UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS

USP / IFQSC / SBI
8-2-001032

TEORIA DA MEDIDA EM MECÂNICA QUÂNTICA E O HAMILTONIANO QUADRÁTICO DEPENDENTE DO TEMPO.

MILED HASSAN YOUSSEF MOUSSA

Tese apresentada ao Instituto de Física e Química de São Carlos, Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Doutor em Ciências - Física Básica.

Orientador: Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

São Carlos - 1994

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física e Química de São Carlos

Fone (0162) 72-6222
Fax (0162) 72-2218

Av. Dr. Carlos Botelho, 1465
Caixa Postal 369
CEP 13560.970 - São Carlos - SP
Brasil

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE MILED HUSSAN YOUSSEF MOUSSA APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 27/06/1994.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof.Dr.Salomão S.Mitrani

Prof.Dr.Antonio Fernando Ribeiro de Toledo Piza

Prof.Dr.Basilio Baseia

Prof.Dr.Marcio Tosé Martins

Prof.Dr.Wanderlei Salvador Bagnato

IFSC BIBLIOTECA DE INFORMAÇÃO

Dedico este trabalho

à Mag,

Marcelinha,

e à minha família.

Flores a sustentar este chão.

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

AGRADECIMENTOS

Agradeço

- Aos amigos do IFQSC, pelo companheirismo:
  Wilson Barbosa da Costa, Virgilio, Pedro Santoro, Javier Montenegro Joo, Melquisedech, Andreas, Paulo Facin, Zé Luis, Silvinha, Luimar, Paulo Mauriz, Daniela, Lobinho, Sérgio Saab, Márcio, João Vitor, Valmir, Jeremias, Diógenes, Bell, Taha, Washington, Mauro, Alex, Manzoli, Tereza, Mônica, Antônio Newton, Otil, Sérgio, Luis Antônio, etc, etc...

- Aos colegas e à Câmara Departamental do Departamento de Física da UFSCAR pelo constante apoio e incentivo.

- Aos professores Salviano Leão e José Camilo, pela maratona nos idos de 1991/92. Especialmente ao Salviano pela inestimável participação e apoio com os programas computacionais.

- Aos colegas de sala:
  Chico, Sandra, Neto, Malvezze e Ubiraci.

- Aos colegas Nagib, Ilde Guedes, Fleming, Marcelo e Célia pelas inúmeras discussões.

- À amizade e paciência da Martinha e do Paulo. Pelo inestimável trabalho de confecção deste caderno.

- À simpatia e colaboração da Luzia, Ana Lúcia, Ítalo, Valdir, Samuel, Silvio e Hélio.

- Ao Reginaldo pela constante participação e incentivo destes dez anos.

- Aos amigos de outros carnavais:
  Dinis, Rosângela, João Eduardo, Sérgio, Solange, Claudinha, Antônio César, Aparecida, Marcel, Liliane, Jean e Gandhi.
- Ao Geraldo, Celso, Marco e Zé Potoca.
  "Sigamos a cumprir nossa visita".

- Ao professor Basilio Baseia. Pelo que aprendi nas constantes discussões e sugestões que permeiam este trabalho. Por alguns tetos que dividimos em comum: Rua Dª. Maria Jacinta, 21, Vila Pureza e Lula - 94.

- Por fim, ao professor Salomon. Pela participação constante e inspiração deste trabalho. Pela paciência nas discussões quase diárias. "Narrar é resistir".

RESUMO

Num primeiro momento, abordamos neste trabalho as correlações Einstein-Podolsky-Rosen quando simuladas no âmbito da teoria clássica da radiação. Pretendemos com isso investigar o fenômeno da polarização da luz em um e outro domínios da sua descrição.

Continuando em teoria da medida, através de uma implementação no modelo de colapso da função de onda proposto por Zurek, onde se observa a reversibilidade da coerência de fase, apresentamos expressões para os tempos de decoerência e recorrência associados.

Outro tópico considerado diz respeito ao hamiltoniano quadrático dependente do tempo. Procedendo-se a uma transformação unitária associada ao método dos invariantes desenvolvido por Lewis e Riesenfeld, solucionamos a equação de Schrödinger e apresentamos o operador de evolução. Uma análise dos estados "squeezed" da radiação é apresentada segundo trajetórias no espaço de fase.

A consideração do método empregado, segundo algumas aproximações, possibilita a abordagem do processo de dissipação/flutuação junto ao hamiltoniano original, numa análise mais realista do que compreende um amplo espectro de modelos físicos, tais como o oscilador ou partícula carregada em presença de um campo eletromagnético não homogêneo e as armadilhas de Paul.

ABSTRACT

At the begining, we tackle in this work the Einstein--Podolsky-Rosen correlations when simulated in the radiation classic theory. We attempt in this way to study the light polarization phenomenon in both aproaches of its descriptions.

Still in measurement theory, through a wave function Zurek colapse model implementation, where there is observed a phase coherence reversibility, we introduce expression for the associated decoherence and recurrence tymes.

Another considered topic deals with the time-dependent quadratic hamiltonian. Carrying out a unitary transformation associated with the invariants method developed by Lewis and Riesenfeld, we solved the Schrödinger equation and we introduced the evolution operator. An squeezed states of radiation analysis is also included in the phase space trajectories.

The considerations of the attempted method according to same aproximations makes it possible to deal with the processes of dissipation/flutuation in the original hamiltonian, in a more realistic analysis of those physical models, such as the oscillator or charged particle in a non-homogeneous electromagnetic field and in the Paul trap.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO 1 8

1.1 - INTRODUÇÃO 8

1.2 - PREDIÇÃO QUÂNTICA PARA O COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO PARA POLARIZAÇÕES. 17

1.3 - CORRELAÇÃO PARA LUZ POLARIZADA 23

1.4 - A MÉDIA NO ENSEMBLE 27

1.5 - DISCUSSÃO E CONCLUSÃO 30

CAPÍTULO 2 37

2.1 - CARACTERIZAÇÃO DA MEDIDA QUÂNTICA 37

2.2 - A INSERÇÃO FORMAL DO MEIO-AMBIENTE 42

2.3 - RECORRÊNCIA E DECOERÊNCIA DOS ESTADOS QUÂNTICOS NO PROCESSO DA MEDIDA 50

2.4 - A TERMALIZAÇÃO DO MEIO-AMBIENTE 51

2.5 - INTERAÇÃO APARATO/MEIO-AMBIENTE 55

2.6 - TRANSFERÊNCIA DE INFORMAÇÃO E MEDIDA 62

2.7 - CONCLUSÃO 71

CAPÍTULO 3 73

3.1 - INTRODUÇÃO 73

3.2 - GERAÇÃO DE ESTADOS SQUEEZED EM UM CAMPO MAGNÉTICO HOMOGÊNEO 77

3.3 - SQUEEZING EM CAMPO MAGNÉTICO DEPENDENTE DO TEMPO 79
3.4 - O MÉTODO DE DIAGONALIZAÇÃO POR INVARIANTES E TRANSFORMAÇÕES UNITÁRIAS DT 80
3.5 - O OPERADOR DE EVOLUÇÃO E A REPRESENTAÇÃO DE HEISENBERG 85
3.6 - FLUTUAÇÕES DAS QUADRATURAS 89
3.7 - ALGUMAS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS E SUAS TRAJETÓRIAS ATRAVÉS DAS REGIÕES DE SQUEEZING 95
3.8 - GERAÇÃO DE SQUEEZING DEVIDO A UM OSCILADOR CARREGADO OU UMA PARTÍCULA CARREGADA EM UM CAMPO ELETROMAGNÉTICO DT 105
3.9 - CONCLUSÕES 111

CAPÍTULO 4 116
4.1 - INTRODUÇÃO 116
4.2 - O HAMILTONIANO DISSIPATIVO 119
4.3 - O HAMILTONIANO DISSIPATIVO EM REGIME SUB-AMORTECIDO 123
4.4 - HAMILTONIANO DISSIPATIVO E EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER 126
4.5 - AS EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS 130
4.6 - GRANDEZAS FÍSICAS E O PROCESSO DISSIPAÇÃO/AMPLIFICAÇÃO 133

4.6.1 - Energia Média e Flutuação da Energia 136

4.6.2 - Flutuações das Quadraturas 146

4.6.3 - Correlações das Quadraturas e de Intensidades 161

4.7 - CONCLUSÕES 180

APÊNDICE 1 185

APÊNDICE 2 189

APÊNDICE 3 193

APÊNDICE 4 201

REFERÊNCIAS 205

INTRODUÇÃO

Conforme expõe o título, neste trabalho fazemos algumas considerações em teoria da medida na mecânica quântica e óptica quântica. O primeiro tópico remonta aos primeiros instantes do desenvolvimento da microfísica, cujos conceitos básicos, em oposição frontal àqueles da intuição clássica, dificilmente encontram aceitação à despeito do grande desenvolvimento teórico e prático alcançado.

Essencialmente, o debate que se seguiu à descoberta do quantum de ação, centra-se na ausência de causalidade/localidade no âmbito de sua teoria. A linearidade de causa e efeito, fundamental à descrição espaço-temporal dos fenômenos clássicos, desde a mecânica newtoniana ao espaço quadri-dimensional que inaugura a relatividade, é prescindida pelo princípio da incerteza de Heisenberg. Mais objetivamente, toda a estrutura conceitual em mecânica quântica, cujo **princípio da complementaridade** procura alicerçar, prescinde de uma descrição objetiva, no sentido clássico, dos fenômenos que desvendam a microfísica.

Em se tratando do problema do dualismo onda-partícula, o conceito da **complementaridade** de N. Bohr subentende que "a evidência recolhida sob diferentes condições experimentais não pode ser compreendida mediante uma única representação mental, mas deve ser considerada como complementar, no sentido em que somente a totalidade dos fenômenos esgota a informação possível acerca dos objetos"[1]. Importa esclarecer que quando da referência a "objetos", N. Bohr os

dissocia da imagem tradicional de uma realidade objetiva, "de fato, a interação finita entre objeto e instrumentos de medida condicionada pela própria existência do quantum de ação, implica - devido a impossibilidade de controlar a reação do objeto sobre os instrumentos de medida - a necessidade de uma renúncia definitiva ao ideal clássico da causalidade e uma revisão radical da nossa atitude em relação ao problema da realidade física"[1].

O desenvolvimento final da noção de complementaridade deveu-se, contudo, ao diálogo entre a interpretação ortodoxa da mecânica quântica (a escola de Copenhagen) e o que vem a ser o argumento central em oposição a esta escola: o "paradoxo" Einstein-Podolsky-Rosen[2] (EPR). Emblema de toda a pesquisa futura em teoria da medida, o argumento de EPR contesta o princípio de incerteza através de correlações não-locais presentes em pares adequadamente preparados de sistemas quânticos.

Diante da possibilidade de correlações não-locais, a complementaridade incorpora a noção de uma **situação experimental indivisível**. Ao contrário da abordagem clássica, o procedimento mediante o qual analisamos sistemas clássicos em partes integrantes cai por terra. Quando pares de entidades atômicas combinam-se num único sistema, o processo desencadeado é indivisível. Negligenciando a analisabilidade indefinida que constitui o método da física clássica, o resultado da operação de toda montagem experimental não nos informa sobre o sistema que desejamos observar, mas sobre ele mesmo como um todo.

A complementaridade desenvolve-se pois, no âmbito da construção proposta por EPR, de forma a "reter a noção de

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

indeterminismo na teoria quântica enquanto uma espécie de irredutível ausência de lei na natureza"[3]. Contudo, a resposta de N. Bohr ao "paradoxo", constitui-se naquela que EPR julgavam **a priori** inaceitável.

Referindo-se a duas quantidades físicas canonicamente conjugadas, escrevem EPR: "seria possível objetar contra a nossa conclusão de incompletude da mecânica quântica a partir do ponto de vista de que nosso critério de realidade não é suficientemente restritivo. "De fato, tal conclusão não seria alcançada se insistíssemos em que duas ou mais quantidades físicas só poderiam ser vistas como elementos simultâneos de realidade quando pudessem ser simultaneamente medidas ou previstas. "Segundo essa perspectiva, desde que se pode prever as quantidades P e Q apenas separadamente, estas não são simultaneamente reais. "Isso faz as realidades de P e Q dependerem do processo de medida executado sobre o primeiro sistema, o qual não perturba de modo algum o segundo. "Nenhuma definição razoável de realidade pode permitir tal coisa".[2]

O debate EPR/Bohr constituiu-se, portanto, em posturas filosóficas acerca do conceito de realidade física. A perplexidade diante das correlações "fantasmas" que viabilizam a construção de EPR, somente em 1965 pôde ser devidamente equacionada através das desigualdades de Bell[4], posto que cumprem relações a serem verificadas empiricamente. A. Aspect e colaboradores[5], em 1982, considerando pares de fótons gerados por uma cascata atômica, levaram a cabo o mais rigoroso dos experimentos até então considerados à luz das desigualdades de Bell, concluindo favoravelmente pela ortodoxia da interpretação quântica.

Recentemente, Z. Ou, S. Pereira, H. Kimble e K. Peng[6],

demonstraram experimentalmente o "paradoxo" EPR envolvendo variáveis dinâmicas com espectro contínuo, conforme a proposta original em EPR. Em se tratando de medidas de correlação entre variáveis contínuas, não há um formalismo geral, à semelhança das desigualdades de Bell, que estabeleça condições suficientes para a eliminação de toda classe de teorias realistas locais. Neste trabalho[6], a questão da irredutível não-localidade em mecânica quântica pode ser avaliada através da distribuição de Wigner no espaço de fase[7], conforme considerações de J. Bell[8] e outros[9,10].

A existência das correlações não-locais permitiram, também recentemente, a possibilidade de transporte de um estado quântico por um remetente que desconhece tanto o estado a ser enviado quanto a localização do destinatário. Desde que apenas a base sobre a qual se constrói o estado seja conhecida, C. Bennett e outros[11], verificam uma característica essencial da informação quântica: esta pode ser permutada de um sistema a outro, não podendo, contudo, segundo o teorema de Wootters e Zurek[12], ser duplicada ou clonada. Este teorema impede, outrossim, com base na linearidade da mecânica quântica, a possibilidade de comunicação superluminal mediante pares correlacionados de EPR, consideração esta que tem despertado grande interesse no âmbito da comunicação quântica[13,14].

Neste trabalho apresentamos um estudo das correlações do tipo EPR quando aplicadas a um sistema clássico[15] (capítulo 1). Tratando-se de feixes clássicos de luz emitidos aos pares, constata-se um resultado idêntico àquele para correlações da polarização quântica. A base desta coincidência encontra-se no fato de que o valor esperado relativo a que um fóton atravesse um polarizador constitui-se no

equivalente microscópico da lei de Malus[16]. Estudo semelhante apresentam A. Barut e P. Meystre[17], tratando-se de pares clássicos de "spins" correlacionados.

Tema igualmente polêmico e alvo de considerável referência junto à literatura diz respeito ao processo quântico de medida. Alguns modelos há que pretendem exemplificar o processo da medida quântica e suas implicações, onde a transição abrupta do operador densidade puro ao misto, quando da efetivação da medida, constitui-se em tarefa básica. Vários dentre eles [18, 21] consideram um processo dissipativo, o que implica numa evolução irreversível induzida pelo meio-ambiente (reservatório térmico), associada ao operador densidade partícula/detector amortecendo os termos não-diagonais dentro de um intervalo de tempo (tempo de decoerência) dependente da temperatura. A interação partícula/detector, nestes modelos, é considerada no âmbito de uma equação mestra markoviana [20-21], ou de um operador de evolução não-unitário obtido pelo método das integrais de trajetória [18-19].

O modelo proposto por W. H. Zurek [22-24], difere dos demais em virtude da evolução markoviana, permitindo à interação partícula/detector reestabelecer, tanto quanto possível, o seu estado inicial após períodos denominados tempo de recorrência. Apresentamos neste trabalho uma implementação do modelo de W. Zurek, pela qual termalizamos o meio-ambiente e propomos uma lei de potência para os autovalores da interação deste com o aparato de medida[25] (capítulo 2).

Mais recentemente, G. J. Milburn[26] expôs um modelo do qual decorre uma "decoerência intrínseca em mecânica quântica, baseada sobre uma modificação na evolução unitária da equação de Schrödinger". Desta modificação resulta um termo adicional junto à evolução do operador

densidade, responsável pelo decaimento da coerência quântica independentemente da intervenção de um reservatório e, portanto, da dissipação de energia associada. Retomando a proposta de Milburn, H. Moya-Cessa e outros[27], apresentam uma solução exata da equação proposta pelo primeiro, aplicando-a ao modelo de Jaynes-Cummings. Conclui-se que a decoerência intrínseca de Milburn é responsável pela deteriorização dos efeitos de coerência quântica do modelo, tal como recorrências da inversão atômica.

Quanto a óptica quântica, consideramos basicamente o estudo de hamiltonianos quadráticos onde o campo na cavidade é submetido a um bombeamento paramétrico[28,29] (capítulo 3). Para um aprimoramento desse estudo, inserimos um meio dissipativo junto à cavidade tal que as flutuações decorrentes são simuladas por forças estocásticas consideradas mediante termos lineares no hamiltoniano[30] (capítulo 4). Praticamente, a abordagem do processo dissipação/flutuação constitui-se numa generalização do lagrangeano proposto por Havas[31], onde junto ao fator integrante de fricção acrescentam-se as forças estocásticas propostas por Senitsky[32].

Hamiltonianos quadráticos similares têm sido ultimamente objetos de exaustivas investigações no âmbito da óptica quântica, em virtude da possibilidade da geração dos estados "squeezed" da radiação. Tais estados, originalmente propostos por H. Yuen[33], exibem flutuações nas quadraturas inferiores àquelas do vácuo, tal que se revestem de grande importância para o desenvolvimento da análise espectroscópica[34]. Em particular, considera-se a utilização da radiação squeezed em sistemas de comunicação óptica[35,36], de forma a maximizar a razão sinal/ruído.

H. Carmichael, G. Milburn e D. Walls[37], em consideração ao oscilador paramétrico não ressonante, obtém os estados squeezed segundo um conjunto de variáveis relacionadas àquelas originais por uma transformação dependente do tempo. Esta transformação é obtida através da decomposição simplética da matriz de evolução dinâmica. Tratando-se de um sistema similar, procedemos à diagonalização do hamiltoniano através de um desenvolvimento que toma por base o método dos invariantes proposto por Lewis e Riesenfeld[38]. Por esta abordagem obtemos, inclusive para o hamiltoniano dissipativo, o operador de evolução associado à equação de Schrödinger, do qual, via representação de Heisenberg, todas as quantidades de interesse são decorrentes.

Deve-se lembrar que o estudo dos processos dissipativos constitui-se atualmente num capítulo à parte em mecânica quântica. Mediante o grande interesse despertado na útima década, especialmente no que se refere aos sistemas mesoscópicos, bem como aos processos de decoerência (já considerados), várias são as aproximações desenvolvidas[39-40]. Em geral, a descrição dinâmica do sistema faz-se por conta do operador densidade, pois que informações incompletas acerca dos subsistemas resultam devido a média sobre os graus de liberdade associados ao banho.

CAPÍTULO 1

1.1 - INTRODUÇÃO

A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen[2] (EPR), em seu conhecido trabalho sobre a descrição da realidade física segundo a Mecânica Quântica (MQ), conjecturam rumo à conclusão de que tal descrição não pode ser considerada completa, compreendendo que "em uma teoria completa há um elemento correspondente a cada elemento da realidade". Para tal, servem-se de um par de artifícios básicos: o critério de realidade adotado, segundo o qual "se, sem qualquer modo de perturbar um sistema, pudermos predizer com certeza (isto é, com probabilidade igual a unidade) o valor de uma quantidade física, então existe um elemento da realidade física correspondente a esta quantidade física"; o segundo e engenhoso artifício diz respeito ao "gedankenexperiment" que compreende dois sistemas (I e II) previamente correlacionados, após o que, nenhuma interação é permitida entre ambas as partes. Pode-se calcular então, com a ajuda da equação de Schrödinger, o estado do sistema combinado em qualquer tempo subseqüente. Contudo, não se pode calcular os estados individuais do sistema após a interação, a menos que uma medida seja realizada, segundo o processo conhecido por **redução do pacote de onda**.

Logo, como conseqüência de duas diferentes medidas realizadas sobre, por exemplo, o sistema I, faz-se com que o sistema II encontre-se em estados relativos a duas diferentes funções de onda.

Diante do argumento de que "nenhuma alteração real pode ocorrer ao segundo sistema em conseqüência do que quer que seja feito sobre o primeiro", posto que no instante da medida não mais interagem, EPR concluem, com respeito ao segundo sistema: "é possível assegurar duas diferentes funções de onda à mesma realidade".

Sabe-se que, em teoria quântica, conforme o **princípio de incerteza de Heisenberg**, tratando-se de quantidades físicas descritas por operadores não comutativos, o conhecimento preciso de uma exclui o da outra. Prova-se através desse princípio, conforme os autores, que "(1) a descrição da realidade segundo a função de onda em MQ não é completa ou (2) quando os operadores correspondentes a duas quantidades físicas não comutam, estas quantidades não podem ter realidade simultânea".

Voltando ao experimento hipotético proposto, considera-se agora, mediante o princípio de incerteza, que as duas diferentes funções de onda relativas ao segundo sistema, associam-se a operadores não comutativos, por exemplo, posição (Q) e momento (P). Dessa forma, medindo-se P ou Q, pode-se predizer com certeza e sem qualquer modo de perturbar o sistema, os (auto)valores associados a estas quantidades físicas. Assim, afirmam EPR, "em concordância com nosso critério de realidade, no primeiro caso devemos considerar P como elemento da realidade e, no segundo caso, a quantidade Q é um elemento da realidade. "Mas, como temos visto, ambas as funções de onda pertencem a mesma realidade", contrariando a asserção devida ao princípio de incerteza.

Mostrou-se pois, por via do gedankenexperiment e do princípio de Heisenberg, que as quantidades não comutativas P e Q não

têm realidades simultâneas. Logo, desde que a "negação de (1) induz à negação da única outra alternativa, (2)", os autores concluem que "A DESCRIÇÃO DA REALIDADE FÍSICA SEGUNDO A FUNÇÃO DE ONDA EM MECÂNICA QUÂNTICA NÃO É COMPLETA".

Conforme salienta J. Bell[4], "o paradoxo de EPR desenvolve-se enquanto argumento de que a MQ não pode ser considerada uma teoria completa, e enquanto tal deve-se suplementá-la por variáveis adicionais. "Tais variáveis dão-se no sentido de restituir **causalidade** e **localidade** à teoria". Evidentemente, o nó górdio instaurado a partir do experimento hipotético proposto em [2], diz respeito à possibilidade de **correlações não-locais** entre sistemas previamente correlacionados e, desde então, impossibilitados de qualquer interação; nas palavras de J. Bell, "do requerimento de localidade (...) origina-se a dificuldade essencial". Em seu trabalho, crucial ao encaminhamento do problema levantado por EPR, J. Bell apresenta uma formulação matemática acerca das "variáveis ocultas", mostrando serem estas incompatíveis com as predições estatísticas da teoria quântica.

Deve-se, outrossim, frisar que independentemente do requerimento de separabilidade ou localidade, J. Von Neumann[41] argumenta quanto a impossibilidade de uma interpretação da MQ segundo as variáveis ocultas. A resposta ou solução de N. Bohr[1] às objeções de EPR, considerada junto à introdução deste trabalho, constitui outra importante referência, enquanto proposta de interpretação da teoria quântica (Escola de Copenhagen), no sentido de refutar as variáveis ocultas. Não nos fixaremos nestes tópicos, cabendo aqui apenas um tratamento abreviado, segundo J.Clauser e A. Shimony[42], sobre as **desigualdades de Bell**.

O trabalho de J. Bell (1965), considera a versão modificada do gedankenexperiment em [2], proposta por D. Bohm[43], (EPRB), formulada em termos de estados discretos. Em tal versão, o sistema consiste de um par de partículas com spin -1/2 espacialmente separadas, e preparadas, contudo, segundo um estado singleto

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\chi_1^+\rangle \otimes |\chi_2^-\rangle - |\chi_1^-\rangle \otimes |\chi_2^+\rangle\right), \qquad (1.1)$$

por exemplo, por dissociação de um sistema com spin 0. Na expressão (1.1), $|\chi_1^+\rangle$ compõe um estado de spin genérico relativo à partícula 1, segundo

$$|\chi^+\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle + sen\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi}|-\rangle = |\theta\phi\rangle, \qquad (1.2)$$

onde os ângulos θ e ϕ caracterizam a direção do feixe em algum sistema de referência, enquanto que os estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$ apontam a orientação do spin. Tem-se ainda que $|\chi^-\rangle = |\pi-\theta, \phi+\pi\rangle$.

Consideremos $A_{\hat{a}}$ enquanto resultado de uma medida da componente de spin da partícula 1, referente ao par, ao longo da direção $\hat{a}$; idem para $B_{\hat{b}}$ no que tange a partícula 2 ao longo da direção $\hat{b}$. Admitindo-se a unidade de spin igual a $\hbar/2$, decorre que $A_{\hat{a}}$, $B_{\hat{b}}=\pm 1$.

O produto $A_{\hat{a}} \cdot B_{\hat{b}}$ constitui-se num único observável do sistema, embora duas operações distintas sejam necessárias para a sua medida. Para a versão EPRB do gedankenexperiment, a predição segundo a MQ do valor esperado do observável acima, a saber, a probabilidade conjunta de se detectar as partículas 1 e 2 polarizadas ao longo das

direções $\hat{a}$ e $\hat{b}$, respectivamente, nos leva ao resultado

$$\left[E(\hat{a},\hat{b})\right]_{\psi} = \langle \psi \mid \sigma_1 \cdot \hat{a}\ \sigma_2 \cdot \hat{b} \mid \psi \rangle = -\hat{a} \cdot \hat{b}\ . \tag{1.3}$$

Observa-se que uma situação de **determinismo implícito** é inerente à estrutura da equação (1.3), desde que se considere os detectores dispostos paralelamente entre si, tal que

$$\left[E(\hat{a},\hat{a})\right]_{\psi} = -1\ , \tag{1.4}$$

qualquer que seja a direção $\hat{a}$. Então, podemos predizer com certeza o resultado B, obtendo-se previamente o resultado A. Posto que à função de onda inicial, $|\Psi\rangle$, não cabe determinar o resultado de uma medida individual, o fato acima sugere a possibilidade de uma especificação mais completa do estado no qual se manifesta este determinismo. Denota-se este estado pelo símbolo λ e presume-se que o estado $|\Psi\rangle$, segundo a MQ, seja uma especificação parcial relativa a λ, podendo este último envolver muitas dimensões, partes discretas e/ou contínuas, etc. No mais, traduz-se por Λ o espaço dos estados λ, igualmente tão geral quanto se deseja, não se fazendo restrições à sua dimensionalidade, ou requerimento da linearidade das operações, etc. No intuito de que medidas de probabilidade possam ser definidas junto a Λ, representamos a função distribuição para os estados λ pelo símbolo ρ. Para o **ensemble** de um grande número de sistemas observáveis compreendidos por Λ, assumimos para ρ a norma unitária

$$\int_{\Lambda} d\rho = 1. \tag{1.5}$$

Em uma teoria determinista de variáveis ocultas, o observável $A_{\hat{a}} \cdot B_{\hat{b}}$ apresenta um valor definido $(A_{\hat{a}} \cdot B_{\hat{b}})(\lambda)$, para o estado λ. No âmbito desta teoria, J. Bell define localidade segundo: **uma teoria determinista de variáveis ocultas é local se para todo $\hat{a}$ e $\hat{b}$, e todo λ e Λ, seguir-se que**

$$(A_{\hat{a}} \cdot B_{\hat{b}})(\lambda) = A_{\hat{a}}(\lambda) \cdot B_{\hat{b}}(\lambda) \ . \tag{1.6}$$

Então, uma vez definido o estado λ e considerando-se as partículas espacialmente separadas, segue-se que as medidas em A mostram-se dependentes apenas dos parâmetros λ e $\hat{a}$, independendo de $\hat{b}$. A dependência das medidas em B restringe-se a λ e $\hat{b}$, excluindo-se $\hat{a}$. Logo, "qualquer teoria física razoável que seja realista e determinista, negando a existência da ação-à-distância, é local nesse sentido". Para tais teorias, o valor esperado de $A_{\hat{a}} \cdot B_{\hat{b}}$ escreve-se segundo

$$E(\hat{a}, \hat{b}) = \int_{\Lambda} A_{\hat{a}}(\lambda) B_{\hat{b}}(\lambda) \ d\rho \ . \tag{1.7}$$

A prova do teorema de J. Bell, consiste em mostrar que, se a condição de localidade (1.6) e, para uma concordância parcial com a MQ, a situação especial em (1.4) são ambas satisfeitas, os valores esperados satisfazem a uma desigualdade simples. Esta desigualdade constitui então uma predição alternativa àquela para o valor esperado de $A_{\hat{a}} \cdot B_{\hat{b}}$ em MQ. Tais predições, segundo as desigualdades, são

quantitativamente diferentes daquela na equação (1.3).

A demonstração é simples: a equação (1.4) é justificada se e somente se a relação

$$A_{\hat{a}}(\lambda) = -B_{\hat{a}}(\lambda) \ , \tag{1.8}$$

for válida para todo λ e Λ. Do uso da equação (1.8) podemos proceder ao cálculo da função, a qual envolve três diferentes orientações possíveis para o detector,

$$E(\hat{a},\hat{b}) - E(\hat{a},\hat{c}) = -\int_{\Lambda} \left[A_{\hat{a}}(\lambda)\ A_{\hat{b}}(\lambda) - A_{\hat{a}}(\lambda)\ A_{\hat{c}}(\lambda)\right] d\rho$$

$$= -\int_{\Lambda} A_{\hat{a}}(\lambda)\ A_{\hat{b}}(\lambda) \left[1 - A_{\hat{b}}(\lambda)\ A_{\hat{c}}(\lambda)\right] d\rho \ .$$

Desde que A, B = ± 1, podemos escrever esta última expressão na forma

$$|\ E(\hat{a},\hat{b}) - E(\hat{a},\hat{c})\ | \leq \int_{\Lambda} \left[1 - A_{\hat{b}}(\lambda)\ A_{\hat{c}}(\lambda)\right] d\rho \ .$$

Usando-se as equações (1.5), (1.7) e (1.8), tem-se

$$|\ E(\hat{a},\hat{b}) - E(\hat{a},\hat{c})\ | \leq 1 + E(\hat{b},\hat{c}) \ . \tag{1.9}$$

A desigualdade (1.9) é a primeira de uma família de outras conhecidas coletivamente por "desigualdades de Bell".

Como exemplo simples do desacordo entre as predições da equação (1.3) e a desigualdade (1.9), consideramos coplanares as

direções $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$, com $\hat{a}$ e $\hat{c}$ separados pelo ângulo $2\pi/3$, enquanto que $\hat{b}$ encontra-se a $\pi/3$ com relação a ambos, $\hat{a}$ e $\hat{c}$. Então:

$$\hat{a}\cdot\hat{b} = \hat{b}\cdot\hat{c} = 1/2 \ , \qquad \hat{a}\cdot\hat{c} = -1/2 \ .$$

Para estas direções

$$\left| \left[E(\hat{a},\hat{b})\right]_\psi - \left[E(\hat{a},\hat{c})\right]_\psi \right| = 1 \ , \qquad 1 + \left[E(\hat{b},\hat{c})\right]_\psi = 1/2 \ ,$$

valores estes que não satisfazem a desigualdade (1.9). Conseqüentemente, as predições da MQ e aquelas da desigualdade (1.9) são incompatíveis, no mínimo para alguns pares de orientações dos detectores.

Deve-se observar, no entanto, que, apesar do grande valor heurístico do argumento de J.Bell (1965) (cuja formulação vai de encontro a predições experimentais envolvendo sistemas factíveis de serem produzidos em laboratório), a relação (1.4) não apresenta validade exata em situações esperimentais reais. A qualquer detector associa-se uma eficiência menor que 100%, e qualquer analisador real possui alguma atenuação, bem como algum escape em seu canal ortogonal.

O problema relativo à derivação matemática do argumento de Bell com base na relação (1.4) foi primeiramente solucionado por J. Clauser, M. Horne, A. Shimony e R. Holt[44], (CHSH), que prescindem da validade desta relação para a derivação de uma desigualdade mais geral, a qual envolve sistemas onde se requer uma correlação mínima necessária em contrapartida à correlação perfeita em (1.4). Quando, no entanto, requer-se a validade de (1.4), a relação de CHSH

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

implica exatamente em (1.9).

Essencialmente, a mesma desiqualdade devida a CHSH foi subseqüentemente derivada por J. Bell (1971), onde se invoca uma definição generalizada de localidade incluindo sistemas cuja evolução seja inerentemente estocástica, assim como sistemas deterministas com variáveis randômicas adicionais associadas aos aparatos de medida que, por ventura, possam afetar os resultados experimentais. Esta desigualdade (deduzida junto ao apêndice 1), mais familiar no âmbito da literatura, apresenta-se na forma

$$-2 \leq E(a,b) - E(a,b') + E(a',b) + E(a',b') \leq 2 \ . \qquad (1.10)$$

Redefinindo-se as direções a, a', b e b', junto à expressão central em (1.10), pode-se permutar o sinal negativo para qualquer dos quatro termos. A desigualdade (1.10) e suas permutações constituem uma forma, dentre outras, das desigualdades de Bell, e representam uma predição geral para as teorias locais de variáveis ocultas.

Servindo-se da desigualdade proposta por CHSH, mais conveniente ao tratamento experimental, e considerando a proposta de se utilizar estados de polarização de fótons produzidos por cascatas radioativas, a substituir partículas com spin -1/2, A. Aspect, P. Grangier e G. Roger[5] finalmente realizaram o teste experimental referente à situação antes hipotética imaginada por EPR. A proposição do tratamento destas correlações segundo estados de polarização de fótons, foi primeiramente desenvolvida por D.Bohm e A. Aharonov[46], considerando-se o processo de aniquilação de um par elétron-pósitron. Posteriormente, CHSH, retomando esta abordagem[44] sugerem a produção de

pares de fótons correlacionados emitidos em uma cascata radioativa, tal qual o procedimento de A. Aspect e outros, através do processo J = 0 → 1 → 0 em um átomo de cálcio. Tal realização, conhecida por experimento d'Orsay, constata, sem ambigüidades, a violação da desigualdade de Bell, confirmando, então, a possibilidade de interações não-locais e o mérito das predições da teoria quântica.

Como primeira etapa deste trabalho, apresentamos um cálculo do coeficiente de correlação da polarização , similar àquele da MQ para pares de fótons sob um estado singleto, onde consideramos um ensemble clássico de feixes de luz[15]. Os ângulos de polarização destes feixes são considerados segundo variáveis randômicas que caracterizam o ensemble. Verifica-se que o resultado deste coeficiente de correlação clássico coincide exatamente com o caso quântico. Em conseqüência, esperamos, pois, que em ambas as descrições da luz, teorias clássica e quântica, a propriedade denominada polarização deva apresentar comportamentos idênticos sob a consideração de procedimentos experimentais similares. Como suporte às considerações acima, propomos um experimento simples, a partir do qual o coeficiente de correlação das polarizações, para "flashes" de luz, é obtido. Apresentamos, no mais, como subsídio numérico, uma simulação da situação experimental em questão.

1.2 - PREDIÇÃO QUÂNTICA PARA O COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO PARA POLARIZAÇÕES.

Conforme discutido, a versão do experimento d'Orsay

considera a emissão de pares de fótons, a diferentes freqüências ν_1 e ν_2, propagando-se ao longo das direções contrárias +Oz e -Oz segundo a figura 1. Considera-se que os fótons estejam no estado de polarização

$$|\psi(\nu_1,\nu_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle - |y_1\rangle \otimes |y_2\rangle\right), \qquad (1.11)$$

onde $|x_1\rangle$ refere-se ao fóton ν_1 propagando-se na direção -Oz, linearmente polarizado ao longo de Ox, etc...

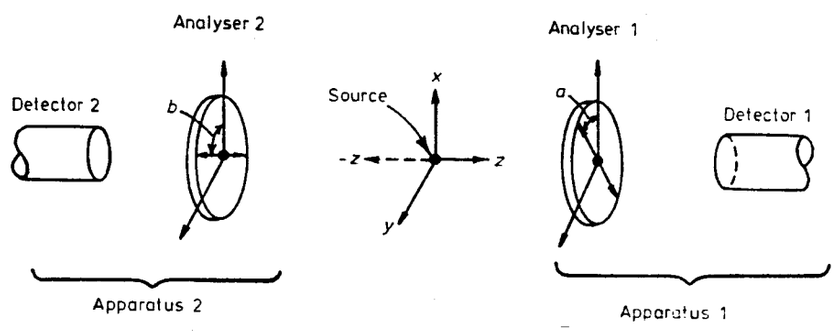


Figura 1: *Gedankenexperiment EPRB, onde pares de fótons* ν_1 *e* ν_2 *emitidos pela fonte S, segundo o estado (1.11), são medidos pelos analisadores 1 e 2, que compreendem polarizadores, segundo as direções* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$, *e respectivos detectores.*

Os analisadores 1 e 2 realizam medidas dicotômicas (resultados +1 ou -1), correspondentes às polarizações lineares paralela ou perpendicular correspondentes à incidência dos fótons. A

natureza destas medidas, similar à ação de um filtro Stern-Gerlach, permite-nos descrever a propriedade de polarização dos fótons usando o mesmo formalismo relativo a partículas com spin -1/2, conforme se observa em (1.11). De outro modo, os estados de polarização circular à esquerda $|L\rangle$ e à direita $|R\rangle$ são, respectivamente, escritos por

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x\rangle + i|y\rangle\right), \quad |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x\rangle - i|y\rangle\right), \tag{1.12}$$

em que os estados

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad |y\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

representam polarizações lineares ao longo dos eixos cartesianos Ox e Oy. Mediante as expressões em (1.12), podemos escrever a equação (1.11) na forma

$$|\Psi(1,2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|L_1\rangle \otimes |L_2\rangle + |R_1\rangle \otimes |R_2\rangle\right), \tag{1.13}$$

o que invoca a conservação do momento angular total (igual a zero), e paridade (igual a 1), ou seja, os fótons são emitidos com o mesmo estado de polarização mas em direções opostas.

Considerando-se, de forma geral, um feixe de fótons propagando-se segundo a direção $\hat{k}$, em uma dada direção de polarização, associamos o fóton representativo desse feixe ao estado

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\chi}\,|L\rangle + e^{i\chi}\,|R\rangle\right) = \begin{pmatrix}\cos\chi \\ sen\,\chi \\ 0\end{pmatrix}, \qquad (1.14)$$

onde o ângulo χ, com relação ao eixo x, especifica a direção de polarização. Portanto, $\cos^2\chi$ e $sen^2\chi$ são, respectivamente, as probabilidades de se encontrar um fóton nos estados $|x\rangle$ ou $|y\rangle$.

Façamos, agora, com que este dado feixe incida sobre um polarizador com orientação ao longo de um vetor $\vec{a}$, perpendicular ao eixo z, e com um ângulo ϕ_a em relação ao eixo x. Verifica-se, que a diferença angular $\phi_a-\chi$ determina a possibilidade do fóton em (1.14) ser absorvido (ou espalhado) ou atravessar o polarizador. Considerando-se o operador de projeção $\hat{R}(\phi_a) = |\phi_a\rangle\langle\phi_a|$, característico do polarizador, na representação matricial

$$\hat{R}(\phi_a) = \begin{pmatrix}\cos^2\phi_a & \cos\phi_a sen\,\phi_a & 0 \\ \cos\phi_a sen\,\phi_a & sen^2\phi_a & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad (1.15)$$

pode-se verificar que:

i) A aplicação deste projetor, (1.15), sobre o estado (1.14), implica que

$$\hat{R}(\phi_a)\,|\chi\rangle = \cos\,(\phi_a - \chi)\,|\phi_a\rangle\,. \qquad (1.16)$$

Então, para $\chi = \phi_a$ e $\chi = \phi_a \pm \pi/2$, o estado do fóton torna-se um autoestado de $\hat{R}(\phi_a)$, com autovalores iguais a 1 e 0,

respectivamente, ou seja

$$\hat{R}(\chi)\,|\,\chi\rangle = |\,\chi\rangle\,, \tag{1.16a}$$

$$\hat{R}(\chi)\,|\,\chi \pm \pi/2\rangle = 0\,, \tag{1.16b}$$

onde o estado $|\,\chi\pm\pi/2\rangle$ representa um fóton cuja direção de polarização é perpendicular ao estado $|\,\chi\rangle$, tal que $\langle\chi|\,\chi\pm\pi/2\rangle = 0$. Logo, associamos a probabilidade 1 de se atravessar o polarizador aos fótons que se encontram no estado $|\,\chi=\phi_a\rangle$, estando aqueles com direção de polarização perpendicular a esta impedidos de atingir o detector, conforme o esboço da figura 1.

ii) O valor esperado do projetor (1.15) com relação ao estado (1.14) é

$$\langle\chi|\,\hat{R}(\phi_a)\,|\,\chi\rangle = |\,\langle\chi|\,\phi_a\rangle\,|^2 = \cos^2(\chi - \phi_a)\,, \tag{1.17}$$

o que nos informa da possibilidade de um fóton sob o estado (1.14) atravessar o polarizador. Segundo a descrição macroscópica da luz, a expressão (1.17) corrresponde à lei de Malus[16] para a intensidade de um feixe emergente, de forma que, na consideração de um ensemble de fótons, o tratamento quântico reproduz um resultado bem conhecido da teoria clássica da luz.

Para restabelecermos os resultados +1 e -1 de uma medida dicotômica, conforme salientado quando da introdução do experimento d'Orsay (figura 1), e mesmo por questão de conveniência para os

cálculos, introduziremos um outro projetor

$$\hat{Q}(\phi_a) = 2|\phi_a\rangle\langle\phi_a| - \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \cos 2\phi_a & sen\ 2\phi_a & 0 \\ sen\ 2\phi_a & -\cos 2\phi_a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

do qual, à semelhança de $\hat{R}(\phi_a)$, resulta um estado linearmente polarizado ao longo da direção $\vec{a}$, no plano X-Y, e ângulo ϕ_a com relação ao eixo x. Pode-se verificar, com relação ao operador $\hat{Q}(\phi_a)$, os autovalores -1 e +1, respectivamente associados aos estados $|\phi_a\rangle$ e $|\phi_a \pm \pi/2\rangle$. O valor esperado deste projetor com relação ao estado do fóton em (1.14), leva ao resultado

$$\langle\chi|\hat{Q}(\phi_a)|\chi\rangle = \cos 2(\chi - \phi_a) \ . \tag{1.19}$$

Atendo-se, agora, à emissão de pares correlacionados de fótons segundo a esquematização da figura 1.1, e considerando, portanto, o estado de polarização descrito em (1.11) ou (1.13), temos que, para direções arbitrárias dos analizadores, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, com ângulos ϕ_a e ϕ_b, respectivamente, o valor médio do operador (1.18) é nulo,

$$\langle\psi(1,2)|\hat{Q}_1(\phi_a)|\psi(1,2)\rangle = \langle\psi(1,2)|\hat{Q}_2(\phi_b)|\psi(1,2)\rangle = 0 \ ,$$

enquanto que o coeficiente normalizado de correlação para polarização implica

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

$$E_{MQ}(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\langle\psi(1,2)\,|\,\hat{Q}_1(\phi_a)\otimes\hat{Q}_2(\phi_b)\,|\,\psi(1,2)\rangle}{\left[\langle\psi(1,2)\,|\,\left(\hat{Q}_1(\phi_a)\right)^2\,|\,\psi(1,2)\rangle\langle\psi(1,2)\,|\,\left(\hat{Q}_2(\phi_b)\right)^2\,|\,\psi(1,2)\rangle\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \langle\psi(1,2)\,|\,\hat{Q}_1(\phi_a)\otimes\hat{Q}_2(\phi_b)\,|\,\psi(1,2)\rangle$$

$$= \cos 2(\phi_a - \phi_b)\ . \qquad (1.20)$$

O denominador na expressão acima iguala-se à unidade pelo fato de ser $\hat{Q}(\phi)$ um projetor. Conforme já colocado, verificou-se experimentalmente a validade da expressão (1.20).

1.3 - CORRELAÇÃO PARA LUZ POLARIZADA

Em contrapartida ao experimento d'Orsay, abordamos o problema onde uma fonte clássica emite flashes de luz que compõem dois pacotes de onda linearmente polarizados, viajando em direções opostas. Segundo esta versão, a intensidade da luz em ambos os feixes é medida em coincidência, ao invés da contagem dos fótons emitidos aos pares, segundo a figura 1.

Para tal, centramos junto à cavidade de um tubo cilíndrico uma fonte de luz isotrópica e não polarizada. Por meio de um sistema de lentes (ver figura 2), produzimos um par de feixes paralelos e contrapropagantes ao longo da extensão do cilindro. Nas extremidades deste, dois polaróides são adaptados e mantidos sob o vínculo de que seus eixos de polarização, ao longo dos quais os feixes incidentes emergem linearmente polarizados, difiram por um ângulo α.

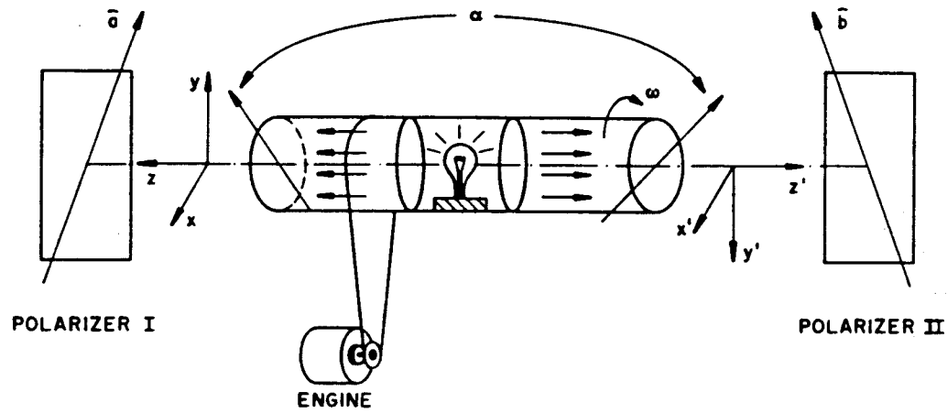


Figura 2: *Uma fonte de luz não polarizada é centrada junto ao cilindro tal que seus feixes, tornados paralelos por um sistema de lentes, propagam-se até os polaróides localizados nas extremidades do cilindro. As orientações destes polaróides diferem por um ângulo* α*, o qual, por exemplo, pode ser escolhido igual a zero, implicando em feixes emergentes com polarizações paralelas. Designamos por* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$ *as orientações dos polarizadores.*

Algum dispositivo deve ser considerado, no que concerne a fonte, tal que os intervalos de tempo associados a cada flash sejam idênticos, iguais a τ, enquanto que os intervalos de tempo entre flashes consecutivos, Δt, sejam randômicos. Após o que, mantemos o cilindro em rotação em torno do seu eixo de simetria (z) com freqüência angular ω, onde $\omega\tau<<1$ e o tempo randômico $\Delta t \rangle \tau$. Assim, o caráter randômico presente no gedankenexperiment EPRB - a polarização dos

fótons emitidos em uma cascata atômica - é simulado pela polarização dos feixes emergentes do tubo cilíndrico, os quais faremos incidir sobre polarizadores externos com ângulos de polarização fixos em $\vec{a}$ e $\vec{b}$, respectivamente. Em essência, o experimento deve se ajustar de forma tal que para um número N suficientemente grande de flashes, os feixes simultaneamente emergentes apresentem direções de polarização definidas e igualmente distribuídas entre si.

Estabelecidas as orientações de polarização nos detectores, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, juntamente com o ângulo α entre os filtros, o coeficiente de correlação das polarizações pode ser medido em termos das intensidades dos feixes, segundo

$$E(\vec{a},\vec{b},\alpha) = \frac{\sum_i^{N'} I_i(a)\, I_i(b) - \sum_i^{N'} I_i(a) \sum_j^{N'} I_j(b)}{\left[\left(\sum_i^{N'} \left(I_i(a)\right)^2 - \left(\sum_i^{N'} I_i(a)\right)^2\right)\left(\sum_i^{N'} \left(I_i(b)\right)^2 - \left(\sum_i^{N'} I_i(b)\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (1.21)$$

onde por $I_i(a)$ e $I_i(b)$ compreendemos as intensidades registradas nos detectores A e B, respectivamente. As apóstrofes demarcadas junto aos símbolos de soma significam que estas devem ser divididas por N, o número de medidas efetivadas.

Em seguida, procedemos a uma simulação numérica do experimento acima detalhado, com o objetivo de estimar o coeficiente de correlação (1.21). Designamos os ângulos característicos aos polarizadores externos, com relação ao eixo x no referencial de laboratório, por ϕ_a e ϕ_b enquanto que os ângulos entre as direções de polarização dos feixes emergentes com o mesmo eixo -x, por χ_a e χ_b. De

acordo com a lei de Malus, a intensidade destes feixes ao atingirem o detector, provenientes do polaróide (em χ_a, por ex.) e após atravessarem pelo polarizador (em ϕ_a, por ex.), escreve-se segundo

$$I_a(\phi_a, \chi_a) = I_0 \cos^2(\phi_a - \chi_a) \ , \tag{1.22}$$

onde I_0 diz respeito ao valor máximo da intensidade de luz. Expressão similar a (1.22) é válida para os feixes relativos aos ângulos χ_b e ϕ_b.

