UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

FELIPE FERNANDES FANCHINI

Desacoplamento dinâmico de estados quânticos via campos contínuos de alta freqüência

São Carlos

2008

FELIPE FERNANDES FANCHINI

Desacoplamento dinâmico de estados quânticos via campos contínuos de alta frequência

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Física Básica Orientador: Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano

> São Carlos 2008

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação IFSC/USP

Fanchini, Felipe Fernandes. Desacoplamento dinâmico de estados quânticos via campos contínuos de alta frequência. / Felipe Fernandes Fanchini; orientador Reginaldo de Jesus Napolitano.-- São Carlos, 2008. 119 p.

Tese (Doutorado em Ciências - Área de concentração: Física Básica) – Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo.

1. Computação quântica. 2. Desacoplamento dinâmico. 3. Emaranhamento. I. Título.



Caixa Postal 369 13560-970 São Carlos, SP Av. Trabalhador São-carlense, 400 13566-590 - São Carlos, SP

> Fone/Fax: (16) 3373. 9777 www.ifsc.usp.br svposgrad@ifsc.usp.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Felipe Fernandes Fanchini

Tese apresentada ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências. Área de Concentração: Física Básica.

Aprovado em: 19/12/2008

Comissão Julgadora

Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano Instituição: IFSC/USP Assinatura

Prof. Dr. Marcos Cesar de Oliveira Instituição: UNICAMP As

Assinatura

Prof. Dr. Eduardo Ribeiro de Azevêdo Instituição: IFSC/USP Assina

90 Assinatura Eduar

Prof. Dr. Celso Jorge Villas Bóas Instituição: UFSCar As

Assinatura

Prof. Dr. José Antonio Roversi Instituição: UNICAMP

Assinatura

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano por seu apoio e dedicação durante todos estes anos de minha formação. O seu papel e exemplo foram fundamentais para a realização desta tese.

Aos meus avós Humberto Fanchini (*in memoriam*) e Irma Mazzucco Fanchini e Antonio de Araújo Fernandes e Eugênia Passos Fernandes pelos seus exemplos de vida e de hombridade. Apesar de pouco nos vermos atualmente, eles são e serão as pessoas em que sempre me espelharei.

Aos meus pais Humberto Fanchini Filho e Ana Lúcia Fernandes Fanchini pelas suas dedicações aos filhos e oportunidades dadas durante toda a nossa vida. É a vocês que dedico esta tese.

Aos meus irmâos Rafael Fernandes Fanchini e Humberto Fanchini Neto que estão sempre comigo em meus pensamentos. Nossa amizade é muito importante para mim.

Ao meu amor Carla Vizconde Veraszto, minha maior paixão e pessoa fundamental na minha vida. Agradeço imensamente pelo carinho e dedicação. Sem você nada disso seria possível. Te amo.

À pequena Gabriela Vizconde Veraszto Fanchini, o meu tesouro, que apesar de tão nova me trouxe aprendizados e alegrias sem tamanho. A vida ao seu lado é um enorme presente.

Finalmente, agradeço ao Instituto de Física de Sâo Carlos e a todas as pessoas que de forma direta ou indireta contribuiram na minha formação profissional. A todos vocês o meu muito obrigado.

Resumo

FANCHINI, F.F. Desacoplamento dinâmico de estados quânticos via campos contínuos de alta frequência. 2008. 119 p. Tese (Doutorado) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

Nesta tese de doutoramento nós tivemos como principal objetivo desenvolver novos métodos para proteção da informação e computação quântica. Começamos, de forma introdutória, ilustrando os conceitos básicos e fundamentais da teoria da informação e computação quântica, como os bits quânticos (qubits), o operador densidade, o emaranhamento e as operações lógicas quânticas. Na seqüência, apresentamos os formalismos utilizados para tratar sistemas abertos, ou seja, sujeitos a erros, além das principais técnicas existentes a fim de proteger a informação quântica, como os códigos de correção de erros, os subespaços livres de erros e o desacoplamento dinâmico. Finalmente, baseando-nos na técnica de desacoplamento dinâmico, introduzimos um esquema de proteção para operações lógicas quânticas e o emaranhamentos entre qubits utilizando campos de alta freqüência. Ilustramos em detalhes a proteção da operação lógica quântica de Hadamard e do emaranhamento entre dois qubits, além de apresentarmos as principais diferenças e vantagens de nosso método quando comparado às técnicas tradicionais de desacoplamento dinâmico.

Palavras-chave: Computação quântica. Desacoplamento dinâmico. Emaranhamento.

Abstract

FANCHINI, F.F. Dynamical decoupling of quantum states by high-frequency continuous fields. 2008. 119 p. Thesis (Doctoral) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

The main objective of this thesis is the development of a new procedure for quantum information and computation protection. We begin by briefly illustrating the basic concepts of quantum information and computation theory, such as quantum bits (qubits), density matrix operator, entanglement, and quantum logical operations. Subsequently, we present the formalism utilized to treat quantum open systems, i.e., systems subjected to errors, and the main strategies to protect quantum information, such as quantum error correction codes, decoherence-free subspaces, and dynamical decoupling. Finally, based on the dynamical decoupling strategies, we introduce a procedure to protect quantum logical operations and entanglement utilizing high-frequency continuous fields. We illustrate, in details, the protection of a Hadamard quantum gate and of entanglement between two qubits, and present the differences and advantages of our procedure when compared with traditional techniques of dynamical decoupling.

Keywords: Quantum computation. Dynamical decoupling. Entanglement.

Lista de Figuras

Figura 2.1	Emaranhamento entre três qubits	23
Figura 3.1	Efeito da descoerência na esfera de Bloch	46
Figura 3.2	Efeito do erro de bit-flip na esfera de Bloch	47
Figura 3.3	Efeito do erro de amplitude na esfera de Bloch	49
Figura 5.1	Fidelidade da operação lógica quântica de Hadamard em função do	
	tempo, da temperatura e da freqüência do campo protetor, para uma	
	classe de erro geral.	66
Figura 5.2	Fidelidade da operação lógica quântica de Hadamard protegida em	
	função do tempo, da densidade espectral do reservatório e da freqüên-	
	cia do campo protetor. Classe de erro: descoerência.	75
Figura 5.3	Taxa de perda de fidelidade da operação lógica quântica de Hadamard	
	desprotegida em função da densidade espectral do reservatório. Classe	
	de erro: descoerência.	76
Figura 5.4	Fidelidade da operação lógica quântica de Hadamard desprotegida em	
	função da condição inicial do sistema. Densidade espectral do reser-	
	vatório: super ôhmica. Classe de erro: descoerência.	77
Figura 5.5	Fidelidade da operação lógica quântica de Hadamard protegida em	
	função da condição inicial do sistema. Densidade espectral do reser-	
	vatório: super ôhmica. Classe de erro: descoerência.	77
Figura 5.6	A menor fidelidade, dentre todas as condições iniciais do sistema, da	
	operação lógica quântica de Hadamard parcialmente protegida em fun-	
	ção das magnitudes dos acoplamentos dos reservatórios. Densidade	
	espectral do reservatório: ôhmica e super ôhmica. Classes de erros:	
	descoerência, bit-flip e amplitude.	78

Fidelidade da operação lógica quântica de Hadamard protegida e des-	
protegida em função das condições iniciais do sistema. Densidade es-	
pectral do reservatório: ôhmica (bit-flip e amplitude) e super ôhmica	
(descoerência). Classes de erros: descoerência, bit-flip e amplitude	80
Fidelidade da operação lógica quântica de Hadamard protegida e des-	
protegida em função das condições iniciais do sistema. Densidade es-	
pectral do reservatório: super ôhmica. Classes de erros: descoerência,	
bit-flip e amplitude.	80
Concurrence em função do tempo. Qubits acoplados a reservatórios	
independentes. Densidade espectral do reservatorio: ohmica. Classes	~ ~
de erros: descoerência, bit-flip e amplitude	89
Fidelidade dos estados de Bell em função do tempo. Qubits acoplados	
a reservatórios independentes	89
Concurrence em função do tempo para dois estados quânticos distintos	
que inicialmente possuem o mesmo grau de emaranhamento. Aproxi-	
mação Markoviana e dinâmica livre, sem proteção. Classe de erro:	
erro de amplitude.	104
	Fidelidade da operação lógica quântica de Hadamard protegida e des- protegida em função das condições iniciais do sistema. Densidade es- pectral do reservatório: ôhmica (bit-flip e amplitude) e super ôhmica (descoerência). Classes de erros: descoerência, bit-flip e amplitude Fidelidade da operação lógica quântica de Hadamard protegida e des- protegida em função das condições iniciais do sistema. Densidade es- pectral do reservatório: super ôhmica. Classes de erros: descoerência, bit-flip e amplitude

Sumário

1	Introdução	12
2	Conceitos fundamentais	14
2.1	Bits quânticos	14
2.1.1	Estados puros e mistos	14
2.2	Operador densidade	15
2.2.1	Operador densidade para estados puros	16
2.2.2	Operador densidade para misturas estatísticas	17
2.2.3	População e coerência	17
2.2.4	Operação traço parcial	18
2.2.5	Operação transposição parcial	19
2.2.6	Vetor de Bloch	20
2.3	Emaranhamento	21
2.4	Medida de emaranhamento	24
2.4.1	Entropia do emaranhamento	25
2.4.2	Negatividade	25
2.4.3	Concurrence	26
2.5	Fidelidade	28
2.6	Operações lógicas quânticas	30
2.6.1	Operações de 1 qubit	31
2.6.2	Operações de 2 qubits	33
2.7	Formalismo de interação	35
3	Sistemas abertos	38
3.1	Representação de Kraus	39

3.2	Equação mestra de Redfield	41
3.3	Classes de erros	43
3.3.1	Erro de descoerência	43
3.3.2	Erro de bit-flip	46
3.3.3	Erro de amplitude	48
4	Métodos de proteção contra erros	50
4.1	Códigos de correção de erros	50
4.2	Subespaços livres de erros	53
4.3	Desacoplamento dinâmico	54
5	Desacoplamento dinâmico contínuo para o caso de 1 qubit	57
5.1	Desacoplando continuamente operações de 1 qubit	57
5.1.1	Equação mestra para um único reservatório	58
5.1.2	Proteção da operação lógica de Hadamard	62
5.2	Classes independentes de erros	66
5.2.1	Equação mestra para reservatórios independentes	67
5.2.2	Erros independentes de descoerência, bit-flip e amplitude	70
5.2.3	Proteção contra erros de descoerência	72
5.2.4	Proteção contra classes independentes de erros	78
6	Desacoplamento dinâmico contínuo para o caso de 2 qubits	81
6.1	Proteção de estados emaranhados	81
6.1.1	Configuração dos campos externos protetores	82
6.1.2	Equação mestra para 2 qubits	84
6.1.3	Proteção contra classes independentes de erros	86
7	Conclusão	91
Refer	rências	98
Apên	ndices	98
A	Expansão de Magnus	99

В	Morte Súbita de Emaranhamento	102
\mathbf{C}	Apêndice do capítulo 5	105
C.1	Hamiltoniano geral para 1 qubit	. 105
C.2	Hamiltoniano de interação	. 106
C.3	Cálculo de $D_{\alpha,\beta}$ para o caso de banhos escalares	. 107
C.4	Correlação do banho térmico	. 109
C.5	Correlação do banho térmico na versão integral	. 114
C.6	Operador evolução para o caso de dois campos	. 116
D	Apêndice do capítulo 6	118
D.1	Matrizes de rotação	. 118

1 Introdução

Nesta tese de doutoramento nós introduzimos os conceitos básicos e fundamentais da computação e informação quântica. O tema, cuja pesquisa e desenvolvimento vem crescendo de forma significativa nos últimos anos, é extremamente relevante visto que engloba os principais conceitos e as exclusivas peculiaridades da mecânica quântica, como a superposição de estados e conseqüente paralelismo, além do emaranhamento de estados quânticos. Nós focamos nossos estudos principalmente em sistemas abertos, onde o estado quântico que se pretende manipular, que denominaremos como os estados do sistema quântico reduzido, está em contato com um reservatório externo que o perturba de forma irreversível. O estudo, a compreensão e, principalmente, as alternativas de proteção contra os ruídos externos são crucias para o desenvolvimento da computação quântica, visto que, nestas circunstâncias, as operação lógicas necessárias para uma computação com alta fidelidade apresentam erros que as descaracterizam por completo.

Nós apresentamos o método de proteção contra erros quânticos por nós desenvolvido com a finalidade de proteger as operações lógicas de um bit quântico, ou qubit, que é a unidade fundamental da computação quântica, além de proteger o emaranhamento de dois qubits. Tal método, como nós mostraremos no decorrer desta tese, está baseado nas técnicas de desacoplamento dinâmico (1,2,3,4), sendo esta uma das três principais estratégias desenvolvidas na literatura com a finalidade de proteger a informação quântica. Nós começamos definindo os principais conceitos fundamentais necessários para o desenvolvimento desta tese, como o *operador densidade*, que é um maneira amplamente utilizada na literatura a fim de descrever os estados quânticos, a *fidelidade* que é uma medida de distância no espaço de Hilbert, que é o espaço onde se encontram os estados quântico, e a *concurrence* que é uma medida de emaranhamento para um sistema de dois qubits. Além disso, descrevemos as principais *operações lógicas quânticas* cujo papel principal é incluir dinâmicas controladas aos estados. Na seqüência, apresentamos algumas técnicas utilizadas com a finalidade de calcular a dinâmica de um sistema quântico reduzido quando perturbado por um reservatório. Assim, nós apresentamos os denominados *operadores de Kraus* e a *equação mestra* que acreditamos ser as técnicas mais difundidas na literatura neste contexto. Além disso, apresentamos algumas classes de erros às quais os qubits podem estar sujeitos quando acoplados a um reservatório, sendo estas os erros de *descoerência*, erros de *bit-flip* e erros de *amplitude*. Apresentamos também, ainda de forma introdutória, os principais métodos de proteção contra erros, sendo eles os *códigos de correção de erros*, os *subespaços livres de erros* e o *desacoplamento dinâmico*, além de suas fragilidades e peculiaridades próprias.

Finalmente, apresentamos o método de desacoplamento dinâmico contínuo baseado em campos de alta freqüência desenvolvido neste doutoramento. Diferente dos esquemas usuais de desacoplamento dinâmico, que utilizam pulsos de alta freqüência para desacoplar o sistema do reservatório, nosso método se baseia em operações contínuas, o que facilita a implementação da metodologia. De fato, contrário aos sistemas pulsados, que necessitam de um controle preciso dos tempos de interação de cada um dos pulsos, em nosso esquema somente uma única intervenção é necessária quando o campo é desligado ao final da operação quântica. Assim, utilizamos tal metodologia para proteger as operações lógicas quânticas de um qubit quando este se encontra acoplado a um reservatório externo que o perturba introduzindo diferentes classes de erros. Mostramos, de forma detalhada, todos os aspectos envolvidos na elaboração do método, e ilustramos a proteção da operação lógica quântica de Hadamard. Além disso, consideramos um sistema de dois qubits, onde, apesar de não considerarmos operações lógicas, mostramos a eficiência do método a fim de preservar o emaranhamento inicial entre estes. Vale ressaltar que, apesar do método de desacoplamento dinâmico ser eficiente em teoria, a sua implementação experimental ainda não é factível. Na realidade, para uma proteção efetiva se faz necessário que as operações controladas sejam mais rápidas que o tempo médio de correlação do reservatório, ou seja, o tempo médio de interação deste com o sistema físico. No entanto, com o atual avanço tecnológico das técnicas experimentais, o método de desacoplamento dinâmico surge como uma alternativa concreta para a proteção da informação e computação quântica num futuro próximo.

2 Conceitos fundamentais

2.1 Bits quânticos

O bit clássico é a unidade básica de informação dos computadores de nosso dia-adia, e pode ser definido por dois símbolos quaisquer, como por exemplo 0 e 1, ou \uparrow e \downarrow , de forma que o seu estado sempre é ou \uparrow ou \downarrow . O bit quântico, ou qubit, por sua vez é a unidade elementar da informação quântica e pode ser definido sempre por um sistema de duas dimensões. Entretanto, os estados quânticos, ao contrário do que estamos habituados no nosso cotidiano, podem existir em superposições lineares de seus elementos. Assim, se o espaço de Hilbert deste sistema possuir uma base ortonormal dada pelos estados $|\uparrow\rangle e |\downarrow\rangle$, o qubit pode ser qualquer combinação linear destes estados, ou seja, $\alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle$. Dessa forma, para sistemas quânticos, existe então um contínuo de configurações, enquanto que para sistemas clássicos o bit possui 2 configurações plausíveis, \uparrow ou \downarrow . Abaixo começamos a explicar brevemente alguns conceitos fundamentais da mecânica quântica, como a definição de estados puros e mistos, além de uma propriedade inusitada e exclusiva da mecânica quântica denominada emaranhamento.

2.1.1 Estados puros e mistos

Um conjunto de estados quânticos pode ser constituído de estados puros ou pode ser composto por uma mistura estatística. Um conjunto constituído por estados puros é constituídos por estados idênticos, de forma que a dinâmica do todo é equivalente à dinâmica de um único elemento do conjunto. Sendo assim, definimos um estado quântico puro como,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n} \alpha_{n}(t) |\phi_{n}\rangle, \qquad (2.1)$$

onde $\{\phi_n\}$ forma uma base ortonormal para um espaço de estados quânticos. Um espaço ortonormal significa que os estados da base, ou também podemos chamá-los de vetores da base, são ortogonais entre si, ou seja, o produto escalar entre dois elementos distintos da base é igual a 0. Além disso são também normalizados, de forma que a magnitude dos vetores é igual a 1, ou seja, $\sum_n |\alpha_n|^2 = 1$, de forma que a probabilidade de colapso da função de onda no estado $|\phi_j\rangle$, após uma medida nesta base, é dada por $|\alpha_j|^2$.

Um conjunto de estados quânticos constituído, por sua vez, de estados quânticos diversos, não idênticos, é o que chamamos de mistura estatística. Neste caso, a fim de representarmos tais estados, definimos o que chamamos de operador densidade, que apresentamos a seguir.

2.2 Operador densidade

O formalismo do operador densidade foi introduzido pelo físico e matemático húngaro John von Neumann em 1927, de acordo com trabalhos pioneiros de Lev Landau e Felix Bloch. A representação da mecânica quântica em termos de operador densidade é muito útil e extensivamente utilizado quando se trata de sistemas abertos onde o sistema é perturbado por fatores externos indesejados. Como mostraremos brevemente nesta secção, o operador densidade nos fornece as estatísticas pertinentes aos conjuntos, sejam eles de estados puros ou mistos. O operador densidade, que de aqui em diante definiremos pela letra grega ρ , é uma matriz **Hermitiana**,

$$\rho = \rho^{*T} \equiv \rho^{\dagger} \tag{2.2}$$

onde * é o complexo conjugado da matriz e T representa a operação de transposição da matriz, **positiva semidefinida**, de forma que todos os autovalores de ρ são maiores ou igual a zero, e seu **traço é igual a 1**,

$$Tr \ \rho = 1. \tag{2.3}$$

2.2.1 Operador densidade para estados puros

Consideremos um estado puro cuja função de onda no tempo t é dada conforme a Eq. (2.1). Visto que o valor médio de um operador P qualquer no instante de tempo t é dado por:

$$\langle P(t) \rangle = \langle \psi(t) | P | \psi(t) \rangle = \sum_{n} \sum_{m} \alpha_n^*(t) \alpha_m(t) P_{nm}$$
(2.4)

onde

$$P_{nm} \equiv \langle \phi_n | P | \phi_m \rangle , \qquad (2.5)$$

definimos, de forma conveniente, o operador densidade:

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\!\langle\psi(t)|\,, \qquad (2.6)$$

de maneira que os seus elementos são dados por $\langle \phi_m | \rho(t) | \phi_n \rangle = \alpha_n^* \alpha_m$. Desta forma, podemos escrever o valor médio do operador P como

$$\langle P(t)\rangle = \sum_{n} \sum_{m} \overbrace{\langle \phi_{m} | \rho(t) | \phi_{n} \rangle}^{\alpha_{n}^{*} \alpha_{m}} \underbrace{\langle \phi_{n} | P | \phi_{m} \rangle}_{P_{nm}} = \operatorname{Tr}\{\rho(t)P\}, \qquad (2.7)$$

pois $\sum_{n} |\phi_{n}\rangle\langle\phi_{n}| = 1$ e $\sum_{m} \langle\phi_{m}| A |\phi_{m}\rangle = \text{Tr}\{A\}$. Como vemos, facilmente podemos calcular os valores esperados para qualquer observável através de uma operação simples de multiplicação de matrizes e respectivo traço.

A evolução temporal do operador densidade pode facilmente ser deduzida através da dinâmica quântica não relativística de um estado qualquer, que é dada pela equação de Schrödinger:

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H(t) |\psi(t)\rangle.$$
(2.8)

A variação temporal do operador densidade é então dada por:

$$\dot{\rho}(t) = \left(\frac{d |\psi(t)\rangle}{dt}\right) \langle \psi(t)| + |\psi(t)\rangle \left(\frac{d \langle \psi(t)|}{dt}\right), \qquad (2.9)$$

de forma que substituindo a equação de Schrödinger obtemos,

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} H(t) |\psi(t)\rangle\!\langle\psi(t)| + \frac{i}{\hbar} |\psi(t)\rangle\!\langle\psi(t)| H(t), \qquad (2.10)$$

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \rho(t)], \qquad (2.11)$$

que é conhecida como sendo a equação de Liouville-von Neumann. Os colchetes na equação acima definem a operação comutação, que é dada por [A, B] = AB - BA onde $A \in B$ são duas matrizes quaisquer de mesma dimensão.

2.2.2 Operador densidade para misturas estatísticas

De forma análoga podemos definir um operador densidade para um conjunto dado por uma mistura estatística. Neste caso, não podemos adquirir a informção total a respeito de um sistema quântico sendo suas superposições incoerentes. Assim, definimos como ferramental o operador ρ :

$$\rho = \sum_{n} p_n \rho_n, \tag{2.12}$$

onde ρ_n é o operador densidade dos estados puros, e p_n os respectivos pesos ou probabilidades dos vários estados possíveis. Logicamente, da mesma forma, $\sum_n p_n = 1$ visto que a probabilidade de encontrarmos o sistema físico em qualquer um dos estados puros é normalizada igual a 1. De forma análoga é direto que a dinâmica do operador densidade para o caso de misturas estatísticas também é dada pela equação de Liouville-von Neumann.

Uma medida da pureza do operador densidade pode ser dada por $\text{Tr}(\rho^2)$, de forma que como solução temos 1 para estados puros e 1/d para estados maximamente mistos, onde d é a dimensão do sistema quântico.

2.2.3 População e coerência

É conveniente analisarmos o operador densidade em termos dos elementos de sua matriz. Se observarmos com mais cuidado para a forma como o operador densidade é construído, é fácil verificarmos que cada elemento da diagonal principal do operador é dado pela probabilidade média do colapso da função de onda após uma medida num certo elemento da base. Pela própria definição, seja $|\psi(t)\rangle = \sum_{n} \alpha_n |\phi_n\rangle$ onde $\{|\phi_n\rangle\}$ são os elementos da base,

$$\rho_{nn}(t) = \langle \phi_n | \rho(t) | \phi_n \rangle = |\alpha_n(t)|^2.$$
(2.13)

Os termos da diagonal principal do operador densidade são, então, definidos como população do estado $|\phi_n\rangle$. Vale ressaltar que o mesmo vale para um mistura estatística.

A coerência é dada pelos elementos de fora da diagonal principal do operador densidade,

$$\rho_{nm}(t) = \langle \phi_n | \rho(t) | \phi_m \rangle = \alpha_n(t) \alpha_m^*(t), \qquad (2.14)$$

e está diretamente ligada com o padrão de interferência dos estados quânticos. A coerência caracteriza o sistema quântico, visto que está ligada diretamente com o fato de que no mundo quântico as superposições de estados são acontecimentos totalmente plausíveis e admissíveis.

2.2.4 Operação traço parcial

A descrição em termos do operador densidade, como iremos mostrar, é muito útil quando o sistema quântico é constituído por vários subsistemas, como por exemplo os qubits (subsistema 1) mais reservatórios externos (subsistema 2). O operador densidade possibilita de forma simples e rápida o cálculo das probabilidades parciais, de forma que podemos ponderar somente as probabilidades do subsistema de interesse, desconsiderando as configurações dos outros subsistemas. Para maior clareza e compreensão, vejamos um exemplo simples.

Consideramos um sistema quântico cujo espaço total dos estados é dado pelo produto tensorial dos espaços de Hilbert $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. O traço parcial do operador densidade total ρ com relação ao sistema *B* pode ser escrito como

$$\rho^A = \operatorname{Tr}_B \rho. \tag{2.15}$$

A operação traço parcial fornece, em princípio, a informação quântica de cada subsistema de forma separada e satisfaz, como mostraremos abaixo, propriedades importantes quando se trata das observáveis do sistemas. Seja M um observável do subsistema $A \in M \otimes I$ o observável correspondente quando se trata do sistema composto. O operador densidade ρ_A do sistema reduzido, logicamente deve ser consistente com as medidas estatísticas do subsistema A, de forma que os valores esperados de M, quando consideramos somente o subsistema A, e de $M \otimes I$, quando consideramos o sistema total, devem ser os mesmos

$$\operatorname{Tr}_A(M \cdot \rho^A) = \operatorname{Tr}(M \otimes I \cdot \rho). \tag{2.16}$$

Desta maneira, é fácil de observar que esta igualdade pode ser satisfeita se ρ_A for definido conforme a Eq. (2.15) que é consistente, então, com as medidas estatísticas quânticas de cada subsistema.

2.2.5 Operação transposição parcial

Outra propriedade importante do operador densidade, e que não podemos deixar de citar, é a operação de transposição parcial em relação a um dos subsistemas. De forma simples, a fim de ilustrarmos a operação, vejamos a tranposição parcial considerando um sistema de dois qubits. O operador densidade, em termos de seus elementos, pode ser escrito como,

$$\rho = \sum_{i,j,k,l} \left[\langle i|_A \otimes \langle j|_B \rho | k \rangle_A \otimes | l \rangle_B \right] |i\rangle_A \langle k|_A \otimes | j \rangle_B \langle l|_B , \qquad (2.17)$$

onde $i, j, k, l = \{\uparrow, \downarrow\}$. A operação transposição parcial sobre o subsistema A, onde definimos ρ^{T_A} como o transposto parcial de ρ , é escrito de tal forma que cada elemento de ρ , $\langle i | \langle j | \rho | k \rangle | l \rangle$ é mapeado no elemento $\langle k | \langle j | \rho | i \rangle | l \rangle$ do operador densidade ρ^{T_A} , ou seja,

$$\rho^{T_A} = \sum_{i,j,k,l} \left[\langle k |_A \otimes \langle j |_B \rho | i \rangle_A \otimes | l \rangle_B \right] |i\rangle_A \langle k |_A \otimes | j \rangle_B \langle l |_B, \qquad (2.18)$$

onde

$$\underbrace{\langle k|_A \otimes \langle j|_B \rho |i\rangle_A \otimes |l\rangle_B}_{\rho^{T_A}} \leftarrow \underbrace{\langle i|_A \otimes \langle j|_B \rho |k\rangle_A \otimes |l\rangle_B}_{\rho}.$$
(2.19)

A tranposisção parcial, como mostraremos no decorrer desta tese, é muito importante visto que é fundamental para a definição da negatividade (5), que é um método de medida de emaranhamento suficiente e necessária para sistemas de até 6 dimensões.

2.2.6 Vetor de Bloch

Um estado puro geral de um sistema quântico de dois níveis pode ser escrito como

$$\alpha \left|\uparrow\right\rangle + \beta \left|\downarrow\right\rangle,\tag{2.20}$$

com $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, de forma que o operador densidade, na base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$, é dado por

$$\rho = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ & & \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{bmatrix}.$$
(2.21)

Para um sistema de dois níveis o operador densidade é dado por uma matriz Hermitiana com dimensão 2×2 , de forma que este pode ser sempre escrito como uma combinação linear da matriz identidade mais as matrizes de Pauli:

$$\rho = a \mathbf{I} + b \,\sigma_x + c \,\sigma_y + d \,\sigma_z, \tag{2.22}$$

onde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
(2.23)

Desta maneira, observando que Tr $\rho = 1$ temos que

$$\operatorname{Tr}(a \ \mathbf{I} + b \ \sigma_x + c \ \sigma_y + d \ \sigma_z) = 1, \tag{2.24}$$

resultando em $a = \frac{1}{2}$ já que o traço das matrizes de Pauli é nulo, conforme podemos notar nas matrizes da Eq. (2.23). Assim, o operador densidade pode ser definido de tal forma que

$$\rho = \frac{1}{2} (\mathbf{I} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \qquad (2.25)$$

onde

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x \, \hat{x} + \sigma_y \, \hat{y} + \sigma_z \, \hat{z} \tag{2.26}$$

e **r** é um vetor de três dimensões com $|\mathbf{r}| = \mathbf{1}$. O vetor dado por **r** é definido então como vetor de Bloch, nome dado em homenagem ao físico suiço Felix Bloch. É importante

notar, então, que um estado quântico puro que descreve um sistema de dois níveis pode sempre ser representado de forma geométrica. De fato, neste caso, todo e qualquer estado pode ser dado por um ponto no que denominamos esfera de Bloch, o que é facilmente observado já que qualquer vetor de três dimensões pode ser escrito em função de dois ângulos. Assim, observando que $|\mathbf{r}| = \mathbf{1}$, podemos definir \mathbf{r} como sendo dado por,

$$\mathbf{r} = \sin(\theta)\cos(\alpha)\hat{x} + \sin(\theta)\sin(\alpha)\hat{y} + \cos(\alpha)\hat{z}.$$
(2.27)

2.3 Emaranhamento

Para sistemas puros, dois subsistemas quânticos são ditos separáveis se o sistema quântico composto pelo conjunto dos dois puder ser escrito como um produto tensorial dos mesmos:

$$|\psi_{conj}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle, \qquad (2.28)$$

caso contrário são ditos *emaranhados*. Vale ressaltar que tal definição é válida tanto para estados puros, quanto para estados mistos.

O emaranhamento trás conceitos importantes sobre a não-localidade da mecânica quântica. Imaginemos o seguinte exemplo: dado um estado emaranhado constituído de 2 qubits, A e B, cujo estado quântico é dado, por exemplo, pelo estado

$$|\Psi\rangle = \frac{|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B}{\sqrt{2}}.$$
(2.29)

Se após a preparação deste estado formos capazes de afastá-los espacialmente, uma medida em qualquer um dos qubits, por exemplo A, necessariamente, devido ao colapso da função de onda, define o estado do qubit B, introduzindo assim um efeito não local no sistema físico. Este efeito, de não localidade, é um dos aspectos mais inusitados da mecânica quântica. Muitos autores tentaram de alguma forma refutar o efeito da não-localidade, como por exemplo A. Einsten, B. Podolsky e N. Rosen (6), que cogitaram que a mecânica quântica é uma teoria incompleta no sentido que alguns elementos da realidade física não estariam sendo considerados por esta. Surge então o que foi denominado pelos autores como as variáveis ocultas. No entanto, em 1964, John S. Bell (7) refutou indubitavelmente tais teorias e provou que, de fato, "nenhuma teoria física baseada em variáveis ocultas é capaz de reproduzir todos as predições da mecânica quântica". Assim, como bem predito pelo teorema de Bell, as correlações à distância, apesar de inusitadas e pouco intuitivas são intrínsecas à mecânica quântica e estão diretamente relacionadas com os estados emaranhados. É importante frisar, no entanto, que nem todos os estados emaranhados desobedecem a desigualdade de Bell.

Como exemplo de estados puros maximamente emaranhados, podemos citar os denominados estados de Bell,

$$|\Psi_{+}\rangle = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \tag{2.30}$$

$$|\Psi_{-}\rangle = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$$
(2.31)

$$|\Phi_{+}\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \tag{2.32}$$

$$|\Phi_{-}\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$
(2.33)

ou os estados chamados GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger (8)), como por exemplo: $\frac{|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle\pm|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$. Os estados GHZ são também estados maximamente emaranhados e, de forma mais geral, podem ser definidos inclusive para N qubits,

$$|GHZ\rangle = \frac{|\uparrow\rangle^{\otimes N} + |\downarrow\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}},$$
(2.34)

onde $|\uparrow\rangle^{\otimes N} \equiv |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes \cdots \otimes |\uparrow\rangle$. Outro estado de três qubits emaranhados, e que é importante citarmos, é o denominado estado W, cujo exemplo pode ser dado por:

$$|W\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{3}}.$$
(2.35)

É importante notar que os estados do tipo W, apesar de maximamente emaranhados, possuem propriedades distintas do estado GHZ. Como é fácil observar, para os estados do tipo W, a operação traço parcial sobre qualquer um dos três qubits preserva o emaranhamento entre os dois qubits restantes. De forma contrária, para os estados do tipo GHZ, o emaranhamento dois-a-dois desaparece. Tais propriedades são muito importantes no estudo do emaranhamento e diferenciam cada um dos estados emaranhados, agrupandoos em diferentes famílias. De fato, dado dois estados de familias distintas, é impossível



Figura 2.1. Ilustração do emaranhamento entre três qubits. No quadro a ilustramos um estado do tipo W, onde o emaranhamento persiste mesmo entre dois qubits. No quadro b ilustramos um estado do tipo GHZ, onde não existe emaranhamento dois-a-dois.

torná-los idênticos via comunicação clássica e/ou operacões locais. Para três qubits temos duas famílias distintas, cujos elementos representativos são os estados W e GHZ (9). Para quatro qubits o número de familías distintas é nove (10), de maneira que estas crescem de forma não linear com o número de qubits.

