UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

DIEGO PAIVA PIRES

Geometria da informação quântica:
uma abordagem geral acerca do tempo de evolução

São Carlos
2017

DIEGO PAIVA PIRES

Geometria da informação quântica:
uma abordagem geral acerca do tempo de evolução

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. Diogo de Oliveira

Soares Pinto

Versão corrigida

(versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos

2017

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESSE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica revisada pelo Serviço de Biblioteca e Informação IFSC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Pires, Diego Paiva

Geometria da informação quântica: uma abordagem geral acerca do tempo de evolução / Diego Paiva Pires; orientador Diogo de Oliveira Soares Pinto - versão corrigida -- São Carlos, 2017.

219p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Geometria da informação. 2. Teoria da informação quântica. 3. *Quantum speed limits*. I. Soares Pinto, Diogo de Oliveira, orient. II. Título.

Este trabalho é dedicado a todos os brasileiros, em particular àqueles que infelizmente não têm acesso a uma educação pública e de qualidade como alternativa de liberdade das amarras sociais. Às mulheres e homens vítimas de todas as formas de agressão e preconceito em face de sua identidade de gênero, orientação sexual, cor, ideologia política e posição social.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Diogo Oliveira Soares Pinto pela orientação e suporte que contribuíram de modo ímpar à minha formação acadêmica ao longo destes três anos de trabalho. Além da paciência e confiança, sou grato pelas oportunidades e pelo estímulo em sempre ir além deste projeto.

Ao Prof. Dr. Eduardo de Azevêdo pelas risadas, ironias e também pelo espaço físico que concedeu à condução deste trabalho. Ao Dr. Jefferson Filgueiras – o gênio – agradeço pelas conversas, apoio e piadas.

À Amélia, Jaqueline e Magda, pelo café.

À Carlos Eduardo Máximo, amigo e companheiro de luta desde os primeiros dias em São Carlos.

Aos amigos Samanta S. A. Silva e Felipe A. Franco, um aparte especial. Amizade é uma palavra que encontro significado quando penso em tudo o que compartilhamos ao longo destes últimos dez anos. A minha vida mudou muito e fico feliz por saber que vocês fazem parte dela e me apoiaram em vários passos. A gratidão é o que tenho de mais puro a oferecer a ambos.

Aos meus familiares que, de uma forma ou outra, foram testemunhas solidárias ao longo desta árdua caminhada. O meu respeito à memória daqueles que me ensinaram tanto com sua simplicidade e cuja vida foi abreviada ainda bem cedo.

À minha mãe Sandra Paiva Silva, mulher de fibra e coragem, que com seu trabalho e resiliência educou sozinha um filho a despeito de todas as adversidades. À minha avó Jerônima Madalena de Paiva, uma segunda mãe, mulher simples e de pouca educação formal mas que ensinou seu neto a ler e escrever usando uma cartilha. À minha irmã Clarice Paiva Lima Silva, a menina que vi nascer e hoje caminha por si só cheia de sonhos. Agradeço por me ensinarem desde muito cedo que o maior e único legado do ser humano é o conhecimento.

Esta tese foi financiada pelo CNPq.

“Nunca fiz nada de “útil”. Nenhuma descoberta minha fez ou tem probabilidade de fazer, direta ou indiretamente, para o bem ou para o mal, a menor diferença para o conforto da vida neste mundo. Ajudei a formar outros matemáticos, mas matemáticos iguais a mim, e o trabalho deles, na medida em que eu os auxiliei, foi tão inútil quanto o meu. A julgar por todos os critérios práticos, o valor da minha vida na matemática é nulo; e fora da matemática é bem reduzido, de qualquer maneira. Tenho apenas uma chance de escapar a um veredito de nulidade completa, caso julguem que criei algo que vale a pena criar. Que criei algo é inegável; a questão é o valor da minha criação.”

G. H. Hardy

RESUMO

PIRES, D. P. **Geometria da informação quântica:** uma abordagem geral acerca do tempo de evolução. 2017. 219p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2017.

