UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Gentil Dias de Moraes Neto

Transferência e manipulação
de informação quântica
via tunelamento dissipativo não local

São Carlos

2013

Gentil Dias de Moraes Neto

Transferência de estados e manipulação de
informação quântica via tunelamento
dissipativo não-local

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Física Básica
Orientador: Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa

Versão corrigida

(versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos

2013

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Dias de Moraes Neto, Gentil
Transferência de estados e manipulação de
informação quântica via tunelamento dissipativo não
local / Gentil Dias de Moraes Neto; orientador Miled
Hassan Youssef Moussa - versão corrigida -- São
Carlos, 2013.
163 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos,
Universidade de São Paulo, 2013.

1. Comunicação e informação quântica. 2.
Decoerência. 3. Tunelamento. 4. Não localidade e
emaranhamento. I. Hassan Youssef Moussa, Miled,
orient. II. Título.

AGRADECIMENTOS

- A minha família pelo apoio incondicional;
- Ao Prof. Dr. Miled H. Y. Moussa;
- Aos amigos e professores do IFSC
- Aos Amigos de São Carlos;

*Este trabalho foi financiado pela
FAPESP*

Resumo

MORAES NETO, G. D. **Transferência de estados e manipulação de informação quântica via tunelamento dissipativo não-Local**. 2013. 163 p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

Nesta tese abordamos o problema de transferência e manipulação de informação quântica em sistemas dissipativos. Inicialmente apresentamos uma técnica para construir, dentro de redes bosônicas dissipativas, canais livres de decoerência (CLD): um grupo de modos normais de osciladores com taxas de amortecimento efetivas nulas. Verificamos que os estados protegidos dentro do CLD definem subespaços livres de decoerência (SLD) quando mapeados de volta para a base dos osciladores naturais da rede. Portanto, a nossa técnica para obter canais protegidos formados por modos normais é uma forma alternativa para construir SLD, que oferece vantagens em relação ao método convencional. Nosso protocolo permite o cálculo de todos os estados da rede protegidos de uma só vez, assim como leva naturalmente ao conceito de subespaço quase livre de decoerência (SQLD), dentro do qual um estado de superposição é quase completamente protegido. O conceito de SQLD, é mais fraco do que o dos SLD, pode proporcionar um mecanismo mais manejável para controlar decoerência. Em seguida desenvolvemos um protocolo para transferência quase perfeita de estados de poláriton de um sistema emissor para um receptor, separados espacialmente, ambos acoplados por um canal de transmissão não ideal que é modelado por uma rede de cavidades dissipativas. Esse protocolo consiste no acoplamento dispersivo entre o estado de poláriton preparado no emissor com os modos normais da rede que forma o canal, o que possibilita que o estado tunele para o receptor. Após a obtenção de um Hamiltoniano efetivo para o acoplamento entre o emissor e receptor, calculamos a fidelidade para a transferência de alguns estados de poláriton, por exemplo, estados tipo gato de Schrödinger. Mostramos que as taxas de decaimento da fidelidade são proporcionais a cooperatividade, parâmetro esse que avalia a relação entre a taxa de dissipação e o acoplamento efetivo. Analisamos a dependência da fidelidade e do tempo de transferência em relação à topologia da rede. Por fim, propomos o mecanismo de tunelamento não local para transferência de estados bosônicos e fermiônicos com alta fidelidade. Demonstramos que a incoerência decorrente das não idealidades quânticas do canal é quase totalmente contornada pelo mecanismo de tunelamento que possibilita um processo de transferência de alta fidelidade. Aplicamos esse mecanismo para transferência e processamento de informações entre múltiplos circuitos quântico (CQs) não ideais. Um conjunto de saídas é simultaneamente acoplado ao conjunto correspondente de entradas de outro QC espacialmente separado do primeiro, através de um único canal quântico não ideal. Mostramos que além da transferência de estados, podemos realizar operações lógicas entre qubits distantes e gerar uma pletora de estados quânticos emaranhados.

Palavras-chave: Comunicação e informação quântica. Não-localidade e emaranhamento quântico. Decoerência. Tunelamento.

Abstract

MORAES NETO, G. D. **State transfer and manipulation of quantum information by non-local dissipative tunneling.** 2013. 163 p. Tese (Doutorado em Ciências) – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

In this thesis we address the problem of transfer and manipulation of quantum information in dissipative systems. First we present a technique to build, within a dissipative bosonic network, decoherence-free channels (DFCs): a group of normal-mode oscillators with null effective damping rates. We verify that the states protected within the DFC define the well-known decoherence-free subspaces (DFSs) when mapped back into the natural network oscillators. Therefore, our technique to build protected normal-mode channels turns out to be an alternative way to build DFSs, which offers advantages over the conventional method. It enables the computation of all the network-protected states at once, as well as leading naturally to the concept of the decoherence quasi-free subspace (DQFS), inside which a superposition state is quasi-completely protected against decoherence. The concept of the DQFS, weaker than that of the DFS, may provide a more manageable mechanism to control decoherence. Finally, as an application of the DQFSs, we show how to build them for quasi-perfect state transfer in networks of coupled quantum dissipative oscillators. Then we present a scheme for quasi perfect transfer of polariton states from a sender to a spatially separated receiver, both composed of high-quality cavities filled by atomic samples. The sender and the receiver are connected by a nonideal transmission channel the data bus modelled by a network of lossy empty cavities. In particular, we analyze the influence of a large class of data-bus topologies on the fidelity and transfer time of the polariton state. Moreover, we also assume dispersive couplings between the polariton fields and the data-bus normal modes in order to achieve a tunneling-like state transfer. Such a tunneling-transfer mechanism, by which the excitation energy of the polariton effectively does not populate the data-bus cavities, is capable of attenuating appreciably the dissipative effects of the data-bus cavities. After deriving a Hamiltonian for the effective coupling between the sender and the receiver, we show that the decay rate of the fidelity is proportional to a cooperativity parameter that weigh the cost of the dissipation rate against the benefit of the effective coupling strength. The increase of the fidelity of the transfer process can be achieved at the expense of longer transfer times. We also show that the dependence of both the fidelity and the transfer time on the network topology for distinct regimes of parameters. It follows that the data-bus topology can be explored to control the time of the state-transfer process. Finally we propose the nonlocal tunneling mechanism for high-fidelity state transfer between distant parties. We apply this mechanism for high-fidelity information transfer and processing between remote multi-branch nonideal quantum circuits (QCs). We show that in addition to the transfer of states, we can perform logic operations between distant qubits and generate a plethora of entangled quantum states.

Keywords: Quantum communication and information. Entanglement and quantum nonlocality. Tunneling. Decoherence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 -Esquema de uma rede simétrica em que todos os osciladores interagem entre si e com seus respectivos reservatórios R_N	32
Figura 2.2 -Esquema de uma rede linear de osciladores acoplados utilizados para TQPE dentro de um SQLD.	44
Figura 2.3 -Gráfico da fidelidade, contra o tempo escalado $\tilde{\tau}$, calculado <i>a)</i> analiticamente através da equação 2.41, e <i>b)</i> numericamente a partir da equação 2.11a , considerando $N = 30$, $\alpha = 5$, $\omega = 10^4$, e $\eta = 1$, com $\epsilon = 10^2$	53
Figura 2.4 -Gráfico da fidelidade, contra o tempo escalado $\tilde{\tau}$, calculado <i>a)</i> analiticamente através da equação 2.41, e <i>b)</i> numericamente a partir da equação 2.11a , considerando $N = 30$, $\alpha = 5$, $\omega = 10^4$, e $\eta = 1$, com $\epsilon = 10^3$	54
Figura 2.5 -Gráfico da fidelidade, contra o tempo escalado $\tilde{\tau}$, calculado numericamente a partir da equação 2.11a com os mesmos parâmetros da 2.4, exceto pelos valores randômicos de $\epsilon_{\ell\ell'}$ dentro do intervalo $[0.8, 1.2] \times 10^3$	54
Figura 2.6 -Gráfico da excitação media $\langle E \rangle$ em função do tempo escalado $\tilde{\tau}$, para três valores diferentes do parâmetro $\epsilon = 10, 10^2$ e 10^3	55
Figura 3.1 -Esquema do dispositivo de transferência de estado, com o emissor e o receptor acoplado a um canal quântico que consiste em uma rede circular de cavidades dissipativas	59
Figura 3.2 -Esquema do dispositivo de transferência de estado, com o emissor e o receptor acoplado a um canal quântico que consiste em uma rede simétrica de cavidades dissipativas	60

Figura 3.3 –Esquema da configuração atômica Λ , onde g e e indicam o estado fundamental e o excitado que são acoplados através de um nível auxiliar f . O modo da cavidade acopla a transição $g \rightleftharpoons f$ com intensidade ξ_{gf} e dessintonia δ , enquanto que um campo laser de frequência ω_L acopla a transição $e \rightleftharpoons f$ com intensidade Ω_L e dessintonia $\delta - \epsilon$.	61
Figura 3.4 –Fidelidade do processo de transferência, para o tempo escalado $\tilde{\tau}_T$ para o estado inicial $\mathcal{N}_+ (\alpha\rangle_1 + -\alpha\rangle_1) \otimes_{k=2}^{N-1} \beta\rangle_k \otimes 0\rangle_N$, com todos os osciladores do canal quântico, (a) o estado de vácuo $\beta = 0$ ou (b) no estado coerente $\beta = 1$. Considerado uma rede linear degenerada ($v_\ell = \tilde{\epsilon} = 10^5 \tilde{\lambda}$) com $N = 30$, $\zeta = 10^3 \tilde{\lambda}$, $\gamma = \tilde{\lambda}$ e $\alpha = 5$.	72
Figura 3.5 –Fidelidade do processo de transferência, para o tempo escalado $\tilde{\tau}_T$ para os mesmos parâmetros da 3.4 a) , exceto para valores aleatórios de ζ abrangido uniformemente o intervalo $[0.8, 1.2] \times 10^3 \tilde{\lambda}$ em vez do valor fixo $10^3 \tilde{\lambda}$.	73
Figura 4.1 –Representação de dois sistemas quânticos distantes ligados uns aos outros por meio de um canal quântico.	83
Figura 4.2 –Gráfico da fidelidade, contra o tempo escalado $\tilde{\tau}$, calculado <i>a)</i> analiticamente através da equação 4.5, e <i>b)</i> numericamente a partir da equação 4.4	90
Figura 4.3 –Fidelidade do processo de transferência, para o tempo escalado $\tilde{\tau}_T$ para os mesmos parâmetros da Fig.(4.2), exceto a) CQ inicialmente populado $ \alpha ^2 = 1$ b) para valores aleatórios de ζ abrangido uniformemente o intervalo $[0.8, 1.2] \times 10^3 \tilde{\lambda}$ em vez do valor fixo $10^3 \tilde{\lambda}$.	90
Figura 4.4 –Evolução temporal das excitações, do emissor (linha tracejada) e do receptor (linha pontilhada), dimensionados por $ \alpha ^2$. A soma de ambas as excitações é indicada pela linha tracejada-pontilhada, ao passo que a linha cheia mostra a <i>Concurrence</i> do emaranhamento entre os dois ressonadores.	91
Figura 4.5 –Esboço da configuração do potencial efetivo para ilustrar a sobreposição indiretas das funções de onda do emissor e do receptor através do QC.	92
Figura B.1 –Exemplos de cristais fotônicos uni, bi e tridimensional. As diferentes cores representam materiais com diferentes constantes dielétricas.	127
Figura B.2 –Distribuição dos modos nas cavidades acopladas em um cristal fotônico.	127
Figura B.3 –Cadeia de cavidades acopladas. Acoplamento devido a ondas evanescentes (verde) dos modos das cavidades adjacentes.	130
Figura C.1 –Representação esquemática da configuração atômica de um átomo de quatro níveis.	134
Figura C.2 –Representação esquemática dos estados, para o estado fundamental, primeiro e segundo manifolds.	139

SUMÁRIO

1	Um panorama atual da ótica quântica	19
2	De canais livres de decoerência para subespaços livres e quase livres de decoerência em redes bosônica dissipativas	27
2.1	Introdução	27
2.2	Rede de osciladores harmônicos dissipativos	31
2.2.1	O modelo	31
2.2.2	Equação mestra para os osciladores naturais e dos modos normais	32
2.3	Taxas de amortecimento dos osciladores naturais e dos modos normais . .	34
2.3.1	Ponderando os canais diretos e indiretos	36
2.3.2	O caso de um reservatório comum para toda a rede	36
2.4	Solução da equação mestra para os osciladores naturais	37
2.5	As condições para a construção de CLD	39
2.5.1	Canal livre de decoerência	39
2.5.2	Gerando SLD	40
2.5.3	De CLD para SLD	42

2.5.4	Subespaço quase livre de decoerência	43
2.6	Aplicação: TQPE dentro de um SQLD	43
2.6.1	Interação efetiva emissor-receptor (H_{eff}) e matriz de amortecimento (Γ_{eff})	46
2.6.2	TQPE numa rede linear com $N = 4$: um tratamento analítico	48
2.7	TQPE dentro de um SQLD: tratamento de redes grandes através da inte- ração efetiva e da matriz amortecimento	50
2.8	Observações finais	55
3	Engenharia de interações para transferência quase perfeita de estados de poláriton através de redes bosônicas não ideais com distintas topologias	57
3.1	Introdução	57
3.2	O modelo	59
3.2.1	Estados de fock de poláriton	62
3.2.2	Acoplando o emissor e o receptor ao canal de transmissão.	63
3.2.3	Interação efetiva entre emissor-receptor	65
3.2.4	Exemplos	66
3.3	Rede dissipativa	67
3.3.1	Fidelidade do processo de transferência	69
3.3.2	Imperfeições do CQ: intensidades de acoplamento randômicas e efeito da excitação inicial.	71
3.4	Topologias ótimas do canal de transmissão	73
3.4.1	Cooperatividade	73
3.4.2	Acoplamento fraco e forte	73
3.4.3	Topologias da rede	74
3.4.3.1	$\Delta_{\max}^{(1)} = \Delta_{\max}^{(2)} = \Delta_{\max}$	76

3.4.3.2	$\Delta_{\min}^{(1)} \gg \Delta_{\min}^{(2)}$	77
3.4.4	Valores realistas	77
3.4.5	Armadilhamento de poláriton	78
3.5	Conclusão	79
4	Canais coloridos para transferência de informação e de processamento remoto entre circuitos quânticos ramificados	81
4.1	Introdução	81
4.2	O modelo da rede	83
4.2.1	Acoplamentos efetivo entre as extremidades de entrada-saída . . .	85
4.2.2	Taxas de decaimentos efetivas, fidelidade e tempo de transferência	86
4.2.3	Validade da equação mestra efetiva	88
4.3	Tunelamento quântico dissipativo e não-localidade	89
4.3.1	Potenciais não-locais	92
4.3.2	Outras interações efetivas e operações lógicas.	92
4.4	Observações finais	94
5	Conclusões e perspectivas	97
	Perspectivas.	99
	REFERÊNCIAS	103
	APÊNDICES	115
A	Rede de N osciladores harmônicos dissipativos	117
B	Cavidades acopladas	125
B.1	Cristais fotônicos	125

B.2	Descrição dos modos localizados de cristais fotônicos	127
B.3	Acoplamento entre Cavidades Ópticas	130
C	Poláritons	133
C.1	Base Nua	134
C.1.1	0-Manifold $\{ 1, 0\rangle\}$	135
C.1.2	1-Manifold $\{ 1, 1\rangle, 2, 0\rangle, 3, 0\rangle\}$	136
C.1.3	n -Manifold $\{ 1, n\rangle, 2, n - 1\rangle, 3, n - 1\rangle, 4, n - 2\rangle\}$	137
C.2	Hamiltoniano diagonal: Base de poláritons	138
D	Obtenção de dinâmicas efetivas	143
D.1	Hamiltoniano médios em ótica quântica	144
D.1.1	Exemplo: O Hamiltoniano dispersivo.	146
D.1.2	Hamiltoniano efetivo para a geração de modos não estacionarios .	147
D.2	Equações mestras efetivas	149
E	Transferência perfeita de estados	151
F	Subespaços livres de decoerência	157

CAPÍTULO 1

UM PANORAMA ATUAL DA ÓTICA QUÂNTICA

Nas últimas décadas, a ótica quântica passou por um acelerado desenvolvimento, aprofundando os conhecimentos estabelecidos acerca do campo de radiação, da matéria e da interação entre ambos, além de estender significativamente seus domínios, emprestando muito dos seus conceitos e técnicas para o que se convencionou denominar Teoria da Informação Quântica. Se na década de 1990 a ótica quântica proporcionou resultados decisivos associados às propriedades da luz,¹ seguiram-se passos igualmente determinantes para a manipulação de estados da matéria e da sua interação com o campo de radiação.²⁻⁴

Em se tratando da luz, os desenvolvimentos teórico e experimental no tratamento das estatísticas de fóton-contagens associadas aos estados comprimidos do campo de radiação, aprofundaram tanto o conhecimento do campo luminoso como a dicotomia entre suas descrições clássica e quântica. O antiagrupamento de fótons e a estatística sub-Poissoniana de fóton-contagens constituem algumas das propriedades não-clássicas do campo luminoso que estabelecem de forma inequívoca a necessidade da sua descrição quântica.¹

Quanto a preparação de estados da matéria e da sua interação com o campo de radiação, mencionamos primeiramente os experimentos em eletrodinâmica quântica de cavidades (EQC) e íons armadilhados, que resultaram de um domínio sem precedentes na manipulação dos campos de radiação e matéria em nível dos seus constituintes fundamentais. Em

EQC lembramos as observações experimentais das oscilações de Rabi de estados circulares de Rydberg,⁵ e do processo de decoerência de estados mesoscópicos de um modo da cavidade.⁶ A preparação de estados emaranhados massivos, envolvendo níveis de Rydberg de um par de átomos,⁷ e a implementação de portas lógicas quânticas⁸ constituem outras realizações importantes em EQC. Esta maestria dos processos da EQC foram igualmente alcançadas através de íons armadilhados, onde mencionamos a implementação de portas lógicas fundamentais,⁹ além da preparação de estados não-clássicos do campo vibracional,¹⁰ dentre os quais os estados emaranhados massivos¹¹ que, de forma similar à Ref.,⁷ obtêm-se através dos níveis eletrônicos de um par de íons armadilhados. No que diz respeito à manipulação de estados da matéria e sua interação com a luz, devemos mencionar a realização dos condensados atômicos de Bose-Einstein (CBE),⁴ que contribuem para uma melhor compreensão tanto das interações inerentes à matéria como de sua interação com a radiação.¹² Dentre muitas realizações notáveis, teóricas e experimentais, mencionamos a excitação de fônons¹³ e a espectroscopia de Bragg¹⁴ em um CBE. Lembramos também da demonstração de que os átomos de um CBE exibem coerências de ordens elevadas, características dos fótons na luz laser,¹⁵ sedimentando a analogia natural entre os campos de radiação e matéria que responde, em parte, pelo rápido desenvolvimento da “ótica quântica Atômica”.¹⁶ Mencionamos as medidas das taxas de decaimento e deslocamento das frequências (dependentes da temperatura) das excitações coletivas de um CBE,¹⁷ além da medida da fase relativa entre dois CBEs.¹⁸

Os resultados acima mencionados motivaram propostas ousadas no que diz respeito aos processos de engenharia de hamiltonianos e reservatórios. No primeiro caso, através da modelagem de um sistema físico de interesse — pela qual submetemo-lo a interações com sistemas auxiliares, quânticos ou clássicos — e de aproximações diversas subsequentes, procura-se por interações efetivas associadas a processos de interesse. Dentre esses processos mencionamos a compressão de estados de modos da cavidade e a realização de operações lógicas quânticas, alcançados a partir de hamiltoninos quadráticos e bilineares, respectivamente.¹⁹ O programa de engenharia de interações é condição necessária para a engenharia de reservatórios, dado que através das interações auxiliares acima mencionadas, podemos modificar os efeitos do vácuo sobre o sistema de interesse.²⁰ A implementação experimental das engenharias de interação e reservatório, levadas a cabo através das armadilhas iônicas, reforça e confirma o domínio alcançado na manipulação do átomo

e dos campos de radiação e vibração através das técnicas de interação radiação-matéria.

O desenvolvimento recente da Ótica Quântica, motivado pelos avanços alcançados na manipulação de átomos, fótons e fônons,²¹ ocorre no sentido a considerar redes de cavidades interagentes, incluindo a possibilidade de armadilhamento de átomos ou amostras atômicas nestas cavidades. Este desenvolvimento dá-se, em parte, na esteira dos resultados alcançados, também a partir da década de 1990, com as redes ópticas, que compreendem átomos, amostras atômicas ou mesmo CBEs, armadilhados em potenciais ópticos periódicos. Possibilidades notáveis foram consideradas no contexto das redes ópticas, como por exemplo o emaranhamento de átomos neutros via colisões controladas, viabilizadas pelo deslocamento das armadilhas ópticas, uma com relação a outra.²² Mostrou-se também a possibilidade de se utilizar as redes ópticas para produzir, entre os átomos de uma e outra rede, interações similares àsquelas da física da matéria condensada, que descrevem o ferromagnetismo, o antiferromagnetismo,²³ e o paramagnetismo.²⁴ Mencionamos também a implementação de portas lógicas quânticas através da repulsão de Coulomb entre íons armadilhados,²⁵ ou de interações dipolo-dipolo entre átomos neutros induzidas via campos clássicos.²⁶ Por fim, ressaltamos a manipulação de estados do movimento de átomos neutros²⁷ ou CBEs,²⁸ além da implementação do processo de transferência de estados em redes ópticas.²⁹

Voltando às redes de cavidades, ou osciladores harmônicos quânticos, avanços foram obtidos no que diz respeito às dinâmicas de coerência e decoerência de estados. Mencionamos especificamente o processo de transferência perfeita de estados entre os osciladores da rede,³⁰ e o mecanismo de decoerência de estados que revela aspectos interessantes como a não aditividade das taxas de relaxação.^{31–33} Nos trabalhos das Refs.,^{31,32} considera-se o caso geral em que cada oscilador da rede acopla-se ao seu respectivo reservatório, ao contrário da asserção *ad hoc* de que toda a rede acopla-se a um reservatório comum. Tratando-se de redes de osciladores harmônicos dissipativos, apresentou-se recentemente um tratamento geral que, englobando as referências,^{31,32} aplica-se a qualquer topologia da rede, isto é, o padrão de acoplamentos entre os osciladores, quaisquer que sejam suas frequências naturais e seus acoplamentos. O tratamento geral apresentado na Ref.,³⁴ possibilitou a construção teórica de um dispositivo para o armazenamento dinâmico de estados em redes de osciladores dissipativos.³⁵ Por armazenamento refere-se à proteção de estados contra o processo de decoerência induzido pelos reservatórios associados

a cada oscilador da rede.

Uma das implementações experimentais das redes de osciladores acoplados que tiveram um rápido desenvolvimento nos últimos anos foram os micro-resonadores óticos, sendo atualmente um tema de enorme importância na fotônica moderna. O interesse em cavidades pequenas, capazes de limitar um campo de luz pela recirculação ressonante cresceu rapidamente em muitos domínios da ótica, de fenômenos clássicos aos quânticos, desde o regime linear ao não-linear, de tecnologias e materiais para aplicações em uma variedade de campos.³⁶ Ressonadores apresentam propriedades únicas e intrigantes que são amplamente investigados e explorados em ótica, como a sua seletividade espectral intrínseca, assim como a capacidade de captura de luz e o aumento da potência ótica na ressonância, fortalecendo a interação luz-matéria, assim aumentando a intensidade dos efeitos não-lineares. Quando vários ressonadores são acoplados, a manipulação do domínio de tempo e frequência é enriquecida em relação a uma única cavidade, conduzindo a sistemas complexos e flexíveis, que abrem oportunidades ímpares, tanto quanto a investigação dos fenômenos físicos e suas possíveis aplicações.^{36,37} Em princípio, qualquer tipo de cavidade, independentemente da forma e da tecnologia, pode ser conectadas formando diferentes topologias e via diversos mecanismos de síntese, a fim de obter o comportamento físico desejado. No entanto, entre as várias opções disponíveis, ressonadores em forma de microanel têm demonstrado até agora serem os mais flexíveis e bem estabelecidos blocos de construção para circuitos fotônicos,³⁸ enquanto guias de onda óticos, constituídos por cadeias de cavidades diretamente acopladas, apresentaram ter o melhor desempenho e potencial para uma ampla variedade de aplicações, que vão desde a filtragem óptica utilizando luz com reduzida velocidade de grupo, ao processamento de sinais não-lineares a captura e armazenamento da luz.³⁷

Uma extensão recente do programa de redes de cavidades, considera à inserção de átomos ou amostras atômicas no interior dessas cavidades.^{39,40} Através da manipulação desses átomos via campos clássicos externos e de suas interações com as respectivas cavidades, e destas entre si, verificam-se fenômenos interessantes como, por exemplo, o *bloqueio de fótons*: enquanto que na ausência dos átomos as cavidades podem armazenar, em princípio, qualquer número de fótons, a presença dos átomos faz com que as cavidades aceitem um único fóton, repelindo a injeção de fótons adicionais. Este fenômeno possibilita então a construção de cristais de luz, nos quais os fótons são armadilhados nas cavidades

através da repulsão mútua que exercem entre si, mediada pelos átomos. Esta repulsão entre os fótons alcançada na Ref. ⁴⁰ é forte o suficiente para simular um estado do tipo *isolante de Mott*, no qual os fótons, localizados nas diferentes cavidades, impedem o movimento dos vizinhos. Dado que na ausência dos átomos, e portanto na ausência da repulsão por eles mediada, os fótons movem-se livremente entre as cavidades, de forma similar a um estado superfluido no qual encontram-se espalhados através da rede, verifica-se nestes sistemas uma transição de fase quântica, à temperatura zero, análoga àquela entre um isolante de Mott e um superfluido.³⁹

Ressaltamos, por fim, que mesmo estes fenômenos em redes de cavidades contendo átomos em seus interiores estão na iminência de serem realizados experimentalmente através dos desenvolvimentos recentes da eletrodinâmica quântica de circuitos (EQCir).⁴¹ Este circuito compõem-se de cavidades e átomos artificiais, que operam no regime de microondas (3-30 GHz), construídos a partir de elementos supercondutores. Enquanto que um átomo artificial (ou qubit supercondutor) compreende uma junção Josephson, a cavidade artificial é modelada a partir de *gaps* em linhas de transmissão supercondutoras (que simulam os espelhos de uma cavidade real) separados pela distância aproximada de um número inteiro de meios comprimentos de onda (1-10 cm). Portanto, redes de nanocavidades acopladas por linhas de transmissão supercondutoras (os guias de onda), e que interagem com átomos artificiais *localizados* na região dos seus campos, fornecem plataformas adequadas para simular, com diversas vantagens, os processos típicos da EQC numa escala sem precedentes. Dentre as vantagens da EQCirc sobre a EQC começamos por mencionar que a construção desses circuitos segue-se das técnicas convencionais da microeletrônica. Dado que os átomos artificiais podem ser fabricados na localização desejada do circuito, evita-se assim as dificuldades consideráveis de se resfriar e armadilhar átomos em cavidades convencionais. Além disso, o momento de dipolo dos átomos artificiais é grande o suficiente para acessar regimes de acoplamentos átomo-campo consideravelmente mais abrangentes que àqueles da EQC.

Os desenvolvimentos alcançados na ótica quântica nas últimas décadas, tiveram um reflexo em outras áreas, possibilitando a verificação experimental dos principais protocolos e fundamentos da teoria da informação e computação quântica, permitindo a abordagem dos processos de transferência e manipulação da informação quântica (IQ). Apesar da implementação prática do processamento de IQ em diferentes sistemas físicos, a inevitável

ação do meio ambiente deve ser considerada. O emaranhamento dos graus de liberdade do sistema com aqueles do meio ambiente leva ao processo de decoerência de estados, que deve-se à dinâmica não-unitária imposta ao sistema e consiste na transferência da informação deste para o meio ambiente. Este processo consiste num importante fator limitante ao funcionamento de protocolos para o processamento de IQ em sistemas físicos reais, e torna-se, portanto, imprescindível o seu entendimento e controle.

Dentre vários esquemas propostos com o objetivo de contornar os efeitos limitantes impostos pelo meio ambiente, um em especial utiliza-se do conceito dos *subespaços livres de decoerência* (SLD).⁴² Estes subespaços constituem-se num conjunto de estados que não são afetados pela ação do reservatório. Adicionalmente, podemos dizer que o operador densidade reduzido do sistema em questão permanece invariante num SLD, evoluindo de forma unitária. Uma análise detalhada acerca dos SLD é apresentada na Refs.^{43,44}, onde os autores desenvolvem uma abordagem rigorosa do processo, fornecendo as condições necessárias e suficientes para a existência de SLD dinamicamente estáveis. Para este desenvolvimento, equações mestras Markovianas são aplicadas ao estudo de sistemas quânticos de dimensão finita. Ainda neste contexto, na Ref.⁴⁵ um sistema de dois níveis acoplado a um reservatório comprimido é tratado, no intuito de se identificar possíveis SLD. Neste trabalho é também calculada a dimensão do SLD para N sistemas de dois níveis e, além disso, investiga-se a influência do acoplamento entre os sistemas de dois níveis sobre o SLD.

Uma análise abrangente dos SLD em sistemas dissipativos acoplados é realizada na Ref.⁴⁶ onde são estudados os processos de dissipação coletiva e decoerência em uma rede de N osciladores quânticos acoplados. Analisa-se neste trabalho os ingredientes físicos necessários à emergência de SLD e, particularmente, de subespaços livres de relaxação (SLR). Para tal fim, são tratados dois cenários diferentes. No primeiro, considera-se que todos os osciladores da rede estejam acoplados a um mesmo reservatório. No segundo, considera-se que cada oscilador acopla-se ao seu próprio reservatório. Após a análise dos ingredientes físicos que levam aos SLD e SLR, os estados protegidos contra os processos de decoerência e relaxação são identificados. Mostra-se, ainda, que ambos os subespaços são gerados quando os osciladores acoplam-se com o mesmo grupo de modos do reservatório. O estudo da transferência de estados (TE) em redes quânticas tem sido amplamente discutido na literatura. A utilização de cadeias de sistemas acoplados surgiu como uma

possível plataforma para a implementação de “linhas de comunicação” quânticas. Em geral, o tratamento destas redes de sistemas interagentes é feito apenas no caso ideal, ou seja, na ausência da ação do meio ambiente. Na Ref.⁴⁷ apresenta-se um protocolo para a obtenção da *transferência perfeita de estados* (TPE) entre sítios distantes em redes bosônicas e fermiônicas. O Hamiltoniano do sistema é determinado através de um espectro de autovalores que satisfaz uma certa condição, que se mostra necessária e suficiente no caso de redes que apresentam simetria por inversão. As configurações de acoplamento da rede podem, então, ser encontradas através da solução de um problema inverso de autovalores. Isto permite a construção de portas efetivas de 2-qubits entre sítios distintos da rede, além da proposição de protocolos de geração de emaranhamento de estados na rede. Em um contexto mais abrangente, na Ref.⁴⁸ é apresentado um formalismo geral para o tratamento de processos de TPE. Os autores investigam as formas possíveis que o Hamiltoniano do sistema deve possuir para a ocorrência de TPE em redes onde a topologia e a configuração de acoplamentos sejam arbitrárias. Nesta situação, mostra-se que existem, em princípio, infinitos hamiltonianos que permitem a TPE. Entretanto, apesar de não ser necessário estabelecer *a priori* as restrições à topologia da rede, o que por si só constitui uma interessante característica deste trabalho, os efeitos originados de processos dissipativos na rede não são levados em consideração. Neste capítulo introdutório apresentamos uma breve visão dos desenvolvimentos teóricos e experimentais da ótica quântica. No Cap. 2 desenvolvemos uma técnica para construir, dentro de redes bosônicas dissipativas, canais livres de decoerência (CLD): um grupo de modos normais de osciladores com taxas de amortecimento efetivas nulas. Em seguida no Cap. 3 desenvolvemos um protocolo para transferência quase perfeita de estados de poláriton de um sistema emissor para um receptor, separados espacialmente, ambos acoplados por um canal de transmissão não ideal que é modelado por uma rede de cavidades dissipativas. No Cap. 4 generalizamos os resultados dos trabalhos anteriores além das redes bosônicas para sistemas fermiônicos e cadeias de spin, assim como, analisamos o processamento de informações entre múltiplos circuitos quântico (CQs) não ideais. Por fim, o Cap. 5 é dedicado as considerações finais, onde os aspectos mais importantes dos capítulos anteriores são enfatizados e apontamos perspectivas para desenvolvimentos futuros.

CAPÍTULO 2

DE CANAIS LIVRES DE DECOERÊNCIA PARA SUBESPAÇOS LIVRES E QUASE LIVRES DE DECOERÊNCIA EM REDES BOSÔNICA DISSIPATIVAS

2.1 Introdução

A busca de mecanismos para contornar a decoerência, uma questão de grande interesse para processamento e manipulação de informação quântica, contribuiu para aprofundar a nossa compreensão de sistemas quânticos abertos e levou a esquemas engenhosos para o controle de coerência, que vão muito além da busca de condições que enfraquecem o acoplamento sistema e reservatório.⁴⁹ Os primeiros protocolos para controle da decoerência, utilizavam da lógica dos códigos de correção de erro clássicos, para proteger informação quântica armazenada dos efeitos da decoerência.⁵⁰ Outra estratégia, chamada de engenharia de reservatórios,⁵¹ compele o sistema de interesse, cujo estado deve ser protegido contra decoerência, em busca de interações adicionais, além da inerente com o reservatório. Este programa, tem como base o controle indireto da dinâmica sistema-reservatório, foi desenvolvido em íons armadilhados^{52,53} e sistemas atômicos de dois níveis.^{54–56} Mencionamos também os protocolos de desacoplamento dinâmico de um

sistema quântico aberto da influência do meio ambiente utilizando pulsos externos para induzir movimento no sistema que são mais rápidos do que a escala de menor tempo acessível para os graus de liberdade de reservatório.^{57–59}

A meta dos métodos de desacoplamento dinâmicos é também assegurado com sistemas quânticos não estacionários, como demonstrado na Ref.⁶⁰ Além de proteger os estados quânticos contra decoerência, uma frequência de oscilação pode ser projetada para fazer o acoplamento sistema de reservatório, quase insignificante. Diferentemente do programa para a engenharia de reservatório e de forma semelhante os esquemas de desacoplamento dinâmico, a técnica proposta em Ref.⁶⁰ não exige conhecimento prévio do estado a ser protegido. No entanto, diferentemente dos esquemas relatados para desacoplamento dinâmico, a proteção dos estados não-estacionário não depende da disponibilidade de pulsos externos que agem mais rapidamente do que a escala de tempo acessível para os graus de liberdade do reservatório. O processo de decoerência coletivo, em que um sistema composto interage com um reservatório comum, também tem instigado vários resultados interessantes relacionados a subespaço livre de decoerência (SLD).⁴⁴ O surgimento de SLD em redes de osciladores harmônicos, em que cada um interage com o seu próprio reservatório também foi abordada.⁴⁶ Nesta referência também é discutido os mecanismos de construção do SLD; quando toda a rede de osciladores interage com o mesmo grupo de modos do reservatório, construindo assim uma correlação entre estes modos, os estados particulares da rede são protegidos contra decoerência. Vale ressaltar que suas implementações experimentais em óptica linear,⁶¹ íons armadilhados³ e ressonância magnética nuclear,⁶² confirmam o SLD como um recurso promissor para o processamento da informação. Operações computacionais quânticas dentro SLD foram realizadas em óptica⁶³ e NMR.⁶⁴

No presente trabalho, apresentamos uma técnica para construir canais livres de decoerência (CLD) dentro de uma rede de osciladores harmônicos dissipativos, considerando dois cenários distintos: 1) onde cada oscilador é acoplado ao seu próprio reservatório e 2) onde toda a rede é acoplado a um reservatório comum. O CLD é caracterizado quando um oscilador do modo normal, ou um conjunto deles, exibem taxas efetivas de amortecimento nulas. Bem como de acordo com as propriedades do reservatório (s) e da natureza das interações entre eles e os osciladores de rede, estas taxas efetivas de amortecimento também dependem da topologia da rede. A topologia descreve o padrão em que os oscila-

dores estão conectados, suas forças de acoplamento e frequências naturais. Demonstramos que, através da manipulação da topologia da rede, podemos obter CLD dentro de modos normais dos osciladores .

Evidentemente, os estados a serem protegidos dentro do CLD, devem ser preparados, manipulando os osciladores naturais. Devemos mapear todos estes osciladores naturais para os estados que pertencem ao CLD. Este processo de mapeamento revela que os CLD estão associados a SLD da cadeia de osciladores naturais. Portanto, a nossa técnica para construir CLD também proporciona uma abordagem alternativa para a construção de SLD, com a vantagem de que todos os estados de rede protegidos são extraídos de uma só vez, sem a diagonalização de todos os operadores presentes na equação Liouvillian, conforme exigido pelo método convencional. Além disso, esta técnica alternativa permite-nos introduzir de uma forma natural e automática o conceito de subespaços quase livres de decoerência (SQLD), no interior do qual estados de superposição são quase completamente protegidos contra decoerência. Este enfraquecimento das condições necessárias para derivar SLD pode fornecer um mecanismo mais viável para reduzir decoerência. Nossa técnica para construir CLD, que também permite a construção de SLD e da introdução de SQLD, assim, amplia nossas perspectivas para a compreensão do surgimento de tais subespaços, explorando as simetrias que ocorrem no Hamiltoniano que rege a dinâmica da rede.

Como aplicação do SQLD, consideramos, como em Ref.,⁶⁵ o problema da transferência de uma superposição quântica de um local para outro em uma rede de osciladores harmônicos quânticos dissipativos . Vale a pena notar que extensas investigações teóricas foram realizadas recentemente sobre o tema da transferência de estado em redes quânticas. Muitos resultados interessantes foram obtidos para transferência por meio de cadeias de spin,⁶⁶ considerando diferentes tipos de acoplamentos entre vizinhos,⁶⁷ os erros decorrentes da não idealidades da rede.^{68,69} Quanto a redes ópticas, uma plataforma promissora para processamento de informação quântica, podemos citar o transporte coerente de pacotes de onda atômicas⁷⁰ e a evolução de estados emaranhados.⁷¹ Grande interesse surgiu em redes de cavidades acopladas onde efeitos da Física de muitos corpos, podem ser simulados, como a interações do tipo Bose-Hubbard, e assim verificar a transição de fase quântica Superfluido-Isolante de Mott.³⁹ Além disso, no domínio da EQC, transferência de estados coerente entre matéria e luz, possibilitando aplicações de informação quântica, foram relatados em.^{72,73}

Mais recentemente, avançamos um esquema para transferência quase perfeita de estado (TQPE) em uma rede de osciladores harmônicos dissipativos⁶⁵ em que, como no presente protocolo, assumimos osciladores ideais no sistema remetente-receptor, acoplados por uma cadeia de osciladores não ideais, o canal quântico (CQ). Com o intuito de reduzir significativamente os efeitos adversos da decoerência, foi ajustado à frequência do emissor-receptor para estarem fora de ressonância com a dos osciladores do CQ, assegurando assim que o estado preparado no emissor tunele para o receptor e apenas virtualmente excite o CQ. Este processo virtual torna a taxa de decaimento associado com os osciladores do canal negligenciáveis, sendo menor a taxa de decaimento quanto mais longo é o intervalo de tempo para a transferência do estado. Diferentemente do protocolo em Ref.,⁶⁵ que conta com a dessintonia entre as frequências do emissor-receptor e os osciladores do CQ, aqui vamos atribuir a mesma frequência natural para todos os osciladores da rede (emissor, receptor e os que compõem o CQ). Obtemos a TQPE em virtude da dessintonia que existe entre os osciladores do emissor-receptor e os modos normais do canal quântico, em vez das frequências naturais dos osciladores. No entanto, tal como demonstrado a seguir, o mecanismo subjacente à TQPE é que o processo tem lugar dentro de um SQLD. A pequena taxa de decaimento efetiva associada com os osciladores do CQ, que surge a partir do fato de que esses osciladores são apenas virtualmente populados, caracteriza o surgimento do SQLD.

