UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

FÁBIO CAMPOS PODEROSO

Ecossistemas de replicadores: um abordagem via mecânica
estatística de sistemas desordenados

v.1

São Carlos

2007

AUTORIZO REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Poderoso, Fábio Campos

Ecossistemas de replicadores: uma abordagem via mecânica estatística de sistemas desordenados/ Fábio Campos Poderoso; orientador José Fernando Fontanari.

-- São Carlos, 2007.

92 f.

Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Física. Área de concentração: Física Básica) – Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo.

1. Vidro de spin. 2. Método de réplicas. 3. Temperado. I. Título.

FÁBIO CAMPOS PODEROSO

Ecossistemas de replicadores: uma abordagem via mecânica
estatística de sistemas desordenados

Tese apresentada ao Instituto de Física de São
Carlos, Universidade de São Paulo, para
obtenção do título de Doutor em Ciências: Física

Área de Concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. José Fernando Fontanari.

v.1

São Carlos

2007

Ao meu pai, Frederico Poderoso, *in memoriam*.

Agradecimentos

A lista das pessoas com as quais me encontro em débito não é nada pequena. Começo pelo meu pai, Frederico. Sempre duro e exigente, não foram poucos os desentendimentos. Passados três anos do seu falecimento, reconheço o papel decisivo que teve na minha formação como ser humano e no meu carácter.

A figura materna, sem dúvida, desperta em todos nós carinho e ternura. Com a minha mãe, Josenilda, isto não é diferente. Longe do seu convívio, sinto por não cumprir com as minhas obrigações de filho. Agradeço-lhe pelo zelo com que sempre cuidou de mim.

O meu irmão, Fabiano, vem em seguida. Em decorrência de problema de saúde, durante o doutorado, sempre pude contar com o seu carinho e atenção nos momentos mais críticos. Sem o seu apoio seguramente não estaria concluindo este projeto.

Ao Prof. Fontanari, orientador, gostaria de expressar os meus agradecimentos pela paciência e solicitude ao longo de todo o doutorado. Sem dúvida, não conseguiria êxito nesta empreitada sem contar com o seu apoio e pragmatismo.

Ao meu amigo e médico, Dr. Joaquim Filgueiras, agradeço toda assistência durante a minha recuperação em Salvador.

Aos colegas de grupo Daniel, sempre prestativo, Giovano, Daniele, Colato, Leonardo e Anderson (seu Batista) os meus sinceros agradecimentos pelo ambiente sadio e descontraído que é de extrema relevância para um bom desempenho acadêmico.

Não poderia deixar de mencionar a Cris, dona Wladerez, Sílvio, enfim, agradeço a todos os amigos e funcionários do IFSC.

Obrigado à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro. Uma proposta de doutorado sem tal auxílio é muito mais difícil. Para finalizar agradeço aos paulistas pela hospitalidade.

Abstract

In this thesis we use the random replicator model, proposed by Diederich and Oppen [1], to analyse the equilibrium properties of complex ecosystems (formed by a large number of species) in three distinct situations. In the first part of this thesis [2], we investigate the effects of variable interactions upon ecosystem structure, using the generalized replica method, introduced by Penney et al [3,4]. In this formalism we find a new interpretation for the replica number n as the ratio between two characteristic temperatures: the temperature related to the couplings (β') and the temperature associated to the spin variables (β). We approach the problem using mean field methods of statistical mechanics and intensive numerical simulations; in particular we are concerned with the ground state ($\beta \rightarrow +\infty$). We find two distinct regimes, one where cooperation between different species prevails ($\beta' > 0$) and the other in which competition is predominant ($\beta' < 0$). In the first case we have a discontinuous transition to the zero diversity regime and in the other we have the maximum species diversity. In the second part of this thesis [5], we examine the finite temperature implications upon ecosystem structure. Through the Hebb rule we can describe the interactions between different species. With the aid of a Gaussian noise in the stochastic equation, that governs the temporal evolution, we have a way to introduce the finite temperature in the model. We treat analytically the annealed case, in which the species characteristics evolve so fast as its concentrations, as well as the quenched case, in which such characteristics are fixed. We conclude that there is a discontinuous phase transition between a state where competition prevails, implying low diversity, to another state in which cooperation is stronger. At last [6], we analyse the possible consequences of human intervention upon the equilibrium properties of the ecosystem. We assume the competitive exclusion principle to model the couplings between different species, the Hebb rule. We interfere in the community by imposing that a set of characters, previously selected, be present in a well defined fraction of its members. The main result of this study reveals, provided that the intraspecies competition parameter is not too weak, that the effect of such a manipulation leads to the impoverishment of the ecosystem.

Keywords: Spin Glass, Replica Method, Quenched.

Resumo

Nesta tese utilizamos o modelo do replicador aleatório, proposto por Diederich e Oppen [1], para analisar as propriedades de equilíbrio de ecossistemas complexos (formados por um grande número de espécies) em três situações distintas. Na primeira parte desta tese [2], investigamos os efeitos de interações variáveis sobre a estrutura do ecossistema, utilizando o método de réplicas generalizado, introduzido por Penney et al [3,4]. Este formalismo propõe uma nova interpretação para o índice de réplicas n , a saber, como sendo a razão entre duas temperaturas características: a temperatura relacionada aos acoplamentos (β') e a temperatura associada às variáveis de spin (β). Empregando técnicas de campo médio de Mecânica Estatística e também simulações numéricas tratamos, em particular, do estado fundamental ($\beta \rightarrow +\infty$). Encontramos dois regimes distintos, um onde prevalece a cooperação entre as diferentes espécies ($\beta' > 0$) e outro no qual a competição é predominante ($\beta' < 0$). No primeiro caso temos uma transição descontínua para um regime de diversidade nula e no outro temos uma máxima diversidade das espécies. Na segunda parte desta tese [5], estudamos as implicações de uma temperatura finita sobre a estrutura do ecossistema. Utilizamos a regra de Hebb para descrever as interações entre as diferentes espécies. A temperatura surge, no modelo, através de um ruído gaussiano introduzido na equação estocástica que rege a dinâmica do processo. Tratamos analiticamente o caso recozido (*annealed*), no qual as características das espécies evoluem tão rapidamente quanto suas concentrações, e o caso temperado (*quenched*), onde tais características estão fixas. Concluímos que há uma transição de fase descontínua entre um estado onde a competição prevalece, determinando baixa diversidade, para outro estado onde predomina a cooperação. Por fim [6], analisamos as possíveis consequências de uma intervenção humana sobre as propriedades de equilíbrio do ecossistema. Admitimos o princípio da exclusão competitiva para modelar os acoplamentos entre as diferentes espécies, a regra de Hebb. Interferimos na comunidade impondo que um conjunto de caracteres, selecionados previamente, esteja presente em uma fração bem definida dos seus membros. O principal resultado deste estudo revela, desde que o parâmetro de competição entre indivíduos semelhantes não seja muito pequeno, que o efeito de uma tal manipulação conduz a perda da diversidade e, portanto, ao empobrecimento do ecossistema.

Palavras-Chave: Vidro de Spin, Método de Réplicas, Temperado.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Considerações Gerais	1
1.2	Ecologia e Sistemas Desordenados	5
1.3	O Modelo do Replicador Aleatório	8
2	Replicador Aleatório com Interações Variáveis	10
2.1	Método de Réplicas Generalizado	10
2.2	Análise Estatístico Mecânica	14
2.2.1	Simetria de Réplicas	15
2.2.2	Resultados e Discussões	18
2.3	Distribuição de Abundância das Espécies	22
2.4	Distribuição das Interações entre Espécies	24
2.5	Simulações	25
2.6	Análise dos Resultados	28
3	Replicador Aleatório com Temperaturas Finitas	31
3.1	O Modelo	31
3.2	Caso Recozido (<i>Annealed</i>)	34
3.3	Caso Temperado (<i>Quenched</i>)	38
3.3.1	Simetria de Réplicas	39
3.4	Estrutura do Ecossistema	44
4	Controlando a Biodiversidade no Modelo do Replicador Aleatório	47
4.1	O Modelo	47

4.2	Análise Estatístico Mecânica	49
4.3	Parâmetros de Ponto de Sela	52
4.4	Estrutura do Ecossistema	57
5	Conclusões	62
A	Equação de Replicadores	66
B	O Modelo Gaussiano	68
C	Distribuição das Interações	75
D	Interações de Hebb com Temperaturas Finitas	77
E	Hebb com Padrões Condensados	84

Lista de Figuras

- 2.1 Índice de Simpson Q como uma função do parâmetro de competição intra-espécie u no limite em que $\beta \rightarrow +\infty$. As curvas cheias da esquerda para a direita correspondem a $\beta' = 0, 0.1, 0.25, 0.5, 1.0, 2.0$ e 3.0 . A linha tracejada superior é obtida com a condição $\alpha = 1$. A linha tracejada inferior limita os valores de u além dos quais as equações de ponto de sela têm duas soluções. ($\beta' = -\epsilon\tilde{\beta}$). . . 18
- 2.2 Índice de Simpson Q em função do parâmetro de competição entre indivíduos da mesma espécie u , para β infinito. As curvas cheias da esquerda para a direita correspondem a $\beta' = 0, -0.1, -0.25, -0.5, -1.0, -2.0$ e -3.0 . ($\beta' = -\epsilon\tilde{\beta}$). . . . 19
- 2.3 Diagrama de fase no plano (β', u) . As curvas sinalizam o limite de existência de uma solução com parâmetros de ponto de sela finito. 20
- 2.4 Índice de Simpson Q em função do parâmetro de competição entre indivíduos da mesma espécie u , para β finito e igual a 1. As linhas cheias da esquerda para a direita correspondem a $n = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$ e 3.0 . A curva tracejada é a envoltória às curvas anteriores, que é obtida através da condição $n = 1/2\eta^2$ . . . 21
- 2.5 Índice de Simpson Q em função do parâmetro de controle u , para β finito e igual a 1 e n negativo. As curvas da esquerda para a direita em $Q = 5$ correspondem a $n = 0, -0.5, -1.0, -1.5, -2.0, -2.5$ e -3.0 21
- 2.6 Fração de espécies sobreviventes no ecossistema contra o parâmetro de controle u , para valores de β' indicados na figura. ($\beta' = -\epsilon\tilde{\beta}$). 23
- 2.7 Parte finita da distribuição de abundância para $u = 3$, (de cima para baixo em $x = 1$) $\beta' = -6, -4, -2, 0, 1$ e 1.2 . ($\beta' = -\epsilon\tilde{\beta}$). 23
- 2.8 Índice de Simpson Q em função do parâmetro de controle u , para $\beta' = -1$ (linha à esquerda) e $\beta' = +1$ (linha à direita). No resultado analítico foi utilizado simetria de réplicas (linhas cheias). Os círculos abertos são resultados das simulações, para $N = 80$. As barras de erro são menores do que o tamanho do símbolo usado. 26

2.9	Segundo momento reescalado da distribuição das interações M_2 em função de u , para $N = 20$ espécies. As linhas cheias são resultados do cálculo com simetria de réplicas; a curva de cima corresponde a $\beta' = +1.0$ e a de baixo a $\beta' = -1.0$. Os círculos abertos resultam das simulações e as barras de erro aparecem indicadas.	27
2.10	Terceiro momento reescalado da distribuição das interações M_3 como função do parâmetro u , para, de cima para baixo, $\beta' = -1.0, -0.5, +0.5$ e $+1.0$. Nas simulações foram utilizados $N = 20$ ($\circ$), 40 ($\triangle$) e 80 ($\times$) espécies. As barras de erro são menores do que os símbolos usados. As linhas horizontais correspondem a $NM_3 = -3\beta'/2$.	28
2.11	Índice de Simpson Q em função do parâmetro u , para $\beta' = 0$ (linha cheia) e -1 (linha tracejada). Os resultados das simulações para $\beta' = -1$, que correspondem a $N = 20$ ($\circ$), 40 ($\triangle$) e 80 ($\times$) espécies, e para $\beta' = 0$, que estão associados a $N = 20$ ($\bullet$), 40 ($\blacktriangle$) e 80 ($+$) espécies, estão indicados nesta mesma figura.	29
3.1	Índice de Simpson Q para o caso recozido (<i>annealed</i>) com $u = 1$ e T como indicado acima. As linhas terminam em $\alpha = \alpha_c$, onde $Q = 2$. Não existe solução para as equações de ponto de sela para $\alpha > \alpha_c$.	36
3.2	Densidade de probabilidade de que a abundância de uma espécie escolhida ao acaso seja igual a x , no caso recozido (<i>annealed</i>), para $u = 1$, $\alpha = 0.5$ e T como indicado. A linha tracejada é a distribuição exponencial e^{-x} , válida no limite $T \rightarrow \infty$.	36
3.3	Recíproco do índice de Simpson como uma função de α para $u = 1$ e T como indicado na figura. A linha tracejada vertical indica o ponto onde ocorre a transição de fase termodinâmica. Esta transição de fase desaparece para $T < 4.7$.	41
3.4	Susceptibilidade v como uma função de α . Os parâmetros e convenções são os mesmos que os da figura anterior.	41
3.5	Energia livre com simetria de réplicas como função de α para $u = 1$ e $T = 20$. A seta indica o ponto no qual a transição termodinâmica ocorre, ou seja, onde a energia livre de duas soluções distintas das equações de ponto de sela interceptam-se. Este ponto corresponde às linhas verticais tracejadas das figuras anteriores.	43
3.6	Valor crítico α_c no qual a transição de fase termodinâmica descontínua ocorre como uma função de T para valores de u como indicados na figura. As linhas de transição terminam em um ponto crítico final T_e , no qual a descontinuidade desaparece.	43

3.7	Densidade de probabilidade de que a abundância de uma espécie escolhida ao acaso seja x na aproximação de simetria de réplicas para $u = 1$, $\alpha = 0.5$ e T como indicado. A linha tracejada é a distribuição exponencial.	45
3.8	Densidade de probabilidade de que a abundância de uma espécie escolhida ao acaso seja x na aproximação de simetria de réplicas para $u = 1$, $T = 20$ e α como indicado. A linha tracejada é a distribuição exponencial.	45
4.1	Recíproco do índice de Simpson como uma função de m no limite $u \rightarrow +\infty$ para (de cima para baixo) $s = 1, 2, 5$ e 10 , independentemente do valor de α . Neste caso $v = 0$	53
4.2	Recíproco do índice de Simpson como uma função de u para $s = 1.0$, $\alpha = 0.2$ e (de cima para baixo para $u > 0.2$ e de baixo para cima para $u < 0.2$) $m = 0, 0.5, 0.8, 0.9$ e 0.99	54
4.3	Recíproco do índice de Simpson como uma função de u para $s = 5.0$, $\alpha = 0.2$ e (de cima para baixo em $u = 1.0$) $m = 0, 0.5, 0.6$ e 0.8 . A descontinuidade desaparece para $m > 0.54$	55
4.4	Valores de $\alpha \leq 0.5$ abaixo dos quais o parâmetro Q exibe uma descontinuidade em $\alpha = u$ como uma função de m para (de cima para baixo) $s = 2, 3, 5$ e 10 . Para $s = 1$, a descontinuidade está sempre presente.	56
4.5	Fração de espécies extintas como uma função de m no limite $u \rightarrow +\infty$ para (de cima para baixo) $s = 20, 10, 5$ e 2 . Para $sm < 1$ encontramos $C(0) = 0$ e para $m = 1.0$ $C(0) = 1 - 2^{-s}$	58
4.6	Amplitudes nos valores de abundância permitidos no limite $u \rightarrow +\infty$ para $s = 5$, $m = 0.2$ (linhas cheias) e $m = 0.5$ (linhas tracejadas). Em ambos os casos, apenas espécies caracterizadas por $\eta = 1, 3$ e 5 contribuem para a composição do ecossistema.	59
4.7	Fração de espécies extintas como uma função do parâmetro de controle u para $s = 1$, $\alpha = 0.2$ e (de baixo para cima em $u = 1$) $m = 0, 0.4, 0.6, 0.8$ e 0.99	60
4.8	Parte finita da distribuição de abundância para $s = 1$, $\alpha = 0.2$, $u = 0.4$ (de cima para baixo em $x = 1$), $m = 0, 0.4, 0.6, 0.8$ e 0.99	61
4.9	Parte finita da distribuição de abundância para $s = 5$, $\alpha = 0.1$, $u = 0.4$ (de cima para baixo em $x = 1$), $m = 0.3, 0.4, 0.6$ e 0.8	61

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Gerais

A principal motivação para a investigação de modelos teóricos em Ecologia consiste na questão da preservação ambiental. Apesar da, muitas vezes, excessiva simplificação de tais modelos, estes podem se revelar extremamente eficazes. Lande [7], analisando um modelo de Lotka-Volterra, descobriu que a demografia das corujas pintadas do norte não poderia deixar de estar vinculada das mudanças na paisagem relacionada com a extração de madeira. A análise de Lande deu ímpeto aos cientistas do Serviço Florestal Americano para desenvolver modelos espacialmente explícitos, veja [8].

No que se refere à biodiversidade de ecossistemas os modelos teóricos enfatizam a sua grande importância para manutenção da estabilidade, produtividade e redução da susceptibilidade à invasão por espécies exóticas [9]. Nesta tese, estaremos abordando a diversidade sob a perspectiva do modelo do replicador aleatório (veja a seção (1.3)). O nosso estudo indica as circunstâncias que determinam a diversidade, do ecossistema considerado, em função do parâmetro de controle do modelo, ou seja, da competição entre indivíduos semelhantes.

Apenas algumas poucas propriedades podem ser consideradas verdadeiramente estáticas na Natureza. Em Sistemas Desordenados bem como na organização de ecossistemas as

propriedades relevantes ficam caracterizadas por evoluírem em duas escalas de tempo bastante distintas. Em Física de Sistemas Desordenados existem as variáveis recozidas (como os spins), que entram em equilíbrio na escala de tempo do experimento e as variáveis temperadas (as interações), que para todos os efeitos permanecem fixas. Em Ecologia há a escala de tempo evolucionária (relacionada às características das espécies) e a escala ecológica (associada às abundâncias). Uma clara analogia pode ser obtida se percebermos que as características das espécies determinam a magnitude, bem como os sinais, dos acoplamentos entre estas últimas.

A maior parte da Dinâmica Populacional e os modelos de Vidro de Spin têm se concentrado, principalmente, na investigação das propriedades relacionadas às variáveis rápidas. Um maior entendimento destes modelos pode ser obtido se permitirmos que as variáveis lentas também variem, mesmo que de modo adiabático, atingindo o equilíbrio juntamente com as variáveis rápidas.

O formalismo proposto por Penney et al [3, 4] possibilita a investigação da situação intermediária entre o caso temperado, no qual as interações são fixas, e o caso recozido, onde as características das espécies variam na mesma escala de tempo que os spins. Ainda de acordo com este método, conhecido na literatura por método de réplicas generalizado, as variáveis de spin (variáveis rápidas) estão sempre em equilíbrio na escala de tempo dos acoplamentos (variáveis lentas). Neste contexto, emerge uma nova interpretação para o índice de réplicas n , como sendo a razão entre duas temperaturas características: a temperatura do sistemas de interações e a temperatura relacionada aos spins. Uma vantagem deste método é a de permitir a utilização das mesmas ferramentas analíticas que as empregadas para tratar do caso temperado (*quenched*). Sendo o modelo do replicador aleatório definido no regime determinístico ($\beta \rightarrow +\infty$), no segundo capítulo desta tese, estaremos principalmente interessados na situação de temperatura nula de tal modo que βn seja finito.

No modelo do replicador aleatório, as diferentes interações entre as várias espécies que compõem o ecossistema são descritas por variáveis aleatórias e obedecem a uma distribuição de probabilidades gaussiana. Isto prejudica o aparecimento de uma eventual estrutura não aleatória nos acoplamentos entre espécies distintas. Tal estrutura poderia incorporar um comportamento cooperativo, como simbiose e alimentação cruzada, assim como um comportamento competitivo que, possivelmente, resultaria da exploração do mesmo nicho ecológico por distintas espécies. Uma alternativa para esta questão seria admitir que a interação entre espécies distintas seja regulada pelo grau de complementaridade entre as espécies, isto é, pelo número de características que distinguem estas últimas.

Esta abordagem preserva o ingrediente gaussiano do modelo original, enquanto que leva em consideração uma estrutura com motivação biológica.

Desta forma, no capítulo três desta tese, supomos que a interação entre a espécie i e a espécie j obedece a regra de Hebb:

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu, \quad i \neq j. \quad (1.1)$$

O vetor binário $(\xi_i^1, \xi_i^2, \dots, \xi_i^p)$ representa um conjunto de caracteres fenótipos; se a espécie i possui a característica μ então $\xi_i^\mu = +1$, caso contrário $\xi_i^\mu = -1$. Nesta expressão a quantidade μ pode variar de 1 até $p = \alpha N$, onde o parâmetro α é a complexidade das espécies. Para valores suficientemente elevados de N as espécies ficam completamente caracterizadas pelos seus vetores binários. De fato, a probabilidade de que, no ecossistema, duas espécies distintas tenham o mesmo fenótipo é dada por $2^{-\alpha N} N^2$ ($N \gg 1$). Observe que na regra de Hebb está implícito que quanto mais semelhantes forem duas espécies tanto maior será a competição entre ambas pelos recursos do ecossistema, ou seja, maior será o seu acoplamento ($J_{ij} > 0$). Por outro lado, duas espécies com a maior parte de suas características distintas tendem a cooperar ($J_{ij} < 0$). Isto está de acordo com o princípio da exclusão competitiva (ou de Gause) que diz que duas espécies distintas, vivendo juntas, não podem ocupar o mesmo nicho ecológico.

O estudo do modelo do replicador aleatório com interações tipo Hebb no limite de temperatura nula ($\beta \rightarrow +\infty$) permitiu a observação de uma transição de fase descontínua entre um regime cooperativo e outro predominantemente competitivo quando a complexidade α , ou seja, quando a razão entre o número de caracteres p e o número de espécies N tem um valor $\alpha_c < 1/2$ [10, 11]. Este fenômeno, entretanto, pôde ser caracterizado como frágil contra a presença de um ruído estático com intensidade muito baixa ou, dito de modo equivalente, contra a presença de qualquer distorção não linear na regra de Hebb. No terceiro capítulo desta tese testamos a robustez desta transição de fase na presença de um ruído rápido que resulta de considerarmos o modelo do replicador aleatório em uma temperatura finita.

Nenhuma espécie tem provocado tantas mudanças nos ecossistemas do que a espécie humana. O impacto humano nos ecossistemas se faz presente na estabilidade, dinâmica, diversidade, composição, estrutura e no funcionamento das comunidades que compõem o planeta. Os humanos são responsáveis pela exploração da maior parte da superfície da Terra, são determinantes na biogeoquímica global do Carbono e do Nitrogênio [12] e continuamente modificam a paisagem natural. Portanto, não é um exagero afirmar que nenhuma investigação séria em Ecologia possa ser realizada sem levar em consideração a

interferência do homem.

Alguns recentes trabalhos experimentais têm utilizado modelos de ecossistemas sintetizados onde há manipulação de espécies selecionadas para averiguar a controvertida hipótese da redundância [13]. Esta hipótese está relacionada com a relativa importância de substituições funcionais em grupos de espécies e com o declínio da diversidade como fatores determinantes de mudanças no funcionamento de ecossistemas.

Desta maneira, no quarto capítulo desta tese, fazemos um estudo dos efeitos de intervenções humanas sobre as propriedades de equilíbrio do ecossistema utilizando uma vez mais o modelo do replicador aleatório. A intervenção sobre o ecossistema pode ser obtida ao impormos que, no equilíbrio, uma fração definida das espécies componentes exiba um conjunto de características selecionadas previamente.

A seguir, na seção (1.2), discutimos brevemente as relações que existem entre Ecologia e Sistemas Desordenados. Em particular, analisamos como surge o conceito de desordem em um modelo simplificado de vidro de spin e em uma comunidade ecológica. A frustração é uma propriedade dos sistemas que exibem desordem e uma consequência importante de tal propriedade é a não-ergodicidade. Na seção (1.3), apresentamos o modelo do replicador aleatório e as suas motivações ecológicas.

Cada um dos três capítulos seguintes possui uma estrutura semelhante. Inicialmente discutimos o modelo utilizado e a sua motivação. Em seguida, procedemos com a análise estatístico mecânica do problema. Como decorrência da propriedade de automediância da energia livre, no contexto da Física de Sistemas Desordenados, devemos realizar uma média, do logaritmo da função de partição do sistema, sobre a desordem. Isto é feito recorrendo-se ao método de réplicas; adotamos o ansatz de simetria de réplicas. No segundo capítulo, demonstramos que no método de réplicas generalizado podemos utilizar as mesmas técnicas analíticas que as empregadas para tratar a situação onde os acoplamentos estão fixos, ou seja, o caso temperado (*quenched*). No capítulo três, investigamos o caso recozido (*annealed*), onde as características das espécies (escala evolucionária) variam tão rapidamente quanto suas concentrações (escala ecológica), e o caso temperado, onde os acoplamentos estão fixos. No quarto capítulo, o método de réplicas é utilizado para resolver apenas o caso temperado no limite de temperatura nula ($\beta \rightarrow +\infty$). Para compreendermos como as diferentes espécies estão distribuídas no ecossistema, determinamos a sua estrutura utilizando para isto a distribuição cumulativa. Após havermos interpretado e discutido os principais resultados dos três capítulos seguintes, apresentamos, no quinto capítulo, as conclusões gerais do trabalho. Nos apêndices A, B, C, D e E mostramos, em detalhes, a maior parte das deduções matemáticas envolvidas.

