**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

ELTON MÁRCIO DA SILVA SANTOS

**QCD NA REDE: UM ESTUDO
NÃO-PERTURBATIVO NO CALIBRE
DE FEYNMAN**

São Carlos

2011

ELTON MÁRCIO DA SILVA SANTOS

**QCD NA REDE: UM ESTUDO
NÃO-PERTURBATIVO NO CALIBRE
DE FEYNMAN**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação
em Física do Instituto de Física de São Carlos da
Universidade de São Paulo, para a obtenção do
título de Doutor em Ciência.

Área de Concentração: Física Básica
Orientador: Prof. Dr. Attilio Cucchieri
Co-orientadora: Profa. Dra. Tereza Mendes

São Carlos

2011

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTES
TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO,
PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação IFSC/USP

Santos, Elton Márcio da Silva

QCD na rede: um estudo não-perturbativo no calibre de
Feynman. / Elton Márcio da Silva Santos; orientador At-
tilio Cucchieri; co-orientadora Tereza Mendes.— São Carlos,
2011.

178p.

Tese (Doutorado em Ciência - Área de concentração: Física
Básica) – Instituto de Física de São Carlos da Universidade
de São Paulo.

1. Teoria de calibre na rede. 2. Monte Carlo. 3. Propagador
de Glúons. 4. Fixação de calibre 5. Calibre covariante lin-
ear. I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Elton Márcio da Silva Santos

Tese apresentada ao Instituto de Física de
São Carlos da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Doutor em
Ciências.
Área de Concentração: Física Básica

Aprovado(a) em: 16.08.2011

Comissão Julgadora

Prof(a). Dr(a). Attilio Cuchieri

Instituição: IFSC/USP

Assinatura_____

Prof(a). Dr(a). Arlene Cristina Aguilar

Instituição: UFABC

Assinatura_____

Prof(a). Dr(a). Gastão Inácio Krein

Instituição: UNESP

Assinatura_____

Prof(a). Dr(a). Guilherme Matos Sipahi

Instituição: IFSC/USP

Assinatura_____

Prof(a). Dr(a). Silvio Paolo Sorella

Instituição: UERJ

Assinatura_____

Venho aqui dedicar este trabalho a algumas pessoas que foram importantes durante o período da caminhada que levou à minha formação. Tais pessoas foram fundamentais para o processo através do qual tenho buscado o meu título de Doutor em Física. A essas pessoas eu dedico este trabalho: **Tina, Fátima, Idalina, Simeão, Elvis.**

Agradecimentos

Parece-me que foi ontem o dia em que cheguei a São Carlos para fazer minha graduação em Física. Durante esse período, muitos foram os desafios e muitas foram as alegrias, muitas vezes regradas a incertezas dos caminhos a serem trilhados. Nesta cidade construí a minha vida acadêmica, e a ela deixo meus agradecimentos. Foi aqui que adquiri grande parte do conhecimento que hoje tenho e, do ponto de vista profissional, foi nesta cidade que, ao longo desses dez anos, adquiri a experiência que hoje pretendo usar para que, de alguma forma, eu possa vir a contribuir para a sociedade, passando o conhecimento que recebi. Não poderia deixar de lembrar das instituições a que estive ligado nesses dez anos da minha vida. São elas:

[1] A Universidade de São Paulo (**USP**), que se tornou minha casa, onde nos últimos anos venho realizando minha pós graduação.

[2] A Universidade Federal de São Carlos (**UFSCAR**), onde realizei minha graduação durante os 4 primeiros anos de minha estada na terra do clima.

Minha dívida com essas instituições que se tornaram parte importante de minha vida, e com os professores que contribuíram para a minha formação, tem valor inestimável. Como parte de minha formação adquiri meus ideais de inspiração, e tenho aspirações de que este processo de aprendizagem seja um processo contínuo. Gostaria ainda de agradecer à Universidade Federal do Amazonas (**UFAM**) por ter permitido que eu, recém-contratado, fosse liberado para que pudesse concluir meu doutorado, que se encontrava ainda em andamento no momento da minha nomeação. Agradeço também às agências de fomento que me financiaram através de bolsas de estudos. São elas:

Bolsa (*PET/PIBIC*) Programa Especial de Treinamento, Período {2000 – 2001} (UFSCAR). Tutor Pet: Prof. Dr. Nelson Studart.

Bolsa (*FAPESP*) Iniciação Científica, Período {2001 – 2003} (UFSCAR): “Estudo de Propriedades de Transporte em Heteroestruturas Semicondutoras de Baixa Dimensionalidade”. Orientador: Prof. Dr. Sérgio Mergulhão.

Bolsa (*FAPESP*) Mestrado, Período {2003 – 2006} (USP): “Estudo de estados ligados de Heteroestruturas Semicondutoras Quase-Zero-Dimensionais”. Orientador: Prof. Dr. Guilherme Matos Sipahi.

Bolsa (*CAPE*s) Doutorado {2006 – 2009} (USP): “QCD na rede: Um Estudo Não-Perturbativo no Calibre de Feynman”, tese aqui apresentada, sob a orientação do Prof. Dr. Attilio Cucchieri e co-orientação da Profa. Dra. Tereza Mendes.

Agradeço em particular à **Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes)**, agência de fomento que possibilitou o desenvolvimento do trabalho aqui apresentado, e sem a qual o mesmo não seria possível.

O que antes parecia barreira intransponível ou senão impossível, hoje já não parece tão difícil assim, e é nesse sentido que surge a esperança de que a continuidade e persistência no caminho que resolvi trilhar há cerca de dez anos atrás façam com que o que hoje não é palpável, e é abstrato, amanhã se torne algo concreto, e que as questões novas que venham a surgir possam ser resolvidas. Algumas pessoas foram imprescindíveis para este processo, e agradeço a todos aqueles que contribuíram para que eu pudesse chegar até esse ponto. Aqui agradeço explicitamente algumas dessas pessoas.

Deixo aqui meus agradecimentos à minha mulher **Rosária de Fátima Burgos**, que sempre torceu pelo meu sucesso e que sempre esteve ao meu lado, de forma decisiva, nos momentos

em que precisei do seu apoio.

Gostaria de agradecer aos meus pais **Idalina Marinho da Silva Santos e José Simeão dos Santos**, por terem sido parte importante em minhas conquistas e pela formação de caráter que me deram, pois foram eles os fornecedores do exemplo moral que hoje tento seguir. Agradeço também ao meu irmão **Elvis Cleber da Silva Santos**.

Gostaria de agradecer de forma especial ao professor **Attilio Cucchieri**, pela orientação, e por tudo o que me ensinou, compartilhando parte do seu conhecimento, e estando sempre pronto a sanar minhas dúvidas. Deixo aqui registrado que foi um prazer e uma honra ter trabalhado com ele durante esses anos de formação de minha vida. Agradeço também à minha co-orientadora professora **Tereza Mendes**, por seus conselhos e estímulos nas horas difíceis, e também pela co-orientação.

Gostaria de agradecer a alguns professores que contribuíram para a minha formação e pelas discussões sobre temas de Física dentro da sala de aula ou fora dela. São eles: **Adenilson José Chiquito, Guilherme Matos Sipahi, Nelson Studart, José Carlos Egues de Menezes, Silvestre Ragusa, Sérgio Mergulhão, Klaus Capelle**.

Gostaria de agradecer aos meus amigos: **André Luiz Spina Tanaka, Antonio Leondino Baccchetti Junior, Alexandre Cacheffo, Alexander Dodonov, Anderson Augusto Ferreira, Antonio Olivato Junior, Emilio Gastesi Perez, Eduardo Nico Meira, Elias Franco de Souza, Francisca das Chagas do Amaral Souza, Gilberto Medeiros Nakamura, Maria Tereza dos Santos Gastesi, Leandro Sgobbi, Marcos Depetri, Rachel dos Santos Gastesi, Sônia Teresinha Sabatini Pedrino, Vanderlei Irineu Cruz**.

“Recent work by Lamb, Schwinger, Feynman and others has been very successful in setting up rules for handling the infinities and subtracting them away, so as to leave finite residues which can be compared with experiment, but the resulting theory is an ugly and incomplete one, and cannot be considered as a satisfactory solution of the problem of the electron.”

— PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC (1951)

“These rules of renormalization give surprisingly, excessively good agreement with experiments. Most physicists say that these working rules are, therefore, correct. I feel that is not an adequate reason. Just because the results happen to be in agreement with observation does not prove that one’s theory is correct.”

— PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC (1984)

“I believe there is really no satisfactory quantum electrodynamics [...] I think that the renormalization theory is simply a way to sweep the difficulties of the divergences of electrodynamics under the rug. I am, of course, not sure of that.”

— RICHARD FEYNMAN (1965)

Resumo

SANTOS, Elton Márcio da Silva. **QCD na rede: um estudo não-perturbativo no calibre de Feynman**. 2011. 178p. Tese (Doutorado) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

O comportamento infra-vermelho dos propagadores de glúons e de ghosts é de fundamental importância para o entendimento do limite de baixas energias da cromodinâmica quântica (QCD), especialmente no que diz respeito ao problema do confinamento de quarks e de glúons. O objetivo desta tese é implementar um novo método para o estudo do propagador de glúons no calibre covariante linear para a QCD na rede. Em particular, analisamos em detalhe a nova implementação proposta e estudamos os algoritmos para fixação numérica deste calibre. Note que a fixação numérica da condição de calibre de Feynman apresenta vários problemas não encontrados nos casos de Landau e de Coulomb, o que impossibilitou por longo tempo o seu estudo adequado. De fato, a definição considerada inicialmente, por Giusti et. al., é de difícil implementação numérica e introduz condições espúrias na fixação de calibre. Como consequência, os únicos estudos efetuados anteriormente referem-se aos propagadores de glúons e de quarks em redes relativamente pequenas, não permitindo uma análise cuidadosa do limite infra-vermelho da QCD neste calibre. A obtenção de novas soluções para a implementação do calibre de Feynman na rede é portanto de grande importância para viabilizar estudos numéricos mais sistemáticos dos propagadores e dos vértices neste calibre e, em geral, no calibre covariante linear.

Palavras-chave: Teoria de calibre na rede. Monte Carlo. Propagador de glúons. Fixação de calibre. Calibre covariante linear.

Abstract

SANTOS, Elton Márcio da Silva. **Lattice QCD: a nonperturbative study in the Feynman gauge.** 2011. 178p. Tese (Doutorado) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

The infrared behavior of gluon and ghost propagators is of fundamental importance for the understanding of the low-energy limit of quantum chromodynamics (QCD), especially with respect to the problem of the confinement of quarks and gluons. The goal of this thesis is to implement a new method to study the gluon propagator in the linear covariant gauge in lattice QCD. In particular, we analyze in detail the newly proposed implementation and study the algorithms for numerically fixing this gauge. Note that the numerical fixing of the Feynman gauge condition poses several problems that are not present in the Landau and Coulomb cases, which prevented it from being properly studied for a long time. In fact, the definition considered initially, by Giusti et. al., is of difficult numerical implementation and introduces spurious conditions into the gauge fixing. As a consequence, the only studies carried out previously involved gluon and quark propagators on relatively small lattices, hindering a careful analysis of the infrared limit of QCD in this gauge. Obtaining new solutions for the implementation of the Feynman gauge on the lattice is therefore of great importance to enable more systematic numerical studies of propagators and vertices in this gauge and, in general, in the linear covariant gauge.

Keywords: Lattice gauge theory. Monte Carlo. Gluon propagator. Gauge fixing. Linear covariant gauge.

Sumário

1	Introdução	23
1.1	Organização da Tese	29
2	QCD no Contínuo e na Rede	31
2.1	A Lagrangiana da QCD	31
2.2	Teorias de Campos na Rede	42
2.3	Teorias de Calibre na Rede	47
2.4	Invariância por Transformações Locais de Calibre	59
3	Quantização Via Integrais de Trajetória	63
3.1	Integrais de Trajetória em Mecânica Quântica	63
3.2	Integrais de Trajetória em Teorias Quânticas de Campos	72
3.3	Limite do Contínuo das Teorias de Calibre	79
4	Simulações Numéricas de Monte Carlo	91
4.1	Métodos de Monte Carlo	91
4.1.1	Como Gerar Matrizes $SU(n)$ Aleatórias	94
4.1.2	Algoritmos de Metropolis e de Banho Térmico	97

4.1.3	Algoritmo de Banho Térmico para a Ação de Wilson	99
4.2	Simulações e Análise de Erros	101
5	Fixação de Calibre	105
5.1	A Necessidade da Fixação de Calibre	105
5.2	O Método de Faddeev-Popov	108
5.3	Os Campos-Fantasma de Faddeev-Popov	114
5.4	A Condição do Calibre de Landau na Rede	118
5.5	Algoritmos para Fixação de Calibre na Rede	123
5.6	Cópias de Gribov	128
6	O Calibre Covariante Linear na Rede	131
6.1	Tentativas Anteriores	131
6.2	Uma Nova Implementação	133
6.3	Limite do Contínuo	137
6.4	A Matriz de Faddeev-Popov	138
7	Resultados Numéricos	149
7.1	Resultados Numéricos para a Fixação do Calibre	149
7.2	Problemas de Convergência Numérica	153
7.2.1	Diferentes Discretizações para o Campo de Glúons	153
7.2.2	O Grupo de Calibre SU(n) para n Grande	156
7.3	Cálculo dos Propagadores de Glúons	158
7.3.1	Cálculo do Propagador Longitudinal de Glúons	160

7.3.2	Cálculo do Propagador Transverso de Glúons	161
7.3.3	O Limite $\xi \rightarrow 0$	162
8	Conclusões	171
	Referências	173

1 *Introdução*

O entendimento das componentes básicas da matéria (as partículas elementares) e das leis às quais elas estão sujeitas é um dos problemas fundamentais da Física. Hoje, o Modelo Padrão (1) permite uma descrição simples e coerente de três das quatro forças fundamentais (eletromagnetismo, força fraca e força forte) e de diversos processos envolvendo partículas elementares. Em particular, o Modelo Padrão afirma que os campos de matéria (quarks e léptons) são campos fermiônicos (espinoriais de spin $1/2$) descritos pela lagrangiana de Dirac. A interação entre os campos de matéria é descrita em termos de trocas de partículas bosônicas (de spin 1) que são interpretadas como campos de calibre. Na Cromodinâmica Quântica (QCD, do inglês *Quantum Chromodynamics*), esses campos são descritos pela lagrangiana de Yang-Mills, proposta inicialmente para descrever a simetria de isospin na interação entre prótons e nêutrons (2).

O estudo dos processos envolvendo partículas elementares requer claramente o uso da mecânica quântica (mundo sub-atômico) e da relatividade restrita (energias comparáveis à massa de repouso). Porém, as teorias quânticas relativísticas de Klein-Gordon e de Dirac não são suficientes para uma descrição completa das interações entre partículas elementares. Para isso é necessário abandonar a consideração de uma equação para uma única partícula em favor de uma descrição com um número variável de partículas, em que pode ocorrer por exemplo a criação e aniquilação de pares. Nesse novo tratamento, chamado de teoria quântica de campos (3–6), os campos representam os ingredientes básicos da teoria e são caracterizados por um número infinito de graus de liberdade. O estado de mais baixa energia do campo, chamado de vácuo, corresponde à ausência de partículas, que podem ser interpretadas como excitações do vácuo. Dessa forma, a teoria inclui de modo natural as chamadas flutuações do vácuo, necessárias para

uma descrição de efeitos físicos tais como o deslocamento Lamb e o efeito Casimir.

O primeiro grande sucesso da teoria quântica de campos na descrição das forças fundamentais da natureza foi a Eletrodinâmica Quântica (QED, do inglês *Quantum Electrodynamics*). A QED é uma teoria de calibre com simetria local $U(1)$, abeliana, que permite tratar a interação entre o campo eletromagnético (i.e. os fótons) e os elétrons com uma precisão notável. As previsões teóricas no caso da QED podem ser obtidas através da teoria de perturbação, devido ao pequeno valor da constante de acoplamento da teoria ($\alpha \approx 1/137$). É importante lembrar que, para obter resultados finitos para as grandezas observáveis na QED (e mais em geral em qualquer teoria quântica de campos), temos ainda que lidar com as divergências ultra-violeta que ocorrem quando os diagramas de Feynman incluem laços. Nas teorias renormalizáveis como a QED, essas divergências podem ser eliminadas através de um procedimento de regularização e de renormalização (3–6).

Considerando os grandes sucessos das previsões da QED na descrição das interações eletromagnéticas, foi proposta nos anos setenta do século passado uma teoria de calibre para a descrição da força nuclear forte, a QCD. Nesse caso a interação entre os quarks acontece por troca de glúons, que são os quanta do campo de calibre, portadores da força forte. A teoria é baseada em uma simetria de calibre local $SU(3)$, não-abeliana, e a carga é chamada de carga de cor (1). Em princípio, a QCD deve ser capaz de explicar a interação entre os quarks, a existência dos hádrons e, em última instância, a existência dos núcleos atômicos.

Uma característica fundamental das interações fortes é que os quarks, que são os campos fundamentais a partir dos quais é feita a matéria hadrônica, não são encontrados livres na natureza. Isso nos leva a crer que a força forte seja de grande intensidade a longas distâncias, i.e. no limite de baixas energias, e que portanto os quarks estejam permanentemente confinados dentro dos hádrons (7). Além disso, no espectro físico da teoria aparecem somente hádrons com uma carga de cor total nula (branca). Assim, a força nuclear entre prótons e nêutrons dentro dos núcleos atômicos deve ser interpretada como uma força residual da interação entre os quarks (assim como a formação de moléculas pode ser entendida como devida a uma força residual en-

tre átomos eletricamente neutros). Em contrapartida, foi observado experimentalmente (usando espalhamento de elétrons de alta energia) que os quarks dentro dos hádrons se comportam como se fossem partículas livres a pequenas distâncias (1). Esse fato ficou conhecido como liberdade assintótica e nos permite concluir que, a pequenas distâncias, a intensidade das interações fortes torna-se baixa. O confinamento e a liberdade assintótica podem então ser considerados como dois aspectos complementares da teoria que descreve a interação entre quarks.

A liberdade assintótica é satisfeita pela QCD: de fato, pode-se demonstrar que a constante de acoplamento da teoria é nula no limite de energia infinita (8, 9). Dessa forma, a teoria de perturbação pode ser usada no limite de altas energias (ou de pequenas separações). No entanto, no limite de baixas energias (ou de grandes separações), a constante de acoplamento aumenta¹ e a abordagem perturbativa não pode ser usada. A complexidade da QCD está relacionada à natureza não-abeliana da teoria: isso implica que as partículas mediadoras da força nuclear forte, os glúons, carregam carga de cor e portanto interagem entre si. Assim, a QCD é uma teoria fortemente não-linear (1), bem diferente da QED, já que os quanta do campo eletromagnético (os fótons) não possuem carga elétrica e portanto não interagem (diretamente) entre si. Logo, os processos de baixas energias e os estados ligados de quarks (os hádrons) requerem um estudo não-perturbativo. Isso pode ser feito numericamente através de simulações computacionais na chamada formulação de rede da QCD.

A teoria de calibre na rede foi proposta em 1971 por F.J. Wegner (para o grupo Z_2) (10) e por K. Wilson em 1974 [para os grupos $SU(n)$] (11). É importante ressaltar que a formulação na rede fornece uma regularização natural da teoria, através da introdução de um corte ultravioleta, o espaçamento de rede a . Ao mesmo tempo, o uso da quantização por integrais de trajetória e a continuação analítica da variável temporal para tempos imaginários (formulação euclidiana) deixa a teoria formalmente idêntica a um modelo de mecânica estatística clássica em quatro dimensões. Isso permite o estudo da teoria através de ferramentas usadas em mecânica estatística clássica, como expansões de altas e de baixas temperaturas, que correspondem re-

¹ Experimentos fornecem um valor de ordem 1 para a constante de acoplamento das interações fortes na escala de 1 GeV.

spectivamente às expansões de acoplamentos fortes e fracos da teoria de campos, e simulações numéricas de Monte Carlo, que permitem um estudo não-perturbativo da teoria (12–15).

Do ponto de vista numérico, as simulações de QCD na rede representam um dos problemas-desafio para a computação (“grand challenge problem”) (16). Recentemente, as melhorias nas técnicas numéricas usadas nas simulações assim como o poder cada vez maior de processamento dos computadores permitiram obter resultados significativos nos cálculos do espectro de massa hadrônico (17–21), da constante de acoplamento forte (22, 23) e no estudo da transição de desconfinamento da carga de cor a temperatura finita (24). Nesse último caso as previsões da QCD na rede são de grande interesse para o experimento ALICE, que está sendo realizado no acelerador de partículas LHC no CERN (25).

Além da QCD na rede, um estudo não-perturbativo da QCD pode em princípio ser conduzido usando as chamadas equações de Dyson-Schwinger (EDS) (26). Nesse caso a teoria é reformulada em termos de equações para suas funções de Green, ou seja as funções de correlação para os campos da teoria. As funções de Green determinam toda a dinâmica em uma teoria quântica de campo. De fato, o cálculo de todas as funções de Green de n pontos é equivalente à determinação do funcional gerador $Z[J]$, que é o analogo da função de partição de um modelo de mecânica estatística (3). Assim, o estudo não-perturbativo dessas funções de correlação — i.e. propagadores e vértices — no limite de baixas energias ou pequenos momentos (o chamado limite infra-vermelho) deveria fornecer informações completas sobre o limite de baixas energias da QCD, i.e. sobre o mecanismo que gera o confinamento da carga de cor. O problema é que as EDS são de fato constituídas por uma torre infinita de equações acopladas. Assim, na prática, para resolver essas equações é necessário introduzir algum tipo de truncamento ou aproximação. Em geral, diferentes tipos de truncamento das EDS podem fornecer soluções diferentes para a QCD.

O estudo de funções de Green pode ser feito a partir de primeiros princípios na QCD na rede. Porém, deve-se notar que na formulação de rede a dimensão finita do sistema equivale a um corte infra-vermelho, de modo que é impossível estudar momentos (não-nulos) menores

do que $\sim 2\pi/L$, onde L é o lado da rede. Portanto, um estudo numérico de propagadores e de vértices na região infra-vermelha, usando simulações numéricas de QCD na rede, requer em geral uma extrapolação cuidadosa a volume infinito, o chamado limite termodinâmico.

É preciso notar também que as funções de Green da teoria não são invariantes por transformações locais de calibre. Assim, o estudo das funções de Green da QCD requer a escolha de uma condição de calibre. Relembramos que as teorias de calibre que descrevem as interações fundamentais (eletromagnética, fraca e forte) são caracterizadas por invariância sob transformações de simetria escolhidas independentemente para cada posição do espaço e para cada instante de tempo (1). Logo, sendo invariantes sob transformações locais de simetria, as teorias de calibre são sistemas com variáveis dinâmicas redundantes, as quais não representam verdadeiros graus de liberdade. Os objetos de interesse não são os campos de calibre em si, mas sim as classes (ou órbitas) de campos relacionados por transformações de calibre. Na quantização por integrais de trajetória isso implica que o funcional gerador é proporcional a um fator infinito (o volume da órbita de calibre). De fato, embora o volume de um grupo compacto seja finito, o volume da órbita é infinito, uma vez que há um elemento do grupo para cada ponto do espaço-tempo. A definição da teoria quântica é feita eliminando (na verdade, fatorizando) este fator infinito. Esta fatorização é conhecida como procedimento de Faddeev-Popov (27) e requer a escolha de uma condição de calibre (fixação de calibre), i.e. de uma condição que determine de maneira unívoca um representante para o campo de calibre em cada órbita. A transformação de calibre necessária para a fixação do calibre corresponde a uma transformação de variáveis na integração funcional. O Jacobiano dessa transformação é conhecido como determinante de Faddeev-Popov e pode ser escrito como uma integral gaussiana sobre variáveis anti-comutantes (variáveis de Grassmann). Essas variáveis são chamadas de campos-fantasma devido ao fato de que esses campos violam a conexão spin-estatística, tendo em vista que, embora sejam campos escalares, eles anti-comutam.

Entre as possíveis condições de calibre, é particularmente interessante o chamado calibre de Landau (ou de Lorenz). Para este calibre existem, de fato, várias previsões analíticas, através de estudos das EDS, para o comportamento dos propagadores de glúons e de fantasmas no li-

mite infra-vermelho (28, 29). Esses propagadores foram também estudados numericamente no calibre de Landau na rede por vários grupos de pesquisa [veja e.g. o artigo de revisão (30)] em duas, três e quatro dimensões, para teorias puras de Yang-Mills — i.e. no limite de massas infinitas para os quarks (aproximação quenched) — com grupos de calibre SU(2) e SU(3), e para a QCD completa (isto é, considerando-se os efeitos de quarks dinâmicos). Os resultados mais recentes, obtidos usando grandes tamanhos de rede, sugerem um propagador de glúons finito e não-nulo a momento zero e um propagador de fantasmas com um comportamento tipo propagador livre, i.e. p^{-2} , para momentos p pequenos. Esses resultados estão de acordo com as chamadas soluções massivas obtidas usando EDS (29). Somente em 2 dimensões foi obtido que o propagador de glúons a momento nulo tende a zero no limite de volume infinito e que o propagador do fantasma de Faddeev-Popov é fortalecido no limite de pequenos momentos, i.e. apresenta uma divergência com o inverso do momento mais forte do que o propagador livre p^{-2} . Nesse caso o comportamento infra-vermelho dos propagadores de glúons e fantasmas parece estar (quantitativamente) de acordo com as chamadas soluções conformes obtidas usando EDS (28). A interpretação desses resultados para o calibre de Landau tem originado recentemente um acirrado debate (30).

Além do calibre de Landau, é de grande importância obter descrições dos propagadores (dependentes de calibre) para uma classe tão grande quanto possível de calibres de interesse físico. De fato, as propriedades físicas da teoria são independentes do calibre. Assim, a consideração de vários calibres pode ajudar a evidenciar os aspectos relevantes do mecanismo de confinamento para quarks e glúons na QCD. Uma generalização natural do calibre de Landau é o chamado calibre covariante linear (que inclui o calibre de Feynman). Para o calibre covariante linear há ainda poucos resultados analíticos sobre o comportamento dos propagadores de glúons e de fantasmas (31, 32). Ao mesmo tempo, a fixação numérica desse calibre apresenta vários problemas não encontrados no caso de Landau (33, 34), o que impediu por longo tempo a sua implementação adequada. Como consequência, os estudos efetuados anteriormente consideraram propagadores de glúons e de quarks em redes relativamente pequenas, não permitindo uma análise cuidadosa do limite infra-vermelho da QCD neste calibre. A obtenção de novas

soluções para a implementação do calibre de Feynman na rede é portanto de grande importância para viabilizar estudos numéricos mais sistemáticos dos propagadores e dos vértices neste calibre e, em geral, no calibre covariante linear. Os resultados assim obtidos podem também ser usados como inputs para estudos analíticos baseados nas equações de Dyson-Schwinger. Neste trabalho, apresentamos uma nova solução para tratamento do calibre covariante linear na QCD na rede, com as características desejadas.

1.1 Organização da Tese

A tese está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2 será apresentada uma revisão da QCD no contínuo e da sua formulação de rede. Em particular, serão introduzidas a lagrangiana da QCD no contínuo e a ação de Wilson na rede. Será também considerado o limite (formal) de espaçamento de rede a pequeno.

No Capítulo 3 é descrita a quantização por integrais de trajetória em mecânica quântica e nas teorias quânticas de campos. Será também evidenciada a equivalência das teorias quânticas de campo no espaço euclidiano com a mecânica estatística clássica. Enfim, será mostrado que o limite do contínuo para a teoria de rede é o ponto crítico no modelo de mecânica estatística correspondente.

No Capítulo 4 é feita uma revisão dos métodos numéricos usados nas simulações (métodos de Monte Carlo) e da análise de dados e do tratamento de erros.

No Capítulo 5 será explicado o procedimento de Faddeev-Popov para a escolha de uma condição de calibre (fixação de calibre). O caso do calibre de Landau será descrito em detalhe, tanto no contínuo quanto na rede. Serão também ilustrados sucintamente os algoritmos de fixação de calibre e será discutido o problema das cópias de Gribov.

No Capítulo 6 serão descritas as definições usadas anteriormente para a fixação numérica do calibre covariante linear. Em particular, serão discutidos os problemas encontrados com essas definições. No mesmo capítulo será proposta uma nova solução para a fixação numérica do

calibre covariante linear, que em princípio resolve todos os problemas encontrados no passado.

Enfim, no Capítulo 7 vamos apresentar resultados numéricos sobre os algoritmos para a fixação do calibre covariante linear e resultados preliminares sobre os propagadores de glúons.

Na última parte da tese, apresentaremos nossas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

2 *QCD no Contínuo e na Rede*

Como explicado na Introdução, as teorias de calibre são a base para a descrição das principais interações fundamentais (eletromagnetismo, força fraca e força forte) entre as partículas elementares. Tais teorias são caracterizadas por possuírem invariância sob transformações locais de calibre, i.e. transformações diferentes em cada ponto do espaço e em cada instante do tempo, que agem sobre graus de liberdade internos da teoria.

Neste capítulo, além de introduzir a notação usada, vamos fazer uma breve revisão da QCD no contínuo e na rede. Em particular, na próxima seção vamos ver a lagrangiana da QCD no contínuo (1, 3) e verificar a invariância de calibre da teoria. Na segunda seção será discutida a discretização (12–15) da lagrangiana de um campo escalar livre e na terceira seção será introduzida a ação de Wilson para a QCD na rede. Na mesma seção vamos também verificar que a teoria de rede produz (formalmente) a teoria da QCD no contínuo quando o espaçamento de rede a tende a zero. Enfim, na Seção 2.4 será discutida a invariância da QCD na rede por transformações locais de calibre.

2.1 A Lagrangiana da QCD

A densidade de lagrangiana da QCD é dada por¹

$$L(x) = -\frac{1}{4g_0^2} F^{\mu\nu}(x)^b F_{\mu\nu}(x)^b + \overline{\psi}_f^\alpha(x)^b \left[i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} D_\mu(x)^{bc} - m_f \delta_{\alpha\beta} \delta^{bc} \right] \psi_f^\beta(x)^c, \quad (2.1)$$

onde o primeiro termo, a lagrangiana de Yang-Mills, descreve a dinâmica dos campos de calibre não-abelianos (os glúons, partículas bosônicas de spin 1 e massa nula) e o segundo termo, a

¹ Em geral nesta tese vamos usar a convenção da soma dos índices repetidos.

lagrangiana de Dirac, descreve a interação entre os campos de matéria (férmions massivos de spin 1/2) através da troca de glúons.

Como será mostrado abaixo, a QCD é invariante por transformações locais de calibre. O grupo de calibre para a força forte é o grupo SU(3). Relembramos que um elemento $g(x)$ do grupo SU(3) pode ser escrito como²

$$g(x) = \exp[i\lambda(x)] = \exp[i\lambda^b(x)T_b], \quad (2.2)$$

onde $\lambda^b(x)$ são números reais, T_b são os geradores do grupo³ e o índice de cor b pode assumir valores de 1 a 8. As matrizes $g(x)$ são matrizes unitárias com determinante igual a 1, já que os geradores do grupo são matrizes hermitianas de traço nulo. De fato, sendo $T_b^\dagger = T_b$, i.e. $\lambda(x)^\dagger = \lambda(x)$, a Equação (2.2) implica

$$g(x)^\dagger = \exp[-i\lambda(x)^\dagger] = \exp[-i\lambda(x)] = g(x)^{-1}, \quad (2.3)$$

i.e. $g(x)$ é unitária. Também, usando a relação $\det \exp(M) = \exp[\text{Tr}(M)]$, a Equação (2.2) e $\text{Tr}(T_b) = 0$, i.e. $\text{Tr}(\lambda(x)) = 0$, é imediato obter

$$\det g(x) = \det \exp[i\lambda(x)] = \exp[i\text{Tr}(\lambda(x))] = 1. \quad (2.4)$$

Os geradores do grupo T_b satisfazem às relações de comutação

$$[T_b, T_c] = T_b T_c - T_c T_b = i f^{bcd} T_d \quad (2.5)$$

e são normalizados usando a condição

$$\text{Tr}(T_b T_c) = \rho \delta_{bc}. \quad (2.6)$$

As constantes de estrutura f^{bcd} são reais e anti-simétricas nos três índices. De fato, podemos escrever

$$i f^{bca} = \frac{1}{\rho} \text{Tr}([T_b, T_c] T_a) \quad (2.7)$$

² As fórmulas abaixo podem facilmente ser estendidas aos grupos SU(n).

³ Os geradores do grupo representam uma base para a álgebra de Lie do grupo. Assim, a matriz $\lambda(x) = \lambda^b(x)T_b$ pertence à álgebra de Lie do grupo.

e claramente temos $f^{bca} = -f^{cba}$. Ao mesmo tempo, usando a propriedade cíclica do traço, é simples verificar que

$$if^{bca} = \frac{1}{\rho} \text{Tr}([T_b, T_c] T_a) = \frac{1}{\rho} \text{Tr}([T_c, T_a] T_b) = if^{cab}. \quad (2.8)$$

Enfim, considerando as relações

$$-i(f^{bcd})^* T_d = [T_b, T_c]^\dagger = [T_c, T_b] = if^{cbd} T_d = -if^{bcd} T_d, \quad (2.9)$$

obtemos $(f^{bcd})^* = f^{bcd}$.

A constante real ρ depende da representação. Na representação fundamental, os geradores são matrizes complexas 3×3 e $\rho = 1/2$. No caso da representação adjunta, a constante ρ vale 3 e os geradores são matrizes 8×8 dadas por⁴

$$(T_b)^{jk} = -if^{bjk}. \quad (2.10)$$

Usando a relação acima na Equação (2.2) é também claro que as matrizes SU(3) na representação adjunta são matrizes reais (e ortogonais).

Os campos de matéria $\psi_f^\alpha(x)^b$ carregam três índices discretos, sendo α o índice de Dirac, b o índice de cor e f o índice de sabor.⁵ Ao mesmo tempo, os campos de calibre $A_\mu(x)^b$ carregam um índice de cor b e um índice de Lorentz μ . É importante ressaltar que, em relação ao índice de cor, os campos de matéria e os campos de calibre transformam-se segundo representações diferentes do grupo SU(3). De fato, como vamos ver abaixo, no espaço de cor os campos de matéria são vetores que se transformam na representação fundamental do grupo. Assim, o índice de cor b pode assumir valores de 1 a 3 para os campos de matéria $\psi_f^\alpha(x)^b$. Por outro lado, os campos de calibre

$$A_\mu(x) = A_\mu(x)^b T_b \quad (2.11)$$

são elementos da álgebra de Lie do grupo e as componentes $A_\mu(x)^b$ transformam-se segundo a representação adjunta de SU(3). Neste caso, o índice de cor b pode assumir valores de 1 a

⁴ Note que as matrizes T_b na Equação (2.10) são hermitianas, pois as constantes de estrutura f^{bcd} são anti-simétricas.

⁵ São definidos sabores os vários tipos de quarks existentes na natureza, i.e. *up*, *down*, *strange*, etc.

8. Existem então três tipos de quarks, para cada sabor, e oito tipos de glúons. Os três tipos de quarks correspondem aos três possíveis valores para a carga de cor, indicados por azul, verde e vermelho. Note que o fato de haver duas representações diferentes para os campos de matéria e de calibre não é simplesmente uma propriedade matemática da teoria (15). De fato, se a carga de cor dos quarks estivesse na representação adjunta, ela poderia ser blindada pelas cargas de cor dos glúons, impossibilitando a formação de tubos de fluxo. Assim, os quarks não seriam confinados dentro dos hádrons, mas poderiam existir como partículas livres.

Na Equação (2.1), foi indicada com $D_\mu(x)^{bc}$ a derivada covariante, definida como⁶

$$D_\mu(x)^{bc} \equiv \delta^{bc} \partial_\mu - iA_\mu(x)^j (T_j)^{bc} \quad (2.12)$$

ou, em forma matricial,

$$D_\mu(x) = 1 \partial_\mu - iA_\mu(x), \quad (2.13)$$

onde 1 representa a matriz identidade (no espaço dos índices de cor). Essa derivada é chamada de covariante porque, sob transformações locais de calibre, ela se transforma como os campos de matéria. Isso é necessário para que a lagrangiana de Dirac seja invariante por transformações de calibre locais. Relembremos aqui que a lagrangiana de Dirac para o caso livre⁷

$$L_D(x) = \bar{\psi}_f^\alpha(x)^b \delta^{bc} [i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu - m_f \delta_{\alpha\beta}] \psi_f^\beta(x)^c, \quad (2.14)$$

é claramente invariante sob transformações *globais* de calibre, i.e.

$$[\psi_f^\alpha(x)^b]' = g^{bc} \psi_f^\alpha(x)^c \quad (2.15)$$

$$[\bar{\psi}_f^\alpha(x)^b]' = \bar{\psi}_f^\alpha(x)^c (g^\dagger)^{cb}, \quad (2.16)$$

onde g (constante) é um elemento de $SU(3)$. Para que esta lagrangiana seja invariante também sob transformações locais de calibre $g(x)^{bc}$, i.e. quando os campos de matéria se transformam

⁶ Essa definição de derivada covariante representa o chamado acoplamento mínimo.

⁷ Como de costume, indicamos com γ^μ as matrizes de Dirac 4×4 que satisfazem as relações de anti-comutação $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Também temos $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$.

como

$$[\psi_f^\alpha(x)^b]' = g(x)^{bc} \psi_f^\alpha(x)^c \quad (2.17)$$

$$\left[\overline{\psi}_f^\alpha(x)^b\right]' = \overline{\psi}_f^\alpha(x)^c [g(x)^\dagger]^{cb}, \quad (2.18)$$

é necessário substituir na Equação (2.14) acima a derivada parcial pela derivada covariante,⁸ i.e.

$$L_D(x) = \overline{\psi}_f^\alpha(x)^b \left[i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} D_\mu(x)^{bc} - m_f \delta_{\alpha\beta} \delta^{bc} \right] \psi_f^\beta(x)^c, \quad (2.20)$$

e impor que, sob transformações locais de calibre, seja válida a relação

$$[D_\mu(x)^{bc} \psi_f^\beta(x)^c]' = g(x)^{bj} [D_\mu(x)^{jc} \psi_f^\beta(x)^c]. \quad (2.21)$$

Isto implica

$$[D_\mu(x)^{bc} \psi_f^\beta(x)^c]' = g(x)^{bj} D_\mu(x)^{jk} [g(x)^\dagger]^{kl} g(x)^{lc} \psi_f^\beta(x)^c \quad (2.22)$$

$$= g(x)^{bj} D_\mu(x)^{jk} [g(x)^\dagger]^{kl} [\psi_f^\beta(x)^l]' \quad (2.23)$$

$$= [D_\mu(x)^{bc}]' [\psi_f^\beta(x)^c]', \quad (2.24)$$

onde foi usada a relação $g(x)^\dagger = g(x)^{-1}$. Assim, podemos escrever

$$[D_\mu(x)^{bc}]' = g(x)^{bj} D_\mu(x)^{jk} [g(x)^\dagger]^{kc} \quad (2.25)$$

ou

$$[D_\mu(x)]' = g(x) D_\mu(x) g(x)^\dagger \quad (2.26)$$

para a transformação da derivada covariante sob transformações locais de calibre $g(x)$.

A regra de transformação (2.25) juntamente com a definição de derivada covariante (2.12)

⁸ Considerando a definição (2.12) fica evidente que na lagrangiana (2.20) há um termo

$$\overline{\psi}_f^\alpha(x)^b A_\mu(x)^j (T_j)^{bc} \psi_f^\beta(x)^c. \quad (2.19)$$

É este termo, chamado de vértice quark-glúon, que representa a interação entre os campos de matéria (os quarks) através da troca de glúons.

fixa de forma unívoca a transformação dos campos de calibre $A_\mu(x)^j$. De fato, temos

$$[D_\mu(x)^{bc}]' = g(x)^{bk} D_\mu(x)^{kl} [g(x)^\dagger]^{lc} \quad (2.27)$$

$$= g(x)^{bk} \left[\delta^{kl} \partial_\mu - i A_\mu(x)^j (T_j)^{kl} \right] [g(x)^\dagger]^{lc} \quad (2.28)$$

$$= \delta^{bc} \partial_\mu - i [A_\mu(x)^j]' (T_j)^{bc}. \quad (2.29)$$

Expandindo as relações acima, é simples obter

$$[A_\mu(x)^j]' (T_j)^{bc} = g(x)^{bk} A_\mu(x)^j (T_j)^{kl} [g(x)^\dagger]^{lc} + i g(x)^{bk} \partial_\mu [g(x)^\dagger]^{kc}. \quad (2.30)$$

Em forma matricial, a mesma relação pode ser escrita como

$$[A_\mu(x)]' = g(x) A_\mu(x) g(x)^\dagger + i g(x) \partial_\mu g(x)^\dagger. \quad (2.31)$$

Claramente, no caso abeliano, o primeiro termo simplifica-se, tornando-se igual a $A_\mu(x)$, e o segundo termo pode ser escrito como $\partial_\mu \lambda(x)$, onde tomamos $g(x) = \exp[i\lambda(x)]$. Logo, obtemos

$$[A_\mu(x)]' = A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x), \quad (2.32)$$

que é a transformação de calibre para o eletromagnetismo (QED).⁹ Note também que, usando a relação $g(x) g(x)^\dagger = 1$, obtemos

$$[\partial_\mu g(x)] g(x)^\dagger + g(x) [\partial_\mu g(x)^\dagger] = 0. \quad (2.33)$$

A Equação (2.31) pode então ser escrita como

$$[A_\mu(x)]' = g(x) A_\mu(x) g(x)^\dagger - i [\partial_\mu g(x)] g(x)^\dagger. \quad (2.34)$$

No caso de transformações infinitesimais (em uma representação qualquer), ou seja para

$$g(x) \approx 1 + i \lambda^a(x) T_a, \quad (2.35)$$

⁹ Relembremos que, classicamente, as quatro componentes de $A_\mu(x)$ representam os potenciais vetor e escalar. Assim, na teoria eletromagnética de Maxwell, uma transformação de calibre permite modificar os potenciais vetor e escalar sem alterar o conteúdo físico da teoria.

temos que

$$[A_\mu(x)]' \approx A_\mu(x) + i\lambda^a(x) [T_a, A_\mu(x)] + T_c \partial_\mu \lambda^c(x) \quad (2.36)$$

$$= A_\mu(x) + i\lambda^a(x) A_\mu(x)^b [T_a, T_b] + T_c \partial_\mu \lambda^c(x) \quad (2.37)$$

$$= A_\mu(x) - \lambda^a(x) A_\mu(x)^b f^{abc} T_c + T_c \partial_\mu \lambda^c(x), \quad (2.38)$$

onde usamos as Equações (2.5) and (2.11) e desprezamos termos quadráticos em $\lambda^a(x)$. Assim, podemos escrever

$$\delta A_\mu(x)^c = [A_\mu(x)^c]' - A_\mu(x)^c \quad (2.39)$$

$$\approx -\lambda^a(x) A_\mu(x)^b f^{abc} + \partial_\mu \lambda^c(x). \quad (2.40)$$

A relação anterior pode também ser escrita como

$$\delta A_\mu(x)^c \approx \partial_\mu \lambda^c(x) - \lambda^a(x) A_\mu(x)^b f^{abc} \quad (2.41)$$

$$= \delta^{cb} \partial_\mu \lambda^b(x) - \lambda^a(x) A_\mu(x)^b f^{bca} \quad (2.42)$$

$$= \delta^{cb} \partial_\mu \lambda^b(x) - \lambda^b(x) A_\mu(x)^a f^{acb} \quad (2.43)$$

$$= D_\mu(x)^{cb} \lambda^b(x), \quad (2.44)$$

onde

$$D_\mu(x)^{cb} = \delta^{cb} \partial_\mu - A_\mu(x)^a f^{acb} \quad (2.45)$$

é a derivada covariante na representação adjunta. No caso de transformações globais (e infinitesimais) de calibre, a Equação (2.40) simplifica-se, tornando-se

$$\delta A_\mu(x)^c \approx -\lambda^a A_\mu(x)^b f^{abc} \quad (2.46)$$

$$= \lambda^a A_\mu(x)^b f^{acb} \quad (2.47)$$

$$= i\lambda^a (T_a)^{cb} A_\mu(x)^b, \quad (2.48)$$

ou seja,

$$\delta A_\mu(x) \approx i\lambda^a T_a A_\mu(x), \quad (2.49)$$

onde os geradores T_a estão na representação adjunta, dada em (2.10). Para as mesmas transfor-

mações (infinitesimais e globais), a Equação (2.17) fornece

$$\delta \psi_f^\alpha(x)^b \approx i \lambda^a(x) T_a^{bc} \psi_f^\alpha(x)^c, \quad (2.50)$$

ou

$$\delta \psi_f^\alpha(x) \approx i \lambda^a(x) T_a \psi_f^\alpha(x). \quad (2.51)$$

Fica então claro que os campos de calibre se transformam seguindo a representação adjunta. Por outro lado, o fato de que os campos de quarks se transformam segundo a representação fundamental é um resultado experimental.¹⁰

Voltemos agora à lagrangiana de Yang-Mills [ver o primeiro termo na Equação (2.1)]. Em analogia com a QED, podemos definir o tensor $F_{\mu\nu}(x)$ calculando o comutador da derivada covariante. Usando a Equação (2.13) acima temos que

$$[D_\mu(x), D_\nu(x)] \psi = D_\mu(x) D_\nu(x) \psi - D_\nu(x) D_\mu(x) \psi \quad (2.53)$$

$$= -i \{ \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - i [A_\mu(x), A_\nu(x)] \} \psi, \quad (2.54)$$

onde ψ representa um vetor de prova no espaço de cor. Claramente, o tensor

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - i [A_\mu(x), A_\nu(x)] = i [D_\mu(x), D_\nu(x)] \quad (2.55)$$

reduz-se, no caso abeliano, ao tensor $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ da QED. Ao mesmo tempo, usando as regras de transformação (2.17) e (2.25) obtemos

$$\begin{aligned} [D_\mu(x)', D_\nu(x)'] \psi' &= D_\mu(x)' D_\nu(x)' \psi' - D_\nu(x)' D_\mu(x)' \psi' \\ &= g(x) [D_\mu(x), D_\nu(x)] g(x)^\dagger \psi'. \end{aligned} \quad (2.56)$$

¹⁰ A existencia de três tipos de cores para os quarks é confirmada, por exemplo, no cálculo da razão

$$\frac{\sigma(e^+ e^- \rightarrow \bar{q} q \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)}, \quad (2.52)$$

onde σ indica a seção de choque total e $\bar{q} q$ um par anti-quark-quark. De fato, esta grandeza é claramente proporcional ao número de pares anti-cor-cor que podem ser atribuídos ao par $\bar{q} q$.