As últimas décadas testemunharam intensa atividade de pesquisa teórica e experimental visando compreender o conceito do tempo na mecânica quântica. Este tema desencadeou significativo progresso na busca por dispositivos mais rápidos e eficientes no processamento de informação e implementação de tecnologias de comunicação. Motivados pela pergunta “quão rápido um sistema quântico evolui sob uma dada dinâmica?”, tais avanços levaram a formulação do chamado limite quântico de velocidade ou *quantum speed limit* (QSL), i.e., um limite inferior definindo o tempo mínimo de evolução entre estados quânticos distintos. Diversos resultados reportaram QSLs obtidos via tratamentos diferentes e aparentemente desconexos, muitas vezes sob configurações específicas, que deixaram uma lacuna fundamental à resposta da questão geral colocada anteriormente. Neste projeto investigamos como a não-unicidade de uma medida de distinguibilidade de operadores densidade definida no espaço de estados quânticos influencia o QSL e pode ser explorada no intuito de obter limites inferiores mais robustos no tempo de evolução de estados arbitrários. Em particular, baseando-nos no formalismo da geometria da informação, estabelecemos uma família infinita de QSLs válidos para evoluções unitárias e não-unitárias. Este trabalho se propõe unificar e generalizar resultados existentes sobre QSLs na literatura, além de fornecer exemplos de limites mais precisos do que aqueles baseados na informação de Fisher convencional. Em termos físicos, esta investigação é a primeira a destacar o papel das populações e coerências quânticas no cálculo e saturação dos QSLs. Nossos resultados podem encontrar aplicações na otimização de protocolos em computação quântica e metrologia, além de fornecer novos pontos de vista em investigações fundamentais da termodinâmica quântica.

Palavras-chave: Geometria da informação. Teoria da informação quântica. *Quantum speed limits*.

ABSTRACT

PIRES, D. P. **Quantum information geometry**: a general framework to approach time evolution. 2017. 219p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2017.

The last decades witnessed intense theoretical and experimental research activity in order to understand the concept of time in quantum mechanics. This subject triggered significant progress in the search for faster and efficient schemes in the implementation of quantum information and communication technologies. Starting from the puzzle “How fast can a quantum state evolve under a given dynamics?”, such advances have led to the establishment of quantum speed limits (QSLs), i.e., a lower bound setting the minimum time evolution between two distinct quantum states. Past results have included different, apparently unrelated approaches to quantum speed limits, and sometimes tailored to specific settings, which therefore left a fundamental gap in obtaining a satisfactory answer to the general question posed above. In this work we provide a breakthrough for the study and applications of quantum speed limits. We approach the problem from a general information theoretic point of view and we adopt an elegant geometric formalism to construct an infinite family of quantum speed limits valid for closed and open system evolutions. Our description is based on the geometrization of the quantum state space by introducing an information metric which defines a non-unique measure of distinguishability on the state space. We show in particular how our approach incorporates and unifies the previous specialized results, interpreting them under a new comprehensive framework, and allowing us to reach significantly beyond. From the physical point of view, our investigation is the first to highlight the role of populations versus quantum coherences in the determination and saturation of the speed limits. Our results can find applications in the optimization of quantum protocols in quantum computation and metrology, and might provide new insights in fundamental investigations of quantum thermodynamics.

Keywords: Information geometry. Quantum information theory. Quantum speed limits.

SUMÁRIO

1	Introdução	17
2	Noções gerais sobre o QSL	25
2.1	Prelúdio: o tempo na mecânica quântica	25
2.1.1	O tempo e suas interpretações na mecânica quântica	26
2.1.2	Uma breve história do tempo: sobre ombros de gigantes	27
2.2	QSL: estado da arte	33
2.2.1	Dinâmica unitária	34
2.2.2	Dinâmica não-unitária	41
2.3	Poslúdio: propostas e objetivos	44
3	Medidas geométricas de distinguibilidade	47
3.1	Informação e geometria de estados quânticos	47
3.2	O teorema de Morozova, Čencov e Petz	50
3.2.1	Visão geral	51
3.2.2	Aspectos técnicos	57
3.3	Funções de Morozova-Čencov	62
3.3.1	Métrica de Fisher	62
3.3.2	Métrica de Wigner-Yanase	66
3.3.3	Métrica mínima (média harmônica)	70
3.3.4	Métrica de Bogoliubov	71
4	QSLs geométricos generalizados	75
4.1	Estados quânticos, dinâmicas e o teorema MCP	76
4.2	QSL generalizado	81
5	QSL na dinâmica unitária	85
5.1	Dinâmica unitária	86
5.2	Métrica de Fisher (QF)	89
5.3	Métrica de Wigner-Yanase (WY)	91

