UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

LEONARDO ANDRETA DE CASTRO

Proteção de sistemas quânticos e o postulado da medida

SÃO CARLOS
2016

LEONARDO ANDRETA DE CASTRO

Proteção de sistemas quânticos e o postulado da medida

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Física Básica
Orientador: Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano

Versão Corrigida

(Versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

SÃO CARLOS
2016

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica revisada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Castro, Leonardo Andreta de
Proteção de sistemas quânticos e o postulado da
medida / Leonardo Andreta de Castro; orientador
Reginaldo de Jesus Napolitano - versão corrigida --
São Carlos, 2016.
195 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos,
Universidade de São Paulo, 2016.

1. Medidas quânticas. 2. Teoria da informação
quântica. 3. Efeito Zenão quântico. 4. Correção de
erros. 5. Sistemas quânticos abertos. I. Napolitano,
Reginaldo de Jesus, orient. II. Título.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho de doutorado contou com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Esta tese não teria sido possível sem a imprescindível orientação do Prof. Reginaldo de Jesus Napolitano. Agradeço também o incentivo de Carlos Alexandre Brasil para que eu continuasse buscando ideias de artigos durante o doutorado.

Auxiliaram-me na busca de erros de digitação o Prof. Reginaldo, Nicolas Morazotti, Maria Lúcia Andreta e Antônio Carlos de Castro. Os erros que ainda restarem são de minha inteira responsabilidade.

Maria Cristina Cavarette Dziabas foi paciente ao me auxiliar a adaptar esta tese ao padrão da biblioteca.

O princípio de Buridan quântico foi trazido à minha atenção por Robert Sison, que me enviou o artigo com a seguinte mensagem: “um artigo sobre um burro.”

*“se o homem não opera por livre arbítrio,
que fará então, caso esteja em equilíbrio,
como o burrinho de Buridan?”*

Baruch de Spinoza, *Ética*, Segunda Parte, Proposição XLIX

RESUMO

CASTRO, L. A. **Proteção de sistemas quânticos e o postulado da medida**. 2016. 195 p. Tese (Doutorado em Ciências) – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

O processamento de informação quântica requer medidas, muitas vezes precedidas de evoluções unitárias. Uma descrição realista de um computador quântico também deve levar em conta que o sistema interage com um ambiente externo – distinto do observador – que o remove de sua evolução ideal, gerando erros. Neste trabalho, fazemos um estudo da dinâmica de sistemas quânticos observados múltiplas vezes ou continuamente, enquanto interagem com ambientes externos. Para tanto, empregamos uma equação mestra híbrida, que permite modelar uma interação contínua e markoviana do sistema com o medidor, enquanto o ruído do ambiente apresenta características não markovianas. O estudo da dinâmica de uma medida contínua ruidosa revela que o sistema melhor preserva suas populações iniciais quando é realizada a medida de uma observável que não comuta com os operadores do ruído produzido pelo ambiente. Estes resultados, já conhecidos para o caso simples de um qubit de memória interagindo com o vácuo, são generalizados para uma temperatura inicial superior a zero e para um qubit submetido a uma porta quântica. A universalidade destes fenômenos de preservação da população inicial permite fazer analogia com o efeito Zenão quântico. Mantendo o mesmo formalismo, mas adaptando a interação com o ambiente para descrever um decaimento, verificamos que o efeito Zenão quântico é observado para acoplamentos fracos com o ambiente. Tratamos também de como tal conhecimento sobre a preservação das populações pela medida auxilia na elaboração de melhores formas de preservar a informação em códigos quânticos. Com o auxílio da teoria das medidas fracas, propomos um possível método experimental simples para o teste da validade dos modelos de descrição de medidas contínuas. Com este estudo da dinâmica de uma medida quântica, esperamos elucidar questões de ordem prática no processamento de informação quântica, assim como ajudar no melhor entendimento de questões fundamentais, como o postulado da medida.

Palavras-chave: Medidas quânticas. Teoria da informação quântica. Efeito Zenão quântico. Correção de erros. Sistemas quânticos abertos.

ABSTRACT

CASTRO, L. A. **Protection of quantum systems and the measurement postulate**. 2016. 195 p. Tese (Doutorado em Ciências) – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

The processing of quantum information requires measurements, often preceded by unitary evolutions. A faithful description of a quantum computer should also take into account that the system interacts with an external environment – other than the observer – that removes it from its ideal evolution, causing errors. Here, we study the dynamics of quantum systems observed multiple times or continuously, while they interact with external environments. To do this, we employ a hybrid master equation, which allows us to model a continuous, Markovian interaction between the system and the measurement apparatus, while the environmental noise presents non-Markovian features. This study of the dynamics of the noisy continuous measurement reveals that the system better preserves its initial populations when the observable measured does not commute with the environmental noise operators. These results, already known for the simpler case of a memory qubit interacting with vacuum, are generalized for an initial temperature above zero and a qubit undergoing a quantum gate. The universality of these phenomena of preservation of the initial populations allows an analogy with the Quantum Zeno Effect. Keeping the same formalism, but adapting the environmental interaction to describe a decay, we verify that the quantum Zeno effect is observed for weak coupling with the environment. We also deal with how the knowledge about the preservation of the populations by the measurement helps in creating better ways to preserve the information in quantum codes. With the help of the weak measurement theory, we propose a simple experimental method to test the validity of models that describe a continuous measurement. With this study of the dynamics of a quantum measurement, we hope to help solve practical issues in quantum information processing, as well as provide greater insight into fundamental questions, such as the measurement postulate.

Keywords: Quantum measurements. Quantum information theory. Quantum Zeno effect. Error correction. Open quantum systems.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Breve revisão histórica	13
1.2	Dinâmica da medida quântica	17
1.3	Sistemas-objeto formados por qubits	19
1.4	Computação quântica e erros	21
1.5	Objetivos e estrutura do trabalho	23
2	MÉTODOS MATEMÁTICOS	25
2.1	Equação mestra para POVMs contínuas	25
2.2	Equação mestra para medidas do grupo de Pauli	27
2.3	Equação mestra incluindo o ambiente	28
2.4	Medidas fracas	29
2.5	Soluções perturbativas com séries de Dyson	33
2.6	Séries de Dyson para operadores densidade	35
2.7	Equação mestra para o ambiente na representação híbrida	36
2.8	Método do superoperador partido ao meio	39
3	SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO MESTRA DA MEDIDA	41
3.1	Uma medida paralela ou ortogonal	41
3.2	Uma medida contínua em geral	47
3.3	Múltiplos efeitos análogos a medidas contínuas sobre um qubit	52
4	PROTEÇÃO PARCIAL POR MEDIDA CONTÍNUA	61
4.1	Enunciado do problema e métodos de cálculo	61
4.2	Solução perturbativa para a medida protetiva	64
4.3	Cálculo com o método do superoperador partido ao meio	72
4.4	Resultados	78
5	EFEITO ZENÃO PARA A MEDIDA CONTÍNUA	87
5.1	Efeito Zenão para medidas contínuas	89
5.2	Efeito anti-Zenão com medidas discretas	96
5.3	Comparação com a solução exata do decaimento	98
5.4	Inadequação do método do superoperador partido ao meio	102
6	CORREÇÃO CONTÍNUA DURANTE PORTAS LÓGICAS	107
6.1	Monitoramento contínuo de um código quântico	107
6.2	Construção de portas lógicas corrigíveis	116
6.3	Correção contínua de erros para o código de três qubits	124
7	POSSÍVEIS EXPERIMENTOS COM MEDIDAS FRACAS	131
7.1	Teste experimental da equação mestra da medida	131
7.2	Descrição do experimento de Stern-Gerlach	135
7.3	Medidas fracas em três dimensões	138
7.4	Descrição de Stern-Gerlach com o hamiltoniano completo	142
7.5	Medidas fracas de durações diversas	149
7.6	Consequências para o princípio de Buridan	152

8	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	157
	REFERÊNCIAS	158
	APÊNDICE A Equação de Lindblad aplicada a medidas	163
	APÊNDICE B Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff	167
	APÊNDICE C Estados coerentes e operadores deslocamento	169
	APÊNDICE D Traço para o método do superoperador partido ao meio	173
	APÊNDICE E Expansão da simulação até quinta ordem	179
	APÊNDICE F Listagem de código para figuras da seção 6.2	183

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, relembremos brevemente o histórico do problema da medida e apresentaremos os conceitos de mecânica quântica e erros em computação quântica necessários para o entendimento do restante do trabalho. Leitores que já tenham um bom conhecimento da teoria quântica e computação quântica poderão passar diretamente, sem grandes perdas, à última seção, que trata da organização da tese. A introdução histórica que se segue tem como objetivo apresentar um panorama superficial da evolução do problema da medida e não é exaustiva.

1.1 Breve revisão histórica

Enquanto na mecânica clássica um ponto material tem posição e velocidade bem definidos no tempo, na mecânica quântica as propriedades ondulatórias da matéria fazem com que o valor destas quantidades seja indeterminado até o momento da medida. O significado desta ambiguidade é exatamente o que ocorre fisicamente durante a medida são questões cujas polêmicas duram até hoje.

A forma mais comum de ilustrar essas questões é pelo popular exemplo do gato de Schrödinger.¹ Neste experimento mental, põe-se um gato (inicialmente vivo) dentro de uma caixa opaca e lacrada onde há um recipiente com veneno que apenas será aberto se um átomo decair. Como o decaimento é um processo quântico, ele não procede deterministicamente e o átomo entra em um estado em que ele ao mesmo tempo decaiu e não decaiu. O gato, com seu destino amarrado àquele do átomo que decaiu, também estaria, segundo a formulação mais comum desse experimento, em um estado em que está ao mesmo tempo vivo e morto. Chamamos esta situação de estado de superposição, representado, por exemplo, como:

$$|\text{gato}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\text{vivo}\rangle + |\text{morto}\rangle \}. \quad (1.1)$$

Os números que multiplicam $|\text{vivo}\rangle$ e $|\text{morto}\rangle$ poderiam variar. Este exemplo é apenas uma ilustração.

O principal problema originado do fato de que objetos quânticos não apresentam características tão bem definidas é que, quando observamos um sistema quântico, o resultado deve necessariamente ser passível de ser traduzido classicamente, pois os aparatos experimentais não dão resultados como uma superposição de estados gato vivo e gato morto. Isso significa que o processo de medida não pode ser descrito de maneira unitária

e reversível, ela envolve um processo estocástico.

Formalmente, o estado do sistema quântico é descrito por um vetor de estado $|\psi\rangle$, ou por um operador (ou matriz) densidade ρ . O primeiro descreve o máximo conhecimento que temos sobre um sistema quântico, e pode ser pensado como uma matriz coluna no caso de sistemas discretos. Seu hermitiano conjugado $\langle\psi| \equiv |\psi\rangle^\dagger$ pode ser visualizado como uma matriz linha que, multiplicada pelas matrizes-colunas, realiza produtos internos denotados por $\langle\psi|\psi'\rangle$. O operador densidade ρ descreve um *ensemble* de diferentes vetores de estado $|\psi_i\rangle$, cada um presente com uma certa probabilidade p_i :

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|, \quad (1.2)$$

com $\sum_i p_i = 1$. O operador densidade apresenta diversas propriedades importantes, sendo hermitiano ($\rho^\dagger = \rho$) e tendo traço (soma dos termos na diagonal) unitário $\text{Tr}\{\rho(t)\} = 1$ (pois seu traço equivale à soma das probabilidades p_i , que sempre dá 1). Se o ensemble puder ser descrito por um único vetor de estado, claramente também temos $\rho^2 = \rho$, em cujo caso o chamamos de sistema puro. Caso contrário, trata-se de uma mistura.

Empregando estas duas ferramentas matemáticas, von Neumann² formalizou a identificação de dois processos pelos quais os sistemas quânticos podem evoluir:

- **Processo 1:** Quando observado, o sistema colapsa-se instantaneamente num autovetor da observável medida, com probabilidade proporcional ao valor esperado do projetor sobre o subespaço dos autovetores com autovalor correspondente.

Se a observável for Q , o vetor de estado $|\psi\rangle$ é projetado no subespaço dos autovetores com autovalor q com probabilidade $\langle\psi|\Pi_q|\psi\rangle$, onde Π_q é o projetor sobre esse subespaço, satisfazendo $\Pi_q = \Pi_q^2 = \Pi_q^\dagger$.

Em termos do operador densidade ρ , este processo corresponde a:

$$\rho \rightarrow \sum_q \Pi_q \rho \Pi_q = \sum_i p_i \sum_q \Pi_q |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \Pi_q. \quad (1.3)$$

Se os autovalores q forem não degenerados e representados por autovetores $|q\rangle$, cada projetor é simplesmente $\Pi_q = |q\rangle \langle q|$. Em todo caso, os projetores satisfazem a relação de completeza:

$$\sum_q \Pi_q = \mathbb{I}, \quad (1.4)$$

onde $\mathbb{I}$ é o operador identidade.

- **Processo 2:** Enquanto não está sendo medido, o sistema evolui unitariamente de acordo com a equação de Schrödinger, regida por um operador hermitiano chamado

hamiltoniano H ,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle. \quad (1.5)$$

o que, em termos do operador densidade ρ , corresponde à equação de Liouville-von Neumann:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)]. \quad (1.6)$$

Uma forma tradicional de se lidar com a disparidade entre esses dois processos é aquela adotada por Bohr na chamada “escola de Copenhague.” Esta interpreta a medida como o simples ato de adquirir informação por parte do observador, e não como um fenômeno físico objetivo. Em última instância, esta interpretação elimina a necessidade de uma realidade quântica, exigindo apenas a existência de um mundo clássico sobre o qual a descrição matemática de objetos quânticos se sustenta.³

Essa visão predominantemente idealista da mecânica quântica foi oposta pelos esforços de diversos físicos que almejavam uma descrição realista do mundo quântico. Pioneiro nesta direção foi Albert Einstein, que no famoso artigo EPR⁴ sugeriu que fenômenos como o emaranhamento demonstravam que a teoria quântica necessitava ser suplementada para se tornar completa. David Bohm avançou nesta direção com sua própria interpretação da mecânica quântica, na qual explica as características estocásticas da teoria postulando graus de liberdade ocultos.⁵⁻⁶

Outra limitação da escola de Copenhague torna-se visível no campo da cosmologia, pois não há como definir um observador externo capaz de dar sentido subjetivo de aquisição de informação à função de onda do universo inteiro.⁷ Na tentativa de responder esse tipo de questão, Hugh Everett III, orientado de Wheeler, propôs a chamada Interpretação de Estado Relativo.⁸

O projeto de Everett consistia em eliminar o Processo 1, de forma que toda a evolução temporal do universo pudesse ser dada pelos operadores unitários e reversíveis do Processo 2. A medida ainda seria um processo subjetivo, mas consequência do fato de o observador em si tornar-se emaranhado com o sistema-objeto que está observando. Na visão de Everett, um observador que abra a caixa onde estava o gato de Schrödinger (1.1) simplesmente irá se emaranhar com ele da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{vivo}\rangle \otimes |\text{observador que viu o gato vivo}\rangle \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{morto}\rangle \otimes |\text{observador que viu o gato morto}\rangle. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Os resultados da “medida,” $|\text{vivo}\rangle$ e $|\text{morto}\rangle$, são os estados relativos a cada possível observação do gato.

O estado relativo é aquele em que está parte do sistema após havermos determinado a outra parte do sistema (normalmente o observador) como estando em um certo estado $|f\rangle$. Ele é exatamente análogo à pós-seleção do formalismo das medidas fracas (como veremos no próximo capítulo) com a diferença que, nesta última, normalmente o estado do sistema-objeto (a parte do sistema que é observada) é aquele que é fixo.

O estado do sistema-objeto relativo ao estado do medidor $|f\rangle$, quando o sistema completo está em um estado $|\Psi\rangle$, é encontrado por:

$$\text{rel}_{|f\rangle} |\Psi\rangle = \frac{1}{\|\langle f | \Psi \rangle\|} \langle f | \Psi \rangle. \quad (1.8)$$

Contra a proposta de Everett naturalmente levantaram-se algumas objeções, a mais óbvia entre elas sendo o fato de que ninguém consegue perceber a presença dos outros estados do observador. Everett contra-argumentou que sua interpretação supõe que cada estado do observador detecta apenas o correspondente estado relativo, de forma que reclamar sobre o fato de não os percebermos seria equivalente a dizer que Copérnico está errado porque não conseguimos sentir a Terra girando.⁸

Mas havia outras objeções, como por que uma medida realizada com um certo aparato experimental sempre mede uma certa base de autoestados e não uma base formada por outra combinação linear desses autoestados, como a princípio a interpretação de Everett deveria permitir.⁹ Ou seja, por que é natural termos um observador que viu o gato vivo ou que viu o gato morto, mas nunca neste estado de superposição que a princípio seria igualmente aceitável pela teoria de Everett:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\text{observador que viu o gato vivo}\rangle + |\text{observador que viu o gato morto}\rangle \}. \quad (1.9)$$

Esse foi o chamado problema da base ponteiro.¹⁰

A solução para essa questão foi buscada posteriormente por Zurek,¹¹ e requer a inserção de um ambiente externo também interagindo com o aparato de medida. Com o desenvolvimento da teoria da descoerência por esse autor,^{12–16} e suas aplicações mais recentes em informação quântica,¹⁷ a interação do ambiente com o medidor e o sistema-objeto assumiu um papel de grande importância na teoria quântica contemporânea e será o principal objeto de estudo neste trabalho.

1.2 Dinâmica da medida quântica

Ao longo deste trabalho, iremos considerar o sistema total dividido em três partes, a primeira o sistema-objeto de interesse, S , que é observado pela segunda, o medidor M , também chamado ponteiro, aparato de medida, ou observador. Um ambiente externo A interferirá nessa medida.

Tomaremos S pertencente a um espaço de Hilbert discreto e de dimensão finita, enquanto M e A serão descritos por um número infinito de graus de liberdade, quando escritos explicitamente. Quando embutidos em uma equação mestra, não precisaremos explicitá-los.

A menos que mencionemos explicitamente, um operador densidade como $\rho(t)$ deve ser considerado como referente ao sistema completo, incluindo sistema-objeto, ambiente ou medidor, conforme o caso. O operador densidade do sistema-objeto apenas, $\rho_S(t)$, pode ser encontrado tomando-se os traços parciais do ambiente ($\text{Tr}_A \{ \dots \}$) e/ou do medidor ($\text{Tr}_M \{ \dots \}$), a depender de se um ou outro estão explicitamente presentes no modelo descrito:

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_A \{ \text{Tr}_M \{ \rho(t) \} \}. \quad (1.10)$$

Os traços parciais Tr_A e Tr_M são tomados pela soma de todas as matrizes na diagonal da base do ambiente ou do medidor. Sendo $\{ |\Psi_a\rangle \}$ e $\{ |\Psi_m\rangle \}$ bases ortonormais discretas de A e M , respectivamente, tais traços parciais podem ser escritos como:

$$\text{Tr}_A \{ \rho \} = \sum_a \langle \Psi_a | \rho | \Psi_a \rangle, \quad (1.11)$$

$$\text{Tr}_M \{ \rho \} = \sum_m \langle \Psi_m | \rho | \Psi_m \rangle, \quad (1.12)$$

passando as somatórias a integrais caso as bases sejam contínuas.

Se o medidor for descrito explicitamente, assumiremos que o estado inicial total $|\Psi_i\rangle$ pode ser separado nas partes do sistema-objeto, $|\chi_i\rangle$, e do medidor $|\Phi_i\rangle$:

$$|\Psi_i\rangle = |\chi_i\rangle \otimes |\Phi_i\rangle, \quad (1.13)$$

onde empregamos o índice i para indicar que se trata do estado inicial. Quando não especificada de outra forma, chamaremos a observável medida de Q , com autovalores q e autovetores $|q\rangle$:

$$Q |q\rangle = q |q\rangle. \quad (1.14)$$

Uma forma simples de se descrever a medida consiste em emaranhar o sistema-objeto ao medidor, como na interpretação de Everett. Correlacionemos o medidor ao sistema-objeto de forma que cada um dos autoestados da observável (1.14) associa-se a um estado $|\Phi_q\rangle$ do medidor pela transformação unitária:

$$|q\rangle \otimes |\Phi_i\rangle \rightarrow |q\rangle \otimes |\Phi_q\rangle, \quad (1.15)$$

onde o conjunto $\{|\Phi_q\rangle\}$ é ortonormal. Aplicada ao estado inicial (1.13), esta transformação unitária leva a:

$$|\chi_i\rangle \otimes |\Phi_i\rangle \rightarrow \sum_q \langle q | \chi_i \rangle |q\rangle \otimes |\Phi_q\rangle, \quad (1.16)$$

Com este estado final, temos certeza de que, se o medidor for encontrado no estado $|\Phi_q\rangle$, o estado relativo do sistema-objeto é $|q\rangle$.

A matriz densidade reduzida do sistema-objeto, após essa interação, tem valor zero para todos os termos fora da diagonal (chamadas coerências) na base dos autovetores $|q\rangle$:

$$\rho_S = \sum_{q,q'} \langle q | \chi_i \rangle \langle q' | \chi_i \rangle^* |q\rangle \langle q'| \text{Tr}_M \{ |\Phi_q\rangle \langle \Phi_{q'}| \} = \sum_q |\langle q | \chi_i \rangle|^2 |q\rangle \langle q|, \quad (1.17)$$

causando o fenômeno conhecido como descoerência.

Na verdade, (1.17) é exatamente o mesmo que o Processo 1 de von Neumann (1.3), pois

$$|\langle q | \chi_i \rangle|^2 = \langle q | (|\chi_i\rangle \langle \chi_i|) |q\rangle = \langle q | \rho_S(0) |q\rangle. \quad (1.18)$$

Por isso, o colapso é indistinguível do emaranhamento do sistema com graus de liberdade inacessíveis ou que estamos ignorando. A questão de interpretação sobre a existência (von Neumann) ou não (Everett) do colapso, portanto, não será importante no âmbito deste trabalho para obtermos a dinâmica da medida.

O papel do ambiente surge quando, denotando seu estado inicial por $|\tilde{\Psi}_i\rangle$, nós o adicionamos à cadeia de observadores, fazendo com ele um processo unitário análogo ao (1.15):

$$|q\rangle \otimes |\Psi_q\rangle \otimes |\tilde{\Psi}_i\rangle \rightarrow |q\rangle \otimes |\Psi_q\rangle \otimes |\tilde{\Psi}_q\rangle, \quad (1.19)$$

que leva o estado (1.16) a:

$$|\chi_i\rangle \otimes |\Phi_i\rangle \rightarrow \sum_q \langle q | \chi_i \rangle |q\rangle \otimes |\Phi_q\rangle \otimes |\tilde{\Phi}_q\rangle. \quad (1.20)$$

Suponha que o primeiro observador não tenha conhecimento do estado do segundo.

Trata-se de um sistema muito grande e sobre o qual o observador tem pouco ou nenhum controle, e por isso ele apenas consegue obter informação sobre o sistema-objeto. O estado percebido neste caso é melhor descrito por uma matriz densidade reduzida que remova pelo traço parcial o estado do ambiente externo, resultando novamente num objeto sem termos fora da diagonal:

$$\rho_{SM} = \sum_q |\langle q | \chi_i \rangle|^2 |\Phi_q\rangle |q\rangle \langle q| \langle \Phi_q|, \quad (1.21)$$

onde o índice SM denota uma matriz densidade reduzida conjunta do sistema-objeto e do (primeiro) medidor, com o ambiente (segundo medidor) eliminado pelo traço parcial.

Este procedimento ilustra o papel do ambiente na definição da base ponteiro, pois ele elimina os termos de interferência (fora da diagonal) entre estados associados a medidores que observaram resultados diferentes, impedindo-os de estar numa superposição de estados $|\Phi_q\rangle$. A escolha da base da medida seria, portanto, uma característica da interação do ambiente com o observador e o sistema-objeto, resolvendo a ambiguidade originalmente apresentada.

1.3 Sistemas-objeto formados por qubits

Ao longo deste trabalho, empregaremos predominantemente sistemas-objeto que pertençam a espaços de Hilbert discretos. Normalmente, estaremos interessados em sistemas formados por conjuntos de qubits (sistemas quânticos de dois níveis), de forma que será conveniente expressar os operadores que atuam sobre eles como produtos tensoriais de matrizes de Pauli. As matrizes de Pauli são linearmente independentes, e, por isso, em conjunto com a identidade, formam uma base das matrizes 2×2 :

$$\sigma_z = \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Produtos de matrizes de Pauli resultam sempre em outras matrizes de Pauli (ou a identidade), de forma que estas formam um grupo fechado ao produto matricial, o Grupo de Pauli:

$$\sigma_r \sigma_s = \delta_{rs} + i \varepsilon_{rst} \sigma_t. \quad (1.23)$$

Por conveniência, definiremos o vetor de Pauli $\boldsymbol{\sigma}$ para expressar com mais facilidade combinações lineares dessas matrizes:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \sigma_z \hat{\mathbf{z}} + \sigma_x \hat{\mathbf{x}} + \sigma_y \hat{\mathbf{y}}. \quad (1.24)$$

Ao longo deste trabalho, vamos muitas vezes empregar a notação $\sigma_{\hat{\mathbf{s}}}$, significando:

$$\sigma_{\hat{\mathbf{s}}} \equiv \hat{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.25)$$

onde o versor real $\hat{\mathbf{s}}$ pode ser escrito em termos dos ângulos azimutal ϕ e polar θ :

$$\hat{\mathbf{s}} = \cos \theta \hat{\mathbf{z}} + \sin \theta (\cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}}). \quad (1.26)$$

Nesta notação vetorial, o produto expresso na (1.23) torna-se:

$$\sigma_{\hat{\mathbf{r}}} \sigma_{\hat{\mathbf{s}}} = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) + i (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{s}}) \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.27)$$

Usando (1.27), encontramos outro produto útil que empregamos diversas vezes nesta tese:

$$\sigma_{\hat{\mathbf{s}}} \sigma_{\hat{\mathbf{r}}} \sigma_{\hat{\mathbf{s}}} = 2\sigma_{\hat{\mathbf{s}}} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) - \sigma_{\hat{\mathbf{r}}}. \quad (1.28)$$

Um operador do tipo $\sigma_{\hat{\mathbf{s}}}$ sempre terá dois autovalores, ± 1 , devido ao fato de que o quadrado $(\sigma_{\hat{\mathbf{s}}})^2$ resulta sempre na identidade. Esses dois serão representados pela notação $|s\rangle_{\hat{\mathbf{s}}}$, onde $s = 0, 1$, de forma que:

$$\sigma_{\hat{\mathbf{s}}} |s\rangle_{\hat{\mathbf{s}}} = (-1)^s |s\rangle_{\hat{\mathbf{s}}}. \quad (1.29)$$

Se os índices $\hat{\mathbf{s}}$ não estiverem presentes, considere $|0\rangle$ e $|1\rangle$ autovetores de σ_z :

$$|s\rangle \equiv |s\rangle_{\hat{\mathbf{z}}}. \quad (1.30)$$

Em termos dessa base, os dois autovetores de qualquer $\sigma_{\hat{\mathbf{s}}}$ podem ser escritos como:

$$|0\rangle_{\hat{\mathbf{s}}} = \cos(\theta/2) |0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2) |1\rangle, \quad (1.31)$$

$$|1\rangle_{\hat{\mathbf{s}}} = \sin(\theta/2) |0\rangle - e^{i\phi} \cos(\theta/2) |1\rangle, \quad (1.32)$$

o que é facilmente verificado uma vez que se escreva o operador $\sigma_{\hat{\mathbf{s}}}$ em sua forma matricial:

$$\sigma_{\hat{\mathbf{s}}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

A notação vetorial é especialmente útil no caso em que o sistema-objeto é um qubit cujo estado expressamos em termos de um operador densidade $\rho(t)$. Como o operador densidade sempre tem traço um, enquanto as matrizes de Pauli têm traço nulo, e como o

operador densidade de um qubit é uma matriz hermitiana 2×2 , sempre podemos escrevê-lo em termos de um vetor de Bloch $\mathbf{b}(t)$:

$$\rho(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{b}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.34)$$

que será um versor sempre que $\rho(t)$ representar um estado puro, para que continue satisfazendo $\rho^2(t) = \rho(t)$.

Muitas vezes, sujeitaremos o qubit a um hamiltoniano $\hbar\omega_0\sigma_{\hat{\mathbf{s}}}$, de forma que $|0\rangle_{\hat{\mathbf{s}}}$ seja seu estado excitado e $|1\rangle_{\hat{\mathbf{s}}}$ o estado fundamental. Nestes casos, será conveniente definir dois operadores $\sigma_{\pm}^{(\hat{\mathbf{s}})}$ que levem do estado excitado ao fundamental e vice versa.

$$\sigma_+^{(\hat{\mathbf{s}})} \equiv |0\rangle_{\hat{\mathbf{s}}} \langle 1|_{\hat{\mathbf{s}}}, \quad (1.35)$$

$$\sigma_-^{(\hat{\mathbf{s}})} \equiv |1\rangle_{\hat{\mathbf{s}}} \langle 0|_{\hat{\mathbf{s}}}. \quad (1.36)$$

Estes dois operadores são um o hermitiano conjugado do outro. Seus quadrados são nulos, enquanto que os produtos de um pelo outro são projetores:

$$\sigma_+^{(\hat{\mathbf{s}})} \sigma_-^{(\hat{\mathbf{s}})} = |0\rangle_{\hat{\mathbf{s}}} \langle 0|_{\hat{\mathbf{s}}}, \quad (1.37)$$

$$\sigma_-^{(\hat{\mathbf{s}})} \sigma_+^{(\hat{\mathbf{s}})} = |1\rangle_{\hat{\mathbf{s}}} \langle 1|_{\hat{\mathbf{s}}}. \quad (1.38)$$

No caso específico em que escolhemos $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{z}}$, os operadores $\sigma_{\pm} \equiv \sigma_{\pm}^{(\hat{\mathbf{z}})}$ poderão ser escritos da seguinte forma em termos das matrizes de Pauli:

$$\sigma_+ = \sigma_x \frac{1 - \sigma_z}{2} = \frac{\sigma_x + i\sigma_y}{2}, \quad (1.39)$$

$$\sigma_- = \sigma_x \frac{1 + \sigma_z}{2} = \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{2}. \quad (1.40)$$

Nos casos em que for necessário escrever operadores que atuem sobre diversos qubits, será útil construir produtos de várias matrizes de Pauli. Nesse caso, para simplificar, vamos usar um índice n para indicar que o operador $\sigma_{n,\hat{\mathbf{s}}}$ atua apenas sobre o n -ésimo qubit.

1.4 Computação quântica e erros

Os qubits que estudaremos nesta tese interagem com uma porta lógica, com o medidor (que pode ter um papel no processamento da informação ou simplesmente na aquisição

do resultado final), e também com um ambiente externo que emaranha-se de maneiras que não controlamos com os qubits, resultando nos chamados erros.

Um modelo simples permite mostrar como os erros surgem do emaranhamento do qubit com um ambiente.¹⁸ Considere um qubit inicialmente em um estado $|\chi_i\rangle = \alpha_i |0\rangle + \beta_i |1\rangle$ que emaranha-se a um ambiente inicialmente no estado $|\tilde{\Phi}_i\rangle$ de acordo com a seguinte evolução:

$$|0\rangle \otimes |\tilde{\Phi}_i\rangle \rightarrow |0\rangle \otimes |\tilde{\Phi}_{00}\rangle + |1\rangle \otimes |\tilde{\Phi}_{01}\rangle, \quad (1.41)$$

$$|1\rangle \otimes |\tilde{\Phi}_i\rangle \rightarrow |0\rangle \otimes |\tilde{\Phi}_{10}\rangle + |1\rangle \otimes |\tilde{\Phi}_{11}\rangle, \quad (1.42)$$

onde estamos supondo que os estados do ambiente $|\tilde{\Phi}_{ij}\rangle$ são ortogonais entre si. Esta é uma interação semelhante à que usamos na seção 1.2 como um modelo simples de emaranhamento resultando numa evolução como a do processo 1. A diferença, neste caso, é que não estamos controlando a interação para que resulte em uma medida de uma observável específica Q .

O estado final do sistema pode ser expresso em termos de uma base de Bell dos estados do ambiente:

$$\begin{aligned} |\chi_i\rangle |\tilde{\Phi}_i\rangle \rightarrow |\chi_i\rangle & \frac{|\tilde{\Phi}_{00}\rangle + |\tilde{\Phi}_{11}\rangle}{2} + \sigma_z |\chi_i\rangle \frac{|\tilde{\Phi}_{00}\rangle - |\tilde{\Phi}_{11}\rangle}{2} \\ & + \sigma_x |\chi_i\rangle \frac{|\tilde{\Phi}_{01}\rangle + |\tilde{\Phi}_{10}\rangle}{2} + \sigma_x \sigma_z |\chi_i\rangle \frac{|\tilde{\Phi}_{01}\rangle - |\tilde{\Phi}_{10}\rangle}{2}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Como os estados $|\tilde{\Phi}_{ij}\rangle$ eram ortogonais, os estados de Bell (aqueles nos numeradores das frações) também serão. Portanto, ao eliminarmos da descrição o ambiente (sobre o qual não temos controle), pela tomada do traço parcial, encontramos o seguinte estado final em termos de operadores densidade:

$$\rho_S(0) \rightarrow C_0 \rho_S(0) + C_1 \sigma_x \rho_S(0) \sigma_x + C_2 \sigma_y \rho_S(0) \sigma_y + C_3 \sigma_z \rho_S(0) \sigma_z, \quad (1.44)$$

onde os C_i são constantes.

Isso ilustra como um ambiente introduz erros representados pelas matrizes de Pauli ao estado inicial do qubit. Fazendo a aproximação de erros independentes, isto é, que o erro sobre um qubit não depende do erro sobre outro, podemos descrever erros genéricos sobre grupos de n qubits como produtos tensoriais de n matrizes de Pauli.

Uma maneira simples de evitar os efeitos deletérios que os erros exercem sobre o processamento da informação quântica consiste em codificar cada estado do qubit físico

$|0\rangle$ ou $|1\rangle$ em estados lógicos de vários qubits, $|0\rangle_L$ e $|1\rangle_L$. O subespaço criado pelos estados lógicos é chamado de código.¹⁹

O código deve ter a característica de que um erro que possa ser corrigido deve ser detectável por uma ou mais medidas de síndrome. Se um código corrige contra erros do tipo E , alguma de suas medidas de síndrome P deve dar resultados diferentes quando aplicada sobre estados lógicos do código e quando aplicada sobre estados submetidos a erros. Por exemplo:

$$P|0\rangle_L = |0\rangle_L, \quad (1.45)$$

$$P|1\rangle_L = |1\rangle_L, \quad (1.46)$$

$$PE|0\rangle_L = -E|0\rangle_L, \quad (1.47)$$

$$PE|1\rangle_L = -E|1\rangle_L. \quad (1.48)$$

Em geral, independentemente do número de medidas de síndrome necessárias para descobrir que erro ocorreu, podemos construir um projetor sobre o subespaço do código Π_L :

$$\Pi_L = \sum_q |q\rangle_L \langle q|_L, \quad (1.49)$$

que retorna 1 quando o sistema está dentro do subespaço do código e zero quando está fora (foi submetido a um erro corrigível). Retomaremos esse formalismo para aplicá-lo à correção contínua de erros quânticos no capítulo 6.

1.5 Objetivos e estrutura do trabalho

Nesta tese, buscamos uma melhor compreensão de como e quando uma medida quântica contínua protege um sistema contra erros. Este trabalho será fundado naquele que realizamos durante a pesquisa de mestrado,²⁰⁻²² e conterà resultados que já publicamos durante o doutorado.²³⁻²⁴

Neste primeiro capítulo, fizemos uma breve revisão histórica do problema da medida, assim como apresentamos os conceitos e definições básicas de que necessitaremos ao longo do restante da tese.

Veremos, no segundo capítulo, como funcionam os formalismos da medida empregados ao longo do restante do trabalho. Começaremos por equações mestras que descrevem uma medida markoviana contínua, apresentaremos a sua forma híbrida e veremos que métodos matemáticos podem ser utilizados para resolvê-la. Faremos também uma breve introdução

ao formalismo das medidas fracas, que retomaremos, de forma mais geral, no capítulo 7.

No terceiro capítulo, veremos soluções da equação mestra que tratam tanto o sistema-objeto quanto o ambiente como medidas contínuas markovianas simultâneas. Obteremos algumas soluções originais e derivaremos outras já conhecidas na literatura, mas das quais necessitaremos ao longo dos próximos capítulos. Veremos também que nem todos os fenômenos de proteção da medida em que estamos interessados são visíveis quando tratamos o ambiente como markoviano.

No quarto capítulo, tratamos da preservação da população para medidas simultâneas a ruídos não markovianos ortogonais a elas. Estes resultados, já conhecidos para um caso específico no trabalho de mestrado,^{20–22} são agora generalizados para o caso em que o qubit está sob a ação de uma porta lógica, e calculados para quando a temperatura do ambiente não é zero. Estes resultados foram publicados ao longo do doutorado.²³

A preservação da população por meio de medidas, vista no capítulo 4, é um fenômeno similar ao chamado efeito Zenão quântico. Tal analogia será completada no quinto capítulo, onde veremos em que situações o decaimento de um sistema é impedido por uma medida contínua descrita pela equação mestra que apresentamos no capítulo 2.

Os resultados dos capítulos 4 e 5 indicam que medidas contínuas poderiam ser capazes de impedir a ação de erros durante o processamento de informação quântica. No capítulo 6, vemos como códigos de detecção e correção de erros podem ser tornados tão bons quanto se queira com a ajuda de medidas contínuas, mesmo durante portas lógicas. Retomaremos resultados obtidos durante a pesquisa de mestrado,²⁰ tanto os já publicados²⁴ quanto os ainda inéditos, e os generalizaremos. Ainda veremos como decompor uma porta lógica simultânea à medida de forma fisicamente correta para que ela possa ser aplicada concomitante à correção de erros, num resultado original deste trabalho de doutorado que já publicamos.²⁴

Como todos esses nossos resultados dependem da validade da equação mestra da medida, veremos no capítulo 7 uma forma possível de verificarmos experimentalmente por meio de medidas fracas, uma proposta que já publicamos.¹⁰ Interpretaremos esse experimento em termos de uma descrição tradicional das medidas fracas com o aparato de Stern-Gerlach, estes resultados ainda inéditos. Veremos ainda como o método experimental descrito pode ser usado para determinar a validade, no âmbito quântico, do princípio de Buridan, que proíbe que um problema de decisão tenha um limite temporal finito.

Conclusões e perspectivas de pesquisas futuras são apresentadas no final.

2 MÉTODOS MATEMÁTICOS

No capítulo anterior, revisamos os conceitos básicos e o histórico das medidas quânticas. Neste capítulo, veremos efetivamente quais os métodos que usaremos para calcular a dinâmica da medida ao longo deste trabalho. Nosso foco será numa descrição híbrida, em que a interação entre o sistema-objeto e o aparato de medida pode ser descrita por meio de uma equação mestra markoviana, enquanto o ambiente é descrito por um banho bosônico, ou seja, a interação é não markoviana.

Os métodos listados neste capítulo, já conhecidos da literatura, serão empregados nos capítulos seguintes para obtermos resultados originais.

2.1 Equação mestra para POVMs contínuas

Para modelarmos a dinâmica da medida ruidosa, ou seja, a medida e o ruído acontecendo simultaneamente, primeiramente precisaremos de uma equação que nos permita descrever a medida continuamente, ao contrário do processo 1 (1.3), que é instantâneo. Como não estamos interessados nos muitos graus de liberdade do observador macroscópico, iremos empregar uma descrição que só inclua na equação diferencial o operador densidade reduzido, com o traço parcial sobre o medidor já tomado. Esse tipo de equação é chamado de equação mestra (ver Apêndice A para mais detalhes) e ela permitirá a descrição do medidor enquanto ignoramos quaisquer características de sua dinâmica interna, isto é, ela nos dá uma evolução markoviana da medida.

A equação mestra que empregaremos aqui é a derivada por Cresser et al.²⁵ Nesta abordagem, consideramos que o sistema de interesse evolui normalmente por meio do processo 2 de acordo com certo hamiltoniano H , mas que se submete a uma POVM com uma probabilidade $2\lambda_i$ por unidade tempo Δt , de forma que $2\lambda_i\Delta t$ seja pequeno. No limite em que os Δt tornam-se infinitesimais, a equação descreve POVMs contínuas.

Uma POVM (ver explicação no Apêndice A) é um processo no qual um sistema evolui de acordo com uma série de operadores de Kraus $K_{i,k}$:

$$\rho(t) \rightarrow \sum_k K_{i,k} \rho(t) K_{i,k}^\dagger, \quad (2.1)$$

que devem necessariamente satisfazer a condição

$$\sum_i K_{i,k}^\dagger K_{i,k} = \mathbb{I}, \quad (2.2)$$

onde $\mathbb{I}$ é a identidade. Se (2.2) não for respeitada, o operador densidade final pode não ter traço unitário:

$$\text{Tr} \left\{ \sum_{i,k} K_{i,k} \rho(t) K_{i,k}^\dagger \right\} = \text{Tr} \left\{ \left(\sum_{i,k} K_{i,k}^\dagger K_{i,k} \right) \rho(t) \right\}, \quad (2.3)$$

o que não satisfaz as condições necessárias para ser um operador densidade de um sistema completo.

É fácil ver que quaisquer projetores Π_q que projetam num subespaço dos autovetores de autovalor q da observável Q satisfazem (2.2), pois para eles, como $\Pi_q^2 = \Pi_q$ e $\Pi_q^\dagger = \Pi_q$, ela é o mesmo que a relação de completeza (1.4).

$$\sum_q \Pi_q^\dagger \Pi_q = \sum_i \Pi_i = \mathbb{I}. \quad (2.4)$$

Portanto, a POVM engloba evoluções como a do processo 1 (1.3).

Caso o sistema sofra a i -ésima POVM, seu estado, após um curto intervalo de tempo Δt , evolui para:

$$\rho(t + \Delta t) = \sum_k K_{i,k} \rho(t) K_{i,k}^\dagger. \quad (2.5)$$

Caso o sistema ainda evolua de acordo com o hamiltoniano independente do tempo H , seguindo o Processo 2, seu estado final após um intervalo de tempo infinitesimal Δt será dado pela solução da equação de Liouville-von Neumann (1.6):

$$\rho_S(t + \Delta t) = e^{-iH\Delta t/\hbar} \rho(t) e^{iH\Delta t/\hbar}. \quad (2.6)$$

A hipótese de que o hamiltoniano é independente do tempo é válida para sistemas fechados, como normalmente iremos considerar (a interação com graus de liberdade externos está embutida no processo 1), mas mesmo se houvesse dependência temporal, (2.6) estaria correta até a primeira ordem em Δt , que é tudo que precisamos para esta demonstração.

Contabilizando tanto as probabilidades $2\lambda_i\Delta t$ de o sistema se submeter à i -ésima POVM no intervalo Δt quanto a probabilidade $1 - 2\sum_i \lambda_i\Delta t$ de o sistema evoluir de acordo com o Processo 2, encontramos o seguinte estado do sistema-objeto em $t + \Delta t$:

$$\rho(t + \Delta t) = \left(1 - 2 \sum_i \lambda_i \Delta t \right) e^{-iH\Delta t/\hbar} \rho(t) e^{iH\Delta t/\hbar} + 2 \sum_k \lambda_i \Delta t \sum_k K_{i,k} \rho(t) K_{i,k}^\dagger. \quad (2.7)$$

Se expandirmos as exponenciais e mantivermos apenas termos até primeira ordem em Δt , encontramos:

$$\rho(t + \Delta t) - \rho(t) = \left\{ -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] + 2 \sum_i \lambda_i \left[\sum_k K_{i,k} \rho(t) K_{i,k}^\dagger - \rho(t) \right] \right\} \Delta t + O(\Delta t^2). \quad (2.8)$$

Dividindo os dois lados por Δt e tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos uma equação diferencial que é a equação mestra para POVMs contínuas:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] + 2 \sum_i \lambda_i \left\{ \sum_k K_{i,k} \rho(t) K_{i,k}^\dagger - \rho(t) \right\}. \quad (2.9)$$

Empregaremos (2.9) múltiplas vezes ao longo deste trabalho. Daremos prioridade, porém, para medidas do grupo de Pauli, que têm importância especial na computação quântica. Veremos como (2.9) adapta-se a elas na próxima seção.

2.2 Equação mestra para medidas do grupo de Pauli

A equação mestra das POVMs contínuas (2.9) pode ser simplificada em alguns casos específicos. Em particular, estamos interessados em medidas de observáveis do grupo de Pauli P_i que, devido às propriedades das matrizes de Pauli, satisfazem

$$P_i^2 = \mathbb{I}, \quad (2.10)$$

onde $\mathbb{I}$ é a identidade. Isso significa que os dois únicos autovalores dos P_i são ± 1 .

É fácil perceber que podemos decompor espectralmente as observáveis P_i em termos de projetores $\Pi_i^{(\pm)}$ que levam aos subespaços dos autovetores de autovalor ± 1 , da seguinte forma:

$$P_i = \Pi_i^{(+)} - \Pi_i^{(-)}. \quad (2.11)$$

Usando (2.11) e as relações de completeza (1.4), podemos escrever:

$$P_i \rho(t) P_i - \rho(t) = -2 \Pi_i^{(+)} \rho(t) \Pi_i^{(-)} - 2 \Pi_i^{(-)} \rho(t) \Pi_i^{(+)}. \quad (2.12)$$

Podemos comparar (2.12) com o termo que aparece entre chaves em (2.9):

$$\sum_{s=\pm} \Pi_i^{(s)} \rho(t) \Pi_i^{(s)} - \rho(t) = -\Pi_i^{(+)} \rho(t) \Pi_i^{(-)} - \Pi_i^{(-)} \rho(t) \Pi_i^{(+)}. \quad (2.13)$$

Com isto, (2.9) assume a forma simplificada

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] + \sum_i \lambda_i \{P_i \rho(t) P_i - \rho(t)\}. \quad (2.14)$$

Esta forma (2.14) da equação mestra também pode ser obtida diretamente da equação de Lindblad²⁶ (ver Apêndice A). O primeiro termo do lado direito de (2.14) é chamado de liouvillian por já estar presente na equação de Liouville-von Neumann (1.3), enquanto que o segundo pode ser chamado de lindbladiano, por estar presente na equação de Lindblad (A.18).

2.3 Equação mestra incluindo o ambiente

Neste trabalho, não estudaremos apenas a interação do sistema-objeto com o medidor, mas também a sua interação com um ambiente que produz ruído. Por isso, descreveremos também um ambiente junto com o sistema-objeto dentro de um operador densidade total $\rho(t)$.

A equação-mestra total será dada por:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_0 + H_A + H_{\text{int}}, \rho(t)] + \lambda \{P\rho(t)P - \rho(t)\}, \quad (2.15)$$

onde H_0 atua apenas sobre os qubits e H_A apenas sobre o ambiente. H_{int} contém os termos de interação.

Não consideraremos mais de um termo de medida de P ao mesmo tempo quando estivermos descrevendo qubits interagindo com o ambiente. O ruído já tornará a descrição complicada o suficiente.

O ambiente será descrito por um banho bosônico cujo hamiltoniano é dado por:

$$H_A = \hbar \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k, \quad (2.16)$$

onde ω_k é uma frequência real e $a_k^\dagger$ e a_k são os operadores de criação e de destruição do k -ésimo modo do banho, atuando sobre os estados da base de Fock $|n\rangle_k$ da seguinte forma:

$$a_k^\dagger |n\rangle_k = \sqrt{n+1} |n+1\rangle_k, \quad (2.17)$$

$$a_k |n\rangle_k = \sqrt{n} |n-1\rangle_k, \quad (2.18)$$

onde os n são números inteiros positivos.

Os hamiltonianos de interação que consideraremos serão os que geram o chamado canal de ruído de fase,

$$H_{\text{int}} = \hbar \sum_k \sigma_z \left(g_k a_k^\dagger + g_k^* a_k \right), \quad (2.19)$$

e o hamiltoniano de Jaynes-Cummings, que gera o decaimento, ou *amplitude damping*,

$$H_{\text{int}} = \hbar \sum_k \left(\sigma_- g_k a_k^\dagger + \sigma_+ g_k^* a_k \right). \quad (2.20)$$

Em ambos os casos, os g_k são números – que podem ser complexos – com unidade de frequência.

Para obter a solução final, tomaremos o limite do contínuo de g_k , que será dado por alguma função de densidade espectral $J(\omega)$ tal que:

$$J(\omega) = \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega - \omega_k), \quad (2.21)$$

de forma que:

$$\int_0^\infty d\omega J(\omega) f(\omega) = \sum_k |g_k|^2 f(\omega_k). \quad (2.22)$$

Escolheremos a densidade espectral $J(\omega)$ tal que:

$$J(\omega) = \eta^2 \frac{1}{\omega_c^{s-1}} \omega^s e^{-\omega/\omega_c}, \quad (2.23)$$

onde ω_c é a frequência de corte e s é um número positivo. Se $0 < s < 1$, o ambiente é chamado sub-ôhmico. Se $s > 1$, o ambiente é superôhmico. Se $s = 1$, ele é ôhmico. A constante η é adimensional, e às vezes a escreveremos fora do hamiltoniano de interação e daremos a ela um valor pequeno, para aplicar métodos perturbativos, conforme veremos ainda neste capítulo.

2.4 Medidas fracas

Medidas fracas não são o foco deste trabalho, mas seu emprego é necessário no capítulo 7, onde as utilizamos para verificar o modelo de descrição da medida empregado ao longo do resto da tese. Por isto, aqui rerepresentaremos as noções básicas de medidas desse tipo.

A descrição original de medidas fracas feita por Aharonov et al.²⁷ emprega o hamiltoniano que von Neumann primeiro utilizou para descrever a interação que ocorre dentro de um aparelho de Stern-Gerlach.² Se estamos interessados na medida de uma observável Q por meio de um ponteiro cuja posição (unidimensional, por simplicidade) é dada pela observável X , este hamiltoniano pode ser condensado na forma:

$$H(t) = -\hbar\eta g(t)QX, \quad (2.24)$$

onde η é um escalar pequeno com unidade do inverso de Q e X , e $g(t)$ é uma função de suporte compacto $\mathbb{S}$, com unidade do inverso do tempo e normalizada de acordo com:

$$\int_{\mathbb{S}} dt g(t) = 1. \quad (2.25)$$

A função $g(t)$ é usada para indicar a duração da medida, e deve estar centrada no momento em que consideramos que ela ocorre. Um exemplo de uma função desse tipo pode ser visto na figura 2.1.