A cada flash os ângulos χ_a e χ_b assumem valores diferentes, randomicamente distribuídos sob o intervalo $[0,\pi]$, embora sujeitos ao vínculo

$$\chi_b = (\chi_a + \alpha) \ Mod \ \pi. \tag{1.23}$$

Desde que χ_a e χ_b são parâmetros randômicos, conseqüentemente as intensidades I_a e I_b também apresentam-se como quantidades randômicas. Logo, a simulação numérica da relação (1.22) e seu par $I_b(\phi_b, \chi_b)$, permite-nos a obtenção direta do coeficiente de correlação (1.21). Os resultados apresentados pela tabela 1 compreendem α=0, polarização paralela dos feixes que sensibilizam os detectores A e B, e assumem diferentes valores para os ângulos ϕ_a e ϕ_b. Pode ser então verificado que a simulação numérica do coeficiente de correlação, segundo (1.21), reproduz o resultado predito pela mecânica quântica, $\cos 2(\phi_a - \phi_b)$.

$E_{sim}(a, b, 0)$			
N	ϕ_a	$\pi/8$	$\pi/8$	$\pi/8$
	ϕ_b	$\pi/16$	$\pi/4$	$7\pi/24$
10		0.9119	0.6585	0.5314
50		0.9245	0.6701	0.6223
10^2		0.9388	0.7542	0.5204
2×10^2		0.9339	0.7405	0.5034
5×10^2		0.9270	0.7201	0.4902
10^3		0.9229	0.7050	0.4961
10^4		0.9225	0.7014	0.5044
10^5		0.9241	0.7085	0.4972
10^6		0.9243	0.7071	0.4994
Theor.		0.9239	0.7071	0.5000

Tabela 1: *Simulação numérica para o coeficiente de correlação. Por N designamos o número de eventos considerados com relação a três diferentes conjuntos para os ângulos* ϕ_a *e* ϕ_b. *Os valores teóricos,* $\cos[2(\phi_a-\phi_b)]$, *preenchem a última linha da tabela.*

1.4 - A MÉDIA NO ENSEMBLE

Procedemos aqui ao cálculo, segundo a média em um ensemble clássico, relativo ao experimento proposto. Podemos, com relação à quantidade randômica $I_a(\phi_a, \chi_a)$, introduzir a variável randômica admensional com média nula

$$A(\phi_a,\chi_a) = \frac{I_a(\phi_a,\chi_a) - \langle I_a(\phi_a,\chi_a)\rangle}{\langle I_a(\phi_a,\chi_a)\rangle} , \qquad (1.24)$$

similar à variável $B(\phi_b, \chi_b)$ relativa a $I_b(\phi_b, \chi_b)$. A média das intensidades, tomadas de um ensemble, escreve-se segundo

$$\langle I_a(\phi_a,\chi_a)\rangle = \int_0^{\pi} I_a(\phi_a,\chi_a)\ \rho(\chi_a)\ d\chi_a , \qquad (1.25)$$

onde $\rho(\chi_a)$ diz respeito à distribuição de probabilidade normalizada acerca do ângulo randômico χ_a. Para uma distribuição isotrópica, $\rho(\chi_a)=1/\pi$, decorre $\langle I_a(\phi_a,\chi_a)\rangle=I_0/2$, tal que a variável randômica (1.24), seguida de sua contraparte, escrevem-se na forma

$$A(\phi_a,\chi_a) = \cos 2(\phi_a - \chi_a) , \qquad (1.26a)$$

$$B(\phi_b,\chi_b) = \cos 2(\phi_b - \chi_b) . \qquad (1.26b)$$

Para o coeficiente de correlação clássico, normalizado, entre ambas as variáveis randômicas em (1.26), temos, à semelhança da expressão em (1.20),

$$E_{ens}(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\langle A(\phi_a,\chi_a)B(\phi_b,\chi_b)\rangle}{\left[\langle A^2(\phi_a,\chi_a)\rangle\langle B^2(\phi_b,\chi_b)\right]^{\frac{1}{2}}} . \qquad (1.27)$$

Para o coeficiente de correlação cruzada escrevemos

$$\langle A(\phi_a,\chi_a)\,B(\phi_b,\chi_b)\rangle = \int_0^{\pi} d\chi_a \int_0^{\pi} d\chi_b\, A(\phi_a,\chi_a)\,B(\phi_b,\chi_b)\;\rho(\chi_a,\chi_b)\,, \tag{1.28}$$

enquanto que para o coeficiente de autocorrelação decorre

$$\langle A^2(\phi_a,\chi_a)\rangle = \int_0^{\pi} A^2(\phi_a,\chi_a)\;\rho(\chi_a)\;d\chi_a\,, \tag{1.29}$$

com expressão equivalente para $\langle B^2(\phi_b,\ \chi_b)\rangle$.

A função $\rho(\chi_a,\chi_b)$ diz respeito à distribuição de probabilidade conjunta para as variáveis randômicas, tal que

$$\rho(\chi_a) = \int_0^{\pi} \rho(\chi_a,\chi_b)\;d\chi_b\,, \tag{1.30}$$

perfaz a probabilidade marginal da variável χ_a.

Quando não há correlação entre os feixes contrapropagantes, a distribuição de probabilidade conjunta fatoriza-se segundo $\rho(\chi_a,\chi_b)=\rho(\chi_a)\rho(\chi_b)$, ou seja, $\langle A(\chi_a)B(\chi_b)\rangle=\langle A(\chi_a)\rangle\langle B(\chi_b)\rangle=0$, posto que as médias individuais das grandezas em (1.26) se anulam. Contudo, a existência de um vínculo entre a polarização dos feixes acarreta uma correlação não nula entre as variáveis A e B, o que podemos verificar considerando-se a probabilidade conjunta

$$\rho(\chi_a,\chi_b) = \rho(\chi_a)\;\delta\left[\chi_b - f(\chi_a)\right]. \tag{1.31}$$

Em face de que o ângulo α entre as direções dos feixes contrapropagantes é o mesmo para todos os flashes que compõem o ensemble, à semelhança da equação (1.23), escrevemos $f(\chi_a)=(\chi_a+\alpha)\,\mathrm{mod}\pi$. Pode ser facilmente verificado que a expressão (1.31) encontra-se devidamente normalizada. O cálculo imediato do coeficiente de autocorrelação, eq.(1.29), leva-nos ao valor 1/2, enquanto que o coeficiente de correlação em (1.27) reproduz

$$E_{ens}(\vec{a},\vec{b}) = \cos 2\,(\phi_a - \phi_b + \alpha)\ , \qquad (1.32)$$

resultado idêntico àquele obtido através da descrição quântica do estado de dois fótons, eq.(1.20), quando consideramos $\alpha=0$.

1.5 - DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

Desde que a propriedade física denominada **POLARIZAÇÃO** encontra-se presente em ambas as descrições da luz, quântica e clássica, é então razoável supor que, sob procedimentos experimentais similares, resultados coincidentes (mesmo coeficientes de correlação) sejam obtidos destas diferentes interpretações quando da consideração de um ensemble quântico de fótons (experimento d'Orsay) ou do ensemble de feixes de luz (seções 1.3 e 1.4). Logo, desde que o coeficiente de correlação não é uma prerrogativa da descriçào quântica, temos proposto uma construção experimental, baseada sob os mesmos princípios da correlação EPRB, envolvendo contudo uma fonte clássica de luz. Os resultados provenientes da simulação numérica (tabela I) dão subsídios

a esta construção.

A. Barut e P. Meystre[17], segundo motivações basicamente análogas, consideram um sistema clássico inicialmente em repouso (momento angular total igual a zero) que, em dado instante, divide-se num par de subsistemas contrapropagantes com spins clássicos (ou momento angular) opostos, conforme a figura 3.

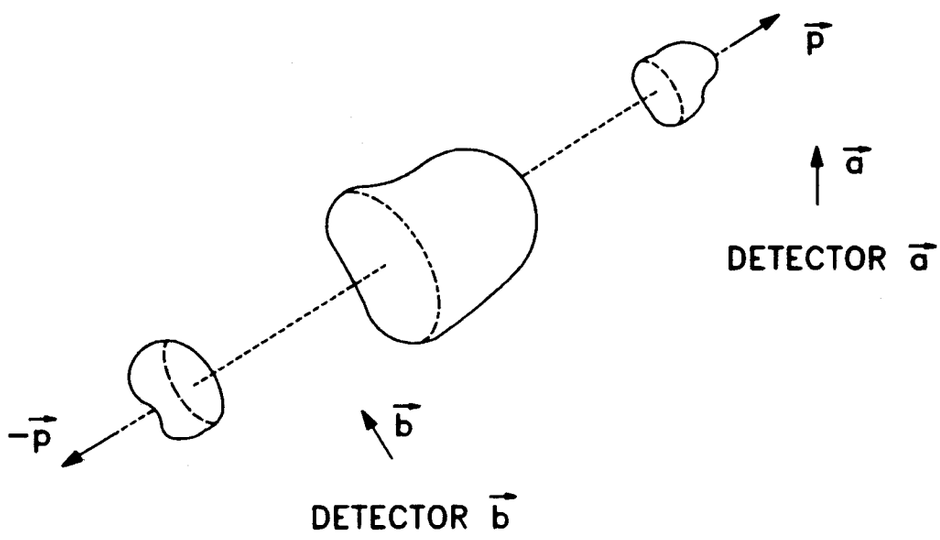


Figura 3: *Esquematização da proposta devida a A. Barut e P. Meystre.*

Uma tal proposta, em princípio passível de realização experimental, consiste na medida individual das projeções dos momentos

angulares ou spins ao longo das direções $\vec{a}$ e $\vec{b}$ previamente estipuladas aos detectores. A propriedade que esta proposta traz em comum com a sua contraparte quântica, sugerida por D. Bohm[43], é o conjunto dos ângulos de emissão associados aos subsistemas os quais devem manter o momento angular total nulo. Da consideração de um ensemble de medidas e assumindo que as direções dos subsistemas, após a divisão, estão randomicamente distribuídas ao longo de todas as direções, verificam os autores que o coeficiente de correlação entre as grandezas a serem medidas ($A \equiv \vec{p}\cdot\vec{a}$ e $B \equiv -\vec{p}\cdot\vec{b}$), leva ao resultado

$$E_{CL}(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\langle AB\rangle}{\left[\langle A^2\rangle\langle B^2\rangle\right]^{\frac{1}{2}}} = -\cos\,(\vec{a},\vec{b})\ , \tag{1.33}$$

coincidente com aquele da MQ quando partículas com spins são consideradas.

Com o objetivo de perfazer mais estreitamente os requisitos do análogo quântico, A.Barut e P. Meystre consideram ainda a discretizaçào de suas medidas, evidentemente contínuas, A e B. Para tal, a cada detector (direção $\vec{a}$ ou $\vec{b}$) associa-se uma esfera cujos hemisférios superior (S) e inferior (I), invocam a orientação do detector segundo a figura 4.

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

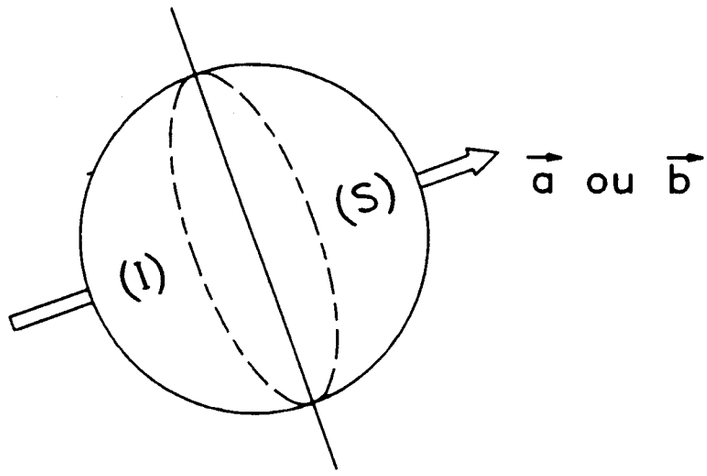


Figura 4: *O hemisfério relativo à orientação do detector denomina-se (S), enquanto que aquele oposto a esta orientação, (I).*

Desse modo, a todos os spins cujos ângulos de orientação compreendam o hemisfério (S), declara-se "spin up", e às demais orientações "spin down". Novamente, segundo esta construção, ambos os coeficientes de correlação, clássico e quântico,são coincidentes, o que, conforme um trabalho subseqüente de A. Barut[47], torna explícito que as desigualdades de Bell não eliminam modelos de spin puramente clássicos, mas sim modelos (mistos) quânticos com variáveis ocultas clássicas λ.

A. Aspect[48] desfaz a conclusão de A. Barut ao mostrar que a discretização empregada junto às quantidades A e B, destrói a natureza clássica do modelo. Ao dispositivo responsável pela

discretização das medidas, A. Aspect considera um sistema randômico interno, tal que à conversão das projeções $\vec{p}\cdot\vec{a}$ e $-\vec{p}\cdot\vec{b}$ em valores +1 ou -1, associam-se as probabilidades, respectivamente

$$P_+(\vec{p}\cdot\vec{a}) \quad e \quad P_-(\vec{p}\cdot\vec{a}) \ , \tag{1.34}$$

(idem para as medidas $-\vec{p}\cdot\vec{b}$), com $P_+(\vec{p}\cdot\vec{a})+P_-(\vec{p}\cdot\vec{a})=1$. Logo, a um dado valor do momento $\vec{p}$, podemos associar enquanto resultado médio da medida (segundo o caráter randômico da discretização)

$$\tilde{A}(\vec{p},\vec{a}) = P_+(\vec{p}\cdot\vec{a}) - P_-(\vec{p}\cdot\vec{a}) \ , \tag{1.35}$$

com a quantidade similar $\tilde{B}(\vec{p}\cdot\vec{b})$ definida para o aparato complementar. Segundo o resultado obtido por A. Barut e P. Meystre, ver equação (1.33), temos que

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\vec{p},\vec{a}) &= \frac{A}{\left[\langle A^2\rangle\right]^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{3}\cos(\vec{p},\vec{a}) \ , \\ \tilde{B}(\vec{p},\vec{a}) &= \frac{B}{\left[\langle B^2\rangle\right]^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{3}\cos(\vec{p},\vec{b}) \ , \end{aligned} \tag{1.36}$$

valores estes em perfeito acordo com a teoria quântica quando da obtenção dos valores médios, sob um ensemble de pares emitidos, das medidas envolvidas em (1.33). Tem-se, então, um modelo que reproduz todas características de um experimento quântico do tipo EPRB. Contudo, o mesmo não mais responde por um comportamento clássico, desde que as

probabilidades associadas aos dispositivos discretizadores

$$P_+(\vec{p}\cdot\vec{a}) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\cos(\vec{p},\vec{a})\right),$$
$$P_-(\vec{p}\cdot\vec{a}) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\cos(\vec{p},\vec{a})\right), \qquad (1.37)$$

podem assumir valores negativos para certos domínios dos ângulos $(\vec{p}\cdot\vec{a})$. Segundo as palavras de A. Aspect, "não há nenhum dispositivo capaz de realizar uma tal função". Considerando-se o momento $\vec{p}$ paralelo à direção $\vec{a}$, o dispositivo responderia pelo valor +1 com a probabilidade 1.35, e -0.35 pelo valor -1. "É impossível conseguir este dispositivo de uma companhia razoavelmente clássica, de forma que o modelo proposto por A. Barut, reinterpretado a ponto de mimetizar o seu análogo quântico, não mais corresponde à física clássica".

Esta controvérsia acerca da generalidade das desigualdades de Bell (levada a termo por A. Aspect), aplica-se perfeitamente ao modelo onde consideramos uma fonte clássica de luz. Embora o coeficiente de correlação associado à descrição clássica (seções 1.3 e 1.4), coincida com a sua contraparte quântica (seção 1.2), não cabe a inserção das equações (1.21) ou (1.27) no âmbito das desigualdades de Bell (variáveis randômicas dicotômicas), com o objetivo de checar a violação ou não das mesmas para certos ângulos ϕ_a e ϕ_b, posto tratar-se de diferentes descrições. Entretanto, ao considerarmos as desigualdades de Bell para variáveis randômicas tais que $|A|$, $|B| \leq 1$ (segundo o conceito generalizado de localidade), conforme aqueles em (1.27), o coeficiente de correlação deve ser normalizado para se evitar

ambigüidades, isto é, a desigualdade $|E(\vec{a},\vec{b})| \leq 1$ deve ser válida e, em particular $|E(\vec{a},\vec{a})|=1$. Sob este aspecto, a equação (1.10) é alterada segundo

$$-2N^{-1} \leq E(\vec{a},\vec{b}) - E(\vec{a},\vec{b}') + E(\vec{a}',\vec{b}) + E(\vec{a}',\vec{b}') \leq 2N^{-1}, \qquad (1.40)$$

onde

$$E(\vec{a},\vec{b}) = N^{-1} \int A(\lambda,\hat{a})\ B(\lambda,\hat{b})\ \rho(\lambda)\ d\lambda\ , \qquad (1.41)$$

o fator N compreendendo a normalização. Para as variáveis randômicas em (1.26), temos N=1/2, devido ao que, experimentos com pares de feixes contra propagantes não devem violar a relação (1.40) para qualquer par dos ângulos ϕ_a e ϕ_b. Nota-se que para variáveis dicotômicas temos que N=1.

Vale ressaltar que o objeto deste trabalho encontra um forte paralelo com outro fenômeno bastante conhecido: o padrão de interferência da luz decorrente do experimento de dupla-fenda é reproduzido sob a consideração de um feixe de luz ou de um "ensemble" de fótons, considerados individualmente.

CAPÍTULO 2

2.1 - CARACTERIZAÇÃO DA MEDIDA QUÂNTICA

A noção de "medida" em teoria quântica depreende-se dos livros-textos, em geral, enquanto uma espécie de noção primitiva onde o "postulado de projeção" é tratado como um dos axiomas da teoria. Segundo escreve Dirac[49]:

"... a medida sempre faz com que o sistema salte para um dos autoestados da variável dinâmica a ser conhecida, tal que o autovalor associado perfaz o resultado da medição."

D. Bohm[50] procede a uma "definição" similar enquanto que, mais formalmente, von Neumann[51] distingue entre

"dois tipos fundamentalmente diferentes de intervenção que podem ocorrer sobre um sistema... Primeiramente, as alterações arbitrárias provenientes da ação de medida, dadas pela fórmula

$$\rho \rightarrow \rho' = \sum_{n=1}^{\infty} (\rho u_n, u_n) P_n \qquad (2.1)$$

[u_1, u_2,... sendo um conjunto completo ortonormal; P_1, P_2,... os correspondentes operadores de projeção]. Segundo, a alteração automática que toma lugar com o decorrer do tempo, conforme

$$\rho \rightarrow \rho_t = e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}\, \rho\, e^{i\mathcal{H}t/\hbar} \tag{2.2}$$

($\mathcal{H}$ é o operador energia, t o tempo; $\mathcal{H}$ independente de t)".

Tais proposições acerca da medida quântica têm, desde os seus primórdios, acarretado controvérsias[52], e por vezes consideradas "fundamentalmente inaceitáveis", segundo o argumento de que "a medida compreende um processo físico envolvendo matéria ordinária, e o que quer que aconteça deve ser explicado por leis físicas ordinárias"[53]. Conforme A. Peres[53], "a realização de uma medida (quer seja clássica ou quântica), compreende a interação de algum aparato com o objeto sobre o qual se pretende conhecer uma dada propriedade, de modo que esta seja agora replicada em uma propriedade do aparato." Desta relação decorre uma dificuldade imediata se invocarmos que a MQ descreva a evolução dinâmica do sistema combinado (isto é, o aparato e o objeto a ser medido)". Vejamos.

Consideremos que o objeto quântico seja preparado segundo a superposição ortogonal de estados

$$\psi = \sum_n C_n\, u_n\ , \tag{2.3}$$

de forma que a cada u_n relacionamos um resultado distinto para a medida. Formalmente, conjecturando que o estado inicial do aparato seja ϕ, e ainda que o seu estado final seja v_n sempre que o estado inicial do objeto for $\psi = u_n$, teremos a evolução unitária

$$\psi\phi \rightarrow \sum_n u_n v_n \,, \tag{2.4}$$

onde estados do objeto encontram-se **correlacionados** com aqueles do aparato. Assim, a menos que um único coeficiente c_n seja diferente de zero, o estado final (2.4) **não** representa um resultado definido para a medida. "Então, voltando às palavras de A. Peres, um milagre ocorre: "A superposição $\sum_n c_n u_n v_n$ **colapsa-se** sobre uma das possibilidades $u_n v_n$, onde o correspondente c_n salta para o seu novo valor, 1, enquanto que as demais componentes desaparecem".

Com o objetivo de esclarecer a correlação expressa em (2.4) e explicar o processo de colapso da função de onda, A. Peres propõe-se à análise da medida segundo um sistema do tipo Stern-Gerlach. Considera-se, então, uma partícula de spin -1/2 preparada sob o estado $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, e assume-se, por simplicidade, somente dois estados possíveis ao aparato, denotados pelas chaves $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$. Estando o aparato, inicialmente, no estado $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, especifica-se a correlação de forma que este estado persista caso o spin "up", $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, seja medido, e altera-se para $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ caso a medida revele o spin "down", $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$. Então, a interação objeto/aparato evolui, por linearidade, segundo

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \rightarrow \alpha \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \,. \tag{2.5}$$

O fato desta ser uma evolução unitária permite associá-la ao hamiltoniano[54]

$$\mathcal{H} = g(t)\ (1 - \sigma_z)\ \rho \,, \tag{2.6}$$

onde σ_z refere-se ao spin, P compõe o operador de projeção

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}^{+} , \tag{2.7}$$

e g(t), uma função suave do tempo, satisfaz a relação $\int g(t)dt = \pi\hbar/2$. De fato, o operador de evolução gerado por $\mathcal{H}$,

$$U = e^{(-i/\hbar)\int \mathcal{H} dt} = I - (1 - \sigma_z)\rho \ , \tag{2.8}$$

responde exatamente pela evolução unitária à esquerda da expressão (2.5). Que esta evolução seja **reversível**, nota-se pelo fato de que, neste modelo, o operador U além de unitário é hermitiano, tal que $U=U^{-1}$. Portanto, se o hamiltoniano $\mathcal{H}$ gera a correlação (2.6), também a reverte, pois que

$$U\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

Deve-se observar ainda que, o estado final do sistema objeto/aparato, descrito pela soma à direita da eq. (2.5), diz respeito a um **estado puro**; nada há que justifique tratá-lo de outra forma e, em particular, em **colapsá-lo** tal que algum dos coeficientes, α ou β, desapareça. Por exemplo, pode-se medir a fase relativa entre α e β observando-se os valores médios de operadores tais como

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = - \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \alpha^* \beta + \alpha\beta^* \ , \qquad (2.10a)$$

e

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = - \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = - i(\alpha^* \beta + \alpha\beta^*) \ , \qquad (2.10b)$$

Estamos, agora, diante da dificuldade essencial. Os valores médios em (2.10) aplicam-se a um **ensemble conceitual** (Gibbs), no qual todos os spins e todos os aparatos são identicamente preparados em meio-ambientes perfeitamente iguais. Contudo, a medição real desses valores médios emprega um **ensemble real** (Maxwell) onde os spins e respectivos aparatos são preparados, na melhor das hipóteses em meio-ambientes **quase** idênticos. Conforme enfatiza Ballentine[55], ambos os ensembles, de Gibbs e Maxwell, são **conceitualmente diferentes** e ao levar em conta este fato, A. Peres compreende, em particular, o aparato de medida enquanto objeto "macroscópico", isto é, "incapaz de ser isolado do meio-ambiente". Logo, da asserção de que os estados finais do aparato são **macroscopicamente distinguíveis**, segue-se que os mesmos serão encontrados em diferentes meio-ambientes. Em outras palavras, à explicação do colapso da função de onda elaborada por A. Peres, "é essencial que o instrumento de medida, conjuntamente com o meio ambiente, esteja sujeito a algum ruído" quando do ato da medição. Dessa forma, o hamiltoniano relativo ao processo descrito em (2.5) não corresponde exatamente àquele da eq. (2.6), posto que devemos acresce--lo de "termos pequenos, desconhecidos e incontroláveis que diferem entre si a cada amostra". Conseqüentemente, o nosso conhecimento acerca

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

do comportamento dessas amostras é degradado, resultando em que os valores esperados dos operadores compreendidos em (2.10) são iguais a **zero**. Devido a estes "ruídos inevitáveis, que marcam o hamiltoniano (2.6), acentua A. Peres, o estado final do sistema não mais corresponde à soma à direita da eq. (2.5) mas, o que dele melhor se dá ao conhecimento é representado pela mistura estatística"

$$\rho = |\alpha|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + |\beta|^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (2.11)$$

Em face deste resultado, conclui A. Peres, "nada há de inconsistente (ou miraculoso) com o **colapso**, desde que as fases relativas que compõem o lado direito da expressão (2.5) foram **nubladas** durante o processo de medida, tal que esta expressão deve ser substituída pelo operador densidade em (2.11)". De outro modo, por exemplo colapsando a soma à diireita na expressão (2.5), é que teríamos a inconsistência quanto à possibilidade de restaurar o estado inicial à esquerda em (2.5) aplicando o operador U sobre o estado final.

2.2 - A INSERÇÃO FORMAL DO MEIO-AMBIENTE

W. H. Zurek[22, 23], em importantes considerações sobre o processo do colapso da função de onda, procede à inserção formal do meio-ambiente na construção de seu argumento. Tratando o aparato de medida enquanto sistema clássico ou "aberto", conclui W. Zurek:
"O alvo da teoria quântica da medida - a efetivação da transição

$\rho_{puro} \rightarrow \rho_{misto}$ - é alcançado devido a interação do aparato com o meio-ambiente (...), fato este passível de explicação considerando-se que **regras efetivas de super seleção** são induzidas pela transferência de informação (segundo a definição de Shannon[58]) aparato/meio-ambiente". Explicitaremos o problema da transferência de informação no âmbito do processo de medida ao fim desta seção.

O tratamento de W. Zurek considera um par de sistemas de dois estados denominados "spin" (partícula) e "átomo" (aparato), cujas bases são respectivamente designadas por $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ e $|\pm\rangle$, $|\mp\rangle$, esta última compreendendo, pela ordem, os estados "excitados" e "fundamental" do átomo. Estados de base alternativos para o spin podem ser descritos conforme

$$|\odot\rangle = \left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right)/\sqrt{2}\ , \quad |\otimes\rangle = \left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)/\sqrt{2}\ , \tag{2.12a}$$

ou

$$|\rightarrow\rangle = \left(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle\right)/\sqrt{2}\ , \quad |\leftarrow\rangle = \left(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle\right)/\sqrt{2}\ , \tag{2.12b}$$

enquanto que para o átomo, de forma similar temos

$$|+\rangle = \left(|\pm\rangle + |\mp\rangle\right)/\sqrt{2}\ , \quad |-\rangle = \left(|\pm\rangle - |\mp\rangle\right)/\sqrt{2}\ , \tag{2.13a}$$

ou

$$|\perp\rangle = \left(|\pm\rangle + i|\mp\rangle\right)/\sqrt{2}\ , \quad |\top\rangle = \left(|\pm\rangle - i|\mp\rangle\right)/\sqrt{2}\ , \tag{2.13b}$$

No intuito de investigar o processo de transferência de informação, considera-se, primeiramente, o hamiltoniano de interação entre átomo e spin na forma

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{AS} &= g\left(|\perp\rangle\langle\perp| - |T\rangle\langle T|\right)\otimes\left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right)\\ &= -ig\left(|\pm\rangle\langle\mp| - |\mp\rangle\langle\pm|\right)\otimes\left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right)\end{aligned} \tag{2.14}$$

Supondo-se que os estados iniciais relativos aos sistemas átomo e spin sejam, respectivamente, designados por $|+\rangle$ e $(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle)$, o vetor de estado combinado $|\phi\rangle$ compreende inicialmente o produto direto

$$|\phi_i\rangle = |\phi(0)\rangle = |+\rangle\otimes\left(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle\right). \tag{2.15}$$

Como resultado da evolução temporal estabelecida pelo hamiltoniano (2.14), o estado $|\phi_i\rangle$ é transformado segundo

$$\begin{aligned}|\phi(t)\rangle = a\,|\uparrow\rangle\otimes&\left[sen\left((\pi/4) + gt\right)|\pm\rangle + \cos\left((\pi/4) + gt\right)|\mp\rangle\right]\\ + b|\downarrow\rangle\otimes&\left[sen\left((\pi/4) - gt\right)|\pm\rangle + \cos\left((\pi/4) - gt\right)|\mp\rangle\right],\end{aligned} \tag{2.16}$$

onde temos fixado $\hbar=1$. Considerando o estado combinado do sistema átomo/spin quando $t=\pi/4g=\tau$, segue-se que

$$|\phi_f\rangle = |\phi(\tau)\rangle = \left(a\,|\uparrow\rangle\otimes|\pm\rangle + b\,|\downarrow\rangle\otimes|\mp\rangle\right)/\sqrt{2}\,, \tag{2.17}$$

o que diz respeito a um estado puro, conforme estabelece o operador densidade

$$\rho^{AS}_{puro} = |\phi(\tau)\rangle\langle\phi(\tau)| = |a|^2 |\pm\rangle\langle\pm| \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |b|^2 |\mp\rangle\langle\mp| \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$$
$$+ ab^* |\pm\rangle\langle\mp| \otimes |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + a^*b |\mp\rangle\langle\pm| \otimes |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \ . \qquad (2.18)$$

Contudo, tanto o spin quanto o átomo, quando tratados como sistemas individuais, encontram-se em estados mistos, o que pode facilmente ser visto das expressões

$$\rho^S = |a|^2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |b|^2 |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \ , \qquad (2.19a)$$

$$\rho^A = |a|^2 |\pm\rangle\langle\pm| + |b|^2 |\mp\rangle\langle\mp| \ , \qquad (2.19b)$$

as quais compreendem um aparente colapso em se tratando isoladamente os subsistemas descritos pela função de onda total (e estado puro) $|\phi(\tau)\rangle$.

Estabelecida a correlação partícula/detector, procede-se agora, quanto ao operador densidade que associa este par de subsistemas, à efetivação da transição $\rho_{puro} \rightarrow \rho_{misto}$. Para tal, considera-se o acoplamento entre o átomo (aparato) e o meio-ambiente, este último caracterizado, num primeiro momento, também por um átomo descrito por dois estados designados por parênteses ao invés dos "brackets" de Dirac; $|\pm)$, $|\pm)$; $|+)$, $|-)$; $|\perp)$, $|\top)$, respectivamente. Quanto ao hamiltoniano de acoplamento aparato/meio-ambiente tém-se

$$\mathcal{H}^{A,Ma} = g_1\left(|\perp\rangle\langle\perp| - |\top\rangle\langle\top|\right) \otimes \left(|\pm\rangle\langle\pm| - |\mp\rangle\langle\mp|\right)$$
$$= -ig_1\left(|\pm\rangle\langle\mp| - |\mp\rangle\langle\pm|\right) \otimes \left(|\pm\rangle\langle\pm| - |\mp\rangle\langle\mp|\right) \tag{2.20}$$

Da especificação do estado do meio-ambiente por $|+\rangle$, segue-se que o estado inicial do sistema combinado partícula/detector/meio-ambiente escreve-se da forma

$$|\psi_i\rangle = \left(a\,|\uparrow\rangle \otimes |\pm\rangle + b\,|\downarrow\rangle \otimes |\mp\rangle\right) \otimes |+\rangle\ , \tag{2.21}$$

tal que o estado final quando $g_1 t = \pi/4$, será

$$|\psi_f\rangle = \left(a\,|\uparrow\rangle \otimes |\pm\rangle \otimes |\pm\rangle + b\,|\downarrow\rangle \otimes |\mp\rangle \otimes |\mp\rangle\right)\ . \tag{2.22}$$

Efetuando-se o traço sobre os estados do átomo/meio-ambiente, decorre o operador densidade

$$\rho^{AS}_{MISTO} = |a|^2\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\pm\rangle\langle\pm| + |b|^2\,|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |\mp\rangle\langle\mp|\ , \tag{2.23}$$

resultado este que nos mostra de que forma podemos, empregando a transferência de informação parcial do aparato ao meio-ambiente, realizar a transição $\rho_{puro} \rightarrow \rho_{misto}$ requerida à compreensão do colapso da função de onda.

Conforme observa W. Zurek, "é importante distinguir entre os requerimentos essenciais ou não à ocorrência do colapso induzido

pelo meio-ambiente." Pode-se objetar, por exemplo, no que tange as condições reais do meio-ambiente em finalizar a interação quando $g_1 t=\pi/4$ ou iniciá-la num tempo particular, que os estados iniciais puros são artificiais e, conseqüentemente, a solução proposta não se aplica ao problema da medida." No intuito de contornar a objeção acima, W. Zurek propõe uma situação mais realista onde o meio-ambiente consiste de muitos átomos não interagentes, acoplados ao aparato através do hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_K^{AMa} &= i g_k \left(|\pm\rangle\langle\pm| - |\mp\rangle\langle\pm| \right)_k \otimes \left(|\pm\rangle\langle\pm| - |\mp\rangle\langle\mp| \right) \prod_{j\neq k} \otimes \perp_j \\ &= -g_k \left(|\perp\rangle\langle\perp| - |\top\rangle\langle\top| \right)_k \otimes \left(|\pm\rangle\langle\pm| - |\mp\rangle\langle\mp| \right) \prod_{j\neq k} \otimes \perp_j \, . \end{aligned} \tag{2.24}$$

A função de onda resultante, $j\neq k$, para o tempo arbitrário t, é

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = a\,|\uparrow\rangle \otimes |\pm\rangle \prod_{k=1}^{N} \otimes \left[\alpha_{k\uparrow}(t)\,|\perp\rangle_k + \beta_{k\uparrow}(t)\,|\top\rangle_k \right] \\ + b\,|\downarrow\rangle \otimes |\mp\rangle \prod_{k=1}^{N} \otimes \left[\alpha_{k\downarrow}(t)\,|\perp\rangle_k + \beta_{k\downarrow}(t)\,|\top\rangle_k \right] , \end{aligned} \tag{2.25}$$

onde N compreende o número total de átomos que constitui o meio-ambiente, enquanto que as funções temporais apresentam-se na forma

$$\alpha_{k\uparrow}(t) = \alpha_k \, e^{(+ig_k t)} \quad ; \quad \alpha_{k\downarrow}(t) = \alpha_k \, e^{(-ig_k t)}$$

$$\beta_{k\uparrow}(t) = \beta_k \, e^{(-ig_k t)} \quad ; \quad \beta_{k\uparrow}(t) = \beta_k \, e^{(+ig_k t)} \, ,$$

cujas constantes $\alpha_k=(1-i)/2$ e $\beta_k=(1+i)/2$ são estabelecidas segundo os estados iniciais dos átomos do meio-ambiente. Através da expressão (2.25), obtém-se o operador densidade relativo à combinação partícula/aparato considerando-se o traço parcial sobre os estados do meio-ambiente:

$$\begin{aligned}\rho^{AS} &= |a|^2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\pm\rangle\langle\pm| + |b|^2 |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |\mp\rangle\langle\mp| \\ &+ z(t)\, ab^* |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\pm\rangle\langle\mp| + z^*(t)\, a^*b |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |\mp\rangle\langle\mp| \ .\end{aligned} \tag{2.26}$$

O fator de "amortecimento" z(t) é descrito segundo

$$z(t) = \prod_{k=1}^{N} \left[\cos(2g_k t) + i\left(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2\right) sen(2g_k t)\right], \tag{2.27}$$

de forma tal que, se este fator apresentar-se muito menor que a unidade, os termos fora da diagonal do operador densidade efetivamente desaparecem. As correlações entre a partícula e o detector são, contudo, mantidas intactas segundo a "base ponteiro" $[|\pm\rangle, |\mp\rangle]$ característica do aparato.

Da consideração de que as constantes de acoplamento $\{g_k\}$ são parâmetros randômicos, uniformemente distribuídos sob o intervalo aberto [0,1], e escolhendo $|\alpha_k|=|\beta_k|$, por simplicidade, W. Zurek apresenta o comportamento do fator z(t) segundo a figura 5.

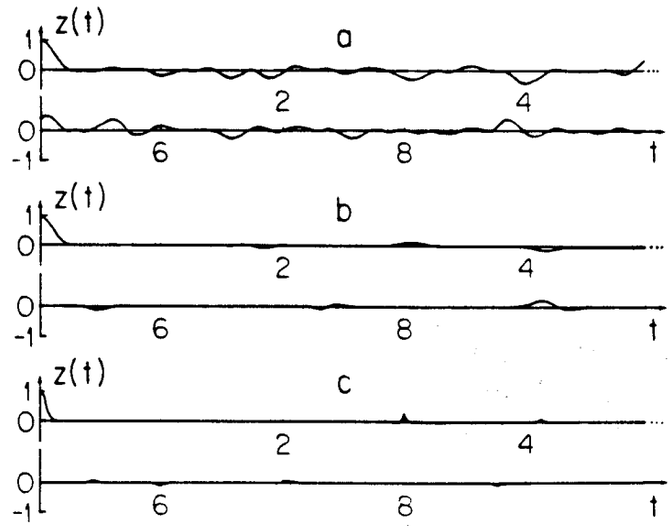


Figura 5: *O fator de amortecimento da coerência segundo a expressão (2.27), onde o número N de átomos do meio-ambiente constitui-se, respectivamente, em (a)=5, (b)=10 e (c)=15. A escolha da constante de acoplamento átomo-spin, g_k, fêz-se randomicamente, com distribuição uniforme sob o intervalo aberto (0, 1). Por simplicidade, as condições iniciais $|\alpha_k|=|\beta_k|$ foram impostas para todos os átomos, e conseqüentemente, Z(t) é puramente real. Nota-se o desaparecimento das recorrências com o acréscimo do número N.*

Verifica-se que, mesmo sob a consideração de um meio-ambiente relativamente pequeno, N=15, a função temporal z(t) é praticamente nula por um longo intervalo de tempo. Em função da evolução unitária do sistema combinado partícula/detector/meio-ambiente, a informação não é irreversivelmente destruída: o decaimento de z(t) justifica-se em termos da transferência de informação e não da destruição desta. Em se tratando do meio-ambiente enquanto um sistema

IESC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

fechado, após um intervalo de tempo suficientemente longo, a função $z(t)$ deve retornar a um valor arbitrariamente próximo a $z=1$.

2.3 - RECORRÊNCIA E DECOERÊNCIA DOS ESTADOS QUÂNTICOS NO PROCESSO DA MEDIDA

Com base no modelo proposto por W. Zurek, procedemos à sua implementação segundo duas considerações distintas: (1) Efetuamos a termalização do meio-ambiente, admitindo o mesmo espaçamento de energia a todos os seus átomos de dois níveis. (2) Quanto aos autovalores, g_k, relativos à interação aparato/meio-ambiente, ao invés de considerá-los como quantidades randômicas associadas aos átomos do meio-ambiente, propomos que obedeçam a uma lei de potência do inverso da distância, de acordo com a proximidade desses átomos ao aparato. Com isso, acentuando-se o caráter da reversibilidade inerente ao modelo, verificamos que o tempo de **recorrência** (t_{rec}) é somente sensível ao número de átomos que constitui o meio-ambiente. Enquanto característica mais próxima ao colapso propriamente dito, o tempo de **decoerência** (t_d) apresenta maior sensibilidade com respeito à temperatura que ao número de átomos do meio-ambiente. A razão entre estes tempos característicos (t_d/t_{rec}) exibe um comportamento compatível (decrescendo com a potência inversa de N) com o que esperamos ocorra em um processo de medida, quando se efetiva o colapso ou redução do estado quântico conjunto partícula/detector.

2.4 - A TERMALIZAÇÃO DO MEIO-AMBIENTE

Quanto à termalização do meio-ambiente, ao invés de partirmos de um vetor de estado combinado partícula/detector/meio-ambiente, conforme elabora W. Zurek, consideramos inicialmente o operador densidade

$$\rho = \rho_{SA} \otimes \rho_{Ma} \tag{2.28}$$

onde, em vista dos N átomos que compõem o meio-ambiente, $\rho_{Ma} = \prod_{k=1}^{N} \rho_{Ma}(k)$. Mediante o operador $U = \prod_{k=1}^{N} \otimes U_k$, a evolução temporal do operador densidade, é descrita na forma

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \prod_{k=1}^{N} \otimes U_k \left[\rho_{AS} \otimes \prod_{k=1}^{N} \otimes \rho_{Ma}(k) \right] \prod_{k=1}^{N} \otimes U_k^{+} \\ &= \prod_{k=1}^{N} \otimes \left[U_k \, \rho_{SA} \otimes \rho_{Ma}(k) \; U_k^{+} \right] . \end{aligned} \tag{2.29}$$

O vetor de estado conjunto spin/átomo, $|\psi_{SA}\rangle$, relativo ao operador densidade ρ_{SA}, apresenta-se conforme descrito em (2.17), enquanto que o operador densidade $\rho_{Ma}(k)$ é obtido considerando-se a distribuição de Boltzmann, tal que

$$\rho_{Ma} = \frac{e^{-\beta \sum_k E\sigma_y{}^k}}{Tr_k \, e^{-\beta \sum_k E\sigma_y{}^k}} = \prod_{k=1}^{N} \frac{e^{-\beta E\sigma_y{}^k}}{Tr_k \, e^{-\beta E\sigma_y{}^k}} \tag{2.30}$$

onde supomos idênticos gaps de energia, E, associados a todos os N átomos, com $\beta=1/k_BT$, sendo T a temperatura do meio-ambiente e k_B a constante de Boltzmann. Da expansão do peso exponencial obtemos

$$e^{-\beta E\sigma_y^k} = \cosh(\beta E)\,\mathbb{1} - senh(\beta E)\,\sigma_y{}^k\,, \tag{2.31}$$

o que finalmente nos leva ao resultado

$$\rho_{Ma}^{(k)} = \left[\frac{e^{-\beta E}}{2\cosh(\beta E)}|\top)(\top|_k + \frac{e^{\beta E}}{2\cosh(\beta E)}|\perp)(\perp|_k\right], \tag{2.32}$$

desde que $Tr_k\rho_E(k)=2\cosh(\beta E)$ e, por meio das transformações em (2.13.b); $\mathbb{1}_k=|\perp)(\perp|+|\top)(\top|$ e $\sigma_y{}^k=|\perp)(\perp|-|\top)(\top|$.

Substituindo $\rho_{Ma}(k)$ junto à expressão (2.29), e denominando P_{1k} e P_{2k} as probabilidades associadas, respectivamente, aos termos $|\top)(\top|_k$ e $|\perp)(\perp|_k$, obtemos

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{N} \otimes \left[U_k|\Psi_{SA}\rangle\langle\Psi_{SA}| \otimes \left(P_{1k}|\top)(\top|_k + P_{2k}|\perp)(\perp|_k\right) U_k^+\right], \tag{2.33}$$

expressão esta que se reescreve segundo

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{N} \otimes \Big[P_{1k} U_k \left(| \Psi_{SA}\rangle \otimes | \top)_k \right) \left(\langle \Psi_{SA}| \otimes (\top|_k \right) U_k^+ \tag{2.34}$$

$$+ P_{2k} U_k \left(| \Psi_{SA}\rangle \otimes | \perp)_k \right) \left(\langle \Psi_{SA}| \otimes (\perp|_k \right) U_k^+ \Big]$$

Retomando o hamiltoniano de interação aparato/meio-ambiente, expresso em (2.24), obtemos o operador de evolução segundo

$$U_k = e^{(-i/\hbar)\int H_K^{AMa}\, dt} = \mathbb{1}_k^{Ma} \otimes \mathbb{1}^A$$

$$+ \left(\cos(g_k t) - 1\right) \left(| \perp) (\perp| + | \top) (\top| \right)_k \otimes \left(| \pm\rangle\langle\pm| + | \mp\rangle\langle\mp| \right) \tag{2.35}$$

$$+ i\, sen(g_k t) \left(| \perp) (\perp| - | \top) (\top| \right)_k \otimes \left(| \pm\rangle\langle\pm| - | \mp\rangle\langle\mp| \right) .$$

De posse deste operador de evolução, decorrem imediatamente as expressões

$$U_k\left(| \Psi_{SA}\rangle \otimes | \top)_k \right) = a e^{-ig_k t} | \uparrow\rangle \otimes | \pm\rangle \otimes | \top)_k + b e^{ig_k t} | \downarrow\rangle \otimes | \mp\rangle \otimes | \top)_k ,$$

$$U_k\left(| \Psi_{SA}\rangle \otimes | \top)_k \right) = a e^{ig_k t} | \uparrow\rangle \otimes | \pm\rangle \otimes | \perp)_k + b e^{-ig_k t} | \downarrow\rangle \otimes | \mp\rangle \otimes | \perp)_k . \tag{2.36}$$

do que resulta

$$U_k\left(| \Psi_{SA}\rangle \otimes | \top)_k \right) \left(\langle \Psi_{SA}| \otimes (\top|_k \right) U_k^+ =$$

$$= | a|^2 | \uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes | \pm\rangle\langle\pm| + | b|^2 | \downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes | \mp\rangle\langle\mp| \tag{2.37}$$

$$+ ab^* e^{-2ig_k t} | \uparrow\rangle\langle\downarrow| \otimes | \pm\rangle\langle\mp| + a^* b\, e^{2ig_k t} | \downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes | \mp\rangle\langle\pm| ,$$

$$U_k\left(|\Psi_{SA}\rangle \otimes |\perp)_k\right)\left(\langle\Psi_{SA}| \otimes (\perp|_k\right) U_k^+ =$$

$$= |a|^2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\pm\rangle\langle\pm| + |b|^2 |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |\mp\rangle\langle\mp|$$

$$+ ab^* e^{2ig_k t} |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |\pm\rangle\langle\mp| + a^* b\, e^{-2ig_k t} |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |\mp\rangle\langle\pm| ,$$

Da substituição das expressões acima expostas junto ao operador densidade em (2.34), obtemos

$$\rho(t) = |a|^2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\pm\rangle\langle\pm| \otimes \prod_{k=1}^{N} \otimes \left(P_{1k}|\top)(\top|_k + P_{2k}|\perp)(\perp|_k\right)$$

$$+ |b|^2 |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |\mp\rangle\langle\mp| \otimes \prod_{k=1}^{N} \otimes \left(P_{1k}|\top)(\top|_k + P_{2k}|\perp)(\perp|_k\right)$$

$$+ ab^* |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |\pm\rangle\langle\mp| \otimes \prod_{k=1}^{N} \otimes \left(e^{-2ig_k t} P_{1k}|\top)(\top|_k + e^{2ig_k t} P_{2k}|\perp)(\perp|_k\right)$$

$$+ a^* b |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |\mp\rangle\langle\pm| \otimes \prod_{k=1}^{N} \otimes \left(e^{2ig_k t} P_{1k}|\top)(\top|_k + e^{-2ig_k t} P_{2k}|\perp)(\perp|_k\right) . \tag{2.38}$$

Efetuando-se o traço sobre os graus de liberdade do meio-ambiente, resta o operador densidade relativo à interação partícula/detector na forma

$$\rho^{SA}(t) = Tr_{Ma}\, \rho(t) = |a|^2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\pm\rangle\langle\pm| + |b|^2 |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |\mp\rangle\langle\mp|$$
$$+ \left(z(t)\, ab^* |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |\pm\rangle\langle\mp| + C.C.\right), \tag{2.39}$$

sendo que a função temporal z(t) expressa-se segundo

$$z(t) = \prod_{k=1}^{N} \left(e^{-2ig_k t} P_{1k} + e^{2ig_k t} P_{2k}\right)$$
$$= \prod_{k=1}^{N} \left(\cos(2g_k t) - i\lambda(\beta E)\ sen(2g_k t)\right), \qquad (2.40)$$

onde $\lambda(\beta E)=P_{1k}-P_{2k}=tgh(\beta E)$ compreende o domínio [0,1].

2.5 - INTERAÇÃO APARATO/MEIO-AMBIENTE

Contrariamente ao procedimento adotado por W. Zurek, que associa valores randômicos aos autovalores g_k, consideramos que a interação entre o aparelho de medida e os átomos constituintes do meio-ambiente assuma diferentes valores segundo a proximidade desses átomos com relação ao aparato. Supomos, para tal, que os átomos do meio-ambiente distribuem-se de forma homogênea ao redor do aparato em L camadas esféricas concêntricas. Considerando que a razão entre os raios de camadas adjacentes seja uma constante, $R_{k+1}/R_k=s$, o número de átomos compreendido numa dada camada será, conseqüentemente,

$$n_k = n_1 (s^3 - 1)\ (s^3)^{k-1}, \qquad k = 2,3,\ldots,L; \qquad (2.41)$$

onde n_1 diz respeito ao número de átomos encerrado junto a primeira camada. Para L=1, decorre que s=1; de outra forma, s>1. O número total

de átomos do meio-ambiente resulta em

$$N = \sum_{k=1}^{N} n_k = n_1 (s^3)^{L-1} . \qquad (2.42)$$

Conforme já salientado quanto aos autovalores g_k, assumimos que decresçam com a distância compreendida entre as camadas e o aparato, segundo a lei de potência do inverso da distância

$$g_K = \frac{g_1}{(s^{\mu})^{k-1}} \quad , \quad k = 1,2,\ldots,L \quad ; \qquad (2.43)$$

onde o expoente μ caracteriza a lei. O autovalor g_k, no entanto, será o mesmo para todos os átomos relativos a uma mesma camada.

