IFSC

INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Universidade de São Paulo

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E INFORMÁTICA

“Shot Noise” Dependente de Spin em Sistemas com Tunelamento: Modelo Semiclássico

FERNANDO GRACIANO DE BRITO*

*Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos, como parte
dos requisitos para a obtenção do título de “Mestre em Ciências - Área:
Física Básica”.*

ORIENTADOR:
PROF. DR. JOSÉ CARLOS EGUES DE MENEZES

São Carlos
Abril - 2000

*Este trabalho teve suporte financeiro do CNPq.

Brito, Fernando Graciano de.

"Shot Noise" em Sistemas com Tunelamento: Modelo Semi-clássico/Fernando Graciano de Brito. – São Carlos, 2000.

77 p.

Dissertação (Mestrado)–Instituto de Física de São Carlos, 2000.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Egues de Menezes

1. Semicondutores magnéticos. 2. Flutuações de spin. 3. Espalhamento dependente de spin. I. Título.

IFSC**UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO****Instituto de Física de São Carlos**

Av. Dr. Carlos Botelho, 1465
CEP 13560-250 - São Carlos - SP
Brasil

Fone (016) 273-9333

Fax (016) 272-2218

**MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE
FERNANDO GRACIANO DE BRITO APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO
CARLOS, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 13 DE ABRIL DE 2000**

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. José Carlos Egues de Menezes/IFSC-USP

Prof. Dr. Guo Qiang Hai/IFSC-USP

Profa. Dra. Belita Koiller/UFRJ

E mail: wladerez@if.sc.usp.br

Agradecimentos

Não pretendo me estender muito nesta parte pois, se eu quiser ser justo nos agradecimentos, talvez gaste mais tempo do que levei para escrever esta dissertação. Contudo não posso deixar de mencionar alguns nomes que me ajudaram a escrever as páginas de mais esta vitória.

A Deus, pela presença constante em minha vida.

À Luciana,

"A ausência diminui as paixões medíocres e aumenta as grandes, assim como o vento apaga as velas, mas atiza as fogueiras."

Anônimo

"Não preciso me drogar para ser um gênio, não preciso ser um gênio para ser humano, mas preciso do seu sorriso para ser feliz."

Charles Chaplin

Ao orientador,

"O Mestre na arte da vida faz pouca distinção entre o seu trabalho e o seu lazer, entre a sua mente e o seu corpo, entre sua educação e a sua recreação, entre o seu amor e a sua religião. Ele simplesmente persegue sua visão de excelência em tudo que faz, deixando para os outros a decisão de saber se está trabalhando ou se divertindo. Ele acha que está sempre fazendo as duas coisas simultaneamente."

Texto Zen-Budista

Agradecimentos

Não pretendo me estender muito nesta parte pois, se eu quiser ser justo nos agradecimentos, talvez gaste mais tempo do que levei para escrever esta dissertação. Contudo não posso deixar de mencionar alguns nomes que me ajudaram a escrever as páginas de mais esta vitória.

À Deus, pela presença constante em minha vida.

Como não poderia deixar de ser, quero agradecer à toda minha família que sempre esteve presente, principalmente: meu pai Sidney, minha mãe Neide e meu irmão Alexandre.

Ao meu orientador, Prof. Egues, pela dedicação e paciência que teve comigo ao longo destes anos. E principalmente por acreditar em mim mais do que eu mesmo.

Ao Sr. Milton e D. Iracy por todo o tipo de ajuda. Com carinho, agradeço meu tio Valdecir pelas várias mudanças.

Aos professores do IFSC, Lidério, Onody, Rogério e Egues, pelos quais tenho uma enorme admiração. Aos professores da UNESP de Rio Claro: Dimas, Aldo, Ervino, Makoto, Rene e Lagos; em especial ao professor José Campanha (meu orientador de iniciação científica) por ter sido um grande amigo.

De Rio Claro, não poderia deixar de agradecer ao Sr. Romildo Zanelatto e sua esposa D. Darcy, pelo carinho que tiveram comigo.

Agradeço a todos aqueles que me ajudaram de forma mais direta no desenvolvimento deste trabalho, em particular: o colega de grupo Henrique (por ceder o micro e outros apoios), Zé Paulo e Marconi (pela ajuda com o Maple), Marcelinho (pela ajuda com os gráficos e transparências) e Márcio (pela ajuda com o latex).

Gostaria de agradecer de forma especial minha esposa e amiga Luciana, sempre presente em todos os momentos, principalmente nos mais difíceis.

Para finalizar, agradeço aos funcionários do IFSC, sempre dispostos a nos ajudar.

Não poderia deixar de mencionar o grande carinho que tenho por uma “filha” que muito me faz falta: Tuta.

Resumo

Neste trabalho investigamos pela primeira vez flutuações dependentes de spin em correntes eletrônicas polarizadas através de estruturas magnéticas. Nosso sistema físico consiste de uma heteroestrutura com tunelamento ressonante formada por um poço ou “ponto” quântico contendo Mn, confinado entre duas barreiras de potencial. Usamos um modelo semiclássico baseado em equações de taxa para calcular as ocupações dos estados ressonantes up e down. Estas equações são derivadas de uma equação mestra que descreve a probabilidade de ocupação dos estados de spin em um dado tempo. Funções correlação corrente-corrente são expressas em termos das funções correlação *hop-hop* (associadas à transições entre os níveis ressonantes up e down) e o *shot noise* dependente de spin é determinado em termos da matriz variância do sistema, também derivada da equação mestra. Quando consideramos um feixe polarizado e tempos distintos ($\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$), podemos obter ambas “correlações positivas” ($\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \geq 0$) e/ou “negativas” ($\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \leq 0$) no nosso modelo. A generalização e reinterpretação do modelo de ilhas nos possibilitou (i) investigar flutuações dependentes de spin em correntes polarizadas; (ii) observar aumento e atenuação do *shot noise*; (iii) verificar que processos de “spin-flip” com $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$ são relevantes na atenuação do *shot noise* e (iv) verificar que o ruído contém informações sobre o processo de “spin-flip”.

Abstract

In this work we investigate for the first time spin-dependent fluctuations in spin-polarized electronic currents through magnetic structures. Our physical model consists of a resonant-tunneling heterostructure formed by a Mn-based quantum well or “point”, confined between a double-barrier potential. We used a semiclassical model based on rate equations to calculate the occupations of the *spin-up* and *spin-down* resonant states. These equations are derived from a master equation describing the probability of occupation of the spin states at a given time. Current-current correlation functions are expressed in terms of *hop-hop* correlation functions (for hops between islands representing the up and down states) and the spin-dependent *shot noise* is determined in terms of the variance matrix of the system; also derived from the master equation. When we consider a polarized beam and distinctive times ($\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$), we can obtain both “positive correlations” ($\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \geq 0$) and “negative correlations” ($\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \leq 0$) in our model. The generalization and reinterpretation of the island model allowed us (i) to investigate spin-dependent fluctuations in spin-polarized electronic currents; (ii) to observe enhancement and suppression of shot noise; (iii) to verify that spin-flip processes with $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$ are relevant to shot-noise suppression and (iv) to verify that noise contains information about spin-flip processes.

Sumário

1	Introdução	1
2	Modelo Seqüencial para Sistemas Dependentes de Spin	12
2.1	Equações de Taxa	12
2.1.1	Solução analítica exata ($\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$)	14
2.1.2	Solução analítica aproximada $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$	18
2.2	Equação Mestra	20
2.3	Variâncias	21
2.3.1	Caso analítico exato ($\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$)	24
2.3.2	Caso exato para $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$ e $N_{\uparrow} = 1, N_{\downarrow} = 1$	25
2.3.3	Caso analítico aproximado ($\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$)	28
3	Shot Noise Dependente de Spin	32
3.1	Füll Shot Noise e Flutuações da Corrente	32
3.2	Corrente Dependente do Tempo	34
3.3	Funções Correlação	36
3.4	Shot Noise Dependente de Spin	39
4	Discussão	42
4.1	Casos Limites	42
4.2	Resultados ($\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$)	47
4.3	Validade das Aproximações	53
5	Conclusão	55
	Apêndices	57

A Cálculo Numérico das Equações de Taxa	57
B Linearização das Equações de Taxa	59
C Demonstração da Equação Mestra	63
D Dedução das Equações de Taxa	68
E Cálculo das Funções Correlação	71
Referências Bibliográficas	75

Lista de Figuras

1.1	Perfil das bandas de condução para uma dupla barreira	3
1.2	Gráficos experimentais da “potência espectral” $S(\omega) = S_i$	4
1.3	Modelo com tunelamento ressonante (coerente)	5
1.4	Gráfico do <i>shot noise</i> para o modelo de uma única ilha	6
1.5	Tunelamento ressonante em um sistema com dupla barreira	8
1.6	Modelo semiclássico do sistema de tunelamento ressonante	10
2.1	Modelo semiclássico do sistema de tunelamento ressonante	13
2.2	Comportamento de $n_{\uparrow}(t)$ e $n_{\downarrow}(t)$ para o caso exato ($\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$)	17
2.3	Evolução de $n_{\uparrow}(t)$ e $n_{\downarrow}(t)$ exatos e aproximados	19
2.4	Gráfico da variância cruzada analítica e exata	27
2.5	Gráficos da variância cruzada para $\tau_{\uparrow\downarrow}$ e $\tau_{\downarrow\uparrow}$ diferentes	31
4.1	Diagramas reproduzindo o modelo de uma única ilha.	43
4.2	Gráficos do fator de Fano para o modelo de uma única ilha	44
4.3	Diagramas no qual obtem-se atenuação adicional do <i>shot noise</i>	45
4.4	Gráfico da atenuação do <i>shot noise</i> no modelo de duas ilhas	46
4.5	Fator de Fano para a configuração de máximo espalhamento	47
4.6	Diagramas do <i>shot noise</i> normalizado pela corrente referência.	50
4.7	Gráficos do <i>shot noise</i> normalizado com a corrente de referência. . . .	51
4.8	Gráficos do fator de Fano referência para $\tau_{\uparrow\downarrow}$ e $\tau_{\downarrow\uparrow}$ diferentes.	53
4.9	Gráficos comparando a corrente média e o <i>shot noise</i>	54

Capítulo 1

Introdução

A combinação de semicondutores com materiais magnéticos em escala mesoscópica originando estruturas semicondutoras híbridas faz com que efeitos dependentes de spin e/ou graus de liberdade de spin tornem-se relevantes. Prova disso é a emergente área de eletrônica em semicondutores, denominada “eletrônica de spin” ou “spintronics” [1], [2] a qual poderá eventualmente substituir a eletrônica convencional no futuro. Na eletrônica convencional os dispositivos são baseados em efeitos decorrentes da carga do elétron. Na eletrônica de spin (spintronics) o spin do elétron (em vez da sua carga) passa a ser o principal agente responsável pelo armazenamento de informações e transporte.

Investigações teóricas e experimentais em spintronics visam além de resolver questões ainda em aberto ¹ verificar se a fabricação de dispositivos baseados nos efeitos dependentes do spin do elétron melhoram a performance dos dispositivos baseados nos semicondutores tradicionais. A área de spintronics também inclui novos campos de estudo tais como “computação quântica” e “dispositivos não-voláteis” (não-voláteis significa que a memória é mantida mesmo quando a potência do dispositivo é desligada), sendo que a computação quântica tem sido uma das áreas mais ativamente estudadas nos últimos anos [5].

Motivados pela crescente importância das pesquisas de fenômenos dependentes

¹Enormes esforços foram empregados para se conseguir a injeção de correntes polarizadas em semicondutores [3], [4].

de spin e possíveis aplicações práticas destes estudos, aqui investigamos pela primeira vez *shot noise* dependente de spin. De forma geral, flutuações ou ruído (*noise*) são variações espontâneas ou desvios aleatórios de quantidades físicas no tempo em relação a algum valor médio constante. Estas flutuações ocorrem, por exemplo, devido ao movimento térmico da matéria e a discreteza da sua estrutura. *Shot noise* é o ruído gerado por flutuações dependentes do tempo na corrente elétrica devido à discreteza da carga elétrica.

O ruído pode ser considerado como um “incômodo” ou como uma grande fonte de informações. No primeiro caso deseja-se eliminá-lo; no segundo investigá-lo. São várias as fontes de ruído, algumas passíveis de eliminação graças aos avanços tecnológicos, outras no entanto são inerentes ao sistema. Por exemplo, a freqüências muito baixas ($f \rightarrow 0$) o ruído $1/f$ se faz presente com grandes contribuições; em temperaturas diferente de zero, flutuações térmicas são uma inevitável fonte de ruído (*thermal noise*). A agitação térmica faz flutuar o número de ocupação dos estados do sistema.

Outra fonte de ruído é o *shot noise*. De modo diferente do ruído térmico, para investigar o *shot noise* temos que considerar o transporte dinâmico (corrente dependente do tempo) do sistema. Investiga-se *shot noise* com o objetivo de obter informações não contidas na corrente média do sistema.

Particularmente interessante é o estudo do *shot noise* em sistemas com tunelamento ressonante. Na Fig. 1.1 temos um poço quântico entre duas barreiras de potencial. Estas barreiras surgem devido às descontinuidades no potencial “visto” pelos elétrons de condução, originadas pela deposição de materiais diferentes na estrutura (em geral crescimento por “molecular beam epitaxy”; MBE), por exemplo GaAs intercalado com AlGaAs. Os níveis do poço são discretos. A aplicação e variação do potencial externo V faz com que as barreiras se “inclinem” possibilitando o alinhamento entre o emissor (região dopada tipo- n , doadora de elétrons) e os estados discretos do poço.

O tunelamento “ressonante” através da dupla barreira ocorre quando as energias

Figura 1.1: Perfil das bandas de condução para uma dupla barreira com tunelamento ressonante. Cada figura corresponde a um limite de voltagem aplicada: (a) voltagem zero, (b) início da ressonância, (c) ressonância e (d) fora da ressonância. As áreas hachuradas representam o “mar de Fermi” no emissor e coletor. O emissor e o coletor são regiões dopadas tipo- n . ε_F é a energia de Fermi no emissor e coletor e V a voltagem aplicada. E_0 é o nível de energia mais baixo dentro do poço.

dos elétrons do emissor coincidem com a energia de um ou mais níveis discretos do poço. Dessa forma teremos corrente começando a fluir quando E_0 atingir o nível de Fermi ε_F no emissor (Fig. 1.1(b)), indicando o início da ressonância. A corrente atinge seu valor máximo quando E_0 passa através do mar de Fermi no emissor (Fig. 1.1(c)) configurando o tunelamento ressonante e diminui quando E_0 cai abaixo da banda de condução do emissor (Fig. 1.1(d)) indicando que o nível está fora da ressonância.

Li *et al.* [9] investigaram o ruído em estruturas de dupla-barreira com tunelamento ressonante abaixo de 10 kHz. Medidas sistemáticas da densidade espectral do ruído $S(\omega)$ em três amostras com diferentes espessuras das barreiras (a 4.2 K) foram efetuadas. Na Fig. 1.2 (a) temos o “ruído” $S_i = S(\omega)$ medido por Li *et al.* em termos da voltagem V e frequência f ($\omega = 2\pi f$). O ruído normalizado ou fator de Fano $\gamma = S_i/2eI$ em função da corrente média I é mostrado na Fig. 1.2 (b). A Fig.

Figura 1.2: Gráficos da “potência espectral” $S(\omega) = S_i$ obtidos através de medidas experimentais (Li *et al.* [9]). O gráfico (a) mostra que no regime acima de 1 kHz S_i independe da frequência f e abaixo de 1 kHz há uma grande contribuição do ruído $1/f$. No gráfico (b) $S_i/2eI_{\text{norm}}$ é plotado contra I/I_{norm} (I_{norm} é um fator de normalização) na região de tunelamento ressonante. A linha contínua indica o resultado teórico para o “full shot noise” ($2eI$). No “inset” em (b), $S_i/2eI$ é plotado em termos de T_e/T_c . Para T_e/T_c da ordem de 1, o ruído é atenuado a $1/2$ do “full shot noise”.

1.2 (a) mostra que no limite $f \rightarrow 0$ o ruído $1/f$ domina o espectro de S_i , enquanto no regime entre 1kHz e 4kHz o ruído independe da frequência f . O comportamento de $S_i/2eI$ na região de tunelamento ressonante em termos de T_e/T_c está resumido no “inset” da Fig. 1.2 (b). Para as estruturas utilizadas, Li *et al.* observaram que

$S_i/2eI \approx 1$ para barreiras extremamente assimétricas e $S_i/2eI \approx 0.5$ para “barreiras simétricas”. Ou seja, o *shot noise* é atenuado para configurações aproximadamente simétricas.

Davies *et al.*[6] entre outros [7] estudaram o *shot noise* para elétrons em sistemas com tunelamento ressonante através de dupla barreira. Em [6], o *shot noise*

Figura 1.3: Modelo com tunelamento ressonante (coerente) através de dupla-barreira e o modelo semiclássico adotado para representar este sistema. N é o número máximo de elétrons na ilha central e o inteiro n é o número de elétrons em um dado instante t . A entrada e saída de elétrons na ilha são descritas pelas taxas de geração (g) e recombinação (r). τ_e e τ_c indicam a probabilidade por unidade de tempo do elétron saltar do emissor para a ilha e da ilha para o coletor, respectivamente.

foi investigado via modelo quântico ou “coerente”, o qual baseia-se na resolução da equação de Schrödinger para a determinação dos coeficientes de transmissão

através das barreiras, e via modelo semiclássico ou “seqüencial”, o qual usa uma descrição clássica baseada em equações de taxa deduzidas de uma equação mestra para representar o tunelamento dos elétrons. Os resultados encontrados para o *shot noise*, na configuração de ressonância da Fig. 1.3, usando ambos os modelos foram idênticos. A Fig. 1.3 mostra os modelos quântico e clássico utilizados na Ref.[6]. Davies *et al.* [6] mostraram que o *shot noise* em sistemas com tunelamento ressonante está diretamente relacionado à variância (*var*) do número de elétrons no nível ressonante, ou seja,

$$\hat{s}(\omega \rightarrow 0) = \frac{S}{2e\langle I \rangle} = 1 - \frac{1}{2} \frac{4\tau_e\tau_c}{(\tau_e + \tau_c)^2} = 1 - 2 \frac{\text{var}(n)}{N}. \quad (1.1)$$

A Fig. 1.4 mostra o comportamento de (1.1) plotado em termos de (τ_e/τ_c) ou dos coeficientes de transmissão (T_e/T_c) , (Fig. 3 de [6]), em que o *shot noise* é atenuado

Figura 1.4: Gráfico do *shot noise* de (1.1) (linha sólida) para o modelo de uma única ilha de Davies *et al.*[6](Fig. 3) e dados experimentais (círculos cheios) obtidos por Li *et al.*[9], plotados em termos de (τ_e/τ_c) ou dos coeficientes de transmissão (T_e/T_c) . Vemos que o *shot noise* normalizado pelo *full shot noise* é atenuado a um mínimo de 0.5, no limite onde os coeficientes de transmissão são iguais para as duas barreiras.

a um mínimo da metade do *full shot noise*, no limite onde a estrutura da Fig. 1.3 é simétrica com coeficientes de transmissão iguais para as duas barreiras.

Também utilizando um modelo de tunelamento seqüencial, Egues *et al.*[8] generalizaram o modelo de uma única ilha investigando o *shot noise* no limite de

baixas frequências em sistemas como o da Fig. 1.3 com espalhamento interno, ou seja, supondo que o elétron no nível ressonante é espalhado. Devido ao processo de espalhamento interno, verificou-se uma atenuação adicional do *shot noise* (0.45) abaixo daquela obtida em [6] (0.5).

Nesta dissertação generalizamos o modelo de duas ilhas centrais com espalhamento interno da Ref. [8] para tratar de sistemas com correntes polarizadas (correntes com spin definido). Estendemos o modelo em [8] (i) considerando dois canais injetores de spin com taxas $g_{\uparrow}$ e $g_{\downarrow}$ conectando o emissor às ilhas centrais e (ii) permitindo taxas de “espalhamento interno” distintas. No nosso modelo processos de “espalhamento interno” representará processos de “spin-flip” entre as ilhas-up e down. A inclusão do segundo canal injetor de elétrons possibilita a descrição de sistemas com correntes polarizadas. O ponto (ii) é fundamental para modelos realísticos de fenômenos dependentes de spin em semicondutores magnéticos. A taxa de transição spin-up $\rightarrow$ spin-down é na verdade muito diferente da taxa spin-down $\rightarrow$ spin-up na presença de um campo magnético externo, como mostrado em [10]. Assim, podemos investigar a corrente e o ruído polarizados em heteroestruturas semicondutoras magnéticas com tunelamento ressonante dependente de spin, por exemplo.

Nosso modelo físico consiste de um poço quântico contendo Mn confinado entre duas barreiras de potencial. Na Fig. 1.5 vemos como este tipo de sistema é representado. A voltagem aplicada pode ser escolhida de forma que apenas um nível no poço fique ressonante. Os elétrons de condução interagem com os spins do Mn (spin-5/2) (alinhados devido a aplicação do campo magnético externo) através da interação de troca *sp-d*, gerando um potencial dependente de spin. Esta interação é baseada no Hamiltoniano de troca [11]

$$H_{ex} = - \sum_{\vec{R}_j} J(\vec{r} - \vec{R}_j) \vec{S}_{\vec{R}_j} \cdot \hat{\sigma}, \quad (1.2)$$

onde $J(\vec{r} - \vec{R}_j)$ é a constante de troca descrevendo a interação entre um elétron de condução em $\vec{r}$ e os elétrons d do Mn, $\hat{\sigma}$ e $\vec{S}_{\vec{R}_j}$ são o operador de spin do elétron em $\vec{r}$ e o operador de spin do Mn em $\vec{R}_j$, respectivamente. A soma é feita considerando

Figura 1.5: Tunelamento ressonante em um sistema com dupla barreira contendo Mn. No regime $eV \gg k_B T$ os elétrons não conseguem tunelar de volta do coletor para os estados ressonantes, e dos estados ressonantes para o emissor, uma vez que o emissor funciona como um reservatório de elétrons, estando sempre cheio. Quando um campo magnético é aplicado, devido a presença de Mn no poço, o nível ressonante se desdobra em dois. Cada nível só pode aceitar elétrons com um determinado spin.

todas as posições aleatórias do manganês na subrede dos cátions. Com a hipótese de que todos os elétrons interagem com muitas impurezas do Mn, podemos fazer a aproximação de campo médio em (1.2), substituindo $\vec{S}_{\vec{R}_j}$ por $\langle \vec{S}_{\vec{R}_j} \rangle$. Com o campo magnético externo aplicado ao longo da direção de crescimento da amostra (eixo z), temos $\langle \vec{S}_{\vec{R}_j} \rangle \equiv \langle S_z \hat{z} \rangle$. Dentro da aproximação de campo médio, as componentes x e y dos spins do Mn anulam-se. Com todas estas considerações podemos escrever (1.2) em campo médio como

$$H_{ex}^{CM} = -\langle S_z \rangle \hat{\sigma}_z \sum_{\vec{R}_j} J(\vec{r} - \vec{R}_j).$$

De acordo com a igualdade acima elétrons com spin up ($\sigma_z = +1/2$) e elétrons com spin down ($\sigma_z = -1/2$) interagem de maneira diferente com os spins do Mn. Esta

é a essência da física na qual fenômenos dependentes de spin em sistemas contendo Mn se baseiam. Devido a esta diferenciada interação ocorre o desdobramento do nível ressonante dentro do poço, com o nível superior da Fig. 1.5 aceitando somente elétrons com spin up e o nível inferior elétrons com spin down, por exemplo.