Figura 2.1 – Exemplo de função contínua de suporte compacto: $g(t) = (1/2)(1 + \cos(\pi t))H(t+1)H(1-t)$, onde os $H(x)$ são funções degrau de Heaviside: $H(x) = 1$ se $x > 0$, $H(x) = 0$ caso contrário. Seu suporte é $\mathbb{S} = [-1, 1]$, e essa função já está normalizada.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como nenhum dos operadores em (2.24) depende do tempo, apenas a função escalar $g(t)$ que os multiplica, o hamiltoniano comuta consigo mesmo para diferentes tempos ($[H(t), H(t')] = 0, \forall t, t'$), de forma que podemos escrever o operador evolução temporal simplesmente como a exponencial de sua integral. Sendo $U(t', t)$ o operador unitário que dá a evolução temporal entre os instantes t e t' , ele terá a forma:

$$U(t', t) = \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau g(\tau) QX \right\}. \quad (2.26)$$

Se pensarmos em instantes de tempo inicial $-\tau_i$ e final τ_f de forma que o intervalo de tempo entre eles inclua todo o suporte $\mathbb{S}$ – isto é, $\mathbb{S} \subset [-\tau_i, \tau_f]$ – teremos:

$$|\Psi(\tau_f)\rangle = \exp \{ i\eta QX \} |\Psi(-\tau_i)\rangle. \quad (2.27)$$

Abramos o estado inicial $|\Psi(-\tau_i)\rangle$ em termos dos autovetores de Q e X , fazendo a hipótese de que inicialmente esses dois espaços não estão correlacionados:

$$|\Psi(-\tau_i)\rangle = \sum_q \chi_i^{(q)} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_i(x) |q\rangle \otimes |x\rangle, \quad (2.28)$$

onde, para normalizar o vetor de estado, a função de onda $\psi_i(x)$ e os coeficientes $\chi_i^{(q)}$ satisfazem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_i(x)|^2 = 1, \quad (2.29)$$

$$\sum_q \left| \chi_i^{(q)} \right|^2 = 1. \quad (2.30)$$

Substituindo (2.28) em (2.27), encontramos o seguinte estado final do vetor de estado conjunto do sistema-objeto e do ponteiro:

$$|\Psi(\tau_f)\rangle = \sum_q \chi_i^{(q)} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\eta qx} \psi_i(x) |q\rangle \otimes |x\rangle. \quad (2.31)$$

O significado da exponencial em (2.31) fica mais claro se incluirmos uma relação de completude para os autovetores $|p\rangle$ do momentum P conjugado à posição X . Usando o fato de que

$$\langle p|x\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-ipx/\hbar}, \quad (2.32)$$

podemos escrever o estado final de (2.31) como:

$$|\Psi(\tau_f)\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \sum_q \chi_i^{(q)} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(p-\hbar\eta q)x/\hbar} \psi_i(x) |q\rangle \otimes |x\rangle. \quad (2.33)$$

Identificando a transformada de Fourier da função de onda $\psi_i(x)$,

$$\tilde{\psi}_i(p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx/\hbar} \psi_i(x), \quad (2.34)$$

vemos que a função de onda $\tilde{\psi}_i(p)$ é deslocada de um montante q , a depender do autovetor final de Q que o sistema-objeto apresenta:

$$|\Psi(\tau_f)\rangle = \sum_q \chi_i^{(q)} \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\psi}_i(p - \hbar\eta q) |q\rangle \otimes |p\rangle. \quad (2.35)$$

Se as funções de onda $\tilde{\psi}_i(p - \hbar\eta q)$ para os diferentes valores de q não se sobrepuserem, uma medida de p determina univocamente o valor de q no sistema objeto. Em outras palavras, o estado do sistema-objeto relativo a um certo momentum $|p\rangle$ é, dada uma certa constante de normalização C_p ,

$$\text{rel}_{|p\rangle} |\Psi(\tau_f)\rangle = C_p \sum_q \chi_i^{(q)} \tilde{\psi}_i(p - \hbar\eta q) |q\rangle, \quad (2.36)$$

que corresponde a apenas um autovetor $|q\rangle$ se $\psi_i(p - \hbar\eta q) = 0$ para todo valor de q , exceto um.

Por outro lado, o estado do ponteiro relativo a um certo estado $|q\rangle$ do sistema-objeto, ou seja, o estado do ponteiro após pós-selecionarmos o estado $|f\rangle$ do sistema-objeto, é:

$$\text{rel}_{|q\rangle} |\Psi(\tau_f)\rangle = C_q \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\psi}_i(p - \hbar\eta q) |p\rangle, \quad (2.37)$$

onde, novamente, C_q é uma normalização.

Suponha, porém, que realizamos uma pós-seleção de um estado qualquer $|f\rangle$ do sistema-objeto, isto é, decidimos ver o estado relativo a algo que não é um autovetor de Q . Neste caso, a função de onda final não será tão simples quanto (2.37). Porém, podemos sempre expandir a exponencial em (2.27) numa série de potências:

$$|\Psi(\tau_f)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_q \int_{-\infty}^{\infty} dx (i\eta Q x)^n \psi_i(x) |q\rangle \otimes |x\rangle. \quad (2.38)$$

Pós-selecionando o estado $|f\rangle$ do sistema-objeto e usando a expansão (2.38), encontramos a seguinte expressão final:

$$\text{rel}_{|f\rangle} |\Psi(\tau_f)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx (i\eta x)^n Q_w^{(n)} \psi_i(x) |x\rangle, \quad (2.39)$$

onde empregamos os chamados n -ésimos valores fracos de Q :

$$Q_w^{(n)} \equiv \frac{1}{\langle \chi_f | \chi_i \rangle} \langle \chi_f | Q^n | \chi_i \rangle, \quad (2.40)$$

onde $|\chi_i\rangle$ representa o estado inicial do sistema-objeto:

$$|\chi_i\rangle = \sum_q \chi_i^{(q)} |q\rangle. \quad (2.41)$$

Se a medida for fraca, η é um número pequeno, e podemos descartar termos de ordem maior em (2.39):

$$\text{rel}_{|f\rangle} |\Psi(\tau_f)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_i(x) |x\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} dx (ix) Q_w \psi_i(x) |x\rangle + O(\eta^2), \quad (2.42)$$

onde, como é costumeiro, chamamos o primeiro valor fraco, ou simplesmente valor fraco, de

$$Q_w \equiv Q_w^{(1)}. \quad (2.43)$$

Identificando a expansão em primeira ordem em (2.42) com uma exponencial, podemos escrevê-la como:

$$\text{rel}_{|f\rangle} |\Psi(\tau_f)\rangle = C_f \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \{ (i\eta x) Q_w \} \psi_i(x) |x\rangle + O(\eta^2). \quad (2.44)$$

A situação em (2.44) é a mesma que encontramos em (2.37), mas desta vez com o valor Q_w no lugar do autovalor q . Se identificarmos meramente o deslocamento da função de onda $\tilde{\psi}_i(p)$ com o resultado da medida do sistema-objeto, poderíamos concluir que o resultado de uma medida fraca é o valor fraco. Isso significa que ela pode assumir valores bastante diferentes dos autovalores da medida.²⁷⁻²⁸

Voltaremos a interpretar e generalizar os valores fracos nas nossas contribuições originais do capítulo 7.

2.5 Soluções perturbativas com séries de Dyson

Ao longo deste trabalho, precisaremos obter soluções aproximadas para equações diferenciais cuja solução exata não poderá ser obtida. Porém, como em geral fazemos a hipótese de que ou os erros ou as medidas atuam apenas fracamente sobre o sistema, poderemos obter boas estimativas da resposta pelo emprego de soluções perturbativas.

Para entender como estas funcionam, consideremos uma equação de Schrödinger na qual dividimos o hamiltoniano em H_0 , que atua apenas sobre as partes do sistema individualmente (apenas sobre os qubits, o medidor ou o ambiente, sem termos cruzados), e em um termo de interação $H_{\text{int}}(t)$, que inclui termos cruzados e pode (ou não) depender do tempo:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H_0 |\Psi(t)\rangle + H_{\text{int}}(t) |\Psi(t)\rangle. \quad (2.45)$$

O primeiro passo para obtermos uma solução aproximada de (2.45) consiste em passarmos para a representação de interação, ou seja, transformarmos o vetor de estado $|\Psi(t)\rangle$ em um novo vetor de estado $|\Psi_I(t)\rangle$ no qual esteja embutida a evolução devida a H_0 :

$$|\Psi_I(t)\rangle \equiv e^{iH_0 t/\hbar} |\Psi(t)\rangle, \quad (2.46)$$

e também um novo hamiltoniano da representação de interação no qual também esteja embutida a evolução devida a H_0 :

$$H_I(t) \equiv e^{iH_0 t/\hbar} H_{\text{int}}(t) e^{-iH_0 t/\hbar}. \quad (2.47)$$

Em termos de (2.47), (2.46) evolui conforme uma nova equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi_I(t)\rangle = H_I(t) |\Psi_I(t)\rangle, \quad (2.48)$$

que possivelmente não será mais fácil de resolver exatamente do que (2.45). De fato, sequer podemos exponenciar e integrar $H_I(t)$ para obter o operador de evolução temporal, já que este hamiltoniano provavelmente não comuta consigo mesmo para diferentes instantes de tempo.

Porém, se estivermos considerando que a interação é fraca quando comparada com os demais termos do hamiltoniano, assim como fizemos na seção anterior, vemos que $|\Psi_I(t)\rangle$ em (2.45) evolui apenas por meio de um hamiltoniano proporcional a $H_{\text{int}}(t)$, o que deve provocar pequenas alterações em seu estado por unidade de tempo.

Em particular, podemos escrever explicitamente que H_{int} está multiplicada por uma pequena constante η , de forma que (2.48) pode ser escrita como

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi_I(t)\rangle = \eta H_I(t) |\Psi_I(t)\rangle. \quad (2.49)$$

Como na seção 2.3, aqui a constante η não tem unidade.

Nada nos impede de integrar (2.49) de um instante inicial $-\tau_i$ a um instante final τ_f , de forma a obter:

$$|\Psi_I(\tau_f)\rangle = |\Psi_I(-\tau_i)\rangle - \eta \frac{i}{\hbar} \int_{-\tau_i}^{\tau_f} dt H_I(t) |\Psi_I(t)\rangle. \quad (2.50)$$

Podemos substituir o valor de $|\Psi_I(\tau_f)\rangle$ no último termo do lado direito de (2.50), obtendo agora termos de até segunda ordem escritos explicitamente:

$$\begin{aligned} |\Psi_I(\tau_f)\rangle = & |\Psi_I(-\tau_i)\rangle - \eta \frac{i}{\hbar} \int_{-\tau_i}^{\tau_f} dt H_I(t) |\Psi_I(-\tau_i)\rangle \\ & + \eta^2 \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\tau_i}^{\tau_f} dt_1 \int_{-\tau_i}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) |\Psi_I(t_2)\rangle. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Repetindo o procedimento que fizemos em (2.51) um número infinito de vezes, podemos escrever o estado final $|\Psi_I(\tau_f)\rangle$ apenas em termos do estado inicial $|\Psi_I(-\tau_i)\rangle$:

$$\begin{aligned} |\Psi_I(\tau_f)\rangle = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \eta^n \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{-\tau_i}^{\tau_f} dt_1 \int_{-\tau_i}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\tau_i}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H(t_n) \right\} \\ & \times |\Psi_I(-\tau_i)\rangle. \end{aligned} \quad (2.52)$$

O termo entre chaves do lado direito de (2.52) é a chamada série de Dyson.³⁰ No limite em que τ_f vai a infinito e $-\tau_i$ vai a menos infinito, a série de Dyson é identificada como matriz S .³¹

Se η for pequeno o suficiente, e os tempos envolvidos não muito longos, podemos descartar termos de ordem maior de (2.52), ficando apenas com aqueles termos de ordem menor que nos permitem obter uma solução aproximada do estado final a partir do estado inicial.

2.6 Séries de Dyson para operadores densidade

O vetor de estado não é suficiente para a descrição dos fenômenos de medidas ruidosas que buscamos neste trabalho. Para isso, precisamos de equações que envolvam o operador densidade, como a equação de Liouville-von Neumann (1.6) ou equações mestras.

A solução neste caso é semelhante, precisamos apenas dividir o lado direito da equação do operador densidade, seja ela qual for, em dois superoperadores, um que atua fortemente $\mathcal{A}$, e outro que é apenas uma perturbação proporcional a η , $\mathcal{B}(t)$:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{A}\rho(t) + \eta\mathcal{B}(t)\rho(t), \quad (2.53)$$

onde, mais uma vez, consideraremos apenas a perturbação dependente do tempo.

Os superoperadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}(t)$ atuam sobre operadores como $\rho(t)$ por uma série de operações pela esquerda ou pela direita. Ou seja, existem dois conjuntos de operadores A_i , A'_i e $B_i(t)$ e $B'_i(t)$ tais que:

$$\mathcal{A}\rho(t) = \sum_i A_i\rho(t)A'_i, \quad (2.54)$$

$$\mathcal{B}(t)\rho(t) = \sum_i B_i(t)\rho(t)B'_i(t). \quad (2.55)$$

Dessa forma, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}(t)$ podem conter pedaços do liouvilliano ou do lindbladiano, conforme for conveniente. Para que seja proporcional a η , porém, normalmente tomaremos $\mathcal{B}(t)$ como o termo do liouvilliano que contém H_{int} .

Mais uma vez, o procedimento para resolver (2.53) consiste em definir-se uma representação de interação tal que:

$$\rho_I(t) \equiv e^{-\mathcal{A}t}\rho(t), \quad (2.56)$$

$$\mathcal{B}_I(t) \equiv e^{-\mathcal{A}t}\mathcal{B}(t)e^{\mathcal{A}t}, \quad (2.57)$$

em termos da qual a equação diferencial (2.53) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt}\rho_I(t) = \mathcal{B}_I(t)\rho_I(t). \quad (2.58)$$

As exponenciais de superoperadores como $e^{-\mathcal{A}t}$ podem ser obtidas em termos de séries de potências, como as exponenciais de matrizes, mas também podem ser obtidas de forma mais prática pela solução de uma equação diferencial de primeira ordem como:

$$\frac{d}{dt} \{e^{-\mathcal{A}t}\rho(0)\} = -\mathcal{A} \{e^{-\mathcal{A}t}\rho(0)\}. \quad (2.59)$$

De qualquer forma, podemos integrar (2.58) como fizemos em (2.50) e (2.51) para obter:

$$\rho_I(t) = \rho(0) + \eta \int_0^t dt_1 \mathcal{B}_I(t_1)\rho_I(t_1), \quad (2.60)$$

$$\rho_I(t) = \rho(0) + \eta \int_0^t dt_1 \mathcal{B}_I(t_1)\rho(0) + \eta^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \mathcal{B}_I(t_1)\mathcal{B}_I(t_2)\rho_I(t_2), \quad (2.61)$$

onde usamos o fato de que, pela definição (2.56), $\rho_I(0) = \rho(0)$.

E, mais uma vez, se repetirmos o procedimento um número infinito de vezes, obtemos o equivalente à série de Dyson (2.52):

$$\rho_I(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \mathcal{B}_I(t_1)\mathcal{B}_I(t_2) \dots \mathcal{B}_I(t_n)\rho(0). \quad (2.62)$$

Nas nossas soluções, buscaremos escrever o estado final apenas em termos dos primeiros termos da série de Dyson (2.62).

2.7 Equação mestra para o ambiente na representação híbrida

Ao resolvermos equações do tipo (2.15) usando os métodos aproximativos (2.62), não estamos interessados no operador densidade total $\rho(t)$, que inclui explicitamente todos os graus de liberdade do ambiente. Assim como no caso do medidor, apenas uma descrição completa do estado do sistema-objeto é que nos interessa. Convém lembrar que, ao calcularmos o resultado final de (2.15), tomaremos o traço parcial sobre os estados do ambiente para obter a matriz densidade reduzida do sistema-objeto, $\rho_S(t)$.

Sem perder qualquer informação relevante, portanto, podemos passar a uma representação de interação híbrida, similar ao que fizemos em (2.47), mas desta vez incorporando apenas o hamiltoniano H_A ao hamiltoniano de interação, da seguinte forma:

$$\tilde{H}(t) \equiv e^{iH_A t/\hbar} H_{\text{int}} e^{-iH_A t/\hbar}. \quad (2.63)$$

Como H_S e H_A atuam em espaços completamente diferentes, $[H_S, H_A] = 0$, e o hamiltoniano do sistema-objeto não terá qualquer alteração nessa mudança de representação. O mesmo é verdade para quaisquer termos lindbladianos em (2.15), pois estes também são constituídos de observáveis do sistema-objeto. Portanto, apenas precisamos alterar o operador densidade do sistema total:

$$\tilde{\rho}(t) \equiv e^{iH_A t/\hbar} \rho(t) e^{-iH_A t/\hbar}. \quad (2.64)$$

É importante notar que, se tomarmos o traço parcial sobre os estados do ambiente em (2.64), obtemos o mesmo operador densidade reduzido que obteríamos na representação usual, isto é:

$$\text{Tr}_A \{\tilde{\rho}(t)\} = \text{Tr}_A \{e^{iH_A t/\hbar} \rho(t) e^{-iH_A t/\hbar}\} = \text{Tr}_A \{e^{-iH_A t/\hbar} e^{iH_A t/\hbar} \rho(t)\} = \rho_S(t), \quad (2.65)$$

onde usamos o fato de que $\text{Tr}_A \{XY\} = \text{Tr}_A \{YX\}$, se Y contiver apenas operadores que atuam no espaço A – o que é o caso de H_A e de sua exponencial.

Por meio das transformações (2.63) e (2.64), obtemos uma nova forma da equação mestra da medida com ambiente (2.15):

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_S + \tilde{H}(t), \tilde{\rho}(t)] + \sum_i \lambda_i \{P_i \tilde{\rho}(t) P_i - \tilde{\rho}(t)\}. \quad (2.66)$$

Apenas precisamos tomar cuidado na hora de expressar o operador hamiltoniano modificado $\tilde{H}(t)$ (2.63). Como os dois tipos de hamiltoniano de interação que empregaremos nesta tese, (2.19) e (2.20), podem ser expressos da forma:

$$H_{\text{int}} = \sum_k \left\{ S_k a_k + S_k^\dagger a_k^\dagger \right\}, \quad (2.67)$$

onde S_k são operadores que só atuam sobre o sistema-objeto, precisamos apenas saber como a transformação (2.63) afeta os operadores de criação e de destruição $a_k^\dagger, a_k$.

Para isso, empregamos a relação de comutação $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{i,j}$, que segue direto das definições (2.17) e (2.18), e a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff,³² demonstrada no Apêndice B. Além disso, precisamos notar que:

$$[a_k^\dagger a_k, a_k] = a_k^\dagger [a_k, a_k] + [a_k^\dagger, a_k] a_k = -a_k, \quad (2.68)$$

$$[a_k^\dagger a_k, a_k^\dagger] = a_k^\dagger [a_k, a_k^\dagger] + [a_k^\dagger, a_k^\dagger] a_k = a_k^\dagger. \quad (2.69)$$

Daí, empregando a relação (B.7):

$$e^{i \sum_j \omega_j a_j^\dagger a_j t} a_k e^{-i \sum_j \omega_j a_j^\dagger a_j t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i\omega_k t)^n a_k = e^{-i\omega_k t} a_k, \quad (2.70)$$

$$e^{i \sum_j \omega_j a_j^\dagger a_j t} a_k^\dagger e^{-i \sum_j \omega_j a_j^\dagger a_j t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\omega_k t)^n a_k^\dagger = e^{i\omega_k t} a_k^\dagger. \quad (2.71)$$

Portanto, uma equação do tipo (2.67) transforma-se em:

$$\tilde{H}(t) = \sum_k \left\{ S_k a_k e^{-i\omega_k t} + S_k^\dagger a_k^\dagger e^{i\omega_k t} \right\}. \quad (2.72)$$

No caso específico das interações (2.19) e (2.20), obtemos, para o ruído de fase:

$$\tilde{H}(t) = \hbar \sigma_z \sum_k \left\{ g_k^* a_k e^{-i\omega_k t} + g_k a_k^\dagger e^{i\omega_k t} \right\}, \quad (2.73)$$

e, para a interação de Jaynes-Cummings,

$$\tilde{H}(t) = \hbar \sum_k \left\{ g_k^* \sigma_+ a_k e^{-i\omega_k t} + g_k \sigma_- a_k^\dagger e^{i\omega_k t} \right\}. \quad (2.74)$$

Empregaremos uma interações do tipo (2.73) nos capítulos 4 e 6, enquanto (2.74) será usada no capítulo 5.

Para encontrar soluções para (2.66), podemos empregar o traço parcial de (2.61) em conjunto com a aproximação de Born, que permite separar os estados do sistema-objeto e do ambiente em qualquer instante:

$$\rho(t_2) \approx \rho_S(t_2) \otimes \rho_A(0). \quad (2.75)$$

Indo mais além e aproximando

$$\rho(t_2) \approx \rho_S(t_1) \otimes \rho_A(0). \quad (2.76)$$

é possível tomar a derivada e encontrar uma equação diferencial de primeira ordem para $\rho_S(t)$, chamada de equação mestra híbrida.²⁹

Além destes métodos perturbativos, também empregaremos uma abordagem numérica que permita escrever simulações das soluções exatas, como descreveremos na próxima seção.

2.8 Método do superoperador partido ao meio

Uma outra forma de se obter uma solução aproximada para uma equação do tipo (2.53) quando $\mathcal{B}$ independe do tempo é empregar-se o fato de que a solução exata dessa equação é dada por:

$$\rho(t) = \exp \{(\mathcal{A} + \mathcal{B}) t\} \rho(0). \quad (2.77)$$

A forma exata do superoperador exponencial $e^{(\mathcal{A}+\mathcal{B})t}$ pode ser difícil de ser encontrada. Porém, sempre podemos parti-lo numa série de N superoperadores de duração curta Δt , tais que $N\Delta t = t$:

$$\exp \{(\mathcal{A} + \mathcal{B}) t\} = \{\exp [(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \Delta t]\}^N. \quad (2.78)$$

Desde que Δt sejam pequeno o suficiente, podemos aproximar a exponencial de $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ por uma série de potências na qual termos de ordem maior podem ser descartados:

$$\exp [(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \Delta t] = 1 + (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \Delta t + O(\Delta t^2) = e^{\mathcal{A}\Delta t} e^{\mathcal{B}\Delta t} + O(\Delta t^2). \quad (2.79)$$

Mesmo após N multiplicações, (2.79) ainda terá correções da ordem de $N(\Delta t)^2 = t\Delta t = O(\Delta t)$, que podem ser descartadas se fizermos Δt pequeno o suficiente.

$$\exp \{(\mathcal{A} + \mathcal{B}) t\} = [e^{\mathcal{A}\Delta t} e^{\mathcal{B}\Delta t}]^N + O(\Delta t). \quad (2.80)$$

Assim, se soubermos calcular as soluções $e^{\mathcal{A}t}$ e $e^{\mathcal{B}t}$, seremos capazes de simular numericamente a solução $e^{(\mathcal{A}+\mathcal{B})t}$ com quanta precisão quisermos. Usaremos este método do superoperador partido ao meio diversas vezes ao longo desta tese.

3 SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO MESTRA DA MEDIDA

Nos próximos capítulos, veremos como uma medida quântica descrita por meio de uma equação mestra interage com um ambiente que produz ruído não markoviano, que descrevemos por meio de um acoplamento fraco com um campo bosônico. Se descrevêssemos tanto o ambiente quanto o medidor por termos lindbladianos da equação mestra, os dois seriam tratados como markovianos. Suas soluções seriam mais simples do que no caso em que levamos em conta todos os graus de liberdade do ambiente, mas alguns fenômenos importantes seriam eliminados da descrição.

Neste capítulo, apresentaremos soluções da equação mestra (2.14) sem o ambiente incluso explicitamente, algumas das quais serão reutilizadas nos capítulos seguintes em conjunto com uma descrição explícita do ambiente.

3.1 Uma medida paralela ou ortogonal

Desde que o seu hamiltoniano comute com o observável, a solução para (2.14) no caso da medida de um qubit é bastante simples de ser obtida. Suponha que o hamiltoniano seja $\hbar\omega_0\sigma_{\mathfrak{s}}$ (com $\omega_0 > 0$ tendo unidade de frequência), e que meçamos apenas $\sigma_{\mathfrak{s}}$. Neste caso, a equação mestra a ser resolvida será:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i\omega_0 [\sigma_{\mathfrak{s}}, \rho_S(t)] + \lambda \{ \sigma_{\mathfrak{s}}\rho_S(t)\sigma_{\mathfrak{s}} - \rho_S(t) \}. \quad (3.1)$$

É fácil verificar que a solução dessa equação mestra que satisfaz as condições iniciais em $t = 0$ é:

$$\rho_S(t) = e^{-\lambda t} e^{-i\omega_0\sigma_{\mathfrak{s}}t} \{ \cosh(\lambda t) \rho_S(0) + \sinh(\lambda t) \sigma_{\mathfrak{s}}\rho_S(0)\sigma_{\mathfrak{s}} \} e^{i\omega_0\sigma_{\mathfrak{s}}t}. \quad (3.2)$$

Tomando os elementos da (3.2), podemos ver que as coerências na base de autoestados de $\sigma_{\mathfrak{s}}$ oscilam no tempo com $2\omega_0$ e desaparecem exponencialmente com 2λ , enquanto as populações (termos da diagonal) permanecem constantes, pois

$$\rho_{00}(t) = \rho_{00}(0), \quad (3.3)$$

$$\rho_{01}(t) = e^{-2i\omega_0 t} e^{-2\lambda t} \rho_{01}(0), \quad (3.4)$$

onde usamos a notação simplificada $\rho_{ij}(t) \equiv \langle i |_{\mathfrak{s}} \rho_S(t) | j \rangle_{\mathfrak{s}}$. Claramente, $\rho_{11}(t) = 1 - \rho_{00}(t)$ e $\rho_{10}(t) = \rho_{01}^*(t)$ para todo instante de tempo, de forma que a outra população permanece

constante e a outra coerência oscila como a primeira.

A descoerência dos termos fora da diagonal na base de autoestados de σ_z corresponde ao que esperamos para uma medida dessa observável. No limite do tempo infinito, essa coerência desaparece, completando o processo 1, como já sabíamos. O que esta equação mestra revela é que a dinâmica da descoerência é de uma exponencial negativa, e essa torna-se importante quando a medida é fraca, ou quando ela nunca se completa. Podemos ver a forma da evolução das coerências nesse caso na figura 3.1: elas oscilam com ω_0 , e essa oscilação é amortecida pela presença de λ .

Figura 3.1 – Dado um qubit inicialmente no estado puro $|0\rangle_{\hat{x}} = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ e uma medida de σ_z , as partes real (a,c) e imaginária (b,d) da coerência na base de autoestados de σ_z para diferentes valores de ω_0 (a,b) e λ (c,d) quando a medida comuta com o hamiltoniano do sistema. Vê-se que as coerências oscilam com frequência $2\omega_0$, mas a amplitude de oscilação decresce exponencialmente com 2λ , praticamente desaparecendo quando $t \sim \ln(10)\lambda^{-1}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Também é simples resolver a equação mestra da medida para um qubit quando a observável anticomuta com o hamiltoniano do sistema. Sem perda de generalidade, podemos escolher a observável como sendo σ_x , enquanto o hamiltoniano é dado por $\hbar\omega_0\sigma_z$. Neste caso, (2.14) torna-se:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i\omega_0 [\sigma_z, \rho(t)] + \lambda \{ \sigma_x \rho(t) \sigma_x - \rho(t) \}. \quad (3.5)$$

A solução de (3.5) não é tão óbvia quanto o caso em que a medida comutava com o hamiltoniano, mas pode ser obtida se tomarmos cada elemento de matriz da equação mestra, obtendo quatro equações diferenciais acopladas duas a duas:

$$\dot{\rho}_{00}(t) = \lambda \{ \rho_{11}(t) - \rho_{00}(t) \}, \quad (3.6)$$

$$\dot{\rho}_{01}(t) = -2i\omega_0 \rho_{01}(t) + \lambda \{ \rho_{10}(t) - \rho_{01}(t) \}, \quad (3.7)$$

$$\dot{\rho}_{10}(t) = 2i\omega_0 \rho_{10}(t) + \lambda \{ \rho_{01}(t) - \rho_{10}(t) \}, \quad (3.8)$$

$$\dot{\rho}_{11}(t) = \lambda \{ \rho_{00}(t) - \rho_{11}(t) \}, \quad (3.9)$$

onde novamente empregamos a notação abreviada $\rho_{ij}(t) \equiv \langle i | \rho(t) | j \rangle$.

Como o par de equações diferenciais das populações não se acopla com o par de equações diferenciais das coerências, podemos escrever essas duas de forma matricial usando apenas matrizes 2×2 :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \rho_{00}(t) \\ \rho_{11}(t) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{00}(t) \\ \rho_{11}(t) \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i\omega_0 - \lambda & \lambda \\ \lambda & 2i\omega_0 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Como a matriz presente do lado direito de (3.10) é $\lambda(-1 + \sigma_x)$, é fácil concluir que, para encontrar a solução da equação diferencial, precisamos apenas do produto das exponenciais $e^{-\lambda t} e^{\lambda \sigma_x t}$. A exponencial de uma matriz $\sigma_{\mathfrak{s}}$ (1.25) sempre pode ser encontrada por uma expansão em série de potências:

$$e^{\alpha \sigma_{\mathfrak{s}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\alpha \sigma_{\mathfrak{s}})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \sigma_{\mathfrak{s}} = \cosh \alpha + \sigma_{\mathfrak{s}} \sinh \alpha, \quad (3.12)$$

onde α é um escalar qualquer e usamos o fato de que $\sigma_{\mathfrak{s}}^2 = 1$.

Portanto, a solução de (3.10) será:

$$\begin{pmatrix} \rho_{00}(t) \\ \rho_{11}(t) \end{pmatrix} = e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} \cosh(\lambda t) & \sinh(\lambda t) \\ \sinh(\lambda t) & \cosh(\lambda t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{00}(0) \\ \rho_{11}(0) \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

ou, eliminando uma das populações devido ao fato de que $\rho_{00}(t) + \rho_{11}(t) = 1$ para qualquer instante de tempo,

$$\rho_{00}(t) = \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2} + e^{-2\lambda t} \rho_{00}(0). \quad (3.14)$$

Ou seja, as duas populações são conduzidas exponencialmente ao mesmo valor final $1/2$, o que significa que toda a informação originalmente contida na diferença entre as populações na base de σ_z é, no fim, destruída pela medida de σ_x . Isso não é inesperado, pois as populações na base de σ_z dependem das coerências na base de σ_x , as quais, já sabemos, são eliminadas durante o processo de medida.

De fato, a parte real da coerência na base de σ_x é, neste caso:

$$\text{Re} \left\{ \rho_{01}^{(x)}(t) \right\} = \rho_{00}^{(z)}(t) - \frac{1}{2} = e^{-2\lambda t} \text{Re} \left\{ \rho_{01}^{(x)}(0) \right\}, \quad (3.15)$$

onde empregamos a notação $\rho_{ij}^{(z)} \equiv \langle i | \rho_S | j \rangle$ e $\rho_{ij}^{(x)} \equiv \langle i |_{\hat{x}} \rho_S | j \rangle_{\hat{x}}$. Essa parte da coerência desaparece com a exponencial negativa de λ , como ilustrado na figura 3.2.

Figura 3.2 – Evolução das duas populações na base de autovetores de σ_z e da parte real das coerências na base de autovetores de σ_x para um sistema inicialmente no estado $|0\rangle = (|0\rangle_{\hat{x}} + |1\rangle_{\hat{x}})/\sqrt{2}$, sujeito a uma medida de σ_x .

Fonte: Elaborada pelo autor.

As coerências exigem um pouco mais de atenção, mas como o sistema de equações (3.11) também pode ser escrito em termos de uma matriz 2×2 , a solução ainda será uma exponencial das matrizes de Pauli:

$$\begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix} = e^{-\lambda t} e^{\mathbf{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} t} \begin{pmatrix} \rho_{01}(0) \\ \rho_{10}(0) \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

onde definimos o vetor $\mathbf{\Omega} \equiv \lambda \hat{\mathbf{x}} - 2i\omega_0 \hat{\mathbf{z}}$. Definiremos o escalar real Ω como $\sqrt{\lambda^2 - 4\omega_0^2}$ caso $\lambda > 2\omega_0$, e como $\sqrt{4\omega_0^2 - \lambda^2}$ se $\lambda < 2\omega_0$, de forma que as potências pares de $\mathbf{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ serão:

$$[\mathbf{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}]^{2n} = \begin{cases} \Omega^{2n} & , \text{ se } \lambda > 2\omega_0, \\ (-1)^n \Omega^{2n} & , \text{ se } \lambda < 2\omega_0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Por isso, uma exponencial de $\mathbf{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ resulta em:

$$e^{\mathbf{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} t} = \begin{cases} \cosh(\Omega t) + \sinh(\Omega t) [\mathbf{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}] / \Omega & , \text{ se } \lambda > 2\omega_0, \\ \cos(\Omega t) + \sin(\Omega t) [\mathbf{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}] / \Omega & , \text{ se } \lambda < 2\omega_0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Em termos de apenas uma coerência escrita explicitamente:

$$\rho_{01}(t) = e^{-\lambda t} \left\{ \cosh(\Omega t) \rho_{01}(0) + \frac{1}{\Omega} \sinh(\Omega t) [\lambda \rho_{10}(0) - 2i\omega_0 \rho_{01}(0)] \right\}, \quad (3.19)$$

se $\lambda > 2\omega_0$, ou

$$\rho_{01}(t) = e^{-\lambda t} \left\{ \cos(\Omega t) \rho_{01}(0) + \frac{1}{\Omega} \sin(\Omega t) [\lambda \rho_{10}(0) - 2i\omega_0 \rho_{01}(0)] \right\}, \quad (3.20)$$

se $\lambda < 2\omega_0$. Ambos os resultados convergem a

$$\rho_{01}(t) = e^{-\lambda t} \{ \rho_{01}(0) + \lambda t [\rho_{01}(0) - i\rho_{01}(0)] \}, \quad (3.21)$$

no limite em que $\Omega \rightarrow 0$, isto é, quando $\lambda = 2\omega_0$.

Nos três casos, as coerências vão a zero no limite em que $t \rightarrow \infty$. Em termos da base de autovetores de σ_x , isso é o mesmo que eliminar a parte imaginária das coerências (o que é esperado, já que uma medida numa certa base causa descoerência nessa base) e levar as duas populações ao mesmo valor final de 1/2, devido ao fato de que:

$$\rho_{00}^{(x)}(t) = \frac{1}{2} + \text{Re} \left\{ \rho_{01}^{(z)}(t) \right\}, \quad (3.22)$$

e também ao fato de que as partes imaginárias das coerências são as mesmas nas duas bases.

Ou seja, quando há uma diferença de energia entre os possíveis estados do sistema-objeto (o que, em termos de computação quântica, equivale a sujeitar o qubit a uma porta lógica) e é realizada uma medida ortogonal, não é eliminada apenas a informação contida nas coerências da base, mas toda a informação do ensemble. O estado final do operador densidade é 1/2 multiplicado pela identidade, o que dá iguais probabilidades para os dois resultados de qualquer medida posterior. Este resultado já está presente na literatura.²⁵

Uma visão mais abrangente do fenômeno pode ser vista na figura 3.3. Nela, mostramos como as partes real e imaginária das coerências variam em função do tempo para diferentes valores de ω_0 e λ , para os casos $\lambda > 2\omega_0$ e $\lambda < 2\omega_0$, com o estado inicial $|0\rangle_x$, o mesmo da figura 3.1. O comportamento das coerências no caso em que a medida não predomina sobre a porta lógica, $\lambda < 2\omega_0$, é bastante similar à medida de σ_z descrita na figura 3.1. Em geral, vemos que um aumento de ω_0 faz as coerências oscilarem com maior frequência ao redor de zero, enquanto que um aumento λ amortece essa oscilação, fazendo os valores das coerências tenderem a zero.

Uma exceção aparente ocorre na figura 3.3(c), na qual um aumento de λ parece dimi-

Figura 3.3 – Coerências durante medida contínua de σ_x enquanto ocorre a porta lógica σ_z .

Fonte: Elaborada pelo autor.

nir a rapidez com que a parte real da coerência se aproxima de zero. Isso ocorre porque nesse gráfico estamos medindo o tempo em múltiplos de ω_0^{-1} , cuja presença é necessária para que haja descoerência da parte real quando a medida é de σ_x , como podemos ver na figura 3.3(a). Se $\lambda \gg \omega_0$, a porta lógica será praticamente desprezível em comparação com a medida, e quase não haverá descoerência da parte real. De fato, veremos na próxima seção que uma medida contínua concomitante à porta lógica é equivalente a girar a observável, o que resulta numa diminuição da população que está sendo observada. Na figura 3.3(c), essa rotação é proporcionalmente lenta, e quase não há descoerência.

3.2 Uma medida contínua em geral

Em geral, uma medida não precisa nem comutar nem anticomutar com o operador hamiltoniano. Neste caso, ainda deixando os autoestados do hamiltoniano selecionarem o eixo z , temos a seguinte equação mestra (2.9):

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i\omega_0 [\sigma_z, \rho(t)] + \lambda \{ \sigma_{\hat{s}} \rho(t) \sigma_{\hat{s}} - \rho(t) \}. \quad (3.23)$$

Se tentarmos resolver (3.23) elemento a elemento, encontraremos três equações acopladas, envolvendo as coerências e uma população – ou, equivalentemente, as três componentes do vetor de Bloch (1.34). É necessária a diagonalização de uma matriz 3×3 para encontrar uma solução que, apesar de exata, não é particularmente esclarecedora.

Mais interessante é dividir o lado direito de (3.23) em dois superoperadores:

$$\mathcal{A}\rho(t) = -i\omega_0 [\sigma_z, \rho(t)], \quad (3.24)$$

$$\mathcal{B}\rho(t) = \lambda \{ \sigma_{\hat{s}} \rho(t) \sigma_{\hat{s}} - \rho(t) \}, \quad (3.25)$$

e passar à representação de interação (2.56-2.57), sem fazer qualquer hipótese sobre qual operador é uma perturbação ou não:

$$\mathcal{B}_I(t)\rho_I(t) = e^{-\mathcal{A}t}\mathcal{B}(t)e^{\mathcal{A}t}\rho_I(t) = \lambda \{ \sigma_I(t)\rho_I(t)\sigma_I(t) + \rho_I(t) \}, \quad (3.26)$$

onde definimos o operador $\sigma_I(t)$ como:

$$\sigma_I(t) \equiv e^{i\omega_0\sigma_z t}\sigma_{\hat{s}}e^{-i\omega_0\sigma_z t}. \quad (3.27)$$

O operador (3.27) pode ser calculado por meio da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (B.7):

$$\sigma_I(t) = \sigma_{\hat{s}} + i\omega_0 t [\sigma_z, \sigma_{\hat{s}}] - \frac{(\omega_0 t)^2}{2} [\sigma_z, [\sigma_z, \sigma_{\hat{s}}]] + \dots \quad (3.28)$$

Sem perda de generalidade, como só há duas direções relevantes na equação (3.23), podemos confinar o versor $\hat{s}$ ao plano xz :

$$\hat{s} = \cos \theta \hat{z} + \sin \theta \hat{x}. \quad (3.29)$$

Dessa forma, os comutadores de $\sigma_{\hat{s}}$ com σ_z tornam-se:

$$[\sigma_z, \sigma_{\hat{s}}] = 2i \sin \theta \sigma_y, \quad (3.30)$$

$$[\sigma_z, [\sigma_z, \sigma_{\hat{s}}]] = 4 \sin \theta \sigma_x, \quad (3.31)$$

$$[\sigma_z, [\sigma_z, [\sigma_z, \sigma_{\hat{s}}]]] = 8i \sin \theta \sigma_y, \quad (3.32)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Por isso, a expansão (3.28) torna-se:

$$\begin{aligned} \sigma_I(t) &= \cos \theta \sigma_z + \sin \theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (2i\omega_0 t)^{2n} \sigma_x + i \sin \theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (2i\omega_0 t)^{2n+1} \sigma_y \\ &= \cos \theta \sigma_z + \sin \theta \cos(2\omega_0 t) \sigma_x - \sin \theta \sin(2\omega_0 t) \sigma_y, \end{aligned} \quad (3.33)$$

que não comutam entre si para instantes de tempo diferentes.

Ou seja, a presença do hamiltoniano $H = \hbar\omega_0\sigma_z$ é equivalente a girar a observável ao redor do eixo z com uma frequência $2\omega_0$. Se quisermos escrever o operador ainda em termos de um versor, isto é, $\sigma_I(t) = \hat{s}_I(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}$, este versor girante será:

$$\hat{s}_I(t) = \cos \theta \hat{z} + \sin \theta \cos(2\omega_0 t) \hat{x} - \sin \theta \sin(2\omega_0 t) \hat{y}. \quad (3.34)$$

Como sabemos que uma medida elimina as coerências na base de seus autovetores, se a observável muda, ela deve ao fim eliminar as coerências em todas as bases pelas quais passa. Se $\theta = 0$, o versor (3.34) não gira, e apenas as coerências na base de σ_z , que correspondem às componentes do vetor de Bloch (1.34) no plano xy , são eliminadas. Se $\theta = \pi/2$, todos os pontos da esfera pertencem em algum momento ao plano perpendicular ao versor $\hat{s}_I(t)$, de forma que no fim todas as componentes do vetor de Bloch são eliminadas, como vimos na seção anterior. Casos intermediários também levam à eliminação de todas as componentes, mas em um período mais longo.

Usando a identidade (1.28), podemos concluir que se escrevermos o operador densidade na representação de interação (2.56):

$$\rho_I(t) \equiv e^{-\mathcal{A}t} \rho(t) = e^{i\omega_0 \sigma_z t} \rho(t) e^{-i\omega_0 \sigma_z t}, \quad (3.35)$$

e depois explicitarmos seu vetor de Bloch na representação de interação $\mathbf{b}_I(t)$, conforme definido em (1.34), a equação mestra (3.23) torna-se:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{b}_I(t) = 2\lambda \{ [\mathbf{b}_I(t) \cdot \hat{\mathbf{s}}_I(t)] \hat{\mathbf{s}}_I(t) - \mathbf{b}_I(t) \}. \quad (3.36)$$

Ou, definindo:

$$\tilde{\mathbf{b}}_I(t) \equiv e^{2\lambda t} \mathbf{b}_I(t), \quad (3.37)$$

a equação (3.36) torna-se:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{b}}_I(t) = 2\lambda [\hat{\mathbf{s}}_I(t) \hat{\mathbf{s}}_I(t)] \cdot \tilde{\mathbf{b}}_I(t), \quad (3.38)$$

onde o termo entre colchetes é um tensor.

Se integrarmos os dois lados de (3.38) e usarmos (3.37), encontramos a seguinte solução iterativa para o vetor de Bloch na representação de interação:

$$\mathbf{b}_I(t) = e^{-2\lambda t} \mathbf{b}(0) + 2\lambda \int_0^t dt_1 e^{-2\lambda(t-t_1)} [\hat{\mathbf{s}}_I(t_1) \hat{\mathbf{s}}_I(t_1)] \cdot \mathbf{b}_I(t_1). \quad (3.39)$$

O vetor de Bloch na representação de interação $\mathbf{b}_I(t)$ e o vetor de Bloch fora dessa representação relacionam-se pela transformação $e^{\mathcal{A}t}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_I(t) \cdot \boldsymbol{\sigma} &= e^{-\mathcal{A}t} \mathbf{b}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ &= e^{i\omega_0 \sigma_z t} \mathbf{b}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma} e^{-i\omega_0 \sigma_z t} \\ &= b_z(t) \sigma_z + e^{2i\omega_0 \sigma_z t} b_x(t) \sigma_x + e^{2i\omega_0 \sigma_z t} b_y(t) \sigma_y \\ &= b_z(t) \sigma_z + [\cos(2\omega_0 t) b_x(t) + \sin(2\omega_0 t) b_y(t)] \sigma_x \\ &\quad + [\cos(2\omega_0 t) b_y(t) - \sin(2\omega_0 t) b_x(t)] \sigma_y. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Por isso, as componentes do vetor de Bloch na representação de interação se relacionam com as componentes fora dessa representação por meio das identidades:

$$b_z(t) = [b_z(t)]_I, \quad (3.41)$$

$$b_x(t) = \cos(2\omega_0 t) [b_x(t)]_I - \sin(2\omega_0 t) [b_y(t)]_I, \quad (3.42)$$

$$b_y(t) = \sin(2\omega_0 t) [b_x(t)]_I + \cos(2\omega_0 t) [b_y(t)]_I. \quad (3.43)$$

Usando a integral (3.39) para calcular numericamente as componentes do vetor de

Bloch na representação de interação, basta depois empregar as relações (3.41), (3.42) e (3.43) para obter o vetor de Bloch na representação costumeira.

Outra forma de resolver (3.23) é pelo método do superoperador partido ao meio (2.80). Como vimos em (3.40), o superoperador $e^{\mathcal{A}t}$ atua sobre o vetor de Pauli $\mathbf{b}(t)$ conforme:

$$e^{\mathcal{A}t}\mathbf{b}(t) = b_z(t)\hat{\mathbf{z}} + [\cos(2\omega_0 t)b_x(t) - \sin(2\omega_0 t)b_y(t)]\hat{\mathbf{x}} + [\cos(2\omega_0 t)b_y(t) + \sin(2\omega_0 t)b_x(t)]\hat{\mathbf{y}}. \quad (3.44)$$

Em termos matriciais,

$$e^{\mathcal{A}t} \begin{pmatrix} b_z(t) \\ b_x(t) \\ b_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\omega_0 t) & -\sin(2\omega_0 t) \\ 0 & \sin(2\omega_0 t) & \cos(2\omega_0 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_z(t) \\ b_x(t) \\ b_y(t) \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Com respeito à exponencial do superoperador $\mathcal{B}$ (3.25), sabemos sua forma de (3.2):

$$e^{\mathcal{B}t}\rho(t) = e^{-\lambda t} \{ \cosh(\lambda t) \rho(t) + \sinh(\lambda t) \sigma_{\hat{\mathbf{s}}} \rho(t) \sigma_{\hat{\mathbf{s}}} \}. \quad (3.46)$$

Substituindo o valor do vetor de Bloch $\mathbf{b}(t)$ (1.34) e usando a identidade (1.28), encontramos o seguinte:

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{B}t}\mathbf{b}(t) &= e^{-\lambda t} \{ \cosh(\lambda t) \mathbf{b}(t) + 2\sinh(\lambda t) [\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{b}(t)] \hat{\mathbf{s}} - \sinh(\lambda t) \mathbf{b}(t) \} \\ &= \{ e^{-2\lambda t} \mathbf{b}(t) + (1 - e^{-2\lambda t}) [\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{b}(t)] \hat{\mathbf{s}} \}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Confinando o versor $\hat{\mathbf{s}}$ ao plano xz como em (3.29), encontramos:

$$[\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{b}(t)] \hat{\mathbf{s}} = \cos \theta [b_z(t) \cos \theta + b_x(t) \sin \theta] \hat{\mathbf{z}} + \sin \theta [b_z(t) \cos \theta + b_x(t) \sin \theta] \hat{\mathbf{x}}. \quad (3.48)$$

Daí, em termos matriciais:

$$e^{\mathcal{B}t} \begin{pmatrix} b_z(t) \\ b_x(t) \\ b_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\lambda t} + (1 - e^{-2\lambda t}) \cos^2 \theta & (1 - e^{-2\lambda t}) \cos \theta \sin \theta & 0 \\ (1 - e^{-2\lambda t}) \cos \theta \sin \theta & e^{-2\lambda t} + (1 - e^{-2\lambda t}) \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_z(t) \\ b_x(t) \\ b_y(t) \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Por isso, podemos calcular numericamente o estado final do vetor de Bloch em $t = N\Delta t$ por meio de N passos de duração Δt :

$$\begin{pmatrix} b_z(N\Delta t) \\ b_x(N\Delta t) \\ b_y(N\Delta t) \end{pmatrix} = [e^{\mathcal{B}\Delta t} e^{\mathcal{A}\Delta t}]^N \begin{pmatrix} b_z(0) \\ b_x(0) \\ b_y(0) \end{pmatrix} + O(\Delta t). \quad (3.50)$$

Os dois métodos propostos nesta seção dão respostas quase idênticas para passos da ordem de $N \sim 10^3$, conforme pode ser visto na figura 3.4.

Figura 3.4 – Variação das componentes (a) $b_z(t)$; (b) $b_x(t)$ e (c) $b_y(t)$ do vetor de Bloch inicialmente no estado $\mathbf{b}(0) = \hat{\mathbf{z}}$ calculadas pelos métodos do superoperador partido ao meio (S.P.M.) e integração numérica (I.N.). As curvas para diferentes métodos se superpõem. Pequenas inclinações do ângulo polar da medida, θ , provocam uma diminuição menor da componente $b_z(t)$, mas também provocam o surgimento de outras componentes no plano xy . Em (d), vemos a variação da componente $b_x(t)$ para a condição inicial $\mathbf{b}(0) = \hat{\mathbf{x}}$. Observamos novamente o efeito da medida de σ_x atrasando a descoerência que ela própria causa em $b_x(t)$, mesmo que por um curto intervalo de tempo. Em todos os casos, escolhemos $\lambda = \omega_0$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3 Múltiplos efeitos análogos a medidas contínuas sobre um qubit

Na seção anterior, vimos como a medida contínua conforme descrita pela equação mestra (2.14) pode modificar e até mesmo destruir completamente a informação contida em um qubit. Nesta seção, vamos considerar vários processos semelhantes a uma medida simultâneos sobre o qubit. A maior parte deles serão ruídos indesejáveis – emaranhamentos com o ambiente que eliminam algumas coerências de forma difícil de controlar. Vejamos, assim, como cada um afeta os demais e a medida propriamente dita.

Neste caso, a equação mestra (2.14) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i\omega_0 [\sigma_z, \rho(t)] + \sum_{n=0}^N \lambda_n \{ [\hat{\mathbf{s}}_n \cdot \boldsymbol{\sigma}] \rho(t) [\hat{\mathbf{s}}_n \cdot \boldsymbol{\sigma}] - \rho(t) \}, \quad (3.51)$$

onde escolhemos o eixo z de acordo com nossa conveniência, e designamos por $\hat{\mathbf{s}}_n \cdot \boldsymbol{\sigma}$ cada uma das N observáveis “medidas” pelo ambiente. Reservamos $n = 0$ para uma eventual medida na direção z , pois não é preciso haver mais de uma medida numa mesma direção. Ou seja, $\hat{\mathbf{s}}_0 = \hat{\mathbf{z}}$. Se não estivermos interessados numa medida nessa direção, fazemos $\lambda_0 = 0$. Para as demais medidas, expressamos os versores $\hat{\mathbf{s}}_n$ em termos dos ângulos θ_n e φ_n :

$$\hat{\mathbf{s}}_n = \cos \theta_n \hat{\mathbf{z}} + \sin \theta_n (\cos \varphi_n \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi_n \hat{\mathbf{y}}). \quad (3.52)$$

Em termos do vetor de Bloch (1.34), e empregando as identidades (1.27) e (1.28), a equação diferencial para o vetor de Bloch obtida de (3.51) torna-se:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{b}}(t) = 2\omega_0 [\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{b}}(t)] + 2 \sum_{n=0}^N \lambda_n [\hat{\mathbf{s}}_n \cdot \tilde{\mathbf{b}}(t)] \hat{\mathbf{s}}_n, \quad (3.53)$$

onde, de maneira análoga à seção anterior, definimos:

$$\tilde{\mathbf{b}}(t) \equiv e^{2\sum_n \lambda_n t} \mathbf{b}(t), \quad (3.54)$$

o que nos permitiu eliminar o último termo do lado direito da equação (3.53).