Assim, o tensor $F_{\mu\nu}(x)$ também se transforma de forma covariante

$$F_{\mu\nu}(x)' = g(x) F_{\mu\nu}(x) g(x)^\dagger. \quad (2.57)$$

Expandindo¹¹ $F_{\mu\nu}(x)$ na base dos geradores T_b , i.e. tomando

$$F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x)^b T_b, \quad (2.58)$$

e usando a relação (2.6), podemos escrever

$$F^{\mu\nu}(x)^b F_{\mu\nu}(x)^b = \frac{1}{\rho} \text{Tr}[F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)]. \quad (2.59)$$

Devido à equação (2.57), à propriedade cíclica do traço e à relação $g(x)^\dagger = g(x)^{-1}$, a expressão acima é claramente invariante sob transformações locais de calibre.

Note que, diferentemente do caso da teoria eletromagnética de Maxwell, o tensor $F_{\mu\nu}(x)$ não é um invariante de calibre. Assim, os equivalentes dos campos elétricos e magnéticos, i.e. os campos cromo-elétricos $F_{0i}(x)$ e cromo-magnéticos $F_{ij}(x)$ (com $i, j = 1, 2, 3$), dependem do calibre e não são observáveis físicos. Note que podemos escrever também

$$F_{\mu\nu}(x) = D_\mu(x) A_\nu(x) - D_\nu(x) A_\mu(x) \quad (2.60)$$

$$= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - i [A_\mu(x), A_\nu(x)]. \quad (2.61)$$

Usando as Relações (2.5), (2.11) e (2.58) na Equação acima, obtemos enfim

$$F_{\mu\nu}(x)^b = \partial_\mu A_\nu(x)^b - \partial_\nu A_\mu(x)^b + f^{bcd} A_\mu(x)^c A_\nu(x)^d. \quad (2.62)$$

O termo quadrático nos campos de glúons na expressão para $F_{\mu\nu}(x)^b$ produz termos cúbicos e quárticos para os mesmos campos na densidade de lagrangiana (2.1) da QCD. São exatamente esses termos, ausentes na QED, que implicam que os glúons, ao contrário dos fótons, interagem entre si e é essa auto-interação dos glúons que é a origem da não-linearidade nas equações da QCD. É importante também lembrar que um termo de massa para os campos de glúons do

¹¹ Pela Equação (2.55) fica claro que $F_{\mu\nu}(x)$, assim como $A_\mu(x)$, pertence à álgebra de Lie do grupo SU(3).

tipo

$$m_A A_\mu(x)^b(x) A_\mu(x)^b = \frac{m_A}{\rho} \text{Tr}[A_\mu(x) A_\mu(x)] \quad (2.63)$$

não pode ser incluído na densidade de lagrangiana da QCD [Equação (2.1)], pois não é invariante sob transformações locais¹² de calibre [ver Equação (2.31)].

Na Equação (2.1), foi indicada com g_0 a chamada constante de acoplamento nua da teoria. É importante notar que podemos alterar a definição da derivada covariante em (2.13) sem afetar a propriedade de invariância da lagrangiana. Por exemplo, podemos re-escalar os campos de glúons usando a transformação¹³

$$A_\mu(x)^b \rightarrow g_0 A_\mu(x)^b. \quad (2.64)$$

Aplicando a mesma transformação ao tensor $F_{\mu\nu}(x)$, i.e. $F_{\mu\nu}(x) \rightarrow g_0 F_{\mu\nu}(x)$, a densidade de lagrangiana de Yang-Mills será escrita como

$$L_{YM}(x) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x)^b F_{\mu\nu}(x)^b, \quad (2.65)$$

com

$$F_{\mu\nu}(x)^b = \partial_\mu A_\nu(x)^b - \partial_\nu A_\mu(x)^b + g_0 f^{bcd} A_\mu(x)^c A_\nu(x)^d \quad (2.66)$$

ou (em forma matricial)

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - i g_0 [A_\mu(x), A_\nu(x)]. \quad (2.67)$$

A derivada covariante (2.13) deve ser portanto modificada, para

$$D_\mu(x) = 1 \partial_\mu - i g_0 A_\mu(x), \quad (2.68)$$

¹² O mesmo termo seria invariante por transformações globais de calibre, devido à propriedade cíclica do traço e à relação $g^\dagger = g^{-1}$.

¹³ Nas Equações (2.1), (2.13) e (2.62) (ou em suas versões modificadas após as transformações aqui descritas), a constante de acoplamento g_0 aparece somente como um fator global na definição da densidade de lagrangiana $L(x)$. Isso implica que essa constante não é fundamental para a dinâmica clássica da teoria. Por outro lado, na quantização por integrais de trajetória (ver o próximo capítulo), cada configuração dos campos apresenta um peso $e^{iS/\hbar}$ onde $S = \int dx L(x)$ é a ação. Assim, o valor de g_0 influencia o valor do peso $e^{iS/\hbar}$, i.e. a nível quântico a dinâmica do sistema depende também do valor da constante de acoplamento g_0 .

assim como a transformação de calibre para os campos de glúons (2.31), que passa a ser

$$[A_\mu(x)]' = g(x) A_\mu(x) g(x)^\dagger + \frac{i}{g_0} g(x) \partial_\mu g(x)^\dagger. \quad (2.69)$$

Além da transformação acima, podemos considerar as transformações

$$A_\mu(x)^b \rightarrow -A_\mu(x)^b, \quad F_{\mu\nu}(x)^b \rightarrow -F_{\mu\nu}(x)^b. \quad (2.70)$$

Neste caso, a densidade de lagrangiana da QCD $L(x)$ na Equação (2.1) não muda, mas as Equações (2.13), (2.31) and (2.61) ficam modificadas da seguinte forma

$$D_\mu(x) = 1 \partial_\mu + i A_\mu(x) \quad (2.71)$$

$$[A_\mu(x)]' = g(x) A_\mu(x) g(x)^\dagger - i g(x) \partial_\mu g(x)^\dagger \quad (2.72)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = -i [D_\mu(x), D_\nu(x)] \quad (2.73)$$

$$= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + i [A_\mu(x), A_\nu(x)]. \quad (2.74)$$

É possível também mudar o sinal de $\lambda^b(x)$ na Equação (2.2), i.e. considerar a transformação

$$\lambda^b(x) \rightarrow -\lambda^b(x). \quad (2.75)$$

Isso não muda as Equações (2.13), (2.31) and (2.61) mas mudaria o sinal nas Equações (2.40), (2.44), (2.49) e (2.51). Enfim, podemos juntar duas das transformações consideradas acima (ou até as três ao mesmo tempo). Por exemplo, aplicando as transformações (2.70) e (2.75),¹⁴ além das Equações (2.71)–(2.74) obtemos que a Equação (2.44) não muda, enquanto que a Equação (2.40) deve ser escrita como

$$\delta A_\mu(x)^c = \lambda^a(x) A_\mu(x)^b f^{abc} + \partial_\mu \lambda^c(x). \quad (2.76)$$

Essas diferentes convenções são usadas nos vários livros de texto e serão também utilizadas nesta tese quando necessário.

¹⁴ Essa é a convenção usada na Referência (3).

2.2 Teorias de Campos na Rede

Os ingredientes essenciais para a formulação de teorias de campos na rede são (12–15):

- o formalismo de integrais de trajetória de Feynman para a quantização da teoria,
- a formulação euclidiana, obtida pela continuação analítica da variável temporal a tempos imaginários,
- a introdução da rede discreta para o espaço-tempo como uma regularização ultravioleta.

A combinação dos dois primeiros ingredientes evidencia a equivalência das teorias quânticas de campo com a mecânica estatística clássica: no espaço euclidiano, uma integral de trajetória equivale à função de partição para um sistema estatístico correspondente. Esses tópicos serão discutidos no próximo capítulo. O terceiro ingrediente introduz a regularização da teoria e, combinado aos primeiros dois, permite que a teoria seja estudada no computador, através de simulações de Monte Carlo.

Antes de considerar o caso específico da QCD na rede, vamos mostrar como discretizar a lagrangiana de um campo escalar livre (real) $\varphi(x)$.¹⁵ Na Figura 2.1 é representada uma rede quadrada bidimensional. Em geral o comprimento de um elo (em unidades físicas) é chamado de espaçamento de rede a . Assim, podemos associar a uma rede quadrada bidimensional um volume $V = (Na)^2$, onde N é número de sítios em cada lado da rede. Mais em geral, no caso de uma rede de dimensão d qualquer, o volume físico da rede é dado por $V = (Na)^d$, onde N é de novo o número de sítios em cada lado da rede.

Relembramos que a densidade de lagrangiana (no contínuo) de um campo escalar livre de massa M é dada (no espaço de Minkowski) por

$$L_\varphi = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x) - \frac{1}{2} M^2 \varphi^2(x) \quad (2.77)$$

¹⁵ Uma descrição detalhada das propriedades da rede e da discretização da lagrangiana de um campo escalar livre pode ser encontrada na Referência (35).

Figura 2.1 – Representação gráfica de uma rede quadrada bidimensional. Os sítios são representados por bolinhas azuis. Os elos, que conectam dois sítios primeiros-vizinhos, são representados por linhas contínuas. A linha tracejada pode ser interpretada como uma continuação da rede até o infinito ou como uma condição de contorno periódica. [Figura retirada da Referência (36).]

e a ação correspondente pode ser escrita (em d dimensões) como

$$S_\varphi = \int dt d^{d-1}x L_\varphi = -\frac{1}{2} \int dt d^{d-1}x [\varphi(x) \square \varphi(x) + M^2 \varphi^2(x)] , \quad (2.78)$$

onde o símbolo $\square = \partial^\mu \partial_\mu = \partial^\mu g_{\mu\nu} \partial^\nu = \partial_t^2 - \nabla^2$ representa o d'alembertiano¹⁶ e foi realizada uma integração por partes. Para obter uma versão discretizada na rede da mesma lagrangiana, precisamos considerar as substituições

$$x \rightarrow na, \quad \varphi(x) \rightarrow \varphi(na). \quad (2.79)$$

Na Figura 2.2 é dada uma representação gráfica de um campo escalar $\varphi(x)$ em uma rede unidimensional. Ao mesmo tempo, como mencionado acima, precisamos passar do espaço de Minkowski para o espaço euclidiano (13). Para isso, consideramos a continuação da variável temporal t a tempos imaginários, i.e.

$$t = x_0 \rightarrow -ix_4. \quad (2.80)$$

¹⁶ Note que estamos usando a métrica $(+, -, -, -)$.

Assim, no espaço euclidiano a ação é dada por

$$S_\varphi = \frac{i}{2} \int d^d x \left[-\varphi(x) \square \varphi(x) + M^2 \varphi^2(x) \right] = i \int d^d x L_\varphi^{(E)} = i S_\varphi^{(E)}, \quad (2.81)$$

onde o símbolo $\square$ representa agora o operador laplaciano $\partial_t^2 + \nabla^2$, $L_\varphi^{(E)}$ é a densidade de lagrangiana euclidiana e $S_\varphi^{(E)}$ é a ação euclidiana.¹⁷ Portanto, a discretização da lagrangiana L_φ , i.e. da lagrangiana euclidiana

$$L_\varphi^{(E)} = -\frac{1}{2} \varphi(x) \square \varphi(x) + \frac{1}{2} M^2 \varphi^2(x), \quad (2.82)$$

requer a definição de uma versão discretizada $\square^{(r)}$ do laplaciano.¹⁸ Uma possibilidade é considerar, para um espaço euclidiano de dimensão d , a definição

$$\square^{(r)} \varphi(na) = \sum_{\mu=1}^d \left[\varphi(na + ae_\mu) + \varphi(na - ae_\mu) - 2\varphi(na) \right] \quad (2.83)$$

$$= -2d\varphi(na) + \sum_{\mu=1}^d \left[\varphi(na + ae_\mu) + \varphi(na - ae_\mu) \right], \quad (2.84)$$

onde e_μ representa um versor (vetor unitário) na direção μ . De fato, expandindo $\varphi(na \pm ae_\mu)$ em série de Taylor ao redor do ponto na obtemos

$$\varphi(na \pm ae_\mu) = \varphi(na) \pm a \partial_\mu \varphi(na) + \frac{a^2}{2} \partial_\mu^2 \varphi(na) + \mathcal{O}(a^3), \quad (2.85)$$

onde $\mathcal{O}(a^3)$ indica que foram desconsiderados termos de ordem a^m com $m \geq 3$. Substituindo a relação acima na Equação (2.84) é imediato obter

$$\frac{1}{a^2} \square^{(r)} \varphi(na) = \sum_{\mu=1}^d \partial_\mu^2 \varphi(na) + \mathcal{O}(a) = \square \varphi(x) + \mathcal{O}(a). \quad (2.86)$$

Este resultado demonstra que, no limite formal de $a \rightarrow 0$, o termo

$$-\frac{1}{2a^2} \varphi(na) \square^{(r)} \varphi(na) \quad (2.87)$$

reproduz o termo

$$-\frac{1}{2} \varphi(x) \square \varphi(x) \quad (2.88)$$

¹⁷ Como vamos ver no próximo capítulo, a quantização por integrais de trajetória apresenta um peso complexo e^{iS} no espaço de Minkowski e um peso real (tipo peso de Boltzmann) $e^{-S^{(E)}}$ no espaço euclidiano.

¹⁸ Quando necessário, indicaremos com $^{(r)}$ as grandezas definidas na rede.

Figura 2.2 – Representação gráfica de um campo escalar $\phi(x)$ em uma rede uni-dimensional (com quatro sítios). [Figura retirada da Referência (35).]

no espaço contínuo.

Relembramos aqui que, em geral na física de partículas, são usadas as chamadas unidades naturais $\hbar = c = 1$. Assim, nessas unidades, a ação $S = \int d^d x L(x)$ não tem dimensão física. Isto implica que a dimensão da densidade de lagrangiana $L(x)$ é l^{-d} , onde l indica aqui dimensão de comprimento, ou m^d , onde m indica dimensão de massa. Ao mesmo tempo, usando a Equação (2.82), fica claro que o campo ϕ apresenta dimensão física $l^{(-d+2)/2} = l^{1-d/2}$. Na rede, a integral que aparece na definição da ação é claramente substituída por

$$\int d^d x \rightarrow a^d \sum_n. \quad (2.89)$$

Para obter uma ação discretizada que também não tenha dimensão física, precisamos re-escalar todas as grandezas físicas que aparecem na densidade de lagrangiana $L(x)$. Em particular, no caso da Equação (2.82), podemos escrever

$$M \rightarrow \frac{M^{(r)}}{a}, \quad \phi(x) \rightarrow a^{1-d/2} \phi^{(r)}(na). \quad (2.90)$$

Claramente, $M^{(r)}$ e $\phi^{(r)}(na)$ são grandezas adimensionais. Usando a Equação (2.86), isto implica

$$L_\phi^{(E)}(x) = -\frac{1}{2} \phi(x) \square \phi(x) + \frac{1}{2} M^2 \phi^2(x) \quad (2.91)$$

$$\rightarrow \frac{(a^{1-d/2})^2}{a^2} \left[-\frac{1}{2} \phi^{(r)}(na) \square^{(r)} \phi^{(r)}(na) + \frac{1}{2} (M^{(r)})^2 (\phi^{(r)})^2(na) \right] \quad (2.92)$$

$$\equiv a^{-d} L_\phi^{(r)}(na). \quad (2.93)$$

Juntando esse resultado com a substituição (2.89) temos que a ação de rede

$$S^{(r)} \equiv \sum_n L_\phi^{(r)}(na) \quad (2.94)$$

também é adimensional.

Os resultados apresentados acima requerem algumas importantes considerações (13). A primeira é que, claramente, existem infinitas discretizações para o laplaciano em uma rede. Em particular, podem-se considerar definições que fornecem menores erros de discretização, i.e.

$$\frac{1}{a^2} \square^{(r)} \phi^{(r)}(na) = \square \phi(x) + \mathcal{O}(a^m) \quad (2.95)$$

com $m > 1$. Usando a expressão (2.84) temos também que o termo $\phi^{(r)}(na) \square^{(r)} \phi^{(r)}(na)/2$ na ação de rede introduz para o campo $\phi^{(r)}(na)$ uma interação entre primeiros vizinhos. Em geral, discretizações mais complicadas, que permitem menores erros de discretização, incluem também interações entre segundos vizinhos, terceiros vizinhos, etc. A segunda consideração é que, para re-obter a teoria no contínuo, é necessário em primeiro lugar considerar o limite (termodinâmico) $N \rightarrow \infty$ e, depois, levar o espaçamento de rede a a zero. Claramente, nas simulações numéricas, o valor de N não pode ser infinito. Neste caso, precisamos considerar um valor de N suficientemente grande para evitar efeitos de volume finito. Ao mesmo tempo, o valor de a deve ser suficientemente pequeno para podermos desconsiderar os efeitos de discretização da teoria. De qualquer modo, o lado da rede Na , em unidades físicas, deve ser da mesma ordem ou maior do que dos comprimentos característicos dos fenômenos estudados. Por exemplo, em geral, um lado de rede Na de alguns fermi é suficiente para estudar fenômenos hadrônicos na QCD na rede. Porém, para o estudo do limite infra-vermelho da teoria, podem ser necessários volumes maiores. Enfim, é claro que, como consequência da discretização do espaço-tempo, a teoria na rede não é invariante pelo grupo de Poincaré. Em particular, são perdidas as simetrias espaço-temporais típicas das teorias no contínuo, i.e. a invariância por rotações e por translações. Mais exatamente, essas simetrias estão presentes na rede de uma forma “fraca”. Por exemplo, uma rede quadrada é ainda invariante por rotações de 90 graus e, no caso de uma rede infinita ou com condições de contorno periódicas, a teoria é ainda

invariante por translações por múltiplos inteiros do parâmetro de rede a . Por outro lado, as simetrias espaço-temporais do contínuo são recuperadas no limite do contínuo $a \rightarrow 0$.

2.3 Teorias de Calibre na Rede

Consideremos agora a discretização da lagrangiana (2.1). Os campos de matéria fermiônicos $\psi_f^\alpha(x)^b$ podem ser claramente representados na rede como campos que tomam valores nos sítios $x = na$ da rede. Por outro lado, devido à presença do índice de Lorentz μ , os campos de calibre $A_\mu(x)^b$ são naturalmente representados como campos que tomam valores nos elos $(x, x + ae_\mu) = (na, na + ae_\mu)$ da rede.¹⁹ Como já foi explicado na seção anterior, a rede quebra as simetrias (contínuas) de translação e de rotação. Pode-se verificar que uma formulação de rede para teorias de calibre baseada diretamente nos campos de calibre $A_\mu(x)^b$ também quebra a simetria de calibre (37). Essas simetrias podem em geral ser recuperadas no limite de espaçamento de rede a que vai para zero mas, claramente, seria mais interessante considerar uma teoria de calibre na rede que conserve a simetria de calibre de forma exata. Não podendo essa teoria ser baseada nos campos de calibre $A_\mu(x)^b$, a questão fundamental é quais são os objetos matemáticos que precisam ser definidos nos elos da rede para preservar a invariância por transformações locais de calibre. Ao mesmo tempo, é preciso definir como esses objetos estão relacionados aos campos de calibre $A_\mu(x)^b$ no contínuo, para poder verificar se a formulação de rede reproduz a ação da QCD no limite (formal) de espaçamento de rede a que vai para zero.

A resposta a essas perguntas foi dada por K. Wilson em 1974 (11). As variáveis de elo, indicadas por ele com $U_\mu(x)$, são tomadas como elementos do grupo SU(3) e a relação com os campos de glúons $A_\mu(x)$ é²⁰

$$U_\mu(x) = e^{[ia g_0 A_\mu(x + \frac{a}{2} e_\mu)]}. \quad (2.96)$$

A interpretação física das variáveis de elo $U_\mu(x)$ fica clara se tomarmos o caso do eletromagnetismo (ou seja, vamos começar considerando a QED na rede) e lembrarmos como muda a

¹⁹ Para simplificar a notação, vamos aqui usar a notação do contínuo x , em vez de na , para indicar os pontos da rede.

²⁰ Relembramos que um elemento do grupo SU(3) pode sempre ser escrito exponenciando-se um elemento da álgebra de Lie correspondente [ver Equação (2.2)].

função de onda $\psi(x)$ de uma partícula carregada (com carga q) em presença de um campo eletromagnético, representado pelos potenciais vetor e escalar $A_\mu(x)$. De fato, usando a equação de Schrödinger, quando a partícula se movimenta de um ponto P até um ponto Q ao longo de um percurso γ , a sua função de onda $\psi(x)$ adquire uma fase dada por (1, 3)

$$R(P, Q, \gamma; A) = \exp \left[i q \int_{P, \gamma}^Q A_\mu(x) dx^\mu \right], \quad (2.97)$$

onde a integral é uma integral de linha ao longo do percurso γ . O fator $R(P, Q, \gamma; A)$ efetua o chamado *transporte paralelo* da função de onda $\psi(x)$ do ponto P até o ponto Q , ao longo do percurso γ . O papel do transporte paralelo é o de permitir comparar de forma unívoca as fases da função de onda $\psi(x)$ em dois pontos diferentes do espaço-tempo. Relembramos que a fase da função de onda não tem significado físico direto e que o valor dessa fase pode ser mudado independentemente em cada ponto do espaço-tempo através de uma transformação de calibre

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\lambda(x)} \psi(x). \quad (2.98)$$

A mesma transformação modifica também os potenciais vetor e escalar

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{q} \partial_\mu \lambda(x). \quad (2.99)$$

Isto implica para o fator $R(P, Q, \gamma; A)$ a transformação

$$R(P, Q, \gamma; A) \rightarrow e^{i\lambda(Q)} R(P, Q, \gamma; A) e^{-i\lambda(P)}. \quad (2.100)$$

Assim, temos

$$R(P, Q, \gamma; A) \psi(P) \rightarrow e^{i\lambda(Q)} R(P, Q, \gamma; A) \psi(P). \quad (2.101)$$

Sendo que o fator $e^{i\lambda(Q)}$ é exatamente a mudança de fase produzida pela transformação de calibre em uma função de onda no ponto Q , fica claro que para comparar (de forma unívoca) a função de onda $\psi(P)$ com a função de onda $\psi(Q)$ precisamos primeiro “transportar paralelamente” a função de onda $\psi(x)$ do ponto P até o ponto Q . De fato, a diferença $\psi(Q) - \psi(P)$ não é bem definida sob transformações locais de calibre. Por outro lado, a diferença

$$\psi(Q) - R(P, Q, \gamma; A) \psi(P) \quad (2.102)$$

transforma-se de forma simples sob transformações locais de calibre. Note também que no caso de pontos P e Q muito próximos temos

$$\psi(Q) - R(P, Q, \gamma; A) \psi(P) \approx \psi(Q) - [1 + i q A_\mu(P) dx^\mu] \psi(P) \quad (2.103)$$

$$= \psi(Q) - \psi(P) - i q A_\mu(P) dx^\mu \psi(P) \quad (2.104)$$

$$\approx \partial_\mu \psi(P) dx^\mu - i q A_\mu(P) dx^\mu \psi(P). \quad (2.105)$$

O resultado na Equação (2.105) pode ser escrito como $D_\mu(P) \psi(P) dx^\mu$ onde²¹

$$D_\mu(P) = \partial_\mu - i q A_\mu(P) \quad (2.106)$$

é a derivada covariante no ponto P . Ao mesmo tempo, para pontos P e Q muito próximos com $Q = P + a e_\nu$, temos

$$\int_{P, \gamma}^Q A_\mu(x) dx^\mu = \int_P^{P+ae_\nu} A_\nu(x) dx^\nu = a A_\nu(S), \quad (2.107)$$

onde nesse caso não é considerada a soma no índice ν , S é um ponto no intervalo $[P, Q] = [P, P + a e_\nu]$ e no último passo foi usado o teorema do valor médio para a integração. Logo, em primeira aproximação, no limite de a pequeno, podemos escrever

$$R(P, Q, \gamma; A) \approx \exp \left[i q a A_\nu(x + \frac{a}{2} e_\nu) \right]. \quad (2.108)$$

Comparando o resultado acima com a Equação (2.96) fica então claro que as variáveis de elo $U_\mu(x)$ efetuam o transporte paralelo do ponto x até o ponto $x + a e_\mu$ [ao longo do elo $(x, x + a e_\mu)$]. Ao mesmo tempo, a relação entre $U_\mu(x)$ e $A_\mu(x + \frac{a}{2} e_\mu)$ na Equação (2.96) permite obter um erro de discretização menor em comparação com a relação (aparentemente mais natural)

$$U_\mu(x) = e^{[i a g_0 A_\mu(x)]}. \quad (2.109)$$

De fato, podemos calcular a integral $\int_P^{P+ae_\nu} A_\nu(x) dx^\nu$ expandindo o campo de calibre ao redor

²¹ Essa equação é o correspondente abeliano da Equação (2.68).

do ponto $P + ae_v/2$ ou ao redor do ponto P . No primeiro caso temos

$$\int_P^{P+ae_v} A_v(x) dx^v = \int_P^{P+ae_v} [A_v(P + ae_v/2) + (x - P - ae_v/2) \partial_v A_v(P + ae_v/2) + \mathcal{O}((x - P - ae_v/2)^2)] dx^v \quad (2.110)$$

$$= aA_v(P + ae_v/2) + \mathcal{O}(a^3), \quad (2.111)$$

pois a integral do segundo termo é zero. Isto não acontece quando a expansão é ao redor de P , já que neste caso o resultado da integração é $aA_v(P) + \mathcal{O}(a^2)$.

O último passo para chegar à ação (discretizada) da teoria na rede é estabelecer a relação entre as variáveis de elo $U_\mu(x)$ e o tensor $F_{\mu\nu}(x)$. Para isso, ainda no caso da QED, é útil relembrar o teorema de Stokes (3). Seja σ uma superfície no espaço com fronteira dada pela curva γ . Então, a circuitação de um campo vectorial A ao longo de γ é igual à integral sobre σ da componente normal do rotacional de A :

$$\oint_\gamma A \cdot dx = \int_\sigma \nabla \times A \cdot d\sigma. \quad (2.112)$$

Quando A é o potencial vetor, o rotacional de A é o campo magnético B , i.e. a circuitação de A ao longo da curva fechada γ está relacionada às componentes $F_{ij}(x)$ (com $i, j = 1, 2, 3$) do tensor $F_{\mu\nu}(x)$. Assim, torna-se razoável hipotizar que o chamado loop de Wilson (ver a Figura 2.3)

$$W_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x) U_\nu(x + ae_\mu) U_\mu(x + ae_\nu)^\dagger U_\nu(x)^\dagger \quad (2.113)$$

possa estar relacionado à ação de Yang-Mills.²² De fato, usando a relação $U_\mu(x)^\dagger = U_\mu(x)^{-1}$ e a Equação (2.96) temos, no caso da QED,

$$W_{\mu\nu}(x) = \exp \left\{ iag_0 \left[A_\mu(x + \frac{a}{2}e_\mu) + A_\nu(x + ae_\mu + \frac{a}{2}e_\nu) - A_\mu(x + ae_\nu + \frac{a}{2}e_\mu) - A_\nu(x + \frac{a}{2}e_\nu) \right] \right\}. \quad (2.114)$$

²² Relembramos aqui que, para calcular a circuitação de A , é necessário definir um sentido para a integral de linha $\oint_\gamma$. Por convenção, o loop de Wilson é percorrido no sentido anti-horário. Ao mesmo tempo, se indicamos com $U_\mu(x)$ o elemento do grupo $SU(3)$ definido no elo $(x, x + ae_\mu)$, quando o mesmo elo é percorrido no sentido inverso, i.e. de $x + ae_\mu$ até x , a variável de elo associada é $U_\mu(x)^\dagger = U_\mu(x)^{-1}$.

Expandindo agora os campos A ao redor do ponto x , i.e. tomando por exemplo

$$A_\nu(x + ae_\mu + \frac{a}{2}e_\nu) = A_\nu(x) + \frac{a}{2}\partial_\nu A_\nu(x) + a\partial_\mu A_\nu(x) + \mathcal{O}(a^2), \quad (2.115)$$

obtemos

$$W_{\mu\nu}(x) = \exp \{ ia^2 g_0 [\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)] + \mathcal{O}(ia^3 g_0) \} \quad (2.116)$$

$$= \exp [ia^2 g_0 F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(ia^3 g_0)] \quad (2.117)$$

$$\approx 1 + ia^2 g_0 F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} a^4 g_0^2 F_{\mu\nu}(x)^2. \quad (2.118)$$

Assim, considerando

$$1 - \Re W_{\mu\nu}(x) \approx \frac{1}{2} a^4 g_0^2 F_{\mu\nu}(x)^2, \quad (2.119)$$

onde $\Re$ indica a parte real, obtemos a relação entre o loop de Wilson $W_{\mu\nu}(x)$ e a lagrangiana da QED. Logo, a ação de rede para a QED é dada por

$$S_{QED} = \beta \sum_x \sum_{\mu < \nu} [1 - \Re W_{\mu\nu}(x)] \quad (2.120)$$

com $\beta = 1/g_0^2$. No limite de espaçamento de rede a pequeno temos

$$S_{QED} \approx a^4 \sum_x \frac{1}{2} \sum_{\mu < \nu} F_{\mu\nu}(x)^2 \quad (2.121)$$

$$= a^4 \sum_x \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu} F_{\mu\nu}(x)^2. \quad (2.122)$$

Para entender o erro de discretização cometido na equação acima, observe que, na expansão para a pequeno, cada derivada acrescenta uma potência de a e cada potencial $A_\mu(x)$ acrescenta uma potência de $ia g_0$, i.e. o termo geral da expansão é do tipo $(a\partial)^n (ia g_0 A)^m$. A consideração da parte real $\Re$ na Equação (2.119) deixa somente termos reais, i.e. m deve ser par. Ao mesmo tempo, termos que mudam de sinal sob a transformação $x \rightarrow -x$ não contribuem para a ação. Assim, n também deve ser par e o erro cometido na relação acima pode ser escrito como $a^{2l} g_0^{2j}$, com $l \geq 3$ e $j \geq 1$. De fato, pode-se verificar (38) que o primeiro termo desconsiderado na

Figura 2.3 – Representação gráfica do loop de Wilson $W_{\mu\nu}(x)$ em termos das variáveis de elos $U_{\mu}(x)$. [Figura retirada da Referência (36)].

Equação (2.119) é proporcional a

$$a^6 g_0^2 F_{\mu\nu}(x) (\partial_{\mu}^2 + \partial_{\nu}^2) F_{\mu\nu}(x). \quad (2.123)$$

Logo, no limite $a \rightarrow 0$ temos

$$S_{QED} = a^4 \sum_x \frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu} [F_{\mu\nu}(x)^2 + \mathcal{O}(a^2)]. \quad (2.124)$$

O resultado acima pode ser estendido ao caso não-abeliano, usando-se a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}, \quad (2.125)$$

onde A e B são matrizes. Logo temos

$$\begin{aligned} U_{\mu}(x) U_{\nu}(x + a e_{\mu}) \approx & \exp \left\{ i a g_0 A_{\mu}(x + \frac{a}{2} e_{\mu}) + i a g_0 A_{\nu}(x + a e_{\mu} + \frac{a}{2} e_{\nu}) \right. \\ & \left. - \frac{a^2 g_0^2}{2} [A_{\mu}(x + \frac{a}{2} e_{\mu}), A_{\nu}(x + a e_{\mu} + \frac{a}{2} e_{\nu})] \right\} \end{aligned} \quad (2.126)$$

e, expandindo os campos A , o argumento da exponencial fornece (sem soma nos índices repetidos)

$$\begin{aligned} & i a g_0 A_{\mu}(x) + i a g_0 A_{\nu}(x) + i \frac{a^2 g_0}{2} \partial_{\mu} A_{\mu}(x) + i \frac{a^2 g_0}{2} \partial_{\nu} A_{\nu}(x) \\ & + i a^2 g_0 \partial_{\mu} A_{\nu}(x) - \frac{a^2 g_0^2}{2} [A_{\mu}(x), A_{\nu}(x)] + \dots \end{aligned} \quad (2.127)$$

Da mesma forma, temos

$$U_\mu(x + ae_\nu)^\dagger U_\nu(x)^\dagger \approx \exp \left\{ -ia g_0 A_\mu(x + ae_\nu + \frac{a}{2}e_\mu) - ia g_0 A_\nu(x + \frac{a}{2}e_\nu) - \frac{a^2 g_0^2}{2} [A_\mu(x + ae_\nu + \frac{a}{2}e_\mu), A_\nu(x + \frac{a}{2}e_\nu)] \right\}. \quad (2.128)$$

Nesse caso o argumento da exponencial pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & -ia g_0 A_\mu(x) - ia g_0 A_\nu(x) - i \frac{a^2 g_0}{2} \partial_\mu A_\mu(x) - i \frac{a^2 g_0}{2} \partial_\nu A_\nu(x) \\ & - ia^2 g_0 \partial_\nu A_\mu(x) - \frac{a^2 g_0^2}{2} [A_\mu(x), A_\nu(x)] + \dots \end{aligned} \quad (2.129)$$

Juntando os resultados acima e usando mais uma vez a fórmula (2.125) obtemos

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}(x) \approx & \exp \left\{ ia^2 g_0 \partial_\mu A_\nu(x) - ia^2 g_0 \partial_\nu A_\mu(x) - a^2 g_0^2 [A_\mu(x), A_\nu(x)] \right. \\ & \left. + a^2 g_0^2 [A_\mu(x) + A_\nu(x), A_\mu(x) + A_\nu(x)] \right\} \end{aligned} \quad (2.130)$$

$$= \exp \left\{ ia^2 g_0 (\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig_0 [A_\mu(x), A_\nu(x)]) \right\} \quad (2.131)$$

$$= \exp \left\{ ia^2 g_0 F_{\mu\nu}(x) \right\}, \quad (2.132)$$

onde

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig_0 [A_\mu(x), A_\nu(x)]. \quad (2.133)$$

Note que a definição acima para o tensor $F_{\mu\nu}(x)$ é obtida aplicando-se as transformações (2.64) e (2.70) à definição (2.61). Enfim, expandindo a exponencial na Equação (2.132) temos

$$W_{\mu\nu}(x) \approx 1 + ia^2 g_0 F_{\mu\nu}(x) - \frac{a^4 g_0^2}{2} F_{\mu\nu}(x)^2 \quad (2.134)$$

e para isolar o termo $F_{\mu\nu}(x)^2$ é suficiente considerar²³

$$1 - \frac{W_{\mu\nu}(x) + W_{\mu\nu}(x)^\dagger}{2} \approx \frac{a^4 g_0^2}{2} F_{\mu\nu}(x)^2. \quad (2.135)$$

²³ Relembramos que o tensor $F_{\mu\nu}(x)$ pertence à álgebra de Lie do grupo SU(3), cujas matrizes são hermitianas.

Usando agora a relação (2.59) fica claro que, no limite de $a \rightarrow 0$, a ação

$$S = -\frac{1}{g_0^2} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \frac{Tr}{\rho} \left\{ 1 - \frac{W_{\mu\nu}(x) + W_{\mu\nu}(x)^\dagger}{2} \right\} \quad (2.136)$$

fornece

$$-\frac{a^4}{2} \sum_x \sum_{\mu < \nu} F^{\mu\nu}(x)^b F_{\mu\nu}(x)^b = -\frac{a^4}{4} \sum_x \sum_{\mu, \nu} F^{\mu\nu}(x)^b F_{\mu\nu}(x)^b \quad (2.137)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{4} \int dt d^3x F_{\mu\nu}(x)^b F^{\mu\nu}(x)^b. \quad (2.138)$$

Esta é a ação de Yang-Mills quando as transformações (2.64) e (2.70) são aplicadas à definição (2.1). O resultado acima pode facilmente ser estendido ao caso de dimensão d qualquer. De fato, é claro que a ação

$$S = -\frac{a^{d-4}}{g_0^2} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \frac{Tr}{\rho} \left\{ 1 - \frac{W_{\mu\nu}(x) + W_{\mu\nu}(x)^\dagger}{2} \right\} \quad (2.139)$$

reduz-se à ação de Yang-Mills em d dimensões

$$S_{YM,d} = -\frac{1}{4} \int dt d^{d-1}x F_{\mu\nu}(x)^b F^{\mu\nu}(x)^b \quad (2.140)$$

no limite de espaçamento de rede a pequeno.

Note que, até agora nesta seção, as contas foram feitas no espaço de Minkowski. Como mencionado na Seção 2.2 acima, para a formulação de rede da QCD precisamos considerar a teoria no espaço euclidiano (13), i.e. aplicar a continuação da variável temporal t a tempos imaginários [ver Equação (2.80)]. Ao mesmo tempo, devemos também aplicar a transformação²⁴

$$A_t = A_0 \rightarrow iA_4. \quad (2.142)$$

Isto não modifica as componentes $F_{ij}(x)$ com $i, j = 1, 2, 3$, mas implica

$$F_{0i}(x) \rightarrow iF_{4i}^{(E)}(x). \quad (2.143)$$

²⁴ Note que no caso abeliano com $A_\mu(x) = \partial_\mu \lambda(x)$ a transformação (2.142) é uma consequência da transformação (2.80). Também, as transformações (2.80) e (2.142) implicam

$$D_t = D_0 \rightarrow iD_4. \quad (2.141)$$

Assim, temos

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) = F^{\mu\nu} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma} \rightarrow -(F^{(E)})^{\mu\nu}(x) \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} (F^{(E)})^{\rho\sigma}(x) \quad (2.144)$$

e

$$S_{YM,d} = \frac{i}{4} \int d^d x (F^{(E)})^{\mu\nu}(x)^b (F^{(E)})_{\mu\nu}(x)^b = i S_{YM,d}^{(E)}, \quad (2.145)$$

onde $S_{YM,d}^{(E)}$ é a ação de Yang-Mills no espaço euclidiano. Usando os resultados obtidos acima é evidente que a ação

$$S = \frac{a^{d-4}}{g_0^2} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \frac{Tr}{\rho} \left\{ 1 - \frac{W_{\mu\nu}(x) + W_{\mu\nu}(x)^\dagger}{2} \right\} \quad (2.146)$$

reduz-se à ação de Yang-Mills no espaço euclidiano (em d dimensões)

$$S_{YM,d}^{(E)} = \frac{1}{4} \int d^d x (F^{(E)})^{\mu\nu}(x)^b (F^{(E)})_{\mu\nu}(x)^b \quad (2.147)$$

no limite $a \rightarrow 0$.

Note que não foi ainda especificada a representação para as variáveis de elo $U_\mu(x)$. Considerando uma representação R qualquer de dimensão d_r , i.e. matrizes $d_r \times d_r$ que pertencem ao grupo $SU(3)$, podemos escrever a ação de rede como

$$S = \frac{\beta}{d_r} \sum_x \sum_{\mu < \nu} Tr \left\{ 1 - \frac{W_{\mu\nu}(x) + W_{\mu\nu}(x)^\dagger}{2} \right\} \quad (2.148)$$

$$= \frac{\beta}{d_r} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \left\{ d_r - Tr \frac{W_{\mu\nu}(x) + W_{\mu\nu}(x)^\dagger}{2} \right\} \quad (2.149)$$

$$= \frac{\beta}{d_r} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \left\{ d_r - \Re Tr W_{\mu\nu}(x) \right\}. \quad (2.150)$$

No limite $a \rightarrow 0$ obtemos (no caso de dimensão espaço-temporal d qualquer)

$$S \approx \frac{\beta}{d_r} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \left\{ d_r - \text{Tr} \left[1 - \frac{a^4 g_0^2}{2} F_{\mu\nu}(x)^2 \right] \right\} \quad (2.151)$$

$$= \frac{\beta a^4 g_0^2}{2d_r} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \text{Tr} F_{\mu\nu}(x)^2 \quad (2.152)$$

$$= \frac{\beta a^{4-d} g_0^2}{2d_r} \frac{a^d}{2} \sum_x \sum_{\mu, \nu} \text{Tr} F_{\mu\nu}(x)^2 \quad (2.153)$$

$$= \frac{\beta a^{4-d} g_0^2 \rho}{d_r} \frac{a^d}{4} \sum_x \sum_{\mu, \nu} F^{\mu\nu}(x)^b F_{\mu\nu}(x)^b, \quad (2.154)$$

onde usamos a Equação (2.59). Assim, fixando

$$\beta = d_r / (a^{4-d} g_0^2 \rho), \quad (2.155)$$

temos que a ação de rede (2.148) reproduz a ação euclidiana de Yang-Mills d -dimensional (2.147) no limite do contínuo. Pode-se também verificar (39) que, em analogia com o caso abeliano [ver Equação (2.123)], o primeiro termo desconsiderado na relação

$$S_{YM,d}^{(E)} \approx \frac{a^d}{4} \sum_x \sum_{\mu, \nu} F^{\mu\nu}(x)^b F_{\mu\nu}(x)^b \quad (2.156)$$

é proporcional a^{25}

$$a^{d+2} g_0^2 \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}(x) [D_\mu(x)^2 + D_\nu(x)^2] F_{\mu\nu}(x) \right\}, \quad (2.157)$$

i.e. o erro de discretização é da ordem de a^2 .

É importante ressaltar aqui que a constante β , como todas as grandezas de rede, deve ser adimensional. Isto implica que para $d \neq 4$ a constante de acoplamento nua g_0 tem dimensão física $l^{-2+d/2}$. Podemos chegar ao mesmo resultado observando que na Equação (2.96) a grandeza $a g_0 A_\mu(x + \frac{a}{2} e_\mu)$ também deve ser adimensional. Assim, $g_0 A_\mu(x)^b$ tem sempre dimensão física l^{-1} e, considerando a Equação (2.66), é claro que

$$[F_{\mu\nu}(x)^b] = l^{-1} [A_\mu(x)^b] = l^{-2} [g_0]^{-1}, \quad (2.158)$$

onde com $[\cdot]$ estamos indicando aqui a dimensão física da grandeza considerada. Usando enfim

²⁵ Note que este termo é invariante por transformações locais de calibre.

a definição da ação de Yang-Mills obtemos

$$1 = [S_{YM}] = l^d \left[F_{\mu\nu}(x)^b \right]^2. \quad (2.159)$$

Logo, os resultados acima fornecem

$$[g_0] = l^{-2} \left[F_{\mu\nu}(x)^b \right]^{-1} = l^{-2} l^{d/2}. \quad (2.160)$$

Ao mesmo tempo temos que a dimensão física dos campos de glúons $A_\mu(x)^b$ é $l^{1-d/2}$.