Finalmente observamos que o pressuposto de que cada oscilador é acoplado ao seu próprio reservatório justifica-se no progresso experimental recente na fabricação de microcavidade acopladas e cristais fotônicos. Destacamos ainda os avanços na engenharia e controle da intensidade de acoplamento entre microcavidades, defeitos em materiais com Band-Gap fotônico.⁷⁴ Observamos também que reservatórios estruturados não Markovianos, outra característica interessante presentes nesses sistemas, tais como cristais fotônicos, são um ingrediente central do presente estudo. De fato, a natureza do reservatório não Markoviano induz o surgimento de canais de decaimento indiretos³⁴ (pelo qual uma determinado oscilador da rede perde energia através de todos os outros osciladores da rede), que desempenham um papel crucial no surgimento de SLD e SQLD.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção II revisitamos o nosso modelo de uma rede dissipativa bosônica³⁴ e mostramos a derivação da equação mestra associada com os osciladores naturais e dos modos normais. A relação entre as taxas de

amortecimento dos osciladores naturais e as dos modos normais, característica fundamental do nosso programa, é apresentada na seção III, juntamente com as condições apresentadas na literatura para o surgimento de um SLD. Nós também explicamos nesta seção uma forma alternativa de verificar estas condições. A solução para a equação mestra para os osciladores naturais é dada na Seção IV. Na seção V analisamos as condições para o surgimento de CLD e SLD, além de introduzir o conceito de um SQLD. Na Seção VI, apresentamos uma aplicação do conceito de SQLD, analisando a TQPE através de um SQLD. Nesta seção, investigamos os ingredientes físicos que levam à emergência dos SLD e SQLD. Por fim, na Seção VII, apresentamos nossas conclusões.

2.2 Rede de osciladores harmônicos dissipativos

2.2.1 O modelo

Começamos com a perspectiva geral de uma rede simétrica, esboçado na Fig.2.1, em que cada oscilador é acoplado a todos os outros, além de interagir com o seu próprio reservatório. Os parâmetros que definem a topologia são *i*) o padrão no qual o conjunto de osciladores são acoplados, *ii*) as intensidades dos acoplamentos *iii*) suas frequências naturais. Assumindo que a partir de agora os índices m, n (assim como m', n') variam de 1 a N , o Hamiltoniano $H = H_S + H_R + H_I$ que modela a rede de N osciladores acoplados é

$$H_S = \hbar \sum_m \left[\omega_m a_m^\dagger a_m + \frac{1}{2} \sum_{n(\neq m)} \lambda_{mn} (a_m^\dagger a_n + a_m a_n^\dagger) \right], \quad (2.1)$$

com N reservatórios distintos

$$H_R = \hbar \sum_{m,k} \omega_{mk} b_{mk}^\dagger b_{mk}, \quad (2.2)$$

cada um composto por um conjunto infinito $\{k\}$ de modos, e o acoplamento entre os osciladores harmônicos (HOs) e seus respectivos reservatórios

$$H_I = \hbar \sum_{m,k} V_{mk} (b_{mk}^\dagger a_m + b_{mk} a_m^\dagger). \quad (2.3)$$

Figura 2.1 – Esquema de uma rede simétrica em que todos os osciladores interagem entre si e com seus respectivos reservatórios R_N

Nos hamiltonianos acima, $a_m^\dagger$ (a_m) é o operador de criação (aniquilação) associado com o m th oscilador da rede ω_m , o qual é acoplado ao n th oscilador com intensidade λ_{mn} e com o m th reservatório com força V_{mk} . O k th modo do reservatório ω_{mk} é descrito pelo operador de criação(aniquilação) $b_{mk}^\dagger$ (b_{mk}).

2.2.2 Equação mestra para os osciladores naturais e dos modos normais

Para obter a equação mestra do Hamiltoniano H , como na Ref.,³⁴ nós primeiro reescrevemos H_S em forma de matriz $H_S = \hbar \sum_{m,n} a_m^\dagger H_{mn} a_n$, com os seguintes elementos

$$H_{mn} = \omega_m \delta_{mn} + \lambda_{mn}(1 - \delta_{mn}).$$

A diagonalização da matriz H_S , composta pelos elementos H_{mn} , é realizada por meio da transformação $A_m = \sum_n C_{mn} a_n$, onde os coeficientes da m th coluna da matriz C definem os autovetores associados aos autovalores $\bar{\omega}_m$ de H_S . C sendo uma matriz ortonormal, $C^\top = C^{-1}$, temos seguintes relações de comutação $[A_m, A_n^\dagger] = \delta_{mn}$ e $[A_m, A_n] = 0$, o que

permite que o Hamiltoniano seja reescrito como $H = H_0 + V$, onde

$$H_0 = \hbar \sum_m \left(\bar{\omega}_m A_m^\dagger A_m + \sum_k \omega_{mk} b_{mk}^\dagger b_{mk} \right) \quad (2.4)$$

$$V = \hbar \sum_{m,n,k} C_{nm} V_{mk} (b_{mk}^\dagger A_n + b_{mk} A_n^\dagger). \quad (2.5)$$

Com o Hamiltoniano diagonal H_0 , podemos mudar para a representação de interação, definida pela transformação $U(t) = \exp(-iH_0 t/\hbar)$, em que $V_I(t) = \hbar \sum_{m,n} [\mathcal{O}_{mn}(t) A_n^\dagger + \mathcal{O}_{mn}^\dagger(t) A_n]$ e os operadores do banho $\mathcal{O}_{mn}(t) = C_{nm} \sum_k V_{mk} \exp[-i(\omega_{mk} - \bar{\omega}_n)t] b_{mk}$. Assumindo que as interações entre os ressonadores e os reservatórios são fracas o suficiente, realizamos uma aproximação perturbativa de segunda ordem, em seguida, traçamos os graus de liberdade do reservatório, obtendo assim a equação mestra

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho_S(t)] + \sum_{m,n} \mathcal{L}_{mn} \rho_S(t), \quad (2.6)$$

onde

$$\mathcal{L}_{mn} \rho_S(t) = \sum_{m,n} \frac{\Gamma_{mn}}{2} [2a_m \rho_S(t) a_n^\dagger - a_m^\dagger a_n \rho_S(t) - \rho_S(t) a_m^\dagger a_n] \quad (2.7)$$

são os operadores de Lindblad para os canais de dissipação diretos ($m = n$) e indiretos ($m \neq n$). Através dos canais diretos os osciladores perdem excitação para os seus próprios reservatórios, enquanto nos canais indiretos a perda de excitação ocorre para todos os outros reservatórios, mas não o seu próprio. A matriz de amortecimento, que define as taxas de decaimento de energia direta e indireta dos osciladores naturais, tem os seguintes elementos

$$\Gamma_{mn}(t) = N \sum_{n'} C_{n'm} \zeta_{mm}(\bar{\omega}_{n'}, t) C_{n'n}. \quad (2.8)$$

Supondo-se que as frequências do reservatório são estreitamente espaçadas, para permitir que façamos um somatório contínuo, os elementos dependentes do tempo da diagonal ζ_{mm} —que representam as interações do sistema com o reservatório, bem como as propriedades do reservatório — são dados por

$$\zeta_{mn}(\omega, t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{d\nu}{\pi} \gamma_{mn}(\nu) e^{-i(\nu - \omega)(\tau - t)}, \quad (2.9)$$

onde $\gamma_{mn}(\nu) = V_m^2(\nu)\sigma_m(\nu)\delta_{mn}/N$, $\sigma_m(\nu)$, representando a densidade de estados do m th reservatório. Para o caso particular de reservatório com ruído branco Markoviano, os elementos acima referidos reduzem à forma simplificada $\zeta_{mn}(\omega) = V_m^2(\omega)\sigma_m(\omega)\delta_{mn}/N = \gamma_{mn}(\omega)$. Escrito em notação matricial, Eq. 2.8 torna-se

$$\Gamma = N \int_0^\tau d\tau \int_0^\infty d\nu \gamma(\nu) \cdot e^{i(H-\nu\mathbb{I})\tau}, \quad (2.10)$$

$\mathbb{I}$ sendo a identidade. Na representação dos modos normais, a equação mestra é dada por

$$\frac{d\rho_S}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_S, \rho] + \sum_{m,n} \mathcal{L}_{mn} \rho_S(t), \quad (2.11a)$$

onde $\tilde{H}_S = \hbar \sum_m \bar{\omega}_m A_m^\dagger A_m$ e os operadores de Lindblad

$$\mathcal{L}_{mn} \rho_S(t) = \sum_{m,n} \frac{\Upsilon_{mn}}{2} [2A_m \rho(t) A_n^\dagger - A_m^\dagger A_n \rho(t) - \rho(t) A_m^\dagger A_n], \quad (2.12a)$$

ainda descreve os canais de dissipação diretos e indiretos, ponderados pelas taxas de amortecimento

$$\Upsilon_{mn} = N \sum_{n'} C_{mn'} \gamma_{n'n'}(\bar{\omega}_m, t) C_{nn'}. \quad (2.13)$$

2.3 Taxas de amortecimento dos osciladores naturais e dos modos normais

Observarmos que ambas as matrizes dissipativas, Γ e Υ , no caso geral dos reservatórios não Markovianos, podem ser relacionadas pela equação

$$\Upsilon = C \cdot \left(\Gamma + \int_0^\tau d\tau \int_0^\infty d\nu [e^{i(H-\nu\mathbb{I})\tau}, \gamma(\nu)] \right) \cdot C^{-1}, \quad (2.14)$$

que mostra que, quando a relação de comutação $[H, \gamma(\nu)] = 0$ é satisfeita, de modo que $[H, \Gamma] = 0$, Υ reduz-se a sua forma diagonal $\tilde{\Upsilon} = C \cdot \Gamma \cdot C^{-1}$, onde cada elemento $\tilde{\Upsilon}_{mm}$ é composto por uma combinação linear (determinado pela topologia de rede através da matriz C) dos canais diretos (Γ_{mm}) e dos indiretos (Γ_{mn}) associados com os osciladores naturais. No entanto, apesar dos canais indiretos incluídos dentro $\tilde{\Upsilon}_{mm}$, sob a condição

$[H, \Gamma] = 0$ os osciladores dos modos normais, não interagem entre si, mesmo indiretamente através dos reservatórios e do Liouvilliano (2.12a) reduzindo apenas a seus elementos diagonais

$$\mathfrak{L}_{mn}\rho_S(t) = \sum_m \frac{\tilde{\gamma}_{mm}}{2} [2A_m\rho(t)A_m^\dagger - A_m^\dagger A_m\rho(t) - \rho(t)A_m^\dagger A_m] \delta_{mn}. \quad (2.15a)$$

O caso $[H, \Gamma] = 0$ ocorre, por exemplo, no cenário particular, onde todos os osciladores naturais têm a mesma função de amortecimento $\gamma_{mn}(\nu) = V^2(\nu)\sigma(\nu)\delta_{mn}/N$, levando a matriz diagonal $\gamma(\nu) = [V^2(\nu)\sigma(\nu)/N]\mathbb{I}$.

Vale a pena notar que a condição necessária e suficiente dado na literatura para um subespaço ser livre de decoerência pode ser estabelecida através do Liouvilliano (2.15a). De fato, o conjunto de estados protegidos $\{\Psi\}$ deve ser todos os autoestados degenerado de todos os operadores $\{A_m\}$, tal que $A_m|\Psi\rangle = c_m|\Psi\rangle$, $\forall m, \Psi$.⁴³ No que se segue, apresentamos uma maneira alternativa interessante para obter esse resultado a partir da solução formal da equação mestra (2.11a) —sob a condição $[H, \Gamma] = 0$, levando ao Liouvilliano(2.15a)— dado por:

$$\rho_S(t) = \exp\left(-i\sum_m \mathcal{H}_m t\right) \left[\left(\prod_m \exp[\Omega_m(t)A_m \circ A_m^\dagger]\right) \rho_S(0)\right] \exp\left(i\sum_m \mathcal{H}_m^\dagger t\right), \quad (2.16)$$

onde $\mathcal{H}_m = (\bar{\omega}_m - i\tilde{\gamma}_{mm}) A_m^\dagger A_m$, $\Omega_m(t) = 1 - e^{-\tilde{\gamma}_{mm}t}$ e

$$\exp[\Omega_m(t)A_m \circ A_m^\dagger] \rho_S(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\Omega_m(t)]^k}{k!} (A_m)^k \rho_S(0) (A_m^\dagger)^k. \quad (2.17)$$

Evidentemente, quando $A_m|\Psi\rangle = c_m|\Psi\rangle$, $\forall m, \Psi$, obtém-se a partir da equação acima o resultado $\exp[\Omega_m(t)A_m \circ A_m^\dagger] \rho_S(0) = \exp[\Omega_m(t)|c_m|^2] \rho_S(0)$, o que implica na dinâmica dissipativa e sem ruído $\rho_S(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$, onde

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_m \Omega_m(t)|c_m|^2\right) \exp\left(-i\sum_m \mathcal{H}_m t\right) |\Psi\rangle \quad (2.18)$$

e $\text{Tr} \rho_S(t) = \text{Tr} \rho_S(0) = 1$. Portanto, o conjunto degenerado de autoestados $\{\Psi\}$ de todos os operadores $\{A_m\}$ evolui de forma coerente para $\{\Psi(t)\}$, como pode ser visto diretamente a partir da solução formal da equação mestra (2.11a).

2.3.1 Ponderando os canais diretos e indiretos

Por uma questão de rigor, observamos que os elementos não diagonais Γ_{mn} são nulos para o caso de reservatórios Markovianos de ruído branco, cuja densidade espectral são invariantes sob translações no espaço de frequência, de modo que $\zeta_{mn} = V_m^2 \sigma_m \delta_{mn}/N$ e, conseqüentemente, $\Gamma_{mn}(t) = N\zeta_{mm} \sum_{n'} C_{n'm} C_{n'n} = N\zeta_{mm} \delta_{mn}$. Entretanto, os canais indiretos ocorrem apenas para o caso de reservatórios não-Markovianos, caso em que é necessário distinguir entre os dois regimes de acoplamento inter-oscilador. No caso do regime de acoplamento fraco, em que $N\lambda_{mn} \ll \omega_m$, os elementos não diagonais Γ_{mn} são significativamente menores do que os diagonais. Se um acoplamento específico λ_{mn} entre dois osciladores, m e n , falha em satisfazer a relação $N\lambda_{mn} \ll \omega_m$, a dinâmica de rede é necessariamente descrita pelo regime de acoplamento forte, onde $N\lambda_{mn} \approx \omega_m$. Ressaltamos também que quando pelo menos um acoplamento interoscillator λ_{mn} , encontra-se dentro do regime de acoplamento forte, a ordem de magnitude do canal indireto associado é ponderada por Γ_{mn} e podem ser semelhantes aos elementos da diagonal $\Gamma_{mm} \approx \Gamma_{nn}$, dependendo da forma espectral do ruído colorido.

Para o caso da taxa de amortecimento associados com os osciladores do modo normal, podemos deduzir a partir da Eq.(2.14) que os canais indiretos ocorrem mesmo para reservatórios Markovianos. No entanto, quando temos $[H, \Gamma] = 0$, concluímos que apenas os canais diretos $\tilde{Y}_{mm}$ associados com os osciladores do modo normal permanecem, e todos os canais indiretos se anulam, como aqueles para os osciladores naturais. Esta conclusão é válida mesmo para o caso de reservatório não Markovianos .

2.3.2 O caso de um reservatório comum para toda a rede

No caso em que todos os osciladores de rede são acoplados a um reservatório comum, ou seja, $H = H_S + H_R + H_I$ com $H_R = \hbar \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k$ e $H_I = \hbar \sum_k V_{mk} (b_k^\dagger a_m + b_k a_m^\dagger)$, obtemos a mesma equação mestra (2.6) como derivado acima para o caso de reservatórios distintos, mas com a matriz de amortecimento agora sendo

$$\Gamma_{mn} = N \sum_{m', n'} C_{n'm'} \zeta_{mm'}(\bar{\omega}_{n'}) C_{n'n}, \quad (2.19)$$

enquanto que a função ζ_{mm} torna-se

$$\zeta_{mn}(\omega) = \sigma(\omega) V_m(\omega) V_n(\omega) / N, \quad (2.20)$$

onde assumimos novamente que $V_m(\nu)$ e $\sigma(\nu)$ são funções que variam lentamente em torno de ω . Agora, diferentemente da expressão equivalente derivada para o caso de reservatórios distintos, dada por $\zeta_{mn}(\omega) = V_m^2(\omega) \sigma_m(\omega) \delta_{mn} / N$ (para processos Markovianos), os osciladores de rede interagem uns com os outros através do seu reservatório comum, tornando os canais indiretos (Γ_{mn}) tão eficazes como os diretos (Γ_{mm}). Na verdade, sob a suposição razoável de que todos os osciladores interagem com o reservatório com a mesma intensidade de acoplamento V , obtemos

$$\Gamma_{mn} = \sigma(\omega) \sum_{m'} \left(\sum_{n'} C_{n'm'} C_{n'n} \right) V_m(\omega) V_{m'}(\omega) = V_m(\omega) V_n(\omega) \sigma(\omega) \approx V^2(\omega) \sigma(\omega) = \Gamma_{mm}. \quad (2.21)$$

Portanto, enquanto no cenário de reservatórios distintos os canais indiretos (Γ_{mn}) pode dependendo da densidade espectral do reservatório (s)] ser tão eficiente como mecanismo de perda quanto os diretos (Γ_{mm}), mas apenas no caso de reservatório(s) não Markovianos e dentro do regime de acoplamento forte; para o caso de um reservatório comum, podemos facilmente verificar que as taxas de dissipação indiretas e diretas têm a mesma ordem de magnitude, mesmo para reservatório(s) Markoviano(s).

2.4 Solução da equação mestra para os osciladores naturais

Para encontrar a solução da Eq. (2.6), utilizaremos da função P de Glauber-Sudarshan para a rede

$$\frac{dP(\{\eta_{m'}\}, t)}{dt} = \sum_m \left(\frac{\Gamma_{mm}}{2} + \sum_n H_{mn}^D \eta_n \frac{\partial}{\partial \eta_m} + c.c. \right) P(\{\eta_{m'}\}, t), \quad (2.22)$$

onde definimos os elementos de matriz $H_{mn}^D = H_{mn} - i\Gamma_{mn}/2$. Assumindo-se que a rede geral descrita pela matriz H_{mn} é composta inteiramente de osciladores dissipativos, a

matriz H^D assume a forma

$$H^D = H - i\Gamma/2, \quad (2.23)$$

tal que

$$H^D = \begin{pmatrix} \omega_1 & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{12} & \omega_2 & \cdots & \lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1N} & \lambda_{2N} & \cdots & \omega_N \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \cdots & \Gamma_{1N} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \cdots & \Gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{N1} & \Gamma_{N2} & \cdots & \Gamma_{NN} \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Para o estado inicial da rede, considere a sobreposição geral puro de estados coerentes $|\psi(0)\rangle = \sum_r \Lambda_r |\{\beta_m^r\}\rangle$, onde Λ_r é a amplitude de probabilidade do estado de produtos $|\{\beta_m^r\}\rangle = \bigotimes_{m=1}^N |\beta_m^r\rangle$, o sobrescrito r representa o r th estado de sobreposição, e o subscrito m representa o estado coerente do m th oscilador. É fácil de mostrar que o estado da rede a seguir a evolução regulada pelo operador densidade reduzida (com todos os graus de liberdade dos reservatórios sendo traçadas)

$$\rho(t) = \sum_{r,s} \Lambda_r \Lambda_s^* \frac{\langle \{\beta_m^s\} | \{\beta_m^r\} \rangle}{\langle \{\zeta_m^s(t)\} | \{\zeta_m^r(t)\} \rangle} |\{\zeta_m^r(t)\}\rangle \langle \{\zeta_m^s(t)\}|. \quad (2.25)$$

A evolução da excitação do m th oscilador da rede é

$$\zeta_m^r(t) = \sum_n U_{mn}(t) \beta_n^r \Leftrightarrow \zeta^r(t) = U(t) \cdot \beta^r, \quad (2.26)$$

onde os elementos do operador não-unitário $U(t)$ são dados por $U_{mn}(t) = \sum_{m'} D_{mm'} \exp(-i\Omega_{m'}t) D_{m'n}^{-1}$, com a m th coluna da matriz D definindo o m th autovetor associado com o autovalor Ω_m da matriz dissipativa H^D .³⁴ Em notação matricial:

$$U(t) = D \cdot e^{-\Omega t} \cdot D^{-1} = e^{-D \cdot \Omega \cdot D^{-1} t} = e^{-iH^D t}. \quad (2.27)$$

Finalmente notamos que a partir da Eq. (2.25), podemos derivar o operador densidade reduzido do m th oscilador, dado por

$$\rho_m(t) = \sum_{r,s} \Lambda_r \Lambda_s^* \frac{\langle \{\beta_n^s\} | \{\beta_n^r\} \rangle}{\langle \zeta_m^s(t) | \zeta_m^r(t) \rangle} |\zeta_m^r(t)\rangle \langle \zeta_m^s(t)|, \quad (2.28)$$

em que a influência de todos os outros osciladores da rede está presente explicitamente

no produto $\langle \{\beta_n^s\} | \{\beta_n^r\} \rangle$ e, implicitamente, nos estados $|\zeta_m^r(t)\rangle$.

2.5 As condições para a construção de CLD

2.5.1 Canal livre de decoerência

Para iniciar a construção do CLD, voltaremos ao Liouvilliano(F.8) derivado da condição $[H, \Gamma] = 0$, que está associada aos osciladores dos modos normais. A partir deste Liouvilliana concluímos que, no caso em que um ou mais elementos da diagonal $\tilde{Y}_{mm}$ são nulos, os modos normais correspondentes são efetivamente desacoplado de todos os reservatórios, e qualquer estado preparado nestes modos será completamente protegido contra decoerência. Salientamos que a efetiva idealidade destes osciladores dos modos normais, que proporciona um CLD, segue inteiramente da manipulação da topologia da rede.

Como um exemplo, consideremos o caso de uma rede simétrica degenerada ($\omega_m = \omega$ e $\lambda_{mn} = \lambda$) em duas situações distintas: (a) quando cada um dos osciladores da rede é acoplado a seu próprio reservatório não Markoviano ou (b) em que todos os osciladores são acoplados a um reservatório comum. Em ambos os casos temos tanto equivalentes canais de decaimento diretos e indiretos. Assumindo que $\Gamma_{mn} = \Gamma_{mm} = \Gamma$, obtemos

$$H^D = \begin{pmatrix} \omega & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \omega & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & \omega \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \Gamma & \Gamma & \cdots & \Gamma \\ \Gamma & \Gamma & \cdots & \Gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma & \Gamma & \cdots & \Gamma \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

mostrando que $[H, \Gamma] = 0$ e, consequentemente, $\tilde{Y} = C \cdot \Gamma \cdot C^{-1}$. Pode ser facilmente mostrado que, para a topologia simétrica, os coeficientes C_{mn} são dados por $C_{m1} = 1/\sqrt{m(m-1)}$, $C_{mm} = -\sqrt{(m-1)/m}$, $C_{mn} = 0$, e $C_{m'n'} = 1/\sqrt{m'(m'-1)}$, para $1 < m < n$ e $1 < n' < m' < N$, todos os elementos da primeira linha sendo $1/\sqrt{N}$. O primeiro autovalor, associado com o oscilador primeiro modo normal, é $\tilde{Y}_{11} = N\Gamma$, enquanto todos os restantes $N - 1$ autovalores são nulos, proporcionando assim um CLD composto por $N - 1$ osciladores efetivamente ideais. Das Eqs. (2.11a) e (2.15a), obtemos a equação

mestra

$$\frac{d\rho_S}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_S, \rho] + \frac{N\Gamma}{2} [2A_1\rho(t)A_1^\dagger - A_1^\dagger A_1\rho(t) - \rho(t)A_1^\dagger A_1], \quad (2.30)$$

indicando que o primeiro oscilador dos modos normais, é o único que efetivamente interage com o reservatório, e decai com a taxa amplificado $N\Gamma$. A construção do CLD ocorre à custa de uma aceleração da velocidade de decaimento do modo normal desprotegido .

2.5.2 Gerando SLD

Partindo do operador densidade reduzido (2.25), podemos concluir que, para gerar um SLD, temos de definir os coeficientes dependentes do tempo da expansão do operador (2.25) igual à unidade, isto é,

$$\frac{\langle \{\beta_m^s\} | \{\beta_m^r\} \rangle}{\langle \zeta_m^s(t) | \zeta_m^r(t) \rangle} = 1. \quad (2.31)$$

Na verdade, esta condição impede a decomposição dos elementos não diagonais de $\rho(t)$, garantindo assim uma dinâmica sem ruído-dissipação do estado inicial $|\psi(0)\rangle$ (sem as oscilações decorrentes da dissipação), semelhante aos estados coerentes acoplados a um reservatório de temperatura nula.⁷⁵ A igualdade acima (2.31), combinada com a expressão (2.26), leva à relação $U^\dagger(t).U(t).\beta^r = \beta^r$, o que exige escolhas particulares para cada vetor $\beta^r = (\beta_1^r, \beta_2^r, \dots, \beta_N^r)^\top$ (o qual define o r th componente de $|\psi(0)\rangle$), restringindo a ser um autovetor do operador (não-unitário) $U^\dagger(t).U(t)$ com autovalor igual a unidade. Podemos verificar também que a condição acima (2.31) evita o relaxamento do operador densidade $\rho(t)$, garantindo assim uma dinâmica de dissipação livre. De fato, utilizando a relação $U^\dagger(t).U(t).\beta^r = \beta^r$, obtém-se a igualdade

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\rho(t) \sum_m a_m^\dagger a_m \right] &= \sum_{r,s} \Lambda_r \Lambda_s^* \langle \{\beta_m^s\} | \{\beta_m^r\} \rangle \zeta^{ts}(t) \cdot \zeta^r(t) \\ &= \sum_{r,s} \Lambda_r \Lambda_s^* \langle \{\beta_m^s\} | \{\beta_m^r\} \rangle \beta^s \cdot U^\dagger(t).U(t).\beta^r \\ &= \sum_{r,s} \Lambda_r \Lambda_s^* \langle \{\beta_m^s\} | \{\beta_m^r\} \rangle \sum_m \beta_m^s \beta_m^r \\ &= \text{Tr} \left[\rho(0) \sum_m a_m^\dagger a_m \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Contanto que a excitação do estado inicial $|\psi(0)\rangle$ é preservada sob condição (2.31), uma escolha natural para os vetores β^r satisfazendo a igualdade $U^\dagger(t).U(t).\beta^r = \beta^r$ é para restringir ainda mais este vector é submetido a evolução unitária

$$\zeta^r(t) = U(t).\beta^r = \exp(-iHt).\beta^r, \quad (2.33)$$

que garante o SLD e é obtido, apesar dos mecanismos de dissipação, ao impor a relação de comutação $[H, \Gamma] = 0$ discutida acima, em conjunto com a equação de autovalor $\Gamma.\beta^r = 0$. De fato, a equação de autovalor garante que o estado inicial é preparado dentro de um SLD, enquanto que a relação de comutação assegura que ele estará sempre dentro do SLD, apesar da evolução regida pela Hamiltoniana livre H .

Portanto, temos duas classes de estados protegidos ao assumir a validade de ambas as relações $[H, \Gamma] = 0$ e $\Gamma.\beta^r = 0$: os não-estacionários e os estados estacionários. Para encontrar os estados não-estacionários, devemos diagonalizar Γ e seleccionar os autoestados com autovalores nulos, que não são simultaneamente autoestados de H . Evidentemente, esses estados evoluem de forma coerente, seguindo a acima mencionada dinâmica sem dissipação governada por H . Os estados estacionários protegidos podem ser extraídos por assegurar a relação de comutação $[H, \Gamma] = 0$ discutido acima, a partir do qual calculamos todos os autoestados simultâneos de H e Γ . Com esses estados em mão, então, seleccionamos os que conduzem a autovalores nulos de Γ . Evidentemente, cada topologia particular da rede, encapsulados no interior das matrizes H e Γ , conduz a um conjunto particular de estados não-estacionários e estacionários que serão protegidos. Notamos que a condição $[H, \Gamma] = 0$ por si só não fornece um CLD, como discutido acima, para que isto ocorra, um ou mais elementos da matriz $\tilde{Y}$ devem ser nulos.

A vantagem da nossa prescrição para encontrar o SLD, dada pelas condições

$$\Gamma.\beta^r = 0 \text{ e } [H, \Gamma] = 0, \quad (2.34)$$

em relação os protocolos da literatura, é que todos os estados protegidos automaticamente emergem dos autoestados de Γ com autovalores nulos (os estados em evolução protegidos) ou a partir dos autoestados comuns de ambos H e Γ , com autovalores nulos de Γ (os estados estacionários protegidos). Por outro lado, a obtenção de todos os estados protegidos

por meio do método proposto na literatura — em que o conjunto degenerado de autoestados $\{\Psi\}$ de todos os operadores $\{A_m\}$ na Eq. (2.15a) deve ser derivado — requer a diagonalização de todos os operadores A_m ocorrendo no Liouvilliano (2.15a). Salientamos que a presente técnica para extrair o SLD mostra que o número máximo (não degenerado) de estados protegidos é igual à dimensão da matriz Γ (ou Hamiltoniano H).

Finalmente observamos que as condições (2.34) aplica para reservatórios Markovianos, bem como não Markovianos; evidentemente, nos casos em que os canais diretos, bem como os indiretos acontecem, temos graus de liberdade adicionais para satisfazer ambos os requisitos, como demonstrado acima, com o Hamiltoniano (2.29). Os de canais indiretos que ocorrem dentro da Eq. (2.29) constituem ingredientes essenciais para satisfazer a equação de autovalor $\Gamma.\beta^r = 0$; quando se considera apenas os canais diretos, levando aos elementos diagonais da matriz Γ , apenas a relação de comutação $[H, \Gamma] = 0$ pode ser satisfeita.

2.5.3 De CLD para SLD

A seguir, demonstramos que as condições para gerar CLD levam ao surgimento de SLD. Na verdade, a construção de um CLD exige a relação de comutação $[H, \Gamma] = 0$, que assegura a matriz diagonal $\tilde{Y} = C.\Gamma.C^{-1}$, além das exigências de um (conjunto de) elemento nulo diagonal (s) $\tilde{Y}_{mm}$. O surgimento de um SLD, por sua vez, também depende da condição $[H, \Gamma] = 0$, em conjunto com o requisito adicional do estado a ser protegido ser um auto estado da matriz dissipativa, isto é, $\Gamma.\beta^r = 0$. A relação de comutação $[H, \Gamma] = 0$ sendo comum a construção de ambos os CLD e o SLD, demonstramos a equivalência de dois subconjuntos, estabelecendo que o requisito $\Gamma.\beta^r = 0$ para a construção de um SLD segue diretamente da matriz diagonal $\tilde{Y}$ contendo um (conjunto de) elemento nulos na diagonal (s) $\tilde{Y}_{mm}$. Para este fim, a partir da matriz diagonal $\tilde{Y}$, obtemos

$$\tilde{Y}.\tilde{\beta}^r = C.\Gamma.\beta^r, \quad (2.35)$$

onde $\tilde{\beta}^r = C.\beta^r$ representa o r th componente do estado inicial $|\tilde{\psi}(0)\rangle = \sum_r \Lambda_r |\tilde{\beta}^r\rangle$ expandida através das excitações dos osciladores dos modos normais. Da Eq. (2.35) verificamos que, quando um ou mais elementos de $\tilde{Y}_{mm}$ são nulos, obtemos diretamente um estado

protegido $|\tilde{\psi}(0)\rangle$, uma vez que sempre será possível escolher vetores $\tilde{\beta}^r$ tal que $\tilde{Y}.\tilde{\beta}^r = 0$ e consequentemente, $\Gamma.\beta^r = 0$, demonstrando assim que um CLD define um SLD. Observamos que um estado protegido $|\tilde{\psi}(0)\rangle$ dentro de um CLD, quando mapeados de volta para a representação dos osciladores naturais, se torna $|\psi(0)\rangle = \sum_r \Lambda_r |C^{-1}.\tilde{\beta}^r\rangle$.

2.5.4 Subespaço quase livre de decoerência

Um SQLD surge naturalmente em topologias onde as matrizes H e Γ apenas comutam aproximadamente: $[H, \Gamma] \approx 0$. Considerando a fórmula Zassenhaus para o operador não-unitário $U(t) = e^{-i(H-i\Gamma/2)t}$, a suposição de que $[H, \Gamma] \approx 0$ conduz a uma aproximação $U(t) \approx e^{-iHt} . e^{-\Gamma t/2}$. Consequentemente, assumindo que $\Gamma.\beta^r = 0$, tal que $U(t) \approx e^{-iHt} |\psi(0)\rangle$, encontramos que, no âmbito de um SQLD a dinâmica governada pelo Hamiltoniano livre H começa a conduzir o estado inicial para fora do SLD coerentemente, mais lentamente à medida que a aproximação $[H, \Gamma] \approx 0$ melhora. Portanto, observamos uma diminuição coerente na fidelidade do estado a ser protegido. No caso geral, em que o estado inicial $|\psi(0)\rangle$ é apenas um autovalor aproximado do autoestado Γ bem como de H , tal que

$$\Gamma.\beta^r \approx 0 \text{ e } [H, \Gamma] \approx 0, \quad (2.36)$$

observamos uma diminuição incoerente na fidelidade, na sequência da operadora $U(t) \approx e^{-iHt} . e^{-\Gamma t/2}$, em vez de a uma coerente $U(t) \approx e^{-iHt} |\psi(0)\rangle$, impulsionado apenas pelo Hamiltoniano livre. Nós discutimos com mais detalhes as condições (2.36) para o surgimento de uma SQLD na seção seguinte, onde uma aplicação de tais subespaços é apresentada.

2.6 Aplicação: TQPE dentro de um SQLD

Como uma aplicação dos SQLD, que vem elucidar como construí-los de modo a permitir a transferência quase perfeita de estados (TQPE), em uma topologia particular: uma rede linear de osciladores acoplados, todos eles com a mesma frequência natural, ω . O primeiro e o N th osciladores são assumidos como sendo o emissor e o receptor, respectivamente, que estão indiretamente ligados um ao outro por meio do canal quântico, o restante da cadeia de $N - 2$ osciladores. Também assumimos que o emissor e o receptor estão ambos

Figura 2.2 – Esquema de uma rede linear de osciladores acoplados utilizados para TQPE dentro de um SQLD.

ligados a apenas um dos osciladores do canal de dados, o emissor ligado ao segundo oscilador e o receptor com o $(N - 1)$ th, como representado na 2.2. As intensidades do acoplamento entre o transmissor e o oscilador 2 e entre o receptor e o oscilador $(N - 1)$ ambos sendo λ , enquanto todos os acoplamentos entre os osciladores do canal são $\tilde{\lambda}$. Além disso, assumimos que o emissor e o receptor são osciladores ideais, dentro de ambientes controlados, ao passo que o canal quântico, consiste em osciladores não ideais. Assumimos também que cada oscilador do canal é acoplado ao seu próprio reservatório Markoviano, com a mesma intensidade de acoplamento (direto) $\Gamma_{mm} = \Gamma$. Sob as condições acima mencionadas, a matriz H^D assume a forma

$$H^D = \begin{pmatrix} \omega & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \omega & \tilde{\lambda} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda} & \omega & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega & \tilde{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{\lambda} & \omega & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & \omega \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

com a matriz tridiagonal H e a diagonal Γ .

Em seguida, para o estado a ser transferido a partir do emissor para o receptor, devemos escolher um autovetor de Γ , com um autovalor nulo ou, pelo menos, muito pequeno

(como se tornará claro mais adiante). Com o pressuposto do emissor e do receptor sendo osciladores ideais, é fácil de mostrar que o estado inicial $|\Psi(0)\rangle_{1\dots N} = |\Psi\rangle_1 \otimes_{k=2}^N |0\rangle_k$, onde apenas o emissor é que contém a informação codificada na superposição de estados coerentes $|\Psi\rangle_1 = \mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ (todos os osciladores restantes no vácuo), implica que $\Gamma.\beta^r = 0$. Uma vez que este estado vai permanecer dentro de um SLD, sob a condição adicional $[H, \Gamma] = 0$, podemos concluir que os osciladores do canal devem permanecer no estado de vácuo, revelando que a transferência de estado dentro de um SLD resultada do tunelamento do estado emissor para o receptor.

No entanto, a partir da Eq. (2.37) vemos que as matrizes H e Γ não comutam. Pode ser demonstrado que H e Γ comutam apenas no cenário particular, onde o emissor e o receptor estão suficientemente próximos para permitir o acoplamento direto através de ondas evanescentes ou uma fibra óptica. Na presente análise, prevendo o caso geral em que o emissor e o receptor podem estar espacialmente afastados, só podemos construir um SQLD sob a condição de $[H, \Gamma] \approx 0$, e o tunelamento dissipativo ocorre em vez do mecanismo túnel ideal dentro do SLD. Uma vez que, quando a comutação $[H, \Gamma] = 0$ ocorre, o tunelamento ideal implica um acoplamento direto entre o emissor e o receptor, podemos inferir que $[H, \Gamma] \approx 0$ deve resultar de uma ligação indireta entre o emissor e o receptor mediada pelos modos normais do CQ. Conforme discutido abaixo, este acoplamento indireto é obtido através de uma interação não ressonante entre o sistema "emissor + receptor"(ω) e os modos normais do CQ. Essa interação dispersiva permite um procedimento aproximado para se livrar dos graus de liberdade do canal de dados, levando assim a um acoplamento efetivo entre os ressonadores emissor-receptor (H_{eff}), com uma taxa de decaimento efetiva (Γ_{eff}) associado a cada um deles. Em suma, com o Hamiltoniano efetivo H_{eff} , devemos obter $[H, \Gamma] \approx [H_{eff}, \Gamma_{eff}] = 0$ e, conseqüentemente, a partir da fórmula Zassenhaus, $U(t) \approx U_{eff}(t) = e^{-iH_{eff}t} \cdot e^{-\Gamma_{eff}t/2}$, o que novamente valida as condições derivadas acima para o surgimento de SLD e SQLD. Ressaltamos que os elementos da Γ_{eff} estão associadas com as taxas de decaimento efetivas do emissor e do receptor resultantes dos osciladores não ideais que formam o CQ.

Para resumir a discussão acima sobre a construção de um SLD ou um SQLD, observa-se que ambos os subespaços seguem a partir de uma escolha apropriada do estado inicial do canal de dados juntamente com o regime específico de parâmetros da rede que permitem o acoplamento efetivo entre o emissor e o receptor. Não há restrições quanto ao estado

a ser transferido. No que se segue, define-se o regime de parâmetros principais para o acoplamento de dispersão acima referido, para além da derivação da equação que rege a dinâmica efetiva entre receptor-emissor.