Cada componente de (3.53) é uma equação diferencial diferente acoplada com as demais. Projetando a equação nas direções z , x e y :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{b}_z(t) = & 2\lambda_0\tilde{b}_z(t) \\ & + 2\sum_{n=1}^N \lambda_n \left\{ \cos\theta_n\tilde{b}_z(t) + \sin\theta_n \left[\cos\varphi_n\tilde{b}_x(t) + \sin\varphi_n\tilde{b}_y(t) \right] \right\} \cos\theta_n, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{b}_x(t) = & -2\omega_0\tilde{b}_y(t) \\ & + 2\sum_{n=1}^N \lambda_n \left\{ \cos\theta_n\tilde{b}_z(t) + \sin\theta_n \left[\cos\varphi_n\tilde{b}_x(t) + \sin\varphi_n\tilde{b}_y(t) \right] \right\} \sin\theta_n \cos\varphi_n, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{b}_y(t) = & 2\omega_0\tilde{b}_x(t) \\ & + 2\sum_{n=1}^N \lambda_n \left\{ \cos\theta_n\tilde{b}_z(t) + \sin\theta_n \left[\cos\varphi_n\tilde{b}_x(t) + \sin\varphi_n\tilde{b}_y(t) \right] \right\} \sin\theta_n \sin\varphi_n. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Da seção anterior, sabemos que a solução para uma medida qualquer não é simples. Para tentarmos encontrar uma solução analítica, vamos confinar todos os versores $\hat{\mathbf{s}}_n$ ao plano xy , isto é, vamos escolher $\theta_n = \pi/2$:

$$\hat{\mathbf{s}}_n = \cos\varphi_n\hat{\mathbf{x}} + \sin\varphi_n\hat{\mathbf{y}}. \quad (3.58)$$

Neste caso, a equação diferencial (3.55) desacopla-se de (3.56) e (3.57):

$$\frac{d}{dt}\tilde{b}_z(t) = 2\lambda_0\tilde{b}_z(t), \quad (3.59)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{b}_x(t) = -2\omega_0\tilde{b}_y(t) + 2\sum_{n=1}^N \lambda_n \left[\cos\varphi_n\tilde{b}_x(t) + \sin\varphi_n\tilde{b}_y(t) \right] \cos\varphi_n, \quad (3.60)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{b}_y(t) = 2\omega_0\tilde{b}_x(t) + 2\sum_{n=1}^N \lambda_n \left[\cos\varphi_n\tilde{b}_x(t) + \sin\varphi_n\tilde{b}_y(t) \right] \sin\varphi_n. \quad (3.61)$$

A solução para $\tilde{b}_z(t)$ é bastante simples:

$$\tilde{b}_z(t) = e^{2\lambda_0 t} b_z(0), \quad (3.62)$$

que, retornando ao vetor de Bloch propriamente dito (3.54), resulta em:

$$b_z(t) = \exp \left\{ -2 \sum_{n=1}^N \lambda_n t \right\} b_z(0). \quad (3.63)$$

Ou seja, todas as medidas ortogonais contribuem para a diminuição exponencial da com-

ponente z do vetor de Bloch, como podemos ver na figura 3.5. A medida de σ_z e o hamiltoniano $\hbar\omega_0\sigma_z$ não contribuem nessa direção.

Figura 3.5 – Variação da componente $b_z(t)$ do vetor de Bloch em função do tempo para diferentes somas de intensidades de medidas no plano xy . O estado inicial considerado é $|0\rangle$, de forma que $b_z(0) = 1$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Já as componentes $\tilde{b}_x(t)$ e $\tilde{b}_y(t)$ formam um sistema de duas equações diferenciais acopladas:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{b}_x(t) \\ \tilde{b}_y(t) \end{pmatrix} = \tilde{M} \begin{pmatrix} \tilde{b}_x(t) \\ \tilde{b}_y(t) \end{pmatrix}, \quad (3.64)$$

onde a matriz $\tilde{M}$ é:

$$\tilde{M} \equiv \begin{pmatrix} 2 \sum_{n=1}^N \lambda_n \cos^2 \varphi_n & -2\omega_0 + \sum_{n=1}^N \lambda_n \sin(2\varphi_n) \\ 2\omega_0 + \sum_{n=1}^N \lambda_n \sin(2\varphi_n) & 2 \sum_{n=1}^N \lambda_n \sin^2 \varphi_n \end{pmatrix}, \quad (3.65)$$

ou, em termos de matrizes de Pauli e identidades:

$$\tilde{M} \equiv \sum_{n=1}^N \lambda_n + \tilde{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.66)$$

onde uma matriz identidade está implícita na soma de λ_n e onde o vetor complexo $\tilde{\mathbf{M}}$ é:

$$\tilde{\mathbf{M}} \equiv \sum_{n=1}^N \lambda_n \cos(2\varphi_n) \hat{\mathbf{z}} + \sum_{n=1}^N \lambda_n \sin(2\varphi_n) \hat{\mathbf{x}} - 2i\omega_0 \hat{\mathbf{y}}. \quad (3.67)$$

A solução de (3.64) é apenas a exponencial da matriz (3.66):

$$\begin{pmatrix} \tilde{b}_x(t) \\ \tilde{b}_y(t) \end{pmatrix} = \exp \left\{ \sum_{n=1}^N \lambda_n t \right\} \exp \left\{ \tilde{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\sigma} t \right\} \begin{pmatrix} b_x(0) \\ b_y(0) \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

Após desfazermos a transformação (3.54), a exponencial $e^{\sum_n \lambda_n t}$ troca de sinal, e uma contribuição de λ_0 também passa a ter de ser levada em conta:

$$\begin{pmatrix} b_x(t) \\ b_y(t) \end{pmatrix} = \exp \left\{ -2\lambda_0 t - \sum_{n=1}^N \lambda_n t \right\} \exp \left\{ \tilde{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\sigma} t \right\} \begin{pmatrix} b_x(0) \\ b_y(0) \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

A exponencial da matriz $\tilde{M}$ pode ser escrita por meio de uma expansão em série de potências:

$$\exp \left\{ \tilde{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\sigma} t \right\} = \cosh(\Omega' t) + \frac{1}{\Omega'} \sinh(\Omega' t) \left(\tilde{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right), \quad (3.70)$$

onde Ω' é:

$$\Omega' = \left\{ \sum_{m,n=1}^N \lambda_m \lambda_n \cos[2(\varphi_m - \varphi_n)] - 4\omega_0^2 \right\}^{1/2}, \quad (3.71)$$

se $\sum_{m,n=1}^N \lambda_m \lambda_n \cos[2(\varphi_m - \varphi_n)] > 4\omega_0^2$; ou pode ser escrita como:

$$\exp \left\{ \tilde{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\sigma} t \right\} = \cos(\Omega' t) + \frac{1}{\Omega'} \sin(\Omega' t) \left(\tilde{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right), \quad (3.72)$$

com

$$\Omega' = \left\{ 4\omega_0^2 - \sum_{m,n=1}^N \lambda_m \lambda_n \cos[2(\varphi_m - \varphi_n)] \right\}^{1/2}, \quad (3.73)$$

se $\sum_{m,n=1}^N \lambda_m \lambda_n \cos[2(\varphi_m - \varphi_n)] < 4\omega_0^2$.

No caso específico de apenas uma medida na direção x , que se traduz em $\varphi_1 = 0$, a evolução de $b_x(t)$ e $b_y(t)$ – iguais a $\text{Re}\{\rho_{01}(t)\}/2$ e a $-\text{Im}\{\rho_{01}(t)\}/2$, respectivamente – é a mesma dada em (3.19) e (3.20), apenas multiplicada pela exponencial $e^{-\lambda_0 t}$. Ou seja, a presença da medida de σ_z apenas provoca um amortecimento adicional na oscilação, uma descoerência mais rápida, como podemos ver na figura 3.6.

Por outro lado, se fixarmos a intensidade λ_0 da medida de σ_z , variando somente a intensidade λ_1 de σ_x , encontramos uma pequena diminuição na descoerência da componente $b_x(t)$ quando λ_1 é muito alta. Para a componente $b_y(t)$, λ_1 apenas contribui para aumentar a descoerência. Isso pode ser visto na figura 3.7.

Pareceria, portanto, que a medida de σ_x está protegendo a componente $b_x(t)$ do vetor de Pauli da descoerência causada pela medida de σ_z . Porém, não é o caso, como podemos ver da figura 3.8. Nela, vemos que qualquer efeito de proteção causado por λ_1 desaparece quando desligamos ω_0 . A proteção conferida nesse caso é mais parecida com aquela que

Figura 3.6 – Evolução temporal das partes real (a,c) e imaginária (b,d) das coerências para uma medida de σ_x de intensidade λ_1 , para diferentes valores da intensidade λ_0 da medida de σ_z . O estado inicial escolhido é $|0\rangle_x$, de forma que $b_x(0) = 2\text{Re}\{\rho_{01}(0)\} = 1$ e $b_y(0) = -2\text{Im}\{\rho_{01}(0)\} = 0$. Consideramos casos em que $\lambda_1 > 2\omega_0$ (a,b) e em que $\lambda_1 < 2\omega_0$ (c,d). Em todos eles, a contribuição de λ_0 é apenas de aproximar as componentes mais rapidamente de zero.

Fonte: Elaborada pelo autor.

vimos na figura 3.3(c), que faz com que a descoerência causada pela própria medida de σ_x torne-se desprezível quando $\lambda_1 \gg \omega_0$.

Adicionemos agora uma medida de intensidade λ_2 da observável σ_y , isto é, $\varphi_2 = \pi/2$. Neste caso, os Ω' (3.71) e (3.73) tornam-se:

$$\Omega' = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4\omega_0^2}, \quad (3.74)$$

se $|\lambda_1 - \lambda_2| > 2\omega_0$, e

$$\Omega' = \sqrt{4\omega_0^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}, \quad (3.75)$$

se $2\omega_0 > |\lambda_1 - \lambda_2|$.

As matrizes (3.70) e (3.72), por outro lado, serão dadas por:

Figura 3.7 – Mesmas condições iniciais da figura 3.6, mas desta vez variando λ_1 para valores muito altos em comparação com λ_0 . Para simplificar, tomamos $\omega_0 = \lambda_0$. Verifica-se (a) uma pequena diminuição na descoerência de $b_x(t)$ com o aumento de λ_1 , acompanhada de (b) um grande aumento na descoerência de $b_y(t)$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\exp \left\{ \tilde{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\} = \frac{1}{\Omega'} \times \begin{pmatrix} \Omega' \cosh(\Omega't) + (\lambda_1 - \lambda_2) \sinh(\Omega't) & -2\omega_0 \sinh(\Omega't) \\ 2\omega_0 \sinh(\Omega't) & \Omega' \cosh(\Omega't) - (\lambda_1 - \lambda_2) \sinh(\Omega't) \end{pmatrix}, \quad (3.76)$$

se $|\lambda_1 - \lambda_2| > 2\omega_0$, e

$$\exp \left\{ \tilde{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\} = \frac{1}{\Omega'} \times \begin{pmatrix} \Omega' \cos(\Omega't) + (\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\Omega't) & -2\omega_0 \sin(\Omega't) \\ 2\omega_0 \sin(\Omega't) & \Omega' \cos(\Omega't) - (\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\Omega't) \end{pmatrix}, \quad (3.77)$$

se $|\lambda_1 - \lambda_2| < 2\omega_0$.

As soluções finais para $b_x(t)$ e $b_y(t)$ serão, se usarmos (3.69):

$$b_x(t) = e^{-(2\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)t} \times \left\{ \cosh(\Omega't) b_x(0) + \frac{1}{\Omega'} \sinh(\Omega't) [(\lambda_1 - \lambda_2) b_x(0) - 2\omega_0 b_y(0)] \right\}, \quad (3.78)$$

$$b_y(t) = e^{-(2\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)t} \times \left\{ \cosh(\Omega't) b_y(0) + \frac{1}{\Omega'} \sinh(\Omega't) [(\lambda_2 - \lambda_1) b_y(0) + 2\omega_0 b_x(0)] \right\}, \quad (3.79)$$

Figura 3.8 – Variação temporal da parte real da coerência, com as mesmas condições iniciais das figuras 3.6 e 3.7, mas variando λ_1 e ω_0 . Todas as curvas são coincidentes, exceto aquela com $\lambda_1 = 3\lambda_0$ e $\omega_0 = \lambda_0$. Qualquer efeito de proteção causado por λ_1 desaparece quando desligamos ω_0 .
Fonte: Elaborada pelo autor.

se $|\lambda_1 - \lambda_2| > 2\omega_0$, e

$$b_x(t) = e^{-(2\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)t} \left\{ \cos(\Omega't) b_x(0) + \frac{1}{\Omega'} \sin(\Omega't) [(\lambda_1 - \lambda_2) b_x(0) - 2\omega_0 b_y(0)] \right\}, \quad (3.80)$$

$$b_y(t) = e^{-(2\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)t} \left\{ \cos(\Omega't) b_y(0) + \frac{1}{\Omega'} \sin(\Omega't) [(\lambda_2 - \lambda_1) b_y(0) + 2\omega_0 b_x(0)] \right\}, \quad (3.81)$$

se $|\lambda_1 - \lambda_2| < 2\omega_0$.

A diferença entre os (3.78), (3.79), (3.80) e (3.81) e as soluções encontradas para apenas uma medida de σ_x (3.19) e (3.20) é que, quando há três medidas simultâneas, as contribuições das medidas σ_x e σ_y se somam na exponencial e se subtraem no termo entre chaves. Além disso, a medida de σ_z contribui com a exponencial negativa, aumentando a descoerência.

Da figura 3.9, vemos que a inclusão de um terceiro efeito análogo à medida apenas aumenta a rapidez da diminuição de $b_x(t)$ e $b_y(t)$, não afetando os efeitos de descoerência da medida de σ_x . A análise de como o termo de medida de σ_y afeta o termo de medida de σ_z é análoga ao que fizemos anteriormente para uma medida de σ_z concomitante a uma medida de σ_x .

No geral, a conclusão que podemos tirar de (3.69), é que todos os N termos de medida apenas contribuem para a diminuição progressiva do módulo do vetor de Bloch. Eles não diminuem, mesmo momentaneamente, o progresso da descoerência causada pelas demais. Este é exatamente o contrário do fenômeno que observaremos no próximo capítulo: se o ambiente é tratado como não markoviano e descrito explicitamente, a descoerência causada por ele pode ser reduzida por meio de uma medida ortogonal. Veremos as consequências deste efeito nos capítulos que se seguem.

Figura 3.9 – Evolução das partes real e imaginária da coerência para três termos de medida simultâneos de σ_z , σ_x e σ_y , respectivamente de intensidades λ_0 , λ_1 e λ_2 . O estado inicial é $|0\rangle_x$, de forma que $b_x(0) = 2\text{Re}\{\rho_{01}(0)\} = 1$ e $b_y(0) = -2\text{Im}\{\rho_{01}(0)\} = 0$. Medimos o tempo em unidades de λ_0^{-1} e escolhemos $\omega_0 = \lambda_0$. Fixamos $\lambda_1 = 10\lambda_0$ para (a,b) e $\lambda_1 = \lambda_0$ para (c,d) e aumentamos progressivamente o valor de λ_2 . Em todos os casos, isso apenas aumenta a descoerência.

Fonte: Elaborada pelo autor.

4 PROTEÇÃO PARCIAL POR MEDIDA CONTÍNUA

No capítulo anterior, vimos como uma medida contínua markoviana elimina as coerências na base de seus autoestados. O ruído de fase não markoviano, descrito pela interação com o ambiente dada por (2.19), age de forma semelhante, eliminando os termos de coerência na base de σ_z . Concomitantemente a esse efeito de descoerência, podemos aplicar uma medida contínua numa direção ortogonal, σ_x . O resultado é que observamos descoerência na base de σ_x , prejudicando o valor das populações na base de σ_z , mas também a preservação das populações de σ_x por mais tempo. Isso pode ser útil, por exemplo, se quisermos preservar a informação presente na componente $b_x(t)$ do vetor de Bloch.

Já publicamos, durante o trabalho de mestrado,²⁰ resultados que provavam que uma medida contínua era capaz de reduzir os efeitos deletérios de um ruído ortogonal, protegendo as populações da base medida.²¹ Vimos também como as coerências também são afetadas por este tipo de medida.²² Porém, esse tipo de resultado só havia sido obtido para qubits que não sofriam portas lógicas quânticas (seus estados eram degenerados, $H_S = 0$), e apenas testados numericamente para um ambiente no estado de vácuo.

Neste capítulo, apresentamos os resultados, já publicados,²³ que demonstram que esse efeito protetivo é válido também para qubits que passam por uma porta lógica σ_z , assim como para ambientes a temperatura superior a zero.

4.1 Enunciado do problema e métodos de cálculo

Consideramos o seguinte hamiltoniano total contendo a interação entre o sistema-objeto (apenas um qubit) e o ambiente (um campo bosônico ôhmico):

$$H = \hbar\omega_0\sigma_z + \hbar \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + \hbar\sigma_z \sum_k \left(g_k a_k^\dagger + g_k^* a_k \right). \quad (4.1)$$

Ou seja, estamos interessados apenas em um canal de ruído de fase (2.19). No próximo capítulo nos preocuparemos com o canal tipo *amplitude damping* (2.20) e com outros tipos de densidade espectral do ambiente.

Os estados iniciais do sistema-objeto $\rho_S(0)$ e do ambiente serão separáveis $\rho_A(0)$:

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_A(0). \quad (4.2)$$

O ambiente estará inicialmente a uma certa temperatura $T = 1/k_B\beta$, de forma que $\rho_A(0)$ é dado por uma distribuição de Boltzmann:

$$\rho_A(0) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\hbar\beta \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k \right\}, \quad (4.3)$$

onde a função de partição Z é o seguinte traço:

$$Z \equiv \text{Tr}_A \left\{ e^{-\hbar\beta \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k} \right\}. \quad (4.4)$$

O traço parcial sobre os estados do ambiente, $\text{Tr}_A \{ \dots \}$, pode também ser expresso em termos de traços parciais sobre cada um dos modos de vibração, $\text{Tr}_k \{ \dots \}$:

$$Z = \prod_k \text{Tr}_k \left\{ e^{-\hbar\beta \omega_k a_k^\dagger a_k} \right\} = \prod_k \left\{ \sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\hbar\beta \omega_k n_k} \right\}. \quad (4.5)$$

Estamos interessados no efeito de proteção das populações, que acreditamos acontecer quando a medida anticomuta com o hamiltoniano de interação. Como (2.19) é proporcional a σ_z , nossa medida deverá ser de σ_x .

Por isso, a equação diferencial em representação híbrida (2.66) que inclui o hamiltoniano (4.1) terá a forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = & -i\omega_0 [\sigma_z, \tilde{\rho}(t)] - i \sum_k \left[\sigma_z g_k a_k^\dagger e^{i\omega_k t} + \sigma_z g_k^* a_k e^{-i\omega_k t}, \tilde{\rho}(t) \right] \\ & + \lambda \{ \sigma_x \tilde{\rho}(t) \sigma_x - \tilde{\rho}(t) \}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para ser aplicado, o método perturbativo da expansão em série de Dyson para superoperadores (2.62) necessita que dividamos a equação mestra que inclui o ambiente (2.15) em dois superoperadores. Como estamos tratando o sistema-objeto como um conjunto de qubits dentro de um computador quântico, faz sentido imaginarmos que a interação destes com portas lógicas e medidas controladas é mais forte do que o ruído externo. Se o ruído externo prevalecer, o computador será inutilizável.

Portanto, o termo de perturbação será aquele do hamiltoniano que gera o ruído de fase, isto é, as constantes g_k serão consideradas muito pequenas. O superoperador que as inclui é:

$$\tilde{\mathcal{B}}(t) \tilde{\rho}(t) = -i \sum_k \left[\sigma_z g_k a_k^\dagger e^{i\omega_k t} + \sigma_z g_k^* a_k e^{-i\omega_k t}, \tilde{\rho}(t) \right], \quad (4.7)$$

enquanto o superoperador que encapsula o restante da equação é dado por:

$$\mathcal{A} \tilde{\rho}(t) = -i\omega_0 [\sigma_z, \tilde{\rho}(t)] + \lambda \{ \sigma_x \tilde{\rho}(t) \sigma_x - \tilde{\rho}(t) \}. \quad (4.8)$$

Uma solução aproximada empregando os superoperadores (4.7) e (4.8) será encontrada

nas próximas seções. Porém, tais métodos não são necessários quando a solução exata está disponível facilmente. Este é o caso das populações na base de autoestados de σ_z , $\rho_{00}(t) \equiv \langle 0 | \rho_S(t) | 0 \rangle$ e $\rho_{11}(t) \equiv \langle 1 | \rho_S(t) | 1 \rangle$.

De fato, aplicando $\langle j |$ e $| j \rangle$ dos dois lados de (4.6), encontramos a equação diferencial para as populações:

$$\begin{aligned} \langle j | \frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) | j \rangle = & -i(-1)^j \sum_k \left[g_k a_k^\dagger e^{i\omega_k t} + g_k^* a_k e^{-i\omega_k t}, \langle j | \tilde{\rho}(t) | j \rangle \right] \\ & + \lambda \{ \langle j+1 | \tilde{\rho}(t) | j+1 \rangle - \langle j | \tilde{\rho}(t) | j \rangle \}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde usamos o fato de que:

$$\langle j | [\sigma_z, X] | j \rangle = (-1)^j \langle j | X | j \rangle - \langle j | X | j \rangle (-1)^j = 0, \quad (4.10)$$

para qualquer operador X , e onde a soma em $| j+1 \rangle$ é *modulo 2*, de forma que:

$$\sigma_x | j \rangle = | j+1 \rangle. \quad (4.11)$$

Ao tomarmos o traço parcial sobre o ambiente, lembrando que $\text{Tr}_A \{ \tilde{\rho}(t) \} = \rho_S(t)$, e usando o fato de que

$$\text{Tr}_A \{ [a, X] \} = \text{Tr}_A \{ aX \} - \text{Tr}_A \{ aX \} = 0, \quad (4.12)$$

$$\text{Tr}_A \{ [a^\dagger, X] \} = \text{Tr}_A \{ a^\dagger X \} - \text{Tr}_A \{ a^\dagger X \} = 0, \quad (4.13)$$

para qualquer operador X , eliminamos todos os comutadores em (4.9), ficando apenas com estas duas equações acopladas nos casos em que $j = 0$ e $j = 1$:

$$\frac{d}{dt} \rho_{00}(t) = \lambda \rho_{11}(t) - \lambda \rho_{00}(t), \quad (4.14)$$

$$\frac{d}{dt} \rho_{11}(t) = \lambda \rho_{00}(t) - \lambda \rho_{11}(t). \quad (4.15)$$

Subtraindo (4.15) de (4.14), encontramos o seguinte:

$$\frac{d}{dt} [\rho_{00}(t) - \rho_{11}(t)] = -2\lambda [\rho_{00}(t) - \rho_{11}(t)]. \quad (4.16)$$

Ou seja, a diferença entre o valor das populações diminui exponencialmente até que ambas tenham o mesmo valor (1/2) e toda a informação contida nas populações na base de σ_z estará perdida:

$$[\rho_{00}(t) - \rho_{11}(t)] = e^{-2\lambda t} [\rho_{00}(0) - \rho_{11}(0)]. \quad (4.17)$$

Em termos das populações individualmente,

$$\rho_{00}(t) = \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2} + e^{-2\lambda t} \rho_{00}(0), \quad (4.18)$$

$$\rho_{11}(t) = \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2} + e^{-2\lambda t} \rho_{11}(0). \quad (4.19)$$

Os resultados (4.18) e (4.19) são idênticos ao resultado obtido em (3.14), no qual o ruído estava ausente. Eles são devidos apenas à medida de σ_x que visa proteger $b_x(t)$, a qual tem como efeito colateral a eliminação das coerências de σ_x , ou seja, o apagamento de $b_z(t)$. De fato, nenhuma das respostas contém qualquer parâmetro da porta lógica ou do ambiente.

É somente nas coerências da base de σ_z , $\rho_{01}(t)$ e $\rho_{10}(t)$, que a competição dos efeitos do ambiente, da porta lógica e do medidor tornam-se visíveis, conforme veremos nas próximas seções.

4.2 Solução perturbativa para a medida protetiva

Nesta seção, encontraremos uma solução para a equação (4.6) empregando até a segunda ordem da expansão em série de Dyson para superoperadores (2.62). Mostraremos como esta solução reduz-se à equação mestra híbrida usada para calcular resultados semi-analíticos no artigo publicado,²³ os quais comparamos com os nossos resultados numéricos obtidos pelo método do superoperador partido ao meio. O mesmo método perturbativo empregado nesta seção será retomado nos próximos capítulos para obtermos soluções para outros sistemas monitorados continuamente.

A expansão até segunda ordem será necessária aqui pois, ao tomarmos o traço sobre o ambiente, termos proporcionais a uma potência ímpar de a e $a^\dagger$ multiplicados por um operador densidade inicial do ambiente do tipo (4.3) irão a zero, eliminando todos os termos ímpares da expansão (2.62). Além disso, estamos tentando resolver a equação (4.6), que já está escrita em termos de operadores na representação de interação. Ao passarmos para a representação usada na expansão em série de Dyson dos superoperadores que encontramos em (2.62), devemos definir uma nova forma do operador densidade:

$$\tilde{\rho}_I(t) = e^{-\mathcal{A}t} \tilde{\rho}(t), \quad (4.20)$$

e um novo superoperador $\tilde{\mathcal{B}}_I(t)$ que, quando operado em qualquer operador X , retorne

um termo que contenha o hamiltoniano na representação híbrida (2.63):

$$\tilde{\mathcal{B}}_I(t)X = -\frac{i}{\hbar}e^{-\mathcal{A}t} \left[\tilde{H}(t), e^{\mathcal{A}t}X \right]. \quad (4.21)$$

Mantendo os termos até segunda ordem em (2.62), e tomando o traço, encontramos uma solução para a equação diferencial:

$$\mathrm{Tr}_A \{ \tilde{\rho}_I(t) \} = \rho_S(0) + \mathrm{Tr}_A \left\{ \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \tilde{\mathcal{B}}_I(t_1) \tilde{\mathcal{B}}_I(t_2) \tilde{\rho}_A(0) \rho_S(0) \right\}, \quad (4.22)$$

onde já usamos o fato de que $\tilde{\rho}_I(0) = \rho(0)$, e também a separabilidade inicial de (4.2).

Empregando explicitamente as definições de $\rho_I(t)$ dadas em (2.56) e aplicando $e^{\mathcal{A}t}$ dos dois lados, a equação (4.22) torna-se:

$$\rho_S(t) = e^{\mathcal{A}t} \rho_S(0) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{\mathcal{A}t} \mathrm{Tr}_A \left\{ \tilde{\mathcal{B}}_I(t_1) \tilde{\mathcal{B}}_I(t_2) \rho_A(0) \rho_S(0) \right\}, \quad (4.23)$$

pois $\mathrm{Tr}_A \{ \tilde{\rho}(t) \} = \rho_S(t)$.

Em termos do hamiltoniano na representação híbrida (4.21):

$$\begin{aligned} \rho_S(t) &= e^{\mathcal{A}t} \rho_S(0) \\ &- \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{\mathcal{A}(t-t_1)} \mathrm{Tr}_A \left\{ \left[\tilde{H}(t_1), e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \left[\tilde{H}(t_2), e^{\mathcal{A}t_2} \rho_A(0) \rho_S(0) \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Note que podemos escrever o hamiltoniano na representação de interação $H_I(t)$ da seguinte forma:

$$\tilde{H}(t) = \hbar \sum_k \left\{ S_k g_k a_k e^{-i\omega_k t} + S_k^\dagger g_k^* a_k^\dagger e^{i\omega_k t} \right\}, \quad (4.25)$$

onde S_k é um operador que atua apenas sobre o sistema-objeto. No caso, trata-se de $S_k = \sigma_z$, mas vamos continuar com o cálculo neste caso mais geral para podermos reaproveitá-lo nos próximos capítulos.

Usamos agora um argumento análogo àquele que utilizamos para nos livrar dos termos ímpares na expansão da série de Dyson para os superoperadores (2.62). Para tanto, primeiro definimos os traços sobre o k -ésimo modo de vibração:

$$\zeta_k \equiv \mathrm{Tr}_k \left\{ e^{-\hbar\beta\omega_k a_k^\dagger a_k} \right\}, \quad (4.26)$$

de forma que o produto dos ζ_k forma a função de partição (4.4):

$$Z = \prod_k \zeta_k. \quad (4.27)$$

Com isso, tomamos, no espaço de Fock, os seguintes traços parciais sobre o ambiente, supondo que $j \neq k$:

$$\text{Tr}_A \{a_j a_k \rho_A(0)\} = \frac{1}{\zeta_j \zeta_k} \sum_{n_j, n_k=0}^{\infty} e^{-\hbar\beta(\omega_j n_j + \omega_k n_k)} \sqrt{n_j} \sqrt{n_k} \langle n_j | n_j - 1 \rangle \langle n_k | n_k - 1 \rangle, \quad (4.28)$$

$$\text{Tr}_A \{a_j^\dagger a_k \rho_A(0)\} = \frac{1}{\zeta_j \zeta_k} \sum_{n_j, n_k=0}^{\infty} e^{-\hbar\beta(\omega_j n_j + \omega_k n_k)} \sqrt{n_j + 1} \sqrt{n_k} \langle n_j | n_j + 1 \rangle \langle n_k | n_k - 1 \rangle, \quad (4.29)$$

$$\text{Tr}_A \{a_j a_k^\dagger \rho_A(0)\} = \frac{1}{\zeta_j \zeta_k} \sum_{n_j, n_k=0}^{\infty} e^{-\hbar\beta(\omega_j n_j + \omega_k n_k)} \sqrt{n_j} \sqrt{n_k + 1} \langle n_j | n_j - 1 \rangle \langle n_k | n_k + 1 \rangle, \quad (4.30)$$

$$\text{Tr}_A \{a_j^\dagger a_k^\dagger \rho_A(0)\} = \frac{1}{\zeta_j \zeta_k} \sum_{n_j, n_k=0}^{\infty} e^{-\hbar\beta(\omega_j n_j + \omega_k n_k)} \sqrt{n_j + 1} \sqrt{n_k + 1} \langle n_j | n_j + 1 \rangle \langle n_k | n_k + 1 \rangle, \quad (4.31)$$

todos os quais resultam em zero.

Similarmente, tomando agora $j = k$:

$$\text{Tr}_A \{a_j a_k \rho_A(0)\} = \frac{1}{\zeta_k} \sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\hbar\beta\omega_k n_k} \sqrt{n_k} \sqrt{n_k - 1} \langle n_k | n_k - 2 \rangle, \quad (4.32)$$

$$\text{Tr}_A \{a_k^\dagger a_k^\dagger \rho_A(0)\} = \frac{1}{\zeta_k} \sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\hbar\beta\omega_k n_k} \sqrt{n_k + 1} \sqrt{n_k + 2} \langle n_k | n_k + 2 \rangle, \quad (4.33)$$

que também são ambos zero. Os únicos casos em que o traço do operador densidade reduzido do ambiente multiplicado por dois operadores de criação ou destruição não se anula é quando os operadores são cruzados, isto é, $\text{Tr}_A \{a_k^\dagger a_k \rho_A(0)\}$ e $\text{Tr}_A \{a_k a_k^\dagger \rho_A(0)\}$.

Empregando a relação de comutação $[a_j, a_k^\dagger] = \delta_{j,k}$, só precisamos calcular um deles:

$$\text{Tr}_A \{a_k a_k^\dagger \rho_A(0)\} = \text{Tr}_A \left\{ \left(1 + a_k^\dagger a_k \right) \rho_A(0) \right\} = 1 + \text{Tr}_A \{a_k^\dagger a_k \rho_A(0)\}. \quad (4.34)$$

O cálculo final é simples, desde que saibamos a estratégia de resolução. O primeiro passo é direto:

$$\mathrm{Tr}_A \left\{ a_k^\dagger a_k \rho_A(0) \right\} = \frac{1}{\zeta_k} \sum_{n_k=0}^{\infty} n_k e^{-\hbar\beta\omega_k n_k}. \quad (4.35)$$

Agora, notemos que, pela definição de ζ_k (4.26):

$$\zeta_k = \sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\hbar\beta\omega_k n_k}. \quad (4.36)$$

Tomando a derivada parcial de (4.36) com respeito a β , recuperamos a somatória de (4.35):

$$\frac{\partial}{\partial\beta} \zeta_k = -\hbar\omega_k \sum_{n_k=0}^{\infty} n_k e^{-\hbar\beta\omega_k n_k}. \quad (4.37)$$

Portanto, (4.35) pode ser reescrita em termos de uma derivada de ζ_k :

$$\mathrm{Tr}_A \left\{ a_k^\dagger a_k \rho_A(0) \right\} = -\frac{1}{\hbar\omega_k} \frac{1}{\zeta_k} \frac{\partial \zeta_k}{\partial\beta} = -\frac{1}{\hbar\omega_k} \frac{\partial}{\partial\beta} \ln \zeta_k. \quad (4.38)$$

Agora, notando que $e^{-\hbar\beta\omega_k} < 1$, pois $\hbar\beta\omega_k > 0$, o resultado da série infinita (4.36) é conhecido:

$$\zeta_k = \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta\omega_k}}, \quad (4.39)$$

cujo logaritmo será:

$$\ln \zeta_k = -\ln \{ 1 - e^{-\hbar\beta\omega_k} \}, \quad (4.40)$$

e cuja derivada é:

$$\frac{\partial}{\partial\beta} \ln \zeta_k = -\hbar\omega_k \frac{e^{-\hbar\beta\omega_k}}{1 - e^{-\hbar\beta\omega_k}}. \quad (4.41)$$

Portanto, (4.38) torna-se:

$$\mathrm{Tr}_A \left\{ a_k^\dagger a_k \rho_A(0) \right\} = \frac{e^{-\hbar\beta\omega_k}}{1 - e^{-\hbar\beta\omega_k}}. \quad (4.42)$$

Usando a identidade (4.34), concluímos também que:

$$\mathrm{Tr}_A \left\{ a_k a_k^\dagger \rho_A(0) \right\} = 1 + \frac{e^{-\hbar\beta\omega_k}}{1 - e^{-\hbar\beta\omega_k}} = \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta\omega_k}}. \quad (4.43)$$

Retornando agora a (4.24), sabemos que, ao substituirmos (4.25), só restarão após o traço os termos que contenham operadores a_k e $a_k^\dagger$, pois os superoperadores e^{At} não afetam o traço parcial sobre o ambiente:

$$\begin{aligned}
\rho_S(t) = e^{\mathcal{A}t} \rho_S(0) - \sum_k |g_k|^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \\
\times e^{\mathcal{A}(t-t_1)} \left\{ \text{Tr}_A \left\{ \left[S_k a_k e^{-i\omega_k t_1}, e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \left[S_k^\dagger a_k^\dagger e^{i\omega_k t_2}, e^{\mathcal{A}t_2} \rho_A(0) \rho_S(0) \right] \right] \right\} \right. \\
\left. + \text{Tr}_A \left\{ \left[S_k^\dagger a_k^\dagger e^{i\omega_k t_1}, e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \left[S_k a_k e^{-i\omega_k t_2}, e^{\mathcal{A}t_2} \rho_A(0) \rho_S(0) \right] \right] \right\} \right\} \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Abrindo os comutadores em (4.44), encontramos:

$$\begin{aligned}
\rho_S(t) = e^{\mathcal{A}t} \rho_S(0) - \sum_k |g_k|^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \\
\times e^{\mathcal{A}(t-t_1)} \left\{ e^{-i\omega_k(t_1-t_2)} S_k \left\{ e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} S_k^\dagger [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] \right\} \text{Tr}_A \left\{ a_k a_k^\dagger \rho_A(0) \right\} \right. \\
- e^{-i\omega_k(t_1-t_2)} e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \left\{ S_k^\dagger [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] \right\} S_k \text{Tr}_A \left\{ a_k a_k^\dagger \rho_A(0) \right\} \\
- e^{-i\omega_k(t_1-t_2)} S_k e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \left\{ [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] S_k^\dagger \right\} \text{Tr}_A \left\{ a_k^\dagger a_k \rho_A(0) \right\} \\
+ e^{-i\omega_k(t_1-t_2)} e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \left\{ [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] S_k^\dagger \right\} S_k \text{Tr}_A \left\{ a_k^\dagger a_k \rho_A(0) \right\} \\
+ e^{i\omega_k(t_1-t_2)} S_k^\dagger \left\{ e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} S_k [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] \right\} \text{Tr}_A \left\{ a_k^\dagger a_k \rho_A(0) \right\} \\
- e^{i\omega_k(t_1-t_2)} e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \left\{ S_k [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] \right\} S_k^\dagger \text{Tr}_A \left\{ a_k^\dagger a_k \rho_A(0) \right\} \\
- e^{i\omega_k(t_1-t_2)} S_k^\dagger e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \left\{ [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] S_k \right\} \text{Tr}_A \left\{ a_k a_k^\dagger \rho_A(0) \right\} \\
\left. + e^{i\omega_k(t_1-t_2)} e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \left\{ [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] S_k \right\} S_k^\dagger \text{Tr}_A \left\{ a_k a_k^\dagger \rho_A(0) \right\} \right\}. \quad (4.45)
\end{aligned}$$

Agora, usamos em (4.45) os valores dos traços encontrados em (4.42) e (4.43), além de substituir os $|g_k|^2$ pela densidade espectral (2.21):

$$\begin{aligned}
\rho_S(t) = e^{\mathcal{A}t} \rho_S(0) - \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \\
\times e^{\mathcal{A}(t-t_1)} \left\{ e^{-i\omega(t_1-t_2)} \left[S_k, e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \left\{ S_k^\dagger [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] \right\} \right] \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \right. \\
- e^{-i\omega(t_1-t_2)} \left[S_k, e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \left\{ [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] S_k^\dagger \right\} \right] \frac{e^{-\hbar\beta\omega}}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \\
+ e^{i\omega(t_1-t_2)} \left[S_k^\dagger, e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \left\{ S_k [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] \right\} \right] \frac{e^{-\hbar\beta\omega}}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \\
\left. - e^{i\omega(t_1-t_2)} \left[S_k^\dagger, e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \left\{ [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] S_k \right\} \right] \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \right\}. \quad (4.46)
\end{aligned}$$

A equação (4.46) é bastante geral, pois pode ser usada quaisquer que sejam os superoperadores $\mathcal{A}$ e quaisquer que sejam os operadores do sistema-objeto, S_k . Para o

problema que precisamos resolver neste capítulo, porém, precisamos apenas do caso em que $S_k = S_k^\dagger = \sigma_z$, ou seja, para o canal de fase representado pelo hamiltoniano (2.73).

A solução para e^{At} quando a medida é de σ_x foi obtida no capítulo anterior, e é dada pelas equações (3.19) e (3.20). Aqui, vamos escrevê-las na seguinte forma matricial:

$$e^{At} \begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix} = \frac{e^{-\lambda t}}{\Omega} M(t) \begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.47)$$

onde a matriz $M(t)$ é:

$$M(t) = \begin{pmatrix} \Omega \cosh(\Omega t) - 2i\omega_0 \sinh(\Omega t) & \lambda \sinh(\Omega t) \\ \lambda \sinh(\Omega t) & \Omega \cosh(\Omega t) + 2i\omega_0 \sinh(\Omega t) \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

com $\Omega = \sqrt{\lambda^2 - 4\omega_0^2}$ quando $\lambda > 2\omega_0$, e

$$M(t) \equiv \begin{pmatrix} \Omega \cos(\Omega t) - 2i\omega_0 \sin(\Omega t) & \lambda \sin(\Omega t) \\ \lambda \sin(\Omega t) & \Omega \cos(\Omega t) + 2i\omega_0 \sin(\Omega t) \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

com $\Omega = \sqrt{4\omega_0^2 - \lambda^2}$ quando $\lambda < 2\omega_0$.

Ainda empregando a notação pseudo-spinorial de (4.47), podemos escrever a atuação dos operadores $S_k = S_k^\dagger = \sigma_z$ sobre as coerências da seguinte forma:

$$S_k \begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix} = S_k^\dagger \begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ -\rho_{10}(t) \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

$$\begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix} S_k = \begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix} S_k^\dagger = \begin{pmatrix} -\rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

onde usamos o fato de que:

$$\sigma_z \rho_{jk}(t) |j\rangle \langle k| = (-1)^j \rho_{jk}(t) |j\rangle \langle k|, \quad (4.52)$$

$$\rho_{jk}(t) |j\rangle \langle k| \sigma_z = (-1)^k \rho_{jk}(t) |j\rangle \langle k|. \quad (4.53)$$

Em particular, combinando os resultados (4.50) e (4.51), encontramos o seguinte valor para os comutadores presentes em (4.46):

$$\left[S_k, \begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix} \right] = \left[S_k^\dagger, \begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix} \right] = 2S_k \begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Além disso,

$$\begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix} S_k = \begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix} S_k^\dagger = -S_k \begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

de forma que, usando as identidades (4.54) e (4.55), podemos reescrever a equação (4.46) em termos dos pseudo-spinores das coerências da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varrho(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{\Omega} M(t) \varrho(0) - \frac{2e^{-\lambda t}}{\Omega^3} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (e^{i\omega(t_1-t_2)} + e^{-i\omega(t_1-t_2)}) \\ M(t-t_1) \left\{ S_k M(t_1-t_2) \{ S_k [M(t_2) \varrho(0)] \} \frac{1+e^{-\hbar\beta\omega}}{1-e^{-\hbar\beta\omega}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde $\varrho(t)$ é o pseudo-spinor das coerências:

$$\varrho(t) \equiv \begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Reconhecendo em (4.56) o cosseno formado pelas exponenciais complexas da frequência e a cotangente hiperbólica em:

$$\frac{1+e^{-\hbar\beta\omega}}{1-e^{-\hbar\beta\omega}} = \frac{e^{\hbar\beta\omega/2} + e^{-\hbar\beta\omega/2}}{2} \frac{2}{e^{\hbar\beta\omega/2} - e^{-\hbar\beta\omega/2}} = \frac{\cosh(\hbar\beta\omega/2)}{\sinh(\hbar\beta\omega/2)} = \coth\left(\frac{\hbar\beta\omega}{2}\right), \quad (4.58)$$

podemos simplificar (4.56) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varrho(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{\Omega} M(t) \varrho(0) - \frac{4e^{-\lambda t}}{\Omega^3} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cos[\omega(t_1-t_2)] \coth\left(\frac{\hbar\beta\omega}{2}\right) \\ \times M(t-t_1) S_k M(t_1-t_2) S_k M(t_2) \varrho(0). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Para simplificar nossas contas tanto nesta seção quanto na próxima, chamaremos:

$$c_+(t) \equiv \cosh(\Omega t) - 2i\omega_0 \frac{1}{\Omega} \sinh(\Omega t) \quad (4.60)$$

$$c_-(t) \equiv \lambda \frac{1}{\Omega} \sinh(\Omega t), \quad (4.61)$$

quando $\lambda > 2\omega_0$ e

$$c_+(t) \equiv \cos(\Omega t) - 2i\omega_0 \frac{1}{\Omega} \sin(\Omega t) \quad (4.62)$$

$$c_-(t) \equiv \lambda \frac{1}{\Omega} \sin(\Omega t), \quad (4.63)$$

quando $\lambda < 2\omega_0$, de forma que a matriz $M(t)$ sempre possa ser escrita como:

$$M(t) = \begin{pmatrix} c_+(t) & c_-(t) \\ c_-(t) & c_+^*(t) \end{pmatrix}. \quad (4.64)$$

Nesta forma compacta, podemos escrever o produto de matrizes que aparece em (4.59) como a seguinte matriz $Q(t)$:

$$Q(t_1, t_2) \equiv M(-t_1) S_k M(t_1 - t_2) S_k M(t_2), \quad (4.65)$$

que pode ser decomposta em elementos individuais:

$$Q(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} q_{11}(t_1, t_2) & q_{12}(t_1, t_2) \\ q_{12}^*(t_1, t_2) & q_{11}^*(t_1, t_2) \end{pmatrix}, \quad (4.66)$$

onde, se calcularmos passo-a-passo a partir da definição (4.65), encontramos:

$$\begin{aligned} q_{11}(t_1, t_2) \equiv & c_+(-t_1) [c_+(t_1 - t_2)c_+(t_2) - c_-(t_1 - t_2)c_-(t_2)] \\ & - c_-(-t_1) [c_-(t_1 - t_2)c_+(t_2) - c_+^*(t_1 - t_2)c_-(t_2)], \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} q_{12}(t_1, t_2) \equiv & c_+(-t_1) [c_+(t_1 - t_2)c_-(t_2) - c_-(t_1 - t_2)c_+^*(t_2)] \\ & - c_-(-t_1) [c_-(t_1 - t_2)c_-(t_2) - c_+^*(t_1 - t_2)c_+^*(t_2)]. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Os elementos de matriz (4.67) e (4.68) podem ser identificados com as equações (45) de nosso artigo publicado.²³

Em termos da matriz Q (4.65), a equação (4.69) torna-se:

$$\begin{aligned} \varrho(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{\Omega} M(t) \left\{ 1 - \frac{4}{\Omega^3} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \right. \\ \left. \times \cos[\omega(t_1 - t_2)] \coth\left(\frac{\hbar\beta\omega}{2}\right) Q(t_1, t_2) \right\} \varrho(0), \end{aligned} \quad (4.69)$$

onde usamos a identidade:

$$M(t - t_1) = \frac{1}{\Omega} M(t) M(-t_1), \quad (4.70)$$

a qual decorre do fato de que $e^{\mathcal{A}(t-t_1)} = e^{\mathcal{A}t} e^{-\mathcal{A}t_1}$ e da definição (4.47).

Suponha que tivéssemos feito todos esse cálculos, mas, ao invés de usarmos até o segundo termo da série de Dyson, tivéssemos empregado a expansão de segunda ordem (2.61) em conjunto com a aproximação de Born (2.76). Neste caso, a solução seria a mesma que (4.69), mas com $\varrho_I(t_1) = e^{-\mathcal{A}t_1}\varrho(t_1)$ no interior da integral ao invés de $\varrho(0)$. Poderíamos então escrevê-la como:

$$R(t) = R(0) - \frac{4}{\Omega^3} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \times \cos[\omega(t_1 - t_2)] \coth\left(\frac{\hbar\beta\omega}{2}\right) Q(t_1, t_2) R(t_1), \quad (4.71)$$

onde usamos o fato de que $M(0) = \Omega$ e definimos:

$$R(t) \equiv \frac{e^{\lambda t}}{\Omega} M(-t) \varrho(t). \quad (4.72)$$

Dada a condição inicial $R(0) = \varrho(0)$, teremos que o $R(t)$ em (4.71) satisfaz a equação diferencial:

$$\dot{R}(t) = -\frac{4}{\Omega^3} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t dt' \cos[\omega(t - t')] \coth\left(\frac{\hbar\beta\omega}{2}\right) Q(t, t') R(t), \quad (4.73)$$

que é equivalente às equações mestras híbridas (44) do artigo publicado.²³ Ou seja, o cálculo da segunda ordem da expansão de Dyson (2.62) empregando a aproximação (2.76), apesar de não ter sido o método empregado²⁹ para derivar a equação mestra do artigo,²³ leva a um resultado equivalente.

Obteríamos um resultado semelhante (mas com integrando em t_1 ao invés de t_2) se, em (4.22), empregássemos a aproximação de Born (2.75).

4.3 Cálculo com o método do superoperador partido ao meio

Nesta seção, obteremos um algoritmo que permite calcular a solução numericamente e verificar o resultado da seção anterior. Para empregarmos o método do superoperador partido ao meio (2.80), precisamos que o superoperador $\mathcal{B}$ não dependa do tempo. Por isso, não podemos usar a representação de interação (4.7), mas sim a forma na representação de Schrödinger:

$$\mathcal{B}\rho(t) = -i \sum_k \left[\sigma_z g_k^* a_k + \sigma_z g_k a_k^\dagger + \omega_k a_k^\dagger a_k, \rho(t) \right]. \quad (4.74)$$

Esta (4.74) não é mais necessariamente uma contribuição pequena, mas esta hipótese não é necessária para o método do superoperador partido ao meio. Basta que o passo temporal seja pequeno.

O superoperador $\mathcal{A}$, por outro lado, pode manter a forma dada em (4.8), cuja exponencial já apresentamos em (4.47). Já para obtermos a exponencial $e^{\mathcal{B}t}$, devemos resolver a equação diferencial

$$\frac{d}{dt} [e^{\mathcal{B}t} \rho(t)] = \mathcal{B} \rho(t), \quad (4.75)$$

que, aparentemente, é bastante simples, apenas exponenciais ao redor do operador original:

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{B}t} \rho(t) = \exp \left\{ -i \sum_k \left[\sigma_z g_k^* a_k + \sigma_z g_k a_k^\dagger + \omega_k a_k^\dagger a_k \right] t \right\} \rho(t) \\ \times \exp \left\{ i \sum_k \left[\sigma_z g_k^* a_k + \sigma_z g_k a_k^\dagger + \omega_k a_k^\dagger a_k \right] t \right\}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Podemos escrever esse operador em termos do pseudospinor (4.47) se notarmos como ele atua sobre as coerências. Projetando em algum elemento de matriz na base de auto-estados de σ_z , encontramos:

$$\begin{aligned} \langle r | e^{\mathcal{B}t} \rho(t) | s \rangle = \exp \left\{ -i \sum_k \omega_k \left[a_k + (-1)^r \frac{g_k}{\omega_k} \right]^\dagger \left[a_k + (-1)^r \frac{g_k}{\omega_k} \right] t \right\} \langle r | \rho(t) | s \rangle \\ \times \exp \left\{ i \sum_k \omega_k \left[a_k + (-1)^s \frac{g_k}{\omega_k} \right]^\dagger \left[a_k + (-1)^s \frac{g_k}{\omega_k} \right] t \right\}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Portanto, sobre o vetor $\varrho_A(t)$ que contém as coerências do sistema-objeto e também a matriz densidade reduzida inicial do ambiente:

$$\varrho_A \equiv \begin{pmatrix} \langle 0 | \rho(t) | 1 \rangle \\ \langle 1 | \rho(t) | 0 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{01}(0) \otimes \rho_A(0) \\ \rho_{10}(0) \otimes \rho_A(0) \end{pmatrix}, \quad (4.78)$$

esse superoperador atua conforme:

$$e^{\mathcal{B}t} \varrho_A = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_+(t) & 0 \\ 0 & \mathcal{K}_-(t) \end{pmatrix} \varrho_A, \quad (4.79)$$

onde os superoperadores $\mathcal{K}_\pm(t)$ agem da seguinte forma sobre um operador qualquer X :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\pm(t)X = \exp \left\{ -i \sum_k \omega_k \left[a_k \pm \frac{g_k}{\omega_k} \right]^\dagger \left[a_k \pm \frac{g_k}{\omega_k} \right] t \right\} X \\ \times \exp \left\{ i \sum_k \omega_k \left[a_k \mp \frac{g_k}{\omega_k} \right]^\dagger \left[a_k \mp \frac{g_k}{\omega_k} \right] t \right\}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Combinando as expressões de (4.47) e de (4.79), podemos escrever uma série de N superoperadores de duração $\Delta t = t/N$, conforme (2.80):

$$\begin{aligned} e^{(A+B)t} \varrho_A(0) &= [e^{A\Delta t} e^{B\Delta t}]^N \varrho_A(0) \\ &= \frac{e^{-\lambda t}}{\Omega^N} \left[M(\Delta t) \begin{pmatrix} \mathcal{K}_+(\Delta t) & 0 \\ 0 & \mathcal{K}_-(\Delta t) \end{pmatrix} \right]^N \varrho_A(0). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Neste ponto, é interessante definir as matrizes $A_\pm(t)$ como:

$$A_+(t) \equiv \begin{pmatrix} c_+(t) & c_-(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.82)$$

$$A_-(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_-(t) & c_+^*(t) \end{pmatrix}, \quad (4.83)$$

escolhidas de forma que:

$$M(t) = A_+(t) + A_-(t). \quad (4.84)$$

Vejamos como operam os produtos dos operadores $A_\pm(t)$ uns sobre os outros:

$$A_+(t)A_+(t) = c_+(t)A_+(t), \quad (4.85)$$

$$A_+(t)A_-(t) = c_-(t)\sigma_x A_-(t), \quad (4.86)$$

$$A_-(t)A_+(t) = c_-(t)\sigma_x A_+(t), \quad (4.87)$$

$$A_-(t)A_-(t) = c_+^*(t)A_-(t). \quad (4.88)$$

A matriz de Pauli σ_x tem o papel de inverter as linhas da matriz que ela multiplica. Podemos compactar as quatro equações (4.85), (4.86), (4.87) e (4.88) em apenas uma se definirmos, em substituição aos $c_+(t)$ e $c_-(t)$ de (4.60) e (4.61), as seguintes funções escalares $c_\pm^\pm(t)$:

$$c_+^+(t) \equiv c_+(t), \quad (4.89)$$

$$c_+^-(t) \equiv [c_+(t)]^*, \quad (4.90)$$

$$c_-^+(t) \equiv c_-(t), \quad (4.91)$$

$$c_-^-(t) \equiv c_-(t), \quad (4.92)$$

Neste caso, o produto de duas matrizes $A_\pm(t)$ e $A_\pm(t)$ será dado por:

$$A_r(t)A_s(t) = c_{rs}^r(t)\sigma_x^{(1-rs)/2}A_s(t), \quad (4.93)$$

onde r, s podem assumir os valores ± 1 , e estamos identificando $+1$ com $+$ e -1 com $-$ nos índices adequados.