Sob as considerações acima expostas, a amplitude de decoerência obtida em (2.40) escreve-se agora na forma

$$Z(t) = \prod_{k=1}^{L} \left(\cos(2g_k t) + i\lambda(\beta E)\, sen(2g_k t)\right)^{n_k} , \qquad (2.44)$$

onde relacionamos a cada camada L o número n_k de átomos do meio-ambiente, todos com idêntica interação g_k.

Segundo a construção exposta do modelo de interação aparato/meio-ambiente, a função Z(t) obtida em (2.44) é periódica. Para o cálculo do **tempo de recorrência**, isto é, o tempo em que a amplitude de z(t) retorna ao seu valor de origem (quando t=0), consideramos a

temperatura igual a zero, T=0, tal que $\lambda=1$. Logo, da expressão em (2.44) resulta

$$Z(t) = \prod_{k=1}^{L} (e^{i\omega_k t})^{n_k} . \qquad (2.45)$$

O tempo de recorrência relativo à interação aparato/meio-ambiente é então determinado tomando-se o menor intervalo para a freqüência $\omega_L=2g_L=\pi/T_{rec}$, do que decorre, em vista da lei de potência em (2.43),

$$T_{rec} = \frac{\pi}{(2g_1)} \left(\frac{N}{n_1}\right)^{\mu/3} . \qquad (2.46)$$

Observa-se que, conforme esperamos aconteça, o tempo de recorrência aumenta na razão direta do número total de átomos do meio-ambiente, N, para $\mu>0$. Quando consideramos uma única camada de átomos em torno do aparato, L=1, de forma que $N=n_1$, obtemos o **período fundamental**: $\pi/(2g_1)$. Junto à figura 6, abaixo exposta, apresentamos o comportamento Re(z(t)) vs. g_1t; nas figuras 6.a e 6.b consideramos N=64 e 256, respectivamente, assumindo em ambos os casos $n_1=4$, $s^3=2$ e $\lambda(\beta E)=0.7$.

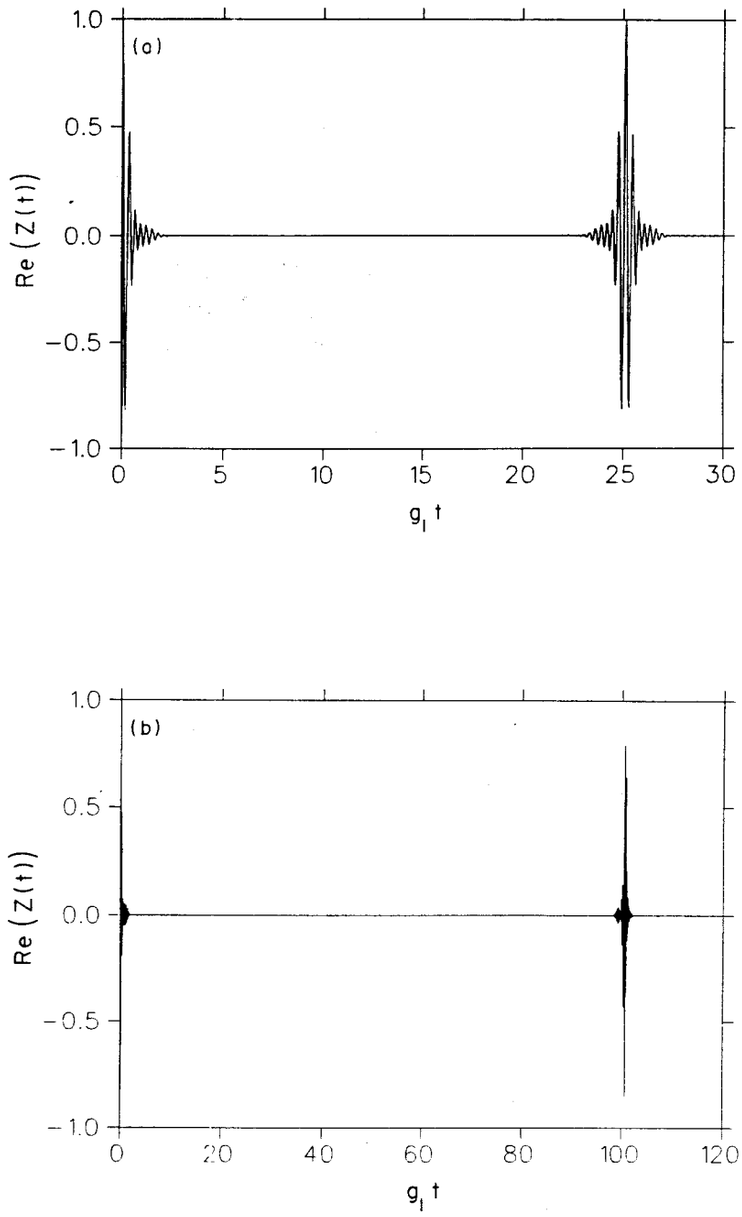


Figura 6: *Re[Z(t)] versus* $g_1 t$ *para* $\lambda=0.7$, $n_1=4$, $\mu=3$ *e* $s^3=2$. *(a) N=64, (b) N=256.*

Evidencia-se, então, junto à proporcionalidade direta entre os parâmetros T_{rec}/N, que o **tempo de decoerência** (decorrido quando do amortecimento da amplitude Re(z(t)), apresenta-se, para uma situação realista, muito menor que T_{rec}; portanto, no intuito de estimá-lo, devemos expandir a função z(t) em torno de t=0 e também dos múltiplos de T_{rec} (ver apêndice 2). Em boa aproximação, obtemos

$$z_n(t) \simeq \exp\left[-\frac{(t-nT_{rec})^2}{2\sigma_\mu^2}\right] e^{i\Omega_\mu (t-nT_{rec})}, \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (2.47)$$

A expressão (2.47) diz respeito a uma função harmônica modulada por uma gaussiana cuja largura média apresenta o valor

$$\sigma_\mu = \frac{1}{2g_1} \frac{1}{\left[n_1(1-\lambda^2(\beta E))\right]^{1/2}} \left[\frac{1}{1+\dfrac{(s^3-1)\left[(N/n_1)^{1-2\mu/3}-1\right]}{s^3-(s^3)^{2\mu/3}}}\right]^{1/2}, \qquad (2.48)$$

e onde a freqüência das oscilações de decoerência perfaz o resultado

$$\Omega_\mu = 2\lambda(\beta E)\, n_1 g_1 \left[1 + \frac{s-1}{s^\mu} \frac{(N/n_1)^{1-\mu/3}-1}{(s^3)^{1-\mu/3}-1}\right]. \qquad (2.49)$$

Podemos, portanto, através da expressão (2.47), definir o tempo de decoerência como $t_D=(2)^{1/2}\sigma_\mu$, o qual é sensível à temperatura e ao número de átomos que compõem o meio-ambiente; conseqüentemente, verifica-se que somente o meio-ambiente diz respeito aos comportamentos

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

dos tempos de recorrência e decoerência na interação partícula/aparato quando da viabilização do processo de medida.

Considerando-se $s^3=2$, tal qual na construção dos gráficos na figura 6, e para $(N/n_1)>>1$, o tempo de decoerência apresenta os comportamentos

$$
\begin{aligned}
(t_D)_{\mu=1} &\sim \frac{\sqrt{2}}{2g_1\left[n_1\ (1-\lambda^2(\beta E)\right]^{1/2}}\left(\frac{N}{n_1}\right)^{-1/6}, \\
(t_D)_{\mu\geq 2} &\sim \frac{\sqrt{2}}{2g_1\left[n_1\ (1-\lambda^2(\beta E)\right]^{1/2}},
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

onde verificamos que t_D independe de N para $\mu\geq 2$. A razão t_D/T_{rec} compreende uma quantidade essencial para a avaliação da ocorrência da redução do vetor de estado, de forma tal que, independentemente das unidades fundamentais do tempo temos que

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{t_D}{T_{rec}}\right)_{\mu=1} &\sim \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{1-\lambda^2(\beta E)}\right)^{1/2} N^{-1/2}, \\
\left(\frac{t_D}{T_{rec}}\right)_{\mu\geq 2} &\sim \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{1-\lambda^2(\beta E)}\right)^{1/2}\left(\frac{N}{n_1}\right)^{-\mu/3}.
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

Em se tratando de temperaturas suficientemente distantes do zero absoluto (quando $\lambda(\beta E)$ afasta-se suficientemente da unidade), a razão t_D/T_{rec}, decresce quando se acrescem os valores de N e/ou μ. Junto à figura 7 podemos analisar o comportamento das razões (2.51) com relação a N para dois diferentes valores de λ, 0.1 e 0.9, e para $\mu=1$,

2 e 3; mantivemos $n_1=4$, à semelhança dos gráficos expostos na figura 6. Observa-se que, para $\mu \geq 1$, quando $N \rightarrow \infty$ as razões (2.51) tendem a zero, o que caracteriza, na prática, um processo irreversível, embora a evolução do sistema em questão seja unitária e portanto reversível.

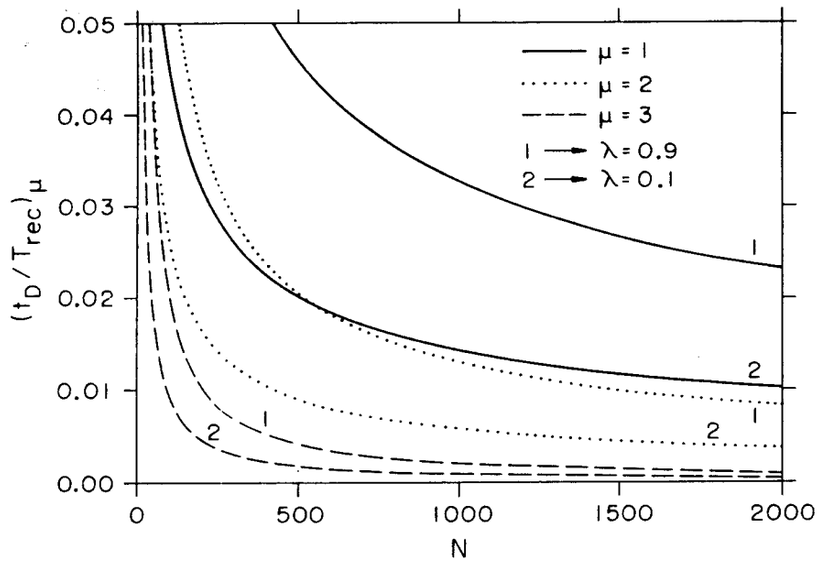


Figura 7: *Razão (2.51) versus N. Para todas as curvas $n_1=4$ e $s^3=2$.*

Em face das figuras 6 e 7 podemos definir um **limite de colapso**, isto é, a efetivação de uma situação tal que possa ser caracterizada enquanto colapso da função de onda, e que ocorra quando as oscilações de decoerência (veja figura 6), tornam-se fortemente amortecidas. Com relação à gaussiana apresentada em (2.47) tal limite de colapso ocorre quando $(t_D\Omega)_\mu \leq \pi/2$, condição sob a qual, praticamente,

nenhuma oscilação apreciável sobrevive no processo de decoerência; o decaimento gaussiano domina completamente o colapso.

Observa-se também da figura 7 que à temperatura 0K (λ=1), a coerência é máxima, ou seja, as oscilações em Z(t) apresentam as maiores freqüências conforme mostra (2.49). Neste limite a aproximação da qual decorre o resultado (2.47) é absolutamente improcedente.

Cabe ressaltar ainda que a consideração da lei em (2.43) quando $\mu<0$, implica na impossibilidade de ocorrência da redução do vetor de estado; ao contrário a coerência será amplificada, como em geral se observa nos processos naturais.

2.6 - TRANSFERÊNCIA DE INFORMAÇÃO E MEDIDA

No intuito de colocar o problema da transferência de informação no âmbito do processo de medida, começaremos por generalizar o modelo apresentado por A. Peres, conjecturando que um detector seja capaz de discernir entre os vários graus de liberdade de uma partícula quando da efetivação da medida. Consideramos que este detector, mais completo, constitua-se de N detectores binários independentes, o que formalmente pode ser representado pelo operador

$$\mathbb{D} = s^{(1)} \otimes s^{(2)} \otimes \ldots . \otimes s^{(3)} , \qquad (2.52)$$

o qual atua sobre o espaço de Hilbert do detector gerando, então, um código que possibilite a resolução macroscópica dos graus de liberdade que caracterizam uma dada partícula.

A decomposição do operador **D** na base linearmente independente

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_1 &= s^{(1)} \otimes \mathbb{1}^{(2)} \otimes \ldots . \otimes \mathbb{1}^{(N)} \\ \mathbb{D}_2 &= \mathbb{1}^{(1)} \otimes s^{(2)} \otimes \ldots . \otimes \mathbb{1}^{(N)} \\ &\vdots \\ \mathbb{D}_N &= \mathbb{1}^{(1)} \otimes \mathbb{1}^{(2)} \otimes \ldots . \otimes s^{(N)} \end{aligned} \tag{2.53}$$

permite-nos descrever o hamiltoniano generalizado de interação partícula/detector segundo

$$\mathcal{H} = g(t) \sum_{i=1}^{N} \mathbb{D}_i \otimes P_i \ . \tag{2.54}$$

Os operadores **s** em (2.53) serão brevemente definidos, enquanto que os P_i's, projetores definidos no espaço das partículas, são construídos segundo as regras:

1) Cada P_i compreende uma soma de projetores elementares - um particular sub-conjunto - escolhidos dentre um conjunto completo de projetores elementares $\{P_k\}$, ou seja,

$$P_i = \sum_k \theta_{ik} P_k \ , \quad \theta_{ik} = 0,1,\ldots \tag{2.55}$$

2) A soma em (2.55) é construída de forma tal que o propagador U desacople cada autoestado, que compõe o vetor de estado inicial da partícula, associando-os a estados particulares do detector, dito de

outra forma, a ação do propagador U sobre um estado inicial partícula/detector deve promover um estado final correlacionado, segundo

$$U\,(|\,D\rangle \otimes |\,\phi\rangle) = |\,D\phi\rangle\,. \tag{2.56}$$

Assumindo, conforme A. Peres, que a função temporal g(t) apresente valores significativos somente durante um curto intervalo de tempo, tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \pi\hbar/2$, o cálculo do operador de evolução

$$U = \prod_{i=1}^{N} U_i\,, \tag{2.57}$$

segundo a expressão $U=\exp(-(i/\hbar)\int\mathcal{H}dt)$, nos leva ao resultado

$$U_i = \mathbb{1} \otimes (\mathbb{1} - P_i) - i\mathbb{D}_i \otimes P_i\,. \tag{2.58}$$

Após um número M de aplicações do operador U_i sobre dado estado puro inicial

$$|\,D\rangle \otimes |\,\phi\rangle = |\,\uparrow\uparrow\uparrow\ldots\rangle \otimes \sum_{i=1}^{M} a_i\,|\,\phi_i\rangle\,, \tag{2.59}$$

obtém-se o estado final correlacionado

$$|\,D\phi\rangle = \sum_{i=1}^{M} e^{i\,\alpha_i}\,a_i\,|\,C_i(\uparrow\uparrow\uparrow\ldots)\rangle \otimes |\,\phi_i\rangle\,, \tag{2.60}$$

onde $e^{i\alpha_i}$ são fatores de fase e $c_i(\uparrow\uparrow\uparrow...)$ caracteriza um diferente ordenamento do i-ésimo estado do detector.

Quanto a transferência de informação, no intuito de prover uma definição matemática para este conceito, W. Zurek (no escopo da discussão empreendida por Everett[57]), emprega a definição de Shannon[58] acerca do que se compreende por Informação; tratando-se de um operador estatístico ρ em um espaço de Hilbert N-dimensional, a Informação é então descrita pela fórmula

$$I = \ln N - Tr(\rho \ln \rho) \ . \tag{2.61}$$

Obtidas as expressões acima, abordaremos um exemplo particular com o objetivo de analisar o processo de transferência de informação na medida quântica. Para tal, consideraremos o estado inicial puro envolvendo o detector e uma partícula com 6 graus de liberdade (por exemplo, uma partícula com spin j=5/2)

$$|\psi_o\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \otimes \sum_{i=-5/2}^{5/2} a_i \, |\phi_i\rangle \ , \tag{2.62}$$

onde, conforme a equação (2.59), o "ket" $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$ diz respeito ao estado inicial do detector e $|\phi_i\rangle$ especifica um determinado estado de spin da partícula, tratando-se, respectivamente, a espaços de Hilbert com 8 e 6 dimensões. Podemos, então, verificar o desenvolvimento da correlação partícula/detector quando da ação dos operadores U_i, eq.(2.58), sobre o estado (2.62) e respectivos estados dele gerados. Conseqüentemente,

do cálculo dos operadores densidade associados e empregando-se a definição de Informação em (2.61), procedemos à análise da transferência de informação que se efetua neste particular processo de medida.

Explicitando, agora, os operadores presentes em (2.58) , no que tange ao problema específico posto pelo vetor de estado (2.62), escrevemos

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_1 &= (A_1 + A_1^+) \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_3 , \\ \mathbb{D}_2 &= \mathbb{1}_1 \otimes (A_2 + A_2^+) \otimes \mathbb{1}_3 , \\ \mathbb{D}_3 &= \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes (A_3 + A_3^+) , \end{aligned} \tag{2.63}$$

e

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{-3} + P_{-2} + P_{-1}, \\ P_2 &= P_{-3} + P_{-1} + P_{+2} , \\ P_3 &= P_{-1} + P_{+1} + P_{+3}, \end{aligned} \tag{2.64}$$

onde A e A^+ correspondem a operadores de levantamento e abaixamento, respectivamente, enquanto que, as combinações em (2.64) foram escolhidas segundo propósitos já mencionados.

Anteriormente a qualquer interação partícula/detector, o que corresponde ao operador densidade puro $\rho^{PD}=|\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, do qual decorrem os operadores específicos ao detector $\rho^D = Tr_P\rho^{PD}$ e à partícula $\rho^P=Tr_D\rho^{PD}$, obtemos os seguintes valores para as informações

$$I^P = \ln 6, \tag{2.65}$$

$$I^D = \ln 8. \tag{2.66}$$

Após o que podemos denominar o primeiro estágio do processo de medida, quando o operador U_1, eq.(2.58), atua sobre o estado inicial (2.62), obtemos o estado correlacionado

$$|\psi_1\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \otimes \sum_{i=-5/2}^{-1/2} a_i |\phi_i\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle \otimes \sum_{i=1/2}^{5/2} a_i |\phi_i\rangle, \tag{2.67}$$

relativo ao qual, o valor para a informação referente ao detector altera-se segundo

$$I^D = \ln 8 - \left\{ \sum_{i=-5/2}^{-1/2} |a_i|^2 \ln\left(\sum_{i=-5/2}^{-1/2} |a_i|^2 \right) + \sum_{i=1/2}^{5/2} |a_i|^2 \ln\left(\sum_{i=1/2}^{5/2} |a_i|^2 \right) \right\} \tag{2.68}$$

Quanto ao segundo estágio do processo, relativo à atuação do operador U_2 sobre o estado correlacionado $|\psi_2\rangle$, resulta

$$
\begin{aligned}
|\psi_2\rangle = {} & a_{-5/2}|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \otimes |\phi_{-5/2} + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle \otimes \sum_{-3/2}^{-1/2} a_i |\phi_i\rangle \\
& + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle \otimes \sum_{i=1/2}^{3/2} a_i |\phi_i\rangle + a_{5/2}|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle \otimes |\phi_{5/2}\rangle ,
\end{aligned}
\tag{2.69}
$$

e respectiva informação

$$
\begin{aligned}
I^D = \ln 8 - \Bigg\{ & |a_{5/2}|^2 \ln |a_{5/2}|^2 + |a_{-5/2}|^2 \ln |a_{-5/2}|^2 \\
& + \sum_{i=-3/2}^{-1/2} |a_i|^2 \ln\Big(\sum_{i=-3/2}^{-1/2} |a_i|^2 \Big) + \sum_{i=1/2}^{3/2} |a_i|^2 \ln\Big(\sum_{i=1/2}^{3/2} |a_i|^2 \Big) \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

A por fim ao processo, após a atuação do operador U_3 sobre $|\psi_3\rangle$, o estado correlacionado proveniente do terceiro estágio da medida é

$$
\begin{aligned}
|\psi_3\rangle = {} & a_{-5/2}|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle \otimes |\phi_{-5/2}\rangle + a_{-3/2}|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle \otimes |\phi_{-3/2}\rangle \\
& + a_{-1/2}|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle \otimes |\phi_{-1/2}\rangle + a_{1/2}|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle \otimes |\phi_{1/2}\rangle \\
& + a_{3/2}|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle \otimes |\phi_{3/2}\rangle + a_{5/2}|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle \otimes |\phi_{5/2}\rangle ,
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

do qual obtemos o valor final para a informação

$$
I^D = \ln 8 - \sum_{i=-5/2}^{5/2} |a_i|^2 \ln |a_i|^2 . \tag{2.72}
$$

Observando os estados correlacionados obtidos da atuação dos

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

operadores de evolução em (2.58), podemos construir um diagrama esquemático do processo de detecção das correlações partícula/detector conforme ilustra a figura 8:

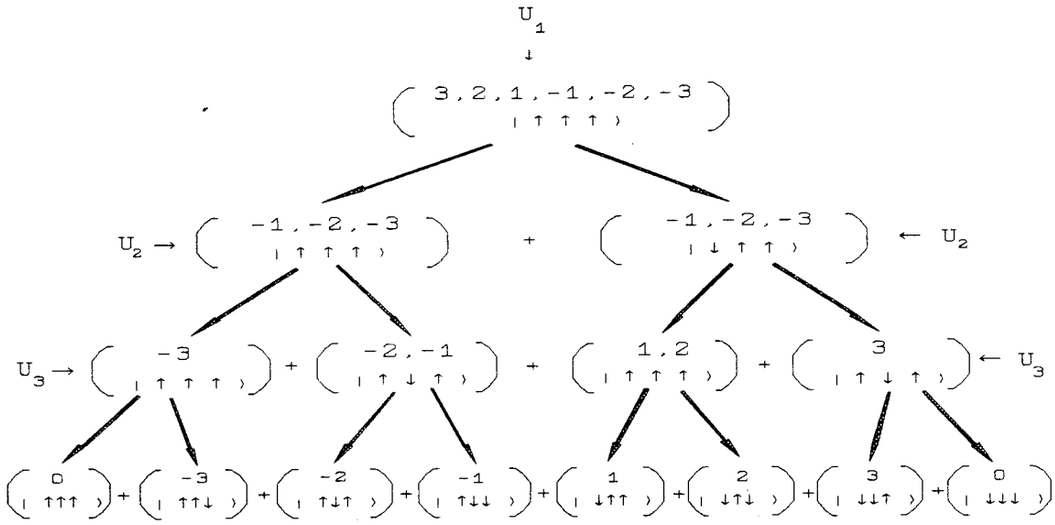


Figura 8: *Diagrama esquemático do processo de detecção de correlações para uma partícula com 6 graus de liberdade, conforme estabelece o estado inicial em (2.62).*

Mediante os resultados obtidos para as informações, relativos a cada estágio do processo de medida, pode-se facilmente verificar que a informação associada ao detector é continuamente incrementada. Considerando-se a normalização $a_i=1/\sqrt{6}$, o valor I^D evolui segundo: $3\ \ln 2 \rightarrow 4\ \ln 2 \rightarrow 4\ \ln 2 + \left(\ln 3 - (2/3)\ \ln 2\right) \rightarrow 4\ \ln 2 + \ln 3$. Esta constatação salienta-se do diagrama na figura 8, onde observa-se que, a cada estágio do processo, o grau de entropia relativo aos possíveis estados do detector é reduzido; enquanto produto final do processo,

apresentam-se estados (ponteiros) específicos do detector indicando resultados específicos sobre os estados da partícula.

Evidentemente, a informação concernente à partícula é também acrescida no decorrer do processo de medida. Prescindimos, contudo, dos respectivos cálculos.

Deve-se colocar ainda que a informação relativa ao operador densidade ρ^{PD} é sempre menor que a soma das informações decorrentes dos operadores reduzidos ρ^P e ρ^D, ou seja

$$I^{PD} \leq I^P + I^D , \tag{2.73}$$

o que se evidencia pelo fato de que o termo $Tr(\rho \ln \rho)$, constituinte da definição de informação, é nulo quando do operador ρ^{PD} (estado puro), enquanto que sempre negativo, ou nulo, quando dos operadores ρ^P e ρ^D (estados mistos). A diferença $I^P+I^D-I^{PD}$, reside na correlação P/D. Segundo interpreta W. Zurek, primeiramente estabelece-se uma correlação entre observador e os sistemas constituintes do processo de medida, partícula e detector, após o que, quando da interação que faz correlacionados esses sistemas, desaparece a correlação originária envolvendo o observador. Num segundo momento, toma lugar a transferência de informação através da correlação partícula/detector para a outra detector/meio-ambiente. Conforme coloca W. Zurek, "a informação, no entanto, não é perdida e sim, transferida de um conjunto de correlações a outro". Não cabe aqui uma discussão mais exaustiva do conceito de Informação no âmbito da medida quântica, restando apenas remeter o leitor às referências já citadas.

2.7 - CONCLUSÃO

Evidentemente, o modelo proposto por W. Zurek e as asserções introduzidas neste trabalho não correspondem a um tratamento realista do que vem a ser a redução do vetor de onda no processo de medida. No fundamental, o produto da descrição deste processo, segundo o modelo de W. Zurek, logra a transformação da estatística quântica presente em ρ_{puro}, para a estatística clássica assegurada em ρ_{misto}, o que não esgota o problema em questão. Contudo, acreditamos que ao se acrescentar junto a evolução unitária da teoria quântica, a interação do meio-ambiente com o aparato de medida, obtém-se ingredientes que permitem uma significativa representação da realidade subjacente ao processo do colapso de um estado quântico. Para maiores informações, remetemos o leitor às referências [23, 52, 59], as quais contém importantes considerações acerca do tema.

O fato de que o meio-ambiente compreende um sistema macroscópico (N>>1), faz com que os termos não diagonais reduzidos do operador densidade do sistema remanescente partícula/aparato (eqs. (2.26) e (2.40)), recobrem a forma diagonal deste operador num período, o tempo de recorrência, certamente muito maior que o tempo no qual se efetua uma medida em laboratório. Segundo a dependência do número de átomos do meio-ambiente, o tempo de recorrência pode perfazer a idade do universo enquanto que, segundo estimativa de A. Peres[20], considerando-se a incerteza energia/tempo, o tempo de decoerência compreende a ordem de 10^{-21}s.

Uma interessante extensão das considerações desenvolvidas nesta seção compreende duas partículas com spin -1/2, correlacionadas

segundo Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm, isto é, com spin total S=1. Assumindo que o aparato de medida interaja com apenas uma das partículas, e refazendo os cálculos já considerados para o operador densidade em (2.26), pode-se facilmente verificar que a única alteração sobre este operador corresponde à preseńça dos estados da segunda partícula, ou seja

$$\begin{aligned}\rho^{SA}(t) &= |a|^2 \, |\uparrow\rangle\langle\uparrow|_1 \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_2 \otimes |\pm\rangle\langle\pm| \\ &+ |b|^2 \, |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_1 \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow|_2 \otimes |\mp\rangle\langle\mp| \\ &+ \left(ab^* \, z(t) \, |\uparrow\rangle\langle\downarrow|_1 \otimes |\downarrow\rangle\langle\uparrow|_2 \otimes |\pm\rangle\langle\mp| + C.C.\right),\end{aligned} \tag{2.74}$$

Descartando-se os termos não-diagonais em (2.74), após a decoerência, verifica-se que as partículas com spin -1/2 tornam-se correlacionadas num sentido clássico, tal que a informação obtida pelo aparato de medida, sobre o estado de uma das partículas, permite inferir sobre o estado da segunda partícula sem que uma medida direta seja sobre ela efetuada.

CAPÍTULO 3

O HAMILTONIANO QUADRÁTICO DEPENDENTE DO TEMPO: O OPERADOR DE EVOLUÇÃO, REGIÕES DE SQUEEZING NO ESPAÇO DE FASE E TRAJETÓRIAS

3.1 - INTRODUÇÃO

Sabe-se[60] que o estado coerente $|\alpha\rangle$, ou quase-clássico, do campo de radiação é gerado por meio da ação do operador deslocamento $D(\alpha)$ sobre o vácuo:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)\ |0\rangle\ , \tag{3.1}$$

onde

$$D(\alpha) = e^{-(1/2)|\alpha|^2}\ e^{\alpha a^+}\ e^{-\alpha^* a}\ . \tag{3.2}$$

Compondo o operador deslocamento, a^+ e a correspondem, respectivamente, aos operadores de criação e aniquilação, conforme obtidos da quantização do oscilador harmônico, tal que

$$[a, a^+] = 1\ . \tag{3.3}$$

Da definição das quadraturas X_1 e X_2, decorrem os operadores hermitianos descritos segundo

$$X_1 = \frac{1}{2}\,(a^+ + a)\ , \tag{3.4a}$$

e

$$X_2 = \frac{i}{2}\,(a^+ - a)\ . \tag{3.4b}$$

A partir da relação de comutação $[X_1,X_2]=i/2$, pode-se deduzir a expressão para as variâncias

$$\begin{aligned}\langle(\Delta X_{(1,2)})^2\rangle &= \left[\langle X^2_{(1,2)}\rangle - \langle X_{(1,2)}\rangle^2\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\langle(\Delta a)^2\rangle + \langle(\Delta a^+)^2\rangle \pm 2\langle\Delta a^+ a\rangle + 1\right],\end{aligned} \tag{3.5}$$

onde

$$\begin{aligned}\langle(\Delta a)^2\rangle &= \langle a^2\rangle - \langle a\rangle^2\ , \\ \langle(\Delta a^+)^2\rangle &= \langle a^{+2}\rangle - \langle a^+\rangle^2\ , \\ \langle(\Delta a^+ a)^2\rangle &= \langle a^+ a\rangle - \langle a^+\rangle\langle a\rangle\ .\end{aligned} \tag{3.6}$$

A consideração das médias que constituem a relação (3.5), segundo um estado coerente, $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, traduz-se na relação de incerteza mínima

$$\Delta X_1\,\Delta X_2 = \frac{1}{4} \quad (\hbar = 1)\ , \tag{3.7}$$

o que motiva a denominação "quase-clássico" atribuída aos estados coerentes. A representação, no espaço de fase das quadraturas, X_2 vs. X_1, desta incerteza mínima relativa ao estado coerente, compreende a figura 9 a, onde, conforme se obtém das relações em (3.4), $a=X_1+iX_2$.

Enquanto generalização do estado coerente, o estado "squeezed"[61,62] $|\alpha,\xi\rangle$ da radiação é gerado atuando-se o operador squeezed, $S(\xi)$, sobre o vácuo, seguido da atuação do operador deslocamento (ou vice-versa), tal que

$$|\alpha,\xi\rangle = D(\alpha)\ S(\xi)\ |0\rangle\ , \tag{3.8}$$

onde

$$S(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}\xi^* a^2 - \frac{1}{2}\xi a^{+2}\right)\ , \tag{3.9}$$

com $\xi = re^{i\phi}$, r compreendido como **fator de squeezing** (ver eq.(3.12)), e ϕ como ângulo de rotação do espaço de fase (figura 9 b).

Voltando ao espaço de fase das quadraturas, a representação da incerteza associada ao estado squeezed, conforme esboça a figura 9b, considera as novas quadraturas rotacionadas Y_1 e Y_2, tal que

$$a = Y_1 + iY_2 = \left(X_1 + iX_2\right) e^{-i\phi/2}\ . \tag{3.10}$$

A forma elipsoidal exposta na figura 1 b, dá-se pelo fato de que as novas variâncias

$$\left\langle (\Delta Y_{(1,2)})^2 \right\rangle = \frac{1}{4}\left[\langle(\Delta a)^2\rangle e^{-i\phi} + \langle(\Delta a^+)^2\rangle e^{i\phi} \pm 2\langle(\Delta a^+ a)\rangle + 1\right], \tag{3.11}$$

consideradas segundo os estados squeezed, conduzem aos resultados

$$\langle (\Delta Y_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r} , \tag{3.12a}$$

e

$$\langle (\Delta Y_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2r} . \tag{3.12b}$$

Portanto, na dimensão Y_1, deparamo-nos com a possibilidade de uma variância menor que o ruído do vácuo; conseqüentemente em Y_2, maior que o ruído do vácuo, resultados estes que respondem, respectivamente, pelos semi-eixos menor e maior do elipsóide junto à figura 9.b.

Nota-se, outrossim, que enquanto o estado coerente é gerado por termos lineares em a e a^+, o estado squeezed requer termos quadráticos, o que equivale à interação do campo de radiação com um meio não-linear.

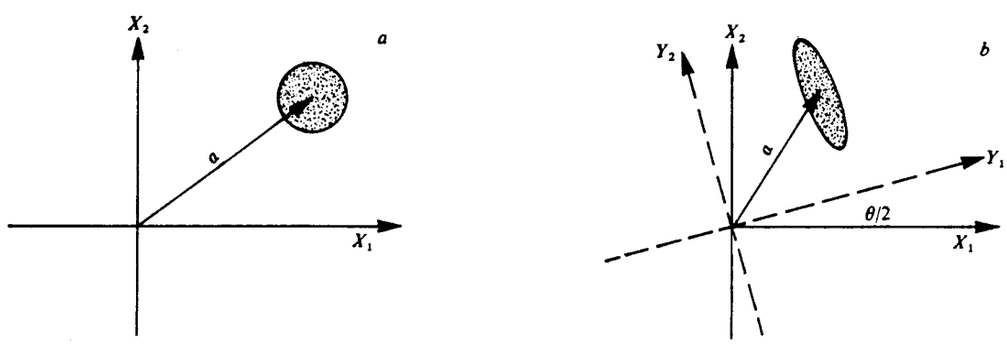


Figura 9: *Relações de incerteza no espaço de fase relativas a um (a) estado coerente e (b) um estado squeezed.*

3.2 - GERAÇÃO DE ESTADOS SQUEEZED EM UM CAMPO MAGNÉTICO HOMOGÊNEO

A. Bechler[63], constatou a geração dos estados squeezed, considerando um oscilador harmônico carregado sob a ação de um campo magnético homogêneo. O lagrangeano clássico do sistema expressa-se segundo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\dot{q}_i^{\,2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\omega_i^{\,2}q_i^{\,2} + \frac{1}{2}e\,\dot{\vec{q}}\cdot(\vec{B}\times\vec{q}) \ , \tag{3.13}$$

onde $\vec{q}=(q_1,\ q_2)$ são as coordenadas do oscilador, w_i as freqüências, "e" a carga, $\vec{B}$ o campo magnético perpendicular ao plano $\vec{q}$, e está-se tratando o caso onde $\hbar=1$, m=1 e c=1. Considerando-se a equação de Hamilton $\mathcal{H}=Pq-\mathcal{L}$, obtemos da eq. (3.13) o hamiltoniano quantizado

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(a_i^{+}\zeta_{ij}a_j + a_i\zeta_{ij}^{*}a_j^{+} + a_i\sigma_{ij}a_j + a_i^{+}\sigma_{ij}^{*}a_j^{+}\right),\ (i=1,2,..) \tag{3.14}$$

onde ζ e σ são matrizes bidimensionais, tais que

$$\begin{aligned} \Omega_{ii} &= \omega_i + \alpha_{12}^{\,2}/2\omega_i \ , \quad \Omega_{12} = \Omega_{21} = -\frac{\alpha_{12}}{2i}\left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{1/2} - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^{1/2}\right]; \\ \sigma_{ii} &= \alpha_{12}^{\,2}/2\omega_i \ , \qquad \sigma_{12} = -\sigma_{21} = -\frac{\alpha_{12}}{2i}\left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{1/2} - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^{1/2}\right]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

O fator α_{12} provém do desenvolvimento do termo de interação do lagrangeano, onde 1/2 e $\dot{\vec{q}}\cdot(\vec{B}\times\vec{q})=\Sigma_{ij}\alpha_{ij}q_iq_j$, com $\alpha_{ij}=e/2\ \varepsilon_{ijm}B_m=-\alpha_{ji}$. No

mais, para os operadores de criação e aniquilação decorrem, de forma geral, as relações

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega_i}\, q_i + i \frac{p_i}{\sqrt{m\omega_i}} \right), \tag{3.16a}$$

$$a_i^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega_i}\, q_i - i \frac{p_i}{\sqrt{m\omega_i}} \right). \tag{3.16b}$$

Assumindo que a atuação do campo magnético dê-se durante um intervalo de tempo finito T, as equações de evolução dos operadores em (3.16) na representação de Heisenberg podem ser obtidas exatamente, do que resultam as variâncias

$$\langle (\Delta X^2_{(1,2)}) \rangle = \frac{1}{4} \left[\cos^2(\Omega t) + \left(\frac{k \mp \lambda}{\Omega} \right) sen^2(\Omega t) \right], \tag{3.17}$$

onde X_1, X_2, κ, λ e Ω podem corresponder a qualquer dos modos normais do oscilador, de acordo com

$$\begin{aligned} k_i &= \omega_i + \alpha_{12}^2 \quad , \quad \lambda_i = \alpha_{12}^2/2\omega_i \ , \\ \Omega_i &= (k_i^2 - \lambda_i^2)^{\frac{1}{2}} = (\omega_i^2 + \alpha_{12}^2)^{\frac{1}{2}} \ . \end{aligned} \tag{3.18}$$

Podemos ver, por meio das relações (3.17), que $\langle (\Delta X_1)^2 \rangle \leq \langle (\Delta X_2)^2 \rangle$, e a nítida possibilidade de se obter uma quantidade menor que 1/4 ($\hbar$=1) para a variância relativa a X_1, caracterizando a geração de um estado squeezed. Para maiores detalhes sobre um tal sistema físico, pode se consultar também a ref.[64].

3.3 - SQUEEZING EM CAMPO MAGNÉTICO DEPENDENTE DO TEMPO

À generalização do problema tratado por A. Bechler, consideramos a forma mais geral para o hamiltoniano quadrático dependente do tempo (DT)

$$\mathcal{H}(a^+,a,t) = f_1(t)\,a^+a + f_2(t)\,a^{+2} + f_2^*(t)\,a^2 + f_3(t)\,a^+ + f_3^*(t)\,a\,, \qquad (3.19)$$

onde os operadores a e a^+ satisfazem a relação de comutação (3.3) e os coeficientes $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ são funções DT. Este hamiltoniano pode representar uma partícula carregada, imersa num campo magnético uniforme DT, sujeita a um movimento harmônico ou, então, um único modo do campo de radiação submetido a um meio squeezing. A importância deste hamiltoniano em física quântica deve-se ao fato de que alguns valores específicos das funções DT fazem das soluções da equação de Schrödinger, estados que permitem o "squeeze" da variância em uma das quadraturas expressas em (3.4.a) ou (3.4.b).

Embora o hamiltoniano em (3.19) tenha recebido atenção em trabalhos anteriores [33, 37, 65 e 66], no presente salientamos dois aspectos:

1) Desde que se impõe a resolução da equação de Schrödinger, apresentamos para tal um método simples, diferente dos anteriores, que se utiliza, seqüencialmente, de uma transformação unitária DT e da diagonalização de um invariante DT, resultando numa solução exata que compreende um conjunto completo de estados DT. Desta solução, obtemos o operador de evolução U(t), essencial para a expressão de operadores na representação de Heisenberg. Verificamos que tais soluções dependem

da resolução de um sistema de equações diferenciais não-lineares de primeira ordem. Considerando, então, o espaço de parâmetros (espaço de fase), identificamos as **regiões de squeezing** e, conseqüentemente, a ocorrência dos estados squeezed quando estas regiões são atravessadas por trajetórias dinâmicas dos parâmetros que compõem o espaço de fase.
2) Quanto às equações diferenciais inerentes ao método utilizado, as quais dependem dos parâmetros $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$, mostramos que alguns vínculos específicos entre estes parâmetros possibilita a resolução por quadratura do sistema de equações. Algumas soluções são apresentadas sem qualquer necessidade de se especificar a dependência funcional das funções f(t), e como ilustração, procedemos à particularização de alguns casos, dentre os quais a solução (3.17) obtida por A. Brechler.

3.4 - O MÉTODO DE DIAGONALIZAÇÃO POR INVARIANTES E TRANSFORMAÇÕES UNITÁRIAS DT

No intuito de resolver a equação de Schrödinger relativa ao hamiltoniano (3.19), consideramos o método de diagonalização por invariantes, conforme desenvolvido por Lewis e Reisenfeld (LR) [38]. Por invariante compreende-se um operador I(t) tal que

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + i\,[\mathcal{H}, I] = 0 \qquad (3.20)$$

Ao invés de propormos algum invariante associado ao hamiltoniano em questão, contudo, efetuaremos uma transformação

unitária sobre a equação de Schrödinger

$$i \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \mathcal{H}(t) \, |\psi(t)\rangle \ , \tag{3.21}$$

com o objetivo de reduzí-la a uma forma que traga a ela associada um invariante prévio.

Para esta proposta faremos uso do seguinte teorema:

"Se I(t) constitui-se num invariante para um sistema descrito pelo hamiltoniano $\mathcal{H}$(t) DT,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + i\left[\mathcal{H}(t), I(t)\right] = 0 \tag{3.22}$$

decorre que, sobre uma transformação unitária representada pelo operador $S(\xi)$ (onde ξ diz respeito a um conjunto de parâmetros de grupo), a forma $I_s(t)=S^+(\xi)I(t)S(\xi)$ compreende ainda um invariante, embora associado ao hamiltoniano transformado

$$\mathcal{H}_s(t) = S^+(\xi)\mathcal{H}(t)S(\xi) + i\frac{dS^+(\xi)}{dt} S(\xi) \ ."\tag{3.23}$$

O segundo termo à direita em (3.23) é similar ao referencial da energia relacionado à transformação de referencial em mecânica clássica. O parâmetro ξ é DT, tal que a derivada temporal junto a eq.(3.23) refere-se a função ξ(t). Para se provar o teorema acima consideremos a derivada total de $I_s(t)$, seguida das substituições e rearranjo dos termos, segundo

$$\frac{dI_s}{dt} = \frac{\partial I_s}{\partial t} + i\,[\mathcal{H}_s(t)\,,I_s(t)]$$

$$= \frac{\partial(S^+IS)}{\partial t} + i\left[SHS^+ + i\frac{dS^+}{dt}\,S\,,\ S^+IS\right]$$

$$= \frac{dS^+}{dt}\,IS + S^+\frac{\partial I}{\partial t}\,S + S^+I\frac{dS}{dt} + i\,[S^+\mathcal{H}S, S^+IS] - \left[\frac{dS^+}{dt}\,S\,,S^+IS\right]$$

$$= \frac{dS^+}{dt}\,IS + S^+\frac{\partial I}{\partial t}\,S + S^+I\frac{dS}{dt} + iS^+[\mathcal{H},I]\,S - \frac{dS^+}{dt}\,IS + S^+IS\frac{dS^+}{dt}\,S$$

$$= S^+\left(\frac{\partial I}{\partial t} + i\,[\mathcal{H},I]\right)S + S^+I\frac{dS}{dt} + S^+IS\left(-S^+\frac{dS}{dt}\right) \qquad (3.24)$$

$$= S^+\frac{dI}{dt}S = 0\ ,$$

onde a última igualdade é válida porque, da eq.(3.22), dI/dt=0. De outra forma, se $I_s(t)$ constitui de antemão um invariante, logo I(t) resultará igualmente em invariante.

O teorema exposto, e daí a sua utilidade, implica em que, se $|\psi_s(t)\rangle$ é uma solução estável da equação de Schrödinger

$$i\,\frac{d|\psi_s(t)\rangle}{dt} = \mathcal{H}_s\,|\psi_s(t)\rangle\ , \qquad (3.25)$$

então, $|\psi(t)\rangle$ será uma solução estável da eq.(3.21), tal que

$$|\psi(t)\rangle = S(\xi)\,|\psi_s(t)\rangle\ . \qquad (3.26)$$

Segundo o teorema de LR [38], uma solução da equação de Schrödinger constitui-se de um autoestado do invariante hermitiano I(t) multiplicado por um fator de fase DT. Quanto a I(t), LR asseguram que

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

se este admite um conjunto completo de autoestados $|m,t\rangle$, os correspondentes autovalores λ (que constituem funções reais) são independentes do tempo, sendo que esta dependência é inteiramente associada aos autoestados, conforme

$$\dot{I}_s(t)\ |m,t\rangle_s = \lambda_m\ |m,t\rangle_s\ , \qquad m=0,1,2,\ldots \tag{3.27}$$

Obtém-se, então, que as soluções da eq.(3.23) descrevem-se na forma

$$|\psi_{s,m}(t)\rangle = e^{i\phi_m^s(t)}\ |m,t\rangle_s\ , \tag{3.28}$$

onde a fase de LR, por meio da equação de Schrödinger em (3.25), satisfaz a relação

$$\phi_m^s(t) = \int_0^t {}_s\langle m,t'|\left(i\frac{\partial}{\partial t'} - \mathcal{H}_s\right)m,t'\rangle_s\ dt'\ . \tag{3.29}$$

As soluções (3.28) são estáveis somente quando os autoestados $|m,t\rangle_s$ também o são, onde por estabilidade compreende-se que o conjunto de autovalores λ_m contém um limite inferior, $-\infty<\lambda_m$.

Desde que os invariantes $I(t)$ e $I_s(t)$ apresentam o mesmo espectro de autovalores, pois que

$$I(t)\ (S\,|m,t\rangle_s) = \lambda_m(S\,|m,t\rangle_s)\ , \tag{3.30}$$

onde $S|m,t\rangle_s=|m,t\rangle$, então a estabilidade dos auto estados $|m,t\rangle$ implica

na estabilidade das soluções da equação (3.21),

$$
\begin{aligned}
|\psi_m(t)\rangle &= e^{i\phi_m(t)}\,|m,t\rangle \\
&= e^{i\phi_m(t)}\,S(\xi)\,|m,t\rangle_s\,.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Pode-se verificar que a fase é invariante sob transformações unitárias, segundo as passagens

$$
\begin{aligned}
\phi_m^s &= \int_0^t {}_s\langle m,t'|\left(i\frac{\partial}{\partial t'} - \mathcal{H}_s\right)|m,t'\rangle_s\,dt' \\
&= \int_0^t \langle m,t'|\,S\left(i\frac{\partial}{\partial t'} - S^+\mathcal{H}S - i\frac{dS^+}{dt}S\right)S^+|m,t\rangle\,dt' \\
&= \int_0^t \langle m,t'|\left(iS\frac{dS^+}{dt'} + iSS^+\frac{\partial}{\partial t'} - \mathcal{H} - iS\frac{dS^+}{dt'}\right)|m,t'\rangle\,dt' \\
&= \int_0^t \langle m,t'|\left(i\frac{\partial}{\partial t'} - \mathcal{H}\right)|m,t'\rangle\,dt' = \phi_m\,.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Os resultados apresentados nesta seção são de grande utilidade mediante a seguinte situação: se $\mathcal{H}(t)$ constitui-se num hamiltoniano não trivial, por meio de uma escolha conveniente dos parâmetros ξ (os quais devem satisfazer a um conjunto de equações diferenciais acoplados de primeira ordem), torna-se possível transformar $\mathcal{H}(t)$ num outro hamiltoniano ($\mathcal{H}_s(t)$) para o qual a solução da equação de Schrödinger é conhecida.

3.5 - O OPERADOR DE EVOLUÇÃO E A REPRESENTAÇÃO DE HEISENBERG

Aplicaremos, agora, os resultados da seção precedente ao hamiltoniano (3.19):

Enquanto operador unitário $S(\xi)$ [67], consideramos o operador de squeeze descrito segundo (3.9), onde $S(\xi)=S(r,\phi)$, o qual perfaz um elemento do grupo SU(1, 1) com a propriedade $S^{+}(r,\phi)=S(-r,\phi)$, e compreende a transformação canônica sobre operadores bosônicos

$$S(r,\phi)\begin{pmatrix} a \\ a^{+} \end{pmatrix} S^{+}(r,\phi) = \begin{pmatrix} \cosh r & -e^{i\phi} senh r \\ -e^{-i\phi} senh r & \cosh r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a^{+} \end{pmatrix}. \qquad (3.33)$$

Consideramos, junto ao hamiltoniano (3.19), $f_1=\omega(t)$ e $f_2(t)=\kappa(t)\ e^{i\zeta(t)}$, onde $\kappa(t)$ constitui um parâmetro clássico real DT envolvendo a amplitude do campo de bombeamento e a constante de acoplamento entre este campo e os modos da cavidade. Outra função, $\zeta(t)$ diz respeito à freqüência de bombeamento.