No sistema da Fig. 1.5 existe a possibilidade do elétron com spin up no nível superior transicionar para o nível inferior, sofrendo inversão do seu spin (processo “spin-flip”). Um possível mecanismo para “spin-flip” é a própria interação $s-d$. A teoria que rege o processo de “spin-flip” devido à impurezas magnéticas encontra-se abordada em [11]. Acharmos conveniente descrevê-la aqui de forma sucinta, uma vez que este processo será responsável por uma atenuação adicional do *shot noise*. O processo de “spin-flip” no sistema da Fig. 1.5 ocorre, por exemplo, devido a flutuações na interação de troca a campo médio. Estas flutuações são descritas de acordo com o Hamiltoniano, $H_{flut} = H_{ex} - H_{ex}^{CM}$, onde

$$H_{flut} = - \sum_{\vec{R}_j} J(\vec{r} - \vec{R}_j) \left[(S_{z, \vec{R}_j} - \langle S_z \rangle) \hat{\sigma}_z + \frac{1}{2} (S_{\vec{R}_j}^+ \hat{\sigma}^- + S_{\vec{R}_j}^- \hat{\sigma}^+) \right]. \quad (1.3)$$

Os termos responsáveis pelo processo de “spin-flip” são aqueles fora da diagonal em (1.3), ou seja, as componentes x, y que se anulam na aproximação de campo médio. Em (1.3) estas componentes estão expressas em termos dos operadores $S^+, S^-, \hat{\sigma}^+$ e $\hat{\sigma}^-$. Os termos da diagonal não induzem o processo de inversão de spin, eles somente deslocam os níveis de energia. Assim o Hamiltoniano de “spin-flip” é

$$H_{sf} = H_{sf}^{up \rightarrow down} + H_{sf}^{down \rightarrow up} \equiv -\frac{1}{2} \sum_{\vec{R}_j} J(\vec{r} - \vec{R}_j) \left(S_{\vec{R}_j}^+ \hat{\sigma}^- + S_{\vec{R}_j}^- \hat{\sigma}^+ \right).$$

No modelo seqüencial o fluxo de elétrons através das duas barreiras é imaginado como saltos clássicos (*hops*), indicados na Fig. 1.6 pelas linhas azuis. Os dois níveis ressonantes da Fig. 1.5 são representados por duas ilhas centrais na Fig. 1.6, onde a ilha superior recebe somente elétrons com spin up e a ilha inferior elétrons com spin down. Há dois mecanismos pelo qual as ilhas podem ser ocupadas; via

Figura 1.6: Modelo semiclássico do sistema de tunelamento ressonante contendo Mn. Todas as transferências possíveis de elétrons estão indicadas pelas setas indexadas; as taxas de geração (g 's) e recombinação (r 's) são também indicadas. A ilha-up acomoda no máximo $N_{\uparrow}$ elétrons com spin up. A ilha-down pode conter no máximo $N_{\downarrow}$ elétrons com spin down. Os *inteiros* $n_{\uparrow}$ e $n_{\downarrow}$ descrevem o número de elétrons com spin up e spin down, respectivamente, em um determinado instante t .

emissor ou através do processo de “spin-flip” entre as ilhas. Todas as possíveis transições são descritas pelas respectivas taxas de geração (g 's) e recombinação (r 's), mostradas na Fig. 1.6. As taxas de geração representam a entrada de um único elétron nas ilhas, aumentando em 1 o número $N_{\uparrow}$ ou $N_{\downarrow}$; as taxas de recombinação representam a saída de um único elétron das ilhas, diminuindo em 1 o número $N_{\uparrow}$ ou $N_{\downarrow}$. Por conveniência os caminhos que o elétron pode percorrer na Fig. 1.6 estão indexados por um determinado número. Por exemplo, no caminho 1 – 3 – 6 temos a entrada de um elétron com spin up na ilha-up (canal 1). Devido o processo de “spin-flip” este elétron tem o seu spin invertido, permitindo assim sua entrada na ilha-down (canal 3). Finalmente, este elétron chega ao coletor com spin down (canal 6). Mais adiante veremos que este percurso em particular, corresponderá à situação em que o *shot noise* tem sua máxima atenuação para $\tau_{\uparrow\downarrow} < \tau_{\downarrow\uparrow}$.

O modelo da Fig. 1.6 (uma extensão do modelo de “ilhas” de [8]) possibilita tratar sistemas com correntes polarizadas. Estamos interessados no estudo do *shot noise* dependente de spin. Queremos investigar o *shot noise* quando consideramos correntes polarizadas através do sistema. Mais especificamente queremos saber qual a influência do processo de “spin-flip” (inversão de spin) na atenuação do *shot noise*. Para isso utilizamos equações de taxa para a ocupação das ilhas centrais, deduzidas da equação mestra do sistema. *Shot noise* é obtido em termos de funções correlação reduzidas corrente-corrente. Estas por sua vez são obtidas em termos das variâncias do número médio de elétrons nas ilhas. Os principais resultados obtidos neste estudo foram: i) encontramos uma supressão adicional do *shot noise* dependente de spin, ii) verificamos que a corrente média e o *shot noise* apresentam sensibilidades diferentes em relação ao processo de “spin-flip”, iii) o nosso modelo recupera resultados para o modelo de uma única ilha de Davies *et al.*[6] e para o modelo de duas ilhas com espalhamento interno (em [8] temos $\tau_i = \tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$ e um único canal ligando o emissor às ilhas) e (iv) obtemos “correlações positivas” ($\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \geq 0$) em modelos anteriores.

A organização da dissertação segue da seguinte maneira. No Capítulo 2 exploramos o modelo semiclássico discutindo de forma detalhada as principais ferramentas para o cálculo do ruído. São deduzidas e interpretadas as equações de taxa, equação mestra e variâncias. No Capítulo 3 discutimos o conceito de *shot noise* e apresentamos uma dedução aproximada do chamado *shot noise clássico* (ou *full shot noise*). Esta nos permite interpretar *shot noise* em termos da variância do número de elétrons fluindo. As funções correlação são definidas e apresentadas numa forma conveniente, que será útil na obtenção do ruído. No Capítulo 4 discutimos os resultados obtidos para o *shot noise* dependente de spin à frequência zero. Analisamos a influência do processo de “spin-flip” nestes resultados e exploramos alguns casos limites de interesse. As principais conclusões sobre o estudo do *shot noise* dependente de spin são fornecidas no Capítulo 5. Finalizamos o trabalho incluindo alguns apêndices que serão úteis ao entendimento do estudo realizado.

Capítulo 2

Modelo Seqüencial para Sistemas Dependentes de Spin

Para representarmos o sistema de tunelamento ressonante da Fig. 1.5, utilizamos o modelo seqüencial proposto por Luryi [12], em que as transições eletrônicas são imaginadas como seqüências de saltos (hops). Este modelo é válido em um regime no qual algum mecanismo de randomização de fase (em geral acoplamento elétron-fônon) está presente. O modelo semiclássico surgiu como um modelo alternativo ao quântico ou coerente proposto por Lesovik [13] e por Yurke e Kochanski [14]. Na Fig.2.1 mostramos novamente o esquema de ilhas adotado para representar as transições eletrônicas da Fig. 1.5. O número médio de ocupação nas ilhas-up e down da Fig. 2.1, no instante t , são descritos por equações de taxa clássicas (Seção 2.1). Estas equações podem ser deduzidas da equação mestra do sistema (Seção 2.2) descrevendo a evolução temporal da probabilidade de ocupação das ilhas. A flutuação da ocupação média nas ilhas é obtida através das variâncias calculadas na Seção 2.3.

2.1 Equações de Taxa

Nesta seção daremos mais detalhes do modelo adotado para representar as transições eletrônicas da Fig. 1.5. Reproduzimos novamente na Fig. 2.1, por conveniência, a Fig. 1.6 onde os dois estados ressonantes da Fig. 1.5 são agora representados por duas ilhas centrais. A ilha superior pode aceitar somente elétrons com spin

Figura 2.1: Modelo semiclássico do sistema de tunelamento ressonante contendo Mn . Todas as tranferências possíveis de elétrons estão indicadas pelas setas indexadas; as taxas de geração (g 's) e recombinação (r 's) são também indicadas. A ilha-up acomoda no máximo $N_\uparrow$ elétrons com spin up. A ilha-down pode conter no máximo $N_\downarrow$ elétrons com spin down. Os *inteiros* $n_\uparrow$ e $n_\downarrow$ descrevem o número de elétrons up e down, respectivamente, em um determinado instante t .

up enquanto que a ilha inferior elétrons com spin down. As transições eletrônicas dependentes de spin na Fig. 1.5, ou seja, aquelas através das barreiras esquerda e direita e entre os estados de spin no poço, estão associadas com os possíveis saltos (hops) conectando o emissor, o coletor e as ilhas centrais na Fig. 2.1. Inúmeras configurações podem ser estudadas através deste modelo de ilhas. Por exemplo, pode-se permitir somente a saída de elétrons up do emissor fechando-se o canal $g_\downarrow$ (canal 5). Ou permitir somente a entrada de elétrons down no coletor, fechando-se o canal $r_{c\uparrow}$ (canal 2). Outras possibilidades serão discutidas no Capítulo 4. Os canais são “fechados” tomando-se o limite do respectivo $\tau \rightarrow \infty$. Este processo de “fechar” os canais fisicamente equivale a tirar o nível ressonante da ressonância. Fazemos isto variando o potencial ou o campo magnético no sistema da Fig. 1.5, de modo a

impedir que os elétrons possam tunelar elasticamente para dentro dos níveis ressonantes ou dos níveis ressonantes para o coletor. Os τ 's que aparecem nas taxas de geração (g 's) e recombinação (r 's) da Fig. 2.1 indicam a probabilidade do elétron tunelar por unidade de tempo. Por exemplo, a probabilidade por unidade de tempo que um elétron up no emissor salte para dentro do nível up não ocupado no poço é representada por $\tau_{e\uparrow}$, e pode ser calculada através da “regra de ouro” de Fermi. Os fatores $(N_{\uparrow} - n_{\uparrow})$, $(N_{\downarrow} - n_{\downarrow})$ e $(n_{\uparrow})$, $(n_{\downarrow})$ que aparecem nas taxas de geração e recombinação, respectivamente, decorrem dos fatores de Fermi.

As equações de taxa descrevem a variação do número médio de elétrons nas ilhas em um determinado instante t e podem ser escritas diretamente da Fig. 2.1; posteriormente estas serão deduzidas a partir da equação mestra. Por exemplo, a variação no tempo do número de elétrons na ilha-up é dada pelo número de elétrons que entram e saem desta ilha. A entrada de elétrons up na ilha-up é governada pelas taxas $g_{\uparrow}$ e g_i e a saída pelas taxas $r_{e\uparrow}$ e r_i . Para a entrada e saída de elétrons down da ilha-down o raciocínio é análogo. Dessa forma temos as seguintes equações de taxa

$$\frac{d}{dt}n_{\uparrow}(t) = \frac{N_{\uparrow} - n_{\uparrow}(t)}{\tau_{e\uparrow}} - \frac{n_{\uparrow}(t)}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{n_{\downarrow}(t)[N_{\uparrow} - n_{\uparrow}(t)]}{\tau_{\downarrow\uparrow}} - \frac{n_{\uparrow}(t)[N_{\downarrow} - n_{\downarrow}(t)]}{\tau_{\uparrow\downarrow}} \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt}n_{\downarrow}(t) = \frac{N_{\downarrow} - n_{\downarrow}(t)}{\tau_{e\downarrow}} - \frac{n_{\downarrow}(t)}{\tau_{e\downarrow}} - \frac{n_{\downarrow}(t)[N_{\uparrow} - n_{\uparrow}(t)]}{\tau_{\downarrow\uparrow}} + \frac{n_{\uparrow}(t)[N_{\downarrow} - n_{\downarrow}(t)]}{\tau_{\uparrow\downarrow}}. \quad (2.2)$$

A solução analítica das equações (2.1) e (2.2) apresenta uma certa dificuldade, pois temos um termo não linear $n_{\uparrow}(t)n_{\downarrow}(t)$ em cada equação. Quando $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$, os termos não lineares se cancelam e as soluções analíticas tornam-se possíveis. A seguir estudamos a solução analítica ($\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$), o caso linearizado com $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$ e a solução numérica exata com $\tau_{\uparrow\downarrow}$ e $\tau_{\downarrow\uparrow}$ quaisquer.

2.1.1 Solução analítica exata ($\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$)

Aqui consideramos o regime onde $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = \tau_i$. Neste regime nosso modelo torna-se exato (no sentido de obtermos soluções analíticas exatas para as equações de taxa) como o modelo estudado em [8]; a única diferença é que no nosso caso temos dois canais conectando o emissor às ilhas centrais. Determinamos inicialmente a solução de estado estacionário $\langle n_{\uparrow} \rangle$ e $\langle n_{\downarrow} \rangle$ fazendo-se $\frac{d}{dt}n_{\uparrow}(t) = \frac{d}{dt}n_{\downarrow}(t) = 0$ em (2.1) e (2.2),

$$0 = \frac{N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle}{\tau_{e\uparrow}} - \frac{\langle n_{\uparrow} \rangle}{\tau_{c\uparrow}} + \frac{\langle n_{\downarrow} \rangle [N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle]}{\tau_i} - \frac{\langle n_{\uparrow} \rangle [N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle]}{\tau_i}, \quad (2.3)$$

$$0 = \frac{N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle}{\tau_{e\downarrow}} - \frac{\langle n_{\downarrow} \rangle}{\tau_{c\downarrow}} - \frac{\langle n_{\downarrow} \rangle [N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle]}{\tau_i} + \frac{\langle n_{\uparrow} \rangle [N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle]}{\tau_i}. \quad (2.4)$$

As soluções de (2.3) e (2.4) são

$$\langle n_{\uparrow} \rangle = \frac{\tau_{c\uparrow} N_{\uparrow} (\tau_{c\downarrow} \tau_i + \tau_{e\downarrow} \tau_i + \tau_{e\downarrow} \tau_{c\downarrow} N_{\uparrow} + \tau_{e\uparrow} \tau_{c\downarrow} N_{\downarrow})}{(\tau_{c\uparrow} + \tau_{e\uparrow}) (\tau_{c\downarrow} \tau_i + \tau_{e\downarrow} \tau_i + \tau_{e\downarrow} \tau_{c\downarrow} N_{\uparrow}) + \tau_{c\uparrow} \tau_{e\uparrow} N_{\downarrow} (\tau_{c\downarrow} + \tau_{e\downarrow})}, \quad (2.5)$$

$$\langle n_{\downarrow} \rangle = \frac{\tau_{c\downarrow} N_{\downarrow} (\tau_{c\uparrow} \tau_i + \tau_{e\uparrow} \tau_i + \tau_{e\downarrow} \tau_{c\uparrow} N_{\uparrow} + \tau_{e\uparrow} \tau_{c\uparrow} N_{\downarrow})}{(\tau_{c\uparrow} + \tau_{e\uparrow}) (\tau_{c\downarrow} \tau_i + \tau_{e\downarrow} \tau_i + \tau_{e\downarrow} \tau_{c\downarrow} N_{\uparrow}) + \tau_{c\uparrow} \tau_{e\uparrow} N_{\downarrow} (\tau_{c\downarrow} + \tau_{e\downarrow})}. \quad (2.6)$$

As equações (2.1) e (2.2) podem ser reescritas de uma forma mais simples em termos das variâncias $\delta n_{\uparrow}(t)$ e $\delta n_{\downarrow}(t)$,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta n_{\uparrow}(t) \\ \delta n_{\downarrow}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \delta n_{\uparrow}(t) \\ \delta n_{\downarrow}(t) \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} \delta n_{\uparrow}(t) &= n_{\uparrow}(t) - \langle n_{\uparrow} \rangle, \\ \delta n_{\downarrow}(t) &= n_{\downarrow}(t) - \langle n_{\downarrow} \rangle, \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_{e\uparrow}} - \frac{1}{\tau_{c\uparrow}} - \frac{N_{\downarrow}}{\tau_i} & \frac{N_{\uparrow}}{\tau_i} \\ \frac{N_{\downarrow}}{\tau_i} & -\frac{1}{\tau_{e\downarrow}} - \frac{1}{\tau_{c\downarrow}} - \frac{N_{\uparrow}}{\tau_i} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Resolvendo-se as equações (2.1) e (2.2) sujeitas às condições iniciais $n_{\uparrow}(0) = N$ e $n_{\downarrow}(0) = M$ obtemos

$$n_{\uparrow}(t) = \langle n_{\uparrow} \rangle + (a_{+} N + b_{+} M + c_{+}) e^{\lambda_{+} t} + (a_{-} N - b_{+} M + c_{-}) e^{\lambda_{-} t} \quad (2.8)$$

$$n_{\downarrow}(t) = \langle n_{\downarrow} \rangle + \frac{(\lambda_{+} - P_{11})}{P_{12}} (a_{+} N + b_{+} M + c_{+}) e^{\lambda_{+} t} + \frac{(\lambda_{-} - P_{11})}{P_{12}} (a_{-} N - b_{+} M + c_{-}) e^{\lambda_{-} t}, \quad (2.9)$$

em que

$$\lambda_{\pm} = \frac{P_{11} + P_{22}}{2} \pm \frac{\sqrt{(P_{11} + P_{22})^2 - 4 \det \mathbf{P}}}{2},$$

são os dois autovalores da matriz $\mathbf{P}$. As quantidades $a_{\pm}$, b_{+} e $c_{\pm}$ são definidas como

$$\begin{aligned} a_{+} &= \frac{\lambda_{-} - P_{11}}{\lambda_{-} - \lambda_{+}}, \\ b_{+} &= -\frac{P_{12}}{\lambda_{-} - \lambda_{+}}, \\ c_{+} &= -b_{+}\langle n_{\downarrow} \rangle - a_{+}\langle n_{\uparrow} \rangle, \\ 1 &= a_{-} + a_{+}, \\ -\langle n_{\uparrow} \rangle &= c_{-} + c_{+}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Como $\det \mathbf{P} > 0$ e $P_{11} + P_{22} < 0$, podemos verificar que os dois autovalores $\lambda_{\pm}$ são negativos. Para $t \rightarrow \infty$ nas equações (2.8) e (2.9), $n_{\uparrow}(t) \rightarrow \langle n_{\uparrow} \rangle$ e $n_{\downarrow}(t) \rightarrow \langle n_{\downarrow} \rangle$. Isto significa que depois de uma flutuação aleatória dos elétrons em qualquer uma das duas ilhas, o sistema tende a relaxar para o regime de estado estacionário.

A Fig. 2.2 mostra a evolução temporal de $n_{\uparrow}(t)$ e $n_{\downarrow}(t)$. Quando colocamos todos os τ 's iguais a 1 nas equações (2.8) e (2.9), as curvas para $n_{\uparrow}(t)$ e $n_{\downarrow}(t)$ coincidem (curva azul). Para $\tau_{e\downarrow} = \tau_{c\downarrow} \rightarrow \infty$ (colocar τ muito grande significa impedir que o elétron faça aquela respectiva transição) obtemos curvas distintas para $n_{\uparrow}(t)$ (curva verde) e $n_{\downarrow}(t)$ (curva vermelha). O diferente comportamento das curvas verde e vermelha evidencia o fato do número médio de elétrons $n_{\uparrow}(t)$ na ilha-up, em um instante t , ser inferior ao número médio de elétrons $n_{\downarrow}(t)$ na ilha-down, neste mesmo instante t . Quando o regime de estado estacionário é atingido as duas ilhas possuem o mesmo número médio de elétrons. As curvas azul, vermelha e verde atingem o regime de estado estacionário no mesmo valor, 0.5. Isto é uma característica da configuração do modelo de uma única ilha. Ressaltamos que estes comportamentos se alteram quando $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$. Desde que a ilha para onde o elétron é espalhado não esteja conectada ao coletor, o processo de 'spin-flip' não tem influência no valor do estado estacionário alcançado (aqui generalizamos os resultados da ref. [8], incluindo dois canais injetores de elétrons). Por outro lado vemos que para a configuração onde $\tau_{e\downarrow} = \tau_{c\uparrow} \rightarrow \infty$ e os demais iguais a 1, $n_{\uparrow}(t)$ (curva laranja) e $n_{\downarrow}(t)$

Figura 2.2: Comportamento de $n_{\uparrow}(t)$ e $n_{\downarrow}(t)$ para o caso exato $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$. Neste caso particular adotamos $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 1$ e como condição inicial $N = M = 1$. Para os tempos de transição τ 's todos iguais a 1 nas equações (2.8) e (2.9) as curvas para $n_{\uparrow}(t)$ e $n_{\downarrow}(t)$ coincidem (curva azul). As curvas verde e vermelha são construídas com todos os τ 's iguais a 1 exceto $\tau_{e\downarrow} = \tau_{c\downarrow} \rightarrow \infty$. Para todos os (τ 's) iguais a 1 exceto $\tau_{e\downarrow} = \tau_{c\uparrow} \rightarrow \infty$, obtemos as curvas laranja e roxa para $n_{\uparrow}(t)$ e $n_{\downarrow}(t)$, respectivamente. Observe que as curvas azul, verde e vermelha atingem o estado estacionário no mesmo valor, 0.5. As curvas rosa e laranja atinentem o regime de estado estacionário em diferentes valores, 0.33 e 0.66, respectivamente.

(curva rosa) atingem o regime de estado estacionário em diferentes valores. Nesta configuração, o processo de “spin-flip” altera o valor do estado estacionário obtido. Estas curvas nos dizem que o número médio de elétrons up na ilha-up é sempre maior que o número médio de elétrons down na ilha-down. Isto pode ser entendido notando que a probabilidade da ilha-up estar ocupada é maior que a probabilidade da ilha-down estar ocupada, devido o elétron da ilha-up ter apenas um canal de saída (canal 3 da Fig. 1.6) enquanto o elétron da ilha-down tem duas opções de saída (canais 4 e 6).

Uma vez obtidas as soluções de estado estacionário (2.5) e (2.6), a corrente média

$\langle I \rangle$ do sistema pode ser descrita como

$$\frac{\langle I \rangle}{e} = \frac{N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle}{\tau_{e\downarrow}} = \frac{\langle n_{\uparrow} \rangle}{\tau_{c\uparrow}} + \frac{\langle n_{\downarrow} \rangle}{\tau_{c\downarrow}}, \quad (2.11)$$

o que equivale a

$$\langle I \rangle = \langle I_e^{\uparrow} \rangle + \langle I_e^{\downarrow} \rangle = \langle I_c^{\uparrow} \rangle + \langle I_c^{\downarrow} \rangle. \quad (2.12)$$

A equação (2.11) nos diz que $\langle I \rangle$ é formada por correntes polarizadas. Ela também expressa a conservação de corrente através do sistema.

2.1.2 Solução analítica aproximada $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$

Para $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$ as equações de taxa (2.1) e (2.2) são não lineares e não podem ser resolvidas analiticamente. Este problema pode ser solucionado resolvendo-se numericamente as equações de taxa (ver Apêndice A). Contudo, uma solução analítica das equações de taxa se faz necessário, pois será de grande utilidade na determinação das funções correlação, ingrediente básico no cálculo analítico do shot noise. Para obtermos as soluções analíticas de (2.1) e (2.2) quando $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$, *linearizamos*¹ as equações de taxa, ou seja, expandimos $n_{\uparrow}(t)$ e $n_{\downarrow}(t)$ em torno dos seus valores médios $\langle n_{\uparrow} \rangle$ e $\langle n_{\downarrow} \rangle$, obtidos *exatamente* através de (2.1) e (2.2) para $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$ (ver Apêndice B). Como pode ser verificado, a solução analítica linearizada das equações de taxa (pois consideramos $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$) é semelhante às equações (2.8) e (2.9), mas com $\langle n_{\uparrow} \rangle$ e $\langle n_{\downarrow} \rangle$ obtidos para $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$ (Apêndice B). Também continuam válidas as relações (2.10). São diferentes apenas os elementos da matriz $\mathbf{P}$, que agora é escrita como

$$\mathbf{P}_L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_{e\uparrow}} - \frac{1}{\tau_{c\uparrow}} - \frac{N_{\downarrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}} + \left(\frac{1}{\tau_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}}\right)\langle n_{\downarrow} \rangle & \frac{N_{\uparrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}} + \left(\frac{1}{\tau_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}}\right)\langle n_{\uparrow} \rangle \\ \frac{N_{\downarrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}} + \left(\frac{1}{\tau_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}}\right)\langle n_{\downarrow} \rangle & -\frac{1}{\tau_{e\downarrow}} - \frac{1}{\tau_{c\downarrow}} - \frac{N_{\uparrow}}{\tau_{\downarrow\uparrow}} + \left(\frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}} - \frac{1}{\tau_{\uparrow\downarrow}}\right)\langle n_{\uparrow} \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Note que fazendo $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$ em (2.13), recuperamos a matriz $\mathbf{P}$ de (2.7) para o caso linear. A evolução temporal de $n_{\uparrow}(t)$ e $n_{\downarrow}(t)$, calculados através da linearização das equações de taxa, é mostrada na Fig. 2.3. As curvas contínuas correspondem às

¹Para dedução detalhada do procedimento de linearização, ver Apêndice B.

Figura 2.3: Evolução de $n_{\uparrow}(t)$ e $n_{\downarrow}(t)$, calculados através da linearização das equações de taxa (curva contínua) e numericamente (curva descontínua). Em todas as curvas adotamos $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 1$, $\tau_{\uparrow\downarrow} = 1$, $\tau_{\downarrow\uparrow} = 10$ e demais τ 's (ver Fig. 2.1) iguais a 1. As várias curvas foram obtidas para diferentes condições iniciais. As quatro curvas para $n_{\uparrow}(t)$ (duas com $N = 1$ e duas com $N = 0$) atingem o regime de estado estacionário no mesmo valor, embora tenham condições iniciais diferentes. O mesmo acontecendo com as quatro curvas para $n_{\downarrow}(t)$. Para todas as situações vemos que o resultado analítico aproximado está em excelente acordo com o numérico.

equações de taxa linearizadas (2.8) e (2.9) com a matriz $\mathbf{P}_L$ da Eq. (2.13) e $\langle n_{\uparrow} \rangle$ e $\langle n_{\downarrow} \rangle$ exatos calculados para $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$. As curvas descontínuas correspondem à solução numérica das equações de taxa. Adotamos $\tau_{\uparrow\downarrow} = 1$, $\tau_{\downarrow\uparrow} = 10$ e demais τ 's (ver Fig. 2.1) iguais a 1. Na Fig. 2.3 temos quatro curvas para $n_{\uparrow}(t)$ e quatro para $n_{\downarrow}(t)$. Estas curvas partem de condições iniciais diferentes. Estamos considerando que cada ilha pode conter no máximo 1 elétron ($N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 1$). Sendo assim temos quatro configurações possíveis em $t = 0$. As ilhas-up e down podem estar com 1 elétron em $t = 0$ ($N = M = 1$); podem estar vazias ($N = M = 0$); a ilha-up pode estar com 1 elétron e a ilha-down vazia ($N = 1$ e $M = 0$); ilha-up vazia e

ilha-down com 1 elétron ($N = 0$ e $M = 1$). Embora as curvas para $n_{\uparrow}(t)$ e $n_{\downarrow}(t)$ tenham condições iniciais diferentes, cada conjunto atinge o mesmo valor no regime de estado estacionário, $n_{\uparrow}(t) \rightarrow \langle n_{\uparrow} \rangle \cong 0.43$ e $n_{\downarrow}(t) \rightarrow \langle n_{\downarrow} \rangle \cong 0.57$; isto é razoável uma vez que $\tau_{\uparrow\downarrow} < \tau_{\downarrow\uparrow}$. Na Fig. 2.3 cada curva analítica aproximada (curva contínua) para $n_{\uparrow}(t)$ e $n_{\downarrow}(t)$ tem a sua correspondente numérica exata (curva descontínua). Note a excelente concordância entre as curvas aproximadas e exatas. Este acordo se mantém mesmo para $\tau_{\uparrow\downarrow} \leq \tau_{\downarrow\uparrow}$ ou $\tau_{\uparrow\downarrow} \geq \tau_{\downarrow\uparrow}$.