2.6.1 Interação efetiva emissor-receptor (H_{eff}) e matriz de amortecimento (Γ_{eff})

A fim de obter o Hamiltoniano efetivo que acopla o emissor e o receptor, deixamos de lado os reservatórios, concentrando apenas no Hamiltoniano (2.1) modelando a rede de N osciladores acoplados (emissor, receptor, e o canal quântico). Sob as condições que levam à Eq. (F.1), Hamiltoniano (2.1) simplifica-se

$$H_S = \hbar\omega(a_1^\dagger a_1 + a_N^\dagger a_N) + \lambda(a_1^\dagger a_2 + a_N^\dagger a_{N-1} + H.c.) + \sum_{\ell} \left[\omega a_{\ell}^\dagger a_{\ell} + \frac{1}{2} \sum_{\ell(\neq \ell')=2}^{N-1} \tilde{\lambda} (a_{\ell}^\dagger a_{\ell'} + H.c.) \right], \quad (2.38)$$

onde os rótulos ℓ e ℓ' variam entre os $N-2$ osciladores do canal. Diagonalizando apenas a rede que forma o canal quântico, reescrevemos o Hamiltoniano acima

$$\mathcal{H} = \hbar\omega(a_1^\dagger a_1 + a_N^\dagger a_N) + \hbar \sum_{\ell=2}^{N-1} \left[\bar{\omega}_{\ell} A_{\ell}^\dagger A_{\ell} + \lambda(C_{1\ell} a_1^\dagger + C_{N\ell} a_N^\dagger) A_{\ell} + H.c. \right], \quad (2.39)$$

e, na representação de interação definida pelos termos livres de $\mathcal{H}$, obtemos finalmente

$$\mathcal{V} = \hbar\lambda \sum_{\ell=2}^{N-1} \left[(C_{1\ell} a_1^\dagger + C_{N\ell} a_N^\dagger) A_{\ell} e^{i(\omega - \bar{\omega}_{\ell})t} + H.c. \right]. \quad (2.40)$$

Em seguida, assumimos que o emissor e o receptor são dispersivamente acoplados a todos os modos normais do CQ, de tal forma que a condição $\sqrt{\bar{n}}\lambda/\Delta_{\ell} \ll 1$ é satisfeita, $\bar{n}$ sendo a excitação média de $|\psi(0)\rangle$ e $\Delta_{\ell} = |\omega - \bar{\omega}_{\ell}|$. Assumindo que todos os osciladores

do CQ estão inicialmente no estado de vácuo, no regime de interação dispersiva (2.40) consistem de termos altamente oscilante, proporcionando assim, uma boa aproximação até segunda ordem em λ , onde obtemos o Hamiltoniano efetivo^{76,77}

$$\begin{aligned} H_{eff} &= -\frac{i}{\hbar} \mathcal{V}(t) \int \mathcal{V}(t') dt' \\ &= \hbar \chi \left(a_1^\dagger a_N + a_1 a_N^\dagger \right), \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde $\chi = \lambda^2/2\tilde{\lambda}$ é o acoplamento efetivo entre o emissor e o receptor. (Pode-se mostrar que o coeficiente efetivo para uma rede simétrica, da qual pode se derivar qualquer outra topologia do CQ, é $\chi = \lambda^2 \sum_{\ell=1}^{N-2} |C_{\ell 1} C_{\ell N}| / \Delta_\ell$.) Evidentemente, tal acoplamento efetivo depende da topologia do CQ, mesmo quando definimos a maneira pela qual o conjunto de osciladores se acoplam (isto é, o padrão das suas ligações), conjuntos distintos de suas intensidade de acoplamento e as frequências naturais podem levar a intensidades distintas de χ . Devemos salientar que a interação efetiva (2.41) está limitado a redes em que $N \ll \sqrt{\hbar} \Delta_\ell / \lambda$, desde que sua correção de terceira ordem é proporcional a $N\lambda^3/\Delta_\ell^2$, deve ser muito menor do que λ^2/Δ_ℓ . Além disso, a derivação de H_{eff} baseia-se no requisito adicional de que a intensidade do acoplamento λ do emissor e do receptor com o CQ (ver a 2.2) é muito menor do que o acoplamento $\tilde{\lambda}$ entre os osciladores do CQ i.e. $\lambda \ll \tilde{\lambda}$. Caso contrário, a excitação inicial do estado a ser transferido do emissor para o receptor vai começar a popular o CQ, mesmo sob efeito de uma grande dessintonia Δ_ℓ . Por esta razão, daqui em diante, definimos $\tilde{\lambda} = \varepsilon \lambda$, com $\varepsilon \gg 1$; quanto maior ε melhor é a aproximação (2.41). A partir da expressão para os modos normais de uma rede linear, $\omega_\ell = \omega - 2\varepsilon \lambda \cos(2\ell\pi/N)$, juntamente com a desigualdade $N \ll \sqrt{\hbar} \Delta_\ell / \lambda$ assegurando a aproximação (2.41), também verificamos que $\varepsilon \gg N$. Observamos que o Hamiltoniano efetivo derivado (2.41) é indicativo de que o estado do emissor transfere por tunelamento para o receptor, onde os osciladores do CQ, são apenas virtualmente populados.

Tendo definido um Hamiltoniano efetivo (2×2) H_{eff} e, conseqüentemente, uma matriz (2×2) de decaimento Γ_{eff}

$$\Gamma_{eff} = \begin{pmatrix} \Gamma_{eff}^{(1)} & 0 \\ 0 & \Gamma_{eff}^{(N)} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

composto pelas taxas de decaimento efetivas do emissor ($\Gamma_{eff}^{(1)}$) e do receptor ($\Gamma_{eff}^{(N)}$), é

simples verificar a aproximação

$$[H, \Gamma] \approx [H_{eff}, \Gamma_{eff}] = 0, \quad (2.43)$$

tal que o mecanismo de tunelamento descrito por H_{eff} leva ao aparecimento de um SQLD nas condições que $\sqrt{\hbar}\lambda/\Delta_\ell \ll 1$, $\lambda \ll \tilde{\lambda}$, e $N \ll \sqrt{\hbar}\Delta_\ell/\lambda$. A matriz de decaimento Γ_{eff} , segue diretamente da equação mestra (2.15) sob as aproximações que levam a interação efetiva (2.41), com as taxas de decaimento efetivo $\Gamma_{eff}^{(1)} = \Gamma_{eff}^{(N)} = \Gamma \left(\lambda/\tilde{\lambda} \right)^2 \ll \Gamma$, que confirma que a excitação do estado preparado no emissor tunela para o receptor apenas virtualmente populando o CQ. [Também pode ser verificado que para uma topologia simétrica obtemos os resultados gerais $\Gamma_{eff}^{(1)} = \gamma\lambda^2 \sum_\ell (|C_{\ell 1}|/\Delta_\ell)^2$ e $\Gamma_{eff}^{(N)} = \Gamma\lambda^2 \sum_\ell (|C_{\ell N}|/\Delta_\ell)^2$.]

2.6.2 TQPE numa rede linear com $N = 4$: um tratamento analítico

A fim de chegar a expressões analíticas para o tempo de transferência de estado e a fidelidade do processo de transferência de estado, o qual poderia ser usado para melhorar o nosso conhecimento sobre o comportamento dinâmico, consideramos a seguir TQPE em uma pequena rede linear com $N = 4$, em que o CQ é composto por apenas dois osciladores não ideais. Neste caso particular, ainda supondo que o emissor e o receptor são osciladores ideais, a matriz dissipação tem a seguinte forma

$$H^D = \begin{pmatrix} \omega & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & \omega - i\Gamma/2 & \varepsilon\lambda & 0 \\ 0 & \varepsilon\lambda & \omega - i\Gamma/2 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \omega \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

A partir dos autovalores e autovetores da matriz acima obtemos a matriz de transformação D , bem como a diagonal Ω , que nos permitem calcular a evolução da excitação dos osciladores de rede, $\zeta^r(t) = U(t) \cdot \beta^r$. Ao definir a frequência adimensional $\tilde{\omega} = \omega/\lambda$ e taxa de amortecimento $\eta = \Gamma/2\lambda$, os correspondentes autovalores adimensionais Ω_m torna-se:

$$\Omega_m = \tilde{\omega} + (-1)^{\delta_{m1} + \delta_{m2}} \frac{\varepsilon}{2} + (-1)^m \Lambda \cos \Phi - i \left[\frac{\eta}{2} + (-1)^{\delta_{m2} + \delta_{m3}} \Lambda \sin \Phi \right], \quad (2.45)$$

onde temos definidos os parâmetros

$$\Lambda = \left\{ \left[1 + \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 - \left(\frac{\eta}{2} \right)^2 \right]^2 + \left(\varepsilon \frac{\eta}{2} \right)^2 \right\}^{1/4}, \quad (2.46)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\varepsilon\eta}{4 + \varepsilon^2 - \eta^2} \right). \quad (2.47)$$

A partir dos autovetores associados, obtemos a matriz de diagonalização

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ \tilde{\omega} - \Omega_1 & \tilde{\omega} - \Omega_2 & \Omega_3 - \tilde{\omega} & \Omega_4 - \tilde{\omega} \\ \Omega_1 - \tilde{\omega} & \Omega_2 - \tilde{\omega} & \Omega_3 - \tilde{\omega} & \Omega_4 - \tilde{\omega} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Com o operador não unitário $U(t)$ em mãos, podemos calcular os operadores densidade reduzido do emissor, no tempo zero, $\rho_1(0)$, e do receptor num tempo arbitrário t , $\rho_N(t)$. Estes operadores permitem-nos calcular a fidelidade do processo de transferência, dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau) &= \text{Tr}[\rho_1(0)\rho_N(\tau)] \\ &= \mathcal{N}^4 \sum_{r,s,r',s'} \Lambda_r \Lambda_{r'} \Lambda_s^* \Lambda_{s'}^* \langle \{\beta_m^s\} | \{\beta_m^r\} \rangle \langle \{\beta_m^{s'}\} | \{\beta_m^{r'}\} \rangle \\ &\quad \times \exp \left[- \left(\zeta_4^{s'}(\tau) - \beta_1^s \right)^* \left(\zeta_4^{r'}(\tau) - \beta_1^r \right) \right], \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde definimos o tempo adimensional $\tau = \lambda t$. Para o estado inicial definido acima: $|\Psi(0)\rangle_{1\dots N} = |\Psi\rangle_1 \otimes_{k=2}^N |0\rangle_k$, onde todos os osciladores de rede menos do emissor estão no vácuo, obtém-se a expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau) &= \frac{1}{\left(1 + e^{-2|\alpha|^2}\right)^2} \left\{ \left[\exp \left[-|\alpha|^2 \left(f_\eta^2(\tau) + 1 \right) \right] + \exp \left[|\alpha|^2 \left(f_\eta^2(\tau) - 3 \right) \right] \right] \right. \\ &\quad \times \cosh \left[2|\alpha|^2 f_\eta(\tau) \sin(\omega t) \right] + 2e^{-2|\alpha|^2} \cosh \left[|\alpha|^2 \left(f_\eta^2(\tau) - 1 \right) \right] \cos \left[2|\alpha|^2 f_\eta(\tau) \cos(\tilde{\omega}\tau) \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde definimos uma função de decaimento

$$f_\eta(\tau) = e^{-\eta\tau/2} \left\{ \left[\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\tau\right) \cos u(\tau) - \frac{1}{2\Lambda} (\varepsilon \cos z(\tau) - \eta \sin z(\tau)) \sin u(\tau) \right] \cosh v(\tau) - \left[\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\tau\right) \sin u(\tau) - \frac{1}{2\Lambda} (\varepsilon \sin z(\tau) + \eta \cos z(\tau)) \cos u(\tau) \right] \sinh v(\tau) \right\} \quad (2.51)$$

com $u(\tau) = \Lambda \cos(\Phi) \tau$, $v(\tau) = \Lambda \sin(\Phi) \tau$ e $z(\tau) = \varepsilon\tau/2 - \Phi$. No caso especial de osciladores ideais no CQ ($\eta = 0$), a função de decaimento reduz aos expressão

$$f_0(\tau) = \sin\left(\frac{1}{2}\varepsilon\tau\right) \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4+\varepsilon^2}\tau\right) - \frac{\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon^2}} \cos\left(\frac{1}{2}\varepsilon\tau\right) \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4+\varepsilon^2}\tau\right), \quad (2.52)$$

que pode ser usado para calcular o tempo de transferência $\tilde{\tau}$, em que a sobreposição preparada no emissor, $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$, tunela para o receptor. Na verdade, quando $\eta = 0$, verificamos que a fidelidade (2.50) é igual a unidade quando $f_0(\tau) = \pm 1$ e $\cos(\tilde{\omega}\tau) = \pm 1$. A igualdade $f_0(\tau) = \pm 1$ juntamente com a Eq. (2.52) leva a uma equação transcendental que sob a aproximação $\varepsilon/\sqrt{4+\varepsilon^2} \approx 1$, tem como solução

$$\tilde{\tau} = \frac{2n+1}{2}\varepsilon\pi, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.53)$$

onde $n = 0$ indica o momento em que o estado de superposição é primeiro transferido para o receptor, enquanto que $n = 1$ indica o momento em que a sobreposição retorna ao receptor depois de serem transferidas de volta para o remetente, e assim por diante.

2.7 TQPE dentro de um SQLD: tratamento de redes grandes através da interação efetiva e da matriz amortecimento

Nesta seção, vamos analisar a validade da interação efetiva (H_{eff}) e matriz de amortecimento (Γ_{eff}). Primeiro, focamos no tempo de transferência da superposição coerente $|\Psi\rangle_1 = \mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ a partir do emissor para um receptor, inicialmente no estado de vácuo. Consideramos ambos os casos o ideal ($\eta = 0$), onde obtemos o resultado analítico (2.53), e a não-ideal. Começando com o caso ideal, obtém-se, a partir do Hamiltoniano

efetivo (2.41) levando ao operador evolução U_{eff} , o estado evoluído

$$U_{eff}(\tau) |\Psi\rangle_1 |0\rangle_N = \mathcal{N} [|\alpha \sin(\tilde{\chi}\tau)\rangle_1 |\alpha \cos(\tilde{\chi}\tau)\rangle_N + |-\alpha \sin(\tilde{\chi}\tau)\rangle_1 |-\alpha \cos(\tilde{\chi}\tau)\rangle_N], \quad (2.54)$$

onde $\tilde{\chi} = \chi/\lambda = 1/\varepsilon$. A partir deste resultado, calcular diretamente o tempo de transferência do estado $|\Psi\rangle_1$ do emissor para o receptor como $\tilde{\tau} = \pi/2\tilde{\chi} = \varepsilon\pi/2$, para qualquer número de osciladores do CQ, satisfazendo $N \ll \sqrt{\hbar}\Delta_\ell/\lambda$. Este resultado está em pleno acordo com o valor analítico derivado da Eq.(2.53) com $\eta = 0$. Também pode ser verificado que o tempo de transferência $\tilde{\tau} = \varepsilon\pi/2$ aplica-se a qualquer estado de superposição preparado no emissor. Além disso, Hamiltoniano(2.41) pode ser utilizado para a troca de estados de superposição entre o emissor e o receptor, em que os seus estados iniciais são simultaneamente transferidos de um para o outro.

No caso de um barramento de dados não ideal calculamos a fidelidade durante a transferência da sobreposição $|\Psi\rangle_1$ a partir do emissor para o receptor, em primeiro lugar, temos a partir da Eq. (2.25), o operador densidade

$$\begin{aligned} \rho_{1,N}^+(\tau) = \mathcal{N}(\alpha) \sum_{j=1,N} [& |(-1)^j \alpha v(\tau)\rangle_1 \langle(-1)^j \alpha v(\tau)| \otimes |(-1)^j \alpha u(\tau)\rangle_N \langle(-1)^j \alpha u(\tau)| \\ & + e^{-2|\alpha|^2[1-u^2(\tau)-v^2(\tau)]} |(-1)^j \alpha v(\tau)\rangle_1 \langle(-1)^{j+1} \alpha v(\tau)| \otimes |(-1)^j \alpha u(\tau)\rangle_N \langle(-1)^{j+1} \alpha u(\tau)|], \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde, definimos o parâmetro $\Lambda = \tilde{\chi} \sqrt{1 - (\Gamma_{eff}/2\tilde{\chi})^2}$, com $\Gamma_{eff} = \Gamma_{eff}^{(1)}/2\lambda = \Gamma_{eff}^{(N)}/2\lambda = \eta/\varepsilon^2$, as funções dependentes do tempo sendo

$$u(\tau) = \frac{\tilde{\chi}}{\Lambda} \sin(\Lambda\tau) e^{-\Gamma_{eff}\tau}, \quad (2.56)$$

$$v(\tau) = \left[\cos(\Lambda\tau) + \frac{\Gamma_{eff}}{2\Lambda} \sin(\Lambda\tau) \right] e^{-\Gamma_{eff}\tau}. \quad (2.57)$$

Traçando os graus de liberdade do emissor, obtém-se o operador de densidade do receptor $\rho_N(\tau) = \text{Tr}_1 \rho_{1,N}^+(\tau)$, do qual podemos calcular a fidelidade do processo de transferência

$$\mathcal{F}(\tau) = \max \{ \text{Tr}_N [\rho_N(\tau) |\Psi\rangle_1 \langle\Psi|], \tau \} = (1 + e^{-2|\alpha|^2[1-s(\tilde{\tau})]}) \frac{1 + e^{-2|\alpha|^2 s(\tilde{\tau})}}{2(1 + e^{-2|\alpha|^2})} \quad (2.58)$$

onde $s(t) = u^2(t) + v^2(t) \approx e^{-\Gamma_{eff}\tau}$ e

$$\tilde{\tau} = (1/\Lambda) \cot^{-1}(\Gamma_{eff}/2\Lambda) \quad (2.59)$$

corresponde ao tempo que maximiza a transferência $\mathcal{F}(\tau)$, que vem a ser um pouco mais longo do que aquele calculado para o caso ideal em que a dissipação está ausente. Na verdade, desde que $\Gamma_{eff}/\tilde{\chi} \approx \gamma/\varepsilon\lambda$ é significativamente menor do que a unidade — como se torna mais claro abaixo — mais uma vez encontramos que $\tilde{\tau} = \pi/2\Lambda - \Gamma_{eff}/2\Lambda^2 \approx \pi/2\Lambda \gtrsim \pi/2\tilde{\chi}$ para todo $N \ll \sqrt{\hbar}\Delta_\ell/\lambda$. Para o caso de parâmetros realísticos onde temos que $\Gamma_{eff}/\tilde{\chi} \ll 1$, a equação acima pode ser simplificada para

$$\mathcal{F}_\pm(\tilde{\tau}) \approx (1 + e^{-\pi|\alpha|^2\eta/\varepsilon})/2, \quad (2.60)$$

mostrando uma alta fidelidade para o processo de transferência, desde que $|\alpha|^2 \ll \tilde{\chi}/\Gamma_{eff}$.

Para ter certeza de que a fidelidade derivada acima a partir H_{eff} e Γ_{eff} aplica-se a todo $N \ll \sqrt{\hbar}\Delta_\ell/\lambda$, comparamos o resultado da Eq. (2.58) com os cálculos numéricos de um CQ com $N = 30$ osciladores e $\alpha = 5$. Adotando parâmetros físicos típicos onde $\omega \gg \lambda, \Gamma$, vamos definir $\tilde{\omega} = 10^4$ e $\eta = 1$. Nas Figs.2.3 e 2.4 nós assumimos, respectivamente, $\varepsilon = 10^2$ (onde $\sqrt{\hbar}\Delta_\ell/\lambda \approx 3 \times 10^2$) e $\varepsilon = 10^3$ (onde $\sqrt{\hbar}\Delta_\ell/\lambda \approx 3 \times 10^3$), para mostrar que quanto maior o parâmetro ε , torna-se menor o erro entre o resultado da análise efetiva e do cálculo numérico. Estas figuras exibem a evolução, no tempo em escala $\tilde{\tau}$, de ambas as fidelidades: (a) obtida numericamente a partir da Eq. (2.28), $\mathcal{F} = \text{Tr}_N[\rho_N(\tau) |\Psi\rangle_1 \langle\Psi|]$, e (b) o resultado analítico (2.58) proveniente das aproximações derivadas Ref.^{76,77} Verificamos, como esperado, que partindo de $\varepsilon = 10^2$ até $\varepsilon = 10^3$ os resultados aproximados da análise mostra uma concordância significativamente melhor com a computação numérica exata. O tempo de transferência, em excelente concordância com o valor analítico $\tilde{\tau} = \varepsilon\pi/2$, evidentemente ocorre para inteiros ímpares, os inteiros pares estando associados com a recorrência do estado para o emissor. Na Fig.2.5 plotamos a fidelidade computada numericamente a partir Eq. (2.28), assumindo os mesmos parâmetros da 2.4, exceto para valores aleatórios de $\varepsilon_{\ell\ell'}$, definindo a intensidade do acoplamento entre os osciladores do CQ, que cai de maneira uniforme dentro do intervalo $[0.8, 1.2] \times 10^3$ em vez do valor fixo de 10^3 . Observa-se que, apesar da ampla gama de aleatoriedade na intensidade de acoplamento, a fidelidade e o tempo de transferência são fracamente afetados,

Figura 2.3 – Gráfico da fidelidade, contra o tempo escalado $\tilde{\tau}$, calculado *a)* analiticamente através da equação 2.41, e *b)* numericamente a partir da equação 2.11a , considerando $N = 30$, $\alpha = 5$, $\omega = 10^4$, e $\eta = 1$, com $\epsilon = 10^2$

demonstrando a robustez do TQPE contra flutuações experimentais.

Finalmente, abordamos a questão de como uma excitação pode ser transferida em uma rede sem excitar os osciladores dados do canal quântico. Para tal, considerando mais uma vez que toda a rede está preparada inicialmente no estado $|\Psi(0)\rangle_{1\dots N} = |\Psi\rangle_1 \otimes_{k=2}^N |0\rangle_k$, na 2.6 plotamos a excitação média do CQ, dada por $\langle E \rangle = \sum_{\ell=2}^{N-1} \int_0^{\tilde{\tau}} dt \langle a_{\ell}^{\dagger}(t) a_{\ell}^{\dagger}(t) \rangle / \tilde{\tau}$, contra o tempo dimensionado $\tilde{\tau}$ para três valores diferentes do parâmetro ϵ . Observamos que para $\epsilon = 10^3$ a excitação do CQ permanece praticamente no estado de vácuo, com uma excitação média muito pequena, cerca de 10^{-6} . Quando diminuimos o parâmetro ϵ para 10^2 e 10, observamos que a excitação do CQ começa a aumentar a medida que ϵ diminui, confirmando nossa expectativa. Na verdade, quando diminuimos ϵ enfraquecemos a condição de acoplamento dispersivo que conduz ao Hamiltoniano efetivo (2.41).

Figura 2.4 – Gráfico da fidelidade, contra o tempo escalado $\tilde{\tau}$, calculado *a)* analiticamente através da equação 2.41, e *b)* numericamente a partir da equação 2.11a, considerando $N = 30$, $\alpha = 5$, $\bar{\omega} = 10^4$, e $\eta = 1$, com $\epsilon = 10^3$

Figura 2.5 – Gráfico da fidelidade, contra o tempo escalado $\tilde{\tau}$, calculado numericamente a partir da equação 2.11a com os mesmos parâmetros da 2.4, exceto pelos valores randômicos de $\epsilon_{\ell\ell'}$ dentro do intervalo $[0.8, 1.2] \times 10^3$

Figura 2.6 – Gráfico da excitação média $\langle E \rangle$ em função do tempo escalado $\tilde{\tau}$, para três valores diferentes do parâmetro $\epsilon = 10, 10^2$ e 10^3 .

2.8 Observações finais

Neste trabalho, uma técnica para construir CLD dentro de uma rede de osciladores harmônicos dissipativos, isto é, para isolar um grupo de modos normais, dos efeitos incoerentes da dissipação, foi proposta. Também demonstrou-se, que quando mapeado de volta para os osciladores da rede naturais, os estados protegidos no CLD constituem os bem conhecidos SLD. Assim, apresentamos uma técnica alternativa para a construção SLD, que oferece duas vantagens sobre o método convencional. Em primeiro lugar, ele fornece todos os estados de rede protegidos de uma só vez, em vez de depender da diagonalização de todos os operadores A_m que ocorre na equação Lindblad da rede. Em segundo lugar, conduz automaticamente ao conceito dos SQLD, no interior do qual um estado de superposição é quase completamente protegidos contra decoerência. Ao enfraquecer as condições necessárias para a construção do SLD, os SQLD pode oferecer uma maneira mais fácil de controlar decoerência, além de ampliar a compreensão do surgimento de tais subespaços. Duas situações distintas são tratadas: cada oscilador acoplado ao seu próprio reservatório e toda a rede acoplada a um reservatório comum. A natureza Markoviana ou

não Markoviana dos reservatórios desempenha um papel importante no surgimento destes subespaços de proteção, uma característica que pode ser investigada em cristais fotônicos

Também apresentou-se uma aplicação para um SQLD, a transferência quase perfeita de um estado de superposição de um dos osciladores de rede para outro, a partir de um emissor para o receptor. Assumimos que estes dois osciladores ideais estão indiretamente ligados através de uma cadeia linear de osciladores não ideais, o canal quântico, como representado na Fig. 2. Esta aplicação ajuda-nos a entender o mecanismo por trás do surgimento dos SQLD que levam a TQPE : o estado tunela do emissor para o receptor, populando apenas virtualmente o canal quântico, e consequentemente, minimizando a ação dos reservatórios acoplados ao CQ. Obtemos aqui os mesmos efeitos de Ref.⁶⁵ , em que o mecanismo tunelamento é desenvolvido através do ajuste da frequência comum do emissor-receptor para estar fora de ressonância com a dos osciladores do CQ. Aqui, em vez disso, a frequência comum do emissor-receptor estão ajustados para ficar fora de ressonância com os modos normais do CQ, uma condição para a construção dos SQLD, juntamente com a escolha apropriada do estado inicial do CQ. Uma vez que estes dois estão presentes na Ref.⁶⁵ concluímos — através dos argumentos aqui apresentados — que a TQPE obtida em⁶⁵ também emerge de SQLD.

Acreditamos que os SQLD, derivados de condições menos restritivas do que a SLD, pode desempenhar um papel útil em processamento de informação quântica. Além TQPE, tais subespaços podem ser explorados para a execução de processamento de informação dentro de SQLD, sem a necessidade de técnicas de correção de erros. Enfatizamos, que o mecanismo por trás do surgimento do SQLD, derivando o acoplamento efetivo entre o emissor-receptor , o que revela um processo de transferência controlada através de tunelamento dissipativo.

CAPÍTULO 3

ENGENHARIA DE INTERAÇÕES PARA TRANSFERÊNCIA QUASE PERFEITA DE ESTADOS DE POLÁRITON ATRAVÉS DE REDES BOSÔNICAS NÃO IDEAIS COM DISTINTAS TOPOLOGIAS

3.1 Introdução

Processamento de informação quântica, muitas vezes necessita transferir um estado quântico de um sítio de uma rede para outro,⁷⁸ e uma variedade de portadores de informação são usados para esse fim. As mais promissoras propostas para processamento lógico quântico foram feitas em átomos aprisionados e fótons em eletrodinâmica quântica de cavidade (EQC)⁷⁹ e fônons em armadilhas iônicas.⁵² É, portanto, um objetivo fundamental para a computação quântica encontrar sistemas físicos que ofereçam canais de transmissão acoplando diversos processadores quânticos diferentes.

Nos últimos anos, extensa pesquisa teórica foi realizada sobre o tema da transferência de estado em redes quânticas, e numerosos protocolos foram propostos em diferentes sistemas. Uma pletora de resultados interessantes foram obtidos na transferência de estados

quânticos em cadeias de spin,⁶⁶ considerando os diferentes tipos de acoplamentos entre spins⁶⁷ e os erros decorrentes de redes não ideais.^{68,69} Quanto a redes óticas, uma das plataformas mais promissoras para processamento de informação quântica, podemos citar o transporte coerente de pacotes de onda atômica⁷⁰ e a evolução macroscópica de estados emaranhados.⁷¹ Grande interesse tem surgido em cadeias de cavidades acopladas onde podemos simular sistemas de muitos corpos, por exemplo, o Hamiltoniano de Bose-Hubbard que apresenta transição de fase quântica.³⁹ Além disso, no domínio da EQC, realizou-se a transferência coerente de estados entre a matéria e luz, permitindo a implementação de redes quânticas distribuídas.^{72,73}

Avanços significativos foram feitos recentemente em redes bosônicas, sistema que nos concentramos neste trabalho. Temos um tratamento geral de osciladores harmônicos quânticos dissipativos, para qualquer topologia da rede, ou seja, a forma como os osciladores estão acoplados, a intensidade do acoplamento, e suas frequências naturais.³⁴ Dentro de tal tratamento de um modo geral, o surgimento de subespaços livres de decoerência em redes fracamente e fortemente acopladas foi abordada⁴⁶ além da proposta do emprego desses sistemas como memória quântica para a preservação dos estados de superposição contra decoerência por sua evolução em topologias adequadas.³⁵ Além disso, a dinâmica e manipulação de emaranhamento foi analisada,³⁰ além de outros avanços significativos.^{80,81}

A motivação do presente estudo é a transferência de informação quântica codificada em estados de poláriton, ou seja, combinações de excitações atômicas e fotônicas. Reunindo os graus de liberdade de ambos os sistemas, o campo de radiação e a amostra atômica, podemos otimizar a codificação de informações. Além disso, poláritons permitem um fácil controle externo com feixes laser.⁸² Finalmente, destacamos a possibilidade de usar poláritons que não contêm o estado excitado do átomo (estados escuros), sendo imunes a emissão espontânea e robustos aos efeitos da decoerência⁸³.

Trabalhando com estados escuros de poláritons em cavidades com alto fator de qualidade, podemos supor que o emissor-receptor são sistemas ideais, cada um conectado a uma cavidade não ideal do canal de transmissão. Para o canal de transmissão, assumimos que cada cavidade é acoplada ao seu próprio reservatório. Além disso, analisamos a eficácia de topologias distintas do canal, compreendendo I) a forma como são acoplados, II) a intensidade do acoplamento e III) as frequências naturais. Computamos a fidelidade do

Figura 3.1 – Esquema do dispositivo de transferência de estado, com o emissor e o receptor acoplado a um canal quântico que consiste em uma rede circular de cavidades dissipativas

processo de transferência, analisando os seguintes aspectos: o número de conectividades e intensidade do acoplamento entre as cavidades do canal. A intensidade do acoplamento efetivo entre o sistema emissor-receptor depende da topologia da rede. Apresentamos um esquema do nosso dispositivo, com o emissor e o receptor acoplados com canal que consiste de 3.1 rede circular 3.2 rede simétrica de cavidades dissipativas não ideais. Nossa escolha do canal quântico baseado em uma rede de cavidades acopladas é motivada pelo recente progresso experimental na fabricação de cadeias de microcavidade. Destacamos a realização do regime de acoplamento forte entre estruturas atômicas, com os modos do campo eletromagnético quantizado dentro das microcavidade tais como as cavidades microtoroidais, e defeitos em materiais fotônicos³⁸. O protocolo consiste em ajustar o emissor e o receptor em ressonância entre si e fora de ressonância com os modos normais do canal quântico. Esse mecanismo de transferência por tunelamento, pelo qual o estado ocupa as cavidades do canal apenas virtualmente, enfraquece os efeitos indesejados dos mecanismos de dissipação, protegendo a informação dos efeitos do ambiente.

3.2 O modelo

Como antecipado anteriormente, o nosso sistema consiste de um emissor e um receptor, cada um composto por uma cavidade de alto fator de qualidade de frequência ω preenchido por uma amostra de M átomos de três níveis. A estrutura atômica é esboçada na 3.3, onde

Figura 3.2 – Esquema do dispositivo de transferência de estado, com o emissor e o receptor acoplado a um canal quântico que consiste em uma rede simétrica de cavidades dissipativas .

g , e indica o estado fundamental e o estado excitado, que são acoplados através de um estado intermediário i . Os átomos interagem com um campo de laser frequência ω_L além de interagir com um modo da cavidade. Supondo que todos os átomos interagem da mesma forma com o modo da cavidade, podemos restringir sua descrição a estados de Dicke onde as excitações atômicas são deslocalizados entre todos os átomos. Antes de acoplar o emissor ao receptor com rede de cavidades do canal, trataremos o sistema independentemente. Nosso objetivo é encontrar um regime de parâmetros onde o sistema "átomos + modo da cavidade" comporta-se como um campo bosônico.

Dentro do regime de parâmetros, onde o emissor e receptor satisfazem relações de comutação bosônicas, acoplamos estes as cavidades do canal e derivamos uma interação efetiva, que revela por si só o processo de transferência de estado. Portanto, focando inicialmente apenas sobre o sistema "átomos + cavidade", a Hamiltoniana que descreve o sistema é $H = H_0 + H_I$, ($\hbar = 1$) onde

$$H_0 = \omega a^\dagger a + \sum_{i=1}^M \left[(\omega - \omega_L + \epsilon) \sigma_{ff}^{(i)} + (\omega_c + \delta) \sigma_{ee}^{(i)} \right], \quad (3.1)$$

descreve o modo da cavidade (ω), com operadores de aniquilação e criação a e $a^\dagger$, mais o sistema atômico bombeado com um laser (ω_L), com $\sigma_{rs}^{(i)} = |r\rangle \langle s|$ representando operadores de levantamento e abaixamento atômico (para $r \neq s$) e população do nível de energia ($r = s$). As dessintonias ϵ e δ são mostradas na Fig.(3.3). A interação entre o modo da cavidade e a amostra atômica é modelado pelo Hamiltoniano

Figura 3.3 – Esquema da configuração atômica Λ , onde g e e indicam o estado fundamental e o excitado que são acoplados através de um nível auxiliar f . O modo da cavidade acopla a transição $g \rightleftharpoons f$ com intensidade ξ_{gf} e dessintonia δ , enquanto que um campo laser de frequência ω_L acopla a transição $e \rightleftharpoons f$ com intensidade Ω_L e dessintonia $\delta - \epsilon$.

$$H_I = \sum_{i=1}^M \left(\xi_{gf} a^\dagger \sigma_{gf}^{(i)} + \Omega_L \sigma_{ef}^{(i)} e^{-i\omega_L t} + h.c. \right), \quad (3.2)$$

onde ξ_{rs} é o acoplamento átomo-campo para a transição $r \rightleftharpoons s$ e Ω_L o acoplamento de Rabi do laser.

Definindo os operadores coletivos atômicos $S_{rs} = \sum_{i=1}^M \sigma_{rs}^{(i)} / \sqrt{M}$ e acoplamento $\xi = \sqrt{M} \xi_{gf}$, aplicamos uma transformação para mudança de referencial, através do operador unitário $U = \exp[-i\omega t (a^\dagger a + S_{ee} + S_{ff})]$. O Hamiltoniano transformado é dado por

$$\tilde{H} = \epsilon S_{ee} + \delta S_{ff} + \xi a^\dagger S_{gf} + \Omega_L S_{ef} + h.c., \quad (3.3)$$

cujas diagonalização fornece os autovetores e correspondentes autovalores que são agrupados em variedades com o mesmo número de excitações.^{84,85} Considerando $\epsilon = 0$ encontramos um único autovetor com autovalor nulo para a variedade com 0 excitações, e três autovalores distintos com seus respectivos autovetores para todas as outras variedades com $n \geq 1$ excitações. Vamos denotar o autovetor da n th variedade $|\psi_0^{(n)}\rangle$ e $|\psi_\pm^{(n)}\rangle$, e seus correspondentes autovalores $E_0^{(n)}$ e $E_\pm^{(n)}$, onde $E_-^{(n)} < E_0^{(n)} < E_+^{(n)}$. Os estados da primeira variedade $|\psi_0^{(1)}\rangle$ e $|\psi_\pm^{(1)}\rangle$ podem ser escritos em função dos estados da base atômica e de Fock $|n, r\rangle$, com n a excitação do modo da cavidade e r do nível atômico. As energias associadas a estes estados são respectivamente $E_0^{(1)} = 0$ e $E_\pm^{(1)} = \delta/2 \pm \sqrt{(\delta/2)^2 + \Omega_L^2 + \xi^2}$. Defi-

nindo os vetores transpostos $\mathbf{p}^{(1)} = (|\psi_{-}^{(1)}\rangle, |\psi_0^{(1)}\rangle, |\psi_{+}^{(1)}\rangle)^T$ e $\mathbf{b}^{(1)} = (|1, g\rangle, |0, e\rangle, |0, f\rangle)^T$, temos que $\mathbf{p}^{(1)} = \mathbb{M}\mathbf{b}^{(1)}$, onde a matriz de mudança de base é

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \xi/N_{-} & E_{-}^{(1)}/N_{-} & 1/N_{-} \\ \Omega_L/N_0 & 0 & \xi/N_0 \\ \xi/N_{+} & E_{+}^{(1)}/N_{+} & 1/N_{+} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

com $N_0 = \sqrt{\Omega_L^2 + \xi^2}$ e $N_{\pm} = \sqrt{\Omega_L^2 + \xi^2 + E_{\pm}^{(1)}}$. Finalmente, através dos operadores $p_0^{(1)\dagger} = (\Omega_L a^\dagger - \xi S_{ge}^\dagger)/N_0 = |\psi_0^{(1)}\rangle \langle \psi_0^{(0)}|$, $p_{\pm}^{(1)\dagger} = (\xi a^\dagger + E_{\pm}^{(1)} S_{ge}^\dagger + S_{gi}^\dagger)/N_{\pm} = |e_{0,\pm}^{(1)}\rangle \langle e_0^{(1)}|$ — onde $|\psi_0^{(1)}\rangle$ é o estado escuro de poláriton e $p_0^{(1)\dagger}$ o operador de criação desses poláritons — Obtemos o Hamiltoniano que descreve o sistema com uma única excitação ($n = 1$)

$$\tilde{H}_P = E_{+}^{(1)} p_{+}^{(1)\dagger} p_{+}^{(1)} + E_{-}^{(1)} p_{-}^{(1)\dagger} p_{-}^{(1)}. \quad (3.5)$$

Tratando a dessintonia ϵ como um termo perturbativo no Hamiltoniano (3.3) e no referencial obtido através da transformação $\tilde{U} = \exp(-i\tilde{H}_P t)$, encontramos o Hamiltoniano simplificado

$$\tilde{H}_P = (\xi^2 \epsilon / N_0^2) p_0^{(1)\dagger} p_0^{(1)}, \quad (3.6)$$

onde o nível de energia zero do (3.5) foi deslocado de $\xi^2 \epsilon / N_0^2$. Para simplificar a notação, iremos omitir os índices que caracterizam os estados escuro de poláriton, por ser esse a única espécie de poláriton envolvida e por não ocorrer transição entre espécies distintas no regime de parâmetros considerado, obtendo assim

$$\tilde{H}_P = \tilde{\epsilon} p^\dagger p, \quad (3.7)$$

com a frequência de poláriton $\tilde{\epsilon} = \xi^2 \epsilon / N_0^2$.

3.2.1 Estados de fock de poláriton

É um fato conhecido que poláritons apresentam uma estatística que não é fermiônica e nem bosônica. Podemos ver este fato utilizando a relação de comutação satisfeita pelos

operadores $p_{0,\pm}^{(1)}$ e $p_{0,\pm}^{(1)}$

$$[p_0^{(1)}, p_0^{\dagger(1)}] = \frac{\xi^2(S_{gg} - S_{ee}) + \Omega_L^2}{N_0^2}, \quad (3.8a)$$

$$[p_{\pm}^{(1)}, p_{\pm}^{\dagger(1)}] = \frac{\xi^2 + (\varepsilon_{\pm}^{(1)})^2(S_{ii} - S_{gg}) + \Omega_L^2(S_{gg} - S_{ee})}{N_{\pm}^2}. \quad (3.8b)$$

Entretanto, como podemos verificar pelas relações de comutação acima, a interação (E.1) descrece um campo bosonico no limite onde o número de átomos M é significativo maior que a excitação do sistema n . Para $M \gg n$, verificamos que $S_{gg} \approx 1$ e $S_{ee} \approx 0$, tal que $[p_0^{(1)}, p_0^{\dagger(1)}] \approx 1$.

Agora definindo os estados $|A^{(n)}\rangle$ da amostra atômica, através de suas excitações $n \geq 1$ como estados de Dicke

$$|A^{(n)}\rangle = \binom{M}{n}^{-1/2} \sum_k P_k (|e_1, \dots, e_n, g_{n+1}, \dots, g_M\rangle), \quad (3.9)$$

onde $\{P_k\}$ é o conjunto de todas as permutações distintas de estados atomicos. Temos assim o estado fundamental $|P^{(0)}\rangle = |A^{(0)}\rangle |0\rangle$, onde $|A^{(0)}\rangle = |g_1 g_2 \dots g_M\rangle$, temos todos os átomos no estado fundamental e $|0\rangle$ o estado de vácuo do modo da cavidade, obtemos assim⁸⁶

$$\begin{aligned} |P^{(n)}\rangle &= \frac{(p_0^{\dagger})^n}{n!} |P^{(0)}\rangle \\ &= \sum_{m=0}^n (-1)^m \sqrt{\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}} (\cos \theta)^{m-n} (\sin \theta)^m |n-m\rangle |A^{(m)}\rangle, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $\cos \theta = \Omega_L/N_0$, $\sin \theta = \xi/N_0$ e $n-m$ indica a excitação no modo da cavidade. No que se segue usaremos esse carater bosonico dos poláritons $|P^{(n)}\rangle$ para acoplar nosso sistema emissor-receptor através do canal constituído de cadeias de cavidades.

3.2.2 Acoplando o emissor e o receptor ao canal de transmissão.

Consideramos agora que as cavidades do emissor e do receptor estão acopladas com intensidade λ com apenas uma das N cavidades que compõe o canal, como mostrado

nas Figs. 3.1 e 3.2 onde um canal com topologia circular e simétrica é esboçado. Como adiantado anteriormente, a topologia da rede que constitui o canal de transmissão é considerada arbitrária, onde topologia é *i*) os número de acoplamento entre as cavidades *ii*) as intensidades de acoplamento $\{\zeta_{\ell\ell'}\}$ e *iii*) frequências naturais $\{\nu_\ell\}$, com ℓ e ℓ' variando de 1 a N . Portanto, o Hamiltoniano que descreve o sistema total é dado por $H = H_P + H_{CQ} + V$, onde

$$H_P = \sum_{i=1}^2 \tilde{\epsilon} p_i^\dagger p_i, \quad (3.11)$$

representa o sistema emissor ($i = 1$) e o receptor ($i = 2$), com $p_i^\dagger$ (p_i) os operadores de criação (aniquilação) dos estados de poláriton. O canal de transmissão é modelado por

$$H_{CQ} = \sum_{\ell=1}^N \nu_\ell b_\ell^\dagger b_\ell + \sum_{\ell(\neq\ell')=1}^N \zeta_{\ell\ell'} (b_\ell^\dagger b_{\ell'} + b_\ell b_{\ell'}^\dagger). \quad (3.12)$$

com $b_\ell^\dagger$ (b_ℓ) os operadores de criação (aniquilação) associados com a ℓ th cavidade do canal. A interação entre o emissor e receptor e a primeira e N th cavidade do canal, respectivamente, é

$$V = \lambda(a_1^\dagger b_1 + a_1 b_1^\dagger + a_2^\dagger b_N + a_2 b_N^\dagger). \quad (3.13)$$

Utilizando a transformação $\mathbf{p}^{(1)} = \mathbb{M}\mathbf{b}^{(1)}$, podemos reescrever esta interação na base de poláritons, obtendo assim

$$V = \tilde{\lambda}(p_1^\dagger b_1 + p_1 b_1^\dagger + p_2^\dagger b_N + p_2 b_N^\dagger). \quad (3.14)$$

onde $\tilde{\lambda} = \lambda/\sqrt{1 + (g/\Omega)^2}$.