5.4	QF e WY: QSL <i>tighter</i> no caso de um q-bit	93
5.5	QF e WY: QSL <i>tighter</i> no caso geral	98
6	QSL na dinâmica não-unitária	101
6.1	Dinâmica não-unitária: breve digressão	101
6.1.1	Equações mestras	102
6.1.2	Canais quânticos e mapas CPTP	105
6.2	Atenuação de fase	107
6.2.1	Atenuação de fase paralela	110
6.2.2	Atenuação de fase transversal	121
6.3	Atenuação de amplitude	124
6.3.1	Métrica de Fisher	128
6.3.2	Métrica de Wigner-Yanase	130
6.3.3	Métrica mínima (média harmônica)	131
6.3.4	Análise do QSL	132
7	Conclusões	137
	Referências	141
	Apêndices	157
A	Revisão de conceitos básicos	157
A.1	Definições gerais	157
A.2	Breve digressão sobre medidas	161
A.3	Mapas estocásticos	165
A.4	Mapas CPTP	166
B	QSLs na literatura	171
B.1	Mandelstam-Tamm (MT)	171
B.2	Aharonov-Anandan (AA)	173
B.3	Margolus-Levitin (ML)	176
B.4	Levitin-Toffoli (LT)	178
B.4.1	Estados iniciais e o QSL de MT	178
B.4.2	O QSL unificado	181

B.5	del Campo-Egusquiza-Plenio-Huelga (CEPH)	187
B.6	Deffner-Lutz (DL)	191
B.6.1	Dinâmica unitária	192
B.6.2	Dinâmica não-unitária	194
C	Breves digressões algébricas sobre o operador densidade	197
C.1	Potências matriciais	197
C.2	Matriz inversa	200
C.3	Determinante	201
C.4	Raiz quadrada	202
C.5	Fidelidade de Uhlmann-Jozsa e ângulo de Bures	202
C.6	Afinidade quântica e ângulo de Hellinger	204
D	Mapas afins	207
E	Equações mestras e representação de Kraus	211
E.1	Mapas CPTP e equações mestras	211
E.1.1	Exemplo: canal de atenuação de fase	216
E.2	Equivalência entre representações: atenuação de fase paralela	218

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução

A ciência da informação quântica representa um campo interdisciplinar moderno de pesquisa que congrega as áreas de física, matemática, engenharia e computação. Em especial, propõe-se a esclarecer como as leis da mecânica quântica podem ser exploradas no intuito de entender e maximizar a eficiência na aquisição, transmissão e processamento da informação. (1) A elucidação destes aspectos, por exemplo, sob a égide da teoria da informação quântica, tem fomentado a proposição de novas ideias e ferramentas técnicas cujo caráter robusto e universal lhes confere aplicabilidade a física da matéria condensada (2–4), ciência da computação (5,6) e física de altas energias. (7,8)

A pesquisa experimental na área tem atingido resultados cada vez mais promissores na manipulação de estados quânticos por meio de uma rica variedade de plataformas físicas de teste, dentre as quais podemos destacar circuitos supercondutores (9), spins eletrônicos e nucleares (10), íons armadilhados (11,12) e fótons. (13,14) Por exemplo, o ápice do mérito da pesquisa em controle quântico veio com o Prêmio Nobel em Física de 2012 laureando os trabalhos de Wineland (15) e Haroche (16) acerca, respectivamente, da criação de portas lógicas quânticas via íons armadilhados, e do estudo do efeito de decoerência na interação radiação-matéria por meio de cavidades quânticas. Estes avanços têm contribuído ao florescimento de uma nova era de tecnologias baseadas em propriedades quânticas da matéria com potencial impacto nas vidas social e econômica atuais e futuras.