2.2 Equação Mestra

A equação mestra descreve a variação no tempo da probabilidade de encontrarmos $n_{\uparrow}$ elétrons na ilha-up e $n_{\downarrow}$ elétrons na ilha-down, ou seja, $p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t)$. A equação mestra é importante porque a partir dela derivamos as equações de taxa e variâncias. Todas estas grandezas por sua vez serão úteis na obtenção da expressão final do ruído. Levando em conta todos os possíveis processos pelos quais os elétrons podem entrar e sair das ilhas pode-se mostrar que (Apêndice C)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) = & g_{e\uparrow}(n_{\uparrow} - 1) p(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow}, t) + r_{c\uparrow}(n_{\uparrow} + 1) p(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow}, t) \\ & + g_i(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow} + 1) p(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow} + 1, t) + r_i(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow} - 1) p(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow} - 1, t) \\ & + g_{e\downarrow}(n_{\downarrow} - 1) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} - 1, t) + r_{c\downarrow}(n_{\downarrow} + 1) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} + 1, t) \\ & - [g_{e\uparrow}(n_{\uparrow}) + g_{e\downarrow}(n_{\downarrow}) + g_i(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) + r_i(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) + r_{c\uparrow}(n_{\uparrow}) + r_{c\downarrow}(n_{\downarrow})] p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Note que a nossa equação mestra conserva o número de partículas nas ilhas, mesmo na presença do mecanismo de “spin-flip”. Os termos de “geração” e “recombinação” satisfazem

$$r_{c\uparrow}(0) = 0, \quad r_{c\downarrow}(0) = 0, \quad r_i(0, n_{\downarrow}) = 0, \quad g_i(n_{\uparrow}, 0) = 0 \quad (2.15)$$

$$g_{e\uparrow}(N_{\uparrow}) = 0, \quad g_{e\downarrow}(N_{\downarrow}) = 0, \quad r_i(n_{\uparrow}, N_{\downarrow}) = 0, \quad g_i(N_{\uparrow}, n_{\downarrow}) = 0. \quad (2.16)$$

As condições acima proíbem a saída de elétrons de uma ilha vazia e a entrada de elétrons dentro de uma ilha cheia. Esta última satisfaz o “princípio da exclusão de Pauli”.

O número médio de partículas nas respectivas ilhas em um dado instante de

tempo t é definido por

$$n_{\uparrow}(t) = \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) \quad (2.17)$$

$$n_{\downarrow}(t) = \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\downarrow} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t), \quad (2.18)$$

A partir das definições (2.17) e (2.18) podemos deduzir as equações de taxa (2.1) e (2.2). Por exemplo, para obtermos (2.1) multiplicamos ambos os lados de (2.14) por $n_{\uparrow}$ e somamos sobre $n_{\uparrow}$ e $n_{\downarrow}$. Em seguida substituímos as taxas de “geração” e “recombinação” por suas respectivas expressões, definidas na Fig. 2.1. Um pouco de álgebra mais a definição (2.17) leva-nos à (2.1). O mesmo procedimento é aplicado para obter (2.2). Os passos para a dedução detalhada das equações de taxa a partir da equação mestra encontram-se no Apêndice D. Como veremos na próxima seção, a variância do número de elétrons nas ilhas-up e down são obtidas de forma semelhante às equações de taxa.

2.3 Variâncias

Como veremos o ruído em sistemas de tunelamento ressonante está diretamente relacionado à variância (no estado estacionário) do número de elétrons nos estados ressonantes. Sendo assim, estamos interessados no cálculo das variâncias $\langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle$, $\langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle$ e $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle = \langle \delta n_{\downarrow} \delta n_{\uparrow} \rangle$ da distribuição de estado estacionário $p_0(n_{\uparrow}, n_{\downarrow})$, ou seja, estamos interessados nas flutuações de $n_{\uparrow}$ e $n_{\downarrow}$ em relação aos seus respectivos valores médios $\langle n_{\uparrow} \rangle$ e $\langle n_{\downarrow} \rangle$, obtidos no regime de estado estacionário. Na dedução das variâncias adotaremos o procedimento do Apêndice A em [8].

Multiplicando (2.14) por $n_{\uparrow} n_{\downarrow}$ e somando sobre $n_{\uparrow}$ e $n_{\downarrow}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle n_{\uparrow}(t) n_{\downarrow}(t) \rangle = & \left\langle n_{\downarrow}(t) \left[\frac{N_{\uparrow} - n_{\uparrow}(t)}{\tau_{e\uparrow}} - \frac{n_{\uparrow}(t)}{\tau_{c\uparrow}} \right] \right\rangle + \\
& + \left\langle [n_{\downarrow}(t) - n_{\uparrow}(t) - 1] n_{\downarrow}(t) \left(\frac{N_{\uparrow} - n_{\uparrow}(t)}{\tau_{\downarrow\uparrow}} \right) \right\rangle + \\
& + \left\langle [n_{\uparrow}(t) - n_{\downarrow}(t) - 1] n_{\uparrow}(t) \left(\frac{N_{\downarrow} - n_{\downarrow}(t)}{\tau_{\uparrow\downarrow}} \right) \right\rangle + \\
& + \left\langle n_{\uparrow}(t) \left[\left(\frac{N_{\downarrow} - n_{\downarrow}(t)}{\tau_{e\downarrow}} \right) - \frac{n_{\downarrow}(t)}{\tau_{c\downarrow}} \right] \right\rangle,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

onde usamos a definição

$$\langle n_{\uparrow}(t) n_{\downarrow}(t) \rangle = \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} n_{\downarrow} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t). \tag{2.20}$$

Expressões análogas a (2.19) podem ser escritas para $\frac{d}{dt} \langle n_{\uparrow}^2(t) \rangle$ e $\frac{d}{dt} \langle n_{\downarrow}^2(t) \rangle$. Para isto multiplicamos (2.14) por $n_{\uparrow}$ e $n_{\downarrow}$, respectivamente, somamos sobre $n_{\uparrow}$ e $n_{\downarrow}$, e definimos

$$\langle n_{\uparrow}^2(t) \rangle = \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow}^2 p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) \tag{2.21}$$

e

$$\langle n_{\downarrow}^2(t) \rangle = \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\downarrow}^2 p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t). \tag{2.22}$$

Como estamos interessados no cálculo das variâncias da distribuição de estado estacionário tomamos o limite $t \rightarrow \infty$ [regime de estado estacionário: $p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) \rightarrow p_0(n_{\uparrow}, n_{\downarrow})$]. A derivada temporal do lado esquerdo de (2.19) se anula e $\langle n_{\uparrow}(t) n_{\downarrow}(t) \rangle \rightarrow \langle n_{\uparrow} n_{\downarrow} \rangle$. Analogamente $\langle n_{\uparrow}^2(t) \rangle \rightarrow \langle n_{\uparrow}^2 \rangle$ e $\langle n_{\downarrow}^2(t) \rangle \rightarrow \langle n_{\downarrow}^2 \rangle$. Neste limite, as três equações para $\langle n_{\uparrow}^2(t) \rangle$, $\langle n_{\downarrow}^2(t) \rangle$ e $\langle n_{\uparrow}(t) n_{\downarrow}(t) \rangle$ se reduzem a

$$\begin{aligned}
0 = & \left\langle (1 + 2n_{\uparrow}) \frac{(N_{\uparrow} - n_{\uparrow})}{\tau_{e\uparrow}} \right\rangle + \\
& + \left\langle (1 - 2n_{\uparrow}) \frac{n_{\uparrow}}{\tau_{c\uparrow}} \right\rangle + \\
& + \left\langle (1 - 2n_{\uparrow}) \frac{n_{\uparrow} (N_{\downarrow} - n_{\downarrow})}{\tau_{\uparrow\downarrow}} \right\rangle + \\
& + \left\langle (1 + 2n_{\uparrow}) \frac{n_{\downarrow} (N_{\uparrow} - n_{\uparrow})}{\tau_{\downarrow\uparrow}} \right\rangle,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \left\langle (1 + 2n_{\downarrow}) \frac{(N_{\downarrow} - n_{\downarrow})}{\tau_{e\downarrow}} \right\rangle + \\
& + \left\langle (1 - 2n_{\downarrow}) \frac{n_{\downarrow}}{\tau_{c\downarrow}} \right\rangle + \\
& + \left\langle (1 + 2n_{\downarrow}) \frac{n_{\uparrow} (N_{\downarrow} - n_{\downarrow})}{\tau_{\uparrow\downarrow}} \right\rangle + \\
& + \left\langle (1 - 2n_{\downarrow}) \frac{n_{\downarrow} (N_{\uparrow} - n_{\uparrow})}{\tau_{\downarrow\uparrow}} \right\rangle
\end{aligned} \tag{2.24}$$

e

$$\begin{aligned}
0 = & \left\langle n_{\downarrow} \left(\frac{N_{\uparrow} - n_{\uparrow}}{\tau_{e\uparrow}} - \frac{n_{\uparrow}}{\tau_{c\uparrow}} \right) \right\rangle + \\
& + \left\langle n_{\uparrow} \left(\frac{N_{\downarrow} - n_{\downarrow}}{\tau_{e\downarrow}} - \frac{n_{\downarrow}}{\tau_{c\downarrow}} \right) \right\rangle + \\
& + \left\langle n_{\uparrow} \left(\frac{N_{\downarrow} - n_{\downarrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}} \right) (n_{\uparrow} - n_{\downarrow} - 1) \right\rangle + \\
& + \left\langle n_{\downarrow} \left(\frac{N_{\uparrow} - n_{\uparrow}}{\tau_{\downarrow\uparrow}} \right) (n_{\downarrow} - n_{\uparrow} - 1) \right\rangle,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

respectivamente. A seguir estudaremos a solução das equações (2.23), (2.24), (2.25) considerando dois casos limites: i) quando $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$, em que conseguimos obter expressões analíticas exatas para as variâncias e ii) quando $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$, em que obtemos expressões analíticas aproximadas, corretas até termos de terceira ordem.

2.3.1 Caso analítico exato ($\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$)

Para $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = \tau_i$ as equações (2.23), (2.24) e (2.25) fornecem expressões analíticas exatas para $\langle n_{\uparrow}^2 \rangle$, $\langle n_{\downarrow}^2 \rangle$ e $\langle n_{\uparrow}n_{\downarrow} \rangle$, respectivamente. As variâncias são definidas como

$$\langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle = \langle n_{\uparrow}^2 \rangle - \langle n_{\uparrow} \rangle^2, \quad (2.26)$$

$$\langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle = \langle n_{\downarrow}^2 \rangle - \langle n_{\downarrow} \rangle^2, \quad (2.27)$$

$$\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle = \langle n_{\uparrow} n_{\downarrow} \rangle - \langle n_{\uparrow} \rangle \langle n_{\downarrow} \rangle. \quad (2.28)$$

Substituindo as expressões obtidas para $\langle n_{\uparrow}^2 \rangle$, $\langle n_{\downarrow}^2 \rangle$ e $\langle n_{\uparrow}n_{\downarrow} \rangle$ nas definições (2.26), (2.27) e (2.28), obtemos

$$\begin{pmatrix} \nu_1 & 0 & -\frac{N_{\uparrow}-1}{\tau_i} \\ 0 & \nu_2 & -\frac{N_{\downarrow}-1}{\tau_i} \\ -\frac{N_{\downarrow}}{\tau_i} & -\frac{N_{\uparrow}}{\tau_i} & \nu_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle \\ \langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle \\ \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \end{pmatrix} = -\frac{1}{e} \begin{pmatrix} \frac{I_e^{\uparrow} + I_c^{\uparrow} + I'}{2} \\ \frac{I_e^{\downarrow} + I_c^{\downarrow} + I'}{2} \\ -I' \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

em que

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{1}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{c\uparrow}} + \frac{N_{\downarrow}}{\tau_i}, \\ \nu_2 &= \frac{1}{\tau_{e\downarrow}} + \frac{1}{\tau_{c\downarrow}} + \frac{N_{\uparrow}}{\tau_i}, \\ \nu_3 &= \frac{1}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{e\downarrow}} + \frac{1}{\tau_{c\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{c\downarrow}} + \frac{N_{\uparrow}-1}{\tau_i} + \frac{N_{\downarrow}-1}{\tau_i}, \\ \frac{\langle I' \rangle}{e} &= \frac{\langle n_{\downarrow} \rangle (N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle)}{\tau_i} + \frac{\langle n_{\uparrow} \rangle (N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle)}{\tau_i}, \\ \frac{\langle I_e^{\uparrow} \rangle}{e} &= \frac{N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle}{\tau_{e\uparrow}}, \\ \frac{\langle I_e^{\downarrow} \rangle}{e} &= \frac{N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle}{\tau_{e\downarrow}}, \\ \frac{\langle I_c^{\uparrow} \rangle}{e} &= \frac{\langle n_{\uparrow} \rangle}{\tau_{c\uparrow}}, \\ \frac{\langle I_c^{\downarrow} \rangle}{e} &= \frac{\langle n_{\downarrow} \rangle}{\tau_{c\downarrow}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Colocando $\tau_{e\downarrow} \rightarrow \infty$ em (2.29) recuperamos as variâncias de [8] (Eq. A3). Lembremos que as variâncias obtidas analiticamente aqui são exatas, pois estamos considerando $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$.

2.3.2 Caso exato para $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$ e $N_{\uparrow} = 1, N_{\downarrow} = 1$

As variâncias exatas para quaisquer valores de $\tau_{\uparrow\downarrow}$ e $\tau_{\downarrow\uparrow}$ podem ser obtidas através da função distribuição de estado estacionário $p_0(n_{\uparrow}, n_{\downarrow})$. Esta por sua vez é obtida da equação mestra (2.14) fazendo $\frac{d}{dt} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) = 0$. No regime de estado estacionário (2.14) é escrita como

$$\begin{aligned} 0 = & g_{e\uparrow}(n_{\uparrow} - 1) p_0(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow}) + r_{c\uparrow}(n_{\uparrow} + 1) p_0(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow}) \\ & + g_i(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow} + 1) p_0(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow} + 1) + r_i(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow} - 1) p_0(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow} - 1) \\ & + g_{e\downarrow}(n_{\downarrow} - 1) p_0(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} - 1) + r_{c\downarrow}(n_{\downarrow} + 1) p_0(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} + 1) \\ & - [g_{e\uparrow}(n_{\uparrow}) + g_{e\downarrow}(n_{\downarrow}) + g_i(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) + r_i(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) + r_{c\uparrow}(n_{\uparrow}) + r_{c\downarrow}(n_{\downarrow})] p_0(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Como o número máximo de elétrons em cada ilha está sendo assumido igual a 1 (em princípio pode ser qualquer), as quantidades $n_{\uparrow}$ e $n_{\downarrow}$ podem assumir somente os valores 0 e 1, ou seja, $n_{\uparrow} = 0, 1$ e $n_{\downarrow} = 0, 1$. Dessa forma temos quatro configurações possíveis no nosso modelo de ilhas: $n_{\uparrow} = n_{\downarrow} = 1$; $n_{\uparrow} = 1, n_{\downarrow} = 0$; $n_{\uparrow} = 0, n_{\downarrow} = 1$ e $n_{\uparrow} = n_{\downarrow} = 0$. Substituindo cada uma destas configurações em (2.31) juntamente com as taxas de “geração” e “recombinação” definidas na Fig. 2.1, obtemos o seguinte sistema de equações para as funções distribuição de estado estacionário,

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{N_{\uparrow}}{\tau_{e\uparrow}} p_0(0, 1) + \frac{N_{\downarrow}}{\tau_{e\downarrow}} p_0(1, 0) - \left(\frac{(N_{\uparrow} - 1)}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{(N_{\downarrow} - 1)}{\tau_{e\downarrow}} + \frac{1}{\tau_{c\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{c\downarrow}} + \frac{(N_{\uparrow} - 1)}{\tau_{\downarrow\uparrow}} + \frac{(N_{\downarrow} - 1)}{\tau_{\uparrow\downarrow}} \right) \cdot \\ & \cdot p_0(1, 1), \\ 0 = & \frac{N_{\uparrow}}{\tau_{e\uparrow}} p_0(0, 0) + \frac{N_{\uparrow}}{\tau_{\downarrow\uparrow}} p_0(0, 1) + \frac{1}{\tau_{c\downarrow}} p_0(1, 1) - \left(\frac{(N_{\uparrow} - 1)}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{c\uparrow}} + \frac{N_{\downarrow}}{\tau_{e\downarrow}} + \frac{N_{\downarrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}} \right) p_0(1, 0), \\ 0 = & \frac{N_{\downarrow}}{\tau_{e\downarrow}} p_0(0, 0) + \frac{N_{\downarrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}} p_0(1, 0) + \frac{1}{\tau_{c\uparrow}} p_0(1, 1) - \left(\frac{(N_{\downarrow} - 1)}{\tau_{e\downarrow}} + \frac{1}{\tau_{c\downarrow}} + \frac{N_{\uparrow}}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{N_{\uparrow}}{\tau_{\downarrow\uparrow}} \right) p_0(0, 1), \\ 0 = & \frac{1}{\tau_{c\uparrow}} p_0(1, 0) + \frac{1}{\tau_{c\downarrow}} p_0(0, 1) - \left(\frac{N_{\uparrow}}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{N_{\downarrow}}{\tau_{e\downarrow}} \right) p_0(0, 0). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Para obtermos as funções distribuição de estado estacionário $p_0(1, 1)$, $p_0(1, 0)$, $p_0(0, 1)$ e $p_0(0, 0)$, resolvemos o sistema de equações em (2.32) utilizando a normalização

$$p_0(1, 1) + p_0(1, 0) + p_0(0, 1) + p_0(0, 0) = 1.$$

Para calcularmos o valor médio $\langle n_{\uparrow} \rangle$ partimos da definição (2.17),

$$n_{\uparrow}(t) = \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) \Rightarrow \langle n_{\uparrow} \rangle = \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} p_0(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) = \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{1, 1} n_{\uparrow} p_0(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}),$$

obtendo

$$\langle n_{\uparrow} \rangle = p_0(1, 0) + p_0(1, 1). \quad (2.33)$$

De maneira análoga obtemos

$$\langle n_{\downarrow} \rangle = p_0(0, 1) + p_0(1, 1). \quad (2.34)$$

O valor médio $\langle n_{\uparrow}^2 \rangle$ é calculado da seguinte maneira,

$$n_{\uparrow}^2(t) = \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow}^2 p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) \Rightarrow \langle n_{\uparrow}^2 \rangle = \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow}^2 p_0(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) = \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{1,1} n_{\uparrow}^2 p_0(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}),$$

onde obtemos

$$\langle n_{\uparrow}^2 \rangle = p_0(1, 0) + p_0(1, 1). \quad (2.35)$$

Da mesma forma encontramos $\langle n_{\downarrow}^2 \rangle$ e $\langle n_{\uparrow} n_{\downarrow} \rangle$,

$$\langle n_{\downarrow}^2 \rangle = p_0(0, 1) + p_0(1, 1), \quad (2.36)$$

$$\langle n_{\uparrow} n_{\downarrow} \rangle = p_0(1, 1). \quad (2.37)$$

Substituindo (2.33), (2.34), (2.35), (2.36) e (2.37) nas definições para as variâncias (equações (2.26), (2.27) e (2.28)), encontramos expressões exatas para as variâncias em termos das funções distribuição de estado estacionário,

$$\langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle = p_0(1, 0) + p_0(1, 1) - [p_0(1, 0) + p_0(1, 1)]^2, \quad (2.38)$$

$$\langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle = p_0(0, 1) + p_0(1, 1) - [p_0(0, 1) + p_0(1, 1)]^2, \quad (2.39)$$

$$\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle = p_0(1, 1) - [p_0(1, 0) + p_0(1, 1)] [p_0(0, 1) + p_0(1, 1)]. \quad (2.40)$$

A Fig. 2.4 exibe o comportamento da variância $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$, obtida através da equação analítica em (2.29) (curva contínua) e através da expressão exata em (2.40) (curva descontínua). As expressões foram plotadas em termos de $\tau_{c\downarrow}$. As curvas foram obtidas adotando-se a configuração no modelo de ilhas mostrado na Fig. 2.4, no qual o canal 5 está proibido para o fluxo de elétrons mas todos os outros canais estão acessíveis. Da Fig. 2.4 vemos que $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$ é negativa ou nula. O valor nulo indica que em alguma ilha (ou nas duas) não está havendo flutuação do número de elétrons, em relação ao número médio; não ocorre flutuação do número de elétrons

Figura 2.4: Gráfico da variância para o tunelamento através do sistema da Fig. 1.5. Para a construção das curvas adotamos $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = 1$, $\tau_{e\uparrow} = \tau_{c\uparrow} = 1$ e $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 1$, indicando que estes canais estão permitidos para os elétrons, como pode ser visto no esquema de ilhas colocado na figura acima. Na curva contínua a variância cruzada foi obtida via expressão analítica em (2.29). A curva descontínua refere-se à expressão exata para $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$ em (2.40), calculada em termos das funções distribuição de estado estacionário. Da figura acima vemos que a variância cruzada é negativa ou nula. O bom acordo entre a variância analítica e aquela calculada exatamente deve-se ao fato de que, como fizemos $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = 1$, a expressão analítica para $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$ é exata. A variância na Fig. 2.4 reproduz a variância cruzada da Fig.2(d) de [8].

quando uma respectiva ilha estiver sempre cheia ou sempre vazia. Os valores negativos para $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$ ocorrem quando a flutuação do número de elétrons com spin up na ilha-up é positiva e a flutuação do número de elétrons com spin down na ilha-down é negativa (ou vice-versa). Estas flutuações positivas e negativas podem ser entendidas da seguinte maneira: em nosso modelo (considerando $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$) qualquer flutuação interna relevante que diminui $n_{\uparrow}$ em relação a $\langle n_{\uparrow} \rangle$ deve necessariamente aumentar $n_{\downarrow}$ em relação a $\langle n_{\downarrow} \rangle$ (e vice-versa). De outra maneira $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$ informa

o quanto os elétrons nas ilhas estão “correlacionados” negativamente. Correlação aqui indica a aleatoriedade na emissão de elétrons. Por exemplo, correlação ou $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$ nula significa que o fluxo de elétrons é totalmente aleatório. Este comportamento é verificado no modelo de uma única ilha, em que o fluxo de elétrons é completamente aleatório, sendo descrito pela distribuição Binomial. Quanto menos aleatório for o fluxo de elétrons, maior será a correlação entre os mesmos. Desta forma $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$ apresenta a tendência de ser mais negativa e conseqüentemente o ruído mais atenuado, uma vez que o ruído está diretamente relacionado à variância do número de elétrons nas ilhas. Assim as principais contribuições para que $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$ seja negativa (correlação negativa) devem vir de $\delta n_{\uparrow}$ e $\delta n_{\downarrow}$ tendo sinais opostos. Matematicamente este efeito vem do fato de incluirmos a conservação do número de partículas na equação mestra.