Como exemplo de estados mistos emaranhados podemos citar os estados de Werner que são composto por dois ensembles, um com estados puros e outro com estados maximamente emaranhados, sendo que cada um deles é ponderado pela variável p:

$$\rho = p \left\langle \Psi_{+} | \Psi_{+} \right\rangle + (1 - p) \left\langle \uparrow \uparrow | \uparrow \uparrow \right\rangle.$$
(2.36)

Neste caso, dependendo do valor de p, poderemos obter estados puros maximamente emaranhados, estados desemaranhados ou estados mistos parcialmente emaranhados.

Uma propriedade importante do emaranhamento e que deve ser ressaltada é que para estados emaranhados, apesar de conhecermos por completo a função de onda que descreve o estado quântico total, composto por N qubits por exemplo, o conhecimento de cada um dos estados que compõem a função de onda total não é determinado por completo. Vejamos como exemplo o estado de Bell dado por

$$|\Phi_{+}\rangle = \frac{|\uparrow\rangle_{A} \otimes |\downarrow\rangle_{B} + |\downarrow\rangle_{A} \otimes |\uparrow\rangle_{B}}{\sqrt{2}}.$$
(2.37)

A função dos dois qubits é bem definida e sabemos calcular com precisão tanto as populações quanto as coerências do operador densidade deste estado. No entanto, se calcularmos, através da operação traço parcial, o estado de cada um dos qubits, ignorando os graus de liberdade do outro, o resultado é uma completa incerteza. Como podemos observar, a matriz do operador densidade, que representa o estado dos dois qubits, é dada por

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
(2.38)

enquanto que o operador densidade reduzido de cada um dos qubits, que é obtido através da operação traço parcial, é dado por

$$\operatorname{Tr}_{A}\{\rho_{AB}\} = \operatorname{Tr}_{B}\{\rho_{AB}\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
 (2.39)

Neste caso, o operador densidade reduzido de cada um dos qubits não fornece uma informação completa sobre os estados do qubit A e B. Como podemos observar, não podemos deduzir suas coerências parciais, visto que o operador densidade reduzido dos qubits A e B não nos fornece esta informação. O desconhecimento da função de onda parcial do sistema, é intrínseco do emaranhamento, sendo que para estados separáveis, ao contrário, as informações parciais de cada um dos qubits são sempre bem definidas.

2.4 Medida de emaranhamento

Uma questão importante e bastante estudada na literatura, em relação ao emaranhamento, é a sua medida. Dos diversos métodos utilizados, podemos citar a entropia do emaranhamento, que é utilizada para medir o emaranhamento entre dois subsistemas constituídos de estados puros, a *concurrence* (11), que foi a primeira medida de emaranhamento para estados mistos, para um sistema de dois qubits, e a negatividade (5) que surge do critério de Peres e Horodecki (12,13). Os critério de emaranhamento, ao contrário das medidas de emaranhamento, não servem como uma escala de quantificação, mas respondem se um estado quântico está emaranhado ou não.

2.4.1 Entropia do emaranhamento

A entropia do emaranhamento é uma medida de emaranhamento para dois subsistemas constituídos de estados puros, e é definida como a entropia de von Neumann calculada para um dos subsistemas, ρ_A , ρ_B , onde

$$\rho_A = \operatorname{Tr}_B\{\rho\},$$

$$\rho_B = \operatorname{Tr}_A\{\rho\}.$$
(2.40)

A entropia de von Neumann para um operador densidade X é dada por

$$E(X) = -\operatorname{Tr}(X \log_2 X), \qquad (2.41)$$

ou de forma mais simples, se x_i são os autovalores de X, nós podemos escrever que

$$E(X) = -\sum_{i} (x_i \log_2 x_i).$$
(2.42)

Assim, a entropia do emaranhamento para um operador densidade bipartite ρ é dada por:

$$E(\rho) = -Tr(\rho_A \log_2 \rho_A) = -Tr(\rho_B \log_2 \rho_B)$$
(2.43)

2.4.2 Negatividade

Para falarmos um pouco sobre a medida de emaranhamento definida como negatividade (5), devemos citar o critério de Peres e Horodecki (12,13), que é um critério válido tanto para estados puros quanto mistos, e é uma condição necessária e suficiente para que um operador densidade, com dimensão 2 × 2 ou 2 × 3, constituído de dois subsistemas, seja separável. Além disso, é uma condição necessária para que dois subsistemas de dimensão qualquer sejam separáveis. O critério é simples: se o operador densidade parcialmente transposto sobre um dos subsistemas, ρ^{T_A} por exemplo, não possuir autovalores negativos, os subsistemas são separáveis. A negatividade, por sua vez, utilizando as propriedade do critério de Peres-Horodecki, é calculada de forma simples, surgindo de uma medida de quanto ρ^{T_A} falha em ser positivo. De fato, a negatividade é definida como sendo o valor absoluto da soma dos autovalores negativos do operador densidade transposto parcialmente, ρ^{T_A} .

2.4.3 Concurrence

A concurrence (11) é uma medida de emaranhamento para estados puros ou mistos para um sistema constituído de 2 qubits. Esta medida de emaranhamento, desenvolvida por William K. Wootters em 1998, é extremamente relevante e amplamente utilizada, visto que esta foi a primeira medida de emaranhamento para estados mistos de dois qubits, definindo assim uma condição necessária e suficiente para que estes sejam subsistemas separáveis. Vale ressaltar, que uma medida de emaranhamento para estados mistos de muitas partículas ainda é uma questão em aberto na literatura.

Um estado misto pode ser interpretado como sendo um conjunto maior constituído de subconjuntos de estados puros, conforme Eq. (2.12). Neste caso, uma peculiaridade que surge, e que é importante frisar, é que o número de estados puros requeridos para *criar* o estado misto não é necessariamente o mesmo número de estados puros que podem ser extraídos de uma mistura (14). Desta forma, o que usualmente é feito na literatura, é usar um estado puro como unidade básica de emaranhamento, e relaciona-se o estado misto a estes estados puros. Surge então a definição de *emaranhamento de formação* como descreveremos abaixo.

Dada uma matriz densidade ρ de um par de sistemas quânticos $A \in B$, consideramos todas as possíveis decomposições em estados puros de ρ , ou seja, todos os conjuntos de estados $|\psi_i\rangle$ com probabilidade p_i , tal que

$$\rho = \sum_{i} p_i |\psi_i\rangle\!\langle\psi_i|.$$
(2.44)

Para cada estado puro, o emaranhamento E é definido com a entropia do subsistema A ou do subsistema B (15):

$$E(|\psi\rangle) = -Tr(\rho_A \log_2 \rho_A) = -Tr(\rho_B \log_2 \rho_B), \qquad (2.45)$$

onde ρ_A é o traço parcial da matriz $|\psi\rangle\langle\psi|$ sobre o subsistema B, e análogo para ρ_A . O emaranhamento de formação do estado misto ρ é definido, então, como o emaranhamento médio dos estados puros, minimizado sobre todas as decomposições plausíveis de ρ :

$$E(\rho) = \min \sum p_i E(\psi_i).$$
(2.46)

O emaranhamento de formação possui a propriedade de ser zero se e somente se o estado em questão puder ser escrito como uma mistura constituída de produtos tensoriais de estados.

Wootters, em 1998, para desenvolver seu método de medida de emaranhamento para um sistema de 2 qubits, teve como idéia básica escrever a entropia do sistema, Eq. (2.45), como uma função de um produto denominado por ele de *concurrence* (11), e que é definido como:

$$C(\psi) = |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle|, \qquad (2.47)$$

onde,

$$\left|\hat{\psi}\right\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y \left|\psi^*\right\rangle,\tag{2.48}$$

com $|\psi^*\rangle$ sendo o complexo conjugado de $|\psi\rangle$ e σ_y o operador de Pauli. Dessa forma podemos escrever a entropia do sistema como sendo

$$E(|\psi\rangle) = \mathcal{E}(C(\psi)), \qquad (2.49)$$

onde a função ${\mathcal E}$ é dada por:

$$\mathcal{E}(C) = h\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2}}{2}\right);$$

$$h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x).$$
 (2.50)

 $\mathcal{E}(C)$ cresce monotonicamente e seu valor está entre 0 e 1. Da mesma forma C também se comporta similarmente e está entre 0 e 1, de forma que é possível utilizar a própria *concurrence*, Eq. (2.47), como uma forma de medida de emaranhamento. Wotters calcula também em seu artigo a *concurrence* para estados mistos, criando uma medida para o emaranhamento de um estado misto de 2 qubits como uma função dos elementos do operador densidade:

$$E(\rho) = \mathcal{E}(C(\rho)), \qquad (2.51)$$

onde,

$$C(\rho) = \max\left\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\right\},\tag{2.52}$$

com λ_i dado pelos autovalores positivos, na ordem decrescente, da matriz

$$\rho(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y).$$
(2.53)

A concurrence igual a 0 é uma condição necessária e suficiente, para que um estado quântico constituído de 2 qubits, possa ser escrito numa decomposição separável. Da mesma forma, quando a concurrence é igual a 1, o operador densidade é constituído por uma decomposição maximamente emaranhada. Desta forma fica estabelecida uma equação fechada, em termos dos elementos do operador densidade, para identificar e quantificar emaranhamento em um sistema constituído de dois qubits.

2.5 Fidelidade

A fidelidade de estados quânticos é uma das medidas mais utilizadas na literatura com a finalidade de medir a eficiência, em sistemas abertos, das operações lógicas quânticas. A fidelidade é uma medida de distância de estados quânticos e é bem definida tanto para estados puros quanto para estados mistos. A fidelidade de dois estados puros é usualmente definida como a transição de probabilidade

$$\mathbf{F} = (|\psi_1\rangle\langle\psi_1|, |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2, \qquad (2.54)$$

o que corresponde ao grau de proximidade dos estados na geometria natural do espaço de Hilbert. Este conceito é facilmente estendido também, para o caso onde um dos estados é misto. Desta forma a fidelidade pode ser escrita como,

$$\mathbf{F} = (|\psi_1\rangle\!\langle\psi_1|, \rho_2) = \langle\psi_1|\rho_2|\psi_1\rangle, \qquad (2.55)$$

ou seja, a média da Eq. (2.54) para qualquer conjunto de estados puros com o operador densidade dado por ρ_2 .

A fidelidade das operações lógicas em sistemas abertos é calculada comparando o operador densidade *ideal*, com o operador densidade *perturbado*. No caso ideal, os qubits não estão acoplados a outros sistemas e suas dinâmicas são unitárias. No caso perturbado, por sua vez, os qubits estão acoplados a outros sistemas externos, de forma que suas dinâmicas podem ou não ser unitárias dependendo da condição inicial dos qubits, da operação lógica desejada e da simetria do acoplamento com os outros sistemas^{*}. Além

^{*} Subespaços e subsistemas livres de erros

disso, na maioria dos casos de computação quântica, a condição inicial do sistema é dada por um estado puro, de forma que o operador densidade ideal, que está sujeito a uma dinâmica unitária, também é puro. Assim, utilizando a Eq. (2.55), escrevemos a fidelidade das operações lógicas quânticas

$$\mathbf{F}(t) = \mathrm{Tr}[\rho_{I}(t) \ \rho_{P}(t)], \qquad (2.56)$$

onde $\rho_I(t)$ é a dinâmica do operador densidade ideal, e $\rho_P(t)$ é o operador densidade perturbado. Nesta tese, é através da fidelidade que quantificaremos a eficiência das operações lógicas quânticas, calculando, em função do tempo, quão distante estão os resultados perturbados dos estados quânticos desejados.

Apesar de nesta tese somente supormos condições inicias cujos estados são puros, o conceito de fidelidade pode ser estendido a fim de compararmos a distância de dois operadores densidade mistos. A fidelidade entre dois operadores densidade mistos foi calculada por Richard Jozsa em 1994 (16), que generalizou a Eq. (2.55).

Para a fidelidade de estados quânticos Jozsa impôs quatro axiomas:

- 1. $0 \le F(\rho_1, \rho_2) \le 1$, e $F(\rho_1, \rho_2) = 1$ se e somente se $\rho_1 = \rho_2$.
- 2. $F(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_2, \rho_1).$
- 3. Se ρ_1 é puro então a Eq. (2.54) passa a valer.
- 4. $F(\rho_1, \rho_2)$ é invariante por transformações unitárias no espaço dos estados.

Tanto a Eq. (2.54) quanto a Eq. (2.55) podem ser escritas de tal forma que $F(\rho_1, \rho_2) = Tr(\rho_1\rho_2)$, mas, entretanto, para dois estados mistos gerais esta fórmula falha ao tentar satisfazer o axioma 1.

Com intuito de se obter a fidelidade de dois estados misto, o procedimento se baseia em purificar os operadores densidade e calcular a maximização da Eq. (2.55) dentre todas decomposições possíveis. Assim, vejamos: seja ρ qualquer estado misto no espaço de Hilbert \mathcal{H}_1 , uma purificação de ρ é qualquer estado puro $|\phi\rangle$ em algum espaço de Hilbert estendido $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ tal que $\rho = \text{Tr}_2 |\phi\rangle\langle\phi|$, ou seja, uma purificação é qualquer estado puro que tenha ρ como o estado reduzido para o subsistema. O teorema demonstrado por Jozsa é que

$$\mathbf{F}(\rho_1, \rho_2) = \max |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2, \qquad (2.57)$$

onde o máximo é obtido sobre todas as purificações $|\phi_1\rangle \in |\phi_2\rangle$ de $\rho_1 \in \rho_2$. Este demonstrou que a equação acima é igual à transição de probabilidade de estados mistos definida por Uhlmann em 1976 (17), de forma que a fidelidade de dois estados mistos pode ser escrita como:

$$F(\rho_1, \rho_2) = \left\{ \text{Tr}[(\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1})^{1/2}] \right\}^2, \qquad (2.58)$$

onde a $\sqrt{\rho_1}$ é dada por uma matriz cujo quadrado é igual a ρ_1 . Vale ressaltar que esta não é a única equação que mede a fidelidade entre dois estados mistos, visto que outras fórmulas foram, e podem ser criadas, contanto que satisfaçam os axiomas impostos por Josza.

2.6 Operações lógicas quânticas

As operações lógicas quânticas (OLQ) podem ser definidas pelas operações unitárias tais que quando aplicadas nos estados quânticos, no caso os qubits, produzem um certo resultado conforme uma regra pré-definida. O conjunto universal de OLQ, que juntos conseguem reproduzir qualquer operação lógica, tradicionalmente é dado pelas operações de 1 qubit, como as operações de fase e bit-flip, em conjunto com a operação Control-NOT, que é uma operação de 2 qubits. Entretanto, é importante notar que outros diversos conjuntos universais de operações lógicas quânticas existem, e a definição do melhor conjunto depende do aparato físico no qual se pretende realizar a operação. Como exemplo de operações de 2 qubits podemos citar as operações unitárias *SWAP* ou mesmo medidas de paridade. Abaixo ilustramos, em termos das matrizes de Pauli, os Hamiltonianos e os respectivos operadores de evolução temporal das operações lógicas quânticas mais usuais.

2.6.1 Operações de 1 qubit

Nesta tese, nós definimos a base para nosso sistema os autovetores da matriz σ_z de Pauli, de forma que as operações de fase e bit-flip são dadas, respectivamente, pelos Hamiltonianos

$$H_z = \omega_z \sigma_z = \begin{pmatrix} \omega_z & 0\\ 0 & -\omega_z \end{pmatrix}, \quad H_x = \omega_x \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & \omega_x\\ \omega_x & 0 \end{pmatrix}.$$
 (2.59)

Assim, o operador evolução temporal, que define a dinâmica imposta aos qubits quando sujeitos a estas operações, é dado por

$$\mathcal{U}_z(t) = e^{\frac{-i}{\hbar}\omega_z t\sigma_z} = I\cos\left(\omega_z t/\hbar\right) - i\sigma_z \sin\left(\omega_z t/\hbar\right),$$

$$\mathcal{U}_{z}(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\omega_{z}t/\hbar\right) - i\sin\left(\omega_{z}t/\hbar\right) & 0\\ 0 & \cos\left(\omega_{z}t/\hbar\right) + i\sin\left(\omega_{z}t/\hbar\right) \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

para a operação de fase, e

$$\mathcal{U}_x(t) = e^{\frac{-i}{\hbar}\omega_x t\sigma_x} = I\cos\left(\omega_x t/\hbar\right) - i\sigma_x \sin\left(\omega_x t/\hbar\right),$$

$$\mathcal{U}_x(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\omega_x t/\hbar\right) & -i\sin\left(\omega_x t/\hbar\right) \\ -i\sin\left(\omega_x t/\hbar\right) & \cos\left(\omega_x t/\hbar\right) \end{pmatrix},$$
(2.61)

para a operação de bit-flip.

Desta maneira é fácil observar que a dinâmica do qubit depende das freqüências ω_z e ω_x e do tempo da operação. Como os vetores da base dos estados são os autovetores da matriz de Pauli σ_z , definimos

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix}, \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}, \qquad (2.62)$$

onde a dinâmica para um qubit geral é dada, então, por

$$\mathcal{U}_{z}(t)\left[\left.\alpha\left|\uparrow\right\rangle+\beta\left|\downarrow\right\rangle\right]=\left(\begin{array}{c}\alpha\left[\cos(\omega_{z}t/\hbar)-i\sin(\omega_{z}t/\hbar)\right]\right)\\\beta\left[\cos(\omega_{z}t/\hbar)+i\sin(\omega_{z}t/\hbar)\right]\end{array}\right)$$
(2.63)

е

$$\mathcal{U}_x(t) \left[\alpha \left| \uparrow \right\rangle + \beta \left| \downarrow \right\rangle \right] = \left(\begin{array}{c} \alpha \cos(\omega_x t/\hbar) - i\beta \sin(\omega_x t/\hbar) \\ \beta \cos(\omega_x t/\hbar) - i\alpha \sin(\omega_x t/\hbar) \end{array} \right)$$
(2.64)

de forma que tanto as mudanças de fase, impostas pelo Hamiltoniano H_z , quanto as rotações, impostas pelo Hamiltoniano H_x , podem ser parciais ou totais dependendo das freqüências e do tempo de exposição dos qubits a tais interações. Definimos um ciclo completo de uma operação lógica quando

$$t = \frac{\hbar\pi}{2\omega_{z/x}},\tag{2.65}$$

pois neste tempo tanto a mudança de fase quanto o bit-flip ocorrem por completo. No caso da operação de fase, de forma explícita, temos

$$\mathcal{U}_{z}\left(\frac{\hbar\pi}{2\omega_{z}}\right)\left[\left.\alpha\left|\uparrow\right\rangle+\beta\left|\downarrow\right\rangle\right]=-i\left(\begin{array}{c}\alpha\\-\beta\end{array}\right),\tag{2.66}$$

que pode ser escrito, ocultando a fase global, com
o $\alpha \mid\uparrow\rangle -\beta \mid\downarrow\rangle$, e para o caso da operação de bit-flip temos

$$\mathcal{U}_x\left(\frac{\hbar\pi}{2\omega_x}\right)\left[\left.\alpha\left|\uparrow\right\rangle+\beta\left|\downarrow\right\rangle\right] = -i\left(\begin{array}{c}\beta\\\alpha\end{array}\right),\tag{2.67}$$

que é escrito, novamente ocultando a fase global, como $\beta |\uparrow\rangle + \alpha |\downarrow\rangle$.

Outra operação de um qubit exaustivamente utilizada na literatura é a operação lógica quântica de Hadamard. A operação de Hadamard leva cada um dos autovetores de σ_z aos autovetores de σ_x , de forma que o Hamiltoniano é escrito como

$$H_{Had} = \omega_{Had} \left(\frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc} \omega_{Had} & \omega_{Had} \\ \omega_{Had} & -\omega_{Had} \end{array} \right).$$
(2.68)

O operador evolução temporal que define a dinâmica imposta aos qubits quando sujeitos a operação de Hadamard é dado por:

$$\mathcal{U}_{Had}(t) = e^{\frac{-i}{\hbar}H_{Had}t} = I\cos(\omega_{Had}t/\hbar) - i\left(\frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}}\right)\sin(\omega_{Had}t/\hbar), \qquad (2.69)$$

de forma que o estado dos qubits no tempo $t = \frac{\hbar \pi}{2\omega_{Had}}$ é dado, para cada elemento da base, por

$$\mathcal{U}_{Had}\left(\frac{\hbar\pi}{2\omega_{Had}}\right)\left|\uparrow\right\rangle = \frac{\left|\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\right\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$\mathcal{U}_{Had}\left(\frac{\hbar\pi}{2\omega_{Had}}\right)\left|\downarrow\right\rangle = \frac{\left|\uparrow\right\rangle - \left|\downarrow\right\rangle}{\sqrt{2}},$$
(2.70)

que são, como dito anteriormente, os autovetores da matriz σ_x . Vale ressaltar que a operação lógica quântica de Hadamard, como veremos mais adiante, é muito importante quando se trata de códigos de correção de erro, sendo esta crucial principalmente para as correções de erros de fase.

2.6.2 Operações de 2 qubits

A fim de obtermos um conjunto universal de OLQ, juntamente com as operações de 1 qubit, se faz necessário operações que tenham como característica a interação de 2 qubits. Nesta seção nós ilustraremos brevemente as operações lógicas Control-NOT e SWAP que acreditamos serem as operações de 2 qubits mais difundidas na literatura. Vale ressaltar, no entanto, que as operações de 2 qubits não precisam necessariamente prover de interações unitárias, visto que estas podem ser feitas através de medidas parciais, que preservam no mínimo um grau de liberdade quântico livre no sistema. Como exemplo, podemos citar a medida de paridade que colapsa os qubits de maneira a torná-los paralelos ou anti-paralelos, sem nos fornecer informação sobre a fase dos estados. De qualquer maneira, independente das operações lógicas serem unitárias ou não, a interação e conseqüente correlação entre os qubits sempre se faz necessária.

- Control-NOT

A operação lógica Control-NOT é tal que uma operação de bit-flip do denominado qubit *alvo* está sujeita a um estado específico do qubit de controle. O mais usual na literatura é utilizar o qubit 1 como controle e o qubit 2 como alvo, onde o alvo sofre uma operação de bit-flip se o estado do qubit de controle for $|\uparrow\rangle$. assim, podemos escrever

$$H_{CN} = \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
(2.71)

e em termos das matrizes de Pauli,

$$H_{CN} = \frac{\omega}{2} \left[\sigma_2^x (\mathbf{I} - \sigma_1^z) + \mathbf{I} + \sigma_1^z \right], \qquad (2.72)$$

onde I é a matriz identidade, $\sigma_2^x = I \otimes \sigma_x$ e, de forma análoga, $\sigma_1^z = \sigma_z \otimes I$. Desta maneira, o operador evolução temporal que descreve a dinâmica do sistema é então escrito como:

$$\mathcal{U}_{CN}(t) = e^{\frac{-i}{\hbar}H_{CN}t} = \left(\begin{array}{cccc} \exp(-i\omega t/\hbar) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-i\omega t/\hbar) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega t/\hbar) & -i\sin(\omega t/\hbar) \\ 0 & 0 & -i\sin(\omega t/\hbar) & \cos(\omega t/\hbar) \end{array} \right), \quad (2.73)$$

de forma que a operação lógica é executada quando $\frac{\omega t}{\hbar} = \frac{\pi}{2}$. É importante notar que para satisfazer uma operação lógica, diversas estratégias podem ser utilizadas de forma que a operação Control-NOT que é definida por $\mathcal{U}_{CN}(\frac{\pi}{2})$ não necessariamente precisa ser escrita como a exponenciação de H_{CN} . De fato, em sua grande maioria, os experimentos utilizam seqüências de pulsos que incluem operações de 1 e 2 qubits, cujo resultado final é a lógica desejada.

- Hamiltoniano de Heisenberg

As interações de Heisenberg podem ser escritas, de uma forma geral por

$$H_{Hei} = J_x \sigma_x \otimes \sigma_x + J_y \sigma_y \otimes \sigma_y + J_z \sigma_z \otimes \sigma_z \tag{2.74}$$

onde J_{ν} são as constantes de acoplamento que quantificam a interação entre os qubits. Da literatura, alguns casos especiais de configurações deste Hamiltoniano, que geralmente descrevem a estrutura dos acoplamentos do sistema com o ambiente, podem ser citados: modelo XYZ, ou anisotrópico de Heisenberg, onde as constantes J_{ν} são arbitrárias.

- modelo XXX, ou isotrópico de Heisenberg, onde $J_x = J_y = J_z$.
- modelo XXZ onde $J_x = J_y \neq J_z$,
- modelo XY onde $J_z = 0$,
- modelo XZ onde $J_y = 0$ e
- modelo Heisenberg-Ising, onde $J_x = J_y = 0$.

No contexto de computação quântica, entretanto, o mais popular é o modelo XXX, de forma que quando esta interação é controlada podemos defini-lá como sendo a operação
2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

lógica $SW\!AP$,

$$H_{SWAP} = J(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J & 2J & 0 \\ 0 & 2J & -J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \end{pmatrix}.$$
 (2.75)

Como podemos observar pela matriz do Hamiltoniano, a operação lógica $SW\!AP$ troca a paridade do qubit 1 pela do qubit 2 e vice-versa,

$$H_{SWAP} |\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle,$$

$$H_{SWAP} |\uparrow\downarrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle,$$

$$H_{SWAP} |\uparrow\downarrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle,$$

$$H_{SWAP} |\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle.$$
(2.76)

Assim, podemos escrever o operador evolução temporal como

$$\mathcal{U}_{SWAP}(t) = \begin{pmatrix} e^{-iJt/\hbar} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left(e^{-iJt/\hbar} + e^{3iJt/\hbar} \right) & \frac{1}{2} \left(-e^{3iJt/\hbar} + e^{-iJt/\hbar} \right) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \left(e^{3iJt/\hbar} + e^{-iJt/\hbar} \right) & \frac{1}{2} \left(e^{-iJt/\hbar} + e^{3iJt/\hbar} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-iJt/\hbar} \end{pmatrix}$$

2.7 Formalismo de interação

A evolução dos estado quânticos pode ser descrita pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle,$$
 (2.77)

onde o Hamiltoniano impõe aos estados, juntamente com a condição inicial do sistema, uma dinâmica bem definida. Além da equação de Schrödinger, outras equações equivalentes a fim de calcular a dinâmica das observáveis do sistema foram desenvolvidas, dando origem a outros formalismos da mecânica quântica. Como por exemplo, podemos citar o formalismos de Heisenberg, que impõe a dinâmica do sistema aos operadores quânticos, mantendo, de forma oposta à equação de Schrödinger, os estados quânticos estáticos. O formalismo de interação, ou formalismo de Dirac, por sua vez, é um formalismo intermediário entre o formalismo de Schrödinger e o formalismo de Heisenberg. Contrário a estes dois últimos, onde ou o estado ou o operador carregam a dependência temporal das observáveis, no formalismo de interação, como mostraremos a seguir, ambos carregam parte desta dependência.

Consideremos um sistema quântico definido pelo Hamiltoniano dado por

$$H(t) = H_s + H_i(t), (2.78)$$

onde o Hamiltoniano H_s é o Hamiltoniano do sistema observado e $H_i(t)$ é o Hamiltoniano do reservatório mais o Hamiltoniano de interação, que acopla o sistema ao reservatório. Assim, a equação de Schrödinger é dada por

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = H(t)|\Psi(t)\rangle = [H_s + H_i(t)]|\Psi(t)\rangle.$$
(2.79)

Observando que na mecânica quântica um estado sempre é definido a menos de uma fase global, podemos escrever, sem perda de generalidade, o estado $|\Psi(t)\rangle$ num novo referencial,

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iH_s t/\hbar} |\Phi(t)\rangle \tag{2.80}$$

onde o vetor $|\Phi(t)\rangle$ representa o sistema de forma idêntica. A transformação dos operadores nesta representação é feita de forma análoga à equação acima, observando que se um operador P na representação de Schrödinger pode ser escrito como,

$$P = \sum_{i,j} |\psi_i\rangle\!\langle\psi_j|, \qquad (2.81)$$

onde $|\psi_k\rangle$ são os elementos da base de $|\Psi(t)\rangle$, a transformação para a nova base é dada, seguindo as diretrizes da Eq. (2.80), por

$$\tilde{P}(t) = \sum_{i,j} e^{-iH_s t/\hbar} |\phi_i\rangle\!\langle\phi_j| e^{iH_s t/\hbar}, \qquad (2.82)$$

implicando em,

$$\tilde{P}(t) = \sum_{i,j} |\phi_i(t)\rangle\!\langle\phi_j(t)| = e^{iH_s t/\hbar} P e^{-iH_s t/\hbar}, \qquad (2.83)$$

onde \tilde{P} representa, então, o operador P no formalismo de interação. A dinâmica neste caso, como mostramos abaixo, pode ser calculada de forma simples, substituindo a Eq. (2.80) na equação de Schrödinger,

$$[H_s + H_i(t)]e^{-iH_st/\hbar} |\Phi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-iH_st/\hbar} |\Phi(t)\rangle \right),$$

$$\left(H_s e^{-iH_st/\hbar} + H_i(t)e^{-iH_st/\hbar}\right) |\Phi(t)\rangle = \left(H_s e^{-iH_st/\hbar} + i\hbar e^{-iH_st/\hbar} \frac{\partial}{\partial t}\right) |\Phi(t)\rangle, (2.84)$$

implicando, então, que

$$e^{iH_st/\hbar}H_i(t)e^{-iH_st/\hbar}\left|\Phi(t)\right\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Phi(t)\right\rangle, \qquad (2.85)$$

ou, de acordo com a Eq. (2.83),

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Phi(t)\right\rangle = \tilde{H}_{i}(t)\left|\Phi(t)\right\rangle, \qquad (2.86)$$

onde $\tilde{H}_i(t)$ é o Hamiltoniano de interação escrito no formalismo de interação e $|\Phi(t)\rangle$ representa o sistema quântico. O formalismo de interação é muito utilizado quando se trata de dinâmicas controladas em sistemas abertos, visto que através deste podemos facilmente estudar somente as dinâmicas impostas pelo Hamiltoniano de interação, desprezando as dinâmicas impostas pelo Hamiltoniano do sistema. De fato, quando $H_i(t) = 0$ o estado quântico, quando representado no formalismo de interação, é constante no tempo.

Visto que o operador densidade no formalismo de interação pode ser escrito como

$$\tilde{\rho}(t) = |\Phi(t)\rangle\!\langle\Phi(t)|\,, \qquad (2.87)$$

podemos facilmente calcular sua dinâmica neste formalismo. Assim,

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = \frac{d\left|\Phi(t)\right\rangle}{dt} \left\langle\Phi(t)\right| + \left|\Phi(t)\right\rangle \frac{d\left\langle\Phi(t)\right|}{dt},\tag{2.88}$$

de forma, que substituindo Eq. (2.86), temos

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\tilde{H}_i(t)\left|\Phi(t)\right\rangle\!\left\langle\Phi(t)\right| + \frac{i}{\hbar}\left|\Phi(t)\right\rangle\!\left\langle\Phi(t)\right|\tilde{H}_i(t).$$
(2.89)

Simplificando a notação, finalmente obtemos a dinâmica para o operador densidade na representação de interação

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_i(t), \tilde{\rho}(t)].$$
(2.90)

3 Sistemas abertos

Um Hamiltoniano geral a fim de reproduzir um sistema acoplado a um reservatório externo pode sempre ser escrito como:

$$H(t) = H_S(t) + H_R(t) + H_I(t), (3.1)$$

onde $H_S(t)$ é o Hamiltoniano do sistema reduzido, $H_R(t)$ é o Hamiltoniano do reservatório e $H_I(t)$ é o Hamiltoniano que introduz as perturbações provenientes do reservatório sobre o sistema quântico reduzido, acoplando-o, assim, de forma irreversível com o reservatório.