Por conviniência vamos diagonalizar o Hamiltoniano do canal através da transformação canônica $B_\ell = \sum_{\ell'=1}^N C_{\ell\ell'} b_{\ell'}$, onde os coeficientes da ℓ th linha da matriz $\mathbf{C}$ define os modos normais associados as frequências $\bar{\nu}_\ell$ de H_{CQ} . Sendo $\mathbf{C}$ uma transformação canônica, $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}^{-1}$, as relações de comutação são preservadas, $[B_\ell, B_{\ell'}^\dagger] = \delta_{\ell\ell'}$ e $[B_\ell, B_{\ell'}] = 0$. Na

base dos modos normais do canal e de poláriton temos $H = H_{P+CQ} + \mathcal{V}$,

$$H_{P+CQ} = \tilde{\epsilon} \sum_{i=1}^2 p_i^\dagger p_i + \sum_{\ell=1}^N \bar{\nu}_\ell B_\ell^\dagger B_\ell,$$

$$\mathcal{V} = \tilde{\lambda} \sum_{\ell=1}^N \left[C_{\ell 1} (a_1^\dagger B_\ell + a_1 B_\ell^\dagger) + C_{\ell N} (a_2^\dagger B_\ell + a_2 B_\ell^\dagger) \right]. \quad (3.15a)$$

Na representação de interação, obtida através da transformação $U(t) = \exp(-iH_0 t/\hbar)$, temos finalmente

$$\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{\lambda} \sum_{\ell=1}^N \left[C_{\ell 1} (a_1^\dagger B_\ell e^{-i\Delta_\ell t} + a_1 B_\ell^\dagger e^{i\Delta_\ell t}) \right. \\ \left. + C_{\ell N} (a_2^\dagger B_\ell e^{-i\Delta_\ell t} + a_2 B_\ell^\dagger e^{i\Delta_\ell t}) \right], \quad (3.16)$$

onde $\Delta_\ell = |\bar{\nu}_\ell - \tilde{\epsilon}|$ é a dessintonia do ℓ th modo normal com a frequência do poláriton. Por simplicidade vamos assumir que as intensidades do acoplamento entre as cavidades do canal de transmissão sejam todas iguais a ζ .

3.2.3 Interação efetiva entre emissor-receptor

Vamos agora derivar o acoplamento efetivo mediado pela interação dispersiva entre o sistema emissor-receptor com o canal, que caracteriza-se pela relação $\tilde{\lambda} C_{m\alpha}/\Delta_m \ll 1$, com $\alpha = 1, N$, sendo satisfeita para todos os modos normais do canal de transmissão. Uma condição adicional é que a intensidade do acoplamento $\tilde{\lambda}$ (ver 3.1) seja menor que a intensidade do acoplamento entre as cavidades ζ , ou seja, $\tilde{\lambda} \ll \zeta$. A violação desta condição adicional ao regime dispersivo, permite que a excitação a ser transferida popule o canal de transmissão mesmo para grandes valores de Δ_ℓ . Por fim, assumindo que as cavidades que constituem o canal estão inicialmente no estado de vácuo, a interação (3.16) é constituída de termos que são altamente oscilantes, o que permite obter uma boa aproximação, até

segunda ordem em $\tilde{\lambda}$, a Hamiltoniana efetiva^{76,77}

$$\begin{aligned} H_{ef} &= -i\tilde{\mathcal{V}}(t) \int \tilde{\mathcal{V}}(t') dt' \\ &= \chi \left(p_1^\dagger p_2 + p_1 p_2^\dagger \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde $\chi = \sum_{\ell=1}^N \tilde{\lambda}^2 |C_{\ell 1} C_{\ell N}| / \Delta_\ell$ é o acoplamento efetivo entre emissor-receptor e a intensidade de tal acoplamento depende explicitamente da topologia do canal de transmissão. Observamos que a descrição do sistema por H_{ef} é válida quando $N \ll \Delta_\ell / \tilde{\lambda}$, desde que correções de terceira ordem tem amplitude $N\tilde{\lambda}^3 / \Delta_\ell^2$.

Ressaltamos que H_{ef} aplica-se a interação entre qualquer sistemas bosonicos que podem ser modelados pelo Hamiltoniano (3.7). Além disso, a interação (3.17), é uma assinatura que o estado de poláriton tunela a partir do emissor para o receptor através do qual as cavidades do canal nunca são populadas. Como analisamos a seguir, este mecanismo de tunelamento trabalha para proteger o estado transferido contra os efeitos indesejáveis da decoerência.

3.2.4 Exemplos

Para ilustrar a transferência de estados de poláriton do emissor para o receptor através de H_{ef} vamos primeiro assumir que o primeiro é preparado no estado de Fock $|P^{(n)}\rangle_1$, enquanto o último está no estado vácuo $|P^{(0)}\rangle_2$. Após o intervalo de tempo t a interação H_{eff} leva ao estado evoluído

$$\begin{aligned} U_{eff}(t) |P^{(n)}\rangle_1 |P^{(0)}\rangle_2 &= \sum_{j=0}^n \sqrt{\frac{n!}{j!(n-j)!}} [i \sin(\chi t)]^j \\ &\times [\cos(\chi t)]_1^{n-j} |P^{(n-j)}\rangle_1 |P^{(j)}\rangle_2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

que nos permite determinar o tempo transferência $\tau_T = \pi / (2\chi)$.

Através da Eq.3.18 verificamos que o tempo de transferência é —inversamente proporcional a intensidade do acoplamento efetivo χ , como esperado— e devido a linearidade do operador evolução é o mesmo tempo para qualquer estado de superposição

preparado no emissor. Definindo o estado coerente de poláriton⁸⁷ $|\alpha\rangle = \sum_n c_n |P^{(n)}\rangle$, com $c_n = \alpha^n \exp[-|\alpha|^2/2] / \sqrt{n!}$, nos investigamos transferência de um estado tipo gato-Schrödinger $\mathcal{N}_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)_1$, onde $\mathcal{N}_\pm = \left[2 \pm 2 \exp(-2|\alpha|^2)\right]^{-1/2}$, preparado no emissor com o receptor inicialmente no estado fundamental, obtendo

$$U_{eff}(t) [\mathcal{N}_\pm(\alpha) (|\alpha\rangle_1 \pm |-\alpha\rangle_1)] |P^{(0)}\rangle_2 = \mathcal{N}_\pm (|\alpha \sin(\chi t)\rangle_1 |\alpha \cos(\chi t)\rangle_2 \pm |-\alpha \sin(\chi t)\rangle_1 |-\alpha \cos(\chi t)\rangle_2), \quad (3.19)$$

tal que no tempo de troca:

$$U_{eff}(\tau_T) [\mathcal{N}_\pm(\alpha) (|\alpha\rangle_1 \pm |-\alpha\rangle_1)] |0\rangle_2 = |0\rangle_1 [\mathcal{N}_\pm(\alpha) (|\alpha\rangle_2 \pm |-\alpha\rangle_2)] \quad (3.20)$$

3.3 Rede dissipativa

Nesta seção abordamos um modelo mais realista, onde os mecanismos de dissipação do canal quântico são modelados considerando que as cavidades que constituem o canal estão acopladas a seus próprios reservatórios multimodais como na Ref.³⁴ Assumindo que o modo do reservatório $\bar{\omega}_{\ell k}$ descrito pelos operadores $c_{\ell k}^\dagger$ ($c_{\ell k}$) de criação (aniquilação), acopla-se com a ℓ th cavidade com intensidade $\eta_{\ell\ell'}$, o Hamiltoniano para o canal dissipativo é

$$H_{CQ+D} = H_{CQ} + \sum_{\ell=1}^N \sum_k \left[\bar{\omega}_{\ell k} c_{\ell k}^\dagger c_{\ell k} + \eta_{\ell k} (c_{\ell k}^\dagger b_\ell + c_{\ell k} b_\ell^\dagger) \right]. \quad (3.21)$$

Para a derivação da equação mestra para H_{CQ+D} , utilizamos da diagonalização de H_{CQ} , reescrevendo $H_{CQ+D} = H_D + H_{N/R}$, onde

$$H_{CQ} = \sum_{\ell=1}^N \bar{v}_{\ell} B_{\ell}^{\dagger} B_{\ell} + \sum_{\ell=1}^N \sum_k \bar{\omega}_{\ell k} c_{\ell k}^{\dagger} c_{\ell k} \quad (3.22)$$

$$H_{N/R} = \sum_{\ell, \ell'=1}^N \sum_k C_{\ell' \ell} \eta_{\ell k} (c_{\ell k}^{\dagger} B_{\ell'} + c_{\ell k} B_{\ell'}^{\dagger}). \quad (3.23)$$

Através do termo diagonal $H_{CQ} = \sum_{\ell=1}^N \bar{v}_{\ell} B_{\ell}^{\dagger} B_{\ell} + \sum_{\ell=1}^N \sum_k \bar{\omega}_{\ell k} c_{\ell k}^{\dagger} c_{\ell k}$ estamos prontos para introduzir a representação de interação, utilizando a transformação $U(t) = \exp(-iH_D t/\hbar)$, em que a interação entre as cavidades do canal e seus reservatórios tornam-se $H_{N/R}(t) = \hbar \sum_{\ell, \ell'} [\mathcal{O}_{\ell \ell'}(t) B_{\ell'}^{\dagger} + \mathcal{O}_{\ell \ell'}^{\dagger}(t) B_{\ell'}]$, com operadores do banho $\mathcal{O}_{\ell \ell'}(t) = C_{\ell' \ell} \sum_k \eta_{\ell k} \exp[-i(\bar{v}_{\ell k} - \bar{\omega}_{\ell'}) t] c_{\ell k}$. Assumindo que as interações entre as cavidades e os reservatórios é fraca, vamos realizar uma perturbação de segunda ordem, seguido pelo traço dos graus de liberdade reservatório. Assumimos também que os reservatórios são Markovianos de tal forma que o operador densidade do sistema global pode ser fatorado como $\rho_{1\dots N}(t) \otimes \rho_R(0)$. Finalmente, considerando que as frequências do reservatório são muito pouco espaçadas o que permiti que o somatório seja realizado no contínuo e assumindo, como sempre, que a força de acoplamento $\eta_{\ell}(\bar{v}_k)$ e a densidade de estados do ℓ th reservatório $\sigma_{\ell}(\bar{v}_k)$ são funções que variam suavemente, obtemos assim equação mestra para nosso sistema

$$\dot{\rho} = -i [\tilde{H}_{CQ}, \rho] + \sum_{\ell} \frac{\gamma_{\ell}}{2} (2B_{\ell} \rho B_{\ell}^{\dagger} - B_{\ell}^{\dagger} B_{\ell} \rho - \rho B_{\ell}^{\dagger} B_{\ell}), \quad (3.24)$$

onde $\tilde{H}_{CQ}$ representa H_{CQ} na representação de interação, enquanto que $\gamma_{\ell}(\bar{v}_k) = [\eta_{\ell}(\bar{v}_k) \sigma_{\ell}(\bar{v}_k)]^2 / N$ é o fator de dissipação do ℓ th modo normal. Para reservatorios com ruído branco Markoviano, temos $\gamma_{\ell}(\bar{v}_k) = \gamma_{\ell}$.

Utilizando a mesma aproximação perturbativa^{76,77} utilizada para derivar o Hamiltoniano (3.17), eliminamos adiabaticamente as variáveis do canal de transmissão, obtendo

assim a equação mestra

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{eff} = & -i[H_{eff}, \rho_{eff}] \\ & + \sum_{i=1,2} \frac{\Gamma_i}{2} (2p_i \rho_{eff} p_i^\dagger - p_i^\dagger p_i \rho_{eff} - \rho_{eff} p_i^\dagger p_i), \end{aligned} \quad (3.25)$$

para um operador densidade efetivo para o emissor e receptor . Esta equação leva em conta os mecanismos de dissipação de todas as cavidades do canal, através das taxas efetivas de amortecimento

$$\Gamma_i = \sum_{\ell=1}^N \frac{\gamma_\ell |C_{\ell 1} \delta_{i1} + C_{\ell \ell} \delta_{i2}|^2}{\Delta_\ell^2} \tilde{\chi}^2, \quad (3.26)$$

associadas com o sistema emissor-receptor.

A eliminação adiabática da dinâmica do CQ transformam o amortecimento dos modos do CQ em um amortecimento efetivo dos modos de poláriton. O aparecimento das taxas efetivas de amortecimento estão intimamente relacionados com a derivação da taxa de tunelamento. Notamos que o regime de parâmetros que válida o Hamiltoniano efetivo, leva o desaparecimento dos termos cruzados Γ_{12} e Γ_{21} .³⁴ O surgimento dos termos cruzado exige um forte acoplamento efetivo emissor-receptor, da ordem de $\tilde{\epsilon}$, uma situação incompatível com a requerido acoplamento dispersivo do remetente e do receptor, com todos os modos do canal quântico.

Ressaltamos que, como o acoplamento efetivo χ , as taxas de amortecimento dependem da topologia do canal, como salientado anteriormente, duas situações distintas serão analisadas por um determinado padrão de conectividade entre as cavidades do canal de transmissão.

3.3.1 Fidelidade do processo de transferência

Para calcular a fidelidade do estado transferido, resolvermos a equação mestra efetiva (3.25) considerando a situação tratada acima, onde é preparado o estado $|P^{(n)}\rangle_1$ no emissor e considerando que o receptor está no estado de vácuo $|P^{(0)}\rangle_2$. Supondo que o emissor e o receptor têm a mesma taxa de amortecimento, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$, obtemos a solução

$$\rho^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=\max(i,j)}^n \frac{n!}{(n-m)!} \frac{1}{\sqrt{i!(k-i)!j!(k-j)!}} \times u(t)^{i+j} v(t)^{2k-i-j} [1 - u^2(t) - v^2(t)]^{n-k} |P^{(i)}\rangle_{11} \langle P^{(i)}| |P^{(k-i)}\rangle_{22} \langle P^{(k-i)}|, \quad (3.27)$$

onde definimos $\Lambda = \chi \sqrt{1 - (\Gamma/4\chi)^2}$, e as funções

$$u(t) = \frac{\chi}{\Lambda} \sin(\Lambda t) e^{-\Gamma t/2}, \quad (3.28)$$

$$v(t) = \left[\cos(\Lambda t) + \frac{\Gamma}{4\Lambda} \sin(\Lambda t) \right] e^{-\Gamma t/2}. \quad (3.29)$$

Traçando os graus de liberdade do emissor, temos o operador densidade do receptor

$$\rho_2^{(n)}(t) = Tr_1 \rho^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \times u(t)^{2k} [1 - u^2(t)]^{n-k} |P^{(k)}\rangle_{22} \langle P^{(k)}|, \quad (3.30)$$

a partir do qual calculamos a fidelidade para o processo de transferência

$$\mathcal{F}^{(n)}(\tau) = \max_t Tr \{ \rho^{(n)}(t) |P^{(n)}\rangle_{22} \langle P^{(n)}| \} = \exp(-n\Gamma\tilde{\tau}_T/2) \quad (3.31)$$

onde $\tilde{\tau}_T = (1/\Lambda) \cot^{-1}(\Gamma/4\Lambda)$ corresponde o tempo que maximiza $\mathcal{F}^{(n)}(\tau)$, que passa a ser um pouco maior que o calculado para o caso ideal, onde a dissipação é ausente. De fato, desde Γ/χ é significativamente menor do que a unidade — como ficará claro abaixo — verificamos que $\tilde{\tau}_T = \pi/2\Lambda - \Gamma/4\Lambda^2 \approx \pi/2\Lambda \gtrsim \pi/2\chi$. Outra forma de obter $\tilde{\tau}_T$ decorre da maximização do número médio de poláritons $\bar{n}_2(t) = Tr(p_2^\dagger p_2 \rho_2^{(n)}(t)) = nu(t)^2$. Como esperado, a fidelidade do processo de transferência é menor quanto maior a excitação do estado poláriton e/ou a relação Γ/χ . No entanto, para o caso realista, onde $\Gamma/\chi \ll 1$ obtemos o resultado $\mathcal{F}^{(n)}(\tau) = \exp(-n\pi\Gamma/4\chi)$, exibindo, como esperado, uma fidelidade alta para o nosso processo de transferência. A análise mais detalhada da fidelidade de ambos os regimes de acoplamento fraco e forte serão apresentados a seguir.

Finalizamos esta seção calculando a fidelidade para transferir um estado tipo gato de Schrödinger de poláriton $\mathcal{N}_\pm(\alpha) (|\alpha\rangle_1 \pm |-\alpha\rangle_1)$ no emissor para um receptor no estado de

vácuo. Da Eq. (3.25) tem como solução o operador densidade

$$\begin{aligned} \rho_{\pm}(t) = N_{\pm}(\alpha) \sum_{i=1,2} \{ & |(-1)^i \alpha v(t)\rangle_{11} \langle (-1)^i \alpha v(t)| \otimes |(-1)^i \alpha u(t)\rangle_{22} \langle (-1)^i \alpha u(t)| \\ & \pm (1 - u^2(t) - v^2(t)) e^{-2|\alpha|^2} |(-1)^i \alpha v(t)\rangle_{11} \langle (-1)^{i+1} \alpha v(t)| \otimes |(-1)^i \alpha u(t)\rangle_{22} \langle (-1)^{i+1} \alpha u(t)| \}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

forneendo a fidelidade

$$\mathcal{F}_{\pm}^{(n)}(\tilde{\tau}_T) = (1 + e^{-2|\alpha|^2[1-s(\tilde{\tau}_T)]}) \frac{1 \pm e^{-2|\alpha|^2[s(\tilde{\tau}_T)]}}{2(1 \pm e^{-2|\alpha|^2})}, \quad (3.33)$$

onde $s(t) = u^2(t) + v^2(t) \approx e^{-\Gamma t/2}$.

Para $\Gamma/\chi \ll 1$ obtemos a expressão simplificada $\mathcal{F}_{\pm}^{(n)}(\tilde{\tau}_T) = (1 + e^{-\pi|\alpha|^2\Gamma/2\chi})/2$, mais uma vez mostrando uma alta fidelidade do processo de transferência.

3.3.2 Imperfeições do CQ: intensidades de acoplamento randômicas e efeito da excitação inicial.

Abordaremos os dois casos separadamente: quando o CQ é inicialmente populado e quando valores aleatórios são atribuídos à intensidade do acoplamento entre os osciladores do CQ. Nestes casos, o Hamiltoniano efetivo (3.17), e conseqüentemente, a equação mestra (3.25), não descrevem mais a dinâmica do sistema. No entanto, quando o CQ é inicialmente populado, podemos ainda ter transferência quase perfeita de estados, como mostrado na Fig.(3.4), onde plotamos a fidelidade do processo de transferência — computada numericamente a partir da Eq. 3.24 — contra o tempo reescalado $\tilde{\tau}_T$. Consideramos o estado inicial do sistema $\mathcal{N}_+ (|\alpha\rangle_1 + |-\alpha\rangle_1) \otimes_{k=2}^{N-1} |\beta\rangle_k \otimes |0\rangle_N$, onde o emissor está inicialmente num estado de superposição coerente e o receptor no estado fundamental com CQ **(a)** no estado de vácuo $\beta = 0$ ou **(b)** no estado coerente $\beta = 1$. Nas simulações os parâmetros adotados para o CQ foram: rede linear degenerada ($v_\ell = \tilde{\epsilon} = 10^5 \tilde{\lambda}$) com $N = 30$, $\zeta = 10^3 \tilde{\lambda}$, $\gamma = \tilde{\lambda}$ e $\alpha = 5$. No caso **(a)**, onde o Hamiltoniano efetivo (3.17) é válido, verifica-se que o processo de transferência de estado ocorre com o tempo de trans-

Figura 3.4 – Fidelidade do processo de transferência, para o tempo escalado $\tilde{\tau}_T$ para o estado inicial $\mathcal{N}_+ (|\alpha\rangle_1 + |-\alpha\rangle_1) \otimes_{k=2}^{N-1} |\beta\rangle_k \otimes |0\rangle_N$, com todos os osciladores do canal quântico, (a) o estado de vácuo $\beta = 0$ ou (b) no estado coerente $\beta = 1$. Considerado uma rede linear degenerada ($\nu_\ell = \tilde{\epsilon} = 10^5 \tilde{\lambda}$) com $N = 30$, $\zeta = 10^3 \tilde{\lambda}$, $\gamma = \tilde{\lambda}$ e $\alpha = 5$.

ferência esperado $\tilde{\tau}_T$. Observamos, também, a alta fidelidade do processo, confirmando a descrição efetiva dado pela Eq.(3.25), mesmo quando consideramos uma forte dissipação $\gamma = \tilde{\lambda}$. No caso (b) observamos o mesmo tempo de transferência $\tilde{\tau}_T$, mas agora com uma forte degradação da fidelidade, desde que os osciladores do CQ são inicialmente excitados, devemos levar em conta termos adicionais (análogos a efeito de temperatura) na Eq.(3.25)

Finalmente, na 3.5, plotamos a fidelidade do processo de transferência, para o tempo dimensionado $\tilde{\tau}_T$, considerando os mesmos parâmetros da 3.4 (a), exceto os valores aleatórios de ζ , que estão uniformemente distribuídos dentro do intervalo $[0.8, 1.2] \times 10^3 \tilde{\lambda}$. Observamos que, apesar da grande variedade na intensidade de acoplamento, a fidelidade é fracamente afetada, demonstrando a robustez do nosso protocolo contra flutuações experimentais. O tempo de transferência, no entanto, mostra-se um pouco mais sensível às flutuações na intensidade de acoplamento ζ .

Figura 3.5 – Fidelidade do processo de transferência, para o tempo escalado $\tilde{t}_T$ para os mesmos parâmetros da 3.4 a), exceto para valores aleatórios de ζ abrangido uniformemente o intervalo $[0.8, 1.2] \times 10^3 \tilde{\lambda}$ em vez do valor fixo $10^3 \tilde{\lambda}$.

3.4 Topologias ótimas do canal de transmissão

3.4.1 Cooperatividade

Nesta seção analisamos a topologia ótima do canal com o objetivo de minimizar a cooperatividade definida como

$$\mathcal{C} = \frac{\Gamma}{\chi} = \frac{\sum_{\ell=1}^N (\gamma_{\ell}/\Delta_{\ell}^2) (C_{1\ell}^{-1}C_{\ell 1} + C_{N\ell}^{-1}C_{\ell N})}{\sum_{\ell=1}^N C_{1\ell}^{-1}C_{\ell N}/\Delta_{\ell}}, \quad (3.34)$$

que dá uma medida do custo da taxa de dissipação em relação ao benefício da força de acoplamento. Como veremos abaixo, a minimização do parâmetro de cooperatividade implica na maximização da fidelidade para o processo de transferência.

3.4.2 Acoplamento fraco e forte

Iremos computar o parâmetro cooperatividade $\mathcal{C}$ assumindo: a mesma frequência natural ν e taxa de amortecimento γ para todas as cavidades que constituem o canal, além de intensidade de acoplamento ζ . Consideramos dois regimes de parâmetro que permitem

obtenção de resultados analíticos para $\mathcal{C}$. O primeiro é o que chamamos de acoplamento fraco (1), onde $\zeta \ll \nu$, e o segundo acoplamento forte (2) sendo caracterizado por $\zeta \approx \nu$. No acoplamento fraco, a relação $\tilde{\lambda}C_{\ell\alpha}/\Delta_{\ell}^{(1)} \ll 1$ (com α sendo 1 ou N), é satisfeita por todos os ℓ modos normais do canal. De fato, os acoplamentos entre as cavidades induzem um pequeno alargamento da frequências dos modos normais em relação a frequência natural, que como demonstrado abaixo, é limitado ao intervalo $[\nu - N\zeta, \nu + N\zeta]$ independentemente da topologia da rede, e facilmente satisfazendo a condição $\tilde{\lambda}C_{\ell\alpha}/\Delta_{\ell}^{(1)} \ll 1$ para $N \ll \Delta_{\ell}^{(1)}/\tilde{\lambda}$.

Por outro lado, o acoplamento forte entre as cavidades leva ao alargamento dos modos normais centrados em ν , podemos assim escolher apenas um dos modos normais do canal, por exemplo o qth , a ser dispersivamente acoplado com o emissor e receptor, de modo que $\tilde{\lambda}C_{q\alpha}/\Delta_q^{(2)} \ll 1$, com todos os outros modos normais $\bar{\nu}_{\ell \neq q}$ estando muito longe de ressonância.

Embora o acoplamento efetivo entre o emissor e receptor sob o regime de acoplamento fraco leva em conta todas as frequências dos ℓ modos normais do canal, tal que $\chi^{(1)} = \sum_{\ell=1}^N \tilde{\lambda}^2 |C_{\ell 1} C_{\ell N}| / \Delta_{\ell}^{(1)}$, para o regime de acoplamento forte, onde apenas o qth modo normal efetivamente contribui temos que $\chi^{(2)} = \tilde{\lambda}^2 |C_{q1} C_{qN}| / \Delta_q^{(2)}$.

Especificando os valores de ν , $\tilde{\lambda}$, e $\tilde{\epsilon}$ para ambos os casos $\mu = 1, 2$, o regime dispersivo que satisfaz $\tilde{\lambda} \ll \Delta^{(\mu)} \ll \nu$ exibe o mesmo limite superior $\Delta_{\max}^{(1)} = \Delta_{\max}^{(2)} = \Delta_{\max} \ll \nu$, mas distintos limites inferiores desde que $\tilde{\lambda} \ll \zeta \ll \nu$ para o caso (1) e $\tilde{\lambda} \ll \zeta \approx \nu$ para o caso (2), temos que $\Delta_{\min}^{(1)} \gg \Delta_{\min}^{(2)}$.

3.4.3 Topologias da rede

Em seguida, buscando abranger um grande número de topologias da rede que forma o canal de transmissão, consideramos em nossa análise um número crescente de acoplamentos entre as cavidades do canal, associado com a primeiro, segundo, ..., e Jth -vizinho, com J variando de 1 a $\text{int}(N/2)$.

Os modos normais para todas as redes consideradas são

$$\bar{\nu}_\ell = \nu + 2 \sum_{k=1}^{J-1} \zeta_k \cos \left(\frac{2\pi \ell k}{N} \right) + (2 - \delta_{2J,N}) \zeta_J \cos \left(\frac{2\pi \ell J}{N} \right), \quad (3.35)$$

o que justifica a afirmação acima de que um pequeno acoplamento entre as cavidades, ou seja, $\zeta \ll \nu$, induz uma igualmente pequena largura de linha das frequências do modo normal limitado ao intervalo $[\nu - N\zeta, \nu + N\zeta]$ independentemente da topologia da rede, quando $N \ll \Delta_\ell^{(\mu)}/\tilde{\lambda}$. Para os casos em que $\ell/(N/2) = 0, 1$ verifica-se que os autovalores não são degenerados, com os coeficientes dos seus autovetores, sendo

$$C_{\ell\ell'} = \mathcal{N} \cos \left[\frac{2\pi}{N} \ell (\ell' - 1) \right], \quad (3.36)$$

onde $\mathcal{N} = \sqrt{2/(N+1)}$. Por outro lado, quando $\ell/(N/2) \neq 0, 1$, os autovalores são degenerados duas vezes, com os coeficientes de ambos os autovetores linearmente independentes, satisfazendo

$$C_{\ell\ell'} = \begin{cases} \mathcal{N} \cos \left[\frac{2\pi}{N} \ell (\ell' - 1) \right] \\ \mathcal{N} \sin \left[\frac{2\pi}{N} \ell (\ell' - 1) \right] \end{cases}. \quad (3.37)$$

A partir das equações acima que definem os autovalores e autovetores provenientes da diagonalização do Hamiltoniano (3.12), calculamos analiticamente os parâmetros $\mathcal{C}_J^{(\mu)} = \Gamma^{(\mu)}/\chi^{(\mu)}$ obtendo

$$\mathcal{C}_J^{(1)} = \frac{J\gamma}{\Delta^{(1)}}, \quad \mathcal{C}_J^{(2)} = \frac{\gamma}{\Delta^{(2)}}, \quad (3.38)$$

onde, conforme definido acima, $\Delta^{(1)} = |\nu - \tilde{\epsilon}|$ e $\Delta^{(2)} = |\bar{\nu}_q - \tilde{\epsilon}|$, $\bar{\nu}_q$ sendo o q th frequência do modo normal, que se supõe ser acoplado dispersivamente com o emissor e receptor. Tal como previsto na subseção III.A, o parâmetro $\mathcal{C}_J^{(\mu)}$ na verdade adquire valores pequenos, uma vez que $\gamma \ll \Delta^{(\mu)}$ e $J \sim N \ll \Delta_\ell^{(\mu)}/\tilde{\lambda}$. Portanto, verificamos que, diferentemente de $\mu = 2$, onde o parâmetro de cooperatividade e, conseqüentemente, a fidelidade, independe da topologia da rede, para $\mu = 1$ este parâmetro aumenta com o número de conexões entre as cavidades. Para transferir estados de poláriton do emissor para o receptor, levamos o tempo $\tilde{\tau}_T^{(\mu)} = (1/\Lambda) \cot^{-1}(\Gamma/4\Lambda) \approx \pi/2\Lambda$, de onde obtemos

$$\tilde{\tau}_T^{(1)} = \frac{\pi J \Delta^{(1)}}{\Upsilon(J)}, \quad \tilde{\tau}_T^{(2)} = \frac{N}{2} \frac{\pi J \Delta^{(2)}}{\Upsilon(J=1)}, \quad (3.39)$$

onde $\Upsilon(J) = \tilde{\lambda}^2 \left[1 - \left(\frac{J\gamma}{4\Delta^{(\mu)}} \right)^2 \right]$. Sob a razoável aproximação $J\gamma \ll \gamma\Delta^{(\mu)}/\tilde{\lambda} \ll \Delta^{(\mu)}$ que sistematicamente adotamos no resto desta seção e que é válida, quando o fator de dissipação,

é significativamente menor do que a dessintonia $\Delta^{(\mu)}$, Eq. (3.39) simplifica se para

$$\tilde{\tau}_T^{(1)} = \frac{\pi J \Delta^{(1)}}{\tilde{\lambda}^2}, \quad \tilde{\tau}_T^{(2)} = \frac{N \pi J \Delta^{(2)}}{2 \tilde{\lambda}^2}, \quad (3.40)$$

mostrando que o tempo de transferência aumenta, em ambos os casos, com o número de conectividades J . É interessante notar, contudo, que para um barramento de dados linear ($J = 1$) o tempo de transferência $\tilde{\tau}_T^{(1)}$ independe do tamanho N da rede enquanto $\tilde{\tau}_T^{(2)}$ sempre depende de N .

Estamos agora em posição de analisar a relação custo-benefício entre os tempos calculados $\tilde{\tau}_T^{(\mu)}$ e a fidelidade do processo associado com o parâmetro de cooperatividade $C_J^{(\mu)}$. Para privilegiar a fidelidade contra o tempo devemos observar apenas os resultados na Eq. (3.38) deixando de lado a Eq. (3.40). Por outro lado, podemos definir a taxa $1/C_J^{(\mu)} \tilde{\tau}_T^{(\mu)}$ cuja maximização dos resultados simultaneamente sobre a fidelidade máxima e tempo mínimo de transferência, assim, impedindo-nos de uma privilegiar uma quantidade em relação ao outro. Usando as Eqs (3.38) and (3.39) obtemos os resultados

$$\frac{1}{C_J^{(1)} \tilde{\tau}_T^{(1)}} = \frac{\tilde{\lambda}^2}{\pi J^2 \gamma}, \quad \frac{1}{C_J^{(2)} \tilde{\tau}_T^{(2)}} = \frac{2 \tilde{\lambda}^2}{\pi N J \gamma}, \quad (3.41)$$

mostrando que devemos considerar um canal circular (linear) para atingir a taxa de custo-benefício máximo para os dois regimes de acoplamento $\mu = 1$ e $\mu = 2$. Concluímos também que o regime de acoplamento fraco leva a melhor taxa de custo-benefício independentemente da topologia, com exceção de uma rede simétrica, quando ambos os regimes apresentam o mesmo resultado.

3.4.3.1 $\Delta_{\max}^{(1)} = \Delta_{\max}^{(2)} = \Delta_{\max}$

A seguir analisamos as quantidades acima do limite definido para $\Delta_{\max}^{(1)} = \Delta_{\max}^{(2)} = \Delta_{\max}$ em que $C_J^{(\mu)}$ são minimizados para os valores

$$C_J^{(1)} = \frac{J \gamma}{\Delta_{\max}}, \quad C_J^{(2)} = \frac{\gamma}{\Delta_{\max}}, \quad (3.42)$$

maximizando assim a fidelidade do processo de transferência. Os resultados acima mostram que a fidelidade no regime de acoplamento forte atinge seu maior valor $\gamma/\Delta_{\max}$ que é

independente da topologia do canal e igual ao do regime de acoplamento fraco para o caso de um barramento de dados linear ($J = 1$). No entanto, os tempos de transferência simplificam-se

$$\tilde{\tau}_T^{(1)} = \frac{\pi J \cdot_{\max}}{\tilde{\lambda}^2}, \quad \tilde{\tau}_T^{(2)} = \frac{N}{2} \tilde{\tau}_T^{(1)}, \quad (3.43)$$

o maior valor possível, ocorrendo para $\mu = 2$, sendo favorável para o caso do regime de acoplamento fraco, especialmente para grandes redes. Assim, ao privilegiar a fidelidade em relação ao tempo de transferência, podemos concluir que para uma topologia do canal pré-determinada com N e J fixos, temos que a menor cooperatividade $\gamma/\Delta_{\max}$ e consequentemente maior fidelidade ocorrendo para $\mu = 2$ — às custas de uma maior tempo transferência — e sendo mais favorável quanto maior o número de conectividade J .

3.4.3.2 $\Delta_{\min}^{(1)} \gg \Delta_{\min}^{(2)}$

Se, ao invés de minimizar o parâmetros cooperatividade $\mathcal{C}_J^{(\mu)}$ Temos como objectivo minimizar os tempos de transferência $\tilde{\tau}_T^{(\mu)}$, devemos considerar as menores dessintonias permitidas $\Delta_{\min}^{(1)}$ e $\Delta_{\min}^{(2)}$ que levam ao resultado

$$\frac{\mathcal{C}_J^{(1)}}{\mathcal{C}_J^{(2)}} = J \frac{\Delta_{\min}^{(2)}}{\Delta_{\min}^{(1)}}, \quad (3.44)$$

mostrando que, diferentemente do limite $\Delta_{\max}^{(1)} = \Delta_{\max}^{(2)} = \Delta_{\max}$ onde $\mathcal{C}_J^{(1)}/\mathcal{C}_J^{(2)} = J$, neste caso esta razão $\mathcal{C}_J^{(1)}/\mathcal{C}_J^{(2)}$ depende também de $\Delta_{\min}^{(2)}/\Delta_{\min}^{(1)}$ e, conseqüentemente, podemos atingir o resultado $\mathcal{C}_J^{(1)} < \mathcal{C}_J^{(2)}$ quando $J\Delta_{\min}^{(2)} < \Delta_{\min}^{(1)}$. Para o tempo de transferência, obtemos o resultado

$$\frac{\tilde{\tau}_T^{(2)}}{\tilde{\tau}_T^{(1)}} = \frac{N}{2} \frac{\Delta_{\min}^{(2)}}{\Delta_{\min}^{(1)}}, \quad (3.45)$$

permitindo assim $\tilde{\tau}_T^{(2)} < \tilde{\tau}_T^{(1)}$ quando $N\Delta_{\min}^{(2)} < 2\Delta_{\min}^{(1)}$, em contraste com o limite $\Delta_{\max}^{(1)} = \Delta_{\max}^{(2)} = \Delta_{\max}$.

3.4.4 Valores realistas

Considerando uma série de microcavidades toroidais ou esféricas acopladas por meio de fibras ópticas,³⁸ iremos calcular a fidelidade(3.33) para transferir um estado tipo gato

de Schrödinger $\mathcal{N}_{\pm}(\alpha) (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$ de poláriton. Neste sistema a condição para acoplamento dispersivo entre o emissor-receptor com o canal quântico pode ser obtida, primeiro definindo N e, em seguida, ajustando a distância espacial das fibras para as microcavidades para engenheirar a intensidade de acoplamento $\lambda \ll \Delta/N$. Para $\tilde{\epsilon}$ e ν na região de microondas $\Delta \approx 10^9 \text{ s}^{-1}$ com $\tilde{\lambda} \approx 10^6 \text{ s}^{-1}$ temos $\tilde{\lambda}/\Delta \approx 10^{-3}$ o que permite considerar um canal formado por até 100 cavidades. Com cavidades que tenham fator de qualidade Q da ordem de 10^5 , tal que $\gamma = \nu/Q \approx 10^5$, obtemos, para um canal quântico linear ou circular ($J = 1$), a cooperatividade $\mathcal{C} \approx 10^{-4}$.

Para caracterizar os regimes de acoplamento fraco ($\tilde{\lambda} \ll \zeta \ll \nu$) e forte ($\tilde{\lambda} \ll \zeta \approx \nu$), adotamos $\zeta \approx 10^7$ e $\zeta \approx 10^9$, respectivamente, obtendo os tempos de transferência $\tilde{\tau}_T^{(1)} \approx 10^{-3} \text{ s}$ e $\tilde{\tau}_T^{(2)} = 5 \times 10^{-2} \text{ s}$, com a fidelidade $\mathcal{F}_{\pm}(\tau) \approx (1 + e^{-\pi|\alpha|^2\mathcal{C}/2})/2$ quase unitária, desde que $|\alpha|^2\mathcal{C} \ll 1$. Assumindo que o fator de qualidade das cavidades do CQ, menores do que 10^5 , ainda podemos obter uma alta fidelidade, aumentando para isso a dessintonia Δ , e conseqüentemente, desacelerando o processo de transferência. Portanto, o aumento da fidelidade do processo de transferência pode ser obtida à custa de tempos mais longos de transferência.

3.4.5 Armadilhamento de poláriton

Vale observar que o tempo de transferência $\tilde{\tau}_T^{(2)}$ aumenta com o número N de cavidades do canal e o número J de conexões entre essas cavidades. Portanto, um canal com topologia simétrica e grande número de cavidades trabalhando no regime de acoplamento fraco, pode atrasar significativamente a transferência do estado de poláriton para o receptor, quase armadilhando a no emissor. Na realidade, uma vez que os poláritons túnelam do emissor para o receptor, um tempo grande de transferência significa que o estado é praticamente localizada no interior do emissor.

Além disso, o estado de poláriton pode também ser armadilhado, ajustando a razão ξ/Ω , e a intensidade de acoplamento $\tilde{\lambda} = \lambda/\sqrt{1 + (\xi/\Omega)^2}$ entre emissor-receptor com as cavidades do CQ. Uma razão crescente ξ/Ω ira armazenar a excitação predominantemente na amostra atômica, impedindo-a de se transferir para o receptor. Como alternativa, pode-se também controlar o tempo de transferência, manipulando a frequência do poláriton

$\tilde{\epsilon} = \xi^2 \epsilon / N_0^2$, através da dessintonia ϵ , definida na 3.3. Isto pode ser feito através do ajuste das frequências dos lasers que atuam no sistema atômico.