Tratando-se do operador unitário de squeeze, resulta da transformação (3.23) o novo hamiltoniano

$$\mathcal{H}_s(t) = \Omega(t)\,a^{+}a + F_3(t)\,a^{+} + F_3(t)\,a + g(t)\ , \qquad (3.34)$$

onde os parâmetros DT que compõem esta expressão satisfazem

$$F_3(t) = f_3(t)\cosh r(t) + f_3^*(t)e^{i\phi(t)}\,senh\,r(t)\ , \tag{3.35a}$$

$$\Omega(t) = \omega(t) + 2\kappa(t)\,tgh\,r(t)\cos\left(\zeta(t) - \phi(t)\right), \tag{3.35b}$$

$$g(t) = \kappa(t)\,tgh\,r(t)\cos\left(\zeta(t) - \phi(t)\right), \tag{3.35c}$$

desde que as seguintes equações diferenciais acopladas tenham a solução

$$\dot{r} = 2\kappa(t)\,sen\left(\zeta(t) - \phi(t)\right), \tag{3.36a}$$

$$\dot{\phi} = -2\omega(t) - 4\kappa(t)\,cotgh\left(2r(t)\right)\cos\left(\zeta(t) - \phi(t)\right). \tag{3.36b}$$

Utilizando o método de diagonalização por invariantes, conforme discutido na seção anterior, Puri e Lawande[67] obtiveram, tratando-se do hamiltoniano genérico em (3.34), a solução (em (3.28)) da equação de Schrödinger (3.25), segundo

$$|\Psi_{\mathscr{E},m}(t)\rangle = e^{i\phi_m(t)}\,S\left(\xi(t)\right)D\left(\theta(t)\right)|m\rangle\ , \tag{3.37}$$

onde $D(\theta(t))$ diz respeito ao operador deslocamento em (3.2), $|m\rangle = D^+(\theta(t))\,|m,t\rangle$ constitui um estado de número, enquanto que a fase de LR apresenta a forma

$$\phi_m(t) = -\int_0^t \left[m\Omega(t') + \frac{1}{2}\left(F_3(t')\,\theta^*(t) + F_3^*(t')\,\theta(t')\right) + g(t') \right] dt' \quad . \tag{3.38}$$

Quanto ao parâmetro temporal $\theta(t)$, obtém-se a expressão

$$\theta(t) = \theta(0)\, e^{-i\beta(t)} - i e^{-i\beta(t)} \int_0^t F_3(t')\, e^{i\beta(t')}\, dt' \ , \tag{3.39}$$

com

$$\beta(t) = \int_0^t \Omega(t')\, dt' \ . \tag{3.40}$$

Portanto, a solução da equação de Schrödinger original (3.21), conforme estabelece a relação (3.26), pode ser escrita como

$$|\,\psi_m(t)\,\rangle = V(t)\,|\,m\rangle \ , \tag{3.41}$$

onde o operador V(t) constitui-se da seqüência de operadores

$$V(t) = \gamma(t)\, S\big(\xi(t)\big) D\big(\theta(t)\big) R\big(\Omega(t)\big) \ , \tag{3.42}$$

Desde que $m|\,m\rangle = a^+a|\,m\rangle$, da fase de LR depreende-se o operador de rotação

$$R\big(\Omega(t)\big) = e^{-ia^+a\beta(t)} \ , \tag{3.43}$$

restando em (3.38), o fator de fase global

$$\gamma(t) = \exp\left\{-\frac{i}{2}\left[\beta(t) - \int_0^t \omega(t')\,dt' + \int_0^t \left(F_3^*(t')\,\theta(t') + C.C.\right)dt'\right]\right\} \quad (3.44)$$

Para um estado genérico que compreenda uma solução da equação de Schrödinger, temos a expressão

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_m\,|\psi_m(t)\rangle = V(t)\sum_{m=0}^{\infty} C_m\,|m\rangle\,, \quad (3.45)$$

da qual segue-se que

$$V^+(0)\,|\psi(0)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_m\,|m\rangle\,. \quad (3.46)$$

Da substituição da eq.(3.46) junto a (3.45), obtemos

$$|\psi(t)\rangle = V(t)\,V^+(0)\,|\psi(0)\rangle\,, \quad (3.47)$$

do que decorre o operador de evolução

$$U(t) = V(t)\,V^+(0) = \gamma(t)\,S\big(\xi(t)\big)D\big(\theta(t)\big)R\big(\Omega(t)\big)D^+\big(\theta(0)\big)S^+\big(\xi(0)\big)\,. \quad (3.48)$$

O comparecimento dos últimos dois fatores em (3.48) justifica-se porque em uma situação genérica não é sempre verdade que $\xi(0)$ e $\theta(0)$ sejam nulos, tal que $S(\xi(0)) = D(\theta(0)) = 1$, embora, evidentemente, $R(\Omega(0)) = 1$. Os termos C_m representam coeficientes de expansão.

Definido o operador de evolução (3.48), torna-se imediato o cálculo dos operadores na representação de Heisenberg,

$$b(t) = U^{+}(t)\, a\, U(t) = u(t)\, a + v(t)\, a^{+} + w(t) \ , \tag{3.49a}$$

$$b^{+}(t) = u^{*}(t)\, a^{+} + v^{*}(t)\, a + w^{*}(t) \ , \tag{3.49b}$$

onde os parâmetros U(t), V(t) e W(t) constituem as expressões

$$u(t) = \cosh\big(r(t)\big)\cosh\big(r(0)\big)\, e^{-i\beta(t)} - \\ - senh\big(r(t)\big) senh\big(r(0)\big) e^{i(\beta(t) + \phi(t) - \phi(0))} \ . \tag{3.50a}$$

$$v(t) = senh\big(r(t)\big)\cosh\big(r(0)\big)\, e^{i(\beta(t) + \phi(t))} - \\ - \cosh\big(r(t)\big) senh\big(r(0)\big) e^{-i(\beta(t) - \phi(0))} \ . \tag{3.50b}$$

$$w(t) = \cosh\big(r(t)\big)\big(\theta(t) - \theta(0)\, e^{-i\beta(t)}\big) + \\ + e^{i\phi(t)}\, senh\big(r(t)\big)\big(\theta(t) - \theta(0)\, e^{-i\beta(t)}\big)^{*} \ . \tag{3.50c}$$

Cabe ressaltar que, em decorrência da relação $|u(t)|^2 - |v(t)|^2 = 1$, a ação do operador unitário U(t) sobre os operadores bosônicos a e a^+, correspondem a uma transformação canônica do tipo Bogoliubov-Valatin.

3.6 - FLUTUAÇÕES DAS QUADRATURAS

Tratando-se o caso específico de um oscilador paramétrico, onde $f_3=0$, do que resulta $\theta(t)=\theta(0)e^{-i\beta(t)}$ e, conseqüentemente $W(t)=0$,

simplificamos consideravelmente o problema. Definindo-se, então, as quadraturas na representação de Heisenberg,

$$X_{1,H}(t) = \frac{1}{2}\left(b^{+}(t) + b(t)\right), \tag{3.51 a}$$

$$X_{2,H}(t) = \frac{i}{2}\left(b^{+}(t) - b(t)\right), \tag{3.51 b}$$

procedemos ao cálculo das flutuações dinâmicas

$$\langle(\Delta X_{i,H})^2\rangle = \langle X_{i,H}^2\rangle - \langle X_{i,H}\rangle^2, \quad i = 1,2. \tag{3.52}$$

Efetuando-se as médias em (3.52), segundo um estado inicial arbitrário e independente do tempo, esta expressão pode ser reescrita em termos das flutuações estáticas ou variâncias apresentadas em (3.6), tal que

$$\begin{aligned}\left\langle(\Delta X_{i,H})^2\right\rangle &= \frac{1}{4}\left[\langle\Delta b^2(t)\rangle + \langle\Delta b^{+2}(t)\rangle \pm 2\langle\Delta b^{+}(t)\,b(t)\rangle + 1\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[2|u \pm v^*|^2\langle\Delta a^{+}a\rangle \pm (u \pm v^*)^2\langle\Delta a^2\rangle \pm (u^* \pm v)^2\langle\Delta a^{+2}\rangle + |u \pm v^*|^2\right],\end{aligned} \tag{3.53}$$

onde o sinal superior (inferior) diz respeito a i=1(2). Em particular, a consideração das variâncias segundo um estado inicial coerente reduz as flutuações às formas

$$\langle(\Delta X_{i,H})^2\rangle = \frac{1}{4}\left|u(t) \pm v^*(t)\right|^2 . \tag{3.54}$$

Da substituição dos resultados (3.50), o módulo que compõe a expressão acima satisfaz

$$\begin{aligned} |u \pm v^*|^2 &= \cosh 2(r - r_o) + 2 senh 2r\, senh 2r_o\, sen^2\left(\beta + \frac{\phi - \phi_o}{2}\right) \pm \\ &\pm senh 2r \cosh 2r_o \cos\phi \mp senh 2r_o \left[\cosh^2 r \cos(2\beta - \phi) + \right. \\ &\left. + senh^2 r \cos(2\beta + 2\phi - \phi_o)\right], \end{aligned} \tag{3.55}$$

de forma que, para $r_0=r(0)=0$, as variâncias tornam-se

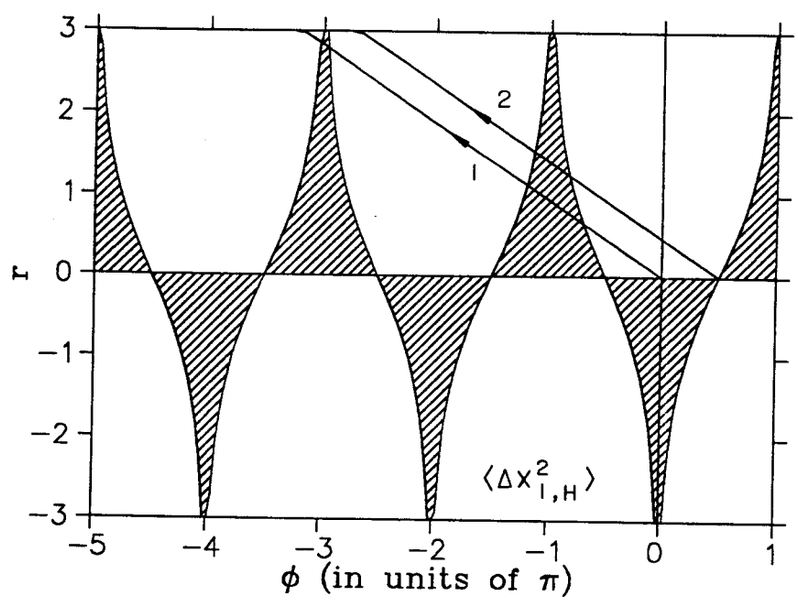
$$\langle(\Delta X_{i,H})^2\rangle = \frac{1}{4}\left[\cosh\left(2r(t)\right) \pm senh\left(2r(t)\right)\cos\phi(t)\right]. \tag{3.56}$$

Considerando, mediante o resultado acima, a condição de squeezing $\langle(\Delta X_{i,H})^2\rangle < 1/4$, obtemos a desigualdade

$$|r(t)| < \frac{1}{2}\left|\ln\left[\frac{(1 \mp \cos\phi(t))}{(1 \pm \cos\phi(t))}\right]\right|, \tag{3.57}$$

a qual constitui uma restrição do espaço de fase (r,ϕ) às **regiões de squeezing**, estas repetindo-se periodicamente num conjunto infinito de intervalos abertos conforme esboçam as figuras 10.a e 11.a para $\langle(\Delta X_{1,H})^2\rangle$, enquanto que as figuras 10.b e 11.b demarcam as regiões de squeezing para $\langle(\Delta X_{2,H})^2\rangle$. Nota-se que a configuração destas regiões

independem dos parâmetros que designam o hamiltoniano (3.19), e pode ser observado que as regiões hachuradas de squeezing nas figuras 10.a e 11.a estão deslocadas com relação às figuras 10.b e 11.b por uma fase π devido aos diferentes sinais estabelecidos na equação (3.57). Para um sistema específico a ocorrência de squeezing dá-se quando a trajetória de $(r(t), \phi(t))$ átravessa as regiões demarcadas.



IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

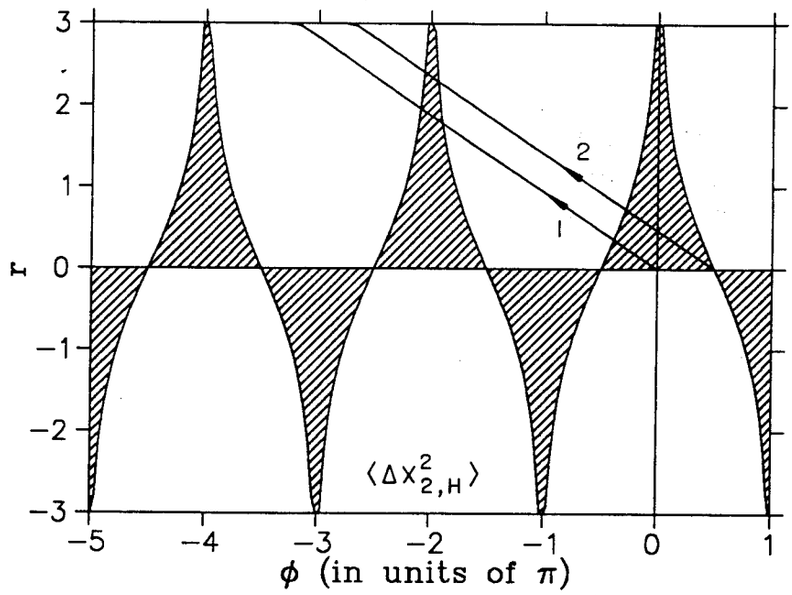


Figura 10: *Regiões de squeezing representadas por áreas hachuradas para (a)* $\langle (\Delta X_{1,H})^2 \rangle$ *e (b)* $\langle (\Delta X_{2,H})^2 \rangle$. *As trajetórias 1 e 2 correspondem, quanto ao hamiltoniano (3.19), ao parâmetro* $f_2(t)=\kappa exp(-2\omega_0 t+c_1)$ *(oscilador paramétrico ressonante) com* $c_1=\pi/2$ *e 0, respectivamente. As figuras a e b diferem entre si por um espaçamento igual a* π *entre as áreas hachuradas.*

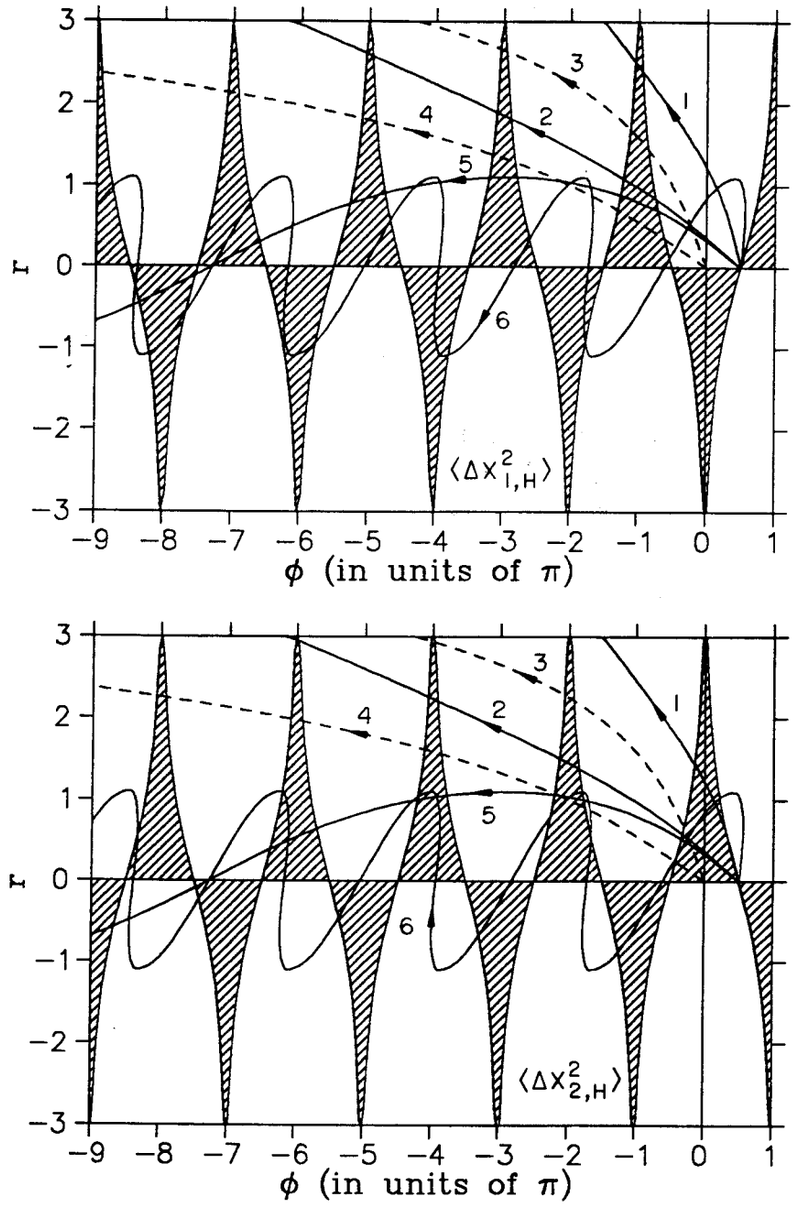


Figura 11: *Regiões de squeezing representadas por áreas hachuradas para (a)* $\langle (\Delta X_{1,H})^2 \rangle$ *e (b)* $\langle (\Delta X_{2,H})^2 \rangle$. *As trajetórias de 1 a 6 correspondem, com relação ao hamiltoniano (3.19), ao parâmetro* $f_2(t)=\kappa \exp(-2\omega t)$ *(oscilador paramétrico fora da ressonância), com* $\omega=\omega_0$, $3\omega_0$, $0.8\omega_0$, $3.2\omega_0$, $3.5\omega_0$ *e* $0.5\omega_0$, *respectivamente. Tal qual a figura 10, os ítens a e b diferem entre si por um espaçamento igual a* π *entre as áreas hachuradas.*

3.7 - ALGUMAS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS (3.36) E SUAS TRAJETÓRIAS ATRAVÉS DAS REGIÕES DE SQUEEZING

A não-linearidade das equações diferenciais acopladas em (3.36) e o fato da evolução temporal das mesmas, envolvendo as funções $\kappa(t)$, $\zeta(t)$ e $\omega(t)$, faz com que, a princípio, este sistema não possa ser resolvido por quadratura para uma dependência arbitrária no tempo destas funções. De outra forma, podemos considerar métodos numéricos, tais como Runge-Kuta ou Predictor-Corrector, para a obtenção destas soluções gerais. Devemos, contudo, mostrar que sob vínculos particulares entre as funções DT, restringindo o grau de arbitrariedade, torna-se possível a resolução por quadratura do sistema (3.36), de modo tal a obtermos uma constante de movimento. Abaixo apresentamos alguns casos particulares dentre outros que, certamente, podem ser encontrados.

a) Recuperando o resultado em A. Bechler.

Consideremos, desde o hamiltoniano (3.19), que os parâmetros f_1 e f_2 sejam constantes, reais ($\zeta=0$) e obedeçam a relação $f_1-2f_2>0$ ($f_3 = 0$). Sob estas condições, uma solução constante das equações (3.36) requer $\phi_0=\pi$ e $r_0=1/4\ln[(f_1+2f_2)/(f_1-2f_2)]$. Embora os parâmetros de squeeze sejam constantes, as funções (3.50) permanecem DT, segundo

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \cos(\Delta t) - i\frac{f_1}{\Delta}\, sen(\Delta t) \ , \\
v(t) &= -i\frac{f_2}{\Delta}\, sen(\Delta t) \ ,
\end{aligned}
\qquad (3.58)
$$

resultado este já obtido por H. Yuen[35], (seção 4.c), onde $\Delta=(f_1^2-4f_2^2)^{1/2}$ e responsável pelas variâncias das quadraturas que recobram aquelas devidas a A. Bechler quando da verificação de squeezing em campo magnético homogêneo,

$$\langle(\Delta X_{i,H})^2\rangle = \frac{1}{4}\left[1 \mp \frac{4f_2}{(f_1 \pm 2f_2)}\, sen^2(\Delta t)\right]. \tag{3.59}$$

O sinal superior (inferior) especifica i=1(2), tal que o squeezing ocorre somente quando da quadratura X_1, $\langle(\Delta X_{1,H})^2\rangle \leq 1/4$.

b) Squeezing na Ressonância

Definindo-se as seguintes relações

$$\omega(t) \hat{=} \delta(t)\ , \tag{3.60}$$

$$\phi(t) + 2\delta(t) \hat{=} \chi(t)\ , \tag{3.61}$$

e

$$\gamma(t) \hat{=} \zeta(t) + 2\delta(t)\ , \tag{3.62}$$

reescrevemos o sistema (3.36), na forma

$$\dot{r} = -2\kappa(t)\ sen\big(\chi(t) - \gamma(t)\big)\ , \tag{3.63a}$$

$$\dot{\chi} = -4\kappa(t)\ cotgh2r\cos\big(\chi(t) - \gamma(t)\big)\ . \tag{3.63b}$$

Considerando-se, no entanto, que $\gamma(t)=c$, uma constante, eliminamos o parâmetro tempo de forma a restar a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dr}{d\chi} = \frac{1}{2}\, tgh(2r)\; tg(\chi - c)\ , \tag{3.64}$$

de cuja integração resulta a constante de movimento

$$\cos\left(\phi(t) - \zeta(t)\right) senh2r(t) = K\ . \tag{3.65}$$

Considerando esta constante de movimento mediante a igualdade $\chi(t)-c=\phi(t)-\zeta(t)$, resulta a solução das equações (3.63), tal que

$$\cosh\left(2r(t)\right) = \sqrt{1 + K^2}\, \cosh\left(h(t)\right)\ , \tag{3.66a}$$

$$\cos\left(\phi(t) - \zeta(t)\right) = \frac{K}{\left[(1 + K^2)\cosh^2\left(h(t)\right) - 1\right]^{\frac{1}{2}}}\ , \tag{3.66b}$$

onde

$$h(t) = 4\int \kappa(t)\; dt\ . \tag{3.67}$$

Portanto, verifica-se que, mesmo com a dependência temporal em $\kappa(t)$, é possível obter uma solução analítica para o sistema de equações diferenciais acopladas quando $\gamma(t)$ mantém-se constante no

tempo. Por exemplo, se $\omega(t)$ independe do tempo, $\omega(t)=\omega_0$, faz-se necessário que $\zeta(t)= -2\omega_0 t+c_1$, onde c_1 indica alguma constante. Além do que, exigindo que κ seja também constante e $c_1=-\pi/2$, decorre o caso específico correspondente ao oscilador paramétrico em regime de ressonância[35], onde possíveis soluções das equações (3.63), para K=0, apresentam os valores $\phi(t)=-2\omega_0(t)$ e $r(t)=2\kappa t$. Neste regime, as funções (3.50) simplificam-se nas formas

$$u(t) = \cosh(2\kappa t)\, e^{-i\omega_o t}\,, \qquad v(t) = senh(2\kappa t)\, e^{-i\omega_o t}\,, \tag{3.68}$$

resultando nas variâncias das quadraturas

$$\langle \Delta X^2{}_{1,H}\rangle = \frac{1}{4}\left[e^{4\kappa t}\cos^2(\omega_o t) + e^{-4\kappa t}\, sen^2(\omega_o t)\right], \qquad \langle \Delta X^2{}_{2,H}\rangle = \frac{1}{4}\left[e^{4\kappa t}\, sen^2(\omega_o t) + e^{-4\kappa t}\cos^2(\omega_o t)\right]. \tag{3.69}$$

Constata-se destas variâncias que o squeezing ocorre periodicamente. Contudo, ao invés de considerar as curvas usuais $\langle \Delta X^2{}_{i,H}\rangle$ vs. t, verificamos a ocorrência de squeezing quando a trajetória de $(r(t), \phi(t))$ atravessa as **regiões de squeezing** hachuradas nas figuras 10 a (para $\langle \Delta X^1{}_{1,H}\rangle$) e 10 b (para $\langle \Delta X^2{}_{2,H}\rangle$).

Considerando agora $c_1=0$, isto é, $f_2=\kappa e^{-2i\omega t}$, a solução $\phi(t)$ é acrescida de uma fase igual a $\pi/2$, tal que $\phi(t)=-2\omega_0 t+\pi/2$, o que acarreta um deslocamento da trajetória de $(r(t), \phi(t))$ obtida no caso anterior, além do que, observa-se das figuras 10 a e 10 b que o

squeezing é afetado em decorrência desta mera troca de fase, pois que há uma redução da sobreposição destas novas trajetórias (linha 2) com relação às regiões hachuradas. Observa-se, por fim, que devido ao princípio da incerteza as curvas equivalentes, junto às figuras 10 a e 10 b, jamais cruzam regiões de squeezing simultaneamente.

c) Outra forma de resolução para a ressonância

Consideremos que exista um vínculo entre os parâmetros $\omega(t)$ e $\kappa(t)$, segundo

$$\omega(t) + \eta\kappa(t) = \lambda = constante, \tag{3.70}$$

onde η indica um número real qualquer. Definindo os parâmetros

$$\zeta(t) \hat{=} 2\eta\int\kappa(t)\, dt\ , \tag{3.71}$$

$$\chi(t) \hat{=} \phi(t) + 2\lambda t - \zeta(t)\ , \tag{3.72}$$

e

$$\gamma(t) \hat{=} \zeta(t) + 2\lambda(t) - \zeta(t)\ , \tag{3.73}$$

obtemos o conjunto de equações

$$\dot{r} + 2\kappa(t)\ sen\big(\chi(t) - \gamma(t)\big) = 0\ , \tag{3.74a}$$

$$\dot{\chi}(t) + 4\kappa(t)\ cotgh(2r)\ \cos\big(\chi(t) - \gamma(t)\big) = 0\ . \tag{3.74b}$$

Se, novamente, $\gamma(t)=c=$constante, nós retornamos ao caso precedente, embora tenhamos agora dois vínculos, as equações (3.70) e $\gamma(t)=c$.

d) Squeezing fora da Ressonância

Supomos aqui que o parâmetro κ seja independente do tempo, enquanto que $\zeta(t)$ DT. Definindo as relações

$$\chi(t) \hat{=} \phi(t) - \zeta(t) \ , \tag{3.75}$$

e

$$\dot{\gamma}(t) \hat{=} 2\omega(t) + \zeta(t) \ , \tag{3.76}$$

transformamos as relações (3.36), tal que

$$\dot{r} = -2\kappa \ sen\chi \tag{3.77a}$$

$$\dot{\chi} = -\dot{\gamma} - 4\kappa cotgh(2r)\cos\chi \ . \tag{3.77b}$$

Se considerarmos $\gamma=c=$constante, ou seja

$$2\int\omega(t)\ dt + \zeta(t) = ct + c_1 \ , \tag{3.78}$$

onde c_1 indica outra constante, podemos, então, resolver as eqs.(3.77) por quadratura:

Denominando $s=2r$ e $\bar{\kappa}=4\kappa$, resulta das eqs.(3.77)

$$\dot{s} = -\bar{\kappa}\, sen\chi \,, \tag{3.79a}$$

$$\dot{\chi} = -c - \bar{\kappa}\, cotghs \cos\chi \,, \tag{3.79b}$$

de forma que, eliminando-se o tempo dentre estas equações, obtemos

$$\frac{ds}{d\chi} = \frac{\bar{\kappa}\, sen\chi}{c + \bar{\kappa}\, cotghs \cos\chi} \,. \tag{3.80}$$

Trocando a variável χ para $u=-\ln(\bar{\kappa}/c \cos\chi)$, a relação (3.80) simplifica-se na forma

$$\frac{du}{ds} = e^{u} + cotghs \,. \tag{3.81}$$

Numa última troca de variável, considerando que $w(s)=u(s)-\ln(\text{senh } s)$, obtemos

$$\frac{d\omega}{ds} = e^{\omega}\, senhs \,, \tag{3.82}$$

relação esta que pode facilmente ser integrada, resultando na constante de movimento $e^{-\omega}+\cosh s$, ou seja

$$\cosh\left(2r(t)\right) + \frac{4\kappa}{c}\cos\left(\phi(t) - \zeta(t)\right) senh\left(2r(t)\right) = K \,, \tag{3.83}$$

onde o valor K remonta às quantidades triviais $r(0)$, $\phi(0)$ e $\zeta(0)$.

Em particular, se $f_1(t)=\omega_0$, $f_2(t)=\kappa e^{i\zeta(t)}$, $\zeta(t)=-\omega t$ $(\omega\neq\omega_0)$ e

$f_3=0$, o hamiltoniano original em (3.19) compreende o oscilador paramétrico com bombeamento a freqüências fora da ressonância[37]. Introduzindo a quantidade real admensional $\eta=4\kappa/c$, com $c=2\omega_0-\omega$, decorrem três diferentes soluções relativas ao valor $|\eta|$ assumido

i) Se $|\eta|>1$, depreende-se as relações

$$\cosh\left(2r(t)\right)=\frac{K}{\eta^2-1}\left[|\eta|\,\frac{\sqrt{K^2+(\eta^2-1)}}{K}\cosh\left(\frac{4\kappa\sqrt{\eta^2-1}}{\eta}\,t\right)-1\right], \qquad (3.84)$$

e

$$\cos\left(\phi(t)+\omega t\right)=\pm\frac{K-\cosh\left(2r(t)\right)}{\eta\sqrt{\cosh^2\left(2r(t)\right)-1}}, \qquad (3.85)$$

onde o sinal na eq.(3.85) é escolhido tal que $\cos\phi(0)\geq 0$. Se $r(0)=0$, resultando em $K=1$, as equações (3.84) e (3.85), tornam-se, respectivamente

$$senh\left(r(t)\right)=\frac{\eta\, senh\left(\frac{2\kappa\sqrt{\eta^2-1}}{|\eta|}\,t\right)}{(\eta^2-1)^{1/2}}, \qquad (3.86)$$

e

$$\cos\left(\phi(t)+\omega t\right)=\frac{senh\left(\frac{2\kappa\sqrt{\eta^2-1}}{|\eta|}\,t\right)}{\sqrt{\eta^2\cosh^2\left(\frac{2\kappa\sqrt{\eta^2-1}}{\eta}\,t\right)-1}}, \qquad (3.87)$$

ii) Para $|\eta|<1$ e $K>(1-\eta^2)^{1/2}$, a solução (3.84) altera-se,

conforme

$$\cosh\left(2r(t)\right) = \frac{K}{1-\eta^2}\left[1 - |\eta| \frac{\sqrt{K^2 - (1-\eta^2)}}{K} \cos\left(\frac{4\kappa\sqrt{1-\eta^2}}{\eta} t\right)\right], \quad (3.88)$$

enquanto que a eq. (3.85) persiste. Quanto ao caso onde r(0)=0, com K=1, obtemos

$$senh\left(r(t)\right) = \frac{\eta\, sen\left(\frac{2\kappa\sqrt{1-\eta^2}}{|\eta|} t\right)}{(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.89)$$

e

$$\cos\left(\phi(t) + \omega t\right) = \frac{sen\left(\frac{2\kappa\sqrt{1-\eta^2}}{|\eta|} t\right)}{\sqrt{1 - \eta^2 \cos^2\left(\frac{2\kappa\sqrt{1-\eta^2}}{\eta} t\right)}}, \quad (3.90)$$

As trajetórias de $\left(r(t), \phi(t)\right)$ através das regiões de squeezing, correspondentes às figuras 11 a e 11 b, expõem as curvas 1 e 2 (5 e 6) relativas a $|\eta|>1$ (<1), para os valores $\omega=\omega_0$ e $3\omega_0$ ($\omega=3.5\omega_0$ e $0.5\omega_0$), respectivamente. Podemos, através destas figuras, verificar a alteração das trajetórias e, conseqüentemente, do squeezing, quando consideramos valores maiores ou menores que $|\eta|=1$. Para $|\eta|>1$ o parâmetro r cresce de forma monotônica com o decréscimo de ϕ, enquanto para $|\eta|<1$ observa-se uma oscilação periódica do fator de squeezing. Todas estas trajetórias exibem uma ocorrência periódica de squeezing, embora os períodos de trânsito pelas regiões de squeezing sejam distintos; especificamente para $|\eta|>1$ ocorre um decréscimo destes

períodos com o acréscimo do parâmetro r. Quando $\omega=2\omega_0$ ($\eta=\infty$) recuperamos o caso ressonante.

iii) Para $|\eta|=1$, o que se verifica somente quando $\omega_1=2\omega_0-4\kappa$, para $2\omega_0+4\kappa$, as soluções são consideravelmente simplificadas, tal que, para $r(0)=0$ e $K=1$, temos

$$senh\left(r(t)\right) = 2\kappa t \ , \tag{3.91}$$

e

$$\cos\left(\phi(t) + \omega t\right) = 1 \ . \tag{3.92}$$

Desde que $\phi(t)=-\omega t$, decorre a relação imediata entre os parâmetros de squeezing r e ϕ,

$$r(\phi) = \ln\left\{\frac{2\kappa|\phi|}{\omega}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{2\kappa\phi}\right)^2}+1\right]\right\}, \tag{3.93}$$

cujas trajetórias, expostas pelas curvas tracejadas nas figuras 11.a e 11.b, correspondem às linhas 3 e 4, para ω_1 e ω_2, respectivamente. Identicamente ao caso onde $|\eta|>1$, observa-se que r cresce de forma monotônica com o decréscimo de ϕ, embora a origem das trajetórias tenha se alterado para (0,0) em contrapartida a $(0,\pi/2)$ (casos i e ii). Esta alteração dá-se pelo fato de que nas eqs.(3.86) e (3.87) ou (3.89) e (3.90), o limite $|\eta|\to 1$ é considerado independentemente de qualquer valor de t. Todas as curvas que exemplificam os três casos consideram $\kappa=0.3\omega_0$, enquanto que o tempo é compreendido em unidades de ω_0.

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

3.8 - GERAÇÃO DE SQUEEZING DEVIDO A UM OSCILADOR CARREGADO OU UMA PARTÍCULA CARREGADA EM UM CAMPO ELETROMAGNÉTICO DT

Nesta seção pretende-se considerar o desenvolvimento anterior, quanto a técnica de diagonalização por invariantes, num enfoque mais especificamente físico do problema da geração de squeezing[29,69]. Consideramos, para tal, uma partícula, a qual pode constituir-se num oscilador isotrópico, de carga **e** e massa **M**, movendo-se num campo magnético axialmente simétrico definido pelos potenciais vetor e escalar, respectivamente

$$\vec{A} = \frac{1}{2} B(t)\, \hat{k} \times \vec{r}\,, \tag{3.94}$$

e

$$\phi = \frac{1}{2} \frac{e}{Mc^2}\, \eta(t)\, r^2\,, \tag{3.95}$$

onde $\hat{k}$ indica o versor ao longo do eixo de simetria, perpendicular às componentes cartesianas x e y, com $r^2=x^2+y^2$. B(t) e η(t) dizem respeito a funções DT, arbitrárias e contínuas por parte, e **c** a velocidade da luz.

O hamiltoniano quantizado relativo ao sistema em questão compõe-se de termos perpendicular e paralelo, na forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2M}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\phi = \mathcal{H}_{\perp} + \mathcal{H}_{\parallel}\,, \tag{3.96}$$

onde

$$\mathcal{H}_{\perp} = \frac{1}{2M}\left(p_x^{\,2} + p_y^{\,2}\right) + \frac{M}{2}\,\Omega^{\,2}(t)\,(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}\,\omega_c(t)\,L_z\,, \qquad (3.97)$$

e

$$\mathcal{H}_{\parallel} = \frac{1}{2M}\,p_z^{\,2}\,. \qquad (3.98)$$

$L_z = xp_x - yp_y$, constitui-se na componente z do momento angular, além do que

$$\Omega\,(t) = \frac{e}{Mc}\left(\frac{1}{4}\,B^2(t) + \eta(t)\right)^{1/2}, \qquad (3.99)$$

e

$$\omega_c(t) = \frac{e}{Mc}\,B(t)\,. \qquad (3.100)$$

Nota-se que $\mathcal{H}_{\parallel}$, descrito em (3.98), trata o movimento axial de uma partícula no campo eletromagnético e, portanto, este termo será ignorado com relação ao hamiltoniano geral posto que envolve um movimento trivial, perpendicular ao eixo de simetria.

Procedendo-se à mudança do referencial de laboratório para o de Larmor, devemos considerar uma transformação unitária sobre a equação de Schrödinger

$$\mathcal{H}_{\perp}|\,\psi(t)\rangle = \left(\mathcal{H}_{xy} + \frac{\omega_c(t)}{2}\,L_z\right)|\,\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\,\psi(t)\rangle \qquad (3.101)$$

onde desacoplamos o hamiltoniano (3.97) segundo o termo de Larmor e

$$\mathcal{H}_{xy} = \frac{1}{2M}\left(P_x^2 + p_y^2\right) + \frac{M}{2}\Omega^2(t)\left(x^2 + y^2\right). \qquad (3.102)$$

Por meio de um operador unitário V, considerado mediante a eq.(3.101), logramos

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_L(t)\rangle = \left(i\hbar\frac{\partial V}{\partial t}V^+ + \frac{\omega_c(t)}{2}VL_zV^+ + V\mathcal{H}_{xy}V^+\right)|\psi_L(t)\rangle, \qquad (3.103)$$

onde $|\psi_L(t)\rangle = V|\psi(t)\rangle$. Considerando $i\hbar\partial V/\partial t = \omega_c(t)/2\ VL_z$ obtemos que $V = \exp(i\xi(t)L_z)$, com $\xi(t) = +1/2\hbar\int_0^t \omega_c(t')dt'$. Logo, desde que $[\mathcal{H}_{xy}, L_z] = 0$, a equação de Schrödinger, através do referencial de Larmor, escreve-se segundo

$$\mathcal{H}_{xy}|\psi_L(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_L(t)\rangle. \qquad (3.104)$$

Vale frisar que, fazendo $\eta \neq 0$ ($\eta = 0$), em (3.99), temos que o hamiltoniano (3.102) descreve um oscilador harmônico (partícula carregada) sujeito a um campo eletromagnético DT, de forma que tal sistema constitui-se numa extensão daquele investigado por A. Bechler[63] e M. Abdala[64].

No que segue, empregaremos os operadores a_i e a_i^+ (i=x, y), conforme definidos em (3.16). Contudo, para o caso em questão, sob a consideração de um campo eletromagnético dependente do tempo, estaremos de posse dos operadores de Heisenberg

$$a_{i,H}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{M\Omega(t)}\,q_i(t) + i\frac{P_i(t)}{\sqrt{M\Omega(t)}}\right), \qquad (3.105a)$$

$$a_{i,H}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{M\Omega(t)}\, q_i(t) + i \frac{P_i(t)}{\sqrt{M\Omega(t)}} \right), \tag{3.105a}$$

Considerando $B(t)=B_0\theta(t)$, onde $\theta(t)=0$ para $t\leq 0$ e $\theta(t)=1$ se $t>0$, recobramos a representação de Schrödinger , eqs.(3.16), com $\Omega(0)=\omega_0$. Conforme (3.99), ω_0 diz respeito à freqüência do oscilador associada ao campo elétrico $\eta\neq 0$, constante.

Da substituição das relações (3.105), com t=0, junto ao hamiltoniano (3.102), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{xy}(a^+,a,t) = \hbar\Big[& g_1(t)\,(a_x^+ a_x + 1/2) + g_2(t)\left(a_x^{+2} + a_x^2\right) \\ & + g_1(t)\,(a_y^+ a_y + 1/2) + g_2(t)\left(a_y^{+2} + a_y^2\right) \Big], \end{aligned} \tag{3.106}$$

enquanto que,

$$-\frac{1}{2}\,\omega_c(t)\,L_z = \hbar\left[i g_3(t)\left(a_x^+ a_y - a_x a_y^+\right)\right], \tag{3.107}$$

onde

$$g_1(t) = \frac{1}{2}\,\omega_o \left[\left(\frac{\Omega(t)}{\omega_o}\right)^2 + 1 \right], \tag{3.108a}$$

$$g_2(t) = \frac{1}{4}\,\omega_o \left[\left(\frac{\Omega(t)}{\omega_o}\right)^2 - 1 \right], \tag{3.108b}$$

e

$$g_3(t) = \frac{e}{2Mc} B(t) = \frac{1}{2}\omega_c(t) \ . \qquad (3.108c)$$

Tratando-se do hamiltoniano (3.106), as equações de Heisenberg podem ser obtidas segundo as relações $i\hbar\, da_{i,H}/dt=[a_{i,H},\mathcal{H}_{xy,H}]$ e $i\hbar\, da^{+}_{i,H}/dt=[a^{+}_{i,H},\mathcal{H}_{xy,H}]$, das quais conseguimos

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_{x,H} \\ a^{+}_{x,H} \\ a_{y,H} \\ a^{+}_{y,H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -if_1(t) & -2if_2(t) & 0 & 0 \\ 2if_2(t) & if_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -if_1(t) & -2if_2(t) \\ 0 & 0 & 2if_2(t) & if_1(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{x,H} \\ a^{+}_{x,H} \\ a_{y,H} \\ a^{+}_{y,H} \end{pmatrix} . \qquad (3.109)$$

Restringindo a relação (3.109) ao subspaço x, escrevemos

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_{x,H} \\ a^{+}_{x,H} \end{pmatrix} = M(t)\begin{pmatrix} a_{x,H} \\ a^{+}_{x,H} \end{pmatrix}, \qquad (3.110)$$

onde, servindo-se das matrizes σ de Pauli, $M(t)=-if_1(t)\sigma_z+2f_2(t)\sigma_y$. Relação idêntica a (3.110), obtém-se para o sub-espaço y, com $a_{x,H} \rightarrow a_{y,H}$ e $a^{+}_{x,H} \rightarrow a^{+}_{y,H}$.

Para o tratamento da dependência temporal dos campos B e η, e considerando-se somente uma das componentes (x ou y) do hamiltoniano $\mathcal{H}_{x,y}$, tal que podemos escrever

$$\mathcal{H}(a^{+},a,t) = f_1(t)\,(a^{+}a + 1/2) + f_2(t)\left(a^{+2} + a^{2}\right), \qquad (3.111)$$

recobramos o oscilador paramétrico conforme abordado desde a seção (3.6) (a menos do termo 1/2 $f_1(t)$ que não corrobora qualquer alteração) , e respectivos resultados[69].

Para o retorno do referencial de Larmor ao de laboratório, sob a consideração do operador unitário V considerado em (3.103), as componentes x e y dos operadores na representação de Heisenberg, satisfazem

$$a_{x,H} = b_x(t)\cos\left(\Lambda(t)\right) + b_y sen\left(\Lambda(t)\right), \tag{3.112a}$$

$$a^{+}_{x,H} = b^{+}_x(t)\cos\left(\Lambda(t)\right) + b^{+}_y sen\left(\Lambda(t)\right), \tag{3.112b}$$

onde os operadores (b_x, b^+_x) e (b_y, b^+_y) encontram-se definidos em (3.49), com relação a operadores de Schrödinger (a_x, a^+_x) e (a_y, a^+_y), respectivamente. Consideramos, em (3.112), que $V=\exp[\Lambda(t)(a^+_x a_y - a_x a^+_y)]$, onde

$$\Lambda(t) = \frac{i}{2\hbar}\int_0^{t'} \omega_c(t')\, dt' , \tag{3.113}$$

de forma que, procedendo-se ao cálculo das flutuações nas quadraturas, segundo a consideração de um estado inicial arbitrário (ver eq.(3.53)), obtemos os resultados

$$\langle(\Delta X_{i,H})^2\rangle = \frac{1}{4}\left\{\left[2|u \pm v^*|^2\langle\Delta(a^+{}_x a_x)\rangle \pm (u \pm v^*)^2\langle\Delta a^2{}_x\rangle \pm (u^* \pm v)^2\langle\Delta a^{+2}{}_x\rangle\right.\right.$$
$$\left. + |u \pm v^*|^2\right]\cos^2\left(\Lambda(t)\right) + \left[2|u \pm v^*|^2\langle\Delta(a^+{}_y a_y)\rangle \pm (u \pm v^*)^2\langle\Delta a^2{}_y\rangle\right.$$
$$\left.\left. \pm (u^* \pm v)^2\langle\Delta a^{+2}{}_y\rangle + |u \pm v^*|^2\right] sen^2\left(\Lambda(t)\right)\right\}. \tag{3.114}$$

Para um estado inicial coerente, em ambas as componentes x e y, ocorre que $\langle\Delta(a^+,a)\rangle=\langle\Delta a^{+2}\rangle=\langle\Delta a^2\rangle=0$, de modo a recuperarmos o resultado (3.54). Concluímos, então, que as flutuações nas quadraturas independem do referencial quando se considera as médias com relação a um estado inicial coerente.

3.9 - CONCLUSÕES

Retomando as figuras 10 e 11, é importante notar que a cada ponto do espaço de fase (r,ϕ) associa-se uma **elipse de incerteza** (ver figura 12) relativa ao sistema em estudo, onde $a=e^{-r}/2$ e $b=e^{r}/2$ (eqs.(3.12)), correspondem aos semi-eixos principais, enquanto que $\phi/2$ demarca o ângulo entre o semi-eixo menor da elipse rotacionada e o eixo das abscissas do sistema cartesiano de referência. Segundo esta noção, as variâncias expressas em (3.56) representam os valores máximos de projeção da elipse rotacionada sobre os eixos cartesianos originais (x,y), conforme indica a figura 12 e as equações

$$\left\langle \Delta X_{1,H}^2 \right\rangle = \left[\left(b\cos\left(\phi/2\right) \right)^2 + \left(a\,sen\left(\phi/2\right) \right)^2 \right],$$

$$\left\langle \Delta X_{2,H}^2 \right\rangle = \left[\left(a\cos\left(\phi/2\right) \right)^2 + \left(b\,sen\left(\phi/2\right) \right)^2 \right].$$

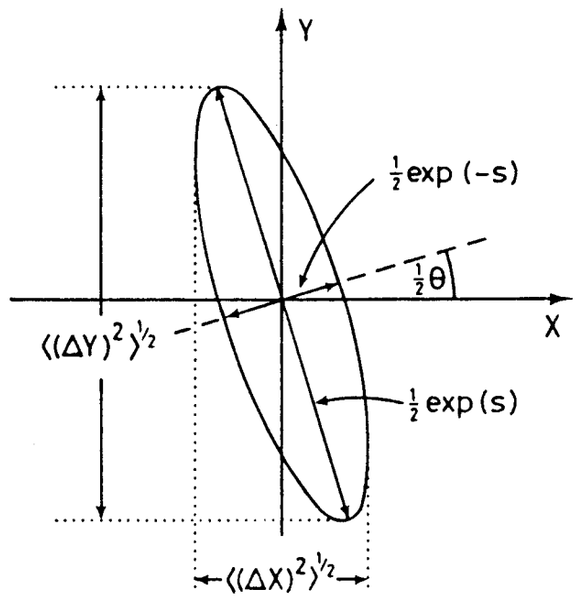


Figura 12: *Elipse de incerteza relativa ao estado squeezed do vácuo através da qual expõe-se a ação dos parâmetros s e* ϕ *sobre as dimensões e orientação dos eixos relacionados. As projeções da elipse sobre os eixos originais X e Y determinam as flutuações nas quadraturas.*

Uma vez que os parâmetros r e ϕ são DT, a elipse de incerteza altera a sua forma e seu ângulo de rotação com a evolução temporal. Além do que, quando o parâmetro de squeezing compõe uma função oscilante no tempo, em torno de r=0, o que ocorre para as trajetórias 5 e 6 nas figuras 11, há uma alternância entre os semi-eixos maior e menor. Obviamente, quando r=0 a elipse se reduz a um círculo, e para $\phi=n\pi$, com n=0, 1, 2, ..., os eixos da elipse coincidem com aqueles do referencial cartesiano.

Considerando a figura 10.b, por exemplo, verifica-se que dentre a região de squeezing centrada em $\phi=0$, de onde partem as trajetórias 1 e 2, esta última exibe um maior pronunciamento do efeito de squeezing (maior parâmetro de excentricidade das elipses associadas a cada ponto da trajetória) que a primeira, abrangendo também um intervalo maior do ângulo de rotação. Quando estas trajetórias cruzam pela próxima região de squeezing, centrada em $\phi=-2\pi$, embora a trajetória 2 continue a apresentar maior squeezing que a trajetória 1, esta última persistirá, agora, por um maior intervalo angular, característica esta que se repete por todos os demais momentos de squeezing. Ademais, com a evolução temporal do sistema, constata-se uma diminuição nos intervalos angulares durante os quais dá-se o efeito de squeezing que, em contrapartida, acentua-se a cada ocorrência.

Tratando-se do oscilador paramétrico fora do regime de ressonância, observando-se a figura 11.b, por exemplo, percebe-se que as trajetórias de 1 a 4, correspondentes a $|\eta|\geq 1$, comportam-se basicamente segundo a interpretação do parágrafo anterior. Quanto a $|\eta|<1$, situação ilustrada pelas trajetórias oscilantes 5 e 6, o parâmetro de squeezing (ou excentricidade das elipses) é limitado sobre

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

um certo domínio enquanto que o intervalo angular de rotação, relativo a cada região de squeezing, alterna-se periodicamente num comportamento contrário às demais trajetórias. Portanto, embora quando $|\eta|>1$ (bombeamento a freqüências próximas da ressonância) o grau de squeezing alcançado seja maior que aquele em $|\eta|<1$ (bombeamento a freqüências distantes da ressonância), a periodicidade com que ali se obtém o squeezing, por sua vez, é um tanto mais escassa.