Para definir a representação a ser usada na Equação (2.148), devemos voltar a considerar o setor fermiônico da QCD.²⁶ Relembramos que a lagrangiana de Dirac [ver Equação (2.20)] é dada (no contínuo e no espaço de Minkowski) por

$$L_D(x) = \overline{\psi}_f^\alpha(x)^b \left[i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} D_\mu(x)^{bc} - m_f \delta_{\alpha\beta} \delta^{bc} \right] \psi_f^\beta(x)^c. \quad (2.161)$$

Neste caso (13), a continuação da variável temporal t a tempos imaginários além das transformações (2.80) e (2.142), i.e. da transformação (2.141), impõe também a consideração das transformações²⁷

$$\gamma^i \rightarrow i\gamma_{(E)}^i, \quad \gamma^0 \rightarrow \gamma_{(E)}^4, \quad (2.162)$$

com $i = 1, 2, 3$. Assim, partindo da ação de Dirac no espaço de Minkowski temos

$$S_D = \int dt d^{d-1}x L_D(x) \quad (2.163)$$

$$\rightarrow -i \int d^d x \overline{\psi}_f^\alpha(x)^b \left[-(\gamma_{(E)}^\mu)_{\alpha\beta} D_\mu(x)^{bc} - m_f \delta_{\alpha\beta} \delta^{bc} \right] \psi_f^\beta(x)^c \quad (2.164)$$

$$= iS_D^{(E)} \quad (2.165)$$

onde

$$S_D^{(E)} = \int d^d x \overline{\psi}_f^\alpha(x)^b \left[(\gamma_{(E)}^\mu)_{\alpha\beta} D_\mu(x)^{bc} + m_f \delta_{\alpha\beta} \delta^{bc} \right] \psi_f^\beta(x)^c \quad (2.166)$$

é a ação de Dirac no espaço euclidiano. Uma discretização natural da ação acima é obtida

²⁶ Nesta tese todas as simulações numéricas são feitas na chamada aproximação *quenched*, i.e. sem incluir o setor fermiônico na ação da QCD na rede. Assim, não serão discutidos aqui todos os problemas relacionados à discretização na rede de campos fermiônicos [ver por exemplo (13)], devidos à presença de 2^d excitações fermiônicas para cada sabor de quark quando a lagrangiana de Dirac é discretizada na rede.

²⁷ Note que as matrizes de Dirac $\gamma_{(E)}^\mu$ no espaço euclidiano satisfazem as relações de anti-comutação $\{ \gamma_{(E)}^\mu, \gamma_{(E)}^\nu \} = 2\delta^{\mu\nu}$.

considerando-se a ação de rede²⁸

$$\begin{aligned}
S = \sum_x & \left[\frac{1}{2} \overline{(\psi_f^{(r)})}^\alpha (x)^b (\gamma_{(E)}^\mu)_{\alpha\beta} [U_\mu(x)]^{bc} (\psi_f^{(r)})^\beta (x + ae_\mu)^c \right. \\
& - \frac{1}{2} \overline{(\psi_f^{(r)})}^\alpha (x)^b (\gamma_{(E)}^\mu)_{\alpha\beta} [U_\mu(x - ae_\mu)^\dagger]^{bc} (\psi_f^{(r)})^\beta (x - ae_\mu)^c \\
& \left. + m_f^{(r)} \overline{(\psi_f^{(r)})}^\alpha (x)^b (\psi_f^{(r)})^\alpha (x)^b \right], \quad (2.167)
\end{aligned}$$

onde as grandezas (adimensionais) de rede $m_f^{(r)}$ e $\psi_f^{(r)}$ são definidas como²⁹

$$m_f^{(r)} = m_f a \quad (2.168)$$

$$\psi_f^{(r)} = \psi_f a^{(d-1)/2} \quad (2.169)$$

$$\overline{\psi_f^{(r)}} = \overline{\psi_f} a^{(d-1)/2}. \quad (2.170)$$

De fato, partindo de (2.96) e usando expansões de Taylor, temos

$$[U_\mu(x)]^{bc} \approx 1^{bc} + i a g_0 A_\mu(x + ae_\mu/2)^{bc} \approx 1^{bc} + i a g_0 A_\mu(x)^{bc} \quad (2.171)$$

$$[U_\mu(x - ae_\mu)^\dagger]^{bc} \approx 1^{bc} - i a g_0 A_\mu(x - ae_\mu/2)^{bc} \approx 1^{bc} - i a g_0 A_\mu(x)^{bc} \quad (2.172)$$

e

$$(\psi_f^{(r)})^\beta (x \pm ae_\mu)^c \approx (\psi_f^{(r)})^\beta (x)^c \pm a \partial_\mu (\psi_f^{(r)})^\beta (x)^c, \quad (2.173)$$

obtemos

$$\begin{aligned}
S \approx \sum_x & a \overline{(\psi_f^{(r)})}^\alpha (x)^b (\gamma_{(E)}^\mu)_{\alpha\beta} \left[1^{bc} \partial_\mu + i g_0 A_\mu(x)^{bc} \right] (\psi_f^{(r)})^\beta (x)^c \\
& + m_f^{(r)} \overline{(\psi_f^{(r)})}^\alpha (x)^b (\psi_f^{(r)})^\alpha (x)^b \quad (2.174)
\end{aligned}$$

$$= a^d \sum_x \left[\overline{\psi_f}^\alpha (x)^b (\gamma_{(E)}^\mu)_{\alpha\beta} D_\mu(x)^{bc} \psi_f^\beta (x)^c + m_f \overline{\psi_f}^\alpha (x)^b \psi_f^\alpha (x)^b \right]. \quad (2.175)$$

²⁸ Como mostrado na Referência (13), a discretização natural para a lagrangiana de Dirac para o caso livre é obtida usando a derivada discretizada $[(\psi_f^{(r)})^\beta (x + ae_\mu)^c - (\psi_f^{(r)})^\beta (x - ae_\mu)^c] / 2$. Por outro lado, para o caso não-livre, i.e. quando queremos invariância da teoria por transformações locais de calibre, a comparação de funções em pontos diferentes do espaço-tempo — i.e. o cálculo de derivadas — requer o uso do transporte paralelo, como explicado no início desta seção. Na rede, a variável de elo $U_\mu(x)$ efetua o transporte paralelo do ponto x até o ponto $x + ae_\mu$ e $U_\mu(x)^\dagger$ efetua o transporte paralelo no sentido inverso, i.e. de $x + ae_\mu$ até x .

²⁹ É fácil verificar, considerando a Equação (2.166) e seguindo um procedimento análogo ao que foi feito na Seção 2.2 para o campo escalar, que os campos de quarks ψ_f e $\overline{\psi_f}$ têm dimensão física $l^{(1-d)/2}$ no espaço-tempo d dimensional.

Note que usamos aqui as definições (2.168)–(2.170) e a relação $D_\mu(x)^{bc} = 1^{bc}\partial_\mu + ig_0 A_\mu(x)^{bc}$. Como para a Equação (2.133), essa definição de derivada covariante é obtida aplicando as transformações (2.64) e (2.70) à definição inicial (2.12).

A ação de rede (2.167) deixa evidente que a representação das variáveis de elo $U_\mu(x)$ depende da representação dos campos de quarks $\psi_f^\alpha(x)^b$. Como explicado na Seção 2.1 acima, na lagrangiana da QCD os campos de quarks estão na representação fundamental. Assim, as variáveis de elo $U_\mu(x)$ da ação de rede também devem ser consideradas na representação fundamental.³⁰ Isso implica que, nas Equações (2.150) e (2.155), temos $d_r = n$ e $\rho = 1/2$ para o grupo de calibre SU(n). A ação de rede

$$S = \frac{\beta}{n} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \left\{ n - \Re \text{Tr} W_{\mu\nu}(x) \right\} \quad (2.176)$$

$$= \beta \frac{1}{2} \sum_x \sum_{\mu, \nu} \left\{ 1 - \Re \frac{\text{Tr} W_{\mu\nu}(x)}{n} \right\} \quad (2.177)$$

com

$$\beta = \frac{2n}{a^{4-d} g_0^2} \quad (2.178)$$

e $n = 3$ é a chamada ação de Wilson para a QCD na rede.

2.4 Invariância por Transformações Locais de Calibre

Na seção acima foi definida a ação de Wilson e foi verificado que no limite formal de $a \rightarrow 0$ essa ação reproduz a ação da QCD no contínuo. O que faltou verificar para a ação de rede é a invariância por transformações locais de calibre. Isto é imediato se as transformações locais forem definidas como

$$U_\mu(x) \rightarrow g(x) U_\mu(x) g(x + ae_\mu)^\dagger \quad (2.179)$$

$$\psi_f(x) \rightarrow g(x) \psi_f(x) \quad (2.180)$$

$$\overline{\psi}_f(x) \rightarrow \overline{\psi}_f(x) g(x)^\dagger. \quad (2.181)$$

³⁰ Por outro lado, pode também ser interessante considerar nas simulações numéricas outras representações para as variáveis de elo ou até escrever a ação como uma soma sobre diferentes representações (15).

De fato, fica claro que o traço do loop de Wilson (2.113), i.e. a ação (2.177), assim como a ação de Dirac na rede (2.167) são invariantes sob essas transformações. Na verdade, é claro que o traço do produto de variáveis de elo ao longo de um percurso fechado qualquer é também invariante de calibre. Esse resultado é usado para construir as chamadas ações melhoradas para a QCD na rede. Por exemplo, considerando na ação além do loop 1×1 (plaqueta) também o loop 2×1 é possível (38) obter uma ação com um erro de discretização da ordem de a^4 (em vez de a^2).

As transformações acima garantem que a QCD na rede apresente uma invariância de calibre local. O último ponto que precisa ser verificado é se a transformação (2.179) reproduz a transformação de calibre para os campos de glúons [ver Equação (2.31)] no limite de espaçamento de rede a pequeno. Para isso precisamos primeiro definir o campo de glúons na rede $A_\mu^{(r)}(x)$ em função da variável de elo $U_\mu(x)$, i.e. o funcional

$$A_\mu^{(r)}(x) = F[U_\mu(x)]. \quad (2.182)$$

Como sempre, não existe uma única definição para uma dada grandeza de rede.³¹ Aqui vamos considerar a definição mais simples, i.e.

$$A_\mu^{(r)}(x + ae_\mu/2) = \left[\frac{U_\mu(x) - U_\mu(x)^\dagger}{2i} \right]_{\text{traço nulo}} \quad (2.183)$$

$$= \left[\frac{U_\mu(x) - U_\mu(x)^\dagger}{2i} \right] - \frac{1}{n} \text{Tr} \left[\frac{U_\mu(x) - U_\mu(x)^\dagger}{2i} \right]. \quad (2.184)$$

Usando a relação (2.96) podemos considerar as expansões de Taylor

$$U_\mu(x) = \left\{ 1 + iag_0 A_\mu(x + ae_\mu/2) - \frac{a^2 g_0^2}{2} [A_\mu(x + ae_\mu/2)]^2 + \mathcal{O}(a^3 g_0^3) \right\} \quad (2.185)$$

$$U_\mu(x)^\dagger = \left\{ 1 - iag_0 A_\mu(x + ae_\mu/2) - \frac{a^2 g_0^2}{2} [A_\mu(x + ae_\mu/2)]^2 + \mathcal{O}(a^3 g_0^3) \right\}. \quad (2.186)$$

Substituindo agora estas expansões na Equação (2.184) obtemos

$$A_\mu^{(r)}(x + ae_\mu/2) = ag_0 A_\mu(x + ae_\mu/2) - \frac{1}{n} \text{Tr} [ag_0 A_\mu(x + ae_\mu/2)] + \mathcal{O}(a^3 g_0^3). \quad (2.187)$$

³¹ Na verdade, existem infinitas discretizações diferentes para o campo de glúons, caracterizadas por diferentes erros de discretização. Outras discretizações para os campos de glúons serão consideradas no Capítulo 7.

Sendo que $A_\mu(x + ae_\mu/2)$ pertence à álgebra de Lie do grupo $SU(n)$, o seu traço é nulo e portanto o segundo termo na equação acima é igual a zero. Assim, podemos escrever³²

$$A_\mu^{(r)}(x + ae_\mu/2) = ag_0 A_\mu(x + ae_\mu/2) + \mathcal{O}(a^3 g_0^3). \quad (2.188)$$

Enfim, para obter a Equação (2.31) vamos usar a expansão de Taylor (2.185) na definição (2.179) juntamente com a expansão

$$g(x + ae_\mu)^\dagger = g(x)^\dagger + a \partial_\mu g(x)^\dagger + \mathcal{O}(a^2). \quad (2.189)$$

Indicando com $[A_\mu(x + ae_\mu/2)]'$ o campo de glúons obtido aplicando a transformação de calibre, temos

$$\begin{aligned} & 1 + iag_0 [A_\mu(x + ae_\mu/2)]' + \mathcal{O}(a^2 g_0^2) \\ &= g(x) \left[1 + iag_0 A_\mu(x + ae_\mu/2) + \mathcal{O}(a^2 g_0^2) \right] \left[g(x)^\dagger + a \partial_\mu g(x)^\dagger + \mathcal{O}(a^2) \right] \end{aligned} \quad (2.190)$$

$$= 1 + a \left[ig_0 g(x) A_\mu(x + ae_\mu/2) g(x)^\dagger + g(x) \partial_\mu g(x)^\dagger \right] + \mathcal{O}(a^2) \quad (2.191)$$

e

$$[A_\mu(x + ae_\mu/2)]' = g(x) A_\mu(x + ae_\mu/2) g(x)^\dagger - \frac{i}{g_0} g(x) \partial_\mu g(x)^\dagger + \mathcal{O}(a). \quad (2.192)$$

Isto implica

$$[A_\mu(x)]' = g(x) A_\mu(x) g(x)^\dagger - \frac{i}{g_0} g(x) \partial_\mu g(x)^\dagger + \mathcal{O}(a), \quad (2.193)$$

que é a Equação (2.31) após aplicar a ela as transformações (2.64) e (2.70).

³² Como vamos ver no Capítulo 5, a consideração do campo de glúons no ponto $x + ae_\mu/2$ (em vez do ponto x) é também importante para reduzir o erro de discretização na condição de calibre de Landau na rede.

3 *Quantização Via Integrais de Trajetória*

No capítulo anterior vimos como construir uma teoria de campo clássica que fosse localmente invariante de calibre, para o grupo não-abeliano $SU(3)$, e como obter uma versão discretizada dessa teoria na rede. Entretanto, sabemos que para uma descrição completa dessa teoria devemos quantizá-la. Historicamente, a primeira formulação quântica das teorias de campos fez uso do procedimento de quantização canônica, desenvolvido por Born, Jordan, Heisenberg e Dirac. Esse método aplica-se muito bem à quantização do campo escalar livre e do eletromagnetismo. Porém, no caso de campos de calibre não-abelianos, a quantização canônica é bastante complicada e a quantização da teoria é feita usualmente usando o método de integrais de trajetória (ou integrais funcionais).

Nesta seção vamos fazer um apanhado do método de quantização via integrais de trajetória, baseado principalmente nas Referências (13–15).

3.1 **Integrais de Trajetória em Mecânica Quântica**

Na física clássica, a evolução temporal de um sistema é obtida resolvendo-se as equações de Euler-Lagrange. A trajetória clássica também minimiza o funcional ação (princípio da mínima ação), que é a integral da lagrangiana L no tempo. Por outro lado, a quantização (canônica) do mesmo sistema físico é obtida considerando-se a descrição hamiltoniana do sistema clássico e escrevendo as equações de movimento usando parênteses de Poisson. Desta forma, não fica claro qual o papel do princípio da mínima ação na mecânica quântica.

Na quantização usual, os possíveis estados do sistema (quantizado) são vetores $|\psi\rangle$ em um espaço de Hilbert e os observáveis físicos da teoria são representados em termos de operadores hermitianos que agem nesse espaço. Ao mesmo tempo, a evolução temporal do sistema pode ser obtida resolvendo a equação de Schrödinger e pode ser escrita como¹

$$|\psi(t)\rangle = \exp\{-iH(t-t_0)\}|\psi(t_0)\rangle, \quad (3.1)$$

onde H é o hamiltoniano. A equação acima é também escrita como

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad (3.2)$$

onde

$$U(t, t_0) = \exp\{-iH(t-t_0)\} \quad (3.3)$$

é o operador de evolução temporal. Para um hamiltoniano hermitiano, $H^\dagger = H$, o operador $U(t, t_0)$ é unitário, $U^\dagger = U^{-1}$. Note-se que o operador de evolução temporal satisfaz à identidade

$$U(t, t_0) = U(t, t')U(t', t_0). \quad (3.4)$$

A Equação (3.1) pode ser re-escrita em termos da função de onda $\psi(q, t) = \langle q|\psi(t)\rangle$. Aqui estamos indicando com $q = \{q_\alpha\}$ os graus de liberdade do sistema físico ($\alpha = 1, \dots, n$) e com $|q\rangle$ os auto-vetores dos correspondentes operadores $\{Q_\alpha\}$, i.e.

$$Q_\alpha|q\rangle = q_\alpha|q\rangle. \quad (3.5)$$

Claramente, podemos escrever

$$\psi(q', t') = \int dq G(q', t'; q, t) \psi(q, t) \quad (3.6)$$

onde

$$dq = \prod_{\alpha=1}^n dq_\alpha \quad (3.7)$$

e

$$G(q', t'; q, t) \equiv \langle q' | \exp\{-iH(t'-t)\} | q \rangle = \langle q' | U(t', t) | q \rangle \quad (3.8)$$

¹ Note que estamos usando $\hbar = 1$.

é a função de Green da teoria que descreve a evolução do estado inicial $\psi(q, t)$ para o estado final $\psi(q', t')$. Usando a relação (3.4) e introduzindo um conjunto completo de estados intermediários $|q''\rangle$, obtemos

$$G(q', t'; q, t) = \int dq'' \langle q' | U(t', t'') | q'' \rangle \langle q'' | U(t'', t) | q \rangle. \quad (3.9)$$

Logo, a função de Green satisfaz a identidade

$$G(q', t'; q, t) = \int dq'' G(q', t'; q'', t'') G(q'', t''; q, t). \quad (3.10)$$

Isto fornece uma formulação integral para descrever a evolução do estado físico, equivalente à formulação (diferencial) de Schrödinger.

Voltando à definição (3.8), podemos introduzir (à direita e à esquerda do operador de evolução temporal) um conjunto completo de auto-estados de energia $|E_n\rangle$ e escrever

$$G(q', t'; q, t) = \sum_{n,m} \langle q' | E_n \rangle \langle E_n | U(t, t') | E_m \rangle \langle E_m | q \rangle \quad (3.11)$$

$$= \sum_n e^{iE_n(t'-t)} \psi_n(q') \psi_n^*(q), \quad (3.12)$$

onde $\psi_n(q) = \langle q | E_n \rangle$ é a auto-função do hamiltoniano H com energia E_n . Aqui a soma sobre n estende-se sobre o espectro discreto e contínuo do hamiltoniano. Realizando agora uma continuação analítica para tempos imaginários, i.e. aplicando as transformações $t \rightarrow -i\tau$ e $t' \rightarrow -i\tau'$, obtemos

$$\langle q' | e^{-H(\tau' - \tau)} | q \rangle = \sum_n e^{-E_n(\tau' - \tau)} \psi_n(q') \psi_n^*(q). \quad (3.13)$$

Claramente, a função de Green $\langle q' | \exp\{-H(\tau' - \tau)\} | q \rangle$ a tempo imaginário é dominada pelo estado fundamental E_0 no limite $(\tau' - \tau) \rightarrow \infty$. (Note que $t' > t$ implica $\tau' > \tau$.)

Usando a relação (3.10), é possível definir a função de Green (3.13) através do formalismo de integrais de trajetória. Para isso, o intervalo de tempo $[\tau, \tau']$ é dividido em N intervalos de tempo infinitesimais ε com

$$\varepsilon = \frac{\tau' - \tau}{N}. \quad (3.14)$$

Indicamos com τ_i ($i = 1, 2, \dots, N-1$) os instantes de tempo intermediários, sendo $\tau = \tau_0 <$

Figura 3.1 – Representação gráfica de um conjunto de instantes de tempo intermediários τ_i usados para descrever a trajetória de uma partícula que se encontra no estado q no instante de tempo inicial $\tau = 0$ e no estado q' no instante de tempo final $\tau' = T$. [Figura retirada da Referência (40). Note que o intervalo de tempo infinitesimal ε , definido na Equação (3.14), é aqui indicado com δ e que os estados intermediários $q^{(i)}$ são indicados com q_i .]

$\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{N-1} < \tau_N = \tau'$, separados entre si pelo intervalo ε (ver também a Figura 3.1).

Assim, para calcular a função de Green podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle q' | \exp\{-H(\tau' - \tau)\} | q \rangle &= \langle q' | \exp\{-H(\tau' - \tau_{N-1})\} \exp\{-H(\tau_{N-1} - \tau_{N-2})\} \dots \\ &\dots \exp\{-H(\tau_2 - \tau_1)\} \exp\{-H(\tau_1 - \tau)\} | q \rangle \end{aligned} \quad (3.15)$$

e, inserindo os conjuntos completos de estados $|q^{(i)}\rangle$ nos instantes de tempo intermediários τ_i , temos

$$\begin{aligned} \langle q' | \exp\{-H(\tau' - \tau)\} | q \rangle &= \int dq \langle q' | \exp\{-H(\tau' - \tau_{N-1})\} | q^{(N-1)} \rangle \\ &\langle q^{(N-1)} | \exp\{-H(\tau_{N-1} - \tau_{N-2})\} | q^{(N-2)} \rangle \dots \\ &\dots \langle q^{(2)} | \exp\{-H(\tau_2 - \tau_1)\} | q^{(1)} \rangle \\ &\langle q^{(1)} | \exp\{-H(\tau_1 - \tau)\} | q \rangle, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde o elemento de integração dq é definido como

$$dq = \prod_{l=1}^{N-1} \prod_{\alpha=1}^n dq_{\alpha}^{(l)}. \quad (3.17)$$

Para calcular os elementos de matriz na expressão acima, precisamos definir de forma explícita o hamiltoniano. Consideremos por exemplo

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n P_{\alpha}^2 + V(Q), \quad (3.18)$$

onde P_{α} é o momento canonicamente conjugado à coordenada Q_{α} . Lembremos que P_{α} e Q_{α} são operadores e portanto não comutam. Usando novamente a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, i.e.

$$\exp(A) \exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \dots\right), \quad (3.19)$$

onde A e B são dois operadores não-comutantes, obtemos

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\varepsilon \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n P_{\alpha}^2\right\} \exp\{-\varepsilon V(Q)\} &= \exp\left\{-\varepsilon \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n P_{\alpha}^2 - \varepsilon V(Q) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \varepsilon^2 F(P_{\alpha}, Q_{\alpha}) + \dots\right\}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde

$$F(P_{\alpha}, Q_{\alpha}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n [P_{\alpha}^2, V(Q)]. \quad (3.21)$$

À medida que o número de passos N entre os estados inicial e final se torna infinito, o intervalo de tempo ε entre dois estados consecutivos torna-se nulo. Assim, na Equação (3.20) podem ser desprezados os termos de ordem ε^2 . Para ε pequeno, temos portanto o resultado aproximado

$$\exp\left\{-\varepsilon \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n P_{\alpha}^2\right\} \exp\{-\varepsilon V(Q)\} \approx \exp\left\{-\varepsilon \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n P_{\alpha}^2 - \varepsilon V(Q)\right\}. \quad (3.22)$$

Este resultato torna-se exato quando $\varepsilon = 0$. Podemos então escrever

$$\langle q^{(l+1)} | \exp\{-H\varepsilon\} | q^{(l)} \rangle \approx \langle q^{(l+1)} | \exp\left\{-\varepsilon \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n P_{\alpha}^2\right\} | q^{(l)} \rangle \exp\{-\varepsilon V(q^{(l)})\}. \quad (3.23)$$

Precisamos agora calcular o elemento de matriz

$$\langle q^{(l+1)} | \exp\left\{-\varepsilon \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n P_{\alpha}^2\right\} | q^{(l)} \rangle, \quad (3.24)$$

lembrando que os operadores P_{α} não são diagonais na base $q_{\alpha}^{(l)}$. Para isso é conveniente in-

introduzir dois conjuntos completos de auto-estados do operador momento² na Equação (3.24), i.e.

$$\begin{aligned} & \int dp^{(l)} \int dk^{(l)} \langle q^{(l+1)} | p^{(l)} \rangle \langle p^{(l)} | \exp \left\{ -\varepsilon \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n P_{\alpha}^2 \right\} | k^{(l)} \rangle \langle k^{(l)} | q^{(l)} \rangle \\ &= \int dp^{(l)} \langle q^{(l+1)} | p^{(l)} \rangle \exp \left\{ -\varepsilon \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n (p_{\alpha}^{(l)})^2 \right\} \langle p^{(l)} | q^{(l)} \rangle. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Usando enfim a relação

$$\langle q^{(l)} | p^{(l)} \rangle = \prod_{\alpha=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(i p_{\alpha}^{(l)} q_{\alpha}^{(l)} \right). \quad (3.26)$$

obtemos

$$\begin{aligned} & \int \prod_{\alpha=1}^n \frac{dp_{\alpha}^{(l)}}{2\pi} \exp \left\{ -\varepsilon \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n (p_{\alpha}^{(l)})^2 \right\} \prod_{\alpha=1}^n \exp \left\{ i p_{\alpha}^{(l)} \left[q_{\alpha}^{(l+1)} - q_{\alpha}^{(l)} \right] \right\} \\ &= \int \prod_{\alpha=1}^n \frac{dp_{\alpha}^{(l)}}{2\pi} \exp \left\{ -\varepsilon \frac{(p_{\alpha}^{(l)})^2}{2} + i p_{\alpha}^{(l)} \left[q_{\alpha}^{(l+1)} - q_{\alpha}^{(l)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$= \int \prod_{\alpha=1}^n \frac{dp_{\alpha}^{(l)}}{2\pi} \exp \left\{ -\varepsilon \left[\frac{(p_{\alpha}^{(l)})^2}{2} - i p_{\alpha}^{(l)} \frac{q_{\alpha}^{(l+1)} - q_{\alpha}^{(l)}}{\varepsilon} \right] \right\}. \quad (3.28)$$

O elemento de transição (3.23) entre os estados $|q^{(l)}\rangle$ e $|q^{(l+1)}\rangle$ pode então ser escrito como

$$\langle q^{(l+1)} | \exp \{ -H\varepsilon \} | q^{(l)} \rangle \approx \exp \left\{ -\varepsilon V(q^{(l)}) \right\} \int \prod_{\alpha=1}^n \frac{dp_{\alpha}}{2\pi} \exp \left\{ -\varepsilon \left[\frac{(p_{\alpha}^{(l)})^2}{2} - i p_{\alpha}^{(l)} \dot{q}_{\alpha}^{(l)} \right] \right\}, \quad (3.29)$$

onde³

$$\dot{q}_{\alpha}^{(l)} = \frac{q_{\alpha}^{(l+1)} - q_{\alpha}^{(l)}}{\varepsilon} \quad (3.30)$$

é a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $[\tau_l, \tau_{l+1}]$ no espaço euclidiano n -dimensional. Podemos agora usar esse resultado para calcular o elemento de matriz da Equação (3.16) integrando sobre todos os estados intermediários $|q^{(l)}\rangle$. Para isso escrevemos

$$\langle q' | \exp \{ -H(\tau' - \tau) \} | q \rangle \approx \int D[q] D[p] \exp \left\{ -\varepsilon \sum_{l=0}^{N-1} \left[H(q^{(l)}, p^{(l)}) - i p_{\alpha}^{(l)} \dot{q}_{\alpha}^{(l)} \right] \right\} \quad (3.31)$$

² Isto é feito nos instantes de tempo τ_l com $l = 0, 1, \dots, N-1$ sendo $\tau_0 = \tau$.

³ Esta definição é válida para $l = 0, 1, \dots, N-1$ com $q^{(0)} = q$ e $q^{(N)} = q'$.

onde o elemento de integração é

$$D[q]D[p] = \prod_{\alpha=1}^n \left(\prod_{l=1}^{N-1} dq_{\alpha}^{(l)} \right) \left(\prod_{l=0}^{N-1} \frac{dp_{\alpha}^{(l)}}{2\pi} \right), \quad (3.32)$$

e

$$H(q^{(l)}, p^{(l)}) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{(p_{\alpha}^{(l)})^2}{2} + V(q^{(l)}). \quad (3.33)$$

A integral nos momentos $p^{(l)}$ é gaussiana e pode ser calculada exatamente, produzindo

$$\langle q' | \exp\{-H(\tau' - \tau)\} | q \rangle \approx \int \prod_{l=1}^{N-1} \prod_{\alpha=1}^n \frac{dq_{\alpha}^{(l)}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp\left\{-\varepsilon \sum_{l=0}^{N-1} L_E(q^{(l)}, \dot{q}^{(l)})\right\} \quad (3.34)$$

onde

$$L_E(q^{(l)}, \dot{q}^{(l)}) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{(\dot{q}_{\alpha}^{(l)})^2}{2} + V(q^{(l)}) \quad (3.35)$$

representa uma discretização (euclidiana) da função lagrangiana. O resultado (3.34) implica que o elemento de transição $\langle q' | \exp\{-H(\tau' - \tau)\} | q \rangle$ para o sistema descrito pelo hamiltoniano H pode ser calculado considerando todos os caminhos que conectam o ponto q no instante de tempo τ ao ponto q' no instante de tempo τ' e o peso atribuído a cada um dos caminhos é determinado pela função lagrangiana L_E . Podemos também definir a ação discretizada euclidiana através da relação

$$S_E(q) = \sum_{l=0}^{N-1} \varepsilon L_E(q^{(l)}, \dot{q}^{(l)}) = \sum_{l=0}^{N-1} \varepsilon \left[\sum_{\alpha=1}^n \frac{(\dot{q}_{\alpha}^{(l)})^2}{2} + V(q^{(l)}) \right] \quad (3.36)$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} \varepsilon \left[\sum_{\alpha=1}^n \frac{(\dot{q}_{\alpha}(\tau_l))^2}{2} + V(q(\tau_l)) \right], \quad (3.37)$$

onde indicamos com $q_{\alpha}(\tau_l)$ as variáveis $q_{\alpha}^{(l)}$, sendo $q_{\alpha}(\tau_0) = q_{\alpha}(\tau)$ e $q_{\alpha}(\tau_N) = q_{\alpha}(\tau')$. O limite formal do contínuo é obtido considerando os limites $\varepsilon \rightarrow 0$ e $N \rightarrow \infty$ com a condição $N\varepsilon = (\tau' - \tau)$. Isto fornece

$$\langle q', \tau' | q, \tau \rangle = \langle q' | \exp\{-H(\tau' - \tau)\} | q \rangle = \int_q^{q'} D[q] \exp[-S_E^{(c)}(q)] \quad (3.38)$$

onde $D[q]$ representa a soma sobre todos os possíveis caminhos e a ação no contínuo $S_E^{(c)}$ é dada

por

$$S_E^{(c)} = \int_{\tau}^{\tau'} d\tau'' L_E^{(c)}(q(\tau''), \dot{q}(\tau'')) = \int_{\tau}^{\tau'} d\tau'' \left[\sum_{\alpha=1}^n \frac{\dot{q}_{\alpha}^2(\tau'')}{2} + V(q(\tau'')) \right]. \quad (3.39)$$

Assim, a amplitude de transição de um estado inicial até um estado final é obtida considerando todos os possíveis caminhos entre os dois estados. Para cada trajetória o peso na somatória é dado por $\exp \left[-S_E^{(c)}(q)/\hbar \right]$ (onde foi re-introduzida a constante $\hbar$), i.e. depende da ação $S_E^{(c)}(q)$. Claramente, o caminho clássico, i.e. o caminho que minimiza a ação, apresenta um peso maior em comparação com outros possíveis caminhos. Assim, no limite de $\hbar \rightarrow 0$, i.e. no limite clássico, é re-obtido o princípio da mínima ação. Por outro lado, no limite físico em que as flutuações quânticas se tornam relevantes, temos que considerar todos os possíveis caminhos além do caminho clássico.

Repetindo as contas acima no espaço de Minkowski é possível também escrever a função de Green $G(q', t'; q, t)$ usando integrais de trajetória. De fato, temos

$$G(q', t'; q, t) = \int_q^{q'} D[q] \exp \left[i S^{(c)}(q) \right] \quad (3.40)$$

onde $S^{(c)}(q)$ é a ação no contínuo (no espaço de Minkowski), i.e.

$$S^{(c)}(q) = \int_t^{t'} dt'' L^{(c)}(q(t''), \dot{q}(t'')) = \int_t^{t'} dt'' \left[\sum_{\alpha=1}^n \frac{\dot{q}_{\alpha}^2(t'')}{2} - V(q(t'')) \right]. \quad (3.41)$$

Neste caso, no limite clássico $\hbar \rightarrow 0$ os caminhos não-clássicos não contribuem para a função de Green devido a efeitos de interferência destrutiva gerados pelas rápidas oscilações do peso complexo $\exp \left[i S^{(c)}(q)/\hbar \right]$.

Do ponto de vista da mecânica quântica não-relativística a Equação (3.40) contém a informação necessária para calcular, usando a Equação (3.6), todas as probabilidades de transição entre dois estados do sistema. De fato, considerando um instante de tempo $t' = t + \varepsilon$, com ε pequeno, e a posição $q(t') = q(t) + \delta$, podemos escrever (no caso unidimensional)

$$S^{(c)}(q) \approx \varepsilon L^{(c)} \left(\frac{q(t') + q(t)}{2}, \frac{q(t') - q(t)}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\varepsilon} - \varepsilon V \left(q(t') - \frac{\delta}{2} \right) \quad (3.42)$$

e [ver as Equações (3.6), (3.8), (3.29), (3.34)]

$$\psi(q', t') = \int_{-\infty}^{\infty} d\delta G(q', t'; q' - \delta, t' - \varepsilon) \psi(q' - \delta, t' - \varepsilon), \quad (3.43)$$

com⁴

$$G(q', t'; q, t) \approx \frac{\exp[iS^{(c)}(q)]}{\sqrt{2\pi i\varepsilon}}. \quad (3.44)$$

É conveniente agora re-escalar δ usando $\delta' = \delta/\sqrt{i\varepsilon}$. Assim, obtemos

$$\psi(q', t') \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta'}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\delta')^2}{2} - i\varepsilon V\left(q(t') - \frac{\delta'\sqrt{i\varepsilon}}{2}\right)\right] \psi(q' - \delta'\sqrt{i\varepsilon}, t' - \varepsilon). \quad (3.45)$$

Expandindo o resultado acima em ε chegamos à relação

$$\psi(q', t') \approx \left[1 - i\varepsilon V(q(t'))\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta'}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\delta')^2}{2}\right] \psi(q' - \delta'\sqrt{i\varepsilon}, t' - \varepsilon). \quad (3.46)$$

Ao mesmo tempo podemos expandir a função de onda ao redor do ponto q' , obtendo

$$\psi(q' - \delta'\sqrt{i\varepsilon}, t' - \varepsilon) \approx \psi(q', t' - \varepsilon) - \delta'\sqrt{i\varepsilon} \frac{\partial \psi(q', t' - \varepsilon)}{\partial q'} + \frac{i\varepsilon(\delta')^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(q', t' - \varepsilon)}{\partial^2 q'}. \quad (3.47)$$

Depois de calcular as integrais gaussianas, obtemos

$$\psi(q', t') \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[1 - i\varepsilon V(q(t'))\right] \left[\sqrt{2\pi} \psi(q', t' - \varepsilon) + i\varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 \psi(q', t' - \varepsilon)}{\partial^2 q'}\right] \quad (3.48)$$

$$\approx \left[\psi(q', t' - \varepsilon) - i\varepsilon V(q(t')) \psi(q', t' - \varepsilon) + \frac{i\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 \psi(q', t')}{\partial^2 q'}\right]. \quad (3.49)$$

Enfim, no limite de ε pequeno podemos escrever

$$i \frac{\partial \psi(q', t')}{\partial t'} \approx i \frac{\psi(q', t') - \psi(q', t' - \varepsilon)}{\varepsilon} \approx -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(q', t')}{\partial^2 q'} + V(q(t')) \psi(q', t' - \varepsilon) \quad (3.50)$$

e

$$i \frac{\partial \psi(q', t')}{\partial t'} \approx -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(q', t')}{\partial^2 q'} + V(q(t')) \psi(q', t') \quad (3.51)$$

que é a equação de Schrödinger para uma partícula de massa unitária e $\hbar = 1$ no caso unidimensional.

⁴ Note que o fator $1/\sqrt{2\pi\varepsilon}$ na Equação (3.34) torna-se $1/\sqrt{2\pi i\varepsilon}$ no espaço de Minkowski.

3.2 Integrais de Trajetória em Teorias Quânticas de Campos

Como explicado na Introdução, a necessidade de levar em consideração a criação e a aniquilação de pares nos processos que envolvem partículas elementares, i.e. a necessidade de abandonar a conservação do número de partículas, nos leva à teoria quântica de campos (4). Assim, o enfoque deixa de ser a partícula, cujos graus de liberdade estão associados a sua posição, como na mecânica quântica, e passam a ser os campos da teoria, caracterizados por um número infinito de graus de liberdade, indexados pelas coordenadas espaço-temporais. Nesse caso o conceito de partícula emerge da quantização do campo, sendo as partículas excitações do vácuo da teoria.

Nesta seção vamos fazer uso do método de integrais de trajetória para quantizar o campo escalar livre. Relembramos que na quantização canônica (3) o campo escalar $\phi(x)$ deixa de ser uma simples função (por exemplo, real) e se torna um operador $\hat{\phi}(x)$ que, juntamente com o operador momento $\hat{\pi}(x)$ canonicamente conjugado ao campo, deve satisfazer relações de comutação canônicas. Considerando em seguida a decomposição de Fourier de $\hat{\phi}(x)$ e $\hat{\pi}(x)$, é possível definir operadores de criação $\hat{a}_k^\dagger$ e de aniquilação $\hat{a}_k$ e o operador hamiltoniano $\hat{H}$ pode ser escrito como soma de hamiltonianas de osciladores harmônicos desacoplados de diferentes frequências. Assim, a quantização canônica de um campo escalar real livre mostra-nos que ele pode ser considerado como uma coleção de um número infinito de osciladores harmônicos quantizados e independentes. É importante observar que a energia do menor auto-valor desse hamiltoniano $\hat{H}$ (a chamada energia do ponto zero) é infinita, pois é igual à soma das energias do estado fundamental de um número infinito de osciladores harmônicos. Esse infinito ocorre porque o produto de campos no mesmo ponto não é bem definido. A solução para esse problema é a chamada ordenação de Wick que consiste em re-escrever um produto de operadores de tal maneira que os operadores de aniquilação estejam à direita dos operadores de criação. Dessa forma, a energia do estado fundamental (o vácuo⁵ $|0\rangle$ da teoria) é nula.⁶

⁵ Em geral o vácuo de uma teoria livre é indicado com $|0\rangle$, enquanto no caso de interação o vácuo é indicado com $|\Omega\rangle$.

⁶ A subtração da energia infinita do ponto zero através da ordenação de Wick é um exemplo de renormalização aditiva.

No caso de integrais de trajetória, a quantização do campo escalar livre (13) requer o cálculo da função geradora

$$Z_E[J] = \int D[\varphi(x)] \exp\left\{-S_E[\varphi(x)] + \int d^d x J(x) \varphi(x)\right\}, \quad (3.52)$$

onde

$$S_E[\varphi(x)] = \int d^d x L_E[\varphi(x)] \quad (3.53)$$

é a ação euclidiana. A lagrangiana euclidiana — já discutida na Seção 2.2 — é dada por

$$L_E[\varphi(x)] = -\frac{1}{2} \varphi(x) \square \varphi(x) + \frac{1}{2} M^2 \varphi^2(x), \quad (3.54)$$

onde o campo $\varphi(x)$ é função dos pontos x no espaço-tempo euclidiano de dimensão d , a grandeza $J(x)$ representa uma fonte externa (também dependente de x), $\square$ indica o laplaciano em dimensão d , M é a massa e a integral $\int D[\varphi(x)]$ é formalmente definida como

$$\int D[\varphi(x)] = \int \prod_x d\varphi(x), \quad (3.55)$$

i.e. representa uma soma sobre todos os possíveis valores para o campo $\varphi(x)$ ou, equivalentemente, uma soma sobre todas as possíveis configurações para o campo. Para dar um sentido a essa integral é necessário discretizar o espaço-tempo⁷ introduzindo uma rede com espaçamento de rede a . Usando os resultados obtidos na Seção 2.2, temos⁸

$$Z_E[J] = \int \prod_l \varphi(l) \exp\left\{-\sum_n \left[-\frac{1}{2} \varphi^{(r)}(n) \sum_{\mu=1}^d \left(\varphi^{(r)}(n+e_\mu) + \varphi^{(r)}(n-e_\mu)\right) + \frac{1}{2} (2d + (M^{(r)})^2) (\varphi^{(r)}(n))^2\right] + \sum_n \left[J^{(r)}(n) \varphi^{(r)}(n)\right]\right\}, \quad (3.56)$$

onde $M^{(r)}$, $J^{(r)}(n)$ e $\varphi^{(r)}(n)$ são grandezas adimensionais [ver por exemplo a Equação (2.90)].

Esta integral é gaussiana e pode ser calculada exatamente. Para isso escrevemos

$$Z_E[J] = \int \prod_l \varphi(l) \exp\left\{-\sum_{n,m} \left[\varphi^{(r)}(n) K_{nm} \varphi^{(r)}(m)\right] + \sum_n \left[J^{(r)}(n) \varphi^{(r)}(n)\right]\right\}. \quad (3.57)$$

⁷ Assim, a formulação de rede das teorias quânticas de campo aparece de forma natural na quantização por integrais de trajetória.

⁸ Para simplificar a notação, o campo na rede é representado nesta seção como $\varphi^{(r)}(n)$, em vez de $\varphi^{(r)}(na)$, como na Seção 2.2.

Aqui a matriz K_{nm} é dada por

$$K_{nm} = - \sum_{\mu=1}^d \left[\delta_{m,n+e_\mu} + \delta_{m,n-e_\mu} - 2\delta_{m,n} \right] + (M^{(r)})^2 \delta_{m,n}. \quad (3.58)$$

O resultado da integral é⁹

$$Z_E[J] = \sqrt{\frac{\pi^{N^d}}{\det K}} \exp \left\{ \sum_{n,m} \left[J^{(r)}(n) K_{nm}^{-1} J^{(r)}(m) \right] \right\}, \quad (3.59)$$

onde $\det K$ é o determinante da matriz K_{nm} , K_{nm}^{-1} é sua matriz inversa e indicamos com N o número de sítios em cada lado da rede. Claramente, N^d representa o número total de sítios da rede e a matriz K_{nm} é uma matriz $N^d \times N^d$. Aqui estamos fazendo as hipóteses de que esta matriz seja inversível, que o seu determinante seja positivo e que o determinante Jacobiano introduzido pela diagonalização da matriz K_{nm} seja 1. Isto é o caso para matrizes reais, positivas e simétricas. Note também que $Z_E = Z_E[0] = \sqrt{\pi^{N^d} / \det K}$.

Da mesma forma, para calcular a função de correlação de dois pontos

$$\langle \varphi(y) \varphi(z) \rangle = \frac{\int D[\varphi(x)] \varphi(y) \varphi(z) e^{-S_E[\varphi(x)]}}{Z_E[0]}, \quad (3.60)$$

precisamos primeiro considerar a grandeza correspondente na rede $\langle \varphi^{(r)}(j) \varphi^{(r)}(k) \rangle$. É evidente que podemos escrever¹⁰

$$\begin{aligned} \langle \varphi^{(r)}(j) \varphi^{(r)}(k) \rangle &= Z_E[0]^{-1} \int \prod_l d\varphi(l) \varphi^{(r)}(j) \varphi^{(r)}(k) \\ &\quad \times \exp \left\{ - \sum_{n,m} \left[\varphi^{(r)}(n) K_{nm} \varphi^{(r)}(m) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$= Z_E[0]^{-1} \frac{\partial^2 Z_E[J]}{\partial J^{(r)}(j) \partial J^{(r)}(k)} \Big|_{J^{(r)}(n)=0}. \quad (3.62)$$

Assim, usando o resultado obtido acima para $Z_E[J]$, temos

$$\langle \varphi^{(r)}(j) \varphi^{(r)}(k) \rangle = K_{jk}^{-1}. \quad (3.63)$$

⁹ Relembramos que, diagonalizando a matriz K_{nm} , a integral gaussiana é transformada em um produto de integrais gaussianas unidimensionais. Em seguida, é necessário completar o quadrado (em cada integral gaussiana unidimensional) e usar o resultado $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$.

¹⁰ Isto explica o nome de função geradora (das funções de correlação) para $Z_E[J]$.