3.5 Conclusão

Desejando a transferência de estado de poláriton de um emissor para um receptor, que são sistemas espacialmente separados compostos por cavidades de alta finesse preenchidas por uma amostra atômica, demonstramos primeiramente como preparar o poláriton em estados escuros, que são autoestados da hamiltoniana(3.6). Em seguida, trabalhar dentro de um regime de parâmetros que caracteriza o estado como um sistema poláriton bosônico, permitindo-nos mapeá-los em estados de Fock, procedeu-se derivar a interação entre o emissor e o receptor com o canal de dados, constituída por uma rede de cavidades não ideais, preparadas no estado de vácuo. Feito isso, temos aqui um dos nossos principais objetivos — para permitir que qualquer que seja a topologia da rede, abrangendo um número crescente de conexões entre as cavidades do canal, associado com a interação de primeiros, segundos, ..., e J th-vizinho, com J variando de 1 a $\text{int}(N/2)$.

Em seguida, considerando o emissor e o receptor significativamente fora da ressonância com os modos normais do canal, nós derivamos um Hamilton efetivo para emissor-receptor, dado pela equação. (3.17), para qualquer topologia do canal de transmissão. Tal Hamiltoniana efetiva se aplica para a interação entre o sistemas bosônicos modelados por hamiltonianos da forma (3.7). Com todos os graus de liberdade do canal, ausentes na interação emissor-receptor, podemos concluir que o estado de poláriton sofre uma transferência via efeito túnel a partir do emissor para o receptor através do qual as cavidades do canal só são virtualmente preenchidas. Assumimos que cada cavidade do canal é acoplada com seu próprio reservatório para derivar a equação mestra (3.25) que regem a dinâmica dissipativa da interação emissor-receptor. Uma vez que a energia de excitação do poláriton não efetivamente passa pelas cavidades do canal, o nosso mecanismo funciona para proteger o estado a ser transferido contra os efeitos indesejáveis dessas cavidades dissipativas. A alta fidelidade de tal processo de transferência via tunelamento é conseguida às custas de um maior tempo de transferência.

Após a apresentação de alguns exemplos de transferência de estado poláriton a partir

do emissor para o receptor, considerando um estado escuro de poláriton e um gato de Schrödinger poláriton, computamos a fidelidade para ambos os processos e verificou que eles decaem com a taxa de $\mathcal{C} = \Gamma/\chi$ que define o parâmetro cooperatividade que avalia o custo da taxa de dissipação em relação ao benefício da força do acoplamento. Temos calculado analiticamente a cooperatividade considerando dois regimes distintos de interações entre as cavidades do canal: regimes de acoplamento (1) fraco e (2) forte, onde a força de acoplamento ζ seja significativamente menor, ou da ordem de sua frequência natural ν . Para ambos os regimes a cooperatividade encontrada é significativamente menor do que a unidade, resultando em grandes fidelidades do processo de transferência por túnelamento.

Definindo o custo-benefício como a taxa cuja maximização resultada simultaneamente na fidelidade máxima e tempo mínimo de transferência, verificou-se que uma rede circular (linear) leva a taxa máxima para ambos os regimes de acoplamento (1) e (2). Descobrimos também que a melhor relação custo / benefício é obtida no regime de acoplamento fraco independentemente da topologia de barramento de dados, exceto quando a rede ainda é considerada simétrica, caso em que ambos os regimes apresentam o mesmo resultado. Se, ao invés de computar a taxa de custo-benefício decidimos privilegiar a fidelidade em relação ao tempo de transferência, segue-se que a fidelidade pode ser amplamente favorável para o caso do regime de acoplamento forte, e mais favorável quanto maior o número de conectividade.

CAPÍTULO 4

CANAIS COLORIDOS PARA TRANSFERÊNCIA DE INFORMAÇÃO E DE PROCESSAMENTO REMOTO ENTRE CIRCUITOS QUÂNTICOS RAMIFICADOS

4.1 Introdução

A transferência simultânea e processamento de fluxos de dados paralelos entre sistemas quânticos remotos (SQ) é um requisito fundamental para a implementação clássica, assim como da comunicação e computação quântica. A esse respeito, a transferência perfeita ou de alta fidelidade de estados quânticos concentrou muita atenção desde a sua introdução no início dos anos 2000.⁸⁸ Com o objetivo de otimizar o controle necessário para a comunicação entre os nós distantes de um SQ, os esforços empreendidos a transferência de estado levou a condições necessárias e suficientes dentro de cadeias de spin⁶⁶ e redes de ressonadores,³⁰ permitindo demonstrar que a transferência perfeita ocorre em toda uma classe de topologias.⁸⁹ Transferência do Estado através de canais com ruído, também foi abordada dentro de cadeias de spin,^{69,90} e um protocolo para transferência

quase perfeita de estado em uma rede de ressonadores dissipativas^{65,91} parece ampliar a perspectiva sobre o assunto de subespaços (quase) livres de decoerência.⁹² Em uma contribuição mais recente,⁹³ o processo de transferência quase perfeita de estados remoto foi formalmente caracterizada como um processo tunelamento não local onde — em analogia com o efeito de tunelamento em um poço quântico duplo — a sobreposição entre o emissor distante e as funções de onda de receptor é indiretamente mediada pela os modos normais do canal quântico (CQ), isto é, o núcleo de transmissão da rede. Além disso, em Ref.⁹³ é demonstramos que o tunelamento não local permite não só a transmissão de estados (ou excitações) a partir de um sistema para outro, mas também a transferência de todo o sistema, em um determinado estado de um local para outro. Em outras palavras, o tunelamento não local acontece também para férmions situados em nodos distantes de uma rede quântica.

Recentes avanços teóricos sobre transferência de estado com alta eficiência dependem de protocolos que assegurem a ressonância entre a frequência comum do remetente e do receptor (para os pontos de extremidade de uma rede) com um único modo normal do CQ, isto é, o núcleo de transmissão da rede.^{94–96} Tal estratégia conduz a um Hamiltoniano de três corpos — tendo em conta o emissor, o receptor, e o modo normal ressonante do CQ — que regula a transferência de estado perfeito, no caso de redes ideais. No caso de redes não ideais a transferência perfeita de estado dá lugar a um processo cuja fidelidade não unitária pode ser otimizada por meio do mecanismo tunelamento supramencionada para garantir que o estado vai diretamente do emissor para o receptor, sem popular o CQ não ideal. Como demonstrado na Refs.,^{91,93} este mecanismo ocorre devido o acoplamento dispersivo entre emissor-receptor com os modos normais do CQ, levando assim a um Hamiltoniano efetivo de dois corpos, que faz os efeitos incoerentes do CQ serem substancialmente enfraquecidos. Salientamos que, além da transferência de estado, há propostas para a implementação de portas lógicas quânticas de longa distância, particularmente aquelas capazes de gerar o emaranhamento entre qubits remotos.^{97,98}

O presente estudo tem como objetivo estender os resultados da Refs.^{91,93} para a transferência simultânea e do processamento paralelo de dados remotos entre SQ ramificados. Assim, em vez de transferir um único estado a um nó em uma rede distante, agora iremos transferir um conjunto de estados de saída de um SQ (não ideal) para as entradas correspondentes de um outro SQ (não ideal) remoto através de um CQ não ideal. A Fig.(4.1)

Figura 4.1 – Representação de dois sistemas quânticos distantes ligados uns aos outros por meio de um canal quântico.

ilustra o processo onde dois SQ distantes estão ligados uns aos outros por meio de um CQ. Assumido uma rede linear (mais simples) de N sistemas acoplados de frequências naturais ω_i (com i e j de 1 até N). E considerando que os sistemas de entrada-saída são degenerados, sintonizado às frequências $\bar{\omega}_\ell$ (com ℓ de 1 até M), fora da ressonância, o suficiente para ocorrer uma interação dispersiva com um dos modos normais do CQ Ω_i . Estes modos normais são explorados para induzir um acoplamento tipo Raman entre as extremidades de cada sistema entrada-saída, permitindo que os circuitos troquem informações sem efetivamente excitar o CQ. Utilizando do mecanismo de tunelamento não-local, demonstramos que, M estados ($M \leq N$) não degenerados podem ser transferidos simultaneamente com alta fidelidade entre os circuitos remotos.

4.2 O modelo da rede

Nosso modelo se aplica a redes de sistemas bosônicas e fermiônicos, como redes de ressonadores interagindo,^{34,38} íons armadilhados,⁹⁹ redes ópticas^{100,101} e cadeias de spin,¹⁰² assumindo neste último caso, a aplicação da técnica fermionização de Jordan-Wigner. O Hamiltoniano que rege toda a rede é $H = H_{CQ} + H_{O/I} + H_{\mathbb{R}}$, onde

$$H_{CQ} = \sum_{i,j=1}^N \mathcal{A}_i^\dagger \mathcal{H}_{ij} \mathcal{A}_j, \quad (4.1)$$

representa os CQs, seus componentes são expressos pelos operadores de aniquilação (criação) $\{\mathcal{A}_m\}$ ($\{\mathcal{A}_m^\dagger\}$), e além do acoplamento entre primeiros vizinhos, ver Fig.(4.1), tratamos aqui o caso geral em que cada componente do CQ interage com todos os outros com intensi-

dade ζ_{mn} ; qualquer topologia particular segue por uma escolha apropriada dos parâmetros de definição do Hamiltoniano $\mathcal{H}_{ij} = \omega_i \delta_{ij} + \zeta_{ij}(1 - \delta_{ij})$. O conjunto de M saída-entrada, descritos pelos operadores de aniquilação (criação) $\{\mathcal{O}_\ell\}$ e $\{\mathcal{I}_\ell\}$ ($\{\mathcal{O}_\ell^\dagger\}$ e $\{\mathcal{I}_\ell^\dagger\}$), bem como os seus acoplamentos λ_ℓ , do primeiro ao N th componentes do CQ são modelados pelo Hamiltoniano

$$H_{OI} = \sum_{\ell=1}^M \left[\bar{\omega}_\ell \left(\mathcal{O}_\ell^\dagger \mathcal{O}_\ell + \mathcal{I}_\ell^\dagger \mathcal{I}_\ell \right) + \lambda_\ell (\mathcal{O}_\ell^\dagger \mathcal{A}_1 + \mathcal{I}_\ell^\dagger \mathcal{A}_N + H.c.) \right]. \quad (4.2)$$

Assumimos que todos os constituintes da rede são acoplados aos seus respectivos reservatórios, com a intensidade de acoplamento γ_i , sendo esta dinâmica descrita pelo Hamiltoniano

$$H_{\mathcal{R}} = \sum_{i,k} [\omega_{ik} c_{ik}^\dagger c_{ik} + \gamma_i (\mathcal{A}_i c_{ik}^\dagger + H.c.)] + \sum_{\ell,k} \left\{ \omega_{\ell k} c_{\ell k}^\dagger c_{\ell k} + \gamma_\ell \left[(\mathcal{O}_\ell + \mathcal{I}_\ell) c_{ik}^\dagger + H.c. \right] \right\}, \quad (4.3)$$

onde de k th modo ω_{qk} do q th reservatório ($q = i, \ell$) é descrito pelo operador aniquilação (criação) $c_{qk}(c_{qk}^\dagger)$. Com o objetivo de obter a equação mestra da rede, diagonalizamos H_{SQ} aplicando a transformação $\Lambda_i = \sum_j T_{ij}^{-1} \mathcal{A}_j$, onde os coeficientes do j th coluna da matriz ortonormal $\mathbf{T}$ ($\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^\dagger$) definem os autovetores associados aos autovalores Ω_i .³⁴ Depois de se traçar os graus de liberdade dos reservatórios, obtém-se o operador densidade reduzido da rede

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i[\tilde{H}, \rho] + \sum_i (\Gamma_i/2) ([\Lambda_i \rho, \Lambda_i^\dagger] + [\Lambda_i, \rho \Lambda_i^\dagger]) \\ & + \sum_\ell (\Gamma_\ell/2) ([\mathcal{O}_\ell \rho, \mathcal{O}_\ell^\dagger] + [\mathcal{O}_\ell, \rho \mathcal{O}_\ell^\dagger]) \\ & + \sum_\ell (\Gamma_\ell/2) ([\mathcal{I}_\ell \rho, \mathcal{I}_\ell^\dagger] + [\mathcal{I}_\ell, \rho \mathcal{I}_\ell^\dagger]), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde Γ_i e Γ_ℓ representam as taxas de amortecimento do i th modo normal do CQ e do ℓ th sistema de entrada-saída. O Hamiltoniano $\tilde{H} = \tilde{H}_{CQ} + \tilde{H}_{OI}$ soma dos termos de $\tilde{H}_{CQ} = \sum_i \Omega_i \Lambda_i^\dagger \Lambda_i$ e $\tilde{H}_{OI} = \sum_{\ell=1}^M \left\{ \omega_\ell \left(\mathcal{O}_\ell^\dagger \mathcal{O}_\ell + \mathcal{I}_\ell^\dagger \mathcal{I}_\ell \right) + \lambda_\ell \sum_{i=1}^N [(T_{1i} \mathcal{O}_\ell^\dagger + T_{Ni} \mathcal{I}_\ell^\dagger) \Lambda_i + H.c.] \right\}$, o ultimo descrevendo o acoplamento posterior de cada um dos M canais de entrada-saída com todos os modos normais do CQ. Sob a hipótese de o limite de acoplamento fraco: $\lambda_\ell, \zeta_{ij} \ll \omega_i, \bar{\omega}_\ell$, onde todos os acoplamentos são significativamente menores do que as

freqüências, podemos desprezar os termos de decaimento cruzado da Eq. (4.4), que permitem que todos os componentes da rede percam excitação um por meio do outro.³⁴

4.2.1 Acoplamentos efetivo entre as extremidades de entrada-saída

Para engenheirar a interação efetiva entre cada uma das extremidades de saída-entrada, primeiro ajustamos cada extremidade (ω_ℓ) para ser dispersivamente acoplado a um único modo normal, (Ω_j), ou a um conjunto degenerado de multiplicidade p dos modos normais (Ω_j^p), assim estando longe da ressonância com todos os outros modos Ω_i tal que $|\Omega_j^p - \Omega_i| \gg \lambda$. Em ambos os casos, a condição $\sqrt{\bar{n}_\ell} \lambda / \Delta_\ell \ll 1$ deve ser satisfeita ($\bar{n}_\ell$ sendo a excitação média do ℓ th estado de entrada e $\Delta_\ell = |\Omega_j - \omega_\ell|$), juntamente com a exigência de que as intensidades de acoplamento λ_ℓ deve ser muito menor do que aquelas entre os componentes do CQ ζ_{ij} , i.e. $\lambda_\ell \ll \zeta_{ij} \ll \omega_i$. Caso contrário, a excitação do estado a ser transferida iria preencher o CQ, mesmo existindo uma grande dessintonia Δ_ℓ . As restrições acima nos permitem eliminar as variáveis do CQ adiabaticamente,^{76,77} para se obter, até segunda ordem nos parâmetros da rede λ_ℓ , a equação para o operador de densidade reduzido ρ_{OI} descrevendo a dinâmica de todos os sistemas de saída-entrada:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{OI} = & -i[H_{eff}, \rho_{OI}] + \sum_\ell (\Gamma_\ell^{(O)}/2) ([\mathcal{O}_\ell \rho_{OI}, \mathcal{O}_\ell^\dagger] + [\mathcal{O}_\ell, \rho_{OI} \mathcal{O}_\ell^\dagger]) \\ & + \sum_\ell (\Gamma_\ell^{(I)}/2) ([\mathcal{I}_\ell \rho_{OI}, \mathcal{I}_\ell^\dagger] + [\mathcal{I}_\ell, \rho_{OI}^\dagger \mathcal{I}_\ell^\dagger]) \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde o Hamiltoniano

$$H_{eff} = \sum_\ell \chi_\ell (\mathcal{O}_\ell^\dagger \mathcal{I}_\ell + \mathcal{O}_\ell \mathcal{I}_\ell^\dagger), \quad (4.6)$$

descreve o acoplamento efetivo entre os M sistema de saída-entrada; com intensidade de acoplamento $\chi_\ell = \sum_p \lambda_\ell^2 |T_{\ell 1}^p T_{\ell N}^p| / \Delta_\ell$, $T_{\ell 1}^p$ e $T_{\ell N}^p$ sendo os autovetores associados com o modo normal Ω_ℓ^p . Assim, além da eliminação adiabática das variáveis do CQ, também escolhemos os parâmetros da rede para que os canais de saída-entrada não interajam uns com os outros. Ressaltamos que a validade do H_{eff} é restrita às redes onde $N \ll \Delta_\ell / \sqrt{\bar{n}_\ell} \lambda_\ell$, desde que a sua correção de terceira ordem é proporcional ao fator $N \lambda_\ell^3 / \Delta_\ell^2$ que tem de ser muito menor do que $\lambda_\ell^2 / \Delta_\ell$. Quanto aos mecanismos de dissipação de todos os elementos (adiabaticamente eliminado) CQ, são levados em consideração através das taxas efetivas de amortecimento associados com cada um dos terminais de saída-

entrada, dados por $\Gamma_\ell^{(O)} = \Gamma_\ell + \Gamma_j (\lambda_\ell^2 / \Delta_\ell^2) \sum_p (T_{\ell 1}^p)^2$ e $\Gamma_\ell^{(I)} = \Gamma_\ell + \Gamma_j (\lambda_\ell^2 / \Delta_\ell^2) \sum_p (T_{\ell N}^p)^2$ que, como o χ , dependem da topologia do CQ. A taxa de decaimento Γ_j do j th modo normal que é dispersivamente acoplado ao ℓ th terminal de saída-entrada leva as correções das taxas efetivas de amortecimento $\Gamma_\ell^{(O)}$ e $\Gamma_\ell^{(I)}$, e sua contribuição é muito pequena ($\lambda_\ell / \Delta_\ell \ll 1$) devido à natureza do tunelamento dos acoplamentos de saída-entrada. Finalmente, observamos que a forma de Lindblad do superoperador na Eq. (4.5) decorre da condição de que os constituintes do CQ são inicializados no estado de vácuo. Caso contrário, com um CQ inicialmente populado, teremos que levar em conta termos adicionais de temperatura no Lindblad além da correção (relacionado com o CQ) adicionado à estrutura Josephson da Eq. (4.6).

4.2.2 Taxas de decaimentos efetivas, fidelidade e tempo de transferência

Para abranger um grande número de topologias do CQ e que ainda possamos obter resultados analíticos para a cooperatividade $\mathcal{C}$ que é uma forma de pesar o custo da taxa de dissipação em relação o benefício da intensidade do acoplamento efetivo entre os sistemas de saída-entrada, restringimos nossa análise a um conjunto específico de topologias cujos componentes que constituem o CQ têm um número crescente de ligações entre eles, associadas com primeiro-, segundo-, ..., e o acoplamento entre o J th-vizinhos, com J variando de 1 até $\text{int}(N/2)$. As frequências dos modos normais de todas as redes — a circular, a simétrica, e todos os $[\text{int}(N/2) + 1]/2$ topologias intermediárias — são dadas por $\Omega_m = \omega + \zeta \sum_{k=1}^J (2 - \delta_{2k,N}) \cos(2mk\pi/N)$. Para os casos em que $2m/N = 0, 1$, vemos que os autovalores Ω_m não são degenerados, os coeficientes dos seus autovetores associados são $T_{mn} = \mathcal{N} \cos[2\pi m(n-1)/N]$, onde $\mathcal{N} = \sqrt{2/(N+1)}$. Por outro lado, quando $2m/N \neq 0, 1$, os autovalores tem degenerescência 2, os coeficientes de ambos os autovetores são linearmente independentes sendo T_{mn} e $\tilde{T}_{mn} = \mathcal{N} \sin[2\pi m(n-1)/N]$. A partir das equações que definem os autovalores e autovetores decorrentes da diagonalização de H_{CQ} , calculamos analiticamente os parâmetros de cooperatividade

$$\mathcal{C}_J = J\gamma/\Delta, \quad (4.7)$$

o que significa que quanto menor o número de acoplamentos feito entre os sistemas que constituem o CQ, maior a fidelidade do estado transferido. Em relação ao tempo de transferência $\tau \approx \pi/2\eta$, após calcular a intensidade de acoplamento $\chi = \lambda^2/2J\Delta$ obtemos a relação $\tau_J = \pi J\Delta / \left[\lambda^2 - (J\gamma\lambda/4\Delta)^2 \right]$ que, sob a razoável aproximação $J\gamma \ll \gamma\Delta/\lambda \ll \Delta$ —adotada a partir daqui e válida quando a taxa de dissipação é significativamente menor do que a dessintonia Δ — temos

$$\tau_J = \pi/2\chi = \pi J\Delta/\lambda^2. \quad (4.8)$$

Portanto, ao mesmo tempo que é independente do estado a ser transferida, o tempo de transferência pode ser controlado através do número de ligações J , sendo mais curto na topologia linear (ou circular) .

A partir daqui, iremos assumir o caso particular de um CQ constituído de uma rede linear (acoplamento de primeiros vizinhos) degenerada cujos componentes apresentam frequência natural igual ω e taxa de amortecimento Γ . Assumimos também intensidades de acoplamento ζ entre os elementos do CQ, no regime onde $\lambda_\ell \ll \zeta \ll \omega$, adotado tanto para engenheirar a equação mestra 4.5 e para permitir os resultados analíticos. Por fim, iguais taxas de amortecimento também são assumidas para todos os componentes do sistema de saída-entrada, $\Gamma_\ell = \tilde{\Gamma}$. Sob o regime de parâmetros definidos acima, obtemos as atenuadas taxas de decaimentos $\Gamma_\ell^{(O)} = \Gamma_\ell^{(T)} \sim \tilde{\Gamma} + \Gamma (\lambda_\ell/\Delta_\ell)^2$, bem como a excitação do CQ $\text{Tr}_{BD} \left(\rho_{CQ} \sum_i \Lambda_i^\dagger \Lambda_i \right) \approx \sum_\ell \bar{n}_\ell (\lambda_\ell/\Delta_\ell)^2$, que confirma que o canal é apenas virtualmente populado no regime de parâmetros de H_{eff} .

Traçando os graus de liberdade das componentes de saída a partir da solução da Eq. (4.5) obtém-se o operador densidade para as entradas $\rho_I(t)$ e, consequentemente, a fidelidade do estado transferido para a ℓ th entrada $\mathcal{F}_\ell(t) = \text{Tr}_I [\rho_I(t) |\psi_I^\ell(t)\rangle \langle \psi_I^\ell(t)|]$, onde $|\psi_I^\ell(t)\rangle$ representa o estado transferido para o ℓ th de entrada, em condições ideais, o que faz com que seja exatamente o mesmo que o estado vindo da ℓ th saída em $t = 0$, i.e., $|\psi_I^\ell(t)\rangle \equiv |\psi_O^\ell(0)\rangle$. A partir da maximização de $\mathcal{F}_\ell(t)$ obtemos o tempo de transferência $\tau_\ell = (1/\eta_\ell) \cot^{-1}(\Gamma/4\eta_\ell) \approx \pi/2\eta_\ell$, onde $\eta_\ell = \chi_\ell \sqrt{1 - (C_\ell/4)^2}$ e a cooperatividade $C_\ell = \Gamma_\ell^{(O)}/\chi_\ell \approx \Gamma/\Delta_\ell + \tilde{\Gamma}\Delta_\ell/\lambda_\ell^2$.

4.2.3 Validade da equação mestra efetiva

Para demonstrar a transferência simultânea de um conjunto de estados de saída a partir de um QC para os estados de entrada correspondentes de um outro SQ remoto, consideramos o caso em que $M = 5$ saídas são preparados com estados iniciais do tipo gato de Schrödinger $|\psi_o^\ell(0)\rangle = N_\pm (|\alpha_\ell\rangle \pm |-\alpha_\ell\rangle)$. Para contar com valores típicos de experiências em curso, assume-se que o canal quântico, bem como as saídas e entradas dos QCs conectados são compostos por redes de microcavidades acopladas por fibras ópticas.³⁸ A condição para o acoplamento dispersivo entre os canais de entrada-saída e os modos normais do CQ pode ser preenchida, primeiro definindo N , e em seguida, ajustando a distância entre as fibras e as microcavidades para obter a intensidade de acoplamento $\lambda_\ell \ll \Delta_\ell/N$. Fixando $N = M = 5$ com $\zeta = 10^6 \text{s}^{-1}$ e trabalhando na região de microondas com $\omega = 10^9 \text{s}^{-1}$, em seguida assumimos intensidade de acoplamento iguais $\lambda = 10^5 \text{s}^{-1}$ entre de CQ e o CQ para obter os modos normais $\Omega_j = \{10^9 + 2 \times 10^6 \cos[j\pi/3]\} \text{s}^{-1}$, o que nos permite ajustar as frequências ω_ℓ a fim de obter a mesma dessintonia $\Delta_0 = |\Omega_j - \omega_\ell| = 10^7 \text{s}^{-1}$ entre todos os canais de entrada-saída e os modos do CQ correspondentes. Consideramos cavidades com alto fator de qualidade para as extremidades de saída-entrada, com $\tilde{\Gamma} = 1 \text{s}^{-1}$, acoplados a cavidade de baixa fator de qualidade Q que constituem o CQ, com $\Gamma = 10^4 \text{s}^{-1}$.

Considerando-se o regime acima de parâmetros, na Fig(4.2) (a) plotamos a fidelidade $\mathcal{F}(t)$ contra o tempo dimensionado t/τ , o que acaba por ser o mesmo para todos os canais de entrada-saída desde que $\lambda_\ell = \lambda$. Nesta figura temos assumido que todos os estados de saída têm a mesma excitação $|\alpha_\ell|^2 = 5$. Verifica-se que, mesmo depois de 10 transferência consecutiva dos estados dos sistemas de saída para os de entrada, o que leva um intervalo de tempo $\tau = 20\tau_\ell = 20\pi\Delta_\ell/\lambda^2$, a fidelidade $\mathcal{F}^\ell(\tau) \approx (1 + e^{-10\pi|\alpha_\ell|^2\mathcal{C}_\ell/2})/2 \approx 0.93$ ainda é bastante elevada uma vez que, para os parâmetros dado acima, a cooperatividade $\mathcal{C}_\ell \approx 10^{-3}$ é muito pequena.

A fim de verificar a validade da interação engenheirada (4.6), plotamos na Fig.(4.2) (b) a fidelidade $F(t)$, calculadas a partir da equação mestra (4.4) durante o regime de parâmetros acima especificado para uma rede de microcavidade, que permite a derivação do acoplamento efetivo (4.6). Verificamos que ambos os gráficos das Fig.(4.2) (a) e (b), origina-

dos das equações (4.5) e (4.4), respectivamente, são aproximadamente iguais, confirmando assim a precisão de todo o conjunto de aproximações realizadas.

Observa-se que altas fidelidades são obtidas mesmo quando se considera que os componentes do canal quântico são inicialmente excitados (efeitos de Temperatura) ou que o acoplamento entre eles e as suas frequências naturais apresentam algum grau de aleatoriedade. Com os mesmos parâmetros utilizados anteriormente, na Fig.(4.3) (a) plotamos a fidelidade (4.4) quando cada um dos componentes do canal quântico estão inicialmente no estado coerente $\beta = 1$. Verificamos que os primeiros ciclos de transferência de estado e recorrência são pouco afetados pela excitação inicial do CQ. Na Fig.(4.3) (b) também consideramos os mesmos parâmetros dos casos acima para plotar a fidelidade (4.4) quando se considera valores aleatórios de ζ caindo uniformemente dentro do intervalo $[0.8, 1.2] \times 10^6 \text{s}^{-1}$. Mais uma vez, apesar da faixa significativa da intensidade do acoplamento aleatório, a fidelidade é fracamente afetada, demonstrando a robustez do nosso protocolo contra flutuações experimentais. Ainda em relação a um QC linear, na Fig.(4.4) a linha tracejada (pontilhada) indica a queda da excitação (o aumento) no sistema de saída (entrada), escalado pela excitação $|\alpha|^2$ do estado inicial a ser transferido. A linha tracejada-pontilhada, é a soma de ambas as excitações, dado por $\sum_{\ell} \text{Tr}_{\ell}(\rho_{\ell} a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell}) / |\alpha|^2$, indicando que o CQ é efetivamente despovoado. A linha sólida mostra a Concurrence (mesma escala de unidade), do emaranhamento gradual que surge devido a interação efetiva entre o sistema saída-entrada, o que caracteriza o tunelamento como um fenômeno não-local. O grau máximo de emaranhamento é atingido exatamente a metade do tempo de transferência.

4.3 Tunelamento quântico dissipativo e não-localidade

Analizamos o tunelamento não local (TNL) em termos do bem conhecido efeito de túnel de uma barreira dupla, onde o emissor e o receptor desempenham o papel de dois poços separados por uma barreira de potencial representado pela QC. Nós primeiro resolvemos o caso sem dissipação, em que o tempo de transferência τ_{ℓ} pode ser calculado, tal como na literatura,¹⁰³ a partir da diferença de energia ΔE associado com o acoplamento efetivo H_{eff} : $\tau = \pi/\Delta E$. Na verdade, a partir de H_{eff} obtém-se as energias dos modos normais $\omega \pm \chi$, levando a $\Delta E = 2\chi = \lambda^2/\Delta$ e, conseqüentemente, a τ_{ℓ} . Em relação

Figura 4.2 – Gráfico da fidelidade, contra o tempo escalado $\tilde{\tau}$, calculado a) analiticamente através da equação 4.5, e b) numericamente a partir da equação 4.4

Figura 4.3 – Fidelidade do processo de transferência, para o tempo escalado $\tilde{\tau}$ para os mesmos parâmetros da Fig.(4.2) , exceto a) CQ inicialmente populado $|\alpha|^2 = 1$ b) para valores aleatórios de ζ abrangido uniformemente o intervalo $[0.8, 1.2] \times 10^3 \tilde{\lambda}$ em vez do valor fixo $10^3 \tilde{\lambda}$.

Figura 4.4 – Evolução temporal das excitações, do emissor (linha tracejada) e do receptor (linha pontilhada), dimensionados por $|\alpha|^2$. A soma de ambas as excitações é indicada pela linha tracejada-pontilhada, ao passo que a linha cheia mostra a *Concurrence* do emaranhamento entre os dois ressonadores.

ao tunelamento dissipativo quântico, observamos que a inversão de excitação dada por $\mathcal{P}(t) = \sum_{\ell} (-1)^{\delta_{\ell A}} \text{Tr}_{\ell} [\rho_{\ell}(t) a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell}] = [\cos(2\eta t) - (\mathcal{C}/4) \sin(2\eta t)] e^{-\Gamma t}$ está intimamente relacionada a expressão correspondente obtido por Leggett *et al.*¹⁰⁴ ao estudar a dinâmica de sistemas de dois níveis acoplados a um ambiente de dissipação. Na Ref.¹⁰⁴ os autores derivam o mesmo comportamento para $\mathcal{P}(t)$ ao analisar reservatórios com densidade espectral Superohmica a $T = 0\text{K}$ e $\mathcal{C} \ll 1$ (exatamente como na nossa análise), o único caso que leva ao subamortecido das oscilações coerentes entre os poços, que tem uma notável semelhança com o TNL. Devemos salientar, contudo, que o mecanismo de tunelamento, de modo diferente dos da literatura, é um processo não-local em que o sistema de saída e o de entrada podem estar espacialmente afastados um do outro, o acoplamento entre as suas funções de onda está indiretamente mediada pelos modos normais do QC. Prosseguindo ainda mais a nossa tentativa de fazer uma analogia com uma configuração de um potencial efetivo, a rede pode ser vista, como na Fig.(4.5), tal como uma barreira dupla de poços distantes (aprisionando as funções de onda do emissor e do receptor) separados por um potencial, largo e raso com um nível energético mais alto (quando $\nu - \omega > 0$), mantendo os modos normais do CQ estreitamente espaçados. Mais uma vez, a interação túnel H_{eff} é indiretamente acompanhada por sobreposições, indicadas por regiões mais escuras na Fig.(4.5), entre o sistema saída-entrada e as funções de onda dos modos normais do CQ.

Figura 4.5 – Esboço da configuração do potencial efetivo para ilustrar a sobreposição indireta das funções de onda do emissor e do receptor através do Q.

4.3.1 Potenciais não-locais

Quanto à influência do número de acoplamentos entre os constituintes do CQ (ζ_{mn}) no tempo de tunelamento τ_ℓ , apresenta uma grande semelhança com os efeitos de potenciais não locais (no sentido de ser funções de dois pontos) em barreiras de duplo poço. Sabe-se que, além de aumentar J , como foi encontrado, o tempo tunelamento também aumenta proporcionalmente com o grau de não-localidade.¹⁰³ Na verdade, podemos esperar que o aumento J possa simular o fortalecimento do potencial não local de poço duplo. Para ser mais preciso, o mecanismo subjacente a este reforço é o peso de cada modo normal para o acoplamento efetivo $\chi_\ell = \sum_p \lambda_\ell^2 |T_{\ell 1}^p T_{\ell N}^p| / \Delta_\ell$. Como pode ser verificado a partir da expressão derivada acima para $\bar{v}_m$, conforme J aumenta, o mesmo acontece com o número de modos normais do CQ distâtes da frequência $\bar{\omega}_\ell$ do sistema saída-entrada, aumentando assim a dessintonia Δ_m e assim diminuindo $\chi (\propto \tau^{-1})$.

4.3.2 Outras interações efetivas e operações lógicas.

É simples a implementação de interações efetivas adicionais do esquema de rede exposto acima. Por exemplo, considerando R pares de saída-entrada degenerados, de

modo que $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = \dots = \bar{\omega}_R = \bar{\omega}$, obtemos, em vez da Eq. (4.6), a interação

$$H_{eff} = \sum_{\ell'=1}^R \sum_{\ell''=1}^R \chi_{\ell'\ell''} \left[\mathcal{O}_{\ell'}^\dagger (\mathcal{O}_{\ell''} + \mathcal{I}_{\ell''}) + H.c \right] + \sum_{\ell=R+1}^M \chi_{\ell} (\mathcal{O}_{\ell}^\dagger \mathcal{I}_{\ell} + H.c), \quad (4.9)$$

com $\chi_{\ell'\ell''} = \sum_p \lambda_{\ell'} \lambda_{\ell''} |T_{\ell'1}^p T_{\ell''N}^p| / \Delta_{\ell'}$, o que permite gerar portas lógicas de n-qubits e preparar uma gama de estados emaranhados, por exemplo, estados de cluster. Partindo do princípio que todas as saídas são acoplados aos componentes do CQ com a mesma intensidade $\lambda_{\ell} = \lambda$, e partindo de um estado que contém uma excitação no sistema de saída, enquanto todos os outros estão no estado de vácuo, chega-se após o tempo de interação $\chi\tau = \pi/4$, o estado $W = \sum_{\ell=1}^{2R} e^{i\phi_{\ell}} |\delta_{\ell 1}, \dots, \delta_{\ell R}, \delta_{\ell, R+1}, \dots, \delta_{\ell, 2R}\rangle / \sqrt{2R}$ onde as primeiras R posições no estado produto referem-se às saídas, enquanto as últimas R estão relacionadas às entradas. Além dos fatores de fase, este estado W são assim, composto por todos os estados totalmente simétricas de $2R - 1$ zeros e 1 excitação, para $R = 2$ obtemos $(|1000\rangle - i|0100\rangle - |0010\rangle - i|0001\rangle) / 2$.

Considerando-se o caso em que os pares de entrada-saída são sistemas de dois níveis, descritos pelo Hamiltoniano (4.6), e assumindo que pulsos laser atuam para rodar os pares de saída-entrada, podemos engenheirar, no tempo de transferência τ_{ℓ} , o operador de evolução

$$U_{eff} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix},$$

que pode ser usado para executar, ajustando os parâmetros do laser para controlar o fator de fase φ , portas lógicas universais de dois qubits espacialmente distantes (entre os pares de saída-entrada), além de ser possível implementar a transformada quântica discreta de Fourier entre os estados saída-entrada.¹⁰⁵

No caso em que todos os pares de saída-entrada são sistemas de dois níveis (spin $1/2$) degenerados ($\bar{\omega}_{\ell} = \bar{\omega}$) com $\lambda_{\ell} = \lambda$, é direto verificar que a interação 4.9 reduz à forma simples $H_{eff} = \chi S_+ S_-$, com $S_+ = \sum_{\ell=1}^R (\mathcal{O}_{\ell}^\dagger + \mathcal{I}_{\ell}^\dagger)$ e $S_- = \sum_{\ell=1}^R (\mathcal{O}_{\ell} + \mathcal{I}_{\ell})$, que foi projetado em amostras atômicas espacialmente confinados. Na nossa rede, em vez

disso, as entradas são espacialmente distantes das saídas o que permite a manipulação direta de cada constituinte da rede. A interação S_+S_- pode ser usada para gerar uma multiplicidade de estados emaranhados, como estados tipo gato-Schrödinger e estados de spin comprimidos.¹⁰⁶

4.4 Observações finais

Considerando dois sistemas quânticos com separação espacial — o saída-entrada — acoplados um ao outro através de um QC não ideal — uma rede composta por sistemas fermiônico ou bosônicos — conseguimos derivar um Hamiltoniano de dois corpos descrevendo o que caracterizamos como tunelamento dissipativo não-local . Demonstramos o desenvolvimento do emaranhamento entre o sistema saída-entrada, do qual o QC não participa, que definitivamente caracteriza o tunelamento como um mecanismo não-local. Este mecanismo torna-se assim adequado para a transferência de alta fidelidade de estado quântico. Destacamos que, além da análise numérica desenvolvida em Refs.^{97,107} que poderiam ter caracterizado o TNL, aqui apresentamos a derivação formal do Hamiltoniano efetivo sob um regime rigoroso de parâmetros.

Como já foi referido acima, além de transferência com alta fidelidade de estados, o TNL é também adequado para a preparação de emaranhamento de longa distância entre sistemas bosônicos ou fermiônicos. Esperamos que as derivações aqui expostas possam ser úteis para outros fins, além dos apresentados aqui, em teoria da informação quântica . A partir do TNL apresentamos um protocolo para a transferência simultânea de um conjunto de estados entre sistemas quânticos remotos não ideais através de um único canal quântico não ideal. O protocolo é igualmente aplicável a redes de bosônico e sistemas fermiônicos e pode ser utilizado igualmente para a preparação de estados emaranhados e para realizar operações lógicas entre SQ remotos. A natureza dos acoplamentos de saída-entrada permite a transferência de alta-fidelidade de todo o conjunto de estado de saída de um SQ às entradas de um outro SQ, bem como a implementação de operações lógicas com alta fidelidade entre essas extremidades. Em relação à questão sensível de como sintonizar os sistemas saída-entrada degenerados para a vizinhança dos modos normais do CQ, podemos citar que os ressonadores com frequência sintonizável recentemente foram

realizados experimentalmente.¹⁰⁸

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nossa pesquisa sobre transferência de estados em redes quânticas dissipativas teve uma motivação prática, uma vez que transferir e manipular informação com alta fidelidade em nodos distantes é um passo fundamental para a implementação e escalabilidade da computação quântica. Igualmente, aspectos teóricos podem se beneficiar dos resultados obtidos, por exemplo, a violação das desigualdades de Bell entre qubits emaranhados (com separação espacial) é de importância para a fundamentação da teoria quântica, e exige estados emaranhados robustos espacialmente separados para sua verificação.

Embora os protocolos de transferência existentes na literatura mostram que, em princípio, processos com alta fidelidade podem ser obtidos, mesmo em redes arbitrariamente longas, todos apresentam um alto custo operacional e inevitavelmente não levam em conta os efeitos inerentes do meio ambiente. Por exemplo, protocolos baseados na engenharia de cada acoplamento do Hamiltoniano exigem um controle experimental dificilmente obtido no atual estado da arte nos sistemas mais promissores para implementação da computação quântica e compromete a escalabilidade de tais dispositivos. O esquema que compartilha mais aspectos com os propostos nesta tese, que são baseados no acoplamento ressonante do sistema emissor-receptor com um dos modos normais do canal quântico, apresenta dificuldades no caso de cadeias de spin, pois o sistema emissor-receptor emaranha com os graus de liberdade do canal quântico exigindo operações lógicas adicionais para que se obtenha o processo de transferência. Logo, a aparente vantagem do menor tempo de transferência devido ao acoplamento ressonante é ilusória, pois os processos adicionais existentes requerem certo montante de tempo de interação e aumenta a propagação de

erros e consequente leva à diminuição da fidelidade do estado. Lembramos que tanto para sistemas bosônicos quanto fermiônicos o acoplamento ressonante não ocorre dentro de um SQLD, ou seja, o estado sofre a ação de todos os reservatórios que estão acoplados aos componentes do CQ. Por fim, no protocolo ressonante, randomicidades nas frequências e intensidades dos acoplamentos que ocorrem naturalmente durante os processos de fabricação, afetam fortemente à fidelidade de transferência

Podemos resumir os diferentes aspectos que são importantes para transferência de estados quânticos com os desenvolvimentos feitos nesta tese:

- Alta eficiência: Como a fidelidade depende do tamanho da rede (topologia em geral)?

