. 1, p. 229, 2005.
- 57 GÜHNE, O.; TÓTH, G. Energy and multipartite entanglement in multidimensional and frustrated spin models. *Physical Review A*, v. 73, n. 5, p. 052319, 2006.
- 58 LEIBFRIED, D. et al. Toward Heisenberg-limited spectroscopy with multiparticle entangled states. *Science*, v. 304, n. 5676, p. 1476–1478, 2004.
- 59 GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Quantum-enhanced measurements: beating the standard quantum limit. *Science*, v. 306, n. 5700, p. 1330–1336, 2004.
- 60 GOTTESMAN, D.; CHUANG, I. L. Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations. *Nature*, v. 402, n. 6760, p. 390–393, 1999.
- 61 CHEN, K.; LO, H.-K. *Multi-partite quantum cryptographic protocols with noisy GHZ states*. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0404133.pdf>>. Acesso em: 25 de Novembro de 2014.
- 62 CHRISTANDL, M.; WEHNER, S. *Quantum anonymous transmissions*. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0409201v2.pdf>>. Acesso em: 11 de dezembro de 2014.
- 63 DICKE, R. Coherence in spontaneous radiation processes. *Physical Review*, v. 93, n. 1, p. 99, 1954.
- 64 TÓTH, G. Detection of multipartite entanglement in the vicinity of symmetric Dicke states. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 24, n. 2, p. 275–282, 2007.
- 65 GÜHNE, O.; BODOKY, F.; BLAAUBOER, M. Multipartite entanglement under the influence of decoherence. *Physical Review A*, v. 78, n. 6, p. 060301, 2008.
- 66 WEINFURTER, H.; ŻUKOWSKI, M. Four-photon entanglement from down-conversion. *Physical Review A*, v. 64, n. 1, p. 010102, 2001.
- 67 HORODECKI, M.; HORODECKI, P.; HORODECKI, R. *Separability of mixed quantum states: linear contractions approach*. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0206008v1.pdf>>. Acesso em: 20 de novembro de 2014.
- 68 WOCJAN, P.; HORODECKI, M. Characterization of combinatorially independent permutation separability criteria. *Open Systems & Information Dynamics*, v. 12, n. 04, p. 331–345, 2005.

- 69 CLARISSE, L.; WOCJAN, P. *On independent permutation separability criteria*. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0504160v2.pdf>>. Acesso em: 27 de novembro de 2014.
- 70 SEEVINCK, M.; POLDERSVELDTWEG, D. van. *Parts and wholes*. 2008. 286 p. Ph.D thesis - University of Utrecht,. Utrecht(Holanda), 2008.
- 71 SEEVINCK, M.; UFFINK, J. Partial separability and entanglement criteria for multiqubit quantum states. *Physical Review A*, v. 78, n. 3, p. 032101, 2008.
- 72 UFFINK, J.; SEEVINCK, M. Strengthened Bell inequalities for orthogonal spin directions. *Physics Letters A*, v. 372, n. 8, p. 1205–1212, 2008.
- 73 ACIN, A. et al. Classification of mixed three-qubit states. *Physical Review Letters*, v. 87, n. 4, p. 040401, 2001.
- 74 TÓTH, G.; GÜHNE, O. Detecting genuine multipartite entanglement with two local measurements. *Physical Review Letters*, v. 94, n. 6, p. 060501, 2005.
- 75 DURKIN, G. A.; SIMON, C. Multipartite entanglement inequalities via spin vector geometry. *Physical Review Letters*, v. 95, n. 18, p. 180402, 2005.
- 76 BADZIAG, P. et al. Experimentally friendly geometrical criteria for entanglement. *Physical Review Letters*, v. 100, n. 14, p. 140403, 2008.
- 77 KASZLIKOWSKI, D.; KAY, A. A witness of multipartite entanglement strata. *New Journal of Physics*, v. 10, n. 5, p. 053026, 2008.
- 78 SOUZA, A. M. de. *Um Estudo de emaranhamento e desigualdades de Bell em sistemas térmicos magnéticos*. 2008. 164 p. Tese (Doutorado) - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas/MFC, Rio de Janeiro, 2008. .
- 79 NIELSEN, M. A. *Quantum information theory*. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0011036v1.pdf>>. Acesso em: 2 de dezembro de 2014.
- 80 VEDRAL, V. Quantifying entanglement in macroscopic systems. *Nature*, v. 453, n. 7198, p. 1004–1007, 2008.
- 81 ARNESEN, M.; BOSE, S.; VEDRAL, V. Natural thermal and magnetic entanglement in the 1D Heisenberg model. *Physical Review Letters*, v. 87, n. 1, p. 017901, 2001.
- 82 GUNLYCKE, D. et al. Thermal concurrence mixing in a one-dimensional Ising model. *Physical Review A*, v. 64, n. 4, p. 042302, 2001.
- 83 BRUKNER, C.; VEDRAL, V. *Macroscopic thermodynamical witnesses of quantum entanglement*. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0406040v1.pdf>>. Acesso em: 27 de novembro de 2014.
- 84 WIEŚNIAK, M.; VEDRAL, V.; BRUKNER, Č. Heat capacity as an indicator of entanglement. *Physical Review B*, v. 78, n. 6, p. 064108, 2008.
- 85 WIEŚNIAK, M.; VEDRAL, V.; BRUKNER, Č. Magnetic susceptibility as a macroscopic entanglement witness. *New Journal of Physics*, v. 7, n. 1, p. 258, 2005.