Usando agora a representação (no espaço de Fourier¹¹)

$$\delta_{m,n} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \hat{p}}{(2\pi)^d} e^{i\hat{p} \cdot (n-m)} \quad (3.65)$$

na Equação (3.58) acima, obtemos

$$K_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \hat{p}}{(2\pi)^d} \left[(M^{(r)})^2 + 4 \sum_{\mu=1}^d \sin^2 \left(\frac{\hat{p}_\mu}{2} \right) \right] e^{i\hat{p} \cdot (n-m)}. \quad (3.66)$$

Assim, é simples inverter a matriz K_{nm} . De fato, usando a representação

$$\delta(\hat{p}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_n e^{-i\hat{p} \cdot n} \quad (3.67)$$

para a função delta de Dirac (em uma rede com condições de periodicidade na borda), a matriz inversa pode ser escrita como

$$K_{nm}^{-1} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \hat{p}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\hat{p} \cdot (n-m)}}{(M^{(r)})^2 + 4 \sum_{\mu=1}^d \sin^2 \left(\frac{\hat{p}_\mu}{2} \right)}. \quad (3.68)$$

A função de dois pontos no contínuo

$$\langle \varphi(y) \varphi(z) \rangle = \frac{\int D[\varphi(x)] \varphi(y) \varphi(z) e^{-S_E[\varphi(x)]}}{Z_E[0]} \quad (3.69)$$

pode então ser definida como o limite do espaçamento de rede a tendendo a zero da grandeza

$$a^{2-d} \langle \varphi^{(r)}(j) \varphi^{(r)}(k) \rangle = a^{2-d} K_{nm}^{-1}, \quad (3.70)$$

onde o fator a^{2-d} é necessário para reproduzir a dimensão física dos campos $\varphi(x)$ (ver Seção

¹¹ Aqui $\hat{p}$ indica um vetor adimensional no espaço dos momentos, i.e. $a p = \hat{p}$. Também, as componentes do vetor $\hat{p}$ são dadas pela relação

$$\frac{N_\mu \hat{p}_\mu}{2\pi} = 0, 1, 2, \dots, N_\mu - 1, \quad (3.64)$$

onde N_μ representa o número de sítios da rede na direção μ .

2.2). Re-escalando todas as grandezas na Equação (3.68), é imediato obter

$$\langle \varphi(y) \varphi(z) \rangle = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{ip \cdot (y-z)}}{M^2 + \sum_{\mu=1}^d \left[\frac{2}{a} \sin \left(\frac{ap_\mu}{2} \right) \right]^2} \quad (3.71)$$

$$\approx \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{ip \cdot (y-z)}}{M^2 + \sum_{\mu=1}^d p_\mu^2} \quad (3.72)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{ip \cdot (y-z)}}{M^2 + p^2}. \quad (3.73)$$

Voltando à função geradora

$$Z_E[J] = \int D[\varphi(x)] e^{-S_E[\varphi(x)] + \int d^d x J(x) \varphi(x)}, \quad (3.74)$$

podemos formalmente expandi-la em série de Taylor ao redor do ponto $J(x) = 0$ e escrever¹²

$$Z_E[J] = Z_E[0] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \dots d^d x_n J(x_1) \dots J(x_n) G_n(x_1, \dots, x_n), \quad (3.75)$$

onde

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_E[0]} \frac{\partial^n Z_E[J]}{\partial J(x_1) \dots \partial J(x_n)} \Big|_{J(x_i)=0} \quad (3.76)$$

$$= \frac{\int D[\varphi(x)] \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) e^{-S_E[\varphi(x)]}}{Z_E[0]} \quad (3.77)$$

$$= \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle \quad (3.78)$$

é a função de correlação (ou função de Green) de n pontos. Claramente, para o caso livre (i.e. gaussiano) somente a função de Green de dois pontos (ou propagador) é importante. De fato, no caso de n ímpar, a função de Green de n pontos $G_n(x_1, \dots, x_n)$ é sempre nula. Ao mesmo tempo, todas as funções de Green de n pontos com n par e $n \geq 4$ podem ser escritas como combinações de propagadores. Por exemplo, para $n = 4$ temos

$$\begin{aligned} G_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= G_2(x_1, x_2) G_2(x_3, x_4) + G_2(x_1, x_3) G_2(x_2, x_4) \\ &\quad + G_2(x_1, x_4) G_2(x_2, x_3). \end{aligned} \quad (3.79)$$

¹² Note que as derivadas consideradas nesta série de Taylor são derivadas funcionais. Para uma definição de derivada funcional e, mais em geral, para uma introdução à integração funcional, ver por exemplo (3).

Porém, no caso geral temos

$$Z_E[J] = \int D[\varphi(x)] e^{-S_E[\varphi(x)] - \lambda_0 \int d^d x V[\varphi(x)]}, \quad (3.80)$$

onde $V[\varphi(x)]$ é um funcional polinomial em $\varphi(x)$ de ordem superior à ordem quadrática, i.e.

$$V[\varphi(x)] = \sum_{l>2} b_l \varphi^l(x). \quad (3.81)$$

Devemos portanto, em princípio, conhecer todas as funções de correlação para calcular a função geradora $Z_E[J]$. Este cálculo é feito usualmente usando teoria de perturbação, por exemplo considerando uma expansão no parâmetro λ_0 . Assim, podemos escrever

$$e^{-S_E[\varphi(x)] - \lambda_0 \int d^d x V[\varphi(x)]} = e^{-S_E[\varphi(x)]} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_0)^s}{s!} F^s[\varphi(x)], \quad (3.82)$$

com

$$F[\varphi(x)] = \int d^d x V[\varphi(x)]. \quad (3.83)$$

Desta forma, a função de Green de n pontos em ordem s da expansão perturbativa é dada pela integral funcional gaussiana¹³

$$G_n^{(s)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_E[0]} \int D[\varphi(x)] \frac{(-\lambda_0)^s}{s!} F^s[\varphi(x)] \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) e^{-S_E[\varphi(x)]}. \quad (3.84)$$

Relembremos que na quantização canônica as funções de Green $G_n(x_1, \dots, x_n)$ são definidas como o valor esperado de produtos de operadores de campo, ordenados temporalmente, no vácuo $|\Omega\rangle$ da teoria, i.e.

$$\langle \Omega | T \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n) | \Omega \rangle, \quad (3.85)$$

onde T é o operador de ordenamento temporal,

$$\hat{\varphi}(x) \equiv \hat{\varphi}(x_i, t) = e^{iHt} \hat{\varphi}(x_i, 0) e^{-iHt} \quad (3.86)$$

são operadores de campo (de Heisenberg) e $\hat{H}$ é o hamiltoniano do sistema. Na Referência (13) é mostrado que, no caso da mecânica quântica, o valor esperado (3.85) pode de fato ser calculado usando a integração funcional da Equação (3.77), após continuação para tempos ima-

¹³ Para maiores detalhes pode-se consultar a Referência (5).

ginários $t \rightarrow -i\tau$.

É importante também observar que a grandeza $Z_E[0]$ lembra a função de partição na mecânica estatística clássica e que as funções de Green (3.77) lembram a definição de funções de correlação, com o fator $e^{-S_E[\varphi(x)]}$ interpretado como peso de Boltzmann. Esta analogia permite de fato a aplicação dos métodos usados em mecânica estatística clássica, como simulações numéricas de Monte Carlo, às teorias quânticas de campo (quantizadas usando integrais de trajetória no espaço euclidiano). Porém, é bom lembrar que a função de partição no ensemble canônico é uma integral no espaço de fases do sistema e o peso de Boltzmann é $e^{-\beta H}$, onde H é o hamiltoniano do sistema, i.e. a analogia entre os dois casos é somente formal. Outra diferença importante entre esses dois casos é o fato de que, em mecânica estatística, o espaçamento de rede é realmente não-nulo e não precisamos considerar o limite $a \rightarrow 0$. Para as teorias quânticas de campo esse limite é necessário para obter resultados no contínuo. No caso considerado acima [ver Equação (3.73)], foi possível calcular esse limite analiticamente. Isso não é sempre possível e em geral o limite do contínuo é obtido como uma extrapolação de dados numéricos. O problema nesse caso é que na rede todas as grandezas consideradas são adimensionais, enquanto no contínuo as grandezas físicas possuem dimensão física. Para contornar essa dificuldade podemos considerar, no contínuo e na rede, razões adimensionais de grandezas físicas. Por exemplo, no caso acima, ao invés de calcular $a^{2-d} \langle \varphi^{(r)}(j) \varphi^{(r)}(k) \rangle$, pode-se calcular a razão $\langle \varphi^{(r)}(j) \varphi^{(r)}(k) \rangle / (M^{(r)})^{d-2}$ mantendo a grandeza $M^{(r)}|j-k| \approx M|y-z|$ fixa. Se, para espaçamentos de rede a suficientemente pequenos, essa razão for constante e independente do valor de a , podemos concluir que a nossa rede é suficientemente fina e que o resultado obtido representa o valor físico da razão $\langle \varphi(y) \varphi(z) \rangle / M^{d-2}$ para uma dada separação $|y-z|$. Uma vez calculada essa razão, é também possível obter um valor, em unidades físicas, para a função de Green de dois pontos $\langle \varphi(y) \varphi(z) \rangle$ usando um *input* experimental M_{exp} para a massa M , i.e.

$$\langle \varphi(y) \varphi(z) \rangle = \frac{\langle \varphi^{(r)}(j) \varphi^{(r)}(k) \rangle}{(M^{(r)})^{d-2}} M_{exp}^{d-2}, \quad (3.87)$$

com

$$|y-z| = \frac{M^{(r)}|j-k|}{M_{exp}}. \quad (3.88)$$

Os problemas relacionados ao limite do contínuo e sua relação com o problema de renormalização da teoria serão discutidos na próxima seção para o caso de teorias de calibre na rede.

3.3 Limite do Contínuo das Teorias de Calibre

Consideremos agora a quantização das teorias de Yang-Mills usando integrais de trajetória. Devemos então calcular a função geradora (no espaço euclidiano)

$$Z_E[J] = \int D[A_\mu^b(x)] \exp \left\{ -S_{YM,d}^{(E)} + \int d^d x J_\mu^b(x) A_\mu^b(x) \right\}, \quad (3.89)$$

onde [ver Equação (2.147)]

$$S_{YM,d}^{(E)} = \frac{1}{4} \int d^d x (F^{(E)})^{\mu\nu}(x)^b (F^{(E)})_{\mu\nu}(x)^b \quad (3.90)$$

é a ação de Yang-Mills no espaço euclidiano em d dimensões e $J_\mu^b(x)$ representa uma fonte externa (para os campos de glúons).¹⁴ Claramente, podemos repetir neste caso os passos descritos na seção acima para o caso do campo escalar livre. Assim, para dar um sentido matemático à integral $\int D[A_\mu^b(x)]$, é necessário introduzir uma rede discreta (e finita) para o espaço-tempo. Como descrito na Seção 2.3, a teoria na rede é escrita em função das chamadas variáveis de elo $U_\mu(x)$. Devemos então considerar a integral

$$\int D[U_\mu(x)] = \int \prod_{x,\mu} dU_\mu(x). \quad (3.91)$$

No caso de uma rede finita, o cálculo da integral é possível, pelo menos do ponto de vista conceitual, e usando métodos de Monte Carlo é possível obter uma estimativa numérica. Também é possível verificar (12, 13, 15) que a medida (de Haar) para as variáveis de elo $dU_\mu(x)$ é invariante de calibre.¹⁵ O último passo para obter a quantização da teoria é claramente a consideração do limite de volume de rede infinito e, depois, de espaçamento de rede a nulo.

É importante ressaltar que, se a teoria na rede possui um limite do contínuo (13), esse limite deve ser um ponto crítico da teoria. De fato, se $M^{(r)}$ é o valor de uma massa calculada na rede,

¹⁴ No caso da QCD precisamos introduzir na função geradora também as fontes para os campos fermiônicos.

¹⁵ Esta condição é importante para deixar a função geradora $Z_E[J]$ também invariante por transformações locais de calibre.

por exemplo estudando as funções de correlação da teoria para tempos grandes, a massa física correspondente M é dada por

$$M = \frac{M^{(r)}}{a}, \quad (3.92)$$

onde a é o espaçamento de rede. Assim, no limite do contínuo $a \rightarrow 0$, o limite de M é finito somente se, no mesmo limite, $M^{(r)}$ também for para zero. Logo, o comprimento de correlação correspondente $\xi^{(r)} = 1/M^{(r)}$ tenderá a infinito. Isto é necessário porque somente se o comprimento de correlação for infinito a teoria definida no limite $a \rightarrow 0$, i.e. perto do ponto crítico, não dependerá dos detalhes da ação de rede (12–15) (devido à universalidade), e diferentes discretizações da teoria produzirão a mesma teoria no limite do contínuo.

No caso da teoria de Yang-Mills SU(n) (em quatro dimensões), o único parâmetro da teoria na rede é o parâmetro

$$\beta = \frac{2n}{g_0^2}, \quad (3.93)$$

onde g_0 é a constante de acoplamento nua da teoria. Assim, o ponto crítico da teoria na rede — correspondente ao limite do contínuo — deve ser obtido por um certo valor β^* de β ou, equivalentemente, por um certo valor g_0^* de g_0 . Podemos então escrever

$$\lim_{g_0 \rightarrow g_0^*} \xi^{(r)}(g_0) = +\infty, \quad (3.94)$$

e a relação (3.92) pode ser escrita como

$$M = \lim_{g_0 \rightarrow g_0^*} M(g_0, a) = \frac{M^{(r)}(g_0)}{a}. \quad (3.95)$$

Mais em geral, para uma grandeza física Θ de dimensão m^{d_Θ} , vale a relação

$$\Theta = \lim_{g_0 \rightarrow g_0^*} \Theta(g_0, a) = \frac{\Theta^{(r)}(g_0)}{a^{d_\Theta}}. \quad (3.96)$$

Isto deixa evidente que deve existir uma relação entre g_0 e o espaçamento de rede a . Na vizinhança do ponto crítico, essa relação é determinada pelo grupo de renormalização (13).

De fato, $\Theta(g_0, a)$ deve satisfazer à equação do grupo de renormalização¹⁶

$$\left[a \frac{\partial}{\partial a} - \beta(g_0) \frac{\partial}{\partial g_0} \right] \Theta(g_0, a) = 0, \quad (3.97)$$

onde

$$\beta(g_0) = -a \frac{\partial g_0}{\partial a} \quad (3.98)$$

é a chamada função $\beta(g_0)$ de Callan-Symanzik.¹⁷ Quando a função $\beta(g_0)$ é conhecida, podemos integrar a Equação (3.98) e obter g_0 em função do espaçamento de rede a , i.e. obter uma expressão para $g_0(a)$. A equação do grupo de renormalização nos garante que, perto do ponto crítico g_0^* , mudando o valor de a e ao mesmo tempo o valor de g_0 — usando a relação $g_0(a)$ — o valor de $\Theta(g_0, a)$ não muda, i.e. o valor limite Θ é bem definido.

Uma vez obtida a relação entre g_0 e o espaçamento de rede a , podemos calcular o valor

$$g_0^* = g_0(0) \quad (3.99)$$

correspondente ao ponto crítico da teoria. Fica também evidente que, perto do ponto crítico, a função $g_0(a)$ deve ser a mesma para todas as grandezas físicas.¹⁸ Assim, qualquer grandeza física pode ser usada para calcular a função $\beta(g_0)$ de Callan-Symanzik. Esta função não é conhecida exatamente mas, usando teoria de perturbação, o resultado em ordem mais baixa é

$$\beta(g_0) = -\frac{\beta_0}{16\pi^2} g_0^3, \quad (3.100)$$

onde, para o grupo SU(n),

$$\beta_0 = \frac{11n}{3}. \quad (3.101)$$

Separando as variáveis na Equação (3.98), i.e. fazendo

$$\frac{da}{a} = \frac{16\pi^2}{\beta_0} \frac{dg_0}{g_0^3}, \quad (3.102)$$

¹⁶ Para maiores detalhes sobre o grupo de renormalização, podem ser consultados os artigos de revisão (41, 42).

¹⁷ Claramente, a função $\beta(g_0)$ não está relacionada ao parâmetro β que aparece na ação de Wilson.

¹⁸ No caso contrário não seria possível, por exemplo, calcular o limite do contínuo de razões de diferentes grandezas físicas.

e integrando, obtemos

$$\log(a\Lambda) = -\frac{16\pi^2}{2\beta_0} \frac{1}{g_0^2}, \quad (3.103)$$

ou

$$a = \frac{1}{\Lambda} e^{-\frac{16\pi^2}{2\beta_0 g_0^2}}. \quad (3.104)$$

Aqui Λ é uma constante de integração com dimensão de massa. Sendo que o coeficiente β_0 é positivo, é claro que o valor $a = 0$ é obtido quando $g_0 = 0$. Assim, o limite do contínuo deve corresponder ao valor $g_0^* = 0$ (e $\beta^* = +\infty$).

Note que o valor do coeficiente β_0 na Equação (3.101) acima não considera os campos fermiônicos. No caso geral o valor desse coeficiente é

$$\beta_0 = \frac{11n - 2n_f}{3}, \quad (3.105)$$

onde n_f é o número de sabores de quarks. Claramente, neste caso, β_0 é positivo somente se $n > 2n_f/11$. Esta desigualdade é satisfeita na QCD, para a qual $n = 3$ e (acredita-se) $n_f = 6$. Assim, também para a QCD na rede com férmions dinâmicos o limite do contínuo é obtido para $g_0^* = 0$. Este resultado não muda considerando o segundo coeficiente da função $\beta(g_0)$ de Callan-Symanzik, i.e.

$$\beta(g_0) = -\frac{\beta_0}{16\pi^2} g_0^3 - \frac{\beta_1}{(16\pi^2)^2} g_0^5, \quad (3.106)$$

com

$$\beta_1 = \frac{34n^2 - 38n_f}{3}. \quad (3.107)$$

De fato, neste caso o espaçamento de rede a pode ser escrito como (13)

$$a = \frac{1}{\Lambda} e^{-\frac{16\pi^2}{2\beta_0 g_0^2}} \left(\frac{\beta_0}{16\pi^2} g_0^2 \right)^{-\beta_1/(2\beta_0^2)}, \quad (3.108)$$

ou

$$a = \frac{1}{\Lambda} \exp \left\{ -\frac{16\pi^2}{2\beta_0 g_0^2} \left[1 + \frac{\beta_1 g_0^2}{16\pi^2 \beta_0} \log \left(\frac{\beta_0}{16\pi^2} g_0^2 \right) \right] \right\}. \quad (3.109)$$

Fica então claro que $a = 0$ para $g_0 = 0$.

Relembramos aqui que o resultado acima é obtido escrevendo a Equação (3.98) como

$$\frac{da}{a} = -\frac{dg_0}{\beta(g_0)}. \quad (3.110)$$

A integração desta equação fornece

$$a(g_0) = a(g'_0) \exp \left\{ - \int_{g'_0}^{g_0} \frac{dx}{\beta(x)} \right\}. \quad (3.111)$$

Indicando então com $A(x)$ a integral indefinida $\int \frac{dx}{\beta(x)}$, temos

$$a(g_0) = a(g'_0) \exp \left\{ -A(g_0) + A(g'_0) \right\}, \quad (3.112)$$

ou

$$a = a(g_0) = \frac{1}{\Lambda'} e^{-A(g_0)}, \quad (3.113)$$

com

$$\frac{1}{\Lambda'} = a(g'_0) e^{A(g'_0)}. \quad (3.114)$$

Note também que o resultado para $A(g_0)$ na Equação (3.109) é um resultado aproximado, obtido considerando

$$\begin{aligned} A(x) &= \int \frac{dx}{\beta(x)} \approx - \int dx \left[\frac{16\pi^2}{\beta_0 x^3} \left(1 - \frac{\beta_1 x^2}{16\pi^2 \beta_0} \right) \right] = - \int dx \left(\frac{16\pi^2}{\beta_0 x^3} - \frac{\beta_1}{\beta_0^2 x} \right) \\ &= \frac{16\pi^2}{2\beta_0 x^2} + \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \log(x) = \frac{16\pi^2}{2\beta_0 x^2} + \frac{\beta_1}{2\beta_0^2} \log(x^2). \end{aligned} \quad (3.115)$$

Enfim, re-escrevendo a Equação (3.109) como

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\Lambda} \exp \left\{ -\frac{16\pi^2}{2\beta_0 g_0^2} - \frac{\beta_1}{2\beta_0^2} \log \left(\frac{\beta_0}{16\pi^2} g_0^2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\Lambda} \exp \left\{ -\frac{16\pi^2}{2\beta_0 g_0^2} - \frac{\beta_1}{2\beta_0^2} \log(g_0^2) - \frac{\beta_1}{2\beta_0^2} \log \left(\frac{\beta_0}{16\pi^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.116)$$

temos que

$$a = \frac{e^{-A(g_0)}}{\Lambda} \exp \left\{ -\frac{\beta_1}{2\beta_0^2} \log \left(\frac{\beta_0}{16\pi^2} \right) \right\}. \quad (3.117)$$

Comparando este resultado com a relação (3.113), obtemos também

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{\Lambda'} \exp \left\{ \frac{\beta_1}{2\beta_0^2} \log \left(\frac{\beta_0}{16\pi^2} \right) \right\}. \quad (3.118)$$

Os resultados acima nos garantem que o limite do contínuo da QCD na rede é obtido para $\beta = +\infty$. Porém, nas simulações numéricas, não podemos considerar valores muito grandes do parâmetro β . De fato, nesse caso o espaçamento de rede a é muito pequeno e consequentemente precisamos de um lado de rede N enorme para obter uma rede de tamanho aN suficientemente grande em unidades físicas.¹⁹ Assim, o problema é entender como podemos calcular numericamente resultados físicos usando simulações numéricas. Para isso, vamos re-escrever o resultado obtido integrando a função $\beta(g_0)$ como

$$a = \frac{1}{\Lambda} R(g_0), \quad (3.119)$$

onde $R(g_0)$ é dada no caso geral por

$$R(g_0) = \exp \left\{ -\frac{16\pi^2}{2\beta_0 g_0^2} \left[1 + \frac{\beta_1 g_0^2}{16\pi^2 \beta_0} \log \left(\frac{\beta_0}{16\pi^2} g_0^2 \right) \right] \right\} [1 + P(g_0^2)] \quad (3.120)$$

e $P(g_0^2)$ é um polinômio em g_0^2 . Esse polinômio depende da grandeza considerada para o cálculo da função $\beta(g_0)$, enquanto que os coeficientes β_0 e β_1 são universais.²⁰ A Equação (3.96) fica então

$$\Theta = \lim_{g_0 \rightarrow 0} \Theta(g_0, a) = \Theta^{(r)}(g_0) \left(\frac{\Lambda}{R_\Theta(g_0)} \right)^{d_\Theta}, \quad (3.121)$$

onde $R_\Theta(g_0)$ é obtida integrando a função $\beta(g_0)$ calculada usando a grandeza Θ . Logo, o valor desta grandeza (em unidades físicas) é dado por

$$\Theta = \Lambda^{d_\Theta} C_\Theta \quad (3.122)$$

e a constante C_Θ é definida como

$$C_\Theta = \lim_{g_0 \rightarrow 0} \frac{\Theta^{(r)}(g_0)}{R_\Theta(g_0)^{d_\Theta}}. \quad (3.123)$$

Para g_0 suficientemente pequeno, a razão $\Theta^{(r)}(g_0)/R_\Theta(g_0)^{d_\Theta}$ é constante e o chamado regime de “escala assintótica” é satisfeito. Porém, mesmo nesse caso precisamos do valor de Λ (em

¹⁹ Para evitar efeitos de tamanho finito, devemos ter $aN > M^{-1}$, onde M é a menor massa do sistema físico considerado.

²⁰ Relembramos aqui também que a constante Λ depende somente da constante de acoplamento g considerada no cálculo perturbativo da função $\beta(g)$. Assim, quando é usada a constante g_0 da teoria na rede, como no caso descrito aqui, esta constante é de fato uma Λ_{rede} .

unidades físicas) para calcular Θ usando a Equação (3.122). Para isso precisamos de um *input* experimental considerando uma segunda grandeza física, por exemplo a tensão de corda σ . Escrevendo então²¹

$$\sigma = \Lambda^2 C_\sigma \quad (3.124)$$

e calculando C_σ numericamente, i.e. usando

$$C_\sigma = \lim_{g_0 \rightarrow 0} \frac{\sigma^{(r)}(g_0)}{R_\sigma(g_0)^2}, \quad (3.125)$$

obtemos

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\sigma}{C_\sigma}}. \quad (3.126)$$

Substituindo a relação acima na Equação (3.122), achamos enfim

$$\Theta = \sigma^{d_\Theta/2} \frac{C_\Theta}{C_\sigma^{d_\Theta/2}}, \quad (3.127)$$

ou

$$\frac{\Theta}{\sigma^{d_\Theta/2}} = \frac{C_\Theta}{C_\sigma^{d_\Theta/2}}. \quad (3.128)$$

Assim, o que realmente é calculado nas simulações numéricas são razões de grandezas físicas.

O resultado acima pode também ser escrito como

$$\frac{\Theta^{1/d_\Theta}}{\sigma^{1/2}} = \frac{C_\Theta^{1/d_\Theta}}{C_\sigma^{1/2}} = \lim_{g_0 \rightarrow 0} \frac{[\Theta^{(r)}(g_0)]^{1/d_\Theta}}{[\sigma^{(r)}(g_0)]^{1/2}} \frac{R_\sigma(g_0)}{R_\Theta(g_0)}. \quad (3.129)$$

Usando agora a Equação (3.120), obtemos

$$\frac{\Theta^{1/d_\Theta}}{\sigma^{1/2}} = \lim_{g_0 \rightarrow 0} \frac{[\Theta^{(r)}(g_0)]^{1/d_\Theta}}{[\sigma^{(r)}(g_0)]^{1/2}} \left[\frac{1 + P_\sigma(g_0^2)}{1 + P_\Theta(g_0^2)} \right]. \quad (3.130)$$

Para g_0 suficientemente pequeno, as razões no lado direito da equação acima são constantes e, em particular, $[1 + P_\sigma(g_0^2)]/[1 + P_\Theta(g_0^2)] \approx 1$. Nesse limite temos

$$\frac{\Theta^{1/d_\Theta}}{\sigma^{1/2}} \approx \frac{[\Theta^{(r)}(g_0)]^{1/d_\Theta}}{[\sigma^{(r)}(g_0)]^{1/2}}, \quad (3.131)$$

²¹ Lembramos aqui que a tensão de corda tem dimensão de massa ao quadrado.

ou

$$\Theta \approx \sigma^{d_\Theta/2} \frac{\Theta^{(r)}(g_0)}{[\sigma^{(r)}(g_0)]^{d_\Theta/2}}, \quad (3.132)$$

e o chamado regime de “escala” é satisfeito. Nas simulações numéricas com um volume de rede N^d fixo, o regime de “escala” corresponde em geral a uma pequena “janela” de valores para a constante β . De fato, para β pequeno a constante de acoplamento g_0 é grande e as correções de ordem superior na expressão para $R(g_0)$ não podem ser ignoradas. Por outro lado, para β grande a constante de acoplamento g_0 e o espaçamento de rede a são pequenos. Logo, o volume físico da rede $(aN)^d$ pode ser pequeno demais e os resultados são afetados pelos chamados erros de tamanho finito. Note também que, quando o regime de “escala” é satisfeito, o valor de Θ não deve depender do *input* experimental usado (no caso acima, a tensão de corda σ).

É importante observar que o limite do contínuo para as teorias de campos na formulação de rede é equivalente ao chamado processo de renormalização para as teorias quânticas de campos consideradas no contínuo.²² De fato, quando é usada a teoria de perturbação para o cálculo de funções de Green no contínuo, as integrais (de Feynman) podem produzir valores infinitos, devido ao número infinito de graus de liberdade da teoria (divergências ultra-violeta). Para “eliminar” esses infinitos (3–6), o primeiro passo consiste, por exemplo, em introduzir um corte λ para grandes momentos, i.e. considerar nas integrais no espaço dos momentos p somente momentos $p \leq \lambda$. O segundo passo é a definição de funções de Green renormalizadas G_n^R , por exemplo usando (no espaço dos momentos p) a relação

$$G_n^R(g, p, \mu) = Z^{-n/2} \left(g_0(\lambda), \frac{\lambda}{\mu} \right) G_n(g_0(\lambda), p), \quad (3.133)$$

onde g_0 representa os parâmetros nus da teoria (por exemplo a constante de acoplamento) e g representa os correspondentes parâmetros físicos. O fator $Z^{-1/2}$ é um re-escalamento dos

²² Relembramos aqui que a renormalizabilidade da teoria é um ingrediente fundamental de qualquer teoria quântica de campos, necessário para tornar os resultados da teoria finitos. No caso da eletrodinâmica quântica, a renormalização da teoria foi posta em bases sólidas através dos trabalhos de Schwinger, Feynman, Tomonaga e Dyson no final da década de 40. Para o caso da teoria de calibre não-abeliana $SU(N)$, com ou sem quebra espontânea de simetria, o problema foi resolvido por volta de 1970, usando a chamada regularização dimensional cunhada por t’Hooft (43–45).

campos

$$\phi(x, \lambda) = Z^{1/2} \phi_R(x), \quad (3.134)$$

que pode ser obtido impondo uma condição de renormalização para o propagador na escala (de renormalização) $p = \mu$. Ao mesmo tempo, as funções de Green não-renormalizadas G_n são calculadas usando o corte λ . Fica então claro que as funções renormalizadas G_n^R são bem definidas no limite $\lambda \rightarrow \infty$ somente se os parâmetros nus da teoria g_0 forem funções do corte λ . Esta dependência, indicada explicitamente na equação acima, é fixada impondo um conjunto de condições de renormalização que especificam os parâmetros físicos da teoria g . Por definição, o valor dos parâmetros físicos permanece fixo quando o corte λ é removido. As condições de renormalização permitem re-escrever os parâmetros nus em função dos parâmetros físicos. Assim, todas as grandezas físicas calculadas podem também ser escritas em função desses parâmetros físicos e os resultados obtidos são finitos no limite $\lambda \rightarrow \infty$. Dessa forma, as divergências ultra-violeta podem ser “absorvidas” em parâmetros não-observáveis da teoria (os parâmetros nus da lagrangiana e as constantes Z de renormalização dos campos) e os resultados podem ser escritos em função de parâmetros físicos finitos. Do ponto de vista físico, a renormalização dos parâmetros nus da lagrangiana pode ser entendida observando que as medidas experimentais, por exemplo de massa e de carga de uma partícula, não são simplesmente a carga e_0 e a massa m_0 nuas da lagrangiana inicial, mas sempre incluem os efeitos relacionados às flutuações do vácuo quântico, i.e. devidos à criação de partículas virtuais (por exemplo fótons e pares elétron-pósitron no caso da QED). Assim, os parâmetros nus não são observáveis e não representam verdadeiros parâmetros físicos da teoria. A teoria considerada é dita renormalizável quando esse procedimento de renormalização pode ser executado de forma consistente em cada ordem da teoria de perturbação usando um conjunto (finito e fixado) de condições de renormalização.

No caso da formulação de rede para as teorias de campos, o corte ultra-violeta é dado pelo espaçamento de rede a . De fato, na rede não podem ser considerados comprimentos l menores do que a . Equivalentemente, não podem ser considerados momentos p maiores de $\sim 1/a$.

Assim, a teoria de rede é uma regularização da teoria do contínuo.²³ Ao mesmo tempo, os parâmetros nus da teoria na rede são a constante de acoplamento da rede $\beta = 2n/g_0^2$ e as massas (nuas) dos quarks. No limite do contínuo $a \rightarrow 0$, i.e. quando o corte ultra-violeta é removido, precisamos renormalizar esses parâmetros de forma que grandezas físicas convirjam para valores finitos. De fato, como explicado acima, também na teoria de rede os resultados obtidos são finitos somente se a constante de acoplamento nua g_0 depender do corte a de forma apropriada, dada pelo grupo de renormalização. Também, o limite do contínuo é tomado eliminando, no valor físico Θ , o fator $R_\Theta(g_0)$ através do *input* experimental σ , i.e. re-escrevendo a dependência em relação ao parâmetro nu $g_0(a)$ em função de uma grandeza física finita. Podemos então concluir que, após escolher o *input* experimental σ , a teoria na rede é renormalizável se todas as razões $\Theta^{1/d_\Theta}/\sigma^{1/2}$ forem finitas no limite do contínuo $a \rightarrow 0$, i.e. após remoção do corte ultra-violeta.

Uma outra analogia importante entre a formulação de rede e a teoria no contínuo pode ser evidenciada escrevendo a Equação (3.103) acima como

$$\alpha_0(a) = \frac{g_0^2}{16\pi^2} = -\frac{1}{2\beta_0 \log(a\Lambda)} = \frac{1}{\beta_0 \log\left(\frac{1}{a^2\Lambda^2}\right)}. \quad (3.135)$$

A grandeza $\alpha_0(g_0^2)$ é chamada de constante de acoplamento da teoria de rede. Relembremos que a dependência desta constante com a escala de energia $1/a$ da rede foi obtida usando o grupo de renormalização, i.e. impondo que, perto do ponto crítico g_0^* , o valor de uma grandeza física $\Theta(g_0, a)$ [ver Equação (3.96)] seja independente de g_0 e de a . No caso da renormalização no espaço contínuo (3), podemos re-escrever a Equação (3.133) como

$$Z^{n/2} \left(g_0(\lambda), \frac{\lambda}{\mu} \right) G_n^R(g, p, \mu) = G_n(g_0(\lambda), p). \quad (3.136)$$

Claramente, temos que

$$\mu \frac{d}{d\mu} G_n(g_0(\lambda), p) = 0. \quad (3.137)$$

Juntando as duas equações acima, obtemos que G_n^R satisfaz a uma equação de Callan-Symanzik

²³ Note, porém, que a teoria de rede não coincide com a regularização obtida usando, no caso contínuo, o corte ultra-violeta λ nas integrais de Feynman.

análoga à Equação (3.97). Essa equação relaciona uma mudança na escala de renormalização μ com mudanças na constante de acoplamento g e no fator de renormalização Z . A solução da equação de Callan-Symanzik é em geral possível para grandes momentos e o resultado pode ser escrito de forma simples introduzindo uma constante de acoplamento efetiva $g_{\text{eff}}(p)$ que depende da escala de energia p e satisfaz a condição $g_{\text{eff}}(\mu) = g$. Para as teorias de Yang-Mills o resultado na ordem mais baixa é

$$\alpha_{\text{eff}}(p) = \frac{g_{\text{eff}}^2(p)}{16\pi^2} = \frac{\alpha_{\text{eff}}(\mu)}{1 + \beta_0 \alpha_{\text{eff}}(\mu) \log\left(\frac{p^2}{\mu^2}\right)}, \quad (3.138)$$

com $\alpha_{\text{eff}}(\mu) = g^2/(16\pi^2)$. A equação acima pode ser escrita também como

$$\frac{1}{\alpha_{\text{eff}}(p)} - \beta_0 \log(p^2) = \frac{1}{\alpha_{\text{eff}}(\mu)} - \beta_0 \log(\mu^2) = C, \quad (3.139)$$

onde C é uma constante. A escolha $C = -\beta_0 \log(\Lambda_{QCD}^2)$ fornece enfim

$$\alpha_{\text{eff}}(p) = \frac{1}{\beta_0 \log\left(\frac{p^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)}. \quad (3.140)$$

Este resultado, conhecido como liberdade assintótica, nos diz que a carga efetiva $\alpha_{\text{eff}}(p)$ é nula no limite de momento p infinito, i.e. a carga de cor diminui a medida que nos aproximamos de uma partícula colorida.²⁴ Como consequência, no limite de pequenas separações, as partículas coloridas apresentam um comportamento de partícula livre. Ao mesmo tempo, a Equação (3.135) representa o equivalente da liberdade assintótica na teoria de rede e nos diz qual é a relação entre a escala ultra-violeta típica da rede, i.e. o espaçamento de rede a , e a constante de acoplamento g_0 .

O fato de termos obtido $\alpha_{\text{eff}}(p) \rightarrow 0$ quando $p \rightarrow \infty$ sugere que a carga efetiva possa ser grande no limite de pequenos momentos. A força entre duas partículas coloridas seria então muito grande no limite de grande separações, fornecendo uma explicação para o confinamento da carga de cor. Porém, como explicado na Introdução, nesse caso a teoria de perturbação não pode ser usada e o confinamento de cor deve ser estudado usando métodos não-perturbativos.

²⁴ Esse resultado é oposto ao resultado obtido na QED onde a carga elétrica aumenta quando nos aproximamos por exemplo de um elétron.

4 *Simulações Numéricas de Monte Carlo*

Neste capítulo vamos fazer uma descrição sucinta dos métodos de Monte Carlo, utilizados para as simulações de QCD na rede na aproximação *quenched*, e dos problemas relacionados à análise de erro dos resultados numéricos.

4.1 Métodos de Monte Carlo

Como visto na Seção 3.2, na formulação de teorias quânticas de campos usando integrais de trajetória estamos interessados no cálculo de valores esperados do tipo

$$\langle O[\phi(x)] \rangle = \frac{1}{Z_E} \int D[\phi(x)] O[\phi(x)] \exp\{-S_E[\phi(x)]\}, \quad (4.1)$$

onde $O[\phi(x)]$ é a uma grandeza física que depende do campo $\phi(x)$, por exemplo o propagador, $D[\phi(x)]$ representa a integração sobre todas as possíveis configurações que o campo pode assumir, $S_E[\phi(x)]$ é a ação (no espaço euclidiano) da teoria considerada e

$$Z_E = \int D[\phi(x)] \exp\{-S_E[\phi(x)]\} \quad (4.2)$$

é a condição de normalização da distribuição de probabilidades. Como já observado na Seção 3.2, a grandeza Z_E lembra a função de partição da mecânica estatística clássica e é esta analogia que permite a aplicação dos métodos usados em mecânica estatística, como os métodos de Monte Carlo, às teorias quânticas de campos.

No caso das teorias de Yang-Mills no contínuo, a integração funcional é feita sobre o campo

de calibre $A_\mu(x)$ da teoria e a ação $S_E[A_\mu(x)]$ é a ação de Yang-Mills descrita na Seção 2.1. Na formulação de rede dessas teorias, a ação discretizada (ver Seção 2.3) é escrita em função das variáveis de elos $U_\mu(x)$, relacionadas aos campos de calibre $A_\mu(x)$ através da Equação (2.96). Os valores esperados calculados na teorias de Yang-Mills na rede são então escritos como

$$\langle O[U_\mu(x)] \rangle = \frac{1}{Z_E[U_\mu(x)]} \int D[U_\mu(x)] O[U_\mu(x)] \exp\{-S_E[U_\mu(x)]\}. \quad (4.3)$$

Relembramos aqui que as variáveis de elos $U_\mu(x)$ são matrizes pertencentes ao grupo de simetria de calibre na representação fundamental, que x representa um sítio da rede e μ é um índice de Lorentz. Assim, o valor esperado acima inclui, para cada sítio x e direção μ , uma soma sobre todos os possíveis valores da variável $U_\mu(x)$, i.e. uma soma sobre todas as possíveis matrizes $SU(n)$. O espaço de configurações da teoria apresenta então um volume W^V , onde V é o volume da rede e W é o volume [finito¹ no caso $SU(n)$] do grupo de calibre considerado. Claramente, mesmo para um espaço de variáveis discreto, como no caso do modelo de spins de Ising, o cálculo exato da soma sobre todas as configurações do sistema é absolutamente inviável (12, 46), requerendo a consideração de 2^V termos. De fato, até para uma rede pequena, em três dimensões, de volume $V = 10^3$, o número de termos ² é $2^{1000} \approx 10^{300}$.

A solução deste problema é obtida trocando a soma sobre todas as configurações com a chamada *amostragem por importância*,³ i.e. selecionando no espaço das configurações $\{C_j\}$ amostras “sorteadas” de acordo com a distribuição de probabilidades $P[C_j]$, correspondente ao peso estatístico e^{-S_E}/Z_E em (4.3). Tendo um número M (suficientemente) grande de amostras, o valor esperado da grandeza considerada será então dado pela média aritmética das amostras, i.e.

$$\langle O[U_\mu(x)] \rangle \approx \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M O[U_\mu(x, j)], \quad (4.4)$$

onde $\{U_\mu(x, j)\}$ são as variáveis de elos da configuração C_j . Assim, os valores esperados

¹ Note que o volume do grupo é finito, porque trata-se de um grupo compacto, mas o número de matrizes no grupo é infinito.

² É simples verificar que o tempo para cálculo de uma soma com este número de termos em uma máquina com poder de 1 Teraflops (i.e. 10^{12} operações de ponto flutuante por segundo) é de cerca de 10^{270} vezes a idade do universo!

³ O uso de amostras estocásticas em vez de um cálculo exato é o que caracteriza os métodos de Monte Carlo.

(4.3) são obtidos considerando uma média ponderada, com pesos dados pela ação clássica, para as diferentes configurações que o campo pode assumir. Isto torna viável, pelo menos em princípio, o cálculo desses valores esperados. Claramente, obter uma boa amostragem do espaço de configurações do campo será o ponto crucial para a implementação do método.

Em resumo, queremos amostrar a distribuição conjunta de probabilidades

$$P[U_\mu(x)] dU_\mu(x) = \frac{\exp\{-S_E[U_\mu(x)]\}}{\int D[U_\mu(x)] \exp\{-S_E[U_\mu(x)]\}}, \quad (4.5)$$

onde $P[U_\mu(x)]$ representa a probabilidade de ocorrência da configuração $\{U_\mu(x)\}$ para os elos da rede. Note que, devido à integral no denominador da expressão acima, para determinar a probabilidade de uma dada configuração temos em princípio que considerar a probabilidade de ocorrência de todas as outras configurações. Assim, não é possível em geral selecionar as amostras de forma independente usando a distribuição conjunta (4.5). Podemos, porém, gerar uma sequência de configurações C_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) usando um processo markoviano (ou seja, um processo em que cada configuração será dependente da anterior) de forma que cada amostra na sequência seja escolhida segundo a distribuição desejada [veja por exemplo a Referência (46)]. Para tanto, devem ser respeitadas condições simples — como a condição de balanço detalhado — para a evolução do processo. Isto garante que a distribuição no estado estacionário, i.e. para j grande, da cadeia de Markov associada seja a distribuição de probabilidades em (4.5). Porém, deve ser tomado cuidado com o fato de que as amostras serão correlacionadas e portanto o cálculo do desvio para a média aritmética das amostras será mais complicado do que para amostras independentes (ver Seção 4.2 abaixo). Deve também ser eliminado o transiente inicial, ou seja é necessário descartar as primeiras amostras da sequência para garantir que as medidas sejam tomadas no estado estacionário do processo markoviano. Enfim, será preciso verificar que o processo respeite a propriedade de *ergodicidade*, i.e. que o espaço de configurações seja visitado de maneira eficiente, sem que o processo fique retido em algum sub-espaço de configurações.⁴

⁴ Essencialmente, deve-se garantir que cada estado seja acessível a partir de qualquer outro em um número finito de passos da cadeia.

Exceto por esses cuidados, a prescrição para geração da sequência de configurações C_j pode ser bem simples, como veremos mais abaixo, e não será necessário o conhecimento de todas as configurações possíveis, nem o cálculo exato da integral (4.3) acima.

4.1.1 Como Gerar Matrizes SU(n) Aleatórias

Antes de aprender a gerar configurações de matrizes SU(n) de acordo com uma distribuição de probabilidades qualquer, vamos considerar aqui o problema de gerar matrizes SU(n) de acordo com uma distribuição uniforme. Como primeiro passo é conveniente considerar um caso mais simples, o das matrizes SU(2).

Relembramos que, no caso do grupo SU(2), qualquer matriz pode ser escrita como

$$U = U^0 1 + i \sigma_b U^b, \quad (4.6)$$

onde U^0 é um escalar real, U^b é um vetor pertencente a $\mathfrak{R}^3$, 1 é a matriz identidade e σ_b são as três matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Essas matrizes são os geradores do grupo em sua representação fundamental, i.e. elas representam uma base para a álgebra de Lie do grupo SU(2), e satisfazem as regras de comutação

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i \varepsilon_{abc} \sigma_c, \quad (4.8)$$

onde ε_{abc} é o tensor (completamente anti-simétrico) de Levi-Civita. Note também que elas são hermitianas e satisfazem as relações

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1 \quad (4.9)$$

e

$$Tr \sigma_b = 0. \quad (4.10)$$

Como mostrado na Seção 2.1, isto implica para as matrizes

$$U = \exp \left\{ i \lambda^b \sigma_b \right\} \quad (4.11)$$

do grupo $SU(2)$ as propriedades

$$\det U = 1 \quad (4.12)$$

e

$$U^\dagger = U^{-1}. \quad (4.13)$$

É também fácil verificar (usando a expansão de Taylor da função exponencial e as propriedades das matrizes de Pauli) que, escrevendo $\vec{\lambda}$ como $\hat{\lambda} \theta$, onde $|\hat{\lambda}|^2 = 1$, a relação (4.11) implica a Equação (4.6) acima, com $U^0 = \cos(\theta)$, $\vec{U} = \hat{U} \sin(\theta)$ e $|\hat{U}|^2 = 1$. Logo, obtemos

$$(U^0)^2 + (U^1)^2 + (U^2)^2 + (U^3)^2 = 1, \quad (4.14)$$

o que garante a condição (4.12).