O sistema quântico em questão é geral, podendo ser dado por spins, fótons, polarização da luz, entre outras variáveis que definam o aparato experimental quântico. Da mesma forma o reservatório pode ser dado por um banho de bosóns, de spins ou qualquer outro que acople com o sistema quântico reduzido. A interação, por sua vez, perturba o sistema reduzido, definindo assim, no contexto de computação quântica, as classes de erros as quais os estados quânticos estão sujeitos.

Na literatura existem diversas técnicas que podem ser utilizadas para calcular as dinâmicas impostas pelo Hamiltoniano dado pela Eq. (3.1), tendo cada uma delas suas peculiaridades, aproximações e limitações próprias. Como exemplo, podemos citar as equações de trajetórias de Feynman (18, 19, 20), a representação em termos de soma de operadores, ou também chamado operadores de Kraus (21), entre outras diversas equações mestras como a de Redfield (22) e de Lindblad (23).

Nesta tese de doutoramento nós nos concentramos na equação mestra de Redfield sem considerarmos aproximações Markovianas. As aproximações Markovianas são aquelas que desconsideram a memória do sistema quântico, de forma que a dinâmica dos estados reduzidos é definida somente pelo seu estado atual. Entretanto, nós vamos supor que os acoplamentos entre o sistema e o reservatório são fracos, de forma que as magnitudes dos campos característicos do sistema quântico reduzido são muito maiores que as magnitudes das constantes que o acoplam ao reservatório. Considerando que estamos interessados em processos de computação quântica, a aproximação para acoplamento fraco é totalmente cabível, visto que as dificuldades para implementações das operações quânticas em sistemas fortemente acoplados é infinitamente maior.

Ainda no contexto de computação quântica, quando se trata de sistemas abertos, diferentes classes de erros podem emergir no decorrer de uma operação lógica. Destes erros, podemos definir dois tipos distintos de interações às quais os sistemas quânticos estão sujeitos quando acoplados a sistemas externos: as interações que alteram a configuração energética do sistema reduzido (dissipativas) e as que não alteram (não dissipativas). As perturbações dissipativas, então, estão relacionadas com uma dinâmica nas populações do operador densidade, $\rho_{nn}(t) = \langle n | \rho_s(t) | n \rangle$, contrário ao caso das pertubações não dissipativas que as mantêm inalteradas. Nas pertubações não dissipativas o reservatório introduz um erro de fase ao sistema, de forma que, pelo fato de não envolver trocas de energia, são geralmente mais críticas ocorrendo de forma muito mais rápida que as perturbações dissipativas. Neste caso, em relação ao operador densidade, os elementos de fora da diagonal principal, ou seja suas coerências, é que apresentam uma dinâmica.

Abaixo nós apresentamos de forma introdutória a representação em termos de soma de operadores e deduzimos de forma simples a equação mestra de Redfield, que será a base para todas as dinâmicas calculadas nesta tese. Além disso, mostramos de forma ilustrativa, a dinâmica dos elementos do operador densidade de um qubit para o caso onde este está sujeito a três classes de erros: descoerência, bit-flip e amplitude.

3.1 Representação de Kraus

A representação de Kraus para um sistema aberto é usualmente desenvolvida considerando um sistema fechado que compreende o sistema de interesse e seu reservatório. Assim, seja $\rho(t)$, $\rho_S(t) \in \rho_R(t)$ os operadores densidade do sistema total, do sistema reduzido e do reservatório, respectivamente, de forma que

$$\rho_S(t) = \operatorname{Tr}_R[\rho(t)]. \tag{3.2}$$

Visto que o sistema total é fechado, sua evolução é unitária e a dinâmica pode ser escrita como

$$\rho(t) = \mathcal{U}(t)\rho(0)\mathcal{U}^{\dagger}(t), \qquad (3.3)$$

onde \mathcal{U} é o operador evolução temporal. Assim, visto que estamos interessados nas variáveis pertinentes ao sistema quântico reduzido, podemos escrever a dinâmica reduzida do sistema como

$$\rho_S(t) = \operatorname{Tr}_R[\mathcal{U}(t)\rho(0)\mathcal{U}^{\dagger}(t)].$$
(3.4)

Se a equação acima puder ser expressa na forma

$$\rho_S(t) = \sum_{\alpha} K_{\alpha}(t)\rho(0)K_{\alpha}^{\dagger}(t), \qquad (3.5)$$

onde $K_{\alpha}(t)$ satisfaz

$$\sum_{\alpha} K_{\alpha}^{\dagger}(t) K_{\alpha}(t) = I, \qquad (3.6)$$

então podemos dizer que a evolução temporal de $\rho_S(t)$ é dada em termos da representação de Kraus. De fato, $\rho_S(t)$ sempre possui uma representação para operadores evolução temporal arbitrário se $\rho(0)$ for fatorável, o que implica na inexistência de correlações iniciais entre o sistema reduzido e o reservatório, ou seja,

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_R(t). \tag{3.7}$$

Para mostrar isto de forma simples, nós escrevemos as condições iniciais do reservatório como uma combinação linear dos elementos de sua base, ou seja,

$$\rho_R(0) = \sum_i p_i |r_i\rangle \langle r_i| \tag{3.8}$$

onde $\{|r_i\rangle\}$ é uma base ortonormal dos auto-estados do reservatório. Assim, substituindo Eq. (3.8) na Eq. (3.4) nós temos que

$$\rho_S(t) = \operatorname{Tr}_R \left\{ \mathcal{U}(t)\rho_S(0) \otimes \left[\sum_i p_i |r_i\rangle \langle r_i|\right] \mathcal{U}^{\dagger}(t) \right\},\tag{3.9}$$

de forma que reescrevendo o traço parcial temos

$$\rho_S(t) = \sum_j \langle r_j | \mathcal{U}(t) \rho_S(0) \otimes \sum_i p_i | r_i \rangle \langle r_i | \mathcal{U}^{\dagger}(t) | r_j \rangle.$$
(3.10)

Assim, obtemos a representação de Kraus para a operador densidade reduzido sistema,

$$\rho_S(t) = \sum_{i,j} K_{i,j}(t) \rho_S(0) K_{i,j}^{\dagger}(t), \qquad (3.11)$$

onde

$$K_{i,j}(t) = \sqrt{p_i} \langle r_j | \mathcal{U}(t) | r_i \rangle.$$
(3.12)

Como mostramos, para o caso quando o sistema e o reservatório é separável no instante inicial, uma representação de Kraus sempre existe para o operador densidade reduzido. No entanto, quando na condição inicial em que o sistema reduzido está emaranhado com o reservatório de uma forma arbitrária, Stelmachovic e Buzek mostraram em (24) que geralmente o operador densidade reduzido não pode ser escrito na forma da representação de Kraus, a não ser quando as dinâmicas de cada parte do sistema total sejam unitárias. Vale ressaltar que esta restrição, de condições iniciais separáveis, é amplamente utilizada na literatura e de forma alguma enfraquece o modelo em termos da representação de Kraus. De fato, no contexto de computação quântica, podemos sempre medir os qubits antes de uma computação, o que fatidicamente os separam do reservatório no instante inicial.

3.2 Equação mestra de Redfield

Começamos pelo Hamiltoniano total do sistema quântico incluindo o Hamiltoniano do sistema, o reservatório e a interação,

$$H(t) = H_S(t) + H_R(t) + H_I(t), \qquad (3.13)$$

cuja dinâmica do sistema total, incluindo os estados do ambiente, no formalismo de interação é dada por

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_I(t), \tilde{\rho}(t)], \qquad (3.14)$$

onde, definindo $H_0(t)$ como sendo a soma dos termos desacoplados do sistema e do reservatório, $H_0(t) = H_S(t) + H_R(t)$, temos

$$\tilde{H}_I(t) = \mathcal{U}_0^{\dagger}(t) H_I \mathcal{U}_0(t), \qquad (3.15)$$

 com

$$\mathcal{U}_0(t) = \exp[-iH_0(t)t/\hbar]. \tag{3.16}$$

Assim, uma solução formal para a Eq. (3.14) é dada por

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [\tilde{H}_I(t'), \tilde{\rho}(t')], \qquad (3.17)$$

de forma que iterando obtemos como solução aproximada

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_I(t), \tilde{\rho}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(t'), \tilde{\rho}(t')]].$$
(3.18)

Assim, traçando as variáveis pertinentes ao reservatório obtemos

$$\frac{d\tilde{\rho}_{S}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} Tr_{R} \left\{ [\tilde{H}_{I}(t), \tilde{\rho}(0)] \right\} - \frac{1}{\hbar^{2}} \int_{0}^{t} dt' Tr_{R} \left\{ [\tilde{H}_{I}(t), [\tilde{H}_{I}(t'), \tilde{\rho}(t')]] \right\}.$$
 (3.19)

Da equação acima, é importante notar que nós sempre podemos incluir termos no Hamiltoniano do sistema $H_S(t)$ de forma a garantir que o valor médio do Hamiltoniano de interação, quando ponderado sobre as variáveis do operador densidade do reservatório, seja zero. Assim, podemos escrever a Eq. (3.19) de forma mais simplificada:

$$\frac{d\tilde{\rho}_{S}(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^{2}} \int_{0}^{t} dt' Tr_{R} \left\{ [\tilde{H}_{I}(t), [\tilde{H}_{I}(t'), \tilde{\rho}(t')]] \right\}.$$
(3.20)

Assim, incluímos algumas aproximações para a equação acima. Visto que estamos considerando aproximações de segunda ordem, nós podemos supor que o operador densidade fatora, para qualquer tempo t, em $\tilde{\rho}(t') = \tilde{\rho}_S(t') \otimes \tilde{\rho}_R(0)$, de forma que o operador densidade do reservatório é constante no tempo (reservatório com capacidade térmica infinita). Além disso, supomos que a escala de tempo característica da memória do sistema, que é representada pela integral na Eq. (3.20), é curta suficiente de tal maneira que o operador densidade do sistema é insignificantemente diferente do seu valor atual. Assim, nós substituímos $\tilde{\rho}(t') \rightarrow \tilde{\rho}(t)$. A equação mestra de Redfield é então calculada (22),

$$\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_R \left\{ [\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(t'), \tilde{\rho}_S(t) \otimes \tilde{\rho}_R(0)]] \right\}.$$
(3.21)

É importante frisar que a equação de Redfield, apesar de ser local no tempo, já que envolve somente $\tilde{\rho}_S(t)$, é não Markoviana, visto que esta ainda contém uma referência explícita com o tempo inicial e o tempo local. A aproximação Markoviana é escrita substituindo o limite superior da integral por ∞ , de forma que desta maneira excluímos da dinâmica toda referência com o tempo passado.

3.3 Classes de erros

Nesta seção apresentamos brevemente as três classes de erros mais estudas na literatura: os erros de descoerência, os erros de bit-flip e os erros de amplitude. Tais classes de erros são relevantes pois somos capazes de estudar agentes de erros generalizados se considerarmos que as perturbações, representadas por estas, agem de forma correlacionada e/ou independente sobre o sistema. Apresentamos figuras ilustrativas da esfera de Bloch para cada um dos casos, além dos operadores de Kraus que podem ser utilizados para calcular a dinâmica de cada uma destas classes de erros.

3.3.1 Erro de descoerência

A descoerência é denominada às perturbações externas que não alteram a configuração energética do sistema reduzido (sistema total menos o reservatório), de forma que as perturbações provenientes do meio ambiente danificam somente a fase das superposições quânticas existentes. A fim de ilustrarmos o fenômeno da descoerência, vejamos o exemplo abaixo:

Nós começamos escrevendo um Hamiltoniano tal que

$$H = H_S + H_R + H_I = H_0 + H_I \tag{3.22}$$

onde H_S e H_R são os Hamiltonianos do sistema e do reservatório, respectivamente, e H_I é o Hamiltoniano de interação que pode ser escrito como,

$$H_I = \sum_n |n\rangle \langle n| \otimes B_n \equiv \sum_n A_n \otimes B_n.$$
(3.23)

onde $\{|n\rangle\}$ é uma base ortonormal do sistema reduzido e B_n são operadores que atuam no reservatório. Visto que estamos focando em interações que não perturbam as energias do sistema reduzido, nós assumimos que o Hamiltoniano H_S comuta com as projeções $A_n = |n\rangle\langle n|$, o que implica em

$$[H_0 + H_I, A_n] = 0, (3.24)$$

onde $H_0 = H_S + H_R$. Para efeito de simplificação, podemos escrever o mesmo sistema quântico no formalismo de interação, de forma que

$$\tilde{H}_{I}(t) = e^{iH_{0}t/\hbar} H_{I} e^{-iH_{0}t/\hbar} = \sum_{n} |n\rangle\langle n| \otimes \tilde{B}_{n}(t), \qquad (3.25)$$

onde

$$\tilde{B}_{n}(t) = e^{iH_{0}t/\hbar}B_{n}e^{-iH_{0}t/\hbar}.$$
(3.26)

Como dito no capítulo anterior, esta transformação no Hamiltoniano nos fornece como informação a dinâmica do sistema a menos daquela imposta pelo Hamiltoniano H_0 . É uma forma de observarmos no sistema quântico somente os efeitos pertinentes ao Hamiltoniano de interação, descartando aquelas pertinentes ao sistema reduzido.

A dinâmica do sistema pode ser calculada através do operador evolução temporal, que é escrito como

$$\mathcal{U}(t) = e_{\succ}^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t ds \sum_n |n\rangle \langle n| \otimes B_n(s)}, \qquad (3.27)$$

onde o símbolo \succ representa o ordenamento temporal decrescente da direita para a esquerda. Assim, pelo fato de $[H_0 + H_I, A_n] = 0$, a base $\{|n\rangle\}$ não é afetada pela dinâmica do acoplamento, de forma que um estado inicial qualquer

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{n} c_n |n\rangle \otimes |\phi\rangle, \qquad (3.28)$$

onde $|\phi\rangle$ é um estado arbitrário do reservatório, evolui para

$$\Psi(t)\rangle = \sum_{n} c_n \left| n \right\rangle \otimes \left| \phi_n(t) \right\rangle, \qquad (3.29)$$

onde

$$|\phi_n(t)\rangle = e_{\succ}^{-i\int_0^t ds\tilde{B}_n(s)} |\phi\rangle \equiv V_n(t) |\phi\rangle.$$
(3.30)

O estado $|\Psi(t)\rangle$, como podemos observar, geralmente é um estado emaranhado do sistemareservatório, visto que é dado por uma superposição de estados $|n\rangle \otimes |\phi_n(t)\rangle$. Isto ocorre pelo fato do Hamiltoniano de interação criar uma correlação dos vários estados do sistema $|n\rangle$ com o estado correspondente do reservatório $|\phi_n(t)\rangle$, carregando assim uma informações sobre o sistema. O operador densidade reduzido, no formalismo de interação, é então escrito como:

$$\tilde{\rho}_{S}(t) = \operatorname{Tr}_{R}\left\{ |\Psi(t)\rangle\!\langle\Psi(t)|\right\} = \sum_{n,m} c_{n}c_{m}^{*} \left|n\rangle\!\langle m\right| \left\langle\phi_{m}(t)|\phi_{n}(t)\right\rangle, \qquad (3.31)$$

onde $\langle \phi_n(t) | \phi_n(t) \rangle = 1$. Assim, de forma direta observamos que os elementos da diagonal principal de $\tilde{\rho}_S(t)$ são constantes no tempo, como mencionamos anteriormente, e as suas coerências, dadas pelos elementos fora da diagonal principal, adquirem uma dinâmica dada pela projeção do estado correspondente do reservatório $|\phi_n(t)\rangle \in |\phi_m(t)\rangle$. A dinâmica destas projeções, então, é definida pela correlação dos operadores do reservatório, e na literatura são usualmente escritas como

$$|\langle \phi_m(t) | \phi_n(t) \rangle| = e^{\Gamma_{nm}(t)}, \qquad (3.32)$$

com $\Gamma_{nm}(t) \leq 0$, de forma que para $n \neq m$ a quantidade $\Gamma_{nm}(t)$ descreve a dinâmica dos elementos fora da diagonal principal do operador densidade reduzido do sistema. É importante notar que $\Gamma_{nm}(t)$ podem assumir formas diferentes, visto que seu valor pode depender dos tempos de correlações do reservatório e sua respectiva temperatura, além dos tempos característicos do sistema.

A dinâmica de um qubit quando sujeito ao erro de descoerência pode facilmente ser escrita em termos dos operadores de Kraus:

$$K_0(t) = \sqrt{\frac{1+p}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K_1(t) = \sqrt{\frac{1-p}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (3.33)$$

onde p é a probabilidade do estado permanecer na sua configuração inicial. Vale ressaltar que p é uma parametrização do tempo e que sua função decresce monotonicamente. De fato, para $t \to \infty, p \to 0$.

Supondo que $p = e^{-2\gamma t}$, e aplicando os operadores de Kraus a um estado geral de um qubit, que é definido conforme o vetor de Bloch,

$$\rho_S(0) = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\left[r_x\sigma_x + r_y\sigma_y + r_z\sigma_z\right]$$
(3.34)

obtemos,

$$\rho_S(t) = \sum_{i=0}^{1} K_i(t) \rho_S(0) K_i^{\dagger}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (1+r_z) & \frac{1}{2} e^{-2\gamma t} (r_x - ir_y) \\ \frac{1}{2} e^{-2\gamma t} (r_x + ir_y) & \frac{1}{2} (1-r_z) \end{bmatrix}$$
(3.35)

de forma que, como previsto anteriormente, as populações do qubit não se alteram, enquanto que sua coerência desaparece para tempos longos. A Figura 3.1, que foi copiada da referência (25), ilustra o efeito da descoerência na esfera de Bloch. Como vemos, o eixo \hat{z} se mantêm constante, enquanto que os eixos $\hat{x} \in \hat{y}$ são contraídos à medida que $t \to \infty$.

3. SISTEMAS ABERTOS



Figura 3.1. Efeito da descoerência na esfera de Bloch. No caso, o eixo \hat{z} é mantido constante enquanto que os eixos \hat{x} e \hat{y} são contraídos.

3.3.2 Erro de bit-flip

A perturbação de bit-flip é uma perturbação dissipativa, ou seja, que induz a troca de energia do sistema com o ambiente. Sua dinâmica, quando discreta, está relacionada com a inversão da população do operador densidade, de forma que no limite em que o tempo tende a infinito, o estado de um qubit muda de $|\uparrow\rangle$ para $|\downarrow\rangle$, e vice-versa. Desta forma, para um sistema de um qubit, esta perturbação pode ser representada por um acoplamento do reservatório com o sistema através da matriz σ_x de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

Os operadores de Kraus que descrevem a dinâmica do erro de bit-flip podem ser escritos como:

$$K_0(t) = \sqrt{\frac{1+p}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K_1(t) = \sqrt{\frac{1-p}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3.37)$$

onde p, analogamente ao resultado exposto acima para o caso de erros de descoerência, é a probabilidade do estado permanecer na sua configuração inicial. Assim, aplicando os operadores de Kraus a um estado geral de um qubit, $a |\uparrow\rangle + b |\downarrow\rangle$, podemos observar que



Figura 3.2. Efeito do erro de bit-flip na esfera de Bloch. No caso, o eixo \hat{x} é mantido constante enquanto que os eixos \hat{y} e \hat{z} são contraídos.

a dinâmica do operador densidade, quando sujeito ao erro de bit-flip, é escrita como:

$$\rho_{S}(t) = \sum_{i=0}^{1} K_{i}(t)\rho_{S}(0)K_{i}^{\dagger}(t), \qquad (3.38)$$

$$\rho_{S}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (|a|^{2} + |b|^{2}) + (|a|^{2} - |b|^{2})p & (ab^{*} + a^{*}b) + (ab^{*} - a^{*}b)p \\ (ab^{*} + a^{*}b) - (ab^{*} - a^{*}b)p & (|a|^{2} + |b|^{2}) - (|a|^{2} - |b|^{2})p \end{pmatrix}. (3.39)$$

Assim, vejamos inicialmente as populações do operador densidade; visto que para t = 0temos p = 1, e que no limite em que $t \to \infty$, $p \to 0$, podemos observar claramente que a população do operador densidade se distribui. Isto se deve ao fato de que o ruído de bit-flip, quando aleatória, infere aos qubits uma rotação no espaço de Hilbert que, em média, torna a medida de cada um dos seus auto-estados igualmente provável. Desta maneira, teremos metade das medidas resultando $|\uparrow\rangle$ e metade resultando $|\downarrow\rangle$. De fato, se observarmos o operador densidade quando $p \to 0$ temos que:

$$\rho_S(t \to \infty) = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc} 1 & (ab^* + a^*b) \\ (ab^* + a^*b) & 1 \end{array} \right).$$
(3.40)

Analisando as coerências, outra propriedade importante surge; podemos observar que estas se preservam inalteradas quando são dadas, inicialmente, por números reais puros. Neste caso, o ruído de bit-flip, não destrói as coerências do sistema. Entrentando, para números imaginários puros, estes tendem a zero quando $p \rightarrow 0$. A Figura 3.2, que foi retirada da referência (25), ilustra o efeito do erro de bit-flip na esfera de Bloch. Como vemos, o eixo \hat{x} , que representa a parte real das coerências do operador densidade, se mantêm constante, enquanto que os eixos \hat{y} e \hat{z} são contraídos.

3.3.3 Erro de amplitude

O erro de amplitude é dado por uma interação dissipativa, de forma que ocorrem trocas de energia entre o sistema reduzido, dado pelos qubits, e o reservatório. O erro de amplitude descreve, quando se trata de sistemas de dois níveis, a predileção natural destes de permanecerem nas suas configurações de menor energia. Este tipo de acoplamento, assim, ilustra o efeito do decaimento espontâneo do sistema reduzido, de forma que qualquer operador densidade de um qubit (a menos daquele que representa o estado fundamental) terá tanto sua coerência quanto suas populações perturbadas quando sujeitos aos erros de amplitude.

O acoplamento do reservatório, em termos das matrizes de Pauli, é dado conforme a matriz σ_- :

$$\sigma_{-} = \frac{1}{2} [\sigma_x - i\sigma_y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3.41)$$

e os operadores de Kraus, que descrevem esta dinâmica, podem ser escritos como:

$$K_0(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-p} & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ \sqrt{p} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3.42)$$

de forma que a dinâmica do operador densidade, para um estado cuja condição inicial é dada em termos do vetor de Bloch por,

$$\rho_S(0) = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\left[r_x\sigma_x + r_y\sigma_y + r_z\sigma_z\right]$$
(3.43)

é escrita como

$$\rho_{S}(t) = \sum_{i=0}^{1} K_{i}(t)\rho_{S}(0)K_{i}^{\dagger}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2\gamma t}(1+r_{z}) & \frac{1}{2}e^{-\gamma t}(r_{x}-ir_{y}) \\ \frac{1}{2}(r_{x}+ir_{y})e^{-\gamma t} & 1-\frac{1}{2}e^{-2\gamma t}-\frac{1}{2}e^{-2\gamma t}r_{z} \end{bmatrix}$$
(3.44)

onde $p=1-e^{-2\gamma t}.$ Como observamos, a medida que $t\to\infty$ temos que

$$\rho_S(t \to \infty) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.45}$$

de forma que o qubit tende, então, ao estado $|\downarrow\rangle$. A Figura 3.1, que foi retirada (e alterada a fim de manter a convenção desta tese) da referência (25), ilustra o efeito do



Figura 3.3. Efeito do erro de amplitude na esfera de Bloch. A esfera se contrai na região sul, que no caso representa o estado $|\downarrow\rangle$.

erro de amplitude na esfera de Bloch, onde notamos, como previsto, que a esfera contrai em direção ao estado $|\downarrow\rangle$.

4 Métodos de proteção contra erros

Durante os últimos anos, um número grande de esquemas interessantes foram propostos para contra-atacar os efeitos danosos e inevitáveis da descoerência. Podemos citar, entre os três métodos mais importantes, os códigos de correção de erro quântico (CCEQ) (26, 27, 28, 29, 30), os subespaços livres de descoerência (SLD) (31, 32, 33, 34) e mecanismos baseados em pulsos unitários freqüentes, denominados bang-bang (BB), e sua generalização o desacoplamento dinâmico (DD) (1,2,3,4). Cada uma destas estratégias possuem suas respectivas peculiaridades, e devem satisfazer condições próprias para serem bem sucedidas. Por exemplo, para o CCEQ, é necessário utilizar qubits auxiliares e, geralmente, uma taxa de erro pequena é assumida de forma que somente um qubit é perturbado durante a execução do protocolo. Para uma estratégia de SLD, além de qubits físicos auxiliares, uma simetria especial do meio ambiente também é necessária para direcionar a codificação de um qubit lógico livre de descoerência. Finalmente, o método de DD requer, em princípio, somente campos externos de controle sobre um único qubit para proteger uma operação lógica quântica, de forma que não se faz necessário qubits auxiliares. A peculiaridade neste caso é que o ciclo de controle precisa ser mais rápido que o tempo médio de intervenção do meio ambiente. Neste capítulo da tese, nós mostraremos as idéias principais contidas em cada um destes métodos e exemplificaremos cada um deles.

4.1 Códigos de correção de erros

Os códigos de correção de erros quânticos (CCEQ) têm como principal função detectar e corrigir erros causados por interações externas indesejadas. É denominado um método de proteção ativo, visto que é necessário uma intervenção externa para recuperar a informação danificada. Desde os trabalhos pioneiros de Peter Shor (26) e Andrew Steane (27), que foram os primeiros a implementarem um CCEQ, um grande número de artigos científicos foram publicados a fim de criar e estudar diferentes códigos. O código inicial de Shor utiliza 9 qubits físicos para representar um qubit lógico, e protege o sistema contra erros independentes e arbitrários, onde cada qubit é perturbado de forma descorrelacionada. Aperfeiçoando o método, Calderbank, Shor e Steane desenvolveram os chamados códigos CSS (28, 29) e Gottesman, de forma mais abrangente, os códigos estabilizadores (35), que generalizam os CCEQ. Além disso, devemos citar também o trabalho de Knill e Laflamme (36) que deduziram o limite de Hamming quântico, que fornece o menor conjunto de estados necessários para proteger um qubit lógico contra um certo número de erros, ou seja, o número mínimo de qubits físicos. A fronteira de Hamming quântica, por exemplo, limita em 5 o número de qubits físicos necessários para proteger um estado lógico contra uma única classe de erros, como erro de fase ou bit-flip, que ocorrem de formas independentes sobre cada qubit. Vale ressaltar que quando tais erros não são independentes, o número de qubits físicos necessário cresce drasticamente. A fim de elucidar o método, nós mostramos um exemplo simples, onde codificaremos um qubit lógico de forma que este esteja livre de erros de bit-flip. Os estados quânticos, neste caso, são codificados da seguinte forma:

$$|0\rangle_L = |000\rangle \qquad e \qquad |1\rangle_L = |111\rangle, \tag{4.1}$$

e é suposto que os erros somente aconteçam em um único qubit de cada vez, ou seja

$$\Sigma_i(\alpha |000\rangle + \beta |111\rangle) = \sigma_i^x(\alpha |000\rangle + \beta |111\rangle), \qquad (4.2)$$

onde Σ_i representa uma perturbação de bit-flip.

Sendo assim, a idéia principal do sistema é verificar se os qubits são iguais dois a dois. Ou seja:

a) É suposto que o qubit 1 e 2 sejam iguais, eles são?

b) É suposto que o qubit 2 e 3 sejam iguais, eles são?

A resposta para estas duas perguntas resolve o problema de forma completa se somente um erro aconteçe a cada aplicação do código de correção. Como exemplo, se a resposta a) for sim e b) não, nós saberemos com certeza que o qubit 3 sofreu um erro de bit-flip. O conjunto de respostas *sim*, *não* é o que chamamos de *sintoma do erro*. Como fazemos para obter estas respostas é o que veremos abaixo.

A idéia principal se resume em saber se os estados dos qubits são paralelos ou antiparalelos dois-a-dois. Suponha um estado $|\Psi_0\rangle = |\phi_{12}\rangle \otimes |aux\rangle$ onde $|\phi_{12}\rangle$ é uma combinação dos estados paralelos ou anti-paralelos de 2 qubits , ou seja, $|\phi_{12}\rangle = \alpha |00\rangle + \beta |11\rangle$ ou $|\phi_{12}\rangle = \alpha' |10\rangle + \beta' |01\rangle$. Uma forma simples de descobrir em qual das duas superposição o estado se encontra é aplicar duas portas CNOT consecutivas onde a primeira utiliza o qubit 1 como controle e a segunda o qubit 2, sendo o alvo o qubit auxiliar. Desta forma, enquanto que para estados paralelos, seja ele $|00\rangle$ ou $|11\rangle$, o qubit auxiliar não se altera visto que para o estado $|00\rangle$ nada ocorre com o qubit auxiliar, e para $|11\rangle$ o qubit auxiliar é flipado 2 vezes, retornado ao estado inicial, para os estados anti-paralelos o qubit auxiliar sofre uma rotação de 180° . Desta forma, então, somos capazes de responder as perguntas a) e b) através da medida do qubit auxiliar.

Para corrigir erros de fase o procedimento é similar. Cada um dos três qubits físicos utilizados para codificar o qubit lógico é escrito de tal forma que,

$$|0\rangle_{L} = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{(2)}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{(2)}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{(2)}}\right)$$
$$|1\rangle_{L} = \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{(2)}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{(2)}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{(2)}}\right).$$
(4.3)

Podemos novamente reduzir o problema à determinação da paridade dos qubits dois a dois, como no caso anterior, se observarmos que a operação lógica quântica de Hadamard é de tal maneira que

$$H_{Had} \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = |0\rangle,$$

$$H_{Had} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = |1\rangle,$$
(4.4)

A operação de Hadamard transforma, se aplicada nos três qubits, os estados codificados dados conforme Eq. (4.3) nos estados lógicos dados pela Eq. (4.1), de forma que o procedimento análogo ao caso de correção de erros de bit-flip pode ser executado. Vale notar que um erro de fase atua de tal forma que

$$\frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{|0\rangle \pm \exp^{-i\phi} |1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad (4.5)$$

representando um bit-flip após a operação de Hadamard.

4.2 Subespaços livres de erros

A idéia principal dos subespaços livres de erros se baseia em encontrar um grupo de estados, dentre todos os existentes no espaço de Hilbert, cujas superposições são invulneráveis a certos tipos de erros. Desta forma, se fazem necessárias simetrias especiais do acoplamento sistema-reservatório, e geralmente estão relacionadas com interações coletivas, onde as interações dos diversos subsistemas, como por exemplos os qubits, interagem com o reservatório de forma correlacionada. Assim, a fim de utilizar a simetria como um recurso para a proteção, qubits auxiliares são necessários, de forma que um qubit lógico possua no mínimo 2 qubits físicos. Apesar desta restrição, uma vantagem deste método de proteção contra erros sobre os códigos de correção de erros e o desacoplamento dinâmico é irrefutável: este é o único, dentre os três métodos, que age de forma passiva, sem a necessidade de qualquer operação ou manipulação externa.

A procura em contornar os erros, no contexto de computação quântica, baseado na identificação de estados que possam ser imunes a certas classes de erros começou com as observações de Palma, Suominen e Ekert (37) em um estudo dos efeitos da defasagem coletiva para dois qubits que interagem de forma idêntica e correlacionada com o reservatório. Neste caso, o Hamiltoniano de interação é dado por,

$$H_{int} = (\sigma_1^z + \sigma_2^z) \otimes B \equiv J_z \otimes B, \tag{4.6}$$

onde B é um operador que atua no sub-espaço do reservatório e está acoplado com o operador momento angular total do sistema na direção \hat{z} . O operador $J_z = \sigma_1^z + \sigma_2^z$ é degenerado, visto que os estados $|\uparrow\downarrow\rangle$ e $|\downarrow\uparrow\rangle$ possuem o mesmo autovalor. Assim, neste caso, quaisquer superposições dadas por $\alpha |\uparrow\downarrow\rangle + \beta |\downarrow\uparrow\rangle$ estarão livres da perturbação dada por J_z , de forma que somos capazes de codificar um qubit lógico nestes estados degenerados.

De uma forma geral, se encontrarmos um subespaço tal que, dado um Hamiltoniano geral de interação,

$$H_I = \sum_{\alpha} S_{\alpha} \otimes B_{\alpha}, \tag{4.7}$$

exista um conjunto $\{|\tilde{k}\rangle\}$ de autovetores de S_{α} 's com a propriedade,

$$S_{\alpha} |\tilde{k}\rangle = c_{\alpha} |\tilde{k}\rangle \qquad \forall \, \alpha, |\tilde{k}\rangle,$$

$$(4.8)$$

a evolução é livre de erros se a condição inicial e toda e qualquer dinâmica imposta ao sistema estiver dentro deste subespaço dado pelo conjunto $\{|\tilde{k}\rangle\}$. Vale ressaltar que os autovetores são degenerados, ou seja, c_{α} depende somente do índice α do operador do sistema, mas não do índice k. Esta, pode se dizer, é a idéia principal dos subespaços livre de erros e foi observada pela primeira vez por P. Zanardi e M. Rasetti em 1997 (38).