Ao empregarmos o formalismo de simetria de réplicas para tratarmos dos problemas propostos nesta tese, não devemos esquecer de fazer uma análise de estabilidade das soluções. Isto é usualmente feito atribuindo-se incrementos aos parâmetros de ponto de sela e considerando os termos de segunda ordem na expansão da energia livre nestes incrementos. Uma análise dos sinais destes termos determinará os critérios de estabilidade da solução. Entretanto, esta análise não será apresentada aqui; para maiores detalhes deste procedimento, no modelo SK, veja [14]. Os resultados destes cálculos para os problemas dos capítulos 2, 3 e 4 podem ser encontrados em [2, 5, 6].

1.2 Ecologia e Sistemas Desordenados

Nos capítulos que seguem estaremos utilizando as ferramentas da Mecânica Estatística de Sistemas Desordenados para investigar as propriedades de equilíbrio de ecossistemas. Portanto, necessitamos esclarecer e discutir as semelhanças existentes entre um sistema desordenado, como um vidro de spin, e uma comunidade ecológica.

Uma propriedade de fundamental importância em sistemas tipo vidro de spin é a desordem. Para ilustrarmos como esta surge, considere uma matriz formada por um elemento metálico não magnético, com um pequeno número de átomos com momento magnético não nulo, distribuídos aleatoriamente pela rede. Isto acontece, por exemplo, se algumas poucas partes de Ferro forem misturadas em 100 partes de Cobre. Os átomos de Ferro formam impurezas substitucionais. Os acoplamentos entre os spins dos átomos de Ferro são mediados pelos elétrons da banda de condução; as interações entre tais spins sendo ferromagnética e antiferromagnética alternadamente. Portanto, o termo desordem está relacionado com este caráter aleatório dos acoplamentos, veja [15].

Para compreendermos uma importante consequência da desordem considere um sistema composto por spins clássicos de Ising e que interagem entre si ferromagneticamente ou antiferromagneticamente. Suponhamos que cada spin seja caracterizado por seu momento magnético que pode apontar para cima ou para baixo. Para simplificarmos a análise admita um sistema formado por apenas três spins. Seu hamiltoniano pode ser escrito:

$$H = - \sum_{i < j} J_{ij} S_i S_j. \quad (1.2)$$

Onde na equação anterior as variáveis de spin podem ter valores ± 1 , conforme seu spin esteja orientado para cima ou para baixo. Considere ainda que a interação entre o pri-

meiro e o segundo spin é ferromagnética, isto é, $J_{12} = +1$. A interação entre o primeiro e o terceiro ente também é ferromagnética, ou seja, $J_{13} = +1$. Já o acoplamento entre o segundo e o terceiro elemento é antiferromagnético, de modo que $J_{23} = -1$. Suponha agora que o primeiro e o segundo momentos magnéticos tenham spins para cima, $S_1 = S_2 = +1$. Sabemos que na ausência de uma perturbação externa o sistema (desde que esteja em equilíbrio térmico com um reservatório) irá percorrer o seu espaço de configuração em busca da menor energia. Nesta condição, observe que se o terceiro momento se alinhar para cima ($S_3 = +1$) este irá minimizar sua energia em relação ao primeiro, mas simultaneamente não irá satisfazer à interação com o segundo spin ($J_{23} = -1$). No caso contrário, se o terceiro spin se orientar para baixo ($S_3 = -1$) haverá correspondência com o segundo, porém, ao mesmo tempo não irá satisfazer à sua interação com o primeiro. Portanto, sob as condições anteriores, o terceiro momento não pode satisfazer a ambas interações simultaneamente. A esta incapacidade do sistema de atender a todos os diferentes acoplamentos entre os seus componentes damos o nome de frustração. Esta propriedade não é comum apenas a sistemas como vidro de spin e ocorre em vários outros campos do conhecimento. Especificamente em Ecologia, a frustração pode ser consequência de cooperação e de competição entre as espécies que compõem a comunidade.

Uma implicação da frustração pode ser apreciada se considerarmos novamente o sistema com três spins descrito acima. Observe que um sistema simples como este possui, devido às diferentes interações entre os momentos, uma degenerescência de sexta ordem, o que determina seis mínimos. O número de mínimos para sistemas maiores (maior número de momentos magnéticos) cresce muito rapidamente. Simulações numéricas revelam que o número de mínimos para um sistema com N spins é da ordem de $e^{\alpha N}$, com $\alpha \approx 0.2$ [16]. Portanto, a frustração determina uma paisagem extremamente rica para a energia do sistema em função da sua configuração. Tal paisagem possui vários vales (mínimos) de múltiplas profundidades. Quanto maior for o número de spins no sistema mais profundos os seus vales e portanto, mais estável quanto à perturbações externas. Para cada realização dos acoplamentos (J_{ij}) temos uma hipersuperfície diferente.

Em um ecossistema real, seja este parte do microcosmo ou composto por animais superiores, seja aquático ou terrestre, as espécies que o compõem podem sofrer interações bióticas ou abióticas. As interações bióticas são determinadas pelas outras espécies ou por indivíduos semelhantes e são divididas em: parasitismo, predação, mutualismo e competição. As interações abióticas ocorrem com o meio ambiente e podem ser decorrentes do clima, de mudanças drásticas na temperatura, etc. Devido à complexidade e às incertezas sobre como as espécies estão efetivamente interagindo entre si no ecossistema,

supomos que tais interações podem ser descritas por variáveis aleatórias, o que implica em desordem. No hamiltoniano (1.2) as diferentes interações implicam em acoplamentos (J_{ij}) com sinais distintos e determinam a frustração. Em particular, uma grande simplificação pode ser obtida se admitirmos ainda que os vários acoplamentos aleatórios entre as diferentes espécies seguem uma distribuição como a distribuição gaussiana. Este último fato permite uma abordagem analítica de um ecossistema formado por um número arbitrariamente grande de espécies.

Outra propriedade de sistemas tipo vidro de spin é a não-ergodicidade. Isto significa que na escala de tempo do experimento o sistema não percorre uma porção representativa do seu espaço de configuração. Portanto, isto indica uma inadequação da Mecânica Estatística convencional para tratar este tipo de problema (não-ergódico). Em Mecânica Estatística de Sistemas Desordenados as grandezas relevantes, no sentido de uma possível comparação com os resultados experimentais, são as que possuem a propriedade de automediância. Se a forma da interação não é muito patológica argumentos de Termodinâmica implicam em que no limite em que N tende para infinito a densidade de energia livre (f) adquire o mesmo valor para cada conjunto dos parâmetros ($J_{i,j}$), propriedade conhecida como de automediância. Para modelos de alcance infinito (veja a seção seguinte) esta propriedade não foi demonstrada rigorosamente. Entretanto, há resultados de cálculos numéricos que se coadunam com a propriedade de automediância. Em particular, torna-se importante a noção da média realizada com acoplamentos fixos, caso conhecido na literatura como temperado (*quenched*). Portanto, para determinar a energia livre do sistema (automediante) devemos calcular a média do logaritmo da função de partição, realizada sobre as interações. Isto é usualmente feito através do método de réplicas:

$$\langle \ln Z \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \langle Z^n \rangle. \quad (1.3)$$

Na expressão anterior, n é o número de cópias idênticas do sistema, o índice de réplicas.

Um outro caso que será abordado no contexto do capítulo três corresponde ao caso recozido (*annealed*). Neste caso, as interações entre as diferentes espécies (J_{ij}) mudam com o tempo tão rapidamente quanto as variáveis de spin, que caracterizam as concentrações das espécies (veja a seção seguinte).

1.3 O Modelo do Replicador Aleatório

Diederich e Oppen, veja [1], introduziram um modelo de replicadores com o propósito de investigar as propriedades de equilíbrio de ecossistemas complexos, isto é, formados por um grande número de espécies. Nesta abordagem os autores utilizaram as ferramentas da Mecânica Estatística de Sistemas Desordenados, mais especificamente, um modelo da área de Vidro de Spin conhecido na literatura como modelo SK [17, 18]. Este modelo trata de um sistema de spins de Ising, ou seja, $S_i = \pm 1$ que estão acoplados através de interações aleatórias distribuídas segundo uma distribuição de probabilidades gaussiana. É válido mencionar que há neste modelo uma conectividade completa, isto é, todos os spins interagem com todos os outros, independentemente de suas eventuais posições numa determinada rede. Em outras palavras, o modelo do replicador aleatório não possui estrutura espacial, ou seja, as espécies estão misturadas dentro do ecossistema. Quanto ao fato de, neste modelo, as interações serem descritas por variáveis aleatórias, esta é uma peculiaridade muito bem-vinda, devido a nossa ignorância sobre como as várias espécies estão efetivamente interagindo entre si em determinado ecossistema. Observe que é esta característica que permite que investiguemos um ecossistema composto por um número arbitrariamente grande de espécies. Uma outra peculiaridade do modelo SK, que introduz uma limitação no modelo análogo proposto por Diederich e Oppen, reside no fato de que as interações entre espécies distintas são simétricas. É uma limitação pois, do ponto de vista biológico, não devemos esperar tal tipo de comportamento.

Desta maneira, no modelo proposto por Diederich e Oppen, às variáveis de spin correspondem às concentrações das espécies descritas pelas variáveis $x_i \in [0, +\infty)$, $i = 1, \dots, N$; onde N é o número de espécies. Por sua vez, os acoplamentos entre as diferentes espécies J_{ij} são distribuídos através de uma gaussiana de média nula e variância $1/N$. A equação que governa a evolução temporal das concentrações das espécies, com os acoplamentos fixos, é descrita por (veja [19–21]):

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(\mathcal{F}_i - \phi), \quad (1.4)$$

onde $\mathcal{F}_i = -\sum_j J_{ij}x_j$ é a adaptabilidade (*fitness*) da espécie i e ϕ é o multiplicador de Lagrange que mantém o vínculo:

$$\sum_i x_i = N \quad (1.5)$$

para todo o tempo. De fato, a equação (1.4) é um conjunto de equações diferenciais aco-

pladas. Note que a equação (1.5), na prática, intensifica a competição entre os diferentes indivíduos pelos recursos do ecossistema. Quando ocorre do acoplamento entre a espécie i e a espécie j ser menor que zero ($J_{ij} < 0$) as espécies cooperam entre si, no caso contrário, quando tal interação é maior do que zero ($J_{ij} > 0$) as espécies competem.

A dinâmica do ecossistema, descrita pelo conjunto de equações (1.4), maximiza o funcional de adaptabilidade (*fitness*) no equilíbrio (veja o apêndice A), que é dado por:

$$\mathcal{F}_{\mathbf{J}}(\{x_i\}) = -\mathcal{H}_{\mathbf{J}}(\{x_i\}) = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} x_i x_j. \quad (1.6)$$

Onde $\mathcal{H}_{\mathbf{J}}(\{x_i\})$ é o hamiltoniano do sistema. E assim pode ser demonstrado que os únicos estados estacionários são pontos fixos [21]. Neste caso, o multiplicador de Lagrange que aparece na equação (1.4), é a adaptabilidade (*fitness*) média do ecossistema, ou seja, $\phi = \frac{1}{N} \sum_i x_i \mathcal{F}_i$. Podemos escrever a função de partição para este sistema que tem a forma:

$$Z_{\mathbf{J}} = \int_0^{+\infty} \prod_i dx_i \delta\left(\sum_{i=1}^N x_i - N\right) \exp(-\beta \mathcal{H}_{\mathbf{J}}(\{x_i\})). \quad (1.7)$$

Na equação anterior β é o inverso da temperatura do sistema, $\beta = 1/T$.

Com o objetivo de limitar o crescimento e a supremacia de uma das espécies, introduzimos o parâmetro de controle u , que descreve a interação entre indivíduos da mesma espécie, ou seja, J_{ii} . Para grandes valores de u as interações aleatórias tornam-se pequenas e um grande número de espécies sobrevive no equilíbrio. No extremo oposto, para u pequeno, apenas algumas espécies sobrevivem.

Capítulo 2

Replicador Aleatório com Interações Variáveis

2.1 Método de Réplicas Generalizado

O problema da dinâmica em várias escalas de tempo é um dos problemas mais estimulantes da atualidade. Dentre as áreas de interesse estão a já tradicional área de vidro de spin e a de redes neurais. Penney, Coolen e Sherrington (veja [3, 4]) introduziram um modelo para investigar o acoplamento entre a dinâmica de spins de Ising e a evolução temporal de suas respectivas interações, inspirados em um processo de redes neurais [3]. Nesta formulação a evolução temporal das variáveis de spin (ditas rápidas) ocorre em uma escala de tempo bastante distinta da que ocorre com as interações (variáveis lentas). Este processo acontece de tal modo que na escala de tempo das interações as variáveis de spin estão sempre em equilíbrio. A distribuição de probabilidades nesta situação ($t \rightarrow +\infty$) tem a forma:

$$\mathcal{P}_{\mathbf{J}}(\{x_i\}) = \frac{1}{Z_{\mathbf{J}}} \delta\left(\sum_i x_i - N\right) \exp(-\beta \mathcal{H}_{\mathbf{J}}(\{x_i\})). \quad (2.1)$$

Onde $\mathcal{H}_{\mathbf{J}}(\{x_i\})$ é o hamiltoniano (1.6) e $Z_{\mathbf{J}}$ é a função de partição (1.7).

Esta abordagem permite que possamos agora verificar os efeitos de acoplamentos variáveis nas propriedades de equilíbrio do ecossistema discutido na seção anterior. A equação que rege a evolução temporal do nosso sistema, dentro do formalismo desenvolvido por Sherrington e seus colaboradores, é descrita por:

$$\tau \frac{d}{dt} J_{ij} = \frac{\epsilon}{N} \langle x_i x_j \rangle_J - \mu J_{ij} + \frac{1}{\sqrt{N}} \eta_{ij}(t), \quad i < j, \quad (2.2)$$

onde $\epsilon = \pm 1$, $\langle \dots \rangle_J$ denota uma média térmica realizada com os acoplamentos do instante em questão usando-se a distribuição (2.1) e η_{ij} é um ruído gaussiano de média nula e correlação:

$$\langle \eta_{ij}(t) \eta_{kl}(t') \rangle = 2\tau \tilde{\beta}^{-1} \delta_{(ij),(kl)} \delta(t - t'). \quad (2.3)$$

Observe que através da última equação foi introduzida a temperatura característica do sistema de interações, $\tilde{\beta}$.

O primeiro termo à direita da equação (2.2) reflete o que dissemos anteriormente a respeito do fato de que na escala de tempo dos acoplamentos as variáveis de spin estão sempre em equilíbrio. Além disto, a lenta dinâmica das interações apenas poderia mesmo depender das correlações entre as concentrações das espécies, $\langle x_1 x_2 \dots x_N \rangle$. Por outro lado, a evolução temporal de J_{ij} só estaria relacionada com $\langle x_i \rangle \langle x_j \rangle$ ou $\langle x_i x_j \rangle$. Sherrington e seus colaboradores optaram pela última expressão devido a razões ligadas a processos neurais, veja [3]. O segundo termo da mesma equação é responsável pela limitação do crescimento da magnitude dos acoplamentos, J_{ij} . Tendo em mente fixar corretamente as dimensões dos termos envolvidos na equação (2.2), foi introduzida a quantidade τ . Nos termos onde aparece, N tem o propósito de evitar um comportamento trivial no limite termodinâmico. Como sabemos, a correlação entre as variáveis de spin é maior ou igual a zero ($\langle x_i x_j \rangle_J \geq 0$). Particularmente, no caso em que $\epsilon = -1$, duas espécies i e j que possuírem as maiores abundâncias irão, a cada ciclo, aumentar a sua cooperação e isto determinará o domínio do ecossistema por estas últimas. O mesmo já não acontece para $\epsilon = +1$. Neste caso, espécies com grandes concentrações tendem a sofrer uma forte competição de seus pares e isto impede o crescimento irrestrito de pequenos grupos de espécies, promovendo a diversidade.

Neste ponto podemos demonstrar de maneira simples, através de uma escolha apropriada de um hamiltoniano efetivo, que a equação (2.2) nada mais é do que a equação de Langevin. Este hamiltoniano tem a forma:

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{J}}(\{x_i\}) = \frac{\epsilon}{\beta} \ln Z_{\mathbf{J}}(\{x_i\}) + \frac{\mu N}{2} \sum_{k < l} J_{kl}^2. \quad (2.4)$$

Observe que a equação (2.2) pode ser reescrita como:

$$N\tau \frac{d}{dt} J_{ij} = -\frac{\partial}{\partial J_{ij}} \tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{J}}(\{x_i\}) + \sqrt{N} \eta_{ij}, \quad i < j. \quad (2.5)$$

Esta relação remete a famosa equação de Langevin que descreve o movimento browniano de uma partícula coloidal suspensa num líquido, veja [22]. Da teoria do movimento browniano sabemos que a distribuição de velocidades de tal partícula, no equilíbrio ($t \rightarrow +\infty$), segue a lei de Maxwell-Boltzmann. No caso aqui considerado, devemos esperar que a distribuição de equilíbrio seja a distribuição de Gibbs com o hamiltoniano dado pela expressão do hamiltoniano efetivo, equação (2.4). Podemos então escrever a função de partição para o sistema de interações:

$$\tilde{Z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i < j} dJ_{ij} \exp(-\tilde{\beta} \tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{J}}(\{x_i\})). \quad (2.6)$$

Substituindo-se agora a expressão do hamiltoniano efetivo (2.4) na equação anterior temos:

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i < j} dJ_{ij} [Z_{\mathbf{J}}(\{x_i\})]^n \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{\beta} N \mu \sum_{i < j} J_{ij}^2\right) \\ &= \left(\frac{2\pi}{\tilde{\beta} N \mu}\right)^{N(N-1)/4} \langle [Z_{\mathbf{J}}(\{x_i\})]^n \rangle. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Onde $n = -\epsilon \tilde{\beta} / \beta$ e a média $\langle \dots \rangle$ é uma média feita sobre os acoplamentos, J_{ij} , com uma distribuição gaussiana de média nula e variância $1/\tilde{\beta} N \mu$. A expressão da energia livre do sistema composto pode ser escrita:

$$-\tilde{\beta} \tilde{F} = \ln \tilde{Z}. \quad (2.8)$$

Recordemos que para calcularmos a energia livre no caso de desordem *quenched* [23–26], isto é, quando as interações estão fixas utilizamos a relação:

$$\langle \ln Z \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \langle Z^n \rangle. \quad (2.9)$$

Nesta expressão n é interpretado como o número de cópias idênticas do sistema, índice de réplicas. A partir destas três últimas equações podemos tirar duas conclusões. Primeiro, para calcularmos a energia livre do sistema global podemos lançar mão do mesmo formalismo utilizado no caso temperado (*quenched*), desde que desprezemos um termo aditivo

trivial de ordem $N^2 \ln N$. Segundo, note que agora n pode ser interpretado como a razão entre duas temperaturas características: a temperatura ligada ao sistema de interações $\tilde{\beta}$ e a temperatura associada às variáveis de spin β .

Terminamos esta seção com uma observação. Para obtermos uma estreita correspondência com o limite temperado (*quenched*) não basta fazermos $\tilde{\beta} = 0$; isto implica que o termo do ruído domina a equação das interações (2.2). Além disto, note que a variância dos acoplamentos depende de $\tilde{\beta}$, veja a equação (2.7). Portanto, para evitarmos esta dificuldade adotamos $\mu = 1/\tilde{\beta}$ [27]. A dependência de $\tilde{Z}$ com $\tilde{\beta}$ acontece apenas através de n . Como o limite relevante da dinâmica de replicadores é $\beta \rightarrow +\infty$, n deve ir para zero de tal modo que $\beta n = -\epsilon\tilde{\beta}$ seja finito.

2.2 Análise Estatístico Mecânica

Sistemas como o descrito pelo hamiltoniano (1.6), onde há um conjunto não especificado de parâmetros (J_{ij}), são ditos sistemas desordenados. No contexto de Sistemas Complexos [24–26], as grandezas relevantes são as que possuem a propriedade de autotomediância. Obedecem a esta propriedade as grandezas que adquirem o mesmo valor para cada realização dos acoplamentos, no limite termodinâmico ($N \rightarrow +\infty$). Assim a energia livre obedece a esta propriedade e devemos, portanto, realizar uma média desta grandeza sobre os acoplamentos (desordem). Para tanto, recorreremos a expressão (2.9) para o cálculo da energia livre. De acordo com o que foi dito e deduzido na seção anterior, devemos primeiramente determinar Z^n e então encontrar $\langle Z^n \rangle$. Para realizar esta média usamos uma distribuição gaussiana de média nula e variância $1/N$. A justificativa para considerar n como real pode ser encontrada em [28]. Utilizando a equação (2.8) e considerando-se apenas termos da ordem de N , deduzimos no apêndice B a seguinte expressão para a energia livre:

$$\begin{aligned} -\tilde{\beta}\tilde{F}/N = & \frac{\beta^2}{2} \sum_{a<b} q_{ab}^2 - \beta \frac{u}{2} \sum_a Q_a + \frac{\beta^2}{4} \sum_a Q_a^2 + \sum_a \hat{R}_a \\ & + \sum_a \hat{Q}_a Q_a + \sum_{a<b} \hat{q}_{ab} q_{ab} + \ln G. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Na expressão acima G é dada por:

$$G = \int_0^{+\infty} \left[\prod_a dx_a \right] \exp \left(- \sum_a \hat{R}_a x_a - \sum_a \hat{Q}_a x_a^2 - \sum_{a<b} \hat{q}_{ab} x_a x_b \right).$$

Nas relações anteriores a e b são índices de réplicas que podem variar de 1 até n . No cálculo da energia livre foi usado o método do ponto de sela, veja [29]. Entre os cinco parâmetros de ponto de sela (q_{ab} , Q_a , $\hat{Q}_a$, $\hat{R}_a$ e $\hat{q}_{ab}$) apenas dois deles possuem uma interpretação física direta, são eles:

$$q_{ab} = \frac{1}{N} \sum_i \langle \langle x_{ia} x_{ib} \rangle_T \rangle \quad a < b, \quad (2.11)$$

$$Q_a = \frac{1}{N} \sum_i \langle \langle x_{ia}^2 \rangle_T \rangle. \quad (2.12)$$

Estas quantidades medem a sobreposição (*overlap*) entre pares de estados estacionários indexados por a e b , e a sobreposição (*overlap*) do estado estacionário a com ele mesmo,

respectivamente. Acima $\langle \dots \rangle_T$ designa uma média térmica feita com a distribuição de probabilidades: $\tilde{P}(J_{ij}) = \exp \left[-\tilde{\beta} \tilde{\mathcal{H}}(\{J_{ij}\}) \right] / \tilde{\mathcal{Z}}$. Os parâmetros $\hat{Q}_a$, $\hat{R}_a$ e $\hat{q}_{ab}$ são apenas multiplicadores de Lagrange.

2.2.1 Simetria de Réplicas

Não é difícil perceber por uma inspeção da equação da energia livre acima que esta é invariante por permutações dos índices de réplicas. Por conseguinte, o primeiro ansatz a ser testado é o que segue: $q_{ab} = q$, $Q_a = Q$, $\hat{R}_a = \hat{R}$, $\hat{Q}_a = \hat{Q}$ e $\hat{q}_{ab} = \hat{q}$. Usando a transformada gaussiana e empregando a função erro complementar podemos, a partir da equação (2.10), deduzir a seguinte expressão, válida no caso de temperaturas finitas (β finito):

$$\begin{aligned} -\tilde{\beta} \tilde{f}/n = & (n-1) \frac{\beta^2}{4} q^2 - \beta \frac{u}{2} Q + \frac{\beta^2}{4} Q^2 + \Delta \sqrt{\hat{q}} + \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right) Q \frac{\hat{q}}{2} - (n-1) q \frac{\hat{q}}{2} \\ & + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4\pi\eta^2}{\hat{q}} \right) + \frac{1}{n} \ln \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \left\{ \frac{\exp(\Xi_z^2)}{2} \text{erfc}(\Xi_z) \right\}^n. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Onde agora:

$$Dz = \frac{dz \exp(-z^2/2)}{(2\pi)^{1/2}}, \quad \Xi_z = \eta(\Delta - z), \quad \eta = \hat{q}^{1/2}/2(\hat{Q} + \hat{q}/2)^{1/2} \quad \text{e} \quad \Delta = \hat{R}/\hat{q}^{1/2}.$$

Na equação acima (2.13) os dois novos parâmetros (Δ e η) foram introduzidos para reduzir a dependência de Ξ_z de três para duas variáveis. Isto facilita enormemente o cálculo numérico.

A solução com simetria de réplicas implica que os dois parâmetros cujas interpretações físicas foram dadas acima, equações (2.11) e (2.12), tornam-se:

$$q = \frac{1}{N} \sum_i \langle \langle x_i \rangle_T^2 \rangle \quad \text{e} \quad (2.14)$$

$$Q = \frac{1}{N} \sum_i \langle \langle x_i^2 \rangle_T \rangle. \quad (2.15)$$

Este último parâmetro quando dividido por N , Q/N , é conhecido na literatura por índice de Simpson [30]. Este índice pode ser interpretado como a probabilidade de encontrarmos, no ecossistema, dois indivíduos que pertencem a mesma espécie. No que segue chamaremos Q e não Q/N de índice de Simpson. Note, de acordo com a equação (2.15) e tendo em

mente o vínculo (1.5), que $Q \gg 1$ indica que apenas algumas poucas espécies dominam o ecossistema, e $Q \approx 1$ revela que existe uma grande diversidade de espécies no ecossistema, cada espécie com concentração próxima de 1.