Fica claro então que para obter matrizes $SU(2)$ aleatórias é suficiente gerar de forma aleatória vetores uniformemente distribuídos sobre uma hiper-superfície esférica quadri-dimensional com raio unitário. Isto pode ser feito, por exemplo, da seguinte forma. Inicialmente podemos gerar um número aleatório para o coeficiente U^0 tal que $0 \leq U^0 \leq 1$. Isto implica $(U^1)^2 + (U^2)^2 + (U^3)^2 = 1 - (U^0)^2$, i.e. precisamos agora gerar aleatoriamente um vetor $\vec{U}$ uniformemente sobre a esfera unitária tri-dimensional e, posteriormente, normalizá-lo multiplicando suas componentes por $r = \sqrt{1 - (U^0)^2}$. Isto pode ser obtido utilizando coordenadas cilíndricas [ver por exemplo a Referência (47)], tomando-se

$$U^1 = \sqrt{1 - \rho^2} r \cos \phi \quad (4.15)$$

$$U^2 = \sqrt{1 - \rho^2} r \sin \phi \quad (4.16)$$

$$U^3 = r \rho, \quad (4.17)$$

onde ρ deve ser gerado com distribuição uniforme no intervalo $[-1, 1]$ e ϕ deve ser uniformemente distribuído no intervalo $[0, 2\pi]$. Assim, podemos gerar matrizes pertencentes ao grupo

SU(2), com distribuição uniforme, usando três números aleatórios⁵ e a condição (4.14).

No caso geral de matrizes SU(n) a relação [ver a Seção 2.1]

$$U = \exp \left\{ i \lambda^b T_b \right\}, \quad (4.18)$$

entre as matrizes U do grupo e os geradores T_b da álgebra de Lie, não pode ser simplificada como em (4.6) para o caso do grupo SU(2). Assim, parametrizar as matrizes do grupo SU(n) usando os números reais λ^b é em princípio possível mas requer o cálculo do exponencial de uma matriz, por exemplo usando a expansão de Taylor da função exponencial. Isto é em geral demasiadamente custoso do ponto de vista computacional.

O que se costuma fazer nesse caso é um mapeamento das matrizes SU(n) através de produtos de matrizes SU(2). Assim, no caso por exemplo das matrizes SU(3) na representação fundamental, podemos escrever⁶

$$U = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ -b_1^* & a_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b_2^* & 0 & a_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & -b_3^* & a_3^* \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

onde a_i, b_i são números complexos. Note que as três matrizes no lado direito da equação acima são de fato matrizes SU(2). Mais precisamente, elas pertencem aos sub-grupos SU(2) do grupo SU(3). Assim, usando o método descrito acima para o caso SU(2), podemos facilmente gerar matrizes aleatórias SU(3) ou, mais em geral, matrizes SU(n). Claramente, o custo computacional aumenta à medida que aumentamos a dimensão do grupo.⁷

⁵ Em geral os geradores de números aleatórios produzem variáveis x uniformemente distribuídas no intervalo $[0, 1]$. Para gerar uma variável y uniformemente distribuída no intervalo $[a, b]$ é suficiente usar a relação $y = a + (b - a)x$.

⁶ Note que a Equação (4.6) pode ser escrita em forma matricial como

$$U = \begin{pmatrix} U_0 + iU_3 & U_2 + iU_1 \\ -U_2 + iU_1 & U_0 - iU_3 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

⁷ Note que o número de sub-grupos SU(2) no caso SU(n) é $n(n-1)/2$. Assim, para grandes valores de n , o custo computacional é proporcional a n^2 .

4.1.2 Algoritmos de Metropolis e de Banho Térmico

Voltemos agora ao problema inicial. Vamos descrever dois algoritmos que permitem gerar configurações de acordo com a distribuição de probabilidades (4.5). Mais especificamente, dada uma configuração C_j do sistema, i.e. dado um conjunto de matrizes $\{U_\mu(x, j)\}$, queremos produzir uma nova configuração C_m , i.e. o conjunto de matrizes $\{U_\mu(x, m)\}$, de acordo com a distribuição de probabilidades $P[U_\mu(x, m)]$ dada por

$$P[U_\mu(x, m)] = \frac{e^{-S_E[U_\mu(x, m)]}}{Z_E}. \quad (4.21)$$

O método mais comum para a evolução markoviana de Monte Carlo é o chamado algoritmo de Metropolis, que consiste em propor uma nova configuração C_m e aceitá-la ou não, com base na chamada propriedade de balanço detalhado. O método é muito utilizado, devido a sua flexibilidade e simplicidade, já que para proposta e escolha da nova configuração é necessário calcular apenas a razão entre probabilidades de configurações diferentes, dada por

$$R^{jm} = \frac{P[U_\mu(x, m)]}{P[U_\mu(x, j)]} = \exp \{ -S_E[U_\mu(x, m)] + S_E[U_\mu(x, j)] \}. \quad (4.22)$$

A proposta é aceita quando $R^{jm} > x$, onde x é um número aleatório uniformemente distribuído no intervalo $[0, 1]$. Na prática, as propostas são limitadas a modificações pequenas da configuração C_j atual do sistema, por exemplo alterando-se apenas um elo, para garantir uma taxa de aceitação razoável. Claramente, iterando este procedimento Vd vezes, onde V é o volume da rede e d a sua dimensão, podemos modificar (ou pelo menos propor uma atualização para) todos os elos $U_\mu(x)$ da rede.

Um método mais eficiente do que o de Metropolis, embora sua implementação seja um pouco mais complexa, é o algoritmo conhecido como *banho térmico*. Neste caso a idéia é, a cada passo da simulação, realizar uma sequência de iterações do seguinte procedimento: alterar a configuração de um único elo da rede, gerando uma nova configuração de acordo com

a distribuição *marginal* para este elo, obtida mantendo fixas todas as outras variáveis de elos.⁸ Trata-se de uma atualização local, como para o método de Metropolis descrito acima, pois a rede é “varrida” considerando-se atualizações para um elo de cada vez, deixando os demais elos “congelados”. A diferença é que, no caso do banho térmico, fazemos a amostragem *exata* da distribuição marginal, o que determina uma maior eficiência do método, já que o elo considerado é sempre atualizado, com valor dado pela amostragem direta da distribuição (local) exata.

O algoritmo de banho térmico pode então ser definido da seguinte forma: dada uma configuração inicial qualquer $\{U_\mu(x, j)\}$, a sua atualização é feita modificando o elo $U_\nu(y, j)$ no sítio y e na direção ν de acordo com uma distribuição de probabilidades marginal em que os demais elos são mantidos fixos, ou seja

$$P[U_\nu(y, j) | \{U_\mu(x, j); x \neq y \text{ e } \nu \neq \mu\}]. \quad (4.23)$$

Claramente, neste caso o problema é achar um método eficiente do ponto de vista computacional para gerar, de forma exata, a distribuição de probabilidades acima. Quando isto é possível, iterando a atualização de banho térmico podemos, após Vd passos, gerar uma nova configuração para todo o sistema. Note que o algoritmo de banho térmico tem uma clara interpretação física. De fato, podemos descrever a atualização como se a mesma se referisse a um único grau de liberdade, sujeito a um “campo externo” local ou em contato com um reservatório térmico (dado por seus elos vizinhos), ou seja a atualização equivale a termalizar uma variável de elo que se encontra em um banho térmico, dado pelo restante do sistema.

É importante ressaltar que o fato de considerar na ação apenas a interação entre primeiros vizinhos simplifica a atualização de Monte Carlo, seja com o algoritmo de Metropolis que com o algoritmo de banho térmico. De fato, isso simplifica enormemente as expressões (4.22) e (4.23). Como evidenciado na Seção 2.2 acima, o uso de ações melhoradas requer em geral a consideração de interações entre segundos vizinhos, terceiros vizinhos, etc. Assim, o uso dessas

⁸ Note que a amostragem de uma distribuição de probabilidades através das distribuições marginais para subconjuntos de suas variáveis é claramente uma maneira válida de implementar a evolução markoviana desejada (46).

ações requer um maior custo computacional para atualizar o sistema físico considerado.⁹

Ao mesmo tempo, a interação entre primeiros vizinhos e o uso de uma atualização local, e.g. para uma única variável de elo a cada vez, facilita a paralelização dos códigos, limitando as necessidades de comunicação entre diferentes CPUs. De fato, dividindo os sítios da rede entre os vários processadores, é claro que somente a atualização dos elementos na borda da rede local em cada CPU requer trocas de informação entre os processadores.

4.1.3 Algoritmo de Banho Térmico para a Ação de Wilson

Vamos ver agora em mais detalhe a atualização de banho térmico para a ação de Wilson [ver por exemplo (47)]. Para isto, escrevemos essa ação [ver a Equação (2.176)] como

$$S_E[U_\mu(x)] = \beta \sum_{\mu < \nu} \sum_x \left[1 - \Re \frac{Tr}{n} W_{\mu\nu}(x) \right], \quad (4.24)$$

onde $W_{\mu\nu}(x)$ são os loops de Wilson, dados por [ver também a Equação (2.113)]

$$W_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x) U_\nu(x + ae_\mu) U_\mu(x + ae_\nu)^\dagger U_\nu(x)^\dagger. \quad (4.25)$$

Queremos aqui isolar apenas a parte da ação que depende de um elo específico $U_\lambda(y)$. É claro que cada elo pertence a $2(d-1)$ loops de Wilson, no caso de uma rede de dimensão d . Também é evidente que a ação depende linearmente do elo $U_\lambda(y)$. Podemos então escrever

$$S_E[U_\lambda(y)] = -\beta \Re \frac{Tr}{n} [U_\lambda(y) \Sigma_\lambda(y)] + C, \quad (4.26)$$

onde $\Sigma_\lambda(y)$ representa o acoplamento do elo $U_\lambda(y)$ com o restante do sistema físico e C é uma constante que não depende de $U_\lambda(y)$. É enfim fácil verificar que $\Sigma_\lambda(y)$ pode ser escrito como

$$\Sigma_\lambda(y) = \sum_{\nu \neq \lambda} [\cap_{\lambda\nu}(y) + \cup_{\lambda\nu}(y)], \quad (4.27)$$

com

$$\cap_{\lambda\nu}(y) = U_\nu(y + a\hat{e}_\lambda) U_\lambda^\dagger(y + a\hat{e}_\nu) U_\nu^\dagger(y) \quad (4.28)$$

⁹ As ações melhoradas facilitam porém a extrapolação ao limite do contínuo. Assim, o custo total da simulação é em geral reduzido.

e

$$\cup_{\lambda v}(y) = U_v^\dagger(y + a\hat{e}_\lambda - a\hat{e}_v)U_\lambda^\dagger(y - a\hat{e}_v)U_v(y - a\hat{e}_v). \quad (4.29)$$

Note que os chamados *grampos* $\cap_{\lambda v}(y)$ e $\cup_{\lambda v}(y)$ são matrizes $SU(n)$, pois são produtos de matrizes $SU(n)$. Porém, devido à Equação (4.6), somente no caso $SU(2)$ o “campo externo” $\Sigma_\lambda(y)$ é proporcional a uma matriz $SU(2)$. Nesse caso podemos reescrever $\Sigma_\lambda(y)$ como

$$\Sigma_\lambda(y) = N_\lambda(y)\Sigma_\lambda^0(y), \quad (4.30)$$

onde agora $\Sigma_\lambda^0(y)$ é uma matriz pertencente ao grupo $SU(2)$ e

$$N_\lambda(y) = \sqrt{\det \Sigma_\lambda(y)}. \quad (4.31)$$

Escrevendo então a atualização do elo $U_\lambda(y)$ como

$$U_\lambda(y) \rightarrow V[\Sigma_\mu^0(y)]^{-1}, \quad (4.32)$$

obtemos para a matriz $V \in SU(2)$ a distribuição de probabilidades

$$P(V)dV = \exp\left\{\beta N_\lambda(y)\Re\frac{Tr}{n}V\right\}. \quad (4.33)$$

Usando a relação (4.6), o resultado acima pode também ser escrito como (48)

$$P(V^0)dV^0 = \sqrt{1 - (V^0)^2} \exp\{\beta N_\lambda(y)V^0\}dV^0, \quad (4.34)$$

onde o fator $\sqrt{1 - (V^0)^2}$ é obtido quando a medida no grupo é escrita em termos das variáveis $V^0, \vec{V}$. Como evidenciado acima, a distribuição de probabilidades depende somente de V^0 . Assim, as componentes do vetor $\vec{V}$, de módulo $\sqrt{1 - (V^0)^2}$, podem ser obtidas como na Seção 4.1.1. Em comparação com o caso da distribuição uniforme, a única diferença é então a geração do parametro V^0 , que agora deve satisfazer à distribuição de probabilidades acima. Como descrito em (47), existem vários métodos para obter essa distribuição de probabilidades de forma exata.

No caso de matrizes $SU(n)$, o problema é reduzido ao caso $SU(2)$ [ver (49)] considerando-se como matriz V para a atualização do elo um subgrupo $SU(2)$ do grupo $SU(n)$, e.g. no caso

Figura 4.1 – Valor do traço normalizado W do loop de Wilson (4.25) em função do número de iterações de Monte Carlo N para uma rede de volume $V = 16^4$ com $\beta = 6.4$ para o grupo $SU(3)$ usando uma configuração inicial desordenada.

do grupo $SU(3)$ usa-se uma matriz do tipo representado no lado direito da Equação (4.20).

4.2 Simulações e Análise de Erros

Como explicado nas Seções 4.1 e 4.1.2 acima, as simulações numéricas das teorias de Yang-Mills na formulação de rede são feitas considerando uma sequência de configurações C_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) para a configuração de rede $\{U_\mu(x)\}$. Esta sequência de configurações é obtida usando um algoritmo que permite “atualizar” as variáveis de elo $U_\mu(x)$, em geral uma de cada vez. Assim, partindo de uma configuração C_0 e repetindo o processo de atualização, é possível obter, após “varrer” a rede inteira, uma configuração C_1 na qual, em princípio, todas as variáveis de elo $U_\mu(x)$ são diferentes. O processo é repetido em geral um número N_t de vezes até chegar à configuração C_{N_t} . Para N_t suficientemente grande, podemos supor que o transiente inicial seja eliminado (ver por exemplo a Figura 4.1). A configuração C_{N_t} é então considerada “termalizada”, i.e. ela representa uma amostragem por importância obtida usando a distribuição de probabilidades correta.

Uma vez eliminado o transiente inicial — e perdida a “memória” do estado inicial C_0 — podemos calcular observáveis físicos usando a relação (4.4). Para isto precisamos gerar M configurações. Em princípio podemos usar as configurações $C_{N_t+1}, C_{N_t+2}, C_{N_t+3}, \dots$. Porém, em geral, a configuração C_j é fortemente correlacionada à configuração C_{j+1} . Assim, o valor do observável $O[U_\mu(x, j)]$ na configuração C_j será também correlacionado ao valor do observável $O[U_\mu(x, j+1)]$ na configuração C_{j+1} . Isto complica a análise de erro, devendo-se considerar a correlação entre os dados numéricos (50). Este problema pode ser contornado descartando-se um certo número N_d de configurações entre amostras, de forma que as mesmas resultem essencialmente independentes.¹⁰ Desta forma, os observáveis não são calculados para todas as configurações, mas apenas para as configurações significativas $C_{N_t}, C_{N_t+N_d}, C_{N_t+2N_d}, \dots$, i.e. para configurações descorrelacionadas umas das outras. Tal prática é sempre adotada quando o tempo de processamento para o cálculo dos observáveis é considerável.

Podemos então esquematizar as simulações de Monte Carlo para as teorias de Yang-Mills na rede da seguinte forma:

- fixar os parâmetros: constante de acoplamento da rede β , número de configurações N_c , números de passos de termalização N_t, N_d ;
- fixar a configuração inicial C_0 de elos $\{U_\mu(x)\}$;
- termalizar a configuração (U, β, N_t)
- executar o ciclo:

para $(c = 1; c < N_c; c++) \{$

— calcular o observável $O[U_\mu(x)]$

— escrever o resultado no arquivo de saída

— (para $c < N_c - 1$) criar uma nova configuração descorrelacionada (U, β, N_d)

$\};$

¹⁰ Um fato importante é que, quando o sistema considerado possui um ponto crítico, como o limite do contínuo para a QCD na rede, à medida que nos aproximamos do ponto crítico, o sistema se torna altamente correlacionado. Como consequência disto, aumentará muito a exigência de um grande número de passos de atualização N_d das configurações para produzir configurações descorrelacionadas.

- concluir o código.

Para um valor de N_d suficientemente grande, as configurações podem ser consideradas descorrelacionadas e, uma vez estimado o observável usando a média (4.4), podemos calcular a variação estatística de cada uma das medidas com relação ao valor médio através de

$$\sigma_O^2 = \frac{1}{M} \sum_j^M [\bar{O} - O_j]^2, \quad (4.35)$$

onde $\bar{O}$ indica o valor médio calculado. O erro para o valor médio é então usualmente estimado usando $\sqrt{\sigma_O^2/(M-1)}$. Assim, o erro diminui como $\sim 1/\sqrt{M}$.

Por outro lado, para $N_d = 1$ devemos verificar o grau de correlação entre os dados. Isto pode ser feito de forma simples e rápida usando o chamado método de *binning*. Para isso, dado um conjunto de valores O_j ($j = 1, 2, \dots, M$), é calculado o valor médio $\bar{O}$ usando a relação (4.4) e em seguida é calculado o erro como no caso de configurações descorrelacionadas, i.e. através da relação

$$\sqrt{\frac{1}{M(M-1)} \sum_j^M [\bar{O} - O_j]^2}. \quad (4.36)$$

Neste ponto é gerado um novo conjunto de $M/2$ dados usando

$$O_i^{(1)} = \frac{O_{2i-1} + O_{2i}}{2}, \quad (4.37)$$

com $i = 1, 2, \dots, M/2$. Para este novo conjunto é de novo calculado o erro, i.e.

$$\sqrt{\frac{1}{\frac{M}{2}(\frac{M}{2}-1)} \sum_i^{M/2} [\bar{O} - O_i^{(1)}]^2}. \quad (4.38)$$

Note que o valor médio para o conjunto O_j e para o conjunto $O_i^{(1)}$ é claramente o mesmo. Quando as configurações estão correlacionadas, o valor obtido em (4.38) é maior (ver Figura 4.2) do que o valor obtido em (4.36). Este procedimento é então iterado, considerando um conjunto $O_l^{(2)}$ ($l = 1, 2, \dots, M/4$) e depois um $O_m^{(3)}$ ($m = 1, 2, \dots, M/8$), etc. O que é observado é que, após r passos, i.e. para o conjunto $O_n^{(r)}$ ($n = 1, 2, \dots, M/2^r$), o erro calculado chega a um valor mais ou menos constante (ver de novo a Figura 4.2). Esse valor pode então ser usado como

Figura 4.2 – Cálculo do erro para o traço normalizado do loop de Wilson (4.25) em função do número de iterações r no método de binning. Os dados foram obtidos para uma rede de volume $V = 24^3$, $\beta = 21$ e para o grupo $SU(3)$. No total foram produzidas 1500000 configurações.

uma estimativa razoável do erro estatístico para o valor médio $\bar{O}$. Ao mesmo tempo, o valor 2^r representa uma estimativa da correlação (no tempo de Monte Carlo) entre as configurações, i.e. escolhendo $N_d \approx 2^r$ deve ser possível obter configurações descorrelacionadas. É importante porém ressaltar que esta análise depende do observável considerado.

5 *Fixação de Calibre*

Nesta seção apresentamos uma discussão geral sobre a necessidade de fixar o calibre em teorias de Yang-Mills e, conseqüentemente, na QCD. De fato, embora os observáveis físicos sejam independentes da escolha de calibre, a fixação de calibre é necessária no cálculo de funções de Green. Em particular, como será mostrado neste capítulo, é fácil verificar que o propagador de glúons não é bem definido nem em ordem zero de teoria de perturbação, devido à presença de graus de liberdade espúrios. A eliminação desses graus de liberdade pode ser obtida fixando uma condição de calibre. No caso da integração funcional, isso é feito usando o chamado método de Faddeev-Popov (2, 5, 6),¹ que permite fatorar o volume infinito da órbita de calibre. Neste capítulo vamos também explicar como o calibre de Landau pode ser fixado na rede e vamos dar uma descrição dos principais algoritmos usados nas simulações numéricas. Enfim, vamos comentar sobre as chamadas cópias de Gribov.

5.1 A Necessidade da Fixação de Calibre

Como explicado no Capítulo 2, as teorias de Yang-Mills são invariantes sob transformações locais de calibre. Assim, os campos de calibre $A_\mu(x)$, que aparecem na densidade de lagrangiana, não representam os verdadeiros graus de liberdade da teoria. De fato, devido à invariância de calibre, todas as configurações $[A_\mu(x)]'$ obtidas a partir de uma configuração $A_\mu(x)$ através da Equação (2.31) são equivalentes do ponto de vista físico. Ao conjunto dessas configurações equivalentes dá-se o nome de *órbita de calibre* (3). O espaço de configurações de uma teoria de calibre é portanto um conjunto de órbitas de calibre. Sendo que a transformação

¹ Às vezes esse método é chamado também de método de Faddeev-Popov-De Witt.

de calibre $g(x)$ é local, é claro que podemos escolher um elemento $g(x)$ qualquer do grupo de calibre para cada ponto do espaço-tempo. Então, embora o grupo de calibre $SU(n)$ seja compacto, i.e. tenha volume finito, o volume da órbita é infinito. Logo, todas as integrais funcionais em teorias de calibre são infinitas e é necessário fatorar esse volume infinito para dar um sentido a essas integrais.

A existência de graus de liberdade espúrios é também evidente no cálculo do propagador de glúons usando teoria de perturbação em ordem zero. Para isto é suficiente considerar a parte quadrática da lagrangiana de Yang-Mills nos campos $A_\mu(x)$, i.e. no caso euclidiano²

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int d^d x \left[\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \right]^2 \\ &= -\frac{1}{4} \int d^d x \left[A_\nu(x) \partial_\mu - A_\mu(x) \partial_\nu \right] \left[\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \right]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Aqui foi feita uma integração por partes e foi usada a hipótese que o termo de divergência total seja nulo na borda de integração. Assim, podemos escrever a integral acima como

$$-\frac{1}{4} \int d^d x \left\{ A_\nu(x) \partial_\mu \left[\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \right] - A_\mu(x) \partial_\nu \left[\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \right] \right\} \quad (5.2)$$

e, trocando os índices μ and ν no segundo termo, obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int d^d x A_\nu(x) \partial_\mu \left[\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^d x A_\nu(x) \left[\partial_\mu \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\mu \partial_\nu A_\mu(x) \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Enfim, esta última expressão pode ser escrita como

$$-\frac{1}{2} \int d^d x A_\nu^b(x) \delta^{bc} \left[\partial_\lambda \partial_\lambda \delta_{\nu\mu} - \partial_\nu \partial_\mu \right] A_\mu^c(x), \quad (5.4)$$

onde os índices de cor b e c foram também explicitados. Portanto, como no caso do campo escalar livre [ver Equação (3.63)], o valor esperado do propagador de glúons em ordem mais baixa de teoria de perturbação será dado pelo inverso do operador

$$\Omega_{\nu\mu}^{bc} = \delta^{bc} \left[\partial_\lambda \partial_\lambda \delta_{\nu\mu} - \partial_\nu \partial_\mu \right], \quad (5.5)$$

² Ver a Equação (2.145) na Seção 2.3. Para simplificar a notação, foi também usada a transformação (2.64).

que caracteriza a parte quadrática da lagrangiana (5.4). Porém, é claro que este operador não pode ser invertido, porque possui um auto-valor nulo, correspondente aos auto-vetores $\partial_\mu \lambda^c(x)$. Podemos supor que esse resultado esteja relacionado à invariância de calibre, já que $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda^c(x)$ é a transformação de calibre do campo $A_\mu(x)$ no caso abeliano (ver Seção 2.1). Além disso, no caso não-abeliano, a função $\partial_\mu \lambda^c(x)$ representa a transformação de calibre do vácuo $A_\mu^c(x) = 0$ quando o elemento do grupo $g(x)$ é escrito como $\exp[i\lambda^c(x)T_c]$.

Para resolver esse problema, será preciso claramente mudar a parte quadrática da lagrangiana. É interessante observar que a função $\partial_\mu \lambda^c(x)$ no espaço dos momentos, i.e. a sua transformada de Fourier, é proporcional à componente p_μ do momento. Assim, os auto-vetores de $\Omega_{\nu\mu}^{bc}$ que correspondem ao auto-valor nulo são paralelos ao momento p . Ao mesmo tempo, no espaço dos momentos, podemos escrever

$$A_\mu(p) = A_\mu^L(p) + A_\mu^T(p) \quad (5.6)$$

com a condição $p_\mu A_\mu^T(p) = 0$, i.e. $A_\mu^L(p)$ representa a componente do campo de glúons paralela ao momento (componente longitudinal) e $A_\mu^T(p)$ é a componente do campo de glúons ortogonal ao momento (componente transversal). Assim, parece natural que, impondo uma condição de calibre que elimine a componente longitudinal $A_\mu^L(p)$ do campo de glúons, será possível inverter o operador $\Omega_{\nu\mu}^{bc}$. De fato, temos que

$$A_\mu^T(p) \equiv P_{\mu\nu}^T(p) A_\nu(p) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) A_\nu(p) \quad (5.7)$$

$$A_\mu^L(p) \equiv P_{\mu\nu}^L(p) A_\nu(p) = \left(\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) A_\nu(p) \quad (5.8)$$

e os operadores de projeção $P_{\mu\nu}^T(p)$ e $P_{\mu\nu}^L(p)$ satisfazem às (óbvias) relações

$$P_{\mu\nu}^T(p) P_{\nu\lambda}^T(p) = P_{\mu\lambda}^T(p) \quad (5.9)$$

$$P_{\mu\nu}^L(p) P_{\nu\lambda}^L(p) = P_{\mu\lambda}^L(p) \quad (5.10)$$

$$P_{\mu\nu}^T(p) P_{\nu\lambda}^L(p) = P_{\mu\nu}^L(p) P_{\nu\lambda}^T(p) = 0 \quad (5.11)$$

$$P_{\mu\nu}^L(p) + P_{\mu\nu}^T(p) = \delta_{\mu\nu}. \quad (5.12)$$

A última equação pode também ser escrita como $P^L + P^T = 1$. As propriedades acima implicam que para qualquer operador O vale a relação

$$O_{\nu\mu} = P_{\nu\lambda}^T O_{\lambda\tau} P_{\tau\mu}^T + P_{\nu\lambda}^T O_{\lambda\tau} P_{\tau\mu}^L + P_{\nu\lambda}^L O_{\lambda\tau} P_{\tau\mu}^T + P_{\nu\lambda}^L O_{\lambda\tau} P_{\tau\mu}^L. \quad (5.13)$$

Assim, se a condição de calibre transforma $A_\mu(p)$ em $A_\mu^T(p)$, obtemos que o termo quadrático da lagrangiana pode ser escrito no espaço dos momentos como³

$$A_\nu^T \Omega_{\nu\mu} A_\mu^T = A_\nu^T P_{\nu\lambda}^T \Omega_{\lambda\tau} P_{\tau\mu}^T A_\mu^T = A_\nu^T \hat{\Omega}_{\nu\mu} A_\mu^T \quad (5.14)$$

e o operador $\hat{\Omega}_{\nu\mu} = P_{\nu\lambda}^T \Omega_{\lambda\tau} P_{\tau\mu}^T$, que claramente é aplicado somente no espaço das componentes transversas, deve agora ser inversível.

5.2 O Método de Faddeev-Popov

A fixação de calibre corresponde claramente à imposição de um vínculo ao sistema físico.

No nosso caso queremos ter a condição de transversalidade

$$p_\mu A_\mu^b(p) = 0, \quad (5.15)$$

que pode ser obtida impondo a condição de calibre

$$\partial_\mu A_\mu^b(x) = 0. \quad (5.16)$$

Este é o chamado calibre de Lorenz (ou de Landau).⁴ Para impor este vínculo na integral funcional que define a função geradora $Z_E[J]$ [ver Equação (3.89)], podemos usar a função delta de Dirac $\delta(\partial_\mu A_\mu^b(x))$ ou, mais em geral, a função $\delta(C[A^{(g)}](x))$ para impor a condição de calibre $C[A^{(g)}](x) = 0$. [Aqui, $A^{(g)}$ representa o campo de glúons obtido por aplicação da transformação de calibre $g(x)$.] Para isso é usada a relação (3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(c(x)) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(x-x_0)}{|c'(x_0)|} f(x) dx = \frac{f(x_0)}{|c'(x_0)|} \quad (5.17)$$

³ Para simplificar a notação, não estamos indicando aqui os índices de cor e a dependência no momento p .

⁴ Outras condições de calibre podem ser consideradas. Por exemplo, a condição de calibre de Coulomb $\partial_i A_i^b(x) = 0$, onde a soma no índice i é feita somente nas três componentes espaciais.

onde

$$c'(x_0) = \left. \frac{dc(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \quad (5.18)$$

e é feita a hipótese de que x_0 seja o único valor de x tal que $c(x_0) = 0$. No caso $f(x) = 1$ o resultado acima pode também ser escrito como

$$|c'(x_0)| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(c(x)) dx = 1 \quad (5.19)$$

ou, em um espaço de dimensão m qualquer, como

$$\left| \det \left(\left. \frac{dc_i(x)}{dx_j} \right|_{x=x_0} \right) \right| \int \delta(c(x)) d^m x = 1. \quad (5.20)$$

Em nosso caso temos

$$\Delta[A] \int D[g] \delta(C[A^{(g)}]) = 1 \quad (5.21)$$

onde

$$\Delta[A] = |\det M^{bc}(x, y)|, \quad (5.22)$$

a matriz

$$M^{bc}(x, y) = \left. \frac{\partial C[A^{(g)}]^b(x)}{\partial \lambda^c(y)} \right|_{C[A^{(g)}]^b(x)=0} \quad (5.23)$$

é a matriz de Faddeev-Popov e a transformação de calibre foi escrita como $g(x) = \exp[i\lambda^c(x)T_c]$.

Logo, podemos re-escrever a função de partição (3.89) como⁵

$$Z_E[0] = \int D[g] \int D[A] \Delta[A] \delta(C[A^{(g)}]) \exp\left\{-S_{YM,d}^{(E)}[A]\right\}. \quad (5.24)$$

É importante observar que a grandeza $\Delta[A]$ é invariante sob transformações locais de calibre.

De fato, temos

$$\frac{1}{\Delta[A^{(g)}]} = \int D[g'] \delta(C[A^{(gg')}]) = \int D[gg'] \delta(C[A^{(gg')}]) \quad (5.25)$$

$$= \int D[\tilde{g}] \delta(C[A^{(\tilde{g})}]) = \frac{1}{\Delta[A]} \quad (5.26)$$

⁵ Para simplificar a notação não indicamos aqui os índices de cor, a dependência das coordenadas x e, também, consideramos o caso $J = 0$.

onde foi usada a definição $\tilde{g} = gg'$ e o fato que a integração $\int D[g']$ é invariante pela transformação de calibre

$$\int D[g'] = \int D[gg'] = \int D[\tilde{g}]. \quad (5.27)$$

Consideremos agora a transformação de calibre (inversa) $A \rightarrow A^{(g^{-1})}$ e $A^{(g)} \rightarrow A$. Usando os resultados acima e a invariância tanto da ação $S_{YM,d}^{(E)}[A]$ quanto da medida $\int D[A]$ por transformações de calibre (ver a nota de rodapé 15 do Capítulo 3), obtemos

$$Z_E[0] = \int D[g] \int D[A^{(g)}] \Delta[A^{(g)}] \delta(C[A]) \exp\left\{-S_{YM,d}^{(E)}[A^{(g)}]\right\} \quad (5.28)$$

$$= \int D[g] \int D[A] \Delta[A] \delta(C[A]) \exp\left\{-S_{YM,d}^{(E)}[A]\right\}. \quad (5.29)$$

Na última equação, a integral infinita

$$\int D[g(x)] = \int \prod_x dg(x) \quad (5.30)$$

é claramente fatorada. Sendo que o valor esperado de qualquer grandeza física $\mathcal{O}[A]$ é escrito como

$$\langle \mathcal{O}[A] \rangle = \frac{\int D[A] \mathcal{O}[A] \exp\left\{-S_{YM,d}^{(E)}[A]\right\}}{Z_E[0]} \quad (5.31)$$

e que as grandezas físicas também são invariantes sob transformações locais de calibre, é óbvio que a fatoração do volume (5.30) é obtida seja no numerador que no denominador da expressão acima e o valor esperado $\langle \mathcal{O}[A] \rangle$ é, em princípio, bem definido e finito.

No caso da condição de calibre de Landau (5.16), a matriz de Faddeev-Popov $M^{bc}(x,y)$ definida acima [ver Equação (5.23)] pode ser facilmente calculada usando a relação

$$\delta A_\mu(x)^b = D_\mu(x)^{bc} \lambda^c(x), \quad (5.32)$$

obtida na Seção 2.1 para transformações de calibre infinitesimais

$$g(x) \approx 1 + i\lambda^c(x) T_c. \quad (5.33)$$

Isto implica⁶

$$M^{bc}(x, y) = \delta(x - y) \partial_\mu D_\mu(x)^{bc}, \quad (5.34)$$

onde

$$D_\mu(x)^{bc} = \delta^{bc} \partial_\mu - A_\mu(x)^a f^{abc} \quad (5.35)$$

é a derivada covariante na representação adjunta e o campo de glúons $A_\mu(x)^a$ satisfaz a condição de calibre. Logo, temos que

$$\partial_\mu D_\mu(x)^{bc} = D_\mu(x)^{bc} \partial_\mu. \quad (5.36)$$

É também interessante observar que, no caso abeliano, i.e. para a QED, a transformação de calibre

$$[A_\mu(x)]' = A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x) \quad (5.37)$$

levará à matriz de Faddeev-Popov

$$M(x, y) = \delta(x - y) \partial_\mu \partial_\mu, \quad (5.38)$$

que é independente do campo $A_\mu(x)$. Assim, nesse caso a fixação de calibre não modifica a medida $\int D[A]$.

O resultado (5.29) pode ser obtido também escrevendo a função de partição

$$Z_E[0] = \int D[A] \exp\left\{-S_{YM,d}^{(E)}[A]\right\} \quad (5.39)$$

como

$$Z_E[0] = \int D[g] \int D[A_b^{(g)}(\Gamma)] \exp\left\{-S_{YM,d}^{(E)}[A]\right\}, \quad (5.40)$$

onde $\int D[A_b(\Gamma)]$ representa a integração sobre um campo de calibre A_b para cada órbita de calibre Γ . Isso equivale a dividir o espaço dos campos de calibre em órbitas de calibre e a escolher, para cada órbita Γ , um campo de calibre A_b como “base” da órbita. Assim, todos os campos de calibre de uma dada órbita Γ podem ser obtidos aplicando todas as possíveis transformações de calibre $\{g(x)\}$ no campo de calibre A_b , base da órbita considerada. É então

⁶ Usando outras convenções (ver final da Seção 2.1) é possível também obter $M^{bc}(x, y) = -\delta(x - y) \partial_\mu D_\mu(x)^{bc}$.

óbvio que

$$\int D[A] = \int D[g] \int D[A_b^{(g)}(\Gamma)]. \quad (5.41)$$

Podemos agora efetuar, em cada órbita de calibre Γ , a transformação de variável

$$A_b^{(g)} \rightarrow A_b, \quad (5.42)$$

i.e. todos os campos de calibre $A_b^{(g)}$ são mapeados no campo base A_b daquela órbita. Isso é permitido porque a ação $S_{YM,d}^{(E)}[A]$ é invariante por transformações de calibre. Claramente, fica assim fatorado um fator $\int D[g]$, que representa o volume da órbita de calibre. Ao mesmo tempo, precisamos incluir na integral o jacobiano da transformação de variáveis. A Equação (5.29) é então obtida fazendo-se a hipótese⁷ de que a “base” A_b de cada órbita Γ seja o único campo da órbita que satisfaz à condição de calibre $C[A^{(g)}](x) = 0$.

Em geral, para impor a condição de calibre (5.16), é considerada a sua generalização

$$\partial_\mu A_\mu^b(x) = \Lambda^b(x), \quad (5.43)$$

chamada de calibre covariante linear. As funções $\Lambda^b(x)$ são em princípio arbitrárias⁸ e, geralmente, é considerada uma integral sobre todas as funções $\Lambda^b(x)$ com um peso gaussiano

$$\exp \left\{ - \int d^d x \frac{[\Lambda^b(x)]^2}{2\xi} \right\}. \quad (5.44)$$

No limite $\xi \rightarrow 0$ é obtido o caso $\Lambda^b(x) = 0$, i.e. o calibre de Landau. (O caso $\xi = 1$ é o chamado calibre de Feynman.) Logo, a função de partição é dada por⁹

$$\begin{aligned} Z_E[0] &= \int D[\Lambda] \int D[A] \Delta[A] \exp \left\{ - \int d^d x \frac{[\Lambda^b(x)]^2}{2\xi} \right\} \\ &\quad \delta \left(\partial_\mu A_\mu^b(x) - \Lambda^b(x) \right) \exp \left\{ - S_{YM,d}^{(E)}[A] \right\} \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$= \int D[A] \Delta[A] \exp \left\{ - \int d^d x \frac{[\partial_\mu A_\mu^b(x)]^2}{2\xi} \right\} \exp \left\{ - S_{YM,d}^{(E)}[A] \right\}, \quad (5.46)$$

onde foi usada a função delta de Dirac para calcular a integral $\int D[\Lambda]$. O resultado é então a

⁷ Este ponto será discutido na Seção 5.6 abaixo.

⁸ De fato, os resultados físicos não podem depender da condição de calibre.

⁹ Aqui já foi eliminado o fator infinito $\int D[g]$.

introdução de um novo termo quadrático na densidade de lagrangiana. Assim, a Equação (5.4) é modificada da seguinte forma¹⁰

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int d^d x A_\nu^b(x) \delta^{bc} [\partial_\lambda \partial_\lambda \delta_{\nu\mu} - \partial_\nu \partial_\mu] A_\mu^c(x) + \frac{1}{2\xi} \int d^d x [\partial_\mu A_\mu^b(x)]^2 \\ & -\frac{1}{2} \int d^d x A_\nu^b(x) \delta^{bc} \left[\partial_\lambda \partial_\lambda \delta_{\nu\mu} - \partial_\nu \partial_\mu + \frac{1}{\xi} \partial_\nu \partial_\mu \right] A_\mu^c(x) \end{aligned} \quad (5.47)$$

e o operador (5.5) fica

$$\Omega_{\nu\mu}^{bc} = \delta^{bc} \left[\partial_\lambda \partial_\lambda \delta_{\nu\mu} - \partial_\nu \partial_\mu + \frac{1}{\xi} \partial_\nu \partial_\mu \right]. \quad (5.48)$$

No espaço dos momentos p isto pode ser escrito como

$$\delta^{bc} \left[p_\lambda p_\lambda \delta_{\nu\mu} - p_\nu p_\mu + \frac{1}{\xi} p_\nu p_\mu \right] = \delta^{bc} \left[p^2 \delta_{\nu\mu} - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) p_\nu p_\mu \right], \quad (5.49)$$

cujo inverso existe e é dado por

$$\delta^{bc} \frac{1}{p^2} \left[\delta_{\nu\mu} - (1 - \xi) \frac{p_\nu p_\mu}{p^2} \right]. \quad (5.50)$$

Claramente, para $\xi = 0$ obtemos [ver Equação (5.7)]

$$\delta^{bc} \frac{1}{p^2} P_{\nu\mu}^T(p), \quad (5.51)$$

i.e. somente as componentes transversas sobrevivem após ser fixado o calibre de Landau.

O termo

$$S_{fc}[A] = \frac{1}{2\xi} \int d^d x [\partial_\mu A_\mu^b(x)]^2, \quad (5.52)$$

que aparece na ação após a fixação do calibre (covariante linear), é chamado de ação de fixação de calibre. Este termo claramente quebra a simetria de calibre da lagrangiana clássica de Yang-Mills. É interessante observar que podemos também considerar como ação de fixação de calibre o termo

$$S_{fc}[A, B] = - \int d^d x \frac{\xi}{2} [B^b(x)]^2 + B^b(x) \partial_\mu A_\mu^b(x). \quad (5.53)$$

¹⁰ Relembramos que o peso da integração funcional no espaço euclidiano é dado por e^{-S} .

De fato, classicamente, as equações de Euler-Lagrange

$$\xi B^b(x) = -\partial_\mu A_\mu^b(x) \quad (5.54)$$

para os campos $B^b(x)$ permitem re-obter facilmente o termo (5.52) acima. Claramente, na formulação quântica, é necessário incluir na integração funcional também a integral $\int D[B]$ sobre os campos $B^b(x)$. Note-se porém que os campos $B^b(x)$ entram na ação no máximo quadraticamente (i.e. eles não aparecem em vértices da teoria) e sem derivadas. Isso implica que esses campos não são verdadeiros graus de liberdade da teoria (i.e. eles não propagam) e, por isso, são chamados de campos auxiliares. Na ação (5.53) os campos auxiliares $B^b(x)$ podem também ser interpretados como multiplicadores de Lagrange usados para impor a condição de calibre.