Retornemos agora a (4.81). Notemos que, em termos de $A_\pm(\Delta t)$ (4.84), o produto matricial entre colchetes torna-se:

$$M(\Delta t) \begin{pmatrix} \mathcal{K}_+(\Delta t) & 0 \\ 0 & \mathcal{K}_-(\Delta t) \end{pmatrix} = \mathcal{K}_+(\Delta t)A_+(\Delta t) + \mathcal{K}_-(\Delta t)A_-(\Delta t), \quad (4.94)$$

onde os superoperadores $\mathcal{K}_\pm(\Delta t)$ e as matrizes $A_\pm(\Delta t)$ comutam, por atuarem em espaços diferentes.

Assim, os N produtos de (4.94) presentes em (4.81) tornam-se apenas um problema de combinatória de todas as possíveis sequências de $A_\pm(\Delta t)$ e $\mathcal{K}_\pm(\Delta t)$:

$$\left[M(\Delta t) \begin{pmatrix} \mathcal{K}_+(\Delta t) & 0 \\ 0 & \mathcal{K}_-(\Delta t) \end{pmatrix} \right]^N = \sum_{q_1 \in \{-1,1\}} \dots \sum_{q_N \in \{-1,1\}} \prod_{n=1}^N \{A_{q_n}(\Delta t)\mathcal{K}_{q_n}(\Delta t)\}. \quad (4.95)$$

Usando a regra (4.93), podemos compactar N produtos de $A_{q_n}(\Delta t)$ na forma:

$$\prod_{n=1}^N A_{q_n}(\Delta t) = \prod_{n=1}^{N-1} c_{q_n q_{n+1}}^{q_n}(\Delta t) \sigma_x^{\sum_{n=1}^{N-1} (1-q_n q_{n+1})/2} A_{q_N}(\Delta t). \quad (4.96)$$

A potência a que estamos elevando σ_x em (4.96) pode ser simplificada. Para tanto, consideramos a soma de dois termos em sequência da somatória:

$$\frac{1 - q_{n-1}q_n}{2} + \frac{1 - q_n q_{n+1}}{2} = 1 - \frac{1}{2}q_n (q_{n-1} + q_{n+1}). \quad (4.97)$$

A soma $q_{n-1} + q_{n+1}$ pode ter valor -2 , 0 ou 2 . Se for 0 , o valor de q_n não importa, pois a soma resulta em 1 de qualquer forma. Se for ± 2 , o resultado da soma será $1 \pm q_n$, onde q_n pode assumir os valores ± 1 . Mas, como σ_x^2 é a identidade, só importa saber se

a potência à qual está elevada σ_x é par ou ímpar. Ou seja, a somatória deve ser tomada *modulo 2*.

No caso de uma somatória de $1 \pm q_n$, que pode dar 0 ou 2, o resultado *modulo 2* será o mesmo: 0. Portanto, novamente, o valor de q_n não importa e podemos tomá-lo como $q_n = 1$:

$$\left\{ \frac{1 - q_{n-1}q_n}{2} + \frac{1 - q_nq_{n+1}}{2} \right\} \mod 2 = \left\{ 1 - \frac{1}{2}(q_{n-1} + q_{n+1}) \right\} \mod 2. \quad (4.98)$$

Além disso, podemos notar que, em *modulo 2*,

$$\left\{ 1 - \frac{1}{2}(q_{n-1} + q_{n+1}) \right\} \mod 2 = \begin{cases} 0 & , q_{n-1} = q_{n+1}, \\ 1 & , q_{n-1} \neq q_{n+1}, \end{cases} \quad (4.99)$$

o que é o mesmo que

$$\left\{ \frac{1 - q_{n-1}q_{n+1}}{2} \right\} \mod 2 = \begin{cases} 0 & , q_{n-1} = q_{n+1}, \\ 1 & , q_{n-1} \neq q_{n+1}. \end{cases} \quad (4.100)$$

Usando esse fato, podemos escrever (4.98) como:

$$\left\{ \frac{1 - q_{n-1}q_n}{2} + \frac{1 - q_nq_{n+1}}{2} \right\} \mod 2 = \frac{1 - q_{n-1}q_{n+1}}{2} \mod 2. \quad (4.101)$$

Portanto, se for verdade que, para algum valor N ,

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1 - q_nq_{n+1}}{2} \mod 2 = \frac{1 - q_1q_N}{2} \mod 2, \quad (4.102)$$

então, usando (4.101) com $q_{n-1} \rightarrow q_1$, $q_n \rightarrow q_N$ e $q_{N+1} \rightarrow q_{N+1}$, podemos concluir que, para $N + 1$, ela também é válida:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{1 - q_iq_{i+1}}{2} \mod 2 &= \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1 - q_iq_{i+1}}{2} + \frac{1 - q_Nq_{N+1}}{2} \right\} \mod 2 \\ &= \left\{ \frac{1 - q_1q_N}{2} + \frac{1 - q_Nq_{N+1}}{2} \right\} \mod 2 \\ &= \frac{1 - q_1q_{N+1}}{2} \mod 2. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Como (4.102) é válida para $N = 2$ – basta tomar $n = 2$ em (4.101) – podemos concluir que (4.102) é válida para todo N . Assim,

$$(\sigma_x)^{\sum_{n=1}^{N-1} (1 - q_nq_{n+1})/2} = (\sigma_x)^{(1 - q_1q_N)/2}, \quad (4.104)$$

o que, substituído em (4.96), resulta em:

$$\prod_{n=1}^N A_{q_n}(\Delta t) = \prod_{n=1}^{N-1} c_{q_n q_{n+1}}^{q_n}(\Delta t) \sigma_x^{(1-q_n q_N)/2} A_{q_N}(\Delta t), \quad (4.105)$$

isto é, o produto das N matrizes transforma-se num produto de $N - 1$ escalares multiplicados por uma ou duas matrizes, o que significa uma boa economia computacional quando N é grande.

Substituindo (4.105) em (4.95), encontramos o seguinte:

$$\begin{aligned} \left[M(\Delta t) \begin{pmatrix} \mathcal{K}_+(\Delta t) & 0 \\ 0 & \mathcal{K}_-(\Delta t) \end{pmatrix} \right]^N &= \sum_{q_1 \in \{-1,1\}} \cdots \sum_{q_N \in \{-1,1\}} \prod_{n=1}^N \{ \mathcal{K}_{q_n}(\Delta t) \} \\ &\times \prod_{n=1}^{N-1} c_{q_n q_{n+1}}^{q_n}(\Delta t) \sigma_x^{(1-q_n q_N)/2} A_{q_N}(\Delta t). \end{aligned} \quad (4.106)$$

De volta a (4.81), substituindo (4.106) e tomando o traço parcial sobre o ambiente, encontramos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix} &= \frac{e^{-\lambda t}}{\Omega^N} \sum_{q_1 \in \{-1,1\}} \cdots \sum_{q_N \in \{-1,1\}} \text{Tr}_A \left\{ \prod_{n=1}^N \mathcal{K}_{q_n}(\Delta t) \rho_A(0) \right\} \\ &\times \left\{ \prod_{n=1}^{N-1} c_{q_n q_{n+1}}^{q_n}(\Delta t) \right\} \sigma_x^{(1-q_n q_N)/2} A_{q_N}(\Delta t) \begin{pmatrix} \rho_{01}(0) \\ \rho_{10}(0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

O único passo que falta para podermos calcular numericamente as coerências por meio de (4.107) é o cálculo do traço parcial sobre os estados do ambiente. Esse traço é o mesmo obtido para o caso $\omega_0 = 0$,²⁰⁻²¹ e é apresentado no Apêndice D.

Para o caso específico de uma densidade espectral ôhmica (2.23), encontramos o seguinte resultado final:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) \end{pmatrix} &= \frac{e^{-\lambda t}}{\Omega^N} \sum_{q_1 \in \{-1,1\}} \sum_{q_2 \in \{-1,1\}} \cdots \sum_{q_N \in \{-1,1\}} \\ &\times \exp \left\{ -8\eta \sum_{m,n=1}^N q_m q_n \int_0^\infty d\omega e^{-\omega/\omega_c} \frac{e^{-i(m-n)\omega\Delta t}}{\omega} \coth \left(\frac{\hbar\beta\omega}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\omega\Delta t}{2} \right) \right\} \\ &\times \left[\prod_{n=1}^{N-1} c_{q_n q_{n+1}}^{q_n}(\Delta t) \right] (\sigma_x)^{(1-q_1 q_N)/2} A_{q_N}(\Delta t) \begin{pmatrix} \rho_{01}(0) \\ \rho_{10}(0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Este resultado (4.108) depende apenas da nossa capacidade de integrar e somar quan-

tas vezes for necessário para levarmos do resultado inicial ao final. É um algoritmo custoso, pois o número de contas dobra cada vez que aumentamos um N . Porém, pode ser calculado na prática, como veremos na próxima seção.

4.4 Resultados

Os resultados obtidos por meio da equação mestra (4.73) e do método numérico do superoperador partido ao meio (4.108) são bastante próximos para pequenas perturbações e curtos períodos de tempo, como podemos ver nas figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4. Uma exceção ocorre quando λ é pequeno mas a temperatura do ambiente é não nula (figuras 4.3 e 4.4). Neste caso, a influência do ambiente não é mais tão pequena se comparada com a medida, e o método perturbativo não funciona tão bem.

De modo geral, vemos que a introdução da porta lógica por meio da variável ω_0 ou da temperatura $T > 0$ não altera nossas conclusões de que a introdução da medida contínua preserva por mais tempo a componente do vetor de Bloch paralela à direção da medida. Esse é um fenômeno que não observamos para o ruído markoviano do capítulo anterior.

Além disso, vemos que a proteção conferida pela medida protege o sistema também contra a evolução esperada pela porta lógica na figura 4.2(c). Esse é um efeito deletério, mas que será superado no capítulo 6 com a elaboração de um esquema que protege o sistema do ruído sem afetar as portas lógicas.

A manutenção do valor inicial de $b_x(t)$ é um fenômeno que se assemelha ao chamado efeito Zenão quântico, no qual um sistema no estado excitado que esteja sendo continuamente monitorado nunca decai. Essa analogia é completada no próximo capítulo, enquanto no capítulo 6 mostraremos como podemos usar esse fenômeno para preservar o estado de qubits em um computador quântico.

continua

continuação

Figura 4.1 – Comparação dos resultados da evolução das populações $((1+b_x)/2)$ e módulo das coerências $((b_y^2 + b_z^2)^{1/2}/2)$ na base de autoestados de σ_x para os dois métodos apresentados neste capítulo. Resultados numéricos da equação mestra (4.71) foram obtidos por C. A. Brasil. O estado inicial é $(|0\rangle + e^{i\pi/4}|1\rangle)/\sqrt{2}$, de forma que $b_x^2(0) = 1/2$ e $b_z^2(0) + b_y^2(0) = 1/2$. Escolhemos $\omega_0 = T = 0$, e variamos o acoplamento com o ambiente η (a,b) e a intensidade da medida λ (c,d). As coerências diminuem mais rapidamente com o aumento de qualquer um dos acoplamentos (b,d), enquanto que as populações são protegidas com o aumento de λ .

Fonte: BRASIL, C. A.; CASTRO, L. A.; NAPOLITANO, R. D. J.²³

continua

continuação

Figura 4.2 – Mesmas condições da figura 4.1, com exceção de que aqui aplicamos uma porta lógica sobre o qubit durante a medida ($\omega_0 \neq 0$). Os dois métodos confirmam que o aumento de η (a,b) acelera a diminuição de b_x (a,c) e b_y e b_z (b,d), enquanto um aumento de λ (c,d) continua preservando a população de σ_x . A diferença, desta vez, é que ω_0 introduz uma oscilação, que é amortecida por λ , como na figura 3.3.

Fonte: BRASIL, C. A.; CASTRO, L. A.; NAPOLITANO, R. D. J.²³

continua

continuação

Figura 4.3 – Mesmas condições da figura 4.1, mas desta vez com $T \neq 0$. Um aumento da temperatura (a,b) provoca um decréscimo mais rápido nas componentes do vetor de Bloch (a,b) b_x e (c,d) b_y, b_z . O aumento de λ (c,d) continua desacelerando a diminuição de b_x (c).

Fonte: BRASIL, C. A.; CASTRO, L. A.; NAPOLITANO, R. D. J.²³

Figura 4.4 – Mesmas condições iniciais da figura 4.1, mas desta vez tanto com $\omega_0 \neq 0$ quanto $T \neq 0$. Continuamos observando que um aumento de λ torna mais lento o decréscimo de b_x (a), enquanto acelera a diminuição de b_y e b_z (b).

Fonte: BRASIL, C. A.; CASTRO, L. A.; NAPOLITANO, R. D. J.²³

5 EFEITO ZENÃO PARA A MEDIDA CONTÍNUA

No capítulo anterior, vimos como as populações na base σ_x podem resistir por mais tempo à descoerência em σ_z quando uma medida de σ_x ocorre ao mesmo tempo. Neste capítulo, veremos o efeito Zenão³³ em si emergir da equação mestra da medida (2.14) – isto é, veremos como a população de um estado excitado demora mais para decair quando observada continuamente.

O efeito Zenão pode ser explicado intuitivamente com um exemplo simples.³⁴ Suponha que um sistema esteja em $t = 0$ no estado excitado $|0\rangle$, e que ele evolua de acordo com um potencial de interação independente do tempo W . A probabilidade $P_{00}(t)$ de que o sistema permaneça no estado excitado num instante de tempo $t > 0$ é:

$$P_{00}(t) = |\langle 0 | e^{-iWt/\hbar} | 0 \rangle|^2, \quad (5.1)$$

que é o mesmo que a população $\rho_{00}(t)$.

Suponha que só deixemos o sistema evoluir por um curto intervalo de tempo Δt antes de observarmos se ele já decaiu ou não. A probabilidade de que ele não tenha decaído pode ser aproximada até segunda ordem em Δt por:

$$P_{00}(\Delta t) = \langle 0 | \left\{ 1 - \frac{iW\Delta t}{\hbar} - \frac{1}{2} \frac{W^2(\Delta t)^2}{\hbar^2} \right\} | 0 \rangle \langle 0 | \left\{ 1 + \frac{iW\Delta t}{\hbar} - \frac{1}{2} \frac{W^2(\Delta t)^2}{\hbar^2} \right\} | 0 \rangle + O(\Delta t^3). \quad (5.2)$$

Neste caso, fica claro que os termos de primeira ordem se anulam, restando apenas os de segunda:

$$P_{00}(\Delta t) = 1 - \frac{(\Delta t)^2}{\tau_Z^2} + O(\Delta t^3), \quad (5.3)$$

onde o tempo característico do efeito Zenão, τ_Z , é definido como:

$$\tau_Z^{-1} \equiv \frac{1}{\hbar^2} \langle 0 | W^2 | 0 \rangle - \frac{1}{\hbar^2} \langle 0 | W | 0 \rangle^2. \quad (5.4)$$

O que é isso? Trata-se da escala de tempo em que a regra de decaimento (5.3) é válida. Se $\Delta t \ll \tau_Z$, devemos ter um decaimento proporcional ao quadrado do tempo.

Se monitorarmos o sistema em intervalos Δt satisfazendo $\Delta t \ll \tau_Z$, a probabilidade de o sistema não haver decaído após N monitoramentos é dada pela composição das probabilidades de ele não ter sido observado no estado fundamental após N intervalos de Δt :

$$\rho_{00}(t) = [P_{00}(\Delta t)]^N = 1 - \frac{N(\Delta t)^2}{\tau_Z^2} + O(N\Delta t^3), \quad (5.5)$$

conforme ilustrado na figura 5.1. Mais uma vez, isso é o mesmo que a fração do *ensemble* de sistemas-objeto que não haverá decaído até o instante t , ou $\rho_{00}(t)$.

Figura 5.1 – Probabilidade de encontrar o sistema no estado excitado quando seu decaimento é interrompido por uma medida instantânea a cada intervalo $\Delta t = 10^{-1} \tau_Z / N$. Quanto mais frequente a medida, menos o sistema decai.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Fixando o intervalo de tempo $t = N\Delta t$, podemos fazer a população tão próxima do valor original quanto quisermos. Isto é,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \rho_{00}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [P_{00}(\Delta t)]^N = 1. \quad (5.6)$$

A capacidade de se impedir o decaimento do sistema por meio de medidas cada vez mais frequentes é o efeito Zenão quântico.

Essa é a formulação do fenômeno para medidas discretas e instantâneas. Na próxima seção, veremos como quantificar numericamente o efeito Zenão para o caso de medidas contínuas descritas pela equação mestra (2.14).

5.1 Efeito Zenão para medidas contínuas

Para que o efeito Zenão ocorra, precisamos de um sistema com estado excitado e fundamental. O mesmo qubit sujeito à porta lógica representada pelo hamiltoniano $H_S = \hbar\omega_0\sigma_z$ que empregamos no capítulo anterior bastará. Também precisamos de um monitoramento contínuo do estado deste sistema. Como queremos saber se o qubit decaiu, e o estado excitado é $|0\rangle$, precisamos observar continuamente σ_z .

A maior diferença é que precisamos de um hamiltoniano de interação com o ambiente que cause o decaimento do qubit, e não sua descoerência. Para isso, precisamos adotar a interação (2.74).

Podemos aproveitar a solução aproximada de segunda ordem encontrada no capítulo anterior (4.46), para a qual poucas hipóteses foram feitas, e apenas tomar $S_k = \sigma_+$ para tornar a interação do tipo (2.74):

$$\begin{aligned} \rho_S(t) = & e^{At} \rho_S(0) - \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \\ & \times e^{A(t-t_1)} \left\{ e^{-i\omega(t_1-t_2)} [\sigma_+, e^{A(t_1-t_2)} \{ \sigma_- [e^{At_2} \rho_S(0)] \}] \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \right. \\ & - e^{-i\omega(t_1-t_2)} [\sigma_+, e^{A(t_1-t_2)} \{ [e^{At_2} \rho_S(0)] \sigma_- \}] \frac{e^{-\hbar\beta\omega}}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \\ & + e^{i\omega(t_1-t_2)} [\sigma_-, e^{A(t_1-t_2)} \{ \sigma_+ [e^{At_2} \rho_S(0)] \}] \frac{e^{-\hbar\beta\omega}}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \\ & \left. - e^{i\omega(t_1-t_2)} [\sigma_-, e^{A(t_1-t_2)} \{ [e^{At_2} \rho_S(0)] \sigma_+ \}] \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \right\}. \quad (5.7) \end{aligned}$$

Estamos interessados também somente nas populações do estado excitado, de forma que devemos projetar (5.7) com $\langle 0|$ e $|0\rangle$. Para isso, é útil lembrar que, para uma solução com um hamiltoniano $H_S = \hbar\omega_0\sigma_z$ e uma medida de σ_z , usando (3.2), temos:

$$\langle 0| e^{At} X |0\rangle = \langle 0| X |0\rangle, \quad (5.8)$$

$$\langle 1| e^{At} X |1\rangle = \langle 1| X |1\rangle, \quad (5.9)$$

para qualquer operador X .

Além disso, das definições (1.37) e (1.38), encontramos que, para qualquer operador X ,

$$\langle 0 | [\sigma_+, X] | 0 \rangle = \langle 1 | X | 0 \rangle, \quad (5.10)$$

$$\langle 0 | [\sigma_-, X] | 0 \rangle = -\langle 0 | X | 1 \rangle. \quad (5.11)$$

Usando as identidades (5.8), (5.10) e (5.11) em (5.7), encontramos a seguinte solução para a população $\rho_{00}(t)$:

$$\begin{aligned} \rho_{00}(t) = \rho_{00}(0) &- \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \\ &\times \left\{ e^{-i\omega(t_1-t_2)} \langle 1 | e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \{ \sigma_- [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] \} | 0 \rangle \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \right. \\ &- e^{-i\omega(t_1-t_2)} \langle 1 | e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \{ [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] \sigma_- \} | 0 \rangle \frac{e^{-\hbar\beta\omega}}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \\ &- e^{i\omega(t_1-t_2)} \langle 0 | e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \{ \sigma_+ [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] \} | 1 \rangle \frac{e^{-\hbar\beta\omega}}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \\ &\left. + e^{i\omega(t_1-t_2)} \langle 0 | e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \{ [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] \sigma_+ \} | 1 \rangle \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \right\}. \quad (5.12) \end{aligned}$$

Novamente, invocando a solução (3.2), concluímos que encontramos o seguinte quando aplicamos bras e kets diferentes ao superoperador $e^{\mathcal{A}t}$:

$$\langle 0 | e^{\mathcal{A}t} X | 1 \rangle = e^{-2\lambda t} e^{-2i\omega_0 t} \langle 0 | X | 1 \rangle, \quad (5.13)$$

$$\langle 1 | e^{\mathcal{A}t} X | 0 \rangle = e^{-2\lambda t} e^{2i\omega_0 t} \langle 1 | X | 0 \rangle. \quad (5.14)$$

Por isso, usando (5.13) e (5.14), encontramos, em (5.12),

$$\begin{aligned} \rho_{00}(t) = \rho_{00}(0) &- \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{-2\lambda(t_1-t_2)} \\ &\times \left\{ e^{-i(\omega-2\omega_0)(t_1-t_2)} \langle 1 | \sigma_- [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] | 0 \rangle \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \right. \\ &- e^{-i(\omega-2\omega_0)(t_1-t_2)} \langle 1 | [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] \sigma_- | 0 \rangle \frac{e^{-\hbar\beta\omega}}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \\ &- e^{i(\omega-2\omega_0)(t_1-t_2)} \langle 0 | \sigma_+ [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] | 1 \rangle \frac{e^{-\hbar\beta\omega}}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \\ &\left. + e^{i(\omega-2\omega_0)(t_1-t_2)} \langle 0 | [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] \sigma_+ | 1 \rangle \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \right\}. \quad (5.15) \end{aligned}$$

Aplicando novamente as definições (1.37) e (1.38), e as identidades (5.8) e (5.9), encontramos:

$$\begin{aligned} \rho_{00}(t) = \rho_{00}(0) - \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{-2\lambda(t_1-t_2)} \\ \times \left\{ e^{-i(\omega-2\omega_0)(t_1-t_2)} \rho_{00}(0) \frac{1}{1-e^{-\hbar\beta\omega}} - e^{-i(\omega-2\omega_0)(t_1-t_2)} \rho_{11}(0) \frac{e^{-\hbar\beta\omega}}{1-e^{-\hbar\beta\omega}} \right. \\ \left. - e^{i(\omega-2\omega_0)(t_1-t_2)} \rho_{11}(0) \frac{e^{-\hbar\beta\omega}}{1-e^{-\hbar\beta\omega}} + e^{i(\omega-2\omega_0)(t_1-t_2)} \rho_{00}(0) \frac{1}{1-e^{-\hbar\beta\omega}} \right\}. \quad (5.16) \end{aligned}$$

Suponhamos que inicialmente o sistema encontrava-se no estado excitado $|0\rangle$. Isso significa que $\rho_{00}(0) = 1$ e $\rho_{11}(0) = 0$, de forma que podemos encontrar para o estado final $\rho_{00}(t)$:

$$\rho_{00}(t) = 1 - 2 \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{-2\lambda(t_1-t_2)} \frac{\cos[(\omega - 2\omega_0)(t_1 - t_2)]}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}}. \quad (5.17)$$

Transformando a variável t_2 em (5.17) em uma outra variável $\tau = t_1 - t_2$, a integral simplifica-se para:

$$\rho_{00}(t) = 1 - 2 \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} d\tau e^{-2\lambda\tau} \frac{\cos[(\omega - 2\omega_0)\tau]}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}}. \quad (5.18)$$

A integral temporal dupla presente em (5.18) pode ser calculada sem muitas dificuldades se notarmos que ela tem a forma da parte real de uma integral de exponencial:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} d\tau e^{-2\lambda\tau} \cos[(\omega - 2\omega_0)\tau] &= \text{Re} \left\{ \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} d\tau \exp \{ - [2\lambda + i(\omega - 2\omega_0)] \tau \} \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \int_0^t dt_1 \frac{1 - \exp \{ - [2\lambda + i(\omega - 2\omega_0)] t_1 \}}{2\lambda + i(\omega - 2\omega_0)} \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \frac{\exp \{ - [2\lambda + i(\omega - 2\omega_0)] t \} - 1}{[2\lambda + i(\omega - 2\omega_0)]^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{t}{2\lambda + i(\omega - 2\omega_0)} \right\}. \\ &= [4\lambda^2 - (\omega - 2\omega_0)^2] \frac{e^{-2\lambda t} \cos[(\omega - 2\omega_0)t] - 1}{[4\lambda^2 + (\omega - 2\omega_0)^2]^2} \\ &\quad - [4\lambda(\omega - 2\omega_0)] \frac{e^{-2\lambda t} \sin[(\omega - 2\omega_0)t]}{[4\lambda^2 + (\omega - 2\omega_0)^2]^2} \\ &\quad + \frac{2\lambda t}{4\lambda^2 + (\omega - 2\omega_0)^2}. \quad (5.19) \end{aligned}$$

O resultado (5.19) é útil no momento de calcular numericamente o valor de (5.18), mas, por ser bastante extenso, escreveremos apenas as integrais nas próximas equações.

Para fins de cálculo numérico, também é útil notar que, quando $\omega \rightarrow 2\omega_0$ e $\lambda \rightarrow 0$, a integral (5.19) torna-se a expressão mais simples:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow 2\omega_0} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} d\tau e^{-2\lambda\tau} \cos[(\omega - 2\omega_0)\tau] = \frac{t^2}{2}. \quad (5.20)$$

Conforme λ cresce, o integrando em (5.18) tenderá a zero, resultando em um número cada vez mais próximo de 1 para a população final. Trata-se da versão contínua do efeito Zenão. Conforme levamos $\lambda \rightarrow \infty$, a integral desaparece por completo e encontramos:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \rho_{00}(t) = 1. \quad (5.21)$$

Podemos quantificar o efeito Zenão pela definição de uma taxa de decaimento exponencial $\Gamma(t)$:³⁴

$$\rho_{00}(t) = \exp\{-\Gamma(t)t\}. \quad (5.22)$$

No caso do exemplo simples (5.5), $\Gamma(t)$ conforme definido em (5.22) é independente do tempo total t :

$$\Gamma_{\Delta t} \approx \frac{\Delta t}{\tau_Z^2}, \quad (5.23)$$

desde que $\Delta t \ll \tau_Z$, de forma que $1 - \Gamma_{\Delta t}t$ possa ser aproximado por uma exponencial $e^{-\Gamma t}$.

Para medirmos o efeito Zenão, podemos comparar (5.22) quando há uma observação com o caso em que não há interferência do medidor. A essa razão chamaremos de $\alpha(t)$ (ver figura 5.2):

$$\alpha(t) \equiv \frac{1}{\Gamma_{\text{sem medida}}(t)} \Gamma_{\text{com medida}}(t). \quad (5.24)$$

Se $\alpha < 1$, a medida tem como efeito diminuir a taxa de decaimento, significando que ocorre o efeito Zenão quântico. Se $\alpha = 1$, a taxa de decaimento não é afetada pela medida e nenhum efeito ocorre. Se $\alpha > 1$, a medida na verdade causa um aumento da taxa de decaimento: trata-se do efeito anti-Zenão quântico.

Para o exemplo simples (5.23), o parâmetro α depende apenas do número de medidas realizadas no intervalo t , N :

$$\alpha(N) = \frac{\Gamma(N > 0)}{\Gamma(N = 0)} = \frac{1}{N}, \quad (5.25)$$

que é sempre menor do que um para $N > 1$. Sempre observamos efeito Zenão nesse caso.

Para nossa solução (5.18), desde que $J(\omega)$ seja pequeno (uma hipótese que estamos fazendo desde o início do trabalho), podemos aproximar (5.18) por uma exponencial como a de (5.22) com taxa de decaimento dependente tanto do tempo t quanto da intensidade

Figura 5.2 – Variação do parâmetro α com o número N de medidas discretas. α tende a 0 no limite em que $N \rightarrow \infty$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

da medida, λ ,

$$\Gamma(\lambda, t) = \frac{2}{t} \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} d\tau e^{-2\lambda\tau} \cos[(\omega - 2\omega_0)\tau]. \quad (5.26)$$

Dessa forma o valor de $\alpha(t)$ (5.24) também dependerá de λ :

$$\alpha(\lambda, t) = \frac{\int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} d\tau e^{-2\lambda\tau} \cos[(\omega - 2\omega_0)\tau]}{\int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} d\tau \cos[(\omega - 2\omega_0)\tau]}. \quad (5.27)$$

No caso específico de uma densidade espectral ôhmica, sub-ôhmica, ou super-ôhmica (2.23), temos:

$$\alpha(\lambda, t) = \frac{\int_0^\infty d\omega \frac{\omega^s e^{-\omega/\omega_c}}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} d\tau e^{-2\lambda\tau} \cos[(\omega - 2\omega_0)\tau]}{\int_0^\infty d\omega \frac{\omega^s e^{-\omega/\omega_c}}{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} d\tau \cos[(\omega - 2\omega_0)\tau]}, \quad (5.28)$$

que pode ser calculada numericamente, com o auxílio do resultado (5.19). Estes resultados são apresentados na figura 5.3. Assim como a outra aproximação de segunda ordem (5.3), os valores de α encontrados dessa forma apenas exibem efeito Zenão. As curvas para diferentes ambientes diferem levemente, mas vê-se que, no limite em que $\lambda \rightarrow \infty$, temos $\alpha \rightarrow 0$, eliminando qualquer decaimento para todos os tipos de ambiente, desde que seu

acoplamento com o sistema-objeto seja fraco o suficiente para que esta aproximação seja válida.

Figura 5.3 – Taxa α para diferentes ambientes, temperaturas iniciais e frequências ω_0 em função do inverso da intensidade da medida λ , para a aproximação de segunda ordem. Todos os α foram calculados no instante $t = \omega_c^{-1}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Também podemos analisar a dependência temporal de α , o que é visto na figura 5.4. Nela, α diminui linearmente com o tempo e com a mesma inclinação, independentemente do tipo de ambiente. Isto é aparentemente surpreendente, mas pode ser explicado se expandirmos (5.19) até terceira ordem no tempo:

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} d\tau e^{-2\lambda\tau} \cos[(\omega - 2\omega_0)\tau] = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}\lambda t^3 + O(t^4). \quad (5.29)$$

Descartando termos de ordem maior que quatro no tempo, o $\alpha(t)$ em (5.28) torna-se:

$$\alpha(t) = \frac{\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}\lambda t^3\right) \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^s e^{-\omega/\omega_c}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}}{\left(\frac{1}{2}t^2\right) \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^s e^{-\omega/\omega_c}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}} + O(t^2), \quad (5.30)$$

onde todos os termos dependentes do ambiente se cancelam para tempos pequenos, resul-

Figura 5.4 – Taxa α para diferentes ambientes e condições iniciais, em função do tempo. A intensidade da medida λ foi fixada em $\lambda = 1$. Todas as curvas se sobrepõem.

Fonte: Elaborada pelo autor.

tando na reta:

$$\alpha(t) = 1 - \frac{2}{3}\lambda t + O(t^2). \quad (5.31)$$

Portanto, a curva $\alpha(t)$ independe do ambiente para interações fracas e tempos curtos, mas sua inclinação varia linearmente com o valor de λ , que é o comportamento que vemos aproximadamente ocorrer na figura 5.5.

A equação (5.31) também explica por que as curvas na figura 5.3 variam pouco se mudamos o ambiente. Em geral, vemos dos resultados desta seção que uma medida contínua sempre resulta em uma maior diminuição do decaimento quanto maior forem λ e t , desde que o acoplamento com o ambiente seja fraco e o tempo de duração seja curto.

Figura 5.5 – Dependência temporal de α para um ambiente ôhmico a temperatura zero e $\omega_0 = 0$, para diferentes valores de λ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2 Efeito anti-Zenão com medidas discretas

Ao invés de iniciarmos a evolução do sistema com $\rho_{00}(0) = 1$, imagine que inicialmente tínhamos $\rho_{00}(0) < 1$. Ainda assim, podemos calcular o valor final de $\rho_{00}(t)$, usando (5.16) e o fato de que $\rho_{11}(0) = 1 - \rho_{00}(0)$:

$$\begin{aligned} \rho_{00}(t) = & \rho_{00}(0) \\ & - 2\rho_{00}(0) \int_0^\infty d\omega J(\omega) \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} d\tau e^{-2\lambda\tau} \cos[(\omega - 2\omega_0)\tau] \\ & + 2 \int_0^\infty d\omega J(\omega) \frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} d\tau e^{-2\lambda\tau} \cos[(\omega - 2\omega_0)\tau]. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Mais uma vez, temos presentes integrais duplas no tempo do tipo que sabemos calcular analiticamente por (5.19).

Suponha que deixemos o sistema evoluir sem observação ($\lambda = 0$) por um período de tempo Δt antes de realizarmos uma medida discreta e instantânea – ao contrário da medida contínua dada pela equação mestra (2.14). Ao final desse tempo, determina-se instantaneamente se o sistema decaiu ou não. Se ele não houver decaído, a probabilidade de que ele não decaia num instante $t + \Delta t$ será novamente regida por (5.32).

Figura 5.6 – População no estado excitado para um sistema interagindo com um ambiente ôhmico a temperatura zero sem ser submetido a uma medida contínua ($\lambda = 0$) e degenerado ($\omega_0 = 0$). Se as medidas forem (b) frequentes, temos um decaimento mais lento do que o caso sem medida ($N = 1$); se forem espaçadas (a), o decaimento ocorre mais rápido.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A probabilidade de o sistema não haver decaído pode ser encontrada se retroalimentarmos o resultado de $\rho_{00}(\Delta t)$ como $\rho_{00}(0)$ em (5.32). Realizando medidas em intervalos de Δt , encontramos a população em um instante $t' < \Delta t$ após a N -ésima medida, por meio de N iterações de (5.32):

$$\begin{aligned} \rho_{00}(N\Delta t + t') &= \rho_{00}(N\Delta t) \\ &- 2\rho_{00}(N\Delta t) \int_0^\infty d\omega J(\omega) \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \int_0^{t'} dt_1 \int_0^{t_1} d\tau \cos[(\omega - 2\omega_0)\tau] \\ &+ 2 \int_0^\infty d\omega J(\omega) \frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \int_0^{t'} dt_1 \int_0^{t_1} d\tau \cos[(\omega - 2\omega_0)\tau]. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Se realizarmos medidas frequentes, diminuimos a taxa de decaimento e observamos o efeito Zenão, como no caso de medidas contínuas para ruídos fracos de que tratamos na seção anterior. Se as medidas forem muito espaçadas entre si, porém, observamos o efeito anti-Zenão: termos da curva de decaimento de ordem maior do que t^2 prevalecem e o sistema decai mais rapidamente do que se não estivesse sendo observado. Estes dois regimes são ilustrados na figura 5.6.

Em nossa análise do efeito Zenão para uma medida contínua, só consideramos a expansão até segunda ordem, e por isso não observamos a ocorrência de efeito anti-Zenão. É possível que, se considerássemos termos de ordens maiores, tal efeito seria visível em situações em que o ruído ambiental seja forte o suficiente e para certos tipos de ambiente e temperaturas, como no caso das medidas discretas.³⁵⁻³⁶

5.3 Comparação com a solução exata do decaimento

A equação do decaimento para medidas discretas que empregamos na seção anterior não é necessariamente a mais adequada, já que ela é apenas uma aproximação de segunda ordem sendo aplicada a tempos longos. Uma solução mais precisa³⁷⁻³⁸ envolve a segunda interação da série de Dyson para o vetor de estado (2.51):

$$|\Psi_I(t)\rangle = |\Psi_I(0)\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt_1 H_I(t_1) |\Psi_I(0)\rangle + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) |\Psi_I(t_2)\rangle, \quad (5.34)$$

onde incorporamos o η ao $H_I(t)$ e tomamos $\tau_i = 0$.

Como não podemos descrever o ambiente por meio de seu vetor de estado nesta formulação, vamos tomá-lo inicialmente no estado de vácuo $|0\rangle_A$, equivalente à temperatura $T = 0$, o que significa que todos os k -ésimos modos do campo estão no estado $|0\rangle_k$:

$$|0\rangle_A \equiv \bigotimes_k |0\rangle_k. \quad (5.35)$$

Como também estamos representando o estado excitado do qubit por $|0\rangle$, podemos escrever o estado inicial do sistema como:

$$|\Psi_I(0)\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle_A. \quad (5.36)$$

Agora, com respeito ao hamiltoniano, novamente devemos deixar o qubit em si sujeito a σ_z enquanto interage com o ambiente via hamiltoniano de Jaynes-Cummings (2.20),

$$H = \hbar\omega_0\sigma_z + \hbar \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + \hbar \sum_k \left(\sigma_+ a_k g_k^* + \sigma_- a_k^\dagger g_k \right). \quad (5.37)$$

Passando ao hamiltoniano da representação de interação (2.47), temos:

$$H_I(t) = \hbar e^{i\omega_0\sigma_z t} \sum_k \left(\sigma_+ a_k g_k^* e^{-i\omega_k t} + \sigma_- a_k^\dagger g_k e^{i\omega_k t} \right) e^{-i\omega_0\sigma_z t}, \quad (5.38)$$

onde usamos o resultado obtido em (2.74).

Queremos saber a probabilidade de o sistema permanecer no estado inicial $|\Psi_I(0)\rangle$. Por isso, devemos calcular o módulo quadrado do produto interno entre (5.34) e (5.36):

$$\begin{aligned} \langle \Psi_I(0) | \Psi_I(t) \rangle &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt_1 \langle \Psi_I(0) | H_I(t_1) | \Psi_I(0) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle \Psi_I(0) | H_I(t_1) H_I(t_2) | \Psi_I(t_2) \rangle. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Devido à presença de apenas um operador de criação ou de destruição em (5.38), é fácil ver que:

$$\langle \Psi_I(0) | H_I(t) | \Psi_I(0) \rangle = 0. \quad (5.40)$$

Por outro lado, quando temos dois hamiltonianos atuando sobre o bra $\langle \Psi_I(0) |$, notemos que apenas uma combinação de dois $\sigma_{\pm}$ aplicados em seguida sobre o estado excitado $\langle 0 |$ não elimina completamente o vetor de estado:

$$\langle 0 | \sigma_- \sigma_- = 0, \quad (5.41)$$

$$\langle 0 | \sigma_- \sigma_+ = 0, \quad (5.42)$$

$$\langle 0 | \sigma_+ \sigma_- = \langle 0 |, \quad (5.43)$$

$$\langle 0 | \sigma_+ \sigma_+ = 0, \quad (5.44)$$

enquanto que apenas $a_s a_s^\dagger$ não elimina o estado de vácuo $\langle 0 |_A$ quando os dois operadores atuam sobre o mesmo modo do ambiente:

$$\langle 0 |_A a_r a_s^\dagger = \delta_{r,s} \langle 0 |_A, \quad (5.45)$$

$$\langle 0 |_A a_r^\dagger a_s = 0. \quad (5.46)$$

Daí, concluímos que os dois hamiltonianos atuando sobre o bra inicial $\langle \Psi_I(0) |$ resultam em:

$$\langle \Psi_I(0) | H_I(t_1) H_I(t_2) = \hbar^2 e^{2i\omega_0(t_1-t_2)} \sum_{r,s} \delta_{r,s} g_r^* g_s e^{-i\omega_k(t_1-t_2)} \langle \Psi_I(0) |. \quad (5.47)$$

Substituindo (5.40) e (5.47) em (5.39), encontramos:

$$\langle \Psi_I(0) | \Psi_I(t) \rangle = 1 - \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{i(2\omega_0-\omega)(t_1-t_2)} \langle \Psi_I(0) | \Psi_I(t_2) \rangle, \quad (5.48)$$

onde já tomamos o limite do contínuo nas frequências e substituímos a densidade espectral $J(\omega)$ (2.21).

A probabilidade $P_{00}(t)$ de se observar o sistema no estado excitado é encontrada tomando-se o módulo quadrado de (5.48):

$$P_{00}(t) = |\langle \Psi_I(0) | \Psi_I(t) \rangle|^2, \quad (5.49)$$

e, se o sistema for medido discreta e instantaneamente a cada intervalo Δt , $P_{00}(t)$ pode ser empregada para calcular a população final um tempo $t' < \Delta t$ após a N -ésima observação do sistema:

$$\rho_{00}(N\Delta t + t') = [P_{00}(\Delta t)]^N P_{00}(t'). \quad (5.50)$$

A forma como o efeito Zenão surge a partir de medidas discretas e instantâneas pode ser vista na figura 5.7.

Figura 5.7 – Efeito Zenão por meio de N medidas discretas para a solução exata do decaimento a temperatura zero com $\eta^2 = 100$, $\omega_0 = 0$ e ambiente ôhmico.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Antes que qualquer medida ocorra, porém, a população é simplesmente o módulo quadrado de (5.48) que, até quarta ordem em η – ou segunda ordem em $J(\omega)$ – é:

$$\begin{aligned} \rho_{00}(t) = 1 - \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{i(2\omega_0 - \omega)(t_1 - t_2)} \langle \Psi_I(0) | \Psi_I(t_2) \rangle \\ - \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{-i(2\omega_0 - \omega)(t_1 - t_2)} \langle \Psi_I(t_2) | \Psi_I(0) \rangle + O(\eta^4). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Como, de (5.48), sabemos que, até segunda ordem em η :

$$\langle \Psi_I(0) | \Psi_I(t_2) \rangle = 1 + O(\eta^2), \quad (5.52)$$

$$\langle \Psi_I(t_2) | \Psi_I(0) \rangle = 1 + O(\eta^2), \quad (5.53)$$

a solução (5.51), até segunda ordem em η , reduz-se a:

$$\rho_{00}(t) = 1 - 2 \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cos[(2\omega_0 - \omega)(t_1 - t_2)] + O(\eta^4), \quad (5.54)$$

que é exatamente (5.17) com $\beta \rightarrow \infty$ e $\lambda = 0$. Ou seja, a solução aproximada obtida na primeira seção e a solução exata obtida aqui são compatíveis desde que o ambiente esteja inicialmente à temperatura zero, não haja medida e o ruído seja fraco.

Para calcularmos numericamente a integral (5.48) e compararmos seu resultado exato com nossa aproximação, será útil empregarmos a seguinte identidade de integrais duplas:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 f(t_1 - t_2, t_2) &= \int_0^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 f(t_1 - t_2, t_2) \\ &= \int_0^t dt_2 \int_0^{t-t_2} d\tau f(\tau, t_2). \end{aligned} \quad (5.55)$$

A identidade (5.55) permite-nos reescrever (5.48) como:

$$\langle \Psi_I(0) | \Psi_I(t) \rangle = 1 - \int_0^t dt_2 \left\{ \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^{t-t_2} d\tau e^{i(2\omega_0 - \omega)\tau} \right\} \langle \Psi_I(0) | \Psi_I(t_2) \rangle. \quad (5.56)$$

A integral restante em τ é simples:

$$\int_0^{t-t_2} d\tau e^{i(2\omega_0 - \omega)\tau} = \frac{e^{i(2\omega_0 - \omega)(t-t_2)} - 1}{i(2\omega_0 - \omega)}. \quad (5.57)$$

Em termos de partes real e imaginária:

$$\begin{aligned} \text{Re} \{ \langle \Psi_I(0) | \Psi_I(t) \rangle \} &= 1 \\ &- \int_0^t dt_2 \left\{ \int_0^\infty d\omega J(\omega) \frac{\sin[(2\omega_0 - \omega)(t - t_2)]}{(2\omega_0 - \omega)} \right\} \text{Re} \{ \langle \Psi_I(0) | \Psi_I(t_2) \rangle \} \\ &+ \int_0^t dt_2 \left\{ \int_0^\infty d\omega J(\omega) \frac{1 - \cos[(2\omega_0 - \omega)(t - t_2)]}{(2\omega_0 - \omega)} \right\} \text{Im} \{ \langle \Psi_I(0) | \Psi_I(t_2) \rangle \}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned}
\text{Im} \{ \langle \Psi_I(0) | \Psi_I(t) \rangle \} = & \\
& - \int_0^t dt_2 \left\{ \int_0^\infty d\omega J(\omega) \frac{\sin[(2\omega_0 - \omega)(t - t_2)]}{(2\omega_0 - \omega)} \right\} \text{Im} \{ \langle \Psi_I(0) | \Psi_I(t_2) \rangle \} \\
& - \int_0^t dt_2 \left\{ \int_0^\infty d\omega J(\omega) \frac{1 - \cos[(2\omega_0 - \omega)(t - t_2)]}{(2\omega_0 - \omega)} \right\} \text{Re} \{ \langle \Psi_I(0) | \Psi_I(t_2) \rangle \}. \quad (5.59)
\end{aligned}$$

Vemos uma comparação entre as soluções exata e perturbativa na figura 5.8. Mesmo quando η deixa de ser desprezível, nossa aproximação de segunda ordem continua boa para tempos curtos (neste exemplo, tomamos $t \sim \omega_c^{-2}$).

Figura 5.8 – Comparação das soluções exata e aproximada para o decaimento sem interferência de observações, para tempos curtos. O ambiente considerado é ôhmico a temperatura zero e com $\omega_0 = 0$. As soluções se sobrepõem para η pequeno, mas passam a divergir quando η fica da ordem de $(\omega_c t)^{-1}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos ver outros exemplos de como o efeito Zenão da medida contínua ocorre, comparado com a solução exata, na figura 5.9. Neste casos, nos quais variamos o ambiente e o valor de ω_0 , ainda temos uma grande concordância entre a solução exata e a aproximada quando desligamos a medida contínua.

5.4 Inadequação do método do superoperador partido ao meio

Considerando que o método do operador partido ao meio foi um dos que figurou no capítulo passado, convém justificar a sua ausência neste capítulo. O método do superoperador partido ao meio (2.80) requer a aplicação sucessiva de $e^{\mathcal{A}\Delta t}$ e $e^{\mathcal{B}\Delta t}$ sobre o estado inicial do sistema. Neste capítulo, só estamos interessados na população, o que significa que podemos projetar o estado final com $\langle 0|$ e $|0\rangle$:

$$\rho_{00}(N\Delta t) \approx \langle 0 | \text{Tr}_A \left\{ \left[(e^{\mathcal{B}\Delta t} e^{A\Delta t})^N \rho(0) \right] \right\} | 0 \rangle. \quad (5.60)$$

O que significa aplicar $\langle 0 |$ e $| 0 \rangle$ em $e^{\mathcal{B}\Delta t}$? Como neste capítulo tratamos de uma interação de Jaynes-Cummings, a forma de $\mathcal{B}$ independente do tempo aplicada a um operador qualquer X é:

$$\mathcal{B}X = -i \sum_k \left[\omega_k a_k^\dagger a_k + g_k a_k^\dagger \sigma_- + g_k^* a_k \sigma_+, X \right], \quad (5.61)$$

a qual tem por exponencial:

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{B}t} X = \exp \left\{ -i \sum_k \left(\omega_k a_k^\dagger a_k + g_k a_k^\dagger \sigma_- + g_k^* a_k \sigma_+ \right) \right\} X \\ \times \exp \left\{ i \sum_k \left(\omega_k a_k^\dagger a_k + g_k a_k^\dagger \sigma_- + g_k^* a_k \sigma_+ \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

No caso do erro de fase, quando, ao invés de $\sigma_\pm$, tínhamos operadores σ_z , as exponenciais aplicadas aos vetores de estado $|0\rangle$ e $|1\rangle$ davam resultados simples:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ i \sum_k \left(\omega_k a_k^\dagger a_k + g_k a_k^\dagger \sigma_z + g_k^* a_k \sigma_z \right) \right\} |s\rangle = \\ \exp \left\{ i \sum_k \left(\omega_k a_k^\dagger a_k + (-1)^s g_k a_k^\dagger + (-1)^s g_k^* a_k \right) \right\} |s\rangle, \end{aligned} \quad (5.63)$$

para $s = 0, 1$.

Quando os σ_z são substituídos por $\sigma_\pm$, sua atuação sobre os autoestados $|s\rangle$ não será mais uma de autovetor. Na verdade, dadas constantes quaisquer α e β , temos:

$$\begin{aligned} e^{\alpha\sigma_+ + \beta\sigma_-} |0\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\alpha\sigma_+ + \beta\sigma_-)^n |0\rangle \\ &= \left\{ 1 + (\alpha\sigma_+ + \beta\sigma_-) + \frac{1}{2} (\alpha\sigma_+ + \beta\sigma_-)^2 + \dots \right\} |0\rangle \\ &= 1 + 0 + \beta |1\rangle + 0 + \frac{1}{2} \alpha\beta |0\rangle + 0 + 0 + \dots, \end{aligned} \quad (5.64)$$

onde dificilmente consegue se distinguir qualquer padrão. Por isso, não é possível encontrar uma expressão fechada facilmente calculável como (D.31) para o caso de um ruído do tipo *amplitude damping*.

Tendo completado neste capítulo a analogia da proteção conferida pela medida contínua

com o efeito Zenão quântico para diferentes tipos de ambiente, temperaturas e frequências ω_0 (desde que o ruído seja fraco), veremos no próximo capítulo como medidas contínuas podem ser úteis para a proteção de erros em qubits, mantendo-os dentro de um subespaço de código. Veremos também como portas lógicas podem ser adaptadas para ser aplicadas enquanto essa proteção acontece. Empregaremos a aproximação de segunda ordem que usamos aqui para derivar exemplos numéricos dentro das ordens de grandeza em que conferimos que ela é válida, $\eta < O(\omega_c^{-1}t^{-1})$.

Figura 5.9 – Comparação das soluções exata e aproximada para diferentes ambientes e escolhas de ω_0 , mas sempre mantendo $T = 0$ e $\eta = 1$. As soluções exatas e aproximada se sobrepõem para $\lambda = 0$. Quando $\lambda > 0$, ocorre efeito Zenão.