Para obtermos as equações de ponto de sela neste caso (β finito), basta derivarmos a expressão da energia livre acima (2.13) em relação aos diferentes parâmetros e igualarmos os respectivos resultados a zero. Procedendo desta maneira resultam as seguintes equações estacionárias:

$$q - \frac{\hat{q}}{\beta^2} = 0. \quad (2.16)$$

$$-\beta \frac{u}{2} + \beta^2 \frac{Q}{2} - \left(1 - \frac{1}{2\eta^2}\right) \frac{\hat{q}}{2} = 0. \quad (2.17)$$

$$\frac{\Delta}{2\sqrt{\hat{q}}} - \left(1 - \frac{1}{2\eta^2}\right) \frac{Q}{2} - (n-1) \frac{q}{2} - \frac{1}{2\hat{q}} = 0. \quad (2.18)$$

$$\sqrt{\hat{q}} + \eta \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} Dz H^{n-1}(\Xi_z) H'(\Xi_z)}{\int_{-\infty}^{+\infty} Dz H^n(\Xi_z)} = 0. \quad (2.19)$$

$$-\frac{Q\hat{q}}{2\eta^3} + \frac{1}{\eta} + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} Dz H^{n-1}(\Xi_z) (\Delta - z) H'(\Xi_z)}{\int_{-\infty}^{+\infty} Dz H^n(\Xi_z)} = 0. \quad (2.20)$$

Onde definimos:

$$H(\Xi_z) = \frac{\exp(\Xi_z^2)}{2} \text{erfc}(\Xi_z).$$

Para resolvermos o conjunto de equações (2.16) - (2.20) procedemos da maneira descrita a seguir. Inicialmente tratamos Δ como um parâmetro dado e transformamos u em uma incógnita. Deste modo variando Δ e resolvendo o sistema de equações podemos traçar gráficos de Q contra u , por exemplo. Realizamos o método da bissecção [31] sobre a variável η . Em primeiro lugar, atribuímos valores às variáveis Δ , η e calculamos $\hat{q}$ através da equação (2.19). Para tanto precisamos determinar, nesta mesma equação, as integrais que aparecem no numerador e no denominador. Para integrá-las utilizamos o método de Simpson dividindo o intervalo de integração em 10.000 partes e considerando 10 como infinito [31]; o mesmo se aplica a equação (2.20). Com o auxílio da equação (2.16) determinamos q . Unidos de Δ , η , $\hat{q}$ e q podemos encontrar Q usando a expressão (2.20). Com estes mesmos parâmetros podemos encontrar u , através da relação (2.17), e por fim realizamos a bissecção utilizando a equação (2.18). Todo este procedimento

é feito especificando-se o valor de β , que é fixado. Todo o êxito desta metodologia depende da evolução numérica da quantidade $H(\Xi_z)$, que surge das derivadas da energia livre em relação a Δ e η . No caso em que $\Xi_z > 0$, utilizamos um programa baseado no algoritmo de Chebyshev [32] que retorna a função erro complementar com um erro menor que 1.2×10^{-7} . Para $\Xi_z > 6$, recorremos a expansão assintótica da função erro complementar [29].

No limite em que $\beta \rightarrow +\infty$ (limite de temperatura nula) o funcional de adaptabilidade (*fitness*) (1.6) torna-se, a menos de um sinal, o limite inferior para a energia livre (2.13). Desta maneira devemos calcular as equações de ponto de sela (2.16) - (2.20) no estado fundamental. No apêndice B indicamos como encontrar a energia livre e as respectivas equações de ponto de sela, nesta situação. A energia livre tem a forma:

$$-\epsilon \tilde{f} = Q \left(u - \frac{3}{2}v + \frac{\beta'}{4}Q \right) + \frac{1}{\beta'} \ln \left(\int_{-\infty}^{\Delta} Dz + \phi_0 \right). \quad (2.21)$$

E as equações estacionárias são:

$$(u - v) = Q^{1/2} \frac{\phi_1}{\int_{-\infty}^{\Delta} Dz + \phi_0}. \quad (2.22)$$

$$(u - v)^2 = \frac{\phi_2}{\int_{-\infty}^{\Delta} Dz + \phi_0}. \quad (2.23)$$

$$\Delta = Q^{1/2}(2v - u + \beta'Q). \quad (2.24)$$

Nas equações anteriores temos:

$$\phi_m = \int_{\Delta}^{+\infty} Dz \exp \left[\frac{\alpha}{2}(z - \Delta)^2 \right] (z - \Delta)^m$$

onde: $\alpha = \beta'Q/(u - v)$.

Algumas observações sobre as equações anteriores, (2.21) - (2.24). Foram introduzidos dois novos parâmetros de ordem, v e β' . O primeiro, $v = \beta(Q - q)$, é definido de tal forma que quando $\beta \rightarrow +\infty$ deveremos ter simultaneamente $Q \rightarrow q$ de modo que v seja finito. Por uma inspeção das expressões (2.14) e (2.15) podemos verificar que v é uma medida das flutuações das concentrações das espécies em torno do valor médio; portanto v é uma susceptibilidade. O segundo parâmetro, $\beta' = -\epsilon\tilde{\beta}$, pode ser utilizado para recuperar as expressões da energia livre e das equações estacionárias no caso temperado (*quenched*) [1]; para isto basta fazermos $\beta' = 0$ nas relações (2.21) - (2.24).

2.2.2 Resultados e Discussões

Inicialmente iremos tratar a situação em que $\beta \rightarrow +\infty$, quando a temperatura associada às variáveis de spin tende a zero. Portanto, iremos primeiramente trabalhar com as equações (2.22) - (2.24). Para traçarmos gráficos do índice de Simpson Q em função do parâmetro de competição intra-espécie u , admitimos que Δ é um parâmetro dado e u é então transformado em incógnita. Por conseguinte, variando Δ podemos, resolvendo numericamente as equações de ponto de sela, obter as dependências de Q com u e também com β' ($\beta' = -\epsilon\tilde{\beta}$).

Figura 2.1: Índice de Simpson Q como uma função do parâmetro de competição intra-espécie u no limite em que $\beta \rightarrow +\infty$. As curvas cheias da esquerda para a direita correspondem a $\beta' = 0, 0.1, 0.25, 0.5, 1.0, 2.0$ e 3.0 . A linha tracejada superior é obtida com a condição $\alpha = 1$. A linha tracejada inferior limita os valores de u além dos quais as equações de ponto de sela têm duas soluções. ($\beta' = -\epsilon\tilde{\beta}$).

Na figura (2.1) exibimos gráficos de Q contra u para diversos valores de β' . Podemos perceber por uma inspeção desta gravura que quando $\beta' > 0$ as equações de ponto de sela podem ter zero, uma ou duas soluções para u fixo. A curva tracejada superior é a envoltória às curvas cheias e indica o valor máximo da variável Q nas demais. Acima

desta linha limite as integrais ϕ_m ($m = 0, 1$ e 2) divergem; para obtermos esta última curva basta impormos a condição $\alpha = 1$. A curva tracejada inferior sinaliza os pontos a partir dos quais as equações estacionárias (2.22) - (2.24) admitem duas soluções. Deste modo, esta linha separa uma transição abrupta entre uma situação em que o ecossistema é dominado por algumas poucas espécies ($Q \rightarrow +\infty$) de uma outra em que há uma razoável diversidade (Q é finito). De acordo com a equação (2.15) e o vínculo (1.5), valores elevados do índice de Simpson indicam uma situação em que o ecossistema é dominado por umas poucas espécies e quando esta quantidade se aproxima de um, isto implica em uma grande diversidade. A curva tracejada inferior divide as curvas cheias em dois ramos distintos; o ramo superior sendo instável à flutuações dentro do espaço de simetria de réplicas, veja [2].

Figura 2.2: Índice de Simpson Q em função do parâmetro de competição entre indivíduos da mesma espécie u , para β infinito. As curvas cheias da esquerda para a direita correspondem a $\beta' = 0, -0.1, -0.25, -0.5, -1.0, -2.0$ e -3.0 . ($\beta' = -\epsilon\tilde{\beta}$).

Na figura (2.2) estão indicados os gráficos para $\beta \rightarrow +\infty$ e $\beta' \leq 0$. Observe que para $\beta' < 0$ não há mais envoltória às curvas, ou seja, as mesmas se estendem indefinidamente; isto acontece pois agora $\alpha < 0$ com ϕ_m ($m = 0, 1$ e 2) finitos. Neste caso as equações de ponto de sela podem ter zero ou duas soluções para u fixo. Os resultados para $\beta' < 0$ são qualitativamente similares aos que correspondem a $\beta' > 0$, pois em ambos não há solução para as equações estacionárias (o que implica $Q \rightarrow +\infty$) para u pequeno. Note que no

Figura 2.3: Diagrama de fase no plano (β', u) . As curvas sinalizam o limite de existência de uma solução com parâmetros de ponto de sela finito.

caso temperado (*quenched*) ($\beta' = 0$) apenas para $u = 0$ o índice de Simpson diverge.

Podemos construir um diagrama de fase (β', u) que serve para indicar o valor mínimo de u , com soluções finitas das equações de ponto de sela, em função de β' ; é o que fazemos na gravura (2.3).

Passamos a tratar agora a situação em que β permanece finito, isto compreende as equações de ponto de sela (2.16) - (2.20). Como acontece em relação ao caso do limite de temperatura nula ($\beta \rightarrow +\infty$) aqui também encontramos a dita transição entre um estado com diversidade nula ($Q \rightarrow +\infty$) e um outro com diversidade finita (Q finito), para isto observe as figuras (2.4) e (2.5). Para temperaturas $\beta' > 0$ (ou se preferir, para $n > 0$) é possível traçarmos a envoltória às respectivas curvas, veja a figura (2.4); o mesmo já não acontece para $n < 0$. Estes últimos resultados permitem concluir que a referida transição não tem relação alguma com a temperatura β ; seu surgimento sendo provavelmente devido a temperatura finita associada às interações β' .

Figura 2.4: Índice de Simpson Q em função do parâmetro de competição entre indivíduos da mesma espécie u , para β finito e igual a 1. As linhas cheias da esquerda para a direita correspondem a $n = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$ e 3.0 . A curva tracejada é a envoltória às curvas anteriores, que é obtida através da condição $n = 1/2\eta^2$.

Figura 2.5: Índice de Simpson Q em função do parâmetro de controle u , para β finito e igual a 1 e n negativo. As curvas da esquerda para a direita em $Q = 5$ correspondem a $n = 0, -0.5, -1.0, -1.5, -2.0, -2.5$ e -3.0 .

2.3 Distribuição de Abundância das Espécies

Uma medida comum para adquirirmos informação sobre a estrutura de um dado ecossistema é a distribuição de abundância relativa de espécies na comunidade. Em particular, ecologistas de campo têm observado que muitas espécies de plantas em comunidades isoladas são relativamente raras, enquanto que umas poucas espécies são bastante numerosas [33], resultando em padrões que podem ser bem descritos por uma distribuição geométrica [34].

Para obtermos a distribuição de abundância relativa, partimos da distribuição cumulativa. Esta quantidade, notada por $C(x)$, descreve a probabilidade da variável aleatória x se encontrar no intervalo $[0, x)$. Explicitamente, a distribuição cumulativa é definida através da seguinte relação:

$$C(x) = \int_0^x P(x') dx'. \quad (2.25)$$

Onde $P(x')$ é a densidade de probabilidade da variável aleatória x' . Para obtermos a distribuição cumulativa devemos admitir, antes de mais nada, que todas as concentrações de espécies são igualmente distribuídas, de maneira que podemos adicionar o termo extensivo $h \sum_i \Theta(x - x_i)$ ao hamiltoniano (1.6), $\Theta(x)$ sendo a função de Heaviside. A expressão para $C(x)$ pode ser finalmente encontrada derivando-se a equação da energia livre em relação a h e impondo $h = 0$; veja esta dedução no apêndice B. Deste procedimento resulta:

$$C(x) = 1 - \frac{\int_{\Delta+x(u-v)/Q^{1/2}}^{+\infty} Dz \exp \left[\frac{\alpha}{2} (z - \Delta)^2 \right]}{\int_{-\infty}^{\Delta} Dz + \phi_0}. \quad (2.26)$$

Uma outra quantidade tão importante quanto a anterior é a fração de espécies que sobrevive no ecossistema em equilíbrio: $d = 1 - C(0)$. Também chamada diversidade é definida por:

$$d = \frac{\phi_0}{\int_{-\infty}^{\Delta} Dz + \phi_0}. \quad (2.27)$$

Observe que pelo fato da fração de espécies extintas $C(0)$ ser maior que zero, a distribuição de abundância tem uma função delta em $x = 0$, isto é, $P(x) = C(0)\delta(x) + dC(x)/dx$.

Na figura (2.6) apresentamos os gráficos da diversidade d em função de u para os valores de β' indicados na gravura. Note que há uma forte correlação entre as quantidades $1/Q$ e d , sendo estas duas grandezas medidas da diversidade do ecossistema. No limite de um regime de baixa diversidade ($Q \rightarrow +\infty$) ambas se anulam e no extremo oposto, no caso

Figura 2.6: Fração de espécies sobreviventes no ecossistema contra o parâmetro de controle u , para valores de β' indicados na figura. ($\beta' = -\epsilon\tilde{\beta}$).

Figura 2.7: Parte finita da distribuição de abundância para $u = 3$, (de cima para baixo em $x = 1$) $\beta' = -6, -4, -2, 0, 1$ e 1.2 . ($\beta' = -\epsilon\tilde{\beta}$).

de um ecossistema rico, ambas se aproximam de 1 (no limite de u grande). Observe que esta figura também indica a transição súbita, discutida anteriormente, entre um regime de diversidade nula para outro com diversidade finita; para $\beta' > 0$ e $\beta' < 0$. Gráficos da parte finita das distribuições de abundância em função da concentração x , para valores de $\beta' = -6, -4, -2, 0, 1$ e 1.2 e em $u = 3.0$, são exibidos na figura (2.7). Esta quantidade mede a densidade de probabilidade de encontrarmos uma dada espécie com concentração x , estando o ecossistema em equilíbrio. Por uma inspeção da figura (2.7) podemos constatar que no caso em que $\beta' > 0$ há uma probabilidade não desprezível de encontrarmos uma determinada espécie com concentrações baixas ($x < 0.5$) ou altas ($3 > x > 2$). Esta situação não ocorre para $\beta' < 0$, onde apenas espécies com concentrações intermediárias ($1.5 > x > 0.5$) podem ser encontradas.

2.4 Distribuição das Interações entre Espécies

Agora passamos a analisar o efeito da dinâmica escolhida (2.2), para modelar a evolução temporal dos acoplamentos, sobre a distribuição das interações entre espécies distintas no equilíbrio. Devido ao fato de que os acoplamentos J_{ij} no hamiltoniano (1.6) são variáveis aleatórias com uma distribuição gaussiana, fomos obrigados a realizar, no cálculo da energia livre, uma média sobre os mesmos. Isto impede que tenhamos parâmetros de ponto de sela associados às variáveis J_{ij} e portanto, impede um entendimento da estrutura do espaço das interações. Assim, introduzimos os momentos da distribuição dos acoplamentos: $M_m = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{i < j} J_{ij}^m \right\rangle$, com $m = 1, 2$, etc. O primeiro momento M_1 pode ser calculado recorrendo-se a equação (2.2) e resulta $M_1 = -\frac{\beta'}{2N}(N - Q)$; para sua derivação veja o apêndice C. Considere agora a equação (2.7), se derivarmos o logaritmo da função de partição total do sistema ($\tilde{Z}$) em relação a μ e depois fizermos $\mu = 1/\tilde{\beta}$, não é difícil ver que $M_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N}[\beta'(\beta'Q^2 + 2vQ) - 1]$; para isto veja também o apêndice C. Estes resultados implicam em $\langle J_{ij} \rangle \approx -\beta'/N$ e $\langle J_{ij}^2 \rangle \approx 1/N$ para N grande.

A partir de M_3 ($m = 3, 4, \dots$) não conseguimos mais deduzir por meios analíticos uma expressão para os momentos de ordem mais alta. Entretanto, resultados de simulações (veja seção seguinte) indicam que $\langle J_{ij}^3 \rangle = -3\beta'/N^2$, logo o terceiro cumulante irá para zero com $1/N^3$ no limite termodinâmico. Este resultado sugere que no limite de N grande a distribuição de J_{ij} é gaussiana. Vale a pena observar que impondo $\beta' = 0$ recuperamos o caso temperado (*quenched*) onde a média dos acoplamentos é nula e a variância é

$1/N$. Diante desta discussão deve, portanto, ficar claro que uma temperatura finita (β') altera a distribuição dos acoplamentos (J_{ij}), via $\langle J_{ij} \rangle \approx -\beta'/N$, e portanto modifica as propriedades de equilíbrio do ecossistema em relação ao caso temperado (*quenched*).

2.5 Simulações

Antes de mais nada, note que a equação (2.2) representa, de fato, um conjunto de equações diferenciais acopladas; o primeiro termo à direita, que é uma média térmica, deve ser calculado com as interações do instante em questão fixas. A simulação do conjunto de equações (2.2) pode ser bastante complicada, pois este descreve um processo de dois estágios; em um primeiro momento deve-se determinar as correlações entre as concentrações das espécies i e j (com os acoplamentos fixos) e em seguida procedemos com o incremento das interações. A dinâmica de dois níveis pode resultar muito longa, pois a cada incremento dado aos acoplamentos deve-se esperar que as variáveis de spin entrem em equilíbrio térmico, de modo que o processo como um todo é adiabático.

Em primeiro lugar, portanto, tratamos de determinar as correlações entre as variáveis de spin; para isto poderíamos lançar mão do método de Runge-Kutta para resolvermos a equação de replicadores (1.4). Ao invés disto optamos por utilizar o método de Monte Carlo (MC) [35] que igualmente minimiza o hamiltoniano (1.6); sua vantagem sendo a de que possui um custo computacional menor, ou seja, torna a simulação mais veloz. Aplicamos então o algoritmo de Metropolis às variáveis de spin, com os acoplamentos do instante em questão fixos, sem esquecer que estamos interessados no limite de temperatura nula, isto é, apenas aceitamos (rejeitamos) uma nova configuração se esta tiver uma menor (maior) energia em relação a atual. Dispondo de um gerador de números aleatórios (ran2 [32]), atribuímos, no início da simulação, valores às concentrações das espécies, tendo em mente o vínculo (1.5). A dinâmica mais rápida é realizada do seguinte modo: fazemos um sorteio de dois índices, k e l , que podem variar de 1 até N e então subtraímos de $x(l)$ uma quantidade ζ e adicionamos a mesma quantidade à variável $x(k)$, de maneira a preservarmos o vínculo (1.5). Se $x(l)$ for menor do que ζ fazemos $\zeta = x(l)$ e impomos $x(l) = 0$. Além disto, devemos mencionar que se a concentração de uma dada espécie for nula realizamos novo sorteio de um par; com isto evitamos que uma dada espécie extinta volte a existir. Em seguida calculamos a energia da nova configuração assim encontrada e comparamos com a atual, e então seguindo o algoritmo de Metropolis, determinamos

a nova configuração. Este procedimento é repetido R_1 vezes para que as variáveis $x(i)$ ($i \in 1, 2, \dots, N$) possam atingir o equilíbrio térmico e em seguida impomos mais R_2 iterações para que obtenhamos as correlações entre as variáveis de spin.

Após havermos determinado as quantidades $\langle x_i x_j \rangle$ devemos então passar à dinâmica mais lenta, a dos acoplamentos. Para resolvermos o conjunto de equações (2.2) utilizamos o método de Euler com um passo temporal de $\Delta t = \tau \delta$. Inicialmente atribuímos o valor nulo para cada interação. Para gerarmos o ruído branco gaussiano η_{ij} usamos o algoritmo de Box-Miller [32]. O valor de δ influencia o ruído gaussiano de tal modo que $\text{var}(\eta) \sim \delta^{-1}$, veja [3]. Todo o procedimento descrito anteriormente é repetido R_3 vezes com o intuito de permitir que os acoplamentos possam atingir o equilíbrio e então nas próximas R_4 iterações poderemos calcular as quantidades: Q , M_1 , M_2 e M_3 .

Figura 2.8: Índice de Simpson Q em função do parâmetro de controle u , para $\beta' = -1$ (linha à esquerda) e $\beta' = +1$ (linha à direita). No resultado analítico foi utilizado simetria de réplicas (linhas cheias). Os círculos abertos são resultados das simulações, para $N = 80$. As barras de erro são menores do que o tamanho do símbolo usado.

Todo o processo descrito acima é feito com os valores de u e β' fixos. Para obtermos gráficos do índice de Simpson Q em função de u , por exemplo, deveremos repetir todos os passos descritos anteriormente para cada valor do parâmetro de competição entre indivíduos da mesma espécie. Tipicamente usamos: $R_1 = 4000$, $R_2 = 4000$, $R_3 = 4000$,

$R_4 = 10000$, $\delta = 0.01$, $\tau = 1$, $\zeta = 0.01$ e $N = 20, 40$ e 80 .

Figura 2.9: Segundo momento reescalado da distribuição das interações M_2 em função de u , para $N = 20$ espécies. As linhas cheias são resultados do cálculo com simetria de réplicas; a curva de cima corresponde a $\beta' = +1.0$ e a de baixo a $\beta' = -1.0$. Os círculos abertos resultam das simulações e as barras de erro aparecem indicadas.

Na figura (2.8) exibimos uma comparação entre os resultados analíticos, utilizando-se o formalismo de simetria de réplicas (linhas cheias), e as simulações (círculos abertos) com $N = 80$ espécies, para o índice de Simpson Q em função do parâmetro de controle u . Note que há uma excelente concordância quantitativa entre os dois resultados, apesar do número de espécies no sistema ser bastante reduzido, $N = 80$. Com respeito aos momentos da distribuição dos acoplamentos note que há uma dependência, com os parâmetros do modelo, não trivial apenas com $1/N$ e, portanto, devemos estar atentos a efeitos de tamanho finito. Para tornar mais evidentes tais efeitos, apresentamos na figura (2.9) um gráfico do segundo momento reescalado como função de u , para um sistema com apenas $N = 20$ espécies. Observe que ocorre uma excelente concordância entre os resultados analíticos e numéricos, indicando a validade das técnicas empregadas mesmo para a investigação de sistemas pequenos. Conforme mencionamos anteriormente, não derivamos analiticamente uma expressão para M_3 , a sua dependência com u , β' e N sendo determinada através de simulações. Na figura (2.10) exibimos um gráfico do terceiro momento

Figura 2.10: Terceiro momento reescalado da distribuição das interações M_3 como função do parâmetro u , para, de cima para baixo, $\beta' = -1.0, -0.5, +0.5$ e $+1.0$. Nas simulações foram utilizados $N = 20$ ($\circ$), 40 ($\triangle$) e 80 ($\times$) espécies. As barras de erro são menores do que os símbolos usados. As linhas horizontais correspondem a $NM_3 = -3\beta'/2$.

da distribuição em função de u para valores de $\beta' = -1.0, -0.5, +0.5$ e $+1.0$. A inspeção desta figura não deixa dúvidas quanto a relação de M_3 com os parâmetros do modelo.

2.6 Análise dos Resultados

Nesta seção discutiremos os principais resultados da situação em que a temperatura associada às variáveis de spin tende a zero, ou seja, o limite em que $\beta \rightarrow +\infty$. O efeito mais marcante de uma temperatura finita $\beta' > 0$ (recordamos que $\beta' = -\epsilon\tilde{\beta}$, neste caso $\epsilon = -1$) sobre o ecossistema é o da abrupta redução da diversidade para valores pequenos do parâmetro u , o que pode ser constatado através das figuras (2.1) e (2.6). Este efeito pode ser bem compreendido por uma análise da equação (2.2). Note que pelo fato das correlações $\langle x_i x_j \rangle_J$ serem maiores ou iguais a zero a condição $\epsilon = -1$ torna o ecossistema

predominantemente cooperativo. Recordemos que quando o acoplamento entre diferentes espécies é maior que zero há competição, caso contrário as espécies cooperam. Duas espécies i e j que, de início, tiverem as maiores concentrações irão, na iteração seguinte (veja a equação (2.2)), aumentar o seu caráter cooperativo. Este processo será repetido várias vezes e o vínculo (1.5) determinará o domínio do ecossistema por tais grupos de espécies. Verificamos, através das simulações, que o valor de Q , de fato, aproxima-se de $N/2$ para valores pequenos de u . Através da figura (2.7) podemos inferir que há uma probabilidade não desprezível de encontrarmos o ecossistema com baixas ou elevadas concentrações de indivíduos para $\beta' > 0$; este último fato dá suporte a análise anterior.

Figura 2.11: Índice de Simpson Q em função do parâmetro u , para $\beta' = 0$ (linha cheia) e -1 (linha tracejada). Os resultados das simulações para $\beta' = -1$, que correspondem a $N = 20$ ($\circ$), 40 ($\triangle$) e 80 ($\times$) espécies, e para $\beta' = 0$, que estão associados a $N = 20$ ($\bullet$), 40 ($\blacktriangle$) e 80 ($+$) espécies, estão indicados nesta mesma figura.