5.3 Os Campos-Fantasma de Faddeev-Popov

Na Equação (5.29) acima, o volume infinito (5.30) ficou fatorado à custa de introduzir na medida da integração funcional um jacobiano. Escrita dessa forma a função de partição $Z_E[0]$ não é de grande utilidade porque, por exemplo, não sabemos escrever nesse caso as regras de Feynman da teoria. Dito de outra forma, o determinante da matriz de Faddeev-Popov é um termo não local que deixa complicado o uso da Equação (5.29) para cálculos até na teoria de perturbação. Seria assim conveniente achar um jeito de escrever esse determinante como um termo local na densidade de lagrangiana. Isso é obtido usando as chamadas variáveis de Grassmann, i.e. variáveis anti-comutantes.¹¹

Relembramos que se θ e η são variáveis anti-comutantes devemos ter (13)

$$\theta \eta = -\eta \theta. \quad (5.55)$$

Isso implica que $\theta^2 = \eta^2 = 0$ e isso, por sua vez, permite escrever para qualquer função $f(\theta)$ a expansão de Taylor

$$f(\theta) = a + b\theta, \quad (5.56)$$

¹¹ Considerando a integração funcional, parece razoável que os campos bosônicos sejam representados por variáveis comutantes enquanto os campos fermiônicos são representados por variáveis anti-comutantes.

onde a e b são duas constantes. Para definir a integração de variáveis anti-comutantes usamos a expansão de Taylor acima e escrevemos

$$\int d\theta f(\theta) = \int d\theta (a + b\theta). \quad (5.57)$$

Ao mesmo tempo a propriedade de linearidade da integração, i.e.

$$\int d\theta f_1(\theta) + f_2(\theta) = \int d\theta f_1(\theta) + \int d\theta f_2(\theta), \quad (5.58)$$

implica que a integral (5.57) seja linear em a e em b . O valor desta integral é fixado exigindo-se que a mesma seja invariante sob translação $\theta \rightarrow \theta + \eta$ da variável de integração

$$\int d\theta (a + b\theta) = \int d\theta [a + b(\theta + \eta)] = \int d\theta [(a + b\eta) + b\theta]. \quad (5.59)$$

Sendo que a translação modifica somente o termo constante a , fica claro que devemos então impor a relação

$$\int d\theta (a + b\theta) \propto b. \quad (5.60)$$

Por convenção, o fator de proporcionalidade na relação acima é fixado igual a 1. Resumindo, todas as integrais de variáveis anti-comutantes se reduzem às duas regras

$$\int d\theta = 0, \quad (5.61)$$

$$\int d\theta \theta = 1. \quad (5.62)$$

Aplicando os resultados acima à função exponencial $\exp(-\theta b \eta)$ obtemos

$$\int d\theta d\eta \exp(-\theta b \eta) = \int d\theta d\eta (1 - \theta b \eta) = \int d\theta d\eta (1 + b \eta \theta) = b, \quad (5.63)$$

para qualquer constante b . (Para evitar ambiguidade no sinal do resultado, foi escolhida aqui a convenção de calcular primeiro a integral mais à direita.) Assim, ao contrário do caso usual, no qual a integração gaussiana de $\exp(-bx^2)$ é proporcional a $1/b$, no caso de variáveis anti-comutantes a integração é proporcional a b . No caso de dimensão m qualquer

$$\int \prod_l d\theta_l d\eta_l \exp(-\theta_i B_{ij} \eta_j) \quad (5.64)$$

é possível verificar que a integral não se altera sob aplicação de uma transformação unitária que diagonaliza a matriz B . A integral acima é então dada por

$$\int \prod_l d\theta_l d\eta_l \exp(-\theta_l b_l \eta_l), \quad (5.65)$$

onde b_l são os auto-valores da matriz B . É fácil verificar que o resultado dessa integral é $\prod_l b_l = \det B$. Por exemplo, no caso $m = 2$ temos

$$\int d\theta_1 d\eta_1 d\theta_2 d\eta_2 \exp(-\theta_1 b_1 \eta_1 - \theta_2 b_2 \eta_2) \quad (5.66)$$

$$= \int d\theta_1 d\eta_1 d\theta_2 d\eta_2 \left[1 + (-\theta_1 b_1 \eta_1 - \theta_2 b_2 \eta_2) + \frac{1}{2} (-\theta_1 b_1 \eta_1 - \theta_2 b_2 \eta_2)^2 \right] \quad (5.67)$$

$$= \int d\theta_1 d\eta_1 d\theta_2 d\eta_2 \frac{1}{2} (\theta_1 b_1 \eta_1 \theta_2 b_2 \eta_2 + \theta_2 b_2 \eta_2 \theta_1 b_1 \eta_1) \quad (5.68)$$

$$= \int d\theta_1 d\eta_1 d\theta_2 d\eta_2 (\theta_2 b_2 \eta_2 \theta_1 b_1 \eta_1) \quad (5.69)$$

$$= \int d\theta_1 d\eta_1 d\theta_2 d\eta_2 (\eta_2 \theta_2 \eta_1 \theta_1) b_1 b_2 \quad (5.70)$$

$$= b_1 b_2. \quad (5.71)$$

No caso m qualquer é claro que o único tipo de termo da expansão de Taylor que contribui para a integral (5.65) é

$$\frac{1}{m!} \left(-\sum_l \theta_l b_l \eta_l \right)^m = \frac{(-1)^m}{m!} \left(\sum_l \theta_l b_l \eta_l \right)^m. \quad (5.72)$$

Expandindo a potência, são obtidos $m!$ termos do tipo

$$(\theta_{i_1} b_{i_1} \eta_{i_1}) (\theta_{i_2} b_{i_2} \eta_{i_2}) \dots (\theta_{i_l} b_{i_l} \eta_{i_l}). \quad (5.73)$$

Somente estes termos fornecem um resultado não-nulo, devido às relações (5.61) e (5.62). Ao mesmo tempo, trocando a ordem dos fatores $(\theta_j b_j \eta_j)$, todos esses termos são iguais ao termo

$$(\theta_m b_m \eta_m) (\theta_{m-1} b_{m-1} \eta_{m-1}) \dots (\theta_1 b_1 \eta_1). \quad (5.74)$$

Trocando agora todas as variáveis θ_l com a correspondentes variáveis η_l obtemos um segundo fator $(-1)^m$. Logo, o resultado final é

$$\int \prod_l d\theta_l d\eta_l (\eta_m b_m \theta_m) (\eta_{m-1} b_{m-1} \theta_{m-1}) \dots (\eta_1 b_1 \theta_1) = \det B. \quad (5.75)$$

Os resultados acima podem ser estendidos ao caso de variáveis de Grassmann complexas.¹² Neste caso é em geral usada a relação

$$(\theta \eta)^* = \eta^* \theta^* = -\theta^* \eta^*. \quad (5.76)$$

Também temos

$$\int \prod_l d\theta_l^* d\theta_l \exp(-\theta_l^* B_{lj} \theta_j) = \det B, \quad (5.77)$$

considerando as variáveis θ_l e θ_l^* como variáveis independentes.

Fica então claro que o jacobiano $\det M^{bc}(x, y)$ (sem módulo¹³) pode ser escrito como

$$\det M^{bc}(x, y) = \int D[\bar{\eta}^b(x)] D[\eta^c(y)] \exp \left\{ - \int d^d x d^d y \bar{\eta}^b(x) M^{bc}(x, y) \eta^c(y) \right\}, \quad (5.78)$$

onde os campos $\bar{\eta}^b(x)$ e $\eta^c(y)$ são campos escalares anti-comutantes, i.e. representam campos fermiônicos de spin nulo.¹⁴ Assim, esses campos não podem ser campos físicos e por isso os $\eta^c(y)$ são chamados de campos-fantasma (ou campos de fantasmas), enquanto os $\bar{\eta}^b(x)$ são os campos de anti-fantasmas. Isto implica que, nos diagramas de Feynman, os campos de (anti-)fantasmas podem aparecer apenas em laços fechados e não como partículas reais em estados externos. Porém, eles são necessários para demonstrar a unitariedade de teoria. Considerando o resultado acima podemos agora escrever a função de partição (5.46) como

$$Z_E[0] = \int D[A] D[\bar{\eta}] D[\eta] \exp \left\{ -S_{FP,d}^{(E)}[A, \bar{\eta}, \eta] \right\}, \quad (5.79)$$

sendo a ação de Faddeev-Popov $S_{FP,d}^{(E)}[A, \bar{\eta}, \eta]$ dada por

$$S_{FP,d}^{(E)}[A, \bar{\eta}, \eta] = S_{YM,d}^{(E)}[A] + S_{fc}[A] + \int d^d x d^d y \bar{\eta}^b(x) M^{bc}(x, y) \eta^c(y), \quad (5.80)$$

onde a ação de fixação de calibre $S_{fc}[A]$ foi definida em (5.52) e $S_{YM,d}^{(E)}[A]$ é a ação de Yang-Mills (em dimensão d no espaço euclidiano). O jacobiano $\Delta[A]$ foi portanto “localizado” à custa de introduzir variáveis anti-comutantes na integração funcional.

¹² Relembramos que o campo de Dirac é um campo complexo.

¹³ Esse ponto será discutido na Seção 5.6 abaixo.

¹⁴ Note que, sendo $M^{bc}(x, y) = \delta(x - y) \partial_\mu D_\mu(x)^{bc}$ com $D_\mu(x)^{bc}$ na representação adjunta, temos que os campos $\bar{\eta}^b(x)$ e $\eta^c(y)$ estão também na representação adjunta.

5.4 A Condição do Calibre de Landau na Rede

A condição de calibre de Landau na rede é dada por¹⁵

$$\nabla \cdot A^b(x) = \nabla_\mu A_\mu^b(x) = \sum_{\mu=1}^d \left[A_\mu^b(x + ae_\mu/2) - A_\mu^b(x - ae_\mu/2) \right] = 0, \quad (5.81)$$

onde o campo de calibre na rede foi definido na Equação (2.184), i.e.

$$A_\mu(x + ae_\mu/2) = \left[\frac{U_\mu(x) - U_\mu(x)^\dagger}{2i} \right]_{\text{traço nulo}} \quad (5.82)$$

$$= \left[\frac{U_\mu(x) - U_\mu(x)^\dagger}{2i} \right] - 1 \frac{\text{Tr}}{n} \left[\frac{U_\mu(x) - U_\mu(x)^\dagger}{2i} \right]. \quad (5.83)$$

Para verificar o limite formal do contínuo da relação acima, podemos usar a relação (2.188)

$$A_\mu^b(x + ae_\mu/2) = ag_0 A_\mu^{(c)b}(x + ae_\mu/2) + \mathcal{O}(a^3 g_0^3) \quad (5.84)$$

entre o campo de calibre na rede e o campo correspondente no contínuo, e a expansão de Taylor

$$A_\mu^{(c)b}(x + ae_\mu/2) = A_\mu^{(c)b}(x) + \frac{a}{2} \partial_\mu^{(c)} A_\mu^{(c)b}(x) + \frac{a^2}{8} \partial_\mu^{(c)2} A_\mu^{(c)b}(x) + \mathcal{O}(a^3), \quad (5.85)$$

onde não há soma sobre índices repetidos. Assim obtemos que

$$\nabla_\mu A_\mu^b(x) = \sum_{\mu=1}^d a^2 g_0 \partial_\mu^{(c)} A_\mu^{(c)b}(x) + \mathcal{O}(a^4 g_0) \quad (5.86)$$

e a condição de calibre de Landau na rede (5.81) corresponde, no limite formal do contínuo, à expressão

$$\partial_\mu^{(c)} A_\mu^{(c)b}(x) = \mathcal{O}(a^2). \quad (5.87)$$

Como explicado na Seção 2.3, a definição (aparentemente mais natural)

$$A_\mu(x) = \left[\frac{U_\mu(x) - U_\mu(x)^\dagger}{2i} \right]_{\text{traço nulo}} \quad (5.88)$$

¹⁵ Nesta seção consideramos o grupo de calibre SU(n). Também, a dependência em relação ao espaçamento de rede a será aqui sempre escrita explicitamente. Enfim, quando necessário, vamos indicar com ^(c) as grandezas definidas no contínuo.

no lugar da Equação (5.83) acima, produz um erro de discretização maior. De fato, neste caso é fácil verificar que

$$\nabla \cdot A^b(x) = \sum_{\mu=1}^d A_{\mu}^b(x) - A_{\mu}^b(x-a) = \sum_{\mu=1}^d a^2 g_0 \partial_{\mu}^{(c)} A_{\mu}^{(c)}(x) + \mathcal{O}(a^3 g_0), \quad (5.89)$$

i.e.

$$\partial_{\mu}^{(c)} A_{\mu}^{(c)b}(x) = \mathcal{O}(a). \quad (5.90)$$

Além disso, calculando a transformada de Fourier de $A_{\mu}^b(x \pm ae_{\mu}/2)$ na rede, obtemos

$$\sum_x A_{\mu}^b(x + ae_{\mu}/2) e^{-ip \cdot x} = e^{iap_{\mu}/2} \sum_y A_{\mu}^b(y) e^{-ip \cdot y} = e^{iap_{\mu}/2} \tilde{A}_{\mu}^b(p) \quad (5.91)$$

e

$$\sum_x A_{\mu}^b(x - ae_{\mu}/2) e^{-ip \cdot x} = e^{-iap_{\mu}/2} \tilde{A}_{\mu}^b(p). \quad (5.92)$$

Aqui, $\tilde{A}_{\mu}^b(p)$ representa a transformada de Fourier do campo de glúons, as componentes do vetor p são dadas pela relação¹⁶

$$\frac{aN_{\mu} p_{\mu}}{2\pi} = 0, 1, 2, \dots, N_{\mu} - 1 \quad (5.93)$$

e N_{μ} representa o número de sítios da rede na direção μ . Assim, a Equação (5.81) é transformada na relação

$$0 = 2i \sum_{\mu=1}^d \tilde{A}_{\mu}^b(p) \sin\left(\frac{ap_{\mu}}{2}\right) \quad (5.94)$$

e, identificando $2 \sin(ap_{\mu}/2)$ com as componentes $\tilde{p}_{\mu}$ do momento na rede, é obtida a condição de transversalidade

$$0 = \sum_{\mu=1}^d \tilde{A}_{\mu}^b(p) \tilde{p}_{\mu}. \quad (5.95)$$

Por outro lado, a transformada de Fourier da Equação (5.89) fornece

$$0 = \sum_{\mu=1}^d \tilde{A}_{\mu}^b(p) [1 - \cos(ap_{\mu}) + i \sin(ap_{\mu})] \quad (5.96)$$

e, identificando as componentes $\tilde{p}_{\mu}$ com o termo $\sin(ap_{\mu})$, obtemos

$$\mathcal{O}(a^2) = \sum_{\mu=1}^d \tilde{A}_{\mu}^b(p) \tilde{p}_{\mu}, \quad (5.97)$$

¹⁶ Note que as componentes $ap_{\mu} = \hat{p}_{\mu}$ são adimensionais.

após expandir $\cos(ap_\mu)$ no limite de a pequeno. Note que $2 \sin(ap_\mu/2)/a$ e $\sin(ap_\mu)/a$ são claramente duas discretizações diferentes da componente do momento p_μ . De fato, no primeiro caso temos¹⁷

$$\frac{2}{a} \sin\left(\frac{ap_\mu}{2}\right) = p_\mu - \frac{a^2 p_\mu^3}{24} + \mathcal{O}(a^4) \quad (5.98)$$

e no segundo caso

$$\frac{1}{a} \sin(ap_\mu) = p_\mu - \frac{a^2 p_\mu^3}{6} + \mathcal{O}(a^4). \quad (5.99)$$

Para impor numericamente a condição de calibre de Landau na rede, podemos minimizar o funcional

$$\mathcal{E}_L[W]\{g(x)\} = 1 - \frac{1}{2dVn} \sum_x \sum_{\mu=1}^d \text{Tr} \left[W_\mu(x) + W_\mu^\dagger(x) \right] \quad (5.100)$$

$$= 1 - \frac{1}{dVn} \sum_x \sum_{\mu=1}^d \Re \text{Tr} W_\mu(x), \quad (5.101)$$

onde

$$W_\mu(x) = g(x) U_\mu(x) g^\dagger(x + ae_\mu) \quad (5.102)$$

é a transformação de calibre da variável de elo $U_\mu(x)$ [ver Equação (2.179)]. Aqui, V é o volume da rede e indicamos com $\Re$ a parte real de um número complexo. Relembramos também que as matrizes $U_\mu(x)$ são variáveis definidas nos elos da rede e que as matrizes $g(x)$ são definidas em cada ponto x da rede. Tanto as matrizes $U_\mu(x)$ quanto as matrizes $g(x)$ pertencem ao grupo de calibre $SU(n)$. Note que a minimização do funcional acima é obtida considerando todas as possíveis transformações de calibre $g(x)$ com as variáveis de elo $U_\mu(x)$ fixas. Observe também que $\mathcal{E}_L[W]\{g(x)\} \geq 0$ e que somente para $W_\mu(x) = 1$, onde 1 indica a matriz identidade $n \times n$, temos $\mathcal{E}_L[1] = 0$. Consideramos agora um sub-grupo com um parâmetro das transformações de calibre $g(x)$, i.e.

$$g(x, \tau) = \exp \left[i\tau \lambda^b(x) T_b \right], \quad (5.103)$$

onde τ e $\lambda^b(x)$ são números reais e as matrizes (hermitianas e de traço nulo) T_b são os geradores do grupo $SU(n)$. Pode-se então verificar que a condição de calibre de Landau na rede

¹⁷ Esta discretização para as componentes do momento p foi obtida também no cálculo do propagador do campo escalar livre [ver Equação (3.68) na Seção 3.2]

(5.81) é obtida calculando-se a derivada primeira do funcional $\mathcal{E}_L[W]\{g(x, \tau)\}$ em relação ao parâmetro τ e fazendo-se $\tau = 0$. Ao mesmo tempo, a derivada segunda permite definir uma matriz M que corresponde à discretização na rede do operador de Faddeev-Popov (5.34).¹⁸ De fato, expandindo $g(x, \tau)$ em uma série de potências, i.e.

$$g(x, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[i \tau \lambda^b(x) T_b \right]^m, \quad (5.104)$$

obtemos para $W_\mu(x)$ e $W_\mu^\dagger(x)$ as expressões

$$W_\mu(x) = \left[1 + i \tau \lambda^b(x) T_b + \dots \right] U_\mu(x) \left[1 - i \tau \lambda^c(x + ae_\mu) T_c + \dots \right] \quad (5.105)$$

$$W_\mu^\dagger(x) = \left[1 + i \tau \lambda^c(x + ae_\mu) T_c + \dots \right] U_\mu^\dagger(x) \left[1 - i \tau \lambda^b(x) T_b + \dots \right]. \quad (5.106)$$

Claramente, para τ igual a zero temos

$$W_\mu\{g(x, \tau), \tau = 0\} = U_\mu(x) \quad (5.107)$$

$$W_\mu^\dagger\{g(x, \tau), \tau = 0\} = U_\mu^\dagger(x). \quad (5.108)$$

Ao mesmo tempo, as derivadas primeiras (para τ igual a zero) são dadas por

$$W'_\mu\{g(x, \tau), \tau = 0\} = i \lambda^b(x) T_b U_\mu(x) - i \lambda^c(x + ae_\mu) U_\mu(x) T_c \quad (5.109)$$

$$W_\mu^{\dagger'}\{g(x, \tau), \tau = 0\} = -i \lambda^b(x) U_\mu^\dagger(x) T_b + i \lambda^c(x + ae_\mu) T_c U_\mu^\dagger(x). \quad (5.110)$$

Logo, obtemos para a derivada primeira do funcional $\mathcal{E}_L[W]\{g(x, \tau)\}$ para $\tau = 0$ o resultado

$$\mathcal{E}'_L[W]\{g(x, \tau), \tau = 0\} = -\frac{1}{2dVN_c} \sum_x Tr \sum_{\mu=1}^d \left[W'_\mu(x) + W_\mu^{\dagger'}(x) \right] \Bigg|_{\tau=0} \quad (5.111)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2dVN_c} \sum_x Tr \sum_{\mu=1}^d \left\{ i \lambda^b(x) T_b U_\mu(x) \right. \\ &\quad \left. - i \lambda^b(x + ae_\mu) U_\mu(x) T_b - i \lambda^b(x) U_\mu^\dagger(x) T_b \right. \\ &\quad \left. + i \lambda^b(x + ae_\mu) T_b U_\mu^\dagger(x) \right\}. \end{aligned} \quad (5.112)$$

Evidenciando agora as funções $\lambda^b(x)$ e usando a propriedade cíclica do traço, i.e. $Tr(AB) =$

¹⁸ Este resultado será descrito no próximo capítulo.

$Tr(BA)$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_L[W]\{g(x, \tau), \tau = 0\} = & -\frac{i}{2dVn} \sum_x Tr \sum_{\mu=1}^d \left\{ \lambda^b(x) T_b \left[U_\mu(x) - U_\mu^\dagger(x) \right] \right. \\ & \left. - \lambda^b(x + ae_\mu) T_b \left[U_\mu(x) - U_\mu^\dagger(x) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Ao mesmo tempo, multiplicando e dividindo por $2i$, realizando uma translação na rede e usando a invariância translacional (no caso de volume infinito ou de volume finito com condições de periodicidade na borda), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_L[W]\{g(x, \tau), \tau = 0\} = & \frac{1}{dVn} \sum_x \sum_{\mu=1}^d Tr \left\{ \lambda^b(x) T_b \left[\frac{U_\mu(x) - U_\mu^\dagger(x)}{2i} \right] \right. \\ & \left. - \lambda^b(x) T_b \left[\frac{U_\mu(x - ae_\mu) - U_\mu^\dagger(x - ae_\mu)}{2i} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.114)$$

Enfim, usando a definição de campo de glúons na rede (5.83) e a propriedade $Tr(T_b 1) = Tr(T_b) = 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_L[W]\{g(x, \tau), \tau = 0\} = & \frac{1}{dVn} \sum_x \sum_{\mu=1}^d Tr \left[\lambda^b(x) T_b A_\mu(x + ae_\mu/2) \right. \\ & \left. - \lambda^b(x) T_b A_\mu(x - ae_\mu/2) \right] \end{aligned} \quad (5.115)$$

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{2dVn} \sum_x \sum_{\mu=1}^d \left[\lambda^b(x) A_\mu^b(x + ae_\mu/2) \right. \\ & \left. - \lambda^b(x) A_\mu^b(x - ae_\mu/2) \right] \end{aligned} \quad (5.116)$$

$$= \frac{1}{2dVn} \sum_x \lambda^b(x) \sum_{\mu=1}^d \left[A_\mu^b(x + ae_\mu/2) - A_\mu^b(x - ae_\mu/2) \right] \quad (5.117)$$

$$= \frac{1}{2dVn} \sum_x \lambda^b(x) \left[\nabla \cdot A^b(x) \right], \quad (5.118)$$

onde $A_\mu^b(x \pm ae_\mu/2) = 2 Tr(A_\mu(x \pm ae_\mu/2) T_b)$. Portanto, para obter $\mathcal{E}'_L[W]\{g(x, \tau), \tau = 0\} = 0$ para qualquer conjunto de funções $\lambda^b(x)$ (condição de ponto estacionário) temos que a condição de calibre de Landau

$$\nabla \cdot A^b(x) = 0 \quad (5.119)$$

deve ser satisfeita.

É também interessante calcular o limite formal do contínuo do funcional $\mathcal{E}_L[W]\{g(x)\}$. Para isto usamos as relações (2.185) e (2.186), i.e.

$$U_\mu(x) = \left\{ 1 + iag_0 A_\mu^{(c)}(x + ae_\mu/2) - \frac{a^2 g_0^2}{2} [A_\mu^{(c)}(x + ae_\mu/2)]^2 + \mathcal{O}(a^3 g_0^3) \right\} \quad (5.120)$$

$$U_\mu(x)^\dagger = \left\{ 1 - iag_0 A_\mu^{(c)}(x + ae_\mu/2) - \frac{a^2 g_0^2}{2} [A_\mu^{(c)}(x + ae_\mu/2)]^2 + \mathcal{O}(a^3 g_0^3) \right\}, \quad (5.121)$$

e, após expandir os campos $A_\mu^{(c)}(x + ae_\mu/2)$ ao redor do ponto x , re-escrevemos a Equação (5.100) para $g(x) = 1$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_L[W]\{1\} &= 1 - \frac{1}{dVn} \sum_x \sum_{\mu=1}^d \text{Tr} \left[1 - \frac{a^2 g_0^2}{2} A_\mu^{(c)}(x) A_\mu^{(c)}(x) + \mathcal{O}(a^3 g_0^2) \right] \\ &= \frac{1}{2dVn} \sum_x \sum_{\mu=1}^d \text{Tr} \left[a^2 g_0^2 A_\mu^{(c)}(x) A_\mu^{(c)}(x) + \mathcal{O}(a^3 g_0^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.122)$$

Multiplicando e dividindo pelo elemento de volume a^d obtemos então

$$\mathcal{E}_L[W]\{1\} = \frac{1}{2d a^d V n} \sum_x a^d \sum_{\mu=1}^d \text{Tr} \left[a^2 g_0^2 A_\mu^{(c)}(x) A_\mu^{(c)}(x) + \mathcal{O}(a^3 g_0^2) \right]. \quad (5.123)$$

Podemos enfim considerar o limite

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2 g_0^2} \mathcal{E}_L[W]\{1\} = \frac{1}{2d V^{(c)} n} \int dV^{(c)} \sum_{\mu=1}^d \text{Tr} \left[A_\mu^{(c)}(x) A_\mu^{(c)}(x) \right]. \quad (5.124)$$

Aqui, $V^{(c)} = a^d V$ e $dV^{(c)}$ são, respectivamente, o volume total e um elemento infinitesimal de volume no contínuo. Assim, no contínuo, a condição de calibre de Landau pode ser obtida minimizando a grandeza $\int dV^{(c)} \sum_{\mu=1}^d \text{Tr} [A_\mu^{(c)}(x)]^2$.

5.5 Algoritmos para Fixação de Calibre na Rede

As simulações numéricas para o cálculo de propagadores no calibre de Landau são realizadas seguindo o esquema representado abaixo:¹⁹

- fixar os parâmetros: constante de acoplamento da rede β , número de configurações N_c , número de passos de termalização N_t ;

¹⁹ Por simplicidade, e contrariamente ao esquema apresentado na Secao 4.2, consideramos aqui $N_t = N_d$.

- fixar a configuração inicial de elos $\{U\}$;

- executar o ciclo:

para ($c = 0; c < N_c; c++$) {

- termalizar a configuração (U, β, N_t)
- fixar o calibre (U, g)
- calcular os propagadores (U^g)
- escrever os resultados no arquivo de saída

};

- concluir o código.

Aqui, $\{g\}$ é a transformação de calibre e $\{U^g\}$ é a configuração de elos após fixar o calibre. Assim, a condição de calibre é fixada em cada configuração de elos $\{U\}$ termalizada (ver Capítulo 4) e não é necessário calcular o determinante de Faddeev-Popov nem introduzir os campos-fantasma na ação da QCD na rede. De fato, “revertendo” o método de Faddeev-Popov (51) explicado na Seção 5.2, é possível mostrar que a receita acima fornece o valor esperado de uma grandeza qualquer $O(A)$ na condição de calibre $C[A^{(g)}](x) = 0$, i.e. permite calcular [ver Equações (5.29) e (5.31)]

$$\langle \mathcal{O}[A] \rangle = \frac{\int D[A] \Delta[A] \delta(C[A]) \mathcal{O}[A] \exp\left\{-S_{YM,d}^{(E)}[A]\right\}}{\int D[A] \Delta[A] \delta(C[A]) \exp\left\{-S_{YM,d}^{(E)}[A]\right\}}. \quad (5.125)$$

Para isto, precisamos multiplicar as duas integrais para $\int D[g] = \int \prod_x dg(x)$. Isto é possível porque nada depende explicitamente da transformação de calibre $g(x)$ na equação acima. Considerando agora a transformação de calibre $A \rightarrow A^{(g)}$, a invariância da ação $S_{YM,d}^{(E)}[A]$, da medida $\int D[A]$ e da grandeza $\Delta[A]$ por transformações de calibre e trocando a ordem da integração podemos escrever

$$\langle \mathcal{O}[A] \rangle = \frac{\int D[A] \Delta[A] \exp\left\{-S_{YM,d}^{(E)}[A]\right\} \int D[g] \delta(C[A^{(g)}]) \mathcal{O}[A^{(g)}]}{\int D[A] \Delta[A] \exp\left\{-S_{YM,d}^{(E)}[A]\right\} \int D[g] \delta(C[A^{(g)}])}. \quad (5.126)$$

Enfim, usando a Equação (5.21) obtemos

$$\langle \mathcal{O}[A] \rangle = \frac{\int D[A] \mathcal{O}[A^{(\hat{g})}] \exp\left\{-S_{YM,d}^{(E)}[A]\right\}}{\int D[A] \exp\left\{-S_{YM,d}^{(E)}[A]\right\}}, \quad (5.127)$$

onde $A^{(\hat{g})}$ satisfaz a condição de calibre considerada.²⁰ No caso da QCD na rede o resultado acima é escrito em geral como

$$\langle \mathcal{O}[U] \rangle = \frac{\int D[U] \mathcal{O}[U^{(\hat{g})}] \exp\left\{-S_{YM,d}^{(E)}[U]\right\}}{\int D[U] \exp\left\{-S_{YM,d}^{(E)}[U]\right\}} \quad (5.128)$$

e as configurações de elos $\{U\}$ podem ser obtidas usando a distribuição usual $\exp\left\{-S_{YM,d}^{(E)}[U]\right\}$. Somente após gerada uma configuração de elos $\{U\}$ termalizada, precisamos fixar o calibre, i.e. minimizar o funcional (5.100). Para isso precisamos achar numericamente a transformação de calibre $G = \{g(x)\}$ que minimiza o funcional $\mathcal{E}_L[W]\{g(x)\}$ para uma configuração (fixa) $\{U\}$.

Existem vários algoritmos para fixar numericamente o calibre de Landau.²¹ Aqui vamos apresentar uma breve descrição deles. A maioria dos algoritmos consideram o problema de minimizar o funcional $\mathcal{E}_L[W]\{g(x)\}$ percorrendo a rede em uma dada ordem e, em cada passo, efetuando a minimização somente para o sítio y escolhido. Este procedimento se baseia na observação de que a dependência do funcional na matriz $g(y)$ é bastante simples e pode ser escrita como

$$\mathcal{E}_L[W]\{g(x)\} = \text{constante} - \frac{1}{dVn} \Re \text{Tr} F(y) \quad (5.129)$$

$$= \text{constante} - \frac{1}{dVn} \Re \text{Tr} [g(y) K(y)], \quad (5.130)$$

onde

$$K(y) = \sum_{\mu} \left[U_{\mu}(y) g^{\dagger}(y + ae_{\mu}) + U_{\mu}^{\dagger}(y - ae_{\mu}) g^{\dagger}(y - ae_{\mu}) \right]. \quad (5.131)$$

Para minimizar o funcional $\mathcal{E}_L[W]\{g(x)\}$ devemos então, em cada sítio y , escolher uma nova matriz $g(y)$ que minimize a expressão acima. Sendo que o funcional $\mathcal{E}_L[W]\{g(x)\}$ é não-negativo, é claro que este processo de minimização deve convergir e permitir achar um mínimo

²⁰ Claramente, no caso de grandezas independentes do calibre, a expressão (5.31) é recuperada.

²¹ Para maiores detalhes sobre esses algoritmos e suas eficiências numéricas, pode ser consultada a Referência (52).

(local) de $\mathcal{E}_L[W]\{g(x)\}$. A atualização da matriz $g(y)$ pode ser escrita como

$$g^{(new)}(y) = R^{(update)}(y) g^{(old)}(y) . \quad (5.132)$$

Assim, para um dado sítio da rede y , a atualização das variáveis de elo

$$U_\mu^{(g)}(y) = g(y) U_\mu(y) g^\dagger(y + ae_\mu) \quad (5.133)$$

é dada por

$$U_\mu^{(g)}(y) \rightarrow R^{(update)}(y) U_\mu^{(g)}(y) \quad (5.134)$$

$$U_\mu^{(g)}(y - ae_\mu) \rightarrow U_\mu^{(g)}(y - ae_\mu) [R^{(update)}(y)]^\dagger . \quad (5.135)$$

Claramente, $R^{(update)}(y)$ deve ser um elemento do grupo de calibre $SU(n)$ estudado. A escolha de $R^{(update)}(y)$ é função da matriz $K(y)$ e depende também do algoritmo considerado. Note que, no caso $SU(2)$, a matriz $K(y)$ é proporcional a uma matriz do grupo $SU(2)$ e o uso da fórmula acima é bem simples. Ao contrario, para um grupo $SU(n)$ qualquer, precisamos em geral efetuar (numericamente) uma projeção da matriz $K(y)$ no grupo de calibre considerado.

Algoritmo de Los Alamos: nesse caso temos

$$R^{(update)}(y) = \tilde{F}^\dagger(y) , \quad (5.136)$$

onde $\tilde{F}(y)$ é a projeção da matriz $F(y)$ no grupo $SU(n)$. Lembrando que para matrizes $SU(n)$ temos $\tilde{F}^\dagger(y) = \tilde{F}^{-1}(y)$, fica claro que essa atualização leva o funcional (5.130) para o seu valor mínimo.

Algoritmo de Sobre-Relaxação: esse algoritmo é uma generalização do algoritmo de Los Alamos. De fato, nesse caso, a atualização é dada por

$$R^{(update)}(y) = [\tilde{F}^\dagger(y)]^\omega , \quad (5.137)$$

com $1 < \omega < 2$. Claramente, para $\omega = 1$ obtemos de novo o algoritmo de Los Alamos. Também é importante observar que para $\omega = 2$ obtemos [no caso SU(2)]

$$g^{(new)}(y) \propto F^\dagger(y) F^\dagger(y) g^{(old)}(y) \quad (5.138)$$

$$= \left[g^{(old)}(y) K(y) \right]^\dagger K^\dagger(y) \quad (5.139)$$

e

$$g^{(new)}(y) K(y) = \left[g^{(old)}(y) K(y) \right]^\dagger \quad (5.140)$$

e o funcional (5.130) não muda de valor. Com o algoritmo de sobre-relaxação a minimização obtida em cada sítio y da rede é em princípio menor do que a minimização obtida com o algoritmo de Los Alamos. Porém, a convergência deste algoritmo é em geral mais rápida, porque cada atualização representa um “passo maior” no espaço das configurações.

Algoritmo de Sobre-Relaxação Estocástica: nesse algoritmo a atualização é dada por

$$R^{(update)}(y) = [\tilde{F}^\dagger(y)]^2 \quad (5.141)$$

com probabilidade p e por

$$R^{(update)}(y) = [\tilde{F}^\dagger(y)] \quad (5.142)$$

com probabilidade $q = 1 - p$. Usando o resultado discutido acima, são alternadas no algoritmo de over-relaxação estocástica atualizações que não minimizam o funcional, mas que permitem fazer “grandes passos” no espaço das configurações, com atualizações que levam o funcional para o seu mínimo local, como no algoritmo de Los Alamos.

Algoritmo de Cornell: nesse caso $R^{(update)}(y)$ é escolhido proporcional à matriz

$$\left[1 - \alpha a^2 g_0 \left(\nabla \cdot A^{(g)} \right) (y) \right]. \quad (5.143)$$

Sendo que $\nabla \cdot A^{(g)}$ é proporcional à derivada primeira do funcional (5.100), a ideia desse algoritmo é minimizar o funcional escolhendo uma atualização na direção do gradiente local.

Foi verificado em (52) que com uma escolha oportuna dos parâmetros ω , p e α os algoritmos de sobre-relaxação, de sobre-relaxação estocástica e de Cornell são bem mais rápidos do que o

(mais simples) algoritmo de Los Alamos.

5.6 Cópias de Gribov

As condições usuais de fixação de calibre usadas para cálculos perturbativos não determinam os campos de calibre de maneira unívoca (53): para uma teoria de calibre não-abeliana, por exemplo no calibre de Landau, há muitas configurações, chamadas equivalentes de calibre ou cópias de Gribov, satisfazendo a condição de fixação de calibre. De fato, se $A_\mu(x)$ é uma configuração que satisfaz o calibre de Landau, i.e.

$$\partial_\mu A_\mu(x) = 0, \quad (5.144)$$

usando a Equação (2.31) temos que

$$[A_\mu(x)]' = g(x) A_\mu(x) g(x)^\dagger + i g(x) \partial_\mu g(x)^\dagger \quad (5.145)$$

também satisfaz a condição de calibre de Landau

$$\partial_\mu [A_\mu(x)]' = 0 \quad (5.146)$$

se

$$\partial_\mu \left[g(x) A_\mu(x) g(x)^\dagger + i g(x) \partial_\mu g(x)^\dagger \right] = 0. \quad (5.147)$$

No caso de transformações infinitesimais, usando as Equações (2.40) e (2.44) temos²²

$$[A_\mu(x)^c]' = A_\mu(x)^c - D_\mu(x)^{cb} \lambda^b(x) \quad (5.148)$$

e a condição de calibre de Landau implica

$$0 = \partial_\mu [A_\mu(x)^c]' \quad (5.149)$$

$$= \partial_\mu A_\mu(x)^c - \partial_\mu D_\mu(x)^{cb} \lambda^b(x) \quad (5.150)$$

$$= -\partial_\mu D_\mu(x)^{cb} \lambda^b(x) \quad (5.151)$$

$$= M^{cb}(x, y) \lambda^b(y), \quad (5.152)$$

²² Aqui estamos usando a notação obtida com a transformação (2.75).

onde foi usada a Equação (5.34). Logo, a existência de cópias de Gribov, no caso de transformações infinitesimais, está relacionada à existência de auto-valores nulos da matriz de Faddeev-Popov. Observe que, devido à Equação (5.36), a matriz de Faddeev-Popov no calibre de Landau sempre apresenta auto-valores (trivias) nulos com auto-vetores constantes. Também, usando a Equação (2.12), é óbvio que para o vácuo $A_\mu(x) = 0$ temos $M^{cb}(x, y) = -\delta^{bc} \partial_\mu^2$ e o auto-valor nulo é obtido somente no caso trivial de auto-vetores constantes. Esses resultados se aplicam também ao caso de configurações $A_\mu(x)$ “pequenas”. Isto explica por que as cópias de Gribov não afetam os resultados da teoria de perturbação. Porém, elas podem ter influência sobre as características não-perturbativas destas teorias, como o comportamento dos propagadores de glúons e de fantasmas na região infra-vermelha (54).

Para eliminar as cópias de Gribov, o próprio Gribov (53) observou que o espaço das configurações pode ser restrito à região Ω de configurações transversas, para as quais a matriz de Faddeev-Popov $M^{cb}(x, y)$ é positiva-definida. Esta região, que inclui claramente a configuração de vácuo $A_\mu(x) = 0$, é delimitada pelo chamado “primeiro horizonte de Gribov”, definido como o conjunto de configurações para as quais o menor auto-valor não-trivial de $M^{cb}(x, y)$ é igual a zero. Esta modificação da integração funcional apresenta também a vantagem de justificar a desconsideração do módulo na Equação (5.78). Ao mesmo tempo, devido à condição $M^{cb}(x, y) > 0$, fica claro que na região Ω não existem cópias de Gribov relacionadas por transformações infinitesimais [ver Equações (5.149)–(5.152)]. Porém, é fácil entender que existem cópias de Gribov, relacionadas por transformações finitas, dentro da região Ω . De fato, sendo que a matriz de Faddeev-Popov corresponde à derivada segunda do funcional (5.124), é claro que a condição $M^{cb}(x, y) > 0$ é obtida para qualquer mínimo relativo do mesmo funcional. Assim, a existência de cópias de Gribov na região Ω é equivalente à existência de vários mínimos para o funcional (5.124). Devido à complexidade do funcional que define a condição de calibre de Landau, para cada órbita de calibre existem em geral muitos mínimos relativos do mesmo funcional, i.e. muitas cópias de Gribov.

Teorias de calibre na rede são afetadas pelo mesmo problema de cópias de Gribov encontrado no caso do contínuo. Por exemplo, no calibre de Landau a condição de calibre é imposta

encontrando-se o mínimo do funcional (5.100) e, como explicado acima, nessa formulação as cópias de Gribov correspondem a diferentes mínimos relativos de $\mathcal{E}_L[W]\{g(x)\}$. Este funcional pode ser visto (55) como a hamiltoniana de um modelo de vidros de spin em que o espaço de estados em cada sítio é o grupo $SU(n)$. Vidros de spin são sistemas multi-dimensionais caracterizados por forte desordem e frustração, levando a estruturas complexas para a energia com muitos mínimos relativos. É natural portanto encontrar um grande número de mínimos para a energia $\mathcal{E}_L[W]\{g(x)\}$. Assim, a hipótese feita na Seção 5.2 acima, i.e. que para cada órbita de calibre existe uma única configuração que satisfaz o calibre considerado, não é em geral justificada.

Hoje sabemos que para resolver o problema das cópias de Gribov é necessário considerar a chamada “região modular fundamental” Λ , definida como o conjunto de mínimos absolutos do funcional (5.124). De fato, foi demonstrado na Referência (56) que todas as órbitas de calibre intersectam a região Λ e que o mínimo absoluto é único (pelo menos dentro da região Λ). Numericamente, o mínimo absoluto corresponde ao estado fundamental do vidro de spin definido pelo funcional $\mathcal{E}_L[W]\{g(x)\}$. Devido à complexidade numérica de achar o mínimo absoluto do funcional $\mathcal{E}_L[W]\{g(x)\}$, nesta tese o problema da existência de cópias de Gribov e sua influência nos resultados numéricos foi desconsiderado.

6 *O Calibre Covariante Linear na Rede*

Como mostrado no capítulo anterior, o calibre covariante linear (5.43) é uma generalização do calibre de Landau. Esse calibre, frequentemente considerado no estudo perturbativo da QCD, é de difícil implementação numérica (33, 34). De fato, sua fixação numérica apresenta vários problemas não encontrados no caso de Landau. O objetivo principal dessa tese é a formulação de uma nova solução eficiente para fixar o calibre covariante linear em QCD na rede. Na próxima seção vamos descrever brevemente os problemas encontrados nas implementações anteriores, descritas em (33, 34). Em seguida, vamos apresentar uma nova formulação do calibre covariante linear, que resolve os problemas encontrados no passado, e considerar a sua relação com o caso contínuo. Enfim, na Seção 6.4 calculamos a matriz de Faddeev-Popov na rede para o calibre covariante linear e mostramos que essa matriz é a mesma que a obtida no caso do calibre de Landau.

6.1 Tentativas Anteriores

Como mostrado na Seção 5.4, o calibre de Landau $\partial_\mu A_\mu^b(x) = 0$ pode ser obtido no caso contínuo minimizando o funcional

$$\mathcal{E}_L[A^{(g)}]\{g(x)\} \propto \int d^d x \sum_{\mu,b} \text{Tr} \left[A_\mu^{(g)}(x) \right]^2, \quad (6.1)$$

onde g é transformação local de calibre aplicada aos campos de glúons $A_\mu(x)$. Na Referência (33), foi mostrado que não existe um funcional da forma

$$\mathcal{E}_{CL}[A^{(g)}, \Lambda]\{g(x)\} = \mathcal{E}_L[A^{(g)}]\{g(x)\} + \mathcal{F}[A^{(g)}, \Lambda]\{g(x)\} \quad (6.2)$$

que permita obter (através de sua derivada primeira) o calibre covariante linear

$$\partial_\mu A_\mu^b(x) = \Lambda^b(x) , \quad (6.3)$$

onde $\Lambda^b(x)$ são funções reais. De fato, se tal funcional existisse, a sua variação segunda em relação à transformação de calibre $g(x) = e^{iw(x)}$ deveria satisfazer à relação

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial w^b(x) \partial w^c(y)} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial w^c(y) \partial w^b(x)} . \quad (6.4)$$

Pode-se verificar que estes dois termos são proporcionais, respectivamente, as grandezas $\Lambda^a(x) f^{acb}$ e $\Lambda^a(x) f^{abc}$. Porém, as constantes de estrutura f^{acb} e f^{abc} são anti-simétricas [ver Seção 2.1], i.e. $f^{acb} = -f^{abc}$. Assim, fica claro (33) que a relação (6.4) não pode ser satisfeita, independentemente da escolha do funcional $\mathcal{F}[A^g, \Lambda]\{g(x)\}$.

Claramente, é possível evitar a limitação acima eliminando uma das hipóteses consideradas. Por exemplo, podemos considerar uma condição de calibre

$$F[\partial_\mu A_\mu^b(x) - \Lambda^b(x)] = 0 , \quad (6.5)$$

com $F[0] = 0$, e achar um funcional minimizante para este novo problema. De fato, na Referência (33) foi mostrado que a minimização do funcional

$$\int d^d x \sum_{\mu, b} \left[\partial_\mu A_\mu^b(x) - \Lambda^b(x) \right]^2 \quad (6.6)$$

permite impor a condição de calibre

$$D_V^{ab} \partial_V \left[\partial_\mu A_\mu^b(x) - \Lambda^b(x) \right] = 0 , \quad (6.7)$$

onde D_V^{ab} é a derivada covariante. Assim, a condição de calibre (6.3) é satisfeita por alguns dos pontos de mínimo encontrados, mas claramente são também introduzidas condições espúrias correspondentes às soluções de $F[s] = 0$ com $s \neq 0$. No caso específico considerado acima essas soluções são os modos zero do operador $D_V^{ab} \partial_V$. Também, a matriz de Faddeev-Popov, obtida considerando uma expansão quadrática do funcional (6.6) ao redor do ponto estacionário, não coincide com a matriz de Faddeev-Popov $M^{bc}(x, y) = -\delta(x - y) \partial_\mu D_\mu(x)^{bc}$ usual para o

calibre covariante linear. Enfim, o funcional (6.6) não é linear na transformação de calibre $g(x)$. Isto torna difícil a sua minimização numérica (33, 57).

Uma outra solução possível, apresentada na Referência (34), evita considerar um funcional minimizante $\mathcal{E}_{CL}[A^{(g)}, \Lambda]\{g(x)\}$ e baseia-se na definição (perturbativa) usada no contínuo. De fato, neste caso, como primeiro passo, é fixado o calibre de Landau. Em seguida, é considerada a equação

$$\left(\partial_\mu D_\mu^{bc} \phi^c\right)(x) = \Lambda^b(x). \quad (6.8)$$

A solução¹ $\phi^c(x)$ desta equação é então usada para gerar uma segunda transformação de calibre, i.e. $g(x) = \exp[i\phi^c(x)T_c]$. Claramente, para $\phi^c(x)$ pequena, temos que a configuração final dos campos de glúons $A_\mu'^b(x)$ satisfaz a relação

$$\partial_\mu A_\mu'^b(x) = \partial_\mu \left(A_\mu^b + D_\mu^{bc} \phi^c\right)(x) = \Lambda^b(x). \quad (6.9)$$

Aqui foram usadas as Equações (2.40), (2.44) e (6.8), além da condição $\partial_\mu A_\mu^b(x) = 0$. Neste caso o maior problema é a hipótese de que a função $\phi^c(x)$ seja pequena, o que em geral não acontece nas simulações numéricas. Assim, a distribuição de $\partial_\mu A_\mu'^b(x)$ não coincide (34) com a distribuição das funções $\Lambda^b(x)$.