Fonte: Elaborada pelo autor.

6 CORREÇÃO CONTÍNUA DURANTE PORTAS LÓGICAS

Assim como vimos no capítulo anterior que uma observação contínua mantém um sistema no estado excitado sem decair, veremos neste capítulo como uma observação contínua de um sistema dentro de um subespaço de código impede que ele sofra erros.

No nosso trabalho de mestrado,²⁰ mostramos um esquema para aplicação de portas lógicas em intervalos curtos de tempo entre medidas de síndrome, já publicado.²⁴ Também mostramos como medidas de síndrome contínuas impediam que erros ocorressem em certos casos para qubits na memória, num trabalho ainda não publicado.²⁰ Neste capítulo, veremos como o esquema de medidas contínuas durante portas lógicas pode ser usado para prevenir erros, e também uma forma fisicamente plausível de construção de portas lógicas que satisfaçam as condições necessárias para a detecção contínua, este último resultado já publicado.²⁴

6.1 Monitoramento contínuo de um código quântico

Um código quântico consiste de estados lógicos de vários qubits (ou qudits) usados para representar estados físicos de um número menor de qubits (ou qudits). Diferenciamos o estado lógico $|q\rangle_L$ do correspondente físico $|q\rangle$ pelo subscrito L. Uma base ortonormal desses estados lógicos pode ser usada para criar um projetor sobre o subespaço do código:

$$\Pi_L = \sum_q |q\rangle_L \langle q|_L. \quad (6.1)$$

A prescrição da teoria de correção de erros quânticos³⁹ é que o código deve ser construído de forma que o tipo de erro que ele está propenso a receber do ambiente possa ser detectado pela medida de Π_L (ou por uma série de medidas de síndrome equivalentes a determinar-se o valor de Π_L). Se os qubits não estiverem dentro do subespaço do código, um erro ocorreu. Um procedimento de correção pode então ser aplicado sobre os qubits (se o código permitir), levando-os de volta ao seu estado original dentro do código.

Se o monitoramento dos estados do sistema for contínuo, podemos empregar a equação mestra para medidas contínuas (2.9) que não necessariamente pertencem ao grupo de Pauli e escrever a evolução do sistema codificado como:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] + 2\lambda \{ \Pi_L \rho(t) \Pi_L + (1 - \Pi_L) \rho(t) (1 - \Pi_L) - \rho(t) \}, \quad (6.2)$$

onde os projetores Π_L e $1 - \Pi_L$ formam em conjunto uma POVM, respeitando (2.2)

$$\Pi_L^\dagger \Pi_L + (1 - \Pi_L)^\dagger (1 - \Pi_L) = 1, \quad (6.3)$$

pois $\Pi_L^\dagger = \Pi_L$ e $\Pi_L^2 = \Pi_L$. É possível empregar esta última identidade também para simplificar (6.2) para:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] + 2\lambda [\Pi_L, [\rho(t), \Pi_L]], \quad (6.4)$$

O hamiltoniano H é dado como na equação mestra (2.15), isto é, ele inclui tanto a porta lógica H_S quanto a interação com o ambiente H_{int} e o próprio hamiltoniano do ambiente H_A (2.16). Seguindo a proposta que fizemos anteriormente para o caso discreto,²⁰⁻²⁴ imporemos que o hamiltoniano da porta lógica H_S comuta com o projetor Π_L , o que equivale a dizer que o hamiltoniano nunca tira o sistema do subespaço do código:

$$[H_S, \Pi_L] = 0. \quad (6.5)$$

Mostraremos como fazer isso de uma maneira fisicamente plausível na próxima seção.

Por enquanto, iremos empregar apenas a condição (6.5) para demonstrar a proteção do sistema por meio de uma medida contínua de Π_L . Utilizaremos a solução perturbativa (2.62) para encontrar a probabilidade de o sistema não haver sofrido um erro até um instante t . Esse valor, para erros corrigíveis, é o mesmo que a probabilidade de encontrarmos o sistema ainda dentro do subespaço do código, o que pode ser obtido multiplicando a matriz densidade pelo projetor Π_L e tomando o traço sobre o sistema.

Para tanto, bastará usar a solução de primeira ordem (2.60), incorporando as constantes $\eta = 1$ dentro dos operadores $\tilde{\mathcal{B}}_I(t)$:

$$\text{Tr} \{ \Pi_L \tilde{\rho}_I(t) \} = \text{Tr} \{ \Pi_L \tilde{\rho}_I(0) \} + \int_0^t dt_1 \text{Tr} \{ \Pi_L \tilde{\mathcal{B}}_I(t_1) \tilde{\rho}_I(t_1) \}. \quad (6.6)$$

De acordo com a definição da representação de interação (2.57), podemos escrever o superoperador $\tilde{\mathcal{B}}_I(t)$ como:

$$\tilde{\mathcal{B}}_I(t) = e^{-\mathcal{A}t} \tilde{\mathcal{B}}(t) e^{\mathcal{A}t}, \quad (6.7)$$

onde $\tilde{\mathcal{B}}_I(t)$ contém apenas os termos de interação responsáveis pelo erro e pelo ruído, enquanto que $\mathcal{A}$ contém o hamiltoniano da porta lógica e o termo da medida. Dado um operador qualquer X :

$$\mathcal{A}X = -\frac{i}{\hbar} [H_S, X] + 2\lambda [\Pi_L, [X, \Pi_L]]. \quad (6.8)$$

Devido à condição (6.5), a exponencial do superoperador (6.8) pode ser escrita conforme:

$$e^{\mathcal{A}t} X = e^{-iH_S t/\hbar} \{X + (1 - e^{-2\lambda t}) [\Pi_L, [X, \Pi_L]]\} e^{iH_S t/\hbar}. \quad (6.9)$$

De fato, notando que:

$$\begin{aligned} [\Pi_L, [[\Pi_L, [X, \Pi_L]], \Pi_L]] &= 2\Pi_L [\Pi_L, [X, \Pi_L]] \Pi_L - \Pi_L [\Pi_L, [X, \Pi_L]] - [\Pi_L, [X, \Pi_L]] \Pi_L \\ &= 4\Pi_L X \Pi_L - 2\Pi_L X \Pi_L - 2\Pi_L X \Pi_L \\ &\quad - 2\Pi_L X \Pi_L + \Pi_L X \Pi_L + \Pi_L X \\ &\quad - 2\Pi_L X \Pi_L + X \Pi_L + \Pi_L X \Pi_L \\ &= -2\Pi_L X \Pi_L + \Pi_L X + X \Pi_L \\ &= -[\Pi_L, [X, \Pi_L]], \end{aligned} \quad (6.10)$$

de forma que, como H_S e Π_L comutam (6.5):

$$\begin{aligned} [\Pi_L, [e^{\mathcal{A}t} X, \Pi_L]] &= e^{-iH_S t/\hbar} \{[\Pi_L, [X, \Pi_L]] - (1 - e^{-2\lambda t}) [\Pi_L, [X, \Pi_L]]\} e^{iH_S t/\hbar} \\ &= e^{-2\lambda t} e^{-iH_S t/\hbar} [\Pi_L, [X, \Pi_L]] e^{iH_S t/\hbar}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Ao derivarmos (6.9), encontramos justamente a resposta esperada para a derivada da exponencial de $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{e^{\mathcal{A}t} X\} &= -\frac{i}{\hbar} [H_S, e^{\mathcal{A}t} X] + 2\lambda e^{-2\lambda t} e^{-iH_S t/\hbar} [\Pi_L, [X, \Pi_L]] e^{iH_S t/\hbar} \\ &= -\frac{i}{\hbar} [H_S, e^{\mathcal{A}t} X] + 2\lambda [\Pi_L, [e^{\mathcal{A}t} X, \Pi_L]] \\ &= \mathcal{A} e^{\mathcal{A}t} X. \end{aligned} \quad (6.12)$$

É fácil verificar que, para qualquer operador X ,

$$\text{Tr} \{[\Pi_L, [X, \Pi_L]]\} = 0, \quad (6.13)$$

$$\text{Tr} \{\Pi_L [\Pi_L, [X, \Pi_L]]\} = 0. \quad (6.14)$$

Por isso, dada a expressão (6.9) para a exponencial de $\mathcal{A}$,

$$\text{Tr} \{\Pi_L e^{\mathcal{A}t} X\} = \text{Tr} \{\Pi_L X\}. \quad (6.15)$$

Empregando a identidade (6.15) em (6.6),

$$P_L(t) = P_L(0) + \int_0^t dt_1 \operatorname{Tr} \left\{ \Pi_L \tilde{\mathcal{B}}(t_1) e^{\mathcal{A}t_1} \rho_I(t_1) \right\}, \quad (6.16)$$

onde definimos $P_L(t)$ como a probabilidade de o sistema-objeto encontrar-se dentro do subespaço do código no instante t :

$$P_L(t) \equiv \operatorname{Tr} \{ \Pi_L \rho(t) \} = \operatorname{Tr} \{ \Pi_L e^{-\mathcal{A}t} \rho(t) \} = \operatorname{Tr} \{ \Pi_L \rho_I(t) \}. \quad (6.17)$$

Os superoperadores $\tilde{\mathcal{B}}(t)$ são comutadores que contêm o hamiltoniano de interação na representação híbrida $\tilde{H}(t)$ (2.63):

$$\tilde{\mathcal{B}}(t)X = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}(t), X]. \quad (6.18)$$

O hamiltoniano $\tilde{H}(t)$ pode, por sua vez, ser decomposto em operadores S_k que atuam somente sobre os qubits, e operadores $A_k(t)$ que atuam apenas sobre o ambiente:

$$\tilde{H}(t) = \sum_k \left\{ S_k A_k(t) + S_k^\dagger A_k^\dagger(t) \right\}. \quad (6.19)$$

Com o auxílio de (6.18) e de (6.19), o traço presente em (6.16) torna-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \left\{ \Pi_L \tilde{\mathcal{B}}(t_1) e^{\mathcal{A}t_1} \rho_I(t_1) \right\} &= -\frac{i}{\hbar} \sum_k \operatorname{Tr} \left\{ S_k A_k(t_1) [e^{\mathcal{A}t_1} \rho_I(t_1), \Pi_L] \right\} \\ &\quad - \frac{i}{\hbar} \sum_k \operatorname{Tr} \left\{ S_k^\dagger A_k^\dagger(t_1) [e^{\mathcal{A}t_1} \rho_I(t_1), \Pi_L] \right\}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

onde usamos o fato de que, como para o traço total $\operatorname{Tr} \{XY\} = \operatorname{Tr} \{YX\}$ para quaisquer operadores X e Y , então:

$$\operatorname{Tr} \left\{ \Pi_L [S_k A_k(t_1), e^{\mathcal{A}t_1} \rho_I(t_1)] \right\} = \operatorname{Tr} \left\{ S_k A_k(t_1) [e^{\mathcal{A}t_1} \rho_I(t_1), \Pi_L] \right\}, \quad (6.21)$$

$$\operatorname{Tr} \left\{ \Pi_L [S_k^\dagger A_k^\dagger(t_1), e^{\mathcal{A}t_1} \rho_I(t_1)] \right\} = \operatorname{Tr} \left\{ S_k^\dagger A_k^\dagger(t_1) [e^{\mathcal{A}t_1} \rho_I(t_1), \Pi_L] \right\}. \quad (6.22)$$

Agora, retornamos à expressão de $e^{\mathcal{A}t_1}$ (6.9) para determinar seu comutador com o projetor Π_L . Primeiro, usamos o fato de que:

$$\begin{aligned} [[\Pi_L, [\rho_I(t_1), \Pi_L]], \Pi_L] &= 2 [\Pi_L \rho_I(t_1) \Pi_L, \Pi_L] - [\Pi_L \rho_I(t_1), \Pi_L] - [\rho_I(t_1) \Pi_L, \Pi_L] \\ &= [\Pi_L, \rho_I(t_1)]. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Para concluir, ainda tendo em mente (6.5), que:

$$\begin{aligned}
[e^{\mathcal{A}t_1} \rho_I(t_1), \Pi_L] &= e^{-iH_S t_1/\hbar} \{ [\rho_I(t_1), \Pi_L] + (1 - e^{-2\lambda t_1}) [\Pi_L, \rho_I(t_1)] \} e^{iH_S t_1/\hbar} \\
&= -e^{-iH_S t_1/\hbar} e^{-2\lambda t_1} [\Pi_L, \rho_I(t_1)] e^{iH_S t_1/\hbar}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Substituindo (6.24) em (6.20), e depois em (6.16), encontramos:

$$\begin{aligned}
P_L(t) &= P_L(0) + \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt_1 e^{-2\lambda t_1} \sum_k \text{Tr} \{ S_k A_k(t_1) e^{-iH_S t/\hbar} [\Pi_L, \rho_I(t_1)] e^{iH_S t/\hbar} \} \\
&\quad + \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt_1 e^{-2\lambda t_1} \sum_k \text{Tr} \{ S_k^\dagger A_k^\dagger(t_1) e^{-iH_S t/\hbar} [\Pi_L, \rho_I(t_1)] e^{iH_S t/\hbar} \}.
\end{aligned} \tag{6.25}$$

A exponencial dentro dos integrandos em (6.25) pode ser tornada tão pequena quanto se queira se aumentarmos a intensidade da medida λ , desde que $\rho_I(t_1)$ não cresça mais rapidamente que $e^{2\lambda t_1}$, o que não ocorre quando $\mathcal{A}$ predomina. No limite em que $\lambda \rightarrow \infty$, as integrais vão a zero e o sistema não sai de dentro do subespaço do código:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_L(t) = P_L(0). \tag{6.26}$$

Note que não fizemos qualquer hipótese sobre a eficiência do código para tratar os erros gerados por esse tipo de ambiente para chegarmos ao resultado (6.26). Mesmo que o código seja completamente inadequado, uma observação contínua do projetor Π_L impede que o sistema saia deste subespaço. Isso significa que o sistema não receberá nenhum erro corrigível, aqueles que são detectados pela medida de síndrome. Porém, ele ainda pode receber erros incorrigíveis, aqueles erros que levam para outros estados indesejados dentro do próprio subespaço do código.

Suponhamos, portanto, que o código seja adequado para lidar com os erros gerados pelo ambiente. Uma condição suficiente para isso é que, para todo operador S_k em (6.19):

$$\Pi_L S_k \Pi_L = 0. \tag{6.27}$$

Essa condição tem como resultado a capacidade de identificar todo os erros que primeiro aparecem devido à ação do ambiente. Isso quer dizer que, se deixarmos o sistema evoluir por um tempo curto Δt apenas seguindo o ruído dado pelo hamiltoniano em (6.19), sem participação da porta lógica H_S ou da medida de Π_L , seu estado final será, de acordo com (2.50),

$$|\Psi_I(\Delta t)\rangle = |\Psi_I(0)\rangle - \frac{i}{\hbar} \Delta t \sum_k \{ S_k A_k(0) + S_k^\dagger A_k^\dagger(0) \} |\Psi_I(0)\rangle + O(\Delta t^2), \tag{6.28}$$

onde usamos as expansões em potências de Δt :

$$\int_0^{\Delta t} dt_1 = \Delta t, \quad (6.29)$$

$$|\Psi_I(\Delta t)\rangle = |\Psi_I(0)\rangle + O(\Delta t), \quad (6.30)$$

$$H_I(\Delta t)X = \sum_k \left\{ S_k A_k(0) + S_k^\dagger A_k^\dagger(0) \right\} + O(\Delta t). \quad (6.31)$$

Suponhamos que inicialmente o sistema-objeto encontrava-se no subespaço do código, isto é, $|\Psi_I(0)\rangle = \Pi_L |\Psi_I(0)\rangle$. Queremos que os termos de primeira ordem no tempo em (6.28) (todos eles tiram o sistema de seu estado ideal na memória $|\Psi_I(0)\rangle$) sejam detectáveis no código como erros. Ou seja, eles devem remover o sistema do subespaço do código.

Dada a condição (6.27), no instante $t = \Delta t$, a porção de (6.28) ainda dentro do subespaço do código é:

$$\Pi_L |\Psi_I(\Delta t)\rangle = |\Psi_I(0)\rangle, \quad (6.32)$$

enquanto que o projetor fora do subespaço do código, $(1 - \Pi_L)$, nos devolve todos os erros de primeira ordem no tempo:

$$(1 - \Pi_L) |\Psi_I(\Delta t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \Delta t \sum_k \left\{ S_k A_k(0) + S_k^\dagger A_k^\dagger(0) \right\} |\Psi_I(0)\rangle. \quad (6.33)$$

Acionemos novamente o superoperador $\mathcal{A}$, ligando a porta lógica e a medida de síndrome, e invoquemos a série inteira de Dyson para superoperadores (2.62), em seguida tomando o traço apenas sobre o ambiente:

$$e^{-\mathcal{A}t} \rho_S(t) = \text{Tr}_A \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \tilde{\mathcal{B}}_I(t_1) \tilde{\mathcal{B}}_I(t_2) \dots \tilde{\mathcal{B}}_I(t_n) \rho(0) \right\}. \quad (6.34)$$

Como o n -ésimo superoperador $\tilde{\mathcal{B}}_I(t_n)$ atua sobre $\rho(0)$? Usando a expressão da representação de interação (4.21), além do hamiltoniano (6.19), encontramos:

$$\tilde{\mathcal{B}}_I(t_n) \rho(0) = -\frac{i}{\hbar} e^{-\mathcal{A}t_n} \sum_k \left[S_k A_k(t_n) + S_k^\dagger A_k^\dagger(t_n), e^{\mathcal{A}t_n} \rho(0) \right]. \quad (6.35)$$

Agora invocamos a forma da exponencial do superoperador $\mathcal{A}$ que encontramos em (6.9), para abrir a expressão (6.35):

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{B}}_I(t_n)\rho(0) = & -\frac{i}{\hbar} \sum_k \left[\tilde{S}_k(t_n)A_k(t_n) + \tilde{S}_k^\dagger(t_n)A_k^\dagger(t_n), \Pi_L\rho(0)\Pi_L \right] \\
& - 2(1 - e^{2\lambda t_n})\frac{i}{\hbar} \sum_k \Pi_L \left[\tilde{S}_k(t_n)A_k(t_n) + \tilde{S}_k^\dagger(t_n)A_k^\dagger(t_n), \Pi_L\rho(0)\Pi_L \right] \Pi_L \\
& + (1 - e^{2\lambda t_n})\frac{i}{\hbar} \sum_k \Pi_L \left[\tilde{S}_k(t_n)A_k(t_n) + \tilde{S}_k^\dagger(t_n)A_k^\dagger(t_n), \Pi_L\rho(0)\Pi_L \right] \\
& + (1 - e^{2\lambda t_n})\frac{i}{\hbar} \sum_k \left[\tilde{S}_k(t_n)A_k(t_n) + \tilde{S}_k^\dagger(t_n)A_k^\dagger(t_n), \Pi_L\rho(0)\Pi_L \right] \Pi_L, \quad (6.36)
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $\rho(0)$ inicialmente pertence ao subespaço do código e a relação de comutação (6.5) para escrever:

$$\begin{aligned}
e^{\mathcal{A}t_n}\rho(0) = & e^{-iH_S t_n/\hbar}\rho(0)e^{iH_S t_n/\hbar} + 2(1 - e^{-2\lambda t_n})\Pi_L e^{-iH_S t_n/\hbar}\rho(0)e^{iH_S t_n/\hbar}\Pi_L \\
& - (1 - e^{-2\lambda t_n})\Pi_L e^{-iH_S t_n/\hbar}\rho(0)e^{iH_S t_n/\hbar} - (1 - e^{-2\lambda t_n})e^{-iH_S t_n/\hbar}\rho(0)e^{iH_S t_n/\hbar}\Pi_L \\
= & e^{-iH_S t_n/\hbar}\Pi_L\rho(0)\Pi_L e^{iH_S t_n/\hbar} \\
= & e^{-iH_S t_n/\hbar}\rho(0)e^{iH_S t_n/\hbar}, \quad (6.37)
\end{aligned}$$

e onde definimos uma nova representação de interação para os operadores S_k que inclui a porta lógica H_S :

$$\tilde{S}_k(t) \equiv e^{iH_S t/\hbar} S_k e^{-iH_S t/\hbar}. \quad (6.38)$$

Note que a incorporação da porta lógica em (6.38) não causa a ocorrência de novos erros incorrigíveis. De fato, devido à condição (6.5), os novos erros $\tilde{S}_k(t)$ ainda satisfazem a condição de corrigibilidade (6.27):

$$\Pi_L \tilde{S}_k(t) \Pi_L = e^{iH_S t/\hbar} \Pi_L S_k \Pi_L e^{-iH_S t/\hbar} = 0. \quad (6.39)$$

Empregando a relação (6.39) em (6.36), encontramos a expressão simplificada:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{B}}_I(t_n)\rho(0) = & -\frac{i}{\hbar} \sum_k \left[\tilde{S}_k(t_n)A_k(t_n) + \tilde{S}_k^\dagger(t_n)A_k^\dagger(t_n), \Pi_L\rho(0)\Pi_L \right] \\
& + (1 - e^{2\lambda t_n})\frac{i}{\hbar} \sum_k \left[\tilde{S}_k(t_n)A_k(t_n) + \tilde{S}_k^\dagger(t_n)A_k^\dagger(t_n), \Pi_L\rho(0)\Pi_L \right], \quad (6.40)
\end{aligned}$$

ou apenas:

$$\tilde{\mathcal{B}}_I(t_n)\rho(0) = -e^{2\lambda t_n} \frac{i}{\hbar} \sum_k \left[\tilde{S}_k(t_n)A_k(t_n) + \tilde{S}_k^\dagger(t_n)A_k^\dagger(t_n), \Pi_L \rho(0) \Pi_L \right]. \quad (6.41)$$

Se a série de Dyson (6.34) for mantida até a primeira ordem, teremos:

$$\rho_S(t) = e^{\mathcal{A}t} \rho_S(0) + \int_0^t dt_1 \text{Tr}_A \left\{ e^{\mathcal{A}t} \tilde{\mathcal{B}}_I(t_1) \rho(0) \right\} + O(\eta^2). \quad (6.42)$$

O superoperador $e^{\mathcal{A}t}$ aplicado a (6.41), de acordo com (6.9), resulta em:

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{A}t} \tilde{\mathcal{B}}_I(t_1) \rho(0) &= -e^{2\lambda t_1} \frac{i}{\hbar} \sum_k \left[\tilde{S}_k(t_1 - t) A_k(t_1) + \tilde{S}_k^\dagger(t_1 - t) A_k^\dagger(t_1), \Pi_L \bar{\rho}(t) \Pi_L \right] \\ &\quad - 2(1 - e^{-2\lambda t}) e^{2\lambda t_1} \frac{i}{\hbar} \sum_k \Pi_L \left[\tilde{S}_k(t_1 - t) A_k(t_1) + \tilde{S}_k^\dagger(t_1 - t) A_k^\dagger(t_1), \Pi_L \bar{\rho}(t) \Pi_L \right] \Pi_L \\ &\quad + (1 - e^{-2\lambda t}) e^{2\lambda t_1} \frac{i}{\hbar} \sum_k \Pi_L \left[\tilde{S}_k(t_1 - t) A_k(t_1) + \tilde{S}_k^\dagger(t_1 - t) A_k^\dagger(t_1), \Pi_L \bar{\rho}(t) \Pi_L \right] \\ &\quad + (1 - e^{-2\lambda t}) e^{2\lambda t_1} \frac{i}{\hbar} \sum_k \left[\tilde{S}_k(t_1 - t) A_k(t_1) + \tilde{S}_k^\dagger(t_1 - t) A_k^\dagger(t_1), \Pi_L \bar{\rho}(t) \Pi_L \right] \Pi_L, \end{aligned} \quad (6.43)$$

onde definimos, seguindo (6.37),

$$\bar{\rho}(t) \equiv e^{\mathcal{A}t} \rho(0) = e^{-iH_S t/\hbar} \rho(0) e^{iH_S t/\hbar}. \quad (6.44)$$

Usando as relações (6.39), a expressão (6.43) simplifica-se para:

$$e^{\mathcal{A}t} \tilde{\mathcal{B}}_I(t_1) \rho(0) = -e^{-2\lambda(t-t_1)} \frac{i}{\hbar} \sum_k \left[\tilde{S}_k(t_1 - t) A_k(t_1) + \tilde{S}_k^\dagger(t_1 - t) A_k^\dagger(t_1), \Pi_L \bar{\rho}(t) \Pi_L \right]. \quad (6.45)$$

Como $t > t_1$ para todo momento da integral, a exponencial no integrando de (6.45) vai a zero no limite em que $\lambda \rightarrow \infty$. Portanto, para uma observação contínua infinitamente forte, até primeira ordem em η , (6.42) evolui ao estado final ideal $e^{\mathcal{A}t} \rho_S(0)$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \rho_S(t) = e^{\mathcal{A}t} \rho_S(0) + 0 + O(\eta^2) = e^{-iH_S t/\hbar} \rho_S(0) e^{iH_S t/\hbar} + O(\eta^2). \quad (6.46)$$

Os demais termos da série de Dyson (6.34) também desaparecem por consequência do limite (6.45). De fato, podemos reescrever a série da seguinte forma:

$$\rho_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Tr}_A \left\{ \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \mathcal{C}(t, t_1) \mathcal{C}(t_1, t_2) \dots \mathcal{C}(t_{n-1}, t_n) e^{\mathcal{A}t_n} \rho(0) \right\}, \quad (6.47)$$

onde os superoperadores $\mathcal{C}(t', t)$ são:

$$\mathcal{C}(t', t) \equiv e^{\mathcal{A}(t'-t)} \tilde{\mathcal{B}}(t), \quad (6.48)$$

sempre com $t' \geq t$.

Os limites $\lambda \rightarrow \infty$ não afetam os $\tilde{\mathcal{B}}(t)$, mas exponenciais $e^{\mathcal{A}(t'-t)}$ tornam-se, de acordo com (6.9):

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{\mathcal{A}(t'-t)} X = e^{-iH_S(t'-t)/\hbar} \{X + [\Pi_L, [X, \Pi_L]]\} e^{iH_S(t'-t)/\hbar}, \quad (6.49)$$

para qualquer operador X , desde que $t' \geq t$, o que é o caso.

Assim, no limite em que $\lambda \rightarrow \infty$, todos os superoperadores $\mathcal{C}$ reduzem-se a uma operação que não diverge:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{C}(t', t) X = & -\frac{i}{\hbar} e^{-iH_S(t'-t)/\hbar} \left\{ \sum_k \left[S_k A_k(t) + S_k^\dagger A_k^\dagger(t), X \right] \right. \\ & - \sum_k \left[S_k A_k(t) + S_k^\dagger A_k^\dagger(t), X \right] \Pi_L - \sum_k \Pi_L \left[S_k A_k(t) + S_k^\dagger A_k^\dagger(t), X \right] \\ & \left. + 2 \Pi_L \sum_k \left[S_k A_k(t) + S_k^\dagger A_k^\dagger(t), X \right] \Pi_L \right\} e^{iH_S(t'-t)/\hbar}. \quad (6.50) \end{aligned}$$

Se aplicado a um operador X tal que $X = \Pi_L X \Pi_L$, o superoperador em (6.50) desaparece. Esse é justamente o caso do primeiro operador da sequência, $e^{\mathcal{A}t_n} \rho(0)$, conforme vimos em (6.37). Por isso, todos os termos em (6.47) desaparecem no limite em que $\lambda \rightarrow \infty$, exceto aquele que não contém nenhum superoperador $\mathcal{C}$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \rho_S(t) = e^{\mathcal{A}t} \rho_S(0) = e^{-iH_S t/\hbar} \rho_S(0) e^{iH_S t/\hbar}. \quad (6.51)$$

Com (6.51), generalizamos um resultado que havíamos obtido no mestrado para um qubit lógico na memória (sem porta lógica) de um código estabilizado por matrizes de Pauli e até segunda ordem de perturbação, com aproximação de Born.²⁰ Aqui, vemos que uma observação contínua suficientemente forte do projetor do subespaço do código, Π_L , pode tornar uma porta lógica quântica tão boa quanto se queira, desde que satisfeitas as condições (6.5) e (6.27). Esse resultado é similar a outro que obtivemos no passado para portas lógicas durante medidas de diagnóstico discretas.²⁰⁻²⁴

Um exemplo numérico desse tipo de operação será dado na seção 6.3. Na próxima seção, veremos como construir uma porta lógica quântica que satisfaça (6.5), seguindo uma receita que publicamos recentemente.²⁴

6.2 Construção de portas lógicas corrigíveis

Nesta seção, reapresentaremos, agora para o contexto de medidas de síndrome contínuas, nossa proposta de construção de portas lógicas quânticas corrigíveis apresentada pela primeira vez no mestrado,²⁰ à época para medidas discretas e com curtos intervalos entre elas. Também melhoramos a proposta, explicando o que fazer caso o hamiltoniano necessário requeira interações entre mais de dois qubits, conforme publicamos recentemente.²⁴

Para um computador quântico completo, precisamos apenas de dois tipos de portas lógicas: rotações e CNOTs.³⁹ Os hamiltonianos que geram esses dois tipos de portas lógicas dentro do subespaço do código podem ser gerados a partir de matrizes de Pauli lógicas.

Se as matrizes de Pauli podem ser escritas em termos de qubits físicos como:

$$\sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|, \quad (6.52)$$

$$\sigma_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|, \quad (6.53)$$

$$\sigma_y = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|, \quad (6.54)$$

as matrizes de Pauli lógicas $(\sigma_i)_L$ podem ser construídas a partir dos estados lógicos equivalentes $|0\rangle_L$ e $|1\rangle_L$:

$$(\sigma_z)_L = |0\rangle_L\langle 0|_L - |1\rangle_L\langle 1|_L, \quad (6.55)$$

$$(\sigma_x)_L = |0\rangle_L\langle 1|_L + |1\rangle_L\langle 0|_L, \quad (6.56)$$

$$(\sigma_y)_L = -i|0\rangle_L\langle 1|_L + i|1\rangle_L\langle 0|_L. \quad (6.57)$$

Esses operadores de Pauli lógicos (6.55), (6.56) e (6.57) ainda satisfazem a identidade de produto (1.27):

$$(\hat{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_L)(\hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_L) = (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) + i(\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{r}}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_L, \quad (6.58)$$

onde

$$\boldsymbol{\sigma}_L = (\sigma_z)_L \hat{\mathbf{z}} + (\sigma_x)_L \hat{\mathbf{x}} + (\sigma_y)_L \hat{\mathbf{y}}. \quad (6.59)$$

Uma rotação qualquer dentro do subespaço do código pode ser construída a partir de um hamiltoniano lógico:

$$H_S = \hbar\omega_0 \hat{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_L. \quad (6.60)$$

Dependendo da escolha de $\hat{\mathbf{s}}$ e da duração t da interação, teremos qualquer possível tipo de porta lógica de um qubit:

$$e^{-iH_S t/\hbar} = e^{-i\omega_0 t(\hat{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_L)} = \cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t) (\hat{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_L). \quad (6.61)$$

Já o hamiltoniano que gera a porta lógica CNOT é

$$H_S = \hbar\omega_0 \left[\frac{1 - (\sigma_z)_L}{2} \right] \otimes \left[\frac{1 - (\sigma_x)_L}{2} \right]. \quad (6.62)$$

Os dois termos entre colchetes em (6.62) são projetores que atuam em qubits lógicos diferentes. O primeiro, que permanece inalterado, é o chamado controle. O segundo, que é alterado a depender do estado do primeiro, é o chamado alvo.

O operador de evolução temporal correspondente a (6.62) é:

$$U_{\text{CNOT}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{it}{\hbar} \right)^n H_S^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i\omega_0 t)^n \left[\frac{1 - (\sigma_z)_L}{2} \right] \otimes \left[\frac{1 - (\sigma_x)_L}{2} \right], \quad (6.63)$$

onde usamos o fato de que o produto de projetores consigo próprios dão os próprios projetores.

A última somatória do lado direito de (6.63) é o mesmo que a expansão em série de potências da exponencial, com o termo 1 faltando. Ou seja,

$$U_{\text{CNOT}} = 1 + (e^{-i\omega_0 t} - 1) \left[\frac{1 - (\sigma_z)_L}{2} \right] \otimes \left[\frac{1 - (\sigma_x)_L}{2} \right]. \quad (6.64)$$

Escolhendo o tempo de duração da porta como $t = \pi/\omega_0$, vemos que a porta (6.64) comporta-se da seguinte forma ao ser aplicada aos estados lógicos do código, $|0\rangle_L$ e $|1\rangle_L$:

$$U_{\text{CNOT}} |0\rangle_L \otimes |0\rangle_L = |0\rangle_L \otimes |0\rangle_L, \quad (6.65)$$

$$U_{\text{CNOT}} |0\rangle_L \otimes |1\rangle_L = |0\rangle_L \otimes |1\rangle_L, \quad (6.66)$$

$$U_{\text{CNOT}} |1\rangle_L \otimes |0\rangle_L = |1\rangle_L \otimes |1\rangle_L, \quad (6.67)$$

$$U_{\text{CNOT}} |1\rangle_L \otimes |1\rangle_L = |1\rangle_L \otimes |0\rangle_L, \quad (6.68)$$

ou seja, ela age exatamente como uma CNOT agiria.

Porém, a depender do número de qubits físicos que formam cada qubit lógico, os ope-

radores de Pauli lógicos (6.55), (6.56) e (6.57) podem requerer interações simultâneas de três, quatro, ou até N qubits, algo que pode ser considerado pouco realista, fisicamente.²⁴ Se o hamiltoniano da porta lógica H_L puder ser decomposto, dada uma frequência ω_0 , em observáveis adimensionais Q_n sobre cada um dos N qubits físicos do código:

$$H_L = \hbar\omega_0 [Q_1 \otimes Q_2 \otimes \dots \otimes Q_N], \quad (6.69)$$

nossa proposta consiste em encontrar operadores A_n e B_n tais que $A_n B_n = iQ_n$, de forma que o hamiltoniano total possa ser dividido em operações que atuam em dois qubits, dois a dois:

$$\hbar\omega_0 (Q_1 \otimes A_2) (B_2 \otimes A_3) (B_3 \otimes A_4) \dots (B_{N-2} \otimes A_{N-1}) (B_{N-1} \otimes Q_N) = i^{N-2} H_L. \quad (6.70)$$

Este método é baseado em propostas desenvolvidas para simular interações durante tempos longos.⁴⁰

Notemos que, para manter os Q_n e o H_L hermitianos, podemos impor que os operadores A_n e B_n sejam hermitianos mas anticomutem, assim como as matrizes de Pauli. Impor que A_n, B_n sejam hermitianos também permite que definamos hamiltonianos de interação a cada dois qubits $H_{i,i+1}$:

$$H_{i,i+1} \equiv \hbar\omega_0 B_i \otimes A_{i+1}, \quad (6.71)$$

com $B_1 = Q_1$ e $A_N = Q_N$.

Suponha que o número de qubits físicos seja $N = 3$, de forma que o hamiltoniano total H_L deva ser decomposto em dois:

$$H_{1,2} H_{2,3} = i\hbar\omega_0 H_L. \quad (6.72)$$

Se o número de qubits físicos for maior, basta incorporar os operadores dos restantes a $H_{2,3}$ e depois repetir o procedimento quantas vezes for necessário. Os operadores que atuam sobre os demais qubits não afetarão a forma como $H_{2,3}$ comuta com $H_{1,2}$.

Se fizermos aplicações sucessivas e de durações curtas Δt dos hamiltonianos $H_{1,2}$ e $H_{2,3}$, encontraremos o seguinte estado final, até terceira ordem no tempo:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} H_{1,2} \Delta t \right\} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} H_{2,3} \Delta t \right\} &= 1 - \frac{i}{\hbar} (H_{1,2} + H_{2,3}) \Delta t \\ &\quad - \frac{1}{2\hbar^2} (2i\hbar\omega_0 H_L + H_{1,2}^2 + H_{2,3}^2) (\Delta t)^2 \\ &\quad + \frac{i}{6\hbar^3} (3H_{1,2} H_{2,3}^2 + 3H_{2,3} H_{1,2}^2 + H_{1,2}^3 + H_{2,3}^3) (\Delta t)^3 + O(\Delta t^4), \end{aligned} \quad (6.73)$$

onde usamos o fato de que $H_{2,3}$ comuta com $H_{1,2}^2$.

Notando que a aplicação de $-H_{1,2}$ e $-H_{2,3}$ resulta em:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} H_{1,2} \Delta t \right\} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} H_{2,3} \Delta t \right\} &= 1 + \frac{i}{\hbar} (H_{1,2} + H_{2,3}) \Delta t \\ &\quad - \frac{1}{2\hbar^2} (2i\hbar\omega_0 H_L + H_{1,2}^2 + H_{2,3}^2) (\Delta t)^2 \\ &\quad - \frac{i}{6\hbar^3} (3H_{1,2}H_{2,3}^2 + 3H_{2,3}H_{1,2}^2 + H_{1,2}^3 + H_{2,3}^3) (\Delta t)^3 + O(\Delta t^4), \end{aligned} \quad (6.74)$$

podemos aplicar sucessivamente (6.73) e depois (6.74), obtendo:

$$\begin{aligned} e^{iH_{1,2}\Delta t/\hbar} e^{iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{1,2}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{2,3}\Delta t/\hbar} &= 1 - \frac{1}{2\hbar^2} (2i\hbar\omega_0 H_L - 2H_{2,3}H_{1,2}) (\Delta t)^2 \\ &\quad + \frac{i}{2\hbar^3} (2i\hbar\omega_0 H_L H_{1,2} + 2i\hbar\omega_0 H_L H_{2,3} + H_{1,2}^2 H_{2,3} + H_{2,3}^2 H_{1,2}) (\Delta t)^3 \\ &\quad - \frac{i}{2\hbar^3} (2i\hbar\omega_0 H_{1,2} H_L + 2i\hbar\omega_0 H_{2,3} H_L + H_{1,2} H_{2,3}^2 + H_{2,3} H_{1,2}^2) (\Delta t)^3 + O(\Delta t^4). \end{aligned} \quad (6.75)$$

Usando a relação de anticomutação entre os A_n e os B_n , também teremos anticomutação entre $H_{1,2}$ e $H_{2,3}$, de forma que:

$$H_{2,3}H_{1,2} = -H_{1,2}H_{2,3} = -i\hbar\omega_0 H_L. \quad (6.76)$$

Por isso, até segunda ordem em Δt , a sequência de portas lógicas (6.75) atua da mesma forma que uma aplicação do hamiltoniano de três qubits H_L :

$$e^{iH_{1,2}\Delta t/\hbar} e^{iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{1,2}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{2,3}\Delta t/\hbar} = e^{-2iH_L\omega_0\Delta t^2/\hbar} + O(\Delta t^3). \quad (6.77)$$

Uma porta lógica de duração $t = N\omega_0\Delta t^2$ – onde o N^{-1} deve ser da ordem de Δt^2 se ω_0^{-1} for da ordem de t – pode ser aplicada com a precisão que quisermos usando a aproximação (6.77), pois os termos de correção serão da ordem de $N(\Delta t)^3$ ou seja, da ordem de Δt :

$$e^{-2iH_L(N\omega_0\Delta t^2)/\hbar} = \left[e^{iH_{1,2}\Delta t/\hbar} e^{iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{1,2}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{2,3}\Delta t/\hbar} \right]^N + O(\Delta t). \quad (6.78)$$

O operador de evolução temporal simulada de segunda ordem $U_{\text{sim}}^{(2)}(t)$:

$$U_{\text{sim}}^{(2)}(t = N\omega_0\Delta t^2) = \left[e^{iH_{1,2}\Delta t/\hbar} e^{iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{1,2}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{2,3}\Delta t/\hbar} \right]^N, \quad (6.79)$$

já não respeita a condição de comutabilidade com o projetor do código (6.5), pois os $H_{1,2}$ e $H_{2,3}$ não comutam individualmente com Π_L , saindo do subespaço do código. Porém, essa condição ainda é respeitada se descartarmos os termos de ordem Δt :

$$\left[U_{\text{sim}}^{(2)}, \Pi_L \right] = O(\Delta t), \quad (6.80)$$

o que significa que o operador exponencial $e^{\mathcal{A}t}$ dado em (6.9) e todas as suas propriedades podem ser escritas da mesma forma que na seção anterior:

$$e^{\mathcal{A}t} X = U_{\text{sim}}(t) \left\{ X + (1 - e^{-2\lambda t}) [\Pi_L, [X, \Pi_L]] \right\} U_{\text{sim}}^\dagger(t) + O(\Delta t). \quad (6.81)$$

Todas as expressões podem ser tão boas quanto se queira, basta diminuir o intervalo Δt até o valor necessário. Se correções de primeira ordem não forem suficientes, podemos retornar a (6.75), mantendo, desta vez, termos até terceira ordem:

$$\begin{aligned} e^{iH_{1,2}\Delta t/\hbar} e^{iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{1,2}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{2,3}\Delta t/\hbar} &= 1 - 2\frac{i}{\hbar} H_L \omega_0 (\Delta t)^2 \\ &\quad - 2\frac{i}{\hbar^3} (H_{1,2}^2 H_{2,3} - H_{1,2} H_{2,3}^2) (\Delta t)^3 + O(\Delta t^4). \end{aligned} \quad (6.82)$$

Escolhamos os operadores A_n e B_n como membros do grupo de Pauli, de forma que, por (6.71), o quadrado de $H_{i,i+1}$ seja:

$$H_{i,i+1}^2 = \hbar^2 \omega_0^2. \quad (6.83)$$

De (6.82) e (6.83), vemos que basta aplicar mais um passo temporal de duração $(\omega_0 \Delta t)^2 \Delta t$ com os hamiltonianos $H_{1,2}$ e $H_{2,3}$ para obter o equivalente de (6.82) apenas com correções na quarta ordem em Δt :

$$\begin{aligned} e^{2iH_{2,3}(\omega_0 \Delta t)^2 \Delta t/\hbar} e^{-2iH_{1,2}(\omega_0 \Delta t)^2 \Delta t/\hbar} e^{iH_{1,2}\Delta t/\hbar} e^{iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{1,2}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{2,3}\Delta t/\hbar} = \\ 1 - 2\frac{i}{\hbar} H_L \omega_0 (\Delta t)^2 + O(\Delta t^4). \end{aligned} \quad (6.84)$$

Após um intervalo de tempo $t = N\omega_0(\Delta t)^2$, (6.84) traduz-se no equivalente a (6.78) com correções até segunda ordem em Δt^2 :

$$U_{\text{sim}}^{(3)}(t) = e^{-iH_L t/\hbar} + O(\Delta t^2), \quad (6.85)$$

com o operador de evolução simulada de terceira ordem $U_{\text{sim}}^{(3)}(t)$ sendo:

$$U_{\text{sim}}^{(3)}(t) \equiv \left[e^{2iH_{2,3}(\omega_0 \Delta t)^2 \Delta t/\hbar} e^{-2iH_{1,2}(\omega_0 \Delta t)^2 \Delta t/\hbar} e^{iH_{1,2}\Delta t/\hbar} e^{iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{1,2}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{2,3}\Delta t/\hbar} \right]^N. \quad (6.86)$$

Ou seja, com um aumento de $2N$ no número de portas lógicas, dividimos o erro por $\sqrt{N}$.

Um exemplo de porta lógica que envolve três qubits é aquela que produz o efeito de *bit flip* $(\sigma_x)_L$ para o código de repetição de três qubits:

$$|0\rangle_L = |0\rangle_{\hat{x}} \otimes |0\rangle_{\hat{x}} \otimes |0\rangle_{\hat{x}}, \quad (6.87)$$

$$|1\rangle_L = |1\rangle_{\hat{x}} \otimes |1\rangle_{\hat{x}} \otimes |1\rangle_{\hat{x}}. \quad (6.88)$$

Este é um código capaz de detectar a presença de erros de fase σ_z em até um dos seus qubits físicos por vez, a partir de duas medidas de síndrome de $\sigma_{1,x}\sigma_{2,x}$ e $\sigma_{2,x}\sigma_{3,x}$. Se o resultado em alguma delas for negativo, há um erro detectável. Se for positivo nas duas, não.

Para o código (6.87-6.88), a porta lógica equivalente ao σ_x é dada por:

$$(\sigma_x)_L = \sigma_{1,z}\sigma_{2,z}\sigma_{3,z}. \quad (6.89)$$

Neste caso, o hamiltoniano total $H_L = \hbar\omega_0\sigma_{1,z}\sigma_{2,z}\sigma_{3,z}$ deve ser dividido nestas duas partes:

$$H_{1,2} = \hbar\omega_0\sigma_{1,z}\sigma_{2,x} \quad (6.90)$$

$$H_{2,3} = \hbar\omega_0\sigma_{2,y}\sigma_{3,z}. \quad (6.91)$$

Podemos calcular numericamente a eficiência de nosso método de simulação por meio deste exemplo. Para isso, podemos calcular a fidelidade $\mathcal{F}$ (equivalente ao quadrado da fidelidade segundo outras definições) entre a evolução ideal da porta lógica ρ_{ideal} e a evolução simulada ρ_{sim} , ambas estados puros:

$$\mathcal{F} = \text{Tr} \{ \rho_{\text{ideal}} \rho_{\text{sim}} \}. \quad (6.92)$$

Para estados iniciais puros, a fidelidade (6.92) pode ser escrita em termos do estado inicial $|\Psi_i\rangle$, o estado final $|\Psi_f\rangle$ após uma porta lógica ideal e a evolução simulada $U_{\text{sim}}(t)$ (6.79) ou (6.86):

$$\mathcal{F} = |\langle \Psi_f | U_{\text{sim}}(t) | \Psi_i \rangle|^2. \quad (6.93)$$

Essa fidelidade para a porta lógica $(\sigma_x)_L$ do código de três qubits é mostrada na figura 6.1.

Caso a porta lógica envolva mais do que três qubits, podemos inserir os termos restantes dentro da resposta que já encontramos em (6.84), simplesmente substituindo o $H_{2,3}$ por um certo $H_{2,3,4}$ que opera em três qubits físicos ao invés de dois:

Figura 6.1 – Fidelidade em função do número de passos da simulação da porta lógica $(\sigma_x)_L = \sigma_{1,z}\sigma_{2,z}\sigma_{3,z}$ para correções (a) geradas pelo operador $U_{\text{sim}}^{(2)}(t)$ e (b) geradas pelo operador $U_{\text{sim}}^{(3)}(t)$. As curvas para os dois estados iniciais $|0\rangle_L$ e $|1\rangle_L$ se sobrepõem. O algoritmo empregado para gerar as curvas está listado no Apêndice F.

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$e^{-iH(N\omega_0\Delta t)^2/\hbar} \equiv \left[e^{2iH_{2,3,4}(\omega_0\Delta t)^2\Delta t/\hbar} e^{-2iH_{1,2}(\omega_0\Delta t)^2\Delta t/\hbar} e^{iH_{1,2}\Delta t/\hbar} \right. \\ \left. \times e^{iH_{2,3,4}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{1,2}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{2,3,4}\Delta t/\hbar} \right]^N + O(\Delta t^2). \quad (6.94)$$

Decompondo $H_{2,3,4}$ de forma análoga a (6.72),

$$H_{2,3}H_{3,4} = i\hbar\omega_0 H_{2,3,4}. \quad (6.95)$$

podemos usar (6.84) para escrever $e^{iH_{2,3,4}\Delta t/\hbar}$ até segunda ordem em Δt da seguinte forma:

$$e^{-2iH_{2,3,4}\omega_0\Delta t^2/\hbar} = e^{2iH_{3,4}\omega_0^2(\Delta t)^3/\hbar} e^{-2iH_{2,3}\omega_0^2(\Delta t)^3/\hbar} \\ \times e^{iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{iH_{3,4}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{3,4}\Delta t/\hbar} + O(\Delta t^4). \quad (6.96)$$

Tomando o hermitiano conjugado de (6.96) e substituindo Δt por $\omega_0^{1/2}\Delta t^{3/2}$, encontramos uma expressão razoável para $e^{-2iH_{1,2}(\omega_0\Delta t)^2\Delta t/\hbar}$ em (6.94):

$$e^{2iH_{2,3,4}\omega_0^2\Delta t^3/\hbar} = e^{iH_{3,4}\omega_0^{1/2}\Delta t^{3/2}/\hbar} e^{iH_{2,3}\omega_0^{1/2}\Delta t^{3/2}/\hbar} e^{-iH_{3,4}\omega_0^{1/2}\Delta t^{3/2}/\hbar} e^{-iH_{2,3}\omega_0^{1/2}\Delta t^{3/2}/\hbar} \\ \times e^{2iH_{2,3}\omega_0^{7/2}(\Delta t)^{9/2}/\hbar} e^{-2iH_{3,4}\omega_0^{7/2}(\Delta t)^{9/2}/\hbar} + O(\Delta t^6). \quad (6.97)$$

Se substituirmos (6.97) na expressão entre colchetes em (6.94), encontraremos erros da ordem de $N(\Delta t)^6 \sim (\Delta t)^4$, aceitáveis para uma expressão que originalmente tinha erros

da ordem de $(\Delta t)^2$. Porém, se substituirmos Δt por $\sqrt{\Delta t/\omega_0}$ em (6.96) para obtermos aproximações para $e^{\pm i H_{2,3,4} \Delta t/\hbar}$, inseriremos erros da ordem de $N \Delta t^2$, grandes demais para serem admissíveis em (6.94). Por isso, precisamos expandir (6.96) para ordens maiores.

A expressão (6.84) expandida até quinta ordem – inserindo erros da ordem de $N(\Delta t)^3 \sim \Delta t$, que ainda podem ser feitos tão pequenos quanto se queira – é dada no Apêndice E.

Um exemplo de porta lógica que necessita de quatro qubits físicos é a CNOT do código de repetição (6.87-6.88), gerada pelo hamiltoniano:

$$H_{\text{CNOT}} = \hbar\omega_0 \frac{1 - \sigma_{3,x}}{2} \frac{1 - \sigma_{4,z}\sigma_{5,z}\sigma_{6,z}}{2} = \hbar\omega_0 \frac{1 - (\sigma_{1,z})_L}{2} \frac{1 - (\sigma_{2,x})_L}{2}. \quad (6.98)$$

Figura 6.2 – Fidelidade em função do número de passos para a porta lógica CNOT empregando os resultados até quinta ordem dados no Apêndice E e o algoritmo listado no Apêndice F. Cada linha contínua foi construída com 500 pontos. Curvas com controle com valor $|0\rangle_L$ têm ligeiramente mais fidelidade do que aquelas com controle com valor $|1\rangle_L$. Curvas para diferentes estados iniciais do alvo se sobrepõem.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os termos do hamiltoniano (6.98) comutam entre si e podem ser aplicados separadamente. O único deles que contém quatro operadores e, portanto, necessita do método de simulação citado acima, é:

$$H_L = \frac{1}{4} \hbar\omega_0 \sigma_{3,x} \sigma_{4,z} \sigma_{5,z} \sigma_{6,z}, \quad (6.99)$$

que é dividido em três partes:

$$H_{3,4} = \frac{1}{4} \hbar \omega_0 \sigma_{3,x} \sigma_{4,x}, \quad (6.100)$$

$$H_{4,5} = \frac{1}{4} \hbar \omega_0 \sigma_{4,y} \sigma_{5,x}, \quad (6.101)$$

$$H_{5,6} = \frac{1}{4} \hbar \omega_0 \sigma_{5,y} \sigma_{6,z}. \quad (6.102)$$

A fidelidade $\mathcal{F}$ da simulação deste operador também pode ser estimada usando a equação (6.93) e os resultados dessa simulação podem ser vistos na figura 6.2.