Na situação contrária, quando $\beta' < 0$ ($\epsilon = +1$), o crescimento ilimitado de algumas poucas espécies não será mais viável, pois agora quanto maior for a correlação entre um dado par de espécies i e j , $\langle x_i x_j \rangle_J$, tanto maior será a competição, veja a equação (2.2). Quanto maior a abundância de certa espécie mais alto o custo de sua manutenção. Portanto, não é razoável que haja, como anteriormente, uma transição súbita entre um estado com diversidade finita (Q finito) para um outro com diversidade nula ($Q \rightarrow +\infty$). Este

argumento está em contradição com o que está ilustrado nas figuras (2.2) e (2.6). Na figura (2.7) encontramos resultados que estão em conflito com a hipótese da transição abrupta; note que, agora, ocorre uma probabilidade desprezível de encontrarmos no ecossistema espécies com baixas ou elevadas concentrações. O raciocínio anterior permite concluir que a diversidade do ecossistema seja, neste caso, maior do que a diversidade no caso temperado (*quenched*). Para deixar mais claro, exibimos na figura (2.11) gráficos do índice de Simpson Q em função do parâmetro de controle u para $\beta' = 0$ e $\beta' = -1$. Observe que os resultados das simulações para $\beta' = 0$ representam um limite superior em relação aos respectivos resultados para $\beta' = -1$, mantendo-se u e N fixos.

Capítulo 3

Replicador Aleatório com Temperaturas Finitas

3.1 O Modelo

Na terceira seção do primeiro capítulo introduzimos o modelo do replicador aleatório com interações distribuídas de acordo com uma distribuição de probabilidades gaussiana. Neste capítulo iremos investigar os efeitos de temperaturas finitas no modelo do replicador aleatório com interações descritas pela regra de Hebb, veja [36–38]. Dentro deste contexto a espécie i é descrita por um vetor binário $(\xi_i^1, \xi_i^2, \dots, \xi_i^p)$ em que ξ_i^μ representa o caractere fenótipo μ da espécie i : se esta possui o caractere μ então $\xi_i^\mu = +1$, caso contrário $\xi_i^\mu = -1$. As variáveis ξ_i^μ são, de fato, variáveis aleatórias independentes que podem ter valores ± 1 com a mesma probabilidade. O número de caracteres de cada uma das espécies é extensivo, ou seja, $p = \alpha N$, com α sendo da ordem de 1. Esta escolha faz com que cada espécie seja especificada pelo seu conjunto de caracteres fenótipos. A regra de Hebb tem a forma:

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu, \quad i \neq j. \quad (3.1)$$

Observe que nesta regra está implícito que quanto maior for o número de características compartilhadas por duas espécies i e j tanto maior será a competição entre ambas ($J_{ij} > 0$); inversamente, quanto menor for o número de características em comum maior será a cooperação entre as mesmas ($J_{ij} < 0$). Isto representa uma grande vantagem do ponto de vista biológico pois, devemos esperar que quanto maiores forem as semelhanças entre as espécies maior seja a competição pelos recursos do ecossistema. Isto está de acordo com o princípio da exclusão competitiva que diz que duas espécies distintas, vivendo juntas, não podem ocupar o mesmo nicho ecológico [39].

Como foi descrito anteriormente, aqui também temos uma equação que rege a evolução temporal das concentrações das espécies ($x_i \in [0, +\infty)$, $i = 1, \dots, N$) com acoplamentos fixos e para temperaturas finitas. Esta equação é:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(\mathcal{F}_i - \phi) + \zeta_i(t), \quad (3.2)$$

onde $\mathcal{F}_i = -\sum_j J_{ij}x_j$ é a adaptabilidade (*fitness*) da espécie i . O multiplicador de Lagrange é ϕ que mantém o vínculo (1.5):

$$\sum_{i=1}^N x_i = N, \quad (3.3)$$

para todo o tempo. Há ainda nesta equação o termo $\zeta_i(t)$ que nada mais é do que um ruído gaussiano de média zero e correlação:

$$\langle \zeta_i(t) \zeta_j(t') \rangle = 2T \delta_{ij} \delta(t - t'). \quad (3.4)$$

O parâmetro T na equação anterior que mede a intensidade do ruído será chamado temperatura. Portanto, a dinâmica das concentrações das espécies é descrita por um sistema de equações diferenciais acopladas e não lineares.

No caso em que as interações são simétricas e para temperatura nula, o comportamento assintótico da equação (3.2) é facilmente caracterizado: a dinâmica maximiza a função de Lyapunov ou funcional de adaptabilidade (*fitness*)

$$\mathcal{F}(x_i) = -\sum_{ij} J_{ij} x_i x_j. \quad (3.5)$$

Portanto, os únicos estados estacionários possíveis são pontos fixos [21]. Além disto, podemos notar que neste caso o multiplicador de Lagrange que aparece na equação (3.2) é

interpretado como a adaptabilidade (*fitness*) média do ecossistema, isto é, $\phi = \frac{1}{N} \sum_i x_i \mathcal{F}_i$. Apesar do comportamento assintótico simples, o regime de equilíbrio pode apresentar algumas características não triviais se o funcional exibir um número muito grande de máximos locais. É válido mencionar também que no equilíbrio, ou seja, quando $t \rightarrow +\infty$, os estados estacionários obedecem a distribuição de Gibbs:

$$\mathcal{W}(\{x_i\}) = \frac{1}{Z} \delta(N - \sum_i x_i) \exp(\beta \mathcal{F}(\{x_i\})).$$

A grande vantagem de trabalharmos com um ruído branco aditivo é a de que no regime estacionário o sistema segue a distribuição de Gibbs, permitindo assim a utilização das ferramentas da Mecânica Estatística. É bom ressaltarmos que este último termo, pode ser interpretado como um fluxo de espécies entre o ecossistema considerado e algum habitat fonte externo.

Aqui também, a fim de evitar que tenhamos um limite termodinâmico ($N \rightarrow +\infty$) trivial, na expressão da função de partição (veja as seções seguintes), somos obrigados a introduzir o parâmetro de auto-interação $J_{ii} = u$. O funcional de adaptabilidade (*fitness*) tem, então, a forma:

$$\mathcal{F}(\{x_i\}) = -\frac{1}{N} \sum_{i \neq j} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu x_i x_j - u \sum_i x_i^2. \quad (3.6)$$

Antes de terminarmos esta seção é importante enfatizarmos um ponto. A natureza aleatória dos acoplamentos nos obriga a realizar médias sobre os mesmos. Isto é assim pois as grandezas do ecossistema que estamos interessados em calcular não dependem de uma realização particular das interações. No limite termodinâmico tais quantidades adquirem o mesmo valor para cada conjunto dos parâmetros J_{ij} . Dizemos que estas grandezas possuem a propriedade de automediância.

Quanto a maneira de realizarmos estas médias trataremos de dois casos extremos: o caso recozido (*annealed*) e o caso temperado (*quenched*). No primeiro caso as concentrações das espécies x_i (escala ecológica) variam tão rapidamente quanto suas características ξ_i^μ (escala evolucionária). No segundo caso as características das espécies são fixas enquanto as concentrações variam de acordo com a equação (3.2). No caso temperado (*quenched*) devemos calcular a média sobre o logaritmo da função de partição, o que é feito através do método de réplicas (veja a seção 2, capítulo 1), tomando-se o limite $n \rightarrow 0$.

3.2 Caso Recozido (*Annealed*)

Apesar de abordar a situação em que temos interações variáveis, o formalismo do método de réplicas generalizado, introduzido no capítulo anterior, não se aplica para o caso recozido (*annealed*). A razão para isto está no fato de que, em sistemas que obedecem as equações (2.2), as concentrações das espécies estão sempre em equilíbrio na escala de tempo dos acoplamentos. A expressão da energia livre global, neste caso, é dada por:

$$-\beta f_a = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \log \langle Z \rangle. \quad (3.7)$$

Note que a média sobre a desordem aparece no argumento do logaritmo, refletindo o que havíamos dito anteriormente a respeito de que as variáveis de spin e os acoplamentos são tratados no mesmo pé de igualdade. Na expressão anterior, temos para a função de partição:

$$Z = \int_0^{+\infty} \left[\prod_i dx_i \right] \delta(N - \sum_i x_i) \exp \left(-\frac{\beta}{N} \sum_{i \neq j} \sum_{\mu} \xi_i^{\mu} \xi_j^{\mu} x_i x_j - \beta(u - \alpha) \sum_i x_i^2 \right). \quad (3.8)$$

O cálculo da energia livre para o caso recozido (*annealed*) é livre de qualquer complicação matemática, como as que acontecem no caso do método de réplicas, e resulta em equações de ponto de sela relativamente simples de serem resolvidas numericamente, enquanto que preserva algumas características singulares do modelo temperado (*quenched*), especialmente em temperaturas diferentes de 0. A notação $\langle \dots \rangle$ designa uma média realizada utilizando-se a seguinte distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias ξ_i^{μ} :

$$P(\xi_i) = \prod_{\mu} \left[\frac{1}{2} \delta(\xi_i^{\mu} - 1) + \frac{1}{2} \delta(\xi_i^{\mu} + 1) \right]. \quad (3.9)$$

Não apresentaremos aqui toda a derivação das equações estacionárias e da energia livre para o caso recozido (*annealed*); no apêndice D deduzimos tais equações. A energia livre é a que segue:

$$-\beta f_a = \hat{R} + Q(\hat{Q} - \beta u) + \alpha G_1 + G_0. \quad (3.10)$$

Onde na equação acima temos:

$$G_0 = \ln \left\{ \int_0^{+\infty} dx \exp(-\hat{Q}x^2 - \hat{R}x) \right\}$$

e

$$G_1 = \ln \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \exp(-\beta Q z^2) \right\} + \beta Q.$$

Dos três parâmetros Q , $\hat{Q}$ e $\hat{R}$ encontrados nas equações anteriores apenas o parâmetro Q tem uma interpretação física direta. Ele é proporcional a probabilidade de que dois indivíduos selecionados ao acaso pertençam a mesma espécie, um parâmetro conhecido na literatura como índice de Simpson [30]. Os dois outros parâmetros entraram nas equações acima como multiplicadores de Lagrange. Derivando a equação anterior (3.10) em relação aos parâmetros $\hat{Q}$, $\hat{R}$ e Q e igualando os respectivos resultados a zero, podemos obter as equações de ponto de sela. São elas:

$$Q = \langle x^2 \rangle_a. \quad (3.11)$$

$$1 = \langle x \rangle_a. \quad (3.12)$$

$$\hat{Q} = \beta \left(u - \alpha \frac{2\beta Q}{1 + 2\beta Q} \right). \quad (3.13)$$

Onde usamos a notação:

$$\langle x^k \rangle_a = e^{-G_0} \int_0^{+\infty} dx x^k \exp(-\hat{Q}x^2 - \hat{R}x).$$

A figura (3.1) ilustra a dependência não trivial do índice de Simpson Q com α . Para temperaturas finitas o parâmetro Q cresce monotonicamente com o aumento de α até α_c , onde:

$$\alpha_c = u \left(1 + \frac{T}{4} \right). \quad (3.14)$$

Em $\alpha = \alpha_c$ temos $Q = 2$ e para $\alpha > \alpha_c$ não existe solução para as equações de ponto de sela. A ausência de soluções neste regime implica em $Q \rightarrow +\infty$. Para $T \rightarrow +\infty$ temos $Q = 2$, independentemente dos valores dos outros parâmetros de controle, enquanto que para $T = 0$ temos $Q = 1$ para $\alpha < \alpha_c = u$ e $Q = 2$ em $\alpha = u$; logo há uma descontinuidade neste ponto. Observemos antes de mais nada que para $\alpha > \alpha_c$ não existe solução para as equações de ponto de sela devido a que $\hat{Q} < 0$ neste regime, levando a uma divergência dos momentos definidos pela penúltima equação. Além disto não há divergência em $\alpha = \alpha_c$, onde $\hat{Q} = 0$, devido à presença do termo linear na mesma equação.

Figura 3.1: Índice de Simpson Q para o caso recozido (*annealed*) com $u = 1$ e T como indicado acima. As linhas terminam em $\alpha = \alpha_c$, onde $Q = 2$. Não existe solução para as equações de ponto de sela para $\alpha > \alpha_c$.

Figura 3.2: Densidade de probabilidade de que a abundância de uma espécie escolhida ao acaso seja igual a x , no caso recozido (*annealed*), para $u = 1$, $\alpha = 0.5$ e T como indicado. A linha tracejada é a distribuição exponencial e^{-x} , válida no limite $T \rightarrow \infty$.

Mais informação sobre a organização das espécies no ecossistema pode ser obtida através da probabilidade de que a concentração de uma espécie escolhida ao acaso esteja no intervalo $(x, x + dx)$. Esta grandeza, notada $P_a(x)dx$, é dada por:

$$P_a(x) = \langle \delta(x - x_j) \rangle_a = e^{-G_0} \exp(-\hat{Q}x^2 - \hat{R}x). \quad (3.15)$$

Para $T = 0$ temos $P_a = \delta(x - 1)$ e no limite $T \rightarrow +\infty$, tanto quanto para $\alpha = \alpha_c$ independentemente do valor de T , achamos $P_a = e^{-x}$, que é consistente com $Q = 2$. Na figura (3.2) apresentamos gráficos da probabilidade de abundância contra x para diferentes valores de T indicados na gravura, $u = 1$ e $\alpha = 0.5$. Observe que também está indicada a curva limite válida em $T \rightarrow +\infty$, ou seja, e^{-x} .

Do exposto acima podemos concluir que há três regimes distintos. No primeiro caso, que corresponde a $Q \approx 1$, temos um regime cooperativo ou com grande diversidade em que todas as espécies coexistem e eventualmente contribuem para a composição do ecossistema. O segundo caso é altamente desordenado com diversidade intermediária, no qual temos $Q \approx 2$, onde as interações entre as espécies têm um papel menor. Por último, o terceiro regime é competitivo ou tem baixa diversidade no qual o ecossistema é composto por algumas espécies dominantes, onde temos $Q \gg 1$ (ou $Q \rightarrow +\infty$ no caso recozido (*annealed*)). Estes mesmos regimes emergem da análise do caso temperado (*quenched*).

3.3 Caso Temperado (*Quenched*)

Nesta seção iremos tratar do caso temperado (*quenched*). Neste caso as características das espécies são fixas e as únicas quantidades que podem variar são as concentrações das espécies. A grandeza relevante, no sentido de possuir a propriedade de automediância, é a energia livre f_q ; portanto, deveremos calcular uma média do logaritmo da função de partição realizada sobre a distribuição dos acoplamentos; para isto utilizamos a relação (3.9). Matematicamente isto é traduzido por:

$$-\beta f_q = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \langle \ln Z \rangle. \quad (3.16)$$

Para determinarmos a média do logaritmo da função de partição recorreremos ao método de réplicas (2.9):

$$\langle \ln Z \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \langle Z^n \rangle, \quad (3.17)$$

onde na equação anterior n é o número de cópias idênticas do sistema, o índice de réplicas. Tendo em vista a relação anterior podemos então concluir que precisamos determinar a média, sobre a distribuição das interações (3.9), da quantidade Z^n e tomar o limite em que n tende para zero [24, 26]. Não exibiremos aqui todo o procedimento envolvido na dedução de $\langle Z^n \rangle$. O mesmo pode ser encontrado no apêndice D (veja também [40]). A expressão para $\langle Z^n \rangle$ resulta:

$$\begin{aligned} \langle Z^n \rangle = & \int \left[\prod_a \frac{d\hat{R}_a}{2\pi i} \right] \int \left[\prod_a \frac{dQ_a d\hat{Q}_a}{2\pi i/N} \right] \int \left[\prod_{a < b} \frac{dq_{ab} d\hat{q}_{ab}}{2\pi i/N} \right] \times \\ & \times \exp \left(N \sum_a \hat{R}_a + N\beta(\alpha - u) \sum_a Q_a \right) \times \\ & \times \exp \left(+N \sum_a Q_a \hat{Q}_a - N \sum_{a < b} q_{ab} \hat{q}_{ab} + N \ln G_0 + N\alpha \ln G_1 \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Onde nas relações anteriores temos para G_0 e para G_1 :

$$G_0 = \int_0^{+\infty} \left[\prod_a dx_a \right] \exp \left(- \sum_a \hat{R}_a x_a - \sum_a \hat{Q}_a x_a^2 + \sum_{a < b} \hat{q}_{ab} x_a x_b \right)$$

e

$$G_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_a \frac{dt_a}{\sqrt{2\pi}} \right] \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_a t_a^2 - \beta \sum_a t_a^2 Q_a - 2\beta \sum_{a<b} q_{ab} t_a t_b \right).$$

Os parâmetros de ordem físicos relevantes são:

$$q_{ab} = \frac{1}{N} \sum_i \langle \langle x_{ia} x_{ib} \rangle_T \rangle, \quad a < b \quad (3.19)$$

e

$$Q_a = \frac{1}{N} \sum_i \langle \langle x_{ia}^2 \rangle_T \rangle. \quad (3.20)$$

Estas quantidades medem a sobreposição (*overlap*) entre um par de estados estacionários indexados pelos índices de réplicas a e b , e a sobreposição (*overlap*) entre o estado estacionário indexado por a com ele mesmo, respectivamente. Nestas equações a notação $\langle \dots \rangle_T$ indica uma média térmica realizada com a distribuição de Gibbs.

3.3.1 Simetria de Réplicas

Para prosseguirmos com o intuito de encontrar uma expressão para a energia livre precisamos admitir algumas hipóteses simplificadoras. Observe que as relações anteriores para Z^n , G_0 e G_1 são invariantes por permutações dos índices de réplicas. Portanto, o primeiro ansatz a ser testado é o de simetria de réplicas, ou seja, impomos: $\hat{R}_a = \hat{R}$, $\hat{Q}_a = \hat{Q}$, $\hat{q}_{ab} = \hat{q}$, $q_{ab} = q$ e $Q_a = Q$. Precisamos de algumas transformações de variáveis para simplificarmos as equações estacionárias; são elas: $\Delta = \hat{R}/\hat{q}^{1/2}$, $\eta = \hat{q}^{1/2}/2(\hat{Q} + \hat{q}/2)^{1/2}$ e $v = Q - q$. No apêndice D mostramos as deduções envolvidas na obtenção da expressão da energia livre no contexto de simetria de réplicas. Esta última resulta:

$$-\beta f_q = \frac{\hat{q}}{2}(Q - v) - \frac{\alpha\beta(Q - v)}{1 + 2\beta v} + \frac{Q\hat{q}}{2} \left(\frac{1}{2\eta^2} - 1 \right) - \beta(u - \alpha)Q + \Delta\hat{q}^{1/2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4\eta^2}{\hat{q}} \right) -$$

$$-\frac{\alpha}{2} \ln(1 + 2\beta v) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\pi}{4} \right) + \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \ln \left\{ \exp(\Xi_z^2) \operatorname{erfc}(\Xi_z) \right\}. \quad (3.21)$$

Onde: $\Xi_z = \eta(\Delta - z)$. Dentro do formalismo de simetria de réplicas as expressões (3.19) e (3.20) tornam-se:

$$q = \frac{1}{N} \sum_i \langle \langle x_i \rangle_T^2 \rangle \quad \text{e} \quad (3.22)$$

$$Q = \frac{1}{N} \sum_i \langle \langle x_i^2 \rangle_T \rangle. \quad (3.23)$$

Para obtermos as equações de ponto de sela basta derivarmos a expressão da energia livre em relação aos diferentes parâmetros de ordem e igualarmos os respectivos resultados a zero; disto resultam as seguintes relações:

$$(Q - v) + Q \left(\frac{1}{2\eta^2} - 1 \right) + \frac{\Delta}{\hat{q}^{1/2}} - \frac{1}{\hat{q}} = 0. \quad (3.24)$$

$$-\frac{\alpha\beta}{1 + 2\beta v} + \frac{\hat{q}}{4\eta^2} - \beta(u - \alpha) = 0. \quad (3.25)$$

$$-\frac{\hat{q}}{2} + \frac{2\alpha\beta^2(Q - v)}{(1 + 2\beta v)^2} = 0. \quad (3.26)$$

$$\hat{q}^{1/2} + \eta \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \frac{H'(\Xi_z)}{H(\Xi_z)} = 0. \quad (3.27)$$

$$-\frac{Q\hat{q}}{2\eta^3} + \frac{1}{\eta} + \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \frac{H'(\Xi_z)}{H(\Xi_z)} (\Delta - z) = 0. \quad (3.28)$$

Onde nas expressões acima temos: $H(\Xi_z) = \exp(\Xi_z^2) \text{erfc}(\Xi_z)$.

O truque para resolver as equações de ponto de sela (3.24) - (3.28) consiste em considerar η como sendo fixo e α como uma incógnita. Fixando os parâmetros u e β e variando η podemos traçar então gráficos do índice de Simpson Q e da susceptibilidade v contra a complexidade α . Procedendo desta maneira podemos reduzir o sistema de cinco equações não lineares acopladas para uma única equação para Δ , que pode então ser resolvida por técnicas convencionais [31]. Note, antes de mais nada, que devemos resolver as integrais que aparecem nas equações (3.27) e (3.28); o que é feito através do método de Simpson considerando-se o infinito como 10 e dividindo o intervalo de integração em 10^4 partes [31]. Inicialmente determinamos $\hat{q}^{1/2}$ através da equação (3.27). De posse das variáveis Δ , η e $\hat{q}^{1/2}$ podemos encontrar Q usando a equação (3.28). Com os parâmetros anteriores e o auxílio da expressão (3.24) podemos encontrar a susceptibilidade v . Em seguida calculamos α usando a relação (3.26) e por fim realizamos a bissecção sobre a variável Δ através da equação (3.25). Esta estratégia depende de um detalhe técnico, que também ocorre no caso recozido (*annealed*). O problema é a evolução numérica da expressão $\Xi_z - I(\Xi_z)$, onde:

Figura 3.3: Recíproco do índice de Simpson como uma função de α para $u = 1$ e T como indicado na figura. A linha tracejada vertical indica o ponto onde ocorre a transição de fase termodinâmica. Esta transição de fase desaparece para $T < 4.7$.

Figura 3.4: Susceptibilidade v como uma função de α . Os parâmetros e convenções são os mesmos que os da figura anterior.

$$I(\Xi_z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\Xi_z^2}}{\operatorname{erfc}(\Xi_z)},$$

esta relação ocorre quando tomamos derivadas da energia livre com relação a Δ e η . No caso $\Xi_z > 0$, utilizamos uma rotina baseada no algoritmo de Chebyshev que retorna a função erro complementar com um erro menor que 1.2×10^{-7} [32]. Para $\Xi_z > 6$, entretanto, recorreremos a expansão assintótica da erfc [29].

De acordo com as equações (3.22) e (3.23) a susceptibilidade $v = Q - q > 0$ mede as flutuações das concentrações das espécies em torno do valor de equilíbrio. Nas figuras (3.3) e (3.4) exibimos a dependência com α do recíproco do índice de Simpson ($1/Q$) e da susceptibilidade (v). Estas figuras demonstram que o efeito do ruído rápido é tal que o aumento da temperatura provoca um correspondente aumento da região com soluções múltiplas para os parâmetros de ponto de sela. Para decidir que solução deve ser escolhida para um dado valor de α devemos considerar a energia livre de todas elas como ilustrado na figura (3.5) para um único valor de T . Observe que apenas através de uma inspeção desta figura podemos distinguir precisamente entre as três soluções. O ponto $\alpha_c(T, u)$ no qual as energias livre de duas das soluções interceptam-se determina o lugar da transição de fase termodinâmica. A condição de que a energia livre mude continuamente quando passamos de uma solução para outra leva a uma descontinuidade nos parâmetros de ponto de sela, como indicado pelas linhas tracejadas verticais mostradas nas figuras (3.3) e (3.4). Para $u > 0.5$, o tamanho da região de soluções múltiplas diminui com a redução de T e anula-se em um ponto crítico final $T_e > 0$, enquanto que para $u < 0.5$, esta região persiste em $T = 0$. Estes resultados estão descritos na figura (3.6), onde o ponto de transição α_c é mostrado contra a temperatura T .

Figura 3.5: Energia livre com simetria de réplicas como função de α para $u = 1$ e $T = 20$. A seta indica o ponto no qual a transição termodinâmica ocorre, ou seja, onde a energia livre de duas soluções distintas das equações de ponto de sela interceptam-se. Este ponto corresponde às linhas verticais tracejadas das figuras anteriores.

Figura 3.6: Valor crítico α_c no qual a transição de fase termodinâmica descontínua ocorre como uma função de T para valores de u como indicados na figura. As linhas de transição terminam em um ponto crítico final T_e , no qual a descontinuidade desaparece.

3.4 Estrutura do Ecossistema

Como dissemos anteriormente na seção que trata do caso recozido (*annealed*), podemos obter mais informações a respeito da estrutura do ecossistema se analisarmos a abundância relativa de cada espécie na comunidade. A probabilidade de que a abundância de uma espécie escolhida ao acaso, digamos espécie k , esteja no intervalo $(x, x + dx)$ é dada por:

$$P_k(x) = \left\langle \int_0^{+\infty} \left[\prod_j dx_j \right] \delta(x - x_k) \mathcal{W}(\{x_i\}) \right\rangle, \quad (3.29)$$

onde $\mathcal{W}$ é a distribuição de Gibbs:

$$\mathcal{W}(\{x_i\}) = \frac{1}{Z} \delta(N - \sum_i x_i) \exp(\beta \mathcal{F}(\{x_i\})).$$

Como todas as espécies são equivalentes podemos escrever: $P_k(x) = P(x) \forall k$. No apêndice D indicamos como a distribuição de abundância pode ser obtida, dentro do contexto de simetria de réplicas. Sua forma é:

$$P_{rs}(x) = \frac{\hat{q}^{1/2}}{\pi^{1/2} \eta} \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \frac{\exp[-(\Xi_z + x \hat{q}^{1/2}/2\eta)^2]}{\text{erfc}(\Xi_z)}, \quad (3.30)$$

onde: $\Xi_z = \eta(\Delta - z)$.