6.2 Uma Nova Implementação

Para superar as dificuldades apontadas na seção anterior e achar uma nova forma de implementar o calibre covariante linear na rede, vamos primeiro lembrar que, minimizado o funcional $\mathcal{E}_{CL}[A^{(g)}, \Lambda]\{g(x)\}$, a condição de calibre é dada pela variação primeira desse funcional na transformação de calibre $g(x) = e^{iw(x)}$, i.e.

$$\delta \mathcal{E}_{CL} = \frac{\partial \mathcal{E}_{CL}}{\partial A^{(g)}} \frac{\partial A^{(g)}}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial w} \delta w = 0. \quad (6.10)$$

Como mostrado na Referência (33) e comentado acima, não existe um funcional deste tipo que permita fixar a condição de calibre covariante linear (6.3). Entretanto, podemos facil-

¹ Note que no calibre de Landau na rede o operador $-\partial_\mu D_\mu^{bc}$ é positivo definido e pode ser invertido no espaço ortogonal aos vetores constantes.

mente remover uma hipótese implícita do resultado demonstrado na Referência (33), i.e. que a transformação de calibre $\{g(x)\}$ apareça no funcional na forma “canônica” $A^{(g)}$. Assim, podemos considerar um funcional do tipo $\mathcal{E}_{CL}[A^{(g)}, \Lambda, g]\{g(x)\}$ em vez de $\mathcal{E}_{CL}[A^{(g)}, \Lambda]\{g(x)\}$. Esta mudança parece uma escolha natural também se notarmos que para resolver um sistema de equações lineares

$$B\psi = \zeta, \quad (6.11)$$

onde B é uma matriz, podemos achar o vetor ψ que minimiza a forma quadrática

$$\frac{1}{2} \psi B \psi - \psi \zeta. \quad (6.12)$$

De fato, podemos propor uma forma alternativa para o funcional $\mathcal{E}_{CL}[A^{(g)}, \Lambda]\{g(x)\}$, baseado na ideia acima. Essa forma alternativa foi proposta por nós em (58), e será detalhada a seguir.

Notemos que o calibre covariante linear na rede pode ser obtido minimizando o funcional

$$\mathcal{E}_{CL}[W, \Lambda, g]\{g(x)\} = 1 - \frac{1}{dVn} \Re Tr \sum_{x,\mu} W_\mu(x) + \frac{1}{dVn} \Re Tr \sum_x i g(x) \Lambda(x) \quad (6.13)$$

$$= 1 - \frac{1}{2dVn} Tr \sum_x \left\{ \sum_{\mu=1}^d \left[W_\mu(x) + W_\mu^\dagger(x) \right] + \left[K(x) + K^\dagger(x) \right] \right\}, \quad (6.14)$$

onde

$$K(x) = -i g(x) \Lambda(x), \quad (6.15)$$

a grandeza $W_\mu(x)$ foi definida na Equação (5.102) e

$$\Lambda(x) = \Lambda^b(x) T_b. \quad (6.16)$$

Note que os primeiros dois termos na Equação (6.13) representam o funcional $\mathcal{E}_L[W]\{g(x)\}$, cuja minimização leva à condição de calibre de Landau [ver a Equação (5.100)].

Como na Seção 5.4, para calcular a condição de ponto estacionário para o funcional (6.14),

podemos considerar um sub-grupo com um parâmetro das transformações de calibre

$$g(x, \tau) = \exp \left[i \tau \lambda^b(x) T_b \right] , \quad (6.17)$$

e sua expansão em série de potências

$$g(x, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[i \tau \lambda^b(x) T_b \right]^m . \quad (6.18)$$

Relembramos aqui que τ e $\lambda^b(x)$ são números reais e as matrizes (hermitianas e de traço nulo) T_b são os geradores do grupo SU(n). Usando as expressões acima podemos escrever

$$\begin{aligned} K(x) &= -i g(x) \Lambda^c(x) T_c \\ &= -i \left[1 + i \tau \lambda^b(x) T_b + \dots \right] \Lambda^c(x) T_c . \end{aligned} \quad (6.19)$$

Ao mesmo tempo, o hermitiano conjugado de $K(x)$ pode ser escrito como

$$K^\dagger(x) = i \Lambda^c(x) T_c \left[1 - i \tau \lambda^b(x) T_b + \dots \right] . \quad (6.20)$$

Assim, tomando as derivadas em relação a τ em $\tau = 0$, temos

$$K\{g(x, \tau), \tau = 0\} = -i \Lambda^c(x) T_c \quad (6.21)$$

$$K'\{g(x, \tau), \tau = 0\} = \lambda^b(x) T_b \Lambda^c(x) T_c \quad (6.22)$$

e

$$K^\dagger\{g(x, \tau), \tau = 0\} = i \Lambda^c(x) T_c \quad (6.23)$$

$$K^{\dagger'}\{g(x, \tau), \tau = 0\} = \Lambda^c(x) T_c \lambda^b(x) T_b . \quad (6.24)$$

Note que $K\{g(x, \tau), \tau = 0\} + K^\dagger\{g(x, \tau), \tau = 0\} = 0$, i.e. o termo proporcional às funções $\Lambda^c(x)$ não contribui para $\mathcal{E}_{CL}[W, \Lambda, g]\{g(x)\}$ quando $g(x) = 1$.

Usando agora as expressões acima, obtemos que a derivada primeira do funcional

$$-\frac{1}{2dVn} \text{Tr} \sum_x \left[K(x) + K^\dagger(x) \right] \quad (6.25)$$

para $\tau = 0$ é dada por

$$-\frac{1}{2dVn} Tr \sum_x \left[K' \{g(x, \tau), \tau = 0\} + K^{\dagger'} \{g(x, \tau), \tau = 0\} \right] \quad (6.26)$$

$$= -\frac{1}{2dVn} Tr \sum_x \left[\lambda^b(x) T_b \Lambda^c(x) T_c + \Lambda^c(x) T_c \lambda^b(x) T_b \right] \quad (6.27)$$

$$= -\frac{1}{dVn} Tr \sum_x \left[\lambda^b(x) \Lambda^c(x) T_b T_c \right] \quad (6.28)$$

$$= -\frac{1}{2dVn} \sum_x \left[\lambda^b(x) \Lambda^b(x) \right], \quad (6.29)$$

onde nos últimos dois passos foram usadas a propriedade cíclica do traço e a condição de normalização $Tr(T_b T_c) = \delta_{bc}/2$. Enfim, juntando estes resultados com a expressão (5.118), obtemos

$$\mathcal{E}'_{CL}[W, \Lambda, g] \{g(x, \tau), \tau = 0\} = \frac{1}{2dVn} \sum_x \left\{ \lambda^b(x) \left[\nabla \cdot A^b(x) - \Lambda^b(x) \right] \right\}. \quad (6.30)$$

Portanto, para obter $\mathcal{E}'_{CL}[W, \Lambda, g] \{g(x, \tau), \tau = 0\} = 0$ para qualquer função $\lambda^b(x)$ (condição de ponto estacionário), temos que o calibre covariante linear

$$\nabla \cdot A^b(x) = \Lambda^b(x), \quad (6.31)$$

deve ser satisfeito na configuração de rede. Claramente para $\Lambda^b(x) = 0$ temos $K(x) = 0$, o funcional (6.13) coincide com o funcional (5.100) e a condição de calibre acima transforma-se na condição de calibre de Landau (5.81).

Como explicado na Seção 5.6, o funcional $\mathcal{E}_L[W] \{g(x)\}$ para o calibre de Landau pode ser interpretado (55) como a hamiltoniana de um vidro de spin no espaço $g(x)$ das matrizes $SU(n)$ interagindo através do acoplamento $U_\mu(x)$. Da mesma forma, o funcional $\mathcal{E}_{CL}[W, \Lambda, g] \{g(x)\}$ pode ser interpretado como o mesmo vidro de spin mas com um campo magnético externo aplicado $\Lambda(x)$.

6.3 Limite do Contínuo

Como mostrado na Equação (5.86), o limite formal do contínuo de $\nabla \cdot A^b(x)$ é dado por²

$$a^2 g_0 \partial_\mu^{(c)} A_\mu^{(c)b}(x) + \mathcal{O}(a^4 g_0) . \quad (6.32)$$

Assim, considerando a Equação (6.31), a condição de calibre covariante linear no contínuo

$$\partial_\mu^{(c)} A_\mu^{(c)b}(x) = \Lambda^{(c)b}(x) \quad (6.33)$$

é recuperada com a identificação

$$\Lambda^b(x) = a^2 g_0 \Lambda^{(c)b}(x) + \mathcal{O}(a^3) . \quad (6.34)$$

Ao mesmo tempo, devemos relembrar que as funções $\Lambda^{(c)b}(x)$ satisfazem em geral no contínuo uma distribuição de probabilidade gaussiana

$$P \left[\Lambda^{(c)b}(x) \right] \sim \exp \left\{ -\frac{1}{2\xi} \int d^d x \sum_b \left[\Lambda^{(c)b}(x) \right]^2 \right\} . \quad (6.35)$$

Para o grupo SU(n), em dimensão d , a constante de acoplamento da rede β é dada por [ver Equação (2.178)]

$$\beta = \frac{2n}{a^{4-d} g_0^2} . \quad (6.36)$$

Assim, a grandeza de rede

$$\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{x,b} \left[\Lambda^b(x) \right]^2 = \frac{\beta/(2n)}{2\xi} \sum_{x,b} \left[\Lambda^{(c)b}(x) \right]^2 \quad (6.37)$$

torna-se (34), no limite formal do contínuo,

$$\frac{1}{2\xi} \frac{1}{a^{4-d} g_0^2} \int \frac{d^d x}{a^d} \sum_b \left[a^2 g_0 \Lambda^{(c)b}(x) \right]^2 = \frac{1}{2\xi} \int d^d x \sum_b \left[\Lambda^{(c)b}(x) \right]^2 . \quad (6.38)$$

Logo, o parâmetro de calibre ξ do contínuo corresponde ao parâmetro

$$\sigma^2 = \frac{2n\xi}{\beta} \quad (6.39)$$

² Na Seção 2.3 foi explicado que a grandeza $a g_0 A_\mu^{(c)}(x)$ é adimensional em qualquer dimensão d . Logo, fica claro que para deixar o divergente $\partial_\mu^{(c)} A_\mu^{(c)}(x)$ adimensional precisamos multiplicá-lo por $a^2 g_0$.

para a distribuição de probabilidades gaussiana na rede. Note que somente para $\beta = 2n$ temos $\sigma^2 = \xi$.

6.4 A Matriz de Faddeev-Popov

Calculemos agora a derivada segunda do funcional $\mathcal{E}_{CL}[W, \Lambda, g]\{g(x, \tau)\}$ em relação ao parâmetro τ para $\tau = 0$. Isto nos permite obter a matriz de Faddeev-Popov $M^{bc}(x, y)$ na rede. Claramente temos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{CL}''[W, \Lambda, g]\{g(x, \tau), \tau = 0\} = & -\frac{1}{2dVn} Tr \sum_x \left\{ \sum_{\mu=1}^d \left[W_{\mu}''(x) + W_{\mu}^{\dagger''} \right] \right. \\ & \left. + \left[K''(x) + K^{\dagger''}(x) \right] \right\} \Big|_{\tau=0}. \quad (6.40) \end{aligned}$$

Usando as relações

$$\begin{aligned} W_{\mu}(x) = & \left[1 + i\tau \lambda^b(x) T_b - \frac{\tau^2}{2} \lambda^a(x) \lambda^b(x) T_a T_b + \dots \right] U_{\mu}(x) \\ & \times \left[1 - i\tau \lambda^c(x + ae_{\mu}) T_c - \frac{\tau^2}{2} \lambda^c(x + ae_{\mu}) \lambda^d(x + ae_{\mu}) T_c T_d + \dots \right] \quad (6.41) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} K(x) = & -ig(x) \Lambda^c(x) T_c \\ = & -i \left[1 + i\tau \lambda^b(x) T_b - \frac{\tau^2}{2} \lambda^a(x) \lambda^b(x) T_a T_b + \dots \right] \Lambda^c(x) T_c, \quad (6.42) \end{aligned}$$

podemos também escrever

$$\begin{aligned} W_{\mu}''\{g(x, \tau), \tau = 0\} = & -\lambda^a(x) \lambda^b(x) T_a T_b U_{\mu}(x) \\ & -\lambda^c(x + ae_{\mu}) \lambda^d(x + ae_{\mu}) U_{\mu}(x) T_c T_d \\ & + 2\lambda^b(x) \lambda^c(x + ae_{\mu}) T_b U_{\mu}(x) T_c, \quad (6.43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\mu}^{\dagger''} \{g(x, \tau), \tau = 0\} &= -\lambda^a(x) \lambda^b(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) T_b T_a \\
&\quad - \lambda^c(x + ae_{\mu}) \lambda^d(x + ae_{\mu}) T_d T_c U_{\mu}^{\dagger}(x) \\
&\quad + 2 \lambda^b(x) \lambda^c(x + ae_{\mu}) T_c U_{\mu}^{\dagger}(x) T_b
\end{aligned} \tag{6.44}$$

e

$$K'' \{g(x, \tau), \tau = 0\} = i \lambda^a(x) \lambda^b(x) T_a T_b \Lambda^c(x) T_c \tag{6.45}$$

$$K^{\dagger''} \{g(x, \tau), \tau = 0\} = -i \Lambda^c(x) T_c \lambda^a(x) \lambda^b(x) T_b T_a . \tag{6.46}$$

Juntando estes resultados, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{CL}''[W, \Lambda, g] \{g(x, \tau), \tau = 0\} &= -\frac{1}{2dVn} Tr \sum_x \left\{ \sum_{\mu=1}^d \left[-\lambda^a(x) \lambda^b(x) T_a T_b U_{\mu}(x) \right. \right. \\
&\quad - \lambda^c(x + ae_{\mu}) \lambda^d(x + ae_{\mu}) U_{\mu}(x) T_c T_d \\
&\quad + 2 \lambda^b(x) \lambda^c(x + ae_{\mu}) T_b U_{\mu}(x) T_c \\
&\quad - \lambda^a(x) \lambda^b(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) T_b T_a \\
&\quad - \lambda^c(x + ae_{\mu}) \lambda^d(x + ae_{\mu}) T_d T_c U_{\mu}^{\dagger}(x) \\
&\quad \left. \left. + 2 \lambda^b(x) \lambda^c(x + ae_{\mu}) T_c U_{\mu}^{\dagger}(x) T_b \right] \right. \\
&\quad \left. + i \lambda^a(x) \lambda^b(x) (T_a T_b T_c - T_c T_b T_a) \Lambda^c(x) \right\} .
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Podemos agora considerar a identidade

$$T_a T_b = \frac{1}{2} (\{T_a, T_b\} + [T_a, T_b]) , \tag{6.48}$$

onde

$$\{T_a, T_b\} = T_a T_b + T_b T_a = \{T_b, T_a\} \tag{6.49}$$

$$[T_a, T_b] = T_a T_b - T_b T_a = -[T_b, T_a] . \tag{6.50}$$

Isto implica as relações

$$\lambda^a(x) \lambda^b(x) [T_a, T_b] = 0 \quad (6.51)$$

$$\lambda^a(x) \lambda^b(x) T_a T_b = \frac{1}{2} \lambda^a(x) \lambda^b(x) \{T_a, T_b\} . \quad (6.52)$$

Usando os resultados acima e a propriedade cíclica do traço chegamos à equação

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{CL}''[W, \Lambda, g] \{g(x, \tau), \tau = 0\} = & -\frac{1}{2dVn} Tr \sum_x \left\{ \sum_{\mu=1}^d \left[-\lambda^a(x) \lambda^b(x) \frac{1}{2} \{T_a, T_b\} U_\mu(x) \right. \right. \\ & - \lambda^c(x + ae_\mu) \lambda^d(x + ae_\mu) U_\mu(x) \frac{1}{2} \{T_c, T_d\} \\ & - \lambda^a(x) \lambda^b(x) U_\mu^\dagger(x) \frac{1}{2} \{T_b, T_a\} \\ & - \lambda^c(x + ae_\mu) \lambda^d(x + ae_\mu) \frac{1}{2} \{T_d, T_c\} U_\mu^\dagger(x) \\ & + \lambda^b(x) \lambda^c(x + ae_\mu) (\{T_c, T_b\} + [T_c, T_b]) U_\mu(x) \\ & + \lambda^b(x) \lambda^c(x + ae_\mu) (\{T_b, T_c\} + [T_b, T_c]) U_\mu^\dagger(x) \Big] \\ & \left. + i \lambda^a(x) \lambda^b(x) ([T_a, T_b] T_c) \Lambda^c(x) \right\} . \quad (6.53) \end{aligned}$$

Devido à relação (6.51), o último termo na equação acima é nulo. Assim, o termo que depende de $\Lambda(x)$ não contribui para a derivada segunda do funcional $\mathcal{E}_{CL}[W, \Lambda, g] \{g(x, \tau)\}$. Observe que este termo pode também ser escrito como

$$\frac{1}{2dVn} Tr \sum_x \lambda^a(x) \lambda^b(x) f^{abd} T_d T_c \Lambda^c(x) = \frac{1}{4dVn} \sum_x \lambda^a(x) \lambda^b(x) f^{abc} \Lambda^c(x) , \quad (6.54)$$

onde as constantes de estrutura f^{abc} foram definidas na Equação (2.5) e foi usada a condição de normalização $Tr(T_b T_c) = \delta_{bc}/2$. Devido à anti-simetria das constantes de estrutura [ver Seção 2.1], este termo é claramente nulo.

Usando de novo a propriedade cíclica do traço e re-agrupando os termos, podemos também

escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{CL}''[W, \Lambda, g]\{g(x, \tau), \tau = 0\} = & -\frac{1}{2dVn} Tr \sum_x \sum_{\mu=1}^d \left\{ \right. \\
& -\lambda^a(x) \lambda^b(x) \frac{\{T_a, T_b\}}{2} \left[U_\mu(x) + U_\mu^\dagger(x) \right] \\
& -\lambda^c(x+ae_\mu) \lambda^d(x+ae_\mu) \frac{\{T_c, T_d\}}{2} \left[U_\mu(x) + U_\mu^\dagger(x) \right] \\
& +\lambda^b(x) \lambda^c(x+ae_\mu) \{T_c, T_b\} \left[U_\mu(x) + U_\mu^\dagger(x) \right] \\
& \left. +\lambda^b(x) \lambda^c(x+ae_\mu) [T_c, T_b] \left[U_\mu(x) - U_\mu^\dagger(x) \right] \right\}. \quad (6.55)
\end{aligned}$$

Podemos agora definir a grandeza

$$\Gamma_\mu^{ab}(x) = Tr \frac{\{T_a, T_b\}}{2} \left[U_\mu(x) + U_\mu^\dagger(x) \right]. \quad (6.56)$$

Note que $\Gamma_\mu^{ab}(x) = \Gamma_\mu^{ba}(x)$ e que no caso $SU(2)$ com $T_b = \sigma_b/2$, onde as matrizes σ_b são as matrizes de Pauli, temos

$$\Gamma_\mu^{ab}(x) = Tr \frac{\delta_{ab}}{2} \left[U_\mu(x) + U_\mu^\dagger(x) \right] = \delta_{ab} Tr U_\mu(x). \quad (6.57)$$

Usando então a definição (6.56) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{CL}''[W, \Lambda, g]\{g(x, \tau), \tau = 0\} = & \frac{1}{2dVn} \sum_x \sum_{\mu=1}^d \left\{ \right. \\
& \lambda^a(x) \lambda^b(x) \Gamma_\mu^{ab}(x) \\
& +\lambda^c(x+ae_\mu) \lambda^d(x+ae_\mu) \Gamma_\mu^{cd}(x) \\
& \left. -2\lambda^b(x) \lambda^c(x+ae_\mu) \Gamma_\mu^{cb}(x) \right\} \\
& -i Tr \lambda^b(x) \lambda^c(x+ae_\mu) f^{cba} T_a \left[U_\mu(x) - U_\mu^\dagger(x) \right]. \quad (6.58)
\end{aligned}$$

Re-organizando os índices de cor, a relação acima torna-se também igual a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{CL}''[W, \Lambda, g]\{g(x, \tau), \tau = 0\} &= \frac{1}{2dVn} \sum_x \sum_{\mu=1}^d \left\{ \left[\lambda^b(x + ae_\mu) - \lambda^b(x) \right] \Gamma_\mu^{bc}(x) \right. \\ &\quad \times \left[\lambda^c(x + ae_\mu) - \lambda^c(x) \right] \\ &\quad \left. + 2\lambda^b(x) \lambda^c(x + ae_\mu) f^{cba} Tr T_a \frac{U_\mu(x) - U_\mu^\dagger(x)}{2i} \right\}. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Enfim, usando a propriedade $Tr(T_b 1) = Tr T_b = 0$, a Eq. (5.83) e a condição de normalização $Tr(T_b T_c) = \delta_{bc}/2$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{CL}''[W, \Lambda, g]\{g(x, \tau), \tau = 0\} &= \frac{1}{2dVn} \sum_x \sum_{\mu=1}^d \left\{ \left[\lambda^b(x + ae_\mu) - \lambda^b(x) \right] \Gamma_\mu^{bc}(x) \right. \\ &\quad \times \left[\lambda^c(x + ae_\mu) - \lambda^c(x) \right] \\ &\quad \left. + \lambda^b(x) \lambda^c(x + ae_\mu) f^{cba} A_\mu^a(x + ae_\mu/2) \right\}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

O mesmo resultado pode ser escrito, após translação da rede, usando a invariância translacional e as propriedades das constantes de estrutura, como

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{CL}''[W, \Lambda, g]\{g(x, \tau), \tau = 0\} &= \frac{1}{2dVn} \sum_x \lambda^b(x) \sum_{\mu=1}^d \left\{ \Gamma_\mu^{bc}(x) \left[\lambda^c(x) - \lambda^c(x + ae_\mu) \right] \right. \\ &\quad + \Gamma_\mu^{bc}(x - ae_\mu) \left[\lambda^c(x) - \lambda^c(x - ae_\mu) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} f^{bac} \left[A_\mu^a(x + ae_\mu/2) \lambda^c(x + ae_\mu) \right. \\ &\quad \left. \left. - A_\mu^a(x - ae_\mu/2) \lambda^c(x - ae_\mu) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Logo, considerando a expansão

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{CL}[W, \Lambda, g]\{g(x, \tau)\} &= \mathcal{E}_{CL}[W, \Lambda, g]\{g(x), \tau = 0\} + \tau \mathcal{E}_{CL}'[W, \Lambda, g]\{g(x), \tau = 0\} \\ &\quad + \frac{\tau^2}{2} \mathcal{E}_{CL}''[W, \Lambda, g]\{g(x), \tau = 0\} + \mathcal{O}(\tau^3) \end{aligned} \quad (6.62)$$

e a relação

$$\mathcal{E}_{CL}''[W, \Lambda, g]\{g(x), \tau, \tau = 0\} = \frac{1}{2dVn} \sum_{x,y} \sum_{b,c} \lambda^b(x) M^{bc}(x,y) \lambda^c(y), \quad (6.63)$$

obtemos que a matriz de Faddeev-Popov na rede é definida através de

$$\begin{aligned} \sum_{y,c} M^{bc}(x,y) \lambda^c(y) = & \sum_{\mu=1}^d \left\{ \Gamma_{\mu}^{bc}(x) \left[\lambda^c(x) - \lambda^c(x+ae_{\mu}) \right] \right. \\ & + \Gamma_{\mu}^{bc}(x-ae_{\mu}) \left[\lambda^c(x) - \lambda^c(x-ae_{\mu}) \right] \\ & + \frac{1}{2} f^{bac} \left[A_{\mu}^a(x+ae_{\mu}/2) \lambda^c(x+ae_{\mu}) \right. \\ & \left. \left. - A_{\mu}^a(x-ae_{\mu}/2) \lambda^c(x-ae_{\mu}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

No limite formal do contínuo, usando as Equações (5.120) e (5.121) e a condição de normalização para as matrizes T_b , obtemos

$$\Gamma_{\mu}^{ab}(x) = Tr \frac{\{T_a, T_b\}}{2} [2 + \mathcal{O}(a^2 g_0^2)] = \delta^{ab} + \mathcal{O}(a^2 g_0^2). \quad (6.65)$$

No mesmo limite, usando a Equação (5.85), a matriz de Faddeev-Popov é dada por

$$\begin{aligned}
\sum_{y,c} M^{bc}(x,y) \lambda^c(y) &= \sum_{\mu=1}^d \left\{ \left[\delta^{bc} + \mathcal{O}(a^2 g_0^2) \right] \left[-a \partial_\mu^{(c)} \lambda^c(x) - \frac{a^2}{2} \partial_\mu^{(c)2} \lambda^c(x) + \mathcal{O}(a^3) \right] \right. \\
&\quad + \left[\delta^{bc} + \mathcal{O}(a^2 g_0^2) \right] \left[a \partial_\mu^{(c)} \lambda^c(x) - \frac{a^2}{2} \partial_\mu^{(c)2} \lambda^c(x) + \mathcal{O}(a^3) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} f^{bac} \left[a g_0 A_\mu^{(c)a}(x) + \frac{a^2 g_0}{2} \partial_\mu^{(c)} A_\mu^{(c)a}(x) + \mathcal{O}(a^3 g_0, a^3 g_0^3) \right] \\
&\quad \times \left[\lambda^c(x) + a \partial_\mu^{(c)} \lambda^c(x) + \mathcal{O}(a^2) \right] \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} f^{bac} \left[a g_0 A_\mu^{(c)a}(x) - \frac{a^2 g_0}{2} \partial_\mu^{(c)} A_\mu^{(c)a}(x) + \mathcal{O}(a^3 g_0, a^3 g_0^3) \right] \right. \\
&\quad \left. \times \left[\lambda^c(x) - a \partial_\mu^{(c)} \lambda^c(x) + \mathcal{O}(a^2) \right] \right\} \quad (6.66)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu=1}^d \left\{ -a^2 \partial_\mu^{(c)2} \lambda^b(x) + a^2 g_0 f^{bac} A_\mu^{(c)a}(x) \partial_\mu^{(c)} \lambda^c(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} a^2 g_0 f^{bac} \left[\partial_\mu^{(c)} A_\mu^{(c)a}(x) \right] \lambda^c(x) + \mathcal{O}(a^3 g_0^m) \right\}, \quad (6.67)
\end{aligned}$$

com $m = 0, 1, 2, 3$. Usando agora a definição de derivada covariante no contínuo³

$$D_\mu^{(c)bc}(x) = \delta^{bc} \partial_\mu^{(c)} - g_0 f^{bac} A_\mu^{(c)a}(x) = \delta^{bc} \partial_\mu^{(c)} + g_0 f^{abc} A_\mu^{(c)a}(x), \quad (6.68)$$

o resultado acima pode também ser escrito como

$$\sum_{y,c} M^{bc}(x,y) \lambda^c(y) = -a^2 \sum_{\mu=1}^d \left\{ D_\mu^{(c)bc} \partial_\mu^{(c)} - \frac{1}{2} f^{bac} g_0 \left[\partial_\mu^{(c)} A_\mu^{(c)a} \right] + \mathcal{O}(a g_0^m) \right\} \lambda^c \quad (6.69)$$

e a matriz de Faddeev-Popov no contínuo é dada por

$$M^{(c)bc}(x,y) = -\delta(x-y) \left\{ D_\mu^{(c)bc} \partial_\mu^{(c)} - \frac{1}{2} f^{bac} g_0 \left[\partial_\mu^{(c)} A_\mu^{(c)a} \right] \right\}. \quad (6.70)$$

No caso do calibre de Landau, o segundo termo é nulo e obtemos a matriz usual de Faddeev-Popov. Tal não é o caso para o calibre covariante linear. Isto porém é devido ao fato de termos eliminado o termo nulo (6.54) na Equação (6.53). De fato, o limite do contínuo de (6.54) é dado

³ Em comparação com a definição (2.45), foram aqui usadas as transformações (2.64) e (2.70).

por

$$\frac{1}{4dVn} \sum_x \lambda^b(x) \lambda^c(x) f^{bca} a^2 g_0 \Lambda^{(c)a}(x) + \mathcal{O}(a^3), \quad (6.71)$$

onde foi usada a relação (6.34). Considerando a definição (6.63), obtemos que esta grandeza contribui para $M^{(c)bc}(x, y)$ com um termo

$$-\delta(x-y) \left\{ -\frac{1}{2} f^{bca} g_0 \Lambda^{(c)a}(x) \right\} = -\delta(x-y) \left\{ \frac{1}{2} f^{bac} g_0 \Lambda^{(c)a}(x) \right\}. \quad (6.72)$$

Assim, quando a condição de calibre $\partial_\mu^{(c)} A_\mu^{(c)a} = \Lambda^{(c)a}(x)$ é satisfeita, a matriz de Faddeev-Popov no contínuo torna-se simplesmente

$$M^{(c)bc}(x, y) = -\delta(x-y) D_\mu^{(c)bc} \partial_\mu^{(c)}. \quad (6.73)$$

Para obtermos o mesmo resultado na rede, i.e. a derivada parcial ∂_μ à direita na expressão para a matriz de Faddeev-Popov, podemos usar de novo a anti-simetria das constantes de estrutura f^{bac} , a condição de calibre (6.31) e a Equação (5.81), e considerar a relação

$$0 = \frac{1}{2} \sum_x \lambda^b(x) f^{bac} \Lambda^a(x) \lambda^c(x) \quad (6.74)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_x \lambda^b(x) f^{bac} \sum_{\mu=1}^d \left[A_\mu^b(x + ae_\mu/2) - A_\mu^b(x - ae_\mu/2) \right] \lambda^c(x). \quad (6.75)$$

Subtraindo este termo da Equação (6.64) obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{y,c} M^{bc}(x, y) \lambda^c(y) &= \sum_{\mu=1}^d \left\{ \Gamma_\mu^{bc}(x) \left[\lambda^c(x) - \lambda^c(x + ae_\mu) \right] \right. \\ &\quad + \Gamma_\mu^{bc}(x - ae_\mu) \left[\lambda^c(x) - \lambda^c(x - ae_\mu) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} f^{bac} A_\mu^a(x + ae_\mu/2) \left[\lambda^c(x + ae_\mu) - \lambda^c(x) \right] \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} f^{bac} A_\mu^a(x - ae_\mu/2) \left[\lambda^c(x - ae_\mu) - \lambda^c(x) \right] \right\}. \quad (6.76) \end{aligned}$$

Neste caso fica claro que, se as funções $\lambda^c(x)$ forem constantes, a expressão acima será nula, i.e. a matriz de Faddeev-Popov apresenta um auto-valor nulo trivial correspondente a autovaleores constantes. Usando (6.70) e (6.72) no limite formal do contínuo a equação acima fornece claramente o resultado (6.73).

Ao invés de subtrair, podemos também somar o termo (6.75) à Equação (6.64) obtendo

$$\begin{aligned} \sum_{y,c} M^{bc}(x,y) \lambda^c(y) = & \sum_{\mu=1}^d \left\{ \Gamma_{\mu}^{bc}(x) \left[\lambda^c(x) - \lambda^c(x+ae_{\mu}) \right] \right. \\ & + \Gamma_{\mu}^{bc}(x-ae_{\mu}) \left[\lambda^c(x) - \lambda^c(x-ae_{\mu}) \right] \\ & + \frac{1}{2} f^{bac} A_{\mu}^a(x+ae_{\mu}/2) \left[\lambda^c(x+ae_{\mu}) + \lambda^c(x) \right] \\ & \left. - \frac{1}{2} f^{bac} A_{\mu}^a(x-ae_{\mu}/2) \left[\lambda^c(x-ae_{\mu}) + \lambda^c(x) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.77)$$

No limite formal do contínuo, isto fornece

$$M^{(c)bc}(x,y) = -\delta(x-y) \left\{ D_{\mu}^{(c)bc} \partial_{\mu}^{(c)} - f^{bac} g_0 \left[\partial_{\mu}^{(c)} A_{\mu}^{(c)a} \right] \right\} \quad (6.78)$$

$$= -\delta(x-y) \partial_{\mu}^{(c)} D_{\mu}^{(c)bc}, \quad (6.79)$$

onde foi usada a definição (6.68) de derivada covariante.

Podemos enfim definir a derivada covariante na rede $D_{\mu}^{bc}(x)$ através da relação

$$\begin{aligned} (D_{\mu} \lambda)^b(x) = & \Gamma_{\mu}^{bc}(x) \left[\lambda^c(x+ae_{\mu}) - \lambda^c(x) \right] \\ & - \frac{1}{2} f^{bac} A_{\mu}^a(x+ae_{\mu}/2) \left[\lambda^c(x+ae_{\mu}) + \lambda^c(x) \right]. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Desta forma, a Equação (6.77) pode ser escrita como

$$\sum_{y,c} M^{bc}(x,y) \lambda^c(y) = - \sum_{\mu=1}^d \left[(D_{\mu} \lambda)^b(x) - (D_{\mu} \lambda)^b(x-ae_{\mu}) \right] \quad (6.81)$$

e, usando a Equação (5.81), obtemos o resultado

$$(M \lambda)^b(x) = -\nabla \cdot (D \lambda)^b(x). \quad (6.82)$$

No limite formal do contínuo, usando a Eq. (6.65), a derivada covariante (6.80) é dada por

$$\begin{aligned} (D_{\mu} \lambda)^b(x) = & \left[\delta^{bc} + \mathcal{O}(a^2 g_0^2) \right] \left[a \partial_{\mu}^{(c)} \lambda^c(x) + \mathcal{O}(a^2) \right] \\ & - \frac{1}{2} f^{bac} \left[a g_0 A_{\mu}^{(c)a}(x) + \mathcal{O}(a^2 g_0) \right] [2\lambda^c(x) + \mathcal{O}(a)] \end{aligned} \quad (6.83)$$

$$= a \delta^{bc} \partial_{\mu}^{(c)} \lambda^c(x) - a g_0 f^{bac} A_{\mu}^{(c)a}(x) \lambda^c(x) + \mathcal{O}(a^2 g_0). \quad (6.84)$$

Definindo

$$D_{\mu}^{bc}(x) = a D_{\mu}^{(c)bc}(x) + \mathcal{O}(a^2 g_0) , \quad (6.85)$$

a relação (6.82) fornece (no limite do contínuo)

$$(M\lambda)^b(x) = -a^2 \partial_{\mu}^{(c)} \cdot D_{\mu}^{(c)bc}(x) \lambda^c + \mathcal{O}(a^3 g_0) . \quad (6.86)$$

e

$$M^{(c)bc}(x, y) = -\delta(x-y) \partial_{\mu}^{(c)} D_{\mu}^{(c)bc} , \quad (6.87)$$

de acordo com o resultado (6.79).

É importante relembrar aqui que no contínuo a relação

$$-\partial^{(c)} \cdot D^{(c)} = -D^{(c)} \cdot \partial^{(c)} \quad (6.88)$$

é válida no calibre de Landau mas não é satisfeita no calibre covariante linear, devido à condição de calibre

$$\partial^{(c)} \cdot A^{(c)b} = \Lambda^{(c)b} . \quad (6.89)$$

Por outro lado, como foi mostrado acima, na rede podemos somar (ou subtrair) o termo nulo (6.75) e obter as duas definições [ver Equações (6.73) e (6.79)] também para o calibre covariante linear. Isto não deve surpreender, pois a matriz de Faddeev-Popov na rede é obtida usando a expansão quadrática (6.63). Claramente, esta matriz é definida a menos de termos (nulos)

$$\sum_{x,y} \sum_{b,c} \lambda^b(x) A^{bc}(x,y) \lambda^c(y) , \quad (6.90)$$

com $A^{bc}(x,y) = -A^{cb}(y,x)$, como por exemplo

$$A^{bc}(x,y) = \delta(x-y) f^{bac} \Lambda^a(x) . \quad (6.91)$$

Sob este ponto de vista, a nossa definição para o calibre covariante linear na rede difere da formulação usual no contínuo, mas isto não depende da forma do funcional escolhido, sendo simplesmente uma consequência do uso de um funcional minimizante. O entendimento completo da relação deste resultado com a teoria no contínuo é ainda um problema em aberto da

nossa formulação do calibre covariante linear na rede.

7 *Resultados Numéricos*

No capítulo anterior foi introduzido um novo funcional, baseado em uma generalização do funcional usado para o calibre de Landau, que nos permite fixar o calibre covariante linear na rede. Aqui vamos verificar a eficiência numérica do novo funcional e apresentar os primeiros resultados para os propagadores de glúons.

7.1 Resultados Numéricos para a Fixação do Calibre

O funcional minimizante $\mathcal{E}_{CL}[W, \Lambda, g]\{g(x)\}$ proposto aqui para o calibre covariante linear [ver Equação (6.13)] pode ser escrito como

$$\mathcal{E}_{CL}[W, \Lambda, g]\{g(x)\} = \mathcal{E}_L[W]\{g(x)\} + \frac{1}{dVn} \Re Tr \sum_x i g(x) \Lambda(x), \quad (7.1)$$

onde $\mathcal{E}_L[W]\{g(x)\}$ é o funcional minimizante usado para o calibre de Landau. Como evidenciado no capítulo anterior, o segundo termo na expressão acima é linear na transformação de calibre $\{g(x)\}$. Assim, é fácil adaptar para o nosso estudo os algoritmos usados para o calibre de Landau (ver Seção 5.5). De fato, nos dois casos a dependência do funcional na transformação de calibre $g(y)$ em um sítio y da rede pode ser escrita como [ver Equação (5.130)]

$$- \frac{1}{dVn} \Re Tr [g(y) K(y)], \quad (7.2)$$

onde [ver Equação (5.131)]

$$K(y) = \sum_{\mu} \left[U_{\mu}(y) g^{\dagger}(y + ae_{\mu}) + U_{\mu}^{\dagger}(y - ae_{\mu}) g^{\dagger}(y - ae_{\mu}) \right] \quad (7.3)$$

no caso do calibre de Landau e

$$K(y) = \sum_{\mu} \left[U_{\mu}(y) g^{\dagger}(y + ae_{\mu}) + U_{\mu}^{\dagger}(y - ae_{\mu}) g^{\dagger}(y - ae_{\mu}) \right] - i\Lambda(y) \quad (7.4)$$

no caso do calibre covariante linear. Sendo que os algoritmos usados para fixar o calibre de Landau na rede podem ser escritos em função da matriz $K(y)$, fica claro que os mesmos algoritmos podem ser usados também para o calibre covariante linear, simplesmente mudando a definição de $K(y)$. Ao mesmo tempo, o esquema usado para as simulações numéricas (ver Seção 5.5) fica modificado da seguinte forma¹

- fixar os parâmetros: constante de acoplamento da rede β , número de configurações N_c , número de passos de termalização N_t , **parâmetro de calibre ξ no contínuo e parâmetro de calibre $\sigma^2 = 2n\xi/\beta$ na rede, número de vezes N_{cl} que o calibre covariante linear é fixado para cada configuração termalizada;**

- escolher a configuração inicial de elos $\{U\}$;

- executar o ciclo:

```
para ( $c = 0; c < N_c; c++$ ) {
    – termalizar a configuração ( $U, \beta, N_t$ )
    – para ( $cl = 0; cl < N_{cl}; cl++$ ) {
        – gerar as funções  $\Lambda^b(x)$  usando uma distribuição gaussiana
          com média nula e variância  $\sigma^2$ 
        – fixar o calibre ( $U, g, \Lambda$ )
        – calcular os propagadores ( $U^g$ )
        – escrever os resultados no arquivo de saída
    };
};
```

- concluir o código.

¹ Para facilitar a comparação com o caso do calibre de Landau, são destacados aqui em negrito os passos adicionais a serem considerados para o calibre covariante linear.

A modificação dos códigos para passar do calibre de Landau ao calibre covariante linear é claramente mínima.

Para gerar as funções $\Lambda^b(x)$ com uma distribuição gaussiana, é usado o método de Box-Muller (59). Dadas duas variáveis aleatórias u_1 e u_2 uniformemente distribuídas no intervalo $[0, 1]$, este método permite obter duas variáveis aleatórias v_1 e v_2 (independentes) com distribuição padrão normal, i.e. com média nula e variância igual a 1, através das relações

$$v_1 = \sqrt{-2 \ln u_1} \cos(2\pi u_2) \quad (7.5)$$

$$v_2 = \sqrt{-2 \ln u_1} \sin(2\pi u_2). \quad (7.6)$$

Multiplicando os resultados v_1 e v_2 por σ obtemos enfim as variáveis aleatórias $\Lambda^b(x)$. É importante porém ressaltar que, devido às relações (6.31) e (5.81), i.e. devido à relação

$$\sum_{\mu=1}^d A_{\mu}^b(x + ae_{\mu}/2) - A_{\mu}^b(x - ae_{\mu}/2) = \Lambda^b(x), \quad (7.7)$$

temos, no caso de redes com condições de contorno periódicas (geralmente usadas nas simulações numéricas),

$$\sum_x \Lambda^b(x) = 0. \quad (7.8)$$

Sendo as funções $\Lambda^b(x)$ distribuídas normalmente com média nula, esta relação é claramente satisfeita no limite de volume infinito. Porém, no caso de redes finitas, ela deve ser imposta, após gerar as funções $\Lambda^b(x)$, removendo os possíveis modos zero (um para cada valor do índice de cor b). De fato, sem este passo, a convergência dos algoritmos para fixar o calibre fica comprometida.

Nos primeiros testes numéricos (58, 60) consideramos redes quadridimensionais para o caso SU(2) com $\beta = 4$, volumes $V = 8^4, 16^4$ e parâmetro de calibre $\xi = \sigma^2 = 0.001, 0.1$ e 0.5. [Note que para o grupo SU(2) com $\beta = 4$ temos $\sigma^2 = \xi$.] Para isto foi usado o algoritmo de sobre-relaxação estocástica (ver Seção 5.5). Na Figura 7.1 comparamos, para uma dada configuração com volume $V = 8^4$, a convergência do algoritmo para fixação de calibre para o calibre de Landau, i.e. $\xi = 0$ (linha vermelha), e para o calibre covariante linear com $\xi = 0.5$

Figura 7.1 – Convergência do algoritmo de sobre-relaxação estocástica para uma dada configuração na rede de volume $V = 8^4$ com $\beta = 4$. O gráfico apresenta o valor de $\Delta = \sum_{x,b} [\nabla \cdot A^b(x) - \Lambda^b(x)]^2$ como função do número de iterações n para $\xi = 0$ (linha vermelha) e para $\xi = 0.5$ (linha verde). Note a escala logarítmica no eixo y .

(linha verde). Podemos observar que a velocidade de convergência do algoritmo é essencialmente a mesma nos dois casos. Entretanto, é importante ressaltar que a escolha do parâmetro p usado no algoritmo de sobre-relaxação estocástica pode ser diferente nos dois casos. De fato, verificamos que a melhor taxa de convergência, para a configuração considerada, foi obtida para $p \approx 0.73$ no caso do calibre de Landau e para $p \approx 0.5$ quando $\xi = 0.5$. Um resultado semelhante foi obtido para $V = 16^4$.

Como observado na seção anterior, o funcional $\mathcal{E}_{CL}[W, \Lambda, g] \{g(x)\}$ pode ser interpretado como um hamiltoniano para um vidro de spin em presença de um campo magnético externo $\Lambda(x)$. Os resultados acima sugerem que a presença deste campo magnético não modifica a convergência dos algoritmos numéricos usados. De fato, no caso $\beta = \infty$, fixar o calibre de Landau é

equivalente a resolver a equação de Laplace (52). No mesmo limite, o calibre covariante linear corresponde então à solução da equação de Poisson. Como é bem conhecido (46), estas duas equações mostram o mesmo comportamento crítico quando resolvidas usando por exemplo o método de relaxação de Gauss-Seidel.

7.2 Problemas de Convergência Numérica

Como mostrado na seção anterior, nosso funcional (6.13) resolve em princípio o problema de fixar o calibre covariante linear na rede. Porém, do ponto de vista numérico, é importante observar que os campos de glúons $A_\mu^b(x)$ na rede são limitados, i.e.

$$\left| A_\mu^b(x) \right| \leq \text{constante}, \quad (7.9)$$

pelo menos quando é considerada a discretização usual (5.83). Ao mesmo tempo, as funções $\Lambda^b(x)$, geradas usando uma distribuição gaussiana, podem assumir qualquer valor na reta real. Assim, para $\Lambda^b(x)$ muito grande, a relação (7.7) não pode ser satisfeita na rede e qualquer algoritmo nesse caso apresentará problemas de convergência (61). Claramente, este problema não está relacionado à nossa forma de fixar o calibre covariante linear, mas é um problema comum a qualquer definição de calibre covariante linear na rede. Fica claro também que esse problema é maior quando o valor do parâmetro de calibre σ^2 é maior e para grandes volumes de rede. De fato, verificamos (58) que o algoritmo de sobre-relaxação estocástica apresenta problemas de convergência para valores pequenos de β , i.e. valores grandes de σ^2 , e quando o volume de rede é aumentado.

7.2.1 Diferentes Discretizações para o Campo de Glúons

Uma forma de contornar o problema discutido acima é fazer uso de diferentes discretizações (58, 60, 62) para o campo de glúons $A_\mu(x)$. Como explicado na Seção 2.4, não existe uma única definição de campo de glúons na rede, podemos considerar qualquer relação $A_\mu(x) = F[U_\mu(x)]$, entre $A_\mu(x)$ e as variáveis de elo $U_\mu(x)$, que forneça o limite (formal) do contínuo correto. Aqui,

além da discretização usual (5.83) vamos usar também a projeção angular (63) e a projeção estereográfica, recentemente introduzida na Referência (64).