Em resposta a esta demanda, diversos países estão dedicando altas cifras financeiras ao fomento da pesquisa básica em informação quântica. Além de promover a emancipação intelectual dos países envolvidos, ambos investimentos de agências públicas e privadas

visam estimular também a busca pela liderança estratégica de um novo tipo de mercado tecnológico. Por exemplo, o Conselho Nacional de Ciência e Tecnologia (NSTC, do inglês *National Science and Technology Council*) norte-americano elaborou recentemente um extenso documento (17) em que referenda a pesquisa em informação quântica como uma das prioridades federais em investimento e coordenação, além de estabelecer diretrizes de fomento em temas de fronteira na área que são de maior interesse do governo. Na Europa, o chamado *Quantum Manifesto* (18), uma petição pública que contou com mais de 3000 assinaturas oriundas de membros de universidades, indústrias e agências de fomento europeus, requereu à Comissão Européia (EC, do inglês *European Commission*) o investimento de cerca de 1 bilhão de euros a partir de 2018 em projetos e iniciativas de pesquisa em tecnologias quânticas.

Por sua vez, a pesquisa teórica em informação quântica possui um caráter plural e multifacetado. Por exemplo, o uso recorrente de ferramentas e conceitos na fronteira da teoria da informação quântica e física da matéria condensada tem ajudado na caracterização das fases da matéria e estudo de fenômenos críticos. (19–21) Além disso, a combinação profícua de esforços teóricos e experimentais tem contribuído ao avanço da pesquisa acerca da simulação de modelos quânticos da física de muitos corpos. (22) Por outro lado, o acesso a informação codificada em estados emaranhados requer protocolos de medida que minimizem os efeitos destrutivos do fenômeno de decoerência induzido pelo próprio aparato de medida. Diante das dificuldades realísticas de se isolar um sistema quântico deste efeito onipresente, uma solução plausível, ao menos a nível teórico, consiste em codificar a informação em subespaços livres de decoerência do sistema quântico. (23, 24)

A conjunção de idéias de ambas teoria da informação quântica e teoria quântica de campos tem contribuído de forma significativa na compreensão do comportamento de propriedades quânticas em diferentes situações no regime relativístico. (25) Exemplos incluem o estudo de emaranhamento em referenciais não-inerciais (26, 27) e espaços-tempo em expansão (28, 29), processamento da informação e buracos-negros (30, 31), sensibilidade de correlações quânticas à topologia do espaço-tempo (32), entre outros. Alguns dos recentes avanços acerca de gravitação quântica e teoria quântica de campos em espaços curvos decorrem, por exemplo, de um esforço internacional conjunto de pesquisadores das áreas de teoria da informação quântica e física de altas energias. (33, 34) A colaboração tem como premissa agregar o conjunto de idéias e experiências acumuladas em ambas áreas

para buscar soluções a problemas envolvendo teorias de unificação entre mecânica quântica e relatividade geral. A exemplo da descoberta histórica apresentada pela colaboração LIGO¹ sobre a detecção de ondas gravitacionais (35), a elucidação do efeito da interação gravitacional sobre aspectos quânticos da matéria poderá, futuramente, desencadear uma nova era de tecnologias explorando propriedades quânticas tais como emaranhamento e coerência.

Através da pesquisa básica em informação quântica, computadores quânticos podem contribuir nos testes de limites da mecânica quântica em regimes sem precedentes por meio do estudo das propriedades de estados emaranhados de sistemas de muitas partículas interagentes. Iniciativas recentes incluem o projeto IBM *Quantum Experience* (36) de computação quântica na nuvem a partir de um computador quântico de 5 q-bits baseado em circuitos supercondutores. A literatura já se beneficia de trabalhos usando esta plataforma de acesso livre para testar experimentalmente previsões teóricas envolvendo desigualdades do tipo-Bell (37) e protocolos de correção de erros quânticos. (38) A chamada *Station Q* (39), um consórcio internacional liderado pela Microsoft que congrega físicos, matemáticos, cientistas da computação e engenheiros em torno da pesquisa de computação quântica topológica como base do computador quântico, lançou recentemente o *software* de acesso livre LIQUi|² que permite a simulação de hamiltonianos, algoritmos e protocolos de correção de erros quânticos. Estes dispositivos podem fornecer também a plataforma de testes adequada a investigação do aumento da velocidade de processamento devido a efeitos puramente quânticos. Neste caso, a manipulação dos portadores de informação, desde a evolução do sistema quântico até tarefas de decodificação da informação armazenada em seus estados via medidas de distinguibilidade, pode levar à redução do tempo de computação e rapidez na transmissão de dados.