2.3.3 Caso analítico aproximado ($\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$)

Para $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$ as equações (2.23), (2.24), (2.25) contém momentos de ordem superior, por exemplo, $\langle n_{\uparrow}^2 n_{\downarrow} \rangle$, $\langle n_{\downarrow}^2 n_{\uparrow} \rangle^2$. Segundo as definições de variância em (2.26), (2.27) e (2.28), temos que determinar $\langle n_{\uparrow} \rangle$ e $\langle n_{\uparrow}^2 \rangle$. Para obtermos soluções analíticas para as variâncias, os termos $\langle n_{\uparrow}^2 n_{\downarrow} \rangle$ e $\langle n_{\downarrow}^2 n_{\uparrow} \rangle$ serão aproximados. De acordo com (2.26) e (2.27) temos

$$n_{\uparrow} = \langle n_{\uparrow} \rangle + \delta n_{\uparrow}$$

$$n_{\downarrow} = \langle n_{\downarrow} \rangle + \delta n_{\downarrow}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle n_{\uparrow}^2 n_{\downarrow} \rangle &= \left\langle \left(\langle n_{\uparrow} \rangle + \delta n_{\uparrow} \right)^2 \left(\langle n_{\downarrow} \rangle + \delta n_{\downarrow} \right) \right\rangle = \left\langle \left(\langle n_{\uparrow} \rangle^2 + 2 \langle n_{\uparrow} \rangle \delta n_{\uparrow} + (\delta n_{\uparrow})^2 \right) \left(\langle n_{\downarrow} \rangle + \delta n_{\downarrow} \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \langle n_{\uparrow} \rangle^2 \langle n_{\downarrow} \rangle + 2 \langle n_{\uparrow} \rangle \langle n_{\downarrow} \rangle \delta n_{\uparrow} + (\delta n_{\uparrow})^2 \langle n_{\downarrow} \rangle + \langle n_{\uparrow} \rangle^2 \delta n_{\downarrow} + 2 \langle n_{\uparrow} \rangle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} + (\delta n_{\uparrow})^2 \delta n_{\downarrow} \right\rangle = \\ &= \langle n_{\uparrow} \rangle^2 \langle n_{\downarrow} \rangle + \langle n_{\downarrow} \rangle \langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle + 2 \langle n_{\uparrow} \rangle \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle + \langle (\delta n_{\uparrow})^2 \delta n_{\downarrow} \rangle = \\ &= \langle n_{\uparrow} \rangle^2 \langle n_{\downarrow} \rangle + \langle n_{\downarrow} \rangle \langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle + 2 \langle n_{\uparrow} \rangle \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle - \langle n_{\uparrow} \rangle \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle + \langle n_{\uparrow} \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle, \end{aligned} \quad (2.41)$$

²Estes termos se cancelam para $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$.

onde usamos $\langle \delta n_{\uparrow} \rangle = \langle \delta n_{\downarrow} \rangle = 0$. Como estamos interessados em determinar as variâncias até terceira ordem, escrevemos (2.41) na seguinte forma

$$\langle n_{\uparrow}^2 n_{\downarrow} \rangle \simeq \langle n_{\uparrow} \rangle^2 \langle n_{\downarrow} \rangle + \langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle \langle n_{\downarrow} \rangle + \langle n_{\uparrow} \rangle \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle. \quad (2.42)$$

Seguindo procedimento análogo aproximamos o termo $\langle n_{\downarrow}^2 n_{\uparrow} \rangle$, obtendo

$$\langle n_{\downarrow}^2 n_{\uparrow} \rangle \simeq \langle n_{\uparrow} \rangle \langle n_{\downarrow} \rangle^2 + \langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle \langle n_{\uparrow} \rangle + \langle n_{\downarrow} \rangle \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle. \quad (2.43)$$

Substituindo (2.42) e (2.43) nas equações (2.23), (2.24) e (2.25), podemos escrever as variâncias aproximadas na seguinte forma matricial

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & (\alpha_2 - \frac{\xi}{2}) \\ 0 & \beta_2 & (\beta_1 - \frac{\xi}{2}) \\ \beta_1 & \alpha_2 & (\alpha_1 + \beta_2 + \xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle \\ \langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle \\ \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{B_{11}}{2} \\ \frac{B_{22}}{2} \\ B_{12} \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

onde

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\tau_{\uparrow\downarrow}} + \frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}}, \\ \alpha_1 &= -\frac{1}{\tau_{e\uparrow}} - \frac{1}{\tau_{c\uparrow}} - \frac{N_{\downarrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}} + \left(\frac{1}{\tau_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}}\right) \langle n_{\downarrow} \rangle, \\ \alpha_2 &= \frac{N_{\uparrow}}{\tau_{\downarrow\uparrow}} + \left(\frac{1}{\tau_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}}\right) \langle n_{\uparrow} \rangle, \\ \beta_1 &= \frac{N_{\downarrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}} + \left(\frac{1}{\tau_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}}\right) \langle n_{\downarrow} \rangle, \\ \beta_2 &= -\frac{1}{\tau_{e\downarrow}} - \frac{1}{\tau_{c\downarrow}} - \frac{N_{\uparrow}}{\tau_{\downarrow\uparrow}} + \left(\frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}} - \frac{1}{\tau_{\uparrow\downarrow}}\right) \langle n_{\uparrow} \rangle, \\ B_{11} &= \frac{N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{\langle n_{\uparrow} \rangle}{\tau_{c\uparrow}} + \frac{\langle n_{\downarrow} \rangle [N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle]}{\tau_{\uparrow\downarrow}} + \frac{\langle n_{\uparrow} \rangle [N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle]}{\tau_{\uparrow\downarrow}}, \\ B_{12} &= -\frac{\langle n_{\downarrow} \rangle (N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle)}{\tau_{\downarrow\uparrow}} - \frac{\langle n_{\uparrow} \rangle (N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle)}{\tau_{\uparrow\downarrow}}, \\ B_{22} &= \frac{N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle}{\tau_{e\downarrow}} - \frac{\langle n_{\downarrow} \rangle}{\tau_{c\downarrow}} - \frac{\langle n_{\downarrow} \rangle (N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle)}{\tau_{\uparrow\downarrow}} + \frac{\langle n_{\uparrow} \rangle (N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle)}{\tau_{\uparrow\downarrow}}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

De outra forma, podemos escrever (2.44) como

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & (\alpha_2 - \frac{\xi}{2}) \\ 0 & \beta_2 & (\beta_1 - \frac{\xi}{2}) \\ \beta_1 & \alpha_2 & (\alpha_1 + \beta_2 + \xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle \\ \langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle \\ \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \end{pmatrix} = -\frac{1}{e} \begin{pmatrix} \frac{I_e^{\uparrow} + I_c^{\uparrow} + I'}{2} \\ \frac{I_e^{\downarrow} + I_c^{\downarrow} + I'}{2} \\ -I' \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

em que agora

$$\frac{\langle I' \rangle}{e} = \frac{\langle n_{\downarrow} \rangle (N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle)}{\tau_{\downarrow\uparrow}} + \frac{\langle n_{\uparrow} \rangle (N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle)}{\tau_{\uparrow\downarrow}}. \quad (2.47)$$

De acordo com (2.44) as expressões analíticas para as variâncias são dadas por

$$\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle = \frac{-B_{12} + B_{11} \frac{\beta_1}{2\alpha_1} + B_{22} \frac{\alpha_2}{2\beta_2}}{\left[(\alpha_1 + \beta_2 + \xi) - \frac{\beta_1}{\alpha_1} (\alpha_2 - \frac{\xi}{2}) - \frac{\alpha_2}{\beta_2} (\beta_1 - \frac{\xi}{2}) \right]} \quad (2.48)$$

$$\langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle = -\frac{1}{2} \frac{B_{11}}{\alpha_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{2\alpha_2 - \xi}{\alpha_1} \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \right) \quad (2.49)$$

$$\langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle = -\frac{1}{2} \frac{B_{22}}{\beta_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta_1 - \xi}{\beta_2} \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \right). \quad (2.50)$$

As equações (2.48), (2.49), (2.50) se reduzem às variâncias para o caso exato (equação (2.29)) fazendo-se $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$. Além disso, colocando $\tau_{e\downarrow} \rightarrow \infty$ em (2.48), (2.49) e (2.50), as variâncias de [8] são recuperadas.

A Fig. 2.5 mostra o comportamento da variância cruzada $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$ calculada através da expressão analítica aproximada em (2.48) e através da equação exata (2.40) obtida em termos das funções distribuição de estado estacionário. As curvas foram plotadas em função de $\tau_{e\downarrow}$ para a configuração do modelo de ilhas mostrada na própria Fig. 2.5. Podemos observar que a variância $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$ ainda mantém o comportamento para o caso analítico exato da Fig. 2.4 quando colocamos $\tau_{\uparrow\downarrow} = 1$ e $\tau_{\downarrow\uparrow} = 1.2$, assumindo valores negativos ou nulos. Esta concordância com a variância da Fig. 2.4 é alterada aumentando a diferença entre $\tau_{\uparrow\downarrow}$ e $\tau_{\downarrow\uparrow}$. Para o caso particular onde $\tau_{\uparrow\downarrow} = 1$ e $\tau_{\downarrow\uparrow} = 100$, notamos que $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$ na Fig. 2.5 agora assume valores positivos. Estas “correlações positivas” aparecem quando qualquer flutuação interna aumenta $n_{\uparrow}$ em relação a $\langle n_{\uparrow} \rangle$ e $n_{\downarrow}$ em relação a $\langle n_{\downarrow} \rangle$, ou diminui $n_{\uparrow}$ em relação a $\langle n_{\uparrow} \rangle$ e $n_{\downarrow}$ em relação a $\langle n_{\downarrow} \rangle$. Este comportamento de aumentar ou diminuir o número de elétrons em relação ao seu valor médio pode ser melhor entendido olhando para a equação exata de $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$. Em (2.40) a variância cruzada é dada em termos das probabilidades de estado estacionário das ilhas estarem cheias ou vazias, para o caso particular $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 1$. De acordo com (2.40), $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$ apresentará “correlação

positiva” sempre que $p_0(1, 0)$ e $p_0(0, 1)$ forem menores do que $p_0(1, 1)$. Fisicamente isto significa que a probabilidade (de estado estacionário) de encontrarmos as ilhas-up e down sempre cheias, na configuração para o qual as curvas da Fig. 2.5 foram obtidas, é sempre maior do que a probabilidade de encontrarmos uma ilha cheia e a outra vazia.

Figura 2.5: Gráficos da variância cruzada $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$ com $\tau_{\uparrow\downarrow}$ e $\tau_{\downarrow\uparrow}$ diferentes. Em todos os gráficos adotamos $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 1$, $\tau_{e\uparrow} = \tau_{c\uparrow} = 1$ e $\tau_{e\downarrow} \rightarrow \infty$ nas equações (2.48) e (2.38) para obtermos as curvas analíticas aproximadas e as curvas exatas, respectivamente. Da figura acima vemos que, para $\tau_{\uparrow\downarrow} = 1$ e $\tau_{\downarrow\uparrow} = 1.2$, a variância $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$ (tanto a analítica aproximada quanto a exata) ainda reproduzem aquela para o caso sem aproximação da Fig. 2.4, tomando valores negativos ou nulos. Para $\tau_{\uparrow\downarrow} = 1$ e $\tau_{\downarrow\uparrow} = 100$ (este limite corresponde a proibir o trânsito de elétrons através do canal 4; ver Fig. 2.1 e esquema na figura acima), a variância assume valores negativos, nulos e positivos. Podemos também observar um bom acordo entre as variâncias calculadas via expressões analíticas aproximadas e aquelas obtidas exatamente.

Capítulo 3

Shot Noise Dependente de Spin

Neste capítulo discutimos o conceito de *shot noise* para um sistema simples (*full shot noise*) e definimos o *shot noise* dependente de spin em termos das flutuações na corrente (seção 3.1). Na seção 3.2 a corrente polarizada dependente do tempo é definida utilizando o teorema de Ramo-Shockley¹ [15]. Na seção 3.3 as flutuações na corrente serão representadas por funções correlação corrente-corrente; estas podem ser convenientemente formuladas em termos de funções de correlação reduzidas (funções correlação *hop-hop*) associadas a transições entre os níveis ressonantes up e down. Concluimos o capítulo na seção 3.4 expressando o *shot noise* em termos das funções correlação reduzidas, no limite de baixas frequências.

3.1 Full Shot Noise e Flutuações da Corrente

Primeiramente vamos deduzir de forma simplificada o *shot noise* clássico ou *full shot noise*, $2e\langle I \rangle$, onde $\langle I \rangle$ é a corrente média do sistema. Esta grandeza será útil na definição do fator de Fano $\gamma = S/2e\langle I \rangle$ o qual normaliza o ruído S do sistema. Aqui seguimos a dedução simplificada da Ref.[16]. Seja $\langle I \rangle$ a corrente média e $\delta I(t) = i(t) - \langle I \rangle$ a sua flutuação no tempo t . *Shot noise* é definido como a

¹Este teorema diz que se um elétron move-se entre dois eletrodos paralelos colocados a uma distância d um do outro com velocidade v_x perpendicular a estes eletrodos, então a corrente $i(t)$ no circuito externo conectando estes eletrodos é $i(t) = q v_x/d$, onde q é a carga do elétron. Com este teorema pode-se calcular pulsos de corrente induzidos pelo movimento de elétrons no circuito externo.

transformada de Fourier da função autocorrelação corrente-corrente, ou seja

$$S \equiv 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \langle \delta i(t) \delta i(t') \rangle d(t - t'). \quad (3.1)$$

onde a média é feita considerando um “ensemble” de sistemas idênticos. Vamos considerar um período T finito e definir o ruído neste período como

$$S_T \equiv 2 \int_0^T e^{i\omega t} \langle \delta i(t + t') \delta i(t') \rangle dt. \quad (3.2)$$

Estamos particularmente interessados no limite de $\omega = 0$, uma vez que nosso sistema conserva corrente e despreza interações entre os elétrons. Estas interações são relevantes para $\omega \neq 0$; neste regime a corrente não é conservada. Substituindo a média no “ensemble” de (3.2) pela média temporal (pois nosso sistema é “ergódico”) temos

$$S_T \simeq 2 \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^T \delta i(t) \delta i(t') dt'. \quad (3.3)$$

O número de elétrons que atravessam uma seção de choque da amostra em um período de tempo T é

$$N_T = \frac{1}{e} \int_0^T i(t) dt. \quad (3.4)$$

O valor médio de N_T está relacionado a corrente média por

$$\langle I \rangle_T = \frac{e N_T}{T}, \quad (3.5)$$

e o desvio de N em relação ao seu valor médio é

$$\delta N_T = \frac{1}{e} \int_0^T \delta i(t) dt. \quad (3.6)$$

De acordo com (3.6) podemos expressar (3.3) como

$$S_T \simeq 2 \frac{1}{T} \int_0^T \delta i(t) dt \int_0^T \delta i(t') dt' = 2 \frac{e^2}{T} (\delta N_T)^2. \quad (3.7)$$

Dessa forma, considerando o período T em (3.7) muito grande de forma a garantir que média no “ensemble” $\Leftrightarrow$ média temporal, temos

$$S = \langle S_T \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} 2 \frac{e^2}{T} \langle (\delta N_T)^2 \rangle. \quad (3.8)$$

De acordo com (3.5) e (3.8) concluímos que a corrente mede o número médio de elétrons que atravessam a amostra, $\langle N \rangle$, enquanto que o ruído mede a variância no número de elétrons que atravessam a amostra, $\langle (\delta N)^2 \rangle$. Considerando as flutuações em N totalmente aleatórias pode-se representar a distribuição de elétrons através da estatística de Poisson. Como consequência a variância de N é igual a sua média, $\langle (\delta N)^2 \rangle = \langle N \rangle$. Assim, usando (3.5) podemos escrever (3.8) na seguinte forma

$$S = 2e\langle I \rangle. \quad (3.9)$$

A equação (3.9) foi deduzida pela primeira vez por Schottky (1918). Este resultado é usualmente denominado *shot noise* clássico ou *full shot noise*. Nesta expressão considera-se o feixe de elétrons “descorrelacionado” no sentido de que o fluxo de elétrons é completamente aleatório. Lembrando que

$$\delta I(t) = i(t) - \langle I \rangle$$

e sua transformada de Fourier

$$\delta I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dt,$$

podemos escrever (3.1) da seguinte maneira

$$S(\omega) = \frac{2}{T} \langle |I(\omega)|^2 \rangle - 4\pi \langle I \rangle^2 \delta(\omega). \quad (3.10)$$

A expressão (3.10) é válida para $\omega \geq 0$ com $I(\omega)$ sendo a transformada de Fourier cosseno de $i(t)$. A seguir definimos a corrente dependente do tempo e calculamos sua transformada de Fourier.

3.2 Corrente Dependente do Tempo

Nesta seção vamos definir a corrente dependente do tempo através do nosso sistema em termos da transferência de elétrons up do emissor para a ilha-up, elétrons down do emissor para a ilha-down, da ilha-up para o coletor e da ilha-down para o coletor. Segundo o teorema de Ramo-Shockley [15], quando um elétron tunela através de uma das barreiras, um pulso de corrente no circuito externo é gerado. No nosso modelo, uma transferência $g_{\uparrow}$ ou $g_{\downarrow}$ induz um fluxo de carga αe no circuito

externo. Da mesma forma, uma transferência $r_{c\uparrow}$ ou $r_{c\downarrow}$ induz um fluxo de carga βe . Os parâmetros α e β são fatores geométricos dependentes do sistema físico e devido a conservação da carga a soma de α e β deve ser 1. Supondo que o sistema é observado em um intervalo T , a corrente $i(t)$ é

$$i(t) = \alpha e \sum_{j=1}^{N_{Te}^{\uparrow}} f_{g\uparrow}(t - t_j^{g\uparrow}) + \alpha e \sum_{j=1}^{N_{Te}^{\downarrow}} f_{g\downarrow}(t - t_j^{g\downarrow}) + \beta e \sum_{j=1}^{N_{Tc}^{\uparrow}} f_{c\uparrow}(t - t_j^{c\uparrow}) + \beta e \sum_{j=1}^{N_{Tc}^{\downarrow}} f_{c\downarrow}(t - t_j^{c\downarrow}), \quad (3.11)$$

onde $t_j^{g\uparrow}$, $t_j^{g\downarrow}$, $t_j^{c\uparrow}$ e $t_j^{c\downarrow}$ são os tempos em que os saltos de elétrons do emissor – ilha-up, emissor – ilha-down, ilha-up – coletor e ilha-down – coletor ocorrem, respectivamente. Os inteiros $N_{Te}^{\uparrow}$, $N_{Te}^{\downarrow}$, $N_{Tc}^{\uparrow}$ e $N_{Tc}^{\downarrow}$ indicam o número de saltos eletrônicos dentro do intervalo T para cada um dos processos acima. A função $f(t - t_j^{g\uparrow})$ descreve a forma do pulso de corrente devido a uma única geração através da primeira barreira começando no tempo $t_j^{g\uparrow}$, por exemplo. A função $f(t)$ é normalizada a um, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$; sua transformada de Fourier $F(\omega)$ satisfaz $F(0) = 1$. A transformada de Fourier cosseno $I(\omega)$ da corrente (3.11) é

$$I(\omega) \equiv F(\omega) \left[\alpha \sum_{j=1}^{N_{Te}^{\uparrow}} \exp(i\omega t_j^{g\uparrow}) + \alpha \sum_{j=1}^{N_{Te}^{\downarrow}} \exp(i\omega t_j^{g\downarrow}) + \beta \sum_{j=1}^{N_{Tc}^{\uparrow}} \exp(i\omega t_j^{c\uparrow}) + \beta \sum_{j=1}^{N_{Tc}^{\downarrow}} \exp(i\omega t_j^{c\downarrow}) \right]. \quad (3.12)$$

Os somatórios estendem-se sobre todos os pulsos ocorrendo no intervalo de observação T . Quadrando (3.12), obtemos

$$\begin{aligned}
|I(\omega)|^2 = e^2 |F(\omega)|^2 & \left[\alpha^2 \sum_{j,k}^{N_{Te}^\dagger, N_{Te}^\dagger} e^{i\omega(t_j^{g\dagger} - t_k^{g\dagger})} + \right. \\
& + \alpha^2 \sum_{j,k}^{N_{Te}^\dagger, N_{Te}^\dagger} e^{i\omega(t_j^{g\dagger} - t_k^{g\downarrow})} + \alpha\beta \sum_{j,k}^{N_{Te}^\dagger, N_{Tc}^\dagger} e^{i\omega(t_j^{g\dagger} - t_k^{c\dagger})} + \alpha\beta \sum_{j,k}^{N_{Te}^\dagger, N_{Tc}^\dagger} e^{i\omega(t_j^{g\dagger} - t_k^{c\downarrow})} + \\
& + \alpha^2 \sum_{j,k}^{N_{Te}^\dagger, N_{Te}^\dagger} e^{i\omega(t_j^{g\downarrow} - t_k^{g\dagger})} + \alpha^2 \sum_{j,k}^{N_{Te}^\dagger, N_{Te}^\dagger} e^{i\omega(t_j^{g\downarrow} - t_k^{g\downarrow})} + \alpha\beta \sum_{j,k}^{N_{Te}^\dagger, N_{Tc}^\dagger} e^{i\omega(t_j^{g\downarrow} - t_k^{c\dagger})} + \\
& + \alpha\beta \sum_{j,k}^{N_{Te}^\dagger, N_{Tc}^\dagger} e^{i\omega(t_j^{g\downarrow} - t_k^{c\downarrow})} + \beta^2 \sum_{j,k}^{N_{Tc}^\dagger, N_{Tc}^\dagger} e^{i\omega(t_j^{c\dagger} - t_k^{c\downarrow})} + \beta^2 \sum_{j,k}^{N_{Tc}^\dagger, N_{Tc}^\dagger} e^{i\omega(t_j^{c\dagger} - t_k^{c\dagger})} + \\
& + \beta\alpha \sum_{j,k}^{N_{Tc}^\dagger, N_{Te}^\dagger} e^{i\omega(t_j^{c\dagger} - t_k^{g\downarrow})} + \beta\alpha \sum_{j,k}^{N_{Tc}^\dagger, N_{Te}^\dagger} e^{i\omega(t_j^{c\dagger} - t_k^{g\dagger})} + \beta^2 \sum_{j,k}^{N_{Tc}^\dagger, N_{Tc}^\dagger} e^{i\omega(t_j^{c\downarrow} - t_k^{c\downarrow})} + \\
& \left. + \beta^2 \sum_{j,k}^{N_{Tc}^\dagger, N_{Tc}^\dagger} e^{i\omega(t_j^{c\downarrow} - t_k^{c\dagger})} + \beta\alpha \sum_{j,k}^{N_{Tc}^\dagger, N_{Te}^\dagger} e^{i\omega(t_j^{c\downarrow} - t_k^{g\downarrow})} + \beta\alpha \sum_{j,k}^{N_{Tc}^\dagger, N_{Te}^\dagger} e^{i\omega(t_j^{c\downarrow} - t_k^{g\dagger})} \right]. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Na próxima seção veremos como cada duplo somatório de (3.13) pode ser convertido numa forma integral com o auxílio de funções correlação.

3.3 Funções Correlação

Consideremos, por exemplo, o primeiro termo em (3.13), o qual pode ser escrito como

$$\left\langle \sum_{j,k}^{N_{Te}^\dagger, N_{Te}^\dagger} e^{i\omega(t_j^{g\dagger} - t_k^{g\dagger})} \right\rangle = \left\langle \sum_j^{N_{Te}^\dagger} 1 + \sum_k^{N_{Te}^\dagger} \sum_{j \neq k}^{N_{Te}^\dagger} e^{i\omega(t_j^{g\dagger} - t_k^{g\dagger})} \right\rangle. \quad (3.14)$$

Há $N_{Te}^\dagger$ termos com $j = k$ em (3.14). Na média, a soma sobre j para um k fixo pode ser substituída pela integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t_j^{g\dagger} - t_k^{g\dagger})} h_{g\dagger, g\dagger}(t_j^{g\dagger} - t_k^{g\dagger}) d(t_j^{g\dagger} - t_k^{g\dagger}), \quad (3.15)$$

onde a função $h_{g\dagger, g\dagger}(t)$ é definida como a “função correlação *hop-hop*”, indicando a taxa média no “ensemble” de saltos $g_\dagger$, dado que houve um salto $g_\dagger$ em $t = 0$. Depois dessa média, o resultado deve ser o mesmo para cada valor de k . Então podemos multiplicar a integral (3.15) pelo número de saltos $N_{Te}^\dagger$ relacionado a $g_\dagger$,

obtendo

$$\begin{aligned}
 \left\langle \sum_{j,k}^{N_{Te}^\uparrow, N_{Te}^\uparrow} e^{i\omega(t_j^{\uparrow} - t_k^{\uparrow})} \right\rangle &= N_{Te}^\uparrow \left[1 + \int_{-\infty}^{+\infty} h_{g\uparrow, g\uparrow}(t - t_k^{\uparrow}) e^{i\omega t} dt \right] = \\
 &= N_{Te}^\uparrow \left[1 + 2 \int_0^{+\infty} h_{g\uparrow, g\uparrow}(t) \cos(\omega t) dt \right] = \\
 &= N_{Te}^\uparrow \left[1 + 2 H_{g\uparrow, g\uparrow}(\omega) \right],
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

em que $H_{g\uparrow, g\uparrow}(\omega)$ é a transformada de Fourier cosseno de $h_{g\uparrow, g\uparrow}(t)$. De forma análoga transformamos os demais somatórios em funções correlação. Uma vez feito isso, podemos escrever (3.13) em termos de funções correlação,

$$\begin{aligned}
 |I(\omega)|^2 &= e^2 |F(\omega)|^2 \\
 &\left\{ N_{Te}^\uparrow \left[\alpha^2 (1 + 2 H_{g\uparrow, g\uparrow}(\omega)) + 2\alpha^2 H_{g\downarrow, g\uparrow}(\omega) + 2\alpha\beta H_{c\uparrow, g\uparrow}(\omega) + 2\alpha\beta H_{c\downarrow, g\uparrow}(\omega) \right] + \right. \\
 &+ N_{Te}^\downarrow \left[\alpha^2 (1 + 2 H_{g\downarrow, g\downarrow}(\omega)) + 2\alpha^2 H_{g\uparrow, g\downarrow}(\omega) + 2\alpha\beta H_{c\uparrow, g\downarrow}(\omega) + 2\alpha\beta H_{c\downarrow, g\downarrow}(\omega) \right] + \\
 &+ N_{Tc}^\uparrow \left[\beta^2 (1 + 2 H_{c\uparrow, c\uparrow}(\omega)) + 2\beta^2 H_{c\downarrow, c\uparrow}(\omega) + 2\alpha\beta H_{g\uparrow, c\uparrow}(\omega) + 2\alpha\beta H_{g\downarrow, c\uparrow}(\omega) \right] + \\
 &\left. + N_{Tc}^\downarrow \left[\beta^2 (1 + 2 H_{c\downarrow, c\downarrow}(\omega)) + 2\beta^2 H_{c\uparrow, c\downarrow}(\omega) + 2\alpha\beta H_{g\uparrow, c\downarrow}(\omega) + 2\alpha\beta H_{g\downarrow, c\downarrow}(\omega) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