4.3 Desacoplamento dinâmico

O desacoplamento dinâmico, como o próprio nome sugere, é uma estratégia de defesa que atua de forma dinâmica no sistema. Apesar dos avanços na literatura em relação aos diversos métodos de desacoplamento dinâmico, os fundamentos desta estratégica contra erros são bem conhecidos dos experimentais em ressonância magnética nuclear (RMN). Neste caso, a técnica denominada *spin eco*, é baseada na inversão do vetor de magnetização dos spins, o que torna possível, em determinados períodos de tempo, recuperar a informação perturbada por algumas classes de erros. De forma análoga, supondo pulsos ou campos de alta freqüência que interagem com o qubit de forma mais rápida que o tempo médio de interação do reservatório, o desacoplamento dinâmico surge de uma maneira mais ampla, sendo capaz de desacoplar um qubit de diversos tipos de interações. Abaixo, calculando a dinâmica para um sistema aberto, mostramos que existe uma classe de Hamiltonianos de controle dependentes do tempo capazes de realizar tal tarefa.

Dado o Hamiltoniano

$$H(t) = H_c(t) + H_R + H_I$$
(4.9)

onde $H_c(t)$ é o Hamiltoniano de controle mais o Hamiltoniano do sistema físico, H_R é o Hamiltoniano do reservatório e H_I é o Hamiltoniano de interação entre o sistema e o reservatório. A questão principal do desacoplamento dinâmico, então, se baseia em encontrar um Hamiltoniano $H_c(t)$ tal que, como resultado, tenhamos um sistema desacoplado do reservatório, eliminando, assim, o termo pertinente ao Hamiltoniano de interação. Para mostrar que de fato podemos encontrar este Hamiltoniano, convêm escrevermos H(t) num outro referencial. Como exposto na introdução, podemos alterar o referencial do Hamiltoniano total do sistema, transformado-o por operações unitárias, de forma a escrevemos H(t) na representação de interação,

$$\tilde{H}(t) = \mathcal{U}_c^{\dagger}(t)H_I\mathcal{U}_c(t) + H_R, \qquad (4.10)$$

onde $\mathcal{U}_c(t) = \exp(-iH_c(t)t)$, e notando que os operadores do sistema comutam com o operadores do reservatório. Nesta representação, a dinâmica do operador densidade é então dada exclusivamente pelo termo da interação, sendo este constante quando $\tilde{H}_I(t) = \mathcal{U}_c^{\dagger}(t)H_I\mathcal{U}_c(t)$ for igual a zero.

O operador evolução temporal total do sistema, neste novo referencial, é tal que (incluindo $-i\hbar \text{ em } \tilde{H}(t)$)

$$\frac{d\mathcal{U}(t)}{dt} = \tilde{H}(t)\mathcal{U}(t), \qquad (4.11)$$

que pode ser calculado, de uma forma aproximada, através da expansão de Magnus (39). Propondo uma solução exponencial para o sistema total,

$$\mathcal{U}(t) = \exp(A(t)), \tag{4.12}$$

com A(0) = 0, Magnus mostrou que A(t), quando expandido numa série de potências no tempo é escrito como (ver detalhes no Apênd. (A)),

$$A(t) = A_1(t) + A_2(t) + A_3(t) + \dots,$$
(4.13)

onde

$$A_{1}(t) = \int_{0}^{t} \tilde{H}(t')dt',$$

$$A_{2}(t) = \frac{1}{2} \int_{0}^{t} [\tilde{H}(t'), A_{1}(t')]dt',$$

$$A_{3}(t) = \frac{1}{2} \int_{0}^{t} [\tilde{H}(t'), A_{2}(t')]dt' + \frac{1}{12} \int_{0}^{t} [[\tilde{H}(t'), A_{1}(t')], \tilde{H}(t')]dt', \quad (4.14)$$

de forma que podemos calcular, de forma aproximada, a dinâmica dada pelo operador evolução temporal. É importante notar que se o termo de primeira ordem $A_1(t)$ for nulo, conseqüentemente todas as outras ordens também serão. Surge então o desacoplamento dinâmico: visto que temos um controle sobre o sistema, existe algum Hamiltoniano do sistema, cujo operador evolução temporal $\mathcal{U}_c(t)$ seja periódico no tempo, tal que,

$$A_1(t) = -i\hbar \int_0^t \mathcal{U}_c^{\dagger}(t) H_I \mathcal{U}_c(t) dt' = 0 , \qquad (4.15)$$

ou seja, é possível anularmos o primeiro termo da expansão de Magnus restaurando a informação em determinados períodos? O método de desacoplamento dinâmico mostra que, em teoria, sim. Na literatura existe um grande número de trabalhos teóricos que mostram altos índices de desacoplamento através da utilização de pulsos de altas freqüências (1, 2, 3, 4), mas, entretanto, os estudos do método de desacoplamento com campos contínuos é mais recente, e é nesta linha de pesquisa que trilhamos no decorrer desta tese.

5 Desacoplamento dinâmico contínuo para o caso de 1 qubit

5.1 Desacoplando continuamente operações de 1 qubit

Nesta parte da tese nós aplicamos o método de proteção contra erros denominado desacoplamento dinâmico para o caso da proteção de operações lógicas de um qubit. Aqui nós calculamos e ilustramos em detalhes toda a metodologia por nós desenvolvida (40), cujo ferramental foi crucial para o desenvolvimento desta tese. Partindo do operador evolução temporal geral para um sistema de um qubit, nós determinamos via diferenciação, a classe de Hamiltonianos, e conseqüentemente as configurações dos campos contínuos de alta freqüência, capazes de desacoplar de forma eficiente o sistema do reservatório. Como dito, nosso trabalho baseia-se na utilização de campos contínuos de alta freqüência, o que difere da grande maioria dos trabalhos presentes na literatura. O desacoplamento contínuo, como mostraremos a seguir, pode ser alcançado de forma mais simples que os pulsos de altas freqüências pois, contrário ao sistema pulsado, somente se faz necessário uma única intervenção ao final da operação lógica quântica.

Nós mostramos que, se a estrutura do erro que age em um qubit, e suas respectivas constantes são conhecidas, através da aplicação de uma superposição de campos externos é possível realizarmos qualquer operação lógica em um qubit fracamente perturbado por um ambiente representado por um campo escalar de bósons, mesmo a uma temperatura finita. A formulação geral do método de desacoplamento dinâmico (2, 41), como mostraremos, gera uma interpretação geométrica clara da proteção do erro quando utilizado no caso simples de um único qubit controlado por campos contínuos. Sob estas circunstâncias, nós mostramos que a descoerência durante as operações lógicas pode ser eficientemente reduzida pela aplicação de dois campos vetoriais: um rodando ortogonalmente na direção do outro, que é um campo vetorial estático. As amplitudes, freqüências e as direções desses campos são determinadas pela operação lógica pretendida, pela estrutura do erro ao qual o qubit está sujeito e pelas características do meio ambiente.

Pelo propósito de começarmos uma investigação do uso de campos de controle contínuos para proteção contra erros durante operações lógicas quânticas, nós fazemos a suposição inicial de que a interação entre os qubits e o meio ambiente que o circunda é suficientemente fraca, de forma que uma teoria de perturbação pode ser aplicada. Neste capítulo nós imaginamos uma situação na qual o qubit está longe de outros qubits e, ainda, que possa ser controlado por campos externos. Apesar disso, imaginamos que o qubit está sujeito às perturbações provenientes do meio ambiente que aqui nós representamos como um reservatório térmico de bósons escalares. É importante notar que aqui nós iremos tratar campos de controle com freqüência da ordem do inverso do tempo de correlação dos campos que representam o meio ambiente, de forma que nós devemos, ainda que utilizando teoria de perturbação, deduzir uma equação mestra não-Markoviana.

5.1.1 Equação mestra para um único reservatório

Nós começamos notando que os agentes que acoplam o qubit ao meio ambiente podem ser representados pelas matrizes de Pauli. Nós supomos, nesta parte da tese, que a ação do meio ambiente é representada por um único campo escalar bosônico, de forma que o Hamiltoniano de interação é dado por,

$$H_I = (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\sigma}) B + (\boldsymbol{\lambda}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}) B^{\dagger}, \qquad (5.1)$$

onde λ é o vetor de erro cujas componentes podem ser complexas. Nós tomamos $B = \sum_k g_k a_k$, onde g_k é um número complexo que representa a constante de acoplamento para o modo normal k com dimensão de freqüência e a_k é o operador que aniquila um quantum no modo k do reservatório. Nesta parte da tese nós utilizamos unidades de $\hbar = 1$.

Como dito na parte introdutória deste capítulo, ao invés de começarmos com o Hamiltoniano e calcular o operador evolução temporal do sistema cujo procedimento necessariamente se refere a métodos de ordenamento temporal que estão sujeitos a diversas dificuldades técnicas, nós começamos com o operador de evolução unitário geral para um qubit e obtemos, de forma inversa, o Hamiltoniano por diferenciação.

Qualquer transformação unitária de um qubit pode sempre ser expressa por:

$$\mathcal{U}(t) = I \cos\left[\alpha(t)\right] - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}(t) \sin\left[\alpha(t)\right], \qquad (5.2)$$

onde I é a matriz identidade 2×2 , $\alpha(t)$ é uma função do tempo t, $\hat{\mathbf{u}}(t)$ é um vetor unitário dependente do tempo e $\boldsymbol{\sigma} = \hat{x}\sigma_x + \hat{y}\sigma_y + \hat{z}\sigma_z$, onde σ_x , σ_y e σ_z são as matrizes de Pauli. O Hamiltoniano de controle $H_c(t)$ é então facilmente obtido através da diferenciação da Eq (5.2):

$$H_c(t) = i \frac{d\mathcal{U}(t)}{dt} \mathcal{U}^{\dagger}(t) = \mathbf{\Omega}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \qquad (5.3)$$

com

$$\mathbf{\Omega}(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}\mathbf{\hat{u}}(t) + \sin[\alpha(t)]\cos[\alpha(t)]\frac{d\mathbf{\hat{u}}(t)}{dt} + \sin^2[\alpha(t)]\mathbf{\hat{u}}(t) \times \frac{d\mathbf{\hat{u}}(t)}{dt},$$
(5.4)

onde $\mathcal{U}^{\dagger}(t)$ é o Hermitiano conjugado de $\mathcal{U}(t)$. O cálculo de $\Omega(t)$ é direto, e está feito em detalhes no Apêndice (C.1). É importante notar que, visto os resultados das Eqs. (5.2)-(5.4), nós evitamos qualquer tipo de manipulação de ordenamento temporal.

A equação mestra de segunda ordem, local no tempo, que descreve a evolução da matriz do operador densidade do qubit, no formalismo de interação, é escrito como (42):

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = -\int_0^t dt' \operatorname{Tr}_R\left\{\left[\tilde{H}_I(t), \left[\tilde{H}_I(t'), \rho_R\tilde{\rho}(t)\right]\right]\right\},\tag{5.5}$$

onde $\tilde{H}_I(t)$ é o Hamiltoniano de interação no formalismo de interação, ou seja,

$$\tilde{H}_I(t) = \mathcal{U}^{\dagger}(t)\mathcal{U}_R^{\dagger}(t)H_I\mathcal{U}_R(t)\mathcal{U}(t), \qquad (5.6)$$

com

$$\mathcal{U}_R(t) = \exp\left(-iH_R t\right),\tag{5.7}$$

$$H_R = \sum_k \omega_k a_k^{\dagger} a_k \tag{5.8}$$

onde ω_k é a freqüência do modo normal k do reservatório térmico, e $\mathcal{U}(t)$ é como na Eq. (5.2). É importante destacar que a Eq. (5.5) é uma aproximação de segunda ordem

em termos da constante de acoplamento, de forma que é válida no regime no qual o tamanho do acoplamento, expresso em unidades de freqüência, multiplicado pelo tempo de correlação do reservatório térmico é muito menor que 1.

Acima, ρ_R é a matriz densidade inicial do reservatório térmico:

$$\rho_R = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H_R), \tag{5.9}$$

onde Z é a função de partição que é dada por

$$Z = \operatorname{Tr}_{R}\left[\exp(-\beta H_{R})\right]. \tag{5.10}$$

Aqui, $\beta = 1/k_B T$, onde k_B é a constante de Boltzmann, e T é a temperatura absoluta do meio ambiente.

Da forma da interação entre o qubit e seu meio ambiente, Eq. (5.1), nós obtemos

$$\tilde{H}_{I}(t) = \tilde{B}(t)\Lambda(t) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \tilde{B}^{\dagger}(t)\Lambda^{*}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \qquad (5.11)$$

onde

$$\tilde{B}(t) = \mathcal{U}_R^{\dagger}(t) B \mathcal{U}_R(t) = \sum_k g_k a_k \exp(-i\omega_k t), \qquad (5.12)$$

e $\Lambda(t)$ é definido como um vetor dependente do tempo, e é dado por

$$\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{\lambda} \cos\left[2\alpha(t)\right] + \left[\mathbf{\lambda} \times \hat{\mathbf{u}}(t)\right] \sin\left[2\alpha(t)\right] + \hat{\mathbf{u}}(t) \left[\hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{\lambda}\right] \left\{1 - \cos\left[2\alpha(t)\right]\right\}.$$
 (5.13)

O cálculo do vetor $\Lambda(t)$ esta feito em detalhes no Apêndice (C.2).

Substituindo Eq. (5.11) na Eq. (5.5), nós obtemos

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta=1}^{3} \left\{ D_{\alpha\beta}(t) \left[\sigma_{\alpha}, \rho_{I}(t)\sigma_{\beta} \right] + D_{\alpha\beta}^{*}(t) \left[\sigma_{\beta}\rho_{I}(t), \sigma_{\alpha} \right] \right\},\tag{5.14}$$

onde definimos

$$D_{\alpha\beta}(t) = \int_0^t dt' \operatorname{Tr}_R \left[b_\alpha(t) \rho_R b_\beta(t') \right], \qquad (5.15)$$

com o operador do reservatório $\mathbf{b}(t)$ dado por $\mathbf{b}(t) = \tilde{B}(t)\mathbf{\Lambda}(t) + \tilde{B}^{\dagger}(t)\mathbf{\Lambda}^{*}(t)$. Substituindo (5.9) em (5.15) obtemos então

$$D_{\alpha\beta}(t) = 2\Re \left\{ \Lambda^*_{\alpha}(t) \int_0^t dt' \Lambda_{\beta}(t') \mathcal{I}_1(t-t') \right\} + \Lambda^*_{\alpha}(t) \int_0^t dt' \Lambda_{\beta}(t') \mathcal{I}_2(t-t'), \quad (5.16)$$

onde $\Re\{\cdot\}$ é dado pela parte real do argumento, e definimos

$$\mathcal{I}_1(t) = \sum_k |g_k|^2 \frac{\exp\left(i\omega_k t\right)}{\exp(\beta\omega_k) - 1},\tag{5.17}$$

$$\mathcal{I}_2(t) = \sum_k |g_k|^2 \exp\left(i\omega_k t\right).$$
(5.18)

Os cálculos da Eq. (5.14) e da Eq. (5.15), que originam as correlações do reservatório térmico dado por $\mathcal{I}_1(t)$ e $\mathcal{I}_2(t)$, estão feitos em detalhes no apêndice (C.3) e (C.5).

Finalmente, no limite em que o número de modos normais do reservatório por unidade de freqüência se torna infinito, nós definimos a densidade espectral como,

$$J(\omega) = \sum_{k} |g_k|^2 \,\delta(\omega - \omega_k),\tag{5.19}$$

com $\omega \in [0, +\infty)$ e interpretamos a soma das Eqs. (5.17) e (5.18) como integrais sobre ω :

$$\mathcal{I}_{1}(t) = \int_{0}^{\infty} d\omega J(\omega) \exp(i\omega t) / [\exp(\beta\omega) - 1],$$

$$\mathcal{I}_{2}(t) = \int_{0}^{\infty} d\omega J(\omega) \exp(i\omega t).$$
 (5.20)

Se nós escrevermos agora $\tilde{\rho}(t) = \frac{1}{2}[I + \mathbf{r}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}]$, o vetor de Bloch $\mathbf{r}(t)$ é real e, pelas Eqs. (5.14) e (5.16), satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = 4\Re \left\{ \mathbf{\Lambda}^*(t) \times \left[(2\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)) \times 2\mathbf{r}(t) \right] \right\} - 2\Im \left[\mathbf{\Lambda}^*(t) \times \mathbf{G}(t) \right], \quad (5.21)$$

onde definimos

$$\mathbf{F}(t) = \int_0^t dt' \mathbf{\Lambda}(t') \mathcal{I}_1(t-t'),$$

$$\mathbf{G}(t) = \int_0^t dt' \mathbf{\Lambda}(t') \mathcal{I}_2(t-t').$$
(5.22)

Os vetores $\mathbf{F}(t)$ e $\mathbf{G}(t)$ podem ser interpretados como médias temporais do vetor $\mathbf{\Lambda}(t')$ pesados pelas funções $\mathcal{I}_1(t-t')$ e $\mathcal{I}_2(t-t')$, respectivamente. Dependendo do tamanho da densidade espectral do reservatório, $J(\omega)$ na Eq. (5.19), as funções peso, $\mathcal{I}_1(t-t')$ e $\mathcal{I}_2(t-t')$, determinam quanto da história passada de $\mathbf{\Lambda}(t')$ efetivamente contribui para as suas médias temporais, $\mathbf{F}(t)$ e $\mathbf{G}(t)$. Portanto, a Eq. (5.21) não é restrita por uma aproximação Markoviana.

5.1.2 Proteção da operação lógica de Hadamard

Nós direcionamos nossos esforços na tentativa de encontrarmos um operador evolução temporal $\mathcal{U}(t)$ tal que a Eq. (5.21), a qual se refere ao formalismo de interação, resulte, após um certo tempo de duração τ da operação lógica quântica, em $\mathbf{r}(\tau) \approx \mathbf{r}(0)$. Na representação de Schrödinger, este resultado significa que, efetivamente, a dinâmica descrita pela Eq. (5.21) é equivalente à ação do operador $\mathcal{U}(\tau)$, como se o qubit não fosse perturbado pelo meio ambiente durante o intervalo de tempo τ . Vale ressaltar, que apesar de nos focarmos na operação lógica de Hadamard, a metodologia aqui apresentada pode ser aplicada para qualquer operação lógica de um qubit.

O Hamiltoniano total, na representação de Schrödinger, é dado por

$$H(t) = H_U(t) + H_B + H_I, (5.23)$$

onde $H_U(t)$ é determinado conforme descrito pela Eq. (5.3) depois de encontrar $\mathcal{U}(t)$, H_B é o Hamiltoniano do reservatório como descrito logo abaixo da Eq. (5.5), e H_I é o Hamiltoniano de interação dado conforme Eq. (5.1).

Pelo fato de nós planejarmos realizar um operação lógica quântica simultaneamente à proteção de erros, nós dividimos $H_U(t)$ em dois termos, $H_U(t) = H_0(t) + H_c(t)$, onde $H_0(t)$ executa a porta lógica quântica, enquanto $H_c(t)$ age contra a ação perturbatória do meio ambiente. De acordo com a prescrição bem exposta na Ref. (41), o operador unitário $\mathcal{U}_c(t)$ correspondente ao Hamiltoniano $H_c(t)$ deve ser periódico e satisfazer

$$\int_0^{t_c} dt \mathcal{U}_c^{\dagger}(t) H_I \mathcal{U}_c(t) = 0, \qquad (5.24)$$

onde $t_c < \tau$ é o período de $\mathcal{U}_c(t)$, ou seja, $\mathcal{U}_c(t + t_c) = \mathcal{U}_c(t)$. Neste capítulo, por conveniência, nós escolhemos τ como um múltiplo inteiro n de t_c , ou seja, $\tau = nt_c$, tal que $\mathcal{U}_c(\tau) = I$. Assim, se escolhermos

$$H_c = (2\pi/t_c)\hat{\mathbf{u}}_c \cdot \boldsymbol{\sigma},\tag{5.25}$$

então

$$\mathcal{U}_c(t) = I\cos(2n\pi t/\tau) - i\hat{\mathbf{u}}_c \cdot \boldsymbol{\sigma}\sin(2n\pi t/\tau).$$
(5.26)

Seguindo o mesmo procedimento utilizado para obter as Eqs. (5.11) e (5.13), nós descobrimos que a integral de $\mathcal{U}_c^{\dagger}(t)H_I\mathcal{U}_c(t)$ sobre um período t_c resulta zero somente se nós escolhermos $\hat{\mathbf{u}}_c$ ortogonal ao vetor $\boldsymbol{\lambda}$, o que é sempre possível, mesmo se $\boldsymbol{\lambda}$ tiver uma componente complexa.

No formalismo obtido utilizando a transformação unitária $\mathcal{U}_c(t)$ como dado acima, nós escolhemos $H_0(t)$ tal que

$$\mathcal{U}_{c}^{\dagger}(t)H_{0}(t)\mathcal{U}_{c}(t) = \frac{\theta_{0}}{\tau}\hat{\mathbf{u}}_{0}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \qquad (5.27)$$

onde $\hat{\mathbf{u}}_0 \in \theta_0$ são constantes a serem determinadas de acordo com a operação lógica pretendida, conforme explicamos abaixo. Visto que $\mathcal{U}_c^{\dagger}(t)H_0(t)\mathcal{U}_c(t)$ é independente do tempo, o operador unitário de evolução temporal associado a ele é dado por

$$\mathcal{U}_0(t) = I\cos(\theta_0 t/\tau) - i\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}\sin(\theta_0 t/\tau), \qquad (5.28)$$

dando

$$\mathcal{U}_0(\tau) = I \cos \theta_0 - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}_0 \sin \theta_0 \tag{5.29}$$

no fim da operação lógica, $t = \tau$. Desta forma, se nós escolhermos $\mathcal{U}(t)$ como um operador unitário composto, formado por dois campos, $\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_c(t)\mathcal{U}_0(t)$, então, em $t = \tau$,

$$\mathcal{U}(\tau) = I\cos\theta_0 - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{u}}_0\sin\theta_0,\tag{5.30}$$

de forma que a operação lógica desejada determina a escolha de $\hat{\mathbf{u}}_0 \in \theta_0$. Comparando estas conclusões com a Eq. (5.2), nós obtemos:

$$\cos[\alpha(t)] = -\hat{\mathbf{u}}_{c} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{0} \sin(2n\pi t/\tau) \sin(\theta_{0}t/\tau) + \cos(2n\pi t/\tau) \cos(\theta_{0}t/\tau), \qquad (5.31)$$
$$\hat{\mathbf{u}}(t) \sin[\alpha(t)] = (\hat{\mathbf{u}}_{c} \times \hat{\mathbf{u}}_{0}) \sin(2n\pi t/\tau) \sin(\theta_{0}t/\tau) + \hat{\mathbf{u}}_{c} \sin(2n\pi t/\tau) \cos(\theta_{0}t/\tau) + \hat{\mathbf{u}}_{0} \cos(2n\pi t/\tau) \sin(\theta_{0}t/\tau). \qquad (5.32)$$

A forma explicita do Hamiltoniano H_U é aquela já dada pela Eq. (5.3), $H_U = \Omega(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}$, onde o campo externo aplicado é calculado das Eqs. (5.31) e (5.32) de acordo com a prescrição da Eq. (5.4):

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = [(2n\pi/\tau) + (\theta_0/\tau) \hat{\mathbf{u}}_c \cdot \hat{\mathbf{u}}_0] \hat{\mathbf{u}}_c
+ (\theta_0/\tau) [\hat{\mathbf{u}}_c \times (\hat{\mathbf{u}}_0 \times \hat{\mathbf{u}}_c)] \cos(2n\pi t/\tau)
+ (\theta_0/\tau) (\hat{\mathbf{u}}_c \times \hat{\mathbf{u}}_0) \sin(2n\pi t/\tau).$$
(5.33)

Assim, como podemos observar, o primeiro termo da Eq. (5.33) é um campo estático ao longo da direção que é perpendicular ao vetor de erro, como discutido acima, e os outros dois termos geram um campo girante perpendicular à direção do campo estático. Nós apresentamos cálculos numéricos para resolver a Eq. (5.21) a fim de apresentar a estratégia descrita acima. Para ilustrar nosso resultado como um exemplo concreto, no presente capítulo nós assumimos uma densidade espectral ôhmica com uma freqüência de corte ω_c , ou seja, $J(\omega) = \eta \omega \exp(-\omega/\omega_c)$, onde η é uma constante adimensional. Tais densidades espectrais são típicas de reservatórios formados por elétrons condutores, assim como nos denominados SQUIDS, que são interferômetros quânticos supercondutores típicos das junções de Josephson. Assim, as versões integrais das Eqs. (5.17) e (5.18) podem ser explicitamente calculadas (ver apêndice (C.4)) dando:

$$\mathcal{I}_{1}(t) = (\eta/\beta^{2})\Psi^{(1)}(1 + 1/(\beta\omega_{c}) - it/\beta),$$

$$\mathcal{I}_{2}(t) = \eta\omega_{c}^{2}/(1 - i\omega_{c}t)^{2},$$
 (5.34)

onde $\Psi^{(1)}$ é a primeira função poligamma, que é definida como a derivada segunda do logaritmo da função gamma que por sua vez é uma extensão para números reais e complexos da função fatorial,

$$\Psi^{(1)}(z) = \frac{d}{dz} ln\Gamma(z), \qquad (5.35)$$

onde

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,$$
(5.36)

onde z é um número complexo com sua parte real positiva. Como no caso do desacoplamento dinâmico pulsado (1,2,3), nós obtemos que o campo girante deve possuir uma freqüência suficientemente maior que ω_c para ser eficiente na proteção do estado quântico. Devido a esta hipótese inicial, nós escolhemos $\omega_c \tau = 2\pi$ nos cálculos numéricos.

Uma das piores situações ocorre quando o vetor de erro possui componentes complexas,

descrevendo, além de descoerência pura, também dissipação. Desta forma, nós escolhemos $\lambda = (4\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}} + 2\sqrt{2}\hat{\mathbf{z}})/5$, visto que este é adimensional de acordo com a Eq. (5.1). Então, $\hat{\mathbf{u}}_c = (\hat{\mathbf{x}} - \sqrt{2}\hat{\mathbf{z}})/\sqrt{3}$ é uma escolha apropriada. Para uma operação de Hadamard, nós temos $\hat{\mathbf{u}}_0 = (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$ (25). Para os parâmetros do reservatório, além de supormos uma densidade espectral ôhmica, nós escolhemos $\eta = 1/16$, T = 0.25K, e $\tau = 10^{-10}$ s, que são números típicos de componentes de estados sólidos, como por exemplo junções de Josephson. Assim, para a condição inicial $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$, quando $H_c = 0$ a fidelidade é dada por $\mathcal{F}(\tau) = \text{Tr}[\rho_I(\tau)\rho_I(0)] \approx 0.7199$. No entanto, se nós escolhermos n = 5 na Eq. (5.33), a fidelidade se torna $\mathcal{F}(\tau) \approx 0.9965$. A Figura 5.1 mostra estas fidelidades em função do tempo, junto com dois casos no qual $\hat{\mathbf{u}}_c$ não é escolhido como sendo ortogonal ao vetor de erro, mas deslocado 10° e 30° em direção ao eixo x. Nestes exemplos nós observamos que a função da fidelidade resultante é pouco sensível a pequenas variações do ângulo do campo incidente. Assim, de forma análoga, já que a condição para êxito do método depende somente do ângulo entre $\hat{\mathbf{u}}_c \in \boldsymbol{\lambda}$, a proteção do erro é também pouco sensível a pequenas variações do vetor de erro. Na figura suplementar, nós mostramos a fidelidade final, calculada no tempo $t = \tau$, como uma função da temperatura e n com $\hat{\mathbf{u}}_c$ como dado acima, ortogonal a $\boldsymbol{\lambda}$. Observamos que a baixas temperaturas, devido a forma da densidade espectral, as condições são melhores para aumentar a fidelidade da operação lógica, mas os efeitos do aumento da temperatura podem ser compensados por campos de controle com freqüências e amplitudes maiores. A condição inicial é dada por $\mathbf{r}(0)$, cujo módulo, para estados iniciais puros, é 1/2. Assim, todas as condições iniciais para estados iniciais puros podem ser parametrizados por dois ângulos: $\varphi \in [0, 2\pi)$ e $\theta \in [0, \pi]$. Nós particionamos estes intervalos dos ângulos em 200 e 100 intervalos regularmente espaçados, respectivamente, e resolvemos a Eq. (5.21) para cada uma destas 20000 condições iniciais. O pior e o melhor caso para as fidelidades foi de 0.99622 e 0.99987, respectivamente, com todas as outras variáveis ajustadas conforme a configuração da linha vermelha na Figura 5.1.



Figura 5.1. Soluções numéricas para a estratégia descrita no texto para superar o obstáculo da descoerência e dissipação durante a operação de Hadamard. A linha roxa representa a fidelidade quando $H_c = 0$, enquanto que a linha vermelha é o resultado para n = 5 na Eq. (5.33) e $\hat{\mathbf{u}}_c$, escolhido ortogonalmente ao vetor de erro λ , como descrito no texto. As linhas azul e verde representam o resultado para n = 5quando $\hat{\mathbf{u}}_c$ é inclinado 10° e 30° na direção ao eixo x, respectivamente. No gráfico menor nós mostramos a fidelidade no tempo $t = \tau$ como uma função da temperatura e n.

5.2 Classes independentes de erros

Nesta seção, dando continuidade ao capítulo, nós mostramos uma extensão do método de desacoplamento dinâmico apresentado. Nesta parte da tese, ao contrário do caso anterior, onde somente um reservatório bosônico representava o meio ambiente que circunda o qubit, nós consideramos três classes de erros independentes, que, por sua vez, são geradas por acoplamentos do sistema com três reservatórios bosônicos independentes (43). Nós analisamos a fidelidade da operação lógica quântica de Hadamard acoplada a um meio ambiente que afeta o sistema gerando descoerência, erros de bit-flip e erros na amplitude. Além disso, nós analisamos a praticabilidade do desacoplamento dinâmico baseado em campos de alta freqüência continuamente aplicados, considerando dois tipos de densidades espectrais para o meio ambiente: ôhmica e super ôhmica. As densidades espectrais ôhmicas são utilizadas, por exemplo, para modelar oscilações em interferômetros quânticos supercondutores típicos das junções de Josephson, enquanto que densidades espectrais super ôhmicas podem modelar as relaxações vibracionais em cadeias cristalinas. Inicialmente, nós observamos a fidelidade de uma porta lógica de Hadamard desprotegida acoplada a um único reservatório bosônico que causa descoerência, e então ilustramos os casos ôhmicos e super ôhmicos. Definimos um arranjo onde, na ausência de campos de

controle para proteção, a fidelidade da porta lógica é menor no caso ôhmico que no caso super ôhmico. Mostramos que o desacoplamento dinâmico, mesmo nesta situação, é alcançado no caso super ôhmico somente quando o campo de controle é suficientemente maior que no caso ôhmico. Subseqüentemente, nós consideramos a presença de dois reservatórios adicionais independentes, gerando erros de bit-flip e erros na amplitude, e mostramos, como uma função da relação dos acoplamentos, a relevância destes erros durante uma operação de Hadamard protegida contra descoerência. Finalmente, nós introduzimos mais um campo externo continuamente aplicado, criteriosamente calculado para proteger a operação de Hadamard contra todas as três classes de erros independentes. Este capítulo, para maior clareza, é organizado em seções da seguinte maneira. Na seção (5.2.1) nós introduzimos a interação do qubit com o meio ambiente, e escrevemos a equação mestra local no tempo de segunda ordem, descrevendo a evolução da matriz densidade reduzida no formalismo de interação, similar ao exposto no capítulo anterior. Na seção (5.2.2) nós introduzimos os três reservatórios independentes, descrevendo a descoerência, os erros de bit-flip e os erros na amplitude. Na seção (5.2.3) nós consideramos a fidelidade de uma operação lógica de Hadamard que atua num ambiente que causa somente descoerência no qubit e comparamos o caso ôhmico e super ôhmico. Analisamos a dinâmica para todas as condições iniciais e estimamos a pior fidelidade com e sem proteção por meio de desacoplamento dinâmico continuamente aplicado. Nós nos focamos no caso super ôhmico na seção (5.2.4) e adicionamos erros independentes de bit-flip e amplitude para estudar a influência dessas perturbações na evolução da porta lógica de Hadamard já protegida contra descoerência. Finalmente, ainda nessa seção nós também calculamos o campo de controle necessário para eliminar todas as três classes de erros durante a operação lógica quântica.