Em linhas gerais, esta discussão recai sobre o inquietante problema do papel do tempo na mecânica quântica recentemente abordado pela teoria da informação quântica. (40) Esta questão perturbadora, cujas raízes remontam à formulação da própria teoria quântica, não é nada original e tem mobilizado esforços de diversos pesquisadores ao longo do último século³. Afinal, o tempo deve ser encarado apenas como um parâmetro na equação de

¹LIGO, do inglês *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*.

²LIQUi|, do inglês *Language-Integrated Quantum Operations*.

³Exemplo recente inclui o *Workshop on Time in Physics* organizado pelo ETH em Zurique. O leitor interessado pode conferir maiores detalhes no endereço <https://time->

Schrödinger ou receber *status* de operador à semelhança de posição e momentum? Além disso, quanto tempo leva a evolução entre dois estados de um sistema quântico sujeito a uma dinâmica específica? De forma mais clara, a evolução entre dois estados quânticos é instantânea ou, ao contrário, existiria um tipo de limite quântico de velocidade ou *quantum speed limit* (QSL), isto é, um limite inferior imposto pela própria teoria quântica ao tempo de evolução do sistema?

Quanto ao problema da interpretação quântica do tempo, sua solução enfrenta inconsistências teóricas sérias apontadas por Pauli (41,42) em 1933. Este fato depõe contra, por exemplo, a proposição de uma relação de incerteza envolvendo o tempo como um possível observável canonicamente conjugado ao hamiltoniano do sistema. Esta é uma discussão ainda latente já que argumentos recentes apontam falhas na assertiva de Pauli e, portanto, abrem caminho para a proposição de modelos físicos nos quais a atribuição de um operador tempo não violaria qualquer princípio fundamental da mecânica quântica. (40,43) Por exemplo, Giovannetti, Lloyd e Maccone (44) apresentaram recentemente uma formulação modificada do chamado mecanismo de Page e Wootters (45) na qual a quantização do tempo é consistente com as leis da teoria quântica. Isto porque o operador tempo é definido introduzindo um espaço de Hilbert auxiliar $\mathcal{H}_T$ acoplado ao espaço $\mathcal{H}_S$ que caracteriza o sistema quântico sob análise. Neste caso, as regras de quantização, relações de comutação e evoluções quânticas se aplicam a operadores definidos no espaço estendido $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_T$ que, a princípio, não dispõe de realidade física imediata. A correspondência entre o modelo teórico e os dados de uma medida experimental que acessa a informação contida unicamente no sistema $\mathcal{H}_S$ é dada pela técnica de purificação, isto é, o descarte de todos os graus de liberdade do sistema $\mathcal{H}_T$ traduzido algebricamente pela operação de traço parcial.

Por sua vez, a questão acerca do tempo de evolução recebeu uma primeira resposta satisfatória com os trabalhos seminais de Mandelstam e Tamm (MT) (46) e Margolus e Levitin (ML) (47) publicados em um intervalo de quase meio século. A solução proposta por estes autores tem uma intersecção sutil com o problema do tempo na mecânica quântica já que (i) a abordagem técnica não requer a promoção do tempo ao patamar de um operador quântico e (ii) relaciona tempo e dispersão na energia, ou mesmo energia média, sem exigir qualquer tipo de relação de incerteza. A solução completa deste problema, a

qual inclui estados e dinâmicas mais gerais que aquelas consideradas por MT e ML, vêm sendo construída ao longo das últimas décadas por meio de uma vasta quantidade de artigos publicados sobre o assunto. A título de curiosidade, uma pesquisa à base pública arXiv.org com a busca *quantum speed limit* revela algo em torno de 250 artigos versando sobre o assunto. A julgar apenas pelos manuscritos revisados e publicados por revistas indexadas, este número será um pouco menor. Entretanto, mesmo a seleta miríade de algumas dezenas de trabalhos já seria sugestiva para crer que este problema é relevante e, atualmente, desfruta do que se pode chamar de *timing* perfeito.