Os resultados obtidos têm validade para uma diversidade de topologias, basicamente a única exigência feita para o canal quântico é que seja possível diagonalizar o sistema, tendo acesso assim ao seu espectro, o que permite obter o acoplamento efetivo emissor-receptor. Mostramos, por exemplo, que na topologia linear degenerada, quando todos os modos normais contribuem aproximadamente da mesma forma para o acoplamento efetivo, este se torna independente do número de constituintes do CQ. Também estudamos os efeitos de acoplamentos adicionais aos de primeiro vizinho e como estas interações adicionais afetam o tempo e a fidelidade do processo de transferência. Por fim, nosso protocolo permite obter fidelidades que tendem a unidade mesmo quando consideramos CQ que apresentam altas taxas de dissipação e decoerência.

- Controle mínimo: Quantas operações são necessárias? Onde está o controle necessário?

O processo de transferência em nosso protocolo exige apenas duas operações, "ligar" e "desligar" o acoplamento efetivo. Estas operações podem ser realizadas pelo controle dinâmico das frequências do sistema emissor-receptor, assim como do acoplamento do emissor-receptor com o primeiro e último constituinte do canal quântico. Do ponto de vista experimental, tal controle dinâmico já foi obtido em microcavidades.¹⁰⁸ Quando os estados estão codificados em poláritons este processo pode ser obtido através do controle do laser externo, o que afeta tanto à frequência do estado quanto o acoplamento entre poláriton e CQ. O custo operacional dos protocolos para TQPE apresentados nesta

tese são consideravelmente menores dos que os existentes nos esquemas conhecidos na literatura^{30,66,89,95}

- Recursos mínimos: Que recursos adicionais são necessários?

Além da operação de "ligar" e "desligar", o único requerimento adicional que aprimora a TQPE é a inicialização do CQ no seu estado fundamental.

- Robustez: Como a fidelidade é afetada pela desordem nos parâmetros do sistema, e pelo ruído externo?

O qubit que é transferido através dos protocolos apresentados são fortemente blindados dos efeitos do meio ambiente que atua no CQ. Além disso, os erros no processo de fabricação que levam a flutuações nos parâmetros envolvidos na TQPE afetam apenas o tempo de transferência e fracamente a fidelidade do processo. Erros de inicialização, como população no CQ, levam a diminuição na fidelidade, embora uma diminuição significativa ocorra apenas depois de alguns ciclos de transferência e recorrência.

Perspectivas. Além do tópico da transferência de estados em redes que foi abordado nesta tese, temos interesse em estudar no programa das redes de cavidades contendo átomos, alguns tópicos que descrevemos brevemente a seguir.

- *Um tratamento matemático geral das redes de cavidades contendo átomos.*

Desenvolver um tratamento matemático geral do problema, que permita a dedução da evolução temporal do operador densidade da rede: dos modos das cavidades e dos respectivos átomos. É importante lembrar que apresentamos, recentemente, um tratamento matemático geral de uma rede de osciladores harmônicos quânticos dissipativos, ou redes de cavidades não ideais,³⁴ onde consideramos todas as possíveis topologias da rede. Logo, pretendemos neste projeto estender o tratamento empreendido na Ref.,³⁴ para a situação em que os modos das cavidades estejam também acoplados aos átomos. Dentro dessa perspectiva, buscar generalizar as abordagens das Refs.,^{39,40} englobando a possibilidade de se tratar quaisquer topologias das rede, além do regime perturbativo. As implicações dessa possível extensão para a engenharia dos cristais de luz apresentam aspectos variados;

- Dinâmica de localização da excitação da rede.

Outro aspecto interessante a se tratar nas redes de cavidades e átomos diz respeito à possibilidade de localização de toda a excitação da rede, ou de parte dela, numa dada cavidade ou num conjunto delas com seus respectivos átomos. Este efeito, similar ao processo de localização de Anderson,¹⁰⁹ pode apresentar aspectos físicos interessantes, como a localização apenas da excitação dos modos, espalhando pela rede a excitação atômica, ou vice-versa. Este efeito pode apresentar aplicações tecnológicas relevantes. A localização de toda a excitação da rede (dos modos e dos átomos) numa dada cavidade ou num conjunto delas, deixa o restante da rede no estado fundamental, o que pode ser útil, por exemplo, para a reinicialização de uma dada operação lógica que ocorra nessa fração despovoada da rede. Além disso, a localização da excitação dos modos pode deixar livre os átomos para que executem operações que prescindam dos campos e vice-versa.

- *Armazenamento de estados da rede.*

Conforme mencionamos no capítulo introdutório, mostrou-se recentemente como construir um dispositivo para a proteção ou armazenamento dinâmico de estados no problema particular de redes de osciladores dissipativos,³⁵ isto é, na ausência dos átomos. A maximização dos tempos de decoerência desses estados (proporcionais ao número de osciladores da rede) dá-se pela construção de topologias "especiais" que viabilizam evoluções específicas dos estados preparados em osciladores individuais da rede. Para o caso em questão, a presença dos átomos no interior das cavidades torna o problema do armazenamento de estados mais abrangente, porque permite também a proteção de estados atômicos ou emaranhados átomo-campo, e mais complexo, em função das interações adicionais envolvidas, das cavidades com os átomos. Dessa forma, a extensão do problema do armazenamento de estados, das redes particulares de cavidades para aquelas nas quais átomos estão presentes no interior das mesmas, é de interesse para a aplicação tecnológica e representa um considerável desafio teórico a ser suplantado.

- *Efeitos da dissipação nas redes de cavidades contendo átomos.*

Notamos que na Ref.,³⁴ tratamos os efeitos de perdas em redes de osciladores harmônicos quânticos dissipativos. Desejamos também estender esta abordagem para o trata-

mento de perdas nas redes de cavidades contendo átomos. É evidente que este tratamento torna-se fundamental para a análise da implementação experimental dos processos acima mencionados. Além disso, lembramos que aspectos interessantes do processo de decoerência emergem em redes de sistemas quânticos acoplados, como por exemplo a não aditividade das taxas de relaxação.^{31–33} Dentro do contexto de sistemas dissipativos, devemos também analisar uma possível generalização do trabalho elaborado na referência¹¹⁰, onde adaptamos a transparência eletromagneticamente induzida e o efeito Stark dinâmico da física atômica para redes de cavidades dissipativas. Para o caso das redes com cavidades contendo átomos, esta adaptação pode fornecer novas perspectivas, como por exemplo, o controle da transparência eletromagneticamente induzida do átomo através do campo e vice-versa. Acreditamos que o programa de engenharia de reservatórios pode também ser utilizado nas redes, possibilitando a criação via dissipação de estados emaranhados, assim como a implementação de operações lógica em SLD ou SQLD. Estudos iniciais foram realizados considerando o caso simples de apenas duas cavidades contendo átomos de dois níveis em seu interior e acopladas por uma fibra ótica que dissipa muito, levando a estados emaranhados assintóticos entre os átomos. Devemos considerar também a possibilidade de criar através da engenharia de reservatórios, SLD e SQLD para estados de poláriton. A investigação da criação de emaranhamento pela dissipação em cadeias de spin é outro tópico de interesse onde muitos dos resultados e principalmente as técnicas utilizadas nesta tese devem ser empregadas em estudos futuros.

- *Simulação de sistemas de muitos corpos*

Sistemas efetivos de muitos corpos em redes de cavidade acopladas são de grande interesse. Estes simuladores quânticos possibilitam estudar física da matéria condensada com luz, o que permite explorar propriedades de modelos Hamiltonianos fortemente correlacionados também nas regiões do diagrama de fase que são indescritíveis nas investigações numéricas e analíticas. Além disso, eles oferecem uma grande versatilidade para aplicações como simuladores quânticos, devido às possibilidades de manipulação via campos laser. Esse controle externo aliado a resolução individual de cada sítio da rede, permite o controle, manipulação e a medição de cada constituinte da rede. Nesta linha de estudos a simulação de Férmions de Majorana(modos de Majorana) e outros efeitos topológicos, como isolantes e estados topológicos podem vir a ser simulados em sistemas

de cavidades acopladas contendo átomos.

REFERÊNCIAS

- 1 WALLS, D. F. Squeezed states of light. *Nature*, v. 306, p. 141–146, 1983.
- 2 RAIMOND, J. M.; BRUNE, M.; HAROCHE, S. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Review of Modern Physics*, v. 73, n. 3, p. 565–582, 2001.
- 3 LEIBFRIED, D. et al. Quantum dynamics of single trapped ions. *Review of Modern Physics*, v. 75, n. 1, p. 281–324, 2003.
- 4 CORNELL, E. A.; WIEMAN, C. E. Nobel lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments. *Review of Modern Physics*, v. 74, n. 3, p. 875–893, 2002.
- 5 BRUNE, M. et al. Quantum Rabi oscillation: a direct test of field quantization in a cavity. *Physical Review Letters*, v. 76, n. 11, p. 1800–1803, 1996.
- 6 BRUNE, M. et al. Observing the progressive decoherence of the “meter” in a quantum measurement. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 24, p. 4887–4890, 1996.
- 7 HAGLEY, E. et al. Generation of Einstein-Podolsky-Rosen pairs of atoms. *Physical Review Letters*, v. 79, n. 1, p. 1–5, 1997.
- 8 RAUSCHENBEUTEL, A. et al. Coherent operation of a tunable quantum phase gate in cavity QED. *Physical Review Letters*, v. 83, n. 24, p. 5166–5169, 1999.

- 9 MONROE, C. et al. Demonstration of a fundamental quantum logic gate. *Physical Review Letters*, v. 75, n. 25, p. 4714–4717, 1995.
- 10 MEEKHOF, D. M. et al. Generation of nonclassical motional states of a trapped atom. *Physical Review Letters*, v. 76, n. 11, p. 1796–1799, 1996.
- 11 TURCHETTE, Q. A. et al. Deterministic entanglement of two trapped ions. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 17, p. 3631–3634, 1998.
- 12 LEGGETT, A. J. Erratum: Bose-Einstein condensation in the alkali gases: some fundamental concepts [review of modern physics 73, 307 (2001)]. *Review of Modern Physics*, v. 75, n. 3, p. 1083–1083, 2003.
- 13 STAMPER-KURN, D. M. et al. Excitation of phonons in a Bose-Einstein condensate by light scattering. *Physical Review Letters*, v. 83, n. 15, p. 2876–2879, 1999.
- 14 STENGER, J. et al. Bragg spectroscopy of a Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*, v. 82, n. 23, p. 4569–4573, 1999.
- 15 BURT, E. A. et al. Coherence, correlations, and collisions: what one learns about Bose-Einstein condensates from their decay. *Physical Review Letters*, v. 79, n. 3, p. 337–340, 1997.
- 16 CIRAC, J. I. et al. Quantum superposition states of Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, v. 57, n. 2, p. 1208–1218, 1998.
- 17 JIN, D. S. et al. Temperature-dependent damping and frequency shifts in collective excitations of a dilute Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*, v. 78, n. 5, p. 764–767, 1997.
- 18 HALL, D. S. et al. Measurements of relative phase in two-component Bose-Einstein condensates. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 8, p. 1543–1546, 1998.
- 19 PRADO, F. O. et al. Bilinear and quadratic hamiltonians in two-mode cavity quantum electrodynamics. *Physical Review A*, v. 73, n. 4, p. 043803, 2006.

- 20 POYATOS, J. F.; CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. Quantum reservoir engineering with laser cooled trapped ions. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 23, p. 4728–4731, 1996.
- 21 RODRIGUES, R. L.; MOUSSA, M. H. Y.; VILLAS-BÔAS, C. J. Engineering phonon-photon interactions with a driven trapped ion in a cavity. *Physical Review A*, v. 74, n. 6, p. 063811, 2006.
- 22 JAKSCH, D. et al. Entanglement of atoms via cold controlled collisions. *Physical Review Letters*, v. 82, n. 9, p. 1975–1978, 1999.
- 23 SØRENSEN, A.; MØLMER, K. Spin-spin interaction and spin squeezing in an optical lattice. *Physical Review Letters*, v. 83, n. 11, p. 2274–2277, 1999.
- 24 MEACHER, D. R. et al. Paramagnetism in a cesium optical lattice. *Physical Review Letters*, v. 74, n. 11, p. 1958–1961, 1995.
- 25 CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. Quantum computations with cold trapped ions. *Physical Review Letters*, v. 74, n. 20, p. 4091–4094, 1995.
- 26 BRENNEN, G. K. et al. Quantum logic gates in optical lattices. *Physical Review Letters*, v. 82, n. 5, p. 1060–1063, 1999.
- 27 MORINAGA, M. et al. Manipulation of motional quantum states of neutral atoms. *Physical Review Letters*, v. 83, n. 20, p. 4037–4040, 1999.
- 28 CHOI, D.-I.; NIU, Q. Bose-Einstein condensates in an optical lattice. *Physical Review Letters*, v. 82, n. 10, p. 2022–2025, 1999.
- 29 FEDER, D. L. Perfect quantum state transfer with spinor bosons on weighted graphs. *Physical Review Letters*, v. 97, n. 18, p. 180502–180505, 2006.
- 30 PLENIO, M. B.; HARTLEY, J.; EISERT, J. Dynamics and manipulation of entanglement in coupled harmonic systems with many degrees of freedom. *New Journal of Physics*, v. 6, n. 1, p. 36, 2004.

- 31 PONTE, M. A. de; OLIVEIRA, M. C. de; MOUSSA, M. H. Y. Decoherence in a system of strongly coupled quantum oscillators. I. symmetric network. *Physical Review A*, v. 70, n. 2, p. 022324, 2004.
- 32 PONTE, M. A. de; OLIVEIRA, M. C. de; MOUSSA, M. H. Y. Decoherence in a system of strongly coupled quantum oscillators. II. central-oscillator network. *Physical Review A*, v. 70, n. 2, p. 022325, 2004.
- 33 BURKARD, G.; BRITO, F. Nonadditivity of decoherence rates in superconducting qubits. *Physical Review B*, v. 72, n. 5, p. 054528, 2005.
- 34 PONTE, M. A. de; MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y. Networks of dissipative quantum harmonic oscillators: a general treatment. *Physical Review A*, v. 76, n. 3, p. 032101, 2007.
- 35 PONTE, M. A. de; MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y. Storing quantum states in bosonic dissipative networks. *Journal of Physics B: atomic, molecular and optical physics*, v. 41, n. 21, p. 215506, 2008.
- 36 HEEBNER, R. G. J. E.; IBRAHIM, T. *Optical microresonators: theory, fabrication, and applications in applied physics*. New York: Springer, 2007. (Springer Series in Optical Sciences, v. 138). ISBN 9780471164357.
- 37 KHURGIN, J.; TUCKER, R. *Slow light: science and applications*. New York: CRC Press Taylor and Francis, 2008. (Contemporary Physics, v. 51).
- 38 VAHALA, K. J. Optical microcavities. *Nature*, v. 424, p. 839 – 846, 2003.
- 39 HARTMANN, F. G. S. L. B. M. J.; PLENIO, M. B. Strongly interacting polaritons in coupled arrays of cavities. *Nature Physics*, v. 2, p. 849 – 855, 2006.
- 40 HARTMANN, M. J.; PLENIO, M. B. Strong photon nonlinearities and photonic Mott insulators. *Physical Review Letters*, v. 99, n. 10, p. 103601, 2007.
- 41 BLAIS, A. et al. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: an architecture for quantum computation. *Physical Review A*, v. 69, n. 6, p. 062320, 2004.

- 42 ZANARDI, P.; RASETTI, M. Noiseless quantum codes. *Physical Review Letters*, v. 79, n. 17, p. 3306–3309, 1997.
- 43 LIDAR, D. A.; CHUANG, I. L.; WHALEY, K. B. Decoherence-free subspaces for quantum computation. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 12, p. 2594–2597, 1998.
- 44 LIDAR, D. A.; WHALEY, K. B. Decoherence-free subspaces and subsystems. In: BENNATI, F.; FLOREANINI, R. (Ed.). *Irreversible quantum dynamics*. Berlin: Springer Verlag, 2003. v. 622, p. 83–120.
- 45 MUNDARAIN, D.; ORSZAG, M. Decoherence-free subspace and entanglement by interaction with a common squeezed bath. *Physical Review A*, v. 75, n. 4, p. 040303, 2007.
- 46 PONTE M.A., S. M. de; MOUSSA, M. Decoherence in strongly coupled quantum oscillators. *Annals of Physics*, 322, n. 9, p. 2077–2084, 2007.
- 47 YUNG, M.-H.; BOSE, S. Perfect state transfer, effective gates, and entanglement generation in engineered bosonic and fermionic networks. *Physical Review A*, v. 71, n. 3, p. 032310, 2005.
- 48 KOSTAK, V.; NIKOLOPOULOS, G. M.; JEX, I. Perfect state transfer in networks of arbitrary topology and coupling configuration. *Physical Review A*, v. 75, n. 4, p. 042319, 2007.
- 49 UNRUH, W. G. Maintaining coherence in quantum computers. *Physical Review A*, v. 51, n. 2, p. 992–997, 1995.
- 50 SHOR, P. W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. *Physical Review A*, v. 52, n. 4, p. R2493–R2496, 1995.
- 51 POYATOS, J. F.; CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. Quantum reservoir engineering with laser cooled trapped ions. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 23, p. 4728–4731, 1996.
- 52 MYATT, C. J. et al. Decoherence of quantum superpositions through coupling to engineered reservoirs. *Nature*, v. 403, p. 269–273, 2000.

- 53 CARVALHO, A. R. R. et al. Decoherence, pointer engineering, and quantum state protection. *Physical Review Letters*, v. 86, n. 22, p. 4988–4991, 2001.
- 54 LÜTKENHAUS, N.; CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. Mimicking a squeezed-bath interaction: quantum-reservoir engineering with atoms. *Physical Review A*, v. 57, n. 1, p. 548–558, 1998.
- 55 AGARWAL, G. S.; SCULLY, M. O.; WALTHER, H. Inhibition of decoherence due to decay in a continuum. *Physical Review Letters*, v. 86, n. 19, p. 4271–4274, 2001.
- 56 PRADO, F. O. et al. Nonadiabatic coherent evolution of two-level systems under spontaneous decay. *Physical Review Letters*, v. 102, n. 7, p. 073008, 2009.
- 57 VIOLA, L.; KNILL, E. Random decoupling schemes for quantum dynamical control and error suppression. *Physical Review Letters*, v. 94, n. 6, p. 060502, 2005.
- 58 VIOLA, L.; KNILL, E.; LLOYD, S. Dynamical decoupling of open quantum systems. *Physical Review Letters*, v. 82, n. 12, p. 2417–2421, 1999.
- 59 BYRD, M. S.; LIDAR, D. A. Empirical determination of dynamical decoupling operations. *Physical Review A*, v. 67, n. 1, p. 012324, 2003.
- 60 CELERI, L. C. et al. Switching off the reservoir through nonstationary quantum systems. *Journal of Physics B*, v. 41, n. 8, p. 085504, 2008.
- 61 BOURENNANE, M. et al. Decoherence-free quantum information processing with four-photon entangled states. *Physical Review Letters*, v. 92, n. 10, p. 107901, 2004.
- 62 VIOLA EVAN M. FORTUNATO, M. A. P. E. K. R. L. L.; CORY, D. G. Experimental realization of noiseless subsystems for quantum information processing. *Science*, v. 293, p. 2059–2063, 2001.
- 63 MOHSENI, M. et al. Experimental application of decoherence-free subspaces in an optical quantum-computing algorithm. *Physical Review Letters*, v. 91, n. 18, p. 187903, 2003.

- 64 OLLERENSHAW, J. E.; LIDAR, D. A.; KAY, L. E. Magnetic resonance realization of decoherence-free quantum computation. *Physical Review Letters*, v. 91, n. 21, p. 217904, 2003.
- 65 CACHEFFO, A. et al. Quasi-perfect state transfer in a bosonic dissipative network. *Journal of Physics B: atomic, molecular and optical physics*, v. 43, n. 10, p. 105503, 2010.
- 66 CHRISTANDL, M. et al. Perfect state transfer in quantum spin networks. *Physical Review Letters*, v. 92, n. 18, p. 187902, 2004.
- 67 KAY, A. Perfect state transfer: beyond nearest-neighbor couplings. *Physical Review A*, v. 73, n. 3, p. 032306, 2006.
- 68 BRIEGEL, H.-J. et al. Quantum repeaters: the role of imperfect local operations in quantum communication. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 26, p. 5932–5935, 1998.
- 69 TSOMOKOS, D. I. et al. Entanglement dynamics in chains of qubits with noise and disorder. *New Journal of Physics*, v. 9, n. 3, p. 79, 2007.
- 70 LIU, W. M. et al. Quantum tunneling of Bose-Einstein condensates in optical lattices under gravity. *Physical Review Letters*, v. 88, n. 17, p. 170408, 2002.
- 71 POLKOVNIKOV, A. Evolution of the macroscopically entangled states in optical lattices. *Physical Review A*, v. 68, n. 3, p. 033609, 2003.
- 72 MATSUKEVICH, D. N.; KUZMICH, A. Quantum state transfer between matter and light. *Science*, v. 306, p. 663–666, 2004.
- 73 BOOZER, A. D. et al. Reversible state transfer between light and a single trapped atom. *Physical Review Letters*, v. 98, n. 19, p. 193601, 2007.
- 74 BAYINDIR, M.; TEMELKURAN, B.; OZBAY, E. Tight-binding description of the coupled defect modes in three-dimensional photonic crystals. *Physical Review Letters*, v. 84, n. 10, p. 2140–2143, 2000.

- 75 GLAUBER, R. *Quantum theory of optical coherence: selected papers and lectures*. Berlin, Germany: Wiley-VCH, 2007. 639 p. ISBN 9783527406876.
- 76 GAMEL, O.; JAMES, D. F. V. Time-averaged quantum dynamics and the validity of the effective hamiltonian model. *Physical Review A*, v. 82, n. 5, p. 052106, 2010.
- 77 KLIMOV, A.; CHUMAKOV, S. *A group-theoretical approach to quantum optics: models of atom-field interactions*. Berlin, Germany: Wiley-VCH, 2009. ISBN 9783527408795.
- 78 NIELSEN, M.; CHUANG, I. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge: [s.n.], 2000. (Cambridge Series on Information and the Natural Sciences). ISBN 9780521635035.
- 79 KIMBLE, H. J. Strong interactions of single atoms and photons in cavity QED. *Physica Scripta*, v. 1998, n. T76, p. 127, 1998.
- 80 CASTRO, A. S. M. de; PERUZZO, J. F.; DODONOV, V. V. Quantum state exchange between indirectly coupled modes. *Physical Review A*, v. 71, n. 3, p. 032319, 2005.
- 81 CRAMER, M. et al. Entanglement-area law for general bosonic harmonic lattice systems. *Physical Review A*, v. 73, n. 1, p. 012309, 2006.
- 82 BOSE, S.; ANGELAKIS, D. G.; BURGARTH, D. Transfer of a polaritonic qubit through a coupled cavity array. *Journal of Modern Optics*, v. 54, n. 13-15, p. 2307-2314, 2007.
- 83 FLEISCHHAUER, M.; LUKIN, M. D. Quantum memory for photons: dark-state polaritons. *Physical Review A*, v. 65, n. 2, p. 022314, 2002.
- 84 SCHMIDT, H.; IMAMOGLU, A. Giant Kerr nonlinearities obtained by electromagnetically induced transparency. *Optical Letters*, OSA, v. 21, n. 23, p. 1936-1938, Dec 1996.
- 85 REBIĆ, S.; PARKINS, A. S.; TAN, S. M. Polariton analysis of a four-level atom strongly coupled to a cavity mode. *Physical Review A*, v. 65, n. 4, p. 043806, 2002.

- 86 FLEISCHHAUER, M.; LUKIN, M. D. Dark-state polaritons in electromagnetically induced transparency. *Physical Review Letters*, v. 84, n. 22, p. 5094–5097, 2000.
- 87 BOLKART, C. et al. Coherent and BCS-type quantum states of dark polaritons. *Laser Physics*, v. 15, n. 1, p. 3–6, 2005.
- 88 BOSE, S. Quantum communication through an unmodulated spin chain. *Physical Review Letters*, v. 91, n. 20, p. 207901, 2003.
- 89 KOSTAK, V.; NIKOLOPOULOS, G. M.; JEX, I. Perfect state transfer in networks of arbitrary topology and coupling configuration. *Physical Review A*, v. 75, n. 4, p. 042319, 2007.
- 90 BURGARTH, D.; BOSE, S. Perfect quantum state transfer with randomly coupled quantum chains. *New Journal of Physics*, v. 7, n. 1, p. 135, 2005.
- 91 MORAES NETO, G. D.; PONTE, M. A. de; MOUSSA, M. H. Y. Engineering interactions for quasiperfect transfer of polariton states through nonideal bosonic networks of distinct topologies. *Physical Review A*, v. 84, n. 3, p. 032339, 2011.
- 92 MORAES NETO, G. D. et al. From decoherence-free channels to decoherence-free and quasi-free subspaces within bosonic dissipative networks. *Journal of Physics B: atomic, molecular and optical physics*, v. 44, n. 14, p. 145502, 2011.
- 93 MORAES NETO, G. D.; PONTE, M. A. de; MOUSSA, M. H. Y. Nonlocal dissipative tunneling for high-fidelity quantum-state transfer between distant parties. *Physical Review A*, v. 85, n. 5, p. 052303, 2012.
- 94 VENUTI, L. C.; BOSCHI, C. D. E.; RONCAGLIA, M. Qubit teleportation and transfer across antiferromagnetic spin chains. *Physical Review Letters*, v. 99, n. 6, p. 060401, 2007.
- 95 YAO, N. Y. et al. Robust quantum state transfer in random unpolarized spin chains. *Physical Review Letters*, v. 106, n. 4, p. 040505, 2011.
- 96 PLENIO, M. B.; SEMIÃO, F. L. High efficiency transfer of quantum information and multiparticle entanglement generation in translation-invariant quantum chains. *New Jour-*

nal of Physics, v. 7, n. 1, p. 73, 2005.

97 VENUTI, L. C. et al. Long-distance entanglement and quantum teleportation in XX spin chains. *Physical Review A*, v. 76, n. 5, p. 052328, 2007.

98 BANCHI, L. et al. Nonperturbative entangling gates between distant qubits using uniform cold atom chains. *Physical Review Letters*, v. 106, n. 14, p. 140501, 2011.

99 JOHANNING, M.; VARÓN, A. F.; WUNDERLICH, C. Quantum simulations with cold trapped ions. *Journal of Physics B: atomic, molecular and optical physics*, v. 42, n. 15, p. 154009, 2009.

100 LEWENSTEIN, M. et al. Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond. *Advances in Physics*, v. 56, n. 2, p. 243–379, 2007.

101 BLOCH, I. Squeezed states of light. *Nature Physics*, v. 1, p. 23–30, 2005.

102 KAY, A. Perfect, efficient, state transfer and its application as a constructive tool. *International Journal of Quantum Information*, v. 08, n. 04, p. 641–676, 2010.

103 RAZAVY, M. *Quantum theory of tunneling*. [S.l.]: World Scientific, 2003. ISBN 9789812380197.

104 LEGGETT, A. J. et al. Dynamics of the dissipative two-state system. *Review of Modern Physics*, v. 59, n. 1, p. 1–85, 1987.

105 WANG, H.-F. et al. Simple implementation of discrete quantum fourier transform via cavity quantum electrodynamics. *New Journal of Physics*, v. 13, n. 1, p. 013021, 2011.

106 ZHENG, S.-B. One-step synthesis of multiatom Greenberger-Horne-Zeilinger states. *Physical Review Letters*, v. 87, n. 23, p. 230404, 2001.

107 PAGANELLI, S.; PASQUALE, F. de; GIORGI, G. L. Faithful state transfer through a quantum channel. *Physical Review A*, v. 74, n. 1, p. 012316, 2006.

- 108 SANDBERG, M. et al. Tuning the field in a microwave resonator faster than the photon lifetime. *Applied Physics Letters*, AIP, v. 92, n. 20, p. 203501, 2008.
- 109 ANDERSON, P. W. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical Review*, v. 109, n. 5, p. 1492–1505, 1958.
- 110 PONTE, M. A. de et al. Electromagnetically induced transparency and dynamic stark effect in coupled quantum resonators. *Europhysics Letters*, v. 72, n. 3, p. 383, 2005.
- 111 PRATHER, D. et al. *Photonic Crystals, Theory, Applications and Fabrication*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2009. (Wiley Series in Pure and Applied Optics). ISBN 9780470278031.
- 112 JOANNOPOULOS, J. et al. *Photonic Crystals: molding the flow of light. 2nd ed.* Princeton: Princeton University Press, 2008. ISBN 9780691124568.
- 113 HOPFIELD, J. J. Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant of crystals. *Physical Review*, v. 112, n. 5, p. 1555–1567, 1958.
- 114 LAUSSY, F. P. et al. Effects of Bose–Einstein condensation of exciton polaritons in microcavities on the polarization of emitted light. *Physical Review B*, v. 73, n. 3, p. 035315, 2006.
- 115 KASPRZAK, J. et al. Bose–Einstein condensation of exciton polaritons. *Nature*, v. 443, p. 409–424, 2006.
- 116 COHEN-TANNOUDJI, C.; DUPONT-ROC, J.; GRYNBERG, G. *Photons and atoms: introduction to quantum electrodynamics*. New York: Wiley, 1989. (Wiley–Interscience publication). ISBN 9780471845263.
- 117 BLOCH, C. Sur la théorie des perturbations des états liés. *Nuclear Physics*, v. 6, n. 0, p. 329 – 347, 1958.
- 118 DURAND, P. Theory of effective hamiltonians and molecular applications. *Journal of Molecular Structure: theochem*, v. 120, n. 0, p. 443 – 459, 1985.

119 AUTLER, S. H.; TOWNES, C. H. Stark effect in rapidly varying fields. *Physical Review*, v. 100, n. 2, p. 703–722, 1955.

120 MARTINEZ, D. F. Floquet–Green function formalism for harmonically driven hamiltonians. *Journal of Physics A: mathematical and general*, v. 36, n. 38, p. 9827, 2003.

121 SCZANIECKI, L. Effective hamiltonians, two-level systems, and generalized Maxwell–Bloch equations. *Physical Review A*, v. 28, n. 6, p. 3493–3514, 1983.

122 STEGEMAN, G. *Nonlinear optics: phenomena, materials and devices*. New York: [s.n.], 2012. (Wiley Series in Pure and Applied Optics). ISBN 9781118266120.

123 BRION, E.; PEDERSEN, L. H.; MØLMER, K. Adiabatic elimination in a lambda system. *Journal of Physics A: mathematical and theoretical*, v. 40, n. 5, p. 1033, 2007.

124 MARICQ, M. M. Application of average hamiltonian theory to the NMR of solids. *Physical Review B*, v. 25, n. 11, p. 6622–6632, 1982.

125 ZHENG, S.-B.; GUO, G.-C. Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in cavity QED. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 11, p. 2392–2395, 2000.

126 WALLS, D.; MILBURN, G. *Quantum optics*. [S.l.]: Springer, 2008. ISBN 9783540285731.

127 LIEB, E.; SCHULTZ, T.; MATTIS, D. Two soluble models of an antiferromagnetic chain. *Annals of Physics*, v. 16, n. 3, p. 407 – 466, 1961.

APÊNDICES

APÊNDICE A

REDE DE N OSCILADORES HARMÔNICOS DISSIPATIVOS

Pretendemos, nesta seção, estudar uma rede composta por N osciladores dissipativos e analisar a situação geral em que diferentes frequências de vibração (ω_i , $i = 1, \dots, N$) e parâmetros de acoplamento entre os osciladores (λ_{ij} , $i \neq j = 1, \dots, N$) são considerados. Estamos interessados em analisar o que ocorre com a dinâmica de estados dos N osciladores quando consideramos que estes estão interagindo entre si com diferentes frequências e cada um com um diferente reservatório, de modo a termos o seguinte Hamiltoniano³⁴

$$H = H_0 + H_B + H_I \quad (\text{A.1})$$

onde

$$H_0 = \hbar \sum_{m=1}^N \omega_m a_m^\dagger a_m + \hbar \sum_{\substack{m,n=1 \\ n \neq m}}^N \lambda_{mn} (a_n^\dagger a_m + a_m^\dagger a_n) \quad (\text{A.2})$$

$$H_B = \hbar \sum_{m=1}^N \sum_k \omega_{mk} b_{mk}^\dagger b_{mk} \quad (\text{A.3})$$

$$H_I = \hbar \sum_{m=1}^N \sum_k V_{mk} (b_{mk}^\dagger a_m + a_m^\dagger b_{mk}) \quad (\text{A.4})$$

com $a_m^\dagger$ e a_m , sendo respectivamente, os operadores de criação e destruição dos osciladores ao passo que $b_{mk}^\dagger$ e b_{mk} representam os operadores análogos para o k-ésimo modo do reservatório associado ao m-ésimo oscilador do sistema, cuja frequência e intensidade de acoplamento correspondente são ω_{mk} e V_{mk} , respectivamente.

Diagonalizamos o Hamiltoniano H_0 através da transformação

$$A_m = \sum_{n=1}^N C_{mn} a_n, \quad (\text{A.5})$$

que podemos escrever na forma matricial

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

onde

$$\vartheta_k = [C_{k1} \quad C_{k2} \quad \cdots \quad C_{kN}] \quad (\text{A.7})$$

é o k-ésimo autovetor associado ao autovalor R_k da matriz

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{12} & \omega_2 & \cdots & \lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1N} & \lambda_{2N} & \cdots & \omega_N \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Esta matriz contém toda a informação referente à topologia da rede. Podemos, com as transformações acima, reescrever o Hamiltoniano na forma diagonalizada $H = H_0 + H_I$, onde

$$H_0 = \hbar \sum_{m=1}^N R_m A_m^\dagger A_m + \hbar \sum_{m=1}^N \sum_k \omega_{mk} b_{mk}^\dagger b_{mk}, \quad (\text{A.9})$$

$$H_I = \hbar \sum_{m,n=1}^N \sum_k C_{mn}^{-1} V_{mk} (b_{mk}^\dagger A_n + A_n^\dagger b_{mk}), \quad (\text{A.10})$$

lembrando que

$$a_m = \sum C_{mn}^{-1} A_n \quad (\text{A.11})$$

a matriz C_{mn}^{-1} é a matriz inversa de C_{mn} . Pelo Hamiltoniano da Eq.(A.9), fica claro que os novos operadores A_m representam osciladores desacoplados que interagem, todavia, com os N reservatórios. Sem o acoplamento direto entre os osciladores, torna-se mais simples derivar a equação para a evolução da matriz densidade dos N osciladores acoplados, $\rho_{1,\dots,N}(t)$. Na representação de interação, onde fazemos a transformação $U(t) = \exp(\frac{-i}{\hbar} H_0 t)$, obtemos

$$\begin{aligned} V(t) = U^\dagger(t) H_I U(t) &= \hbar \sum_{m,n=1}^N \sum_k C_{mn}^{-1} V_{mk} \{ (b_{mk}^\dagger A_n \exp[i(\omega_{mk} - R_n)t] \\ &+ (b_{mk} A_n^\dagger \exp[-i(\omega_{mk} - R_n)t] \}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Defenindo

$$\Gamma_{mn}(t) = C_{mn}^{-1} \sum_k C_{mn}^{-1} V_{mk} \{ (b_{mk}^\dagger \exp[i(\omega_{mk} - R_n)t], \quad (\text{A.13})$$

podemos assim reescrever $V(t)$ na forma

$$V(t) = \hbar \sum_{m,n=1}^N (\Gamma_{mn}^\dagger(t) A_n + \Gamma_{mn}(t) A_n^\dagger). \quad (\text{A.14})$$

Assumindo que V_{mk} é fraco suficiente para podermos efetuar cálculos perturbativos, obtemos

$$\frac{d\rho_{1,\dots,N}^{int}(t)}{dt} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_B [V(t), [V(t'), \rho_B^{int} \otimes \rho_{1,\dots,N}^{int}(t)]] \quad (\text{A.15})$$

As integrais que aparecem na equação acima, relacionam-se as funções de correlação da forma

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt' \left\langle \Gamma_{mn}(t) \Gamma_{m'n'}^\dagger(t') \right\rangle \\ &= \sum_{k,k'} dt' V_{mk} V_{m'k'} \left\langle b_{mk} b_{m'k'}^\dagger \right\rangle \exp\{i[(\omega_{mk} - R_n)t - (\omega_{m'k'} - R_{n'})t']\}. \end{aligned}$$

Assumindo que o espaçamento entre as frequências do reservatório é suficientemente pequeno de forma a permitir uma soma contínua e definindo a função $\mathbf{N}_n(\omega_{mk})$ como

$$\left\langle b_{mk} b_{m'k'}^\dagger \right\rangle = 2\pi \mathbf{N}_n(\omega_{mk}) \delta(\omega_{mk} - \omega_{m'k'}), \quad (\text{A.16})$$

podemos após alguma algebra obter a equação mestra para o sistema de N osciladores na representação de Schrodinger

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{1,\dots,N}(t)}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\rho_{1,\dots,N}(t), H_0] \\ &+ \frac{N}{2} \sum_{m,n=1}^N \sum_q C_{mn}^{-1} C_{qn} \gamma_m(R_q) \mathbf{N}_n(R_q) ([a_n^\dagger \rho_{1,\dots,N}(t), a_m] + [a_m^\dagger \rho_{1,\dots,N}(t), a_n]) \\ &+ \frac{N}{2} \sum_{m,n=1}^N \sum_q C_{mn}^{-1} C_{qn} \gamma_m(R_q) (\mathbf{N}_n(R_q) + 1) ([a_n \rho_{1,\dots,N}(t), a_m^\dagger] + [a_m \rho_{1,\dots,N}(t), a_n^\dagger]). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Para um banho térmico em zero absoluto ($\mathbf{N}_m(R_n) = 0$), e definindo a constante de relaxação $\Gamma_{mn} = N \sum_q C_{mn}^{-1} \gamma_m(R_q) C_{qn}$, obtemos finalmente

$$\frac{d\rho_{1,\dots,N}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\rho_{1,\dots,N}(t), H_0] + \sum_{m,n=1}^N \frac{\Gamma_{mn}}{2} ([a_n \rho_{1,\dots,N}(t), a_m^\dagger] + [a_m \rho_{1,\dots,N}(t), a_n^\dagger]).$$

A solução da equação mestra, pode ser encontrada através da função P de Glauber-Surdarshan, de forma a obtermos uma equação diferencial para esta função. A equação

de Fokker-Planck associada a equação mestra acima é

$$\begin{aligned} \frac{dP_{1,\dots,N}(\{\eta_p\}, t)}{dt} = & \sum_{m=1}^N \left\{ \Gamma_{mn} + \left[\left(\frac{\Gamma_{mn}}{2} + i\omega_m \right) \eta_m + \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq n}}^N \left(\frac{\Gamma_{mn}}{2} + i\lambda_{mn} \right) \eta_n \right] \frac{\partial}{\partial \eta_m} \right. \\ & \left. + \left[\left(\frac{\Gamma_{mn}}{2} - i\omega_m \right) \eta_m^* + \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq n}}^N \left(\frac{\Gamma_{mn}}{2} - i\lambda_{mn} \right) \eta_n^* \right] \frac{\partial}{\partial \eta_m^*} \right\} P_{1,\dots,N}(\{\eta_p\}, t) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Onde definimos os parâmetros

$$B_{mm} = \frac{\Gamma_{mm}}{2} + i\omega_m \quad \text{e} \quad B_{mn} = \frac{\Gamma_{mn}}{2} + i\lambda_{mn}, \quad (\text{A.19})$$

e efetuamos a seguinte transformação

$$P_{1\dots N}(\{\eta_p\}, t) = \tilde{P}_{1\dots N}(\{\eta_p\}, t) \exp \left(\sum_{m=1}^N \Gamma_{mn} t \right), \quad (\text{A.20})$$

obtemos assim, uma equação simplificada

$$\frac{d\tilde{P}_{1\dots N}(\{\eta_p\}, t)}{dt} = \sum_{m=1}^N \left[\left(\sum_{n=1}^N B_{mn} \eta_n \right) \frac{\partial}{\partial \eta_m} + H.c. \right] \tilde{P}_{1\dots N}(\{\eta_p\}, t). \quad (\text{A.21})$$

Considerarmos também, que a função $\tilde{P}_{1\dots N}(\{\eta_p\}, t) \equiv \tilde{P}_{1\dots N}(\{\eta_p(t)\})$. Notamos que os coeficientes (A.19) devem satisfazer a

$$\frac{\partial \eta_m(t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^N B_{mn} \eta_n, \quad (\text{A.22})$$

que pode ser escrita matricialmente, na forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \vdots \\ \eta_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & \cdots & B_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \vdots \\ \eta_N(t) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.23})$$

Podemos diagonalizar a matriz acima a partir da transformação

$$\tilde{\eta}_m(t) = \sum_{n=1}^N D_{mn}^{-1} \eta_m(t), \quad (\text{A.24})$$

onde D_{mn} são os coeficientes dos autovetores que diagonalizam $\hat{B}$ de forma a obtermos

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1(t) \\ \tilde{\eta}_2(t) \\ \vdots \\ \tilde{\eta}_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Omega_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1(t) \\ \tilde{\eta}_2(t) \\ \vdots \\ \tilde{\eta}_N(t) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.25})$$

e a solução da forma exponencial

$$\tilde{\eta}_m(t) = A_m \exp(\Omega_m t), \quad (\text{A.26})$$

e portanto a solução para o parâmetros $\eta_m(t)$

$$\eta_m(t) = \sum_{n=1}^N D_{mn} \tilde{\eta}_n(t) = \sum_{n=1}^N D_{mn} A_n \exp(\Omega_n t) \quad (\text{A.27})$$

Considerando que, para $t = 0$, a condição inicial seja tal que $\eta_m(0) \equiv \eta_m^0$, então podemos escrever

$$\sum_{n=1}^N D_{mn} A_n = \eta_m^0, \quad (\text{A.28})$$

e obter

$$A_n = \sum_{q=1}^N D_{qn}^{-1} \eta_q^0. \quad (\text{A.29})$$

Finalmente, encontramos a solução para $\eta_m(t)$ e consequentemente, para a função P de Glauber que se escreve como

$$\eta_m(t) = \sum_{n,q=1}^N D_{mn} \exp(\Omega_n t) D_{qn}^{-1} \eta_q^0, \quad (\text{A.30})$$

$$P_{1\dots N}(\{\eta_p\}, t) = \exp \left(\sum_{m=1}^N \Gamma_{mn} t \right) P_{1\dots N}(\{\eta_p\}, t=0) |_{\{\eta_p\} \Rightarrow \{\eta_p(t)\}} \quad (\text{A.31})$$

Utilizando a solução acima podemos calcular o operador densidade para um dado estado da rede.