5.2.1 Equação mestra para reservatórios independentes

Nós começamos, conforme a metodologia aplicada no capítulo anterior, observando que uma evolução controlada de um qubit, livre de ruídos do ambiente, é dada pela ação de um transformação unitária geral da forma:

$$\mathcal{U}(t) = I \cos\left[\alpha(t)\right] - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}(t) \sin\left[\alpha(t)\right], \qquad (5.37)$$

onde I é a matriz identidade 2×2 , $\alpha(t)$ é uma função arbitrária do tempo t, $\hat{\mathbf{u}}(t)$ é um vetor unitário arbitrário dependente do tempo e $\boldsymbol{\sigma}$ é um vetor composto pelas matrizes de Pauli

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \hat{\mathbf{y}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

O Hamiltoniano dependente do tempo $H_U(t)$ que origina o operador evolução na Eq. (5.37), conforme já mostramos no capítulo anterior, é obtido por diferenciação:

$$H_U(t) = i\hbar \frac{d\mathcal{U}(t)}{dt} \mathcal{U}^{\dagger}(t) = \hbar \Omega(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \qquad (5.38)$$

 com

$$\mathbf{\Omega}(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}\hat{\mathbf{u}}(t) + \sin[\alpha(t)]\cos[\alpha(t)]\frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt} + \sin^2[\alpha(t)]\hat{\mathbf{u}}(t) \times \frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt},$$
(5.39)

onde \hbar é a constante de Planck dividida por $2\pi \in \mathcal{U}^{\dagger}(t)$ é o Hermitiano conjugado de $\mathcal{U}(t)$.

Assumimos que a interação entre o qubit e seu meio ambiente seja suficientemente fraca para que possamos considerar um acoplamento linear com o reservatório. Representamos a ação do meio ambiente por

$$H_I = (\mathcal{L} + \mathcal{L}^{\dagger}) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \qquad (5.40)$$

onde $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \hat{\mathbf{x}} + \mathcal{L}_2 \hat{\mathbf{y}} + \mathcal{L}_3 \hat{\mathbf{z}}$ é um operador cujas componentes \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 , e \mathcal{L}_3 agem no espaço de Hilbert e \mathcal{L}^{\dagger} é o Hermitiano conjugado de \mathcal{L} .

Utilizamos, como anteriormente, a equação mestra de segunda ordem local no tempo para descrevermos a evolução da matriz densidade reduzida do qubit, que no formalismo de interação é escrita conforme (42):

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = -\int_0^t dt' \operatorname{Tr}_R\left\{ \left[\tilde{H}_I(t), \left[\tilde{H}_I(t'), \rho_R \tilde{\rho}(t) \right] \right] \right\},\tag{5.41}$$

onde $\tilde{H}_{I}(t)$ é o Hamiltoniano de interação expresso no formalismo de interação, ou seja,

$$\tilde{H}_{I}(t) = \mathcal{U}^{\dagger}(t)\mathcal{U}_{R}^{\dagger}(t)H_{I}\mathcal{U}_{R}(t)\mathcal{U}(t), \qquad (5.42)$$

com

$$\mathcal{U}_R(t) = \exp\left(-iH_R t\right),\tag{5.43}$$

onde H_R é o Hamiltoniano do reservatório externo, e $\mathcal{U}(t)$ é como na Eq. (5.37). Aqui e na continuidade deste capítulo nós escolhemos unidades de $\hbar = 1$. Vale ressaltar que a Eq. (5.41) é válida somente no regime nos quais o tamanho dos acoplamentos, expressos em unidades de freqüência, multiplicado pelo tempo de correlação dos operadores do ambiente é muito menor que a unidade. Acima, ρ_R é a matriz densidade inicial do ambiente,

$$\rho_R = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H_R), \qquad (5.44)$$

onde Z é a função de partição

$$Z = \operatorname{Tr}_{R}\left[\exp(-\beta H_{R})\right],\tag{5.45}$$

 $\beta = 1/k_B T$, k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura absoluta do ambiente.

Da forma da interação entre o qubit e seu meio ambiente, Eq. (5.40), obtemos

$$\tilde{H}_{I}(t) = \mathbf{\Lambda}(t) \cdot [\tilde{\mathbf{\mathcal{L}}}(t) + \tilde{\mathbf{\mathcal{L}}}^{\dagger}(t)], \qquad (5.46)$$

com $\tilde{\mathcal{L}}(t) = \mathcal{U}_R^{\dagger}(t)\mathcal{L}\mathcal{U}_R(t)$, e $\Lambda(t) = \mathcal{U}^{\dagger}(t)\boldsymbol{\sigma}\mathcal{U}(t)$. Visto que $\Lambda(t)$ é somente uma rotação de $\boldsymbol{\sigma}$, é conveniente escrevermos suas componentes como:

$$\Lambda_{\mu}(t) = \sum_{\nu=1}^{3} R_{\mu,\nu}(t)\sigma_{\nu}, \qquad (5.47)$$

onde $R_{\mu,\nu}(t)$, para $\mu, \nu = 1, 2, 3$, são as matrizes de rotação dependentes do tempo correspondente à transformação unitária representada por $\mathcal{U}(t)$ conforme Eq. (5.37).

Substituindo Eqs. (5.46) e (5.47) na Eq. (5.41), nós obtemos a equação mestra

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} D_{\alpha\beta}(t) \left[\sigma_{\alpha}, \tilde{\rho}(t)\sigma_{\beta}\right] \\
+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} D_{\alpha\beta}^{*}(t) \left[\sigma_{\beta}\tilde{\rho}(t), \sigma_{\alpha}\right],$$
(5.48)

onde definimos

$$D_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\mu,\nu=1}^{3} R_{\mu,\alpha}(t) \int_{0}^{t} dt' R_{\nu,\beta}(t') C_{\mu,\nu}(t,t'), \qquad (5.49)$$

com

$$C_{\mu,\nu}(t,t') = \operatorname{Tr}_B\left[\left(\tilde{\mathcal{L}}_{\mu}(t) + \tilde{\mathcal{L}}_{\mu}^{\dagger}(t)\right)\rho_B\left(\tilde{\mathcal{L}}_{\nu}(t') + \tilde{\mathcal{L}}_{\nu}^{\dagger}(t')\right)\right].$$
(5.50)

É importante notar que Eq. (5.48) não é restrita à escolha específica do Hamiltoniano do meio ambiente. Abaixo, nós definimos três banhos de osciladores harmônicos independentes, cada um representando um classe distinta de erros quânticos.

5.2.2 Erros independentes de descoerência, bit-flip e amplitude.

Assumimos o Hamiltoniano do ambiente como

$$H_R = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k} \omega_{i,k} a_{i,k}^{\dagger} a_{i,k}, \qquad (5.51)$$

onde $\omega_{i,k}$ é a freqüência do modo normal k do *i*-th reservatório independente. Escrevemos o operador \mathcal{L} como sendo

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i B_i, \qquad (5.52)$$

com

$$B_i = \sum_k g_{i,k} a_{i,k},\tag{5.53}$$

onde $g_{i,k}$ é a constante de acoplamento (complexa inclusive) para o modo k do *i*-th reservatório, $a_{i,k}$ é operador que aniquila um quantum no modo k do *i*-th reservatório, e λ_i é chamado de vetor de erro do *i*-th reservatório. Nós escolhemos o vetor de erro

$$\lambda_{1} = \hat{\mathbf{x}},$$

$$\lambda_{2} = \frac{\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}}{2},$$

$$\lambda_{3} = \hat{\mathbf{z}},$$
(5.54)

representando erros de bit-flip, erros na amplitude, e descoerência respectivamente. Assim, o Hamiltoniano de interação, Eq. (5.40), é escrito como:

$$H_I = \sum_{i=1}^{3} (B_i \boldsymbol{\lambda}_i + B_i^{\dagger} \boldsymbol{\lambda}_i^*) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \qquad (5.55)$$
de forma que, comparando Eq. (5.40) com Eq. (5.55), nós encontramos que as componentes de \mathcal{L} , no formalismo de interação é dado por:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{1}(t) = \tilde{B}_{1}(t) + \frac{1}{2}\tilde{B}_{2}(t),
\tilde{\mathcal{L}}_{2}(t) = i\frac{1}{2}\tilde{B}_{2}(t),
\tilde{\mathcal{L}}_{3}(t) = \tilde{B}_{3}(t),$$
(5.56)

e, usando Eqs. (5.43), (5.51) e (5.53),

$$\tilde{B}_i(t) = \mathcal{U}_R^{\dagger}(t) B_i \mathcal{U}_R(t) = \sum_k g_{i,k} a_{i,k} \exp(-i\omega_{i,k} t).$$
(5.57)

Com estas considerações, nós calculamos a função correlação do reservatório da Eq. (5.50), $C_{\mu,\nu}(t,t')$, usando Eqs. (5.44), (5.45), (5.56) e (5.57). Observando as componentes de \mathcal{L} dadas pela Eq. (5.56), as únicas componentes diferentes de zero são:

$$C_{1,1}(t,t') = \sum_{k=1}^{2} \left(\mathcal{G}_{1,1}^{(k)}(t-t') + \frac{1}{4} \mathcal{G}_{2,2}^{(k)}(t-t') \right),$$

$$C_{1,2}(t,t') = C_{2,1}(t,t') = i\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2} \mathcal{G}_{2,2}^{(k)}(t-t'),$$

$$C_{2,2}(t,t') = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2} \mathcal{G}_{2,2}^{(k)}(t-t'),$$

$$C_{3,3}(t,t') = \sum_{k=1}^{2} \mathcal{G}_{3,3}^{(k)}(t-t'),$$
(5.58)

com

$$\mathcal{G}_{i,j}^{(1)}(t-t') \equiv \operatorname{Tr}_B\left[\tilde{B}_i(t)\rho_B\tilde{B}_j^{\dagger}(t')\right] = \delta_{ij}\sum_k |g_{i,k}|^2 n_{i,k} \exp[-i\omega_{i,k}(t-t')]$$
(5.59)

е

$$\mathcal{G}_{i,j}^{(2)}(t-t') \equiv \operatorname{Tr}_{B}\left[\tilde{B}_{i}^{\dagger}(t)\rho_{B}\tilde{B}_{j}(t')\right] = \delta_{ij}\sum_{k}|g_{i,k}|^{2}\left(n_{i,k}+1\right)\exp[i\omega_{i,k}(t-t')], (5.60)$$

onde $n_{i,k}$ é número médio de ocupação do modo k do i-th reservatório:

$$n_{i,k} = \frac{1}{\exp(\beta\omega_{i,k}) - 1}.$$
(5.61)

Aqui $\mathcal{G}_{i,j}^{(1)}(t-t') \in \mathcal{G}_{i,j}^{(2)}(t-t')$ determinam quanto da história passada das componentes de cada acoplamento contribue para as médias temporais da Eq. (5.49). Assim, vale

ressaltar que a Eq. (5.48) não é restrita a uma aproximação Markoviana. No limite em que o número de modos por unidade de freqüência se torna infinito, nós interpretamos a soma nas Eqs. (5.59) e (5.60) como integrais:

$$\mathcal{G}_{i,j}^{(1)}(t) = \int_0^\infty d\omega J_i(\omega) n_i(\omega) \exp(-i\omega t)$$
(5.62)

е

$$\mathcal{G}_{i,j}^{(2)}(t) = \int_0^\infty d\omega J_i(\omega) \exp(i\omega t) [n_i(\omega) + 1], \qquad (5.63)$$

com $n_i(\omega)$ sendo a versão de freqüência contínua da Eq. (5.61):

$$n_i(\omega) = \frac{1}{\exp(\beta\omega) - 1},\tag{5.64}$$

e definimos a densidade espectral como

$$J_i(\omega) = \eta_i \frac{\omega^{s_i}}{\omega_c^{s_i - 1}} \exp(-\omega/\omega_c), \qquad (5.65)$$

onde η_i é uma constante adimensional, proporcional ao tamanho do acoplamento do sistema com o *i*-th reservatório, s_i define a densidade espectral do *i*-th reservatório como sendo ôhmico ($s_i = 1$) ou super ôhmico ($s_i > 1$), e ω_c é a freqüência de corte. Assim, usando Eqs. (5.64) e (5.65), as integrais das Eqs. (5.62) e (5.63) são calculadas, dando:

$$\mathcal{I}_{1}(t) = \int_{0}^{\infty} d\omega J(\omega) n(\omega) \exp(-i\omega t) = \eta \omega_{c}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s!}{\left[1 + i\omega_{c}t + \beta \omega_{c}(n+1)\right]^{s+1}}, (5.66)$$

$$\mathcal{I}_{2}(t) = \int_{0}^{\infty} d\omega J(\omega) \exp(i\omega t) = \eta \omega_{c}^{2} \frac{s!}{\left[1 - i\omega_{c}t\right]^{s+1}}. \tag{5.67}$$

Com estes resultados, então, nós calculamos $\mathcal{G}_{i,j}^{(1)}(t)$, que é dado pela Eq. (5.66), e $\mathcal{G}_{i,j}^{(2)}(t)$, que é dado pela soma de $\mathcal{I}_{1}^{*}(t)$ e $\mathcal{I}_{2}(t)$. Os cálculos detalhados de $\mathcal{G}_{i,j}^{(1)}(t)$ e $\mathcal{G}_{i,j}^{(2)}(t)$ estão nos apêndices (C.4) e (C.5).

5.2.3 Proteção contra erros de descoerência

Nesta seção nós analisamos a fidelidade de um porta lógica quântica de Hadamard protegida contra descoerência por um campo de controle de alta freqüência continuamente aplicado. Comparamos as densidades espectrais para o caso ôhmico e super ôhmico. Vale notar que o Hamiltoniano é igual ao do capítulo anterior, um reservatório escalar de bósons supondo $\lambda_x = \lambda_y = 0$ para as componentes do vetor de erro. O Hamiltoniano total, na representação de Schrödinger, é dado por

$$H(t) = H_U(t) + H_I + H_R$$

onde $H_U(t)$ é calculado conforme Eq. (5.38) uma vez que nós determinemos $\mathcal{U}(t)$ e H_R e H_I são dados pelas Eqs. (5.51) e (5.55), respectivamente. Para o caso de somente descoerência, $B_1 = 0$ e $B_2 = 0$ de forma que, por causa das Eqs. (5.52), (5.54) e (5.55), nesta seção nós escolhemos

$$H_I = (B_3 + B_3^{\dagger})\sigma_z. \tag{5.68}$$

Visto que nós pretendemos uma operação lógica simultaneamente com a proteção contra erros, nós procedemos conforme o capítulo anterior e dividimos o Hamiltoniano H_U em duas partes:

$$H_U(t) = H_0(t) + H_c(t), (5.69)$$

onde $H_0(t)$ é escolhido de tal maneira a produzir o resultado da operação lógica depois de um certo intervalo de tempo, enquanto $H_c(t)$ age contra a ação perturbatória do meio ambiente.

De acordo com a prescrição geral para o desacoplamento dinâmico (41), o operador unitário $\mathcal{U}_c(t)$, correspondente ao Hamiltoniano de controle $H_c(t)$, deve ser periódico e nossa escolha é:

$$\mathcal{U}_c(t) = I\cos(2n\pi t/\tau) - i\sigma_x\sin(2n\pi t/\tau), \qquad (5.70)$$

de forma que este satisfaz, usando Eq. (5.68),

$$\int_0^{t_c} dt \mathcal{U}_c^{\dagger}(t) H_I \mathcal{U}_c(t) = 0,$$

onde $t_c < \tau$ é o período de $\mathcal{U}_c(t)$, Eq. (5.70), com τ sendo o tempo total da operação lógica. Aqui, por conveniência, nós escolhemos τ como um múltiplo inteiro de t_c , ou seja, $\tau = nt_c$, de forma que $\mathcal{U}_c(\tau) = I$. No formalismo obtido utilizando a transformação unitária $\mathcal{U}_c(t)$ como sendo dada pela Eq. (5.70), nós escolhemos $H_0(t)$ de tal maneira que este produza a operação lógica de Hadamard pretendida no instante τ :

$$\mathcal{U}_{c}^{\dagger}(t)H_{0}(t)\mathcal{U}_{c}(t) = \frac{\pi}{2\tau}\frac{\sigma_{x} + \sigma_{z}}{\sqrt{2}}.$$
(5.71)

Visto que $U_c^{\dagger}(t)H_0(t)U_c(t)$ é escolhido, na Eq. (5.71), como independente no tempo, o operador evolução temporal associado com esta quantidade é dado por

$$\mathcal{U}_0(t) = I\cos(\pi t/2\tau) - i\frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}}\sin(\pi t/2\tau).$$
(5.72)

Nós definimos $\mathcal{U}(t)$ como um operador unitário composto

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_c(t)\mathcal{U}_0(t), \tag{5.73}$$

notando que, como $t = \tau$, $\mathcal{U}_c(\tau) = I$. Assim, no tempo τ , nós obtemos, a menos de uma fase global, a desejada operação lógica quântica de Hadamard:

$$\mathcal{U}(\tau) = -i\frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}}.$$

Multiplicando Eqs. (5.70) e (5.72) obtemos um $\mathcal{U}(t)$ para o caso particular de um operação de Hadamard protegida contra descoerência e, comparando com Eq. (5.37), obtemos (detalhes no apêndice (C.6)):

$$\cos[\alpha(t)] = -\sin(2n\pi t/\tau)\sin(\pi t/2\tau)/\sqrt{2} + \cos(2n\pi t/\tau)\cos(\pi t/2\tau),$$
 (5.74)

$$\hat{\mathbf{u}}(t)\sin[\alpha(t)] = -\hat{\mathbf{y}}\sin(2n\pi t/\tau)\sin(\pi t/2\tau)/\sqrt{2} + (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}})\cos(2n\pi t/\tau)\sin(\pi t/2\tau)/\sqrt{2} + \hat{\mathbf{x}}\sin(2n\pi t/\tau)\cos(\pi t/2\tau).$$
(5.75)

A forma explícita do Hamiltoniano H_U da Eq. (5.69) é aquele já obtido pela Eq. (5.38), $H_U = \mathbf{\Omega}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}$, onde o campo externo aplicado é calculado pelas Eqs. (5.74) e (5.75) de acordo com a prescrição da Eq. (5.39):

$$\mathbf{\Omega}(t) = \frac{\pi}{\tau} \left(2n + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \hat{\mathbf{x}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}\tau} \left[\hat{\mathbf{y}} \sin\left(\frac{4n\pi t}{\tau}\right) - \hat{\mathbf{z}} \cos\left(\frac{4n\pi t}{\tau}\right) \right].$$
(5.76)

O primeiro termo da Eq. (5.76) é um campo estático ao longo da direção que é perpendicular ao vetor de erro, e os outros dois termos representam um campo girante perpendicular à direção do campo estático, como já mostrado no capítulo anterior para um vetor de erro



Figura 5.2. Fidelidade como função do tempo, obtida resolvendo a Eq. (5.48) numericamente, como descrito no texto, exemplificando a proteção contra descoerência durante a operação de Hadamard, no caso onde a densidade espectral é definida como ôhmica (a) e super ôhmica (b). A curva roxa representa a fidelidade quando $H_c = 0$, enquanto que as curvas verde, azul e a vermelha representam, respectivamente, os casos para n = 2, n = 3 e n = 5 para (a), e n = 3, n = 5, e n = 15 para (b).

arbitrário para o caso de um único reservatório de bósons. Para o caso específico desta seção, ou seja, a operação lógica protegida contra descoerência e não sujeita a nenhuma outra fonte de ruído, nós resolvemos a Eq. (5.48) numericamente. Na Eq. (5.65), para i = 3, nós escolhemos $\omega_c \tau = 2\pi$ e $\eta_3 = 1/16$, com $\tau = 10^{-10}$ s. Assumindo T = 0.25K e a condição inicial $\rho_I(0) = I/2 + \sigma_x/2$, nós calculamos, como mostrado na Figura 5.2, a fidelidade como função do tempo, $F(t) = \text{Tr}[\tilde{\rho}(t)\tilde{\rho}(0)]$, para dois casos de densidades espectrais: ôhmica, com $s_3 = 1$, e super ôhmica, com $s_3 = 3$. Quando $H_c = 0$ nós obtemos como resultado $F(\tau) = \text{Tr}[\tilde{\rho}(\tau)\tilde{\rho}(0)] \approx 0.6299$ para o caso ôhmico e $F(\tau) \approx 0.8227$ para o caso super ôhmico. Agora, se nós ligarmos os campos de controle da Eq. (5.76), a fidelidade se torna, para o caso onde a densidade espectral é ôhmica, $F(\tau) \approx 0.9956$ para n tão baixos quanto 5. No entanto, no caso super ôhmico, para obtermos uma fidelidade da mesma ordem, n deve ser, pelo menos, maior que 14. Para n = 15 obtemos $F(\tau) \approx 0.9960$. Portanto, mesmo que um reservatório super ôhmico cause menos dano, para o processo de informação quântica que um reservatório ôhmico, este requer um campo de freqüência maior para proteger a evolução quântica pretendida contra ruídos proveniente do meio ambiente. Para entender este resultado a Figura 5.3 mostra a derivada das fidelidades sem a proteção do campo de controle para o caso ôhmico $(s_3 = 1)$ e super ôhmico $(s_3 = 3)$. Observamos, como esperado, uma descoerência mais acentuada, no início da operação lógica, no caso super ôhmico que no ôhmico.



Figura 5.3. Derivada da fidelidade da operação lógica quântica de Hadamard desprotegida para o caso das densidades espectrais do meio ambiente como sendo ôhmico (linha azul) e super ôhmico (linha vermelha).

Na seqüência, nós investigamos a fidelidade de uma operação lógica de Hadamard considerando todas as condições iniciais correspondentes a um estado puro do qubit. Assim, se $\rho(0)$ é puro, então

$$\rho(0) = \frac{1}{2}\mathbf{I} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \qquad (5.77)$$

onde $\hat{\mathbf{r}}$ é um vetor unitário real escrito em termo de dois ângulos esféricos polares:

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta.$$

Assim, utilizando os mesmos números que anteriormente, no caso super ôhmico $(s_3 = 3)$, quando há somente descoerência devido ao meio ambiente e os campos de proteção estão desligados, a Figura 5.4 mostra a fidelidade para todas as possíveis condições iniciais puras dadas pela Eq. (5.77). Se os campos de proteção da Eq. (5.76) estão presentes, no final da operação $(t = \tau)$ nós obtemos o resultado da Figura 5.5 com n = 25. Nós notamos que, comparando as figuras Figura 5.4 e Figura 5.5, com n menores que 25 na Eq. (5.76) nós já conseguimos aumentar a fidelidade da porta lógica mesmo na situação de um meio ambiente com densidade espectral super ôhmica. Para as menores fidelidades, dentre todas as condições iniciais, de ambas as figuras nós encontramos $F_{\min}(\tau) \approx 0.7525$ para o caso desprotegido (Figura 5.4) e $F_{\min}(\tau) \approx 0.9951$ para a dinâmica protegida (Figura 5.5), o que representa um aumento significativo da fidelidade do estado quântico.



Figura 5.4. Fidelidade (no tempo $t = \tau$) de uma operação lógica de Hadamard como uma função das condições iniciais. O operador densidade inicial, $\rho(0)$, é dado pela Eq. (5.77). O qubit está acoplado a um reservatório super ôhmico ($s_3 = 3$) que causa descoerência e nenhum campo externo no intuito de proteção está presente.



Figura 5.5. Fidelidade (no tempo $t = \tau$) de uma operação lógica de Hadamard como uma função das condições iniciais. O operador densidade inicial, $\rho(0)$, é dado pela Eq. (5.77). O qubit esta acoplado a um reservatório super ôhmico ($s_3 = 3$) que causa descoerência e, neste caso, o campo de controle da Eq. (5.76) com n = 25 é continuamente aplicado para proteger a porta lógica.



Figura 5.6. A menor fidelidade para todas as condições iniciais correspondentes à Eq. (5.77), como função de $\sqrt{\eta_1/\eta_3}$ com $\eta_2 = \eta_1$. Aqui, a porta lógica é protegida somente contra descoerência, mas está sujeita a perturbações independentes de bit-flip e amplitude.

5.2.4 Proteção contra classes independentes de erros

Na seção anterior, nós mostramos como os erros devido à descoerência podem ser eficientemente reduzido, durante as operações lógicas, aplicando uma superposição de dois campos externos vetoriais: um rodando ortogonalmente à direção do outro, o qual se mantém estático. Nesta seção nós manteremos o reservatório que causa descoerência com um densidade espectral super ôhmica, mas incluiremos outros dois reservatórios independentes, correspondendo aos erros de bit-flip e a erros de amplitude. O vetor de erro correspondente é dado pela Eq. (5.54).

Começamos esta seção assumindo que o campo externo aplicado é aquele dado pela Eq. (5.76), desenvolvido para proteger contra descoerência somente. Para efeito de simplificação, nós escolhemos a densidade espectral dos reservatórios adicionais como sendo ou ambos ôhmicos ou ambos super ôhmicos, com $\eta_1 = \eta_2$ na Eq. (5.65). Na Figura 5.6 nós mostramos os resultados selecionando a menor fidelidade dentre todas as condições iniciais dadas pela Eq. (5.77), como uma função de $\sqrt{\eta_1/\eta_3}$. Notamos que para $\sqrt{\eta_1/\eta_3} < 0.01$ o resultado final se altera insignificantemente de forma que uma proteção contra descoerência é suficiente para se obter uma alta fidelidade durante o intervalo de tempo τ . Esta figura mostra também que, neste caso, o bit-flip e o erro de amplitude são mais relevantes no caso ôhmico que no caso super ôhmico.

A fim de obtermos simultaneamente a redução da descoerência, do bit-flip e dos erros

na amplitude, nós modificamos a Eq. (5.70) redefinindo $\mathcal{U}_c(t)$:

$$\mathcal{U}_c(t) = \mathcal{U}_{cx}(t)\mathcal{U}_{cz}(t), \qquad (5.78)$$

com

$$\mathcal{U}_{cx}(t) = I\cos(2n\pi t/\tau) - i\sigma_x \sin(2n\pi t/\tau), \qquad (5.79)$$

$$\mathcal{U}_{cz}(t) = I \cos(2m\pi t/\tau) - i\sigma_z \sin(2m\pi t/\tau), \qquad (5.80)$$

onde m é um inteiro diferente de n. O operador $\mathcal{U}_{cx}(t)$ corresponde à proteção contra descoerência e, como na seção anterior, $\mathcal{U}_{cz}(t)$ está associado com a proteção aos erros de bit-flip e amplitude. O operador evolução unitário $\mathcal{U}(t)$ é novamente definido como na Eq. (5.73), mas agora com $\mathcal{U}_c(t)$ dado pela Eqs. (5.78), (5.79) e (5.80).

O Hamiltoniano de controle $H_U(t)$ é obtido através das Eqs. (5.38), (5.73), (5.78), (5.79) e (5.80), com as componentes de controle do campo $\Omega(t)$ dadas por

$$\Omega_x(t) = \frac{\pi}{\tau} \left[2n + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos\left(\frac{4m\pi t}{\tau}\right) \right], \qquad (5.81)$$

$$\Omega_y(t) = -\frac{\pi}{\tau} \left[2m + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right] \sin\left(\frac{4n\pi t}{\tau}\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}\tau} \cos\left(\frac{4n\pi t}{\tau}\right) \sin\left(\frac{4m\pi t}{\tau}\right), \quad (5.82)$$

$$\Omega_z(t) = \frac{\pi}{\tau} \left[2m + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right] \cos\left(\frac{4n\pi t}{\tau}\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}\tau} \sin\left(\frac{4n\pi t}{\tau}\right) \sin\left(\frac{4m\pi t}{\tau}\right). \quad (5.83)$$

Assim, utilizando este novo campo nós somos capazes de proteger a porta lógica de Hadamard simultaneamente contra a descoerência, erros de bit-flip e amplitude. Como uma ilustração da proteção, nós calculamos a menor fidelidade dentre todas as condições iniciais dadas pela Eq. (5.77) no caso da descoerência com densidade espectral super ôhmica como especificado na Sec. 5.2.3, mas quanto ao bit-flip e aos erros de amplitude escolhemos ou ambas ôhmicas ou ambas super ôhmicas. Utilizando $\sqrt{\eta_1} = \sqrt{\eta_2} = 0.2$, n = 18, m = 9, e mantendo os números como na seção anterior, nós obtemos $F_{\min}(\tau) \approx 0.9980$ tanto para o caso ôhmico quanto para o super ôhmico.

Estas fidelidades devem ser comparadas com os respectivos resultados, ~ 0.9467 e ~ 0.9822, quando todos os três reservatórios estão presentes, mas somente a descoerência é protegida com o campo da Eq. (5.76). Estes aumentos são, respectivamente, 5.4% e 1.6%, reafirmando os resultados da seção anterior que a proteção no caso super ôhmico requer campos com maiores freqüências que no caso ôhmico. As figuras Figura 5.7 e

Figura 5.8 mostram as fidelidades da operação lógica como uma função das condições iniciais utilizando os parâmetros especificados acima.



Figura 5.7. Fidelidade (no tempo $t = \tau$) da operação lógica quântica de Hadamard como uma função das condições iniciais. O operador densidade inicial, $\rho(0)$, é dado pela Eq. (5.77). O qubit está acoplado a um reservatório super ôhmico ($s_3 = 3$) que causa descoerência e a dois reservatórios ôhmicos ($s_1 = s_2 = 1$), independentes, que causam erros de bit-flip e erros na amplitude. Aqui nós escolhemos $\sqrt{\eta_1} = \sqrt{\eta_2} = 0.2\sqrt{\eta_3}$, n = 18, m = 0 para o gráfico (a) e m = 9 para o gráfico (b). Os outros parâmetros são iguais ao da seção anterior.



Figura 5.8. Fidelidade (no tempo $t = \tau$) da operação lógica quântica de Hadamard como uma função das condições iniciais. O operador densidade inicial, $\rho(0)$, é dado pela Eq. (5.77). O qubit está acoplado a três reservatórios super ôhmicos ($s_1 = s_2 = s_3 = 3$) que causam, independentemente, erros de descoerência, bit-flip e amplitude. Aqui nós escolhemos $\sqrt{\eta_1} = \sqrt{\eta_2} = 0.2\sqrt{\eta_3}$, n = 18, m = 0 para o gráfico (a) e m = 9 para o gráfico (b). Os outros parâmetros são iguais ao da seção anterior.

6 Desacoplamento dinâmico contínuo para o caso de 2 qubits

Na seqüência de nossos estudos, nós consideramos um sistema de dois qubits acoplados a reservatórios perturbativos independentes (44). A motivação deste trabalho está baseada principalmente nas observações de Lajos Diósi (45) e Ting Yu e Joseph H. Eberly (46) que mostraram que 2 qubits emaranhados, quando acoplados independentemente a banhos dissipativos, se desemaranhavam em um tempo finito mesmo a temperatura zero, de forma que o tempo médio de desemaranhamento era menor que o tempo médio de dissipação dos qubits. Este fenômeno, denominado por Yu e Eberly de *morte súbita de emaranhamento*, acrescentou um novo obstáculo a ser superado a caminho do computador quântico, visto que, assim como a superposição de estados quânticos, o emaranhamento é uma propriedade fundamental no contexto de informação e computação quântica. No Apêndice (B), nós mostramos um exemplo a fim de elucidar de forma simples o fenômeno da morte súbita de emaranhamento.

6.1 Proteção de estados emaranhados

Neste capítulo nós mostramos que um arranjo simples de campos externos, constituído de uma componente estática e uma componente ortogonal girante, é capaz de continuamente desacoplar um estado emaranhado de dois qubits de banhos independentes que causam descoerência, erros de bit-flip e erros de amplitude a uma temperatura finita. Nós consideramos neste capítulo uma situação onde um estado emaranhado composto de dois qubits não interagentes é inicialmente preparado e deixado evoluir sobre a ação do meio ambiente que o perturba e dos campos externos de proteção. Para ilustrar a proteção do emaranhamento, nós resolvemos numericamente, como nos capítulos anteriores, a equação mestra na aproximação de Born (acoplamento fraco) considerando diferentes agentes de erros para cada qubit introduzidos através de acoplamentos com banhos de bósons independentes à mesma temperatura.

Este capítulo é organizado da seguinte maneira: primeiramente nós apresentamos o Hamiltoniano total que descreve os dois qubits e o resto do universo. Nós também introduzimos o método geral de desacoplamento dinâmico aplicado para deduzir os campos de controle. Em seguida, nós deduzimos a equação mestra que rege a evolução da matriz densidade reduzida dos dois qubits, e a descrição dos erros provenientes do meio ambiente, onde nós demostramos a eficácia do desacoplamento dinâmico para proteger o emaranhamento inclusive de morte súbita.