Embora, segundo diferentes métodos[37,69,87], tenha-se procedido à abordagem do hamiltoniano geral DT em (3.19), a contribuição do trabalho aqui exposto consiste de um empreendimento simples e elegante segundo a utilização do método de invariantes de Lewis & Riesenfeld. Deste, a solução da equação de Schrödinger, implica em que se resolva as equações diferenciais características (3.36), as quais envolvem os parâmetros $f_i(t)$ do hamiltoniano. Para soluções estáveis as variâncias das quadraturas devem depender dos parâmetros DT $r(t)$ e $\phi(t)$, que definem um espaço de fase, no qual, enquanto um novo aspecto, mostramos que o fenômeno squeezing ocorre somente quando as trajetórias $(r(t),\phi(t))$ atravessam regiões definidas de squeezing. Verificamos, no mais, que algumas relações entre os parâmetros $f_i(t)$, permitem a solução por quadratura das equações (3.36), independente da dependência funcional do tempo.

Como ilustração do procedimento desenvolvido, abordamos o modelo simples do oscilador paramétrico, desde que consiste de um hamiltoniano quadrático DT cujas equações características perfazem as soluções apresentadas nos casos b e d da seção 3.7. Situação menos trivial e mais realista envolve o hamiltoniano que descreva um meio onde o processo de dissipação/amplificação se faça presente. Este

hamiltoniano deve conter forças estocásticas DT e será o objeto do próximo capítulo.

CAPÍTULO 4

O HAMILTONIANO QUADRÁTICO DEPENDENTE DO TEMPO E O PROCESSO DE AMPLICAÇÃO/DISSIPAÇÃO

4.1 - INTRODUÇÃO

O tratamento do problema da dissipação de energia em mecânica quântica remonta aos hamiltonianos fenomenológicos de Caldirola[70] e Kanai[71]. Explicitamente dependentes do tempo, estes hamiltonianos podem ser deduzidos do lagrangeano posteriormente proposto por Havas[31], do qual decorre também o hamiltoniano dissipativo não-linear de Kostin[72], originalmente deduzido da equação de movimento de Heisenberg. Outro método considerado para a construção de hamiltonianos dissipativos deve-se a Albrecht[73] e Hasse[74], o qual propõe uma nova classe de operadores de fricção não-lineares, sob a condição de que o princípio de correspondência seja satisfeito requerendo-se a validade do teorema de Ehrenfest.

O caminho para a abordagem da dissipação quântica, segundo os métodos acima expostos, consiste na resolução da equação de Schrödinger e análise do comportamento da função de onda, ou na construção de pacotes de onda (conforme observa-se nas referências [75, 76], respectivamente). Entretanto, apresentam-se dificuldades inerentes a este procedimento; essencialmente a violação do princípio da incerteza quanto ao hamiltoniano de Caldirola/Kanai, ao passo que o hamiltoniano não-linear de Kostin viola o princípio da superposição.

Maiores detalhes podem ser encontrados junto a ref.[74].

Quando da descrição de um hamiltoniano fenomenológico que pretenda considerar o processo quântico de fricção, os efeitos do meio responsável pela perda de energia podem ser simulados por um termo decorrente de uma força proporcional à velocidade da partícula (à semelhança do tratamento clássico), além de outro termo responsável por flutuações (correspondente a uma força estocástica), de acordo com a equação clássica de Langevin. Originalmente, a importância da força estocástica na abordagem quântica da dissipação foi apontada por Senitzky[32].

Ao que parece, Svin'in[77] foi o primeiro autor a considerar uma abordagem mais conveniente da dissipação quântica através do hamiltoniano de Caldirola/Kanai, complementando-o com uma força estocástica. Assumindo um pacote de onda que resulte em solução da equação de Schrödinger, o autor procede à construção de funções distribuição para a posição e momento separadamente, combinando médias quântica e estatística, pelo que torna-se possível obter valores médios estatístico-quânticos. Messer[78] desenvolve um tratamento idêntico em consideração ao hamiltoniano de Kostin.

Outra abordagem da dissipação quântica considera o movimento browniano de uma partícula inserindo-a num reservatório térmico constituído de osciladores harmônicos independentes. Assume-se que a partícula browniana seja também um oscilador harmônico acoplado aos demais que compreendem o reservatório. Quando se considera o limite de um número infinito de osciladores no reservatório, o movimento da partícula é descrito pelas equações de Langevin ou Fokker-Planck. Segundo este procedimento enfatizamos os trabalhos de Ford e

outros[79], Ullersma[80], e Louisell[81], nos quais a asserção do processo markoviano é essencial para que se assegure a irreversibilidade do fenômeno.

A partir do lagrangeano de Havas, Brinati e Mizrahi[82], propõem um tratamento mais adequado dos problema dissipativo, fazendo uso da equação quântica de Liouville. Decorre, então, que os valores médios das quantidades de interesse são obtidas de forma mais natural através de uma função distribuição que constitui solução da equação de Fokker-Planck. Este tratamento pode ser considerado como o análogo quântico daquele desenvolvido por Wang e Uhlenbeck[83] para a equação de Fokker-Planck.

No princípio da década de 80, A. Caldeira e A. Leggett imprimiram um considerável avanço ao estudo do problema da dissipação quântica. Em linhas gerais, os autores consideram a técnica de Feynmann/Vernon[86] da integração funcional aplicada à evolução do operador densidade sistema/reservatório, onde o propagador é definido pela ação clássica renormalizada em presença do banho. Segundo este procedimento, são abordados o movimento browniano quântico[84], o tunelamento quântico em sistemas macroscópicos dissipativos[39,85] e, mais propriamente no âmbito da medida quântica, verifica-se a influência da dissipação sobre a coerência quântica.[19]

O trabalho relativo a este capítulo procede à consideração do hamiltoniano quadrático DT, (3.19), no contexto do problema da dissipação/amplificação de energia. Para tal, recobramos o procedimento de Havas, onde além de um fator integrante a simular a dissipação, inserimos forças estocásticas através dos termos lineares em (3.19). Segundo certas aproximações, a consideração da técnica de

diagonalização por invariantes associada ao novo hamiltoniano, permite-nos obter o operador de evolução temporal e as quantidades físicas decorrentes.

4.2 - O HAMILTONIANO DISSIPATIVO

Conforme esclarece a introdução, com o objetivo de se considerar o hamiltoniano expresso em (3.19) no âmbito de um processo dissipativo, deve-se proceder, primeiramente, à simulação dos efeitos devidos ao banho térmico, o que faremos através da associação de uma lagrangeana similar à de Havas, ao hamiltoniano em questão. Além do que, os efeitos dissipativos provenientes do banho estão vinculados às flutuações inerentes ao processo. Tais flutuações, provêem de ruídos na cavidade, os quais são simulados por funções estocásticas associadas aos parâmetros DT multiplicativos dos termos lineares, a^+ e a, em (3.19).

A lagrangeana relativa àquela proposta por Havas, para a abordagem do movimento de uma partícula clássica sujeita a fricção, é descrito, para o caso unidimensional, segundo

$$\mathcal{L}(q,\dot{q},t) = \frac{1}{1-2\frac{\kappa}{\omega_0}\cos\zeta(t)}\left\{\frac{\dot{q}^2}{2} + \dot{q}\left(2\kappa q\, sen\zeta(t) - \Lambda(t)\right) - \frac{q^2}{2}\left(\omega_0{}^2 - 4\kappa^2\right)\right.$$

$$- q\left[\frac{\omega_0}{\sqrt{2\omega_0}}\left(F^*(t) + F(t)\right)\left(1 - \frac{2\kappa}{\omega_0}\cos\zeta(t)\right)\right.$$

$$\left.\left. + 2\kappa\Lambda(t)\, sen\zeta(t)\right] + \frac{\Lambda^2(t)}{2}\right\}e^{\lambda t}\,, \qquad (4.1)$$

onde ω_0, diz respeito à freqüência do campo na cavidade, enquanto $\zeta(t)$ relaciona-se à freqüência do campo de bombeamento de forma a ser definida.Também já definido, $\kappa(t)$ compreende a amplitude do campo de bombeamento e a constante de acoplamento entre este campo e os modos da cavidade. A força estocástica encontra-se presente na lagrangeana através da função temporal F(t), além de implicar no parâmetro complexo DT

$$\Lambda(t) = \frac{i}{\sqrt{2\omega_0}}\left(F^*(t) - F(t)\right). \qquad (4.2)$$

O parâmetro λ, por fim, representa a constante de fricção relativa ao banho térmico.

A lagrangeana clássica acima descrita, a menos do fator de dissipação $e^{\lambda t}$ (posteriormente inserido), é decorrência, via transformação de Legendre $\mathcal{H}=pq-\mathcal{L}$, do equivalente clássico ao hamiltoniano (3.19), ou seja

$$\mathcal{H}_{CL}(p,q,t) = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\,\omega_0{}^2 q^2 + \frac{\kappa}{\omega_0}\left[\left(\omega_0{}^2 q^2 - p^2\right)\cos\zeta(t)\right.$$

$$\left. - 2\omega_0 qp\,sen\zeta(t)\right] - \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}}\left[\left(F^*(t) + F(t)\right)\omega_0 q + \sqrt{2\omega_0}\,\Lambda(t)\,p\right]. \tag{4.3}$$

A energia cinética é designada pelo primeiro termo da hamiltoniana; o último termo compreende a força estocástica, enquanto que os demais, segundo e terceiro termos, correspondem à energia potencial.

Definindo, junto a lagrangeana (4.1), a nova coordenada para a posição

$$Q = q\,e^{\frac{\lambda t}{2}}\ , \tag{4.4}$$

decorre diretamente a relação para o momento canônico

$$P = \frac{\partial\mathcal{L}(Q,\dot{Q},t)}{\partial\dot{Q}} = p\,e^{\lambda t/2}\ . \tag{4.5}$$

O momento cinético ou mecânico, no entanto, definido como $p_{cin}=q$, satisfaz a relação

$$p_{cin} = \dot{q} = (1 - \frac{2\kappa}{\omega_0}\cos\zeta)\,pe^{-\lambda t} - 2\kappa q\,sen\zeta + \Lambda\ , \tag{4.6}$$

ao passo que a própria coordenada q refere-se à posição real, a qual define a posição virtual Q.

Da consideração do lagrangeano sob as novas coordenadas Q e Q, a transformação de Legendre permite-nos obter a hamiltoniana

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

clássica dissipativa na forma

$$\mathcal{H}_{CL}(P,Q,t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2\kappa}{\omega_0}\cos\zeta(t)\right)P^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - 2\kappa\, sen\zeta(t)\right)QP$$

$$+ 2\Lambda(t)e^{\lambda t/2}P + \frac{\omega_0{}^2}{2}\left(1 + \frac{2\kappa}{\omega_0}\cos\zeta(t)\right)Q^2 \qquad (4.7)$$

$$+ \omega_0\left(F^*(t) + F(t)\right)e^{\frac{\lambda t}{2}}Q\ .$$

Procedendo-se à quantização do sistema descrito em $\mathcal{H}_{CL}(P,\ Q,\ t)$, recorremos aos operadores bosônicos não-hermitianos

$$A = \left(2\hbar\omega_0\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\omega_0\hat{X} + i\hat{P}\right), \qquad (4.8a)$$

$$A^+ = \left(2\hbar\omega_0\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\omega_0\hat{X} - i\hat{P}\right), \qquad (4.8b)$$

tal que, considerando a força F(t) como um "c-number", recuperamos a forma em (3.19), segundo

$$\mathcal{H}(A^+,A,t) = f_1(t)A^+A + f_2(t)(A^+)^2 + f_2(t)A^2 + f_3(t)A^+ + f_3{}^*(t)A\ . \qquad (4.9)$$

Dos novos parâmetros DT incluídos em (3.19), em particular $f_1(t)$ corresponde à freqüência do campo na cavidade, ω_0, ao passo que

$$f_2(t) = \kappa(t)\, e^{-i\zeta(t)} + i\,\frac{\lambda}{4}\,, \tag{4.10a}$$

e

$$f_3(t) = \frac{e^{\lambda t}}{\sqrt{2\omega_0}}\, F(t) \tag{4.10b}$$

Deve-se observar que o hamiltoniano relativo aos operadores canônicos, do qual deduzimos $\mathcal{H}(A^+, A, t)$ não corresponde a energia; diz respeito ao gerador do movimento de um sistema dissipativo aberto. No entanto, associados às grandezas físicas de interesse, decorrem os operadores a e a^+ que se relacionam àqueles em (4.8), segundo

$$a = e^{-\frac{\lambda t}{2}}\, A\,, \tag{4.11a}$$

e

$$a^+ = e^{-\frac{\lambda t}{2}}\, A^+\,, \tag{4.11b}$$

conforme deduz-se da definição (4.4) e relação (4.6).

4.3 – O HAMILTONIANO DISSIPATIVO EM REGIME SUB-AMORTECIDO

O método de diagonalização por invariantes, apresentado anteriormente, será considerado no âmbito do hamiltoniano dissipativo obtido em (4.9). Segundo procedimento similar àquele desenvolvido junto à seção 5, capítulo 3, a consideração da transformação unitária (3.23),

permite-nos reescrever o hamiltoniano dissipativo em questão sob a forma apresentada em (3.34), desde que a solução das equacões diferenciais acopladas satisfaçam

$$\dot{r} = 2\kappa(t)\, sen\big(\zeta(t) - \phi(t)\big) - \frac{\lambda}{2}\cos\big(\phi(t)\big), \tag{4.12a}$$

$$\dot{\phi} = -2\omega(t) - 4\kappa(t)\, cotgh\big(2r(t)\big)\cos\big(\zeta(t) - \phi(t)\big) - \lambda\frac{sen\big(\phi(t)\big)}{senh\big(2r(t)\big)}, \tag{4.12b}$$

O sistema de equações acima obtido consiste daquele descrito em (3.36) acrescido dos termos referentes a dissipação, e em virtude destes, não é passível de solução analítica. Contudo, podemos contornar esta dificuldade, no intuito de se recuperar o sistema acoplado em (3.36), sujeitando o hamiltoniano dissipativo à transformação canônica

$$B = g_1 A + g_2 A^+ , \tag{4.13a}$$

$$B^+ = g_1^* A^+ + g_2^* A , \tag{4.13b}$$

desde que os coeficientes constantes satisfaçam $|g_1|^2 - |g_2|^2 = 1$. Através dos novos operadores B e B^+, o hamiltoniano (4.9) é escrito na forma

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(B^+,B,t) = & \left[f_1\left(|g_1|^2 + |g_2|^2\right) - 2f_2 g_1 g_2^* - 2f_2^* g_1^* g_2\right]B^+B \\
& + \left[\left(f_2 g_1^2 + f_2^* g_2^2 - \omega_0 g_1 g_2\right)B^{+2} + \left(C.C.\right)B^2\right] \\
& + \left[\left(f_3 g_1 - f_3^* g_2\right)B^+ + \left(C.C.\right)B\right] \qquad (4.14) \\
& + \omega_0 |g_2|^2 - f_2 g_1 g_2^* - f_2^* g_1^* g_2 \, .
\end{aligned}
$$

O termo multiplicativo de $(B^+)^2$, em (4.14), feita a substituição de $f_2(t)$, equação (4.10), consiste em

$$
g_1^2 \kappa(t)\, e^{-i\zeta(t)} + g_2^2 \kappa(t)\, e^{i\zeta(t)} + i\frac{\lambda}{4}\left(g_1^2 - g_2^2\right) - \omega_0 g_1 g_2 \, .
$$

No entanto, a consideração de $g_1=\cosh\gamma\ e^{i\chi/2}$ e $g_2=\mathrm{senh}\gamma\ e^{-i\chi/2}$, possibilita-nos eliminar os dois últimos termos da expressão acima quando escolhemos $\chi=3\pi/2$, e $\mathrm{tgh}2\gamma=\lambda/2\omega_0$. Dos termos remanescentes, fatorando-se o coeficiente g_1^2, obtemos

$$
\kappa(t)\, g_1^2 \left[e^{-i\zeta(t)} + \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{2\omega_0}\right)^2 e^{-i2\chi}\, e^{i\zeta(t)} \right].
$$

A restrição do sistema ao domínio onde a constante de fricção é muito pequena com relação à freqüência do campo na cavidade (isto é, $\lambda \ll 2\omega_0$), permite-nos simplificar o hamiltoniano em (4.14), segundo

$$\mathcal{H}(B^+,B,t) = f_1'(t)B^+B + f_2'(t)B^{+2} + f_2'^*(t)B^2 + f_3'(t)B^+ + f_3'^*(t)B + h'(t). \tag{4.15}$$

onde os parâmetros DT reduzem-se a formas tais que

$$f'_1(t) = f_1(t)\left(|g_1|^2 + |g_2|^2\right) - 2f_2(t)g_1g_2^* - 2f_2^*(t)g_1g_2 , \tag{4.16a}$$

$$f_2'(t) = g_1^2\kappa(t)e^{-i\zeta(t)} , \tag{4.16b}$$

$$f_3'(t) = g_1f_3(t) - g_2f_3^*(t) . \tag{4.16c}$$

e

$$h'(t) = \omega_0(g_2)^2 - f_2g_1g_2^* - f_2^*g_1^*g_2$$

As expressões acima obtidas, sob o regime sub-amortecido, em especial a forma compacta na qual se expressa $f_2'(t)$, redimensionam o hamiltoniano original, (4.9), segundo os moldes do problema tratado no capítulo 3, fato este que possibilita a diagonalização por invariantes do hamiltoniano dissipativo descrito em (4.15).

4.4 - HAMILTONIANO DISSIPATIVO E EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

Sob a consideração do operador unitário de squeezing, descrito no espaço rotacionado dos operadores B e B^+,

$$S(\xi(t)) = \exp\left(\frac{1}{2}\xi^*(t)B^2 - \frac{1}{2}\xi(t)B^{+2}\right),$$

retomamos a transformação unitária (3.23), no âmbito do hamiltoniano

simplificado em (4.15),do que decorre o hamiltoniano transformado

$$\mathcal{H}_S(t) = \Omega'(t)\,B^+B + F_3'(t)\,B^+ + F_3'(t)\,B + g'(t)\ . \tag{4.17}$$

As expressões para os parâmetros DT, segundo

$$F_3'(t) = f_3'(t)\cosh\big(r(t)\big) + f_3'^{*}(t)\ e^{i\phi(t)}\,senh\big(r(t)\big)\,, \tag{4.18a}$$

$$\Omega'(t) = \omega(t) + 2\kappa\big((t)\big)tgh\big(r(t)\big)\,sen\big(\zeta(t) - \phi(t)\big)\,, \tag{4.18b}$$

$$g'(t) = \kappa(t)\,tgh\big(r(t)\big)\,sen\big(\zeta(t) - \phi(t)\big)\,, \tag{4.18c}$$

verificam-se mediante a solução das equações diferenciais acopladas, na forma

$$\dot{r} = -2\kappa(t)\cos\big(\zeta(t) - \phi(t)\big)\,, \tag{4.19a}$$

$$\dot{\phi} = -2\omega(t) - 4\kappa(t)\ cotgh\big(2r(t)\big)\,sen\big(\zeta(t) - \phi(t)\big)\,, \tag{4.19b}$$

recuperando, esssencialmente, o sistema obtido em (3.36).

Considerando-se a solução da equação de Schrödinger, revisitamos os resultados obtidos por Puri e Lawande, à semelhança da seção 5, capítulo 3. Em se tratando do operador V(t), eq.(3.41), reobtemos expressões idênticas para a fase de LR, $\phi_m(t)$, para o parâmetro DT que compõe o operador deslocamento, $\theta(t)$, e para o

operador de rotação $R[\Omega'(t)]$. O fator de fase global presente no operador V(t) em (3.42), apresenta, agora, a forma

$$\gamma(t) = \exp\left\{-\frac{i}{2}\left[\beta(t) - \int_0^t f_1'(t)\,dt' + \int_0^t \left(F_3'(t')\,\theta(t') + C.C.\right)dt'\right]\right\}. \tag{4.20}$$

Deve-se observar, contudo, que os parâmetros relativos ao hamiltoniano (3.15), estão compreendidos no espaço dos operadores B e B^+.

Deduzido o autovetor da equação de Schrödinger, segundo os parâmetros acima redefinidos, obtém-se o operador de evolução que, tal qual os demais operadores ou autovetores relativos à diagonalização do hamiltoniano dissipativo, apresenta forma idêntica àquela [eq.(3.48)] do problema anterior. Esta identidade deve-se à própria construção do problema, estabelecida pela associação das transformações unitárias ao método de diagonalização por invariantes, conforme expõe a seção 4 no capítulo anterior.

De posse do operador de evolução, a formulação do problema no âmbito da representação de Heisenberg, compreende os operadores no espaço rotacionado

$$B_H(t) = U^+(t)\,BU(t) = u'(t)\,B + v'(t)\,B^+ + w'(t)\ , \tag{4.21}$$

e respectivo adjunto $B_H^+(t)$. Os parâmetros DT u'(t), v'(t) e w'(t), constituem expressões idênticas àquelas em (3.50).

Retornando ao espaço original dos operadores A e A^+, através da substituição da transformação (4.13) em (4.21), podemos escrever a

relação

$$A_H(t) = u(t)A + v(t)A^+ + w(t) \ , \tag{4.22}$$

desde que os operadores DT que dela participam satisfaçam as expressões

$$u(t) = u'^*(t) + \left[\left(|g_1|^2 u'(t) + g_1^* g_2^2 v'(t)\right) - C.C.\right] , \tag{4.23a}$$

$$v(t) = 2g_1^* g_2 \, Im\left(u'(t)\right) + g_1^{*2} v'(t) - g_2^2 v'^*(t) \ , \tag{4.23b}$$

e

$$w(t) = g_1^* w'(t) - g_2 w'^*(t) \ . \tag{4.23c}$$

Pode-se verificar que, em ambos os espaços, referentes aos operadores (A, A^+) e (B, B^+), estamos diante de transformações do tipo Bogoliubov-Valatin, onde

$$|u|^2 - |v|^2 = |u'|^2 - |v'|^2 = 1 \ . \tag{4.24}$$

Associando, por fim, a relação entre operadores físicos e canônicos considerada em (4.11), à representação de Heisenberg em (4.22), dispomos dos operadores que traduzem as quantidades do problema e remontam ao hamiltoniano (4.9), na forma

$$a_H(t) = e^{-\lambda t/2} A_H(t) = \tilde{u}(t)A + \tilde{v}(t)A^+ + \tilde{w}(t) \ , \tag{4.25}$$

onde $\tilde{u}(t)=e^{-\lambda t/2}u(t)$, $\tilde{v}(t)=e^{-\lambda t/2}v(t)$ e $\tilde{w}(t)=e^{-\lambda t/2}w(t)$.

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

4.5 - AS EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS (4.19)

Conforme o procedimento adotado no capítulo anterior, sob a imposição de vínculos entre as funções DT que restrinjam o grau de arbitrariedade do sistema (4.19), é possível resolvê-lo por quadratura e, em decorrência, deduzir uma constante de movimento.

Acentuamos que as soluções delineadas junto à seção 7 do capítulo 3, segundo os vínculos específicos considerados junto aos ítens a, b, c e d, aplicam-se diretamente à presente situação. Nesta seção, entretanto, restringimo-nos à adaptação do que compreende os ítens b e d, dentro e fora da ressonância, respectivamente.

a) O regime de ressonância

A resolução que abaixo delineamos, equivale àquela obtida no ítem b, seção 7 do capítulo anterior, onde analisamos o squeezing no regime de ressonância. Sob a consideração das relações (3.60, 61 e 62) exigidas naquele ítem, o sistema (4.19) assume a forma

$$\dot{r} = -2\kappa(t)\cos\left(\chi(t) - \gamma(t)\right), \tag{4.26a}$$

$$\dot{\chi} = 4\kappa(t)\ cotg(2r)\ sen\left(\chi(t) - \gamma(t)\right). \tag{4.26b}$$

Fixando $\gamma(t)=c$ (constante), de forma a eliminar o parâmetro temporal, escrevemos

$$\frac{dr}{d\chi} = -\frac{1}{2}\, tgh(2r)\; cotg\left(\chi - C\right), \tag{4.27}$$

de onde obtemos a constante de movimento

$$sen\left(\phi(t) - \zeta(t)\right) senh\left(2r(t)\right) = K\,. \tag{4.28}$$

O desenvolvimento da expressão (4.28), sob a consideração da igualdade $\chi(t)-c = \phi(t)-\zeta(t)$, conduz a uma solução do sistema (4.26), exatamente idêntica àquela do capítulo anterior (ítem a da seção 7), segundo as expressões (3.66 e 67).

Sob o regime de ressonância, quando $\omega(t)=\omega_0$, obtém-se que $\zeta(t)=-2\omega_0 t+c_1$, com c_1 constante. Quando, além disso, impomos que κ seja constante, decorre o oscilador paramétrico amortecido em regime de ressonância, tal que, para K=0, obtemos como possíveis soluções das equações (4.26): $\phi(t)=-2\omega_0 t-\pi/2$ e $r(t)=2\kappa t$. A diferença de fase entre o valor da função $\phi(t)$ acima obtida e aquela referente à ressonância no capítulo 3 (onde $\phi(t)=-2\omega_0 t$), decorre de uma escolha apropriada da constante c_1 mediante a necessidade de reobtermos os resultados do problema anterior quando, neste, desprezamos o processo dissipação/flutuação. A saber, retomando as equações (4.23a e b), para $\lambda=0$, obtemos, respectivamente,

$$u(t) = u'(t) = \cosh\left(r(t)\right) e^{-i\beta(t)}\,, \tag{4.29a}$$

e

$$v(t) = iv'(t) = senh\left(r(t)\right) e^{i(\beta(t) + \phi(t) + \pi/2)} , \qquad (4.29b)$$

relações estas que recobrem as expressões ressonantes em (3.68), quando, mantido o valor r(t),

$$\phi(t) = \tilde{\phi}(t) - \frac{\pi}{2} , \qquad (4.30)$$

por $\tilde{\phi}(t)$ indicamos a quantidade referente ao problema anterior ($\tilde{\phi}(t)=-2\omega_0 t$).

b) Fora da ressonância

Seguindo o desenvolvimento exposto no ítem d da seção 7, capítulo 3, para a solução do sistema (4.19) fora do regime de ressonância, consideramos constante o parâmetro κ enquanto mantemos $\zeta(t)$ DT. Retomando as definições (3.75) e (3.76), reescrevemos o sistema (4.19) na forma

$$\dot{r} = -2\kappa \cosh(2r) \cos\chi , \qquad (4.31a)$$

$$\dot{\chi} = \dot{\gamma} + 4\kappa \, cosech(2r) \, sen\chi . \qquad (4.31b)$$

Tratando-se do caso onde γ=c=constante, segundo os moldes do desenvolvimento anterior, podemos resolver por quadratura o sistema (4.31), de forma a obter a constante de movimento

$$\cosh\left(2r(t)\right) - \frac{4\kappa}{c} sen\left(\phi(t) - \zeta(t)\right) senh\left(2r(t)\right) = K , \qquad (4.32)$$

relação esta que se associa ao oscilador paramétrico imerso em meio dissipativo e com bombeamento não ressonante, conforme descreve o hamiltoniano (4.9), através de seus respectivos parâmetros temporais em (4.10 e 11), e $\zeta(t)=-2\omega t$ $(\omega\neq\omega_0)$. Definindo a quantidade admensional $\eta=4\kappa/c$, com $c=2(\omega_0-\omega)$, três soluções do sistema (4.26), semelhantes àquelas do capítulo anterior, decorrem com relação a escolha do valor de $|\eta|$.

Diante das considerações que abrangem as expressões em (4.29), ocorre que os resultados do capítulo anterior, relativos a quaisquer domínios da quantidade $|\eta|$ $(>1,\ <1$ ou $=1)$, são todos recuperados, desde que consideremos a relação (4.30). Então, as soluções em $r(t)$ são absolutamente idênticas, enquanto que aquelas em $\phi(t)$ diferenciam-se por uma fase igual a $\pi/2$.

Por fim, cabe esclarecer que à resolução do sistema (4.19), segundo as considerações do ítem b, deve-se tratar a equação (4.16a), segundo a restrição $\kappa\lambda<<\omega_0\omega$, tal que $f'_1(t)=f_1(t)=\omega_0$.

4.6 - GRANDEZAS FÍSICAS E O PROCESSO DISSIPAÇÃO/AMPLIFICAÇÃO

Quando do cálculo das flutuações das quadraturas no capítulo anterior, seção 6, abordamos o caso particular de um oscilador paramétrico, considerando nulo o parâmetro DT, $f_3(t)$, multiplicativo dos termos lineares junto ao hamiltoniano. Na atual situação, conforme descreve a equação (4.10b), $f_3(t)$ persiste enquanto descrição de forças estocásticas relativas ao processo dissipação/flutuação, forças estas que se farão presentes junto aos operadores de Heisenberg, através do

parâmetro DT $\tilde{w}(t)=e^{-\lambda t/2}w(t)$. A partir da equação (4.23 c), para a descrição de w(t), efetuadas as devidas substituições, decorre que

$$w'(t) = -i\cosh r(t)\; e^{-i\beta(t)} \int_0^t \left(F(t')\Lambda_1(t') + F^*(t')\Lambda_2(t')\right) e^{i\beta(t')} e^{\lambda t'/2}\, dt'$$

$$+\; i\,\mathrm{senh}\, r(t)\; e^{i(\beta(t)+\phi(t))} \int_0^t \left(F^*(t')\Lambda_1^*(t') + F(t')\Lambda_2^*(t')\right) e^{-i\beta(t')} e^{\lambda t'/2} dt', \tag{4.33}$$

onde

$$\Lambda_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}}\left[g_1\cosh\left(r(t)\right) - g_2^*\, e^{i\phi(t)}\, senh\left(r(t)\right)\right], \tag{4.34a}$$

e

$$\Lambda_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}}\left[g_1^*\, e^{i\phi(t)}\, senh\left(r(t)\right) - g_2\cosh\left(r(t)\right)\right]. \tag{4.34b}$$

Desde que a expressão (4.33) comparece quando da obtenção das propriedades físicas de interesse na representação de Heisenberg, devemos proceder ao cálculo de médias no ensemble das funções estocásticas, o que realizaremos segundo a consideração de um processo markoviano.

Sob a consideração deste processo[86] supõe-se forças estocásticas cujas oscilações evoluem muito rapidamente com o tempo, de forma tal a anular suas médias no ensemble. Quanto à correlação $\langle F(t)F(t')\rangle$, tem-se valor nulo quando $|t-t'|>\tau_c$, onde τ_c constitui-se num tempo mínimo no qual F(t) altera-se apreciavelmente, denominado tempo de correlação. Conseqüentemente, o máximo valor para $\langle F(t)F(t')\rangle$ ocorre para t=t' e decresce a zero quando $|t-t'|=\tau_c$. Considerando que τ_c seja muito menor que os tempos característicos do sistema, pode-se escrever

$$\overline{F(t)F(t')} = 2d\,\delta(t-t') \,, \tag{4.35}$$

onde a constante de difusão d, determinada mediante o teorema da dissipação-flutuação, expressa a magnitude das forças estocásticas através de sua relação com os parâmetros físicos correspondentes à cavidade. É exatamente esta relação que preserva o princípio de incerteza quando de um processo dissipativo.

Para o trabalho em questão, contudo, desde que as forças estocásticas correspondem a funções complexas, as quais podemos supor da forma $F(t)=\mathfrak{F}e^{i\phi(t)}$, com $\mathfrak{F}=(2d)^{1/2}$, recobramos o significado de um processo markoviano através da aproximação de fases aleatórias, tal que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\phi(t)-\phi(t'))}\,d\phi = \delta\big(\phi(t)-\phi(t')\big) \,.$$

Dessa forma, são nulas as médias

$$\overline{F(t)F(t')} = \overline{F^*(t)F^*(t')} = 0 \,, \tag{4.36a}$$

enquanto que a hipótese (4.35) é satisfeita para as correlações

$$\overline{F^*(t)F(t')} = \overline{F(t)F^*(t')} = 2d\,\delta(t-t') \,. \tag{4.36b}$$

Conforme resultado obtido por Wang e Uhlenbeck[83], se assumirmos que a função F(t), além de puramente aleatória, representa um processo gaussiano, decorrem as seguintes propriedades

$$\overline{F(t_1)\,F(t_2)\,\ldots\,F(t_{2n+1})} = 0\,, \qquad n = 1,2,3,\ldots\,, \tag{4.37}$$

e

$$\overline{F(t_1)\,F(t_2)\,\ldots\,F(t_{2n})} = \sum_{\substack{todos\\ os\ pares}} \overline{F(t_i)\,F(t_j)}\cdot\overline{F(t_k)\,F(t_l)}\cdots \tag{4.38}$$

A soma considerada em (4.36) envolve todos os diferentes modos nos quais se subdividem as 2**n** funções F(t), em **n** pares , requerendo que se utilize as relações (4.35 e 36).

4.6.1 - Flutuações das Quadraturas

Definidas na representação de Heisenberg, conforme expõem as equações (3.51), no capítulo anterior, apresentamos as quadraturas

$$X_{1,H} = \frac{1}{2}\left(a_H^+(t) + a_H(t)\right), \tag{4.39a}$$

$$X_{2,H} = \frac{i}{2}\left(a_H^+(t) - a_H(t)\right). \tag{4.39b}$$

Desenvolvendo-se o cálculo das flutuações dinâmicas, por meio da expressão (3.52), onde consideramos as médias segundo um estado inicial arbitrário e independente do tempo, obtemos

$$\left\langle\overline{(\Delta X_{i,H})^2}\right\rangle = \frac{1}{4}\Big\{2|\,\tilde{u} + \tilde{v}^*|^2\,\langle\Delta A^+A\rangle \pm (\tilde{u} \pm \tilde{v}^*)^2\,\langle\Delta A^2\rangle$$
$$\pm\left(\tilde{u}^* \pm \tilde{v}\right)^2\langle\Delta A^{+2}\rangle + |\,\tilde{u} \pm \tilde{v}^*|^2 \pm 2\left[Re(\overline{\tilde{w}^2}) \pm \overline{|\,\tilde{w}|^2}\right]\Big\}, \qquad i=1,2\,, \tag{4.40}$$

expressão esta que acresce sua equivalente do problema anterior, equação (3.53), do termo relativo aos ruídos na cavidade. O sinal superior (inferior) indica i=1(2). A consideração das variâncias com relação a um estado inicial coerente simplifica as flutuações dinâmicas em (4.40), na forma

$$\left\langle \overline{(\Delta X_{i,H})^2} \right\rangle = \frac{1}{4} \left\{ | \tilde{u} \pm \tilde{v}^* |^2 \pm 2 \left[Re(\overline{\tilde{w}^2}) \pm \overline{|\tilde{w}|^2} \right] \right\}, \quad i=1,2. \qquad (4.41)$$

Desde que as funções DT que compõem as flutuações (4.41) não se limitam àquelas do problema anterior $\left(r(t) \text{ e } \phi(t) \right)$, conforme indica o resultado (3.56), não é possível para o sistema em questão a abordagem do squeezing no espaço de fase.

Tanto as flutuações das quadraturas quanto as demais quantidades físicas que constituirão o nosso estudo, não são passíveis de resolução analítica fora do regime de ressonância, em conseqüência das integrais envolvidas em (4.33). Portanto, limitamo-nos, doravante, à apresentação de expressões analíticas somente para a situação ressonante, quando os resultados da seção anterior, ítem a, possam ser considerados.

A começar pelo desenvolvimento da expressão obtida em (4.41), onde os termos relativos à flutuação de origem estocástica desenvolvem-se conforme indica o apêndice 3, obtemos dentro da ressonância, o resultado

$$\left\langle \overline{(\Delta X_{i,H})^2} \right\rangle = \frac{1}{4}\left[e^{(4\kappa-\lambda)t} \begin{pmatrix} \cos^2(\omega_0 t) \\ sen^2(\omega_0 t) \end{pmatrix} + e^{-(4\kappa+\lambda)t} \begin{pmatrix} sen^2(\omega_0 t) \\ \cos^2(\omega_0 t) \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{2\omega_0}\left(\frac{e^{(4\kappa-\lambda)t} - e^{-(4\kappa+\lambda)t}}{2} \pm e^{-\lambda t} \right) sen(2\omega_0 t) \right]$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{d}{\omega_0}\left\{ \left[2\begin{pmatrix} sen^2(\omega_0 t) \\ \cos^2(\omega_0 t) \end{pmatrix} - \frac{\lambda}{2\omega_0} sen(2\omega_0 t) \right] \frac{1 - e^{-(4\kappa+\lambda)t}}{4\kappa + \lambda} \right. \tag{4.42}$$

$$\left. - \left[2\begin{pmatrix} \cos^2(\omega_0 t) \\ sen^2(\omega_0 t) \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2\omega_0} sen(2\omega_0 t) \right] \frac{1 - e^{(4\kappa-\lambda)t}}{4\kappa - \lambda} \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Para a análise do comportamento assintótico da expressão (4.42), consideramo-na segundo a média em $\omega_0 t$, do que resulta a forma

$$\left\langle \left\langle \overline{(\Delta X_{i,H})^2} \right\rangle \right\rangle_{\omega_0 t} = \frac{1}{4}\left\{ \frac{1}{2}\left(e^{(4\kappa-\lambda)t} + e^{-(4\kappa+\lambda)t} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{d}{\omega_0}\left[\frac{1 - e^{-(4\kappa+\lambda)t}}{4\kappa + \lambda} - \frac{1 - e^{(4\kappa-\lambda)t}}{4\kappa - \lambda} \right] \right\}. \tag{4.43}$$

Quando $\lambda \approx 4\kappa$, o comportamento assintótico das flutuações nas quadraturas é linear com o tempo, tal que

$$\left\langle \overline{(\Delta X_{i,H})^2} \right\rangle \sim \frac{1}{4}\frac{d}{\omega_0} t \tag{4.44}$$

Em adição aos regimes sub-amortecido ($\lambda << 2\omega_0$) e ressonante, responsáveis pela resolução analítica do problema, consideramos para a verificação dos limites assintóticos, o vínculo entre as constantes de amortecimento e acoplamento dos campos, tal que $\lambda > 4\kappa$. Dentro dessa

imposição adicional, onde a constante de fricção apresenta-se suficientemente pequena mediante a freqüência do campo na cavidade e suficientemente grande mediante o acoplamento entre os campos, de forma a viabilizar a competição entre a dissipação e a amplificação, observa--se que

$$\lim_{t\to 0} \left\langle \overline{(\Delta X_{i,H})^2} \right\rangle = \frac{1}{4}\,, \qquad (i=1,2) \tag{4.45}$$

$$\lim_{t\to\infty} \left\langle \overline{(\Delta X_{i,H})^2} \right\rangle \cong \frac{1}{2}\frac{d}{\lambda\omega_0}\frac{1}{1-(4\kappa/\lambda)^2} = \frac{1}{4}\frac{cotgh\left(\hbar\omega_0/2kT\right)}{1-(4\kappa/\lambda)^2} \tag{4.46}$$

Quando, de outra forma, consideramos $\lambda<4\kappa$, reobtém-se o resultado (4.45), enquanto que as flutuações das quadraturas divergem no limite $t \to \infty$.

O comportamento $\left\langle \overline{(\Delta X_{i,H})^2} \right\rangle$ vs. $\omega_0 t$ encontra-se exposto junto às figuras (13 a e b), onde impõe-se , respectivamente, os vínculos $\lambda>4\kappa$ e $\lambda<4\kappa$. Considerando $\mathrm{cotgh}(\hbar\omega_0/2kT)=1$, tal que $d=\lambda/2$, fixamos $\kappa=0.025\omega_0$, com $\lambda=0.15\omega_0$ e $0.08\omega_0$. As curvas pontilhadas representam os valores médios em $\omega_0 t$ das flutuações, conforme a expressão (4.43), os quais perfazem estreitamente os limites previstos. Os efeitos de squeezing fazem-se presentes em ambas as situações, $\lambda>$ ou $<4\kappa$, conferindo às flutuações relativas aos pares X_1 e X_2, um deslocamento de fase imposto pela relação de incerteza.

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

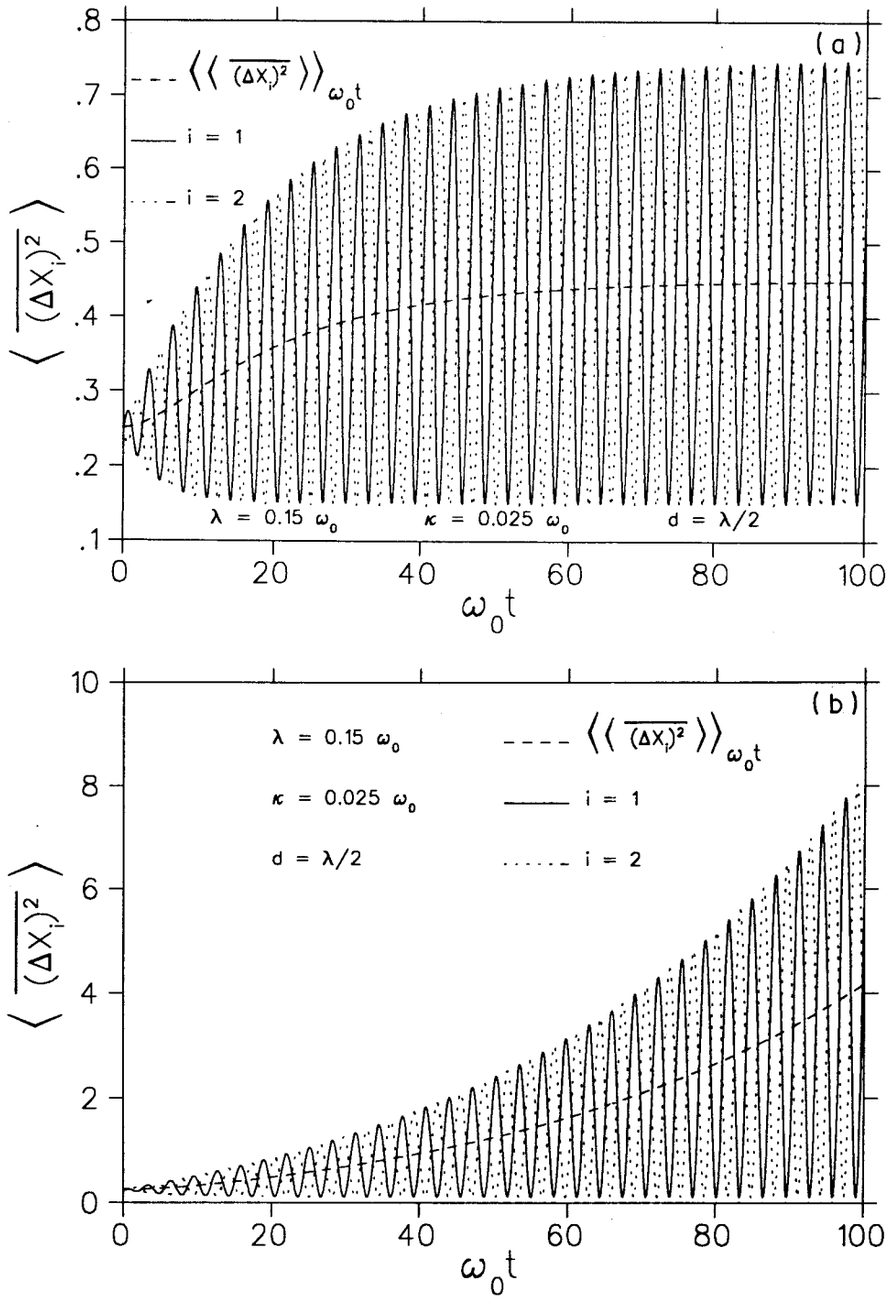


Figura 13: $\langle \overline{(\Delta X_{i,\mathcal{H}})^2} \rangle$ *versus* $\omega_0 t$ *para a ressonância, onde os ítens a e b, com* $\lambda=0.15\omega_0$ *e* $0.08\omega_0$*, correspondem aos domínios* $\lambda>4\kappa$ *e* $\lambda<4\lambda$*, respectivamente. Fixamos* $\lambda=0.025\omega_0$ *e* $d=\lambda/2$*. As curvas tracejadas representam os valores médios em* $\omega_0 t$ *das flutuações.*

Através de uma análise numérica detalhada, verifica-se que em ambos os domínios $\lambda>$ ou $<4\kappa$, os efeitos de squeezing são mais pronunciados à medida em que se incrementa a quantidade 4κ com relação à constante λ. Quando $\lambda\approx4\kappa$, os menores valores das flutuações são coincidentes em um e outro domínio, tal que a máxima quantidade de squeezing para $\lambda>4\kappa$, coincide com a mínima em $\lambda<4\kappa$.

Desde que os efeitos de squeezing são provenientes do bombeamento paramétrico no hamiltoniano, decorre que a intensificação da interação entre os campos (cavidade e bombeamento), responde por efeitos mais pronunciados de squeezing. Portanto, verifica-se que o incremento do parâmetro de acoplamento κ, bem como uma menor dessintonização $\Delta\omega=\omega-\omega_0$ (conforme veremos), indicam um aumento do squeezing.

Quando através do aumento da temperatura do banho elevamos o valor da constante de difusão, observa-se a eliminação dos efeitos de squeezing, dado que os termos relativos às flutuações de origem estocástica são dominantes na expressão (4.41).

Quanto ao domínio não ressonante, recorremos à integração numérica para a resolução das flutuações nas quadraturas segundo a expressão (4.41). Para este domínio, conforme descreve o ítem b, da seção 4, fazem-se possíveis três diferentes soluções do sistema (4.26), em função da escolha do valor $\eta=4\kappa/c$ $(>1,\ =1$ ou $<1)$, com $\kappa>0$ e $c=2(\omega_0-\omega)$. Cumpre, então, que se considere a análise das quantidades físicas segundo o gráfico de $|\eta|$ vs.ω (figura 14), pelo qual observa-se que a situação não-ressonante compreende as curvas assintóticas, simétricas de ambos os lados do ponto de ressonância $\omega=\omega_0$.

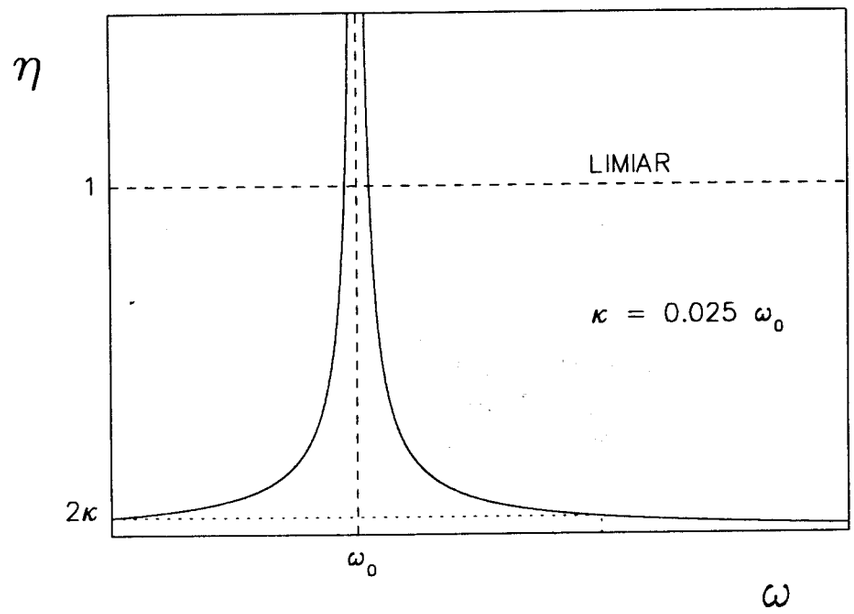


Figura 14: *A esquematização gráfica do parâmetro admensional* η *em função da freqüência de bombeamento* ω*, informa sobre a competição dissipação/amplificação através da relação entre a dissonância* $\Delta\omega$ *e o acoplamento* κ*. De outro modo, o parâmetro* η *baliza os limites de* $\Delta\omega$*, relativos aos quais há a predominância de um ou outro comportamento.*

A divisão em η=1, no gráfico η vs. ω, equivale ao limiar entre os comportamentos periódico (η<1) e exponencial ($\eta\geq$1) no que diz respeito aos parâmetros de squeezing e, conseqüentemente, às grandezas físicas decorrentes.

As figuras (15 a, b, c e d), compreendem a evolução temporal das flutuações nas quadraturas, através do ramo esquerdo da figura 14, quando, respectivamente, ω=0.2ω_0, 0.9ω_0, 0.945ω_0 e 0.95ω_0, valores aos quais associam-se η=0.0625, 0.5, ~0.91 e 1.0, através dos parâmetros comuns λ=0.15ω_0, κ=0.025ω_0 e d=λ/2.