As correlações entre os saltos devem anular-se para tempos grandes. Isto significa que para $t \rightarrow \infty$, as taxas aproximam-se dos seus valores médios. De outra forma,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} h_{g\uparrow, g\uparrow}(t) \\ h_{g\uparrow, g\downarrow}(t) \\ h_{g\uparrow, c\uparrow}(t) \\ h_{g\uparrow, c\downarrow}(t) \end{pmatrix} = \bar{h}_e^\uparrow = \frac{N_\uparrow - \langle n_\uparrow \rangle}{\tau_{e\uparrow}} = \frac{N_{Te}^\uparrow}{T} = \frac{\langle I_e^\uparrow \rangle}{e},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} h_{g\downarrow, g\downarrow}(t) \\ h_{g\downarrow, g\uparrow}(t) \\ h_{g\downarrow, c\uparrow}(t) \\ h_{g\downarrow, c\downarrow}(t) \end{pmatrix} = \bar{h}_e^\downarrow = \frac{N_\downarrow - \langle n_\downarrow \rangle}{\tau_{e\downarrow}} = \frac{N_{Te}^\downarrow}{T} = \frac{\langle I_e^\downarrow \rangle}{e},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} h_{c\uparrow, c\uparrow}(t) \\ h_{c\uparrow, c\downarrow}(t) \\ h_{c\uparrow, g\uparrow}(t) \\ h_{c\uparrow, g\downarrow}(t) \end{pmatrix} = \bar{h}_c^\uparrow = \frac{\langle n_\uparrow \rangle}{\tau_{c\uparrow}} = \frac{N_{Tc}^\uparrow}{T} = \frac{\langle I_c^\uparrow \rangle}{e},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} h_{c\downarrow, c\downarrow}(t) \\ h_{c\downarrow, c\uparrow}(t) \\ h_{c\downarrow, g\uparrow}(t) \\ h_{c\downarrow, g\downarrow}(t) \end{pmatrix} = \bar{h}_c^\downarrow = \frac{\langle n_\downarrow \rangle}{\tau_{c\downarrow}} = \frac{N_{Tc}^\downarrow}{T} = \frac{\langle I_c^\downarrow \rangle}{e},$$

onde $h_e^\uparrow$, $h_e^\downarrow$, $h_c^\uparrow$ e $h_c^\downarrow$ expressam taxas médias de saltos do emissor para a ilha-up, emissor $\rightarrow$ ilha-down, ilha-up $\rightarrow$ coletor, ilha-down $\rightarrow$ coletor, respectivamente, com e indicando o valor absoluto da carga eletrônica. Estas taxas médias satisfazem

$$h_e^\uparrow + h_e^\downarrow = h_c^\uparrow + h_c^\downarrow$$

o que equivale a (2.11), expressando a conservação da corrente média do sistema. Por conveniência vamos definir as funções correlação “reduzidas” $g(t)$. Estas funções são definidas subtraindo-se o limite de grandes tempos ($t \rightarrow \infty$) das funções correlação *hop-hop* $h(t)$,

$$g_{g\uparrow, g\uparrow}(t) = h_{g\uparrow, g\uparrow}(t) - h_e^\uparrow. \quad (3.18)$$

A transformada de Fourier cosseno de (3.18) é

$$G_{g\uparrow, g\uparrow}(\omega) = H_{g\uparrow, g\uparrow}(\omega) - H_e^\uparrow, \quad (3.19)$$

em que as seguintes definições são usadas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{g\uparrow, g\uparrow}(t) e^{i\omega t} dt = 2 \int_0^{+\infty} g_{g\uparrow, g\uparrow}(t) \cos(\omega t) dt \equiv 2 G_{g\uparrow, g\uparrow}(\omega), \quad (3.20)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_{g\uparrow, g\uparrow}(t) e^{i\omega t} dt = 2 \int_0^{+\infty} h_{g\uparrow, g\uparrow}(t) \cos(\omega t) dt \equiv 2 H_{g\uparrow, g\uparrow}(\omega), \quad (3.21)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_e^\uparrow e^{i\omega t} dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle I_e^\uparrow \rangle}{e} e^{i\omega t} dt = 2\pi \frac{\langle I_e^\uparrow \rangle}{e} \delta(\omega) \equiv 2 H_e^\uparrow. \quad (3.22)$$

Substituindo (3.20), (3.21) e (3.22) em (3.19) obtemos

$$G_{g_{\uparrow}, g_{\uparrow}}(\omega) = H_{g_{\uparrow}, g_{\uparrow}}(\omega) - \pi \frac{\langle I_e^{\uparrow} \rangle}{e} \delta(\omega). \quad (3.23)$$

De forma análoga podemos obter expressões semelhantes a (3.23) para as demais funções correlação. No Apêndice E apresentamos todas as funções correlação reduzidas.

Expressando a corrente em (3.17) em termos destas funções correlação reduzidas, temos

$$\begin{aligned} |I(\omega)|^2 = & 2\pi \langle I \rangle^2 \delta(\omega) T |F(\omega)|^2 + e^2 |F(\omega)|^2 \\ & \left\{ N_{Te}^{\uparrow} \left[\alpha^2 (1 + 2G_{g_{\uparrow}, g_{\uparrow}}(\omega) + 2G_{g_{\downarrow}, g_{\uparrow}}(\omega)) + 2\alpha\beta G_{c_{\uparrow}, g_{\uparrow}}(\omega) + 2\alpha\beta G_{c_{\downarrow}, g_{\uparrow}}(\omega) \right] + \right. \\ & + N_{Te}^{\downarrow} \left[\alpha^2 (1 + 2G_{g_{\downarrow}, g_{\downarrow}}(\omega) + 2G_{g_{\uparrow}, g_{\downarrow}}(\omega)) + 2\alpha\beta G_{c_{\uparrow}, g_{\downarrow}}(\omega) + 2\alpha\beta G_{c_{\downarrow}, g_{\downarrow}}(\omega) \right] + \\ & + N_{Tc}^{\uparrow} \left[\beta^2 (1 + 2G_{c_{\uparrow}, c_{\uparrow}}(\omega) + 2G_{c_{\downarrow}, c_{\uparrow}}(\omega)) + 2\alpha\beta G_{g_{\uparrow}, c_{\uparrow}}(\omega) + 2\alpha\beta G_{g_{\downarrow}, c_{\uparrow}}(\omega) \right] + \\ & \left. + N_{Tc}^{\downarrow} \left[\beta^2 (1 + 2G_{c_{\downarrow}, c_{\downarrow}}(\omega) + 2G_{c_{\uparrow}, c_{\downarrow}}(\omega)) + 2\alpha\beta G_{g_{\uparrow}, c_{\downarrow}}(\omega) + 2\alpha\beta G_{g_{\downarrow}, c_{\downarrow}}(\omega) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde usamos o fato de que $\alpha + \beta = 1$ (devido a conservação de corrente no nosso sistema) para obtermos uma expressão mais simplificada. A “conveniência” das funções reduzidas decorre do fato de que o termo $2\pi \langle I \rangle^2 \delta(\omega)$ aparece explicitamente na expressão para $|I(\omega)|^2$, o que deverá cancelar termo semelhante quando (3.24) for substituída na expressão (3.10) para $S(\omega)$.

3.4 Shot Noise Dependente de Spin

Substituindo a corrente em (3.24) na equação (3.10) para o ruído, encontramos a expressão para o *shot noise* dependente de spin em termos das funções correlação reduzidas,

$$\begin{aligned}
S(\omega) = 2e|F(\omega)|^2 & \left\{ \langle I_e^\uparrow \rangle \left[\alpha^2 (1 + 2G_{g_\uparrow, g_\uparrow}(\omega) + 2G_{g_\downarrow, g_\uparrow}(\omega)) + 2\alpha\beta G_{c_\uparrow, g_\uparrow}(\omega) + 2\alpha\beta G_{c_\downarrow, g_\uparrow}(\omega) \right] + \right. \\
& + \langle I_e^\downarrow \rangle \left[\alpha^2 (1 + 2G_{g_\downarrow, g_\downarrow}(\omega) + 2G_{g_\uparrow, g_\downarrow}(\omega)) + 2\alpha\beta G_{c_\uparrow, g_\downarrow}(\omega) + 2\alpha\beta G_{c_\downarrow, g_\downarrow}(\omega) \right] + \\
& + \langle I_c^\uparrow \rangle \left[\beta^2 (1 + 2G_{c_\uparrow, c_\uparrow}(\omega) + 2G_{c_\downarrow, c_\uparrow}(\omega)) + 2\alpha\beta G_{g_\uparrow, c_\uparrow}(\omega) + 2\alpha\beta G_{g_\downarrow, c_\uparrow}(\omega) \right] + \\
& \left. + \langle I_c^\downarrow \rangle \left[\beta^2 (1 + 2G_{c_\downarrow, c_\downarrow}(\omega) + 2G_{c_\uparrow, c_\downarrow}(\omega)) + 2\alpha\beta G_{g_\uparrow, c_\downarrow}(\omega) + 2\alpha\beta G_{g_\downarrow, c_\downarrow}(\omega) \right] \right\}. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Como estaremos interessados no limite de “baixas frequências”, substituímos $\omega = 0$ em (3.25) obtendo o *shot noise* a frequência zero

$$\begin{aligned}
\frac{S(0)}{2e} = & \left\{ \langle I_e^\uparrow \rangle \left[\alpha^2 (1 + 2G_{g_\uparrow, g_\uparrow}(0) + 2G_{g_\downarrow, g_\uparrow}(0)) + 2\alpha\beta G_{c_\uparrow, g_\uparrow}(0) + 2\alpha\beta G_{c_\downarrow, g_\uparrow}(0) \right] + \right. \\
& + \langle I_e^\downarrow \rangle \left[\alpha^2 (1 + 2G_{g_\downarrow, g_\downarrow}(0) + 2G_{g_\uparrow, g_\downarrow}(0)) + 2\alpha\beta G_{c_\uparrow, g_\downarrow}(0) + 2\alpha\beta G_{c_\downarrow, g_\downarrow}(0) \right] + \\
& + \langle I_c^\uparrow \rangle \left[\beta^2 (1 + 2G_{c_\uparrow, c_\uparrow}(0) + 2G_{c_\downarrow, c_\uparrow}(0)) + 2\alpha\beta G_{g_\uparrow, c_\uparrow}(0) + 2\alpha\beta G_{g_\downarrow, c_\uparrow}(0) \right] + \\
& \left. + \langle I_c^\downarrow \rangle \left[\beta^2 (1 + 2G_{c_\downarrow, c_\downarrow}(0) + 2G_{c_\uparrow, c_\downarrow}(0)) + 2\alpha\beta G_{g_\uparrow, c_\downarrow}(0) + 2\alpha\beta G_{g_\downarrow, c_\downarrow}(0) \right] \right\}. \quad (3.26)
\end{aligned}$$

O limite de “baixas frequências” significa que ω é muito menor do que o inverso das taxas transição dos elétrons através da amostra, ou seja, $\omega \ll 1/\tau$. Como o tunelamento dos elétrons é dado por taxas microscópicas, cujas frequências são usualmente medidas em unidades de $\text{THz} = 10^{12}\text{Hz}$, qualquer variação na frequência externa ao sistema induz transições eletrônicas que se ajustam de forma muito rápida a estas respectivas variações. Devido a este rápido ajuste dos elétrons, para o circuito externo o processo de tunelamento dos elétrons independe da frequência externa. Embora na expressão (3.26) ainda apareçam os fatores α e β , no limite de “baixas frequências” o *shot noise* não depende destes fatores, ou seja, $S(0)$ não depende dos valores particulares de α e β . Portanto α e β não devem aparecer na resposta final. De outra forma pode ser demonstrado que $S|_{\alpha=1, \beta=0} = S|_{\alpha=0, \beta=1} = S_{\alpha, \beta}$, indicando que o *shot noise* a frequência zero é o mesmo independentemente de onde a corrente

é medida. Por conveniência, colocando $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ podemos escrever (3.26) como

$$\frac{S(0)}{2e} = \langle I_e^\uparrow \rangle \left[1 + 2 G_{g_\uparrow, g_\uparrow}(0) + 2 G_{g_\downarrow, g_\uparrow}(0) \right] + \langle I_e^\downarrow \rangle \left[1 + 2 G_{g_\downarrow, g_\downarrow}(0) + 2 G_{g_\uparrow, g_\downarrow}(0) \right]. \quad (3.27)$$

As quatro funções correlação de (3.27), assim como todas as outras, estão expressas no Apêndice E. Dividindo (3.27) por $2e\langle I \rangle$ obtemos o fator de Fano

$$\gamma \equiv \frac{S(0)}{2e\langle I \rangle} = \frac{\langle I_e^\uparrow \rangle}{\langle I \rangle} \left[1 + 2 G_{g_\uparrow, g_\uparrow}(0) + 2 G_{g_\downarrow, g_\uparrow}(0) \right] + \frac{\langle I_e^\downarrow \rangle}{\langle I \rangle} \left[1 + 2 G_{g_\downarrow, g_\downarrow}(0) + 2 G_{g_\uparrow, g_\downarrow}(0) \right]. \quad (3.28)$$

A expressão final para o fator de Fano em (3.28) é um tanto extensa para ser escrita aqui. Contudo, no limite $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$, podemos escrevê-la numa forma mais compacta em termos das variâncias

$$\gamma = 1 - \frac{2}{\left(\frac{N_\uparrow - \langle n_\uparrow \rangle}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{N_\downarrow - \langle n_\downarrow \rangle}{\tau_{e\downarrow}} \right)} \left\{ \left[\frac{\langle n_\uparrow \rangle}{N_\uparrow} \frac{N_\uparrow - \langle n_\uparrow \rangle}{\tau_{e\uparrow}} \left(1 - \frac{\langle n_\uparrow \rangle}{N_\uparrow} \right) + \frac{\langle n_\downarrow \rangle}{N_\downarrow} \frac{N_\downarrow - \langle n_\downarrow \rangle}{\tau_{e\downarrow}} \left(1 - \frac{\langle n_\downarrow \rangle}{N_\downarrow} \right) \right] + \langle \delta n_\uparrow \delta n_\downarrow \rangle \left[\frac{\langle n_\uparrow \rangle}{N_\uparrow} \left(\frac{1}{\tau_{e\downarrow}} + \frac{1}{\tau_{e\uparrow}} \frac{(N_\uparrow - 1)/\tau_i}{\left(\frac{1}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{e\downarrow}} + \frac{N_\uparrow}{\tau_i} \right)} \right) + \frac{\langle n_\downarrow \rangle}{N_\downarrow} \left(\frac{1}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{e\downarrow}} \frac{(N_\downarrow - 1)/\tau_i}{\left(\frac{1}{\tau_{e\downarrow}} + \frac{1}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{N_\downarrow}{\tau_i} \right)} \right) \right] \right\}. \quad (3.29)$$

A Eq.(3.29) é um caso particular da equação geral (3.28). Ela generaliza a eq.(33) da Ref.[8] ao incluir dois canais conectando o emissor às ilhas centrais. No próximo capítulo discutiremos alguns casos limites da Eq.(3.29).

Capítulo 4

Discussão

Neste capítulo discutiremos alguns casos limites de interesse recuperados pelo nosso modelo da Fig. 2.1 (Seção 4.1), em particular o modelo de uma única ilha e o modelo de duas ilhas com espalhamento interno. A seguir analisamos os resultados obtidos para o *shot noise* dependente de spin (Seção 4.2). Finalizamos o capítulo na Seção 4.3 discutindo a validade das aproximações feitas nas equações de taxa e variâncias.

4.1 Casos Limites

A Fig. 4.1 mostra as possíveis configurações, (I), (II), (III) e (IV), no qual o modelo da Fig. 2.1 pode reproduzir o modelo de uma única ilha de Davies *et al.* [6]. Cada diagrama na Fig. 4.1 foi obtido adotando certos limites no modelo da Fig. 2.1. Por exemplo, no diagrama (I) permite-se a transição de elétrons somente através dos canais 1 e 2. Os demais canais são “fechados” adotando-se os respectivos tempos de transição (ver Fig. 2.1) muito grande ($\tau_{e\downarrow} = \tau_{c\downarrow} = \tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = \tau_i \rightarrow \infty$). Em (II) somente os canais 5 e 6 estão acessíveis, os demais proibidos ($\tau_{e\uparrow} = \tau_{c\uparrow} = \tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = \tau_i \rightarrow \infty$). No diagrama (III) os canais 5 e 6 estão proibidos ($\tau_{e\downarrow} = \tau_{c\downarrow} \rightarrow \infty$). Em (IV) os canais 1 e 2 estão bloqueados ($\tau_{e\uparrow} = \tau_{c\uparrow} \rightarrow \infty$). A expressão que fornece o *shot noise* para cada particular configuração pode ser obtida através da Eq.(3.29), a qual simplifica o *shot noise* em (3.28). No nosso modelo as configurações da Fig. 4.1 representam correntes polarizadas através do sistema.

Substituindo os limites adotados para cada diagrama da Fig.4.1 em (3.29), obte-

Figura 4.1: Diagramas reproduzindo o modelo de uma única ilha. Estes diagramas surgem adotando limites apropriados no modelo da Fig. 2.1. O emissor está representado por (E) e o coletor por (C). Em (I) permite-se a transição de elétrons somente através dos canais 1 e 2; os demais canais estão “fechados” ($\tau_{e\downarrow} = \tau_{c\downarrow} = \tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = \tau_i \rightarrow \infty$). No diagrama (II) temos os canais 5 e 6 acessíveis, e os outros proibidos ($\tau_{e\uparrow} = \tau_{c\uparrow} = \tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = \tau_i \rightarrow \infty$). Em (III) os canais 5 e 6 estão bloqueados ($\tau_{e\downarrow} = \tau_{c\downarrow} \rightarrow \infty$), impedindo o trânsito de elétrons. Em (IV) temos 1 e 2 “fechados” ($\tau_{e\uparrow} = \tau_{c\uparrow} \rightarrow \infty$). Note que os diagramas (I) e (II) são simétricos, assim como (III) e (IV).

mos as seguintes expressões para o fator de Fano,

$$\begin{aligned}
 \gamma &= 1 - 2 \frac{\langle n_{\uparrow} \rangle}{N_{\uparrow}} \left(1 - \frac{\langle n_{\uparrow} \rangle}{N_{\uparrow}} \right), & \tau_{e\downarrow} = \tau_{c\downarrow} = \tau_i \rightarrow \infty, & \frac{\langle n_{\uparrow} \rangle}{N_{\uparrow}} = \frac{\tau_{c\uparrow}}{\tau_{c\uparrow} + \tau_{e\uparrow}}, & (I); \\
 \gamma &= 1 - 2 \frac{\langle n_{\downarrow} \rangle}{N_{\downarrow}} \left(1 - \frac{\langle n_{\downarrow} \rangle}{N_{\downarrow}} \right), & \tau_{e\uparrow} = \tau_{c\uparrow} = \tau_i \rightarrow \infty, & \frac{\langle n_{\downarrow} \rangle}{N_{\downarrow}} = \frac{\tau_{c\downarrow}}{\tau_{c\downarrow} + \tau_{e\downarrow}}, & (II); \\
 \gamma &= 1 - 2 \frac{\langle n_{\uparrow} \rangle}{N_{\uparrow}} \left(1 - \frac{\langle n_{\uparrow} \rangle}{N_{\uparrow}} \right), & \tau_{e\downarrow} = \tau_{c\downarrow} \rightarrow \infty, & \frac{\langle n_{\uparrow} \rangle}{N_{\uparrow}} = \frac{\tau_{c\uparrow}}{\tau_{c\uparrow} + \tau_{e\uparrow}}, & (III); \\
 \gamma &= 1 - 2 \frac{\langle n_{\downarrow} \rangle}{N_{\downarrow}} \left(1 - \frac{\langle n_{\downarrow} \rangle}{N_{\downarrow}} \right), & \tau_{e\uparrow} = \tau_{c\uparrow} \rightarrow \infty, & \frac{\langle n_{\downarrow} \rangle}{N_{\downarrow}} = \frac{\tau_{c\downarrow}}{\tau_{c\downarrow} + \tau_{e\downarrow}}, & (IV).
 \end{aligned}$$

(4.1)

Quando plotamos as expressões em (4.1) em termos de $\tau_{c\uparrow}$ (I e III) ou em termos

de $\tau_{c\downarrow}$ (II e IV), obtemos as curvas mostradas na Fig. 4.2, resultando o fator de Fano para o modelo de uma única ilha de Davies *et al.*[6]. Como esperado, ambas as curvas

Figura 4.2: Gráficos do fator de Fano para o modelo de uma única ilha de Davies *et al.*[6], obtidos plotando as equações de (4.1) em termos de $\tau_{c\uparrow}$ (I e III) ou em termos de $\tau_{c\downarrow}$ (II e IV). Vemos que o *shot noise* normalizado pelo *full shot noise* é atenuado a um mínimo de 0.5 para as quatro configurações. Ressaltamos o caráter simétrico do modelo da Fig. 2.1, identificado tanto nas equações (4.1) como nas curvas acima.

exibem o comportamento idêntico àquela na Fig. 1.4. Observamos que o *shot noise* normalizado vai a 1 nos regimes $\tau_{c\uparrow} \rightarrow 0$ e $\tau_{c\uparrow} \rightarrow \infty$ ($\tau_{c\downarrow} \rightarrow 0$ e $\tau_{c\downarrow} \rightarrow \infty$), obtendo seu valor mínimo para $\tau_{c\uparrow} = 1$ ($\tau_{c\downarrow} = 1$). Isto pode ser comprovado substituindo estes limites na equações em (4.1), com $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = \tau_{e\uparrow} = \tau_{e\downarrow} = 1$ ou olhando para os diagramas da Fig. 4.1. Por exemplo, no limite $\tau_{c\uparrow} \rightarrow \infty$ no diagrama I, o modelo de uma ilha apresenta o processo de um salto apenas, e a ilha-up comporta-se como um coletor. Por outro lado, no regime $\tau_{c\uparrow} \rightarrow 0$ no diagrama I, temos novamente o mesmo processo de um salto, mas com um coletor formado pela ilha-up+coletor, usualmente chamado “coletor efetivo” ([8]). O mesmo raciocínio pode ser estendido para os outros limites nos demais diagramas da Fig. 4.1. Deve ser mencionado que, olhando somente para a Fig. 4.2, concluímos que γ não distingue entre correntes polarizadas e não polarizadas.

Outro caso limite interessante que o nosso modelo (Fig. 2.1) recupera é aquele da Ref.[8] onde observou-se uma atenuação adicional do *shot noise* normalizado, em relação ao valor 0.5 do modelo de uma única ilha. A Fig. 4.3 exhibe os diagramas no qual esta atenuação adicional do *shot noise* foi obtida. Em I e II temos transições de elétrons através dos canais indicados, com $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = \tau_i$. Os canais ausentes indicam que a passagem de elétrons através destes caminhos não acontece. Nestes diagramas a transferência de elétrons de uma ilha para a outra é permitida devido o processo de “spin-flip”. Os diagramas I e II representam as configurações no qual o processo de “spin-flip” entre as ilhas tem sua máxima influência na atenuação do *shot noise*. A Eq.(3.29) com $\tau_{e\downarrow} \rightarrow \infty$ se reduz à eq.(33) da Ref.[8] para o *shot*

Figura 4.3: Diagramas no qual uma atenuação adicional do *shot noise* foi obtida no modelo de duas ilhas com espalhamento interno da Ref.[8]. Os canais indicados nos diagramas I e II indicam caminhos acessíveis aos elétrons. Os canais ausentes significam acesso proibido para os elétrons. Esta particular configuração dos diagramas corresponde àquela em que o *shot noise* tem sua máxima atenuação. Note que os dois diagramas são simétricos.

noise normalizado. A curva na Fig. 4.4 exhibe o comportamento do fator de Fano na equação (3.29) plotado em termos de $\tau_{c\uparrow}$ ou $\tau_{c\downarrow}$, para $\tau_{e\uparrow} = \tau_{c\downarrow} \rightarrow \infty$ (diagrama II) ou $\tau_{e\downarrow} = \tau_{c\uparrow} \rightarrow \infty$ (diagrama I), respectivamente. De acordo com o gráfico da Fig. 4.4 o fator de Fano vai a 1 quando $\tau_{c\uparrow} \rightarrow \infty$ ou $\tau_{c\downarrow} \rightarrow \infty$, indicando o regime do modelo de uma única ilha onde o elétron faz apenas uma transferência, do emissor para a

Figura 4.4: Gráfico exibindo a atenuação adicional do *shot noise* obtida no modelo de duas ilhas com espalhamento interno em [8]. Adotando $\tau_{e\downarrow} = \tau_{c\uparrow} \rightarrow \infty$ em (3.29), temos o fator de Fano correspondente à configuração do diagrama I (Fig.4.3), plotado em termos de $\tau_{c\downarrow}$. Na configuração do diagrama II, colocamos $\tau_{e\uparrow} = \tau_{c\downarrow} \rightarrow \infty$ em (3.29), obtendo o mesmo fator de Fano, plotado em termos de $\tau_{c\uparrow}$. Da curva podemos observar a atenuação adicional do *shot noise* normalizado (0.45, obtido em [8]) em relação ao valor para o modelo de uma única ilha (0.5). Adotamos em (3.29) $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 1$ e $\tau_{e\uparrow} = \tau_{e\downarrow} = \tau_i = 1$.

ilha, esta fazendo o papel do “coletor”. Por outro lado o mesmo gráfico nos mostra outro regime em que o fator de Fano vai a 0.5. Aqui novamente estamos no regime para o modelo de uma única ilha, mas com os elétrons fazendo duas transições, do emissor para uma das ilhas dos diagramas I e II, e desta para um “coletor efetivo” (ilha+coletor). Como apontado em [8], o regime mais interessante é aquele no qual o *shot noise* é atenuado a 0.45. Este valor está abaixo daquele do modelo de uma única ilha (0.5), sendo obtido na configuração dos diagramas I e II. Nestes diagramas temos pelos menos uma das ilhas acopladas ao coletor, indicando que o processo de espalhamento interno entre as ilhas é o responsável pela atenuação adicional do *shot noise*. Note que esta atenuação é obtida para ambas as configurações nos diagramas I e II, ressaltando o caráter simétrico do modelo da Fig. 2.1. Até aqui mostramos os resultados recuperados para o modelo de uma única ilha e para o modelo de duas ilhas com espalhamento interno considerando o fator de Fano da Eq.(3.29), em que

$$\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = \tau_i.$$

4.2 Resultados ($\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$)

Nesta seção discutiremos os resultados obtidos com a Eq.(3.28), para o *shot noise* nominalizado expresso em termos de funções correlação reduzidas, considerando $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$.