6.1.1 Configuração dos campos externos protetores

O Hamiltoniano para os dois qubits é escrito como

$$H(t) = H_0(t) + H_R + H_I, (6.1)$$

onde $H_0(t)$ é o Hamiltoniano do sistema, incluindo os termos que descrevem a ação do campo de controle, H_R é o Hamiltoniano do meio ambiente, e H_I é o termo que representa a interação entre os qubits e sua vizinhança. A prescrição geral para o desacoplamento dinâmico (1,41) consiste em encontrar um Hamiltoniano de controle, que interage somente com os qubits, tal que o operador de evolução unitário correspondente $\mathcal{U}_c(t)$ seja periódico e satisfaça

$$\int_0^{t_c} \mathcal{U}_c^{\dagger}(t) H_I \mathcal{U}_c(t) dt = 0, \qquad (6.2)$$

onde t_c é o período de $\mathcal{U}_c(t)$. Na seqüência nós explicamos uma estratégia possível para encontrar uma combinação de campos externos, um estático e outro girante, que nos conduz a um operador unitário periódico $\mathcal{U}_c(t)$ que satisfaz a Eq. (6.2).

O Hamiltoniano de interação H_I que descreve dois qubits acoplados ao meio ambiente é escrito como

$$H_{\rm int} = \mathbf{B}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2, \tag{6.3}$$

onde $\mathbf{B}_k = \sum_{m=1}^3 B_{k,m} \hat{\mathbf{x}}_m$, para k = 1, 2, com $\hat{\mathbf{x}}_1 \equiv \hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{x}}_2 \equiv \hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \hat{\mathbf{z}}$, e $B_{k,m}$, para k = 1, 2 e m = 1, 2, 3, são operadores que agem no espaço de Hilbert do meio ambiente. Aqui, para k = 1, 2, $\boldsymbol{\sigma}_k = \hat{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}_{k,x} + \hat{\mathbf{y}} \boldsymbol{\sigma}_{k,y} + \hat{\mathbf{z}} \boldsymbol{\sigma}_{k,z}$, e $\boldsymbol{\sigma}_{k,x}, \boldsymbol{\sigma}_{k,y}$, e $\boldsymbol{\sigma}_{k,z}$ são as matrizes de Pauli que agem no qubit k. O operador unitário $\exp(-2in_x \pi t \sigma_{1,x}/t_c)$ é periódico com período t_c para qualquer inteiro $n_x \neq 0$. Se nós identificarmos este operador com $\mathcal{U}_c(t)$ na Eq. (6.2) e escolhermos H_I como dado pela Eq. (6.3), a integral, como mostramos nos capítulos anteriores, não é geralmente igual a zero, mas elimina todos os termos proporcionais à $\sigma_{1,y}$ e $\sigma_{1,z}$. Se, entretanto, para substituir $\mathcal{U}_c(t)$ na Eq. (6.2), nós considerarmos o operador

$$\exp(-2in_x\pi t\sigma_{1,x}/t_c)\exp(-2in_x\pi t\sigma_{1,z}/t_c),\tag{6.4}$$

onde n_x e n_z são inteiros diferente de zero, então a integral elimina todos os termos proporcional a σ_1 se $n_x \neq n_z$, sobrando somente os termos pertinentes ao qubit 2, $\mathbf{B}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$. Então, a fim de satisfazer a Eq. (6.2), nós escolhemos

$$\mathcal{U}_c(t) = \mathcal{U}_2(t)\mathcal{U}_1(t) = \mathcal{U}_1(t)\mathcal{U}_2(t), \tag{6.5}$$

visto que $\boldsymbol{\sigma}_1$ e $\boldsymbol{\sigma}_2$ comutam, onde

$$\mathcal{U}_k(t) = \exp\left(-i\frac{2n_x\pi t}{t_c}\sigma_{k,x}\right)\exp\left(-i\frac{2n_z\pi t}{t_c}\sigma_{k,z}\right),\tag{6.6}$$

para k = 1, 2. Desta forma, se o Hamiltoniano de controle for escrito como

$$H_c(t) = \mathbf{\Omega}(t) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2), \qquad (6.7)$$

então as Eqs. (6.5) e (6.6) implicam numa configuração extremamente simples para os campos externos, conforme ilustrado nos capítulos anteriores, para a operação de um qubit:

$$\mathbf{\Omega}(t) = \hat{\mathbf{x}} n_x \omega + n_z \omega \left[\hat{\mathbf{z}} \cos\left(n_x \omega t\right) - \hat{\mathbf{y}} \sin\left(n_x \omega t\right) \right], \qquad (6.8)$$

onde $\omega = 2\pi/t_c$.

Para estudar a proteção do emaranhamento contra os ruídos do ambiente, nós estudamos uma situação onde os dois qubits são preparados inicialmente num estado puro emaranhado no tempo t = 0. Assumimos também que os qubits não interagem entre si e, se estes podem ser isolados do resto do universo, seus estados não locais permanecem inalterados. Assim, utilizando unidades de $\hbar = 1$, escolhemos $H_q = \omega_0(\sigma_{1,z} + \sigma_{2,z})$ como o Hamiltoniano dos dois qubits não perturbados. Seja τ o intervalo durante o qual nós pretendamos preservar o emaranhamento, nós então escolhemos $t_c = \tau/N$, onde N é um inteiro, tal que $\mathcal{U}_k(\tau) = I$, para k = 1, 2.

A equação (6.1) nós dá o Hamiltoniano para a evolução do elemento $|\Psi(t)\rangle$ representando o estado conjunto dos qubits e seu meio ambiente. Para efeito de simplificação, nós assumimos que existe um campo de controle estático ao longo do eixo z escolhido de tal forma que este cancele H_q exatamente. Assim, os termos remanescentes de $H_0(t)$ representam somente a ação dos campos de controle adicionais. Nós identificamos a evolução ditada por $H_0(t)$ com a ação do operador unitário $\mathcal{U}_c(t)$ das Eqs. (6.5) e (6.6).

Aqui nós mostramos que a configuração extremamente simples do campo da Eq. (6.8)pode também prevenir o emaranhamento de um estado quântico de dois qubits de desemaranhamento devido a erros independentes de descoerência, de bit-flip e amplitude a uma temperatura finita. Nós enfatizamos que a Eq. (6.8) é uma simples combinação de um campo estático ao longo do eixo x e um campo giratório no plano yz. Além disso, endereçar cada qubit independentemente não é necessário; o campo é suposto ser espacialmente uniforme na vizinhança que cerca ambos os qubits.

6.1.2 Equação mestra para 2 qubits

No formalismo de interação, o Hamiltoniano de interação é dado por

$$\tilde{H}_{I}(t) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{m=1}^{3} \mathcal{U}_{R}^{\dagger}(t) B_{k,m} \mathcal{U}_{R}(t) \mathcal{U}_{c}^{\dagger}(t) \sigma_{k,m} \mathcal{U}_{c}(t), \qquad (6.9)$$

onde $\sigma_{k,1} \equiv \sigma_{k,x}$, $\sigma_{k,2} \equiv \sigma_{k,y}$, $\sigma_{k,3} \equiv \sigma_{k,z}$, $\mathcal{U}_R(t) = \exp(-iH_R t)$, e nós utilizamos a Eq. (6.3). As quantidades $\mathcal{U}_c^{\dagger}(t)\sigma_{k,m}\mathcal{U}_c(t)$, para k = 1, 2 e m = 1, 2, 3, são rotações de $\sigma_{k,m}$, cujos elementos de matriz, $R_{m,n}(t)$, são funções reais do tempo:

$$\mathcal{U}_{c}^{\dagger}(t)\sigma_{k,m}U_{c}(t) = \sum_{n=1}^{3} R_{m,n}(t)\sigma_{k,n}.$$
(6.10)

Os elementos de matriz definidos acima são idênticos aos do Cap. (5.2) e estão calculados no Apêndice (D.1). Se nós definirmos os operadores

$$E_{k,m}(t) = \mathcal{U}_R^{\dagger}(t) B_{k,m} \mathcal{U}_R(t), \qquad (6.11)$$

para k = 1, 2 e m = 1, 2, 3, e utilizarmos Eqs. (6.9) e (6.10), então o Hamiltoniano de interação se torna

$$\tilde{H}_{I}(t) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} R_{m,n}(t) E_{k,m}(t) \sigma_{k,n}.$$
(6.12)

No formalismo de interação, a equação mestra que descreve a evolução temporal da matriz densidade reduzida dos dois qubits, $\tilde{\rho}(t)$, é escrita como (22):

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = -\int_0^t dt' \operatorname{Tr}_R\left\{ \left[\tilde{H}_I(t), \left[\tilde{H}_I(t'), \rho_R \tilde{\rho}(t) \right] \right] \right\},$$
(6.13)

onde nós assumimos que o ruído é fraco o suficiente tal que a aproximação de Born seja válida. Nós também notamos que a Eq. (6.13) é uma equação mestra não Markoviana, visto que o processo de desacoplamento dinâmico ocorre numa escala de tempo menor que o tempo de correlação do meio ambiente; esta é a razão para que nós mantermos t como o limite superior da integral do lado esquerdo da Eq. (6.13) (veja p. 132 da Ref. (47)). Aqui, ρ_R é a matriz densidade inicial do ambiente,

$$\rho_R = \exp(-\beta H_R)/Z,\tag{6.14}$$

onde Z é a função de partição dada por

$$Z = \operatorname{Tr}_{R} \left[\exp(-\beta H_{R}) \right], \tag{6.15}$$

onde $\beta = 1/k_B T$, k_B é a constante de Boltzmann, e T é a temperatura absoluta que é assumida a mesma nas redondezas de ambos os qubits. Substituindo Eq. (6.12) na Eq. (6.13) nós calculamos $\text{Tr}_R [E_{k,m}(t)\rho_R E_{k',m'}(t')]$, para k, k' = 1, 2 e m, m' = 1, 2, 3. Para ilustrar a nossa metodologia de uma forma simples, nós supomos que o operador posição do reservatório de um qubit está descorrelacionado do operador posição do reservatório do outro. Além disso, nós também assumimos que os qubits e seus respectivos reservatórios são idênticos. Assim, nós podemos escrever

$$\operatorname{Tr}_{R}\left[E_{k,m}(t)\rho_{R}E_{k',m'}(t')\right] = \delta_{k,k'}C_{m,m'}(t,t'), \qquad (6.16)$$

para $k, k' = 1, 2 \in m, m' = 1, 2, 3$, onde $C_{m,m'}(t, t')$ é a função de correlação entre as componentes $m \in m'$ do operador de campo do ambiente na mesma posição do qubit. Nós, então, definimos as quantidades

$$D_{p,q}(t) = \sum_{m,n=1}^{3} R_{m,p}(t) \int_{0}^{t} dt' R_{n,q}(t') C_{m,n}(t,t'), \qquad (6.17)$$

para p, q = 1, 2, 3. Desta forma, a equação mestra se torna

$$\frac{d\rho_I(t)}{dt} = \sum_{k=1}^2 \sum_{p,q=1}^3 D_{p,q}(t) \left[\sigma_{k,p}, \rho_I(t)\sigma_{k,q}\right]
+ \sum_{k=1}^2 \sum_{p,q=1}^3 D_{p,q}^{\star}(t) \left[\sigma_{k,q}\rho_I(t), \sigma_{k,p}\right],$$
(6.18)

onde nós assumimos que os campos do ambiente são Hermitianos.

6.1.3 Proteção contra classes independentes de erros

Para resolver a Eq. (6.18) nós precisamos de $D_{p,q}(t)$, Eq. (6.17) e então, nós devemos calcular as funções de correlação $C_{m,n}(t,t')$, para m, n = 1, 2, 3. Aqui, como dito acima, nós consideramos erros independentes de descoerência, bit-flip e amplitude. Associado a estes erros, nós introduzimos seis banhos bosônicos independentes, três para cada posição do qubit, todos eles com a mesma temperatura finita T. Desta maneira, os termos que aparecem na Eq. (6.3) podem ser escritos como

$$\mathbf{B}_{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{k} = \sigma_{k,z} \sum_{\lambda} \left[g_{1,\lambda} a_{k,\lambda} + g_{1,\lambda}^{\star} a_{k,\lambda}^{\dagger} \right] + \sigma_{k,x} \sum_{\lambda} \left[g_{2,\lambda} b_{k,\lambda} + g_{2,\lambda}^{\star} b_{k,\lambda}^{\dagger} \right] + \left(\sigma_{k,x} + i \sigma_{k,y} \right) \sum_{\lambda} g_{3,\lambda} c_{k,\lambda} + \left(\sigma_{k,x} - i \sigma_{k,y} \right) \sum_{\lambda} g_{3,\lambda}^{\star} c_{k,\lambda}^{\dagger}, \qquad (6.19)$$

para k = 1, 2, onde $g_{1,\lambda}$, $g_{2,\lambda}$ e $g_{3,\lambda}$ são acoplamentos, representados por números complexos, que não dependem da posição do qubit, dada pelo índice k, refletindo o fato de que os qubits estão envoltos por reservatório idênticos, $a_{k,\lambda}$, $b_{k,\lambda}$ e $c_{k,\lambda}$ são, respectivamente, o operador de destruição para o modo λ do campo de bóson associado com os erros de descoerência, bit-flip e amplitude, com respectivos operadores de criação $a_{k,\lambda}^{\dagger}$, $b_{k,\lambda}^{\dagger}$ e $c_{k,\lambda}^{\dagger}$. O operador do campo depende de k, já que, apesar de idênticos, os reservatórios dos qubits estão descorrelacionados. Os únicos comutadores desses operadores diferentes de zero são:

$$[a_{k,\lambda}, a_{k,\lambda}^{\dagger}] = 1,$$

$$[b_{k,\lambda}, b_{k,\lambda}^{\dagger}] = 1,$$

$$[c_{k,\lambda}, c_{k,\lambda}^{\dagger}] = 1,$$

(6.20)

para k = 1, 2, e todos os λ . Portanto, nós temos o Hamiltoniano do reservatório como sendo dado por

$$H_R = \sum_{k=1}^{2} \sum_{\lambda} \left[\omega_{1,\lambda} a_{k,\lambda}^{\dagger} a_{k,\lambda} + \omega_{2,\lambda} b_{k,\lambda}^{\dagger} b_{k,\lambda} + \omega_{3,\lambda} c_{k,\lambda}^{\dagger} c_{k,\lambda} \right], \qquad (6.21)$$

onde $\omega_{1,\lambda}$, $\omega_{2,\lambda} \in \omega_{3,\lambda}$ são os λ -ésimos modos dos campos associados aos erros de descoerência, bit-flip e amplitude, respectivamente. Utilizando a Eq. (6.19), nós podemos calcular as funções de correlação

$$C_{m,m'}(t,t') = \operatorname{Tr}_R \left[E_{1,m}(t)\rho_R E_{1,m'}(t') \right] = \operatorname{Tr}_R \left[E_{2,m}(t)\rho_R E_{2,m'}(t') \right], \tag{6.22}$$

para m, m' = 1, 2, 3. As únicas correlações diferentes de zero são:

$$C_{1,1}(t,t') = \mathcal{K}_2(t-t') + 2\operatorname{Re}\left[\mathcal{L}_2(t-t')\right] + \mathcal{K}_3(t-t') + 2\operatorname{Re}\left[\mathcal{L}_3(t-t')\right], \quad (6.23)$$

$$C_{1,2}(t,t') = i\mathcal{K}_3(t-t') - 2\mathrm{Im}\left[\mathcal{L}_3(t-t')\right], \qquad (6.24)$$

$$C_{2,1}(t,t') = -i\mathcal{K}_3(t-t') + 2\mathrm{Im}\left[\mathcal{L}_3(t-t')\right], \qquad (6.25)$$

$$C_{2,2}(t,t') = \mathcal{K}_3(t-t') + 2\text{Re}\left[\mathcal{L}_3(t-t')\right], \qquad (6.26)$$

$$C_{3,3}(t,t') = \mathcal{K}_1(t-t') + 2\text{Re}\left[\mathcal{L}_1(t-t')\right], \qquad (6.27)$$

onde as funções complexas $\mathcal{K}_m(t)$ e $\mathcal{L}_m(t)$, para m = 1, 2, 3, são dadas por

$$\mathcal{K}_{m}(t) = \sum_{\lambda} |g_{m,\lambda}|^{2} \exp(i\omega_{m,\lambda}t),$$

$$\mathcal{L}_{m}(t) = \sum_{\lambda} |g_{m,\lambda}|^{2} \exp(i\omega_{m,\lambda}t) / \left[\exp(\hbar\beta\omega_{m,\lambda}) - 1\right].$$
 (6.28)

No limite em que o número de modos normais por unidade de freqüência vai a infinito, nós definimos as densidades espectrais para m = 1, 2, 3 como

$$J_m(\omega) = \sum_{\lambda} |g_{m,\lambda}|^2 \,\delta(\omega - \omega_{m,\lambda}),\tag{6.29}$$

com $\omega \in [0, +\infty)$ e interpretamos a soma em $\mathcal{K}_m(t)$ e $\mathcal{L}_m(t)$ como integrais sobre ω :

$$\mathcal{K}_{m}(t) = \int_{0}^{\infty} d\omega J_{m}(\omega) \exp(i\omega t),$$

$$\mathcal{L}_{m}(t) = \int_{0}^{\infty} d\omega J_{m}(\omega) \exp(i\omega t) / [\exp(\beta\omega) - 1].$$
 (6.30)

Para o nosso objetivo de ilustrar a proteção do emaranhamento, é suficiente assumir densidades espectrais como sendo ôhmica com a mesma freqüência de corte ω_c , de forma que,

$$J_m(\omega) = \eta_m \omega \exp(-\omega/\omega_c), \qquad (6.31)$$

onde η_m , para m = 1, 2, 3, são contantes adimensionais dando respectivamente o tamanho da descoerência, dos erros de bit-flip e amplitude. Calculando a versão contínua de $\mathcal{K}_m(t)$ e $\mathcal{L}_m(t)$, utilizando as densidades espectrais ôhmicas, obtemos

$$\mathcal{K}_{m}(t) = \eta_{m}\omega_{c}^{2}/(1-i\omega_{c}t)^{2},$$

$$\mathcal{L}_{m}(t) = (\eta_{m}/\beta^{2})\Psi^{(1)}(1+1/(\beta\omega_{c})-it/\beta),$$
 (6.32)

onde $\Psi^{(1)}$ é a primeira função poligamma. Substituindo estes resultados nas Eqs. (6.23), (6.24), (6.25), (6.26), e (6.27), nós obtemos as correlações que aparecem na Eq. (6.17), onde os elementos da matriz de rotação são obtidos pelas Eqs. (6.5), (6.6) e (6.10). Uma vez que obtemos os coeficientes $D_{p,q}(t)$, para p, q = 1, 2, 3, então nós podemos resolver a Eq. (6.18) numericamente.

Aqui nós impusemos a situação extrema onde o desemaranhamento ocorre mais rápido que a escala de tempo definida pelo inverso da freqüência de corte, $1/\omega_c$, e o tempo de correlação térmico, $\tau_B = \beta/\pi$. Assim, nós escolhemos $\tau = 2\pi/\omega_c$ e, então, $t_c = \tau/N$, como discutido abaixo da Eq. (6.6). Nos cálculos numéricos nós escolhemos $n_x = 2$, $n_z = 1$, $\tau = 10^{-10}$ s, uma temperatura T = 0.1K, $\eta_1 = 1/16$, $\eta_2 = 1/64$ e $\eta_3 = 1/256$. Como estado inicial puro, nós consideramos duas classes:

$$|\Phi(\theta)\rangle = \cos\theta |\uparrow\uparrow\rangle + \sin\theta |\downarrow\downarrow\rangle, \qquad (6.33)$$

$$|\Psi(\theta)\rangle = \cos\theta \left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \sin\theta \left|\downarrow\uparrow\right\rangle, \qquad (6.34)$$

para $\theta \in [0, 2\pi)$, onde nós adotamos a notação usual de spin.



Figura 6.1. $\Lambda(t)$ para a evolução de diferentes estados iniciais emaranhados. A concurrence com uma função do tempo é dada por max $\{0, \Lambda(t)\}$. (a) $\Lambda(t)$ para o estado inicial com $\Lambda(0) \approx 0.70711$, onde o campo de controle esta desligado (indicado com N = 0) e ligado (N = 1, 3, 8). A linha vermelha e roxa correspondem aos estados da Eq. (6.33), com $\theta = \pi/8$ e $\theta = 3\pi/8$, respectivamente. A linha azul corresponde ao estado inicial da Eq. (6.34), com $\theta = \pi/8$ e $\theta = 3\pi/8$ dando o mesmo $\Lambda(t)$. (b) $\Lambda(t)$ para estados iniciais com $\Lambda(0) = 1$ (estados de Bell). Os estados iniciais da Eq. (6.33) e Eq. (6.34) evoluem resultando no mesmo $\Lambda(t)$ para $\theta = \pm \pi/4$. Aqui nós mostramos os resultados para a Eq. (6.33), visto que estes diferem dos da Eq. (6.34) somente na quarta casa decimal. A linha vermelha representa os resultados onde os campos de controle estão desligados, enquanto que a linha azul, a linha verde e a linha roxa mostram os resultados para o campo de controle com N = 1, 3, 8, respectivamente.



Figura 6.2. Fidelidade como uma função do tempo para os estado de Bell. A linha azul, vermelha, roxa e verde são as fidelidades quando o campo de controle está ligado, usando N = 2, 3, 5, 8, respectivamente. Os gráficos suplementares (a) e (b) mostram, respectivamente, a fidelidade e a *concurrence*, ambos calculados em $t = \tau$, como uma função do N.

Para medir o emaranhamento nós utilizamos a *concurrence* (11), definida como o número máximo entre zero e $\Lambda(t)$, com

$$\Lambda(t) = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, \tag{6.35}$$

onde $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \lambda_3 \ge \lambda_4$ são raízes quadradas dos autovalores da matriz

$$\rho(t)\sigma_{1,y}\sigma_{2,y}\rho^{\star}(t)\sigma_{1,y}\sigma_{2,y},\tag{6.36}$$

onde $\rho^{\star}(t)$ é o complexo conjugado de $\rho(t)$, a matriz densidade reduzida dos dois qubits no formalismo de Schrödinger. Assim, se $\Lambda(t)$ é menor ou igual a zero, não existe emaranhamento e o estado é separável. Nosso objetivo é utilizar campos externos para manter $\Lambda(t)$ fixo. A Figura 6.1 mostra $\Lambda(t)$ para a evolução de diferentes estados iniciai emaranhados. No painel (a), $\Lambda(t)$ é mostrado para o estado inicial com $\Lambda(0) \approx 0.70711$, quando o campo de controle esta desligado (indicado com N = 0) e ligado (N = 1, 3, 8). A linha vermelha e roxa correspondem ao estado inicial da Eq. (6.33), com $\theta = \pi/8$ e $\theta = 3\pi/8$, respectivamente. A linha azul corresponde ao estado inicial da Eq. (6.34), com $\theta = \pi/8 \in \theta = 3\pi/8$ dando o mesmo $\Lambda(t)$. No painel (b) $\Lambda(t)$ é dado para estados iniciais de Bell, cujo $\Lambda(0) = 1$. Os estados iniciais da Eq. (6.33) evoluem resultando no mesmo $\Lambda(t)$ para $\theta = \pm \pi/4$. Também, os estados iniciais da Eq. (6.34) evoluem resultando no mesmo $\Lambda(t)$ para $\theta = \pm \pi/4$. No painel desta figura, nós mostramos os resultados para a Eq. (6.33), visto que estes diferem dos da Eq. (6.34) somente na quarta casa decimal. A linha vermelha representa os resultados onde os campos de controle estão desligados, enquanto que a linha azul, a linha verde, e a linha roxa mostram os resultados para o campo de controle com N = 1, 3, 8, respectivamente.

Da teoria geral do desacoplamento dinâmico (1,41), a proteção fica melhor a medida que N fica maior. A Figura 6.2 mostra a fidelidade, $F(t) = \text{Tr}[\rho_I(t)\rho(0)]$, como uma função do tempo para as condições iniciais iguais aos estados de Bell. Todos os quatro estados de Bell resultam na mesma função de fidelidade a menos de variações na quarta casa decimal. A linha azul, vermelha, roxa e verde dá a fidelidade quando o campo de controle está ligado, utilizando N = 2, 3, 5, 8, respectivamente. Os quadros menores (a) e (b) mostram, respectivamente, a fidelidade e a *concurrence*, ambas calculadas no tempo $t = \tau$, como uma função de N.

7 Conclusão

Nesta tese nós mostramos que a realização de operações lógicas quânticas de 1 qubit protegida contra erros provenientes do meio ambiente pode ser factível através da utilização de campos externos continuamente aplicados. Na seção (5.1) nós introduzimos a idéia que fundamenta nosso método, simulando uma operação lógica de Hadamard protegida contra uma única classe de erro. Nós mostramos que nossa proposta para desacoplamento dinâmico contínuo é menos vulnerável a erros produzidos por controles não ideais que a versão pulsada, visto que nosso método somente requer intervenções no passo inicial e final da operação lógica quântica, enquanto que os métodos pulsados demandam controle de tempo sofisticado para cada um dos vários pulsos necessários para a proteção.

Na seção (5.2) nós ampliamos nosso método considerando, então, diferentes classes de erros e configurações para o reservatório externo. Nós achamos que, para um reservatório com densidade espectral ôhmica, a fidelidade da operação lógica pode ser menor que no caso super ôhmico, mas esta requer campos de freqüências e amplitudes menores para desacoplar dinamicamente o qubit do meio ambiente. Nós mostramos que esta situação característica ocorre pois, quando o sistema interage com um reservatório super ôhmico, a fidelidade decai drasticamente já no começo da operação lógica quântica, e posteriormente satura no decorrer da evolução. Para um reservatório ôhmico, entretanto, a fidelidade decai durante toda a operação lógica, mas de forma suave. Esta peculiaridade faz o reservatório ôhmico mais danoso à operação lógica que o reservatório super ôhmico, mas mais fácil de ser protegido. Nós estudamos a relevância dos erros de bit-flip e erros de amplitude na fidelidade da porta lógica quântica de Hadamard quando esta é protegida somente contra descoerência, e mostramos quão robusta é esta proteção parcial. Além disso, nós calculamos um arranjo de campos, dado pelas Eqs. (5.81), (5.82) e (5.83), capaz de proteger simultaneamente a operação lógica contra erros de descoerência, de bit-flip e de amplitude.

Finalmente, no capítulo (6) nós ampliamos nosso sistema para o caso de 2 qubits e, apesar de não considerarmos operações lógicas quânticas, nós mostramos que é possível, através de uma combinação simples de um campo estático ao longo do eixo x e um campo giratório no plano yz, protegê-los do desemaranhamento. Nós testamos nosso método em uma situação bastante desfavorável, onde os erros de descoerência, os erros de bit-flip e de amplitude, a uma temperatura finita, são tão eficientes para desemaranhar o estado que isto ocorre durante um intervalo de tempo menor que o tempo característico de correlação do reservatório e que, apesar disso, mostramos que a *concurrence* pode ser preservada com alta fidelidade.

Nosso método, como todos os outros baseados nas técnicas de desacoplamento dinâmico, requer intervençãoes ultra rápidas sobre o sistema, sendo esta atualmente a principal dificuldade para a sua implementação concreta em sistemas físicos reais. De fato, apesar de independer das suposições feitas ao reservatório, as interações controladas necessitam ser mais rápidas que o tempo médio de interação do reservatório com o sistema físico que representa o qubit. Entretanto, com o avanço das técnicas experimentais na atualidade, o desacoplamento dinâmico pode ser uma ferramenta eficiente para a proteção da informação e computação quântica, sendo dos métodos tradicionais o único que não requer qubits físicos auxiliares.

Como perspectivas deste trabalho, várias vertentes podem ser citadas. Primeiramente, outros tipos de reservatórios, com correlações diferentes, podem ser estudados, como por exemplo banhos de spins, que são característicos de pontos quânticos. Além disso, a eficiência do método para proteção das operações lógicas de 2 qubits são de suma importância, pois surgem como um ferramenta para a criação de estados quânticos emaranhados. Ainda se tratando de 2 qubits, a correlação entre os reservatório de cada um deles é também relevante, pois nem sempre os qubits estão suficientementes distantes a ponto dos reservatórios serem independentes, como é o caso da suposição feita no capítulo (6). Mais que isso, podemos considerar reservatórios cujos acoplamentos são dependentes do tempo, pois numa situação onde os qubits se aproximam ou se afastam as interações passam, de forma dinâmica, de regimes independentes para regimes coletivos. Finalmente, uma extensão para um número maior de qubits também é relevante pois abre espaço para o estudo de outros métodos de proteção, como por exemplo os códigos de correção de erros quântico e os subespaços e subsistemas livres de erros, que juntamente com o método de desacoplamento dinâmico certamente aumentarim a eficiência da proteção das computações quânticas.

Referências

- 1 VIOLA, L.; LLOYD, S. Dynamical suppression of decoherence in two-state quantum systems. **Physical Review A**, v. 58, n. 4, p. 2733-2744, 1998.
- 2 VIOLA, L.; KNILL, E.; LLOYD, S. Dynamical decoupling of open quantum systems. Physical Review Letters, v. 82, n. 12, p. 2417-2421, 1999.
- 3 VIOLA, L.; LLOYD, S.; KNILL, E. Universal control of decoupled quantum systems. Physical Review Letters, v. 83, n. 23, p. 4888-4891, 1999.
- 4 VIOLA, L. Advances in decoherence control. Journal of Modern Optics, v. 51, n. 16-18, p. 2357-2367, 2004.
- 5 VIDAL, G.; WERNER, R. F. Computable measure of entanglement. Physical Review A, v. 65, n. 3, p. 032314-032324, 2002.
- 6 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?. Physical Review, v. 47, n. 10, p. 777-780, 1935.
- 7 BELL, J. S. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. **Physics**, v. 1, n. 3, p. 195-200, 1964.
- 8 GREENBERGER, D. M.; HORNE, M. A.; ZEILINGER, A. Going beyond Bell's theorem. In: KAFATOS, M. Bell's theorem, quantum theory, and the conception of the universe. Dordrecht: Kluwer, 1989. p. 73-76.
- 9 DUR, W.; VIDAL, G.; CIRAC, J. I. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. **Physical Review A**, v. 62, n. 6, p. 062314-062325, 2000.
- 10 VERSTRAETE, F.; DEHAENE, J.; DE MOOR, B.; VERSCHELDE, H. Four qubits can be entangled in nine different ways. **Physical Review A**, v. 65, n. 5, p. 052112-052116, 2002.

- 11 WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. Physical Review Letters, v. 80, n. 10, p. 2245-2248, 1998.
- 12 PERES, A. Separability criterion for density matrices. Physical Review Letters, v. 77, n. 8, p. 1413-1415, 1996.
- 13 HORODECKI, M.; HORODECKI, P.; HORODECKI, R. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. Physics Letters A, v. 223, n. 1-2, p. 1-8, 1996.
- 14 BENNETT, C. H.; DIVINCENZO, D. P.; SMOLIN, J.; WOOTTERS, W. K. Mixedstate entanglement and quantum error correction. Physical Review A, v. 54, n. 5, p. 3824-3851, 1996.
- 15 BENNETT, C. H.; BERNSTEIN, H. J.; POPESCU, S.; SCHUMACHER, B. Concentrating partial entanglement by local operations. Physical Review A, v. 53, n. 4, p. 2046-2052, 1996.
- 16 JOZSA, R. Fidelity for mixed quantum states. Journal of Modern Optics, v. 41, n. 12, p. 2315-2323, 1994.
- 17 UHLMANN, A. The transition probability in the state space of a *-algebra. **Reports** on Mathematical Physics, v. 9, n. 2, p. 273-279, 1976.
- 18 DIRAC, P. A. M. The lagrangian in quantum mechanics. Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, v. 3, n. 1, p. 64-72, 1933.
- 19 FEYNMAN, R. P. The principle of least action in quantum mechanics. Princeton: Princeton University, 1942. 320 p.
- 20 FEYNMAN, R. P. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. Reviews of Modern Physics, v. 20, n. 2, p. 367-387, 1948.
- 21 KRAUS, K. States, effects and operations: fundamental notions of quantum-theory. Berlin: Springer-Verlag, 1983. 151 p.
- 22 REDFIELD, A. G. On the theory of relaxation processes. **IBM Journal of Research and Development**, v. 1, n. 1, p. 19-31, 1957.