Quanto à figura 15 a, nota-se, após uma breve região

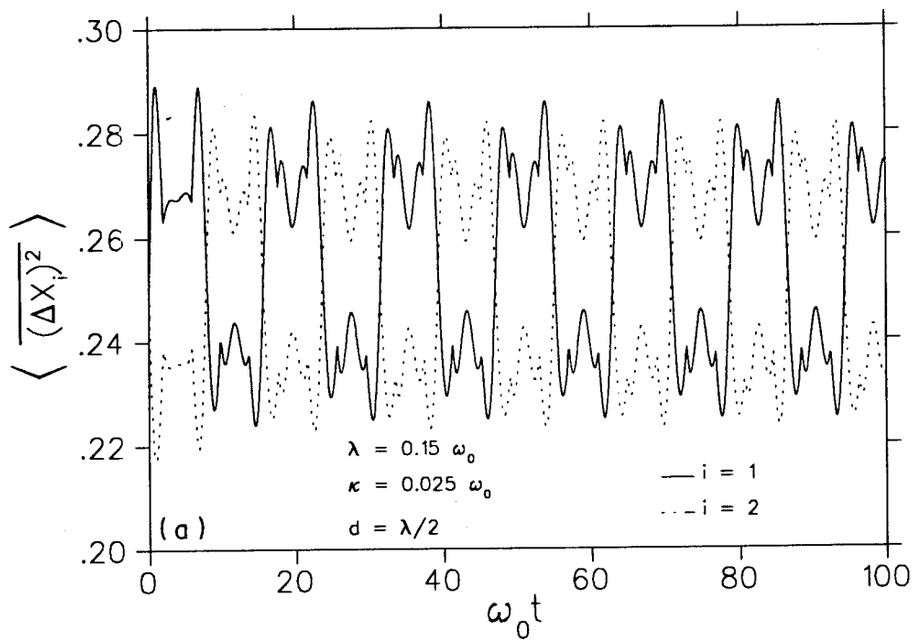
transiente, que as flutuações nas quadraturas exibem um comportamento periódico onde as oscilações centram-se no valor de mínima incerteza $\hbar/4$. Através da figura 15 b, quando tornamos a interação entre os campos mais efetiva com $\omega=0.9\omega_0$, mantendo a constante de fricção λ, observa-se o incremento das flutuações nas quadraturas tanto acima quanto abaixo do valor $\hbar/4$. Este comportamento será salientado à medida em que se eleva a freqüência de bombeamento dentro da região de comportamento periódico $\eta<1$.

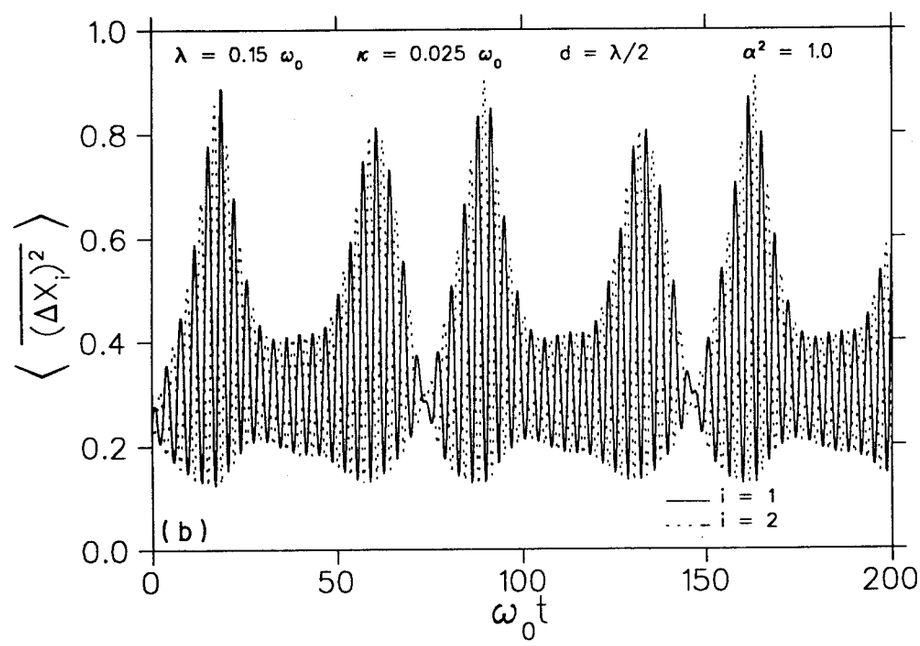
A região de instabilidade que se observa quando $\eta=0.91$, figura 15 c, é um prenúncio do comportamento exponencial que define o domínio $\eta\geq1$. A proximidade da freqüência de bombeamento daquela na ressonância responde tanto pelos valores subitamente elevados das flutuações quanto pelo imediato amortecimento dessas quantidades. Quando do limiar em $\eta=1$, figura 15 d, verifica-se a divergência exponencial da qual constituir-se-ão as flutuações nas quadraturas para $\eta>1$, motivo pelo qual deixamos de apresentar figura referente a esta região.

Comportamento análogo aos expostos pela figura 15 é obtido considerando-se os pontos simétricos àqueles dos ítens a, b, c e d, junto ao ramo direito do gráfico ηvs.ω. Entretanto, diante dos valores maiores para as freqüências do campo de bombeamento, as oscilações das flutuações nas quadraturas fazem-se mais intensas.

Em se tratando dos efeitos de squeezing, com relação à figura 15 ou sua equivalente no ramo $\omega>\omega_0$, observa-se que a intensidade do squeezing está na razão inversa com a dessintonização $\Delta\omega=\omega-\omega_0$. Conforme já esclarecido, uma interaçao mais efetiva entre os campos na cavidade e de bombeamento corresponde a quantidades mais acentuadas de

squeezing.


.30
.28
.26
.24
.22
.20
0
20
40
60
80
100
$\omega_0 t$
$\langle \overline{(\Delta X_i)^2} \rangle$
$\lambda = 0.15\ \omega_0$
$\kappa = 0.025\ \omega_0$
$d = \lambda/2$
(a)
i = 1
i = 2


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
50
100
150
200
$\omega_0 t$
$\langle \overline{(\Delta X_i)^2} \rangle$
$\lambda = 0.15\ \omega_0$
$\kappa = 0.025\ \omega_0$
$d = \lambda/2$
$\alpha^2 = 1.0$
(b)
i = 1
i = 2

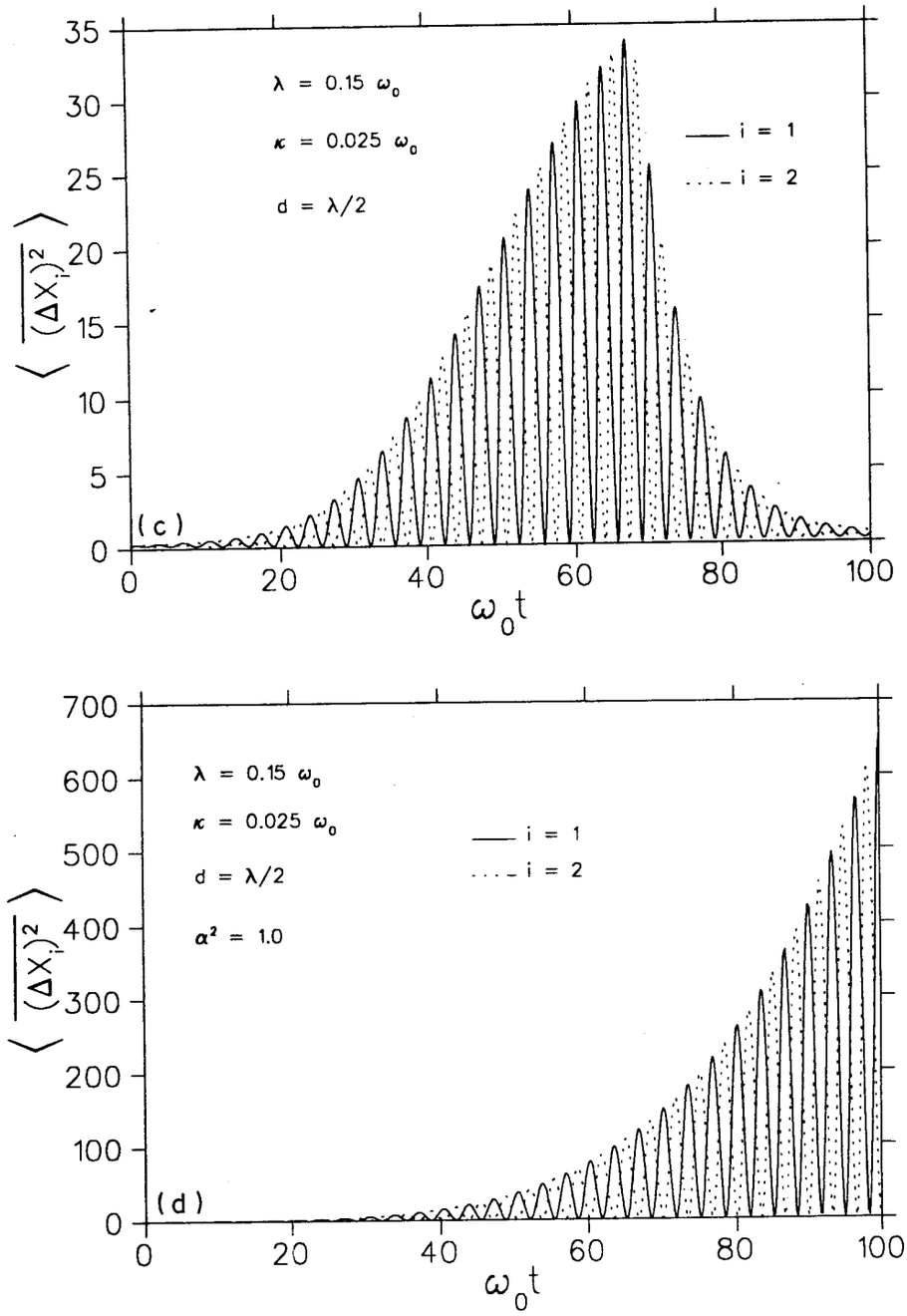


Figura 15: $\langle \overline{(\Delta X_{i,\mathcal{H}})^2} \rangle$ *versus* $\omega_0 t$ *fora da ressonância, onde os ítens a, b, c e d compreendem, respectivamente* $\omega=0.2\omega_0$, $0.9\omega_0$, $0.945\omega_0$ *e* $\omega_0-2\kappa$ ($\eta=0.065$, 0.5, ~ 0.91 *e* 1.0). *Fixa-se* $\lambda=0.15\omega_0$, $\kappa=0.025\omega_0$ *e* $d=\lambda/2$.

4.6.2 - Energia Média e Flutuação de Energia

O operador energia, através do qual esperamos caracterizar mais apropriadamente a competição dissipação/amplificação presente no modelo, define-se na forma

$$\hat{E} = \omega_0 a_H^+ a_H \,, \qquad (\hbar=1) \,. \tag{4.47}$$

Do desenvolvimento desta definição, através da relação (4.25), decorre a expressão

$$\begin{aligned} \hat{E} = \omega_0 \Big[& |\tilde{v}|^2 + \left(|\tilde{u}|^2 + |\tilde{v}|^2\right) A^+ A + u^* v A^{+2} + u v^* A^2 \\ & + \left(\tilde{u}^* \tilde{w} + \tilde{v} \tilde{w}^*\right) A^+ + \left(\tilde{u} \tilde{w}^* + \tilde{v}^* \tilde{w}\right) A + |\tilde{w}|^2 \Big] \,, \end{aligned} \tag{4.48}$$

a qual, efetuada a média no ensemble, $\bar{\hat{E}}$, simplifica-se através da eliminação dos termos lineares em A e A^+, conforme estabelece a relação (4.37). A consideração subseqüente da média da energia com relação a um estado coerente $|\alpha\rangle$, leva, finalmente, ao resultado

$$\langle \bar{\hat{E}} \rangle = \omega_0 \Big[|\tilde{v}|^2 + \left(|\tilde{u}|^2 + |\tilde{v}|^2\right) |\alpha|^2 + \tilde{u}^* \tilde{v} \alpha^{*2} + \tilde{u} \tilde{v}^* \alpha^2 + \overline{|\tilde{w}|^2} \Big] \,. \tag{4.49}$$

Tratando-se do regime de ressonância, e definindo $\alpha = |\alpha| e^{i\Theta}$, do desenvolvimento analítico da expressão (4.49), obtemos

$$\langle \bar{\hat{E}} \rangle = \omega_0 \left\{ e^{-\lambda t} \left[senh^2(2\kappa t) + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{2\omega_0} senh(4\kappa t)\, sen(2\omega_0 t) \right.\right.$$

$$+ |\alpha|^2 \left(\cosh(4\kappa t) + \frac{\lambda}{2\omega_0} senh(4\kappa t)\, sen(2\omega_0 t) \right)$$

$$+ |\alpha|^2 \left(senh(4\kappa t) + \frac{\lambda}{2\omega_0} \cosh(4\kappa t)\, sen(2\omega_0 t) \right) \cos\Theta$$

$$\left. - 2|\alpha|^2 \frac{\lambda}{2\omega_0} \left(\cosh^2(2\kappa t)\, sen^2(\omega_0 t) + senh^2(2\kappa t) \cos^2(\omega_0 t) \right) sen\Theta \right]$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{d}{\omega_0} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2\omega_0} sen(2\omega_0 t) \right) \frac{1-e^{-(4\kappa+\lambda)t}}{4\kappa+\lambda} - \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega_0} sen(2\omega_0 t) \right) \frac{1-e^{(4\kappa-\lambda)t}}{4\kappa-\lambda} \right] \right\} \tag{4.50}$$

Efetuando-se a média em $\omega_0 t$, o resultado (4.50) simplifica-se na forma

$$\langle\langle \bar{\hat{E}} \rangle\rangle_{\omega_0 t} = \omega_0 \left\{ e^{-\lambda t} \left[senh^2(2\kappa t) + |\alpha|^2 \left(\cosh(4\kappa t) \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega_0} sen\Theta \right) \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + senh(4\kappa t) \cos\Theta \right) \right] + \frac{1}{2}\frac{d}{\omega_0} \left[\frac{1-e^{-(4\kappa+\lambda)t}}{4\kappa+\lambda} - \frac{1-e^{(4\kappa-\lambda)t}}{4\kappa-\lambda} \right] \right\}, \tag{4.51}$$

através da qual deduzimos os comportamentos limite

$$\lim_{t\to\infty} \langle\langle \bar{\hat{E}} \rangle\rangle_{\omega_0 t} \sim \frac{d}{\lambda} \left(1 - \left(\frac{4\kappa}{\lambda} \right)^2 \right)^{-1} . \tag{4.53}$$

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

$$\lim_{t\to 0} \langle\langle \bar{\hat{E}} \rangle\rangle_{\omega_0 t} \sim \omega_0 |\alpha|^2 \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega_0} sen\Theta\right) \overset{\Theta=0}{=} \omega_0 |\alpha|^2 , \qquad (4.52)$$

Quando consideramos nulo o campo de bombeamento, com $\kappa=0$, o resultado (4.53) recupera exatamente aquele obtido por Brinati e Mizrahi[82]. Tratando-se de um oscilador harmônico sujeito a fricção, e considerando que o sistema esteja em equilíbrio térmico com o banho, no limite $t \to \infty$, decorre do teorema da flutuação/dissipação

$$\lim_{t\to\infty} \langle\langle \bar{\hat{E}} \rangle\rangle_{\omega_0 t} \sim \frac{d}{\lambda} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \, cotgh \left(\frac{\hbar\omega_0}{2k_B T}\right), \qquad (4.54)$$

onde k_B indica a constante de Boltzmann.

Reescrevendo, pois, o limite (4.53), segundo a perspectiva exposta por (4.54), decorre que

$$\lim_{t\to\infty} \langle\langle \bar{\hat{E}} \rangle\rangle_{\omega_0 t} \sim \frac{\omega_0}{2} \frac{cotgh \left(\frac{\omega_0}{2k_B T}\right)}{1 - \left(\frac{4\kappa}{\lambda}\right)^2} . \qquad (4.55)$$

Procedendo-se ao cálculo da flutuação da energia $\langle \overline{(\Delta E)} \rangle^2 = \langle \bar{E}^2 \rangle - \langle \bar{E} \rangle^2$, obtemos, efetuando-se a média segundo um estado coerente, o resultado

$$\left\langle \overline{(\Delta E)^2} \right\rangle = \omega_0 \Bigg\{ 2|\tilde{u}|^2 |\tilde{v}|^2 + 2\overline{\left(\tilde{u}^* w + \tilde{v}\tilde{w}^*\right)\left(\tilde{u}\tilde{w}^* + \tilde{v}^*\tilde{w}\right)} + \overline{|\tilde{w}|^4} - \left(\overline{|\tilde{w}|^2}\right)^2$$

$$+ \left[\left(|\tilde{u}|^2 + |\tilde{v}|^2\right)^2 + 4|\tilde{u}|^2|\tilde{v}|^2 + 2\overline{\left(\tilde{u}^*\tilde{w} + \tilde{v}\tilde{w}^*\right)\left(\tilde{u}\tilde{w}^* + \tilde{v}^*\tilde{w}\right)} \right] |\alpha|^2$$

$$+ \left[2\tilde{u}^*\tilde{v}\left(|\tilde{u}|^2 + |\tilde{v}|^2\right) + \left(\tilde{u}^*\tilde{w} + \tilde{v}\tilde{w}^*\right)^2 \right] |\alpha|^2 e^{-i2\Theta}$$

$$+ \left[2\tilde{u}\tilde{v}^*\left(|\tilde{u}|^2 + |\tilde{v}|^2\right) + \left(\tilde{u}\tilde{w}^* + \tilde{v}^*\tilde{w}\right)^2 \right] |\alpha|^2 e^{i2\Theta} \Bigg\}. \qquad (4.56)$$

O desenvolvimento do termo $|\bar{\tilde{w}}|^4$ consta do apêndice 3. Com o objetivo de simplificar as expressões, apresentamos o resultado ressonante da flutuação (4.56), considerando-se as médias efetuadas primeiramente no vácuo, tal que

$$\left\langle \overline{(\Delta E)^2} \right\rangle = \frac{1}{2}\omega_0^2 e^{-2\lambda t} \Bigg\{ senh^2(4\kappa t) + \frac{\lambda}{2\omega_0} senh(8\kappa t)\, sen(2\omega_0 t)$$

$$+ 2\frac{d}{\omega_0}\Bigg[\left(\cosh(4\kappa t) + \frac{\lambda}{2\omega_0} senh(4\kappa t)\, sen(2\omega_0 t)\right)\left(\xi_1' - \frac{\lambda}{2\omega_0} sen(2\omega_0 t)\,\xi_1\right)$$

$$- \left(senh(4\kappa t)\cos(2\omega_0 t) + \frac{\lambda}{2\omega_0} sen(2\omega_0 t)\right)\cos(2\omega_0 t)\,\xi_1$$

$$+ \left[senh(4\kappa t)\, sen(2\omega_0 t) + 2\frac{\lambda}{2\omega_0}\left(\cosh^2(2\kappa t)\, sen^2(\omega_0 t) + senh^2(2\kappa t)\cos^2(\omega_0 t)\right)\right]$$

$$\left[sen(2\omega_0 t)\,\xi_1 - \frac{\lambda}{2\omega_0}\xi_1' \right]\Bigg] + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{\omega_0}\right)^2 \left[\xi_1^2 + \xi_1'^2 - 4\frac{\lambda}{2\omega_0} sen(2\omega_0 t)\,\xi_1\xi_1' \right]\Bigg\}. \qquad (4.57)$$

onde

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_1'\end{pmatrix} = \frac{e^{\lambda t} - e^{-4\kappa t}}{4\kappa + \lambda} \pm \frac{e^{\lambda t} - e^{4\kappa t}}{4\kappa - \lambda}\,, \tag{4.58}$$

Quando da consideração das médias com relação a um estado coerente $|\alpha\rangle$, devemos acrescentar ao resultado (4.49), a expressão

$$\begin{aligned}
&\omega_0^2 e^{-\lambda t}\Bigg\{e^{(8\kappa-\lambda)t}\left(1 + 2\frac{\lambda}{2\omega_0}\,sen\,(2\omega_0 t)\right) + \frac{d}{\omega_0}\Bigg[e^{(4\kappa-\lambda)t}\left(1 + \frac{\lambda}{2\omega_0}\,sen\,(2\omega_0 t)\right)\times \\
&\left(\xi_1' - \frac{\lambda}{2\omega_0}\,sen\,(2\omega_0 t)\,\xi_1\right) - \left(e^{(4\kappa-\lambda)t}\cos(2\omega_0 t) + \frac{\lambda}{2\omega_0}\,sen\,(2\omega_0 t)\right)\cos(2\omega_0 t)\,\xi_1 - \\
&\Bigg[e^{(4\kappa-\lambda)t}\,sen\,(2\omega_0 t) + 2\frac{\lambda}{2\omega_0}e^{-\lambda t}\Big(\cosh^2(2\kappa t)\,sen^2(\omega_0 t) + senh^2(2\kappa t)\cos^2(\omega_0 t) + \\
&\frac{1}{2}senh\,(4\kappa t)\Big)\Bigg]\left(sen\,(2\omega_0 t)\,\xi_1 - \frac{\lambda}{2\omega_0}\xi_1'\right)\Bigg]\Bigg\}2|\alpha|^2\,.
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Considerando-se a média em $\omega_0 t$ da expressão (4.57), a flutuação da energia é, então, descrita conforme

$$\begin{aligned}
&\left\langle\left\langle\overline{(\Delta E)^2}\right\rangle\right\rangle_{\omega_0 t} = \frac{1}{2}\omega_0^2\Bigg\{e^{-2\lambda t}senh^2(4\kappa t) + 2\frac{d}{\omega_0}\Bigg[e^{-(4\kappa+\lambda)t}\left(\frac{1 - e^{-(4\kappa+\lambda)t}}{4\kappa + \lambda}\right) - \\
&e^{(4\kappa-\lambda)t}\left(\frac{1 - e^{(4\kappa-\lambda)t}}{4\kappa - \lambda}\right)\Bigg] + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{\omega_0}\right)^2\Bigg[e^{-\lambda t}\left(\frac{1 - e^{-(4\kappa+\lambda)t}}{4\kappa + \lambda} - \frac{1 - e^{(4\kappa-\lambda)t}}{4\kappa + \lambda}\right) \\
&\Bigg[\left(\frac{e^{\lambda t} - e^{-4\kappa t}}{4\kappa + \lambda} - \frac{e^{\lambda t} - e^{4\kappa t}}{4\kappa - \lambda}\right) + e^{-\lambda t}\left(\frac{1 - e^{-(4\kappa+\lambda)t}}{4\kappa + \lambda} + \frac{1 - e^{(4\kappa-\lambda)t}}{4\kappa - \lambda}\right) \\
&\Bigg[\left(\frac{e^{\lambda t} - e^{-4\kappa t}}{4\kappa + \lambda} + \frac{e^{\lambda t} - e^{4\kappa t}}{4\kappa - \lambda}\right)\Bigg]\Bigg]\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Quando da média em $\omega_0 t$ com relação ao termo adicional em (4.59), decorre o resultado

$$\omega_0^2 e^{(4\kappa - \lambda)t} \left[e^{4\kappa t} - \frac{d}{\omega_0} (\xi_1 - \xi_1') \right]^2 |\alpha|^2 . \tag{4.61}$$

Os comportamentos limite da flutuação da energia, segundo as expressões (4.60 e 61), satisfazem

$$\lim_{t \to 0} \left\langle \left\langle \overline{(\Delta E)^2} \right\rangle \right\rangle_{\omega_0 t} \sim \omega_0^2 |\alpha|^2 , \tag{4.62}$$

e

$$\lim_{t \to \infty} \left\langle \left\langle \overline{(\Delta E)^2} \right\rangle \right\rangle_{\omega_0 t} \sim \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{1 + (4\kappa/\lambda)^2}{[1 - (4\kappa/\lambda)^2]^2} \right). \tag{4.63}$$

Este último resultado, quando o sistema encontra-se no equilíbrio termodinâmico, reduz-se aproximadamente (quando $4\kappa/\lambda \ll 1$) àquele para a energia média, eq.(4.53), quando consideramos a própria flutuação ao invés do seu quadrado; dessa forma

$$\lim_{t \to \infty} \left\langle \left\langle \overline{\Delta E} \right\rangle \right\rangle_{\omega_0 t} \sim \frac{d}{\lambda} \frac{\left[1 + (4\kappa/\lambda)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{1 - (4\kappa/\lambda)^2} . \tag{4.64}$$

Desprezando-se o processo dissipação/flutuação, a energia média, segundo os cálculos apresentados, simplifica-se na forma

$$\langle \overline{E} \rangle = \omega_0 \left[senh^2(2\kappa t) + |\alpha|^2 e^{4\kappa t} \right], \qquad (4.65)$$

expressão esta que coincide, na ressonância, com aquela obtida de forma geral quando λ=d=0,

$$\langle E \rangle = \omega_0 \left[senh^2\left(r(t)\right) + |\alpha|^2 e^{2r(t)} \cos\left(2\beta(t) + \phi(t)\right) \right]. \qquad (4.66)$$

Observa-se, então, a divergência da energia média, eq.(4.65), quando no regime de ressonância $\left(r(t)=2\kappa t\right)$, ao passo que, fora deste, eq.(4.66), decorre tanto um comportamento periódico (η<1) como exponencial (η>1) para esta quantidade.

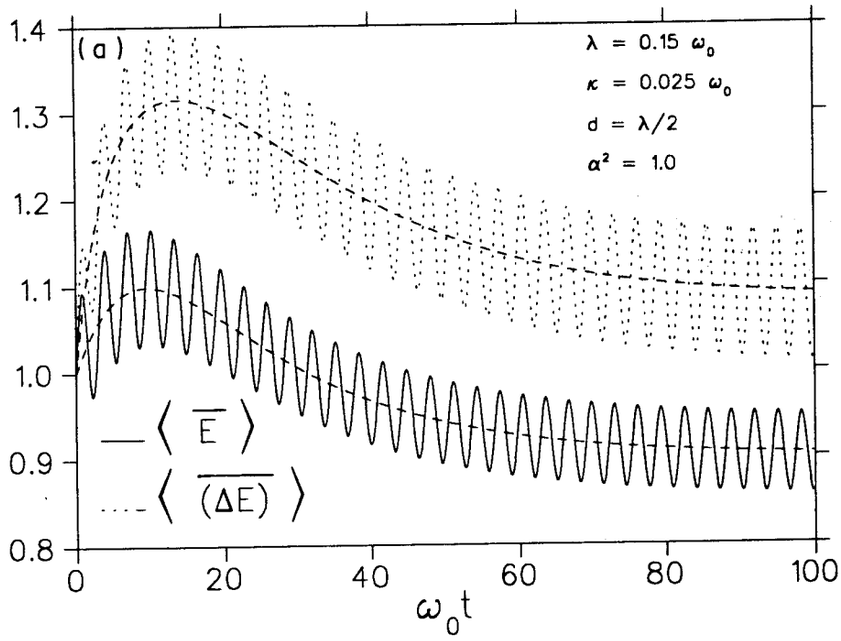
As figuras 16 a, b e c, apresentam os comportamentos $\langle \overline{E} \rangle$ e $\langle \overline{(\Delta E)} \rangle$ vs. $\omega_0 t$ relativos às expressões (4.50) e (4.57), tratando-se, em a e b do domínio $\lambda>4\kappa$ e, em c, $\lambda<4\kappa$. Fixamos Θ=0 e $\kappa=0.025\omega_0$, onde os casos a e b compreendem, respectivamente, α^2=1.0 e 1.5, com λ=0.15, enquanto que o caso c indica α^2=1.0, com λ=0.08. Quanto à constante de difusão, consideramos $\mathrm{cotgh}(\hbar\omega_0/2kT)=1$, tal que $d=\lambda/2$. As curvas tracejadas demarcam as médias em $\omega_0 t$, conforme descrevem as expressões (4.51), (4.60 e 61). Enfoque idêntico apresentam as figuras 17 a e b, com $\lambda=0.15\omega_0$ e $0.08\omega_0$, respectivamente, onde, fixando $\kappa=0.025\omega_0$, tratamos a média no vácuo, o que equivale a considerar α=0 e Θ=0.

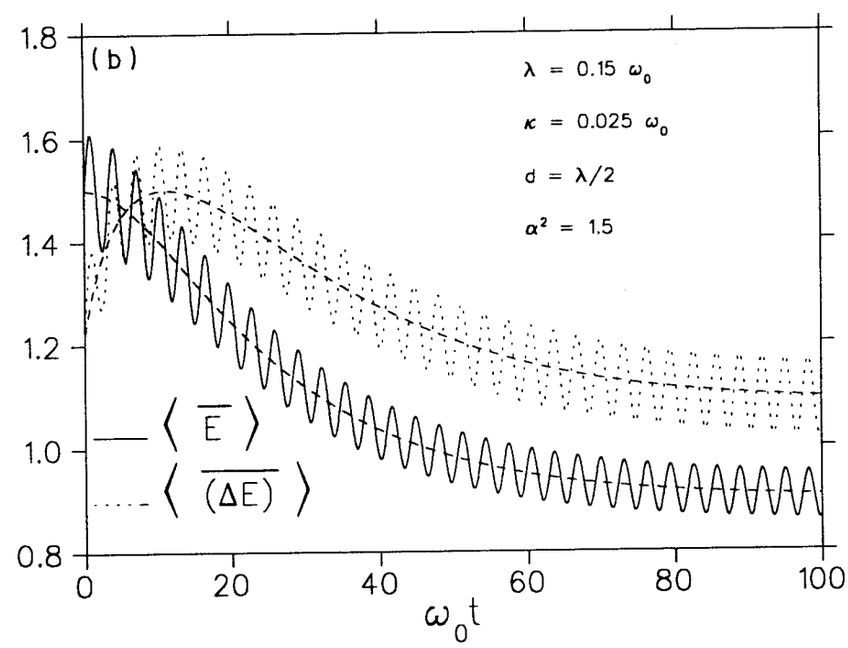
Quando do domínio $\lambda>4\kappa$, delimitam-se ambos os comportamentos através das curvas apresentadas: aquele típico dos sistemas dissipativos, onde a energia decresce até o limite termodinâmico com o banho, e o amplificador quântico. O domínio $\lambda<4\kappa$, compreende no entanto, exclusivamente, o amplificador quântico onde a energia média

incrementa-se indefinidamente ou até o limite termodinâmico.

Apresentamos os casos a e b da figura 16, no intuito de ilustrar a dependência entre o estado coerente, responsável pela média da energia, e uma possível competição entre os comportamentos dissipação/amplificação. Para α=1.0, conforme expõe a figura 16 a, verifica-se uma breve região transiente com a amplificação da energia média, a qual, após atingir um valor máximo, declina até o limite imposto em (4.55).

Quando α^2=1.5, o comportamento dissipativo é desde o início predominante, situação oposta àquela da figura 17 a, onde, com α=0 temos a amplificação até o limite termodinâmico. Quando $\lambda=0.08\omega_0$, figuras 16 c e 17 b, observa-se a situação onde a energia média do campo na cavidade é indefinidamente acrescida com o tempo, posto que o bombeamento externo predomina sobre a fricção. Tais comportamentos, conforme esperado, apresentam-se similares à situação onde se considera λ=0, dado que no regime de ressonância - máxima interação entre os campos - consideram o domínio $\lambda<4\kappa$.


(a)
λ = 0.15 ω0
κ = 0.025 ω0
d = λ/2
α² = 1.0
⟨ E ⟩
⟨ (ΔE) ⟩
1.4
1.3
1.2
1.1
1.0
0.9
0.8
0
20
40
60
80
100
ω0t


(b)
λ = 0.15 ω0
κ = 0.025 ω0
d = λ/2
α² = 1.5
⟨ E ⟩
⟨ (ΔE) ⟩
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0
20
40
60
80
100
ω0t

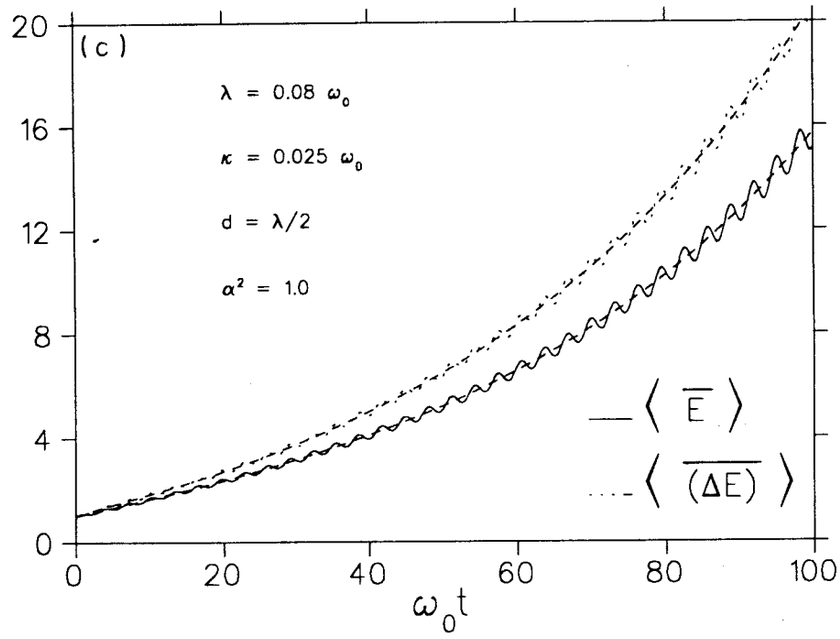


Figura 16: $\langle \bar{E} \rangle$ e $\langle \overline{(\Delta E)^2} \rangle$ *versus* $\omega_0 t$ *para a ressonância, onde os ítens a e b compreendem o domínio* $\lambda > 4\kappa$ $(\lambda = 0.15\omega_0)$, *com* $\alpha^2 = 1.0$ *e* 1.5, *respectivamente. O ítem c, com* $\alpha^2 = 1.0$ *e* $\lambda = 0.08\omega_0$ *indica o domínio* $\lambda < 4\kappa$. *Fixa-se* $\Theta = 2\pi$, $\kappa = 0.025\omega_0$ *e* $d = \lambda/2$. *As curvas tracejadas demarcam as médias em* $\omega_0 t$.

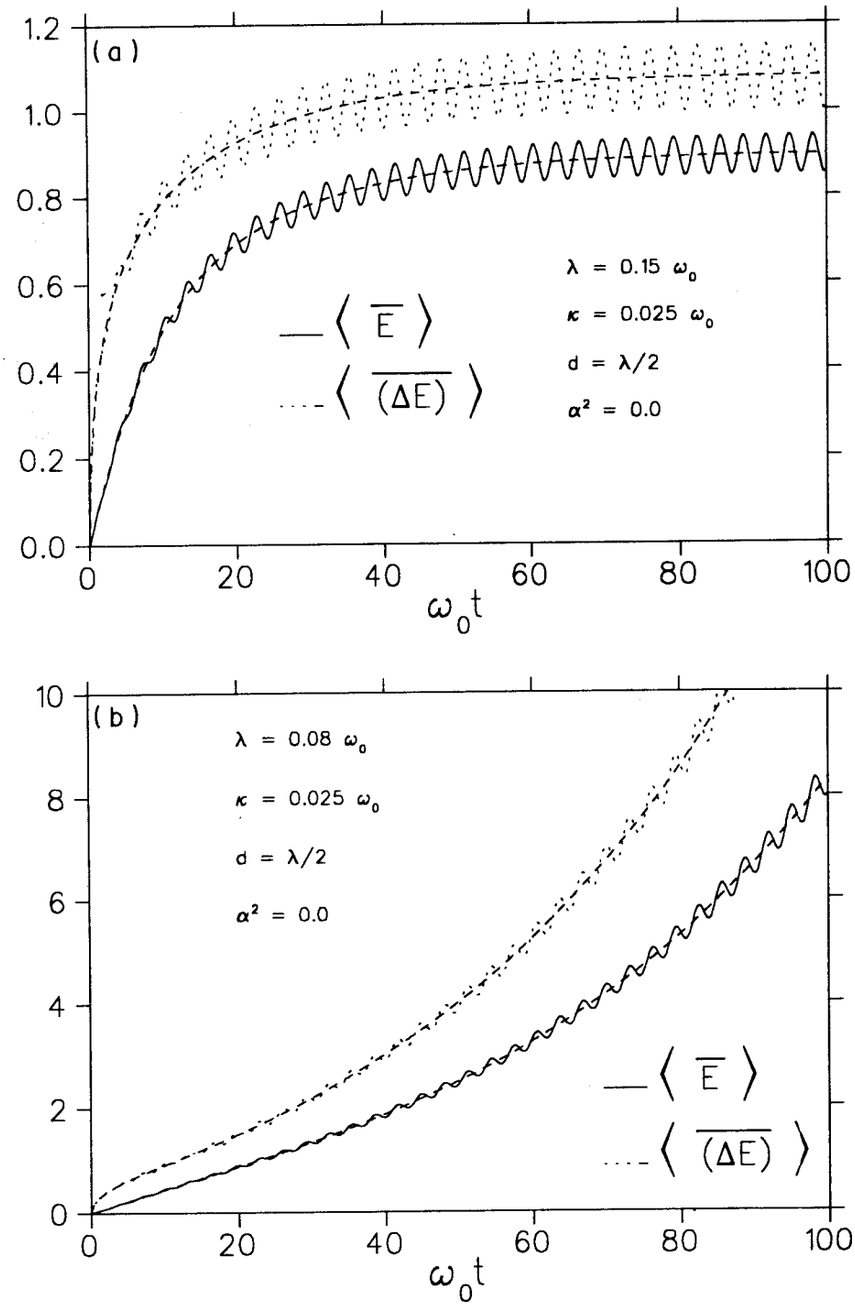


Figura 17: $\langle \bar{E} \rangle$ e $\langle \overline{(\Delta E)^2} \rangle$ *versus* $\omega_0 t$ *para a ressonância, onde os ítens a e b, com* $\lambda=0.15\omega_0$ *e* $0.08\omega_0$*, demarcam os domínios* $\lambda>4\kappa$ *e* $\lambda<4\kappa$*, respectivamente. Considera-se a média no vácuo, tal que* $\alpha^2=0$*, com* $\Theta=2\pi$*,* $\kappa=0.025\omega_0$ *e* $d=\lambda/2$ *fixos.*

A situação não ressonante é ilustrada junto a figura 18, onde aos ítens a, b e c, fixos os parâmetros $\lambda=0.15\omega_0$, $\kappa=0.025\omega_0$ e $\alpha=1.0$ (com $\Theta=0$), associamos, respectivamente, $\omega=0.2\omega_0$, $0.9\omega_0$ e $0.95\omega_0$, com $\eta=0.0625$, 0.5 e 1.0. Para tempos suficientemente pequenos, observa-se junto à figura 18 a, uma competição entre os comportamentos de amplificação e dissipação, com a predominância deste útimo até o limite termodinâmico. Comportamento similar apresenta-se quando, com relação ao gráfico ηvs.ω, consideramos a freqüência de bombeamento, $\omega=1.8\omega_0$ ($\eta=0.05$), fixos os mesmos parâmetros anteriores. Contudo, nesta situação, as oscilações da energia média fazem-se mais intensas que aquelas em $\omega=0.2\omega_0$. Observa-se que o limite termodinâmico define-se com relativa rapidez, se comparado, por exemplo, aos casos ressonantes, exatamente em virtude de uma interação efetivamente fraca entre os campos, posto que $\Delta\omega = \omega-\omega_0 \simeq \omega_0$.

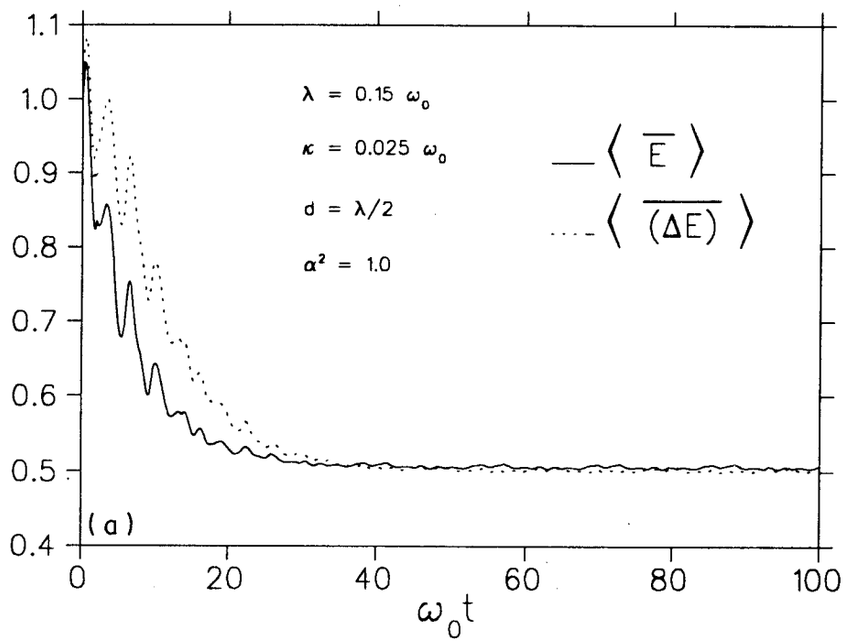
Deve-se observar, no entanto, que ao comportamento da energia média somam-se dois processos distintos. Devido às funções $\tilde{u}(t)$ e $\tilde{v}(t)$ que constituem a expressão (4.49), observa-se um decaimento contínuo até a energia nula, enquanto que a quantidade $|\tilde{w}(t)|^2$, evolui a partir deste valor impondo o comportamento subseqüente da energia média após um breve transiente. A predominância da quantidade associada às funções estocásticas é identificada aos integrandos da relação (4.33), onde as exponenciais crescentes em λt compensam os efeitos da dissipação , definindo as flutuações características do limite termodinâmico. Este limite, quando $\omega=0.2\omega_0$, figura 18 a, aproxima-se do valor da energia compreendido pelo oscilador no estado fundamental $\hbar\omega_0/2$. À medida em que, mantendo o parâmetro de fricção e a constante de acoplamento, incrementa-se a interação entre os campos através da

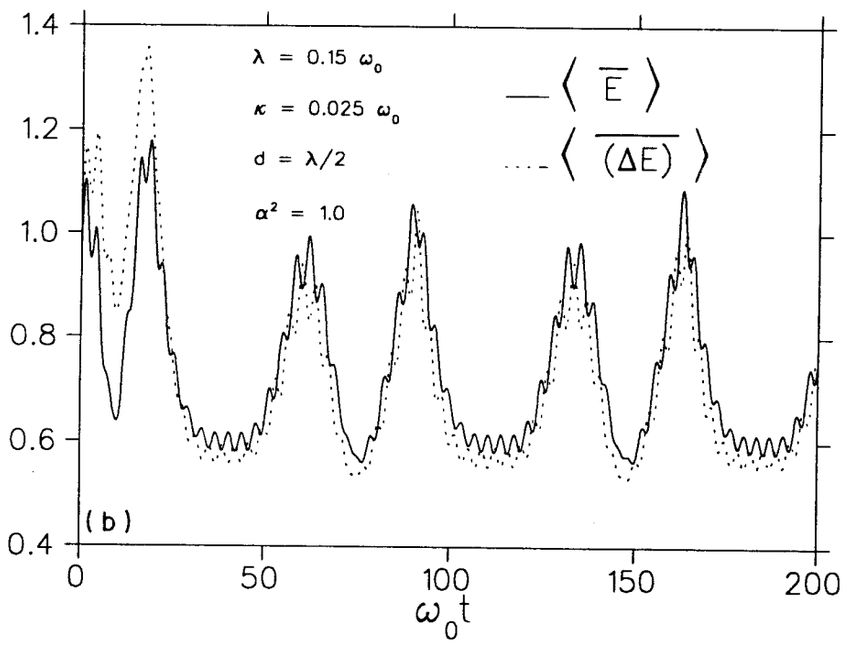
freqüência de bombeamento, observa-se quando $\eta<1$ (figura 18 b, por exemplo), um aumento da energia mínima, situando-se acima de $\hbar\omega_0/2$.

Quanto à figura 18 b, com $\omega=0.9\omega_0$ ($\eta=0.5$), não se verifica a definição de um limite termodinâmico, além da periodicidade das cristas relativas à competição amplificação/dissipação. À medida em que nos aproximamos do limiar em $\eta=1$, através de ambos os ramos em ηvs.ω, observa-se uma súbita proeminência destas cristas da energia média, à semelhança do comportamento das flutuações nas quadraturas nesta aproximação. Sobre o limiar $\eta=1.0$, onde $\omega=0.95\omega_0$, a figura 18 c exibe, conforme esperado, um crescimento exponencial da energia média, a qual segue-se a uma breve região transiente onde esta quantidade é timidamente amortecida. Ao considerar a situação simétrica a esta da figura 18 c, com $\omega=1.05\omega_0$ e mesmos λ, κ e α, figura 19, observa-se uma ampliação deste transiente, acarretando um amortecimento pronunciado da energia média até que se efetive o crescimento exponencial. Este acentuado amortecimento e o fraco desenvolvimento da divergência, comparados ao caso $\omega=0.95\omega_0$, delimitam uma assimetria no desenvolvimento temporal da energia média, quando $\eta\geq1$, de ambos os lados da situação ressonante, $\omega<\omega_0$ ou $>\omega_0$.

Aproximando-se da situação ressonante, são observados comportamentos similares a estes das figuras 18 c e 19, respectivamente junto aos ramos esquerdo e direito do gráfico $|\eta|$ vs.ω, com o contínuo incremento das divergências.

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO


λ = 0.15 ω0
κ = 0.025 ω0
d = λ/2
α² = 1.0
⟨ Ē ⟩
⟨ (ΔE) ⟩
(a)
ω0t


λ = 0.15 ω0
κ = 0.025 ω0
d = λ/2
α² = 1.0
⟨ Ē ⟩
⟨ (ΔE) ⟩
(b)
ω0t

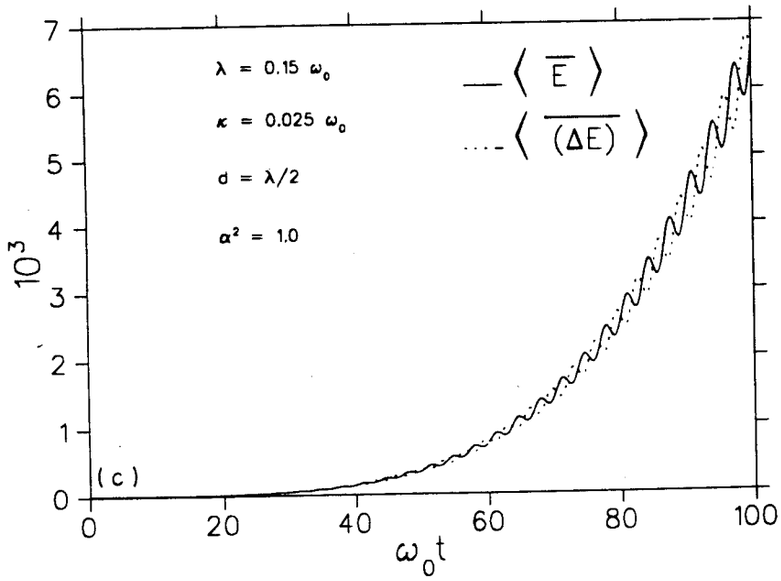


Figura 18: $\langle \bar{E} \rangle$ e $\langle \overline{(\Delta E)^2} \rangle$ *versus* $\omega_0 t$ *fora da ressonância, onde os ítens a, b e c indicam respectivamente* $\omega=0.2\omega_0$, $0.9\omega_0$ *e* $\omega_0-2\kappa$, *com* $\eta=0.065$, 0.5 *e* 1.0. *Fixa-se* $\Theta=2\pi$, $\lambda=0.15\omega_0$, $\kappa=0.025\omega_0$ *e* $\alpha=1$.

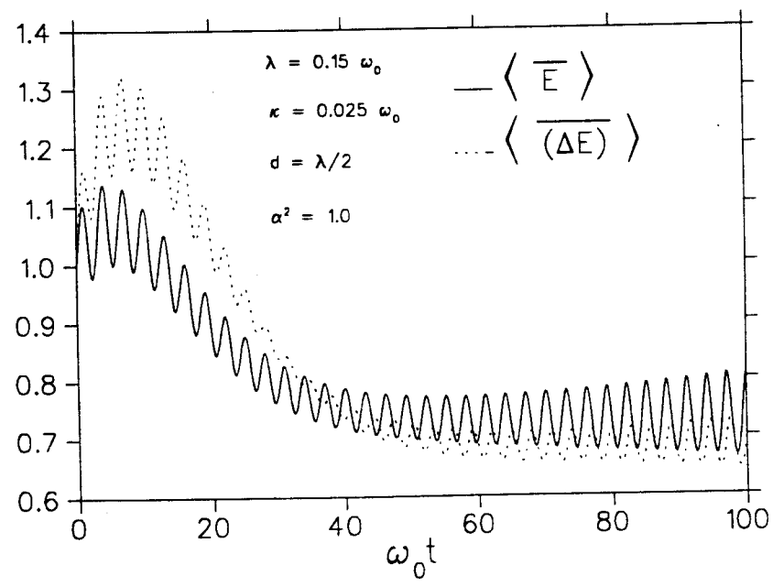


Figura 19: $\langle \bar{E} \rangle$ e $\langle \overline{(\Delta E)^2} \rangle$ *versus* $\omega_0 t$ *fora da ressonância , com* $\omega=\omega_0+2\kappa$ $(\eta=1.05)$. *Fixa-se, à semellhança da figura 14,* $\Theta=2\pi$, $\lambda=0.15\omega_0$, $\kappa=0.025\omega_0$ *e* $\alpha=1.0$.