6.3 Correção contínua de erros para o código de três qubits

Como exemplo numérico de correção contínua de erros, consideramos um qubit lógico do código de três qubits descrito em (6.87-6.88), sujeito a uma porta lógica de um qubit $U_L(t)$, simulada ou não da forma que descrevemos na seção anterior. Conforme dissemos acima, o projetor para o subespaço deste código é:

$$\Pi_L = \frac{1 + \sigma_{1,x} \sigma_{2,x}}{2} \frac{1 + \sigma_{2,x} \sigma_{3,x}}{2} = \frac{1 + \sigma_{1,x} \sigma_{2,x} + \sigma_{1,x} \sigma_{3,x} + \sigma_{2,x} \sigma_{3,x}}{4}, \quad (6.103)$$

de forma que a exponencial e^{At} ainda será escrita como:

$$e^{At} X = U_L(t) \{ X + (1 - e^{-2\lambda t}) [\Pi_L, [X, \Pi_L]] \} U_L^\dagger(t), \quad (6.104)$$

onde não iremos nos preocupar com o erro que pode haver na simulação de $U_L(t)$, caso ela seja necessária – formas de contabilizar esse erro e de diminuí-lo já foram consideradas na seção anterior.

Como

$$\left[\frac{1 + \sigma_{1,x} \sigma_{2,x}}{2}, \frac{1 + \sigma_{2,x} \sigma_{3,x}}{2} \right] = 0, \quad (6.105)$$

$$\frac{1 + \sigma_{1,x} \sigma_{2,x}}{2} \frac{1 - \sigma_{1,x} \sigma_{2,x}}{2} = 0, \quad (6.106)$$

$$\frac{1 - \sigma_{1,x} \sigma_{2,x}}{2} \frac{1 + \sigma_{1,x} \sigma_{2,x}}{2} = 0, \quad (6.107)$$

$$\frac{1 + \sigma_{2,x} \sigma_{3,x}}{2} \frac{1 - \sigma_{2,x} \sigma_{3,x}}{2} = 0, \quad (6.108)$$

$$\frac{1 - \sigma_{2,x} \sigma_{3,x}}{2} \frac{1 + \sigma_{2,x} \sigma_{3,x}}{2} = 0, \quad (6.109)$$

os projetores (6.103) satisfazem as condições de corrigibilidade (6.27) para até um operador σ_z :

$$\Pi_L \sigma_{1,z} \Pi_L = \Pi_L \sigma_{2,z} \Pi_L = \Pi_L \sigma_{3,z} \Pi_L = 0. \quad (6.110)$$

Os qubits estão sujeitos a erros de fase independentes, o que equivale a interagi-los com três ambientes diferentes por meio de hamiltonianos do tipo (2.73). Identificando cada um dos ambientes e dos qubits por um índice r ,

$$\tilde{H}(t) = \hbar \sum_{r=1}^3 \sigma_{r,z} \sum_k \left\{ g_{r,k}^* a_{r,k} e^{-i\omega_{r,k}t} + g_{r,k} a_{r,k}^\dagger e^{i\omega_{r,k}t} \right\}. \quad (6.111)$$

Se empregarmos a equação mestra (2.15) e a série de Dyson (2.62) até segunda ordem para calcularmos a evolução desses sistemas, ainda assumindo separabilidade inicial entre os qubits e cada um dos ambientes, chegaremos a uma resposta análoga à (4.46). Só precisamos ter cautela para contabilizar todos os três diferentes ambientes, cada um com uma densidade espectral $J_r(\omega)$ e uma temperatura inicial β_r :

$$\begin{aligned} \rho_S(t) = e^{At} \rho_S(0) - \sum_{r=1}^3 \int_0^\infty d\omega J_r(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \\ \times e^{A(t-t_1)} \left\{ e^{-i\omega(t_1-t_2)} [\sigma_{r,z}, e^{A(t_1-t_2)} \{ \sigma_{r,z} [e^{At_2} \rho_S(0)] \}] \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta_r\omega}} \right. \\ - e^{-i\omega(t_1-t_2)} [\sigma_{r,z}, e^{A(t_1-t_2)} \{ [e^{At_2} \rho_S(0)] \sigma_{r,z} \}] \frac{e^{-\hbar\beta_r\omega}}{1 - e^{-\hbar\beta_r\omega}} \\ + e^{i\omega(t_1-t_2)} [\sigma_{r,z}, e^{A(t_1-t_2)} \{ \sigma_{r,z} [e^{At_2} \rho_S(0)] \}] \frac{e^{-\hbar\beta_r\omega}}{1 - e^{-\hbar\beta_r\omega}} \\ \left. - e^{i\omega(t_1-t_2)} [\sigma_{r,z}, e^{A(t_1-t_2)} \{ [e^{At_2} \rho_S(0)] \sigma_{r,z} \}] \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta_r\omega}} \right\}. \quad (6.112) \end{aligned}$$

Para obtermos (6.112), vale lembrar que nenhum termo envolvendo dois diferentes ambientes permanece, pois se adotamos ambientes inicialmente separáveis cujos estados são inicialmente dados por uma distribuição de Boltzmann:

$$\rho_A(0) = \bigotimes_{r=1}^3 \frac{1}{Z_r} e^{-\hbar\beta \sum_{r,k} \omega_{r,k} a_{r,k}^\dagger a_{r,k}}, \quad (6.113)$$

com funções de partição Z_r encontradas pelo traço sobre o r -ésimo ambiente $\text{Tr}_r \{ \dots \}$:

$$Z_r \equiv \text{Tr}_r \left\{ e^{-\hbar\beta \sum_{r,k} \omega_{r,k} a_{r,k}^\dagger a_{r,k}} \right\}, \quad (6.114)$$

todos os seguintes traços são zero, a menos que $r = s$:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_A \{a_{r,k} a_{s,k} \rho_A(0)\} &= \text{Tr}_A \{a_{r,k}^\dagger a_{s,k} \rho_A(0)\} \\
&= \text{Tr}_A \{a_{r,k} a_{s,k}^\dagger \rho_A(0)\} \\
&= \text{Tr}_A \{a_{r,k}^\dagger a_{s,k}^\dagger \rho_A(0)\} \\
&= 0, \quad \text{se } r \neq s.
\end{aligned} \tag{6.115}$$

De (6.37), sabemos que, se no instante inicial o sistema encontrava-se dentro do subespaço do código, podemos escrever seu estado após ser atuado por e^{At} como:

$$e^{At_2} \rho_S(0) = U_L(t_2) \rho_S(0) U_L^\dagger(t_2) = \Pi_L U_L(t_2) \rho_S(0) U_L^\dagger(t_2) \Pi_L. \tag{6.116}$$

Da definição (6.104) e da condição de corrigibilidade (6.110), sabemos que, dado qualquer operador X :

$$\begin{aligned}
e^{At} \{ \sigma_{r,z} \Pi_L X \Pi_L \} &= U_L(t) \{ \sigma_{r,z} \Pi_L X \Pi_L + 2(1 - e^{-2\lambda t}) \Pi_L \sigma_{r,z} \Pi_L X \Pi_L \\
&\quad - (1 - e^{-2\lambda t}) \Pi_L \sigma_{r,z} \Pi_L X \Pi_L - (1 - e^{-2\lambda t}) \sigma_{r,z} \Pi_L X \Pi_L \} U_L^\dagger(t) \\
&= e^{-2\lambda t} U_L(t) \sigma_{r,z} \Pi_L X \Pi_L U_L^\dagger(t),
\end{aligned} \tag{6.117}$$

$$\begin{aligned}
e^{At} \{ \Pi_L X \Pi_L \sigma_{r,z} \} &= U_L(t) \{ \Pi_L X \Pi_L \sigma_{r,z} + 2(1 - e^{-2\lambda t}) \Pi_L X \Pi_L \sigma_{r,z} \Pi_L \\
&\quad - (1 - e^{-2\lambda t}) \Pi_L X \Pi_L \sigma_{r,z} - (1 - e^{-2\lambda t}) \Pi_L X \Pi_L \sigma_{r,z} \Pi_L \} U_L^\dagger(t) \\
&= e^{-2\lambda t} U_L(t) \Pi_L X \Pi_L \sigma_{r,z} U_L^\dagger(t),
\end{aligned} \tag{6.118}$$

Usando (6.116), (6.117) e (6.118), encontramos:

$$e^{A(t_1-t_2)} \{ \sigma_{r,z} [e^{At_2} \rho_S(0)] \} = e^{-2\lambda(t_1-t_2)} U_L(t_1 - t_2) \sigma_{r,z} U_L(t_2) \rho_S(0) U_L^\dagger(t_1), \tag{6.119}$$

$$e^{A(t_1-t_2)} \{ [e^{At_2} \rho_S(0)] \sigma_{r,z} \} = e^{-2\lambda(t_1-t_2)} U_L(t_1) \rho_S(0) U_L^\dagger(t_2) \sigma_{r,z} U_L^\dagger(t_1 - t_2). \tag{6.120}$$

Para simplificar, vamos supor que a porta lógica $U_L(t)$ que estamos aplicando é $(\sigma_x)_L$ (6.89), que comuta com todos os $\sigma_{r,z}$:

$$e^{A(t_1-t_2)} \{ \sigma_{r,z} [e^{At_2} \rho_S(0)] \} = e^{-2\lambda(t_1-t_2)} \sigma_{r,z} U_L(t_1) \rho_S(0) U_L^\dagger(t_1), \tag{6.121}$$

$$e^{A(t_1-t_2)} \{ [e^{At_2} \rho_S(0)] \sigma_{r,z} \} = e^{-2\lambda(t_1-t_2)} U_L(t_1) \rho_S(0) U_L^\dagger(t_1) \sigma_{r,z}. \tag{6.122}$$

Aplicando o comutador com $\sigma_{r,z}$:

$$\begin{aligned} [\sigma_{r,z}, e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \{ \sigma_{r,z} [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] \}] = & e^{-2\lambda(t_1-t_2)} U_L(t_1) \rho_S(0) U_L^\dagger(t_1) \\ & - e^{-2\lambda(t_1-t_2)} \sigma_{r,z} U_L(t_1) \rho_S(0) U_L^\dagger(t_1) \sigma_{r,z}, \end{aligned} \quad (6.123)$$

$$\begin{aligned} [\sigma_{r,z}, e^{\mathcal{A}(t_1-t_2)} \{ [e^{\mathcal{A}t_2} \rho_S(0)] \sigma_{r,z} \}] = & e^{-2\lambda(t_1-t_2)} \sigma_{r,z} U_L(t_1) \rho_S(0) U_L^\dagger(t_1) \sigma_{r,z} \\ & - e^{-2\lambda(t_1-t_2)} U_L(t_1) \rho_S(0) U_L^\dagger(t_1). \end{aligned} \quad (6.124)$$

Usando o fato de que (6.123) é o negativo de (6.124), podemos simplificar (6.112), identificando a cotangente hiperbólica (4.58):

$$\begin{aligned} \rho_S(t) = & e^{\mathcal{A}t} \rho_S(0) - 2 \sum_{r=1}^3 \int_0^\infty d\omega J_r(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cos[\omega(t_1 - t_2)] \coth\left(\frac{\hbar\beta_r\omega}{2}\right) \\ & \times e^{\mathcal{A}(t-t_1)} \left\{ e^{-2\lambda(t_1-t_2)} U_L(t_1) \rho_S(0) U_L^\dagger(t_1) - e^{-2\lambda(t_1-t_2)} \sigma_{r,z} U_L(t_1) \rho_S(0) U_L^\dagger(t_1) \sigma_{r,z} \right\}. \end{aligned} \quad (6.125)$$

O primeiro termo entre chaves em (6.125) é dado por (6.37). O segundo pode ser calculado se notarmos que, para todo operador X :

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{A}t} \sigma_{r,z} \Pi_L X \Pi_L \sigma_{r,z} = & U_L(t) \left\{ \sigma_{r,z} \Pi_L X \Pi_L \sigma_{r,z} + 2(1 - e^{-2\lambda t}) \Pi_L \sigma_{r,z} \Pi_L X \Pi_L \sigma_{r,z} \Pi_L \right. \\ & \left. - (1 - e^{-2\lambda t}) \Pi_L \sigma_{r,z} \Pi_L X \Pi_L \sigma_{r,z} - (1 - e^{-2\lambda t}) \sigma_{r,z} \Pi_L X \Pi_L \sigma_{r,z} \Pi_L \right\} U_L^\dagger(t) \\ = & \sigma_{r,z} \Pi_L U_L(t) X U_L(t) \Pi_L \sigma_{r,z}. \end{aligned} \quad (6.126)$$

Portanto, (6.125) fica:

$$\begin{aligned} \rho_S(t) = & U_L(t) \rho_S(0) U_L^\dagger(t) - 2 \sum_{r=1}^3 \int_0^\infty d\omega J_r(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} d\tau e^{-2\lambda\tau} \cos(\omega\tau) \coth\left(\frac{\hbar\beta_r\omega}{2}\right) \\ & \times \left\{ U_L(t) \rho_S(0) U_L^\dagger(t) - \sigma_{r,z} U_L(t) \rho_S(0) U_L^\dagger(t) \sigma_{r,z} \right\}, \end{aligned} \quad (6.127)$$

onde fizemos a troca de variável $\tau = t_1 - t_2$.

É possível calcular a fidelidade da operação descrita em (6.127) em comparação com a evolução ideal da porta lógica, $U_L(t) \rho_S(0) U_L^\dagger(t)$, desde que $\rho_S(0)$ seja um estado puro:

$$\mathcal{F}(t) = \text{Tr}_S \left\{ U_L(t) \rho_S(0) U_L^\dagger(t) \rho_S(t) \right\}. \quad (6.128)$$

Usando o fato de que $\rho_S(0) = \Pi_L \rho_S(0) \Pi_L$, encontramos:

$$\text{Tr}_S \left\{ U_L(t) \rho_S(0) U_L^\dagger(t) \sigma_{r,z} U_L(t) \rho_S(0) U_L^\dagger(t) \sigma_{r,z} \right\} = \text{Tr} \left\{ \rho_S(0) \sigma_{r,z} \rho_S(0) \sigma_{r,z} \right\} = 0, \quad (6.129)$$

Figura 6.3 – Fidelidade da porta lógica $(\sigma_x)_L$ em função do tempo para diversas combinações de ambientes ôhmicos ($s = 1$), sub-ôhmicos ($s = 0,5$) e superôhmicos ($s = 2$), e para temperaturas diferentes. Escolhendo $\hbar = 1$, β também é medido em unidades de ω_c^{-1} . Escolhemos $\eta^2 = 10^{-2}$ para todos os ambientes. Em todos os casos, o aumento da intensidade da medida aumenta a fidelidade.

Fonte: Elaborada pelo autor.

de forma que a equação para a fidelidade obtida de (6.127) é:

$$\mathcal{F}(t) = 1 - 2 \sum_{r=1}^3 \int_0^\infty d\omega J_r(\omega) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} d\tau e^{-2\lambda\tau} \cos(\omega\tau) \coth\left(\frac{\hbar\beta_r\omega}{2}\right), \quad (6.130)$$

desde que o estado inicial seja puro para que $\text{Tr}\{\rho_S^2(0)\} = \text{Tr}\{\rho_S(0)\} = 1$.

Mais uma vez, quando $\lambda \rightarrow \infty$, como $\tau > 0$, o integrando vai a zero e a fidelidade torna-se um. O monitoramento contínuo do subespaço deste código, portanto, pode tornar a porta lógica $(\sigma_x)_L$ tão próxima do ideal quanto se queira. Ilustramos como isso se dá numericamente para diversas combinações de ambientes na figura 6.3.

Com isto, ilustramos o resultado obtido no início deste capítulo (generalizando resultados não publicados dos quais tínhamos indício desde o mestrado²⁰), os quais mostram que qualquer código quântico que satisfaça as condições (6.5) e (6.27) pode ter seus erros tornados tão pequenos quanto se queira, mesmo durante uma porta lógica quântica, se o sistema for monitorado continuamente.

Terminamos aqui também a sequência de três resultados relacionados que começou no capítulo 4: primeiro vimos que componentes do vetor de Bloch são preservadas por uma medida mesmo durante uma porta lógica, depois vimos como esse fenômeno é análogo ao efeito Zenão quântico e aqui vimos como os estados do sistema podem ser protegidos por meio de medidas contínuas, que o impedem de sair de seu subespaço de código. Nos próximos capítulos, veremos algumas consequências de termos usado o formalismo da equação mestra (2.9) para descrever medidas contínuas, e como sua validade poderia ser testada experimentalmente.

7 POSSÍVEIS EXPERIMENTOS COM MEDIDAS FRACAS

Nos capítulos anteriores, tiramos diversas conclusões por meio do emprego de modelos que permitiam prever a dinâmica da medida enquanto outros fenômenos atuavam sobre o sistema-objeto de interesse. Todos os fenômenos previstos dependiam da validade da equação mestra da medida contínua (2.9). Neste capítulo, propomos uma forma experimental de determinação da validade desses modelos e de estimar o parâmetro λ . Esta proposta já foi publicada por nós.²³

Comparamos os resultados esperados deste experimento com uma descrição realista do formalismo da medida fraca²⁷ empregando o aparato de Stern-Gerlach, re-interpretando o significado do experimento em termos da preparação do ponteiro da medida. Aproveitando o formalismo que desenvolvemos para descrever o aparato de Stern-Gerlach, generalizaremos os valores fracos (2.40) para tensores fracos e mostraremos como eles surgem dos termos da expansão em série de Dyson (2.52), assim como seu papel na definição da observável medida. Veremos também como ignorar efeitos de campos constantes ou da energia cinética das partículas na hora de realizar o experimento.

Por fim, apresentamos o princípio de Buridan quântico e mostramos como o mesmo experimento que propusemos para testar a validade da equação mestra da medida também pode ser usado para testar esse princípio.

7.1 Teste experimental da equação mestra da medida

Se deixarmos uma medida completar-se por inteiro, idealmente ela levará à mistura prevista no processo 1 de von Neumann (1.3), independentemente do modelo empregado. A escolha do modelo, porém, determina a dinâmica de como o sistema chega a esse ponto.

Uma medida que não contenha ruído ou erros leva à diminuição apenas das coerências na base medida, isto é, após um tempo, a matriz densidade do qubit medido se transforma conforme alguma função $b(t)$

$$\begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho_{00} & b(t)\rho_{01} \\ b^*(t)\rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

onde $b(0) = 1$, para satisfazer a condição inicial, e $\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = 0$, para eliminar as coerências após o término da medida. No caso da equação mestra (2.14), $b(t)$ é alguma exponencial $e^{-2\lambda t}$.

$$\begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho_{00} & e^{-2\lambda t} \rho_{01} \\ e^{-2\lambda t} \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Se formos capazes de determinar a forma de $b(t)$, seremos capazes de entender se nosso modelo dinâmico é fiel ao que observamos experimentalmente. Por isso, precisamos que a medida seja interrompida antes de chegar-se à mistura final. Assim teremos uma situação em que a dinâmica temporal dela é importante para determinar-se o estado final do sistema. Enfim, necessitamos de medidas fracas.²⁷

O esquema experimental que propomos consiste de uma medida fraca de duração finita t na base $\sigma_{\hat{s}}$ seguida de uma medida completa na direção σ_z . O versor $\hat{s}$ pode ser decomposto em termos de seus ângulos como em (1.26), e por isso seus autovetores têm a forma (1.31) e (1.32).

Em termos de (1.32), a evolução (7.1) devida a uma medida fraca de $\sigma_{\hat{s}}$ pode ser escrita como:

$$\rho_S(t) = \rho_{00}^{(\hat{s})}(0) |0\rangle_{\hat{s}} \langle 0|_{\hat{s}} + \rho_{11}^{(\hat{s})}(0) |1\rangle_{\hat{s}} \langle 1|_{\hat{s}} + b(t) \rho_{01}^{(\hat{s})}(0) |0\rangle_{\hat{s}} \langle 1|_{\hat{s}} + b^*(t) \rho_{10}^{(\hat{s})}(0) |1\rangle_{\hat{s}} \langle 0|_{\hat{s}}, \quad (7.3)$$

onde, mais uma vez, empregamos a notação $\rho_{ij}^{(\hat{s})}(t) = \langle i|_{\hat{s}} \rho_S(t) |j\rangle_{\hat{s}}$.

Notando que:

$$\sigma_{\hat{s}} \rho_S(0) = \rho_{00}^{(\hat{s})}(0) |0\rangle_{\hat{s}} \langle 0|_{\hat{s}} - \rho_{11}^{(\hat{s})}(0) |1\rangle_{\hat{s}} \langle 1|_{\hat{s}} + \rho_{01}^{(\hat{s})}(0) |0\rangle_{\hat{s}} \langle 1|_{\hat{s}} - \rho_{10}^{(\hat{s})}(0) |1\rangle_{\hat{s}} \langle 0|_{\hat{s}}, \quad (7.4)$$

$$\rho_S(0) \sigma_{\hat{s}} = \rho_{00}^{(\hat{s})}(0) |0\rangle_{\hat{s}} \langle 0|_{\hat{s}} - \rho_{11}^{(\hat{s})}(0) |1\rangle_{\hat{s}} \langle 1|_{\hat{s}} - \rho_{01}^{(\hat{s})}(0) |0\rangle_{\hat{s}} \langle 1|_{\hat{s}} + \rho_{10}^{(\hat{s})}(0) |1\rangle_{\hat{s}} \langle 0|_{\hat{s}}, \quad (7.5)$$

$$\sigma_{\hat{s}} \rho_S(0) \sigma_{\hat{s}} = \rho_{00}^{(\hat{s})}(0) |0\rangle_{\hat{s}} \langle 0|_{\hat{s}} + \rho_{11}^{(\hat{s})}(0) |1\rangle_{\hat{s}} \langle 1|_{\hat{s}} - \rho_{01}^{(\hat{s})}(0) |0\rangle_{\hat{s}} \langle 1|_{\hat{s}} - \rho_{10}^{(\hat{s})}(0) |1\rangle_{\hat{s}} \langle 0|_{\hat{s}}, \quad (7.6)$$

podemos reescrever a expressão (7.3) como:

$$\begin{aligned} \rho_S(t) = \frac{2 + b(t) + b^*(t)}{4} \rho_S(0) + \frac{b(t) - b^*(t)}{4} \sigma_{\hat{s}} \rho_S(0) - \frac{b(t) - b^*(t)}{4} \rho_S(0) \sigma_{\hat{s}} \\ + \frac{2 - b(t) - b^*(t)}{4} \sigma_{\hat{s}} \rho_S(0) \sigma_{\hat{s}}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Se, após deixarmos o sistema-objeto no estado (7.7), fizermos uma medida de σ_z , o resultado esperado é obtido multiplicando-se a matriz densidade final pela observável e tomando o traço total:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_S \{ \sigma_z \rho_S(t) \} = & \frac{2 + b(t) + b^*(t)}{4} \text{Tr}_S \{ \sigma_z \rho_S(0) \} + \frac{b(t) - b^*(t)}{4} \text{Tr}_S \{ \sigma_z \sigma_{\hat{s}} \rho_S(0) \} \\ & - \frac{b(t) - b^*(t)}{4} \text{Tr}_S \{ \sigma_{\hat{s}} \sigma_z \rho_S(0) \} + \frac{2 - b(t) - b^*(t)}{4} \text{Tr}_S \{ \sigma_{\hat{s}} \sigma_z \sigma_{\hat{s}} \rho_S(0) \}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Usando (1.27) e (1.28), podemos calcular o significado dos traços presentes em (7.8):

$$\text{Tr}_S \{ \sigma_z \sigma_{\hat{s}} \rho_S(0) \} = (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) + i \text{Tr}_S \{ (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{s}}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \rho_S(0) \}, \quad (7.9)$$

$$\text{Tr}_S \{ \sigma_{\hat{s}} \sigma_z \rho_S(0) \} = (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) - i \text{Tr}_S \{ (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{s}}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \rho_S(0) \}, \quad (7.10)$$

$$\text{Tr}_S \{ \sigma_{\hat{s}} \sigma_z \sigma_{\hat{s}} \rho_S(0) \} = 2 (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) \text{Tr}_S \{ \sigma_{\hat{s}} \rho_S(0) \} - \text{Tr}_S \{ \sigma_z \rho_S(0) \}. \quad (7.11)$$

Assim, se chamarmos os resultados esperados de uma medida $\sigma_{\hat{\mathbf{r}}}$ de:

$$\langle \sigma_{\hat{\mathbf{r}}} \rangle (t) \equiv \text{Tr}_S \{ \sigma_{\hat{\mathbf{r}}} \rho_S(t) \}, \quad (7.12)$$

podemos usar (7.9), (7.10) e (7.11) em (7.8) e escrever que o resultado esperado final da medida de σ_z é:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z \rangle (t) = & \frac{b(t) + b^*(t)}{2} \langle \sigma_z \rangle (0) + i \frac{b(t) - b^*(t)}{2} \langle (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{s}}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle (0) \\ & + \frac{2 - b(t) - b^*(t)}{2} (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) \langle \sigma_{\hat{s}} \rangle (0), \end{aligned} \quad (7.13)$$

ou, em termos das partes real e imaginária de $b(t)$:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z \rangle (t) = & \text{Re} \{ b(t) \} \langle \sigma_z \rangle (0) + \text{Im} \{ b(t) \} \langle (\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle (0) \\ & + [1 - \text{Re} \{ b(t) \}] (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) \langle \sigma_{\hat{s}} \rangle (0). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Escolhamos, sem perda de generalidade, o ângulo azimutal de $\hat{\mathbf{s}}$ como $\phi = 0$, de forma que

$$\sigma_{\hat{\mathbf{s}}} = \cos \theta \sigma_z + \sin \theta \sigma_x. \quad (7.15)$$

Com (7.15), (7.14) torna-se:

$$\langle \sigma_z \rangle (t) = \cos^2 \theta \langle \sigma_z \rangle (0) + \sin^2 \theta \operatorname{Re} \{b(t)\} \langle \sigma_z \rangle (0) + \frac{1}{2} [1 - \operatorname{Re} \{b(t)\}] \sin(2\theta) \langle \sigma_x \rangle (0) - \sin \theta \operatorname{Im} \{b(t)\} \langle \sigma_y \rangle (0). \quad (7.16)$$

Preparando o estado inicial $|0\rangle$ tal que $\langle \sigma_z \rangle (0) = 1$ e $\langle \sigma_x \rangle (0) = \langle \sigma_y \rangle (0) = 0$, a medida do valor esperado de $\langle \sigma_z \rangle (t)$ em função do tempo será uma função apenas da parte real de $b(t)$ multiplicada e somada por constantes:

$$\langle \sigma_z \rangle (t) = A + B \operatorname{Re} \{b(t)\}, \quad (7.17)$$

onde

$$A = \cos^2 \theta, \quad (7.18)$$

$$B = \sin^2 \theta, \quad (7.19)$$

como podemos ver na figura 7.1.

A parte real é a que mais nos interessa, pois no caso da equação mestra da medida (2.14), o $b(t)$ é real e igual a uma exponencial. Assim, se a equação mestra da medida contínua for válida, um gráfico do resultado médio da medida de σ_z deve variar exponencialmente quando mudamos a duração da medida – digamos, por exemplo, variando o tempo que o feixe de partículas interage com o Stern-Gerlach, seja mudando o comprimento do aparato ou alterando a velocidade média das partículas. Uma análise do gráfico também permite a determinação experimental do valor de λ .

Figura 7.1 – Resultado esperado do experimento quando $\theta = \pi/4$ para uma medida contínua e para um colapso instantâneo em $t = \lambda^{-1}$ (a) em função do tempo (b) em função da intensidade da medida λ , desde que haja tempo suficiente para que ocorra o colapso instantâneo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Alternativamente, se tivermos controle sobre a intensidade da medida, mas não sobre a sua duração, podemos variá-la e também encontrar uma curva exponencial em (7.17) se a equação mestra for válida.

Nas próximas seções, veremos como este experimento seria descrito do ponto de vista do formalismo de medidas fracas para o aparato de Stern-Gerlach.

7.2 Descrição do experimento de Stern-Gerlach

O tipo de interação presente em um experimento de Stern-Gerlach acopla o spin da partícula com o campo magnético produzido pelo aparato, $\mathbf{B}$. Desta forma, o hamiltoniano que descreve a interação é proporcional a:

$$H_{\text{SG}} \propto \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}. \quad (7.20)$$

Para acoplar a posição da partícula (que age como medidor, ou ponteiro) ao seu spin, devemos fazer o campo ser proporcional às componentes do operador posição:

$$\mathbf{R} = R_z \hat{\mathbf{z}} + R_x \hat{\mathbf{x}} + R_y \hat{\mathbf{y}}. \quad (7.21)$$

Neste capítulo, os operadores posição e momentum linear serão representados por vetores maiúsculos $\mathbf{R}$ e $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{R} |\mathbf{r}\rangle = \mathbf{r} |\mathbf{r}\rangle, \quad (7.22)$$

$$\mathbf{P} |\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle, \quad (7.23)$$

cujas normas são representadas pelos operadores R e P . O circunflexo será reservado para versores, e nunca usado sobre operadores.

A simetria do aparato impede que o campo seja proporcional ou tenha componente na direção em que o feixe o atravessa. Sem perda de generalidade, escolheremos essa direção como a do eixo y , definindo um operador posição ortogonal $\mathbf{R}_\perp$ que não inclui componentes nessa direção:

$$\mathbf{R}_\perp = R_z \hat{\mathbf{z}} + R_x \hat{\mathbf{x}}. \quad (7.24)$$

Similarmente, o campo magnético dentro desse aparato poderá ser expresso em termos de componentes:

$$\mathbf{B}(z, x) = B_z(z, x) \hat{\mathbf{z}} + B_x(z, x) \hat{\mathbf{x}}. \quad (7.25)$$

Supondo o campo fraco, ou construído com a geometria correta para eliminar termos de ordem maior, expandimos (7.25) até primeira ordem nas posições, obtendo assim um campo apropriado para emaranhar o spin com a posição em (7.20):

$$\mathbf{B}(z, x) = \mathbf{B}_0 + B_{zz}z\hat{\mathbf{z}} + B_{zx}z\hat{\mathbf{x}} + B_{xz}x\hat{\mathbf{z}} + B_{xx}x\hat{\mathbf{x}}, \quad (7.26)$$

onde $\mathbf{B}_0$ é um vetor constante que pertence ao plano xz e o tensor B_{ij} não é qualquer, pois o campo deve satisfazer a equação de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, o que significa que seu traço deve ser nulo:

$$B_{zz} + B_{xx} = 0. \quad (7.27)$$

Além disso, devido à ausência de campos elétricos oscilantes ou de correntes no espaço do aparato pelo qual o feixe de partículas passa, devemos ter $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, que, em termos de (7.26), quer dizer:

$$B_{zx} - B_{xz} = 0. \quad (7.28)$$

Várias descrições simples do experimento de Stern-Gerlach acoplam algum operador do spin σ_x com a mesma direção X , o que vemos ser impossível da condição (7.27).⁴¹ Um tipo aceitável de acoplamento seria $\sigma_z Z - \sigma_x X$, por exemplo, como ilustrado na figura 7.2.

Figura 7.2 – Campos magnéticos: (a) um campo fisicamente impossível $\mathbf{B} = B_{xz}x\hat{\mathbf{z}}$, por despreitar as equações de Maxwell; (b) um campo fisicamente possível $\mathbf{B} = B_{zz}z\hat{\mathbf{z}} - B_{zx}x\hat{\mathbf{x}}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

De qualquer forma, usando o campo (7.26), podemos reescrever o hamiltoniano de Stern-Gerlach (7.20) de forma semelhante ao hamiltoniano de von Neumann (2.24), só que desta vez em três dimensões:

$$H_{\text{SG}} = -\hbar\eta g(t)\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}. \quad (7.29)$$

Substituindo (7.26) em (7.29), encontramos a expressão completa para o hamiltoniano:

$$H = -\hbar\eta B_0 g(t) \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0 \right] - \hbar\eta g(t) \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_\perp, \quad (7.30)$$

onde decompusemos o vetor constante $\mathbf{B}_0$ em módulo B_0 e versor $\hat{\mathbf{B}}_0$ e definimos o operador vetorial $\mathbf{Q}$ contendo apenas operadores que atuam sobre o spin:

$$\mathbf{Q} \equiv (B_{zz}\sigma_z + B_{zx}\sigma_x) \hat{\mathbf{z}} + (B_{xz}\sigma_z + B_{xx}\sigma_x) \hat{\mathbf{x}}. \quad (7.31)$$

ou, usando (7.27) e (7.28), encontramos:

$$\mathbf{Q} = (B_{zz}\sigma_z + B_{zx}\sigma_x) \hat{\mathbf{z}} + (B_{zx}\sigma_z - B_{zz}\sigma_x) \hat{\mathbf{x}}. \quad (7.32)$$

Se dividirmos o operador $\mathbf{Q}$ em (7.32) em componentes nas direções $\hat{\mathbf{z}}$ e $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{Q} = Q_z \hat{\mathbf{z}} + Q_x \hat{\mathbf{x}}, \quad (7.33)$$

veremos que essas duas componentes nunca comutam:

$$[Q_z, Q_x] = (B_{zz}^2 + B_{zx}^2) [\sigma_x, \sigma_z] = -2i (B_{zz}^2 + B_{zx}^2) \sigma_y, \quad (7.34)$$

a menos que $B_{zz} = B_{zx} = 0$, ou seja, se não houver qualquer observável sendo medida.

Para encontrarmos as soluções da evolução dada pelo hamiltoniano (7.30), precisamos descrever o estado do sistema-objeto em conjunto com o ponteiro, este último pertencendo a um espaço de Hilbert com base infinita e contínua. Seu estado inicial será expresso em termos de uma função de onda na base das posições $\psi_i(\mathbf{r})$, ou na base dos momenta $\tilde{\psi}_i(\mathbf{p})$:

$$|\Psi_i\rangle = \sum_q \int_{V_r^\infty} d^3r \chi_i^{(q)} \psi_i(\mathbf{r}) |q\rangle \otimes |\mathbf{r}\rangle = \sum_q \int_{V_p^\infty} d^3p \chi_i^{(q)} \tilde{\psi}_i(\mathbf{p}) |q\rangle \otimes |\mathbf{p}\rangle, \quad (7.35)$$

onde V_r^∞ e V_p^∞ representam os espaços completos na representação de posições e momenta, respectivamente; e os $\chi_i^{(s)}$ são coeficientes complexos. Os $|q\rangle$ podem ser os dois autovetores de σ_z , conforme definidos no capítulo 1, o que é conveniente para medidas de um qubit.

Nos instantes após o inicial, o estado não estará mais separável. Se o medidor for como um ponteiro, em um instante qualquer t , o estado pode ser escrito em termos de uma soma de funções de onda emaranhadas com sistema-objeto:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_q \int_{V_r^\infty} d^3r \psi^{(q)}(\mathbf{r}, t) |q\rangle \otimes |\mathbf{r}\rangle = \sum_q \int_{V_p^\infty} d^3p \tilde{\psi}^{(q)}(\mathbf{p}, t) |q\rangle \otimes |\mathbf{p}\rangle. \quad (7.36)$$

As funções de onda no espaço das posições e dos momenta estão ligadas por uma

transformada de Fourier:

$$\psi^{(q)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3p \, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \tilde{\psi}^{(q)}(\mathbf{p}, t), \quad (7.37)$$

$$\tilde{\psi}^{(q)}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3r \, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \psi^{(q)}(\mathbf{r}, t). \quad (7.38)$$

Em exemplos concretos, algumas vezes será conveniente escrever o estado inicial do medidor como uma gaussiana:

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \frac{e^{i(\bar{p}_x x + \bar{p}_y y + \bar{p}_z z)/\hbar}}{(2\pi)^{3/4} \sqrt{\Delta x \Delta y \Delta z}} \exp \left\{ - \left(\frac{x - \bar{x}}{2\Delta x} \right)^2 - \left(\frac{y - \bar{y}}{2\Delta y} \right)^2 - \left(\frac{z - \bar{z}}{2\Delta z} \right)^2 \right\}, \quad (7.39)$$

com a correspondente função de onda no espaço dos momenta:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_i(\mathbf{p}) = & \frac{1}{(2\pi)^{3/4}} \frac{e^{-i(p_x \bar{x} + p_y \bar{y} + p_z \bar{z})/\hbar}}{\sqrt{\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z}} \\ & \times \exp \left\{ - \left(\frac{p_x - \bar{p}_x}{2\Delta p_x} \right)^2 - \left(\frac{p_y - \bar{p}_y}{2\Delta p_y} \right)^2 - \left(\frac{p_z - \bar{p}_z}{2\Delta p_z} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (7.40)$$

onde as constantes $\bar{x}$, $\bar{y}$ e $\bar{z}$ representam os valores esperados de cada uma das componentes da posição do ponteiro, e $\bar{p}_x$, $\bar{p}_y$ e $\bar{p}_z$ são os valores esperados de cada uma das componentes do momentum. Os desvios-padrão das posições Δx , Δy e Δz relacionam-se com os desvios-padrão dos momenta Δp_x , Δp_y e Δp_z de acordo com a relação mínima de incerteza de Heisenberg, isto é, o produto do desvio-padrão de uma variável com o momentum associado será sempre $\hbar/2$.

Na próxima seção, recuperaremos e generalizaremos os valores fracos (2.40) ao resolver a dinâmica decorrente do hamiltoniano (7.30).

7.3 Medidas fracas em três dimensões

Nesta seção, para obtermos os equivalentes aos valores fracos para um campo em mais de uma dimensão como (7.26), consideraremos primeiramente apenas o termo de interação em (7.30):

$$H(t) = -\hbar\eta g(t)\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_\perp, \quad (7.41)$$

onde $g(t)$ ainda é normalizada de acordo com (2.25).

Assim como em (2.24), nenhum dos operadores em (7.41) depende do tempo, apenas a função escalar $g(t)$ que os multiplica, de forma que o hamiltoniano comuta consigo mesmo para diferentes tempos ($[H(t), H(t')] = 0, \forall t, t'$). Por isso, o operador evolução temporal (2.26) ainda resulta num estado final análogo ao de (2.27):

$$|\Psi_f\rangle = \exp\{i\eta\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_\perp\} |\Psi_i\rangle. \quad (7.42)$$

A exponencial presente em (7.42) atua da seguinte forma sobre o estado $|\Psi_i\rangle$ quando expresso em termos da função de onda no espaço das posições, $\psi_i(\mathbf{r})$ (7.35):

$$\exp\{i\eta\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_\perp\} |\Psi_i\rangle = \int_{V_r^\infty} d^3r e^{i\eta\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) |\chi_i\rangle \otimes |\mathbf{r}\rangle. \quad (7.43)$$

Se a função de onda $\psi_i(\mathbf{r})$ for estreita o suficiente na direção z (ou x), uma aproximação comumente feita neste ponto,⁴² podemos tomar $z = 0$ ou $x = 0$, obtendo um deslocamento apenas na outra direção. Isto é, se escolhermos a condição inicial

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \psi_i(x, y) \delta(z) \quad (7.44)$$

a equação (7.43) só mantém seus termos nas direções x e y :

$$\exp\{i\eta\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_\perp\} |\Psi_i\rangle = \int_{V_r^\infty} d^3r e^{i\eta Q_x x} \psi_i(x, y) \delta(z) |\chi_i\rangle \otimes |\mathbf{r}\rangle. \quad (7.45)$$

Se aplicarmos uma relação de completeza para os momenta pela esquerda, encontramos o seguinte resultado para a função de onda na base dos momenta:

$$\exp\{i\eta\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_\perp\} |\Psi_i\rangle = \sum_{q_x} \langle q_x | \chi_i \rangle \int_{V_p^\infty} d^3p \tilde{\psi}_i(\mathbf{p} - \hbar\eta q_x \hat{\mathbf{x}}) |q_x\rangle \otimes |\mathbf{p}\rangle, \quad (7.46)$$

onde os $|q_x\rangle$ são autovetores de Q_x .

Desde que o desvio padrão da função de onda original seja menor do que $\sim \hbar\eta\Delta q_x$ (onde Δq_x é a distância típica entre os autovalores de Q_x), uma determinação do momentum do ponteiro na direção $\hat{\mathbf{x}}$ seria suficiente para se conhecer o autovalor correspondente de Q_x . Ou seja, o deslocamento de $\hbar\eta q_x$ na direção $\hat{\mathbf{x}}$ da função de onda pode ser interpretado como uma medida de q_x .

Analogamente, escolhendo a função de onda muito estreita na coordenada x no instante inicial:

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \psi_i(y, z) \delta(x), \quad (7.47)$$

encontramos um estado final para a base dos momenta de:

$$\exp \{i\eta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_\perp\} |\Psi_i\rangle = \sum_{q_z} \langle q_z | \chi_i \rangle \int_{V_p^\infty} d^3p \tilde{\psi}_i(\mathbf{p} - \hbar\eta q_z \hat{\mathbf{z}}) |q_z\rangle \otimes |\mathbf{p}\rangle, \quad (7.48)$$

onde um deslocamento de $\hbar\eta q_z$ na direção $\hat{\mathbf{z}}$ corresponde a uma medida de q_z .

Seja qual for a condição inicial, o operador exponencial presente em (7.42) sempre pode ser expandido numa série de potências:

$$|\Psi_f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\eta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R})^n |\Psi_i\rangle, \quad (7.49)$$

Se pós-selecionarmos um estado $|\chi_f\rangle$ do sistema-objeto, a expansão em série de potências pode ser escrita em termos dos n -ésimos tensores fracos de $\mathbf{Q}$, definidos como:

$$\mathbf{Q}_w^{(n)} \equiv \frac{1}{\langle \chi_f | \chi_i \rangle} \langle \chi_f | \mathbf{Q}^{\otimes n} | \chi_i \rangle, \quad (7.50)$$

onde estão implícitos os produtos tensoriais entre os operadores $\mathbf{Q}$ em $\mathbf{Q}^{\otimes n} \equiv \bigotimes_{i=1}^n \mathbf{Q}$.

Similarmente, precisamos definir o tensor de operadores $\mathbf{R}^{\otimes n} \equiv \bigotimes_{i=1}^n \mathbf{R}$, para fazermos o produto entre os dois tensores, dois operadores de cada vez, em (7.49):

$$\text{rel}_{|\chi_f\rangle} |\Psi_f\rangle = \mathcal{C} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\eta)^n \mathbf{Q}_w^{(n)} \cdot \mathbf{R}^{\otimes n} |\Phi_i\rangle, \quad (7.51)$$

onde $\mathcal{C}$ é uma constante de normalização e $|\Phi_i\rangle$ é o estado inicial do ponteiro.

Caso a função de onda seja muito estreita na direção z ou x , como nas condições inicial (7.44) ou (7.47), $\mathbf{Q}$ pode ser substituído por Q_z ou Q_x e não precisamos mais apelar para tensores, que tornam-se simplesmente os valores fracos (2.40).

Em todo caso, se a medida for fraca, podemos descartar os termos de ordem maior de (7.51), obtendo o equivalente a uma exponencial que contém apenas o primeiro tensor fraco:

$$\text{rel}_{|\chi_f\rangle} |\Psi_f\rangle = \exp \{i\eta \mathbf{Q}_w \cdot \mathbf{R}\} |\Psi_i\rangle + O(\eta^2), \quad (7.52)$$

claramente, já normalizado. Aqui, representamos, por simplicidade, o primeiro tensor fraco por $\mathbf{Q}_w \equiv \mathbf{Q}_w^{(1)}$.

Comparado com a (7.46), vemos que o efeito da exponencial em (7.52) é o de provocar um deslocamento de $-\hbar\eta \mathbf{Q}_w$ na função de onda no espaço dos momenta:

$$\exp \{i\eta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_\perp\} |\Psi_i\rangle = \int_{V_p^\infty} d^3p \tilde{\psi}_i(\mathbf{p} - \hbar\eta \mathbf{Q}_w) |\mathbf{p}\rangle. \quad (7.53)$$

Um exemplo de deslocamento da função de onda devido a um vetor fraco pode ser visto na figura 7.3.

Figura 7.3 – Medida fraca de uma observável $\mathbf{Q} = 0,3\eta^{-1}(\sigma_z\hat{\mathbf{z}} - \sigma_x\hat{\mathbf{x}})$ para uma função de onda inicialmente descrita por uma gaussiana (7.40) centrada na origem e com desvio-padrão $\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z = 1/2$. O spin do sistema-objeto é inicialmente $|0\rangle_z$, e depois pós-selecionado para o estado $|0\rangle_x$. Em (a) temos uma secção ao longo do eixo x da função de onda inicial e final; e (b) uma secção ao longo do eixo z . Para comparação, há o estado final de uma medida completa de (c) $-\sigma_x$ e de (d) σ_z para o mesmo estado inicial.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim como um deslocamento de $-\hbar\eta q_x\hat{\mathbf{x}}$ estava associado a uma medida de q_x da observável Q_x , e como um deslocamento de $-\hbar\eta q_z\hat{\mathbf{z}}$ estava associado a uma medida de q_z da observável Q_z , o deslocamento de $-\hbar\eta\mathbf{Q}_w\hat{\mathbf{q}}$ pode ser interpretado como uma medida fraca com valor $\mathbf{Q}_w\cdot\hat{\mathbf{x}}$ para Q_x e de $\mathbf{Q}_w\cdot\hat{\mathbf{z}}$ para Q_z . Além disso, neste nosso formalismo que leva em consideração todas as componentes do campo magnético, o tensor fraco também encapsula todos os valores fracos, que aparecem explicitamente com as condições iniciais (7.44) ou (7.47).

A descrição que empregamos nesta seção é suficiente para descrever um experimento de Stern-Gerlach que envolva medidas fracas, apesar de termos ignorado qualquer termo que não seja de interação no hamiltoniano. Veremos por que isso é válido na próxima seção.

7.4 Descrição de Stern-Gerlach com o hamiltoniano completo

Enquanto na seção anterior ignoramos todas as componentes do hamiltoniano que não fossem as de interação, nesta seção consideraremos um hamiltoniano completo para a partícula com spin-1/2 atravessando o campo, incluindo um termo de energia cinética:

$$H(t) = -\hbar\eta g(t)B_0 \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}} \right] - \hbar\eta g(t)\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_\perp + \frac{P^2}{2m}. \quad (7.54)$$

A equação de Schrödinger regida pelo hamiltoniano (7.54) é simplificada se passarmos à representação de interação:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi_I(t)\rangle = \eta H_I(t) |\Psi_I(t)\rangle \quad (7.55)$$

onde eliminamos os termos que não são de interação:

$$H_0(t) = -\hbar\eta g(t)B_0 \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0 \right] + \frac{P^2}{2m}. \quad (7.56)$$

Notemos que, como os dois termos do lado direito de (7.56) atuam em espaços de Hilbert distintos, o hamiltoniano $H_0(t)$ continua comutando consigo mesmo. O operador evolução temporal que lhe corresponde, portanto, pode ser encontrado exponenciando a sua integral:

$$\begin{aligned} U_0(t) &= \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H_0(t') \right\} \\ &= \exp \left\{ i\eta B_0 \int_0^t dt' g(t') \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0 \right] - \frac{i}{\hbar} \frac{P^2}{2m} t \right\}. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Passando à representação de interação dada por (2.46) e (2.47), que em termos de (7.57) são:

$$|\Psi_I(t)\rangle = U_0^\dagger(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (7.58)$$

e

$$H_I(t, -\tau_i) = -\hbar\eta g(t)U_0^\dagger(t)\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_\perp U_0(t), \quad (7.59)$$

podemos separar (7.57) nos termos que atuam sobre o sistema-objeto (o spin) e aqueles que atuam sobre o medidor (o ponteiro), o que permite escrever (7.59) da forma simplificada:

$$H_I(t, \tau_i) = -\hbar\eta g(t)\tilde{\mathbf{Q}}(t) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_\perp(t), \quad (7.60)$$

onde $\tilde{\mathbf{Q}}(t)$ e $\tilde{\mathbf{R}}_\perp(t)$ são:

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\perp}(t) \equiv \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{P^2}{2m} t \right\} \mathbf{R}_{\perp} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \frac{P^2}{2m} t \right\}, \quad (7.61)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}(t) \equiv & \exp \left\{ -i\eta B_0 \int_0^t dt' g(t') (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \right\} \mathbf{Q} \\ & \times \exp \left\{ i\eta B_0 \int_0^t dt' g(t') (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \right\}. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Os dois operadores (7.61) e (7.62) podem ser encontrados por meio da expansão de Baker-Campbell-Hausdorff (B.7). Para $\tilde{\mathbf{R}}_{\perp}(t)$, notamos primeiramente que, usando a notação de Einstein:

$$[P^2, \mathbf{R}] = P_i [P_i, R_j] \hat{\mathbf{x}}_j + [P_i, R_j] P_i \hat{\mathbf{x}}_j = -2i\hbar \mathbf{P}. \quad (7.63)$$

Daí, conclui-se que

$$[P^2, \mathbf{R}_{\perp}] = -2i\hbar \mathbf{P}_{\perp}, \quad (7.64)$$

onde

$$\mathbf{P}_{\perp} \equiv P_z \hat{\mathbf{z}} + P_x \hat{\mathbf{x}}. \quad (7.65)$$

Por isso, a expansão (B.7) gera o seguinte novo valor para (7.61):

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\perp} = \mathbf{R}_{\perp} + \frac{i}{2m\hbar} (-2i\hbar \mathbf{P}_{\perp}) t. \quad (7.66)$$

Já para o operador $\tilde{\mathbf{Q}}(t)$, primeiro definimos a função

$$h(t) \equiv \int_0^t dt' g(t'), \quad (7.67)$$

que, pela condição de normalização (2.25) torna-se $\sim 1/2$ quando t ultrapassa a base compacta de $g(t)$, $\mathbb{S}$, se supusermos que $g(t)$ é aproximadamente simétrica e escolhermos a origem perto do centro dessa função.

Da definição (7.32), também podemos escrever o operador vetorial da seguinte forma:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_z \sigma_z + \mathbf{Q}_x \sigma_x, \quad (7.68)$$

onde os vetores $\mathbf{Q}_z$ e $\mathbf{Q}_x$ não atuam sobre o spin:

$$\mathbf{Q}_z \equiv B_{zz} \hat{\mathbf{z}} + B_{zx} \hat{\mathbf{x}}, \quad (7.69)$$

$$\mathbf{Q}_x \equiv B_{zx} \hat{\mathbf{z}} - B_{zz} \hat{\mathbf{x}}, \quad (7.70)$$

e são claramente ortogonais.