Na figura (3.7) exibimos os resultados da densidade de probabilidade, P_{rs} , exatamente para os mesmos parâmetros da figura (3.2), ou seja, para o caso recozido (*annealed*). Podemos constatar através de uma inspeção destas figuras que há uma similaridade entre ambas. Esta concordância está ligada ao fato de que a solução com simetria de réplicas é uma boa descrição qualitativa mesmo além do seu domínio de estabilidade. A diferença mais importante entre estas figuras está no fato de que no caso temperado (*quenched*) há uma maior contribuição para a organização do ecossistema por parte das espécies com menor concentração.

Na figura (3.8) são mostrados os resultados da densidade de probabilidade, na aproximação de simetria de réplicas, para valores elevados do parâmetro α , que no caso recozido (*annealed*) levam a resultados divergentes. De acordo com esta figura, para $\alpha > 5$, há um decréscimo acentuado da densidade de probabilidade (P_{rs}) para valores baixos da concentração das espécies, muito mais rápido que o exponencial. Esta tendência se mantém para concentrações intermediárias e ocorre um rápido decréscimo para valores bastante elevados das concentrações das espécies. Isto indica que para α grande apenas

Figura 3.7: Densidade de probabilidade de que a abundância de uma espécie escolhida ao acaso seja x na aproximação de simetria de réplicas para $u = 1$, $\alpha = 0.5$ e T como indicado. A linha tracejada é a distribuição exponencial.

Figura 3.8: Densidade de probabilidade de que a abundância de uma espécie escolhida ao acaso seja x na aproximação de simetria de réplicas para $u = 1$, $T = 20$ e α como indicado. A linha tracejada é a distribuição exponencial.

um pequeno número de espécies, com concentração muito elevada, praticamente domina todo o ecossistema.

Se analisarmos a figura (3.3) podemos também inferir que o aumento do número de características de cada espécie resulta na redução da diversidade efetiva. Isto pode ser entendido de acordo com a equação (3.1). A variância dos acoplamentos entre pares de espécies cresce linearmente com o parâmetro α . Para valores suficientemente elevados do parâmetro α há uma possibilidade de produção de pares de interações com intensidade muito elevada e tais que $J_{ij} < 0$; isto faz com que haja uma grande cooperação entre algumas poucas espécies. Além disto, tais acoplamentos podem apresentar uma magnitude maior que a pressão de cooperação u e a perturbação do ruído branco gaussiano. Sendo assim, a redução observada na diversidade das espécies é uma consequência do ilimitado crescimento de pequenos grupos de espécies que cooperam entre si. Como em nosso ecossistema há ainda o vínculo (1.5) o domínio destes pequenos grupos relega as outras espécies a um papel secundário.

Capítulo 4

Controlando a Biodiversidade no Modelo do Replicador Aleatório

4.1 O Modelo

A relação entre biodiversidade e funcionamento de determinado ecossistema tem conduzido a calorosos debates em Ecologia e Ciências Ambientais durante a última década. O crescente domínio de ecossistemas por humanos tem os transformado em sistemas depauperados. Devido ao fato de que os ecossistemas coletivamente determinam os processos biogeoquímicos que regulam o sistema terrestre, as consequências ecológicas potenciais da perda da biodiversidade têm gerado um grande interesse, veja [41] e [42].

Por outro lado, uma nova onda de investigações experimentais tem manipulado a riqueza de espécies utilizando modelos de ecossistemas sintetizados em ambientes aquáticos e terrestres, veja [43]. Estes experimentos estão começando a revelar como complexas interações entre espécies podem afetar a estrutura de ecossistemas. Neste capítulo usamos o modelo do replicador aleatório para investigar o efeito de uma intervenção humana em um dado ecossistema. Em nosso modelo esta intervenção é obtida ao impormos o

vínculo de que uma dada fração das espécies exiba um conjunto de características selecionadas previamente. Em seguida fazemos uma análise do efeito deste procedimento sobre a estrutura do ecossistema.

Em nosso modelo as concentrações das espécies são descritas pelas variáveis $x_i, i = 1, \dots, N$; onde N é o número de espécies no ecossistema. Além disto, a dinâmica destas quantidades é governada pela equação de replicadores [19, 21]:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(\mathcal{F}_i - \phi), \quad (4.1)$$

onde $\mathcal{F}_i = -\sum_j J_{ij}x_j$ é a adaptabilidade (*fitness*) da espécie i e ϕ é o multiplicador de Lagrange que mantém o vínculo:

$$\sum_i^N x_i = N, \quad \forall t. \quad (4.2)$$

Cada espécie é caracterizada por um conjunto de p caracteres fenótipos, que são representados pelas variáveis binárias $\xi_i^\nu = \pm 1$, onde $\nu = 1, \dots, p$ [44]. Deste modo, se a espécie i exibe o caractere ν então $\xi_i^\nu = +1$, caso contrário $\xi_i^\nu = -1$. As variáveis ξ_i^ν são variáveis aleatórias e podem ter valores ± 1 com igual probabilidade. Admitimos também que o número de caracteres p é extensivo, ou seja, $p = \alpha N$ com α da ordem de 1. Desta maneira para cada espécie temos um único conjunto de caracteres fenótipos.

Devemos esperar que quanto maior for o número de características que duas espécies distintas tenham em comum maior seja a competição entre ambas pelos recursos do ecossistema. Além disto, de acordo com o princípio da exclusão competitiva [39], duas espécies distintas, vivendo juntas, não podem ocupar o mesmo nicho ecológico. Portanto, esperamos que a interação J_{ij} entre duas espécies seja proporcional ao número de características compartilhadas. Então temos:

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^p \xi_i^\nu \xi_j^\nu, \quad i \neq j. \quad (4.3)$$

Note que se $J_{ij} > 0$ as espécies competem, enquanto que se $J_{ij} < 0$ as espécies cooperam. A equação anterior é a celebrada regra de Hebb [37, 38], bastante investigada nos anos 80 no contexto de redes neurais.

No caso em que as interações são simétricas, $J_{ij} = J_{ji}$, o comportamento assintótico da equação (4.1) é facilmente caracterizado: a dinâmica maximiza a função de Lyapunov ou funcional de adaptabilidade (*fitness*)

$$\mathcal{F}(\{x_i\}) = - \sum_{ij} J_{ij} x_i x_j. \quad (4.4)$$

Portanto, os únicos estados estacionários possíveis são pontos fixos. Neste contexto, o multiplicador de Lagrange que está na equação (4.1) é interpretado como a adaptabilidade (*fitness*) média do sistema, ou seja, $\phi = \frac{1}{N} \sum_i x_i \mathcal{F}_i$. Apesar do comportamento assintótico simples, o regime de equilíbrio pode apresentar algumas características não triviais se o funcional exibir um número muito grande de máximos locais. É válido mencionar também que no equilíbrio, ou seja quando $t \rightarrow +\infty$, os estados estacionários obedecem a distribuição de Gibbs.

Um vínculo adicional deve ser imposto ao sistema se tivermos a intenção de manter, como dissemos anteriormente, uma dada fração das espécies com um conjunto de caracteres selecionados previamente. Este vínculo é dado por:

$$m_\nu = \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\nu x_i, \quad (4.5)$$

para $\nu = 1, \dots, s$; s sendo finito no limite termodinâmico. Perceba que a quantidade $(1 + m_\nu)/2$ representa a fração de espécies que exibe o caractere ν .

A fim de evitar que tenhamos um limite termodinâmico ($N \rightarrow +\infty$) trivial, na expressão da função de partição (veja as seções seguintes), somos obrigados a introduzir o parâmetro de auto-interação $J_{ii} = u$. Este parâmetro impede o crescimento ilimitado de uma das espécies pois descreve uma competição entre indivíduos semelhantes.

Assim sendo, nas seções (4.2), (4.3) e (4.4) tratamos o modelo do replicador aleatório com interações tipo Hebb submetido aos vínculos (4.2) e (4.5). Nestas seções fazemos uma análise relativamente detalhada do modelo, apresentando no apêndice E a maior parte das deduções matemáticas envolvidas.

4.2 Análise Estatístico Mecânica

A função de partição do nosso modelo é dada pela seguinte expressão:

$$Z = \int_0^{+\infty} \prod_i dx_i \delta\left(\sum_{i=1}^N x_i - N\right) \prod_{\nu=1}^s \delta(Nm_\nu - \sum_{i=1}^N \xi_i^\nu x_i) \exp(\beta \mathcal{F}\{x_i\}), \quad (4.6)$$

nesta equação as duas funções delta de Dirac levam em consideração os vínculos (4.2) e (4.5), respectivamente. Neste trabalho estamos interessados no limite em que $\beta \rightarrow +\infty$, onde $\beta = 1/T$. Tal limite é importante pois nesta situação apenas os estados que maximizam $\mathcal{F}$ contribuem para a função de partição.

Como ocorre na Mecânica Estatística de Sistemas Desordenados, a quantidade realmente relevante, no sentido de satisfazer a propriedade de automediância, é o logaritmo da função de partição, veja [26]. Sendo assim devemos determinar:

$$-\beta f = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \langle \ln Z \rangle, \quad (4.7)$$

onde a notação $\langle \cdots \rangle$ designa uma média sobre a distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias ξ_i^ν , $\nu = 1, \dots, p$; para isto veja a equação (3.9). Para determinarmos esta média usamos o método de réplicas, recorrendo a identidade:

$$\langle \ln Z \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \langle Z^n \rangle. \quad (4.8)$$

Nesta relação n é um valor inteiro que representa o número de réplicas, ou seja, o número de cópias idênticas do sistema. Ao considerarmos o limite acima estamos admitindo implicitamente que a quantidade n varia continuamente até 0.

No apêndice E mostramos em detalhes o procedimento que nos conduz a expressão da energia livre. Um ponto que deve ser enfatizado é que os vetores ξ_i^ν , $\nu = 1, \dots, s$ são tratados de maneira diferente dos vetores com padrões não condensados ξ_i^ν , $\nu = s+1, \dots, p$. Neste procedimento seguimos os mesmos passos que [45]. Uma observação importante é que utilizamos a propriedade de automediância sobre os vetores com padrões altos, que aparecem na função de partição nas sobreposições (*overlaps*) com as concentrações das espécies. Utilizando simetria de réplicas a forma da energia livre é:

$$\begin{aligned} -\beta f_{rs} = & 2q\hat{q} + \hat{R} + \sum_{\nu=1}^s m_\nu (\hat{m}_\nu - \beta m_\nu) - \frac{\alpha\beta q}{1 + 2\beta(Q - q)} + \\ & + Q[\hat{Q} - \beta(u - \alpha)] - \frac{1}{2} \ln(\hat{Q} + 2\hat{q}) - \frac{\alpha}{2} \ln[1 + 2\beta(Q - q)] + \\ & + \left\langle \int Dz \ln[e^{\Xi_z^2} \text{erfc}(\Xi_z)] \right\rangle_\xi, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde:

$$\Xi_z = \frac{\hat{R} + \sum_\nu \hat{m}_\nu \xi^\nu - 2\hat{q}^{1/2} z}{2(\hat{Q} + 2\hat{q})^{1/2}}.$$

Note que a expressão da energia livre, equação (4.9), difere da correspondente no apêndice E. Foram feitas as seguintes mudanças de variáveis: $\tilde{q} = 4\hat{q}$, $\tilde{Q} = \hat{Q}$ e $\tilde{P} = \hat{P}$. Utilizamos também a abreviação: $Dz = \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2)$, dizemos que Dz é uma medida gaussiana. A notação $\langle \cdots \rangle_\xi$ se refere a uma média feita com as variáveis aleatórias independentes ξ^ν , que obedecem a distribuição:

$$P(\xi) = \prod_{\nu=1}^s \left[\frac{1}{2} \delta(\xi^\nu - 1) + \frac{1}{2} \delta(\xi^\nu + 1) \right]. \quad (4.10)$$

Do total dos seis parâmetros de ponto de sela, apenas dois deles têm um significado físico bem definido, Q e q . $\hat{R}$ e $\hat{m}_\nu$ são multiplicadores de Lagrange associados com os vínculos (4.2) e (4.5), respectivamente. $\hat{Q}$ e $\hat{q}$ entram nos cálculos como multiplicadores de Lagrange dos dois parâmetros abaixo:

$$Q = \frac{1}{N} \sum_i \langle \langle x_i^2 \rangle_T \rangle \quad (4.11)$$

e

$$q = \frac{1}{N} \sum_i \langle \langle x_i \rangle_T^2 \rangle. \quad (4.12)$$

$\langle \cdots \rangle$ é uma média realizada com acoplamentos fixos (*quenched*) feita com a distribuição (4.10) e $\langle \cdots \rangle_T$ é uma média térmica feita com a distribuição de Gibbs:

$$\mathcal{W}(\{x_i\}) = \delta(N - \sum_i x_i) \prod_{\nu=1}^s \delta(Nm_\nu - \sum_i \xi_i^\nu x_i) \frac{1}{Z} \exp[\beta \mathcal{F}(\{x_i\})]. \quad (4.13)$$

Para obtermos as equações de ponto de sela devemos derivar a expressão da energia livre (4.9) em relação aos parâmetros: $q, Q, \hat{R}, \hat{q}, \hat{Q}$ e $\hat{m}_\nu$. No apêndice E mostramos detalhadamente os cálculos analíticos de tais equações no limite $\beta \rightarrow +\infty$. Como consta no mesmo apêndice é conveniente a introdução das seguintes variáveis auxiliares: $\Delta = \hat{R}/2\hat{q}^{1/2}$, $\hat{M}_\nu = \hat{m}_\nu/2\hat{q}^{1/2}$, $\lambda = (\hat{Q} + 2\hat{q})/\beta$, $r = \hat{q}/\beta^2$ e $v = 2\beta(Q - q)$. Logo as equações de ponto de sela no limite $\beta \rightarrow +\infty$ são:

$$v = \frac{1}{\lambda} \langle \int_{\Delta'}^{+\infty} Dz z(z - \Delta') \rangle_\xi, \quad (4.14)$$

$$1 = \frac{r^{1/2}}{\lambda} \langle \int_{\Delta'}^{+\infty} Dz(z - \Delta') \rangle_\xi, \quad (4.15)$$

$$m_\mu = \frac{r^{1/2}}{\lambda} \langle \xi^\mu \int_{\Delta'}^{+\infty} Dz(z - \Delta') \rangle_\xi, \quad (4.16)$$

$$\lambda = u - \frac{\alpha v}{1 + v}, \quad (4.17)$$

$$Q = \frac{r^{1/2}}{\lambda} [r^{1/2} v - \sum_{\nu=1}^s m_{\nu} \hat{M}_{\nu} - \Delta], \quad (4.18)$$

$$r = \frac{\alpha Q}{(1 + v)^2}, \quad (4.19)$$

onde $\Delta' = \Delta + \sum_{\nu}^s \hat{M}_{\nu} \xi^{\nu}$. Note que as equações de ponto de sela são invariantes em relação a troca $m_{\nu} \rightarrow -m_{\nu}$ e portanto podemos considerar $m_{\nu} \in [0, 1]$ apenas.

4.3 Parâmetros de Ponto de Sela

Ao lado da susceptibilidade v , o parâmetro Q é o mais importante entre todos os parâmetros de ordem. Q possui uma interpretação física bem definida, ele é proporcional a probabilidade de que dois indivíduos sorteados ao acaso, no ecossistema, pertençam a mesma espécie. Na literatura Q/N é referido como índice de Simpson, aqui designaremos Q com tal nome.

Com o propósito de tornarmos a análise mais simples introduzimos uma simplificação no modelo. Esta simplificação consiste em adotarmos o vínculo simétrico, ou seja, $m_{\nu} = m$ para $\nu = 1, \dots, s$. Por consequência a fração de espécies exibindo um dos s caracteres selecionados é $(1 + m)/2$. Disto resulta que $\hat{M}_{\nu} = \hat{M}$ e a variável aleatória relevante torna-se: $\eta = \sum_{\nu}^s \xi^{\nu}$ que tem uma distribuição binomial:

$$P_{\eta} = 2^{-s} \binom{s}{\frac{s+\eta}{2}}, \quad (4.20)$$

e pode tomar os seguintes valores: $-s, -s + 2, \dots, s - 2, s$

É importante investigarmos a situação em que a competição entre indivíduos da mesma espécie é bem maior do que qualquer valor dos acoplamentos, ou seja, quando $u \rightarrow +\infty$. Quando não há vínculo sobre as características das espécies o índice de Simpson Q tende a 1, conforme esperado, veja [5]. Neste limite $\lambda \rightarrow u$, então valores finitos dos parâmetros de ordem físicos podem ser obtidos desde que $\Delta' \rightarrow -\infty$. Esta condição implica que Δ e $\hat{M}$ ambos divergem, portanto é útil introduzirmos uma nova variável $\gamma_0 \equiv \Delta/\hat{M}$ que é dada pela solução da equação:

$$sm = \sum_{\eta \geq -\gamma_0} P_\eta(\gamma_0 + \eta) \eta / \sum_{\eta \geq -\gamma_0} P_\eta(\gamma_0 + \eta). \quad (4.21)$$

Foi verificado numericamente que $\hat{M}$ e m têm sinais opostos. De fato, devido a que $P_\eta = P_{-\eta}$ o único efeito de mudar o sinal de m é a mudança do sinal de $\hat{M}$. De posse do valor de γ_0 , a quantidade $\gamma_1 = -r^{1/2} \hat{M} / \lambda$ é dada por:

$$\gamma_1 = 1 / \sum_{\eta \geq -\gamma_0} P_\eta(\gamma_0 + \eta). \quad (4.22)$$

Observe que a partir da equação (4.18) podemos escrever $Q = \gamma_1(\gamma_0 + sm)$, desde que $v \rightarrow (1/u) \rightarrow 0$. Portanto, de modo geral, para determinarmos Q em função de m deveremos resolver numericamente estas três equações. Entretanto, é válido mencionar que se $\gamma_0 > s$ então as somatórias nas equações (4.21) e (4.22) podem ser resolvidas analiticamente levando a: $\gamma_0 = 1/m$ e $\gamma_1 = m$. Então temos que $Q = 1 + sm^2$ desde que $sm < 1$, o que ocorre sempre para $s = 1$.

Figura 4.1: Recíproco do índice de Simpson como uma função de m no limite $u \rightarrow +\infty$ para (de cima para baixo) $s = 1, 2, 5$ e 10 , independentemente do valor de α . Neste caso $v = 0$.

Na figura (4.1) ilustramos a dependência do recíproco do índice de Simpson Q com m para diferentes valores de s , no limite $u \rightarrow +\infty$. Note que para um determinado valor fixo de m ao aumentarmos s há um crescimento do número de espécies que tornam-se

Figura 4.2: Recíproco do índice de Simpson como uma função de u para $s = 1.0$, $\alpha = 0.2$ e (de cima para baixo para $u > 0.2$ e de baixo para cima para $u < 0.2$) $m = 0, 0.5, 0.8, 0.9$ e 0.99 .

extintas, indicado pelos altos valores de Q . Isto quer dizer que ao aumentarmos o número de características selecionadas previamente o ecossistema perde diversidade.

Agora iremos analisar a situação em que u tem um valor finito. Antes de mais nada recordemos que no caso em que não há o vínculo sobre as características das espécies ocorre uma transição de fase, o sistema passa de um estado onde existe pouca diversidade (índice de Simpson com valores altos) para um estado onde existe grande diversidade (índice de Simpson com valores próximos de um), veja [10] e [11]. Esta descontinuidade é gerada devido ao fato de que a susceptibilidade v toma um valor negativo. Ela acontece quando $\alpha < 1/2$ em $u = \alpha$. Portanto, em tais ecossistemas não há valores intermediários de Q , ou o ecossistema é pobre ou é rico, em termos de diversidade. Nas figuras (4.2) e (4.3) mostramos gráficos de $1/Q$ em função de u para $s = 1$ e $s = 5$, respectivamente. Estes gráficos ilustram o efeito do vínculo (4.5) sobre o ecossistema.

Para obtermos o gráfico de $1/Q$ contra u devemos resolver o conjunto das seis equações de ponto de sela, equações (4.14) - (4.19). As variáveis s, α e m são escolhidas e fixadas. Consideramos Δ como uma variável fixa e tomamos u como uma incógnita; variando Δ podemos determinar gráficos dos parâmetros de ponto de sela em função de u . Primeiramente devemos resolver as integrais nas equações (4.14), (4.15) e (4.16), usando a distribuição (4.20). Realizamos então uma bissecção sobre $\hat{M}$. Inicialmente resolvemos

Figura 4.3: Recíproco do índice de Simpson como uma função de u para $s = 5.0$, $\alpha = 0.2$ e (de cima para baixo em $u = 1.0$) $m = 0, 0.5, 0.6$ e 0.8 . A descontinuidade desaparece para $m > 0.54$.

a integral da equação (4.15) e determinamos $\frac{\lambda}{r^{1/2}}$, em seguida resolvemos a integral da equação (4.14) e encontramos $v\lambda$. Podemos determinar $r^{1/2}v$ através da relação:

$$r^{1/2}v = \frac{\langle \int_{\Delta'}^{+\infty} Dz z(z - \Delta') \rangle_{\eta}}{\langle \int_{\Delta'}^{+\infty} Dz(z - \Delta') \rangle_{\eta}}. \quad (4.23)$$

Com as quantidades anteriores, além de Δ , podemos obter Q através da equação (4.18). Com o auxílio da equação (4.19) podemos encontrar λ e por sua vez v . Com estes parâmetros podemos achar u , recorrendo a (4.17). Finalmente usamos a equação (4.16) para completarmos a bissecção sobre $\hat{M}$.

Uma análise das figuras (4.2) e (4.3) indica um comportamento similar entre o índice de Simpson nestes gráficos e o correspondente ao caso em que $m = 0$, ou seja, onde não há vínculo sobre as características das espécies, veja [10] e [11]. Na presente situação a descontinuidade, quando aparece, ocorre para $\alpha < 1/2$ e em $u = \alpha$, independentemente do valor de m . Observando atentamente a figura (4.3) podemos constatar que para m suficientemente grande a descontinuidade desaparece, neste caso para $m > 0.54$. As equações de ponto de sela admitem uma solução para valores de v que divergem conquanto que λ seja suficientemente pequeno de modo que o produto λv permaneça finito. Assim a equação (4.17) implica que neste limite $u = \alpha$. Podemos então obter um gráfico como

Figura 4.4: Valores de $\alpha \leq 0.5$ abaixo dos quais o parâmetro Q exibe uma descontinuidade em $\alpha = u$ como uma função de m para (de cima para baixo) $s = 2, 3, 5$ e 10 . Para $s = 1$, a descontinuidade está sempre presente.

o da figura (4.4) que indica α em função dos valores limiares de m , ou seja, em função dos valores de m a partir dos quais não há mais descontinuidade. Note que isto acontece para $s > 1$. Para obtermos este gráfico utilizamos o mesmo procedimento descrito acima, porém fixamos v num valor muito grande (da ordem de 10^4) e impomos $u = \alpha$.

4.4 Estrutura do Ecossistema

Para obtermos a distribuição de abundância relativa de espécies na comunidade, partimos da distribuição cumulativa. Explicitamente, a distribuição cumulativa é definida através da seguinte relação:

$$C(x) = \int_0^x P(x') dx'. \quad (4.24)$$

Na expressão anterior $P(x')$ é a densidade de probabilidade para a variável aleatória x' . Note, pela definição, que a distribuição cumulativa é a probabilidade de que a variável x seja encontrada no intervalo $[0, x)$. No apêndice E mostramos como podemos derivar uma expressão para a distribuição cumulativa deste sistema com o vínculo (4.5), no limite em que $\beta \rightarrow +\infty$. A equação resultante é:

$$C(x) = 1 - \frac{1}{2} \langle \text{erfc}[\frac{\Delta' r^{1/2} + \lambda x}{\sqrt{2r}}] \rangle_\eta. \quad (4.25)$$

A partir da distribuição cumulativa podemos derivar a densidade de probabilidade de que a abundância de uma dada espécie escolhida ao acaso seja x , isto é,

$$P(x) = \delta(x)C(0) + \frac{dC(x)}{dx}, \quad (4.26)$$

onde a função delta leva em consideração as espécies extintas.