A equação (3.28) generaliza a Eq.(33) da Ref. [8] para o *shot noise* pois permite (i) tempos de transição inter-ilhas diferentes ($\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$) e (ii) dois canais injetores de spin. A Fig. 4.5 compara o gráfico do fator de Fano obtido para $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = \tau_i$ (o mesmo da Fig. 4.4) (γ_1), com o fator de Fano para $\tau_{\uparrow\downarrow} > \tau_{\downarrow\uparrow}$ (γ_2) e $\tau_{\uparrow\downarrow} < \tau_{\downarrow\uparrow}$ (γ_3). As curvas na Fig. 4.5 foram obtidas plotando (3.28) em termos de $\tau_{c\downarrow}$, para

Figura 4.5: Fator de Fano para a configuração de máximo espalhamento (spin-flip) inter-ilhas ($\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$). Os gráficos foram obtidos plotando (3.28) em termos de $\tau_{c\downarrow}$ para a configuração do diagrama I (Fig. 4.3), adotando $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 1$ e $\tau_{e\uparrow} = 1$ (ver esquema na figura). Os mesmos gráficos podem ser obtidos plotando (3.28) em termos de $\tau_{c\uparrow}$ para a configuração do diagrama II. Na curva γ_1 temos o fator de Fano da Fig. 4.4 atenuado a 0.45, com $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = \tau_i = 1$. Quando colocamos $\tau_{\uparrow\downarrow} > \tau_{\downarrow\uparrow}$ o fator de Fano tem seu valor mínimo aumentado e deslocado em relação a 0.45. Por outro lado, $\tau_{\uparrow\downarrow} < \tau_{\downarrow\uparrow}$ induz uma atenuação adicional para o fator de Fano (≈ 0.38) em relação a 0.45.

a configuração do diagrama I da Fig. 4.3. Assumimos $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 1$, $\tau_{e\uparrow} = 1$ e $\tau_{c\uparrow} \rightarrow \infty$ em (3.28). Aqui tomamos o limite $\tau_{e\downarrow} \rightarrow \infty$, pois estamos interessados em correntes polarizadas, possibilitando o estudo do processo de “spin-flip”. As mesmas curvas são obtidas para a configuração do diagrama II da Fig. 4.3 plotando (3.28) em termos de $\tau_{c\uparrow}$. As curvas na Fig. 4.5 vão a 1 no limite de $\tau_{c\downarrow}$ muito grande. Neste limite o sistema representado no diagrama I da Fig. 4.3 comporta-se como o modelo de uma única ilha com o emissor e a ilha-up fazendo o papel de um “emissor efetivo”. No outro extremo, quando $\tau_{c\downarrow}$ é muito pequeno, γ_1 e γ_3 vão a 0.5. Aqui o sistema comporta-se novamente como o modelo de uma única ilha, mas agora com dois saltos, emissor—ilha-up e ilha-up—“coletor efetivo”, este último sendo composto pela ilha-down+coletor. A curva γ_2 vai a 0.62 aproximadamente, para $\tau_{c\downarrow}$ muito pequeno. Este limite corresponde àquele do modelo de uma única ilha com dois saltos, emissor—ilha-up e ilha-up—“coletor efetivo”. Como $\tau_{\uparrow\downarrow} > \tau_{\downarrow\uparrow}$, a passagem de elétrons da ilha-up para o “coletor efetivo” torna-se mais difícil, mas não totalmente proibido. Se $\tau_{\uparrow\downarrow}$ estivesse “fechado”, γ_2 iria a 1.

A principal característica das curvas da Fig. 4.5 está no valor mínimo alcançado para o fator de Fano. Quando plotamos (3.28) com $\tau_{\uparrow\downarrow} > \tau_{\downarrow\uparrow}$ (γ_2), observamos um aumento no valor mínimo do fator de Fano, em relação a 0.45 obtido em γ_1 . Por outro lado, fazendo $\tau_{\uparrow\downarrow} < \tau_{\downarrow\uparrow}$ em (3.28), observamos uma atenuação adicional do fator de Fano ($\gamma_3 \approx 0.38$) em relação a 0.45. Do ponto de vista físico, esta atenuação adicional é devida ao aumento de “correlação” negativa entre os elétrons, quantificada pela variância cruzada. De outra forma, o processo de espalhamento “spin-flip” nas configurações dos diagramas I e II da Fig. 4.3 faz aumentar a “correlação” entre os elétrons nas ilhas-up e down. Isto mostra que processos de “spin-flip” atenuam o *shot noise*, para $\tau_{\uparrow\downarrow} < \tau_{\downarrow\uparrow}$.

Na curva para γ_2 vemos que o mínimo para o fator de Fano é aumentado em relação a 0.45 e deslocado em relação ao eixo vertical. Ambos os efeitos podem ser explicados observando que no regime onde $\tau_{\uparrow\downarrow} = 10$ e $\tau_{\downarrow\uparrow} = 1$, o esquema da Fig. 4.5 pode ser representado pelo esquema do modelo de uma ilha, com o emissor+ilha-up tornando-se “emissor efetivo” (“ $\tau_{\uparrow\downarrow} \rightarrow \tau_e$ ” e “ $\tau_{c\downarrow} \rightarrow \tau_c$ ”). Assim, γ_2 mostra um aumento em relação a 0.45 devido à diferença nos tempos de transição $\tau_{\uparrow\downarrow} = 10$ e $\tau_{c\downarrow} = 1$ (assimetria nas larguras das barreiras). Variando $\tau_{c\downarrow}$, observamos um

mínimo em γ_2 (~ 0.5) quando $\tau_{c\downarrow} = 10$. Devemos lembrar que o modelo de uma ilha apresenta um mínimo para barreiras simétricas, ou seja, $\tau_e = \tau_c$.

De acordo com as discussões anteriores vemos que o nosso modelo para o *shot noise* dependente de spin recupera os resultados para o modelo de uma única ilha e para o modelo de duas ilhas com espalhamento interno. Observamos uma atenuação adicional abaixo de 0.45 para o *shot noise* ao permitirmos tempos de transição inter-ilhas diferentes (em [8] $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = \tau_i = 1$). Uma questão natural que surge é como identificamos se o sistema está polarizado ou não? Esta investigação é conseguida normalizando-se o *shot noise* de forma apropriada, uma vez que a forma usual de normalização, *shot noise* normalizado pelo *full shot noise* $2eI$, onde I é a corrente média do sistema, não permite a identificação de correntes polarizadas através de medidas de ruído.

Considere um sistema referência na Fig. 2.1 com corrente I_r . Este sistema é aquele da Fig. 2.1 em que todos os canais estão acessíveis às transições eletrônicas (todos os τ 's iguais a 1). Escolhemos a corrente de referência desta maneira devido a possibilidade de sua realização experimental.

Vejamos como a corrente polarizada se manifesta no ruído. Os diagramas na Fig. 4.6 representam as configurações nas quais os gráficos para o *shot noise* normalizado com a corrente de referência na Fig. 4.7 foram obtidos. No diagrama I temos $\tau_{e\uparrow} \rightarrow \infty$ (canal 1 proibido) e em II $\tau_{e\downarrow} \rightarrow \infty$ (canal 5 proibido). Note que fechando o canal 2 em I e 6 em II, recuperamos o modelo de uma única ilha (diagramas IV e III da Fig. 4.3, respectivamente). O modelo de duas ilhas com espalhamento interno é obtido fechando-se os canais 6 em I e 2 em II (diagramas II e I da Fig. 4.3, respectivamente) e colocando $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$.

A Fig. 4.7 exhibe gráficos do *shot noise* normalizado com a corrente de referência. Os gráficos foram obtidos plotando (3.28) em termos $\tau_{e\uparrow}$ ou $\tau_{e\downarrow}$, para as configurações mostradas nos diagramas I (curvas (a) e (c)) e II (curvas (b) e (d)) da Fig. 4.6. Note que os gráficos (a)-(c) exibem o mesmo tipo de informação devido ao caráter simétrico do sistema. O mesmo acontecendo com (b)-(d). Em (a) o fator de Fano vai 0.36 aproximadamente na região onde $\tau_{e\uparrow} \rightarrow 0$ e tem o seu valor mínimo na região onde $\tau_{e\uparrow} \rightarrow \infty$, atingindo 0.25. No primeiro caso ($\tau_{e\uparrow} \rightarrow 0$) a ilha-up do diagrama

Figura 4.6: Configurações nas quais os gráficos do *shot noise* normalizado pela corrente referência foram obtidos. No diagrama I o canal 1 está proibido ($\tau_{e\uparrow} \rightarrow \infty$) e no diagrama II o canal 5 está fechado ($\tau_{e\downarrow} \rightarrow \infty$). Recuperamos o modelo de uma única ilha fechando os canais 2 em I e 6 em II (diagramas IV e III da Fig. 4.1, respectivamente). Fechando os canais 6 em I e 2 em II, juntamente com $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$, temos o modelo de duas ilhas com espalhamento interno (diagramas II e I da Fig. 4.3, respectivamente).

I (Fig. 4.6) funciona como “coletor efetivo” e o sistema assemelha-se ao modelo de uma ilha no processo de dois saltos, emissor—ilha-down e ilha-down—coletor ou emissor—ilha-down e ilha-down—“coletor efetivo”. No segundo caso ($\tau_{e\uparrow} \rightarrow \infty$) o canal 2 no diagrama I está fechado. O sistema novamente assemelha-se ao modelo de uma única ilha, mas com um único processo de dois saltos, emissor—ilha-down e ilha-down—coletor. Nesta particular configuração o fator de Fano atinge seu mínimo em 0.25, justamente metade do fator de Fano normalizado de forma usual (0.5) para o modelo de uma ilha. Devido a normalização adequada, realçamos o aspecto polarizado da corrente média do sistema, $\langle I \rangle = \langle I_e^{\uparrow} \rangle + \langle I_e^{\downarrow} \rangle = \langle I_c^{\uparrow} \rangle + \langle I_c^{\downarrow} \rangle$. A atenuação do fator de Fano em 0.25 significa que temos no sistema uma corrente média formada por elétrons com um determinado spin. Esta mesma discussão é válida para o fator de Fano em (c) com o diagrama II.

Figura 4.7: Gráficos do *shot noise* de (3.29) normalizado com a corrente de referência, plotados em função de $\tau_{c\uparrow}$ ou $\tau_{c\downarrow}$. Estamos considerando o número máximo de elétrons nas ilhas $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 1$ e $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = \tau_i = 1$. As curvas (a) e (d) correspondem à configuração do diagrama I na Fig. 4.6, (b) e (c) correspondendo ao diagrama II. Os gráficos (a)-(c) contém as mesmas informações, ressaltando o caráter simétrico do sistema. O mesmo acontecendo com os gráficos (b)-(d). O *shot noise* adequadamente normalizado é atenuado a um mínimo de 0.25 em (a)-(c) para $\tau_{c\uparrow} \rightarrow \infty$ ou $\tau_{c\downarrow} \rightarrow \infty$, respectivamente. Neste regime o diagrama I (Fig. 4.6) adota a configuração do modelo de uma ilha, com uma corrente média que é metade daquela para o qual o fator de Fano era suprimido a 0.5. Em (b)-(d) observamos uma atenuação adicional do *shot noise* no regime onde $\tau_{c\uparrow} \rightarrow \infty$ ou $\tau_{c\downarrow} \rightarrow \infty$, respectivamente. O fator de Fano é suprimido a um mínimo de aproximadamente 0.15. Esta atenuação adicional em relação a 0.25 deve-se ao processo de “spin-flip” entre as ilhas-up e down.

Em (b) o fator de Fano vai a 1 na região onde $\tau_{c\uparrow} \rightarrow 0$. Neste limite o diagrama II (Fig. 4.6) assemelha-se ao modelo de uma ilha com um salto apenas, emissor—

“coletor efetivo” (ilha-up+ilha-down+coletor). No outro extremo ($\tau_{c\uparrow} \rightarrow \infty$) o fator de Fano é atenuado abaixo de 0.25, atingindo aproximadamente 0.15, como era de se esperar. Neste limite ($\tau_{c\uparrow} \rightarrow \infty$) o canal 2 no diagrama II da (Fig. 4.6) está proibido e temos a configuração em que o processo de “spin-flip” tem sua máxima influência na atenuação do *shot noise* dependente de spin. A mesma discussão feita acima é válida para o fator de Fano em (d), com o diagrama I. Lembramos que a atenuação adicional se deve ao processo de espalhamento interno entre as ilhas-up e down, aparecendo quando o *shot noise* é normalizado pela corrente média ou de referência. Ressaltamos que cálculos realizados com o modelo coerente (quântico) ([17]) mostram um aumento do *shot noise* polarizado, ao contrário do que mostram os nossos resultados, uma atenuação.

Da mesma forma que o processo de “spin-flip” influenciou a atenuação do *shot*

Figura 4.8: Gráficos do *shot noise* polarizado para $\tau_{\uparrow\downarrow}$ e $\tau_{\downarrow\uparrow}$ diferentes. Plotamos (3.28) em termos de $\tau_{c\uparrow}$ para $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = \tau_i$ e $\tau_{\uparrow\downarrow} > \tau_{\downarrow\uparrow}$. Adotamos $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 1$, $\tau_{e\downarrow} \rightarrow \infty$ e $\tau_{c\uparrow} \rightarrow \infty$ no esquema mostrado na figura. Observando as curvas γ_1 e γ_2 vemos uma atenuação adicional do *shot noise* em γ_2 muito pequena em comparação a γ_1 . Isto mostra que o ruído normalizado pela corrente referência não possui a mesma sensibilidade à variação nos tempos de transição inter-ilhas quanto àquele normalizado pela corrente média do sistema.

noise com ambas as normalizações (corrente média do sistema e corrente média de referência), esperamos que o *shot noise* polarizado também seja influenciado quando os tempos de transição inter-ilhas $\tau_{\uparrow\downarrow}$ e $\tau_{\downarrow\uparrow}$ são diferentes. A Fig. 4.8 exibe o comportamento do *shot noise* normalizado pelo *full shot noise* com a corrente de referência. A eq.(3.28) foi plotada em função de $\tau_{c\uparrow}$ para $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = \tau_i$ (γ_1) e $\tau_{\uparrow\downarrow} > \tau_{\downarrow\uparrow}$ (γ_2), com a configuração mostrada na própria figura. Na Fig. 4.8 vemos uma pequena atenuação adicional do *shot noise* em γ_2 , em relação a γ_1 . Contudo esperávamos uma atenuação mais efetiva. Isto significa que o *shot noise* normalizado pela corrente referência não apresenta a mesma sensibilidade à variações nos tempos de transição inter-ilhas ($\tau_{\uparrow\downarrow}$ e $\tau_{\downarrow\uparrow}$) quanto àquele normalizado pela corrente média do sistema (Fig. 4.5), muito embora evidencie a existência de corrente polarizada no sistema.

Com o objetivo de investigarmos a sensibilidade da corrente média e do *shot*

Figura 4.9: Gráficos comparando a corrente média com o *shot noise* normalizado de forma usual e o *shot noise* normalizado pela corrente de referência, plotados em termos de $\tau_{c\uparrow}$. As curvas contínuas foram obtidas com $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = \tau_i = 1$ e as curvas descontínuas com $\tau_{\uparrow\downarrow} > \tau_{\downarrow\uparrow}$. Adotamos $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 1$ e $\tau_{e\downarrow} \rightarrow \infty$ no esquema mostrado na figura. Da figura observamos que a corrente média é aumentada quando fazemos $\tau_{\uparrow\downarrow} > \tau_{\downarrow\uparrow}$, enquanto que γ é atenuado. Contudo, γ_r é praticamente insensível a qualquer variação em $\tau_{\uparrow\downarrow}$ e $\tau_{\downarrow\uparrow}$.

noise quando fazemos $\tau_{\uparrow\downarrow}$ e $\tau_{\downarrow\uparrow}$ diferentes, mostramos na Fig. 4.9 gráficos da corrente média $\langle I \rangle$, do *shot noise* normalizado de forma usual (γ) e do *shot noise* normalizado pela corrente de referência (γ_r). As curvas contínuas na Fig. 4.9 foram obtidas para o caso em que $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = \tau_i = 1$ e as curvas descontínuas para o caso em que $\tau_{\uparrow\downarrow} > \tau_{\downarrow\uparrow}$. Da Fig. 4.9 vemos que a corrente média é aumentada quando fazemos $\tau_{\uparrow\downarrow} > \tau_{\downarrow\uparrow}$. O *shot noise* normalizado de forma usual (γ) é atenuado neste regime, enquanto que o *shot noise* normalizado pela corrente de referência (γ_r) é praticamente insensível à $\tau_{\uparrow\downarrow}$ e $\tau_{\downarrow\uparrow}$ diferentes.

4.3 Validade das Aproximações

As equações de taxa (2.1) e (2.2) foram linearizadas devido a impossibilidade em obtermos expressões analíticas para estas equações no regime $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$. De acordo com as curvas plotadas na Fig. 2.3, obtidas com equações de taxa para $n_{\uparrow}(t)$ e $n_{\downarrow}(t)$ analíticas linearizadas e através do procedimento numérico, observamos que o procedimento utilizado no Apêndice B para a linearização das equações (2.1) e (2.2) produziu resultados muito próximos daqueles calculados numericamente. Este é um dos pontos pelo qual acreditamos que os resultados obtidos para o *shot noise* sejam “quase” exatos.

A outra aproximação foi feita nas variâncias, onde no regime $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$ mantivemos somente momentos proporcionais a segunda ordem, ou seja, $\langle n_{\uparrow}^2 \rangle$, $\langle n_{\downarrow}^2 \rangle$ e $\langle n_{\uparrow} n_{\downarrow} \rangle$. Como pode ser visto das curvas na Fig. 2.5 para a variância $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$, o resultado analítico aproximado expressa ótimo acordo com o resultado exato, obtido através das funções distribuição de estado estacionário (Eq. 2.40). Investigamos a mesma relação para as outras variâncias, $\langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle$ e $\langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle$, verificando também bom acordo entre o resultado analítico aproximado e o exato.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho investigamos o *shot noise* dependente de spin a frequência zero em estruturas quânticas magnéticas reinterpretando e generalizando o modelo de duas ilhas centrais com espalhamento interno da Ref. [8] para descrever correntes polarizadas através do sistema. Nossa extensão inclui dois canais injetores de spin conectando o emissor às ilhas centrais e tempos de transição inter-ilhas distintos ($\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$).

Utilizando o modelo seqüencial baseado em equações de taxa derivadas de uma equação mestra, calculamos o *shot noise* dependente de spin em termos de funções correlação reduzidas, equações (3.28) e (3.29). Com estas equações recuperamos os resultados para o modelo de uma única ilha de Davies *et al.*[6] e para o modelo de duas ilhas com espalhamento interno da Ref. [8]. Permitindo tempos de transição inter-ilhas diferentes ($\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$), devido ao processo de “spin-flip” encontramos uma atenuação adicional para o *shot noise* (Fig. 4.5) abaixo de 0.45, obtida na Ref. [8].

A atenuação devido ao processo de “spin-flip” entre as ilhas-up e down também foi verificada no *shot noise* normalizado pela “corrente referência”. Encontramos uma atenuação abaixo daquela esperada como 1/4 (quando temos $\tau_{\uparrow\downarrow} < \tau_{\downarrow\uparrow}$), que é o valor obtido pelo *shot noise* dependente de spin (apropriadamente normalizado) para o modelo de uma ilha. Esta normalização do *shot noise* dependente de spin é necessária se quisermos identificar corrente polarizada no sistema, uma vez que a normalização usual não permite esta identificação em experimentos.

Investigamos a sensibilidade da corrente média e do *shot noise* normalizado quando permitimos $\tau_{\uparrow\downarrow}$ e $\tau_{\downarrow\uparrow}$ diferentes. Verificamos (Fig. 4.9) que a corrente média é aumentada para $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$, enquanto que o *shot noise* normalizado pela corrente média (γ) é atenuado. Contudo o processo de normalização do *shot noise* pela corrente referência parece “inibir” a sensibilidade do ruído à $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$.

Investigando a variância cruzada $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$ (Fig. 4.5) observamos “correlações” positivas ($\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \geq 0$) e negativas ($\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \leq 0$) (Fig. 2.5). As “correlações negativas” contribuem para a atenuação ($\tau_{\uparrow\downarrow} < \tau_{\downarrow\uparrow}$) do mínimo para o *shot noise* normalizado.

Baseados nas investigações realizadas com as expressões analíticas aproximadas e com os cálculos numéricos para as equações de taxa e variâncias (Figuras 2.3 e 2.5, respectivamente), acreditamos que nossos resultados para *shot noise* dependente de spin sejam “quase” exatos.

Apêndice A

Cálculo Numérico das Equações de Taxa

Descrevemos aqui o método usado para resolver numericamente as equações de taxa (2.1) e (2.2). O método das diferenças finitas é uma forma rápida e conveniente de resolvermos equações diferenciais. A idéia é discretizar as equações de taxa. Para resolvermos numericamente as equações (2.1) e (2.2), vamos reescrevê-las na seguinte forma

$$\frac{d}{dt} n_{\uparrow}(t) = \frac{N_{\uparrow}}{\tau_{e\uparrow}} - \left(\frac{1}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{c\uparrow}} + \frac{N_{\downarrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}} \right) n_{\uparrow}(t) + \frac{N_{\uparrow}}{\tau_{\downarrow\uparrow}} n_{\downarrow}(t) - \left(\frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}} - \frac{1}{\tau_{\uparrow\downarrow}} \right) n_{\uparrow}(t) n_{\downarrow}(t), \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d}{dt} n_{\downarrow}(t) = \frac{N_{\downarrow}}{\tau_{e\downarrow}} - \left(\frac{1}{\tau_{e\downarrow}} + \frac{1}{\tau_{c\downarrow}} + \frac{N_{\uparrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}} \right) n_{\downarrow}(t) + \frac{N_{\downarrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}} n_{\uparrow}(t) - \left(\frac{1}{\tau_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}} \right) n_{\uparrow}(t) n_{\downarrow}(t). \quad (\text{A.2})$$

Estamos interessados na evolução temporal de (A.1) e (A.2) dentro do intervalo de tempo $[0, T_0]$. Vamos dividir T_0 em K intervalos igualmente espaçados de comprimento Δt , ou seja, $T_0 = K \Delta t$. A variável t é agora discreta, $t = j \Delta t$, com j inteiro no intervalo $[0, K]$. Assim, na aproximação mais simples temos

$$\frac{d}{dt} n_{\uparrow}(t) = \frac{n_{\uparrow}^{j+1} - n_{\uparrow}^j}{\Delta t},$$

$$\frac{d}{dt} n_{\downarrow}(t) = \frac{n_{\downarrow}^{j+1} - n_{\downarrow}^j}{\Delta t},$$

e podemos escrever (A.1) e (A.2) na sua forma discreta,

$$n_{\uparrow}^{j+1} = n_{\uparrow}^j + \Delta t \left[\frac{N_{\uparrow}}{\tau_{e\uparrow}} - \left(\frac{1}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{c\uparrow}} + \frac{N_{\downarrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}} \right) n_{\uparrow}^j + \frac{N_{\uparrow}}{\tau_{\downarrow\uparrow}} n_{\downarrow}^j - \left(\frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}} - \frac{1}{\tau_{\uparrow\downarrow}} \right) n_{\uparrow}^j n_{\downarrow}^j \right] \quad (\text{A.3})$$

$$n_{\downarrow}^{j+1} = n_{\downarrow}^j + \Delta t \left[\frac{N_{\downarrow}}{\tau_{e\downarrow}} - \left(\frac{1}{\tau_{e\downarrow}} + \frac{1}{\tau_{c\downarrow}} + \frac{N_{\uparrow}}{\tau_{\downarrow\uparrow}} \right) n_{\downarrow}^j + \frac{N_{\downarrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}} n_{\uparrow}^j - \left(\frac{1}{\tau_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}} \right) n_{\uparrow}^j n_{\downarrow}^j \right]. \quad (\text{A.4})$$

O próximo passo é iterar A.3 e A.4 em um programa numérico.