Da simetria do problema, também sabemos que o versor $\hat{\mathbf{B}}_0$ está confinado ao plano xz :

$$\hat{\mathbf{B}}_0 = \cos \theta_0 \hat{\mathbf{z}} + \sin \theta_0 \hat{\mathbf{x}}. \quad (7.71)$$

Em termos de (7.68) e (7.67), o operador transformado (7.62) também pode ser decomposto em dois:

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{Q}_z e^{-i\eta B_0 h(t)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)} \sigma_z e^{i\eta B_0 h(t)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)} + \mathbf{Q}_x e^{-i\eta B_0 h(t)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)} \sigma_x e^{i\eta B_0 h(t)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)}. \quad (7.72)$$

Mais uma vez precisamos da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (B.7), desta vez utilizando os comutadores de $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0$ com σ_z e σ_x :

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, \sigma_z] = \sin \theta_0 (-2i\sigma_y), \quad (7.73)$$

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, [\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, \sigma_z]] = 4 \sin^2 \theta_0 \sigma_z - 4 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sigma_x, \quad (7.74)$$

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, [\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, [\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, \sigma_z]]] = 4 \sin \theta_0 (-2i\sigma_y), \quad (7.75)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

e

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, \sigma_x] = \cos \theta_0 (2i\sigma_y), \quad (7.76)$$

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, [\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, \sigma_x]] = 4 \cos^2 \theta_0 \sigma_x - 4 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sigma_z, \quad (7.77)$$

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, [\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, [\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, \sigma_x]]] = 4 \cos \theta_0 (2i\sigma_y), \quad (7.78)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Fica claro que, para $2n$ comutadores (com n inteiro e maior do que zero):

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, [\dots, [\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, \sigma_z]]] = 2^{2n} \sin \theta_0 (\sin \theta_0 \sigma_z - \cos \theta_0 \sigma_x), \quad (7.79)$$

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, [\dots, [\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, \sigma_x]]] = 2^{2n} \cos \theta_0 (\cos \theta_0 \sigma_x - \sin \theta_0 \sigma_z), \quad (7.80)$$

enquanto que, para $2n + 1$ comutadores (n inteiro e igual ou maior que zero):

$$\left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, \left[\dots, \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, \sigma_z \right] \right] \right] = -2^{2n+1} i \sin \theta_0 \sigma_y, \quad (7.81)$$

$$\left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, \left[\dots, \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0, \sigma_x \right] \right] \right] = 2^{2n+1} i \cos \theta_0 \sigma_y. \quad (7.82)$$

Na expansão (B.7), portanto, encontraremos:

$$\begin{aligned} e^{-i\eta B_0 h(t)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)} \sigma_z e^{i\eta B_0 h(t)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)} &= \sigma_z \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} [-2i\eta B_0 h(t)]^{2n} \sin \theta_0 (\sin \theta_0 \sigma_z - \cos \theta_0 \sigma_x) \\ &- i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} [-2i\eta B_0 h(t)]^{2n+1} \sin \theta_0 \sigma_y \end{aligned} \quad (7.83)$$

e

$$\begin{aligned} e^{-i\eta B_0 h(t)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)} \sigma_x e^{i\eta B_0 h(t)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)} &= \sigma_x \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} [-2i\eta B_0 h(t)]^{2n} \cos \theta_0 (\cos \theta_0 \sigma_x - \sin \theta_0 \sigma_z) \\ &+ i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} [-2i\eta B_0 h(t)]^{2n+1} \cos \theta_0 \sigma_y. \end{aligned} \quad (7.84)$$

Reconhecendo senos e cossenos nas séries infinitas:

$$\begin{aligned} e^{-i\eta B_0 h(t)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)} \sigma_z e^{i\eta B_0 h(t)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)} &= \cos \theta_0 (\cos \theta_0 \sigma_z + \sin \theta_0 \sigma_x) \\ &+ \cos [2\eta B_0 h(t)] \sin \theta_0 (\sin \theta_0 \sigma_z - \cos \theta_0 \sigma_x) \\ &- \sin [2\eta B_0 h(t)] \sin \theta_0 \sigma_y, \end{aligned} \quad (7.85)$$

e

$$\begin{aligned} e^{-i\eta B_0 h(t)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)} \sigma_x e^{i\eta B_0 h(t)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)} &= \sin \theta_0 (\cos \theta_0 \sigma_z + \sin \theta_0 \sigma_x) \\ &+ \cos [2\eta B_0 h(t)] \cos \theta_0 (\cos \theta_0 \sigma_x - \sin \theta_0 \sigma_z) \\ &+ \sin [2\eta B_0 h(t)] \cos \theta_0 \sigma_y. \end{aligned} \quad (7.86)$$

Substituindo (7.85) e (7.86) em (7.72), encontramos:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{Q}}(t) = & (\cos \theta_0 \sigma_z + \sin \theta_0 \sigma_x) (\mathbf{Q}_z \cos \theta_0 + \mathbf{Q}_x \sin \theta_0) \\ & + \cos [2\eta B_0 h(t)] [(\sin \theta_0 \sigma_z - \cos \theta_0 \sigma_x) \mathbf{Q}_z \sin \theta_0 + (\cos \theta_0 \sigma_x - \sin \theta_0 \sigma_z) \mathbf{Q}_x \cos \theta_0] \\ & - \sin [2\eta B_0 h(t)] (\mathbf{Q}_z \sin \theta_0 - \mathbf{Q}_x \cos \theta_0) \sigma_y. \quad (7.87)\end{aligned}$$

Ao contrário de $\tilde{\mathbf{R}}_\perp$, o $\tilde{\mathbf{Q}}(t)$ encontrado em (7.87) perde a sua dependência temporal quando t ultrapassa os limites do suporte compacto de $g(t)$. Neste caso, $h(t) \approx 1/2$ e $\tilde{\mathbf{Q}}(t)$ assume um valor diferente de $\mathbf{Q}$, mas constante. Por outro lado, se t for menor do que o começo do suporte compacto de $g(t)$, $h(t) \approx -1/2$ e $\tilde{\mathbf{Q}}(t)$ é uma constante diferente.

O estado do sistema completo no instante final $t = \tau_f$, nesta representação de interação, é dado por uma série de Dyson (2.52). Se retornarmos à (7.60) com os operadores $\tilde{\mathbf{R}}_\perp$ e $\tilde{\mathbf{Q}}$ conforme calculados em (7.66) e (7.87), podemos escrever a série de Dyson explicitamente:

$$\begin{aligned}|\Psi_I(\tau_f)\rangle = & \sum_{n=0}^{\infty} (i\eta)^n \int_{-\tau_i}^{\tau_f} dt_1 \int_{-\tau_i}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\tau_i}^{t_{n-1}} dt_n \\ & \times \prod_{k=1}^n \left\{ g(t_k) \tilde{\mathbf{Q}}(t_k) \cdot \left(\mathbf{R}_\perp + \frac{t_k}{m} \mathbf{P}_\perp \right) \right\} |\Psi_I(-\tau_i)\rangle, \quad (7.88)\end{aligned}$$

onde denotamos $t = -\tau_i$ como o instante inicial, antes do início do suporte compacto e da interação de Stern-Gerlach.

Se a medida for fraca o suficiente, podemos manter apenas o primeiro termo da expansão e descartar os termos de ordem maior ou igual a η^2 :

$$\begin{aligned}|\Psi_I(\tau_f)\rangle = & |\Psi_I(-\tau_i)\rangle + i\eta \int_{-\tau_i}^{\tau_f} dt_1 g(t_1) \tilde{\mathbf{Q}}(t_1) \cdot \left(\mathbf{R}_\perp + \frac{t_1}{m} \mathbf{P}_\perp \right) |\Psi_I(-\tau_i)\rangle \\ & + O(\eta^2). \quad (7.89)\end{aligned}$$

Se supusermos que o intervalo $[-\tau_i, \tau_f]$ engloba todo o suporte compacto $\mathbb{S}$ de $g(t)$, e que esta está centrada na origem do tempo, teremos que qualquer função anti-simétrica multiplicada por ela e integrada de $-\tau_i$ a τ_f resulta em zero:

$$\int_{-\tau_i}^{\tau_f} dt_1 t_1 g(t_1) = 0. \quad (7.90)$$

Além disso, a definição de $h(t)$ (7.67) nos diz que essa é uma função anti-simétrica se $g(t)$ for simétrica. Portanto,

$$\int_{-\tau_i}^{\tau_f} dt_1 h(t_1)g(t_1) = 0, \quad (7.91)$$

$$\int_{-\tau_i}^{\tau_f} dt_1 \sin [2\eta B_0 h(t_1)] g(t_1) = 0, \quad (7.92)$$

$$\int_{-\tau_i}^{\tau_f} dt_1 t_1 \cos [2\eta B_0 h(t_1)] g(t_1) = 0. \quad (7.93)$$

Por isso,

$$\begin{aligned} \int_{-\tau_i}^{\tau_f} dt_1 g(t_1) \tilde{\mathbf{Q}}(t_1) &= (\cos \theta_0 \sigma_z + \sin \theta_0 \sigma_x) (\mathbf{Q}_z \cos \theta_0 + \mathbf{Q}_x \sin \theta_0) \\ &+ \int_{-\tau_i}^{\tau_f} dt_1 g(t_1) \cos [2\eta B_0 h(t_1)] \{ (\sin \theta_0 \sigma_z - \cos \theta_0 \sigma_x) \mathbf{Q}_z \sin \theta_0 \\ &+ (\cos \theta_0 \sigma_x - \sin \theta_0 \sigma_z) \mathbf{Q}_x \cos \theta_0 \}, \end{aligned} \quad (7.94)$$

e

$$\int_{-\tau_i}^{\tau_f} dt_1 t_1 g(t_1) \tilde{\mathbf{Q}}(t_1) = \int_{-\tau_i}^{\tau_f} dt_1 t_1 g(t_1) \sin [2\eta B_0 h(t_1)] (\mathbf{Q}_z \sin \theta_0 - \mathbf{Q}_x \cos \theta_0) \sigma_y. \quad (7.95)$$

O primeiro operador contém apenas as matrizes de Pauli σ_z e σ_x , enquanto o segundo contém apenas σ_y . Vamos designá-los por

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{xz}} \equiv \int_{-\tau_i}^{\tau_f} dt_1 g(t_1) \tilde{\mathbf{Q}}(t_1), \quad (7.96)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{y}} \equiv \int_{-\tau_i}^{\tau_f} dt_1 t_1 g(t_1) \tilde{\mathbf{Q}}(t_1). \quad (7.97)$$

Escrevendo os operadores (7.96) e (7.97) em (7.89), encontramos:

$$|\Psi_I(\tau_f)\rangle = |\Psi_I(-\tau_i)\rangle + i\eta \left(\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{xz}} \cdot \mathbf{R}_\perp + \frac{1}{m} \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{P}_\perp \right) |\Psi_I(-\tau_i)\rangle + O(\eta^2), \quad (7.98)$$

o que provoca, até primeira ordem, um deslocamento proporcional aos autovalores de $\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{y}}$ (que só contém a matriz de Pauli σ_y) na função de onda na base das posições. Ilustramos esse deslocamento na base das posições na figura 7.4.

Se o campo constante $\mathbf{B}_0$ não estiver presente, $\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{y}}$ torna-se zero e $\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{xz}}$ torna-se o operador original $\mathbf{Q}$. Nesse caso, recuperamos o resultado que conhecíamos anteriormente (7.52), no qual a medida fraca provoca um deslocamento de $-\hbar\eta\mathbf{Q}_w$ na função de onda

Figura 7.4 – Deslocamento provocado por uma medida fraca na função de onda na base das posições quando a função de onda inicial é a gaussiana (7.39) centrada na origem e com desvio padrão $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1/2$. Escolhemos os campos e a função $g(t)$ tais que $\hat{\mathbf{Q}}_y = 0.3m\eta^{-1}(\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{x}})\sigma_y$. As seções mostradas são (a) ao longo do eixo x ; (b) ao longo do eixo z . As observáveis σ_z e σ_x , por (7.98), só afetam a fase da função de onda no espaço das posições, assim como σ_y só afeta a fase na base dos momenta.

Fonte: Elaborada pelo autor.

na base de momenta:

$$\text{rel}_{|\chi_f\rangle} \{|\Psi_I(\tau_f)\rangle\} = \exp \{i\eta \mathbf{Q}_w \cdot \mathbf{R}_\perp\} |\Phi_I(-\tau_i)\rangle + O(\eta^2), \quad (7.99)$$

onde $|\Phi_I(-\tau_i)\rangle$ é o estado inicial do ponteiro. A presença do campo constante $\mathbf{B}_0$, porém, causa o efeito adicional de um deslocamento também na função de onda na base das posições proporcional ao valor fraco de σ_y :

$$\begin{aligned} \text{rel}_{|\chi_f\rangle} |\Psi_I(\tau_f)\rangle = & \exp \left\{ i\eta \frac{\langle \chi_f | \mathbf{Q}_{xz} | \chi_f \rangle}{\langle \chi_i | \chi_f \rangle} \cdot \mathbf{R}_\perp \right\} \\ & \times \exp \left\{ i\eta \frac{1}{m} \frac{\langle \chi_f | \mathbf{Q}_y | \chi_f \rangle}{\langle \chi_i | \chi_f \rangle} \cdot \mathbf{P}_\perp \right\} |\Phi_I(-\tau_i)\rangle + O(\eta^2). \end{aligned} \quad (7.100)$$

Ou seja, agora há um deslocamento da função de onda em $\mathbf{r}$ também, além da substituição da observável $\mathbf{Q}$ pela observável efetiva $\mathbf{Q}_{xz}$ (7.96).

O deslocamento adicional é também eliminado quando $m \rightarrow \infty$, caso no qual a energia cinética torna-se desprezível, ou quando a função de onda inicial é tal que praticamente não há termo com momenta maiores que zero nas direções x e z .

Como estamos interessados em interações fracas entre o sistema e o ponteiro, consideraremos para o nosso experimento proposto que B_0 é muito pequeno, de forma os termos adicionais vão apenas multiplicar uma pequena fase, não alterando a forma final da função de onda no espaço dos momenta. Por isso, esses efeitos serão desprezados na próxima seção. Se em uma situação experimental for necessário um tratamento completo,

porém, basta substituir a expressão (7.98) que encontramos nesta seção.

7.5 Medidas fracas de durações diversas

Consideremos novamente o experimento proposto na seção 7.1: variar a duração de uma medida fraca para determinar como as coerências diminuem com o tempo enquanto ela ocorre.

Variemos levemente a duração da medida fraca no aparato de Stern-Gerlach. Isso equivale a alterar o suporte compacto da função $g(t)$. Por simplicidade, suponha que esta era inicialmente uma função degrau de amplitude $1/(2t_g)$ com suporte que ia de $t = -t_g$ a $t = t_g$ (com $t_g > 0$). Se alterarmos a duração da medida para um intervalo $[-t'_g, t'_g]$, a função passará a ter normalização:

$$\int_{-t'_g}^{t'_g} dt g(t) = \frac{t'_g}{t_g}. \quad (7.101)$$

A evolução temporal dada por (7.42) passa então a ser:

$$|\Psi_f\rangle = \exp \left\{ i\eta \frac{t'_g}{t_g} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_\perp \right\} |\Psi_i\rangle. \quad (7.102)$$

Façamos a aproximação do estado inicial do ponteiro que usamos em (7.47) para que a medida fosse apenas de Q_z . Neste caso, a matriz densidade final do sistema completo após uma medida que dure $2t_g$ será dada por:

$$\rho(2t'_g - \tau_i) = \exp \left\{ i\eta \frac{t'_g}{t_g} Q_z Z \right\} \rho(-\tau_i) \exp \left\{ -i\eta \frac{t'_g}{t_g} Q_z Z \right\}, \quad (7.103)$$

onde os estados inicial e final estão dados por:

$$\rho(2t'_g - \tau_i) = |\Psi_f\rangle \langle \Psi_f| \quad (7.104)$$

$$\rho(-\tau_i) = |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|. \quad (7.105)$$

Para podermos empregar a mesma notação da seção 7.1, vamos deslocar a origem do tempo para $t = -\tau_i$, ficando com:

$$\rho(2t'_g) = \exp \left\{ i\eta \frac{t'_g}{t_g} Q_z Z \right\} \rho(0) \exp \left\{ -i\eta \frac{t'_g}{t_g} Q_z Z \right\}, \quad (7.106)$$

Se tomarmos o traço sobre o ponteiro, que é o medidor em (7.106), apenas a dimensão σ_z será relevante:

$$\rho_S(2t'_g) = \int_{-\infty}^{\infty} dz |\psi_i(z)|^2 \exp \left\{ i\eta \frac{t'_g}{t_g} Q_z z \right\} \rho_S(0) \exp \left\{ -i\eta \frac{t'_g}{t_g} Q_z z \right\}, \quad (7.107)$$

onde consideramos o estado inicial separável:

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' \psi_i(z) \psi_i^*(z') |z\rangle \langle z'|. \quad (7.108)$$

Note que não faz diferença para nós se a função de onda $\psi_i(z)$ é deslocada adicionalmente devido ao campo constante B_0 , como descrevemos na seção anterior.

O operador Q_z é qualquer, mas, por atuar sobre um spin-1/2, deve ter autovalores ± 1 . As populações na base dos autoestados de Q_z de (7.107) claramente não variam com o tempo. Dado um autovetor qualquer $|q_z\rangle$:

$$\langle q_z | \rho_S(2t'_g) | q_z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz |\psi_i(z)|^2 \langle q_z | \rho_S(0) | q_z \rangle = \langle q_z | \rho_S(0) | q_z \rangle. \quad (7.109)$$

Consideremos agora as coerências, isto é, um produto cruzado dos autovetores $|q_z\rangle$ e seu oposto $|-q_z\rangle$:

$$\langle -q_z | \rho_S(2t'_g) | q_z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz |\psi_i(z)|^2 \exp \left\{ -2i\eta \frac{t'_g}{t_g} q_z z \right\} \langle -q_z | \rho_S(0) | q_z \rangle. \quad (7.110)$$

Conforme t'_g aumenta, a exponencial $e^{-2i\eta q_z z t'_g/t_g}$ oscilará mais rápido, levando sua integral em conjunto com a função positiva $|\psi_i(z)|^2$ a zero.

A integral presente em (7.110) tem o mesmo valor que o produto interno:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dz |\psi_i(z)|^2 \exp \left\{ -2i\eta \frac{t'_g}{t_g} q_z z \right\} = \\ \langle \Phi_i | \exp \left\{ -i\eta \frac{t'_g}{t_g} q_z Z \right\} \exp \left\{ -i\eta \frac{t'_g}{t_g} q_z Z \right\} | \Phi_i \rangle, \end{aligned} \quad (7.111)$$

onde $\langle \Phi_i |$ é o estado inicial do ponteiro. Comparando com (2.27), as exponenciais em (7.111) representam um deslocamento de $\pm \hbar \eta t'_g q_z / t_g$ na função de onda do momentum p_z :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dz |\psi_i(z)|^2 \exp \left\{ -2i\eta \frac{t'_g}{t_g} q_z z \right\} = \\ \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \tilde{\psi}_i^* \left(p_z - \hbar \eta q_z \frac{t'_g}{t_g} \right) \tilde{\psi}_i \left(p_z + \hbar \eta q_z \frac{t'_g}{t_g} \right). \end{aligned} \quad (7.112)$$

A integral (7.112) que nos dá a taxa de diminuição das coerências não é nada mais do que o produto interno de diferentes estados relativos da função de onda após a medida. Se a medida não foi capaz de afastá-los o suficiente para que a determinação de um valor ou de outro deixe de ser ambígua, as coerências ainda não serão zero.

Ilustremos isso para o caso de um estado inicial gaussiano como (7.40), mas em apenas uma dimensão:

$$\tilde{\psi}_i(p_z) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{\Delta p_z}} \exp \left\{ - \left(\frac{p_z - \bar{p}_z}{2\Delta p_z} \right)^2 \right\}. \quad (7.113)$$

Figura 7.5 – Diminuição das coerências em função do tempo para uma partícula de ponteiro gaussiano atravessando um aparato de Stern-Gerlach e para um qubit regido pela equação mestra da medida contínua. Chamamos $\lambda^2 = 2\hbar^2\eta^2/(4t_g\Delta p_z)^2$ e consideramos o estado inicial como $|0\rangle_x$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Se inicialmente $\bar{p}_z = 0$, após um deslocamento de $\pm\hbar\eta q_z t'_g/t_g$, o produto das duas funções de onda dará:

$$\tilde{\psi}_i^* \left(p_z - \hbar\eta q_z \frac{t'_g}{t_g} \right) \tilde{\psi}_i \left(p_z + \hbar\eta q_z \frac{t'_g}{t_g} \right) = |\psi_i(p_z)|^2 \exp \left\{ -2 \left(\frac{\hbar\eta q_z t'_g}{2t_g\Delta p_z} \right)^2 \right\}. \quad (7.114)$$

Usando o fato de que $|q_z|^2 = 1$ e substituindo (7.114) em (7.112), encontramos o seguinte valor para o produto interno:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_z \tilde{\psi}_i^* \left(p_z - \hbar\eta q_z \frac{t'_g}{t_g} \right) \tilde{\psi}_i \left(p_z + \hbar\eta q_z \frac{t'_g}{t_g} \right) = \exp \left\{ -2 \left(\frac{\hbar\eta t'_g}{2t_g\Delta p_z} \right)^2 \right\}. \quad (7.115)$$

Uma função inicial gaussiana, portanto, causa uma diminuição das coerências proporcional a algum $e^{-\lambda^2 t^2}$, um pouco mais rápida do que a prevista pelo modelo da equação

mestra da medida contínua, $e^{-\lambda t}$. Isso pode ser visto na figura 7.5.

De qualquer forma, a equação (7.112) nos diz que a taxa com que as coerências diminuem numa descrição tradicional do experimento de Stern-Gerlach depende essencialmente do estado inicial do ponteiro. Se o produto interno das funções de onda $\tilde{\psi}_i(p_z)$ se comportar assintoticamente como uma exponencial, o experimento de Stern-Gerlach causa descoerência da mesma forma que a equação mestra fazia em (7.2) e o experimento proposto na seção 7.1 deve ter o resultado previsto em (7.17).

7.6 Consequências para o princípio de Buridan

A discussão de como ocorre a descoerência dentro de um aparato de Stern-Gerlach tem consequências para o princípio de Buridan quântico, enunciado por Leslie Lamport.⁴³

Figura 7.6 – Exemplo de distribuição $f(x, t)$ do princípio de Buridan clássico para (a) o instante inicial $t = 0$; (b) um instante futuro $t > 0$. Apesar de cada $f(x, t)$ com $x \neq 0$ tender a 1 ou -1 conforme $t \rightarrow \infty$, pela continuidade da função $f(x, t)$, para todo $t \geq 0$, sempre haverá pontos em que ela assume valores $f(x, t)$ tais que $-1 < f(x, t) < 1$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O princípio de Buridan afirma que um problema de decisão que leve uma variável contínua a um resultado discreto não tem um limite temporal para terminar. Seu nome faz referência ao problema filosófico medieval do “burrinho de Buridan,” um animal perfeitamente lógico, igualmente com fome e sede, de tal forma que, se igualmente afastado de água e feno, morreria, incapaz de decidir qual vontade saciar primeiro. O princípio de Buridan, similarmente, nos diz que, quando for preciso tomar uma decisão binária como esta, sempre haverá a possibilidade de o tempo necessário para a decisão ser tomada ser proibitivamente longo.

Formalmente, a decisão entre duas ações discretas baseadas em um *input* contínuo é descrita por uma função contínua $f(x, t)$. A função $f(x, t)$ representa a evolução do *input*

inicial x em direção a uma decisão ou outra em função do tempo t (figura 7.6). Uma vez que $f(x, t)$ atinja ± 1 , a decisão foi tomada. Isso equivale ao burrinho que estava em $-1 < x < 1$ no instante $t = 0$ caminhar em direção à água ou ao feno após um tempo $t > 0$. Uma vez que $f(x, t) = \pm 1$, para um certo t , esta decisão será final e $f(x, t')$ permanece com o mesmo valor para qualquer $t' > t$.

Figura 7.7 – Exemplos de funções de onda (não normalizadas) que: (a) não viola o princípio de Buridan (entre quaisquer dois pontos para os quais $|\psi(x)|^2 > 0$, o módulo da função de onda é maior do que zero); e (b) que viola o princípio de Buridan, desde que o módulo da função de onda seja, não apenas aproximadamente, mas exatamente zero no intervalo entre $-0,5$ e $0,5$. No caso (b), a partícula será detectada ou em $x > 0,5$ ou em $x < -0,5$, e quando isso ocorrer uma decisão binária sem ambiguidade será tomada.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Devido à continuidade da função $f(x, t)$ e à condição de contorno $f(\pm 1, t) = \pm 1$, para qualquer instante $t' > 0$ e para qualquer $-1 < \varepsilon < 1$, sempre poderemos encontrar um valor de x' tal que

$$f(x', t') = \varepsilon. \quad (7.116)$$

Em termos da analogia, isso significa que, para qualquer instante t , sempre há uma posição inicial do burrinho que o impediria de ter tomado a decisão até esse momento. Portanto, é impossível se estabelecer um limite de tempo dentro do qual a decisão deve ser tomada, mesmo que na imensa maioria dos casos a decisão seja rápida.

Tal é a formulação clássica do problema. Quanticamente, Lamport considera uma decisão análoga na medida de uma partícula com spin-1/2 que atravessa um aparelho de Stern-Gerlach. Se ao final de um tempo t for possível dizer sem sombra de dúvida se a partícula tinha spin para cima ou para baixo, um limite temporal poderia ser imposto para um problema de decisão. Porém, Lamport argumenta que, pelo princípio da incerteza, sempre haverá partículas que atravessarão o aparato a uma velocidade rápida demais para interagir com o campo por tempo suficiente para serem desviadas significativamente para uma direção ou para outra. Essas partículas atingiriam uma região aproximadamente no centro do anteparo onde não seria possível determinar o seu spin.

Se essa região não existir, um aparato quântico seria capaz de tomar uma decisão em um intervalo de tempo limitado pelo fim da medida, ao contrário dos aparatos clássicos. Em outras palavras, o princípio de Buridan quântico nos diz que, dados $x_2 > x_1$, é impossível para uma função de onda $\psi(x)$ satisfazer:

$$|\psi(x)|^2 > 0 \text{ para algum } x > x_2, \quad (7.117)$$

$$|\psi(x)|^2 > 0 \text{ para algum } x < x_1, \quad (7.118)$$

$$|\psi(x)|^2 = 0 \text{ para todo } x_1 < x < x_2. \quad (7.119)$$

Exemplos de funções de onda que respeitam e violam esse princípio são dados na figura 7.7.

Figura 7.8 – Variação temporal do fator de diminuição das coerências $b(t)$ proposto em (7.1) para diferentes modelos. Se $b(t) = 0$ em tempo finito, é possível tomar uma decisão discreta nesse intervalo e o princípio de Buridan foi violado.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em termos do aparato de Stern-Gerlach descrito nas seções anteriores, essa violação ocorreria se as funções de onda relativas a cada estado do sistema-objeto ficassem ortogonais depois da medida. Isto é, se após a medida de uma observável Q tivéssemos um estado final como em (2.35):

$$|\Psi(\tau_f)\rangle = \sum_q \chi_i^{(q)} \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\psi}_i(p - \hbar\eta q) |q\rangle \otimes |p\rangle, \quad (7.120)$$

mas nenhuma das funções de onda $\psi_i(p - \hbar\eta q)$ tivesse produto interno não nulo para q e q' diferentes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\psi}_i(p - \hbar\eta q) \tilde{\psi}_i^*(p - \hbar\eta q') = \delta_{q,q'}. \quad (7.121)$$

Esta situação é análoga à que encontramos em (7.112) da seção anterior, onde medimos a descoerência do sistema pelo produto interno das diferentes funções de onda de cada estado relativo. Se a violação do princípio de Buridan (7.121) de fato ocorrer, as coerências e (7.112) após algum ponto se tornarão zero. A equação da medida contínua que empregamos neste trabalho, porém, considera uma diminuição exponencial dessas coerências que não tem um limite temporal final.²² Por isso, o princípio de Buridan não é violado neste modelo, e nem para ponteiros preparados em estados gaussianos, como pode ser visto na figura 7.8.

Por outro lado, o procedimento experimental que propusemos na seção 7.1 pode ser usado para determinar a validade do princípio de Buridan. Se a curva em (7.17) atingir um valor final imutável após um tempo finito, $b(t)$ tornou-se igual a zero em certo ponto, o que significa que as coerências são zero e que as funções de onda relativas aos diferentes resultados não mais têm produto interno não nulo. Se a curva (7.17) diminuir progressivamente mas nunca se assentar num valor final, o princípio de Buridan ainda é válido.

Dessa forma, a proposta experimental que fazemos neste capítulo não determinaria apenas a validade do modelo de medidas que empregamos ao longo da tese, mas também de princípios quânticos que podem afetar nosso entendimento da ciência da computação quântica. Além disso, como determinamos a origem da forma da descoerência no aparelho Stern-Gerlach na seção 7.5, talvez no futuro seja possível usar resultados obtidos aqui para fazer a engenharia de diferentes tipos de medidas contínuas, com taxas de descoerência diferentes.

8 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho, vimos diversas situações em que uma medida contínua de um sistema quântico era capaz ou não de preservar o estado do sistema observado, e também como testar se o modelo empregado é válido experimentalmente.

No capítulo 3, vimos que uma descrição markoviana do ruído não é suficiente para vermos os efeitos de proteção que queríamos observar. Para tanto, obtivemos algumas soluções originais da equação mestra da medida contínua que poderão ser usadas no futuro, por exemplo, para resolver um problema como aquele de que tratamos no capítulo 4, mas com uma medida não ortogonal ao ruído, ou com ruídos markovianos simultâneos. O modelo visual de como uma medida de um qubit, em conjunto com uma porta lógica, causa descoerência como se girasse ao redor do eixo z , também poderá ser usado no futuro para ilustrar de forma simples o aumento da entropia da informação, como um dispositivo de Szilard quântico.

No capítulo 4, que contém resultados já publicados,²³ vimos que uma medida contínua de um qubit simultânea a uma porta lógica consegue preservar por mais tempo a componente do vetor de Bloch que seria apagada por um ruído ortogonal à medida. Vimos também como essa medida impede inclusive a ação de uma porta lógica sobre o qubit. Com isso, generalizamos resultados que obtivemos anteriormente empregando métodos similares.²⁰⁻²¹ Não tratamos, porém, do que ocorre quando a porta lógica não é ortogonal ao ruído, ou quando variamos o tipo de ambiente. Todos esses casos podem ser investigados futuramente.

A analogia do efeito protetivo da medida contínua com efeito Zenão quântico foi feita até segunda ordem no capítulo 5, onde mostramos que uma medida contínua descrita pelo mesmo formalismo empregado no capítulo anterior diminui a probabilidade de que um sistema de dois níveis decaia. Essa aproximação, válida para interações fracas com o ambiente, porém, não é exata, e outros fenômenos podem se esconder nos termos de ordem maior. Um tratamento completo poderia revelar o efeito anti-Zenão quântico também para medidas contínuas, a depender do valor de ω_0 , da densidade espectral e da temperatura inicial, desde que o ruído não fosse mais uma mera perturbação.

Assim como a medida impede que o sistema decaia no caso do efeito Zenão, no capítulo 6 provamos que medidas de síndrome contínuas, mesmo durante portas lógicas, impedem tanto quanto quisermos a saída do sistema do subespaço de um código, reduzindo de forma ilimitada os erros sofridos. Explicamos também como portas lógicas podem ser construídas para que nossa proposta de medida contínua de síndrome seja efetiva, usando um método que publicamos recentemente.²⁴ Esse método por enquanto só conta com formulação teórica, e necessita ser adaptado para uma situação prática de processamento

de informação quântica em que uma observação contínua seja factível. Além disso, podem-se estudar numericamente portas lógicas mais complicadas do que o exemplo apresentado nesta tese, verificando quão eficiente esse método é contra cada tipo de erro.

No capítulo 7 discutimos uma proposta experimental que já publicamos²³ para a determinação da validade do modelo de medida contínua empregado no restante da tese. Descrevemos com maior precisão como funciona a teoria de medidas fracas em um aparato de Stern-Gerlach, e reinterpretamos o experimento proposto originalmente em termos do estado inicial da base ponteiro. Finalmente, dada essa nova interpretação, vimos como esse mesmo experimento pode ser usado para testar a validade do princípio de Buridan quântico. Os resultados apresentados aqui podem permitir a engenharia de ponteiros específicos que gerem a dinâmica de medidas contínuas que quisermos. Trabalhos futuros podem buscar o tipo de ponteiro que gera a diminuição de $e^{-\lambda t}$, e verificar experimentalmente se um aparato de Stern-Gerlach provoca descoerência da maneira prevista ou não.

Em geral, vimos que uma medida contínua markoviana consegue preservar o estado daquilo que ela esteja mensurando, desde que o ruído presente seja pequeno e não markoviano. Isto abre portas para outras perguntas: o que ocorre se a medida for não markoviana também? Isso torna a descrição mais realista? Existem também outros tipos de equação mestra da medida contínua com previsões diferentes quando a observável não é uma matriz de Pauli, além de métodos para simular efeitos não markovianos nos termos lindbladianos da equação mestra. Todas essas possibilidades podem ser comparadas entre si e com métodos experimentais para determinarmos qual é a forma mais realista de se descrever a dinâmica da medida. Nos tempos atuais, isso pode ser essencial para o bom funcionamento de um computador quântico, mas poderá também ajudar a responder antigas questões sobre a interpretação da mecânica quântica.

REFERÊNCIAS

- 1 TRIMMER, J. D. The present situation in quantum mechanics: a translation of Schrödinger's "cat paradox" paper. **Proceedings of the American Philosophical Society**, v. 124, n. 5, p. 323-338, 1980.
- 2 VON NEUMANN, J. **Mathematical foundations of quantum mechanics**. Princeton: Princeton University Press, 1955.
- 3 PETERSEN, A. The philosophy of Niels Bohr. **Bulletin of the Atomic Scientists**, v. 19, n. 7, p. 8-14, 1967.
- 4 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Physical Review**, v. 47, n. 10, p. 777-780, 1935.
- 5 BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables I. **Physical Review**, v. 85, n. 2, p. 166-179, 1952.
- 6 BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables II. **Physical Review**, v. 85, n. 2, p. 180-193, 1952.
- 7 WHEELER, J. A. Assessment of Everett's "relative state" formulation of quantum theory. **Reviews of Modern Physics**, v. 29, n. 3, p. 463-465, 1957.
- 8 EVERETT III, H. "Relative state" formulation of quantum mechanics. **Reviews of Modern Physics**, v. 29, n. 3, p. 454-462, 1957.
- 9 ZEH, H. D. Toward a quantum theory of observation. **Foundations of Physics**, v. 3, n. 1, p. 109-116, 1973.
- 10 BRASIL, C. A.; CASTRO, L. A. Understanding the pointer states. **European Journal of Physics**, v. 36, n. 6, p. 065024, 2015.
- 11 ZUREK, W. H. Pointer basis of quantum apparatus: into what mixture does the wave packet collapse? **Physical Review D**, v. 24, n. 6, p. 1516-1525, 1981.
- 12 ZUREK, W. H. Environment-induced superselection rules. **Physical Review D**, v. 26, n. 8, p. 1862-1880, 1982.
- 13 UNRUH, W. G.; ZUREK, W. H. Reduction of a wave packet in quantum Brownian motion. **Physical Review D**, v. 40, n. 4, p. 1071-1094, 1989.
- 14 ZUREK, W. H. Decoherence and the transition from quantum to classical. **Physics Today**, v. 44, n. 10, p. 36-44, 1991.
- 15 ZUREK, W. H. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. **Reviews of Modern Physics**, v. 75, n. 3, p. 715-775, 2003.

- 16 ZUREK, W. H. Probabilities from entanglement, Born's rule from envariance. **Physical Review A**, v. 71, n. 5, p. 052105, 2005.
- 17 UNRUH, W. G. Maintaining coherence in quantum computers. **Physical Review A**, v. 51, n. 2, p. 992-997, 1995.
- 18 SHOR, P. W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. **Physical Review A**, v. 52, n. 4, p. R2493-R2496, 1995.
- 19 CALDERBANK, A. R.; SHOR, P. W. Good quantum error-correcting codes exist. **Physical Review A**, v. 54, n. 2, p. 1098-1105, 1996.
- 20 CASTRO, L. A. **Teoria de correção de erros quânticos durante operações lógicas e medidas de diagnóstico de duração finita**. 2012. 145p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.
- 21 BRASIL, C. A.; CASTRO, L. A.; NAPOLITANO, R. D. J. Protecting a quantum state from environmental noise by an incompatible finite-time measurement. **Physical Review A**, v. 84, n. 2, p. 022112, 2011.
- 22 BRASIL, C. A.; CASTRO, L. A.; NAPOLITANO, R. D. J. How much time does a measurement take? **Foundations of Physics**, v. 43, n. 5, p. 642-655, 2013.
- 23 BRASIL, C. A.; CASTRO, L. A.; NAPOLITANO, R. D. J. Efficient finite-time measurements under thermal regimes. **The European Physical Journal Plus**, v. 129, p. 206, 2014.
- 24 CASTRO, L. A.; NAPOLITANO, R. D. J. Error correction in short time steps during the application of quantum gates. **Annals of Physics**, v. 367, p. 199-211, 2016.
- 25 CRESSER, J. D.; BARNETT, S. M.; JEFFERS, J.; PEGG, D. T. Measurement master equation. **Optics Communications**, v. 264, n. 2, p. 352-361, 2006.
- 26 CAVES, C. M.; MILBURN, G. J. Quantum-mechanical model for continuous position measurements. **Physical Review A**, v. 36, n. 12, p. 5543-5555, 1987.
- 27 AHARONOV, Y.; ALBERT, D. Z.; VAIDMAN, L. How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100. **Physical Review Letters**, v. 60, n. 14, p. 1351-1354, 1988.
- 28 AHARONOV, Y.; ALBERT, D. Z.; CASHER, A.; VAIDMAN, L. Surprising quantum effects. **Physics Letters A**, v. 124, n. 4-5, p. 199-203, 1987.
- 29 BRASIL, C. A.; NAPOLITANO, R. D. J. The master equation for the reduced open-system dynamics, including a Lindbladian description of finite-duration measurement. **The European Physical Journal Plus**, v. 126, p. 91, 2011.
- 30 DYSON, F. J. The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman. **Physical Review**, v. 75, n.3, p. 486-502, 1949.
- 31 DYSON, F. J. The S matrix in quantum electrodynamics. **Physical Review**, v. 75, n. 11, p. 1736-1755, 1949.

- 32 SAKURAI, J. J. **Modern quantum mechanics**. Reading: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- 33 MISRA, B.; SUDARSHAN, E. C. G. The Zeno paradox in quantum theory. **Journal of Mathematical Physics**, v. 18, n. 4, p. 756-763, 1977.
- 34 FACCHI, P.; PASCAZIO, S. Quantum Zeno phenomena: pulsed versus continuous measurement. **Fortschritte der Physik**, v. 49, n. 10-11, p. 941-947, 2001.
- 35 MANISCALCO, S.; PIILO, J.; SUOMINEN, K. A. Zeno and anti-Zeno effects for quantum Brownian motion. **Physical Review Letters**, v. 97, n. 13, p. 130402, 2006.
- 36 PAAVOLA, J.; MANISCALCO, S. Decoherence control in different environments. **Physical Review A**, v. 82, n. 1, p. 012114, 2010.
- 37 MENDONÇA, P. E. M. F.; NAPOLITANO, R. D. J. A c-number Volterra equation for the spontaneous decay of two-level atoms. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON QUANTUM ENTANGLEMENT, COMPLEXITY AND PHYSICAL BASIS FOR QUANTUM COMPUTATION, IUPAP, 2002, Rio de Janeiro. **Proceedings...** Rio de Janeiro: CBPF, 2002.
- 38 FANCHINI, F. F.; NAPOLITANO, R. D. J. Numerically-exact solution of the spontaneous-decay Volterra equation including atomic finite-size effects. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON QUANTUM ENTANGLEMENT, COMPLEXITY AND PHYSICAL BASIS FOR QUANTUM COMPUTATION, IUPAP, 2002, Rio de Janeiro. **Proceedings...** Rio de Janeiro: CBPF, 2002.
- 39 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum computation and quantum information**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- 40 TSENG, C. H. et al. Quantum simulation of a three-body-interaction Hamiltonian on an NMR quantum computer. **Physical Review A**, v. 61, n. 1, p. 012302, 1999.
- 41 MEDIDA fraca e espalhamento – parte 2: a hamiltoniana de interação. São Carlos, 2014. Disponível em: <<http://nerdyard.com/medida-fraca-e-espalhamento-parte-2-a-hamiltoniana-de-interacao/>>. Acesso em: 9 set. 2016.
- 42 BULNES, J. D.; OLIVEIRA, I. S. Construction of exact solutions for the Stern-Gerlach effect. **Brazilian Journal of Physics**, v. 31, n. 3, p. 488-495, 2001.
- 43 LAMPORT, L. Buridan's principle. **Foundations of Physics**, v. 42, n. 8, p. 1056-1066, 2012.
- 44 WILCOX, R. W. Exponential operators and parameter differentiation in quantum physics. **Journal of Mathematical Physics**, v. 8, n. 4, p. 962-982, 1967.

APÊNDICE A - Equação de Lindblad aplicada a medidas

Neste apêndice, derivaremos a equação de Lindblad e veremos como ela é adaptada para descrever medidas contínuas. Consideremos um sistema-objeto S acoplado a um medidor M por meio de algum hamiltoniano de interação H_{int} . O sistema completo evolui de acordo com a equação de Liouville-von Neumann (1.6):

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_S + H_{\text{int}} + H_M, \rho(t)], \quad (\text{A.1})$$

onde o hamiltoniano H_S contém termos que atuam apenas sobre o sistema-objeto, enquanto que H_M contém aqueles termos que apenas afetam o aparato de medida.

Queremos obter, a partir de (A.1), uma equação mestra, isto é, uma equação que descreva apenas a evolução de $\rho_S(t)$, eliminando todos aqueles muitos graus de liberdade do medidor.

Suponha que $U(t)$ seja o operador de evolução temporal para o conjunto $H_S + H_{\text{int}} + H_M$. Podemos escrever o estado final do sistema completo da forma:

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t). \quad (\text{A.2})$$

Tomando o traço parcial sobre os estados do medidor numa certa base $|m\rangle$, encontramos o estado final da matriz densidade reduzida do sistema-objeto:

$$\rho_S(t) = \sum_m \langle m| U(t)\rho(0)U^\dagger(t) |m\rangle. \quad (\text{A.3})$$

Suponhamos adicionalmente que, no início, os operadores densidade reduzidos do sistema $\rho_S(0)$ e do medidor $\rho_M(0)$ eram separáveis:

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_M(0). \quad (\text{A.4})$$

Escrevamos $\rho_M(0)$ em termos de uma mistura de estados $|\psi_i\rangle$:

$$\rho_M(0) = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (\text{A.5})$$

onde $\sum_i p_i = 1$.

Neste caso, (A.3) torna-se a POVM:

$$\rho_S(t) = \sum_{m,i} K_{m,i}(t) \rho_S(0) K_{m,i}^\dagger(t), \quad (\text{A.6})$$

onde definimos os operadores de Kraus como:

$$K_{m,i}(t) = \sqrt{p_i} \langle m | U(t) | \psi_i \rangle. \quad (\text{A.7})$$

Os (A.7) claramente satisfazem a seguinte relação:

$$\sum_{m,i} K_{m,i}^\dagger(t) K_{m,i}(t) = \sum_i p_i \langle \psi_i | U^\dagger(t) U(t) | \psi_i \rangle = \mathbb{I}, \quad (\text{A.8})$$

onde $\mathbb{I}$ é a identidade.

É interessante notar que, se quisermos usar (A.6) para intervalos de tempo em sequência, estaremos considerando que a todo instante o sistema-objeto e o medidor são separáveis. Os operadores de Kraus, de certa forma, embutem tal aproximação na dinâmica conjunta do sistema aberto.

Simplifiquemos os operadores de Kraus para apenas um índice i . Neste caso, (A.6) evolui da seguinte forma num curto intervalo de tempo:

$$\rho_S(t + \Delta t) - \rho_S(t) = \sum_i K_i(\Delta t) \rho_S(t) K_i^\dagger(\Delta t) - \rho_S(t). \quad (\text{A.9})$$

Decomponhamos cada operador de Kraus K_i numa base de operadores A_j :

$$K_i(t) = \sum_j k_{i,j}(t) A_j. \quad (\text{A.10})$$

Escolhamos a base $\{A_j\}$ de forma que ela seja ortonormal:

$$\text{Tr} \{ A_i A_j^\dagger \} = \delta_{i,j}, \quad (\text{A.11})$$

e com $A_0 = \mathbb{I}$ sendo a identidade.

Em termos dessa base, podemos escrever qualquer pequena mudança em $\rho_S(t)$ conforme:

$$\begin{aligned} \sum_i K_i(\Delta t) \rho_S(t) K_i^\dagger(\Delta t) &= \rho_S(t) + \Delta t g_{0,0} \rho_S(t) + \Delta t \sum_{j \neq 0} g_{j,0} A_j \rho_S(t) \\ &\quad + \Delta t \sum_{j \neq 0} g_{0,j} \rho_S(t) A_j^\dagger + \Delta t \sum_{j,j' \neq 0} g_{j,j'} A_j \rho_S(t) A_{j'}^\dagger + O(\Delta t^2), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde os $g_{i,j}$ são coeficientes tais que $g_{i,j} = g_{j,i}^*$.

Assim, a equação (A.9) fica, ao dividirmos os dois lados por Δt e tomarmos o limite em que essa diferença temporal vai a zero:

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = g_{0,0} \rho_S(t) + \sum_{j \neq 0} g_{j,0} A_j \rho_S(t) + \sum_{j \neq 0} g_{0,j} \rho_S(t) A_j^\dagger + \sum_{j,j' \neq 0} g_{j,j'} A_j \rho_S(t) A_{j'}^\dagger. \quad (\text{A.13})$$

Tomando o traço dos dois lados de (A.13), encontramos:

$$\text{Tr} \left\{ \left(g_{0,0} + \sum_{j \neq 0} g_{j,0} A_j + \sum_{j \neq 0} g_{0,j} A_j^\dagger + \sum_{j,j' \neq 0} g_{j,j'} A_{j'}^\dagger A_j \right) \rho_S(t) \right\} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Para que (A.14) seja válida para qualquer $\rho_S(t)$, precisamos que

$$g_{0,0} \rho_S(t) = - \sum_{j \neq 0} g_{j,0} \rho_S(t) A_j - \sum_{j \neq 0} g_{0,j} A_j^\dagger \rho_S(t) - \frac{1}{2} \sum_{j,j' \neq 0} g_{j,j'} \left\{ A_{j'}^\dagger A_j, \rho_S(t) \right\}, \quad (\text{A.15})$$

onde as posições dos operadores $\rho_S(t)$ foram escolhidas de forma a manter os dois lados da equação hermitianos.

Definiremos um operador H como:

$$H \equiv i\hbar \sum_{j \neq 0} \left(g_{j,0} A_j - g_{0,j} A_j^\dagger \right). \quad (\text{A.16})$$

Substituindo (A.16) em (A.13), encontramos:

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] + \sum_{j,j' \neq 0} g_{j,j'} A_j \rho_S(t) A_{j'}^\dagger - \frac{1}{2} \sum_{j,j' \neq 0} g_{j,j'} \left\{ A_{j'}^\dagger A_j, \rho_S(t) \right\}. \quad (\text{A.17})$$

Se escolhermos a base $\{A_i\}$ de forma a diagonalizar $g_{j,j'}$, isto é, de forma que $g_{j,j'} = g_{j,j} \delta_{j,j'}$ para $j, j' \neq 0$, encontramos a forma final da equação de Lindblad:

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho_S(t)] + \sum_j g_{j,j} \left\{ A_j \rho_S(t) A_j^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ A_j^\dagger A_j, \rho_S(t) \right\} \right\}, \quad (\text{A.18})$$

onde $g_{j,j}$ é real. O primeiro termo do lado direito é chamado liouvilliano, por ser o mesmo presente na equação de Liouville-von Neumann (1.6), enquanto o segundo, próprio da equação de Lindblad, é chamado lindbladiano.

Para simular uma medida de um operador do grupo de Pauli P_j , propõe-se empregar apenas um operador de Lindblad $A_j = P_j$. Essa escolha é feita para eliminar a contribuição lindbladiana quando o sistema está em um autoestado de P_j , que é o que ocorre após uma medida completa. Como $P_j^2 = 1$ e $P_j^\dagger = P_j$, recuperamos a equação da medida (2.14):

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho_S(t)] + \sum_j g_{j,j} \{ P_j \rho_S(t) P_j - \rho_S(t) \}. \quad (\text{A.19})$$

APÊNDICE B - Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

Dados dois operadores A e B e um escalar η , vamos escrever o produto de um com as exponenciais do outro como:

$$e^{\eta A} B e^{-\eta A} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \eta^n C_n \right), \quad (\text{B.1})$$

onde, igualando potências iguais de η , podemos concluir que os operadores C_n são dados por:

$$C_n = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{(n-m)!m!} A^{n-m} B A^m. \quad (\text{B.2})$$

Tomemos agora o comutador de A com esse operador C_n :

$$[A, C_n] = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{(n-m)!m!} A^{n+1-m} B A^m + \sum_{m=1}^{n+1} \frac{(-1)^m}{(n+1-m)!(m-1)!} A^{n+1-m} B A^m, \quad (\text{B.3})$$

onde empregamos a seguinte identidade para a somatória:

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m f_{m,n-m} = - \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^m f_{m-1,(n+1)-m}. \quad (\text{B.4})$$

Juntando as duas somatórias do lado direito da Eq. (B.3), obtemos:

$$[A, C_n] = \frac{1}{n!} A^{n+1} B + \sum_{m=1}^n (-1)^m \frac{(n+1-m) + m}{(n+1-m)!m!} A^{n+1-m} B A^m + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} B A^{n+1}. \quad (\text{B.5})$$

O primeiro termo do lado direito de Eq. (B.5) é o termo da somatória com $m = 0$, enquanto o terceiro termo é o termo da somatória com $m = n + 1$. Portanto, podemos construir cada C_n iterativamente por meio de comutações do operador anterior da série:

$$[A, C_n] = (n+1)C_{n+1}. \quad (\text{B.6})$$

O valor de C_0 pode ser encontrado tomando-se $\eta = 0$ em Eq. (B.7), o que resulta em $C_0 = B$.

Portanto,

$$e^{\eta A} B e^{-\eta A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \eta^n [A, [\dots, [A, B]]], \quad (\text{B.7})$$

onde, no termo do lado direito, há n comutadores uns dentro dos outros.