Como foi feito na seção anterior, determinemos a distribuição cumulativa no limite em que $u \rightarrow +\infty$. Recordemos que neste limite Δ e $\hat{M}$ ambos divergem, portanto, no argumento da função erfc , na equação (4.25), devemos impor $\Delta' r^{1/2} + \lambda x < 0$ e com isto obtemos:

$$C(x) = 1 - \sum_{\eta \geq -\gamma_0 + x/\gamma_1} P_\eta, \quad (4.27)$$

onde P_η é dado pela equação (4.20). A fração de espécies extintas $C(0)$ pode ser calculada explicitamente para $sm < 1$ e resulta em $C(0) = 0$. Utilizando as equações (4.21) e (4.22) podemos, de maneira inteiramente similar ao que foi feito para obtermos o gráfico da figura (4.1), traçar o gráfico da figura (4.5), que ilustra a dependência de $C(0)$ com m , no limite em que $u \rightarrow +\infty$. A partir desta figura podemos constatar que a distribuição de abundância das espécies é dada por uma soma de deltas, $P(x) = C(0)\delta(x) + \sum'_\eta a_\eta \delta(x - x_\eta)$ com $x_\eta = \gamma_1(\gamma_0 + \eta)$, e a soma é restrita a valores de η para os quais $x_\eta > 0$. Observe

Figura 4.5: Fração de espécies extintas como uma função de m no limite $u \rightarrow +\infty$ para (de cima para baixo) $s = 20, 10, 5$ e 2 . Para $sm < 1$ encontramos $C(0) = 0$ e para $m = 1.0$ $C(0) = 1 - 2^{-s}$.

ainda que para $m = 1$ apenas $\eta = s$ contribui na somatória da equação anterior. Portanto, temos que a fração de espécies extintas ($C(0)$) é dada por $1 - 2^{-s}$, para $m = 1$.

Na situação em que $s = 1$ podemos derivar analiticamente expressões para γ_0 e γ_1 e, desta maneira, encontrar uma equação para a densidade de probabilidade. Portanto, para $s = 1$, a densidade de probabilidade tem a forma:

$$P(x) = \frac{1}{2}\delta(x - 1 + m) + \frac{1}{2}\delta(x - 1 - m). \quad (4.28)$$

O primeiro pico está associado com $\eta = \xi^1 = -1$, de tal modo que $x_{-1} = 1 - m$ é a abundância de espécies que não exibem o caractere $\nu = 1$. O segundo pico está relacionado com o outro tipo de espécie, que tem concentração $x_1 = 1 + m$. Na impossibilidade de calcularmos analiticamente os valores dos coeficientes a_η (exceto para o caso $s = 1$) exibimos na figura (4.6) estes coeficientes associados aos respectivos valores x_η , junto com a fração de extinção $C(0)$ em $x = 0$, para $s = 5$, $m = 0.2$ e $m = 0.5$. Note que de maneira geral o número de impulsos é menor do que os valores possíveis de η , ao contrário do que ocorre com $C(0)$. Isto acontece devido a restrição na somatória sobre η mencionada anteriormente. As espécies indexadas por η , com abundância x_η , têm $(\eta + s)/2$ das s características selecionadas. Assim, por exemplo, para os dados mostrados na figura

Figura 4.6: Amplitudes nos valores de abundância permitidos no limite $u \rightarrow +\infty$ para $s = 5$, $m = 0.2$ (linhas cheias) e $m = 0.5$ (linhas tracejadas). Em ambos os casos, apenas espécies caracterizadas por $\eta = 1, 3$ e 5 contribuem para a composição do ecossistema.

(4.6) apenas as espécies que possuem 3, 4 e 5 das cinco características selecionadas estão presentes no ecossistema.

Passemos a considerar o caso em que u tem valor finito. Na figura (4.7) exibimos o gráfico da fração de extinção $C(0)$ em função do parâmetro de controle u , com $s = 1$ e $\alpha = 0.2$. Uma comparação entre esta figura e a figura (4.2) nos permite concluir que há uma forte correlação entre $1/Q$ e $1 - C(0)$, o que justifica o nosso uso do índice de Simpson como uma medida da diversidade do ecossistema. Note também que para valores de u menores que α o vínculo m tem apenas um pequeno efeito sobre a distribuição de abundâncias. Para $u > \alpha$ e m próximo de 1 aproximadamente metade das espécies são extintas, ou seja, as espécies que não possuem a característica $\nu = 1$, desde que este é o único modo de satisfazer aos vínculos (4.2) e (4.5) simultaneamente.

Nas figuras (4.8) e (4.9) ilustramos as partes das contribuições finitas para as distribuições de abundância relativa das espécies nos casos em que $s = 1$ e $s = 5$, respectivamente, utilizando valores de u e de α para os quais os parâmetros de ponto de sela originados de simetria de réplicas são localmente estáveis. Observe, de acordo com estas figuras, que a distribuição torna-se multimodal para valores intermediários de m . Neste

Figura 4.7: Fração de espécies extintas como uma função do parâmetro de controle u para $s = 1$, $\alpha = 0.2$ e (de baixo para cima em $u = 1$) $m = 0, 0.4, 0.6, 0.8$ e 0.99 .

caso, com um valor finito de u , os picos aparecem suavizados devido aos ruídos que resultam dos valores não negligenciáveis dos acoplamentos, ao contrário do que ocorre quando $u \rightarrow +\infty$.

Figura 4.8: Parte finita da distribuição de abundância para $s = 1$, $\alpha = 0.2$, $u = 0.4$ (de cima para baixo em $x = 1$), $m = 0, 0.4, 0.6, 0.8$ e 0.99 .

Figura 4.9: Parte finita da distribuição de abundância para $s = 5$, $\alpha = 0.1$, $u = 0.4$ (de cima para baixo em $x = 1$), $m = 0.3, 0.4, 0.6$ e 0.8 .

Capítulo 5

Conclusões

Nesta tese o nosso objetivo foi o de investigar as propriedades de equilíbrio de ecossistemas, formados por um número arbitrariamente grande de espécies, utilizando o modelo do replicador aleatório. Empregando técnicas analíticas de campo médio de Física Estatística, especificamente as do modelo SK, analisamos o referido modelo em três cenários distintos. No primeiro deles estudamos as consequências de interações variáveis sobre a estrutura do ecossistema, recorrendo ao método de réplicas generalizado. Através de uma escolha apropriada das equações que governam o processo estocástico (2.2) foi possível definir um hamiltoniano efetivo e então concluir que tais equações são as equações de Langevin. Portanto, no estado estacionário ($t \rightarrow +\infty$), o sistema obedece a distribuição de Gibbs. Neste contexto, os acoplamentos entre os diferentes pares de espécies e as suas respectivas concentrações evoluem no tempo em escalas bastante distintas. O processo ocorre de tal maneira que na escala de tempo das interações as variáveis de spin estão sempre em equilíbrio. A partir desta constatação descobrimos uma nova interpretação para o índice de réplicas n , como sendo a razão entre uma temperatura característica do sistema de interações (β' , onde: $\beta' = -\epsilon\tilde{\beta}$) e a correspondente das concentrações das espécies (β). Examinamos, em particular, os efeitos de uma temperatura β' (onde: $\beta' = -\epsilon\tilde{\beta}$) finita sobre o ecossistema em relação ao caso temperado (*quenched*), para o qual $\beta' = 0$.

No segundo cenário estudamos as implicações de uma temperatura (β) finita sobre as propriedades de equilíbrio do ecossistema em duas situações limites, o caso recozido (*annealed*) e o caso temperado (*quenched*). No caso recozido (*annealed*) as variáveis de spin (escala ecológica) mudam tão rapidamente quanto as características das espécies

(escala evolucionária). No caso temperado (*quenched*) as interações estão fixas e as únicas quantidades que podem variar são as concentrações das espécies. Este quadro é o mais realístico e devemos calcular uma média, sobre as interações, do logaritmo da função de partição, usando o método de réplicas (3.17). Devemos ainda mencionar, que nesta abordagem, utilizamos o princípio da exclusão competitiva ou princípio de Gause, isto é, modelamos os acoplamentos entre as diferentes espécies através da prescrição (3.1). A temperatura é introduzida no modelo através de um ruído branco gaussiano adicionado à equação de replicadores. Este termo pode ser interpretado como um fluxo de migrantes entre o ecossistema considerado e o ambiente (habitat) externo. Entretanto, este fluxo de espécies deve ocorrer de tal modo que a soma das biomassas das espécies componentes não mude com o tempo. É oportuno lembrar que é precisamente este ruído que possibilita a análise do problema através das ferramentas da Mecânica Estatística de equilíbrio.

Por último, verificamos o impacto, sobre as propriedades de equilíbrio da comunidade, de intervenções humanas no ecossistema. Estas manipulações são obtidas exigindo-se que, no equilíbrio, uma quantidade determinada dos indivíduos apresentem uma das características selecionadas previamente. Aqui também fazemos uso da regra de Hebb (3.1) para descrever as interações e estamos apenas interessados na circunstância de acoplamentos fixos, isto é, no caso temperado (*quenched*). Além disto, a nossa investigação está limitada ao estado fundamental ($\beta \rightarrow +\infty$).

Deste modo, de acordo com o que foi exposto no segundo capítulo desta tese, podemos concluir que o sinal de ϵ tem um papel fundamental sobre as propriedades de equilíbrio do ecossistema, a saber, se predomina o caráter cooperativo ou o competitivo. Para perceber este fato basta recordarmos que a média das interações é dada por: $\langle J_{ij} \rangle = \epsilon \tilde{\beta} / N$. Como $\tilde{\beta}$ é uma quantidade maior ou igual a zero, o sinal de ϵ determina tal regime.

Na situação em que ($\beta' > 0$, onde: $\beta' = -\epsilon \tilde{\beta}$), as equações (2.2) determinam a formação de alguns poucos pares de espécies que cooperam fortemente. Portanto, desde que não esqueçamos do vínculo (1.5), isto indica uma tendência de que, a cada ciclo, as espécies com as maiores concentrações proliferem e dominem o ecossistema. Em particular, para valores pequenos do parâmetro de competição entre indivíduos semelhantes (u), este quadro leva a uma transição abrupta entre um estado com diversidade finita (Q finito) e outro com diversidade nula ($Q \rightarrow +\infty$). Portanto, quando consideramos a dinâmica mais lenta (a dos acoplamentos), o efeito de uma temperatura ($\beta' > 0$, onde: $\beta' = -\epsilon \tilde{\beta}$) finita sobre a comunidade é o de reduzir a sua diversidade. O caso onde predomina o caráter competitivo ($\beta' < 0$, onde: $\beta' = -\epsilon \tilde{\beta}$) merece maior atenção. Observe, de acordo com as equações (2.2) e desprezando-se o termo que limita o crescimento das interações e o ruído

gaussiano, que a taxa com que varia os acoplamentos (J_{ij}) depende das concentrações das espécies i e j . Portanto, quanto maior for a abundância de uma determinada espécie tanto maior tende a se tornar a sua competição com as demais espécies, o que implica na sua redução. Este mecanismo impede o crescimento ilimitado de um pequeno grupo de espécies e portanto, promove a diversidade do ecossistema. Entretanto, há um desacordo entre este raciocínio e os resultados exibidos pelos gráficos (2.2) e (2.6). Argumentamos que a transição descontínua (no caso $\beta' < 0$, onde: $\beta' = -\epsilon\tilde{\beta}$), sugerida por estas figuras para valores pequenos de u , ocorre além do domínio de estabilidade da solução com simetria de réplicas, tema não discutido nesta tese, veja [2].

Em conformidade com as discussões do capítulo três desta tese, os casos recozido (*annealed*) e temperado (*quenched*) exibem três regimes distintos em função da complexidade das espécies α . Encontramos, no primeiro regime, uma fase fortemente cooperativa com $Q \approx 1$. O segundo regime é altamente desordenado com índice de Simpson próximo de 2. Por último, temos um regime predominantemente competitivo, mas no caso recozido (*annealed*) temos $Q \rightarrow +\infty$.

Para melhor entender o efeito de uma temperatura finita neste modelo, em particular para o caso temperado (*quenched*), recordemos o que acontece quando há uma temperatura nula, ou seja, quando não existe ruído. Nesta situação ocorre uma transição entre um estado com grande diversidade para um outro com pequena diversidade. Dito em outros termos, ou o sistema apresenta um número muito grande de espécies ou existe um elevado número de espécies extintas. Recordemos que o parâmetro de ordem relevante, neste caso, é o índice de Simpson; valores elevados desta quantidade indicam baixa diversidade e, no extremo oposto, quando $Q \approx 1$ o sistema apresenta grande diversidade. Especificamente, a transição procede em $u = \alpha$, desde que $\alpha < 0.5$ [10]. O efeito de um ruído estático apenas suaviza esta transição, ou seja, a transição torna-se contínua [11]. O ruído rápido, aqui considerado, faz com que tal transição aconteça mesmo para um valor arbitrário de u , conquanto que aumentemos a temperatura. A figura (3.6) ilustra bem a riqueza do diagrama de fase. Esta gravura mostra a dependência, com a temperatura, do parâmetro α , para alguns valores do parâmetro u , onde há a transição de fase. Esta transição desaparece no ponto crítico T_e , linha tracejada.

As consequências, para a estrutura do ecossistema, de uma intervenção humana podem ser apreciadas através da análise do comportamento do índice de Simpson (Q) e da fração de espécies extintas no equilíbrio ($C(0)$) com o parâmetro de controle (u). Quando não há manipulação, isto é, quando a fração de espécies portadoras de determinadas características ou o número de tais características é nulo ($m = 0$ ou $s = 0$), esperamos que,

para valores elevados da pressão de cooperação (u), o índice de Simpson se aproxime de 1; o que indica grande diversidade. Observando a figura (4.1) podemos constatar que o impacto da interferência provoca o empobrecimento do ecossistema, mesmo para valores arbitrariamente grandes de u . Em outras palavras, ainda de acordo com esta figura, ao fixarmos m (ou s) e ao aumentarmos s (ou m) o índice de Simpson cresce, o que revela um decréscimo da diversidade.

Para valores finitos da pressão de cooperação (u) e na situação em que não há manipulação, como mencionamos anteriormente, ocorre uma transição de fase descontínua entre um regime com grande diversidade para outro com baixa diversidade, em $u = \alpha$ para $\alpha < 0.5$ [10]. Podemos perceber, por uma inspeção da figura (4.3), que o efeito de aumentarmos a manipulação, particularmente m , é o de fazer desaparecer a descontinuidade na transição de fase. Além disto, as figuras (4.2), (4.3) e (4.7) revelam que o efeito da intervenção é notadamente mais forte na região em que $u > \alpha$, sendo desprezível na região complementar.

A regra de Hebb, implicitamente, leva em consideração a complementaridade entre espécies com diferentes características. Dizemos que duas espécies são complementares se a sua coexistência resulta numa adaptabilidade (*fitness*) média maior do que se estas tivessem crescido sozinhas [46]. Deste modo, selecionando uma dada espécie artificialmente, promovemos indiretamente a espécie complementar. Especificamente, no caso de uma monocultura ($s = 1$), certamente surgirão, na comunidade, espécies que não apresentam o caractere selecionado, portanto, não bem-vindas. Esta análise não se confirma para uma cultura de umas poucas espécies ($s > 1$).

Apêndice A

Equação de Replicadores

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais acopladas, também conhecido como equação de replicadores:

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = x_i(t)(F_i - \bar{F}); \quad (\text{A.1})$$

onde: $\sum_{i=1} x_i = 1$, $x_i \geq 0$. Também temos que $\partial F / \partial x_i = F_i$ e $\bar{F} = \sum_i x_i F_i$.

Neste apêndice pretendemos demonstrar que o sistema de equações diferenciais (A.1) maximiza o funcional de *fitness* $F(x_1, \dots, x_N)$, ou seja, F é uma função de Lyapunov do sistema (A.1).

Observe, antes de mais nada, que se inicializarmos o nosso cálculo numérico com $\sum_{i=1} x_i = 1$, o sistema de equações (A.1) manterá o vínculo. Para verificar isto basta somar ambos os membros da expressão anterior sobre o índice i .

A nossa demonstração está relacionada ao cálculo da derivada total de F em relação ao tempo. Esta derivada tem a forma:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}.$$

Substituindo a equação (A.1) na expressão anterior, temos:

$$\frac{d}{dt}F = \sum_{i=1}^N F_i x_i (F_i - \bar{F}).$$

Que pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt}F = \sum_{i=1}^N x_i F_i^2 - \overline{F}^2.$$

Se utilizarmos o vínculo $\sum_{i=1} x_i = 1$, podemos reescrever a expressão anterior na forma:

$$\frac{d}{dt}F = \sum_{i=1}^N x_i (F_i^2 - \overline{F}^2).$$

Por sua vez podemos ver facilmente que:

$$\frac{d}{dt}F = \sum_{i=1}^N x_i (F_i^2 - 2 \cdot F_i \cdot \overline{F} + \overline{F}^2).$$

Então finalmente:

$$\frac{d}{dt}F = \sum_{i=1}^N x_i (F_i - \overline{F})^2.$$

Como as concentrações das espécies (x_i) são grandezas sempre positivas (ou se anulam), e a quantidade $(F_i - \overline{F})^2$ também, isto implica em que a derivada de F em relação ao tempo é sempre positiva, portanto, o sistema de equações diferenciais (A.1) maximiza o funcional F.

Apêndice B

O Modelo Gaussiano

Cálculo das Equações Estacionárias para o Caso β Finito

Neste apêndice iremos resolver o modelo gaussiano para o caso geral, isto é, para n real. O hamiltoniano é:

$$\mathcal{H}_J\{x_i\} = \sum_{i<j} J_{ij}x_ix_j + \frac{u}{2} \sum_i x_i^2; \quad (\text{B.1})$$

com o mesmo vínculo $\sum_i x_i = N$.

Sabemos também que:

$$Z^n = \int_0^{+\infty} \prod_{ia} dx_{ia} \left[\prod_a \delta \left(N - \sum_i x_{ia} \right) \right] \exp \left(-\beta \frac{u}{2} \sum_{ia} x_{ia}^2 - \beta \sum_{i<j,a} J_{ij} x_{ia} x_{ja} \right). \quad (\text{B.2})$$

Na equação anterior e nas que seguem, a, b são os índices de réplicas e tais que $a, b \in [1, \dots, n]$, onde n é o número de cópias idênticas do sistema. Podemos então deduzir que:

$$\langle Z^n \rangle = \int_0^{+\infty} \prod_{ia} dx_{ia} \left[\prod_a \delta \left(N - \sum_i x_{ia} \right) \right] \exp(-\beta \frac{u}{2} \sum_{ia} x_{ia}^2) \exp \left(+\frac{\beta^2}{2N} \sum_{i<j} \left[\sum_a x_{ia} x_{ja} \right]^2 \right). \quad (\text{B.3})$$

Onde a média anterior é realizada sobre as interações com a seguinte distribuição:

$$P(J_{ij}) = \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \exp\left(-\frac{NJ_{ij}^2}{2}\right). \quad (\text{B.4})$$

Com o emprego de funções delta, chegamos até a expressão abaixo:

$$\begin{aligned} \langle Z^n \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_a dQ_a \exp\left(-\beta N \frac{u}{2} \sum_a Q_a + \frac{N\beta^2}{4} \sum_a Q_a^2\right) \times \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{a<b} dq_{ab} \exp\left(\frac{N\beta^2}{2} \sum_{a<b} q_{ab}^2\right) \int_0^{+\infty} \prod_{ia} dx_{ia} \left[\prod_a \delta\left(N - \sum_i x_{ia}\right) \right] \times \\ &\times \left[\prod_a \delta\left(Q_a - \sum_i x_{ia}^2/N\right) \right] \left[\prod_{a<b} \delta\left(q_{ab} - \sum_i x_{ia}x_{ib}/N\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Analisemos separadamente a última integral:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \prod_{ia} dx_{ia} \left[\prod_a \delta\left(N - \sum_i x_{ia}\right) \right] \left[\prod_a \delta\left(Q_a - \sum_i x_{ia}^2/N\right) \right] \times \\ &\times \left[\prod_{a<b} \delta\left(q_{ab} - \sum_i x_{ia}x_{ib}/N\right) \right]. \end{aligned}$$

Usando a representação integral, ficamos com:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_a \frac{dR_a}{2\pi} \exp\left(+i \sum_a R_a N\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_a \frac{d\hat{Q}_a}{2\pi} \right] \exp\left(+i \sum_a \hat{Q}_a Q_a\right) \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{a<b} \frac{d\hat{q}_{ab}}{2\pi} \right] \exp\left(+i \sum_{a<b} \hat{q}_{ab} q_{ab}\right) \times \\ &\times \int_0^{+\infty} \prod_{ia} dx_{ia} \exp\left(-i \sum_{ia} R_a x_{ia} - i \sum_{ia} \hat{Q}_a x_{ia}^2/N - i \sum_{a<b,i} \hat{q}_{ab} x_{ia}x_{ib}/N\right). \end{aligned}$$

Após algumas manipulações algébricas a última integral pode ser posta na seguinte forma:

$$J = \left\{ \int_0^{+\infty} \prod_a dx_a \exp\left(-i \sum_a R_a x_a - i \sum_a \hat{Q}_a x_a^2/N - i \sum_{a<b} \hat{q}_{ab} x_a x_b/N\right) \right\}^N.$$

Com um pouco de esforço algébrico e usando-se as expressões de I e J como calculadas anteriormente, não é muito difícil encontrarmos a seguinte relação abaixo válida para $\langle Z^n \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle Z^n \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{a<b} dq_{ab} \right] \left[\prod_{a<b} \frac{Nd\hat{q}_{ab}}{2\pi i} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_a dQ_a \right] \left[\prod_a \frac{d\hat{R}_a}{2\pi i} \right] \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_a \frac{Nd\hat{Q}_a}{2\pi i} \right] \exp \left(\frac{N\beta^2}{2} \sum_{a<b} q_{ab}^2 - N\beta \frac{u}{2} \sum_a Q_a \right) \times \\ &\times \exp \left(+\frac{N\beta^2}{4} \sum_a Q_a^2 + N \sum_a \hat{R}_a + N \sum_a \hat{Q}_a Q_a + N \sum_{a<b} \hat{q}_{ab} q_{ab} + N \ln G \right). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Onde G é dada por:

$$G(\hat{R}_a, \hat{Q}_a, \hat{q}_{ab}) = \int_0^{+\infty} \left[\prod_a dx_a \right] \exp \left(-\sum_a \hat{R}_a x_a - \sum_a \hat{Q}_a x_a^2 - \sum_{a<b} \hat{q}_{ab} x_a x_b \right).$$

Utilizando-se o método do ponto de sela [29], recorrendo a equação (2.8) e desprezando-se constantes aditivas irrelevantes da ordem de $N^2 \ln N$, podemos resolver a relação (B.6) para obtermos:

$$\begin{aligned} -\tilde{\beta}\tilde{F}/N &= \frac{\beta^2}{2} \sum_{a<b} q_{ab}^2 - \beta \frac{u}{2} \sum_a Q_a + \frac{\beta^2}{4} \sum_a Q_a^2 + \sum_a \hat{R}_a \\ &+ \sum_a \hat{Q}_a Q_a + \sum_{a<b} \hat{q}_{ab} q_{ab} + \ln G. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Na expressão acima G é dada por:

$$G = \int_0^{+\infty} \left[\prod_a dx_a \right] \exp \left(-\sum_a \hat{R}_a x_a - \sum_a \hat{Q}_a x_a^2 - \sum_{a<b} \hat{q}_{ab} x_a x_b \right). \quad (\text{B.8})$$

Para resolvermos a integral anterior, lançamos mão da simetria de réplicas. Não é difícil perceber, por uma inspeção das duas últimas equações, que os parâmetros de ponto de sela são invariantes por uma permutação dos índices de réplicas. Assim temos: $q_{ab} = q$, $Q_a = Q$, $\hat{R}_a = \hat{R}$, $\hat{Q}_a = \hat{Q}$ e $\hat{q}_{ab} = \hat{q}$. Portanto, fazendo uso da transformada gaussiana e trabalhando as equações anteriores poderemos obter:

$$-\tilde{\beta}\tilde{f}/n = (n-1)\frac{\beta^2}{4}q^2 - \beta\frac{u}{2}Q + \frac{\beta^2}{4}Q^2 + \hat{R} + \hat{Q}Q - \frac{(n-1)}{2}\hat{q}q +$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi}{\hat{Q}+\hat{q}/2}\right)+\frac{1}{n}\ln\int_{-\infty}^{+\infty}Dz\left\{\frac{\exp(\Xi_z^2)}{2}\text{erfc}(\Xi_z)\right\}^n. \quad (\text{B.9})$$

Onde:

$$\Xi_z = \frac{\hat{R} - \hat{q}^{1/2}z}{2(\hat{Q} + \hat{q}/2)^{1/2}}$$

e

$$Dz = \frac{dz \exp(-\frac{z^2}{2})}{(2\pi)^{1/2}}.$$

Na equação (B.9) foi feita a mudança de variável: $\hat{q} \rightarrow -\hat{q}$. Para reduzirmos a dependência de Ξ_z de três para duas variáveis, façamos as seguintes transformações: $\hat{R}/\sqrt{\hat{q}} \rightarrow \Delta$ e $\sqrt{\hat{q}}/2\sqrt{\hat{Q} + \hat{q}/2} \rightarrow \eta$. Assim obtemos:

$$\begin{aligned} -\tilde{\beta}\tilde{f}/n &= (n-1)\frac{\beta^2}{4}q^2 - \beta\frac{u}{2}Q + \frac{\beta^2}{4}Q^2 + \Delta\sqrt{\hat{q}} + \left(\frac{1}{\eta^2} - 1\right)Q\frac{\hat{q}}{2} - (n-1)q\frac{\hat{q}}{2} \\ &+ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4\pi\eta^2}{\hat{q}}\right) + \frac{1}{n}\ln\int_{-\infty}^{+\infty}Dz\left\{\frac{\exp(\Xi_z^2)}{2}\text{erfc}(\Xi_z)\right\}^n. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Onde agora:

$$\Xi_z = \eta(\Delta - z).$$

Para obtermos as equações de ponto de sela no caso em que β é finito, basta derivarmos a expressão da energia livre em relação aos diferentes parâmetros de ordem. Procedendo desta maneira as equações estacionárias são as seguintes:

$$q - \frac{\hat{q}}{\beta^2} = 0. \quad (\text{B.11})$$

$$-\beta\frac{u}{2} + \beta^2\frac{Q}{2} - \left(1 - \frac{1}{2\eta^2}\right)\frac{\hat{q}}{2} = 0. \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\Delta}{2\sqrt{\hat{q}}} - \left(1 - \frac{1}{2\eta^2}\right)\frac{Q}{2} - (n-1)\frac{q}{2} - \frac{1}{2\hat{q}} = 0. \quad (\text{B.13})$$

$$\sqrt{\hat{q}} + \eta \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} Dz H^{n-1}(\Xi_z) H'(\Xi_z)}{\int_{-\infty}^{+\infty} Dz H^n(\Xi_z)} = 0. \quad (\text{B.14})$$

$$-\frac{Q\hat{q}}{2\eta^3} + \frac{1}{\eta} + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} Dz H^{n-1}(\Xi_z)(\Delta - z)H'(\Xi_z)}{\int_{-\infty}^{+\infty} Dz H^n(\Xi_z)} = 0. \quad (\text{B.15})$$