4.6.3 - Correlações das Quadraturas e de Intensidades

Tratando-se das correlações temporais nas quadraturas, somos informados sobre o nível em que dada quantidade afeta as probabilidades de seus valores num tempo posterior, o que denominamos autocorrelações, ou dos valores do seu par canonicamente conjugado, as correlações cruzadas. Quanto aos coeficientes de auto-correlação, define-se

$$C_{x_i(t)\,x_i(t')} = \frac{1}{2}\left\langle \overline{x_i(t)\,x_i(t')} + \overline{x_i(t')\,x_i(t)} \right\rangle - \left\langle \overline{x_i(t)} \right\rangle \left\langle \overline{x_i(t')} \right\rangle , \quad i=1,2. \tag{4.67}$$

onde a simetrização imposta compreende o fato de tratarmos com variáveis quânticas. De forma análoga, para as correlações temporais cruzadas, escrevemos

$$C^{i\neq j}_{x_j(t)\,x_i(t')} = \frac{1}{2}\left\langle \overline{x_i(t)\,x_j(t')} + \overline{x_j(t')\,x_i(t)} \right\rangle - \left\langle \overline{x_i(t)} \right\rangle \left\langle \overline{x_j(t')} \right\rangle , \quad j,i=1,2 . \tag{4.68}$$

Do desenvolvimento das expressões (4.67 e 68), segundo médias num estado coerente, obtemos

$$C_{x_i(t)\,x_i(t')} = \frac{1}{4} Re \left\{ \tilde{u}(t)\,\tilde{u}^*(t') + \tilde{v}(t)\,\tilde{v}^*(t') \pm \tilde{u}(t)\,\tilde{v}(t') \pm \tilde{u}(t')\,\tilde{v}(t) \right.$$
$$\left. \pm\, 2\left(\overline{\tilde{w}(t)\,\tilde{w}(t')} \pm \overline{\tilde{w}(t)\,\tilde{w}^*(t')} \right) \right\}, \quad i=1,2 , \tag{4.69}$$

e

$$C^{i\neq j}_{x_j(t)x_i(t')} = \pm\frac{1}{4}\,Im\Big\{\tilde{u}(t)\,\tilde{u}^*(t') + \tilde{v}(t)\,\tilde{v}^*(t') \pm \tilde{u}(t)\,\tilde{v}(t') \pm \tilde{u}(t')\,\tilde{v}(t)$$

$$\pm\, 2\left(\overline{\tilde{w}(t)\,\tilde{w}(t')} \pm \overline{\tilde{w}(t)\,\tilde{w}^*(t')}\right)\Big\}, \quad j,i=1,2\,, \qquad (4.70)$$

onde, para ambos os resultados (4.69 e 70), o sinal superior (inferior) corresponde a i=1(2), notação esta que compreende todas as expressões subseqüentes.

Considerando-se o desenvolvimento analítico das expressões (4.69 e 70), para o regime de ressonância, decorre para as auto-correlações, o resultado

$$C_{x_i(t)x_i(t')} = \frac{1}{4}e^{-\lambda(t+t')/2}\Big\{\cosh[2\kappa(t'+t)]\cos[\omega_0(t'-t)]$$

$$\pm\, senh[2\kappa(t'+t)]\cos[\omega_0(t'+t)] + \frac{\lambda}{\omega_0}\Big(\cosh(2\kappa t)\,senh(2\kappa t') \times$$

$$\times\, sen(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t') + senh(2\kappa t)\cosh(2\kappa t')\cos(\omega_0 t)\,sen(\omega_0 t')$$

$$\pm\,\frac{1}{2}\cosh[2\kappa(t'-t)\,sen\omega_0(t'+t)\Big) \pm \frac{d}{\omega_0}\Big[-\Big(\cos[\omega_0(t'+t)]$$

$$\pm\,\frac{\lambda}{2\omega_0}\,sen[\omega_0(t'+t)]\,\Gamma_1 \pm \cos[\omega_0(t'-t)]\,\Gamma_1'\Big]\Big\}, \qquad (4.71)$$

com

$$\begin{pmatrix}\Gamma_1\\ \Gamma_1'\end{pmatrix} = e^{-2\kappa(t'+t)}\,\frac{e^{\lambda t} - e^{-4\kappa t}}{4\kappa+\lambda} \pm e^{2\kappa(t'+t)}\,\frac{e^{\lambda t} - e^{4\kappa t}}{4\kappa-\lambda}\,, \qquad (4.72)$$

Quanto às correlações cruzadas, os resultados obtidos para a ressonância satisfazem

$$C^{i\neq j}_{x_j(t)\,x_i(t')} = \pm\,\frac{1}{4}\,e^{-\lambda(t+t')/2}\Big\{\cosh\left[2\kappa(t'+t)\right] sen\left[\omega_0(t'-t)\right]$$

$$\mp\, senh\left[2\kappa(t'+t)\right] sen\left[\omega_0(t'+t)\right] \mp \frac{\lambda}{\omega_0}\Big[\cosh(2\kappa t)\cosh(2\kappa t')\ \times$$

$$\times\, sen(\omega_0 t)\, sen(\omega_0 t') + senh(2\kappa t)\, senh(2\kappa t')\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t')$$

$$\mp\,\frac{1}{2}\, senh\left[2\kappa(t'-t)\cos\omega_0(t'+t)\right]\Big] \pm \frac{d}{\omega_0}\Big[sen\left[\omega_0(t'+t)\right]\Gamma_1 \pm$$

$$\left(sen\left[\omega_0(t'-t)\right] \mp \frac{\lambda}{2\omega_0}\cos\left[\omega_0(t'-t)\right]\right)\Gamma_1'\Big]\Big\}. \qquad (4.73)$$

Os valores médios, em $\omega_0\tau$ (τ=t'-t), das expressões (4.70 e 73), indicam oscilações periódicas das correlações em torno de seus valores nulos, pois que

$$\left\langle C_{x_i(t)\,x_i(t')}\right\rangle_{\omega_0\tau} = \left\langle C^{i\neq j}_{x_j(t)\,x_i(t')}\right\rangle_{\omega_0\tau} = 0\ .$$

Desprezando-se o processo dissipação/flutuação, as expressões (4.71) e (4.73), reduzem-se, respectivamente, às formas

$$C_{x_i(t)\,x_i(t')} = \frac{1}{4}\Big[\cosh\left[2\kappa(t'+t)\right]\cos\left[\omega_0(t'-t)\right] \pm senh\left[2\kappa(t'+t)\right]\cos\left[\omega_0(t'+t)\right]\Big] \qquad (4.74)$$

e

$$C^{i\neq j}_{x_j(t)x_i(t')} = \pm\frac{1}{4}\Big[\cosh\big[2\kappa(t'+t)\big]sen\big[\omega_0(t'-t)\big] \mp senh\big[2\kappa(t'+t)\big]sen\big[\omega_0(t'+t)\big]\Big], \tag{4.75}$$

cujos valores médios, em $\omega_0\tau$, são ambos nulos. Quando t=0, decorre que

$$C_{x_i(0)x_i(\tau)} = \frac{1}{4}e^{\pm 2\kappa\tau}\cos(\omega_0\tau) \ ,$$

e

$$C^{i\neq j}_{x_j(0)x_i(\tau)} = \pm\frac{1}{4}e^{\mp 2\kappa\tau}sen(\omega_0\tau) \ ,$$

por onde se observa que, enquanto para i=1 os valores das corelações são divergentes, para i=2 estes são continuamente amortecidos. No entanto, quando t≠0, a divergência demarca ambas as situações i=1 e 2, tanto para as autocorrelações quanto para as correlações cruzadas.

As expressões obtidas quando λ=0 (4.74 e 75), coincidem na ressonância com aquelas obtidas de forma geral para λ=d=0,

$$C_{x_i(t)x_i(t')} = \frac{1}{4}\Big\{\cosh r(t)\cosh r(t')\cos\big[\beta(t) - \beta(t')\big] + senh r(t)\, senh r(t') \times$$
$$\cos\big[\beta(t) - \beta(t') + \phi(t) - \phi(t')\big] \pm \cosh r(t)\, senh r(t') \times$$
$$\cos\big[\beta(t) - \beta(t') - \phi(t')\big] \pm \cosh r(t')\, senh r(t)\cos\big[\beta(t) - \beta(t') - \phi(t')\big]\Big\}, \tag{4.76}$$

e

$$C^{i\neq j}_{x_j(t)x_i(t')} = \pm \frac{1}{4}\Big\{\cosh r(t)\cosh r(t')\, sen\big[\beta(t) - \beta(t')\big] + senh r(t) \times$$

$$\times senh r(t')\; sen\big[\beta(t) - \beta(t') + \phi(t) - \phi(t')\big] \mp \cosh r(t)\, senh r(t') \times$$

$$sen\big[\beta(t) - \beta(t') - \phi(t')\big] \mp \cosh r(t')\, senh r(t)\, sen\big[\beta(t) - \beta(t') - \phi(t')\big]\Big\}, \tag{4.77}$$

expressões estas que apresentam comportamentos periódicos para ambos os regimes $\eta>$ ou <1.

Voltando às relações (4.71) e (4.73), espera-se que apresentem comportamentos similares àqueles para $\lambda=0$, quando no regime ressonante consideramos o domínio $\lambda<4\kappa$. As figuras 20 a e b expõem o comportamento $C^{i\neq j}_{Xj(t)Xi(t')}$ versus $\omega_0\tau$, com t=0, quando $\lambda=0$ e, para a ressonância, $\lambda=0.08\omega_0$ (com $\kappa=0.25\omega_0$ e $d=\kappa/2$), respectivamente. Para i=2 em ambos os casos observa-se a divergência das correlações, fazendo-se mais acentuada, contudo, quando $\lambda=0$.

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

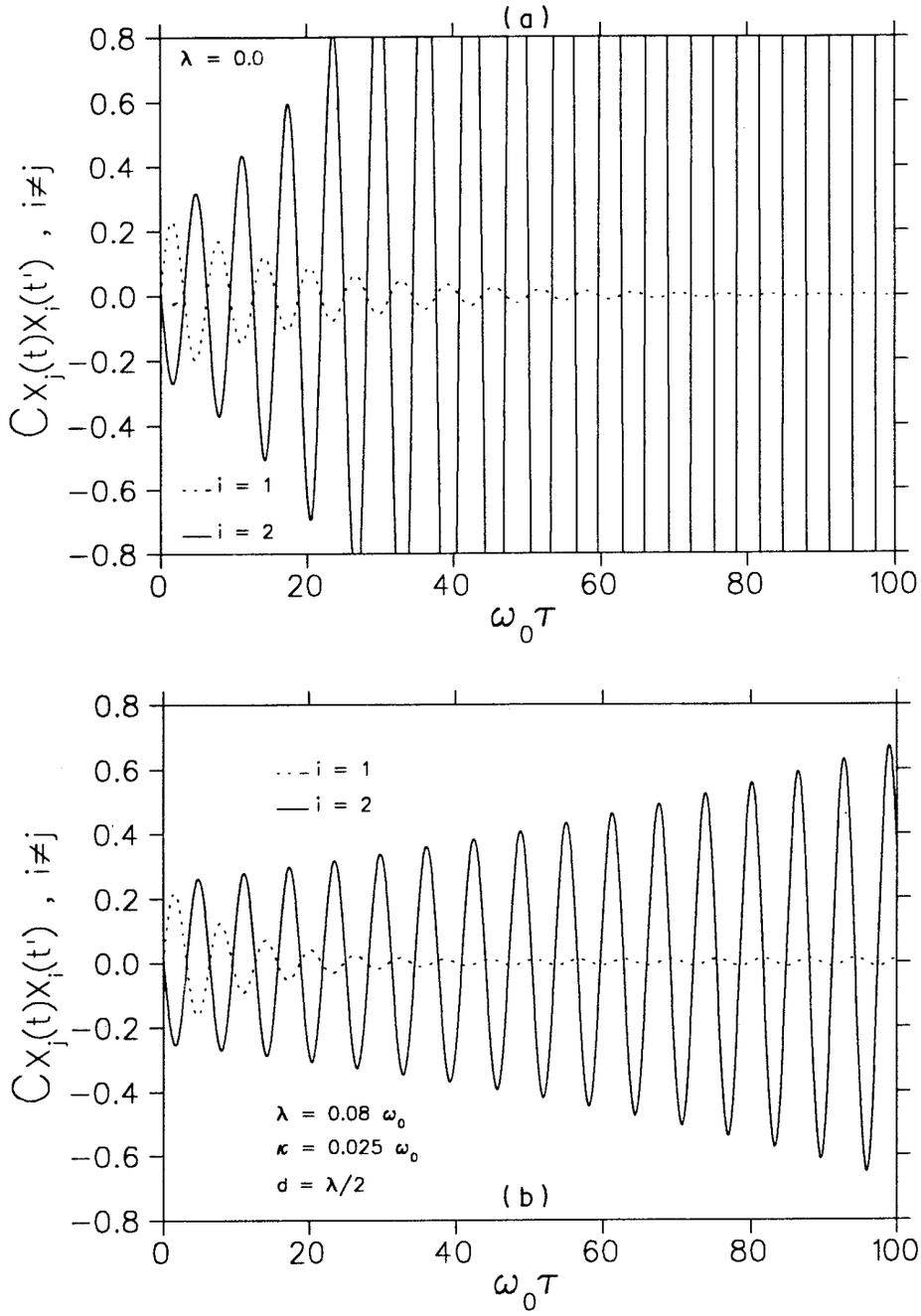


Figura 20: $C^{i\neq j}_{Xj(t)Xi(t')}$ *versus* $\omega_0\tau$, *com t=0, onde os ítens a e b correspondem, respectivamente, às situações ressonantes com* $\lambda=0$ *e* $\lambda=0.08\omega_0$ $(\kappa=0.025\omega_0$ *e* $d=\lambda/2)$. *Os casos i=1 e 2 são indicados seqüencialmente por linhas pontilhada e cheia.*

Ainda dentro do regime ressonante, as figuras 21 a e b expõem os comportamentos $C_{Xi(t)Xi(t')}$ e $C^{i\neq j}_{Xj(t)Xi(t')}$ versus $\omega_0\tau$, com $t=0.1/\omega_0$, fixando-se $\lambda=0.15\omega_0$, $\kappa=0.025\omega_0$ e $d=\lambda/2$. Ambos os comportamentos, i=1 e 2, tanto para as auto-correlações quanto para as correlações cruzadas, são abordados, seqüencialmente por linhas cheia e pontilhada. O amortecimento das correlações observado nas figuras 21 a e b, compreende o domínio $\lambda>4\kappa$, enquanto se nota um fortalecimento contínuo destas correlações quando $\lambda<4\kappa$, mostrado nas figuras 22 a e b, com $\lambda=0.08\omega_0$, $\kappa=0.025\omega_0$ e $d=\lambda/2$.

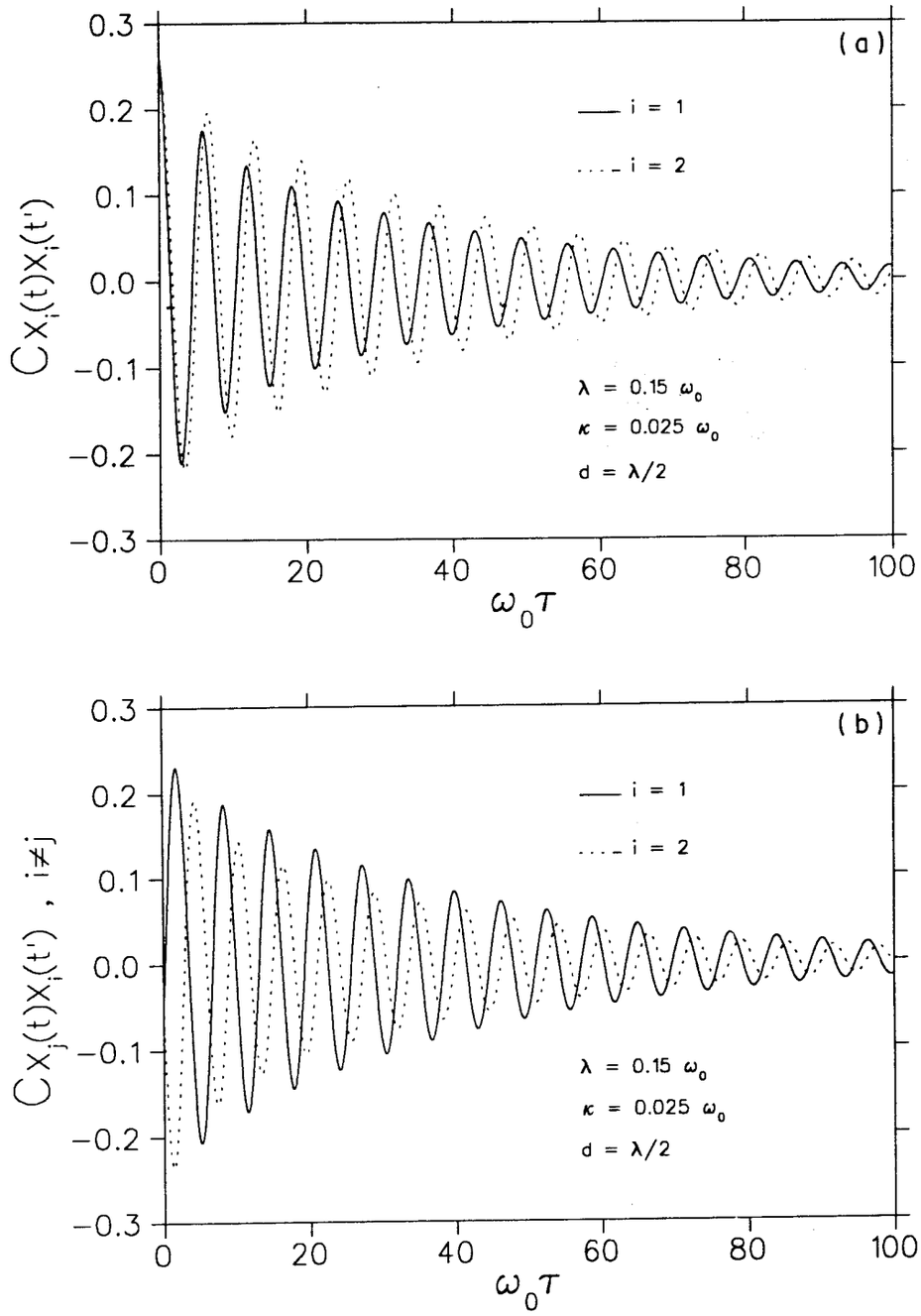


Figura 21: *Comportamentos ressonantes para* $C_{Xi(t)Xi(t')}$ *e* $C^{i\neq j}_{Xj(t)Xi(t')}$ *versus* $\omega_0\tau$, *compreendidos, respectivamente, pelos ítens a e b. As situações i=1 e 2 são abordadas seqüencialmente por linhas cheia e pontilhada. Fixa-se* $\lambda=0.15\omega_0$, $\kappa=0.025\omega_0$ *e* $d=\lambda/2$ $(\lambda>4\kappa)$.

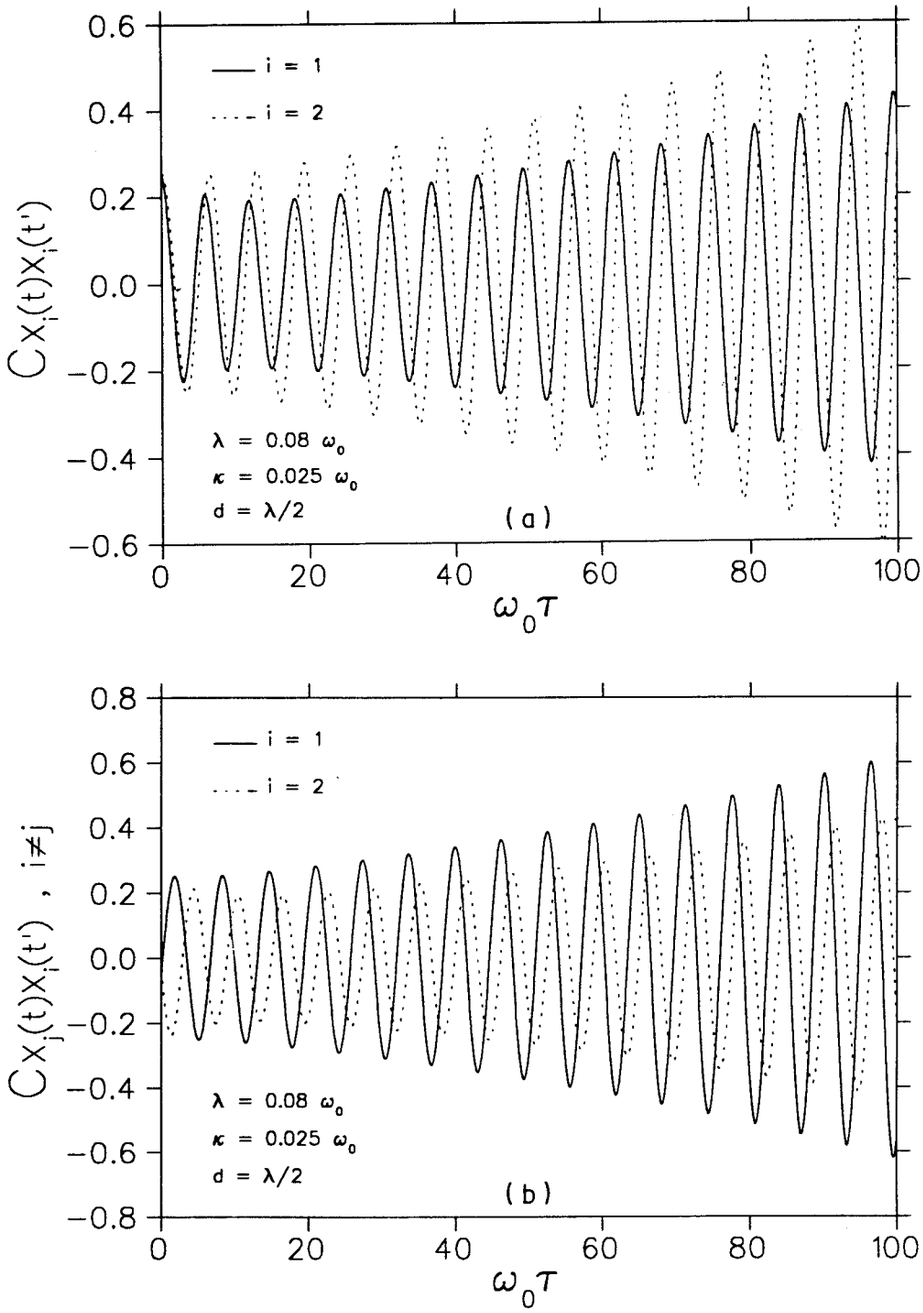


Figura 22: *Comportamentos ressonantes para* $C_{Xi(t)Xi(t')}$ *e* $C^{i\neq j}_{Xj(t)Xi(t')}$ *versus* $\omega_0\tau$, *indicados, respectivamente, pelos ítens a e b. As linhas cheia e pontilhada indicam seqüencialmente 1 e 2. Fixa-se* $\lambda=0.08\omega_0$, $\kappa=0.025\omega_0$ *e* $d=\lambda/2$ $(\lambda<4\kappa)$.

Pode-se observar numericamente que as amplitudes iniciais das oscilações relativas às correlações (4.71) e, conseqüentemente, os valores posteriores destas quantidades, variam segundo a escolha do parâmetro t. As figuras 21 e 22 fixam $t=0.1/\omega_0$. Se, no entanto, através do gráfico $\bar{X}_i$ vs. $\omega_0 t$, fixarmos o valor t correspondente a um ponto de máximo da grandeza $\bar{X}_i$, observa-se maiores amplitudes nas oscilações da correlação $C_{Xi(t)Xi(t')}$. Considerações similares aplicam-se aos resultados (4.73). De outra forma, as correlações (4.71 e 73) têm suas amplitudes acrescidas quando, diminuindo a temperatura, considera-se $d>\lambda/2$.

Comportamento análogo ao caso ressonante, obtém-se fora deste, conforme expõe as figuras 23 a e b ($C^{i\neq j}_{Xj(t)Xi(t')}$ vs. $\omega_0\tau$), onde fixando $\lambda=0.15\omega_0$, $\kappa=0.025\omega_0$ e $d=\lambda/2$, tem-se, respectivamente, $\omega=0.5\omega_0$ e $0.95\omega_0$ ($\eta=0.1$ e 1.0). Quando a freqüência de bombeamento aproxima-se de ω_0, as correlações começam a exibir um comportamento similar ao fenômeno do batimento, típico das situações de interferência onde ocorre uma proximidade suficiente entre as freqüências envolvidas. Este fenômeno é também observado junto ao domínio $\eta>1$, onde as correlações temporais das quadraturas exibem comportamentos similares à situação $\eta<1$.

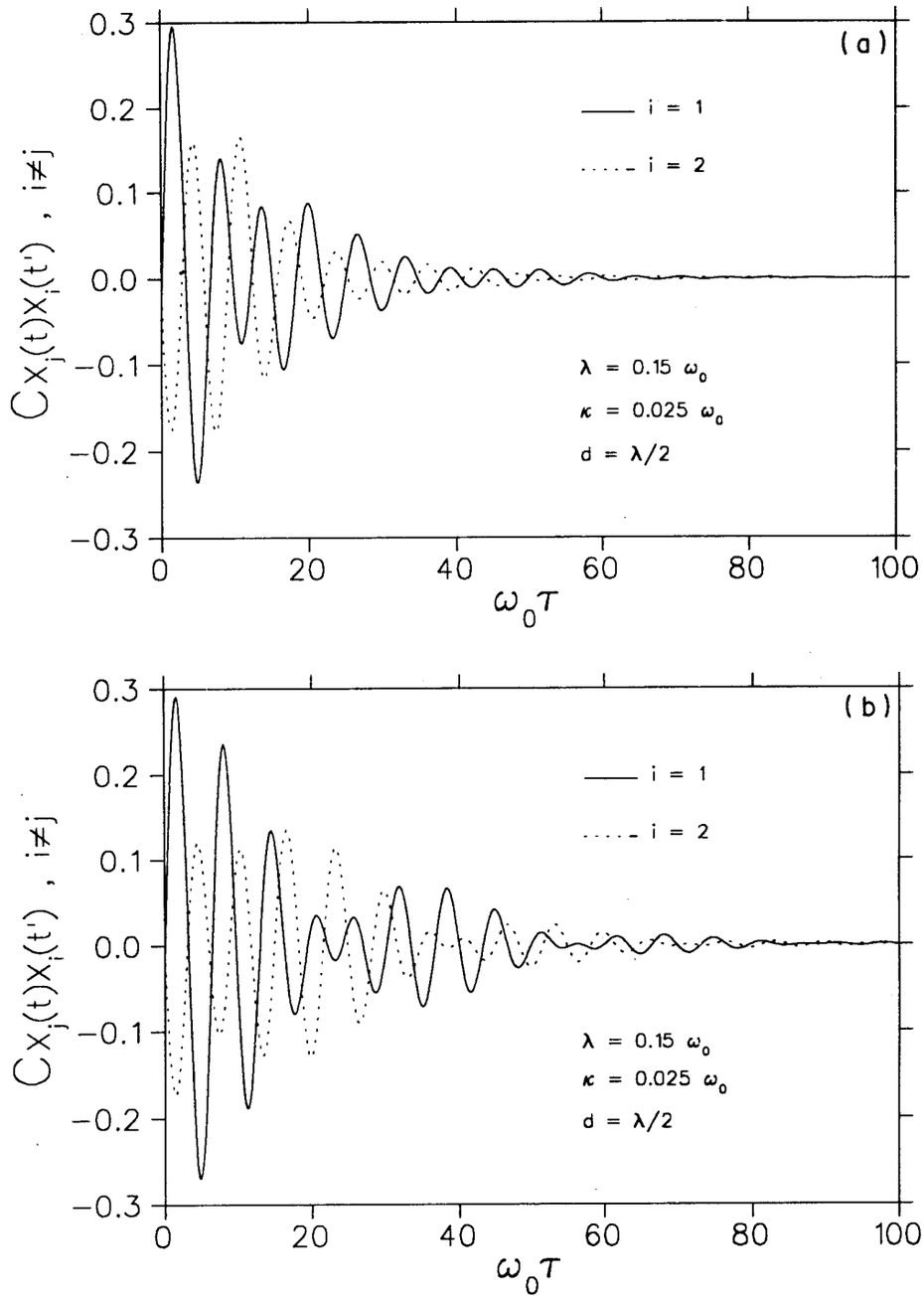


Figura 23: *Comportamentos fora da ressonância para* $C^{i\neq j}_{Xj(t)Xi(t')}$ *versus* $\omega_0\tau$, *onde os ítens a e b consideram* $\omega=0.5\omega_0$ *e* $0.95\omega_0$ *(*$\eta=0.1$ *e* 1.0*), respectivamente. As linhas cheia e pontilhada indicam seqüencialmente* $i=1$ *e* 2*. Fixa-se* $\lambda=0.15\omega_0$, $\kappa=0.025\omega_0$ *e* $d=\lambda/2$.

Comportamentos similares às correlações acima expostas são observados no tratamento da partícula browniana quântica[82], através da equação master generalizada. Representando a partícula browniana por um oscilador harmônico (freqüência ω_0) imerso num banho de osciladores (freqüências ω distintas), a evolução temporal da correlação posição/momento, $\langle pq+qp\rangle_t$, apresenta amplitudes decrescentes das oscilações em torno da média nula. Verifica-se, igualmente, a procedência do comportamento similar ao batimento, o que, deve-se atribuir à relação entre as freqüências ω_0 e aquelas do banho, consideradas segundo uma distribuição de probabilidade. É importante frisar que os resultados obtidos para este modelo da partícula browniana, tanto para a energia média quanto para as correlações q-p, procedem às aproximações de ruído branco (markoviana) ou colorido. Os comportamentos obtidos para as correlações são similares, apresentando ligeiras diferenças de fase e amplitude.

O estudo da correlação de intensidades, o que define a estatística associada às flutuações do número de fótons na radiação, considera para um único modo do campo, a função de correlação temporal normalizada

$$g^{(2)}(t,t+\tau) = \frac{\langle a^+(t)\,a^+(t+\tau)\,a(t+\tau)\,a(t)\rangle}{\langle a^+(t)\,a(t)\rangle\langle a^+(t+\tau)\,a(t+\tau)\rangle}\,, \qquad (4.78)$$

relação esta que, introduzida por R. Glauber[13] em sua formulação da teoria da coerência óptica, avalia a probabilidade de absorção conjunta de fótons através da detecção de um fóton no tempo t e de outro em $t+\tau$.

Quando se trata de uma fonte de luz térmica, o resultado de medidas da correlação de fótons, $g^{(2)}(t,t+\tau)$, corresponde a curva a na

figura 24, onde se observa que a razão de contagem conjunta para o espaçamento nulo dos tempos, $\tau=0$, corresponde ao dobro da razão de coincidência para grandes espaçamentos τ. Há, portanto, uma tendência para o efeito de "bunching" de fótons, o que os faz chegar aos pares junto aos detectores. Se o experimento considera como fonte um laser de alta estabilidade, obtém-se uma função de correlação constante, o que equivale a curva b na figura 24.

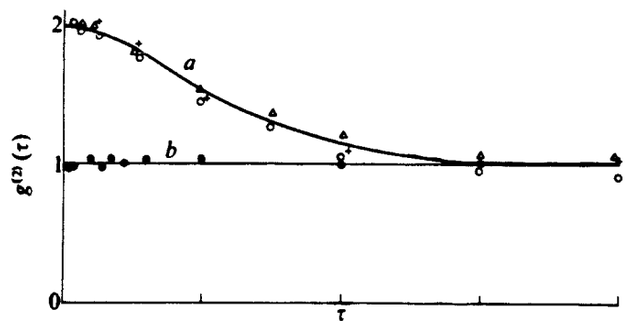


Figura 24: *Função de correlação de segunda ordem, $g^{(2)}(\tau)$, para: a) luz térmica; b) luz coerente. Resultado devido a Arrechi e outros*[89].

Para a interpretação dos experimentos de correlação de fótons, figura 24, convém, por simplicidade, que se restrinja a atenção sobre a quantidade

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle : I^2 : \rangle}{\langle I \rangle^2} = 1 + \frac{\langle (\Delta n)^2 \rangle - \langle n \rangle}{\langle n \rangle^2}, \qquad (4.79)$$

onde a notação :: compreende o ordenamento normal dos operadores que definem a intensidade de luz. $\langle n \rangle$ e $\langle (\Delta n)^2 \rangle$ correspondem, respectivamente, à média e à variância da distribuição do número de fótons. Desde que, para a luz térmica, a lei de potência de uma tal distribuição satisfaz $\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n \rangle^2 + \langle n \rangle$, decorre diretamente que $g^2(0)=2$. Quando da distribuição poissoniana do número de fótons, equivalente à luz coerente, obtém-se o resultado $g^2(0)=1$, pois que $\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n \rangle$.

Para um campo de luz que satisfaça uma estatística sub-poissoniana para a distribuição do número de fótons, onde $\langle (\Delta n)^2 \rangle < \langle n \rangle$, decorre $g_2(0)<1$, efeito conhecido como "antibunching", em oposição ao que se constata para a luz térmica. Trata-se de um fenômeno eminentemente quântico, cuja derivação foge ao âmbito de uma descrição clássica do campo, observado experimentalmente através da fluorescência ressonante em átomos de dois níveis. A concordância entre os resultados obtidos e as predições teóricas consiste em subsídio para a teoria quântica da luz.

O desenvolvimento da expressão (4.78), segundo o operador de Heisenberg em (4.24) e os resultados de Wang e Uhlenbeck em (4.37 e 38), corresponde à relação

$$g^{(2)}(t,t') = \frac{1}{N}\Big\{\langle b^+(t)\,b^+(t')\,b(t')\,b(t)\rangle + \overline{\tilde{w}^*(t)\,\tilde{w}^*(t')\,\tilde{w}(t')\,\tilde{w}(t)}$$

$$+ 2Re\Big[\langle b^+(t)\,b(t')\rangle\overline{\tilde{w}(t')\,\tilde{w}(t)} + \langle b^+(t')\,b(t')\rangle\overline{w^*(t')\,w(t)}\Big] \qquad (4.80)$$

$$+ \Big[\langle b^+(t')\,b(t')\rangle\overline{\tilde{w}^*(t)\,\tilde{w}(t)} + t\rightleftarrows t'\Big]\Big\},$$

onde para o fator N de normalização obtém-se

$$N = \Big[\Big(|\,\tilde{u}(t)\,|^2 + |\,\tilde{v}(t)\,|^2 + 2Re\big(\tilde{u}^*(t)\,\tilde{v}(t)\big)\Big)|\,\alpha|^2 + |\,\tilde{v}(t)\,|^2\Big]\Big[t\rightleftarrows t'\Big]. \qquad (4.81)$$

As expressões (4.80 e 81) consideram $b(t)=\tilde{u}(t)A+\tilde{v}(t)A^+$, tal que $a_H(t)=b(t)+\tilde{w}(t)$. No apêndice 4 encontra-se detalhado o procedimento para a obtenção dos termos em segunda e quarta ordem envolvendo a flutuação $w(t)$.

Quando desprezamos o processo dissipação/flutuação, considerando $\lambda=0$, a correlação $g^{(2)}(t,t')$ reduz-se ao primeiro termo à direita em (4.80),

$$g^{(2)}(t,t') = \frac{1}{N}\langle b^+(t)\,b^+(t')\,b(t')\,b(t)\rangle, \qquad (4.82)$$

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO

onde

$$
\begin{aligned}
\langle b^{+}(t)\, b^{+}(t')\, b(t')\, b(t)\rangle &= |\tilde{v}(t)|^{2}\left(|\tilde{u}(t')|^{2} + |\tilde{v}(t')|^{2}\right) \\
&+ \Big[|\tilde{u}(t')|^{2}\left(3|\tilde{v}(t)|^{2} + 2Re\left(\tilde{u}^{*}(t)\,\tilde{v}(t)\right)\right) + |\tilde{v}(t)|^{2}\left(4|\tilde{v}(t')|^{2}\right. \\
&+ \left. 6Re\left(\tilde{u}(t')\,\tilde{v}^{*}(t')\right)\right) + |\tilde{v}(t')|^{2}\left(|\tilde{u}(t)|^{2} + 4Re\left(\tilde{u}(t)\,\tilde{v}^{*}(t)\right)\right) \\
&+ 4Re\left(\tilde{u}^{*}(t)\,\tilde{u}(t')\,\tilde{v}(t)\,\tilde{v}^{*}(t')\right)\Big]|\alpha|^{2} + \Big[\left(|\tilde{u}(t)|^{2} + |\tilde{v}(t)|^{2}\right) \times \\
&\times \left(|\tilde{u}(t')|^{2} + |\tilde{v}(t')|^{2} + 2Re\left(\tilde{u}^{*}(t')\,\tilde{v}(t')\right)\right) + 2\left(|\tilde{u}(t')|^{2}\right. \\
&+ \left.|\tilde{v}(t')|^{2}\right) Re\left(\tilde{u}^{*}(t)\,\tilde{v}(t)\right) + 2Re\Big(\tilde{u}^{*}(t)\,\tilde{u}^{*}(t')\,\tilde{v}(t)\,\tilde{v}(t') \\
&+ \tilde{u}^{*}(t)\,\tilde{u}(t')\,\tilde{v}(t)\,\tilde{v}^{*}(t')\Big)\Big]|\alpha|^{4}\,,
\end{aligned}
\tag{4.83}
$$

e N descrito segundo (4.81) à exceção dos termos de flutuação w(t). A análise das correlações $g^{(2)}(t,t')$ estarão restritas, neste trabalho, ao domínio ressonante.

O comportamento da correlação em (4.82) encontra-se na figura 25, onde fixamos $\kappa=0.025\omega_0$ e $t=0.1/\omega_0$. Pode-se constatar que elevando-se o valor do deslocamento α, salienta-se simultaneamente o comportamento coerente do campo na cavidade. Outras formas de reestabelecer este comportamento consiste em fixar menores valores para t ou elevar a temperatura do banho. As próximas figuras centram-se exatamente na exposição da dependência da correlação $g^{(2)}(t,t+\tau)$ com os parâmetros d, t e α.

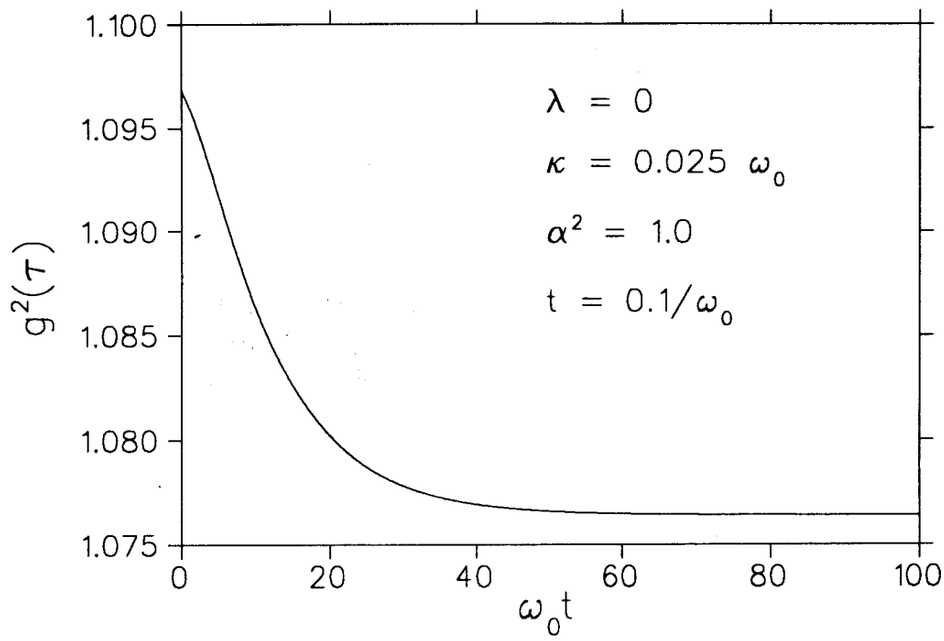


Figura 25: *$g^{(2)}(t,t+\tau)$ versus $\omega_0\tau$ quando, fixos $\kappa=0.025\omega_0$, $\alpha^2=1.0$ e $t=0.1/\omega_0$, considera-se $\lambda=0$.*

Se, simultaneamente à dissipação desprezamos também o bombeamento externo, restando o hamiltoniano do campo livre, o resultado (4.82) responde agora pelo valor $g^{(2)}(t,t')=1$, para quaisquer α e t.

A figura 26 considera o comportamento $g^{(2)}(t,t+\tau)$, segundo a expressão genérica em (4.80), quando $d=\lambda/2$, 5λ e 500λ, o que indicam, respectivamente, as linhas cheia, pontilhada e tracejada. Fixamos $\lambda=0.11\omega_0$, $\kappa=0.025\omega_0$, $\alpha^2=1.0$ e $t=0.1/\omega_0$.

Desprezando as oscilações e observando os valores médios relativos a cada curva, conclui-se que o aumento da temperatura do banho contribui para tornar mais coerente a radiação na cavidade.

Quando $d=5\lambda$, constata-se maiores amplitudes das oscilações acarretando efeitos de "antibunching", ausentes tanto para valores menores quanto maiores da temperatura, o que constitui-se num resultado inesperado. Contudo, sob o aspecto experimental, mediante a elevada freqüência ω_0, tipicamente na ordem de 10^{14} Hz, tais efeitos são imensuráveis.

Através da figura 27, onde os valores $t=0.1/\omega_0$, $1/\omega_0$ e $10/\omega_0$ compreendem as linhas tracejada, cheia e pontilhada, respectivamente, verifica-se a contínua proeminência do comportamento coerente quando fixamos menores valores para t. Novamente, convém que se observe os valores médios relativos às oscilações para cada curva. De fato, da relação (4.74), obtém-se o resultado $g^{(2)}(t,t+\tau)=1$ para $t=0$. A figura 27 fixa $\lambda=0.11\omega_0$, $\kappa=0.025\omega_0$, $\alpha^2=1.0$ e $d=5\lambda$.

Por fim, a análise da influência do deslocamento α sobre a correlação $g^{(2)}(t,t+\tau)$ está presente junto a figura 28, onde, fixando $\lambda=0.11\omega_0$, $\kappa=0.025\omega_0$, $d=5\lambda$ e $t=0.1/\omega_0$, consideramos $\alpha^2=1.0$, 10.0 e 50.0, linhas pontilhada, tracejada e cheia, respectivamente. À medida em que se considera maiores valores para o deslocamento α, observa-se uma nítida confluência das curvas ao comportamento exclusivo de luz coerente.

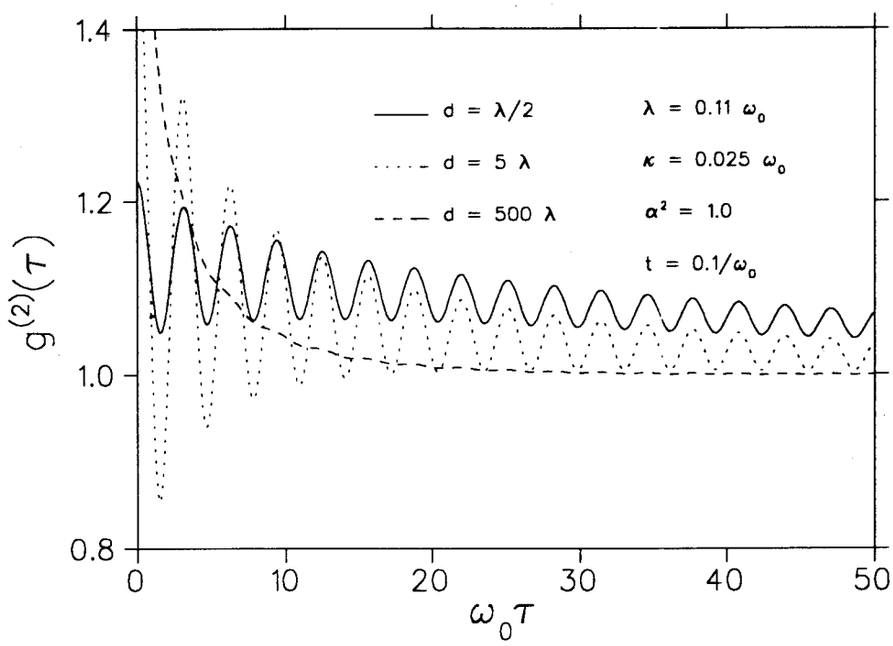


Figura 26: *Efeitos da temperatura sobre a correlação* $g^{(2)}(t,t+\tau)$ *versus* $\omega_0\tau$.

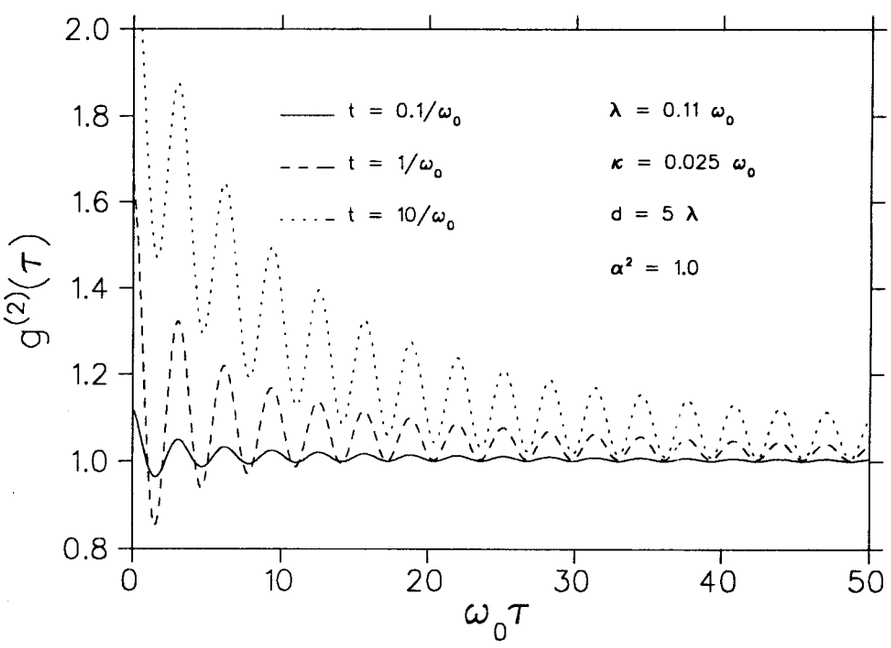


Figura 27: *Efeitos do tempo t sobre a correlação* $g^{(2)}(t,t+\tau)$ *versus* $\omega_0\tau$.

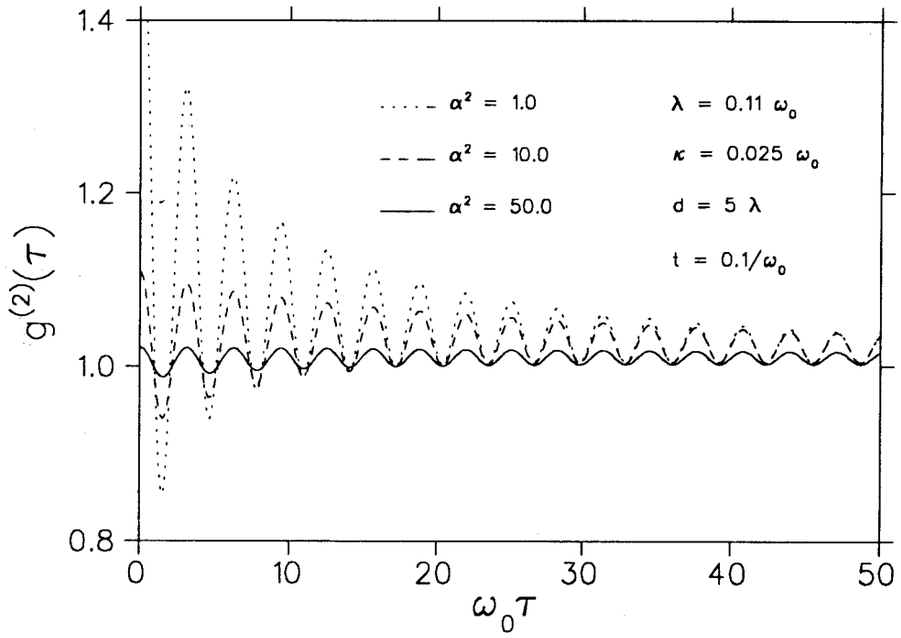


Figura 28: *Efeitos de deslocamento* α *sobre a correlação* α *sobre a correlação* $g^{(2)}(t,t+\tau)$ *versus* $\omega_0\tau$.

4.7- CONCLUSÕES

Primeiramente, retomando o hamiltoniano quadrático original, em (3.19), deve-se observar que as menores flutuações nas quadraturas (máximo squeezing) apresentadas pelos estados naquele contexto (para determinado conjunto de parâmetros), são alteradas quando da inserção da dissipação segundo (4.9). Conforme podemos verificar mediante a figura 29, o acréscimo da constante de fricção tende a reduzir os

efeitos de squeezing. Esta figura, compreendendo o comportamento $\langle \overline{(\Delta X_{1,\mathcal{H}})^2} \rangle$ versus $\omega_0 t$, fixa ω=0.9ω_0 (η=0.5), com κ=0.025ω_0 e d=λ/2; as linhas pontilhada e cheia indicam, respectivamente, λ=0.15ω_0 (figura 19 a) e λ=0.