- 23 LINDBLAD, G. Generators of quantum dynamical semigroups. Communications in Mathematical Physics, v. 48, n. 2, p. 119-130, 1976.
- 24 STELMACHOVIC, P.; BUZEK, V. Dynamics of open quantum systems initially entangled with environment: Beyond the Kraus representation. **Physical Review A**, v. 64, n. 6, p. 062106-062110, 2001.
- 25 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. Quantum computation and quantum information. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 665 p.
- 26 SHOR, P. W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. Physical Review A, v. 52, n. 4, p. R2493-R2496, 1995.
- 27 STEANE, A. M. Error correcting codes in quantum theory. Physical Review Letters, v. 77, n. 5, p. 793-797, 1996.
- 28 CALDERBANK, A. R.; SHOR, P. W. Good quantum error-correcting codes exist. Physical Review A, v. 54, n. 2, p. 1098-1105, 1996.
- 29 STEANE, A. M. Multiple-particle interference and quantum error correction. Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical Physical and Engineering Sciences, v. 452, n. 1954, p. 2551-2577, 1996.
- 30 BYRD, M. S.; WU, L. A.; LIDAR, D. A. Overview of quantum error prevention and leakage elimination. Journal of Modern Optics, v. 10, n. 16-18, p. 2449-2460, 2004.
- 31 ZANARDI, P.; RASETTI, M. Noiseless quantum codes. Physical Review Letters, v. 79, n. 17, p. 3306-3309, 1997.
- 32 LIDAR, D. A.; CHUANG I. L.; WHALEY, K. B. Decoherence-free subspaces for quantum computation. Physical Review Letters, v. 81, n. 12, p. 2594-2597, 1998.
- 33 KNILL, E.; LAFLAMME, R.; VIOLA, L. Theory of quantum error correction for general noise. Physical Review Letters, v. 84, n. 11, p. 2525-2528, 2000.
- 34 MENDONÇA, P. E. M. F.; MARCHIOLLI, M. A.; NAPOLITANO, R. D. J. Using continuous measurement to protect a universal set of quantum gates within a perturbed decoherence-free subspace. Journal of Physics A: Mathematical and General, v. 38, n. 6, p. L95-L102, 2005.

- 35 GOTTESMAN, D. Class of quantum error-correcting codes saturating the quantum Hamming bound. Physical Review A, v. 54, n. 3, p. 1862-1868, 1996.
- 36 KNILL, E.; LAFLAMME, R. Theory of quantum error-correcting codes. Physical Review A, v. 55, n.2, p. 900-911, 1997.
- 37 PALMA, G. M.; SUOMINEN, K.-A.; EKERT, A. K. Quantum computers and dissipation. Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical Physical and Engineering Sciences, v. 452, n. 1946, p. 567-584, 1996.
- 38 ZANARDI, P.; RASETTI, M. Error avoiding quantum codes. Modern Physics Letters B, v. 11, n. 25, p. 1085-1093, 1997.
- 39 MAGNUS, W. On the exponential solution of differential equations for a linear operator. Communications on Pure and Applied Mathematics, v. 7, n. 4, p. 649-673, 1954.
- 40 FANCHINI, F. F.; HORNOS, J. E. M.; NAPOLITANO, R. D. J. Continuously decoupling single-qubit operations from a perturbing thermal bath of scalar bosons. Physical Review A, v. 75, n. 2, p. 022329-022332, 2007.
- 41 FACCHI, P.; TASAKI, S.; PASCAZIO, S.; NAKAZATO, H.; TOKUSE, A.; LIDAR, D. A. Control of decoherence: analysis and comparison of three different strategies. Physical Review A, v. 71, n. 2, p. 022302-022323, 2005.
- 42 SHIBATA, N. H. F.; TAKAHASHI, Y.; HASHITSUME, N. Generalized stochastic liouville equation - non-markovian versus memoryless master equations. Journal of Statistical Physics, v. 17, n. 4, p. 171-187, 1977.
- 43 FANCHINI, F. F.; HORNOS, J. E. M.; NAPOLITANO, R. D. J. Continuously decoupling a Hadamard quantum gate from independent classes of errors. Physical Review A, v. 76, n. 3, p. 032319-032325, 2007.
- 44 FANCHINI, F. F.; NAPOLITANO, R. D. J. Continuous dynamical protection of two-qubit entanglement from uncorrelated dephasing bit flipping, and dissipation. Physical Review A, v. 76, n. 6, p. 062306-062309, 2007.
- 45 DIÓSI, L. Progressive decoherence and total environmental disentanglement. In: BENATTI, F.; FLOREANINI, R. Irreversible quantum dynamics. Heidelberg: Springer, 2003. p. 157-163.

- 46 YU,T.; EBERLY, J. H. Finite-time disentanglement via spontaneous emission. Physical Review Letters, v. 93, n. 14, p. 140404-140407, 2004.
- 47 BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. **The theory of open quantum systems**. New York: Oxford University Press, 2002. 654 p.
- 48 FERNÁNDEZ, F. M. On the Magnus, Wilcox and Fer operator equations. European Journal of Physics, v. 26, n. 1, p. 151-155, 2005.

A Expansão de Magnus

Suponha que procuremos uma solução para a equação dada por:

$$\frac{d\mathcal{U}(t)}{dt} = H(t)\mathcal{U}(t), \qquad \mathcal{U}(0) = I,$$
(A.1)

onde H(t) é um operador linear que depende da variável real $t \in I$ é o operador identidade. Se a inversa do operador $\mathcal{U}(t)$ existe, então esta satisfaz uma equação diferencial similar a Eq. (A.1). De fato, se diferenciarmos $\mathcal{U}(t)\mathcal{U}(t)^{-1}$ e utilizando a Eq. (A.1) obtemos $\frac{d\mathcal{U}(t)^{-1}}{dt} = -\mathcal{U}(t)^{-1}H(t).$

Antes de continuar com a discussão da Eq. (A.1) é conveniente introduzirmos algumas notações e desenvolvermos algumas equações que serão úteis adiante. Dado um operador linear A nós definimos a função exponencial

$$\mathcal{U}(\lambda) = \exp(\lambda A) \tag{A.2}$$

que é uma solução da equação diferencial

$$\frac{d\mathcal{U}(\lambda)}{d\lambda} = A\mathcal{U}(\lambda), \qquad \mathcal{U}(0) = I, \tag{A.3}$$

onde vale notar que $\mathcal{U}(-\lambda) = \mathcal{U}(\lambda)^{-1}$.

Se B é outro operador linear arbitrário nós consideramos a transformação canônica

$$B(\lambda) = \mathcal{U}(\lambda)B\mathcal{U}(\lambda)^{-1}, \qquad (A.4)$$

de forma que se diferenciarmos a equação acima com respeito a λ podemos escrever

$$\frac{dB(\lambda)}{d\lambda} = A_{-}B(\lambda) \tag{A.5}$$

onde introduzimos a notação de super operadores, onde A_{-} satisfaz

$$A_{-}B = [A, B] = AB - BA \tag{A.6}$$

para qualquer operador linear B. O super operador é linear $A_{-}(B+C) = A_{-}B + A_{-}C$, e suas potencias são dadas por $A_{-}^{2}B = [A, [A, B]]$, etc. Além disso, é bem conhecido que uma solução formal para a Eq. (A.5) é dada por

$$B(\lambda) = \exp(\lambda A_{-})B = \mathcal{U}(\lambda)B\mathcal{U}(\lambda)^{-1}.$$
(A.7)

Magnus, em seu artigo de 1954 (39), a fim de resolver a Eq. (A.1), propôs uma solução exponencial para o operador evolução temporal, de forma que este pode ser escrito como:

$$\mathcal{U}(t) = \exp(A(t)), \qquad A(0) = 0, \tag{A.8}$$

onde A(t) é um operador linear a ser determinado. Visto que A(t) e $\mathcal{U}(t)$ comutam nós temos que

$$\mathcal{U}(t)A(t)\mathcal{U}(t)^{-1} = A(t). \tag{A.9}$$

Diferenciando esta igualdade obtemos:

$$\frac{d\mathcal{U}(t)}{dt}A(t)\mathcal{U}(t)^{-1} + \mathcal{U}(t)\frac{dA(t)}{dt}\mathcal{U}(t)^{-1} + \mathcal{U}(t)A(t)\frac{d\mathcal{U}(t)^{-1}}{dt} = \frac{dA(t)}{dt}.$$
 (A.10)

Substituindo Eq. (A.1) e (A.8) escrevemos então:

$$[H(t), A(t)] + \mathcal{U}(t)\frac{dA(t)}{dt}\mathcal{U}(t)^{-1} = \frac{dA(t)}{dt},$$
(A.11)

onde obtemos então uma equação que relaciona o operador A(t) e o Hamiltoniano do sistema H(t). Se utilizarmos a notação em termos dos superoperadores, conforme definidos nas Eqs. (A.6,A.7), a equação acima pode ser escrita como

$$H(t)_{-}A(t) + \exp(A_{-})\frac{dA(t)}{dt} = \frac{dA(t)}{dt}.$$
 (A.12)

O ponto de partida da expansão de Magnus é resolver a Eq. (A.12) para $\frac{dA(t)}{dt}$. Para resolver a Eq. (A.12) nós levamos em conta que

$$\exp(A(t)_{-}) - 1 = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} \exp(\lambda A(t)_{-}) d\lambda = A(t)_{-} \int_0^1 \exp(\lambda A(t)_{-}) d\lambda$$
(A.13)

de forma que podemos reescrever a equação mestra, Eq. (A.12), da seguinte maneira

$$A(t)_{-}\left[-H(t) + \int_{0}^{1} \exp(\lambda A(t)_{-}) \frac{dA(t)}{dt} d\lambda\right] = 0$$
(A.14)

O truque esta em expandir a parte entre colchetes da Eq. (A.14) no tempo, de forma que consideramos a função

$$W(z) = \int_0^1 \exp(\lambda z) dz = (e^z - 1)/z = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots$$
(A.15)

e sua inversa

$$G(z) = \frac{z}{(e^z - 1)} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} - \frac{z^4}{720} + \dots,$$
 (A.16)

onde z é um número complexo. Vale ressaltar que a série G(z) converge somente para para $|z| < 2\pi$.

Assim, nós resolvemos a Eq. (A.14) utilizando a Eq. (A.16)

$$\frac{dA(t)}{dt} = G(A(t)_{-})H(t).$$
 (A.17)

Assim, expandindo A(t) na forma de uma série no tempo (39)

$$A(t) = A_1(t) + A_2(t) + A_3(t) + \dots,$$
(A.18)

e substituindo as Eqs. (A.16,A.18) na Eq. (A.17) nós obtemos

$$\frac{d}{dt}(A_1(t) + A_2(t) + A_3(t) + \dots) = \left(1 - \frac{1}{2}A(t) - \frac{1}{12}A(t)^2 - \dots\right)H(t)$$
$$= H(t) - \frac{1}{2}[A(t), H(t)] + \frac{1}{12}[A(t), [A(t), H(t)]] + \dots \quad (A.19)$$

Logo, a aproximação de primeira ordem $\frac{dA_1(t)}{dt} = H(t)$ conduz para

$$A_1(t) = \int_0^t H(t')dt'.$$
 (A.20)

A solução para a equação de segunda ordem $\frac{dA_2(t)}{dt} = [H(t),A_1(t)]/2$ é

$$A_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^t [H(t'), A_1(t')] dt', \qquad (A.21)$$

e analogamente, para a terceira ordem $\frac{dA_3(t)}{dt} = [H(t), A_2(t)]/2 + [A_1(t), [A_1(t), H(t)]]/12$, a solução é dada por

$$A_3(t) = \frac{1}{2} \int_0^t [H(t'), A_2(t')] dt' + \frac{1}{12} \int_0^t [[H_1(t'), A_1(t')], H(t')] dt'.$$
(A.22)

Procedendo da mesma maneira se obtêm facilmente as ordens superiores.

É importante frisar que o método aqui utilizado para deduzir a expansão de Magnus não foi o mesmo utilizado pelo autor no artigo original de 1954. As provas simples e elegantes destes resultados gerais apresentados nessa seção estão presentes em (48).

B Morte Súbita de Emaranhamento

Neste apêndice, baseado no artigo de Ting Yu e Joseph H. Eberly (46), fazemos uma breve introdução ao fenômeno da morte súbita de emaranhamento. Para um sistema de 2 qubits podemos exemplificar a morte súbita de emaranhamento tratando o seguinte Hamiltoniano:

$$H = H_I + H_B, \tag{B.1}$$

onde

$$H_{I} = \sum_{k} (g_{k}\sigma_{+}^{A}a_{k} + g_{k}^{*}\sigma_{-}^{A}a_{k}^{\dagger}) + \sum_{k} (f_{k}\sigma_{+}^{B}b_{k} + f_{k}^{*}\sigma_{-}^{B}b_{k}^{\dagger}),$$
(B.2)

$$H_B = \sum_k \omega_k a_k^{\dagger} a_k + \sum_k \nu_k b_k^{\dagger} b_k \tag{B.3}$$

onde $\sigma_{+}^{A} = \frac{(\sigma_{x}+i\sigma_{y})\otimes I}{2}$ e $\sigma_{+}^{B} = \frac{I\otimes(\sigma_{x}+i\sigma_{y})}{2}$. Tal acoplamento, como mostramos nesta tese, causa aos qubits um decaimento de suas amplitudes, de forma que, considerando que a temperatura do reservatório é igual a zero, podemos escrever o seguinte mapa para cada qubit:

$$\begin{split} |\downarrow\rangle_{S} \otimes |0\rangle_{R} &\to |\downarrow\rangle_{S} \otimes |0\rangle_{R}, \\ |\uparrow\rangle_{S} \otimes |0\rangle_{R} &\to \sqrt{1-p} |\uparrow\rangle_{S} \otimes |0\rangle_{R} + \sqrt{p} |\downarrow\rangle_{S} \otimes |1\rangle_{R}. \end{split}$$
(B.4)

Como podemos observar, os estados fundamentais dos qubits, definidos por $|\downarrow\rangle$, não são afetados, enquanto que os estados $|\uparrow\rangle$, por sua vez, ou decaem para $|\downarrow\rangle$, com probabilidade p, criando uma excitação no meio ambiente (estado $|1\rangle_R$), ou permanecem em $|\uparrow\rangle$ com probabilidade 1 - p. Para efeito de simplificação, vamos supor uma aproximação Markoviana, onde escrevemos então $p = 1 - \exp(-\Gamma t)$, de forma que os qubits estão sujeitos ao decaimento espontâneo quando acoplados ao vácuo eletromagnético e, portanto, com tempo de vida médio de cada qubit decaindo exponencialmente. Assim, definido os acoplamentos sistema-banho, notamos que dependendo da condição inicial do sistema, durante o passar do tempo, este se emaranha gradualmente com o meio ambiente que o circunda e perde, portanto, sua coerência e pureza. Vale ressaltar que, para este modelo, um decaimento completo, onde o sistema se encontra no estado $|\downarrow\downarrow\rangle$ com probabilidade 1, somente ocorre assintoticamente quando o tempo tende a infinito $(p \rightarrow 1 \text{ quando } t \rightarrow \infty)$.

Como definimos um comportamento assintótico para o decaimento de cada qubit, o que podemos dizer da *concurrence* para estados que estejam emaranhados em t = 0? A *concurrence*, assim como as coerências, somente desaparecem para $t \to \infty$ ou desaparece num tempo finito? A reposta para esta questão depende da condição inicial do sistema. Como mostraremos a seguir, existem condições iniciais tais que, mesmo com o decaimento local para cada qubit sendo exponencial, o emaranhamento desaparece num tempo finito, subitamente.

Seja uma condição inicial dada por:

$$|\Psi\rangle = |\alpha| |\downarrow\downarrow\rangle + |\beta| |\uparrow\uparrow\rangle. \tag{B.5}$$

Para medir o emaranhamento nós utilizamos a *concurrence* (11), definida como o número máximo entre zero e $\Lambda(t)$, com

$$\Lambda(t) = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, \tag{B.6}$$

onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ são raízes quadradas dos autovalores da matriz

$$\rho(t)(\sigma_{1,y} \otimes \sigma_{2,y})\rho^*(t)(\sigma_{1,y} \otimes \sigma_{2,y}), \tag{B.7}$$

sendo $\rho^*(t)$ o complexo conjugado de $\rho(t)$, que é dada pela matriz densidade dos dois qubits no formalismo de Schrödinger (para maiores detalhes ver Apên. (2.4.3)). Assim, se $\Lambda(t)$ é menor ou igual a zero, não existe emaranhamento e o estado é separável, de forma que, utilizando o mapa da Eq. (B.4) e supondo a condição inicial dada pela Eq. (B.5), a dinâmica da *concurrence* é calculada e pode ser escrita como:

$$C = \max\{0, \ 2(1-p)|\beta|^2(|\alpha/\beta|-p)\}.$$
(B.8)

Como podemos observar desta expressão, para $|\beta| = |\alpha|$ o emaranhamento somente desaparece quando cada qubit decai por completo (p = 1), entretanto, para $|\beta| > |\alpha|$, o emaranhamento desaparece para $p = |\alpha/\beta| < 1$, o que corresponde a um tempo finito.



Figura B.1. Concurrence em função do tempo para dois estados quânticos igualmente emaranhados em t = 0. Em (a) a condição inicial é dada por $|\Phi\rangle = \sqrt{0.3} |\uparrow\uparrow\rangle + \sqrt{0.7} |\downarrow\downarrow\rangle$ e a população inicial predominante do operador densidade é a de estados $|\downarrow\downarrow\rangle$ (Eq. (B.5) com $|\beta| < |\alpha|$). Neste caso a morte súbita não aparece e o emaranhamento decai exponencialmente. Em (b) as proporções do estados são invertidas, $|\Phi\rangle = \sqrt{0.7} |\uparrow\uparrow\rangle + \sqrt{0.3} |\downarrow\downarrow\rangle$ e observa-se a morte súbita de emaranhamento quando $p = |\alpha/\beta|$, ou seja, $t = -\ln(1 - |\alpha/\beta|)$.

É a esta morte, que ocorre num tempo finito, que define-se como sendo a morte súbita de emaranhamento. Vale ressaltar que tal efeito independe da quantidade de emaranhamento inicial do sistema (ver Figura B.1). Isto porque pode-se ter inúmeros estados com o mesmo grau de emaranhamento inicial, e que quando expostos ao meio ambiente, possuam dinâmicas distintas que podem sujeitar ou não os qubits à morte súbita de emaranhamento. Por exemplo, a *concurrence* do estado dado pela Eq. (B.5) em t = 0 (p = 0) é igual a $C = 2|\alpha\beta|$, sujeitando o mesmo C à inúmeras configurações de α e β .

C Apêndice do capítulo 5

C.1 Hamiltoniano geral para 1 qubit

Neste apêndice mostramos explicitamente a derivação do operador evolução temporal geral para 1 qubit. Dada a transformação unitária geral para um qubit,

$$\mathcal{U}(t) = I \cos\left[\alpha(t)\right] - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}(t) \sin\left[\alpha(t)\right], \qquad (C.1)$$

o Hamiltoniano equivalente a este, ou seja $\mathcal{U}(t) = \exp(-iH_U(t)t)$ é dado por:

$$H_U(t) = i \frac{d\mathcal{U}(t)}{dt} \mathcal{U}^{\dagger}(t) = \Omega(t).\sigma, \qquad (C.2)$$

de forma que resolvendo,

$$H_U(t) = \left(-i\frac{d\alpha(t)}{dt}\sin[\alpha(t)] + \frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin[\alpha(t)] + \frac{d\alpha(t)}{dt}\cos[\alpha(t)]\hat{\mathbf{u}}(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\mathcal{U}^{\dagger}(t), \quad (C.3)$$

e finalmente,

$$H_U(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} \hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \sin[\alpha(t)] \cos[\alpha(t)] \frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \sin^2[\alpha(t)] \left(\hat{\mathbf{u}}(t) \times \frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

visto a igualdade

$$(\vec{X}.\boldsymbol{\sigma})(\vec{Y}.\boldsymbol{\sigma}) = i(\vec{X} \times \vec{Y}).\boldsymbol{\sigma} + \vec{X}.\vec{Y}, \qquad (C.5)$$

е

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt} \cdot \hat{\mathbf{u}}(t) = 0, \tag{C.6}$$

pois como $\hat{\mathbf{u}}(t)$ é unitário, ou seja, com módulo constante igual a 1, o que implica que $\frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt}$ é perpendicular a $\hat{\mathbf{u}}(t)$ e conseqüentemente o produto escalar entre eles é igual a 0.

C.2 Hamiltoniano de interação

Nesta parte do apêndice calculamos o Hamiltoniano de interação para um banho de bósons escalares, definido como

$$H_I = (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\sigma}) B + (\boldsymbol{\lambda}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}) B^{\dagger}, \qquad (C.7)$$

Como destacamos anteriormente, o operador evolução do sistema mais geral, para um sistema de 1 qubit, é dado por

$$\mathcal{U}(t) = \mathbf{I}\cos\left[\alpha(t)\right] - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}(t)\sin\left[\alpha(t)\right], \qquad (C.8)$$

de forma que agora calculamos H_I no formalismo de interação:

$$\tilde{H}_I = \mathcal{U}_R^{\dagger}(t)\mathcal{U}_S^{\dagger}(t)H_I\mathcal{U}_S(t)\mathcal{U}_R(t).$$
(C.9)

Para tal, calculamos inicialmente

$$\mathcal{U}_{R}^{\dagger}(t)\mathcal{U}_{S}^{\dagger}(t)H_{I}\mathcal{U}_{R}(t) = \hbar(I\cos[\alpha(t)] + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{u}}(t)\sin[\alpha(t)])\underbrace{(\tilde{B}(t)\boldsymbol{\lambda} + \tilde{B}^{\dagger}(t)\boldsymbol{\lambda}^{*})}_{\boldsymbol{\lambda}_{SB}}.\boldsymbol{\sigma}, \quad (C.10)$$

onde, no caso, escrevemos $\mathcal{U}_{R}^{\dagger}(t)B\mathcal{U}_{R}(t) \equiv \tilde{B}(t) \in \mathcal{U}_{R}^{\dagger}(t)B^{\dagger}\mathcal{U}_{R}(t) \equiv \tilde{B}^{\dagger}(t)$. Assim,

$$\mathcal{U}_{R}^{\dagger}(t)\mathcal{U}_{S}^{\dagger}(t)H_{I}\mathcal{U}_{R}(t) = \hbar \cos[\alpha(t)](\boldsymbol{\lambda}_{SB}.\boldsymbol{\sigma}) - \hbar \sin[\alpha(t)](\hat{\mathbf{u}}(t) \times \boldsymbol{\lambda}_{SB}).\boldsymbol{\sigma} + i\hbar \sin[\alpha(t)](\hat{\mathbf{u}}(t).\boldsymbol{\lambda}_{SB})$$
(C.11)

visto a igualdade abaixo

$$(\vec{X}.\boldsymbol{\sigma})(\vec{Y}.\boldsymbol{\sigma}) = i(\vec{X} \times \vec{Y}).\boldsymbol{\sigma} + \vec{X}.\vec{Y}.$$
(C.12)

Assim, dado que

$$\tilde{H}_I = \mathcal{U}_R^{\dagger}(t)\mathcal{U}_S^{\dagger}(t)H_I\mathcal{U}_S(t)\mathcal{U}_R(t), \qquad (C.13)$$

escrevemos

$$\tilde{H}_{I} = \hbar \left\{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{SB} \cos[\alpha(t)] - \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\hat{\mathbf{u}}(t) \times \boldsymbol{\lambda}_{SB} \right) \sin[\alpha(t)] + i \boldsymbol{\lambda}_{SB} \cdot \hat{\mathbf{u}}(t) \sin[\alpha(t)] \right\} \times \left\{ I \cos[\alpha(t)] - i \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}(t) \sin[\alpha(t)] \right\}.$$
(C.14)
Desta forma,

$$\tilde{H}_{I} = \hbar \cos^{2} [\alpha(t)] (\boldsymbol{\lambda}_{SB} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \hbar \sin [\alpha(t)] \cos [\alpha(t)] (\hat{\mathbf{u}}(t) \times \boldsymbol{\lambda}_{SB}) \cdot \boldsymbol{\sigma}
+ i\hbar \sin [\alpha(t)] \cos [\alpha(t)] (\hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \boldsymbol{\lambda}_{SB}) + \hbar \sin [\alpha(t)] \cos [\alpha(t)] (\boldsymbol{\lambda}_{SB} \times \hat{\mathbf{u}}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}
- i\hbar \sin [\alpha(t)] \cos [\alpha(t)] (\hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \boldsymbol{\lambda}_{SB}) - \hbar \sin^{2} [\alpha(t)] ((\hat{\mathbf{u}}(t) \times \boldsymbol{\lambda}_{SB}) \times \hat{\mathbf{u}}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}
+ i\hbar \sin^{2} [\alpha(t)] (\hat{\mathbf{u}}(t) \times \boldsymbol{\lambda}_{SB}) \cdot \hat{\mathbf{u}}(t) + \hbar \sin^{2} [\alpha(t)] (\hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \boldsymbol{\lambda}_{SB}) (\hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (C.15)$$

onde substituindo

$$(\hat{\mathbf{u}}(t) \times \boldsymbol{\lambda}_{SB}) \times \hat{\mathbf{u}}(t) = \boldsymbol{\lambda}_{SB} - [\hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \boldsymbol{\lambda}_{SB}]\hat{\mathbf{u}}(t), \qquad (C.16)$$

e as igualdades trigonométricas,

$$2\cos^{2}[\alpha(t)] = 1 + \cos[2\alpha(t)],$$

$$2\sin^{2}[\alpha(t)] = 1 - \cos[2\alpha(t)],$$

$$2\sin[\alpha(t)]\cos[\alpha(t)] = \sin[2\alpha(t)],$$
 (C.17)

calculamos o Hamiltoniano de interação no formalismo de interação de uma forma mais compacta:

$$\tilde{H}_{I} = \hbar \cos \left[2\alpha(t)\right] (\boldsymbol{\lambda}_{SB} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \hbar \sin \left[2\alpha(t)\right] (\hat{\mathbf{u}}(t) \times \boldsymbol{\lambda}_{SB}) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \hbar (1 - \cos \left[2\alpha(t)\right]) (\hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \boldsymbol{\lambda}_{SB}) (\hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma})$$
(C.18)

Finalmente, substituindo $\lambda_{SB} = \tilde{B}(t)\lambda + \tilde{B}^{\dagger}(t)\lambda^*$, o Hamiltoniano fica dado por

$$\tilde{H}_I = \hbar \tilde{B}(t) \mathbf{\Lambda}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \hbar \tilde{B}^{\dagger}(t) \mathbf{\Lambda}^*(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \qquad (C.19)$$

de forma que $\Lambda(t)$ é expresso conforme a Eq. (5.13) do Cap. (5.1),

$$\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{\lambda} \cos\left[2\alpha(t)\right] + \left[\mathbf{\lambda} \times \hat{\mathbf{u}}(t)\right] \sin\left[2\alpha(t)\right] + \hat{\mathbf{u}}(t) \left[\hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{\lambda}\right] \left\{1 - \cos\left[2\alpha(t)\right]\right\}.$$
(C.20)

C.3 Cálculo de $D_{\alpha,\beta}$ para o caso de banhos escalares

A equação mestra de segunda ordem, local no tempo, que descreve a evolução da matriz do operador densidade do qubit, no formalismo de interação, é escrita como (42)

$$\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} = -\int_0^t dt' Tr_R \left\{ \left[\tilde{H}_I(t), \left[\tilde{H}_I(t'), \rho_R \tilde{\rho}_S(t) \right] \right] \right\},$$
(C.21)

onde $\tilde{H}_I(t)$ é o Hamiltoniano de interação no formalismo de interação. Dado o Hamiltoniano conforme Eq. (5.11)

$$\tilde{H}_{I}(t) = \tilde{B}(t)\mathbf{\Lambda}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \tilde{B}^{\dagger}(t)\mathbf{\Lambda}^{*}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \qquad (C.22)$$

nós escrevemos, para efeito de simplificação, o Hamiltoniano de interação de tal maneira que:

$$\tilde{H}_I(t) = \sum_k b_k(t)\sigma_k, \qquad (C.23)$$

onde o operador do banho $\mathbf{b}(t)$ é definido como $\mathbf{b}(t) = \tilde{B}(t)\mathbf{\Lambda}(t) + \tilde{B}^{\dagger}(t)\mathbf{\Lambda}^{*}(t)$. O traço no banho sobre os comutadores da equação mestra acima é escrito como,

$$\operatorname{Tr}_{\mathrm{R}}\left\{\left[\tilde{H}_{I}(t),\left[\tilde{H}_{I}(t'),\tilde{\rho}_{R}\tilde{\rho}_{S}(t)\right]\right]\right\} = \sum_{\alpha,\beta}\operatorname{Tr}_{\mathrm{R}}\left\{\left[b_{\alpha}(t)\sigma_{\alpha},\left[b_{\beta}(t')\sigma_{\beta},\rho_{R}\tilde{\rho}(t)\right]\right]\right\} = \\ = \sum_{\alpha,\beta}\operatorname{Tr}_{\mathrm{R}}\left\{b_{\alpha}(t)b_{\beta}(t')\rho_{R}\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}\tilde{\rho}(t) - b_{\alpha}(t)\rho_{R}b_{\beta}(t')\sigma_{\alpha}\tilde{\rho}(t)\sigma_{\beta}\right\} + \\ - \sum_{\alpha,\beta}\operatorname{Tr}_{\mathrm{R}}\left\{b_{\beta}(t')\rho_{R}b_{\alpha}(t)\sigma_{\beta}\tilde{\rho}(t)\sigma_{\alpha} - \rho_{R}b_{\beta}(t')b_{\alpha}(t)\tilde{\rho}(t)\sigma_{\beta}\sigma_{\alpha}\right\}.$$
(C.24)

Isolando os traços sobre os operadores $\mathbf{b}(t)$ escrevemos então

$$\operatorname{Tr}_{\mathrm{R}} \left\{ \left[\tilde{H}_{I}, \left[\tilde{H}_{I}(t'), \rho_{R} \rho_{s}(t) \right] \right] \right\} = \\ = \sum_{\alpha,\beta} \operatorname{Tr}_{\mathrm{R}} \left[b_{\alpha}(t) b_{\beta}(t') \rho_{R} \right] \sigma_{\alpha} \sigma_{\beta} \tilde{\rho}(t) - \sum_{\alpha,\beta} \operatorname{Tr}_{\mathrm{R}} \left[b_{\alpha}(t) \rho_{R} b_{\beta}(t') \right] \sigma_{\alpha} \tilde{\rho}(t) \sigma_{\beta} + \\ - \sum_{\alpha,\beta} \operatorname{Tr}_{\mathrm{R}} \left[b_{\beta}(t') \rho_{R} b_{\alpha}(t) \right] \sigma_{\beta} \tilde{\rho}(t) \sigma_{\alpha} + \sum_{\alpha,\beta} \operatorname{Tr}_{\mathrm{R}} \left[\rho_{R} b_{\beta}(t') b_{\alpha}(t) \right] \tilde{\rho}(t) \sigma_{\beta} \sigma_{\alpha}. \quad (C.25)$$

Se utilizarmos a propriedade do traço, onde este é preservado por uma rotação cíclica dos operadores, temos que

$$\operatorname{Tr}_{\mathrm{R}}[b_{\alpha}(t)b_{\beta}(t')\rho_{R}] = \operatorname{Tr}_{\mathrm{R}}[b_{\beta}(t')\rho_{R}b_{\alpha}(t)],$$

$$\operatorname{Tr}_{\mathrm{R}}[b_{\alpha}(t)\rho_{R}b_{\beta}(t')] = \operatorname{Tr}_{\mathrm{R}}[\rho_{R}b_{\beta}(t')b_{\alpha}(t)],$$
 (C.26)

e além disso, observando que $\mathbf{b}(t)$ é Hermitiano, seu complexo conjugado pode ser escrito como,

$$\left(\operatorname{Tr}_{\mathrm{R}}[b_{\alpha}(t)b_{\beta}(t')\rho_{R}] \right)^{*} = Tr_{R}[b_{\beta}(t')b_{\alpha}(t)\rho_{R}], \left(Tr_{R}[b_{\alpha}(t)\rho_{R}b_{\beta}(t')] \right)^{*} = \operatorname{Tr}_{\mathrm{R}}[\rho_{R}b_{\alpha}(t)b_{\beta}(t')].$$
(C.27)

Desta forma, utilizando as propriedades das operações do traço dadas acima, e definindo

$$D_{\alpha\beta}(t) = \int_0^t dt' \operatorname{Tr}_R \left[b_\alpha(t) \rho_R b_\beta(t') \right], \qquad (C.28)$$

podemos, assim, escrever a equação mestra de uma forma mais clara e compacta:

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta=1}^{3} \left\{ D_{\alpha\beta}(t) \left[\sigma_{\alpha}, \tilde{\rho}(t)\sigma_{\beta} \right] + D_{\alpha\beta}^{*}(t) \left[\sigma_{\beta}\tilde{\rho}(t), \sigma_{\alpha} \right] \right\}.$$
(C.29)

Vale ressaltar que esta equação mestra, apesar de ser uma aproximação de segunda ordem no tempo, é não-Markoviana, visto que carrega uma dependência explícita do tempo local t. No apêndice seguinte mostramos o cálculo das correlações do reservatório térmico contidas em $D_{\alpha\beta}(t)$.