- 86 WIESNIAK, M.; VEDRAL, V.; BRUKNER, C. *Heat capacity as a witness of entanglement*. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0508193v3.pdf>>.
- 87 SINGH, H. et al. Experimental quantification of entanglement through heat capacity. *New Journal of Physics*, v. 15, n. 11, p. 113001, 2013.
- 88 GHOSH, S. et al. Entangled quantum state of magnetic dipoles. *Nature*, v. 425, n. 6953, p. 48–51, 2003.
- 89 VÉRTESI, T.; BENE, E. Thermal entanglement in the nanotubular system $\text{Na}_2\text{V}_3\text{O}_7$. *Physical Review B*, v. 73, n. 13, p. 134404, 2006.
- 90 BRUKNER, Č.; VEDRAL, V.; ZEILINGER, A. Crucial role of quantum entanglement in bulk properties of solids. *Physical Review A*, v. 73, n. 1, p. 012110, 2006.
- 91 RAPPOPORT, T. et al. Experimental observation of quantum entanglement in low-dimensional spin systems. *Physical Review B*, v. 75, n. 5, p. 054422, 2007.
- 92 BOGANI, L.; WERNSDORFER, W. Molecular spintronics using single-molecule magnets. *Nature Materials*, v. 7, n. 3, p. 179–186, 2008.
- 93 SOUZA, A. et al. Experimental determination of thermal entanglement in spin clusters using magnetic susceptibility measurements. *Physical Review B*, v. 77, n. 10, p. 104402, 2008.
- 94 REIS, M. et al. Homometallic ferrimagnetism in the zig-zag chain compound $\text{Na}_2\text{Cu}_5\text{Si}_4\text{O}_{14}$. *Physical Review B*, v. 73, n. 21, p. 214415, 2006.
- 95 AMARAL, V. S.; ROCHA, J. Synthesis, crystal structure and magnetic characterization of $\text{Na}_2\text{Cu}_5(\text{Si}_2\text{O}_7)_2$: An inorganic ferrimagnetic chain. *Journal of Solid State Chemistry*, v. 180, p. 16–21, 2007.
- 96 REIS, M. et al. Specific heat of clustered low dimensional magnetic systems. *Journal of Physics*, v. 19, n. 44, p. 446203, 2007.
- 97 KAHN, O. *Molecular magnetism*. New York: VCH Publishers, Inc.(USA), 1993. 393 p.
- 98 PINTO, D. O. S. *Emaranhamento térmico e simulações quânticas de sistemas magnéticos por ressonância magnética nuclear*. 2009. 122 p. Tese (Doutorado) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas/MFC, Rio de Janeiro, 2009.
- 99 BONNER, J. C. et al. Alternating linear-chain antiferromagnetism in copper nitrate $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2 \cdot 2.5 \text{H}_2\text{O}$. *Physical Review B*, v. 27, n. 1, p. 248, 1983.
- 100 GIOVANNETTI, V. et al. Characterizing the entanglement of bipartite quantum systems. *Physical Review A*, v. 67, n. 2, p. 022320, 2003.
- 101 HUANG, Y. Variance-based uncertainty relations. *Physical Review A*, v. 86, n. 2, p. 024101, 2012.
- 102 GISIN, N. et al. Quantum cryptography. *Reviews of modern physics*, v. 74, n. 1, p. 145, 2002.
- 103 DAMGÅRD, I. B. et al. Cryptography in the bounded-quantum-storage model. *SIAM Journal on Computing*, v. 37, n. 6, p. 1865–1890, 2008.

-
- 104 MASSAR, S.; SPINDEL, P. Uncertainty relation for the discrete Fourier transform. *Physical Review Letters*, v. 100, n. 19, p. 190401, 2008.
- 105 CANDÈS, E. J.; ROMBERG, J.; TAO, T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *Information Theory, IEEE Transactions on*, v. 52, n. 2, p. 489–509, 2006.
- 106 WU, S.; YU, S.; MØLMER, K. Entropic uncertainty relation for mutually unbiased bases. *Physical Review A*, v. 79, n. 2, p. 022104, 2009.
- 107 YEO, Y. Studying the thermally entangled state of a three-qubit Heisenberg XX ring via quantum teleportation. *Physical Review A*, v. 68, n. 2, p. 022316, 2003.