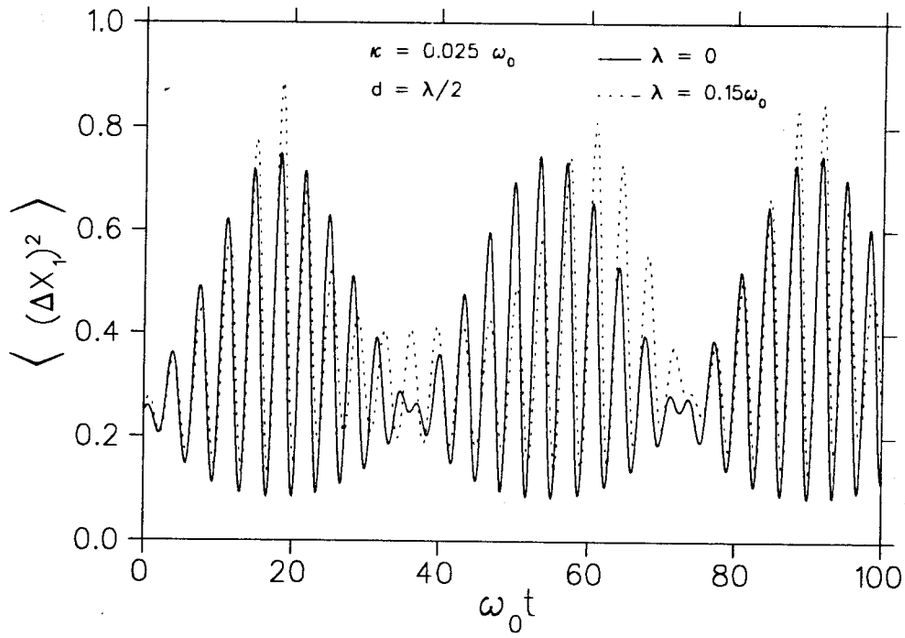


Figura 29: *Comportamentos* $\langle \overline{(\Delta X_{1,\mathcal{H}})^2} \rangle$ *vs.* $\omega_0 t$, *onde as linhas pontillhada e cheia indicam, respectivamente,* λ=0.15ω_0 *e* λ=0. *Ambas as curvas fixam os mesmos parâmetros.*

Considerando, quando de um processo dissipativo, menores valores para λ, segue-se que as menores flutuações $\langle \overline{(\Delta X_{1,\mathcal{H}})^2} \rangle$ tendem àquelas quando λ=0. Contudo, desde que o problema tratado limita-se ao regime sub-amortecido, a dissipação não terá efeitos mais proeminentes sobre o squeezing.

Quanto à figura 30, expõe-se o comportamento da energia média onde, evidentemente, o processo dissipativo deve acarretar valores tanto menores para esta quantidade quanto maior a constante de

fricção. Considera-se $\omega=0.9\omega_0$ ($\eta=0.5$), com $\kappa=0.025\omega_0$, $d=\lambda/2$ e $\alpha^2=1.0$. As linhas pontilhada e cheia denotam, respectivamente, $\lambda=0.15\omega_0$ (figura 15 b) e $\lambda=0$.

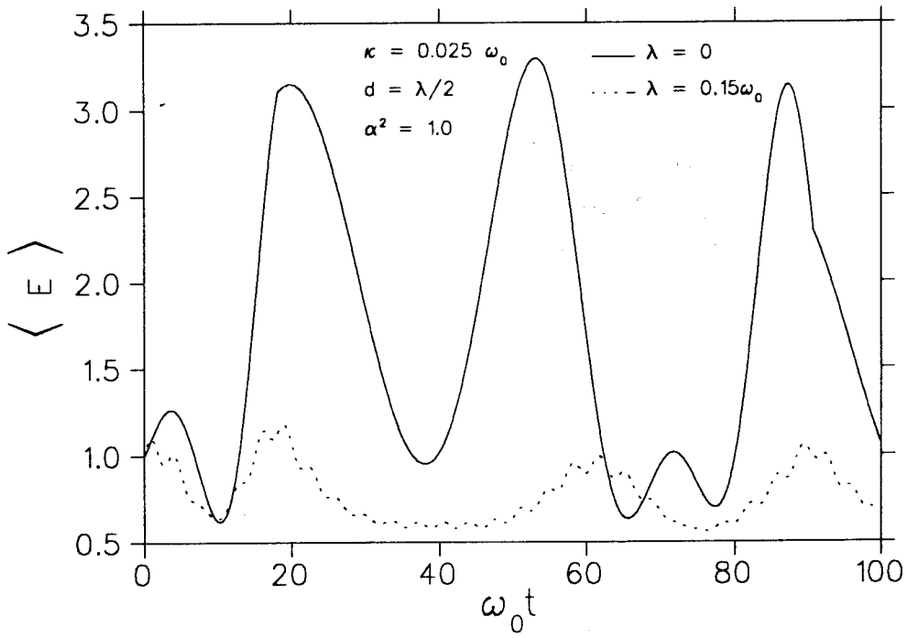


Figura 30: *Comportamentos* $\langle \bar{E} \rangle$ *vs.* $\omega_0 t$, *onde as linhas pontilhada e cheia indicam, respectivamente,* $\lambda=0.15\omega_0$ *e* $\lambda=0$. *Ambas as curvas fixam os mesmos parâmetros.*

Por fim, a estabelecer as diferenças entre o problema tratado junto ao capítulo 3 e a inserção do processo dissipativo, as correlações temporais nas quadraturas são abordadas pela figura 31, onde se expõem o comportamento $C_{X1(t)X1(t')}$ vs. $\omega_0\tau$. Novamente fixamos $\omega=0.9\omega_0$ ($\eta=0.5$), com $\kappa=0.025\omega_0$ e $d=\lambda/2$. As linhas pontilhada e cheia indicam, respectivamente, $\lambda=0.15\omega_0$ e $\lambda=0$. Observa-se, então, o comportamento periódico da autocorrelação quando $\lambda=0$, ao passo que a dissipação faz amortecer esta quantidade mesmo quando $\eta\geq1$. O mesmo se

observa para as correlações cruzadas.

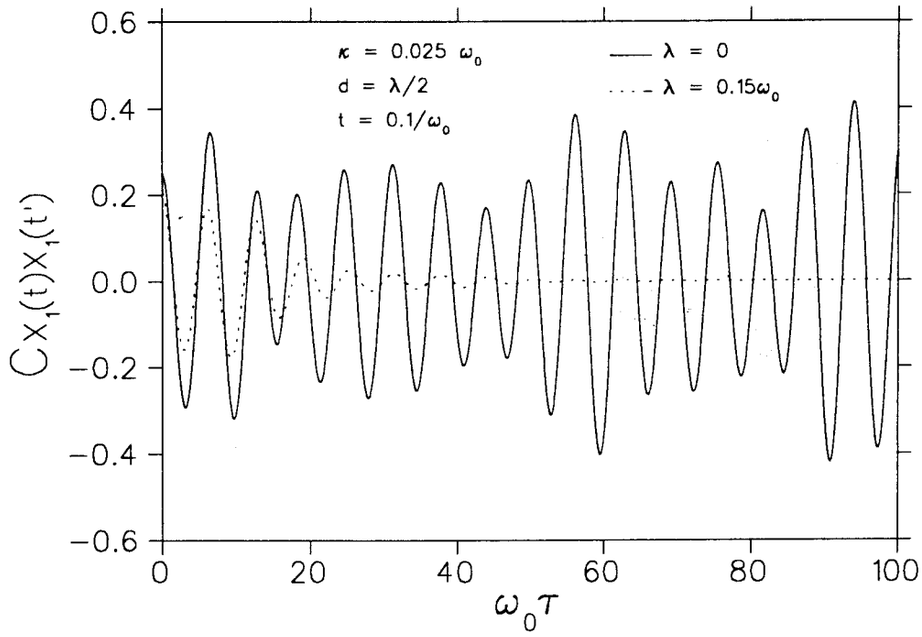


Figura 31: *Comportamentos* $C_{X1(t)X1(t')}$ *vs.* $\omega_0\tau$, *onde as linhas pontilhada e cheia indicam, respectivamente,* $\lambda=0.15\omega_0$ *e* $\lambda=0$. *Ambas as curvas fixam os mesmos parâmetros.*

Quando do capítulo 3, salientamos o alcance do método desenvolvido para a abordagem do hamiltoniano quadrático DT. O mesmo ocorre em se tratando da consideração do processo dissipação/flutuação junto àquele hamiltoniano. Consideradas as aproximações $\lambda/2\omega_0 \ll 1$ e $\lambda\kappa \ll \omega_0\omega$, a resolução das equações diferenciais características implica na solução da equação de Schrödinger e conseqüente delimitação dos estados squeezed associados. A análise dos comportamentos da energia média e das correlações nas quadraturas, procede no sentido de caracterizar o efeito dissipativo mediante o bombeamento externo, pelo

USC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO

que abordamos a competição dissipação/amplificação presente no sistema. Por fim, através das correlações de segunda ordem, deduz-se que o campo na cavidade, sujeito a esta competição, exibe comportamentos de luz térmica e coerente, prescindindo dos efeitos de antibunching.

APÊNDICE 1

Retomando o par de sistemas correlacionados, ao qual se associa o estado conjunto λ, J. Bell considera que, quando separados a partir da fonte, os sistemas possam evoluir de forma inerentemente estocástica. Então, dados λ, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (orientações dos analisadores) podemos definir probabilidades associadas a qualquer particular resultado junto aos aparatos medidores. Podemos permitir que ambas as probabilidades possam individualmente depender dos parâmetros locais associados aos aparatos, $\vec{a}$ ou $\vec{b}$ e, obviamente λ, mas assumimos que sejam independentes entre si. Assim, o valor medido para dada quantidade sobre um dos sistemas não é afetado por causalidade por qualquer que seja a medida efetuada sobre o outro sistema. Contudo, esta assertiva não impede que obtenhamos informação sobre o sistema 2 por meio de um exame prévio acerca do sistema 1. O estado λ contém informação comum a ambos os sistemas, de pronto que a medida sobre um deles presumivelmente revela algum aspecto sobre o outro.

Os resultados relativos a cada medida apresentam agora as seguintes possibilidades, conforme assegurado por Bell,

$$A_a(\lambda) = \begin{cases} +1, \textit{ partícula } 1 \textit{ com } '\textit{spin-up}'. \\ -1, \textit{ partícula } 1 \textit{ com } '\textit{spin-down}'. \\ \ \ 0, \textit{ partícula } 1 \textit{ não é detectada}. \end{cases} \qquad (A.1.1)$$

Idem para os resultados $B_b(\lambda)$ relativos à partícula 2. Os resultados

nulos associados às medidas compreendem a possibilidade real de que partículas observadas emparelham-se com outras que, por alguma razão, não são de todo observadas, quer como "spin-up" ou "down". Para maiores detalhes, ver [44].

Para um dado estado λ do sistema composto emitido, denotamos os valores esperados para as quantidades $A_a(\lambda)$ e $B_b(\lambda)$, pelas médias $\bar{A}_a(\lambda)$ e $\bar{B}_b(\lambda)$, as quais satisfazem

$$|\bar{A}_a(\lambda)| \leq 1 \quad , \quad |\bar{B}_b(\lambda)| \leq 1 \ . \tag{A.1.2}$$

Segundo a definição geral de localidade, pode-se escrever para o valor esperado do produto $A_a.B_b$,

$$E(a,b) = \int_\Lambda \bar{A}_a(\lambda)\ \bar{B}_b(\lambda)\ d\rho \ , \tag{A.1.3}$$

relação esta que, incluindo no emsenble somente as partículas que apresentam resultados $A_a(\lambda)$ ou $B_b(\lambda)$ iguais a + ou -1, envolve uma distribuição ρ e um domínio de integração Λ independentes de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Consideremos agora a expressão

$$E(a,b) - (a,b') = \int_\Lambda \left[\bar{A}_a(\lambda)\bar{B}_b - \bar{A}_a(\lambda)\bar{B}_{b'}(\lambda) \right] d\rho \ , \tag{A.1.4}$$

onde a' e b' correspondem a posições alternativas para os analisadores. Reescrevendo (A.1.4), temos

$$E(a,b) - E(a,b') = \int_\Lambda \bar{A}_a(\lambda)\bar{B}_b(\lambda)\left[1 \pm \bar{A}'_a(\lambda)\bar{B}'_b(\lambda)\right] d\rho$$
$$- \int_\Lambda \bar{B}'_b(\lambda)\left[1 \pm \bar{A}'_a(\lambda)\bar{B}_b(\lambda)\right] d\rho \ . \qquad \text{(A.1.5)}$$

Mediante as desigualdades em (A.1.2), decorre

$$|E(a,b) - E(a,b')| \leq \int_\Lambda \left[1 \pm \bar{A}'_a(\lambda)\bar{B}'_b(\lambda)\right] d\rho + \int_\Lambda \left[1 \pm \bar{A}'_a(\lambda)\bar{B}_b(\lambda)\right] d\rho \ ,$$

ou, então

$$|E(a,b) - E(a,b')| \leq \pm \left[E(a',b') + E(a',b') + E(a',b)\right] + 2\int_\Lambda d\rho \ .$$

Conseqüentemente,

$$-2 \leq E(a,b) - E(a,b') + E(a',b) + E(a',b') \leq 2 \ . \qquad \text{(A.1.6)}$$

Conforme já salientado, a redefinição dos parâmetros a, a', b e b' junto a expressão central em (A.1.6), faz permutar o sinal negativo para qualquer dos quatro termos que a compõem.

Para completar a prova do teorema, é suficiente mostrar, ao menos em uma situação, que as predições da mecânica quântica contradizem a desigualdade (A.1.6). Segundo o tratamento da mecânica quântica para o par de partículas com spin -1/2, quando consideradas as imperfeições dos analisadores, detectores e preparação dos estados, decorre

$$\left[E(\hat{a},\hat{b})\right]_{QM} = C\hat{a}.\hat{b}\ , \qquad \text{(A.1.7)}$$

onde o coeficiente C é limitado pelo valor 1 para sistemas ideais, sendo igual a +1 ou -1 somente para o caso idealizado. Suponha que as orientações $\hat{a}$, $\hat{a}'$, $\hat{b}$ e $\hat{b}'$ constituam vetores coplanares conforme mostra a figura abaixo, onde $\phi=\pi/4$.

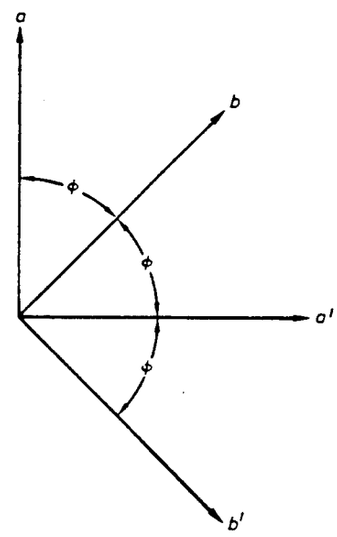


Figura A.1: *Orientações para as direções $\hat{a}$, $\hat{a}'$, $\hat{b}$ e $\hat{b}'$ entre os analisadores.*

Segundo o resultado

$$\left[E(\hat{a},\hat{b}) - E(\hat{a},\hat{b}') + E(\hat{a}',\hat{b}) + E(\hat{a}',\hat{b}')\right]_{QM} = 2\sqrt{2}\ C\ , \qquad \text{(A.1.8)}$$

há um amplo domínio de valores para o coeficiente C com relação aos quais a predição da desigualdade (A.1.6) está em desacordo com o resultado (A.1.7), o que completa a prova do teorema.

APÊNDICE 2

Cálculo do Tempo de Recorrência.

A partir da amplitude de decoerência

$$Z(t) = \prod_{k=1}^{L} \left(\cos(2g_k t) + i\lambda(\beta E)\, sen(2g_k t)\right)^{n_k} , \qquad (A.2.1)$$

obtém-se

$$\ln Z(t) = \sum_{k=1}^{L} n_k \ln\left(\cos(2g_k t) + i\lambda\, sen(2g_k t)\right) . \qquad (A.2.2)$$

Denominando

$$W = \cos(2g_k t) + i\lambda\, sen(2g_k t) = |W|\, e^{i\phi} , \qquad (A.2.3)$$

onde

$$|W| = \left|\cos(2g_k t)\right| \left(1 + \lambda^2 tg^2(2g_k t)\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

e

$$\phi = arctg\left(\lambda\, tg(2g_k t)\right) ,$$

pode-se escrever a expressão (A.2.2) na forma

$$\ln Z(t) = \sum_{k=1}^{L} n_k \left\{ \ln\left|\cos(2g_k t)\right| + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \lambda^2 tg(2g_k t)\right) \right.$$
$$\left. + i\, arctg\left(\lambda tg(2g_k t)\right) \right\}. \tag{A.2.4}$$

Quando $2g_k t \ll 1$, a expansão dos termos que participam da expressão acima responde pela aproximação

$$\ln Z(t) \cong \sum_{k=1}^{L} n_k \left\{ -\frac{1}{2}(1 - \lambda)(2g_k t)^2 + i\lambda 2g_k t \right\}, \tag{A.2.5}$$

mediante a qual pode-se escrever

$$Z(t) = \exp\left[-2\left(1 - \lambda^2 (\beta E)\right) t^2 \sum_{k=1}^{L} n_k g_k^2 + i2\lambda t \sum_{k=1}^{L} n_k g_k \right]. \tag{A.2.6}$$

Sob a consideração da lei de potência em (2.43), verifica-se a relação

$$\sum_{k=1}^{L} n_k g_k^2 = n_1 g_1^2 + \sum_{k=2}^{L} n_k g_k^2 = n_1 g_1^2 + n_1 g_1^2 (s^3 - 1) \sum_{k=2}^{L} \frac{s^{3(k-2)}}{s^{2\mu(k-1)}}$$
$$= n_1 g_1^2 \left[1 + \frac{(s^3 - 1)}{s^{2k}} \frac{s^{(3-2k)(L-1)} - 1}{s^{(3-2k)} - 1} \right] \tag{A.2.7}$$

onde utiliza-se o resultado $\sum_{k=2}^{L} x^k = (x^{L-1} - x^2)/(x-1)$.

Considerando-se procedimento análogo à obtenção de (A.2.7), decorre que

USC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E

$$\sum_{k=1}^{L} n_k g_k = n_1 g_1 \left[1 + \frac{(s^3 - 1)}{s^3} \frac{s^{(3-\mu)L} - s^{(3-\mu)}}{s^{(3-\mu)} - 1} \right]. \qquad \text{(A.2.8)}$$

O desenvolvimento da expressão (A.2.6), através dos resultados em (A.2.7) e (A.2.8), oferece finalmente

$$Z(t) = \exp \left\{ -2\eta_1 \left(1 - \lambda^2 (\beta E)\right) (g_1 t)^2 \left[1 + \frac{(s^3 - 1)}{s^{2\mu}} \frac{1 - s^{(3-\mu)(L-1)}}{1 - s^{(3-2\mu)}} \right] \right.$$

$$\left. + i 2\eta_1 \lambda (\beta E) (g_1 t) \left[1 + \frac{(s^3 - 1)}{s^3} \frac{s^{(3-\mu)L} - s^{(3-\mu)}}{s^{(3-\mu)} - 1} \right] \right\}.$$

Considerando a forma gaussiana

$$Z(t) = e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} e^{i\Omega t}, \qquad \text{(A.2.10)}$$

decorrem os parâmetros

$$\sigma_\mu{}^2 = \frac{1}{4\eta_1 g_1{}^2 (1 - \lambda^2)} \frac{1}{\left[1 + \frac{(s^3 - 1)}{s^{2k}} \frac{\left(s^{3(L-1)}\right)^{1-2\mu/3} - 1}{(s^3)^{1-2\mu/3} - 1} \right]},$$

e

$$\Omega_{\mu} = 2\lambda\eta_1 g_1\left[1 + \frac{(s^3 - 1)}{s^3}\,\frac{s^{(3-\mu)L} - s^{(3-\mu)}}{s^{(3-\mu)} - 1}\right].$$

Através da relação (2.42), os parâmetros σ_λ e Ω_λ, descrevem-se nas formas compreendidas, respectivamente em (2.48) e (2.49).

APÊNDICE 3

Tendo-se obtido a constante de movimento

$$\cosh\left(2r(t)\right) + \eta\cos\left(\phi(t) - \zeta(t)\right)senh\left(2r(t)\right) = K\,, \qquad \text{(A.3.1)}$$

as soluções das equações diferenciais acopladas, segundo os vínculos impostos pelo ítem c, seguem-se do isolamento da função $\cos(\phi(t)-\zeta(t))$ em (A.3.1), do que decorre

$$sen\left(\phi(t) - \zeta(t)\right) = \pm\left[1 - \frac{\left(K - \cosh(2r(t))\right)^2}{\eta\, senh(2r(t))}\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad \text{(A.3.2)}$$

Da substituição de (A.3.2) em (3.83) , obtém-se a expressão

$$\int dr \frac{\eta\, senh(2r)}{\left[\eta^2 senh^2(2r) - \left(K - \cosh(2r)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \mp 2\kappa t + K'\,, \qquad \text{(A.3.3)}$$

tal que, considerando a nova variável R=cosh(2r), segue-se finalmente que

$$|\eta| \int \frac{dR}{\sqrt{\mathfrak{R}}} = \mp 4\kappa t + K' , \qquad (A.3.4)$$

onde $\mathfrak{R}=cR^2+bR+a$, com $a=-\eta^2-K^2$, $b=2K$ e $c=\eta^2-1$.

A princípio, a equação integral (A.3.4), admite quatro possíveis soluções[88], relativas aos valores designados pelas constantes de movimento K, de acoplamento κ, e pela constante C decorrente da condição estabelecida em (3.78). Contudo, os vínculos estabelecidos no ítem c, reduzem para duas as soluções possíveis, basicamente quando $\eta<1$ ou >1, às quais acrescenta-se uma terceira solução como caso limite das anteriores, quando $\eta=1$. Definindo a quantidade $\Delta=4ac-b^2$, passamos às soluções:

Caso $\eta<1$ -

Para $\eta<1$, a solução da equação (A.3.4), apresenta-se na forma

$$-\frac{|\eta|}{\sqrt{-c}} arcsen \frac{2cR+b}{\sqrt{-\Delta}} = \mp 4\kappa t + K , \qquad (A.3.5)$$

cujo desenvolvimento satisfaz a relação

$$\cosh(2r) = \frac{K}{1-\eta^2}\left[1 \mp \frac{|\eta|\left[K^2-(1-\eta^2)\right]^{\frac{1}{2}}}{K} sen\left(\frac{4\kappa\sqrt{1-\eta^2}}{|\eta|} t + K'\right)\right]. \qquad (A.3.6)$$

Fixando r=0, quando t=0, obtemos K=1 para a constante de movimento e, via (A.3.6), $K'=\pi/2$, do que obtém-se a relação

simplificada

$$\cosh(2r) = \frac{1}{1-\eta^2}\left[1 - \eta^2\cos\left(\frac{4\kappa\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}t\right)\right]. \qquad (A.3.7)$$

O desenvolvimento da função cosh(2r), segundo (A.3.7), leva ao resultado

$$senhr = \pm\frac{\eta\, sen\left(\frac{2\kappa\sqrt{1-\eta^2}}{|\eta|}t\right)}{(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad (A.3.8)$$

enquanto que, a substituição de cosh(2r), eq.(A.3.7), junto a

$$\cos(\phi - \zeta) = \pm\frac{1-\cosh(2r)}{\eta\sqrt{\cosh^2(2r)-1}}, \qquad (A.3.9)$$

oferece, finalmente, a solução

$$\cos(\phi - \zeta) = \pm\frac{sen\left(\frac{2\kappa\sqrt{1-\eta^2}}{|\eta|}t\right)}{\left[1-\eta^2\cos^2\left(\frac{2\kappa\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}t\right)\right]^{\frac{1}{2}}}. \qquad (A.3.10)$$

Caso $\eta>1$ -

Quando $\eta>1$, tem-se para a solução da equação (A.3.4), a relação

$$\frac{|\eta|}{\sqrt{c}}\ln\left(2\sqrt{c\mathfrak{R}} + 2c\mathfrak{R} + b\right) = \mp 4\kappa t + K' , \qquad (A.3.11)$$

da qual obtemos

$$\cosh(2r) = \frac{1}{4(\eta^2 - 1)}\left[e^{\mp\varphi(t)} + 4\eta^2(\eta^2 - 1 + K^2)e^{\pm\varphi(t)} - 4K\right], \qquad (A.3.12)$$

onde $\varphi(t) = \mp[4\kappa(\eta^2-1)^{1/2}t + K']/|\eta|$. Considerando $r(0)=0$, tal que $K=1$, define-se a constante K' através da relação $e^{\mp K'}=2\eta^2$, do que resulta

$$\cosh(2r) = \frac{1}{\eta^2 - 1}\left[\eta^2\cosh\left(\frac{4\kappa\sqrt{\eta^2 - 1}}{\eta}t\right) - 1\right]. \qquad (A.3.13)$$

De forma similar ao caso $\eta<1$, através da expressão (A.3.12), obtém-se as soluções

$$senh\,r = \pm\frac{\eta\, senh\left(\frac{2\kappa\sqrt{\eta^2 - 1}}{|\eta|}t\right)}{(\eta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}, \qquad (A.3.14)$$

$$\cos(\phi - \zeta) = \mp\frac{senh\left(\frac{2\kappa\sqrt{\eta^2 - 1}}{|\eta|}t\right)}{\left[\eta^2\cosh^2\left(\frac{2\kappa\sqrt{\eta^2 - 1}}{\eta}t\right) - 1\right]}. \qquad (A.3.15)$$

Considerando-se o limite $\eta\to 1$, diante dos casos $\eta<1$ ou >1,

obtém-se imediatamente a solução relativa ao limiar entre as soluções periódica (caso $\eta<1$) e exponencial (caso $\eta>1$), conforme apresentadas.

Em se tratando do parâmetro DT $\beta(t)=\int_0^t\Omega(t')dt'$, substituindo a relação (A.3.9) em (3.35b), obtém-se para $\Omega(t)$ a forma

$$\Omega = \omega_0 + \frac{2\kappa}{\eta}\frac{K - \cosh(2r)}{1 + \cosh(2r)} , \qquad (A.3.16)$$

tal que

$$\beta = \omega_0 t + \frac{2\kappa}{\eta}\int_0^t \frac{K - \cosh(2r)}{1 + \cosh(2r)} dt . \qquad (A.3.17)$$

Através do parâmetro $\Lambda(r(t)) = (K-\cosh(2r))/(1+\cosh(2r))$, procede-se à transformação

$$\int \Lambda(r(t))dr = \int \frac{\Lambda(r)}{\dot{r}} dr , \qquad (A.3.18)$$

do que resulta

$$\beta = \omega_0 t + \frac{2\kappa}{\eta}\int \frac{K - \cosh(2r)}{1 + \cosh(2r)} \frac{1}{(-2K sen(\phi - \zeta))} dr . \qquad (A.3.19)$$

Substituindo (A.3.2) em (A.3.18), e definindo, à semelhança da resolução das equações diferenciais acopladas, u=cosh(2r), decorre

$$\beta = \omega_0 t + \frac{2\kappa}{\eta}\left\{\int \frac{du}{\left[(\eta^2 - 1)\,u^2 + 2Ku - (\eta^2 + K^2)\right]^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$\left. - (K + 1)\int \frac{du}{(1 + u)\left[(\eta^2 - 1)\,u^{-2} + 2Ku - (\eta^2 + K^2)\right]^{\frac{1}{2}}}\right\}. \qquad \text{(A.3.20)}$$

A primeira das integrais na expressão acima apresenta-se similar àquela em (A.3.4). Quanto à segunda das integrais em (A.3.20), considerando-se, em seu âmbito, a relação 1+u=v, obtemos

$$\beta = \omega_0 t + \frac{2\kappa}{\eta}\left\{\int \frac{du}{\left[(\eta^2 - 1)\,u^2 + 2Ku - (\eta^2 + K^2)\right]^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$\left. - (K + 1)\int \frac{du}{v\left[(\eta^2 - 1)\,v^2 - 2\,(\eta^2 - 1 - K)\,v - (K + 1)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right\}. \qquad \text{(A.3.21)}$$

A integral em **dv** pode ser escrita na forma $\int dv/(v\sqrt{V})^{-1}$, onde V compreende a forma quadrática em v apresentada em (A.3.21), sendo passível de resolução analítica [88]. Denominando U a forma quadrática em u, presente no denominador da primeira integral, passamos às soluções:

Caso η<1 -

Para η<1, as soluções de ambas as integrais em (A.3.21), correspondem às expressões

$$\int \frac{du}{\sqrt{U}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\, arcsen \frac{-2(1-\eta^2)\,u + 2K}{2|\eta|\sqrt{K^2-(1-\eta^2)}}\,, \qquad (A.3.22)$$

e

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{V}} = \frac{1}{|K+1|}\, arcsen \frac{-2(K+1)^2 + 2(1-\eta^2+K)\,v}{2|\eta|\, v\sqrt{K^2-(1-\eta^2)}}\,. \qquad (A.3.23)$$

O desenvolvimento da expressão (A.3.21), através das integrais (A.3.22 e 23), corresponde, para K=1, ao resultado

$$\beta(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\, sgn(\eta) \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\, arcsen\left(\frac{(1-\eta^2)\,u - 1}{\eta^2}\right) - arcsen\left(\frac{-4 + (2-\eta^2)(u+1)}{(u+1)}\right) + \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} - 1\right)\right\}. \qquad (A.3.24)$$

onde sgn diz respeito à função sinal.

Caso η>1 -

As soluções das integrais em (A.3.21), quando η>1, são

$$\int \frac{du}{\sqrt{U}} = \frac{1}{\sqrt{\eta^2-1}} \ln\left(2\sqrt{(\eta^2-1)\,U} + 2(\eta^2-1)\,u + 2K\right), \qquad (A.3.25)$$

e

USC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{V}} = \frac{1}{|K+1|} arcsen\left(\frac{-2(K+1)^2 - 2(\eta^2 - 1 - K)v}{2\eta^2 v}\right). \quad (A.3.26)$$

Para K=1, a expressão (A.3.21), mediante as integrais (A.3.25 e 26), leva ao resultado

$$\beta(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2} sgn(\eta) \left\{ \frac{1}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \ln\left(\frac{2\sqrt{(\eta^2 - 1)U} + 2(\eta^2 - 1)u + 2}{2\eta^2}\right) \right. \quad (A.3.27)$$

$$\left. + arcsen\left(\frac{4 + (\eta^2 - 2)(u+1)}{(u+1)\eta^2}\right) - \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Com relação ao problema dissipativo apresentado no capítulo 4, segundo procedimento análogo verifica-se que as soluções em (A.3.24 e 27) mantêm-se inalteradas a menos da introdução, em ambos os casos do termo $(\lambda\kappa/\omega_0)\left(\cos(2\omega t)/2\omega\right)$, desprezível em face da aproximação então utilizada $\lambda\kappa << \omega_0\omega$.

APÊNDICE 4

Para o desenvolvimento das expressões relativas às flutuações do campo, w(t), através de (4.23c), consideramos

$$w'(t) = \cosh\left(r(t)\right)\theta(t) + e^{i\phi(t)} senh\left(r(t)\right)\theta^*(t) ,$$

com

$$\theta(t) = -i e^{-i\beta(t)} \int_0^t \tilde{f}_3(t') e^{i\beta(t')} dt' ,$$

e

$$\tilde{f}_3(t) = \cosh\left(r(t)\right) f'_3(t) + e^{i\phi(t)} senh\left(r(t)\right) f'^*_3(t) .$$

Lembrando que $f'_3(t)=g_1 f_3(t)-g_2 f_3^*(t)$, onde se insere a força estocástica com $f_3(t)=e^{\lambda t/2}F(t)$, verifica-se a expressão

$$w'(t) = \int_0^t \left(\gamma_1(t,t')F(t') + \gamma_2(t,t')F^*(t')\right)dt' , \qquad \text{(A.4.1)}$$

onde

$$\gamma_1(t,t') = \Big(\cosh\big(r(t)\big)\Lambda_1(t')\, e^{-i[\beta(t)-\beta(t')]}$$

$$- \operatorname{senh}\big(r(t)\big)\Lambda_2^*(t')\, e^{i[\phi(t)+\beta(t)-\beta(t')]}\Big) e^{-i\frac{\pi}{2}}\, e^{\lambda\frac{t'}{2}}$$

e

$$\gamma_2(t,t') = \Big(\cosh\big(r(t)\big)\Lambda_2(t')\, e^{-i[\beta(t)-\beta(t')]}$$

$$- \operatorname{senh}\big(r(t)\big)\Lambda_1^*(t')\, e^{i[\phi(t)+\beta(t)-\beta(t')]}\Big) e^{-i\frac{\pi}{2}}\, e^{\lambda\frac{t'}{2}}$$

Mediante as expressões (A.4.1) e (4.23c), decorrem, no âmbito de um processo markoviano, os termos em segunda ou quarta ordem relativos ao parâmetro DT w(t), envolvidos no cálculo das quantidades físicas.

Para que se obtenha os termos de segunda ordem em w(t) [em particular aqueles que compõem $g^{(2)}(\tau)$], exige-se basicamente que

$$\tilde{w}'(t)\,\tilde{w}'(t') = 2de^{-\frac{\lambda}{2}(t'+t)} \int_0^{t_1} \Big(\gamma_1(t,t_1)\,\gamma_2(t',t_1) + \gamma_1(t',t_1)\,\gamma_2(t,t_1)\Big)\, dt_1, \tag{A.3.2}$$

e

$$\tilde{w}'(t)\,\tilde{w}'^*(t') = 2de^{-\frac{\lambda}{2}(t'+t)} \int_0^{t_1} \Big(\gamma_1(t,t_1)\,\gamma_1^*(t,t_1) + \gamma_2(t,t_1)\,\gamma_2^*(t',t_1)\Big) dt_1, \tag{A.3.3}$$

cujos resultados no regime de ressonância , satisfazem

$$\tilde{w}'(t)\,\tilde{w}'(t') = \frac{1}{2}\frac{d}{\omega_0}e^{-\frac{\lambda}{2}(t'+t)}\Big\{-\cos\big[\omega_0(t'+t)\big]\Big(\Gamma_1 + \frac{\lambda}{2\omega_0}\Gamma_2\Big)$$

$$+\frac{\lambda}{\omega_0}sen\big[\omega_0(t'+t)\big]\cosh\big[2\kappa(t'-t)\big]\xi + i\Big[sen\big[\omega_0(t'+t)\big]\Big(\Gamma_1 + \frac{\lambda}{2\omega_0}\Gamma_2\Big)$$

$$-\frac{\lambda}{2\omega_0}\cos\big[\omega_0(t'-t)\big]\Gamma_1' + \frac{\lambda}{\omega_0}\cos\big[\omega_0(t'+t)\big]\cosh\big[2\kappa(t'-t)\big]\xi\Big]\Big\},$$

$$\tilde{w}'(t)\,\tilde{w}'^{*}(t') = \frac{1}{2}\frac{d}{\omega_0}e^{-\frac{\lambda}{2}(t'+t)}\Big\{\cos\big[\omega_0(t'-t)\big]\Big(\Gamma_1' + \frac{\lambda}{2\omega_0}\Gamma_2'\Big)$$

$$-\frac{\lambda}{2\omega_0}sen\big[\omega_0(t'+t)\big]\Gamma_1 - \frac{\lambda}{\omega_0}sen\,[\omega_0(t'-t)]\,senh\big[2\kappa(t'-t)\big]\xi$$

$$+i\Big[sen\big[\omega_0(t'-t)\big]\Big(\Gamma_1' + \frac{\lambda}{2\omega_0}\Gamma_2'\Big) + \frac{\lambda}{\omega_0}\cos\big[\omega_0(t'-t)\big]senh\big[2\kappa(t'-t)\big]\xi\Big]\Big\}.$$

Quanto aos termos de quarta ordem em w(t), consideremos o desenvolvimento daquele que compõe a correlação de intensidades $\tilde{w}^*(t)\tilde{w}^*(t')\tilde{w}(t')\tilde{w}(t)$, do qual, como caso particular, quando t=t', decorre o termo similar relacionado à variância da energia média. Segundo a relação (4.23c) e considerando-se o regime $\lambda/2\omega_0 \ll 1$, obtém-se

$$\tilde{w}^*(t)\,\tilde{w}^*(t')\,\tilde{w}(t')\,\tilde{w}(t) = \tilde{w}'^*(t)\,\tilde{w}'^*(t')\,\tilde{w}'(t')\,\tilde{w}'(t)$$
$$-\frac{\lambda}{2\omega_0}Re\Big(\tilde{w}'^*(t)\,\tilde{w}'^*(t')\,\tilde{w}'(t')\,\tilde{w}'^*(t') + t\rightleftarrows t'\Big). \qquad (A.3.4)$$

Através da relação (A.3.1), os termos que compõem (A.3.4) e respectivas expressões para a resonância, descrevem-se nas formas

$$\tilde{w}'^*(t)\,\tilde{w}'^*(t')\,\tilde{w}'(t')\,\tilde{w}'(t) = \left(\frac{d}{\omega_0}\right)^2 \left\{\int_0^t \int_0^{t'} dt_1 dt_1' \left(|\gamma_1(t,t_1)|^2 + |\gamma_2(t,t_1)|^2\right)\right.$$

$$\times \left(|\gamma_1(t',t_1')|^2 + |\gamma_2(t',t_2')|^2\right) + \int_0^t \int_0^t dt_1 dt_2 \left(|\gamma_1(t,t_1)|^2 |\gamma_1(t,t_2)|^2\right.$$

$$+ |\gamma_2(t,t_1)|^2 |\gamma_2(t,t_2)|^2 + 2|\gamma_1(t,t_1)|^2 |\gamma_2(t,t_2)|^2$$

$$\left.\left. + 4\gamma_1^*(t,t_1)\,\gamma_2^*(t,t_1)\,\gamma_1(t,t_2)\,\gamma_2(t,t_2)\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{d}{\omega_0}\right)^2 e^{-\lambda(t+t')} \left\{\xi_1'(t')\,\xi_1'(t) + \frac{\lambda}{2\omega_0}\left(\xi_1'(t')\,\xi_2'(t) + \xi_2'(t')\,\xi_1'(t)\right)\right.$$

$$\left. + \xi_1'(t)\left(\xi_1'(t) + \frac{\lambda}{\omega_0}\xi_2'(t)\right) + \xi_1(t)\left(\xi_1(t) + \frac{\lambda}{\omega_0}\xi_2(t)\right)\right\}_{Resson.} ,$$

$$\tilde{w}'^*(t)\,\tilde{w}'^*(t')\,\tilde{w}'(t')\,\tilde{w}'^*(t) = \left(\frac{d}{\omega_0}\right)^2 \left\{2\int_0^t \int_0^{t'} dt_1 dt_1' \left(|\gamma_1(t',t_1')|^2\right.\right.$$

$$\left. + |\gamma_2(t',t_1')|^2\right)\left(\gamma_1^*(t,t_1)\,\gamma_2^*(t,t_1)\right) + 4\int_0^t \int_0^t dt_1 dt_2 \left(|\gamma_1(t,t_2)|^2\right.$$

$$\left.\left. + |\gamma_2(t,t_2)|^2\right)\gamma_1^*(t,t_1)\,\gamma_2^*(t,t_1)\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{d}{\omega_0}\right)^2 e^{-\lambda(t+t')}\, e^{i(2\omega_0 t - \pi/2)} \left\{\xi_1'(t')\,\xi_1(t) + 2\xi_1'(t)\,\xi_1(t)\right.$$

$$+ \frac{\lambda}{2\omega_0}\left[\xi_1'(t')\,\xi_2(t) + \xi_2'(t')\,\xi_1(t) + 2\left(\xi_1'(t)\,\xi_2(t) + \xi_2'(t)\,\xi_1(t)\right)\right]$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{2\omega_0}\cos(2\omega_0 t)\left(\xi_1'(t') + 2\xi_1'(t)\right)\xi\right\}_{Resson.} .$$

REFERÊNCIAS

1- N. Bohr, *Phys. Rev.* **48**, 693 (1935); F. Selleri, *Paradoxos e Realidade* (Editorial Fragmentos, Ltda, Lisboa, 1987)

2- A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).

3- D. Bohm, *A Totalidade e a Ordem Implicada* (Editora Cultrix, Ltda, São Paulo, 1992)

4- J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).

5- A. Aspect, P.Grangier and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91 (1982); *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1982); A. Aspect and P. Grangier, in *Symposium on the Foundation of Modern Physics*, ed. P. Lahti and P. Mittelstaedt (World Scientific, 1985), p.51.

6- Z. Y. Ou, S. F. Pereira, H. J. Kimble, and K. C. Peng, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3663 (1992)

7- E. P. Wigner, *Phy. Rev.* **40**, 749 (1932).

8- J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988), pg. 196.

9- A. M. Cetto, L. De La Pena, and E. Santos, *Phys. Lett.* **113 A**, 304 (1985).

10- S. L. Braunstein and C. M. Caves (private Communication)

11- C. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres and W. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

12- W. Wootters and W. Zurek, *Nature* **299**, 802 (1992).

13- R. Glauber, in *New Techniques and Ideas in Quantum Measurement Theory* (Ann. NY Acad. Sci, Vol. 480).

14- A. Shimony, in *Proceeding of the International Symposium on Foundations of Quantum Theory* (Physical Society of Japan, Tokio, 1984).

15- S. Mizrahi and M. Moussa, *Int. Journ. of Mod. Phys. B* **7**, 1321 (1992).

16- M. V. Klein, *Optics* (John Wiley, N. York, 1970), p. 510.

17- A. Barut and P. Meystre, *Phys. Lett.* **105 A**, 458 (1984)

18- R. Feynmann and F. Vernon, *Ann. Phys.* (NY) **24**, 118 (1963)

19- A. Caldeirà and A. Leggett, *Phys. Rev. A* **31**, 1057 (1985)

20- R. O'Connell, C. Savage and D. Walls, in *Quantum Theory and Measurement*, eds. J. Wheeler and W. Zurek (Princeton Univ. Press, Princeton, 1983)

21- W. Unruh and W. Zurek, *Phys. Rev. D* **40**, 1071 (1989).

22- W. Zurek, *Phys. Rev. D* **24**, 1516 (1981); **26**, 1862 (1982)

23- W. Zurek, in *Quantum Optics, Experimental Gravitation and Measurement Theory*, eds. P. Meystre and M. O. Saully (Plenum, N. York, 1982), p. 87.

24- A. Albrecht, *Phys. Rev. D* **46** (1992) 5504.

25- S. Mizrahi, M. Moussa and D. Otero, *Phys. Lett.* **180 A**, 244 (1993).

26- G. Milburn, *Phys. Rev. A* **44**, 5401 (1991)

27- H. Moya-Cessa, V. Buzek, M. Kim and P. Knight, *Phys. Rev. A* **48**, 3900 (1993).

28- S. Mizrahi, M. Moussa and B. Baseia, a ser publicado no *Int. Joun. of Mod. Phys.*

29- B. Baseia, S. Mizrahi and M. Moussa, *Phys. Rev. A* **46**, 5885 (1992)

30- S. Mizrahi and M. Moussa, em fase de escrita.

31- P. Havas, *Nuovo Cimento Suppl.* **5**, 363 (1957)

32- I. Senitzky, *Phys. Rev.* **124**, 642 (1961)

33- H. Yuen, *Phys. Rev. A* **13**, 2226 (1976)

34- C. Caves, *Phys. Rev. D* **23**, 1693 (1981)

35- H. Yuen and H. Shapiro, *IEEE trans. Inf. Theory IT* **24**, 657 (1978)

36- H. Shapiro, H. Yuen and J. Mata Machado, *IEEE trans. Inf. Theory IT* **25**, 179 (1979)

37- H. Carmichael, G. Milburn and D. Walls, *J. Phys. A : Math. Gen* **17**, 469 (1984)

38- H. Lewis Jr. and W. Riesenfeld, *J. Math. Phys.* **10**, 1458 (1969)

39- A. Caldeira and A. Leggett, *Ann. of Phys.* **149**, 374 (1983)

40- Y. Band and P. Julienne, *Phys. Rev. A* **46**, 330 (1992)

41- J. von Neumann, *Mathematical Foundation of Quantum Mechanics* (Princeton, NI: Princeton University Press, 1955)

42- J. Clauser and A. Shimony, *Rep. Prog. Phys.* **41**, 1881 (1978)

43- D. Bohm, *Phys. Rev.* **85**, 169 (1952)

44- F. Clauser, A. Horne, A. Shimony and A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969)

45- J. Bell, *Foundations of Quantum Mechanics* ed. B. d'Espagnat (N. York : Academic), p. 171.

46- D. Bohm and Y. Aharonov, *Phys. Rev.* **108**, 1070 (1957)

47- A. Barut, in *Quantum Optics, Experimental Gravitation and Measurement Theory*, eds. P. Meystre and M. O. Scully (Plenum, N. York, 1982), p. 119.

48- A. Aspect, in *Quantum Optics, Experimental Gravitation and Measurement Theory*, eds. P. Meystre and M. Saully (Plenum, N. York, 1982), p. 185.

49- P. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford U. P., Oxford, 1947) p.36.

50- D. Bohm, *Quantum Theory* (Prentice-Hall, N. York, 1951), p. 120

51- J. von Neumann, *Mathematical Formulation of Quantum Mechanics* (Princeton U. P. Princeton, 1955), p. 351.

52- M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, N. York, 1966); J. Jauch, *Foundation of Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1968); B. d'Espagnat, *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics* (Benjamin, Reading MA, 1976); J. Wheeler and W. Zurek, *Quantum Theory and Measurement* (Princeton U.P., Princeton, 1983).

53- A. Peres, *Am. J. Phys.* **54**, 688 (1986)

54- A.Peres, *Am. J. Phys.* **42**, 886 (1974); Found. Phys. **14**, 1131 (1984)

55- L. Ballentine, *Rev. Mod. Phys.* **42**, 358 (1970)

56- S. Mizrahi and D. Otero, não submetido

57- B. de Witt and N. Graham, eds., *The Many-World Interpretation of Quantum Mechanics* (Princeton U.P., Princeton, 1973).

58- C. Shanoon and W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication* (University of Illinois Press, Urbana, (1949)

59- D. Greenberger, ed., *New Techniques and Ideas in Quantum Measurement Theory* (Ann. NY Acad. Sci., Vol. 480).

60- W. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (John Wiley, N. York, 1973); R. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963)

61- D. Walls, *Nature* **306**, 141 (1983)

62- J. Grochmalicki and M. Lewenstein, *Phys. Rep.* **208**, 189 (1991)

63- A. Bechler, *Phys. Lett. A* **130**, 481 (1988).

64- M. Abdalla, *Phys. Rev. A.* **44**, 2040 (1991)

65- B. Schumaker, *Phys. Rep.* **135**, 317 (1986)

66- D. Khandekar and S. Lawande, *Phys. Rep.* **137**, 115 (1986)

67- A. Parelomov, *Generalizzed Coherent States and their Aplications* (Springler-Verlag, Berlin Heildelberg, 1986)

68- R. Puri and S. Lawande, *Phys. Lett. A* **70**, 69 (1979).

69- B. Baseia, *Phys. Lett. A* **170**, 311 (1992)

70- P. Caldirola, *Nuovo Cimento* **18**, 393 (1941)

71- E. Kanai, *Prog. Theor. Phys.* **3**, 440 (1948)

72- M. Kostin, *J. Chem. Phys.* **57**, 3589 (1972)

73- K. Albrecht, *Phys. Lett. B* **56**, 107 (1975)

74- R. Hasse, *J. Math. Phys.* **16**, 2005 (1975)

75- E. Kerner, *Can. J. Phys.* **36**, 371 (1958)

76- K. Kan and J. Griffin, *Phys. Lett. B* **50**, 241 (1974)

77- I. Svin'in, *Theo. Mat. Fiz.* **27**, 270 (1976)

78- J. Messer, *Acta Phys. Austriaca* **50**, 75 (1979)

79- G. Ford, M. Kac and P. Mazur, *J. Math. Phys.* **6**, 504 (1965)

80- P. Ullersma, *Physica* **32**, 27 (1966)

81- W. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (John Wiley, N. York, 1973).

82- J. Brinati and S. Mizrahi, *J. Math. Phys.* **21**, 2154 (1980)

83- M. Wang and G. Uhlenbeck, *Phys. Rev.* **36**, 323 (1945)

84- A. Caldeira e A. Leggett, *Physica A* **121**, 617 (1983)

85- A. Caldeira e A. Leggett, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 211 (1981)

86- R. Feymann and F. Vernon, *Annals of Physics* **24**, 118 (1963)

87- M. Zahler and Y. Ben Aryeh, *Phys. Review A* **43**, 6368 (1991)

88- M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Washington D.C., 1964.

89- F. Arrechi, E. Gatti and A. Sona, *Phys. Lett.* **20**, 27 (1966)