Apêndice B

Linearização das Equações de Taxa

Linearizamos as equações (2.1) e (2.2) para obtermos expressões analíticas (embora aproximadas) para $n_{\uparrow}(t)$ e $n_{\downarrow}(t)$. Definindo as grandezas

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{N_{\uparrow}}{\tau_{e\uparrow}}, \\a_2 &= \frac{N_{\uparrow}}{\tau_{\downarrow\uparrow}}, \\a_3 &= -\left(\frac{1}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{c\uparrow}} + \frac{N_{\downarrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}}\right), \\a_4 &= \frac{1}{\tau_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}}, \\b_1 &= \frac{N_{\downarrow}}{\tau_{e\downarrow}}, \\b_2 &= \frac{N_{\downarrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}}, \\b_3 &= -\left(\frac{1}{\tau_{e\downarrow}} + \frac{1}{\tau_{c\downarrow}} + \frac{N_{\uparrow}}{\tau_{\downarrow\uparrow}}\right),\end{aligned}$$

podemos escrever as equações de taxa da seguinte maneira

$$\frac{d}{dt}n_{\uparrow}(t) = a_1 + a_2n_{\downarrow}(t) + a_3n_{\uparrow}(t) + a_4n_{\uparrow}(t)n_{\downarrow}(t), \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{d}{dt}n_{\downarrow}(t) = b_1 + b_2n_{\uparrow}(t) + b_3n_{\downarrow}(t) - a_4n_{\uparrow}(t)n_{\downarrow}(t). \quad (\text{B.2})$$

Os dois últimos termos do lado direito das equações (B.1) e (B.2) evidenciam o caráter não-linear destas equações. Note que fazendo $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$ temos $a_4 = 0$, os termos não-lineares se cancelam e temos resultados analíticos exatos. Por conveniência

vamos escrever (B.1) e (B.2) na seguinte forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}n_{\uparrow}(t) &= f(n_{\uparrow}(t), n_{\downarrow}(t)), \\ \frac{d}{dt}n_{\downarrow}(t) &= g(n_{\uparrow}(t), n_{\downarrow}(t)).\end{aligned}$$

O próximo passo consiste em expandir $f(n_{\uparrow}(t), n_{\downarrow}(t))$ e $g(n_{\uparrow}(t), n_{\downarrow}(t))$ em torno de $\langle n_{\uparrow} \rangle$ e $\langle n_{\downarrow} \rangle$ obtidos das equações (B.1) e (B.2), respectivamente, no limite $t \rightarrow \infty$.

Para fazer a expansão usaremos a relação

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(a, b). \quad (\text{B.3})$$

Aplicando (B.3) para expandir $f(n_{\uparrow}(t), n_{\downarrow}(t))$ até primeira ordem temos

$$\begin{aligned}f(n_{\uparrow}(t), n_{\downarrow}(t)) &= \sum_{n=0}^1 \frac{1}{n!} \left[(n_{\uparrow}(t) - \langle n_{\uparrow} \rangle) \frac{\partial}{\partial n_{\uparrow}(t)} + (n_{\downarrow}(t) - \langle n_{\downarrow} \rangle) \frac{\partial}{\partial n_{\downarrow}(t)} \right]^n \cdot \\ &\quad \cdot f(\langle n_{\uparrow} \rangle, \langle n_{\downarrow} \rangle).\end{aligned}$$

De outra forma

$$\begin{aligned}f(n_{\uparrow}(t), n_{\downarrow}(t)) &= \underbrace{f(\langle n_{\uparrow} \rangle, \langle n_{\downarrow} \rangle)}_0 + \frac{\partial}{\partial n_{\uparrow}(t)} f(n_{\uparrow}(t), n_{\downarrow}(t)) \Big|_{\substack{n_{\uparrow}(t)=\langle n_{\uparrow} \rangle \\ n_{\downarrow}(t)=\langle n_{\downarrow} \rangle}} (n_{\uparrow}(t) - \langle n_{\uparrow} \rangle) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial n_{\downarrow}(t)} f(n_{\uparrow}(t), n_{\downarrow}(t)) \Big|_{\substack{n_{\uparrow}(t)=\langle n_{\uparrow} \rangle \\ n_{\downarrow}(t)=\langle n_{\downarrow} \rangle}} (n_{\downarrow}(t) - \langle n_{\downarrow} \rangle) + \dots \quad (\text{B.4})\end{aligned}$$

Usando $\delta n_{\uparrow}(t) = n_{\uparrow}(t) - \langle n_{\uparrow} \rangle$ e $\delta n_{\downarrow}(t) = n_{\downarrow}(t) - \langle n_{\downarrow} \rangle$ escrevemos (B.4) como

$$f(n_{\uparrow}(t), n_{\downarrow}(t)) \simeq \underbrace{[a_3 + a_4 \langle n_{\downarrow} \rangle]}_{\alpha_1} \delta n_{\uparrow}(t) + \underbrace{[a_2 + a_4 \langle n_{\uparrow} \rangle]}_{\alpha_2} \delta n_{\downarrow}(t)$$

ou

$$f(n_{\uparrow}(t), n_{\downarrow}(t)) \simeq \alpha_1 \delta n_{\uparrow}(t) + \alpha_2 \delta n_{\downarrow}(t).$$

Finalmente escrevemos (B.1) na forma linearizada

$$\boxed{\frac{d}{dt} \delta n_{\uparrow}(t) = \alpha_1 \delta n_{\uparrow}(t) + \alpha_2 \delta n_{\downarrow}(t)}.$$

O procedimento para expandir $g(n_{\uparrow}(t), n_{\downarrow}(t))$ em torno de $\langle n_{\uparrow} \rangle$ e $\langle n_{\downarrow} \rangle$ é análogo. Assim obtemos

$$g(n_{\uparrow}(t), n_{\downarrow}(t)) \simeq [\underbrace{b_2 - a_4 \langle n_{\downarrow} \rangle}_{\beta_1}] \delta n_{\uparrow}(t) + [\underbrace{b_3 - a_4 \langle n_{\uparrow} \rangle}_{\beta_2}] \delta n_{\downarrow}(t)$$

ou

$$g(n_{\uparrow}(t), n_{\downarrow}(t)) \simeq \beta_1 \delta n_{\uparrow}(t) + \beta_2 \delta n_{\downarrow}(t).$$

Escrevendo (B.2) na forma linearizada

$$\boxed{\frac{d}{dt} \delta n_{\downarrow}(t) = \beta_1 \delta n_{\uparrow}(t) + \beta_2 \delta n_{\downarrow}(t)}.$$

Podemos usar a notação

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta n_{\uparrow}(t) \\ \delta n_{\downarrow}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{P}_L \begin{bmatrix} \delta n_{\uparrow}(t) \\ \delta n_{\downarrow}(t) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

onde

$$\mathbf{P}_L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo (B.5) sujeita às condições iniciais $n_{\uparrow}(0) = N$ e $n_{\downarrow}(0) = M$ obtemos (2.8) e (2.9). Ressaltamos que os valores médios $\langle n_{\uparrow} \rangle$ e $\langle n_{\downarrow} \rangle$ que aparecem na matriz $\mathbf{P}_L$, semelhante a (2.13), são aqueles obtidos de forma exata e analítica resolvendo (B.1) e (B.2), respectivamente.

Valores médios de $\langle n_{\uparrow} \rangle$ e $\langle n_{\downarrow} \rangle$ - Uma forma alternativa de obtermos $\langle n_{\uparrow} \rangle$ e $\langle n_{\downarrow} \rangle$ é através da distribuição de estado estacionário. Como vimos na Seção 2.3.2, $\langle n_{\uparrow} \rangle$ e $\langle n_{\downarrow} \rangle$, em termos das distribuições de estado estacionário e considerando $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 1$ são escritos como

$$\begin{aligned} \langle n_{\uparrow} \rangle &= p_0(1, 0) + p_0(1, 1), \\ \langle n_{\downarrow} \rangle &= p_0(0, 1) + p_0(1, 1). \end{aligned}$$

Para isso basta resolvermos o sistema de equações 2.32, encontrando

$$\begin{aligned}
 p_0(0,0) &= \frac{x_1(y_1 w_1 - 1) - x_2(y_1 w_2 + 1)}{(x_1 + 1)(1 - y_1 w_1) + (x_2 + 1)(t_1 + y_1 w_2) + z_2 x_1(w_1 + 1) - z_2 x_2(w_2 + 1) + t_1 w_1 + w_2}, \\
 p_0(0,1) &= \frac{y_1 w_2 + t_1 + z_2 x_1}{(x_1 + 1)(1 - y_1 w_1) + (x_2 + 1)(t_1 + y_1 w_2) + z_2 x_1(w_1 + 1) - z_2 x_2(w_2 + 1) + t_1 w_1 + w_2}, \\
 p_0(1,0) &= \frac{z_2 x_2 - 1 + y_1 w_1}{(x_1 + 1)(1 - y_1 w_1) + (x_2 + 1)(t_1 + y_1 w_2) + z_2 x_1(w_1 + 1) - z_2 x_2(w_2 + 1) + t_1 w_1 + w_2}, \\
 p_0(1,1) &= \frac{w_1(t_1 + z_2 x_1) - w_2(z_2 x_2 - 1)}{(x_1 + 1)(1 - y_1 w_1) + (x_2 + 1)(t_1 + y_1 w_2) + z_2 x_1(w_1 + 1) - z_2 x_2(w_2 + 1) + t_1 w_1 + w_2},
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{1/\tau_{c\uparrow}}{\left(\frac{1}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{e\downarrow}}\right)}, & x_2 &= \frac{1/\tau_{c\downarrow}}{\left(\frac{1}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{e\downarrow}}\right)} \\
 w_1 &= \frac{1/\tau_{e\uparrow}}{\left(\frac{1}{\tau_{c\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{c\downarrow}}\right)}, & w_2 &= \frac{1/\tau_{e\downarrow}}{\left(\frac{1}{\tau_{c\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{c\downarrow}}\right)} \\
 z_1 &= \frac{1/\tau_{e\uparrow}}{\left(\frac{1}{\tau_{c\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{e\downarrow}} + \frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}}\right)}, & z_2 &= \frac{1/\tau_{e\downarrow}}{\left(\frac{1}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{c\downarrow}} + \frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}}\right)} \\
 y_1 &= \frac{1/\tau_{c\uparrow}}{\left(\frac{1}{\tau_{c\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}}\right)}, & y_2 &= \frac{1/\tau_{c\downarrow}}{\left(\frac{1}{\tau_{e\downarrow}} + \frac{1}{\tau_{c\downarrow}} + \frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}}\right)} \\
 t_1 &= \frac{1/\tau_{\downarrow\uparrow}}{\left(\frac{1}{\tau_{c\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{e\uparrow}} + \frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}}\right)}, & t_2 &= \frac{1/\tau_{\downarrow\uparrow}}{\left(\frac{1}{\tau_{e\downarrow}} + \frac{1}{\tau_{c\downarrow}} + \frac{1}{\tau_{\downarrow\uparrow}}\right)}.
 \end{aligned}$$

Apêndice C

Demonstração da Equação Mestra

Aqui mostramos o procedimento para obter a Eq.(2.14). Uma vez obtida a equação mestra, podemos usá-la para deduzir as equações de taxa e variâncias. A equação mestra descreve a evolução temporal da probabilidade de encontrarmos $n_{\uparrow}$ elétrons na ilha-up e $n_{\downarrow}$ elétrons na ilha-down (ver Fig.2.1).

Estamos interessados nas quantidades $n_{\uparrow}$ e $n_{\downarrow}$. Definimos que uma “geração” em um intervalo de tempo $(t - \Delta t, t)$ faz $n_{\uparrow}$ ou $n_{\downarrow}$ aumentar uma unidade. Por outro lado, uma “recombinação” faz $n_{\uparrow}$ e $n_{\downarrow}$ diminuir uma unidade. Desde que estas transições (g, r) ocorram espontaneamente, $n_{\uparrow}(t)$ e $n_{\downarrow}(t)$ serão quantidades que flutuam aleatoriamente, assumindo somente valores inteiros e não podendo aumentar ou diminuir instantaneamente, a menos que façam isto em unidades de um elétron.

Inicialmente vamos assumir que em $t = 0$ o número de elétrons nas ilhas é zero, ou seja, $n_{\uparrow}(0) = 0$ e $n_{\downarrow}(0) = 0$. Posteriormente veremos que esta condição será irrelevante. A probabilidade condicional que depois de um certo tempo tenhamos $n_{\uparrow}$ elétrons na ilha-up e $n_{\downarrow}$ elétrons na ilha-down, para o sistema da Fig.2.1, pode ser escrita como

$$p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t | 0, 0, 0).$$

Esta probabilidade pode ser escrita como a soma das probabilidades de 7 maneiras mutuamente exclusivas na qual os eventos $n_{\uparrow}(t)$ e $n_{\downarrow}(t)$ podem ocorrer.

Consideremos um pequeno intervalo de tempo $(t - \Delta t, t)$. Os eventos $n_{\uparrow}(t)$ e $n_{\downarrow}(t)$

podem ocorrer se qualquer um dos seguintes eventos condicionais ocorrer:

- a) $n_{\uparrow}(t - \Delta t) = n_{\uparrow} - 1$ e uma “geração” ocorre em $(t - \Delta t, t)$,
- b) $n_{\uparrow}(t - \Delta t) = n_{\uparrow} + 1$ e uma “recombinação” ocorre em $(t - \Delta t, t)$,
- c) $n_{\downarrow}(t - \Delta t) = n_{\downarrow} - 1$ e uma “geração” ocorre em $(t - \Delta t, t)$,
- d) $n_{\downarrow}(t - \Delta t) = n_{\downarrow} + 1$ e uma “recombinação” ocorre em $(t - \Delta t, t)$,
- e) $n_{\uparrow}(t - \Delta t) = n_{\uparrow} + 1$,
 $n_{\downarrow}(t - \Delta t) = n_{\downarrow} - 1$ e uma “recombinação” ocorre em $(t - \Delta t, t)$,
- f) $n_{\uparrow}(t - \Delta t) = n_{\uparrow} - 1$,
 $n_{\downarrow}(t - \Delta t) = n_{\downarrow} + 1$ e uma “geração” ocorre em $(t - \Delta t, t)$,
- g) $n_{\uparrow}(t - \Delta t) = n_{\uparrow}$,
 $n_{\downarrow}(t - \Delta t) = n_{\downarrow}$ e não ocorre “geração” ou “recombinação” em $(t - \Delta t, t)$.

Somando os eventos acima temos

$$\begin{aligned}
 p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t | 0, 0, 0) = & p(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow}, t - \Delta t) \text{ e ger } (t - \Delta t, t) | 0, 0) + \\
 & + p(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow}, t - \Delta t) \text{ e rec } (t - \Delta t, t) | 0, 0) + \\
 & + p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} - 1, t - \Delta t) \text{ e ger } (t - \Delta t, t) | 0, 0) + \\
 & + p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} + 1, t - \Delta t) \text{ e rec } (t - \Delta t, t) | 0, 0) + \quad (C.1) \\
 & + p(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow} - 1, t - \Delta t) \text{ e rec } (t - \Delta t, t) | 0, 0) + \\
 & + p(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow} + 1, t - \Delta t) \text{ e ger } (t - \Delta t, t) | 0, 0) + \\
 & + p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t - \Delta t) \text{ sem ger e rec } (t - \Delta t, t) | 0, 0).
 \end{aligned}$$

A probabilidade condicional para dois eventos A e B pode ser escrita como

$$p(A|B) = p(B|A) p(A).$$

Assim podemos escrever (C.1) como

$$\begin{aligned}
 p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t | 0, 0, 0) = & \\
 = & p(\text{ger}(t - \Delta t, t) | 0, 0; n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow}, t - \Delta t) p(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow}, t - \Delta t | 0, 0, 0) + \\
 & + p(\text{rec}(t - \Delta t, t) | 0, 0; n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow}, t - \Delta t) p(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow}, t - \Delta t | 0, 0, 0) + \\
 & + p(\text{ger}(t - \Delta t, t) | 0, 0; n_{\uparrow}, n_{\downarrow} - 1, t - \Delta t) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} - 1, t - \Delta t | 0, 0, 0) + \quad (C.2) \\
 & + p(\text{rec}(t - \Delta t, t) | 0, 0; n_{\uparrow}, n_{\downarrow} + 1, t - \Delta t) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} + 1, t - \Delta t | 0, 0, 0) + \\
 & + p(\text{rec}(t - \Delta t, t) | 0, 0; n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow} - 1, t - \Delta t) p(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow} - 1, t - \Delta t | 0, 0, 0) + \\
 & + p(\text{ger}(t - \Delta t, t) | 0, 0; n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow} + 1, t - \Delta t) p(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow} + 1, t - \Delta t | 0, 0, 0) + \\
 & + p(\text{sem ger ou rec}(t - \Delta t, t) | 0, 0; n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t - \Delta t) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t - \Delta t | 0, 0, 0).
 \end{aligned}$$

Assumindo que o processo que cria transições seja Markoviano (uma seqüência de eventos aleatórios é denominada *markoviana* quando a probabilidade de ocorrência de qualquer evento depende apenas da probabilidade de ocorrência do evento imediatamente anterior), podemos ignorar a condição inicial $n_{\uparrow}(0) = 0$ e $n_{\downarrow}(0) = 0$. Isto porque uma vez conhecidos $n_{\uparrow}$ e $n_{\downarrow}$ em um tempo posterior a $(t - \Delta t)$, qualquer informação anterior a $(t - \Delta t)$ é desprezada. De outra forma, o processo que cria transições guarda somente a informação do instante anterior. Deste modo (C.2) é escrita como

$$\begin{aligned}
 p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) = & p(\text{ger}(t - \Delta t, t); n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow}, t - \Delta t) p(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow}, t - \Delta t) + \\
 & + p(\text{rec}(t - \Delta t, t); n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow}, t - \Delta t) p(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow}, t - \Delta t) + \\
 & + p(\text{ger}(t - \Delta t, t); n_{\uparrow}, n_{\downarrow} - 1, t - \Delta t) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} - 1, t - \Delta t) + \quad (C.3) \\
 & + p(\text{rec}(t - \Delta t, t); n_{\uparrow}, n_{\downarrow} + 1, t - \Delta t) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} + 1, t - \Delta t) + \\
 & + p(\text{rec}(t - \Delta t, t); n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow} - 1, t - \Delta t) p(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow} - 1, t - \Delta t) + \\
 & + p(\text{ger}(t - \Delta t, t); n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow} + 1, t - \Delta t) p(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow} + 1, t - \Delta t) + \\
 & + p(\text{sem ger ou rec}(t - \Delta t, t); n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t - \Delta t) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t - \Delta t).
 \end{aligned}$$

Normalmente a probabilidade de uma transição ocorrer é assumida ser proporcional ao produto do número de elétrons disponíveis para fazer a transição e o número de estados desocupados no outro nível que vai aceitar estes elétrons. Contudo em vez de substituímos os termos de geração e recombinação por funções

específicas, vamos manter funções arbitrárias. Vale lembrar que estas funções dependem da distribuição de elétrons em um determinado instante. Estas funções são definidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 p(\text{ger}(t - \Delta t, t); n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow}, t - \Delta t) &\equiv g_{e\uparrow}(n_{\uparrow} - 1) \Delta t, \\
 p(\text{rec}(t - \Delta t, t); n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow}, t - \Delta t) &\equiv r_{c\uparrow}(n_{\uparrow} + 1) \Delta t, \\
 p(\text{ger}(t - \Delta t, t); n_{\uparrow}, n_{\downarrow} - 1, t - \Delta t) &\equiv g_{e\downarrow}(n_{\downarrow} - 1) \Delta t, \\
 p(\text{rec}(t - \Delta t, t); n_{\uparrow}, n_{\downarrow} + 1, t - \Delta t) &\equiv r_{c\downarrow}(n_{\downarrow} + 1) \Delta t, \\
 p(\text{rec}(t - \Delta t, t); n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow} - 1, t - \Delta t) &\equiv r_i(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow} - 1) \Delta t, \\
 p(\text{ger}(t - \Delta t, t); n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow} + 1, t - \Delta t) &\equiv g_i(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow} + 1) \Delta t, \\
 p(\text{sem ger ou rec}(t - \Delta t, t); n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t - \Delta t) &\equiv [1 - g_{e\uparrow}(n_{\uparrow}) + g_{e\downarrow}(n_{\downarrow}) + g_i(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) + \\
 &\quad + r_i(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) + r_{c\uparrow}(n_{\uparrow}) + r_{c\downarrow}(n_{\downarrow})] \Delta t.
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

De acordo com (C.4) podemos escrever (C.3) como

$$\begin{aligned}
 p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) &= g_{e\uparrow}(n_{\uparrow} - 1) \Delta t p(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow}, t - \Delta t) + \\
 &\quad + r_{c\uparrow}(n_{\uparrow} + 1) \Delta t p(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow}, t - \Delta t) + \\
 &\quad + g_{e\downarrow}(n_{\downarrow} - 1) \Delta t p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} - 1, t - \Delta t) + \\
 &\quad + r_{c\downarrow}(n_{\downarrow} + 1) \Delta t p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} + 1, t - \Delta t) + \\
 &\quad + r_i(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow} - 1) \Delta t p(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow} - 1, t - \Delta t) + \\
 &\quad + g_i(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow} + 1) \Delta t p(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow} + 1, t - \Delta t) + \\
 &\quad + [1 - g_{e\uparrow}(n_{\uparrow}) + g_{e\downarrow}(n_{\downarrow}) + g_i(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) + r_i(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) + r_{c\uparrow}(n_{\uparrow}) + r_{c\downarrow}(n_{\downarrow})] \cdot \\
 &\quad \cdot \Delta t p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t - \Delta t).
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

A eq.(C.5) pode ser escrita na seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \frac{p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t - \Delta t)}{\Delta t} = & g_{e\uparrow}(n_{\uparrow} - 1) p(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow}, t - \Delta t) + \\
 & + r_{c\uparrow}(n_{\uparrow} + 1) p(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow}, t - \Delta t) + \\
 & + g_{e\downarrow}(n_{\downarrow} - 1) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} - 1, t - \Delta t) + \\
 & + r_{c\downarrow}(n_{\downarrow} + 1) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} + 1, t - \Delta t) + \quad (C.6) \\
 & + r_i(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow} - 1) p(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow} - 1, t - \Delta t) + \\
 & + g_i(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow} + 1) p(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow} + 1, t - \Delta t) + \\
 & + [1 - g_{e\uparrow}(n_{\uparrow}) + g_{e\downarrow}(n_{\downarrow}) + g_i(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) + r_i(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) + \\
 & + r_{c\uparrow}(n_{\uparrow}) + r_{c\downarrow}(n_{\downarrow})] \cdot p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t - \Delta t).
 \end{aligned}$$

Aplicando $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ dos dois lados da eq.(C.6), finalmente obtemos a equação mestra (2.14),

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) = & g_{e\uparrow}(n_{\uparrow} - 1) p(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow}, t) + r_{c\uparrow}(n_{\uparrow} + 1) p(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow}, t) + \\
 & + g_{e\downarrow}(n_{\downarrow} - 1) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} - 1, t) + r_{c\downarrow}(n_{\downarrow} + 1) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} + 1, t) + \\
 & + r_i(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow} - 1) p(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow} - 1, t) + \\
 & + g_i(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow} + 1) p(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow} + 1, t) + \\
 & + [1 - g_{e\uparrow}(n_{\uparrow}) + g_{e\downarrow}(n_{\downarrow}) + g_i(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) + r_i(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) + r_{c\uparrow}(n_{\uparrow}) + r_{c\downarrow}(n_{\downarrow})] \cdot \\
 & \cdot p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t).
 \end{aligned}$$

Apêndice D

Dedução das Equações de Taxa

Mostramos aqui como as equações de taxa (2.1) e (2.2) podem ser deduzidas a partir da equação mestra (2.14). Em particular apresentamos a dedução de (2.1); a dedução de (2.2) é análoga. Multiplicando ambos os lados de (2.14) por $n_{\uparrow}$ e somando sobre $n_{\uparrow}$ e $n_{\downarrow}$ obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) = & \\
 = \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} g_{e\uparrow}(n_{\uparrow}-1) p(n_{\uparrow}-1, n_{\downarrow}, t) + \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} r_{c\uparrow}(n_{\uparrow}+1) p(n_{\uparrow}+1, n_{\downarrow}, t) + & \\
 + \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} r_{c\downarrow}(n_{\downarrow}+1) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}+1, t) + \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} g_i(n_{\uparrow}-1, n_{\downarrow}+1) p(n_{\uparrow}-1, n_{\downarrow}+1, t) + & \\
 + \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} r_i(n_{\uparrow}+1, n_{\downarrow}-1) p(n_{\uparrow}+1, n_{\downarrow}-1, t) + \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} g_{e\downarrow}(n_{\downarrow}-1) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}-1, t) - & \\
 - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} g_{e\uparrow}(n_{\uparrow}) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} g_{e\downarrow}(n_{\downarrow}) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - & \\
 - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} g_i(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} r_i(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - & \\
 - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} r_{c\uparrow}(n_{\uparrow}) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} r_{c\downarrow}(n_{\downarrow}) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t). &
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