Como mostrado na Seção 4.1.1 no caso do grupo de calibre SU(2) (considerado aqui), as matrizes podem ser escritas em termos de 4 parâmetros reais U^0, U^1, U^2 e U^3 usando a relação

$$U = U^0 1 + i \sigma_b U^b, \quad (7.10)$$

onde indicamos com 1 a matriz identidade e com σ_b as três matrizes de Pauli. A condição $\det U = 1$ implica

$$|U^0|^2 + |\vec{U}|^2 = 1. \quad (7.11)$$

Podemos também escrever $U^0 = \cos(\theta)$ e $\vec{U} = \hat{U} \sin(\theta)$ com $|\hat{U}|^2 = 1$. Claramente, temos

$$\hat{U}^b = \frac{U^b}{\sqrt{\sum_{b=1}^3 U^b}} \quad (7.12)$$

e

$$U = \cos(\theta) 1 + i \vec{\sigma} \cdot \hat{U} \sin(\theta). \quad (7.13)$$

Usando então a definição (5.83) para os campos de glúons na rede, obtemos²

$$A_\mu(x + \frac{a}{2} e_\mu) = \vec{\sigma} \cdot \hat{U}_\mu(x) \sin(\theta). \quad (7.14)$$

Ao mesmo tempo, usando a relação [ver Equação (2.96)]

$$U_\mu(x) = e^{\left[i a g_0 A_\mu^{(c)}(x + \frac{a}{2} e_\mu) \right]}, \quad (7.15)$$

entre as variáveis de elos $U_\mu(x)$ e os campos de glúons $A_\mu^{(c)}(x)$ no contínuo e os resultados acima, obtemos que o limite (formal) do contínuo $a \rightarrow 0$ corresponde ao limite de ângulos θ pequenos. Neste limite as Equações (7.14) e (7.15) fornecem

$$a g_0 A_\mu^{(c)}(x + \frac{a}{2} e_\mu) + \mathcal{O}(a^3) = \vec{\sigma} \cdot \hat{U}_\mu(x) \left[\theta - \frac{\theta^3}{6} + \mathcal{O}(\theta^5) \right] \quad (7.16)$$

² Note que para o grupo SU(2) o segundo termo na Equação (5.83) é sempre nulo, pois $\text{Tr } \sigma_b = 0$.

Na projeção angular (63), os campos de glúons na rede são definidos como

$$A_\mu(x + ae_\mu/2) = \vec{\sigma} \cdot \hat{U}_\mu(x) \arctan \left\{ \frac{\sqrt{\sum_{b=1}^3 [U_\mu^b(x)]^2}}{U_\mu^0(x)} \right\}. \quad (7.17)$$

Claramente, a função $\arctan$ fornece o ângulo θ da representação (7.13) para as variáveis de elo. Neste caso o limite (formal) do contínuo é dado por

$$ag_0 A_\mu^{(c)}(x + \frac{a}{2}e_\mu) + \mathcal{O}(a^3) = \vec{\sigma} \cdot \hat{U}_\mu(x) \left[\theta - \frac{\theta^3}{3} + \mathcal{O}(\theta^5) \right]. \quad (7.18)$$

Enfim, no caso da chamada projeção estereográfica (64), os campos de glúons na rede são definidos como³

$$A_\mu(x + ae_\mu/2) = \left[\frac{\tilde{U}_\mu(x) - \tilde{U}_\mu(x)^\dagger}{2i} \right], \quad (7.19)$$

onde

$$\tilde{U}_\mu^b(x) = \frac{2}{1 + \frac{1}{2} \text{Tr} U_\mu(x)} U_\mu^b(x). \quad (7.20)$$

Note que o denominador na relação acima pode ser escrito, usando a Equação (7.13), como $1 + \cos(\theta)$. Isto implica

$$A_\mu(x + \frac{a}{2}e_\mu) = \vec{\sigma} \cdot \hat{U}_\mu(x) \frac{\sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)}. \quad (7.21)$$

Neste caso o limite (formal) do contínuo fornece

$$ag_0 A_\mu^{(c)}(x + \frac{a}{2}e_\mu) + \mathcal{O}(a^3) = \vec{\sigma} \cdot \hat{U}_\mu(x) \left[\theta - \frac{\theta^3}{12} + \mathcal{O}(\theta^5) \right]. \quad (7.22)$$

Claramente, as três discretizações acima produzem o mesmo resultado no limite (formal) do contínuo $a \rightarrow 0$, mas com diferentes erros de discretização. Entretanto, no caso (7.14) as componentes do campo de glúons na rede são dadas por $\sin(\theta) \in [-1, 1]$, enquanto que no caso (7.17) as mesmas componentes são dadas por $\theta \in (-\pi, \pi]$. Enfim, no caso da projeção estereográfica, as componentes são em princípio ilimitadas [quando $\cos(\theta) = -1$].

³ A projeção estereográfica usa a ideia geométrica de projeção de uma superfície de uma esfera em um plano tangente a ela, utilizando-se como origem um ponto diametralmente oposto ao ponto de tangência daquele plano com a esfera. A relação (7.11) implica que o grupo $SU(2)$ possa ser considerado uma esfera em 4 dimensões. Isto não é possível para outros grupos $SU(n)$. Assim, a projeção estereográfica é definida somente para o grupo $SU(2)$.

Tabela 7.1 – Menor valor de β para o qual o algoritmo numérico de fixação de calibre mostrou convergência para o volume de rede $V = 8^4$. Os resultados estão sendo mostrados para três discretizações diferentes e para cinco valores diferentes do parâmetro de calibre ξ . Em cada caso foram usadas 5 configurações diferentes. Para os valores de β indicados, foi possível fixar o calibre nas 5 configurações consideradas.

ξ	discretização padrão	projeção angular	projeção estereográfica
0.01	2.2	2.2	2.2
0.05	2.2	2.2	2.2
0.1	2.2	2.2	2.2
0.5	2.8	2.6	2.5
1.0	—	3.0	2.5

Estas três diferentes discretizações do campo de glúons foram testadas (58, 60, 62) para o volume de rede $V = 8^4$, com parâmetros de calibre $\xi = 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1.0$ e para acoplamentos de rede $\beta = 2.2, 2.3, \dots, 2.9, 3.0$. Neste caso foi usado o chamado algoritmo de Cornell (ver Seção 5.5). Os resultados na Tabela 7.1 claramente mostram que a projeção angular representa uma melhoria comparada com a discretização usual, e que os melhores resultados são obtidos com a projeção estereográfica, que permite simular valores levemente maiores de ξ para um dado volume da rede V e acoplamento rede β em comparação com os outros dois casos. Em particular, usando a projeção estereográfica, foi possível considerar o valor $\xi = 1$ (calibre de Feynman) para $\beta \geq 2.5$. Note que $\xi = 1$ e $\beta = 2.5$ fornecem um valor $\sigma^2 = 1.6$ para o parâmetro de calibre na rede.

7.2.2 O Grupo de Calibre SU(n) para n Grande

Na Seção 6.3 foi mostrado que, para obter o limite correto do contínuo no caso do grupo de calibre SU(n), as funções $\Lambda^b(x)$ são geradas na rede usando uma distribuição gaussiana com largura $\sigma = \sqrt{2n\xi/\beta}$, ao invés de $\sqrt{\xi}$. Assim, para um dado valor de ξ podemos obter um valor suficientemente pequeno para σ^2 considerando grandes valores para a constante de acoplamento de rede β . Entretanto, se β for muito grande, o volume físico da rede será muito pequeno (para um determinado tamanho de rede) e será impossível estudar o comportamento

Tabela 7.2 – Valores para o acoplamento de rede β considerados para os grupos de calibre $SU(2)$, $SU(3)$ e $SU(4)$.

n	β_1	β_2	β_3	β_4
2	3.0	2.485	2.295	2.44
3	6.75	6.67	6.07	5.99
4	12.0	12.59	11.43	10.97

infra-vermelho das funções de Green.⁴ De fato, para um tamanho de rede L em unidades físicas, o menor momento não-nulo na rede é da ordem de $p_{min} \approx 2\pi/L$. Por exemplo, para $\beta = 4$ e $n = 2$, como na Seção 7.1, temos $\sigma^2 = \xi$ e um espaçamento de rede muito pequeno, i.e. $a \approx 0.001$ fermi (67). Neste caso, precisamos de uma rede de cerca de 6000 sítios em cada lado para obter $L \approx 6$ fermi e $p_{min} \approx 1 \text{ fermi}^{-1} \approx 200 \text{ MeV}$. Porém, no caso do grupo $SU(3)$, é possível ter $\sigma^2 = \xi$ para $\beta = 6$ e neste caso o espaçamento de rede é dado por $a = 0.102$ fermi (68), um valor de a considerado razoável para simulações numéricas de QCD na rede. Esses resultados sugerem que a fixação do calibre covariante linear na rede deve provavelmente ficar mais simples no caso do grupo de calibre $SU(n)$ para n grande.

Para verificar essa hipótese fizemos simulações (62) para os grupos de calibre $SU(2)$, $SU(3)$ e $SU(4)$ com o parâmetro de calibre $\xi = 1$ e volumes de rede $V = 8^4, 16^4, 24^4, 32^4$ para os valores de β dados na Tabela 7.2. Esses valores correspondem, respectivamente, a um acoplamento de t'Hooft $g_0^2 n = 8/3$ (β_1), a um valor médio do traço da plaqueta em torno de 0.65 (β_2) e em torno de 0.6 (β_3) e a uma tensão de corda (em unidades de rede) da ordem de $a^2 \sigma = 0.044$ (β_4), que corresponde a um espaçamento de rede $a \approx 0.09$ fermi. Na Tabela 7.3 apresentamos, para cada par $(SU(n), V)$, os valores do acoplamento de rede β para os quais o algoritmo de fixação de calibre mostrou convergência.⁵ Como previsto, a convergência melhora quando o valor de n aumenta.

⁴ Relembramos que no calibre de Landau (em 4 dimensões) foi necessário usar um lado de rede $L \approx 13$ fermi para obter resultados de volume infinito (65, 66).

⁵ Neste caso foi usado o algoritmo usual de sobre-relaxação (ver Seção 5.5).

Tabela 7.3 – Valores de β para o qual o algoritmo numérico de fixação de calibre mostrou convergência. Resultados são apresentados para três grupos diferentes de calibre e quatro volumes diferentes de rede. Em todos os casos o parâmetro de calibre ξ foi fixado igual a 1 (calibre de Feynman). [Nos dois casos indicados com *, poucas configurações foram consideradas e mais testes precisam ser feitos.]

	8^4	16^4	24^4	32^4
SU(2)	β_1, β_2	—	—	—
SU(3)	all	β_1, β_2	β_1, β_2	β_1, β_2 *
SU(4)	all	all	all	$\beta_1, \beta_2, \beta_3$

7.3 Cálculo dos Propagadores de Glúons

Como explicado na Introdução, o comportamento das funções de Green da QCD no limite infra-vermelho deve conter informações importantes sobre os aspectos não-perturbativos da teoria, como o problema do confinamento. No caso das teorias de Yang-Mills, consideradas nas simulações numéricas desta tese, a função de Green mais simples é o propagador de glúons, i.e. a função de correlação de dois pontos

$$D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) = \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle, \quad (7.23)$$

onde $A_\mu^a(x)$ é o campo de glúons. Note que a dependência com a diferença $x-y$ é uma consequência da invariância translacional. Para garantir a validade desta relação também na rede, precisamos considerar condições de contorno periódicas nas simulações numéricas. No espaço dos momentos p os campos de glúons são definidos usando a transformada de Fourier

$$A_\mu^b(p) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_x A_\mu^b(x) e^{-2\pi i p \cdot x} \quad (7.24)$$

e a relação (7.23) pode ser escrita como

$$D_{\mu\nu}^{ab}(p) = \langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle, \quad (7.25)$$

onde a invariância translacional requer um momento total nulo no “vértice” da função de dois pontos.

No caso do calibre de Landau, o propagador apresenta somente a parte transversa $D_{T;\mu\nu}^{ab}(p)$.

Porém, para o calibre covariante linear temos

$$D_{\mu\nu}^{ab}(p) = D_{T;\mu\nu}^{ab}(p) + D_{L;\mu\nu}^{ab}(p), \quad (7.26)$$

onde $D_{L;\mu\nu}^{ab}(p)$ indica a componente longitudinal do propagador. A relação acima pode também ser escrita como [ver a Equação (5.50) com $D_T(p) = D_L(p) = 1/p^2$]

$$D_{\mu\nu}^{ab}(p) = \delta^{ab} \left[\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) D_T(p) + \xi \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} D_L(p) \right]. \quad (7.27)$$

O fator $P_{\mu\nu}^T(p) = \delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2$, já encontrado na Seção 5.1, representa o projetor usual nas componentes transversas. Claramente, temos

$$p^\mu p^\nu D_{\mu\nu}^{ab}(p) = \delta^{ab} [(p^2 - p^2) D_T(p) + \xi p^2 D_L(p)] = \delta^{ab} \xi p^2 D_L(p) \quad (7.28)$$

e podemos calcular a função $\xi D_L(p)$ usando a relação (para $p \neq 0$)

$$\xi D_L(p) = \frac{\delta^{ab}}{n^2 - 1} \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} D_{\mu\nu}^{ab}(p). \quad (7.29)$$

Uma vez obtida a função $\xi D_L(p)$, podemos também calcular

$$D_{T;\mu\nu}^{ab}(p) = D_{\mu\nu}^{ab}(p) - \delta^{ab} \xi \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} D_L(p) = \delta^{ab} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) D_T(p). \quad (7.30)$$

A função $D_T(p)$ pode então ser obtida usando, por exemplo, a relação

$$D_T(p) = \frac{\delta^{ab}}{n^2 - 1} \frac{\delta^{\mu\nu}}{d - 1} D_{T;\mu\nu}^{ab}(p) \quad (7.31)$$

no caso de momentos não nulos p . Para $p = 0$, o projetor $P_{\mu\nu}^T(p)$ é dado simplesmente por $\delta_{\mu\nu}$.

Neste caso temos

$$D_T(0) = \frac{\delta^{ab}}{n^2 - 1} \frac{\delta^{\mu\nu}}{d} D_{T;\mu\nu}^{ab}(0). \quad (7.32)$$

As relações (7.29), (7.31) e (7.32) serão usadas abaixo para o cálculo dos propagadores de glúons longitudinais e transversos. Note que em todos os casos considerados aqui o parâmetro N_{cl} , definido na Seção 7.1, foi fixado igual a 1.

Figura 7.2 – Função vestida do propagador longitudinal de glúons $p^2 D_L(p^2)$ em função do momento p (em unidades de rede) para $\beta = 4$, $V = 16^4$ and $\xi = 0.1$. O resultado esperado $p^2 D_L(p^2) = \xi$ também está indicado. Note o pequeno valor das flutuações ao redor do valor esperado ξ .

7.3.1 Cálculo do Propagador Longitudinal de Glúons

Um resultado importante no calibre covariante linear é que o propagador longitudinal de glúons $D_L(p^2)$ é dado por⁶

$$D_L(p^2) = \frac{\xi}{p^2}. \quad (7.33)$$

Este resultado é obtido também nas nossas simulações numéricas (58, 60). De fato, a grandeza $p^2 D_L(p^2)$ é constante, a menos de pequenas flutuações estatísticas, em todos os casos considerados até agora. Para $\beta = 4$, $V = 16^4$ e $\xi = 0.1$ o resultado é mostrado na Figura 7.2. A Figura 7.3 considera o valor $\xi = 0.5$. No primeiro caso, um ajuste para os dados de $D_L(p^2)$ usando a função a/p^b fornece $a = 0.0994(7)$, $b = 2.003(9)$ com um $\chi^2/dof = 0.9$. No segundo caso o

⁶ Este resultado é válido em qualquer ordem da teoria de perturbação, devido às identidades de Slavnov-Taylor.

Figura 7.3 – Função vestida do propagador longitudinal de glúons $p^2 D_L(p^2)$ em função do momento p (em unidades de rede) para $\beta = 4$, $V = 16^4$ and $\xi = 0.5$. O resultado esperado $p^2 D_L(p^2) = \xi$ também está indicado. Note o pequeno valor das flutuações ao redor do valor esperado ξ .

mesmo ajuste fornece $a = 0.502(5)$, $b = 2.01(1)$ e $\chi^2/dof = 1.1$.

É importante ressaltar que a verificação numérica da relação acima não era obtida nas formulações anteriores (34, 69) do calibre covariante linear na rede.

7.3.2 Cálculo do Propagador Transverso de Glúons

Nesta seção apresentamos os resultados preliminares (58, 60) para o propagador transversal de glúons $D_T(p^2)$ em função do momento p para diferentes valores do parâmetro de calibre ξ . As simulações foram feitas para o grupo SU(2) usando a projeção estereográfica. Foram considerados os valores $\beta = 2.2$ e 2.3 para o acoplamento de rede e os volumes $V = 8^4, 16^4$ e 24^4 (ver a Tabela 7.4 para um resumo das simulações consideradas).

Tabela 7.4 – Valores da constante de acoplamento de rede β , do volume de rede V e do parâmetro de calibre ξ considerados nas simulações. Para cada caso está indicado também o número total de configurações geradas.

β	V	ξ	num de conf.	β	V	ξ	num de conf.
2.2	8^4	0.0	500	2.3	8^4	0.0	500
2.2	8^4	0.01	500	2.3	8^4	0.01	500
2.2	8^4	0.05	500	2.3	8^4	0.05	500
2.2	8^4	0.1	500	2.3	8^4	0.1	500
2.2	8^4	0.2	500	2.3	8^4	0.3	500
2.2	8^4	0.3	500	2.3	8^4	0.5	500
2.2	8^4	0.4	500	2.3	8^4	0.6	500
2.2	8^4	0.5	542	2.3	8^4	0.7	543
2.2	16^4	0.0	400	2.3	16^4	0.0	400
2.2	16^4	0.01	400	2.3	16^4	0.01	400
2.2	16^4	0.05	400	2.3	16^4	0.05	400
2.2	16^4	0.1	400	2.3	16^4	0.1	400
				2.3	16^4	0.2	336
2.2	24^4	0.0	158	2.3	24^4	0.0	200
2.2	24^4	0.01	200	2.3	24^4	0.01	200
2.2	24^4	0.05	160	2.3	24^4	0.05	310
				2.3	24^4	0.07	59

Os resultados apresentados nas Figuras (7.4) e (7.5) mostram claramente que o propagador $D_T(p^2)$ é mais suprimido no limite infra-vermelho quando, para um volume fixo V , o parâmetro de calibre ξ aumenta. Este resultado está de acordo com a Referência (69). Ao mesmo tempo, a Figura (7.6) mostra que, como no calibre de Landau, o propagador é mais suprimido no limite infra-vermelho quando o volume de rede aumenta, para um parâmetro de calibre ξ fixo.

7.3.3 O Limite $\xi \rightarrow 0$

No contínuo, o calibre de Landau é definido usando a lagrangiana usual de Faddeev-Popov para o calibre covariante linear e considerando o limite $\xi \rightarrow 0$. Por outro lado, na rede, esse calibre foi sempre estudado sem considerar este limite, impondo diretamente a condição de calibre

$$\nabla \cdot A^b(x) = 0, \quad (7.34)$$

que é chamada de calibre de Lorenz. Como explicado na Seção 5.4, esta condição de calibre é obtida minimizando-se o funcional (5.100). Usando a nossa definição de calibre covariante linear na rede, deve ser possível estudar o calibre de Landau numericamente considerando o limite $\xi \rightarrow 0$, em analogia com a definição usada no caso contínuo. Para isto, é importante observar que, neste limite, a largura da distribuição gaussiana (6.35) vai para zero. Assim, os problemas de convergência discutidos na Seção 7.2 devem ser reduzidos ou eliminados até para grandes volumes de rede e para valores de β na região de escala (β pequenos). Ao mesmo tempo, sendo que o limite $\xi \rightarrow 0$ de uma distribuição gaussiana é uma função delta de Dirac $\delta(\Lambda)$, é claro que este limite pode ser estudado numericamente considerando diferentes aproximações da função delta.

Na Referência (70) consideramos três sequências diferentes de funções, indicadas pelo parâmetro α , que fornecem a função delta de Dirac $\delta(\Lambda)$ no limite $\alpha \rightarrow 0$, i.e.

1. a distribuição gaussiana

$$f_G(\Lambda) = \frac{e^{-\Lambda^2/(2\alpha_G^2)}}{\sqrt{2\pi\alpha_G^2}}, \quad (7.35)$$

2. a distribuição triangular

$$f_T(\Lambda) = \begin{cases} \frac{(1-\Lambda/\alpha_T)}{\alpha_T} & \text{for } \Lambda \in [0, \alpha_T] \\ \frac{(1+\Lambda/\alpha_T)}{\alpha_T} & \text{for } \Lambda \in [-\alpha_T, 0] \\ 0 & \text{for } \Lambda \notin [-\alpha_T, \alpha_T] \end{cases} \quad (7.36)$$

3. e a distribuição retangular

$$f_R(\Lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_R} & \text{for } \Lambda \in [-\alpha_R/2, \alpha_R/2] \\ 0 & \text{for } \Lambda \notin [-\alpha_R/2, \alpha_R/2] \end{cases}. \quad (7.37)$$

Note que as últimas duas distribuições são limitadas. Também, note que o valor médio de Λ^2 usando essas três distribuições é dado, respectivamente, por α_G^2 , $\alpha_T^2/6$ e $\alpha_R^2/12$. Assim, fixando

$$\alpha_G = \frac{\alpha_T}{\sqrt{6}} = \frac{\alpha_R}{\sqrt{12}} \quad (7.38)$$

obtemos três distribuições diferentes com o mesmo momento de inércia.

Na Referência (70) consideramos o caso $SU(2)$ para um volume de rede $V = 32^4$ com $\beta = 2.2$. Para o parâmetro de calibre α , usamos os valores $\alpha_G \approx 0.144338, 0.0288674$ e 0.00288674 para a distribuição gaussiana, $\alpha_T \approx 0.353553, 0.0707107$ e 0.00707107 para a distribuição triangular e $\alpha_R = 0.5, 0.1$ e 0.01 para a distribuição retangular. Note que esses valores satisfazem a relação (7.38). Ao mesmo tempo, os valores de α_G correspondem aos valores $\xi \approx 0.0114584, 4.5833 \cdot 10^{-4}$ e $4.5833 \cdot 10^{-6}$ para o parâmetro de calibre ξ no contínuo. Para comparação, foram feitas simulações também usando diretamente $\xi = 0$, i.e. impondo a condição de calibre de Lorenz (7.34). Resultados para os propagadores longitudinal $D_L(p^2)$ e transverso $D_T(p^2)$ são mostrados nas Figuras 7.7–7.10. Note que o limite $\alpha \rightarrow 0$ é obtido de forma suave e que os resultados não dependem da distribuição considerada. Em particular, nas Figuras 7.7–7.8 fica claro que o resultado teórico $D_L(p^2) = \sigma^2/p^2$, com $\sigma^2 = \alpha_G^2 = \alpha_R^2/12$, é satisfeito pelas três distribuições. Ao mesmo tempo, o valor $\sigma^2 = \alpha_G^2 \approx 0.144338^2 \approx 0.02$ (ver Figura 7.10), que corresponde ao valor $\xi \approx 0.01$, fornece resultados que já estão de acordo com o caso do calibre de Lorenz.

Figura 7.4 – Propagador transversal de glúons $D_T(p^2)$ em função do momento p (ambos em unidades físicas) para uma rede de volume $V = 8^4$, com $\beta = 2.2$ (figura acima) e $\beta = 2.3$ (figura em baixo) e $\xi = 0$ (vermelho), 0.05 (verde), 0.3 (azul) e 0.5 (roxo).

Figura 7.5 – Propagador transversal de glúons $D_T(p^2)$ em função do momento p (ambos em unidades físicas) para uma rede de volume $V = 16^4$, com $\beta = 2.2$ (figura acima) e $\beta = 2.3$ (figura em baixo) e $\xi = 0$ (vermelho), 0.05 (verde) e 0.1 (azul).

Figura 7.6 – Propagador transversal de glúons $D_T(p^2)$ em função do momento p (ambos em unidades físicas) para uma constante de acoplamento de rede $\beta = 2.2$ (figura acima) e $\beta = 2.3$ (figura em baixo) e $\xi = 0.05$ e para os volumes $V = 8^4$ (vermelho), 16^4 (verde) e 24^4 (azul).

Figura 7.7 – Função vestida do propagador longitudinal de glúons $p^2 D_L(p^2)$ em função do momento p (em unidades de rede) para $\alpha_R = 0.1$ (vermelho), $\alpha_T \approx 0.0707107$ (verde) e $\alpha_G \approx 0.0288674$ (azul). O resultado esperado $\sigma^2 = \alpha_R^2/12 \approx 0.0008333$ também está indicado. Note o pequeno valor das flutuações ao redor do valor esperado σ^2 .

Figura 7.8 – Propagador longitudinal de glúons $D_L(p^2)$ em função do momento p (ambos em unidades de rede) para $\alpha_R = 0.1$ (vermelho), $\alpha_T \approx 0.0707107$ (verde) e $\alpha_G \approx 0.0288674$ (azul). O resultado esperado $\alpha_R^2/(12p^2)$ também está indicado. Note a escala logarítmica nos dois eixos.

Figura 7.9 – Propagador transverso de glúons $D_T(p^2)$ em função do momento p (ambos em unidades de rede) para $\alpha_R = 0.1$ (vermelho), $\alpha_T \approx 0.0707107$ (verde) e $\alpha_G \approx 0.0288674$ (azul). Note a escala logarítmica nos dois eixos.

Figura 7.10 – Propagador transverso de glúons $D_T(p^2)$ em função do momento p (ambos em unidades de rede) para $\alpha_G \approx 0.144338$ (vermelho), $\alpha_G \approx 0.0288674$ (verde), $\alpha_G \approx 0.00288674$ (azul) and $\alpha_G = 0$ (roxo).

8 *Conclusões*

Nesta tese foi proposta uma nova implementação do calibre covariante linear na rede, considerando um funcional minimizante que é uma simples generalização do funcional usado no calibre de Landau. Nossa proposta resolve os problemas encontrados em formulações anteriores e garante uma boa qualidade para a fixação numérica desse calibre. Em particular, pela primeira vez, a relação $D_L(p^2)p^2/\xi \approx 1$, onde $D_L(p^2)$ é o propagador longitudinal de glúons, é verificada numericamente.

Do ponto de vista numérico, o único problema em aberto é a convergência dos algoritmos de fixação de calibre para grandes volumes de rede, quando o parâmetro de calibre ξ é grande — como no caso do calibre de Feynman, para o qual $\xi = 1$ — e para acoplamentos de rede β na região de escala. Ressaltamos que este problema não está relacionado à nossa definição de calibre covariante linear na rede, mas afeta qualquer implementação numérica desse calibre. Entretanto, foi mostrado que o uso de discretizações diferentes para o campo de glúons reduz esse problema. O problema é também menos severo para o grupo de calibre SU(3) do que para o caso SU(2), considerado na maioria das simulações aqui apresentadas. Assim, usando a projeção angular e o grupo de calibre SU(3), deve ser possível fazer simulações numéricas para o calibre covariante linear usando volumes de rede grandes, valores do acoplamento de rede β na região de escala e parâmetro de calibre $\xi \approx 1$. Isto deverá permitir no futuro o estudo do comportamento infra-vermelho das funções de Green neste calibre. Resultados para o propagador transversal de glúons $D_T(p^2)$ foram apresentados aqui no caso SU(2) usando redes relativamente pequenas e valores pequenos do parâmetro de calibre ξ .

Do ponto de vista teórico, o único problema ainda em aberto é relacionado às propriedades

da matriz de Faddeev-Popov. Como foi mostrado na Seção 6.4, na nossa definição de calibre covariante linear a relação $-\partial \cdot D = -D \cdot \partial$ é sempre satisfeita. No contínuo isto acontece somente no calibre de Landau, i.e. para $\xi = 0$. Esta diferença é devida ao uso de um funcional minimizante. Seria então importante entender como formular no contínuo um calibre covariante linear equivalente à nossa formulação na rede e também entender a relação entre esse calibre e o calibre covariante linear usual do contínuo.

Enfim, é importante ressaltar que a definição do calibre covariante linear na rede como uma generalização do caso de Landau, usando um funcional minimizante, deverá permitir também o estudo de efeitos de cópias de Gribov para o caso $\xi \neq 0$. Relembramos que existe até agora um único estudo analítico sobre esse assunto (71) para o caso de ξ pequeno. Neste limite a nossa implementação do calibre covariante linear funciona muito bem. Deverá portanto ser possível efetuar um estudo numérico para ξ pequeno e comparar os resultados obtidos com as conclusões da Referência (71). Ressaltamos que há ainda poucos resultados analíticos sobre o comportamento dos propagadores de glúons e de ghosts no calibre de Feynman no limite infra-vermelho (31, 32) e que o propagador de ghosts neste calibre nunca foi estudado numericamente. Os resultados obtidos podem ser usados também como *input* para estudos analíticos baseados nas equações de Dyson-Schwinger.

Referências

- 1 MORIYASU, K. **An elementary primer for gauge theory**. Cingapura: World Scientific, 1983. ISBN 9971950944.

- 2 YANG, C.-N. ; MILLS, R. L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. **Physical Review**, v.96, p. 191–195, Out 1954.

- 3 Le BELLAC, M. **Quantum and statistical field theory**. EUA: Oxford University Press, 1992. ISBN 0198539649.

- 4 KLAUBER, R. D. **Pedagogic aids to quantum field theory**. Disponível em: <<http://www.quantumfieldtheory.info/>>: Último acesso 09/05/2011.

- 5 FLEMING, H. **Introdução a quantização e a renormalização de teorias de campos**. Disponível em: Anais da Escola Jorge André Swieca, Partículas e Campos 1981. Publicação da Sociedade Brasileira de Física.

- 6 t' HOOFT, G. **The conceptual basis of quantum field theory**. Disponível em: <<http://www.phys.uu.nl/~thoof/lectures/basisqft.pdf>>: Último acesso 02/04/2011.

- 7 GREENSITE, J. The confinement problem in lattice gauge theory. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v.51, n. 1, p. 1–83, Fev 2003.

- 8 GROSS, D. J. Nobel lecture: the discovery of asymptotic freedom and the emergence of QCD. **Reviews of Modern Physics**, v.77, n. 3, p. 837–849, Set 2005.

- 9 GROSS, D. J. ; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. **Physical Review Letters**, v.30, n. 26, p. 1343–1346, Jun 1973.

- 10 WEGNER, F. J. Duality in generalized Ising models and phase transitions without local order parameters. **Journal of Mathematical Physics**, v.12, n. 10, p. 2259–2272, Out 1971.

- 11 WILSON, K. G. Confinement of quarks. **Physical Review D**, v.10, n. 8, p. 2445–2459, Out 1974.

- 12 CREUTZ, M. **Quarks, gluons and lattices**. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 1983. ISBN 0521244056.

13 ROTHE, H. J. **Lattice gauge theories: an introduction**. Segunda edição. Cingapura: Word Scientific, 1997. ISBN 9810237421.

14 MUNSTER, G. **Lattice gauge teory: a short primer**. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-lat/0012005>: Último acesso 10/06/2011.

15 SMIT, J. **Introduction to quantum fields on a lattice**. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0521890519.

16 CULLER, D. E. ; SINGH, J. P. ; GUPTA, A. **Parallel computer architecture: a hardware/software approach**. EUA: Morgan Kaufmann, 1999. ISBN 1558603433.

17 AOKI, S. ; BOYD, G. ; BURKHALTER, R. ; EJIRI, S. ; FUKUGITA, M. ; HASHIMOTO, S. ; IWASAKI, Y. ; KANAYA, K. ; KANEKO, T. ; KURAMASHI, Y. ; NAGAI, K. ; OKAWA, M. ; SHANAHAN, H. P. ; UKAWA, A. ; YOSHIE, T. Quenched light hadron spectrum. **Physical Review Letters**, v.84, n. 2, p. 238–241, Jan 2000.

18 KRONFELD, A. S. The weight of the world is quantum chromodynamics. **Science**, v.322, n. 5905, p. 1198–1199, Nov 2008.

19 DURR, S. ; FODOR, Z. ; FRISON, J. ; HOELBLING, C. ; HOFFMANN, R. ; KATZ, S. D. ; KRIEG, S. ; KURTH, T. ; LELLOUCH, L. ; LIPPERT, T. ; SZABO, K. K. ; VULVERT, G. Ab initio determination of light hadron masses. **Science**, v.322, n. 5905, p. 1224–1227, Nov 2008.

20 AOKI, S. ; ISHIKAWA, K.-I. ; ISHIZUKA, N. ; IZUBUCHI, T. ; KADOH, D. ; KANAYA, K. ; KURAMASHI, Y. ; NAMEKAWA, Y. ; OKAWA, M. ; TANIGUCHI, Y. ; UKAWA, A. ; UKITA, N. ; YOSHIE, T. 2+1 flavor lattice QCD toward the physical point. **Physical Reviews D**, v.79, n. 3, p. 034503, Fev 2009.

21 DAVIES, C. T. H. ; FOLLANA, E. ; GRAY, A. ; LEPAGE, G. P. ; MASON, Q. ; NOBES, M. ; SHIGEMITSU, J. ; TROTTIER, H. D. ; WINGATE, M. ; AUBIN, C. ; BERNARD, C. ; BURCH, T. ; De TAR, C. ; GOTTLIEB, S. ; GREGORY, E. B. ; HELLER, U. M. ; HETRICK, J. E. ; OSBORN, J. ; SUGAR, R. ; TOUSSAINT, D. ; Di PIERRO, M. ; El-KHADRA, A. ; KRONFELD, A. S. ; MACKENZIE, P. B. ; MENSCHER, D. ; SIMONE, J. High-precision lattice QCD confronts experiment. **Physical Review Letters**, v.92, n. 2, p. 022001, Jan 2004.

22 DAVIES, C. T. H. ; HORNBOSTEL, K. ; KENDALL, I. D. ; LEPAGE, G. P. ; McNEILE, C. ; SHIGEMITSU, J. ; TROTTIER, H. Update: accurate determinations of α_s from realistic lattice QCD. **Physical Review D**, v.78, n. 11, p. 114507, Dec 2008.

23 MALTMAN, K. ; LEINWEBER, D. ; MORAN, P. ; STERNBECK, A. Realistic lattice determination of $\alpha_s(MZ)$ revisited. **Physical Review D**, v.78, n. 11, p. 114504, Dec 2008.

- 24 SHURYAK, E. Physics of strongly coupled quark-gluon plasma. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v.62, n. 1, p. 48–101, Jan 2009.
- 25 SCHUKRAFT, J. (para a colaboração ALICE). **First Results from the ALICE experiment at the LHC**. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/arXiv:1103.3474>>: Último acesso 30/04/2011.
- 26 SWANSON, E. S. A primer on functional methods and the Schwinger-Dyson equations. **AIP Conference Proceedings**, v.1296, n. 1, p. 75–121, Nov 2010.
- 27 FADDEEV, L. D. ; POPOV, V. N. Feynman diagrams for the Yang-Mills field. **Physics Letters B**, v.25, n. 1, p. 29–30, Jul 1967.
- 28 ALKOFRER, R. ; von SMEKAL, L. The infrared behavior of QCD Green's functions: confinement, dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states. **Physics Reports**, v.353, n. 5-6, p. 281–485, Nov 2001.
- 29 AGUILAR, A. C. ; BINOSI, D. ; PAPAVALASSILIOU, J. Gluon and ghost propagators in the Landau gauge: deriving lattice results from Schwinger-Dyson equations. **Physical Review D**, v.78, n. 2, p. 025010, Jul 2008.
- 30 CUCCHIERI, A. ; MENDES, T. Numerical test of the Gribov-Zwanziger scenario in Landau gauge. **Proceedings of Science**, QCD-TNT09, p. 026, 2009.
- 31 ALKOFRER, R. ; FISCHER, C. S. ; REINHARDT, H. ; von SMEKAL, L. Infrared behaviour of gluons and ghosts in ghost-antighost symmetric gauges. **Physical Review D**, v.68, n. 4, p. 045003, Ago 2003.
- 32 AGUILAR, A. C. ; PAPAVALASSILIOU J. Infrared finite ghost propagator in the Feynman gauge. **Physical Review D**, v.77, n. 12, p. 125022, Jun 2008.
- 33 GIUSTI, L. Lattice gauge-fixing for generic covariant gauges. **Nuclear Physics B**, v.498, n. 1-2, p. 331–344, Ago 1997.
- 34 CUCCHIERI, A. ; MAAS, A. ; MENDES, T. Linear covariant gauges on the lattice. **Computer Physics Communications**, v.180, n. 2, p. 215–225, Fev 2009.
- 35 deLYRA, J. L. . **The gaussian model: an exploration into the foundations of quantum field theory**. Disponível em: <<http://latt.if.usp.br/books/tgm/>>: Último acesso 12/03/2011.
- 36 FABER, M. **QCD on the lattice and the properties of hadrons**. Disponível em: <<http://www.kph.tuwien.ac.at/element/LQCDaPH/vortrag.html>>: Último acesso 03/06/2011.

- 37 SEILER, E. ; STAMATESCU, I. O. ; ZWANZIGER, D. Monte Carlo simulation of non-compact QCD with stochastic gauge fixing. **Nuclear Physics B**, v.239, n. 1, p. 177–200, Jun 1984.

- 38 SHAKESPEARE, N. H. **Tadpole-improved SU(2) lattice gauge theory**. Tese de Doutorado: Disponível em: <<http://ir.lib.sfu.ca/bitstream/1892/8456/1/b18319233.pdf>>: Último acesso 11/03/2011.

- 39 WEISZ, P. ; WOHLERT, R. Continuum limit improved lattice action for pure Yang-Mills theory (II). **Nuclear Physics B**, v.236, n. 2, p. 397–422, Abr 1984.

- 40 MACKENZIE, R. **Path integral methods and applications**. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0004090>>: Último acesso 13/05/2011.

- 41 WILSON, K. G. The renormalization group: critical phenomena and the Kondo problem. **Reviews of Modern Physics**, v.47, n. 4, p. 773–840, Out 1975.

- 42 FISHER, M. E. Renormalization group theory : Its basis and formulation in statistical physics. **Reviews of Modern Physics**, v.70, n. 2, p. 653–681, Abr 1998.

- 43 t' HOOFT, G. Renormalization of massless Yang-Mills fields. **Nuclear Physics B**, v.33, n. 1, p. 173–199, Out 1971.

- 44 t' HOOFT, G. Renormalizable lagrangians for massive Yang-Mills fields. **Nuclear Physics B**, v.35, n. 1, p. 167–188, Dec 1971.

- 45 t' HOOFT, G. ; VELTMAN, M. J. G. Regularization and renormalization of gauge fields. **Nuclear Physics B**, v.44, n. 1, p. 189–213, Jul 1972.

- 46 SOKAL, A. D. **Monte Carlo methods in statistical mechanics: foundations and new algorithms**. Disponível em: <<http://www.stat.unc.edu/faculty/cji/Sokal.pdf>>: Último acesso 13/05/2011.

- 47 CUCCHIERI, A. ; MENDES, T. ; TRAVIESO, G. ; TAURINES, A. R. . **Parallel implementation of a lattice-gauge-theory code: studying quark confinement on PC clusters**. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-lat/0308005>>: Último acesso 05/06/2011.

- 48 CREUTZ, M. Monte Carlo study of quantized SU(2) gauge theory. **Physical Review D**, v.21, n. 8, p. 2308–2315, Abr 1980.

- 49 CABIBBO, N. ; MARINARI, E. A new method for updating SU(N) matrices in computer simulations of gauge theories. **Physics Letters B**, v.119, n. 4-6, p. 387–390, Dec 1982.

- 50 WOLFF, U. Monte Carlo errors with less errors. **Computer Physics Communications**, v.156, p. 143–153, Jan 2004.
- 51 MANDULA, J. E. The gluon propagator. **Physics Reports**, v.315, n. 1-3, p. 273–284, Jul 1999.
- 52 CUCCHIERI, A. ; MENDES, T. Critical slowing-down in SU(2) Landau-gauge-fixing algorithms at $\beta = \infty$. **Computer Physics Communications**, v.154, n. 1, p. 1–48, Jul 2003.
- 53 GRIBOV, V. N. Quantization of non-Abelian gauge theories. **Nuclear Physics B**, v.139, n. 1-2, p. 1–19, Jun-Jul 1978.
- 54 CUCCHIERI, A. Gribov copies in the minimal Landau gauge: the influence on gluon and ghost propagators. **Nuclear Physics B**, v.508, n. 1-2, p. 353–370, Dec 1997.
- 55 MARINARI, E. ; PARRINELLO, C. ; RICCI, R. Evidence for the existence of Gribov copies in Landau gauge lattice QCD. **Nuclear Physics B**, v.362, n. 1-2, p. 487–497, Set 1991.
- 56 DELL'ANTONIO, G. ; ZWANZIGER, D. Every gauge orbit passes inside the Gribov horizon. **Communications in Mathematical Physics**, v.138, n. 2, p. 291–299, Maio 1991.
- 57 GIUSTI, L. ; PACIELLO, M. L. ; PETRARCA, S. ; TAGLIENTI, B. Lattice gauge fixing for parameter dependent covariant gauges. **Physical Review D**, v.63, n. 1, p. 014501, Nov 2000.
- 58 CUCCHIERI, A. ; MENDES, T. ; SANTOS, E. M. da S. Covariant gauge on the lattice: a new implementation. **Physical Review Letters**, v.103, n. 14, p. 141602, Out 2009.
- 59 SHINZATO, T. **Box Muller Method**. Disponível em: <http://www.lmpt.univ-tours.fr/~nicolis/Licence_NEW/08-09/boxmuller.pdf>: Último acesso 30/04/2011.
- 60 CUCCHIERI, A. ; MENDES, T. ; SANTOS, E. M. da S. Simulating linear covariant gauges on the lattice: a new approach. **Proceedings of Science**, QCD-TNT09, p. 009, 2009.
- 61 RANK, J. **Thermal Screening Masses in the Standard Model of Strong and Electroweak Interactions**. Tese de Doutorado: Disponível em: <<http://www.physik.uni-bielefeld.de/theory/e6/publiframe.html>>: Último acesso 09/05/2011.
- 62 CUCCHIERI, A. ; MENDES, T. ; NAKAMURA, G. ; SANTOS, E. M. da S. Feynman gauge on the lattice: new results and perspectives. **AIP Conference Proceedings**, v.1354, p. 45–50, Maio 2011.

- 63 AMEMIYA, K. ; SUGANUMA, H. Off-diagonal gluon mass generation and infrared Abelian dominance in the maximally Abelian gauge in QCD. **Physical Review D**, v.60, n. 11, p. 114509, Nov 1999.
- 64 SMEKAL, L. von. ; MEHTA, D. ; STERNBECK, A. ; WILLIAMS, A. G. Modified lattice Landau gauge. **Proceedings of Science**, LAT2007, p. 382, 2007.
- 65 CUCCHIERI, A. ; MENDES, T. Constraints on the infrared behavior of the gluon propagator in Yang-Mills theories. **Physical Review Letters**, v.100, n. 24, p. 241601, Jun 2008.
- 66 CUCCHIERI, A. ; MENDES, T. Constraints on the IR behavior of the ghost propagator in Yang-Mills theories. **Physical Review D**, v.78, n. 9, p. 094503, Nov 2008.
- 67 BLOCH, J. C. R. ; CUCCHIERI, A. ; LANGFELD, K. ; MENDES, T. Propagators and running coupling from SU(2) lattice gauge theory. **Nuclear Physics B**, v.687, n. 1-2, p. 76–100, Maio 2004.
- 68 CUCCHIERI, A. ; MENDES, T. ; OLIVEIRA, O. ; SILVA, P. J. Just how different are SU(2) and SU(3) Landau-gauge propagators in the IR regime? **Physical Review D**, v.76, n. 11, p. 114507, Dec 2007.
- 69 GIUSTI, L. ; PACIELLO, M. L. ; PETRARCA, S. ; REBBI, C. ; TAGLIENTI, B. Results on the gluon propagator in lattice covariant gauges. **Nuclear Physics B - Proceedings Supplements**, v.94, n. 1-3, p. 805–808, Mar 2001.
- 70 CUCCHIERI, A. ; MENDES, T. ; NAKAMURA, G. ; SANTOS, E. M. da S. **Gluon Propagators in Linear Covariant Gauge**. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/arXiv:1102.5233>>: Último acesso 09/05/2011.
- 71 SOBREIRO, R. F. ; SORELLA, S. P. A study of the Gribov copies in linear covariant gauges in euclidean Yang-Mills theories. **Journal of High Energy Physics** 06, v. 2005, p. 054, Jun 2005.