Onde definimos:

$$H(\Xi_z) = \frac{\exp(\Xi_z^2)}{2} \text{erfc}(\Xi_z).$$

Cálculo das Equações Estacionárias para o Caso $\beta \rightarrow +\infty$

Para obtermos as equações de ponto de sela no limite em que $\beta \rightarrow +\infty$ precisamos apenas reescalar os parâmetros: $\eta \rightarrow \sqrt{\beta}\eta$, $\hat{q} \rightarrow \beta^2\hat{q}$ e usarmos as definições: $n = \beta'/\beta$ e $v = \beta(Q - q)$ nas equações (B.11) - (B.15). Encontramos então:

$$-\frac{u}{2} + \frac{Q}{4\eta^2} + \frac{v}{2} = 0. \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\Delta}{2\sqrt{Q}} + \frac{Q}{4\eta^2} - \frac{v}{2} - \frac{\beta'Q}{2} = 0. \quad (\text{B.17})$$

$$\sqrt{Q} + 2\eta^2 \frac{\int_{\Delta}^{+\infty} Dz \exp[\beta'\eta^2(\Delta - z)^2](\Delta - z)}{\int_{-\infty}^{\Delta} Dz + \int_{\Delta}^{+\infty} Dz \exp[\beta'\eta^2(\Delta - z)^2]} = 0. \quad (\text{B.18})$$

$$-\frac{Q^2}{2\eta^2} + 2\eta^2 \frac{\int_{\Delta}^{+\infty} Dz \exp[\beta'\eta^2(\Delta - z)^2](\Delta - z)^2}{\int_{-\infty}^{\Delta} Dz + \int_{\Delta}^{+\infty} Dz \exp[\beta'\eta^2(\Delta - z)^2]} = 0. \quad (\text{B.19})$$

Para simplificarmos ainda mais as equações anteriores, basta eliminarmos η^2 usando a expressão (B.16). Fazendo isto resulta:

$$(u - v) = Q^{1/2} \frac{\phi_1}{\int_{-\infty}^{\Delta} Dz + \phi_0}. \quad (\text{B.20})$$

$$(u - v)^2 = \frac{\phi_2}{\int_{-\infty}^{\Delta} Dz + \phi_0}. \quad (\text{B.21})$$

$$\Delta = Q^{1/2}(2v - u + \beta'Q). \quad (\text{B.22})$$

Nas equações anteriores temos:

$$\phi_m = \int_{\Delta}^{+\infty} Dz \exp\left[\frac{\alpha}{2}(z - \Delta)^2\right] (z - \Delta)^m$$

onde: $\alpha = \beta'Q/(u - v)$.

Cálculo da Distribuição Cumulativa das Espécies

Para calcularmos a distribuição de abundância das espécies partimos da distribuição cumulativa, $C(y)$. Para obtermos tal função adicionamos o termo extensivo $h \sum_i \Theta(x - x_i)$ (sendo $\Theta(x)$ a função de Heaviside) ao hamiltoniano (B.1) e então derivamos a expressão da energia livre resultante em relação a h e em seguida impomos $h = 0$. Não apresentaremos aqui todos os passos envolvidos na determinação de $C(y)$, o cálculo é essencialmente o mesmo até a equação (B.8). Portanto, partimos da seguinte relação:

$$G = \int_0^{+\infty} \left[\prod_a dx_a \right] \exp \left(- \sum_a \hat{R}_a x_a - \sum_a \hat{Q}_a x_a^2 - \sum_{a < b} \hat{q}_{ab} x_a x_b - \beta \sum_a h \Theta(x - x_a) \right). \quad (\text{B.23})$$

Utilizando simetria de réplicas e a transformada gaussiana podemos, depois de uma certa álgebra, demonstrar:

$$G = \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \left[\int_0^{+\infty} dx \exp \left(-\hat{R}x - \hat{Q}x^2 - \frac{\hat{q}}{2}x^2 + \sqrt{\hat{q}}zx - \beta h \Theta(y - x) \right) \right]^n.$$

Derivando a expressão da energia livre (B.9) em relação a h , temos:

$$C(y) = -\frac{d \ln G}{dh} = n\beta \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \left[\int_0^{+\infty} dx \exp(\dots) \right]^{n-1} \int_0^y dx \exp(\dots) / G.$$

Onde a derivada acima deve ser calculada em $h = 0$ e usamos a notação: $\exp(\dots) = \exp \left(-\hat{R}x - \hat{Q}x^2 - \frac{\hat{q}}{2}x^2 + \sqrt{\hat{q}}zx - \beta h \Theta(y - x) \right)$. E então temos:

$$C(y) = -\frac{d \ln G}{dh} = n\beta \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \left[\int_0^{+\infty} dx \exp(\dots) \right]^{n-1} \int_y^{+\infty} dx \exp(\dots) / G \right).$$

A derivada anterior deve ser calculada em $h = 0$. A integral em x , com o limite inferior y , é dada por:

$$\int_y^{+\infty} dx \exp(\dots) = \frac{\sqrt{\pi}\eta \exp(\Xi_z^2)}{\sqrt{\hat{q}}} \text{erfc}\left(\frac{\sqrt{\hat{q}}}{2\eta}y + \Xi_z\right).$$

Estamos interessados no limite em que $\beta \rightarrow +\infty$. Portanto, devemos reescalar os parâmetros do mesmo modo que anteriormente: $\eta \rightarrow \sqrt{\beta}\eta$, $\hat{q} \rightarrow \beta^2\hat{q}$ e também usamos $n = \frac{\beta'}{\beta}$. Por conseguinte, devemos impor a condição de que o argumento da função erfc seja menor que zero, pois caso contrário a última integral se anularia. Logo:

$$\frac{\sqrt{\hat{q}}}{2\eta}y + \eta(\Delta - z) < 0 \quad \Rightarrow \quad z > \frac{u - v}{\sqrt{Q}}y + \Delta.$$

Na última passagem utilizamos a equação (B.16) e o fato de que no limite de temperatura nula $\hat{q} \rightarrow q$ e $q \rightarrow Q$. Finalmente:

$$C(y) = 1 - \frac{\int_{\Delta+y(u-v)/Q^{1/2}}^{+\infty} Dz \exp \left[\frac{\alpha}{2}(z - \Delta)^2 \right]}{\int_{-\infty}^{\Delta} Dz + \phi_0}. \quad (\text{B.24})$$

Apêndice C

Distribuição das Interações

Dedução do Primeiro Momento

Nesta seção iremos deduzir as expressões para o primeiro e o segundo momentos da distribuição de interações entre diferentes espécies, $M_m = \frac{1}{N} \langle \sum_{i < j} J_{ij}^m \rangle$, com $m = 1$ e 2 . Começamos com o primeiro momento M_1 ; precisamos relembrar a equação (2.2):

$$\tau \frac{d}{dt} J_{ij} = \frac{\epsilon}{N} \langle x_i x_j \rangle_J - \mu J_{ij} + \frac{1}{\sqrt{N}} \eta_{ij}(t), \quad i < j. \quad (\text{C.1})$$

Somando-se, na equação acima, ambos os membros em i e j de tal modo que $i < j$ e sem esquecer que o ruído gaussiano η_{ij} tem média nula, podemos verificar que:

$$\frac{1}{N} \sum_{i < j} \langle x_i x_j \rangle_J = \frac{1}{2} (N - Q).$$

Onde nesta última passagem usamos a relação (2.15) e o vínculo (1.5). Assim sendo, podemos demonstrar que:

$$M_1 = -\frac{\beta'}{2N} (N - Q). \quad (\text{C.2})$$

Dedução do Segundo Momento

Para deduzirmos a expressão para o segundo momento M_2 precisamos recordar a seguinte fórmula:

$$\begin{aligned}
\tilde{Z} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i < j} dJ_{ij} [Z_{\mathbf{J}}\{x_i\}]^n \exp \left(-\frac{1}{2} \tilde{\beta} N \mu \sum_{i < j} J_{ij}^2 \right) \\
&= \left(\frac{2\pi}{\tilde{\beta} N \mu} \right)^{N(N-1)/4} \langle [Z_{\mathbf{J}}\{x_i\}]^n \rangle.
\end{aligned} \tag{C.3}$$

M_2 será obtido derivando-se o logaritmo da expressão acima em relação a μ e impondo $\mu = 1/\tilde{\beta}$, no final do cálculo. Formalmente, podemos então escrever a seguinte relação para o segundo momento:

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{d \ln \tilde{Z}}{d\mu} = -\frac{1}{2} \tilde{\beta} N^2 M_2.$$

Aqui cabe uma observação. Do modo como foi deduzida, a relação (B.10) não apresenta dependência com μ . Isto acontece devido a que fizemos $\mu = 1/\tilde{\beta}$ desde a expressão da distribuição (B.4). Se ao invés disto tivéssemos escolhido a seguinte distribuição não normalizada:

$$P(J_{ij}) = \exp \left(-\frac{1}{2} \tilde{\beta} N \mu J_{ij}^2 \right),$$

não haveriam mudanças substanciais na dedução e na fórmula da energia livre (B.10). Esta última resultaria:

$$\begin{aligned}
-\tilde{\beta} \tilde{f}/n &= (n-1) \frac{\beta^2}{4\tilde{\beta}\mu} q^2 - \beta \frac{u}{2} Q + \frac{\beta^2}{4\tilde{\beta}\mu} Q^2 + \Delta \sqrt{\hat{q}} + \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right) Q \frac{\hat{q}}{2} - (n-1) q \frac{\hat{q}}{2} \\
&+ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4\pi\eta^2}{\hat{q}} \right) + \frac{1}{n} \ln \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \left\{ \frac{\exp(\Xi_z^2)}{2} \text{erfc}(\Xi_z) \right\}^n.
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Note que apenas o primeiro e o terceiro termos têm dependência em μ . Estamos interessados no limite em que $\beta \rightarrow +\infty$; neste caso definimos $v = \beta(Q - q)$, temos também que $q \rightarrow Q$ e $\beta n \rightarrow \beta'$. Podemos então escrever:

$$\ln \tilde{Z} = \frac{n(n-1)}{4\tilde{\beta}\mu} \beta^2 q^2 N + \frac{n}{4\tilde{\beta}\mu} \beta^2 Q^2 N + \frac{N(N-1)}{4} \ln \left(\frac{2\pi}{\tilde{\beta} N \mu} \right) + \dots$$

Derivando-se a expressão anterior em relação a μ e tomando-se $\mu = 1/\tilde{\beta}$ encontramos:

$$-\frac{1}{2} \tilde{\beta} N^2 M_2 = -\frac{N}{4} (N-1) \tilde{\beta} - \frac{\beta'^2}{4} \tilde{\beta} Q^2 N - \frac{\beta'}{4} \tilde{\beta} v 2QN.$$

Finalmente:

$$M_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N} [\beta'(\beta' Q^2 + 2vQ) - 1]. \tag{C.5}$$

Apêndice D

Interações de Hebb com Temperaturas Finitas

Cálculo das Equações Estacionárias para o Caso *Quenched*

Iremos determinar as equações estacionárias e a expressão da energia livre para interações tipo Hebb, com temperaturas finitas, no caso *quenched*. O hamiltoniano tem a forma:

$$\mathcal{H}_J\{x_i\} = \frac{1}{N} \sum_{i \neq j} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu x_i x_j + u \sum_i x_i^2. \quad (\text{D.1})$$

Onde as variáveis aleatórias ξ_i^μ obedecem a seguinte distribuição:

$$P(\xi_i) = \prod_{\mu} \left[\frac{1}{2} \delta(\xi_i^\mu + 1) + \frac{1}{2} \delta(\xi_i^\mu - 1) \right].$$

A função de partição pode ser escrita:

$$Z = \int_0^{+\infty} \left[\prod_i dx_i \right] \delta(N - \sum_i x_i) \exp \left(-\frac{\beta}{N} \sum_{i \neq j} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu x_i x_j - \beta u \sum_i x_i^2 \right). \quad (\text{D.2})$$

Para utilizarmos o truque de réplicas, veja equação 2.9, deveremos calcular $\langle Z^n \rangle$. Então temos:

$$Z^n = \int_0^{+\infty} \left[\prod_{ia} dx_{ia} \right] \left[\prod_a \delta(N - \sum_i x_{ia}) \right] \exp \left(-\frac{\beta}{N} \sum_{i \neq ja} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu x_{ia} x_{ja} - \beta u \sum_{ia} x_{ia}^2 \right).$$

Agora iremos simplificar a expressão dentro da exponencial. Esta pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} -\frac{\beta}{N} \sum_{i \neq ja} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu x_{ia} x_{ja} - \beta u \sum_{ia} x_{ia}^2 &= -\frac{\beta}{N} \sum_{\mu=1}^p \sum_{a=1}^n \left\{ \sum_i \xi_i^\mu x_{ia} \right\}^2 + \\ + \frac{\beta}{N} \sum_{\mu=1}^p \sum_{a=1}^n \sum_i (\xi_i^\mu)^2 (x_i)^2 - \beta u \sum_{ia} x_{ia}^2 &= -\frac{\beta}{N} \sum_{\mu=1}^p \sum_{a=1}^n \left\{ \sum_i \xi_i^\mu x_{ia} \right\}^2 + \beta(\alpha - u) \sum_{ia} x_{ia}^2. \end{aligned}$$

Inserindo a última expressão na equação para Z^n encontramos:

$$\begin{aligned} Z^n &= \int_0^{+\infty} \left[\prod_{ia} dx_{ia} \right] \left[\prod_a \delta(N - \sum_i x_{ia}) \right] \exp \left(-\frac{\beta}{N} \sum_{\mu=1}^p \sum_{a=1}^n \left\{ \sum_i \xi_i^\mu x_{ia} \right\}^2 \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(+\beta(\alpha - u) \sum_{ia} x_{ia}^2 \right). \end{aligned}$$

Podemos, utilizando a transformada gaussiana, reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Z^n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{\mu a} Dt_a^\mu \right] \int_0^{+\infty} \left[\prod_{ia} dx_{ia} \right] \left[\prod_a \delta(N - \sum_i x_{ia}) \right] \exp \left(+\beta(\alpha - u) \sum_{ia} x_{ia}^2 \right) \times \\ &\quad \times \prod_{\mu=1}^p \prod_{i=1}^N \exp \left(\frac{i\sqrt{2\beta}}{\sqrt{N}} \xi_i^\mu \sum_a t_a^\mu x_{ia} \right). \end{aligned}$$

Onde na última equação $Dt = \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2)$ é uma medida gaussiana. Utilizando a distribuição $P(\xi_i)$, acima mencionada, calculamos $\langle Z^n \rangle$; portanto:

$$\begin{aligned} \langle Z^n \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{\mu a} Dt_a^\mu \right] \int_0^{+\infty} \left[\prod_{ia} dx_{ia} \right] \left[\prod_a \delta(N - \sum_i x_{ia}) \right] \exp \left(+\beta(\alpha - u) \sum_{ia} x_{ia}^2 \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{\beta}{N} \sum_{\mu=1}^p \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_a t_a^\mu x_{ia} \right\}^2 \right). \end{aligned}$$

Podemos reescrever a relação anterior na forma seguinte:

$$\begin{aligned} \langle Z^n \rangle = & \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{\mu a} \frac{dt_a^\mu}{\sqrt{2\pi}} \right] \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\mu a} (t_a^\mu)^2 \right) \int_0^{+\infty} \left[\prod_{ia} dx_{ia} \right] \left[\prod_a \delta \left(N - \sum_i x_{ia} \right) \right] \times \\ & \times \exp \left(+\beta(\alpha - u) \sum_{ia} x_{ia}^2 \right) \exp \left(-\frac{\beta}{N} \sum_{ab} \left(\sum_{\mu=1}^p t_a^\mu t_b^\mu \right) \left(\sum_{i=1}^N x_{ia} x_{ib} \right) \right). \end{aligned} \quad (D.3)$$

Agora iremos usar a representação integral para a função delta de Dirac e fazer algumas simplificações. Encontramos então:

$$\begin{aligned} \langle Z^n \rangle = & \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{\mu a} \frac{dt_a^\mu}{\sqrt{2\pi}} \right] \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\mu a} (t_a^\mu)^2 \right) \int_0^{+\infty} \left[\prod_{ia} dx_{ia} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_a \frac{dR_a}{2\pi} \right] \times \\ & \times \exp \left(iN \sum_a R_a - i \sum_{ia} R_a x_{ia} \right) \exp \left(+\beta(\alpha - u) \sum_{ia} x_{ia}^2 \right) \times \\ & \times \exp \left(-\frac{\beta}{N} \sum_a \left(\sum_{\mu=1}^p (t_a^\mu)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N (x_{ia})^2 \right) \right) \exp \left(-\frac{2\beta}{N} \sum_{a<b} \left(\sum_{\mu=1}^p t_a^\mu t_b^\mu \right) \left(\sum_{i=1}^N x_{ia} x_{ib} \right) \right). \end{aligned}$$

A seguir iremos utilizar funções delta de Dirac na expressão acima. Com isto podemos chegar a relação seguinte:

$$\begin{aligned} \langle Z^n \rangle = & \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{\mu a} \frac{dt_a^\mu}{\sqrt{2\pi}} \right] \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\mu a} (t_a^\mu)^2 \right) \int_0^{+\infty} \left[\prod_{ia} dx_{ia} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_a \frac{dR_a}{2\pi} \right] \times \\ & \times \exp \left(iN \sum_a R_a - i \sum_{ia} R_a x_{ia} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_a dQ_a \right] \exp \left(+N\beta(\alpha - u) \sum_a Q_a \right) \times \\ & \times \exp \left(-\beta \sum_a \left(\sum_{\mu} (t_a^\mu)^2 \right) Q_a \right) \left[\prod_a \delta \left(Q_a - \frac{1}{N} \sum_i x_{ia}^2 \right) \right] \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{a<b} dq_{ab} \right] \exp \left(-2\beta \sum_{a<b} \left(\sum_{\mu=1}^p t_a^\mu t_b^\mu \right) q_{ab} \right) \left[\prod_{a<b} \delta \left(q_{ab} - \frac{1}{N} \sum_i x_{ia} x_{ib} \right) \right]. \end{aligned}$$

Novamente iremos utilizar a representação integral para as duas funções delta de Dirac que apareceram na expressão anterior. Podemos, portanto, reescrever a expressão acima na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle Z^n \rangle = & \int \left[\prod_a \frac{d\hat{R}_a}{2\pi i} \right] \int \left[\prod_a \frac{dQ_a d\hat{Q}_a}{2\pi i/N} \right] \int \left[\prod_{a<b} \frac{dq_{ab} d\hat{q}_{ab}}{2\pi i/N} \right] \exp \left(N \sum_a \hat{R}_a + N\beta(\alpha - u) \sum_a Q_a \right) \times \\ & \times \exp \left(+N \sum_a Q_a \hat{Q}_a - N \sum_{a<b} q_{ab} \hat{q}_{ab} + N \ln G_0 + N\alpha \ln G_1 \right). \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Onde nas relações anteriores temos para G_0 e para G_1 :

$$\begin{aligned} G_0 = & \int_0^{+\infty} \left[\prod_a dx_a \right] \exp \left(- \sum_a \hat{R}_a x_a - \sum_a \hat{Q}_a x_a^2 + \sum_{a<b} \hat{q}_{ab} x_a x_b \right). \\ G_1 = & \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_a \frac{dt_a}{\sqrt{2\pi}} \right] \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_a t_a^2 - \beta \sum_a t_a^2 Q_a - 2\beta \sum_{a<b} q_{ab} t_a t_b \right). \end{aligned}$$

A expressão da média da função de partição elevada a n -ésima potência é invariante por uma permutação dos índices de réplicas. Desta maneira o primeiro *ansatz* a ser testado é o seguinte: $\hat{R}_a = \hat{R}$, $Q_a = Q$, $\hat{Q}_a = \hat{Q}$, $q_{ab} = q$ e $\hat{q}_{ab} = \hat{q}$. Não exibiremos aqui toda a álgebra envolvida na determinação da energia livre com simetria de réplicas. Esta última tem a forma:

$$\begin{aligned} -\beta f = & \frac{q\hat{q}}{2} - \frac{\alpha\beta q}{1 + 2\beta(Q - q)} + Q\hat{Q} - \beta(u - \alpha)Q + \hat{R} - \frac{1}{2} \ln(\hat{Q} + \hat{q}/2) \\ & - \frac{\alpha}{2} \ln(1 + 2\beta(Q - q)) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi}{4}\right) + \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \ln \left\{ \exp(\Xi_z^2) \operatorname{erfc}(\Xi_z) \right\}. \end{aligned}$$

Na equação anterior: $\Xi_z = \frac{\hat{R} - \hat{q}^{1/2}z}{2(\hat{Q} + \hat{q}/2)^{1/2}}$.

Para reduzir a dependência de Ξ_z de três variáveis para duas, o que simplifica enormemente o cálculo numérico, realizaremos as seguintes mudanças de variáveis: $\Delta = \hat{R}/\hat{q}^{1/2}$, $\eta = \hat{q}^{1/2}/2(\hat{Q} + \hat{q}/2)^{1/2}$ e $v = Q - q$. Então temos:

$$\begin{aligned} -\beta f = & \frac{\hat{q}}{2}(Q - v) - \frac{\alpha\beta(Q - v)}{1 + 2\beta v} + \frac{Q\hat{q}}{2} \left(\frac{1}{2\eta^2} - 1 \right) - \beta(u - \alpha)Q + \Delta\hat{q}^{1/2} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4\eta^2}{\hat{q}}\right) - \\ & - \frac{\alpha}{2} \ln(1 + 2\beta v) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi}{4}\right) + \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \ln \left\{ \exp(\Xi_z^2) \operatorname{erfc}(\Xi_z) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Onde agora: $\Xi_z = \eta(\Delta - z)$.

Para encontrarmos as equações estacionárias basta derivarmos a expressão da energia livre em relação aos diferentes parâmetros de ponto de sela: Q , v , $\hat{q}$, Δ e η . Igualando-se os resultados a zero teremos:

$$(Q - v) + Q \left(\frac{1}{2\eta^2} - 1 \right) + \frac{\Delta}{\hat{q}^{1/2}} - \frac{1}{\hat{q}} = 0. \quad (\text{D.6})$$

$$-\frac{\alpha\beta}{1 + 2\beta v} + \frac{\hat{q}}{4\eta^2} - \beta(u - \alpha) = 0. \quad (\text{D.7})$$

$$-\frac{\hat{q}}{2} + \frac{2\alpha\beta^2(Q - v)}{(1 + 2\beta v)^2} = 0. \quad (\text{D.8})$$

$$\hat{q}^{1/2} + \eta \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \frac{H'(\Xi_z)}{H(\Xi_z)} = 0. \quad (\text{D.9})$$

$$-\frac{Q\hat{q}}{2\eta^3} + \frac{1}{\eta} + \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \frac{H'(\Xi_z)}{H(\Xi_z)} (\Delta - z) = 0. \quad (\text{D.10})$$

Onde nas expressões acima temos: $H(\Xi_z) = \exp(\Xi_z^2) \text{erfc}(\Xi_z)$.