APÊNDICE C - Estados coerentes e operadores deslocamento

Um estado coerente $|\alpha\rangle$ é um autovetor do operador destruição a :

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (\text{C.1})$$

Se decompusermos esse estado na base de Fock:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha) |n\rangle, \quad (\text{C.2})$$

os coeficientes $c_n(\alpha)$ podem ser determinados por meio de (C.1):

$$\alpha c_n(\alpha) = \sqrt{n+1} c_{n+1}(\alpha), \quad (\text{C.3})$$

o que, iterando n vezes, dá como resultado:

$$c_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0(\alpha). \quad (\text{C.4})$$

$c_0(\alpha)$ é uma constante de normalização que pode ser determinada se impusermos:

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = |c_0(\alpha)|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |\alpha|^{2n} = |c_0(\alpha)|^2 e^{|\alpha|^2} = 1. \quad (\text{C.5})$$

Portanto, em termos da base de Fock, o estado coerente (C.2) é escrito, a menos de uma fase global:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (\text{C.6})$$

o qual pode ser criado pela aplicação de uma exponencial de $a^\dagger$ sobre o estado de vácuo $|0\rangle$, que é compartilhado pela base de estados coerentes e pela base de Fock:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle. \quad (\text{C.7})$$

Empregando a fórmula de Zassenhaus para operadores A, B cujo comutador seja proporcional à identidade:⁴⁴

$$e^{A-B} = e^A e^{-B} e^{[A,B]/2}, \quad (\text{C.8})$$

podemos identificar $A = \alpha a^\dagger$, $B = \alpha^* a$, de forma que $[A, B] = -|\alpha|^2$, e concluir:

$$e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)} = e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} e^{-|\alpha|^2/2} \quad (\text{C.9})$$

Comparando (C.9) com (C.7), e notando que

$$e^{-\alpha^* a} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^*)^n}{n!} a^n |0\rangle = |0\rangle, \quad (\text{C.10})$$

podemos escrever:

$$D(\alpha) |0\rangle = |\alpha\rangle, \quad (\text{C.11})$$

onde definimos o operador deslocamento $D(\alpha)$ como a exponencial do operador anti-hermitiano $\alpha a^\dagger - \alpha^* a$:

$$D(\alpha) \equiv \exp \{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)\}. \quad (\text{C.12})$$

Notando que o comutador de dois desses operadores ainda é algo proporcional à identidade:

$$[\alpha a^\dagger - \alpha^* a, \beta a^\dagger - \beta^* a] = -(\alpha^* \beta + \alpha \beta^*), \quad (\text{C.13})$$

podemos tomar $A = \alpha a^\dagger - \alpha^* a$ e $B = -(\beta a^\dagger - \beta^* a)$ na fórmula de Zassenhaus (C.8) para escrever:

$$D(\alpha + \beta) = D(\alpha) D(\beta) e^{(\alpha^* \beta - \alpha \beta^*)/2}. \quad (\text{C.14})$$

Aplicando (C.14) no estado de vácuo e usando (C.11), encontramos:

$$|\alpha + \beta\rangle = e^{(\alpha^* \beta - \alpha \beta^*)/2} D(\alpha) |\beta\rangle. \quad (\text{C.15})$$

É possível notar que os (C.6) não são ortogonais entre si:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^* \beta)^n}{n!} = e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2} e^{\alpha^* \beta}. \quad (\text{C.16})$$

Isso afeta a forma de sua relação de completeza:

$$\int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta \, r |re^{i\theta}\rangle \langle re^{i\theta}| = \sum_{m,n=0}^{\infty} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta \, e^{-r^2} e^{i\theta(n-m)} \frac{r^{m+n+1}}{\sqrt{m!n!}} |m\rangle \langle n|, \quad (\text{C.17})$$

onde, separando α em seu módulo r e fase θ , escrevemos $\alpha = re^{i\theta}$ e integramos no plano complexo.

A integral em θ é o mesmo que um delta de Kronecker $2\pi\delta_{m,n}$, enquanto a integral em

r pode ser identificada com a função gama, se fizermos a transformação $x = r^2$:

$$\int_0^\infty dr e^{-r^2} r^{2n+1} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dx e^{-x} x^n = \frac{1}{2} \Gamma(n+1) = \frac{1}{2} n!. \quad (\text{C.18})$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{C}} d^2\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| = \pi \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|, \quad (\text{C.19})$$

e a relação de completeza para os estados coerentes deve ser:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| = \mathbb{I}, \quad (\text{C.20})$$

onde $\mathbb{I}$ é a identidade e a integral é feita por todo o plano complexo $\mathbb{C}$.

Consequentemente, o estado tomado na base de estados coerentes também deve conter o fator π^{-1} . De fato, dado um operador qualquer X :

$$\text{Tr} \{X\} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n| X \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| \right\} |n\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2\alpha \langle\alpha| X |\alpha\rangle. \quad (\text{C.21})$$

APÊNDICE D - Traço para o método do superoperador partido ao meio

Neste apêndice, vamos calcular o traço presente na equação (4.107). Neste caso, é mais simples tomar o traço usando a base de estados coerentes do que pela base de Fock (ver Apêndice C).

Mas, primeiro, notando a forma de $\rho_A(0)$ em (4.3) e a dos superoperadores $\mathcal{K}_\pm(t)$ em (4.80), vejamos que nenhum modo de oscilação do campo bosônico se acopla com o outro, de forma que podemos tomar traços individuais sobre cada um dos k -ésimos modos. Por isso, o traço presente em (4.107) assumirá a forma:

$$\mathrm{Tr}_A \left\{ \prod_{n=1}^N \mathcal{K}_{q_n}(\Delta t) \rho_A(0) \right\} = \prod_k \frac{1}{\zeta_k} \mathrm{Tr}_k \left\{ \prod_{n=1}^N \mathcal{K}_{q_n}^{(k)}(\Delta t) e^{-\hbar\beta\omega_k a_k^\dagger a_k} \right\}, \quad (\text{D.1})$$

onde as funções de partição ζ_k foram definidas em (4.26) e os superoperador $\mathcal{K}_\pm^{(k)}(t)$ são as porções de $\mathcal{K}_\pm(t)$ que atuam sobre o k -ésimo modo de vibração. Isto é, dado um operador qualquer X ,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\pm^{(k)}(t)X \equiv \exp \left\{ -i\omega_k \left[a_k \pm \frac{g_k}{\omega_k} \right]^\dagger \left[a_k \pm \frac{g_k}{\omega_k} \right] t \right\} X \\ \times \exp \left\{ i\omega_k \left[a_k \mp \frac{g_k}{\omega_k} \right]^\dagger \left[a_k \mp \frac{g_k}{\omega_k} \right] t \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Os operadores exponenciais presentes em (D.2) podem ser expressos em termos dos operadores deslocamento (C.12). De fato, dada a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (B.7), podemos escrever:

$$D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha, \quad (\text{D.3})$$

$$D^\dagger(\alpha) a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*. \quad (\text{D.4})$$

Como $D(\alpha)D^\dagger(\alpha) = D(\alpha)D(-\alpha) = \mathbb{I}$ é a identidade, podemos combinar os resultados de (D.3) e de (D.4):

$$D^\dagger(\alpha) a^\dagger a D(\alpha) = (a^\dagger + \alpha^*) (a + \alpha), \quad (\text{D.5})$$

ou até em várias potências:

$$D^\dagger(\alpha) [a^\dagger a]^n D(\alpha) = \left[(a + \alpha)^\dagger (a + \alpha) \right]^n. \quad (\text{D.6})$$

Assim, se aplicarmos esses operadores deslocamento a uma exponencial:

$$D^\dagger(\alpha) e^{\beta a^\dagger a} D(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} D^\dagger(\alpha) [a^\dagger a]^n D(\alpha) = \exp \{ \beta (a + \alpha)^\dagger (a + \alpha) \}. \quad (\text{D.7})$$

Por meio da identidade (D.7), os superoperadores (D.2) podem ser expressos com maior simplicidade por meio de:

$$\mathcal{K}_{\pm}^{(k)}(t) X \equiv D_k^\dagger \left(\pm \frac{g_k}{\omega_k} \right) e^{-i\omega_k a_k^\dagger a_k t} D_k \left(\pm \frac{g_k}{\omega_k} \right) X D_k^\dagger \left(\mp \frac{g_k}{\omega_k} \right) e^{i\omega_k a_k^\dagger a_k t} D_k \left(\mp \frac{g_k}{\omega_k} \right), \quad (\text{D.8})$$

onde os índices k indicam que o operador deslocamento $D_k(\alpha)$ atua somente no k -ésimo modo de vibração do campo bosônico.

Buscamos os elementos de matriz de (D.8) na base dos estados coerentes. De (C.15), sabemos como $D_k(\pm g_k/\omega_k)$ irá afetar um estado coerente qualquer $|\alpha\rangle$:

$$D_k \left(\pm \frac{g_k}{\omega_k} \right) |\alpha\rangle_k = e^{-(g_k^* \alpha - g_k \alpha^*)/2\omega_k} \left| \alpha \pm \frac{g_k}{\omega_k} \right\rangle_k, \quad (\text{D.9})$$

onde o índice k em $|\alpha\rangle_k$ indica que este é um estado coerente do k -ésimo modo do campo.

Além disso, empregando (C.6), podemos ver o efeito de uma exponencial como $e^{i\omega_k a_k^\dagger a_k t}$ num estado $|\alpha\rangle$:

$$e^{i\omega_k a_k^\dagger a_k t} |\alpha\rangle_k = |e^{i\omega_k t} \alpha\rangle_k. \quad (\text{D.10})$$

Por isso, a sequência inteira de operadores do lado direito de (D.8) atua sobre um estado coerente conforme:

$$\begin{aligned} D_k^\dagger \left(\mp \frac{g_k}{\omega_k} \right) e^{i\omega_k a_k^\dagger a_k t} D_k \left(\mp \frac{g_k}{\omega_k} \right) |\alpha\rangle_k &= \exp \left\{ \pm \frac{(1 - e^{i\omega_k t}) g_k^* \alpha - (1 - e^{-i\omega_k t}) g_k \alpha^*}{2\omega_k} \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}}{2} \left| \frac{g_k}{\omega_k} \right|^2 \right\} \left| e^{i\omega_k t} \alpha \mp (e^{i\omega_k t} - 1) \frac{g_k}{\omega_k} \right\rangle_k. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Tomando o hermitiano conjugado de (D.11), encontramos o que ocorre quando aplicamos um bra com um estado coerente do outro lado de (D.8):

$$\begin{aligned} \langle \alpha' |_k D_k^\dagger \left(\pm \frac{g_k}{\omega_k} \right) e^{-i\omega_k a_k^\dagger a_k t} D_k \left(\pm \frac{g_k}{\omega_k} \right) = \exp \left\{ \pm \frac{(1 - e^{i\omega_k t}) g_k^* \alpha' - (1 - e^{-i\omega_k t}) g_k \alpha'^*}{2\omega_k} \right\} \\ \times \exp \left\{ -\frac{e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}}{2} \left| \frac{g_k}{\omega_k} \right|^2 \right\} \left\langle e^{i\omega_k t} \alpha' \pm (e^{i\omega_k t} - 1) \frac{g_k}{\omega_k} \right|_k. \end{aligned} \quad (D.12)$$

Aplicando (D.11) e (D.12), encontramos o elemento de matriz de (D.8):

$$\begin{aligned} \langle \alpha' |_k \mathcal{K}_\pm^{(k)}(t) X |\alpha\rangle_k = \exp \left\{ \pm \frac{(1 - e^{i\omega_k t}) g_k^* (\alpha + \alpha') - (1 - e^{-i\omega_k t}) g_k (\alpha + \alpha')^*}{2\omega_k} \right\} \\ \times \left\langle e^{i\omega_k t} \alpha' \pm (e^{i\omega_k t} - 1) \frac{g_k}{\omega_k} \right|_k X \left| e^{i\omega_k t} \alpha \mp (e^{i\omega_k t} - 1) \frac{g_k}{\omega_k} \right\rangle_k. \end{aligned} \quad (D.13)$$

Se repetirmos o processo de (D.13) duas vezes, com $\alpha' = \alpha$, encontramos:

$$\begin{aligned} \langle \alpha |_k \mathcal{K}_{q_1}^{(k)}(t) \mathcal{K}_{q_2}^{(k)}(t) X |\alpha\rangle_k = \exp \left\{ q_1 \frac{(1 - e^{i\omega_k t}) g_k^* \alpha - (1 - e^{-i\omega_k t}) g_k \alpha^*}{\omega_k} \right\} \\ \times \exp \left\{ q_2 \frac{(1 - e^{i\omega_k t}) g_k^* e^{i\omega_k t} \alpha - (1 - e^{-i\omega_k t}) g_k e^{-i\omega_k t} \alpha^*}{\omega_k} \right\} \\ \times \left\langle e^{2i\omega_k t} \alpha + q_1 e^{i\omega_k t} (e^{i\omega_k t} - 1) \frac{g_k}{\omega_k} + q_2 (e^{i\omega_k t} - 1) \frac{g_k}{\omega_k} \right|_k X \\ \left| e^{2i\omega_k t} \alpha - q_1 e^{i\omega_k t} (e^{i\omega_k t} - 1) \frac{g_k}{\omega_k} - q_2 (e^{i\omega_k t} - 1) \frac{g_k}{\omega_k} \right\rangle_k. \end{aligned} \quad (D.14)$$

Iterando o processo de (D.13) N vezes, cada uma com um passo temporal de Δt , substituindo o operador X por outro $\mathcal{K}_\pm X$ a cada iteração, obtemos o elemento de matriz diagonal que precisamos integrar para encontrar os traços presentes em (D.1):

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \prod_{n=1}^N \mathcal{K}_{q_n}^{(k)}(\Delta t) e^{-\hbar\beta\omega_k a_k^\dagger a_k} |\alpha\rangle = \exp \left\{ \sum_{n=1}^N q_n \frac{(1 - e^{i\omega_k \Delta t}) g_k^* e^{i(n-1)\omega_k \Delta t} \alpha}{\omega_k} \right\} \\ \times \exp \left\{ -\sum_{n=1}^N q_n \frac{(1 - e^{-i\omega_k \Delta t}) g_k e^{-i(n-1)\omega_k \Delta t} \alpha^*}{\omega_k} \right\} \\ \left\langle e^{i\omega_k t} \left[\alpha + \sum_{n=1}^N q_n e^{-in\omega_k \Delta t} (e^{i\omega_k \Delta t} - 1) \frac{g_k}{\omega_k} \right] \right|_k e^{-\hbar\beta\omega_k a_k^\dagger a_k} \\ \left| e^{i\omega_k t} \left[\alpha - \sum_{n=1}^N q_n e^{-in\omega_k \Delta t} (e^{i\omega_k \Delta t} - 1) \frac{g_k}{\omega_k} \right] \right\rangle_k. \end{aligned} \quad (D.15)$$

Para simplificar as expressões, definamos uma nova função:

$$G_N(\Delta t) \equiv \sum_{n=1}^N q_n e^{-in\omega_k \Delta t} (e^{i\omega_k \Delta t} - 1) \frac{g_k}{\omega_k}. \quad (\text{D.16})$$

Substituindo (D.16), (D.15) torna-se:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \prod_{n=1}^N \mathcal{K}_{q_n}^{(k)}(\Delta t) e^{-\hbar\beta\omega_k a_k^\dagger a_k} | \alpha \rangle &= \exp \{ G_N^*(\Delta t) \alpha - G_N(\Delta t) \alpha^* \} \\ &\times \langle e^{i\omega_k t} [\alpha + G_N(\Delta t)] |_k e^{-\hbar\beta\omega_k a_k^\dagger a_k} | e^{i\omega_k t} [\alpha - G_N(\Delta t)] \rangle_k. \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

A atuação do operador $e^{-\hbar\beta\omega_k a_k^\dagger a_k}$ sobre o estado coerente da direita pode ser obtida de (C.6):

$$e^{-\hbar\beta\omega_k a_k^\dagger a_k} | \alpha \rangle = \exp \left\{ \frac{1}{2} e^{-2\hbar\beta\omega_k} |\alpha|^2 - \frac{1}{2} |\alpha|^2 \right\} | e^{-\hbar\beta\omega_k} \alpha \rangle. \quad (\text{D.18})$$

Ou seja, no estado coerente presente em (D.17):

$$\begin{aligned} e^{-\hbar\beta\omega_k a_k^\dagger a_k} | e^{i\omega_k t} [\alpha - G_N(\Delta t)] \rangle_k &= \exp \left\{ \frac{e^{-2\hbar\beta\omega_k} - 1}{2} |\alpha - G_N(\Delta t)|^2 \right\} \\ &\times | e^{-\hbar\beta\omega_k} e^{i\omega_k t} [\alpha - G_N(\Delta t)] \rangle_k. \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Substituindo (D.19) em (D.17) e usando a regra do produto interno dos estados coerentes (C.16), encontramos:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \prod_{n=1}^N \mathcal{K}_{q_n}^{(k)}(\Delta t) e^{-\hbar\beta\omega_k a_k^\dagger a_k} | \alpha \rangle &= \exp \{ G_N^*(\Delta t) \alpha - G_N(\Delta t) \alpha^* \} \\ &\times \exp \left\{ \frac{e^{-2\hbar\beta\omega_k} - 1}{2} |\alpha - G_N(\Delta t)|^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} |\alpha + G_N(\Delta t)|^2 \right\} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} |e^{-\hbar\beta\omega_k} \alpha - e^{-\hbar\beta\omega_k} G_N(\Delta t)|^2 \right\} \\ &\times \exp \{ e^{-\beta\hbar\omega_k} [\alpha + G_N(\Delta t)]^* [\alpha - G_N(\Delta t)] \}, \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

que pode ser simplificado para:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha | \prod_{n=1}^N \mathcal{K}_{q_n}^{(k)}(\Delta t) e^{-\hbar\beta\omega_k a_k^\dagger a_k} | \alpha \rangle &= \exp \{ G_N^*(\Delta t) \alpha - G_N(\Delta t) \alpha^* \} \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} |\alpha + G_N(\Delta t)|^2 - \frac{1}{2} |\alpha - G_N(\Delta t)|^2 \right\} \\
&\times \exp \{ e^{-\beta\hbar\omega_k} [\alpha + G_N(\Delta t)]^* [\alpha - G_N(\Delta t)] \}, \quad (\text{D.21})
\end{aligned}$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha | \prod_{n=1}^N \mathcal{K}_{q_n}^{(k)}(\Delta t) e^{-\hbar\beta\omega_k a_k^\dagger a_k} | \alpha \rangle &= \exp \{ -(1 - e^{-\beta\hbar\omega_k}) |\alpha|^2 \} \exp \{ -(1 + e^{-\beta\hbar\omega_k}) |G_N(\Delta t)|^2 \} \\
&\times \exp \{ (1 + e^{-\beta\hbar\omega_k}) [G_N^*(\Delta t) \alpha - G_N(\Delta t) \alpha^*] \}. \quad (\text{D.22})
\end{aligned}$$

Para tomarmos o traço no k -ésimo modo do campo, conforme descrito em (D.1), precisamos ainda integrar sobre o plano complexo e dividir por π . Vamos escrever $\alpha = x + iy$, onde x e y são números reais, de forma que a integral sobre o plano complexo seja uma integral em x e y de menos infinito a mais infinito:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_k \left\{ \prod_{n=1}^N \mathcal{K}_{q_n}^{(k)}(\Delta t) e^{-\hbar\beta\omega_k a_k^\dagger a_k} \right\} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \{ -(1 + e^{-\beta\hbar\omega_k}) |G_N(\Delta t)|^2 \} \\
&\times \exp \{ (1 + e^{-\beta\hbar\omega_k}) [G_N^*(\Delta t) - G_N(\Delta t)] x \} \exp \{ (1 + e^{-\beta\hbar\omega_k}) [G_N^*(\Delta t) + G_N(\Delta t)] iy \} \\
&\times \exp \{ -(1 - e^{-\beta\hbar\omega_k}) x^2 \} \exp \{ -(1 - e^{-\beta\hbar\omega_k}) y^2 \}. \quad (\text{D.23})
\end{aligned}$$

Podemos ver que as integrais em x e y são gaussianas:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_k \left\{ \prod_{n=1}^N \mathcal{K}_{q_n}^{(k)}(\Delta t) e^{-\hbar\beta\omega_k a_k^\dagger a_k} \right\} &= \frac{1}{\pi} \exp \{ -(1 + e^{-\beta\hbar\omega_k}) |G_N(\Delta t)|^2 \} \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \{ -(1 - e^{-\beta\hbar\omega_k}) x^2 \} \exp \{ -2i(1 + e^{-\beta\hbar\omega_k}) \text{Im} \{ G_N(\Delta t) \} x \} \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \{ -(1 - e^{-\beta\hbar\omega_k}) y^2 \} \exp \{ 2i(1 + e^{-\beta\hbar\omega_k}) \text{Re} \{ G_N(\Delta t) \} y \}. \quad (\text{D.24})
\end{aligned}$$

Definindo os escalares c e d tais que:

$$c \equiv (1 - e^{-\beta\hbar\omega_k}), \quad (\text{D.25})$$

$$d \equiv \frac{1 + e^{-\beta\hbar\omega_k}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_k}} G_N(\Delta t), \quad (\text{D.26})$$

podemos reescrever (D.24) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_k \left\{ \prod_{n=1}^N \mathcal{K}_{q_n}^{(k)}(\Delta t) e^{-\hbar\beta\omega_k a_k^\dagger a_k} \right\} &= \frac{1}{\pi} \exp \left\{ -(1 + e^{-\beta\hbar\omega_k}) |G_N(\Delta t)|^2 \right\} \\ &\times e^{-c(\text{Re}^2\{d\} + \text{Im}^2\{d\})} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-c(x + i\text{Im}\{d\})^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-c(y - i\text{Re}\{d\})^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

As integrais em (D.27) resultam cada uma $\sqrt{\pi/c}$, enquanto a exponencial $e^{-c(\text{Re}^2\{d\} + \text{Im}^2\{d\})}$ é justamente:

$$e^{-c(\text{Re}^2\{d\} + \text{Im}^2\{d\})} = e^{-c|d|^2} = \exp \left\{ -\frac{(1 + e^{-\beta\hbar\omega_k})^2}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_k}} |G_N(\Delta t)|^2 \right\} \quad (\text{D.28})$$

Substituindo (D.28) em (D.27):

$$\text{Tr}_k \left\{ \prod_{n=1}^N \mathcal{K}_{q_n}^{(k)}(\Delta t) e^{-\hbar\beta\omega_k a_k^\dagger a_k} \right\} = \frac{1}{c} \exp \left\{ -2 \frac{1 + e^{-\beta\hbar\omega_k}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_k}} |G_N(\Delta t)|^2 \right\}. \quad (\text{D.29})$$

Usando o fato que c é o inverso de ζ_k (4.39), e também a relação (4.58), e a definição (D.16) obtemos, em (D.1),

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A \left\{ \prod_{n=1}^N \mathcal{K}_{q_n}(\Delta t) \rho_A(0) \right\} &= \prod_k \exp \left\{ -2 \coth \left(\frac{\hbar\beta\omega_k}{2} \right) \right. \\ &\times \left. \left| \sum_{n=1}^N q_n e^{-in\omega_k \Delta t} (e^{i\omega_k \Delta t} - 1) \frac{g_k}{\omega_k} \right|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

Tomando também o limite do contínuo para as frequências e substituindo a densidade espectral $J(\omega)$ (2.21), obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A \left\{ \prod_{n=1}^N \mathcal{K}_{q_n}(\Delta t) \rho_A(0) \right\} &= \exp \left\{ -4 \sum_{m,n=1}^N q_m q_n \int_0^\infty d\omega \coth \left(\frac{\hbar\beta\omega}{2} \right) \frac{J(\omega)}{\omega^2} \right. \\ &\times \left. e^{-i(m-n)\omega\Delta t} [\cos(\omega\Delta t) - 1] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

APÊNDICE E - Expansão da simulação até quinta ordem

Neste apêndice, veremos como expandir até quinta ordem no tempo, em termos de operadores de evolução temporal dos hamiltonianos $H_{2,3}$ e $H_{3,4}$, a evolução temporal devida ao hamiltoniano $H_{2,3,4}$ definido em (6.95) como:

$$H_{2,3,4} = -\frac{i}{\hbar\omega_0} H_{2,3} H_{3,4} = \frac{i}{\hbar\omega_0} H_{3,4} H_{2,3}. \quad (\text{E.1})$$

Para isso, primeiro expandiremos um operador de evolução temporal de um hamiltoniano qualquer H até quinta ordem em Δt :

$$e^{\pm iH\Delta t/\hbar} = 1 \pm \frac{i\Delta t}{\hbar} H - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^2 H^2 \mp \frac{i}{6} \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^3 H^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^4 H^4 \pm \frac{i}{120} \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^5 H^5 + O(\Delta t^6). \quad (\text{E.2})$$

Se aplicarmos duas evoluções seguidas de $H_{2,3}$ e $H_{3,4}$, usando (E.2) encontraremos o seguinte:

$$\begin{aligned} e^{\pm iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{\pm iH_{3,4}\Delta t/\hbar} &= 1 \pm \frac{i\Delta t}{\hbar} (H_{2,3} + H_{3,4}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^2 (H_{2,3}^2 + H_{3,4}^2 + 2H_{2,3}H_{3,4}) \\ &\quad \mp \frac{i}{6} \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^3 (H_{2,3}^3 + H_{3,4}^3 + 3H_{2,3}^2H_{3,4} + 3H_{2,3}H_{3,4}^2) \\ &\quad + \frac{1}{24} \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^4 (H_{2,3}^4 + H_{3,4}^4 + 4H_{2,3}^3H_{3,4} + 4H_{2,3}H_{3,4}^3 + 6H_{2,3}^2H_{3,4}^2) \\ &\quad \pm \frac{i}{120} \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^5 (H_{2,3}^5 + H_{3,4}^5 + 5H_{2,3}^4H_{3,4} + 5H_{2,3}^2H_{3,4}^2 + 10H_{2,3}^3H_{3,4} + 10H_{2,3}H_{3,4}^3) \\ &\quad + O(\Delta t^6). \quad (\text{E.3}) \end{aligned}$$

Usando (6.83), podemos substituir os quadrados dos operadores em (E.3) por $(\hbar\omega_0)^2$:

$$\begin{aligned} e^{\pm iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{\pm iH_{3,4}\Delta t/\hbar} &= 1 \pm \frac{i\Delta t}{\hbar} (H_{2,3} + H_{3,4}) - \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^2 (\hbar^2\omega_0^2 + H_{2,3}H_{3,4}) \\ &\quad \mp \frac{2i}{3} \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^3 (\hbar\omega_0)^2 (H_{2,3} + H_{3,4}) + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^4 (\hbar\omega_0)^2 (\hbar^2\omega_0^2 + H_{2,3}H_{3,4}) \\ &\quad \pm \frac{i}{15} \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^5 (\hbar\omega_0)^4 (H_{2,3} + H_{3,4}) + O(\Delta t^6). \quad (\text{E.4}) \end{aligned}$$

Podemos usar ainda (E.1) para concluir que $H_{2,3}$ e $H_{3,4}$ anti-comutam e derivar as seguintes identidades:

$$(H_{2,3} + H_{3,4})(H_{2,3} + H_{3,4}) = 2\hbar^2\omega_0^2, \quad (\text{E.5})$$

$$(H_{2,3} + H_{3,4})(\hbar^2\omega_0^2 + H_{2,3}H_{3,4}) = 2\hbar^2\omega_0^2 H_{3,4}, \quad (\text{E.6})$$

$$(\hbar^2\omega_0^2 + H_{2,3}H_{3,4})(H_{2,3} + H_{3,4}) = 2\hbar^2\omega_0^2 H_{2,3}, \quad (\text{E.7})$$

$$(\hbar^2\omega_0^2 + H_{2,3}H_{3,4})(\hbar^2\omega_0^2 + H_{2,3}H_{3,4}) = 2\hbar^2\omega_0^2 H_{2,3}H_{3,4}. \quad (\text{E.8})$$

Empregando a expansão (E.4) e as identidades (E.5), (E.6), (E.7) e (E.8), podemos escrever o seguinte produto de exponenciais presente em (6.96) também até quinta ordem no tempo:

$$\begin{aligned} e^{iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{iH_{3,4}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{3,4}\Delta t/\hbar} &= 1 + \left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)^2 \{2\hbar^2\omega_0^2 - 2(\hbar^2\omega_0^2 + H_{2,3}H_{3,4})\} \\ + i \left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)^3 \{2\hbar^2\omega_0^2 (H_{2,3} - H_{3,4})\} &+ \frac{2}{3} (\hbar\omega_0)^2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)^4 \{(\hbar^2\omega_0^2 + H_{2,3}H_{3,4}) - 4(\hbar\omega_0)^2 + 3H_{2,3}H_{3,4}\} \\ + \frac{2i}{3} (\hbar\omega_0)^4 \left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)^5 \{H_{3,4} - H_{2,3} + 2H_{3,4} - 2H_{2,3}\} &+ O(\Delta t^6), \quad (\text{E.9}) \end{aligned}$$

que pode ser simplificado para:

$$\begin{aligned} e^{iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{iH_{3,4}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{3,4}\Delta t/\hbar} &= 1 - 2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)^2 (H_{2,3}H_{3,4}) \\ + i \left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)^3 \{2\hbar^2\omega_0^2 (H_{2,3} - H_{3,4})\} &+ \frac{2}{3} (\hbar\omega_0)^2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)^4 \{4H_{2,3}H_{3,4} - 3(\hbar\omega_0)^2\} \\ + 2i (\hbar\omega_0)^4 \left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)^5 (H_{3,4} - H_{2,3}) &+ O(\Delta t^6). \quad (\text{E.10}) \end{aligned}$$

Também podemos expandir até quinta ordem estes dois termos presentes em (6.96):

$$e^{2iH_{3,4}\omega_0^2(\Delta t)^3/\hbar} e^{-2iH_{2,3}\omega_0^2(\Delta t)^3/\hbar} = 1 + 2i(\hbar\omega_0)^2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)^3 (H_{3,4} - H_{2,3}) + O(\Delta t^6). \quad (\text{E.11})$$

Se usarmos (E.10) em conjunto com (E.11), podemos calcular toda a (6.96) até quinta ordem:

$$\begin{aligned}
& e^{2iH_{3,4}\omega_0^2(\Delta t)^3/\hbar} e^{-2iH_{2,3}\omega_0^2(\Delta t)^3/\hbar} e^{iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{iH_{3,4}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{3,4}\Delta t/\hbar} = \\
& 1 - 2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^2 (H_{2,3}H_{3,4}) + \frac{2}{3} (\hbar\omega_0)^2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^4 \{4H_{2,3}H_{3,4} - 3(\hbar\omega_0)^2\} \\
& + 2i (\hbar\omega_0)^4 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^5 \{(H_{3,4} - H_{2,3}) + 2(H_{2,3} + H_{3,4})\} + O(\Delta t^6). \quad (E.12)
\end{aligned}$$

Os termos de quinta ordem podem ser eliminados do lado direito de (E.12) multiplicando os dois lados por:

$$e^{-6i(\omega_0\Delta t)^4 H_{3,4}\Delta t/\hbar} e^{-2i(\omega_0\Delta t)^4 H_{2,3}\Delta t/\hbar} = 1 - 2i(\omega_0\Delta t)^4 \frac{\Delta t}{\hbar} (3H_{3,4} + H_{2,3}), \quad (E.13)$$

obtendo:

$$\begin{aligned}
& e^{-6i(\omega_0\Delta t)^4 H_{3,4}\Delta t/\hbar} e^{-2i(\omega_0\Delta t)^4 H_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{2iH_{3,4}\omega_0^2(\Delta t)^3/\hbar} e^{-2iH_{2,3}\omega_0^2(\Delta t)^3/\hbar} \\
& \times e^{iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{iH_{3,4}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{3,4}\Delta t/\hbar} = 1 - 2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^2 (H_{2,3}H_{3,4}) \\
& + \frac{2}{3} (\hbar\omega_0)^2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^4 \{4H_{2,3}H_{3,4} - 3(\hbar\omega_0)^2\} + O(\Delta t^6). \quad (E.14)
\end{aligned}$$

Reconhecendo a expansão da seguinte exponencial até quinta ordem:

$$\begin{aligned}
& \exp \left\{ \left[-2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^2 + \frac{8}{3} (\hbar\omega_0)^2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^4 \right] i\hbar\omega_0 H_{2,3,4} \right\} = 1 - 2i\hbar\omega_0 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^2 H_{2,3,4} \\
& + \frac{8}{3} i (\hbar\omega_0)^3 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^4 H_{2,3,4} - 2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^4 (\hbar\omega_0)^4 + O(\Delta t^6), \quad (E.15)
\end{aligned}$$

temos a seguinte aproximação do operador evolução temporal até quinta ordem em Δt :

$$\begin{aligned}
& \exp \left\{ \left[-2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^2 + \frac{8}{3} (\hbar\omega_0)^2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^4 \right] i\hbar\omega_0 H_{2,3,4} \right\} = e^{-6i(\omega_0\Delta t)^4 H_{3,4}\Delta t/\hbar} e^{-2i(\omega_0\Delta t)^4 H_{2,3}\Delta t/\hbar} \\
& \times e^{2iH_{3,4}\omega_0^2(\Delta t)^3/\hbar} e^{-2iH_{2,3}\omega_0^2(\Delta t)^3/\hbar} e^{iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{iH_{3,4}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{3,4}\Delta t/\hbar} + O(\Delta t^6), \quad (E.16)
\end{aligned}$$

ou, se quisermos uma exponencial positiva, tomamos o hermitiano conjugado:

$$\exp \left\{ \left[2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^2 - \frac{8}{3} (\hbar \omega_0)^2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^4 \right] i \hbar \omega_0 H_{2,3,4} \right\} = e^{iH_{3,4}\Delta t/\hbar} e^{iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{3,4}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{2,3}\Delta t/\hbar} \\ \times e^{2iH_{2,3}\omega_0^2(\Delta t)^3} e^{-2iH_{3,4}\omega_0^2(\Delta t)^3} e^{2i(\omega_0\Delta t)^4 H_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{6i(\omega_0\Delta t)^4 H_{3,4}\Delta t/\hbar} + O(\Delta t^6). \quad (\text{E.17})$$

Como $H_{2,3}H_{3,4} = -H_{3,4}H_{2,3}$ podemos trocar os índices $H_{2,3}$ por $H_{3,4}$, desde que modifiquemos o sinal de um dos hamiltonianos:

$$\exp \left\{ \left[2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^2 - \frac{8}{3} (\hbar \omega_0)^2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right)^4 \right] i \hbar \omega_0 H_{2,3,4} \right\} = e^{iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{3,4}\Delta t/\hbar} e^{-iH_{2,3}\Delta t/\hbar} e^{iH_{3,4}\Delta t/\hbar} \\ \times e^{-2iH_{3,4}\omega_0^2(\Delta t)^3} e^{-2iH_{2,3}\omega_0^2(\Delta t)^3} e^{-2i(\omega_0\Delta t)^4 H_{3,4}\Delta t/\hbar} e^{6i(\omega_0\Delta t)^4 H_{2,3}\Delta t/\hbar} + O(\Delta t^6), \quad (\text{E.18})$$

que é, até quinta ordem, a equação (17) do artigo que publicamos,²⁴ e a sequência que empregamos para simular a porta CNOT.

APÊNDICE F - Listagem de código para figuras da seção 6.2

Simulação de σ_x

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>

typedef struct
{
    long double Re, Im;
} complex;

/* Aplica uma exponencial de sigma_{2,y} sigma_{3,z}
sobre os qubits
*/

void expY23Z (complex *Qbits, long double Dt)
{
    complex TempQ[8];
    int i;

    for (i=0; i<8; i++)
    { TempQ[i].Re= Qbits[i].Re; TempQ[i].Im= Qbits[i].Im; };

    Qbits[0].Re= cos(Dt)*TempQ[0].Re + sin(Dt)*TempQ[2].Re;
    Qbits[0].Im= cos(Dt)*TempQ[0].Im + sin(Dt)*TempQ[2].Im;

    Qbits[1].Re= cos(Dt)*TempQ[1].Re + sin(Dt)*TempQ[3].Re;
    Qbits[1].Im= cos(Dt)*TempQ[1].Im + sin(Dt)*TempQ[3].Im;

    Qbits[2].Re= cos(Dt)*TempQ[2].Re - sin(Dt)*TempQ[0].Re;
    Qbits[2].Im= cos(Dt)*TempQ[2].Im - sin(Dt)*TempQ[0].Im;

    Qbits[3].Re= cos(Dt)*TempQ[3].Re - sin(Dt)*TempQ[1].Re;
```

```

    Qbits[3].Im= cos(Dt)*TempQ[3].Im - sin(Dt)*TempQ[1].Im;

    Qbits[4].Re= cos(Dt)*TempQ[4].Re - sin(Dt)*TempQ[6].Re;
    Qbits[4].Im= cos(Dt)*TempQ[4].Im - sin(Dt)*TempQ[6].Im;

    Qbits[5].Re= cos(Dt)*TempQ[5].Re - sin(Dt)*TempQ[7].Re;
    Qbits[5].Im= cos(Dt)*TempQ[5].Im - sin(Dt)*TempQ[7].Im;

    Qbits[6].Re= cos(Dt)*TempQ[6].Re + sin(Dt)*TempQ[4].Re;
    Qbits[6].Im= cos(Dt)*TempQ[6].Im + sin(Dt)*TempQ[4].Im;

    Qbits[7].Re= cos(Dt)*TempQ[7].Re + sin(Dt)*TempQ[5].Re;
    Qbits[7].Im= cos(Dt)*TempQ[7].Im + sin(Dt)*TempQ[5].Im;

    return;
}

/* Aplica uma exponencial de sigma_{1,z} sigma_{2,x}
sobre os qubits
*/

void expZ1X2 (complex *Qbits, long double Dt)
{
    complex TempQ[8];
    int i;

    for (i=0; i<8; i++) { TempQ[i].Re= Qbits[i].Re; TempQ[i].Im= Qbits[i].Im; };

    Qbits[0].Re= cos(Dt)*TempQ[0].Re - sin(Dt)*TempQ[2].Im;
    Qbits[0].Im= cos(Dt)*TempQ[0].Im + sin(Dt)*TempQ[2].Re;

    Qbits[1].Re= cos(Dt)*TempQ[1].Re + sin(Dt)*TempQ[3].Im;
    Qbits[1].Im= cos(Dt)*TempQ[1].Im - sin(Dt)*TempQ[3].Re;

    Qbits[2].Re= cos(Dt)*TempQ[2].Re - sin(Dt)*TempQ[0].Im;
    Qbits[2].Im= cos(Dt)*TempQ[2].Im + sin(Dt)*TempQ[0].Re;

    Qbits[3].Re= cos(Dt)*TempQ[3].Re + sin(Dt)*TempQ[1].Im;
    Qbits[3].Im= cos(Dt)*TempQ[3].Im - sin(Dt)*TempQ[1].Re;

```

```

Qbits[4].Re= cos(Dt)*TempQ[4].Re - sin(Dt)*TempQ[6].Im;
Qbits[4].Im= cos(Dt)*TempQ[4].Im + sin(Dt)*TempQ[6].Re;

Qbits[5].Re= cos(Dt)*TempQ[5].Re + sin(Dt)*TempQ[7].Im;
Qbits[5].Im= cos(Dt)*TempQ[5].Im - sin(Dt)*TempQ[7].Re;

Qbits[6].Re= cos(Dt)*TempQ[6].Re - sin(Dt)*TempQ[4].Im;
Qbits[6].Im= cos(Dt)*TempQ[6].Im + sin(Dt)*TempQ[4].Re;

Qbits[7].Re= cos(Dt)*TempQ[7].Re + sin(Dt)*TempQ[5].Im;
Qbits[7].Im= cos(Dt)*TempQ[7].Im - sin(Dt)*TempQ[5].Re;

return;
}

int main ( int argc, char **argv)
{
    int i,N,j, thirdOrder, bitValue;
    complex cFid, Qbits[8], Final[8];
    long double t, Dt, Fidelity;

    /* o tempo de duração da porta lógica é pi/2 */

    t= acos(0.);

    /* este programa recebe dois argumentos:
    o valor inicial do qubit lógico (0 ou 1);
    se devemos aplicar a correção de 3a. ordem (1 para sim, 0 para não)
    */

    if (argc<3) return 0;

    if ( atoi(argv[1]) ) bitValue=1; else bitValue= 0;
    if ( atoi(argv[2]) ) thirdOrder=1; else thirdOrder= 0;

    /* Imprime cabeçalho para identificar dados */
    printf ("# Simulação SigmaX com estado inicial ");
    printf("%d e 3a. ordem  %d\n",bitValue,thirdOrder);

```

```

printf ("# N \t Fidelidade \n");

/* Amplia o número de passos progressivamente,
partindo de N=2 e indo até N=1000
*/

for (N=2; N<=1000; N+=2)
{

/* prepara condição inicial |0>_L */
for (i=0; i<8; i++) { Qbits[i].Re=1./sqrt(8.) ; Qbits[i].Im=0.; };

/* muda o valor do qubit caso argumento seja 1 */
if ( bitValue )
{
Qbits[1].Re*= -1.;
Qbits[2].Re*= -1.;
Qbits[4].Re*= -1.;
Qbits[7].Re*= -1.;
};

/* prepara estado final ideal (estado inicial flipado) */
for (i=0; i<8; i++) {Final[i].Re=Qbits[i].Re; Final[i].Im=Qbits[i].Im;}
Final[1].Re*= -1.;
Final[2].Re*= -1.;
Final[4].Re*= -1.;
Final[7].Re*= -1.;

/* calcula tempo de duração dos passos pela expressão  $t=N*Dt^2$ 
(estamos usando  $\omega_0=1$ )
*/

Dt= sqrt(0.5*t/N);

/* Aplica passos */

for (j=0; j<N; j++)
{

```

```

    expY23Z (Qbits, -Dt);
    expZ1X2 (Qbits, -Dt);
    expY23Z (Qbits, Dt);
    expZ1X2 (Qbits, Dt);
    if (thirdOrder) {
expZ1X2(Qbits,-2.*Dt*Dt*Dt);
expY23Z(Qbits,2.*Dt*Dt*Dt);
};
};

/* Calcula fidelidade */
cFid.Re= 0.;
cFid.Im= 0.;
for (i=0; i<8; i++)
{
cFid.Re+= Final[i].Re*Qbits[i].Re+Final[i].Im*Qbits[i].Im;
cFid.Im+= Final[i].Im*Qbits[i].Re-Final[i].Re*Qbits[i].Im;
}
Fidelity= cFid.Re*cFid.Re + cFid.Im*cFid.Im;

/* Imprime resultados */

printf ("%d\t%1.10Lf\n",N,1.- (long double) sqrt(Fidelity));

};
return 0;
}

```

Simulação da porta CNOT

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

int bit1Value, bit2Value;

```

```

typedef struct
{
    long double Re, Im;
} complex;

/* aplica a exponencial de sigma_(y,5) sigma_(z,6) */

void expY5Z6 (complex *Qbits, long double Dt)
{
    complex TempQ[64];
    int i;
    for (i=0; i<64; i++)
    { TempQ[i].Re= Qbits[i].Re; TempQ[i].Im= Qbits[i].Im; };

    for (i=0; i<64; i++)
    {
        Qbits[i].Re=
        cos(Dt)*TempQ[i].Re + pow(-1,i)*pow(-1,i>>1)*sin(Dt)*TempQ[i^2].Re;
        Qbits[i].Im=
        cos(Dt)*TempQ[i].Im + pow(-1,i)*pow(-1,i>>1)*sin(Dt)*TempQ[i^2].Im;
    };

    return;
}

/* Aplica a exponencial de sigma_(z,4) sigma_(x,5) */

void expZ4X5 (complex *Qbits, long double Dt)
{
    complex TempQ[64];
    int i;

    for (i=0; i<64; i++)
    { TempQ[i].Re= Qbits[i].Re; TempQ[i].Im= Qbits[i].Im; };

    for (i=0; i<64; i++ )
    {
        Qbits[i].Re=
        cos(Dt)*TempQ[i].Re - pow(-1.,i>>2)* sin(Dt)*TempQ[i^2].Im;

```

```

    Qbits[i].Im=
    cos(Dt)*TempQ[i].Im + pow(-1.,i>>2)* sin(Dt)*TempQ[i^2].Re;
    };

    return;
}

/* simula a porta lógica sigma_(4,z) sigma_(5,z) sigma_(6,z)
até terceira ordem em Dt */

void simZ4Z5Z6 (complex *Qbits, long double sign, long double Dt)
{
    complex TempQ[64];
    int i;

    expY5Z6 (Qbits, -Dt);
    expZ4X5 (Qbits, sign*Dt);
    expY5Z6 (Qbits, Dt);
    expZ4X5 (Qbits, -sign*Dt);

    expZ4X5 (Qbits, 2.*sign*Dt*Dt*Dt);
    expY5Z6 (Qbits, 2.*Dt*Dt*Dt);

    return;
}

/* aplica a exponencial de sigma_(4,x) sigma_(5,y) */

void expX4Y5 (complex *Qbits, long double Dt)
{
    complex TempQ[64];
    int i;

    for ( i=0; i<64; i++ )
    { TempQ[i].Re= Qbits[i].Re; TempQ[i].Im= Qbits[i].Im; };

    for ( i=0; i<64; i++ )
    {
        Qbits[i].Re=

```

```

cos(Dt)*TempQ[i].Re + pow(-1.,i>>1)* sin(Dt)*TempQ[i^2^4].Re;
Qbits[i].Im=
cos(Dt)*TempQ[i].Im + pow(-1.,i>>1)* sin(Dt)*TempQ[i^2^4].Im;
};

return;
}

/* aplica a exponencial de sigma_(5,x) sigma_(6,z) */

void expX5Z6 (complex *Qbits, long double Dt)
{
    complex TempQ[64];
    int i;

    for (i=0; i<64; i++)
    { TempQ[i].Re= Qbits[i].Re; TempQ[i].Im= Qbits[i].Im; };

    for (i=0; i<64; i++ )
    {
        Qbits[i].Re= cos(Dt)*TempQ[i].Re - pow(-1.,i)* sin(Dt)*TempQ[i^2].Im;
        Qbits[i].Im= cos(Dt)*TempQ[i].Im + pow(-1.,i)* sin(Dt)*TempQ[i^2].Re;
    };

    return;
}

/*
    simula a porta sigma_(4,x) sigma_(5,z) sigma_(6,z)
    até quinta ordem em Dt.
*/

void simX4Z5Z6 (complex *Qbits, long double sign, long double Dt)
{
    long double eps;

    /* este não é o valor exato, mas serve para Dt pequeno */
    eps= sqrt(.5*Dt);

```



```

expX5Z6 (Qbits, 6.*sign*eps*eps*eps*eps*eps);
expX4Y5 (Qbits, -2.*eps*eps*eps*eps*eps);

expX4Y5 (Qbits, -2.*eps*eps*eps);
expX5Z6 (Qbits, -2.*sign*eps*eps*eps);

expX4Y5 (Qbits, eps);
expX5Z6 (Qbits, -sign*eps);

expX4Y5 (Qbits, -eps);
expX5Z6 (Qbits, sign*eps);

return;
}

/* aplica a exponencial de sigma_(3,x) sigma_(4,y) */

void expX3Y4 (complex *Qbits, long double Dt)
{
    complex TempQ[64];
    int i;

    for (i=0; i<64; i++)
    { TempQ[i].Re= Qbits[i].Re; TempQ[i].Im= Qbits[i].Im; };

    for (i=0; i<64; i++)
    {
        Qbits[i].Re= cos(Dt)*TempQ[i].Re + pow(-1,i>>2)*sin(Dt)*TempQ[i^4^8].Re;
        Qbits[i].Im= cos(Dt)*TempQ[i].Im + pow(-1,i>>2)*sin(Dt)*TempQ[i^4^8].Im;
    }

    return;
}

/* simula a aplicação da porta sigma_(3,x) sigma_(4,z)
sigma_(5,z) sigma_(6,z)
*/
void simX3Z4Z5Z6 (complex *Qbits, long double sign, long double Dt)

```

```

{

    expX3Y4 (Qbits, -Dt);
    simX4Z5Z6 (Qbits, 1.*sign, Dt);
    expX3Y4 (Qbits, Dt);
    simX4Z5Z6 (Qbits, -1.*sign, Dt);

    simX4Z5Z6 (Qbits, 1.*sign, 2.*Dt*Dt*Dt);
    expX3Y4 (Qbits, 2.*Dt*Dt*Dt);

    return;
}

/* aplica a exponencial de sigma_(3,x) sobre o sistema */

void expX3 (complex *Qbits, long double Dt)
{
    complex TempQ[64];
    int i;

    for (i=0; i<64; i++) { TempQ[i].Re= Qbits[i].Re; TempQ[i].Im= Qbits[i].Im; };

    for (i=0; i<64; i++)
    {
        Qbits[i].Re= cos(Dt)*TempQ[i].Re - sin(Dt)*TempQ[i^8].Im;
        Qbits[i].Im= cos(Dt)*TempQ[i].Im + sin(Dt)*TempQ[i^8].Re;
    };

    return;
}

/* isto prepara o estado inicial e final ideal após a CNOT */

void initialConditions (complex *Qbits, complex *Final, int controle, int alvo)
{
    int i;

    /* todos os coeficientes têm mesma amplitude */

```

```

for (i=0; i<64; i++) { Qbits[i].Re=1./8. ; Qbits[i].Im=0.; };

/* os três últimos qubits representam o alvo */

if ( alvo )
{
    for (i=0; i<64; i++)
    {
if ( ( (i>>2)%2 + (i>>1)%2 + (i>>0)%2 )%2 ) Qbits[i].Re*= -1.;
    };
};

/* os três primeiros são o controle */

if ( controle )
{
    for (i=0; i<64; i++)
    {
if ( ( (i>>5)%2 + (i>>4)%2 + (i>>3)%2 )%2 ) Qbits[i].Re*= -1.;
    };
};

/* o estado final ideal é igual ao inicial.... */

for (i=0; i<64; i++)
{ Final[i].Re=Qbits[i].Re ; Final[i].Im=Qbits[i].Im ; };

/* ...mas com o alvo flippado se o controle for 1 */
if ( controle )
{
    for (i=0; i<64; i++)
    {
if ( ( (i>>2)%2 + (i>>1)%2 + (i>>0)%2 )%2 ) Final[i].Re*= -1.;
    };
};
}

```

```

int main ( int argc, char **argv)
{
    int i,N,j;
    complex cFid, Qbits[64], Final[64];
    long double t, Dt, Fidelity;

    /* o tempo de duração de aplicação de cada parte do hamiltoniano
    da CNOT deve ser um quarto da duração total da CNOT
    ( $\pi/\omega_0$ )
    */

    t= (long double) acos(-1.)/4;

    /* O programa recebe dois argumentos:
    o valor do primeiro qubit lógico (0 ou 1)
    o valor do segundo qubit lógico (0 ou 1)
    */

    if (argc<2) return 0;

    if ( atoi(argv[1]) ) bit1Value=1; else bit1Value= 0;
    if ( atoi(argv[2]) ) bit2Value=1; else bit2Value= 0;

    /* Imprime cabeçalho para identificar dados */
    printf ("# Simulação CNOT com estado inicial ");
    printf ("|d>\n",bit1Value,bit2Value);
    printf ("# N \t Fidelidade \n");

    /* LOOP PRINCIPAL */

    for (N=2; N<1000; N+=2)
    {

    /* prepara o estado inicial e o estado final ideal */

    initialConditions (Qbits,Final,bit1Value,bit2Value);

```

```

/* duração de cada passo ainda dada por  $t=N\Delta t^2$  */
Dt= t/N;

for (j=0; j<N; j++)
{
    /* aplica a parte da CNOT que corresponde ao
       hamiltoniano  $-\sigma_3(x)$  */
    expX3 (Qbits, -Dt);
    /* aplica a parte da CNOT que corresponde ao
       hamiltoniano  $\sigma_4(z) \sigma_5(z) \sigma_6(z)$ 
       empregando o método de divisão dos passos até
       terceira ordem */
    simZ4Z5Z6 (Qbits, -1., sqrt(.5*Dt));
    /* aplica a parte da CNOT que corresponde ao
       hamiltoniano  $\sigma_3(z) \sigma_4(z) \sigma_5(z) \sigma_6(z)$ 
       empregando o método de divisão dos passos até
       quinta ordem */
    simX3Z4Z5Z6 (Qbits, 1., sqrt(.5*Dt));
};

/* Calcula fidelidade */
cFid.Re= 0.;
cFid.Im= 0.;
for (i=0; i<64; i++)
{
    cFid.Re+= Final[i].Re*Qbits[i].Re+Final[i].Im*Qbits[i].Im;
    cFid.Im+= Final[i].Im*Qbits[i].Re-Final[i].Re*Qbits[i].Im;
}
Fidelity= cFid.Re*cFid.Re + cFid.Im*cFid.Im;

/* imprime os resultados */

printf ("%d\t%1.10Lf\n",N,1.-(long double) sqrt(Fidelity));

};

return 0;
}

```