Vamos considerar que, inicialmente, o estado inicial do sistema de N osciladores seja uma superposição geral de estados coerentes, com a seguinte forma

$$|\Psi(0)\rangle = \mathcal{N} \sum_s \exp(i\phi_s) |\{\beta_m^s\}\rangle \quad (\text{A.32})$$

de forma a obtermos o operador densidade para a rede em $t = 0$

$$\rho_{1,\dots,N}(t) = \mathcal{N}^2 \sum_{s,r} \exp[i(\phi_s - \phi_r)] |\{\beta_m^s\}\rangle \langle \{\beta_m^r\}| \quad (\text{A.33})$$

e portanto, podemos encontrar a função característica em $t = 0$, que escreve como

$$\begin{aligned} \chi_{1,\dots,N}(\{\xi_p\}, 0) &= Tr \left\{ \rho_{1,\dots,N}(0) \exp \left(\sum_{m=1}^N \xi_m a_m^\dagger \right) \exp \left(- \sum_{m=1}^N \xi_m a_m^\dagger \right) \right\} \\ &= \mathcal{N}^2 \sum_{s,r} \exp \left[i(\phi_s - \phi_r) + \sum_{m=1}^N [\xi_m \beta_m^{r*} - \xi_m^* \beta_m^s] \right] |\{\beta_m^s\}\rangle \langle \{\beta_m^r\}| \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Obtemos a P de Glauber em $t = 0$, utilizando a função característica acima

$$\begin{aligned} P_{1\dots N}(\{\eta_p\}, t=0) &= \left(\prod_{m=1}^N \int \frac{d^2 \xi_m}{\pi^2} \exp([\eta_m \xi_m^* - \eta_m^* \xi_m]) \right) \chi_{1,\dots,N}(\{\xi_p\}, 0) \\ &= \mathcal{N}^2 \sum_{s,r} \exp[i(\phi_s - \phi_r)] |\{\beta_m^s\}\rangle \langle \{\beta_m^r\}| \\ &\quad \times \prod_{m=1}^N \int \frac{d^2 \xi_m}{\pi^2} \exp([\xi_m (\beta_m^{r*} - \eta_m^*) - \xi_m^* (\beta_m^s - \eta_m)]) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Substituindo na relação(A.31), obtemos a função P de Glauber para qualquer tempo

t

$$P_{1\dots N}(\{\eta_p\}, t) = \exp\left(\sum_{m=1}^N \Gamma_{mn} t\right) \mathcal{N}^2 \sum_{s,r} \exp[i(\phi_s - \phi_r)] |\{\beta_m^s\}\rangle \langle \{\beta_m^r\}| \\ \times \prod_{m=1}^N \int \frac{d^2 \xi_m}{\pi^2} \exp\left([\xi_m (\beta_m^{r*} - \eta_m^*(t)) - \xi_m^* (\beta_m^s - \eta_m(t))]\right) \quad (\text{A.36})$$

O operador densidade, para qualquer tempo t , que passa a se escrever como

$$\rho_{1,\dots,N}(t) = \left[\prod_{m=1}^N \int d^2 \eta_m^0 |\eta_m^0\rangle \langle \eta_m^0| \right] P_{1\dots N}(\{\eta_p\}, t) \\ = \exp\left(\sum_{m=1}^N \Gamma_{mn} t\right) \mathcal{N}^2 \sum_{s,r} \exp[i(\phi_s - \phi_r)] |\{\beta_m^s\}\rangle \langle \{\beta_m^r\}| \\ \times \prod_{m=1}^N \int \frac{d^2 \xi_m}{\pi^2} \int d^2 \eta_m^0 |\eta_m^0\rangle \langle \eta_m^0| \exp\left([\xi_m (\beta_m^{r*} - \eta_m^*(t)) - \xi_m^* (\beta_m^s - \eta_m(t))]\right), \quad (\text{A.37})$$

onde

$$\eta_m(t) = \sum_{q=1}^N \Theta_{mq}(t) \eta_q^0, \quad (\text{A.38})$$

$\Theta_{mq}(t)$ é matriz que governa a evolução do estado

$$\Theta_{mq}(t) = \sum_{n,q=1}^N D_{mn} \exp(\Omega_n t) D_{qn}^{-1}. \quad (\text{A.39})$$

Defenindo a excitação do k -ésimo oscilador como

$$\zeta_m^{s,r} = \sum_{q=1}^N \Theta_{mq}^{-1}(t) \beta_q^{r,s}, \quad (\text{A.40})$$

e efetuando um pouco de algebra, obtemos uma forma compacta para operador densidade da rede

$$\rho_{1,\dots,N}(t) = \mathcal{N}^2 \sum_{s,r} \exp[i(\phi_s - \phi_r)] \frac{\langle \{\beta_m^r\} | \{\beta_m^s\} \rangle}{\langle \{\zeta_m^s\} | \{\zeta_m^r\} \rangle} |\{\zeta_m^s\}\rangle \langle \{\zeta_m^r\}|. \quad (\text{A.41})$$

APÊNDICE B

CAVIDADES ACOPLADAS

B.1 Cristais fotônicos¹

Ondas em meios estratificados ou com perturbações periódicas sofrem múltiplos espalhamentos quando seu comprimento de onda é comparável ao período destas perturbações. Por exemplo, elétrons – ou ondas eletrônicas – que se propagam num cristal sofrem espalhamentos múltiplos nos átomos da rede, distribuídos periodicamente no espaço. Em determinadas condições, as ondas espalhadas podem interferir construtivamente na direção oposta à direção de propagação da onda, gerando uma onda estacionária. Nesta situação, a onda não pode se propagar através do cristal, resultando em frequências (energias) com propagação proibida. As energias eletrônicas permitidas formam, então, bandas separadas por gaps de estados de energia proibidos ou band gaps eletrônicos. Em analogia a elétrons num cristal, fótons – ou ondas eletromagnéticas – sofrem espalhamento múltiplo em uma estrutura dielétrica cujo índice de refração (ou constante dielétrica) é espacialmente modulado com período espacial comparável ao comprimento de onda da onda eletromagnética. Em algumas estruturas dielétricas com periodicidade tridimensional não há modos de propagação em nenhuma direção para um certo intervalo de frequências, dando origem a um ‘band gap fotônico’ completo. Estas estruturas consistem, por exemplo, de esferas dielétricas de alto índice de refração suspensas em um meio de baixo índice ou furos de ar em um meio dielétrico de alto índice de refração, com constantes de rede da ordem do comprimento de onda eletromagnético.

¹Seção baseada nas Refs.^{111,112}

Da mesma forma que band gaps eletrônicos estão relacionados a elétrons em um cristal, band gaps fotônicos estão relacionados a fótons em uma estrutura dielétrica periódica. Devido a essa analogia feita com elétrons em um cristal, essas estruturas dielétricas periódicas são chamadas de cristais fotônicos.

A teoria desenvolvida para os cristais fotônicos se baseia em alguns conceitos utilizados no caso eletrônico, como células unitárias, rede recíproca, zonas de Brillouin, relações de dispersão, gaps de energia, etc. Algumas comparações podem ser feitas: a função de onda eletrônica deve satisfazer a equação escalar de Schrödinger enquanto que a onda eletromagnética deve satisfazer as equações vetoriais de Maxwell; os campos são decompostos em modos harmônicos que oscilam com fator de fase $e^{i\omega t}$. No caso eletrônico, a função de onda $\Psi(r, t)$ é um campo escalar complexo. No caso dos fótons, o campo magnético $H(r, t)$ é um campo vetorial real e a exponencial uma conveniência matemática.

Em ambos casos, os modos do sistema são determinados por uma equação de autovalores cujos operadores são hermitianos. É por causa deste fato que os cálculos para o caso dos fótons são feitos utilizando-se o campo magnético – utilizando-se o campo elétrico da onda obtemos um operador não hermitiano. Além disso, ambos sistemas possuem simetria translacional – no caso eletrônico o potencial $V(r)$ é periódico, no caso eletromagnético a constante dielétrica $\varepsilon(r)$ é a que possui periodicidade. A tabela 1 mostra algumas dessas comparações entre elétrons numa rede cristalina e fótons em uma estrutura dielétrica periódica^{111,112}

Campo	$\Psi(r, t) = \Psi(r) e^{i\omega t}$	$H(r, t) = H(r) e^{i\omega t}$
Equação de Autovalores	$H\Psi = \hbar\omega\Psi$	$\Theta H = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 H$
Operador Hermitiano	$H = \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(r)$	$\Theta = \nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon(r)} \nabla \times \right)$
Simetria de translação	$V(r) = V(r + R)$	$\varepsilon(r) = \varepsilon(r + R)$
Relação de dispersão	$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$	$\omega = kv$

Tabela1: Os cristais fotônicos podem apresentar simetria uni, bi ou tridimensional.

Um cristal fotônico unidimensional tem periodicidade em uma única dimensão: consiste em camadas alternadas de materiais com diferentes constantes dielétricas. No entanto, este tipo de cristal pode apresentar a propriedade de gap fotônico (*Photonic Band Gap* –

Figura B.1 – Exemplos de cristais fotônicos uni, bi e tridimensional. As diferentes cores representam materiais com diferentes constantes dielétricas.

Figura B.2 – Distribuição dos modos nas cavidades acopladas em um cristal fotônico.

PBG) apenas para luz incidente atravessando perpendicularmente as múltiplas camadas periódicas – luz se propagando na direção z indicada na figura B.1 Um cristal fotônico bidimensional tem periodicidade em duas direções e é homogêneo na terceira. O cristal fotônico tridimensional é periódico nas três dimensões, este sim é o análogo a um cristal real, pois pode apresentar *PBG* para quaisquer direções de incidência da luz – gerando um band gap fotônico completo.

B.2 Descrição dos modos localizados de cristais fotônicos

As similaridades entre a equação de Schrödinger e as equações de Maxwell, permite que usemos muitos métodos desenvolvidos originalmente para sistemas eletrônicos nos

sistemas fotônicos. Por exemplo, o bem conhecido método Tight-binding (TB), que se provou muito útil no estudo de propriedades eletrônicas de sólidos. Implicações diretas do modelo TB mostram como é o mecanismo de propagação para os fótons através dos modos localizados das cavidades acopladas nos cristais fotônicos. Nestas estruturas, fótons podem saltar de um modo localizado para um modo localizado na cavidade vizinha, devido à interação que ocorre entre as ondas evanescentes figura (B.2).

Consideremos um unico modo localizado $E_{\Omega}(r)$ de uma unica cavidade que satisfaz

$$\nabla \times [\nabla \times E_{\Omega}(r)] = \epsilon_0(r) \left(\frac{\Omega}{c} \right)^2 E_{\Omega}(r), \quad (\text{B.1})$$

onde $\epsilon_0(r)$, Ω é a constante dielétrica e a frequência do modo de uma única cavidade. Consideramos que $E_{\Omega}(r)$ é real, não degenerado e ortonormal, ou seja,

$$\int dr \epsilon_0(r) E_{\Omega}(r) \cdot E_{\Omega}(r) = 1 \quad (\text{B.2})$$

Quando duas cavidades acopladas são consideradas, o modo será a superposição dos modos evanescentes de cada cavidade, Fig.(B.2)

$$E_{\omega}(r) = AE_{\Omega}(r) + BE_{\Omega}(r - \Lambda\hat{x}). \quad (\text{B.3})$$

O modo $E_{\omega}(r)$, satisfaz a Eq.(B.1), com constante dielétrica do sistema acoplado $\epsilon(r) = \epsilon(r - \Lambda\hat{x})$, e frequência ω .

Substituindo $E_{\omega}(r)$ na Eq.(B.1), e multiplicando ambos os lados da equação por $E_{\Omega}(r)$ e $E_{\Omega}(r - \Lambda\hat{x})$, e integrando a equação resultantes, obtemos os modos normais e suas frequências

$$E_{\omega 1,2}(r) = \frac{E_{\Omega}(r) \pm E_{\Omega}(r - \Lambda\hat{x})}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.4})$$

$$\omega_{1,2} = \Omega \sqrt{\frac{(1 \pm \beta)}{(1 \pm \alpha)}}, \quad (\text{B.5})$$

onde definimos os parâmetros do modelo TB

$$\alpha = \int dr \epsilon(r) E_{\Omega}(r) \cdot E_{\Omega}(r - \Lambda \hat{x}), \quad (\text{B.6})$$

$$\beta = \int dr \epsilon_0(r - \Lambda \hat{x}) E_{\Omega}(r) \cdot E_{\Omega}(r - \Lambda \hat{x}). \quad (\text{B.7})$$

Podemos estender o procedimento acima para o caso de tres cavidades acopladas, onde encontramos

$$E_{\Gamma_2}(r) = \frac{E_{\Omega}(r) \pm E_{\Omega}(r - 2\Lambda \hat{x})}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.8})$$

$$E_{\Gamma_{1,3}}(r) = \frac{E_{\Omega}(r) \pm \sqrt{2}E_{\Omega}(r - \Lambda \hat{x}) + E_{\Omega}(r - 2\Lambda \hat{x})}{2} \quad (\text{B.9})$$

$$\Gamma_2 = \Omega, \quad \Gamma_{1,3} = \Omega \sqrt{\frac{(1 \pm \sqrt{2}\beta)}{(1 \pm \sqrt{2}\alpha)}}, \quad (\text{B.10})$$

Para a determinação das equações acima, interações entre segundos-vizinhos não são consideradas.

Quando consideramos uma cadeia de cavidades acopladas fracamente por onda evanescentes, o automodo pode ser escrito como uma surperposição dos modos individuais de cada cavidade

$$E(r) = E_0 \sum_n e^{-ink\Lambda} E_{\Omega}(r - n\Lambda \hat{x}), \quad (\text{B.11})$$

onde n é o número de cavidades. A relação de dispersão pode ser obtida, da mesma forma que os casos de duas e tres cavidades e considerando apenas acoplamento entre primeiros-vizinhos, encontramos

$$\omega(k) = \Omega[1 + k \cos(k\Lambda)] . \quad (\text{B.12})$$

O parâmetro $k = \beta - \alpha$ pode ser determinado medindo se o alargamento entre os modos de duas cavidades acopladas e consequentemente os outros parâmetros do modelo.

Figura B.3 – Cadeia de cavidades acopladas. Acoplamento devido a ondas evanescentes (verde) dos modos das cavidades adjacentes.

B.3 Acoplamento entre Cavidades Ópticas

Iniciaremos considerando um sistema composto de duas cavidades ópticas acopladas, 1 e 2, está análise pode facilmente ser expandida para o caso mais geral de N cavidades acopladas. Supomos que o acoplamento entre as duas cavidades é dado pela sobreposição entre os campos das duas cavidades Fig.(B.3), uma vez que o acoplamento ocorre devido a distribuição espacial dos campos. Esta é uma boa aproximação quando as duas cavidades não estão fortemente acopladas, ou seja, para duas cavidades dielétricas bem separadas no espaço.

O potencial vetor que descreve esses campos é :

$$\hat{A}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\mathbf{a}_i + \mathbf{u}_i^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\mathbf{a}_i^\dagger, \quad (\text{B.13})$$

onde $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ é uma função vetorial que descreve a distribuição do campo no espaço, $\mathbf{r}$ é o vetor posição na cavidade e $\mathbf{r}_i$ é uma posição de referência nas cavidades 1 e 2 ($i = 1$ ou 2).

O Hamiltoniano de interação para o potencial vetor acima é

$$H_{12} = \hbar\lambda(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1^\dagger)(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2^\dagger), \quad (\text{B.14})$$

onde o parâmetro de acoplamento $\lambda = \lambda(r_1, r_2)$, que tem dimensão de frequência é proporcional ao overlap das ondas evanescentes dos modos:

$$\lambda \propto \int \mathbf{u}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{u}_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) d\mathbf{r} \quad (\text{B.15})$$

Assim podemos escrever o Hamiltoniano total do sistema como

$$H_T = \hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega_2 a_2^\dagger a_2 + \hbar\lambda(a_1 + a_1^\dagger)(a_2 + a_2^\dagger), \quad (\text{B.16})$$

Nota-se que o Hamiltoniano deste sistema de cavidades acopladas é idêntico ao Hamiltoniano de um sistema unidimensional de dois osciladores harmônicos quânticos acoplados, devemos enfatizar que essa Hamiltoniano descreve o acoplamento entre as cavidades por ondas evanescentes. Os efeitos de perda e decoerência nas redes de cavidades acopladas será determinada a partir da solução geral do caso de N osciladores harmônicos quânticos acoplados dissipativos.³⁴

APÊNDICE C

POLÁRITONS

O termo poláriton tem sido aplicado por diversos autores com diferentes significados.¹¹³ Em um sólido existem diferentes excitações elementares como fônons, éxcitons, plasmons, polarons, etc. Em primeira aproximação tais excitações são representadas por vibrações harmônicas de partículas carregadas que, dependendo da simetria da vibração, portam ou não momento de dipolo macroscópico.

A energia associada a uma destas excitações portadora de dipolo é, portanto, parcialmente mecânica e parcialmente radiativa, mostrando caráter intermediário entre fóton e excitação polar no limite mecânico. Assim, a energia radiativa toma parte na constituição da onda ótica, não havendo efeitos de amortecimento da radiação emitida pelas partículas do cristal.

É possível discutir o atual problema em termos de acoplamento entre as soluções dos problemas mecânicos e eletromagnéticos puros, ganhando-se com isto uma indicação da dosagem dos dois tipos de energia que competem entre si. Nestes termos, como o sistema é dinâmico, é necessário que as duas contribuições evoluam temporalmente da mesma forma para manter o acoplamento. Isto somente ocorre perto do centro da primeira zona de Brillouin onde a excitação mecânica (e.g. fônons) tem velocidade de fase comparável à velocidade de fase da radiação. Neste caso tais componentes perdem sua individualidades, dando origem a um novo observável, isto é, a um poláriton. Os poláritons formados em matéria condensada, no caso de cavidades semicondutoras, apresentam forte acoplamento entre éxcitons e os fótons presentes nas cavidades é devido o caráter bosônico desse tipo de poláritons. Produção de luz laser¹¹⁴ e de condensados de Bose-Einstein¹¹⁵ foram

Figura C.1 – Representação esquemática da configuração atômica de um átomo de quatro níveis.

investigadas neste sistema. Em ótica quântica o regime de acoplamento forte e fabricação de cavidades dopadas com alto fator de qualidade são conquistas relativamente recente comparadas o estado da arte na área de semicondutores. Quando o acoplamento átomo campo é forte, o comportamento exibido pelo sistema não pode ser explicado, através das propriedades individuais de seus constituintes. E a base natural para analisar o sistema é a base diagonal do sistema, ou seja, a base de polártons. Esse formalismo foi primeiro aplicado ao estudo da Superfluorescência por Cohen¹¹⁶ onde este usa o termo “*Dressed Base*”. Embora, nesta seção tratemos uma particular configuração atômica, o formalismo empregado é geral.

A configuração atômica é mostrado na Fig.(C.1). O átomo é acoplado com apenas um único modo e é bombeado com um campo laser. Este sistema apresenta, um alto grau de não-linearidade Kerr⁸⁴ e bloqueio de fótons³⁹ pode ser obtido neste sistema. Esta seção é baseada na referência.⁸⁵

C.1 Base Nua

O átomo é acoplado com apenas um único modo e é bombeado com um campo laser. O Hamiltoniano que descreve este sistema sob aproximação de onda girante e de dipolo elétrico é $H_T = H_0 + H_I$, onde

$$H_0 = \hbar\omega_{cav}a^\dagger a + \hbar(\omega_{cav} + \delta)\sigma_{33} + \hbar(\omega_{cav} - \omega_c)\sigma_{22} + \hbar(2\omega_{cav} + \Delta - \omega_c)\sigma_{44}, \quad (C.1)$$

$$H_I = \hbar g_1(a^\dagger\sigma_{13} + a\sigma_{31}) + \hbar g_2(a^\dagger\sigma_{24} + a\sigma_{42}) + \hbar\Omega_c(\sigma_{23} + \sigma_{32}). \quad (C.2)$$

Na representação de interação aplicamos a transformação unitária

$U(t) = \exp(-i(\hbar\delta\sigma_{33} + \hbar\Delta\sigma_{44})t)$, para eliminar a temporalidade do Hamiltoniano. Obtendo assim

$$H = \hbar\delta\sigma_{33} + \hbar\Delta\sigma_{44} + \hbar g_1(a^\dagger\sigma_{13} + a\sigma_{31}) + \hbar g_2(a^\dagger\sigma_{24} + a\sigma_{42}) + \hbar\Omega_c(\sigma_{23} + \sigma_{32}) \quad (C.3)$$

Na base "nua" $\{|1, n\rangle, |2, n-1\rangle, |3, n-1\rangle, |4, n-2\rangle\}$ onde o Hamiltoniano acima é bloco diagonal e pode ser escrito como soma direta $H = H^0 \oplus H^{(1)} \oplus H^{(2)} \dots \oplus H^{(n)}$, o índice n está relacionado ao numero de excitações que gera seu proprio *Manifold* (variedade ou subespaço vetorial)¹.

$$H = \begin{pmatrix} H^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H^{(2)} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H^{(n)} \end{pmatrix}$$

C.1.1 0-Manifold $\{|1, 0\rangle\}$

O estado de zero excitações tem o seguinte Hamiltoniano, autoestados e energia.

¹A notação adota para os vetores da base é $|\text{átomo}, \text{campo}\rangle$. A estrutura bloco diagonal que leva ao surgimento de manifolds esta também presente no Hamiltoniano de Jaynnes-Cummings, que no regime de acoplamento forte leva estes sistemas apresentar "*photon blockage*".

$$\begin{aligned}
H^{(0)} &= |1, 0\rangle \langle 1, 0|, \\
|e_0^{(0)}\rangle &= |1, 0\rangle \leftrightarrow \epsilon^{(0)} = 0.
\end{aligned} \tag{C.4}$$

C.1.2 1-Manifold $\{|1, 1\rangle, |2, 0\rangle, |3, 0\rangle\}$

$$H^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \hbar g_1 & 0 \\ \hbar g_1 & \hbar \delta & \hbar \Omega_c \\ 0 & \hbar \Omega_c & 0 \end{pmatrix} \tag{C.5}$$

autovetores $\leftrightarrow$ autovalores:

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{\Omega_c} g_1 \\ \frac{1}{2\Omega_c} \left(\delta - \sqrt{\delta^2 + 4\Omega_c^2 + 4g_1^2} \right) \\ 1 \end{array} \right\} &\leftrightarrow \frac{1}{2} \delta \hbar - \frac{1}{2} \hbar \sqrt{\delta^2 + 4\Omega_c^2 + 4g_1^2}, \\
\left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{\Omega_c} g_1 \\ \frac{1}{2\Omega_c} \left(\delta + \sqrt{\delta^2 + 4\Omega_c^2 + 4g_1^2} \right) \\ 1 \end{array} \right\} &\leftrightarrow \frac{1}{2} \hbar \sqrt{\delta^2 + 4\Omega_c^2 + 4g_1^2} + \frac{1}{2} \delta \hbar, \\
\left\{ \begin{array}{c} -\frac{\Omega_c}{g_1} \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\} &\leftrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Na presença de uma excitação temos 3 possíveis auto estados para o sistema. Normalizando encontramos

$$|e_0^{(1)}\rangle = \alpha_0^{(1)} |1, 1\rangle + \mu_0^{(1)} |3, 0\rangle \leftrightarrow \epsilon_0^{(1)} = 0 \quad \text{"estado escuro"} \tag{C.6}$$

$$|e_{\pm}^{(1)}\rangle = \alpha_{\pm}^{(1)} |1, 1\rangle + \beta_{\pm}^{(1)} |2, 0\rangle + \mu_{\pm}^{(1)} |3, 0\rangle \leftrightarrow \epsilon_{\pm}^{(1)} = \frac{1}{2} \delta \hbar \pm \frac{1}{2} \hbar \sqrt{\delta^2 + 4\Omega_c^2 + 4g_1^2}, \tag{C.7}$$

com os coeficientes dados por:

$$\alpha_0^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (g_1/\Omega_c)^2}}, \quad \mu_0^{(1)} = \frac{g_1/\Omega_c}{\sqrt{1 + (g_1/\Omega_c)^2}}. \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm}^{(1)} &= \frac{g_1/\Omega_c}{\sqrt{1 + (\epsilon_{\pm}^{(1)}/\Omega_c)^2 + (g_1/\Omega_c)^2}}, \\ \beta_{\pm}^{(1)} &= \frac{\epsilon_{\pm}^{(1)}/\Omega_c}{\sqrt{1 + (\epsilon_{\pm}^{(1)}/\Omega_c)^2 + (g_1/\Omega_c)^2}}, \\ \mu_{\pm}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\epsilon_{\pm}^{(1)}/\Omega_c)^2 + (g_1/\Omega_c)^2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

O estado $|e_0^{(1)}\rangle$ é ressonante com o modo da cavidade, e é onde o efeito da transparência eletromagneticamente induzida se manifesta.

C.1.3 n -Manifold $\{|1, n\rangle, |2, n-1\rangle, |3, n-1\rangle, |4, n-2\rangle\}$

Para o n -manifold ($n \geq 2$), existem 4 autoestados que são determinados pela diagonalização da matriz

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\sqrt{n}g_1 & 0 & 0 \\ \hbar\sqrt{n}g_1 & \hbar\delta & \hbar\Omega_c & 0 \\ 0 & \hbar\Omega_c & 0 & \hbar\sqrt{n}g_2 \\ 0 & 0 & \hbar\sqrt{n}g_2 & \hbar\Delta \end{pmatrix}$$

$$|e_k^{(n)}\rangle = \alpha_k^{(n)} |1, n\rangle + \beta_k^{(n)} |2, n-1\rangle + \mu_k^{(n)} |3, n-1\rangle + \nu_k^{(n)} |4, n-2\rangle, \quad (\text{C.10})$$

onde os coeficientes normalizados $(\alpha_k^{(n)}, \beta_k^{(n)}, \mu_k^{(n)}, \nu_k^{(n)})$ dados em termos das energias $\epsilon_k^{(n)}$ são

$$\alpha_k^{(n)} = \frac{\hbar g_1 g_2}{\Omega_c \epsilon_k^{(n)}} \left(1 - \frac{\epsilon_k^{(n)} (\epsilon_k^{(n)} - \hbar \Delta)}{(\hbar g_2)^2} \right) v_k^{(n)}, \quad (\text{C.11})$$

$$\beta_k^{(n)} = \frac{g_2}{\Omega_c} \left(1 - \frac{\epsilon_k^{(n)} (\epsilon_k^{(n)} - \hbar \Delta)}{(\hbar g_2)^2} \right) v_k^{(n)}, \quad (\text{C.12})$$

$$\mu_k^{(n)} = \frac{\epsilon_k^{(n)} - \hbar \Delta}{\hbar g_2} v_k^{(n)}, \quad (\text{C.13})$$

$$v_k^{(n)} = \left\{ 1 + \left(\frac{\epsilon_k^{(n)} - \hbar \Delta}{\hbar g_2} \right)^2 + \left(\frac{g_2}{\Omega_c} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\hbar g_1}{\Omega_c} \right)^2 \times \left(1 - \frac{\epsilon_k^{(n)} (\epsilon_k^{(n)} - \hbar \Delta)}{(\hbar g_2)^2} \right)^2 \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{C.14})$$

C.2 Hamiltoniano diagonal: Base de poláritons

Definindo os operadores de poláritons $p_{ij}^{(n)} = |e_i^{(n-1)}\rangle \langle e_j^{(n)}|$, podemos escrever o Hamiltoniano Eq.(C.3), na forma diagonal

$$H = \hbar \epsilon_+^{(1)} p_+^{(1)\dagger} p_+^{(1)} + \hbar \epsilon_-^{(1)} p_-^{(1)\dagger} p_-^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^4 \hbar \epsilon_k^{(n)} p_k^{(n)\dagger} p_k^{(n)}. \quad (\text{C.15})$$

Os operadores do 1-manifold podem ser escritos facilmente em termos dos operadores do átomo e do campo

$$p_0^{(1)\dagger} = |e_0^{(1)}\rangle \langle e_0^{(0)}| = \frac{a^\dagger + (g_1/\Omega_c)\sigma_{31}}{\sqrt{1 + (g_1/\Omega_c)^2}}, \quad (\text{C.16})$$

$$p_\pm^{(1)\dagger} = |e_\pm^{(1)}\rangle \langle e_0^{(0)}| = \frac{(g_1/\Omega_c)a^\dagger + (\epsilon_\pm^{(1)}/\Omega_c)\sigma_{21} + \sigma_{31}}{\sqrt{1 + (\epsilon_\pm^{(1)}/\Omega_c)^2 + (g_1/\Omega_c)^2}}. \quad (\text{C.17})$$

A estrutura energetica obtido é mostrado na Fig.(C.2), onde notamos que apenas o estado fundamental $|e_0^{(0)}\rangle$ e o estado $|e_0^{(1)}\rangle$ são degenerados.

Podemos definir dois limites onde os poláritons se comportam como bóson ou férmions de acordo com a razão $\frac{g_1}{\Omega_c}$.

Figura C.2 – Representação esquemática dos estados, para o estado fundamental, primeiro e segundo manifolds.

$$\begin{aligned} \left[p_0^{(1)}, p_0^{(1)\dagger} \right] &= \frac{1 - (g_1/\Omega_c)(\sigma_{33} - \sigma_{11})}{1 + (g_1/\Omega_c)^2}, \\ \left[p_{\pm}^{(1)}, p_{\pm}^{(1)\dagger} \right] &= \frac{(g_1/\Omega_c)^2 + (\epsilon_{\pm}^{(1)}/\hbar\Omega_c)^2(\sigma_{22} - \sigma_{11}) - (\sigma_{33} - \sigma_{11})}{1 + (g_1/\Omega_c)^2 + (\epsilon_{\pm}^{(1)}/\hbar\Omega_c)^2}. \end{aligned} \quad (C.18)$$

Quando $\frac{g_1}{\Omega_c} \ll 1$, o poláriton $p_0^{(1)}$, e seu autoestado $|e_0^{(1)}\rangle$, tem contribuição essencialmente fotônica, enquanto os poláritons $p_{\pm}^{(1)}$ tem a contribuição atômica como dominante. A situação oposta ocorre no regime $\frac{\Omega_c}{g_1} \ll 1$. A região $\frac{g_1}{\Omega_c} \sim 1$, temos as componentes fotônicas e atômicas contribuindo igualmente e uma estatística indefinida para os poláritons.

Um caso interessante ocorre quando temos N átomos interagindo igualmente com o modo, estados de Dicke, que tem a excitação atômica distribuída entre todos os átomos, e no limite de $N \gg 1$ os poláritons satisfazem relações de comutação bosônicas.

Termos não diagonais, como campos externos e efeitos de perda, podem ser escritos na base de poláritons. Devido à diferente estrutura entre o primeiro manifold e os manifolds de ordem superior, teremos duas diferentes transformações.

Para o primeiro manifold os estados vestidos se relacionam com os estados nus através de $\mathbf{b}_1 = M_1 \mathbf{d}_1$, onde $\mathbf{b}_1 = \left(|1, 1\rangle \quad |0, 2\rangle \quad |0, 3\rangle \right)^T$ e $\mathbf{d}_1 = \left(|e_-^{(1)}\rangle \quad |e_0^{(1)}\rangle \quad |e_+^{(1)}\rangle \right)^T$, com a

matriz de mudança de base

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{g_1/\Omega_c}{N_-} & \frac{1}{N_0} & -\frac{(g_1/\Omega_c)}{N_+} \\ i\frac{\epsilon_-^{(1)}/\Omega_c}{N_-} & 0 & i\frac{\epsilon_+^{(1)}/\Omega_c}{N_+} \\ \frac{1}{N_-} & \frac{g_1/\Omega_c}{N_0} & \frac{1}{N_+} \end{pmatrix}, \quad (C.19)$$

com

$$N_0 = \sqrt{1 + (g_1/\Omega_c)^2},$$

$$N_{\pm} = \sqrt{1 + (\epsilon_{\pm}^{(1)}/\Omega_c)^2 + (g_1/\Omega_c)^2}.$$

Da mesma maneira podemos relacionar as duas bases para os manifolds de ordem superior $\mathbf{b}_n = M_n \mathbf{d}_n$, $n \geq 2$, onde

$$\mathbf{b}_n = \left(|n, 1\rangle \quad |n-1, 2\rangle \quad |n-1, 3\rangle \quad |n-2, 4\rangle \right)^T \quad (C.20)$$

$$\mathbf{d}_1 = \left(|e_1^{(n)}\rangle \quad |e_2^{(n)}\rangle \quad |e_3^{(n)}\rangle \quad |e_4^{(n)}\rangle \right)^T, \quad (C.21)$$

com a matriz de mudança de base

$$M_n = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(n)*} & \alpha_2^{(n)} & \alpha_3^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \\ \beta_1^{(n)*} & \beta_2^{(n)*} & \beta_3^{(n)*} & \beta_4^{(n)*} \\ \mu_1^{(n)*} & \mu_2^{(n)*} & \mu_3^{(n)*} & \mu_4^{(n)*} \\ \nu_1^{(n)*} & \nu_2^{(n)*} & \nu_3^{(n)*} & \nu_4^{(n)*} \end{pmatrix}, \quad (C.22)$$

com os coeficientes dados pelas Eqs(C.11-C.14).

Assim se consideramos a ação de um campo laser, dado pelo Hamiltoniano

$$H_L = i\hbar\mathcal{E}_p(a - a^\dagger), \quad (C.23)$$

onde $\mathcal{E}_p$ é a frequência de Rabi do campo externo e a é o operador de aniquilação, que devemos expressar em termos da base de polárítos, para isso escrevemos a em termos das transições que produz entre manifolds adjacentes. Uma desexcitação do manifold n para o manifold $n-1$, ocorre via o operador $a^{(n)}$, onde temos $a = \sum_{n=1}^{\infty} a^{(n)}$, que pode ser expresso em termo da base nua

$$a^{(1)} = |0, 1\rangle \langle 1, 1|, \quad (C.24)$$

$$a^{(2)} = \sqrt{2} |1, 1\rangle \langle 2, 1| + |0, 2\rangle \langle 1, 2| + |0, 3\rangle \langle 1, 3|, \quad (C.25)$$

$$a^{(n)} = \sqrt{n} |n-1, 1\rangle \langle n, 1| + \sqrt{n-1} |n-2, 2\rangle \langle n-1, 2| + \sqrt{n-1} |n-2, 3\rangle \langle n-1, 3| \\ + \sqrt{n-2} |n-3, 4\rangle \langle n-2, 4|. \quad (C.26)$$

Para a transição do primeiro estado excitado para o estado fundamental, utilizando a matriz transformação de base Eq.(C.19), obtemos

$$\mathcal{E}_p a^{(1)} = \Omega_-^{(1,0)} p_-^{(1)} + \Omega_0^{(1,0)} p_0^{(1)} + \Omega_+^{(1,0)} p_+^{(1)}, \quad (C.27)$$

com as frequências de Rabi efetivas

$$\Omega_0^{(1,0)} = \frac{\mathcal{E}_p}{\sqrt{1 + (g_1/\Omega_c)^2}}, \quad (C.28)$$

$$\Omega_{\pm}^{(1,0)} = -\frac{\mathcal{E}_p g_1}{\sqrt{1 + (\epsilon_{\pm}^{(1)}/\Omega_c)^2 + (g_1/\Omega_c)^2}}. \quad (C.29)$$

O sinal negativo em $\Omega_{\pm}^{(1,0)}$, mostra que os estados não resonantes estão fora de fase com o campo externo. Para a transição entre o primeiro e segundo manifolds temos doze possíveis caminhos com frequências de Rabi determinadas pela matriz Eq(C.22)

$$\Omega_{ij}^{(2,1)} = \mathcal{E}_p (\sqrt{2} \alpha_i^{(1)*} \alpha_j^{(2)} + \beta_i^{(1)*} \beta_j^{(2)*} + \mu_i^{(1)*} \mu_j^{(2)}), \quad (C.30)$$

com $i = 0, \pm$; $j = 1, \dots, 4$. Os manifolds com $n \geq 2$, apresentam dezesseis possíveis transições, com frequências de Rabi

$$\Omega_{ij}^{(n,n-1)} = \mathcal{E}_p (\sqrt{n} \alpha_i^{(n-1)*} \alpha_j^{(n)} + \sqrt{n-1} (\beta_i^{(n-1)*} \beta_j^{(n)*} + \mu_i^{(n-1)*} \mu_j^{(n)}) \\ + \sqrt{n-2} \nu_i^{(n-1)*} \nu_j^{(n)}), \quad i, j = 1, \dots, 4.$$

O Hamiltoniano do campo externo na base de poláritons, é finalmente

$$\begin{aligned}
 H_L &= i\hbar\mathcal{E}_p(a - a^\dagger) = \\
 &= i\hbar \sum_{i=\pm,0} \Omega_i^{(1,0)}(p_i^{(1)} - p_i^{(1)\dagger}) \\
 &\quad + i\hbar \sum_{i=\pm,0} \sum_{j=1}^4 \Omega_{i,j}^{(2,1)}(p_{ij}^{(2)} - p_{ij}^{(2)\dagger}) \\
 &\quad + i\hbar \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{i,j=1}^4 \Omega_{i,j}^{(n,n-1)}(p_{ij}^{(n)} - p_{ij}^{(n)\dagger}). \tag{C.31}
 \end{aligned}$$

Embora, a expressão acima seja mais complexa que a Eq.(C.23) para o Hamiltoniano, no regime de acoplamento forte e poucos fótons podemos truncar a Eq.(C.31), mantendo apenas a contribuição efetiva do campo externo a dinâmica do sistema.

Por fim exaltamos que utilizar o formalismo de poláritons, além de fornecer uma visão clara dos processos físicos apresenta uma diminuição no custo computacional para soluções numéricas da dinâmica dos sistemas físicos de interesse, por exemplo, a dimensão do espaço de Hilbert para a configuração atômica (C.1) e com quatro fótons é vinte, enquanto o mesmo sistema descrito na base de poláritons necessita de um espaço de Hilbert de dimensão quatro.