C.4 Correlação do banho térmico

Neste parte da tese, calculamos as correlações do banho térmico que são dados pela Eq. (5.15) do Cap. (5.1). Para tal, começamos a analisar o termo dado por

$$\operatorname{Tr}_{R}\left[b_{\alpha}(t)\rho_{R}b_{\beta}(t')\right],\tag{C.30}$$

onde $\mathbf{b}(t)$ é dado por $\mathbf{b}(t) = \tilde{B}(t)\mathbf{\Lambda}(t) + \tilde{B}^{\dagger}(t)\mathbf{\Lambda}^{*}(t)$. Assim, substituindo esta igualdade na equação acima, obtemos:

$$\operatorname{Tr}_{R}\left\{b_{\alpha}(t)\rho_{R}b_{\beta}(t')\right\} = = \operatorname{Tr}_{R}\left\{\left[\tilde{B}(t)\Lambda_{\alpha}(t) + \tilde{B}^{\dagger}(t)\Lambda_{\alpha}^{*}(t)\right]\rho_{R}\left[\tilde{B}(t')\Lambda_{\beta}(t') + \tilde{B}^{\dagger}(t')\Lambda_{\beta}^{*}(t')\right]\right\}, \quad (C.31)$$

$$\operatorname{Tr}_{R}\left\{b_{\alpha}(t)\rho_{R}b_{\beta}(t')\right\} = = \operatorname{Tr}_{R}\left\{\tilde{B}(t)\rho_{R}\tilde{B}(t')\right\}\Lambda_{\alpha}(t)\Lambda_{\beta}(t') + \operatorname{Tr}_{R}\left\{\tilde{B}(t)\rho_{R}\tilde{B}^{\dagger}(t')\right\}\Lambda_{\alpha}(t)\Lambda_{\beta}^{*}(t') + + \operatorname{Tr}_{R}\left\{\tilde{B}^{\dagger}(t)\rho_{R}\tilde{B}(t')\right\}\Lambda_{\alpha}^{*}(t)\Lambda_{\beta}(t') + \operatorname{Tr}_{R}\left\{\tilde{B}^{\dagger}(t)\rho_{R}\tilde{B}^{\dagger}(t')\right\}\Lambda_{\alpha}^{*}(t)\Lambda_{\beta}^{*}(t'). (C.32)$$

Da equação acima, visto que estamos considerando como reservatório térmico um banho de osciladores harmônicos, temos

$$\operatorname{Tr}_{R}\left\{\tilde{B}(t)\rho_{R}\tilde{B}(t')\right\} = \operatorname{Tr}_{R}\left\{\tilde{B}^{\dagger}(t)\tilde{B}^{\dagger}(t')\rho_{R}\right\} = 0, \qquad (C.33)$$

de forma que, definindo

$$\mathcal{G}_{1}(t,t') = \operatorname{Tr}_{R}\{\tilde{B}(t)\rho_{R}\tilde{B}^{\dagger}(t')\},\$$

$$\mathcal{G}_{2}(t,t') = \operatorname{Tr}_{R}\{\tilde{B}^{\dagger}(t)\rho_{R}\tilde{B}(t')\},\qquad(C.34)$$

obtemos,

$$\operatorname{Tr}_{R}\left\{b_{\alpha}(t)\rho_{R}b_{\beta}(t')\right\} = \mathcal{G}_{1}(t,t')\Lambda_{\alpha}(t)\Lambda_{\beta}^{*}(t') + \mathcal{G}_{2}(t,t')\Lambda_{\alpha}^{*}(t)\Lambda_{\beta}(t')$$
(C.35)

Começemos calculando, de forma contrária, $\mathcal{G}_2(t, t')$. Visto que o ensemble é canônico, a situação de equilíbrio térmico é dada por

$$\rho_R = e^{-\beta H_R} / Z_B \tag{C.36}$$

onde $\beta = 1/KT$, sendo T a temperatura do reservatório, K a constante de Boltzman e $Z_B = Tr_R \{e^{-\beta H_R}\}$ é a função de partição.

Primeiramente, calculemos Z_B . Escolhemos uma base para os autovetores do banho térmico que é dada pelo conjunto $\{|n_1\rangle, |n_2\rangle, ..., |n_k\rangle\}$. Desta forma,

$$Z_B = \sum_{n_1, n_2, \dots} \langle n_1, \dots, n_k | e^{-\beta H_R} | n_1, \dots, n_k \rangle = \sum_{n_1, n_2, \dots} \langle n_1, \dots, n_k | e^{-\beta \hbar \sum_k \omega_k a_k^{\dagger} a_k} | n_1, \dots, n_k \rangle,$$
(C.37)

visto que $H_R = \hbar \sum_k \omega_k a_k^{\dagger} a_k$. Aplicando H_R nos elementos da base, temos

$$H_R |n_1, \dots, n_k\rangle = \sum_k \hbar \omega_k a_k^{\dagger} a_k |n_1, \dots, n_k\rangle = \sum_k \hbar \omega_k n_k |n_1, \dots, n_k\rangle, \qquad (C.38)$$

de forma que Z_B fica dado por:

$$Z_B = \sum_{n_1, n_2, \dots} e^{-\beta \hbar \sum_k \omega_k n_k}.$$
 (C.39)

Visto que os operadores que atuam em diferentes modos k comutam, podemos escrever Z_B em termos de um produtório de operadores, ou seja

$$Z_B = \sum_{n_1, n_2, \dots} \prod_k e^{-\beta \hbar \omega_k n_k}.$$
 (C.40)

Desta forma podemos resolver a soma em n,

$$\sum_{n_1, n_2, \dots} \underbrace{e^{-\beta \hbar \omega_k n_k}}_{\equiv f^n < 1} = \sum_{n=0}^{\infty} f^n = 1 + f + f^2 + \dots$$
(C.41)

$$(1-f)\sum_{n=0}^{\infty} f^n = (1-f)(1+f+f^2+...) = 1$$
(C.42)

logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^n = \frac{1}{1-f},$$
(C.43)

de forma que

$$\sum_{n_1, n_2, \dots} e^{-\beta\hbar\omega_k n_k} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_k}} \tag{C.44}$$

e a função de partição é então escrita:

$$Z = \prod_{k} \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_k}}.$$
(C.45)

Vejamos agora o operador $\tilde{B}(t)$,

$$\tilde{B}(t) = \mathcal{U}_{R}^{\dagger}(t)B\mathcal{U}_{R}(t) = e^{i\sum_{k_{1}}\omega_{k_{1}}a_{k_{1}}^{\dagger}a_{k_{1}}t} \left(\sum_{k}g_{k}a_{k}\right)e^{-i\sum_{k_{2}}\omega_{k_{2}}a_{k_{2}}^{\dagger}a_{k_{2}}t}.$$
(C.46)

Visto que os operadores de criação e destruição comutam para diferentes k, podemos escrever $\tilde{B}(t)$ em termos do produtório,

$$\tilde{B}(t) = \hbar \sum_{k} \left(\prod_{k_1} e^{i\omega_{k_1}a_{k_1}^{\dagger}a_{k_1}t} (g_k a_k) \prod_{k_2} e^{-i\omega_{k_2}a_{k_2}^{\dagger}a_{k_2}t} \right),$$
(C.47)

de forma que somente não se cancelam os operadores pertencente a somatória em k. Assim,

$$\tilde{B}(t) = \hbar \sum_{k} \left(e^{i\omega_k a_k^{\dagger} a_k t} g_k a_k e^{-i\omega_k a_k^{\dagger} a_k t} \right).$$
(C.48)

Definimos um operador v(t) tal que

$$v(t) = e^{i\omega_k a_k^{\dagger} a_k t} g_k a_k e^{-i\omega_k a_k^{\dagger} a_k t}, \qquad (C.49)$$

$$\frac{dv}{dt}(t) = i\omega_k g_k \left(e^{i\omega_k a_k^{\dagger} a_k t} (a_k^{\dagger} a_k a_k) e^{-i\omega_k a_k^{\dagger} a_k t} \right) - i\omega_k g_k \left(e^{i\omega_k a_k^{\dagger} a_k t} (a_k a_k^{\dagger} a_k) e^{-i\omega_k a_k^{\dagger} a_k t} \right), \quad (C.50)$$

$$\frac{dv}{dt}(t) = i\omega_k g_k \left(e^{i\omega_k a_k^{\dagger} a_k t} \underbrace{[a_k^{\dagger} a_k, a_k]}_{-a_k} e^{-i\omega_k a_k^{\dagger} a_k t} \right) = -i\omega_k v(t), \quad (C.51)$$

o que implica que

$$v(t) = v(0)e^{-i\omega_k t}.$$
(C.52)

Substituindo v(0),

$$v(t) = g_k a_k e^{-i\omega_k t},\tag{C.53}$$

calculamos finalmente $\tilde{B}(t),$

$$\tilde{B}(t) = \hbar \sum_{k} g_k a_k e^{-i\omega_k t}.$$
(C.54)

Voltando a $\mathcal{G}_2(t, t')$ temos,

$$\mathcal{G}_2(t,t') = \operatorname{Tr}_R\{\tilde{B}^{\dagger}(t)\rho_R\tilde{B}(t')\} = \sum_{n_1,\dots} \langle n_1,\dots| \ \tilde{B}^{\dagger}(t)\rho_R\tilde{B}(t') | n_1,\dots\rangle, \qquad (C.55)$$

de forma que utilizando a propriedade cíclica do traço podemos escrever,

$$\mathcal{G}_{2}(t,t') = \sum_{n_{1},\dots} \sum_{k_{1},k_{2}} \langle n_{1},\dots | \hbar^{2} g_{k_{1}} g_{k_{2}}^{*} e^{-i\omega_{k_{1}}t'} e^{i\omega_{k_{2}}t} a_{k_{1}} a_{k_{2}}^{\dagger} \frac{e^{-\beta\hbar\sum_{k}\omega_{k}n_{k}}}{Z} | n_{1},\dots \rangle .$$
(C.56)

Devido ao traço, necessariamente $k_1 = k_2$, pois caso contrário o resultado é nulo. Assim,

$$\mathcal{G}_{2}(t,t') = \sum_{n_{1},\dots} \sum_{k_{1}} \langle n_{1},\dots | \hbar^{2} | g_{k_{1}} |^{2} e^{i\omega_{k_{1}}(t-t')} \underbrace{a_{k_{1}}a_{k_{1}}^{\dagger}}_{1+n_{k_{1}}} \frac{e^{-\beta\hbar\sum_{k}\omega_{k}n_{k}}}{Z} | n_{1},\dots \rangle, \qquad (C.57)$$

$$\mathcal{G}_2(t,t') = \sum_{k_1} \hbar^2 |g_{k_1}|^2 e^{i\omega_{k_1}(t-t')} \sum_{n_1,\dots} (1+n_{k_1}) \frac{e^{-\beta\hbar\sum_k \omega_k n_k}}{Z}.$$
 (C.58)

Vejamos a somatória em n,

$$\frac{1}{Z}\sum_{n_{1},\dots}(1+n_{k_{1}})e^{-\beta\hbar\sum_{k}\omega_{k}n_{k}} = \frac{1}{Z}\underbrace{\sum_{n_{1},\dots}e^{-\beta\hbar\sum_{k}\omega_{k}n_{k}}}_{Z} + \frac{1}{Z}\sum_{n_{1},\dots}n_{k_{1}}e^{-\beta\hbar\sum_{k}\omega_{k}n_{k}}.$$
 (C.59)

Resolvendo o segundo termo escrevemos,

$$\frac{1}{Z} \sum_{n_1,\dots} n_{k_1} e^{-\beta \hbar \sum_k \omega_k n_k} = \frac{1}{Z} \sum_{n_{k_1}} n_{k_1} e^{-\beta \hbar \omega_{k_1} n_{k_1}} \underbrace{\sum_{n_1,\dots\neq n_{k_1}} e^{-\beta \hbar \sum_{k\neq k_1} \omega_k n_k}}_{Z(1-e^{-\beta \omega_{k_1}})}, \quad (C.60)$$

de forma que

$$\frac{1}{Z} \sum_{n_1,\dots} (1+n_{k_1}) e^{-\beta\hbar\sum_k \omega_k n_k} = 1 + (1-e^{-\beta\hbar\omega_{k_1}}) \sum_{n_{k_1}} n_{k_1} e^{-\beta\hbar\omega_{k_1} n_{k_1}}.$$
 (C.61)

A somatória em n_{k_1} também pode ser simplificada,

$$\sum_{n_{k_1}} n_{k_1} e^{-\beta\hbar\omega_{k_1}n_{k_1}} = -\frac{1}{\hbar\omega_{k_1}} \frac{\partial}{\partial\beta} \sum_{n_{k_1}} e^{-\beta\hbar\omega_{k_1}n_{k_1}}$$
(C.62)

substituindo a série, conforme a Eq. (C.43),

$$\sum_{n_{k_1}} n_{k_1} e^{-\beta\hbar\omega_{k_1}n_{k_1}} = -\frac{1}{\hbar\omega_{k_1}} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_{k_1}}}\right) = \frac{e^{-\beta\hbar\omega_{k_1}}}{(1 - e^{-\beta\hbar\omega_{k_1}})^2}, \quad (C.63)$$

finalmente,

$$\frac{1}{Z} \sum_{n_1,\dots} (1+n_{k_1}) e^{-\beta\hbar\sum_k \omega_k n_k} = 1 + (1-e^{-\beta\hbar\omega_{k_1}}) \frac{e^{-\beta\hbar\omega_{k_1}}}{(1-e^{-\beta\hbar\omega_{k_1}})^2} = 1 + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_{k_1}} - 1}.$$
 (C.64)

Substituindo na Eq. (C.58), calculamos então $\mathcal{G}_1(t,t')$:

$$\mathcal{G}_2(t,t') = \sum_k \hbar^2 |g_k|^2 e^{i\omega_k(t-t')} \left(1+n_k\right),$$
(C.65)

onde n_k é o número de ocupação médio do modo k do reservatório:

$$n_k = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_k} - 1}.$$
 (C.66)

O cálculo de $\mathcal{G}_1(t,t')$ pode ser feito de forma análoga ao cálculo de $\mathcal{G}_2(t,t')$. Para este caso, o resultado é similar a Eq. (C.57), com uma diferença nos operadores $a_{k_1}a_{k_1}^{\dagger}$ que são substituídos por $a_{k_1}^{\dagger}a_{k_1} = n_{k_1}$, além do sinal da exponencial. Assim,

$$\mathcal{G}_{1}(t,t') = \sum_{n_{1},\dots} \sum_{k_{1}} \langle n_{1},\dots | \hbar^{2} | g_{k_{1}} |^{2} e^{-i\omega_{k_{1}}(t-t')} \underbrace{a_{k_{1}}^{\dagger} a_{k_{1}}}_{n_{k_{1}}} \frac{e^{-\beta \hbar \sum_{k} \omega_{k} n_{k}}}{Z} | n_{1},\dots \rangle , \qquad (C.67)$$

$$\mathcal{G}_{1}(t,t') = \sum_{k_{1}} \hbar^{2} |g_{k_{1}}|^{2} n_{k_{1}} e^{-i\omega_{k_{1}}(t-t')} \underbrace{\sum_{n_{1},\dots} \frac{e^{-\beta\hbar\sum_{k}\omega_{k}n_{k}}}{Z}}_{1}, \quad (C.68)$$

implicando assim,

$$\mathcal{G}_1(t,t') = \sum_k \hbar^2 |g_k|^2 n_k e^{-i\omega_k(t-t')}.$$
(C.69)

Neste ponto é importante ressaltar alguns aspectos das correlações do banho térmico. O termo dado por $\mathcal{G}_2(t,t')$ é igual a $\mathcal{G}_1^*(t,t')$ somado de $\sum_k \hbar^2 |g_k|^2 e^{i\omega_k(t-t')}$, onde este termo adicional carrega as informações pertinentes ao vácuo eletromagnético. Assim, é fácil observarmos que para T = 0K temos que $\mathcal{G}_1(t,t') = 0$ implicando que a correlação dos reservatórios é dado somente pela contribuição do vácuo.

C.5 Correlação do banho térmico na versão integral

Nesta seção da apêndice mostraremos em detalhes, na versão integral, os cálculos da função correlação dos banhos térmicos $\mathcal{G}_1(t)$ e $\mathcal{G}_2(t)$ descritos acima. Para isto, supomos que o número de modos normais do reservatório por unidade de freqüência se torna infinito, de forma que definimos a densidade espectral como,

$$J(\omega) = \sum_{k} |g_k|^2 \,\delta(\omega - \omega_k),\tag{C.70}$$

com $\omega \in [0, +\infty)$. Assim, interpretamos a soma das Eqs. (5.17) e (5.18) como integrais sobre ω :

$$\mathcal{I}_{1}(t) = \int_{0}^{\infty} d\omega J(\omega) \exp(i\omega t) / [\exp(\beta\omega) - 1],$$

$$\mathcal{I}_{2}(t) = \int_{0}^{\infty} d\omega J(\omega) \exp(i\omega t),$$
 (C.71)

onde definimos uma função para a densidade espectral do reservatório tal que

$$J(\omega) = \eta \frac{\omega^s}{\omega_c^{s-1}} \exp(-\omega/\omega_c), \qquad (C.72)$$

onde η é uma constante adimensional proporcional ao tamanho do acoplamento do sistema com o reservatório, s define a densidade espectral como sendo ôhmica (s = 1) ou super ôhmica (s > 1) e ω_c é a freqüência de corte que delimita a freqüência máxima do ambiente que interage com o sistema, sendo este transparente para valores superiores. Se compararmos este resultado com as Eqs. $\mathcal{G}_1(t)$ e $\mathcal{G}_2(t)$ calculadas no apêndice anterior, podemos calcular suas versões integrais. No caso, teremos que:

$$\mathcal{G}_{1}(t,t') = \mathcal{I}_{1}^{*}(t-t')$$

$$\mathcal{G}_{2}(t,t') = \mathcal{I}_{1}(t-t') + \mathcal{I}_{2}(t-t').$$
 (C.73)

Primeiramente, analisamos o termo $1/[\exp(\beta\omega) - 1]$ que aparece na Eq. (C.71):

$$\frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} = \left(\frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}\right) \left(\frac{e^{-\beta\omega}}{e^{-\beta\omega}}\right) = e^{-\beta\omega} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}}\right).$$
(C.74)

Observando que (Eq. (C.43))

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^n = \frac{1}{1-f},$$

para $f^n < 1$, escrevemos então

$$e^{-\beta\omega}\left(\frac{1}{1-e^{-\beta\omega}}\right) = e^{-\beta\omega}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta\omega(n+1)},$$
 (C.75)

de forma que

$$\frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega(n+1)}.$$
(C.76)

Assim, substituindo a igualdade acima e a densidade espectral em $\mathcal{G}_1(t)$ calculamos:

$$\mathcal{G}_1(t) = \int_0^\infty d\omega \left(\eta \frac{\omega^s}{\omega_c^{s-1}} \exp(-\omega/\omega_c) \right) \exp(i\omega t) \sum_{n=0}^\infty \exp(-\beta\omega(n+1))$$

Isolando ω e incluindo uma variável auxiliar α que posteriormente é igualada a unidade,

$$\mathcal{G}_1(t) = \frac{\eta}{\omega_c^{s-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty d\omega \, \omega^s \exp\left\{-\alpha\omega \left[1/\omega_c - it + \beta(n+1)\right]\right\}.$$

Escrevendo em função da s-ésima derivada de α

$$\mathcal{G}_{1}(t) = \frac{\eta}{\omega_{c}^{s-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[1/\omega_{c} + it + \beta(n+1) \right]^{-s} \times (-1)^{s} \frac{d^{s}}{d\alpha^{s}} \underbrace{\int_{0}^{\infty} d\omega \exp\left\{ -\alpha\omega\left[1/\omega_{c} - it + \beta(n+1)\right] \right\}}_{\alpha^{-1}/\left[1/\omega_{c} - it + \beta(n+1)\right]}.$$

A derivada é resolvida diretamente,

$$\frac{d^s}{d\alpha^s} \left(\frac{\alpha^{-1}}{[1/\omega_c - it + \beta(n+1)]} \right) = \frac{(-1)^s s! \alpha^{(-s-1)}}{[1/\omega_c - it + \beta(n+1)]},$$
(C.77)

de forma que substituindo em $\mathcal{G}_1(t)$, considerando $\alpha = 1$ obtemos,

$$\mathcal{G}_1(t) = \frac{\eta}{\omega_c^{s-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s!}{[1/\omega_c - it + \beta(n+1)]^{(s+1)}},$$
(C.78)

e para simplificar isolamos ω_c do dividendo

$$\mathcal{G}_{1}(t) = \frac{\eta}{\omega_{c}^{s-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s! \omega_{c}^{s+1}}{[1 - i\omega_{c}t + \beta\omega_{c}(n+1)]^{(s+1)}}$$
$$= \eta \omega_{c}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s!}{[1 - i\omega_{c}t + \beta\omega_{c}(n+1)]^{(s+1)}}.$$
(C.79)

Procedendo de forma análoga à solução exposta acima, o termo $\mathcal{G}_2(t)$ é escrito como

$$\mathcal{G}_{2}(t) = \frac{\eta}{\omega_{c}^{s-1}} \frac{1}{\left[1/\omega_{c} - it\right]^{s}} (-1)^{s} \frac{d^{s}}{d\alpha^{s}} \underbrace{\int_{0}^{\infty} d\omega \, \exp[-\alpha\omega(1/\omega_{c} - it)]}_{\alpha^{-1}/[1/\omega_{c} - it]}, \quad (C.80)$$

onde a derivada é resolvida diretamente,

$$\frac{d^s}{d\alpha^s} \left(\frac{\alpha^{-1}}{[1/\omega_c - it]} \right) = \frac{(-1)^s s! \alpha^{(-s-1)}}{[1/\omega_c - it]},$$
(C.81)

de forma que substituindo em $\mathcal{G}_2(t)$, considerando $\alpha = 1$ obtemos,

$$\mathcal{G}_{2}(t) = \eta \omega_{c}^{2} \frac{s!}{[1 - i\omega_{c}t]^{(s+1)}}.$$
(C.82)

Com estes dois resultados podemos facilmente calcular as correlações dos banhos térmicos que são dadas por combinações lineares de $\mathcal{G}_1(t)$, $\mathcal{G}_2(t)$ e seus respectivos complexo conjugados.

C.6 Operador evolução para o caso de dois campos

Um operador evolução temporal geral para um sistema de um qubit pode ser escrito como:

$$\mathcal{U}(t) = I \cos\left[\alpha(t)\right] - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}(t) \sin\left[\alpha(t)\right], \qquad (C.83)$$

ou se quisermos incluir outras variáveis, como por exemplo um número maior de campos, podemos escrever

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_1(t)\mathcal{U}_2(t)\dots\mathcal{U}_n(t), \qquad (C.84)$$

onde cada \mathcal{U}_i , com i = 1, n, é dado conforme a Eq. (C.83). Abaixo mostramos em detalhes como calculamos cos $[\alpha(t)]$ e $\hat{\mathbf{u}}(t) \sin [\alpha(t)]$ para um caso onde o qubit está sujeito a ação de dois campos externos. A extensão para o caso de três ou mais campos é análoga. Assim,

$$\mathcal{U}_{1}(t)\mathcal{U}_{2}(t) = \left\{ I \cos\left[\alpha_{1}(t)\right] - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{1}(t) \sin\left[\alpha_{1}(t)\right] \right\} \left\{ I \cos\left[\alpha_{2}(t)\right] - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{2}(t) \sin\left[\alpha_{2}(t)\right] \right\},$$
(C.85)

Sendo assim, expandimos de forma que

$$\mathcal{U}_{1}(t)\mathcal{U}_{2}(t) = + I \cos \left[\alpha_{1}(t)\right] \cos \left[\alpha_{2}(t)\right] - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{2}(t) \cos \left[\alpha_{1}(t)\right] \sin \left[\alpha_{2}(t)\right] - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{1}(t) \sin \left[\alpha_{1}(t)\right] \cos \left[\alpha_{2}(t)\right] - \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{1}(t)\right] \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{2}(t)\right] \sin \left[\alpha_{1}(t)\right] \sin \left[\alpha_{2}(t)\right].$$
(C.86)

Observando que,

$$\left\{ \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}_1(t) \right] \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}_2(t) \right] \right\} = \left\{ i \left[\hat{\mathbf{u}}_1(t) \times \hat{\mathbf{u}}_2(t) \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} + \hat{\mathbf{u}}_1(t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_2(t) \right\}$$
(C.87)

finalmente,

$$\mathcal{U}(t) = I \left\{ \cos \left[\alpha_{1}(t)\right] \cos \left[\alpha_{2}(t)\right] - \hat{\mathbf{u}}_{1}(t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_{2}(t) \sin \left[\alpha_{1}(t)\right] \sin \left[\alpha_{2}(t)\right] \right\} - i \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \left\{ \hat{\mathbf{u}}_{2}(t) \cos \left[\alpha_{1}(t)\right] \sin \left[\alpha_{2}(t)\right] + \hat{\mathbf{u}}_{1}(t) \sin \left[\alpha_{1}(t)\right] \cos \left[\alpha_{2}(t)\right] \right\} - i \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \left\{ \hat{\mathbf{u}}_{1}(t) \times \hat{\mathbf{u}}_{2}(t) \sin \left[\alpha_{1}(t)\right] \sin \left[\alpha_{2}(t)\right] \right\},$$

de forma que o cosseno e o seno da Eq. $({\rm C.83})$ são escritos como:

$$\cos[\alpha(t)] = + \cos[\alpha_1(t)] \cos[\alpha_2(t)] - \hat{\mathbf{u}}_1(t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_2(t) \sin[\alpha_1(t)] \sin[\alpha_2(t)]$$
(C.88)
$$\hat{\mathbf{u}}(t) \sin[\alpha(t)] = + \hat{\mathbf{u}}_2(t) \cos[\alpha_1(t)] \sin[\alpha_2(t)] + \hat{\mathbf{u}}_1(t) \sin[\alpha_1(t)] \cos[\alpha_2(t)] - \hat{\mathbf{u}}_1(t) \times \hat{\mathbf{u}}_2(t) \sin[\alpha_1(t)] \sin[\alpha_2(t)].$$
(C.89)

D Apêndice do capítulo 6

D.1 Matrizes de rotação

Nesta parte do apêndice nós explicitamos as matrizes de rotação dependentes do tempo correspondente à transformação unitária geral para um qubit,

$$\mathcal{U}(t) = I \cos[\alpha(t)] - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}(t) \sin[\alpha(t)].$$
(D.1)

Assim, como explicito no apêndice (C.2), $\mathcal{U}(t)^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} \mathcal{U}(t) = \boldsymbol{\Lambda}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}$ com

$$\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{\lambda} \cos\left[2\alpha(t)\right] + \left[\mathbf{\lambda} \times \hat{\mathbf{u}}(t)\right] \sin\left[2\alpha(t)\right] + \hat{\mathbf{u}}(t) \left[\hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{\lambda}\right] \left\{1 - \cos\left[2\alpha(t)\right]\right\}, \quad (D.2)$$

de forma que se explicitarmos suas componentes, escrevendo $\Lambda(t) = \Lambda_x \sigma_x + \Lambda_y \sigma_y + \Lambda_z \sigma_z$, temos que

$$\Lambda_{x}(t) = \lambda_{x} \cos \left[2\alpha(t)\right] + \left[\lambda_{y}\hat{u}_{z}(t) - \lambda_{z}\hat{u}_{y}(t)\right] \sin \left[2\alpha(t)\right] + \hat{u}_{x}(t) \left[\hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \boldsymbol{\lambda}\right] \left\{1 - \cos \left[2\alpha(t)\right]\right\}, \Lambda_{y}(t) = \lambda_{y} \cos \left[2\alpha(t)\right] + \left[\lambda_{z}\hat{u}_{x}(t) - \lambda_{x}\hat{u}_{z}(t)\right] \sin \left[2\alpha(t)\right] + \hat{u}_{y}(t) \left[\hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \boldsymbol{\lambda}\right] \left\{1 - \cos \left[2\alpha(t)\right]\right\}, \Lambda_{z}(t) = \lambda_{z} \cos \left[2\alpha(t)\right] + \left[\lambda_{x}\hat{u}_{y}(t) - \lambda_{y}\hat{u}_{x}(t)\right] \sin \left[2\alpha(t)\right] + \hat{u}_{z}(t) \left[\hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \boldsymbol{\lambda}\right] \left\{1 - \cos \left[2\alpha(t)\right]\right\},$$
(D.3)

onde a matriz de rotação é escrita isolando as componentes do vetor erro. Assim, separando cada componente de $\Lambda(t)$ nas suas três componentes obtemos:

$$\Lambda_x(t) = \Lambda_x(\lambda_x, t) + \Lambda_x(\lambda_y, t) + \Lambda_x(\lambda_z, t),$$
(D.4)

com

$$\Lambda_x(\lambda_x, t) = \lambda_x \left(\cos \left[2\alpha(t) \right] + \left| \hat{u}_x(t) \right|^2 \left\{ 1 - \cos \left[2\alpha(t) \right] \right\} \right),$$

$$\Lambda_x(\lambda_y, t) = \lambda_y \left(\hat{u}_z(t) \sin \left[2\alpha(t) \right] + \hat{u}_x \hat{u}_y(t) \left\{ 1 - \cos \left[2\alpha(t) \right] \right\} \right),$$

$$\Lambda_x(\lambda_z, t) = \lambda_z \left(-\hat{u}_y(t) \sin \left[2\alpha(t) \right] + \hat{u}_x \hat{u}_z(t) \left\{ 1 - \cos \left[2\alpha(t) \right] \right\} \right),$$
 (D.5)

$$\Lambda_{y}(\lambda_{x},t) = \lambda_{x} \left(-\hat{u}_{z}(t) \sin\left[2\alpha(t)\right] + \hat{u}_{y}\hat{u}_{x}(t) \left\{1 - \cos\left[2\alpha(t)\right]\right\} \right),$$

$$\Lambda_{y}(\lambda_{y},t) = \lambda_{y} \left(\cos\left[2\alpha(t)\right] + |\hat{u}_{y}(t)|^{2} \left\{1 - \cos\left[2\alpha(t)\right]\right\} \right),$$

$$\Lambda_{y}(\lambda_{z},t) = \lambda_{z} \left(\hat{u}_{x}(t) \sin\left[2\alpha(t)\right] + \hat{u}_{y}\hat{u}_{z}(t) \left\{1 - \cos\left[2\alpha(t)\right]\right\} \right),$$
 (D.6)

$$\Lambda_{z}(\lambda_{x},t) = \lambda_{x} \left(\hat{u}_{y}(t) \sin\left[2\alpha(t)\right] + \hat{u}_{z}\hat{u}_{x}(t) \left\{1 - \cos\left[2\alpha(t)\right]\right\} \right),$$

$$\Lambda_{z}(\lambda_{y},t) = \lambda_{y} \left(-\hat{u}_{x}(t) \sin\left[2\alpha(t)\right] + \hat{u}_{z}\hat{u}_{y}(t) \left\{1 - \cos\left[2\alpha(t)\right]\right\} \right),$$

$$\Lambda_{z}(\lambda_{z},t) = \lambda_{z} \left(\cos\left[2\alpha(t)\right] + |\hat{u}_{z}(t)|^{2} \left\{1 - \cos\left[2\alpha(t)\right]\right\} \right).$$
 (D.7)

No Cap. (5.2) as componentes definidas por $R_{\mu,\nu}(t)$ na Eq. (5.47), são dadas por

$$\Lambda_{\mu}(\lambda_{\nu}, t) \equiv R_{\mu,\nu}(t), \tag{D.8}$$

que, então, na forma matricial pode ser escrito como:

$$R(t) = \begin{pmatrix} \Lambda_x(\lambda_x, t) & \Lambda_x(\lambda_y, t) & \Lambda_x(\lambda_z, t) \\ \Lambda_y(\lambda_x, t) & \Lambda_y(\lambda_y, t) & \Lambda_y(\lambda_z, t) \\ \Lambda_z(\lambda_x, t) & \Lambda_y(\lambda_z, t) & \Lambda_z(\lambda_z, t) \end{pmatrix}.$$
 (D.9)