Cálculo das Equações Estacionárias para o Caso *Annealed*

O cálculo das equações estacionárias e da energia livre no caso *annealed* para temperaturas finitas é análogo ao do caso *quenched* discutido anteriormente. Apenas não tomaremos o limite em que n tende para zero, ao invés disto fazemos $n = 1$. Então temos:

$$\langle Z \rangle = \int_0^{+\infty} \prod_i dx_i \delta(N - \sum_i x_i) \exp \left(+\beta(\alpha - u) \sum_i x_i^2 \right) \left\langle \exp \left\{ -\frac{\beta}{N} \sum_{\mu} \left[\sum_i \xi_i^{\mu} x_i \right]^2 \right\} \right\rangle.$$

Utilizando a representação integral para a função delta de Dirac e usando também a transformada gaussiana, podemos reescrever a relação anterior da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle = & \int_0^{+\infty} \prod_i dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dR}{2\pi} \exp(iRN - iR \sum_i x_i) \exp \left[+\beta(\alpha - u) \sum_i x_i^2 \right] \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{\mu} Dz^{\mu} \right] \exp \left(-\frac{\beta}{N} \sum_{\mu} (z^{\mu})^2 \sum_i (x_i)^2 \right). \end{aligned}$$

Empregando mais uma função delta e usando novamente a representação integral teremos:

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle = & \int_0^{+\infty} \prod_i dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\hat{R}}{2\pi i} \exp \left(\hat{R}N - \hat{R} \sum_i x_i \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dQd\hat{Q}}{2\pi i/N} \exp(+N\beta(\alpha - u)Q) \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{\mu} Dz^{\mu} \right] \exp \left(-\beta \sum_{\mu} (z^{\mu})^2 Q \right) \exp \left(N\hat{Q}Q - \hat{Q} \sum_i x_i^2 \right). \end{aligned}$$

Finalmente, rearrumando os termos anteriores, poderemos reescrever a expressão acima na seguinte forma:

$$\langle Z \rangle = \int \frac{dQd\hat{Q}}{2\pi i/N} \int \frac{d\hat{R}}{2\pi i} \exp N(\hat{R} + Q(\hat{Q} - \beta u) + G_0 + \alpha G_1). \quad (\text{D.11})$$

Onde:

$$G_0 = \ln \left\{ \int_0^{+\infty} dx \exp(-\hat{Q}x^2 - \hat{R}x) \right\}$$

e

$$G_1 = \ln \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \exp(-\beta Qz^2) \right\} + \beta Q.$$

A energia livre pode ser obtida usando-se o método do ponto de sela. Sua expressão é dada por:

$$-\beta f = \hat{R} + Q(\hat{Q} - \beta u) + G_0 + \alpha G_1. \quad (\text{D.12})$$

Derivando-se a igualdade acima em relação aos três parâmetros: Q , $\hat{Q}$ e $\hat{R}$ poderemos encontrar as seguintes equações de ponto de sela:

$$Q = \langle x^2 \rangle_a. \quad (\text{D.13})$$

$$1 = \langle x \rangle_a. \quad (\text{D.14})$$

$$\hat{Q} = \beta \left\{ u - \alpha \frac{2\beta Q}{1 + 2\beta Q} \right\}. \quad (\text{D.15})$$

Nas equações anteriores usamos a notação:

$$\langle x^k \rangle_a = e^{-G_0} \int_0^{+\infty} dx x^k \exp(-\hat{Q}x^2 - \hat{R}x).$$

Cálculo da Distribuição de Abundância das Espécies

O cálculo da distribuição de abundância das espécies para interações de Hebb no caso *quenched* é análogo ao que foi feito no apêndice B no contexto do modelo gaussiano. Para isto inicialmente deduziremos uma expressão para a distribuição cumulativa, $C(y)$. Devemos acrescentar ao hamiltoniano o termo extensivo $h \sum_a \Theta(x - x_a)$, onde Θ é a função de Heaviside. Portanto, podemos começar por G_0 :

$$G_0 = \int_0^{+\infty} \left[\prod_a dx_a \right] \exp \left(- \sum_a \hat{R}_a x_a - \sum_a \hat{Q}_a x_a^2 + \sum_{a < b} \hat{q}_{ab} x_a x_b - \beta h \sum_a \Theta(x - x_a) \right).$$

$$G_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \left\{ \int_0^{+\infty} dx \exp \left(-\hat{R}x - \hat{Q}x^2 - \frac{\hat{q}}{2}x^2 + \sqrt{\hat{q}}zx - \beta h \Theta(y - x) \right) \right\}^n.$$

Em seguida, utilizando a relação (2.9), obteremos a equação abaixo:

$$G_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \ln \left\{ \int_0^{+\infty} dx \exp \left(-\hat{R}x - \hat{Q}x^2 - \frac{\hat{q}}{2}x^2 + \sqrt{\hat{q}}zx - \beta h \Theta(y - x) \right) \right\}$$

Para obtermos a distribuição cumulativa basta derivarmos G_2 em relação a h e em seguida igualar h a zero. Fazendo isto teremos:

$$C(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \frac{\int_0^y dx \exp(-\hat{R}x - \hat{Q}x^2 - \hat{q}x^2/2 + \sqrt{\hat{q}}zx)}{\int_0^{+\infty} dx' \exp(-\hat{R}x' - \hat{Q}(x')^2 - \hat{q}(x')^2/2 + \sqrt{\hat{q}}zx')}.$$

Completando quadrados, utilizando a função erfc e retomando a variável η , podemos reescrever a relação anterior como:

$$C(y) = \frac{\hat{q}^{1/2}}{\eta\sqrt{\pi}} \int_0^y dx \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \frac{\exp \left[- \left(\hat{q}^{1/2}x/2\eta + \Xi_z \right)^2 \right]}{\text{erfc}(\Xi_z)}.$$

E, portanto, a densidade de probabilidade resulta:

$$P(x) = \frac{\hat{q}^{1/2}}{\eta\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \frac{\exp \left[- \left(\hat{q}^{1/2}x/2\eta + \Xi_z \right)^2 \right]}{\text{erfc}(\Xi_z)}. \quad (\text{D.16})$$

Apêndice E

Hebb com Padrões Condensados

A função de partição deste sistema é:

$$Z = \int_0^{+\infty} \prod_i dx_i \delta(N - \sum_i x_i) \prod_{\nu=1}^s \delta(Nm_\nu - \sum_i \xi_i^\nu x_i) \exp[\beta \mathcal{F}(\{x_i\})], \quad (\text{E.1})$$

onde $\mathcal{F}(\{x_i\})$ é dado pela equação (4.4).

$$\begin{aligned} \langle Z^n \rangle &= \int_0^{+\infty} [\prod_{ia} dx_{ia}] \prod_a \delta(N - \sum_i x_{ia}) \exp(-\beta(u - \alpha) \sum_{ia} x_{ia}^2) \times \\ &\langle \prod_a \prod_{\nu=1}^s \delta(Nm_\nu - \sum_i \xi_i^\nu x_{ia}) \exp(-\frac{\beta}{N} \sum_{\nu=1}^s \sum_a (\sum_i \xi_i^\nu x_{ia})^2) \rangle_{baixos} \times \\ &\times \langle \exp(-\frac{\beta}{N} \sum_{\nu=s+1}^p \sum_{a=1}^n (\sum_i \xi_i^\nu x_{ia})^2) \rangle_{altos}, \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

na equação anterior a é o índice de réplicas e pode variar de $1, \dots, n$, onde n é o número de cópias idênticas do sistema. Nesta mesma equação a segunda média é uma média sobre padrões altos¹:

$$\langle \dots \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} [\prod_{\mu a} Dz_{\mu a}] \exp(-\beta \sum_{\mu a} Q_a z_{\mu a}^2 - 2\beta \sum_{\mu} \sum_{a < b} q_{ab} z_{\mu a} z_{\mu b}), \quad (\text{E.3})$$

---

¹para um maior entendimento deste tópico veja [45].

e a primeira média é uma média sobre s padrões baixos:

$$\langle \dots \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{\mu a} \frac{d\tilde{m}_{\mu a} dm_{\mu a}}{2\pi i/N} \right] \exp(-\beta N \sum_{\mu a} m_{\mu a}^2 + N \sum_{\mu a} \tilde{m}_{\mu a} m_{\mu a}) \langle \exp(-\sum_{\mu a} \tilde{m}_{\mu a} \sum_i \xi_i^\mu x_{ia}) \rangle. \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned} \langle Z^n \rangle &= \int \left[\prod_{a < b} \frac{dq_{ab} d\tilde{q}_{ab}}{2\pi i/N} \right] \int \left[\prod_a \frac{dQ_a d\tilde{Q}_a}{2\pi i/N} \right] \int \left[\prod_a \frac{d\tilde{P}_a}{2\pi i/N} \right] \int \left[\prod_{\nu a} \frac{d\tilde{m}_{\nu a} dm_{\nu a}}{2\pi i/N} \right] \\ &\exp(-N \sum_{a < b} \tilde{q}_{ab} q_{ab} + N \sum_a \tilde{Q}_a Q_a + N \sum_a \tilde{P}_a - N\beta(u - \alpha) \sum_a Q_a - \beta N \sum_{\nu a} m_{\nu a}^2 + N \sum_{\nu a} \tilde{m}_{\nu a} m_{\nu a}) \\ &\times \exp(\alpha N \log \{ \prod_a \int Dz_a \exp(-\beta \sum_a Q_a z_a^2 - 2\beta \sum_{a < b} q_{ab} z_a z_b) \}) \\ &\times \int_0^{+\infty} \prod_i dx_{ia} \exp(-\sum_{ai} \tilde{Q}_a x_{ia}^2 + \sum_{a < b} \tilde{q}_{ab} x_{ia} x_{ib} - \sum_a \tilde{P}_a x_{ia}) \langle \exp(-\sum_{\nu a} \tilde{m}_{\nu a} \sum_i \xi_i^\nu x_{ia}) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

A integral sobre x_{ia} é:

$$\begin{aligned} \prod_i \int \prod_a dx_a \exp(-\sum_a \tilde{Q}_a x_a^2 + \sum_{a < b} \tilde{q}_{ab} x_a x_b - \sum_a \tilde{P}_a x_a - \sum_{\nu a} \tilde{m}_{\nu a} \xi_i^\nu x_a) = \\ = \exp(\sum_i \log \int \prod_a dx_a \dots). \end{aligned}$$

Relembrando a propriedade de automediância:

$$\frac{1}{N} \sum_i f(\xi_i) = \langle f(\xi) \rangle. \quad (\text{E.6})$$

Temos então que:

$$\begin{aligned} \exp(\sum_i \log \int \prod_a dx_a \dots) &= \exp(N \langle \log \int \prod_a dx_a \dots \rangle) = \\ &= \exp(N \langle \log \{ \int \prod_a dx_a \exp(-\sum_a \tilde{Q}_a x_a^2 + \sum_{a < b} \tilde{q}_{ab} x_a x_b - \sum_a \tilde{P}_a x_a - \sum_{\nu a} \tilde{m}_{\nu a} \xi^\nu x_a) \} \rangle). \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

$$G_0 \equiv \int \prod_a dx_a \exp(-\sum_a \tilde{Q}_a x_a^2 + \sum_{a<b} \tilde{q}_{ab} x_a x_b - \sum_a \tilde{P}_a x_a - \sum_{\nu a} \tilde{m}_{\nu a} \xi^\nu x_a). \quad (\text{E.8})$$

Neste ponto adotamos simetria de réplicas, ou seja, $q_{ab} = q$, $\tilde{q}_{ab} = \tilde{q}$, $Q_a = Q$, $\tilde{Q}_a = \tilde{Q}$ e $\tilde{P}_a = \tilde{P}$. Então temos:

$$\begin{aligned} G_0 &\equiv \int_0^{+\infty} [\prod_a dx_a] \exp\{-(\tilde{Q} + \tilde{q}/2) \sum_a x_a^2 + \frac{1}{2} \tilde{q} (\sum_a x_a)^2 - \tilde{P} \sum_a x_a - \sum_\nu \tilde{m}_\nu \xi^\nu \sum_a x_a\}. \\ &= \int Dz \left\{ \int_0^{+\infty} dx \exp\{-(\tilde{Q} + \tilde{q}/2)x^2 - (\tilde{P} + \sum_\nu \tilde{m}_\nu \xi^\nu - \tilde{q}^{1/2} z)x\}^n \right. \\ &\quad \left. = \int Dz [1 + n \log\{\dots\}] = 1 + n \int Dz \log\{\dots\} \right. \\ &\quad \left. \log G_0 \approx n \int Dz \log\{\dots\} \right. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n} \log G_0 = \frac{1}{2} \log \pi - \log 2 - \frac{1}{2} \log(\tilde{Q} + \tilde{q}/2) + \langle \int Dz \log\{\exp(\Xi_z^2) \text{erfc}(\Xi_z)\} \rangle. \quad (\text{E.9})$$

Onde temos:

$$\Xi_z = \frac{\tilde{P} + \sum_\nu \tilde{m}_\nu \xi^\nu - \tilde{q}^{1/2} z}{2(\tilde{Q} + \tilde{q}/2)^{1/2}}.$$

Resolvendo-se as integrais anteriores pelo método do ponto de sela, podemos obter a expressão da energia livre com simetria de réplicas²:

$$\begin{aligned} -\beta f_{rs} &= q\tilde{q}/2 + Q\tilde{Q} + \tilde{P} - \beta(u - \alpha)Q - \beta \sum_\nu m_\nu^2 + \sum_\nu \tilde{m}_\nu m_\nu - \\ &\quad - \frac{\alpha}{2} \log\{1 + 2\beta(Q - q)\} - \frac{\alpha\beta q}{1 + 2\beta(Q - q)} + \frac{1}{2} \log \pi - \\ &\quad - \frac{1}{2} \log(\tilde{Q} + \tilde{q}/2) + \langle \int Dz \log\{\frac{1}{2} \exp(\Xi_z^2) \text{erfc}(\Xi_z)\} \rangle_\xi. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

---

²nesta equação $\beta = 1/T$, sendo T a temperatura.

Derivando-se a equação anterior em relação aos parâmetros de ordem: q , Q , m_ν , $\tilde{Q}$, $\tilde{q}$, $\tilde{P}$, $\tilde{m}_\nu$ e com algum esforço algébrico, podemos obter as seguintes equações de ponto de sela:

$$\tilde{q} = \frac{4\alpha\beta^2 q}{[1 + 2\beta(Q - q)]^2}. \quad (\text{E.11})$$

$$\tilde{Q} + \tilde{q}/2 = \beta(u - \alpha) + \frac{\alpha\beta}{1 + 2\beta(Q - q)}. \quad (\text{E.12})$$

$$\tilde{m}_\nu = 2\beta m_\nu. \quad (\text{E.13})$$

$$1 + \left\langle \int Dz \frac{G'(\Xi_z)}{G(\Xi_z)} \{1/[2(\tilde{Q} + \tilde{q}/2)^{1/2}]\} \right\rangle_\xi = 0. \quad (\text{E.14})$$

$$m_\mu + \left\langle \int Dz \frac{G'(\Xi_z)}{G(\Xi_z)} \{\xi^\mu/[2(\tilde{Q} + \tilde{q}/2)^{1/2}]\} \right\rangle_\xi = 0. \quad (\text{E.15})$$

$$Q - q + \frac{\tilde{q}^{-1/2}}{2(\tilde{Q} + \tilde{q}/2)^{1/2}} \left\langle \int Dz z \frac{G'(\Xi_z)}{G(\Xi_z)} \right\rangle_\xi = 0. \quad (\text{E.16})$$

$$Q - \frac{1}{2(\tilde{Q} + \tilde{q}/2)} \{1 - \tilde{P} - \sum_\nu m_\nu \tilde{m}_\nu + \tilde{q}(Q - q)\} = 0. \quad (\text{E.17})$$

Devemos agora determinar as equações de ponto de sela no limite em que a temperatura do sistema tende a zero, ou seja, quando $\beta \rightarrow +\infty$. Nesta situação é útil redefinirmos os parâmetros:

$$\tilde{P} = \beta \hat{P} \Rightarrow \Xi_z \propto \beta^{1/2}.$$

Neste caso as contribuições às integrais nas equações (E.14), (E.15) e (E.16) são originadas a partir de $\Xi_z < 0$, apenas, ou seja, $z > \frac{1}{\tilde{q}^{1/2}}(\tilde{P} + \sum_\nu \tilde{m}_\nu \xi^\nu)$. Também é conveniente definirmos a susceptibilidade como: $v = 2\beta(Q - q)$. Note que resulta: $\frac{G'(\Xi_z)}{G(\Xi_z)} \rightarrow 2\Xi_z$ e que $\Xi_z \rightarrow -\infty$. Definimos também: $\Delta \equiv \tilde{P}/\tilde{q}^{1/2}$ e $M_\nu \equiv \tilde{m}_\nu/\tilde{q}^{1/2}$. Desta maneira resultam as seguintes equações de ponto de sela³:

$$\tilde{Q} + \tilde{q}/2 \equiv \beta\lambda = \beta[u - \alpha + \frac{\alpha}{1 + v}]. \quad (\text{E.18})$$

$$v + \frac{1}{\lambda} \left\langle \int_{\Delta + \sum_\nu M_\nu \xi^\nu}^{+\infty} Dz z (\Delta + \sum_\nu M_\nu \xi^\nu - z) \right\rangle_\xi = 0. \quad (\text{E.19})$$

---

³estas equações são válidas para m^μ tomado como fixo, portanto a expressão (E.13) não aparece.

$$1 + \frac{\hat{q}^{1/2}}{2\lambda} \left\langle \int_{\Delta + \sum_{\nu} M_{\nu} \xi^{\nu}}^{+\infty} Dz (\Delta + \sum_{\nu} M_{\nu} \xi^{\nu} - z) \right\rangle_{\xi} = 0. \quad (\text{E.20})$$

$$M_{\mu} + \frac{\hat{q}^{1/2}}{2\lambda} \langle \xi^{\mu} \int_{\Delta + \sum_{\nu} M_{\nu} \xi^{\nu}}^{+\infty} Dz (\Delta + \sum_{\nu} M_{\nu} \xi^{\nu} - z) \rangle_{\xi} = 0. \quad (\text{E.21})$$

$$Q - \frac{1}{2\lambda} \left\{ -\Delta \hat{q}^{1/2} - \frac{1}{2} \hat{q} \sum_{\nu} M_{\nu}^2 + \frac{1}{2} \hat{q} v \right\} = 0. \quad (\text{E.22})$$

$$\hat{q} = \frac{4\alpha Q}{(1+v)^2}. \quad (\text{E.23})$$

Cálculo da Distribuição Cumulativa

Agora passamos a tratar da distribuição cumulativa. Sendo y a variável que descreve a concentração de uma dada espécie, temos para esta função:

$$C(y) = \left\langle \int Dz \frac{\int_0^y dx \exp(-(\tilde{Q} + \tilde{q}/2)x^2 - (\tilde{P} + \sum_{\nu} \tilde{m}_{\nu} \xi^{\nu} - \tilde{q}^{1/2} z)x)}{\int_0^{+\infty} dx \exp(-(\tilde{Q} + \tilde{q}/2)x^2 - (\tilde{P} + \sum_{\nu} \tilde{m}_{\nu} \xi^{\nu} - \tilde{q}^{1/2} z)x)} \right\rangle_{\xi}. \quad (\text{E.24})$$

Depois de uma certa manipulação algébrica podemos escrever a distribuição cumulativa como:

$$C(y) = 1 - \left\langle \int Dz \frac{\text{erfc}(y\sqrt{A} + B/2\sqrt{A})}{\text{erfc}(B/2\sqrt{A})} \right\rangle_{\xi}. \quad (\text{E.25})$$

Nesta equação $A \equiv \tilde{Q} + \tilde{q}/2$ e $B \equiv \tilde{P} + \sum_{\nu} \tilde{m}_{\nu} \xi^{\nu} - \tilde{q}^{1/2} z$.

Como fizemos acima, analisemos a situação em que $\beta \rightarrow +\infty$. Neste caso temos que: $A \propto \beta$ e $B/2\sqrt{A} \propto \beta^{1/2}$. Devemos impor a condição:

$$y(\tilde{Q} + \tilde{q}/2)^{1/2} + (\tilde{P} + \sum_{\nu} \tilde{m}_{\nu} \xi^{\nu} - \tilde{q}^{1/2} z)/[2(\tilde{Q} + \tilde{q}/2)^{1/2}] < 0.$$

Esta condição é equivalente a:

$$z > 2y(\tilde{Q} + \tilde{q}/2)/\tilde{q}^{1/2} + \tilde{P}/\tilde{q}^{1/2} + 1/\tilde{q}^{1/2} \sum_{\nu} \tilde{m}_{\nu} \xi^{\nu}.$$

Portanto, a equação que resulta para a distribuição cumulativa, no limite $\beta \rightarrow +\infty$, é:

$$C(y) = 1 - \frac{1}{2} \langle \text{erfc}(\Gamma/\sqrt{2}) \rangle_{\xi}. \quad (\text{E.26})$$

Nesta equação $\Gamma = 2\lambda y/\hat{q}^{1/2} + \Delta + \sum_{\nu} M_{\nu} \xi^{\nu}$. E a equação que descreve a fração de espécies extintas é:

$$C(0) = 1 - \frac{1}{2} \langle \text{erfc}\left(\frac{\Delta + \sum_{\nu} M_{\nu} \xi^{\nu}}{\sqrt{2}}\right) \rangle_{\xi}. \quad (\text{E.27})$$

Bibliografia

- [1] S. Diederich e M. Oppen, Phys. Rev. A 39, 4333 (1989).
- [2] F. C. Poderoso e J. F. Fontanari, J. Phys. A: Math. Theor. 40, 8723 (2007).
- [3] R. W. Penney, A. C. C. Coolen e D. Sherrington, J. Phys. A 26, 3681 (1993).
- [4] A. C. C. Coolen, R. W. Penney e D. Sherrington, Phys. Rev. B 48, 16116 (1993).
- [5] F. C. Poderoso e J. F. Fontanari, Eur. Phys. J. B 48, 557 (2005).
- [6] F. C. Poderoso e J. F. Fontanari, Phys. Rev. E 74, 051919 (2006).
- [7] R. Lande, Oecologia 75, 601 (1988).
- [8] P. Kareiva e U. Wennergren, Nature 373, 299 (1995).
- [9] D. Tilman, Ecology 80, 1455 (1999).
- [10] V. M. de Oliveira, Eur. Phys. J. B 31, 259 (2003).
- [11] D. O. C. Santos, J. F. Fontanari, Phys. Rev. E 70, 061914 (2004).
- [12] P. M. Vitousek, J. D. Aber, R. W. Howarth, G. E. Likens, P. A. Matson, D. W. Schindler, W. H. Schlesinger e D. Tilman, Ecological Applications 7, 737 (1997).
- [13] J. H. Brown, T. G. Whitham, S. K. M. Ernest e C. A. Gehring, Science 293, 643 (2001).
- [14] J. R. L. de Almeida e D. J. Thouless, J. Phys. A 11, 983 (1978).
- [15] D. L. Stein, Scientific American (Julho), 52 (1989).
- [16] G. Rowe, Theoretical Models in Biology (Clarendon Press, Oxford, 1994).

- [17] D. Sherrington e S. Kirkpatrick, Phys. Rev. Lett. 35, 1792 (1975).
- [18] S. Kirkpatrick e D. Sherrington, Phys. Rev. B 17, 4384 (1978).
- [19] P. Schuster e K. Sigmund, J. Theor. Biol. 100, 533 (1983).
- [20] T. L. Vincent e J. S. Brown, Evolutionary Game Theory, Natural Selection, and Darwinian Dynamics (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2005).
- [21] J. Hofbauer e K. Sigmund, Evolucionary Games and Population Dynamics (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1998).
- [22] A. Einstein, “Investigations on the Theory of Brownian Movement”. Dover Publications, New York (1956).
- [23] P. Biscari e G. Parisi, J. Phys. A: Math. Gen. 28, 4697 (1995).
- [24] M. Mezard, G. Parisi e M. A. Virasoro, Spin Glass Theory and Beyond (World Scientific, Singapore, 1987).
- [25] K. Binder e A. P. Young, Review of Modern Physics 58, 838 (1986).
- [26] K. H. Fischer e J. A. Hertz, Spin Glasses (Cambridge University Press, 1991).
- [27] V. Dotsenko, S. Franz e M. Mézard, J. Phys. A: Math. Gen. 27, 2351 (1994).
- [28] J. L. van Hemmen e R. G. Palmer, J. Phys. A 12, 563 (1979).
- [29] J. Mathews e R. L. Walker, Mathematical Methods of Physics (California Institute of Technology, 1965).
- [30] E. H. Simpson, Nature (London) 163, 688 (1949).
- [31] B. M. Ayyub e R. H. McCuen, Numerical Methods for Engineers (Prentice-Hall, 1996).
- [32] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling e B. P. Flannery, Numerical Recipes in Fortran (Cambridge University Press, 1992).
- [33] N. G. Hairston, Ecology 40, 404 (1959).
- [34] G. U. Yule, Proc. R. Soc. London B 213, 21 (1925).

- [35] N. C. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth e E. Teller, J. Chem. Phys. 21, 1087 (1953).
- [36] V. M. de Oliveira e J. F. Fontanari, Phys. Rev. Lett. 89, 148101 (2002).
- [37] D. L. Stein, Spin Glasses and Biology, Vol. 6 (World Scientific, 1992).
- [38] D. J. Amit, Modeling Brain Function: The World of Attractor Neural Networks (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [39] G. F. Gause, The Struggle for Existence (Dover, New York, 1971).
- [40] E. Gardner e B. Derrida, J. Phys. A 21, 271 (1988).
- [41] E. D. Schulze, H. A. Mooney, Eds., Biodiversity and Ecosystem Function (Springer Verlag, Berlin, 1993).
- [42] K. L. Cottingham, B. L. Brown, J. T. Lennon, Ecol. Lett. 4, 72 (2001).
- [43] S. Naeem e S. Li, Nature 390, 507 (1997).
- [44] M. Ridley, Evolution (Blackwell Science, Cambridge, 1996).
- [45] D. J. Amit, H. Gutfreund, e H. Sompolinsky, Ann. Phys. (N.Y.) 173, 30 (1987).
- [46] M. Loreau, S. Naeem, P. Inchausti, J. Bengtsson, J. P. Grime, A. Hector, D. U. Hooper, M. A. Huston, D. Raffaelli, B. Schmid, D. Tilman e D. A. Wardle, Science 294, 804 (2001).