Substituindo as taxas de geração e recombinação definidas na Fig.1.6 em (D.1)

temos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) = \\
& = \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} \left(\frac{N_{\uparrow} - (n_{\uparrow} - 1)}{\tau_{e\uparrow}} \right) p(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow}, t) + \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} \frac{(n_{\uparrow} + 1)}{\tau_{c\uparrow}} p(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow}, t) + \\
& + \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} \left(\frac{N_{\downarrow} - (n_{\downarrow} - 1)}{\tau_{e\downarrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} - 1, t) + \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} \frac{(n_{\downarrow} + 1)}{\tau_{c\downarrow}} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} + 1, t) + \\
& + \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} (n_{\downarrow} + 1) \left(\frac{N_{\uparrow} - (n_{\uparrow} - 1)}{\tau_{\downarrow\uparrow}} \right) p(n_{\uparrow} - 1, n_{\downarrow} + 1, t) + \\
& + \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} (n_{\uparrow} + 1) \left(\frac{N_{\downarrow} - (n_{\downarrow} - 1)}{\tau_{\uparrow\downarrow}} \right) p(n_{\uparrow} + 1, n_{\downarrow} - 1, t) - \\
& - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} \left(\frac{N_{\uparrow} - n_{\uparrow}}{\tau_{e\uparrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} \left(\frac{N_{\downarrow} - n_{\downarrow}}{\tau_{e\downarrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - \\
& - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} n_{\uparrow} \left(\frac{N_{\downarrow} - n_{\downarrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} n_{\downarrow} \left(\frac{N_{\uparrow} - n_{\uparrow}}{\tau_{\downarrow\uparrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - \\
& - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} \frac{n_{\uparrow}}{\tau_{c\uparrow}} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} \frac{n_{\downarrow}}{\tau_{c\downarrow}} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t).
\end{aligned} \tag{D.2}$$

Reindexando os somatórios e usando as condições em (2.16) (condições de “end-point”), (D.2) se reduz a

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) = \\
& = \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} \left(\frac{N_{\uparrow} - n_{\uparrow}}{\tau_{e\uparrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) + \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} \left(\frac{N_{\uparrow} - n_{\uparrow}}{\tau_{e\uparrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) + \\
& + \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} \frac{n_{\uparrow}^2}{\tau_{c\uparrow}} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} \frac{n_{\uparrow}}{\tau_{c\uparrow}} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) + \\
& + \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} n_{\downarrow} \left(\frac{N_{\uparrow} - n_{\uparrow}}{\tau_{\downarrow\uparrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) + \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\downarrow} \left(\frac{N_{\uparrow} - n_{\uparrow}}{\tau_{\downarrow\uparrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) + \\
& + \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow}^2 \left(\frac{N_{\downarrow} - n_{\downarrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} \left(\frac{N_{\downarrow} - n_{\downarrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) + \\
& + \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} \left(\frac{N_{\downarrow} - n_{\downarrow}}{\tau_{e\downarrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) + \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} \frac{n_{\downarrow}}{\tau_{c\downarrow}} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow} + 1, t) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} \left(\frac{N_{\uparrow} - n_{\uparrow}}{\tau_{e\uparrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} \left(\frac{N_{\downarrow} - n_{\downarrow}}{\tau_{e\downarrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - \\
& - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} n_{\downarrow} \left(\frac{N_{\uparrow} - n_{\uparrow}}{\tau_{\downarrow\uparrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow}^2 \left(\frac{N_{\downarrow} - n_{\downarrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - \\
& - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} \frac{n_{\uparrow}^2}{\tau_{c\uparrow}} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} \frac{n_{\downarrow}}{\tau_{c\downarrow}} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t).
\end{aligned} \tag{D.3}$$

Cancelando termos semelhantes em D.3 obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) &= \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} \left(\frac{N_{\uparrow} - n_{\uparrow}}{\tau_{e\uparrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} \frac{n_{\uparrow}}{\tau_{c\uparrow}} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) + \\
&+ \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\downarrow} \left(\frac{N_{\uparrow} - n_{\uparrow}}{\tau_{\downarrow\uparrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) - \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} \left(\frac{N_{\downarrow} - n_{\downarrow}}{\tau_{\uparrow\downarrow}} \right) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t).
\end{aligned} \tag{D.4}$$

De acordo com as definições do número médio de partículas

$$\begin{aligned}
n_{\uparrow}(t) &= \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\uparrow} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t), \\
n_{\downarrow}(t) &= \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\downarrow} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t),
\end{aligned}$$

podemos escrever D.4 da seguinte maneira

$$\boxed{\frac{d}{dt} n_{\uparrow}(t) = \frac{N_{\uparrow} - n_{\uparrow}(t)}{\tau_{e\uparrow}} - \frac{n_{\uparrow}(t)}{\tau_{c\uparrow}} + \frac{n_{\downarrow}(t) [N_{\uparrow} - n_{\uparrow}(t)]}{\tau_{\downarrow\uparrow}} - \frac{n_{\uparrow}(t) [N_{\downarrow} - n_{\downarrow}(t)]}{\tau_{\uparrow\downarrow}}},$$

que é a equação de taxa (2.1).

Apêndice E

Cálculo das Funções Correlação

O procedimento adotado aqui para a determinação das funções correlação segue aquele do Apêndice B de [8]. Como exemplo vamos determinar a função correlação $h_{c\downarrow g\downarrow}(t)$. As demais funções podem ser obtidas seguindo o mesmo procedimento. Por definição $h_{c\downarrow g\downarrow}(t)$ é a taxa média no “ensemble” de saltos $r_{c\downarrow}$, no tempo t , dado que houve um salto $g\downarrow$ em $t = 0$. De outra forma temos

$$h_{c\downarrow g\downarrow}(t) = \sum_{n_{\uparrow}=0, n_{\downarrow}=1}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} r_{c\downarrow}(n_{\downarrow}) p_{g\downarrow}(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t), \quad (\text{E.1})$$

onde $p_{g\downarrow}(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t)$ é a distribuição de probabilidade dos elétrons nas ilhas-up e down, no tempo t , dado que houve uma transferência $g\downarrow$ em $t = 0$. A soma sobre $n_{\downarrow}$ exclui o estado $n_{\downarrow} = 0$ porque ocorreu uma transferência $g\downarrow$ em $t = 0$.

A distribuição de probabilidade $p_{g\downarrow}(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t)$ é dada por

$$p_{g\downarrow}(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t) = \sum_{N=0, M=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}+1} p_{g\downarrow}(N, M) p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t | N, M, 0), \quad (\text{E.2})$$

em que $p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t | N, M, 0)$ é a probabilidade *condicional* de encontrarmos $n_{\uparrow}$ e $n_{\downarrow}$ elétrons no tempo t , na ilha-up e down, respectivamente, dado que haviam N elétrons na ilha-up e M elétrons na ilha-down em $t = 0$. Como uma transferência $g\downarrow$ ocorreu em $t = 0$, o estado $N_{\downarrow}$ tem um elétron a mais, $N_{\downarrow} + 1$. A distribuição de probabilidade dos elétrons depois que um salto $g\downarrow$ ocorreu em $t = 0$ é escrita como $p_{g\downarrow}(N, M)$. Esta grandeza é proporcional ao produto da probabilidade de estado estacionário de encontrarmos N e $M - 1$ elétrons nas ilhas-up e down, respectivamente, pela

probabilidade de um salto $g_{\downarrow}$ ocorrer:

$$p_{g_{\downarrow}}(N, M) = \frac{1}{D} p_0(N, M-1) g_{\downarrow}(M-1) \quad (\text{E.3})$$

O fator de normalização D é dado por

$$D = \sum_{N=0, M=1}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} p_0(N, M-1) g_{\downarrow}(M) = \sum_{N=0, M=1}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} p_0(N, M-1) \frac{(N_{\downarrow} - M)}{\tau_{e\downarrow}} \equiv \frac{(N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle)}{\tau_{e\downarrow}} = \bar{h}_{e\downarrow}. \quad (\text{E.4})$$

Estamos considerando que o sistema estava no regime de estado estacionário antes do salto $g_{\downarrow}$ ocorrer, pois estamos interessados nas flutuações em relação ao regime de estado estacionário. De acordo com E.2, E.3 e E.4 e usando a definição

$$n_{\downarrow}(t) = \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\downarrow} p(n_{\uparrow}, n_{\downarrow}, t), \quad (\text{E.5})$$

podemos escrever E.1 como

$$h_{c\downarrow g\downarrow}(t) = \frac{1}{(N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle) \tau_{c\downarrow}} \sum_{N=0, M=0}^{N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} n_{\downarrow}(N, M, t) p_0(N, M-1) [N_{\downarrow} - (M-1)]. \quad (\text{E.6})$$

Substituindo a expressão para $n_{\downarrow}(N, M, t)$ ¹, dada por (2.9) com a matriz $\mathbf{P}_L$ de (2.13) (lembramos que nesta matriz os valores médios $\langle n_{\uparrow} \rangle$ e $\langle n_{\downarrow} \rangle$ são obtidos resolvendo-se as equações de taxa (2.1) e (2.2) com $\tau_{\uparrow\downarrow} \neq \tau_{\downarrow\uparrow}$), em (E.6) e subtraindo o limite para tempos grandes de $h_{c\downarrow g\downarrow}(t)$, encontramos a seguinte função correlação reduzida

$$\begin{aligned} g_{c\downarrow g\downarrow}(t) &= h_{c\downarrow g\downarrow}(t) - \bar{h}_{c\downarrow} = \\ &= \frac{e^{\lambda_{+}t}}{(N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle) \tau_{c\downarrow}} \left(\frac{\lambda_{+} - P_{11}}{P_{12}} \right) \left\{ -a_{+} \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle - b_{+} [\langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle + \langle n_{\downarrow} \rangle - N_{\downarrow}] \right\} + \\ &+ \frac{e^{\lambda_{-}t}}{(N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle) \tau_{c\downarrow}} \left(\frac{\lambda_{-} - P_{11}}{P_{12}} \right) \left\{ -a_{-} \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle + b_{+} [\langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle + \langle n_{\downarrow} \rangle - N_{\downarrow}] \right\}. \quad (\text{E.7}) \end{aligned}$$

As variâncias em (E.7) estão definidas nas equações (2.48), (2.49) e (2.50).

¹A relevância de expressões analíticas para $n_{\uparrow}(t)$ e $n_{\downarrow}(t)$, ressaltada na seção 2.1, aparece aqui. Estas nos possibilitam obter expressões analíticas para as funções correlação.

Calculando a transformada de Fourier cosseno de (E.7) e tomando o limite de $\omega = 0$ obtemos

$$G_{c\downarrow g\downarrow}(0) = \left[\langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle + \langle n_{\downarrow} \rangle - N_{\downarrow} \right] \left(\frac{1}{(N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle) \tau_{c\downarrow}} \frac{P_{11}}{P_{12}} \frac{P_{12}}{\det \mathbf{P}_L} \right) + \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \left(\frac{1}{(N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle) \tau_{c\downarrow}} \left[\frac{1}{P_{12}} - \frac{P_{11}}{P_{12}} \frac{P_{22}}{\det \mathbf{P}_L} \right] \right). \quad (\text{E.8})$$

A equação (E.8) expressa a “correlação” entre duas transferências consecutivas de elétrons. De outra forma, $G_{c\downarrow g\downarrow}(0)$ indica a taxa média no “ensemble” de um salto $r_{c\downarrow}$, dado que houve um salto $g_{\downarrow}$. Ressaltamos que as funções correlação reduzidas são expressas em termos das variâncias, como podemos verificar de (E.8). De forma semelhante podemos deduzir as demais funções correlação reduzidas.

A seguir apresentamos todas as funções correlação reduzidas, no limite de $\omega = 0$. Estas devem ser incluídas na expressão (3.26) para o *shot noise*.

$$G_{c\downarrow g\downarrow}(0) = \left[\langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle + \langle n_{\downarrow} \rangle - N_{\downarrow} \right] \left(\frac{1}{(N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle) \tau_{c\downarrow}} \frac{P_{11}}{P_{12}} \frac{P_{12}}{\det \mathbf{P}_L} \right) + \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \left(\frac{1}{(N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle) \tau_{c\downarrow}} \left[\frac{1}{P_{12}} - \frac{P_{11}}{P_{12}} \frac{P_{22}}{\det \mathbf{P}_L} \right] \right).$$

$$G_{c\downarrow g\uparrow}(0) = \left[\langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle + \langle n_{\uparrow} \rangle - N_{\uparrow} \right] \left(\frac{1}{(N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle) \tau_{c\downarrow}} \left[\frac{1}{P_{12}} - \frac{P_{11}}{P_{12}} \frac{P_{22}}{\det \mathbf{P}_L} \right] \right) + \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \left(\frac{1}{(N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle) \tau_{c\downarrow}} \frac{P_{11}}{P_{12}} \frac{P_{12}}{\det \mathbf{P}_L} \right).$$

$$G_{c\downarrow c\uparrow}(0) = \left[\langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle - \langle n_{\uparrow} \rangle \right] \left(\frac{-1}{\langle n_{\uparrow} \rangle \tau_{c\downarrow}} \left[\frac{1}{P_{12}} - \frac{P_{11}}{P_{12}} \frac{P_{22}}{\det \mathbf{P}_L} \right] \right) + \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \left(\frac{-1}{\langle n_{\uparrow} \rangle \tau_{c\downarrow}} \frac{P_{11}}{P_{12}} \frac{P_{12}}{\det \mathbf{P}_L} \right).$$

$$G_{c\downarrow c\downarrow}(0) = \left[\langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle - \langle n_{\downarrow} \rangle \right] \left(\frac{-1}{\langle n_{\downarrow} \rangle \tau_{c\downarrow}} \frac{P_{11}}{P_{12}} \frac{P_{12}}{\det \mathbf{P}_L} \right) + \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \left(\frac{-1}{\langle n_{\downarrow} \rangle \tau_{c\downarrow}} \left[\frac{1}{P_{12}} - \frac{P_{11}}{P_{12}} \frac{P_{22}}{\det \mathbf{P}_L} \right] \right).$$

$$G_{g\downarrow c\downarrow}(0) = \left[\langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle - \langle n_{\downarrow} \rangle \right] \left(\frac{1}{\langle n_{\downarrow} \rangle \tau_{e\downarrow}} \frac{P_{11}}{P_{12}} \frac{P_{12}}{\det \mathbf{P}_L} \right) + \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \left(\frac{1}{\langle n_{\downarrow} \rangle \tau_{e\downarrow}} \left[\frac{1}{P_{12}} - \frac{P_{11}}{P_{12}} \frac{P_{22}}{\det \mathbf{P}_L} \right] \right).$$

$$G_{g\downarrow c\uparrow}(0) = \left[\langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle - \langle n_{\uparrow} \rangle \right] \left(\frac{1}{\langle n_{\uparrow} \rangle \tau_{e\downarrow}} \left[\frac{1}{P_{12}} - \frac{P_{11}}{P_{12}} \frac{P_{22}}{\det \mathbf{P}_L} \right] \right) + \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \left(\frac{1}{\langle n_{\uparrow} \rangle \tau_{e\downarrow}} \frac{P_{11}}{P_{12}} \frac{P_{12}}{\det \mathbf{P}_L} \right).$$

$$G_{g\downarrow g\uparrow}(0) = \left[\langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle + \langle n_{\uparrow} \rangle - N_{\uparrow} \right] \left(\frac{-1}{(N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle) \tau_{e\downarrow}} \left[\frac{1}{P_{12}} - \frac{P_{11}}{P_{12}} \frac{P_{22}}{\det \mathbf{P}_L} \right] \right) + \\ + \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \left(\frac{-1}{(N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle) \tau_{e\downarrow}} \frac{P_{11}}{P_{12}} \frac{P_{12}}{\det \mathbf{P}_L} \right).$$

$$G_{g\downarrow g\downarrow}(0) = \left[\langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle + \langle n_{\downarrow} \rangle - N_{\downarrow} \right] \left(\frac{-1}{(N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle) \tau_{e\downarrow}} \frac{P_{11}}{P_{12}} \frac{P_{12}}{\det \mathbf{P}_L} \right) + \\ + \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \left(\frac{-1}{(N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle) \tau_{e\downarrow}} \left[\frac{1}{P_{12}} - \frac{P_{11}}{P_{12}} \frac{P_{22}}{\det \mathbf{P}_L} \right] \right).$$

$$G_{c\uparrow g\uparrow}(0) = \left[\langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle + \langle n_{\uparrow} \rangle - N_{\uparrow} \right] \left(\frac{1}{(N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle) \tau_{c\uparrow}} \frac{P_{22}}{\det \mathbf{P}_L} \right) + \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \left(\frac{-1}{(N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle) \tau_{c\uparrow}} \frac{P_{12}}{\det \mathbf{P}_L} \right).$$

$$G_{c\uparrow g\downarrow}(0) = \left[\langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle + \langle n_{\downarrow} \rangle - N_{\downarrow} \right] \left(\frac{-1}{(N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle) \tau_{c\uparrow}} \frac{P_{12}}{\det \mathbf{P}_L} \right) + \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \left(\frac{1}{(N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle) \tau_{c\uparrow}} \frac{P_{22}}{\det \mathbf{P}_L} \right).$$

$$G_{c\uparrow c\downarrow}(0) = \left[\langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle - \langle n_{\downarrow} \rangle \right] \left(\frac{1}{\langle n_{\downarrow} \rangle \tau_{c\uparrow}} \frac{P_{12}}{\det \mathbf{P}_L} \right) + \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \left(\frac{-1}{\langle n_{\downarrow} \rangle \tau_{c\uparrow}} \frac{P_{22}}{\det \mathbf{P}_L} \right).$$

$$G_{c\uparrow c\uparrow}(0) = \left[\langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle - \langle n_{\uparrow} \rangle \right] \left(\frac{-1}{\langle n_{\uparrow} \rangle \tau_{c\uparrow}} \frac{P_{22}}{\det \mathbf{P}_L} \right) + \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \left(\frac{1}{\langle n_{\uparrow} \rangle \tau_{c\uparrow}} \frac{P_{12}}{\det \mathbf{P}_L} \right).$$

$$G_{g\uparrow c\uparrow}(0) = \left[\langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle - \langle n_{\uparrow} \rangle \right] \left(\frac{1}{\langle n_{\uparrow} \rangle \tau_{e\uparrow}} \frac{P_{22}}{\det \mathbf{P}_L} \right) + \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \left(\frac{-1}{\langle n_{\uparrow} \rangle \tau_{e\uparrow}} \frac{P_{12}}{\det \mathbf{P}_L} \right).$$

$$G_{g\uparrow c\downarrow}(0) = \left[\langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle - \langle n_{\downarrow} \rangle \right] \left(\frac{-1}{\langle n_{\downarrow} \rangle \tau_{e\uparrow}} \frac{P_{12}}{\det \mathbf{P}_L} \right) + \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \left(\frac{1}{\langle n_{\downarrow} \rangle \tau_{e\uparrow}} \frac{P_{22}}{\det \mathbf{P}_L} \right).$$

$$G_{g\uparrow g\downarrow}(0) = \left[\langle (\delta n_{\downarrow})^2 \rangle + \langle n_{\downarrow} \rangle - N_{\downarrow} \right] \left(\frac{1}{(N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle) \tau_{e\uparrow}} \frac{P_{12}}{\det \mathbf{P}_L} \right) + \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \left(\frac{-1}{(N_{\downarrow} - \langle n_{\downarrow} \rangle) \tau_{e\uparrow}} \frac{P_{22}}{\det \mathbf{P}_L} \right).$$

$$G_{g\uparrow g\uparrow}(0) = \left[\langle (\delta n_{\uparrow})^2 \rangle + \langle n_{\uparrow} \rangle - N_{\uparrow} \right] \left(\frac{-1}{(N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle) \tau_{e\uparrow}} \frac{P_{22}}{\det \mathbf{P}_L} \right) + \langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle \left(\frac{1}{(N_{\uparrow} - \langle n_{\uparrow} \rangle) \tau_{e\uparrow}} \frac{P_{12}}{\det \mathbf{P}_L} \right).$$

No limite $\tau_{e\downarrow} \rightarrow \infty$ e $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow} = \tau_i$, estas funções correlação se reduzem àquelas da Ref.[8] (ver tabela I), diminuindo de 16 para 12, pois $G_{g\downarrow g\downarrow}(0) = G_{g\downarrow g\uparrow}(0) = G_{g\downarrow c\uparrow}(0) = G_{g\downarrow c\downarrow}(0) = 0$.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Das Sarma, J. Fabian, X. Hu, and I. Zutic, Theoretical Perspectives on Spintronics and Spin-Polarized Transport, cond-mat/0002256.
- [2] G.A. Prinz, Magnetoelectronics *Science* **282**, 1660 (1998).
- [3] J.C. Egues, Spin-Dependent Perpendicular Magnetotransport through a Tunable ZnSe/Zn_{1-x}Mn_xSe Heterostructure: A Possible Spin Filter? *Phys. Rev. Lett.* **80**,4578 (1998).
- [4] R. Fiederling, M. Keim, G. Reuscher, W. Ossau, G. Schmidt, A. Waag, and L.W. Molenkamp, Injection and detection of a spin-polarized current in a light-emitting diode, *Nature (London)* **402**, 787 (1999).
- [5] J.H. Davies, P. Hyldgaard, S. Hershfield, and J.W. Wilkins, Classical theory of shot noise in resonant tunneling, *Phys. Rev. B* **46**, 9620 (1992).
- [6] J.C. Egues, S. Hershfield, and J.W. Wilkins, Zero-frequency shot noise for tunneling through a system with internal scattering, *Phys. Rev. B* **49**, 13517 (1994).
- [7] Y.P. Li, A. Zaslavsky, M. Santos, and M. Shayegan Noise characteristics of double-barrier resonant-tunneling structures below 10 kHz, *Phys. Rev. B* **41**, 8388 (1990).
- [8] J.C. Egues and J.W. Wilkins, Spin-dependent phenomena in digital-magnetic heterostructures: Clustering and phase-space filling effects, *Phys. Rev. B* **58**, R16012 (1998).

- [10] J.C. Egues and J.W. Wilkins, Spin-dependent phenomena in digital-magnetic heterostructures: Clustering and phase-space filling effects, *Phys. Rev. B* **58**, R16012 (1998).
- [11] J. Kossut, Semiconductors and Semi-metals-Dilute Magnetic Semiconductors, Editado por J.K. Furdyna and J. Kossut (Academic Press, San Diego, 1988), vol. 25, p.183.
- [12] S. Luryi, Frequency Limit of Double-Barrier Resonant-Tunneling Oscillators, *Appl. Phys. Lett.* **47**, 490 (1985).
- [13] G. B. Lesovik, Excess Quantum Noise in 2D Ballistic Point Contacts, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **49**, 513 (1989) [*JETP Lett.* **49**, 592 (1989)].
- [14] B. Yurke and G. P. Kochanski, Momentum Noise in Vacuum Tunneling Transducers, *Phys. Rev. B* **41**, 8184 (1990).
- [15] S. Ramo, *Proc. IRE* **27**, 584 (1939); W. Shockley, *J. Appl. Phys.* **9**, 635 (1938).
- [16] J.W. Wilkins, S. Hershfield, J.H. Davies, P. Hyldgaard and C. J. Stanton, Noise as a diagnostic of tunneling mechanisms, *Physica Scripta* **T42**, 115-121 (1992).
- [17] J.F. Estanislau, "Shot Noise" Dependente de Spin em Sistemas com Tunelamento: Modelo Coerente, Disertação de Mestrado, Instituto de Física de São Carlos (IFSC), Universidade de São Paulo (USP), 2000.
- [18] M. Lax, Fluctuations from the nonequilibrium Steady State, *Rev. Mod. Phys.* **32**, 25 (1960).
- [19] G. Iannaccone, M. Macucci, and B. Pellegrini, Shot noise in resonant-tunneling structures *Phys. Rev. B* **55**, 4539 (1997).
- [20] V.I. Sugarov and S. A. Yatskevich, Electron tunneling in parallel electric and magnetic fields through a double-barrier heterojunction doped with magnetic impurities *Sov. Tech. Phys. Lett.* **18**, 134 (1992).
- [21] M. Oestreich, J. Hübner, D. Hagele, P.J. Klar, W. Heimbrodt, W.W. Rühle, D.E. Ashenford, and B. Lunn, Spin injection into semiconductors, *Appl. Phys. Lett.* **74**, 1251 (1999).

- [22] Y. Ohno, D.K. Young, B. Beschoten, F. Matsukura, H. Ohno, and D.D. Awschalom, Electrical spin injection in a ferromagnetic semiconductor heterostructure, *Nature (London)* bf 402, 790 (1999).
- [23] K.M. van Vliet and J.R. Fasset, *Fluctuations Phenomena in Solids*, edited by R.E. Burguess (Academic, New York, 1965), p.267.
- [24] J.C. Egues, Spin-Dependent Phenomena in Mn-Based Semiconductor Heterostructures, Ph.D. dissertation, The Ohio State University, 1996.
- [25] Sh. Kogan, *Electronic Noise and Fluctuations in Solids* (Cambridge University Press, 1996), p.17
- [26] H. Mizuta and T. Tanoue, The Physics and Applications of Resonant Tunneling Diodes, Cambridge University Press, 1995.
- [27] F.N.H. Robinson, Noise in Electrical Circuits, Oxford University Press, 1962.
- [28] A. van der Ziel, Noise in Solid State Devices and Circuits, John Wiley & Sons, 1986.
- [29] N.W. Ashcroft and N.D. Mermin, Solid State Physics, Saunder College Publishing, 1976.