APÊNDICE D

OBTENÇÃO DE DINÂMICAS EFETIVAS

A teoria de Hamiltoniano Efetivos (HE) foi desenvolvida no âmbito da física nuclear,¹¹⁷ para determinar a interação efetiva entre os nucleons. Posteriormente foi aprimorada e extensamente utilizada em química quântica.¹¹⁸

O uso de Hamiltoniano efetivos em contrapartida às soluções numéricas do Hamiltoniano total, é vantajoso no sentido que possibilita um melhor entendimento dos processos físicos relevantes para a dinâmica do sistema e fortalece a intuição física acerca dos fenômenos. Este "*insight*" sobre os efeitos relevantes na dinâmica do sistema é essencial para a proposição de protocolos de interação radiação-matéria para as engenharias de estados quânticos, Hamiltoniano e reservatórios.

Existe uma grande variedade de técnicas para a determinação da evolução de sistemas dependentes do tempo, além das usuais técnicas perturbativas, como por exemplo o uso de séries de Dyson. Nos casos relevantes em ótica quântica, a depender da ordem onde se faz o truncamento da série, os Hamiltonianos frequentemente apresentam termos seculares, impossibilitando a convergência da série e resultando em uma evolução não unitária.

Em um dos trabalhos pioneiros em ótica quântica, Autler e Townes¹¹⁹ consideram o efeito de um campo de bombeio periódico em um sistema quântico utilizando o teorema de Floquet, de forma a eliminar a dependência temporal do Hamiltoniano de interação. Este formalismo é estendido em¹²⁰ através da introdução dos operadores de Floquet-Green.

Outros métodos para a determinação de Hamiltoniano efetivos têm em comum o uso de transformações canônicas (unitárias) através das quais o Hamiltoniano efetivo obtido,

após aproximações, compõem-se dos termos não seculares da teoria de perturbação.¹²¹ Do ponto de vista operacional, estes métodos são tão trabalhosos quanto as técnicas padrões em teoria de perturbação.

Klimov *et al.*,⁷⁷ desenvolvem um método utilizando transformações canônicas, onde mostram que a ação de campos quânticos em sistemas de 2 (N) níveis leva à deformação da álgebra $SU(2)$ ($SU(N)$) que descreve esses sistemas. A partir da deformação algébrica causada pelo campo, encontram uma forma fechada para os HEs, que são diagonais na base do Hamiltoniano livre.

Um método de obtenção de HEs extensamente utilizado em ótica quântica é a eliminação adiabática.¹²² Este método consiste no ajuste das frequências e intensidades dos campos e transições atômicas envolvidos, de forma a eliminar certos graus de liberdade do Hamiltoniano, que são apenas virtualmente excitados e descritos por termos que oscilam rapidamente no tempo. Assim, a eliminação adiabática consiste num processo de engenharia da aproximação de ondas girantes, aplicada a graus de liberdade que desejamos descartar. Aplicações do método podem ser encontradas nas Refs.¹²³

No desenvolvimento da espectroscopia de ressonância nuclear magnética (RNM), a teoria de HEs, conhecidos como Hamiltoniano médios, porque descrevem o efeito médio do campo no intervalo de tempo de sua interação com o sistema de spins, foi essencial para aprimorar a técnica de RMN.¹²⁴ De fato, estes HEs possibilitaram, através do ajuste de campos externos aplicados, a engenharia das interações internas entre os spins.

D.1 Hamiltoniano médios em ótica quântica

O método proposto por James-Jerke⁷⁶, consiste na determinação do Hamiltoniano efetivo de sistemas que interagem dispersivamente, lançando mão do processo de iteração da solução formal da equação de Schrödinger, além de aproximações apropriadas, conforme descrevemos abaixo. Este método é análogo àquele apresentado por Cohen-Tannoudji,¹¹⁶ no qual se determinam os elementos de matriz do HE na representação de Schrödinger, mas apresenta a vantagem de um custo operacional muito inferior.

Partimos da equação de Schrödinger na representação de interação

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H_I(t) |\psi(t)\rangle, \quad (\text{D.1})$$

obtemos a solução formal

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t H_I(t') |\psi(t')\rangle dt'. \quad (\text{D.2})$$

que conduzida de volta à Eq. [D.1], leva à expressão

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H_I(t) |\psi(0)\rangle + \frac{H_I(t)}{i\hbar} \int_0^t H_I(t') |\psi(t')\rangle dt'. \quad (\text{D.3})$$

Assumindo que o Hamiltoniano $\hat{H}_I(t)$ apresente termos altamente oscilantes comparados ao segundo termo, podemos, via aproximação de ondas girantes, desprezar o primeiro termo da Eq. (D.3). Além disso, utilizamos a aproximação Markoviana para retirar o vetor de estado do integrando do segundo termo. Estas aproximações resultam na dinâmica simplificada, descrita pela equação

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} \approx H_{\text{ef}} |\psi(t)\rangle, \quad (\text{D.4})$$

onde o Hamiltoniano efetivo H_{ef} , é dado por

$$H_{\text{ef}} = \frac{H_I(t)}{i\hbar} \int_0^t H_I(t') dt'. \quad (\text{D.5})$$

Para sistemas onde a dependência temporal é hârmônica, tal que o hamiltoninano na representação de interação tem a forma

$$H_I = \sum_{n=1}^N h_n e^{i\omega_n t} + h_n^\dagger e^{-i\omega_n t}, \quad (\text{D.6})$$

podemos obter a seguinte expressão para o Hamiltoniano efetivo

$$H_{\text{ef}}(t) = \sum_{m,n=1}^N \frac{[h_m^\dagger, h_n]}{\hbar \bar{\omega}_{mn}} e^{i(\omega_m - \omega_n)t} \quad (\text{D.7})$$

com $1/\bar{\omega}_{mn} = (1/\omega_m + 1/\omega_n)/2$.

Dado que o Hamiltoniano efetivo (D.5) é freqüentemente não hermiteano, a evolução

por ele governada é freqüentemente não unitária, fato que ocorre devido à remoção pela média temporal das componentes que apresentam oscilações rápidas. Isto se dá de forma análoga ao que ocorre quando traçamos os graus de liberdade do reservatório na dedução da equação mestra para a descrição de sistemas quânticos abertos. Para reter apenas a dinâmica dos termos hermiteanos, devemos realizar a simetrização

$$H_{efs} = \frac{1}{2}(H_{ef} + H_{ef}^\dagger). \quad (D.8)$$

Observamos, por fim, que o Hamiltoniano (D.8) oferece uma boa descrição da dinâmica de sistemas interagindo dispersivamente no regime de acoplamento fraco, para tempos superiores a vários períodos de interação característicos do sistema. Sob estas condições, os efeitos transientes devido às componentes altamente oscilantes se anulam.

D.1.1 Exemplo: O Hamiltoniano dispersivo.

Demonstraremos a técnica acima apresentada através de sua aplicação a um caso simples, muito utilizado em EQC. A interação de um átomo de dois níveis com um modo do campo de radiação é descrita pelo Hamiltoniano de Jaynes-Cummings. No regime em que a interação é dispersiva e o acoplamento entre o átomo e o campo não é suficientemente intenso, de forma que a condição $g\sqrt{n}/\delta \ll 1$ é válida, podemos encontrar um Hamiltoniano efetivo diagonal. O efeito desta interação corresponde à introdução de uma fase tanto nos níveis atômicos como nos estados do campo, ao invés da troca de excitação entre estes sistemas.

Partindo do hamiltoniano de Jaynes-Cummings H_{JC} na representação de interação

$$H_i = g(a\sigma_+ e^{-i\delta t} + a^\dagger \sigma_- e^{i\delta t}) = h e^{-i\delta t} + h^\dagger e^{i\delta t}, \quad (D.9)$$

onde definimos a dessintonia entre o átomo e o campo da forma $\delta = \omega_0 - \omega$, obtemos através das Eq. (D.7) o resultado desejado

$$H_{ef}(t) = \frac{1}{\hbar\delta}[h^\dagger, h] = \frac{\hbar g^2}{\delta}[a^\dagger \sigma_-, a\sigma_+] = \hbar\chi a^\dagger a\sigma_z + Stark, \quad (D.10)$$

onde $\chi = g^2/\delta$. Esse Hamiltoniano efetivo tem grande utilidade em EQC, dado que é usado na engenharia de estados do tipo EPR, em medidas quânticas não demolidoras de estados do campo, para propostas de construção de portas de fase, dentre inúmeras outras aplicações.

Outra proposta interessante que se utiliza da interação dispersiva entre radiação e matéria, diz respeito à interação entre dois átomos viabilizada por um modo da cavidade.¹²⁵ Nesse caso, partimos do Hamiltoniano

$$H_T = \omega_a a^\dagger a + \sum_{j=1}^2 \frac{\omega_0}{2} \sigma_z^j + \hbar g (a \sigma_+^j + a^\dagger \sigma_-^j), \quad (\text{D.11})$$

que na representação de interação é descrito por

$$H_I = \sum_{j=1}^2 \hbar g (a \sigma_+^j e^{-i\delta t} + a^\dagger \sigma_-^j e^{i\delta t}). \quad (\text{D.12})$$

No regime em que $g\sqrt{n}/\delta \ll 1$, o Hamiltoniano que descreve a dinâmica deste sistema, obtido via Eq. (D.7), é

$$H_{\text{ef}} = \frac{1}{\hbar\delta} \sum_{j=1}^2 [h_j^\dagger, h_j] = \frac{\hbar g^2}{\delta} \sum_{j=1}^2 [a^\dagger \sigma_-^j, a \sigma_+^j] = \chi \sum_{j=1}^2 (|e_j\rangle\langle_j e| + \sigma_z^j) a^\dagger a + (\sigma_+^1 \sigma_-^2 + \sigma_+^2 \sigma_-^1). \quad (\text{D.13})$$

Esta interação pode também ser usada para a geração de estados do tipo EPR entre os átomos, assim como a geração de uma operação controlada CNOT, utilizando os níveis internos dos átomos como qubits.

D.1.2 Hamiltoniano efetivo para a geração de modos não estacionários

Na Ref.⁶⁰ foi proposto um protocolo para a engenharia de um modo não estacionário de uma cavidade não ideal, onde mostrou-se que a engenharia deste modo, pode proteger o estado do sistema da decoerência. Este protocolo considera a interação dispersiva do modo com um átomo submetido a um processo de amplificação linear com intensidade

modulada (laser modulado). O Hamiltoniano deste sistema é dado por

$$H_T = \omega a^\dagger a + \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + F(t)(e^{-i\omega_L t} \sigma_+ + e^{i\omega_L t} \sigma_-) + g(a \sigma_+ + a^\dagger \sigma_-), \quad (\text{D.14})$$

onde a amplitude do campo de amplificação tem a seguinte forma

$$F(t) = F_0 \cos(q + \phi). \quad (\text{D.15})$$

Na representação de interação o Hamiltoniano transformado é dado por

$$H_I(t) = F(t)(e^{-i\Delta t} \sigma_+ + e^{i\Delta t} \sigma_-) + g(a \sigma_+ e^{-it} + a^\dagger \sigma_- e^{i\delta t}), \quad (\text{D.16})$$

onde defenimos os detuning entre o laser e o átomo $\Delta = \omega_L - \omega_0$ e entre o átomo e o campo $\delta = \omega - \omega_0$. Considerando o seguinte regime de parâmetros

$$|\Delta| \gg |\delta| \gg q, \quad \frac{F_0}{\Delta} \ll \frac{g}{\delta},$$

sobre estas condições podemos eleminar a contribuição dos termos altamente oscilantes, aplicando a eqD.5 e teremos o mesmo Hamiltoniano efetivo encontrado para cavidades com espelhos que oscilam adiabaticamente⁶⁰

$$H_{\text{ef}} = \hbar \Omega(t) \sigma_z + \hbar \omega a^\dagger a + \hbar \chi(t) a^\dagger a \sigma_z \quad (\text{D.17})$$

onde

$$\Omega(t) = \frac{\omega_0}{2} + \frac{F^2}{\Delta}, \quad (\text{D.18})$$

$$\chi(t) = \frac{g^2 n}{\delta} \left(1 - \frac{F_0^2}{\delta \Delta} \sin(2qt)\right). \quad (\text{D.19})$$

Infelizmente as condições impostas para validade desse Hamiltoniano impedem de se mimicar o movimento mecânico dos espelhos necessários no efeito casimir dinâmico.

D.2 Equações mestras efetivas

Da mesma forma que podemos encontrar Hamiltoniano efetivos que descrevem a evolução de sistemas não ressonantes, vamos levar em conta os mecanismos de perda através de uma equação mestra efetiva. Para isso acoplamos o sistema com um reservatório e seguindo o procedimento padrão: Traçamos sobre as variáveis do banho a equação de Lindblad para o sistema total e sobre aproximação de Markov temos a equação mestra na forma de Lindblad¹²⁶

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H_{int}, \rho] + \sum_m \gamma_m \mathcal{L}[C_m] \rho, \quad (D.20)$$

onde γ_m são parâmetros determinados pelo reservatório e $\mathcal{L}[C_m]$ é o superoperador de Lindblad

$$\mathcal{L}[C_m] \rho = 2C_m \rho C_m^\dagger - \{C_m^\dagger C_m, \rho\}. \quad (D.21)$$

Os operadores C_m são auto operadores do sistema que satisfazem $[H_0, C_m] = \omega_m C_m$, e sua forma depende do modelo de reservatório de interesse.

Aplicando o formalismo de pequenas rotações de Klimov⁷⁷ para obtenção de Hamiltoniano efetivos a equação mestra, iremos encontrar uma equação mestra que leva em conta os efeitos de perda em sistemas não ressonantes.

Vamos apresentar o método através de um exemplo ilustrativo. Consideremos dois osciladores harmônicos dissipativos acoplados de frequência ω_a e ω_b e constante de acoplamento λ . Este sistema tem interesse em varios problemas em ótica quântica, além de podemos comparar o modelo efetivo com a solução exata Eq.(A.41).

Consideramos que apenas um dos modos, modo $a(\omega_a)$, sofre efeitos de perda, enquanto o segundo modo $b(\omega_b)$ não. O Hamiltoniano e a equação mestra do sistema na representação de interação são respectivamente

$$H_{int} = \frac{\Delta}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b) + \lambda(a^\dagger b + b^\dagger a), \quad (D.22)$$

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H_{int}, \rho] + \frac{\gamma}{2}\mathcal{L}[a] \rho, \quad (D.23)$$

onde $\Delta = \omega_a - \omega_b$.

Aplicando a seguinte transformação unitaria

$$U = \exp[\varepsilon(X_+ - X_-)], \quad (\text{D.24})$$

com os operadores X obedecendo relações de comutação de álgebras deformadas de $su(2)$ e ε a condição para interação dispersiva

$$[X_3, X_{\pm}] = \pm X_{\pm}, \quad [X_+, X_-] = P(X_3), \quad (\text{D.25})$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\Delta} \sqrt{\bar{n}_a \bar{n}_b} \ll 1, \quad (\text{D.26})$$

onde $P(X_3)$ é uma função polinomial do operador diagonal X_3 e $\bar{n}$ o numero médio de excitações no modo. Para o sistema de osciladores acoplados temos

$$\begin{aligned} X_+ &= a^\dagger b, & X_- &= b^\dagger a, \\ X_3 &= \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b). \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Aplicando está pequena rotação não-linear, da seguinte forma

$$H_{eff} = U H_{int} U^\dagger, \quad (\text{D.28})$$

$$\rho_{eff} = U \rho U^\dagger. \quad (\text{D.29})$$

E utilizando a expansão $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots$, até segunda ordem nas expressões para H_{eff} e ρ_{eff} obtemos

$$H_{eff} = \Delta a^\dagger a + \frac{\lambda^2}{\Delta} (a^\dagger a - b^\dagger b), \quad (\text{D.30})$$

$$\dot{\rho}_{eff} = -\frac{i}{\hbar} [H_{eff}, \rho_{eff}] + \frac{\gamma}{2} (1 - \frac{\lambda^2}{2\Delta^2}) \mathcal{L}[a] \rho_{eff} + \frac{\lambda^2}{2\Delta^2} \mathcal{L}[b] \rho_{eff}. \quad (\text{D.31})$$

Notamos que ocorre transferência de decoerência entre os modos mesmo na ausência de troca de excitações. Poderíamos deduzir está equação mestra utilizando o formalismo da eliminação adiabática embora com as desvantagens já discutidas do método.

APÊNDICE E

TRANSFERÊNCIA PERFEITA DE ESTADOS

Um tópico da física que recebeu muita atenção na última década é a transferência perfeita de estados (TPE) em redes quânticas¹. Visto que a implementação de um processador quântico requer, de fato, a habilidade de se transferir informação entre sistemas interagentes espacialmente separados compondo uma rede, protocolos têm sido estabelecidos para a TPE em muitos diferentes contextos. Usualmente, a interação qubit-qubit é de curto alcance e a implementação de portas lógicas quânticas entre qubits com separação espacial deve ser mediada por um canal quântico, que pode ser constituído por redes bosônicas ou fermiônicas.⁴⁷ Um formalismo geral do problema da TPE em redes com qualquer topologia é desenvolvido na Ref.⁴⁸ Em redes de osciladores harmônicos, temos uma análise compreensiva da TPE e da manipulação do emaranhamento feita em.⁴⁰ Um protocolo para transferência de emaranhados quânticos com alta eficiência em cadeias quânticas invariantes por translação foi proposto.⁹⁶ Recentemente, uma proposta para transferência quase perfeita de estados (TQPE) em redes de osciladores harmônicos dissipativos é estudada em.⁹² Onde o sistema emissor-receptor é ideal e acoplado através de um canal dissipativo, por exemplo, o sistema emissor-receptor é formado por cavidades com alto fator de qualidade Q_{ideal} acopladas por cavidades com baixo Q_{dissi} ($Q_{ideal} \gg Q_{dissi}$). Tal protocolo demonstrou-se robusto aos efeitos do ambiente, assim como os erros experimentais na forma de randomicidades nos parâmetros do sistema (frequência e acoplamento). Uma

¹Seção baseada na Ref.¹⁰²

generalização deste protocolo de TQPE para o caso de estados escuros de poláriton foi realizada em.⁹¹ Finalizando o caso de TPE e TQPE em redes bosônicas, um tratamento geral através do conceito de subespaços livre de decoerência foi demonstrado na Ref.⁶⁵ Em sistemas de spin, a TPE foi investigada em redes com acoplamentos além daqueles entre primeiro vizinhos.⁶⁷ Uma classe de redes de spin que admitem TPE independentes do estado a ser transferido em um período fixo de tempo é demonstrado em.¹⁰² O problema do aumento dos erros (devido a não idealidades da rede) em função do tamanho da rede é considerado na Ref.⁶⁸ e os efeitos de flutuações nos acoplamentos, assim como a dinâmica de emaranhamento em cadeia de spins com ruído e desordem.⁹⁰ Os principais protocolos para TPE em cadeias de spin podem ser categorizados em três distintos grupos: *i*) a cadeia de spin deve ser inicializada, *ii*) ocorre a engenharia da rede de spins com acoplamentos e frequências diferentes para cada sítio, *iii*) é realizado o controle dinâmico de cada sítio da rede.

O objetivo da TPE usualmente é a transferência de um qubit arbitrário $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ entre dois sítios da rede de spin, por exemplo entre os extremos da rede ($1 \leftrightarrow N$). Vamos considerar que todos os spins foram preparados no estado fundamental $|\downarrow\rangle_j \equiv |0\rangle_j$ e que no tempo $t_i = 0$ o primeiro sítio da rede é preparado em $|\Psi\rangle_1$. Uma transferência perfeita implica que num tempo bem definido t_f o último spin da rede estará no estado $|\Psi\rangle_N$.

O Hamiltoniano para cadeias de spin com N sítios e interação apenas entre primeiros vizinhos, usualmente utilizada nos protocolos para TPE tem a seguinte forma($\hbar = 1$)

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N h_j \sigma_j^z - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} J_j (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \Delta \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z) \quad (\text{E.1})$$

onde $\sigma_j^{x,y,z}$ são os operadores de Pauli na posição j , h_j e a diferença energética entre estados de spins $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ e J_j é o acoplamento entre sítios vizinhos. Para o caso de anisotropia $\Delta = 0$; o Hamiltoniano acima é isomorfo² com o Hamiltoniano de Hubbard para férmions sem spins

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^N h_j a_j^\dagger a_j - \sum_{j=1}^{N-1} J_j (a_j^\dagger a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger a_j), \quad (\text{E.2})$$

²Podemos verificar tal isomorfismo através da transformação de Jordan-Wigner.¹²⁷

sendo $a_j^\dagger(a_j)$ o operador de criação (destruição) de partículas no sítio j com energia h_j e J_j o acoplamento túnel entre sítios adjacentes. Desde que o Hamiltoniano E.1 [E.2] conserva o número de excitações de spin [partículas]³, a dinâmica do sistema fica restrita ao espaço de Hilbert de zero $|0\rangle \equiv \prod_{j=1}^n |0\rangle_j$ e uma excitação $|1\rangle \equiv \sigma_j^+ |0\rangle [a_j^\dagger |0\rangle]$. Neste subespaço o Hamiltoniano(E.1[E.2])é real, simétrico e triagonal

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ J_1 & h_2 & J_2 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & h_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & J_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & J_{N-1} & h_N \end{pmatrix}. \quad (\text{E.3})$$

O estado inicial do sistema $|\Psi(t_0)\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ tem a seguinte evolução temporal $|\Psi(t)\rangle = U(t) |\Psi(t_0)\rangle = \alpha |0\rangle + \beta \sum_{j=1}^N A_j(t) |j\rangle$, onde temos as amplitudes de transição $A_j(t) \equiv \langle j| U(t) |1\rangle = \langle j| \mathcal{T} \exp[-i \int H(t') dt'] |1\rangle$ ($\mathcal{T}$ é o operador ordenação temporal). Logo, TPE ocorre quando $|A_N(t_f)| = 1$, e a fase $\phi = \arg(A_N)$ é fixa e conhecida podendo assim ser alterada através de operações locais no sítio N .

Para quantificar a qualidade do protocolo de transferência podemos calcular a fidelidade do processo $F_\Psi = \langle \Psi | \rho_N | \Psi \rangle$, onde ρ_N é o operador densidade reduzido do N th sítio da cadeia, dado por

$$\rho_N = \text{Tr}_N(|\Psi\rangle \langle \Psi|) = (1 - |\beta|^2 |A_N|^2) |0\rangle \langle 0| + |\beta|^2 |A_N|^2 |1\rangle \langle 1| + \alpha \beta^* A_N |0\rangle \langle 1| + \alpha^* \beta A_N |1\rangle \langle 0|. \quad (\text{E.4})$$

resultando na fidelidade

$$F_\Psi = |\alpha|^2 + |\beta|^2 (1 - 2|\alpha|^2) |A_N|^2 + 2|\alpha|^2 |\beta|^2 |A_N| \cos(\phi), \quad (\text{E.5})$$

Outra medida da qualidade do canal é a fidelidade média $\bar{F}_\Psi$, obtida através da média

³Desde que $[\sum_{j=1}^N \sigma_j^z, H] = [\sum_{j=1}^N a_j^\dagger a_j, H] = 0$.

de F_ψ sobre todos os estados iniciais puros contidos na esfera de Bloch $|\Psi_i\rangle$

$$\bar{F}_\psi = \frac{1}{4\pi} \int F_\psi d\Omega = \frac{1}{2} + \frac{|A_N|^2}{6} + \frac{|A_N| \cos(\phi - \phi_0)}{3}. \quad (\text{E.6})$$

Obtemos, para $|A_N| = 1$ com fase ϕ randômica, o valor clássico $\bar{F}_\psi = 2/3$.

Conceitualmente a abordagem mais simples para a transferência de estado entre os dois extremos da cadeia é aplicar uma sequencia de operações SWAP. A operação SWAP entre dois qubits tem a seguinte representação matricial na base computacional

$$SWAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.7})$$

e pode ser implementada utilizando-se três operações CNOT. implementadas por pulsos π entre os pares de sítios vizinhos. Para esse fim, com todos os acoplamentos J_j , inicialmente nulos, ligamos o acoplamento J_1 no tempo $t_1 = \pi/2J_1$, então J_2 no tempo $t_2 = \pi/2J_2$ assim por diante até $J_N - 1$. Se todos os acoplamentos J_j podem ser ligados na máxima intensidade permitida pelo sistema físico J_{max} , o tempo total para TPE nesse protocolo é $t_f = (N - 1)\pi/2J_{max}$. Com amplitude $A_N(t_f) = (-i)^N - 1$, ou seja, $|A_N(t_f)| = 1$ e fase $\phi_0 = -\pi/2(N - 1) \bmod(2\pi)$. A seguir, consideramos uma cadeia de spin com ligações estáticas J_j construídos de maneira a permitir TPE. Por "estático", queremos dizer que, durante a transferência as intensidades do acoplamento são fixas. Apenas no início (t_0) e no final (t_f) do processo de transferência, J_1 e $J_N - 1$ (t_f), são ativados e desativados, respectivamente. Se consideramos que o Hamiltoniano (E.3) descreve uma cadeia com simetria de reflexão, ou seja, $J_j = J_N - j$ e $h_j = h_N - j + 1$, temos que a $|A_N(t_f)| = 1 \leftrightarrow e^{-iE_k t_f} = (-1)^k$, onde $\{E_k\}$ é o espectro de autovalores de (E.3). Assim dado $\{E_k\}$ que satisfaz $e^{-iE_k t_f} = (-1)^k$, temos um problema inverso de autovalores que é determinar todos os $\{J_j, h_j\}$. A solução mais simples é de um espectro linear, por exemplo, $E_k = -(N - 1)/2 + k - 1$, $k \equiv 1, 2, 3, \dots, N$. Que é o espectro de uma partícula com spin $\mathcal{J}$ em um campo magnético constante, utilizando essa analogia, concluímos que uma

possível solução é

$$J_j = J\sqrt{(N-j)j}, \quad \text{com} \quad h_j = 0.$$

Logo, no tempo $t_f = \pi/2J$, temos $A_N(t_f) = (-i)^{N-1}$. Em termos do acoplamento $J_{\max}$ que ocorre no centro da cadeia, o tempo para TPE é $t_f = N\pi/4J_{\max}$ sendo este protocolo duas vezes mais rápido que utilizando operações *SWAP* sequenciais.

APÊNDICE F

SUBESPAÇOS LIVRES DE DECOERÊNCIA

Os desenvolvimentos alcançados nas últimas décadas, nos campos da informação e da computação quântica, têm permitido a abordagem dos processos de transferência e manipulação da informação quântica. A teoria dos subespaços livres de decoerência (SLD) fornece critérios para a preservação passiva da informação quântica (IQ)⁴³ tendo obtido relativo sucesso nas recentes investigações experimentais.^{62,63} A teoria dos SLD foi primeiro desenvolvida no contexto da álgebra de simetrias do Hamiltoniano e na dinâmica de semi-grupos através de equações mestras quânticas.⁴³ Generalizações da teoria dos SLD foram feitas para abranger dinâmicas não Markovianas assim como inicialização imperfeitas dos estados iniciais.^{33,43} Desde que os computadores quânticos não podem ser isolados de seu ambiente (ou seja, não podemos ter um sistema quântico realmente isolado do mundo real) a informação pode ser perdida, o estudo do SLD é importante para a implementação de computadores quânticos no mundo real. O uso de SLD permite a simplificação dos circuitos quânticos uma vez que reduz-se a demanda por protocolos de correção de erro, além de ser uma propriedade desejada aos dispositivos de armazenamento e transporte da IQ. Dada a importância dos SLD para a realização de processamento de IQ, é importante que o fundamentos da teoria sejam rigorosos e inequívocos.

Os SLD são definidos como conjuntos de estados que evoluem de forma unitária quando existe um acoplamento com o ambiente, ou seja, ocorre o emaranhamento dos graus de liberdade do sistema com os do reservatório. No entanto, a evolução unitária de um

estado quântico pode ocorrer de várias maneiras, levando ao desenvolvimento de definições relacionadas, mas diferentes dos SLD na literatura. No contexto das equações mestres, SLD frequentemente é definido como a coleção de estados para os quais o autovalor do Lindbladiano é nulo. Vamos nesta seção fazer uma revisão dos critérios que definem os SLD baseado nas equações mestras no regime Markoviano e forneceremos um novo critério para se identificar uma nova subclasse de SLD. Esta definição permite-nos desenvolver um teorema que dá as condições necessárias e suficientes para a existência de SLD para processos de transferência de IQ em redes de osciladores quânticos não ideais. Dado que a transferência de estados entre dois sistemas distintos é um requisito fundamental para o processamento de IQ, deve-se dedicar especial atenção a investigação deste mecanismo dentro da perspectiva do controle do processo de decoerência.

Revisaremos as condições para existência de SLD, baseado no tratamento de sistemas abertos utilizando equações mestres Markovianas. O sistema S com vetores de estado de dimensão finita no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_S$ é acoplado a um reservatório R com vetores de estado no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_R$. A dinâmica do sistema-reservatório $S + R$ é descrito pelo Hamiltoniano

$$H = H_S \otimes I_R + I_S \otimes H_R + H_{Int}, \quad (\text{F.1})$$

onde I é o operador identidade e H_S , H_R e H_{Int} é o Hamiltoniano do sistema, reservatório e interação respectivamente. A evolução do sistema fechado é dado por $\rho_{SR}(t) = U\rho_{SR}(0)U^\dagger$, onde ρ_{SR} é o operador densidade sistema-reservatório e o operador evolução ($\hbar = 1$)

$$U = \exp(-iHt) \quad (\text{F.2})$$

Estamos interessados na evolução do operador densidade reduzido do sistema ρ , que é obtido traçando-se os graus de liberdade do reservatório

$$\rho(t) = \text{Tr}_R[U(t)\rho(0) \otimes \rho_R(0)U^\dagger(t)], \quad (\text{F.3})$$

onde consideramos que: não há correlação inicial entre S e R e acoplamento $S - R$ é fraco. Diagonalizando o operador densidade inicial do reservatório $\rho_R(0) = \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|$, e

calculando o traço parcial nessa base,obtemos

$$\rho(t) = \sum_j \langle j| U(t) \left(\rho(0) \otimes \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| \right) U^\dagger(t) |j\rangle \quad (\text{F.4})$$

$$= \sum_a A_a \rho(0) A_a^\dagger, \quad (\text{F.5})$$

onde definimos os operadores de Kraus

$$A_a = \sqrt{\lambda_i} \langle j| U |i\rangle \quad ; \quad a = (i, j). \quad (\text{F.6})$$

A expressão (F.4) é conhecida como Representação Operador Soma (ROS) e pode ser derivada de uma abordagem axiomática da mecânica quântica, sem ser necessário a referência a Hamiltonianos. Desde que $\text{Tr} \rho(t) = 1$ os operadores de Kraus devem satisfazer a restrição de normalização

$$\sum_a A_a^\dagger A_a = I_s. \quad (\text{F.7})$$

A partir deste vínculo, conclui-se que, quando a soma na Eq. (F.4) inclui apenas um único termo a dinâmica é unitária. Assim, um critério simples para decoerência na ROS é a presença de vários termos independentes na soma na Eq. (F.4).

Enquanto a ROS é uma descrição formal exata da dinâmica do operador densidade do sistema, sua utilidade é bastante limitada, pois o cálculo explícito de os operadores de Kraus é equivalente a diagonalização do Hamiltoniano H . Além disso, a ROS é demasiadamente restrita, uma vez que a possibilidade de recorrência sempre esta presente. No entanto, em muitas situações práticas esta probabilidade da informação que o sistema perdeu para o reservatório volte ao sistema é extremamente pequena. Assim, por exemplo, um átomo que está no seu estado excitado em um "banho a temperatura nula"vai emitir um fóton, mas o banho não vai excitar o átomo, exceto pelo (extremamente longo) tempo de recorrência do processo de emissão. Nessas situações, uma forma mais apropriada para descrever a evolução do sistema é através de uma equação mestre quântica. Ao assumir que (i) a evolução do operador densidade do sistema é governada por um parâmetro de um semigrupo (dinâmica Markoviana), (ii) a evolução é ainda positiva definida e (iii) o

operador densidade do sistema e do reservatório são inicialmente dissociados, mostra-se que a evolução mais geral do operador densidade do sistema é governada pela equação de Lindblad

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[\tilde{H}_S, \rho(t)] + L_D[\rho(t)] \quad (\text{F.8})$$

$$L_D[\rho(t)] = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^M a_{kl} \left([F_k, \rho(t) F_l^\dagger] + [F_k \rho(t), F_l^\dagger] \right) \quad (\text{F.9})$$

onde a dinâmica da matriz densidade $\rho(t)$ depende do Hamiltoniano efetivo $\tilde{H}_S = H_S + \Delta$, onde Δ é a contribuição Hermitiana da interação entre sistema e o reservatório. A contribuição incoerente para a evolução de $\rho(t)$ é gerada pelo superoperador $L_D[\rho]$ onde $A = (a_{\alpha\beta})$ é uma matriz positiva semidefinida e independente do tempo e $M = \dim(\mathcal{H})$. O conjunto dos operadores

$$\mathcal{F} = \{F_\alpha; \alpha = 0, \dots, N_S^2 - 1\}, F_0 \equiv I, \quad (\text{F.10})$$

é a base do espaço de todas as transformações lineares definidas em $\mathcal{H}_S$.

Com as definições acima, vamos mostrar agora como formalmente determinar os SLD. Considerando as condições para a existência de uma SLD através das equações mestras na forma de Lindblad. A equação de Lindblad separa claramente a dinâmica unitária da incoerente e esta é uma das vantagens da equação de Lindblad em relação a ROS. É claro que a condição de SLD deve estar relacionada com o desaparecimento de $L_D[\rho]$. Vamos derivar condições necessárias e suficientes para que isso aconteça, seguindo.⁴³

Seja $\left\{ \left| \bar{k} \right\rangle \right\}_{k=1}^N$ a base para um subespaço de dimensão N de $\bar{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{H}$. Nesta base podemos expressar o operador densidade $\bar{\rho} = \sum_{k,j=1}^N \rho_{kj} \left| \bar{k} \right\rangle \left\langle \bar{j} \right|$. Consideremos a ação dos operadores de Lindblad na base de estados: $F_\alpha \left| \bar{k} \right\rangle = \sum_{j=1}^N c_{kj}^\alpha \left| \bar{j} \right\rangle$.

Substituindo na Eq.F.9, encontramos

$$L_D[\rho] = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^M a_{\alpha\beta} \times \sum_{k,j,m,n=1}^N \rho_{kj} \left(2c_{jm}^{\beta*} c_{kn}^{\alpha} |\bar{n}\rangle \langle \bar{m}| - c_{mn}^{\beta*} c_{kn}^{\alpha} |\bar{m}\rangle \langle \bar{j}| - c_{jm}^{\beta*} c_{nm}^{\alpha} |\bar{k}\rangle \langle \bar{n}| \right) = 0. \quad (\text{F.11})$$

Os coeficientes de $a_{\alpha\beta}$ representam a informações sobre o banho, e que assumimos ser incontrolável. Portanto, devemos exigir que cada termo da soma sobre α, β desaparece individualmente. Além disso, queremos evitar uma dependência das condições iniciais, ou seja, não deve haver dependência em ρ_{kj} . Isso implica que cada um dos termos entre parênteses deve desaparecer separadamente. Isso só pode ser obtido se houver apenas um operador de projeção $|\bar{n}\rangle \langle \bar{m}|$ para cada termo. A opção menos restritiva que leva a isso é: $c_{kn}^{\alpha} = c_{\alpha k} \delta_{kn}$, utilizando essa condição a equação acima, reduz para

$$\sum_{k,j,m,n=1}^N \rho_{kj} |\bar{k}\rangle \langle \bar{j}| (2c_j^{\beta*} c_k^{\alpha} - c_k^{\beta*} c_k^{\alpha} - c_j^{\beta*} c_j^{\alpha}) = 0 \quad (\text{F.12})$$

Assumindo $c_{\alpha k} \neq 0$ segue que: $\frac{c_{\alpha j}}{c_{\alpha k}} + \frac{c_{\alpha k}^*}{c_{\alpha k}^*} = 2$, que implica que $c_{\alpha k}$ tem que ser independente de k e que $F_{\alpha} |\bar{k}\rangle = c_{\alpha} |\bar{k}\rangle, \forall \alpha$, o que nos leva ao seguinte teorema

Se não são feitas suposições especiais sobre a matriz dos coeficientes $a_{\alpha\beta}$ e em relação as condições iniciais ρ_{ij} então a condição necessária e suficiente para que o subespaço $\bar{\mathcal{H}} = \text{Span}[\{|\bar{k}\rangle\}_{k=1}^N]$ seja livre de decoerência é que toda base $|\bar{k}\rangle$ seja um auto estado degenerado de todos operadores de Lindblad $\{F_{\alpha}\}$

$$F_{\alpha} |\bar{k}\rangle = c_{\alpha} |\bar{k}\rangle, \forall \alpha, k. \quad (\text{F.13})$$

Os operadores de Lindblad podem sempre ser postos como uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$. Nós podemos fazer a condição para SLD um pouco mais explícita, no caso de álgebras de Lie semi-simples, isto é, aquelas que não são invariantes de nenhuma subálgebra Abelianas. Neste caso a condição para SLD simplifica-se para

$$F_{\alpha} |\bar{k}\rangle = 0, \forall \alpha, k. \quad (\text{F.14})$$

Um aspecto importante para o estudo de SLD, utilizando-se das equações mestres, é a obrigatoriedade de usar a forma diagonalizada do superoperador de decoerência.

SLD: Rede de N Osciladores Harmônicos Dissipativos

Utilizando os resultados demonstrados no Apêndice A, onde encontramos o operador densidade da rede de N osciladores dissipativos acoplados, dado por

$$\rho(t) = \mathcal{N}^2 \sum_{r,s} \Lambda_r \Lambda_s^* \frac{\langle \{\beta_m^s\} | \{\beta_m^r\} \rangle}{\langle \{\zeta_m^s(t)\} | \{\zeta_m^r(t)\} \rangle} |\{\zeta_m^r(t)\}\rangle \langle \{\zeta_m^s(t)\}|, \quad (\text{F.15})$$

onde a excitação do m th oscilador tem a evolução determinada por

$$\zeta_m^r(t) = \sum_n U_{mn}(t) \beta_n^r, \quad (\text{F.16})$$

sendo os elementos do operador de evolução não unitário $U(t)$ dados por $U_{mn}(t) = \sum_{m'} D_{mm'} \exp(-\Omega_{m'} t) D_{m'n'}^{-1}$, e a m th coluna da matriz $\mathbf{D}$ definindo o m th autovetor associado com o autovalor ω_m da matriz $\mathbf{H}^D$, em notação matricial

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{D} e^{-\Omega t} \mathbf{D}^{-1} = e^{-\mathbf{H}^D t}.$$

$$\text{com } \mathbf{H}^D = \mathbf{H}_s - i \frac{1}{2} \Gamma$$

$$\mathbf{H}^D = \begin{bmatrix} \omega_1 & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{12} & \omega_2 & \cdots & \lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1N} & \lambda_{2N} & \cdots & \omega_N \end{bmatrix} - i \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \cdots & \Gamma_{1N} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \cdots & \Gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{1N} & \Gamma_{2N} & \cdots & \Gamma_{NN} \end{bmatrix} \quad (\text{F.17})$$

A partir do operador densidade (F.15), podemos verificar que uma condição necessária para evolução unitária de um estado inicial através da rede dissipativa é

$$\frac{\langle \{\beta_n^s\} | \{\beta_n^r\} \rangle}{\langle \{\zeta_m^s(t)\} | \{\zeta_m^r(t)\} \rangle} = 1.$$

Tal condição, evita o decaimento dos elementos não diagonais de (F.15). Podemos, obter esta condição e determinar as condições necessárias e suficientes para existência de um SLD da seguinte relação

$$U^\dagger(t)U(t).\beta^r = \beta^r \iff H^D.\beta^r = ip\beta^r \quad (F.18)$$

Que é satisfeita sempre pelo autovetor associado ao autovalor $m = ip$, com $p \in \mathbb{R}$. Ou seja, podemos determinar os SLD a partir da diagonalização do Hamiltoniano H^D .

Esta condição mostra-se mais geral que a apresentada anteriormente $F_\alpha \left| \bar{k} \right\rangle = 0, \forall \alpha, k$, pois contempla uma classe maior de estados que podem compor um SLD.

Se a o Hamiltoniano do sistema comuta com a matriz de dissipação, ou seja, $[H_s, \Gamma] = 0$, podemos ter uma base comum de auto estados e a condição F.18, reduz a

$$U^\dagger(t)U(t).\beta^r = e^{-\Gamma t}.\beta^r = \beta^r \iff \Gamma.\beta^r = 0, \quad (F.19)$$

exigindo que os vetores β^r que compõem o estado inicial e é composta pelas excitações dos osciladores da rede, seja autovetores da matriz dissipativa Γ com autovalor nulo.