A análise da pletora de artigos endereçando o problema do QSL revela desde padrões comuns até certas deficiências em sua abordagem teórica. No último caso, é possível destacar a ausência de um apelo geométrico que poderia revelar nuances mais sutis do problema e abrir caminho a novas interpretações. Neste sentido, esta tese configura, em essência, uma modesta tentativa de preencher esta lacuna. A idéia consiste em introduzir uma releitura geral do *quantum speed limit* à luz de técnicas da chamada geometria da informação utilizadas ainda superficialmente pela teoria da informação quântica. A princípio, esta formulação permitirá recobrar resultados referendados previamente na literatura e, em especial, tecer conclusões inéditas acerca do tempo mínimo de evolução de estados quânticos que obedecem dinâmicas arbitrárias. Estas conclusões serão baseadas integralmente em técnicas que exploram a estrutura geométrica do espaço de estados quânticos e sua relação com a infinidade de quantificadores de distinguibilidade de estados neste espaço.

Esta tese compreende resultados relativos a aproximadamente 36 meses de trabalho no projeto de pesquisa acerca de QSLs e está organizada como segue. No Capítulo 2 introduzimos a idéia do limite quântico de velocidade ou *quantum speed limit* (QSL). Em especial, iniciamos com um breve passeio pelas embates históricos sobre o papel do tempo na mecânica quântica desde sua gênese até os anos recentes. O capítulo inclui uma tentativa desprestenciosa de mapear a “árvore genealógica” do *quantum speed limit*, isto é, um apanhado cronológico dos principais resultados acerca de QSLs na literatura. Esta análise evita adentrar a pormenores técnicos na derivação destes resultados visando uma leitura fluida do texto. Em especial, reservamos ao Apêndice B as demonstrações dos QSLs de maior destaque na literatura seguindo, em média, abordagens similares àsquelas utilizadas pelos autores destes artigos. Por fim, apresentamos o conjunto de propostas e

objetivos do projeto de pesquisa que culminou na presente tese.

No Capítulo 3 discutimos a relação entre medidas de distinguibilidade de estados quânticos e métricas Riemannianas contrativas no espaço de estados quânticos através do chamado teorema de Morozova, Čencov e Petz (MCP). Ao contrário do caso clássico, a distinguibilidade de estados no caso quântico não é trivial dada a infinidade de quantificadores que podem ser construídos a partir da não-unicidade de métricas Riemannianas definidas no espaço de estados quânticos.

No Capítulo 4 fornecemos a derivação geométrica generalizada de uma família de QSLs a partir do teorema MCP. Este resultado generaliza sobremaneira todos os QSLs discutidos previamente na literatura pois (i) é válido para evoluções unitárias e não-unitárias de estados mistos de dimensão arbitrária, ou seja, estados de N q-bits ou um único q-dit; (ii) inclui a classe de quantificadores de distinguibilidade de estados que emerge do conjunto de métricas Riemannianas intrínseco ao espaço de estados quânticos; (iii) esclarece de forma inédita o papel desempenhado por populações e coerências no tempo de evolução. A cada métrica no espaço de estados quânticos é possível associar um limite inferior no tempo de evolução do sistema. Neste caso, introduzimos uma figura de mérito que revela a métrica Riemanniana associada ao QSL mais *tight*⁴, isto é, aquele vinculado ao menor tempo de evolução para um dado regime de parâmetros da dinâmica. Em particular, o QSL geométrico generalizado recobra grande parte dos demais QSLs mencionados ao escolher a métrica Riemanniana que dá origem a informação de Fisher quântica.

No Capítulo 5 investigamos o QSL geométrico generalizado no contexto da dinâmica unitária. Os resultados se aplicam a qualquer família de evoluções unitárias e estados mistos arbitrários, isto é, desde estados de um único q-bit até estados de N q-bits ou mesmo um q-dit. Neste caso, mostramos que somente as coerências da variação temporal do estado evoluído do sistema quântico fechado contribuem ao QSL. Em particular, levando em conta a evolução unitária de estados mistos de um q-bit, concluímos que a métrica de Fisher quântica fornece um QSL mais *tight* se comparado àquele oriundo da chamada métrica de Wigner-Yanase. Ao final do capítulo argumentamos como este resultado pode ser generalizado ao caso de estados de N q-bits ou um q-dit recorrendo a desigualdades

⁴Traduzida literalmente, a palavra *tight* significa “justo”, “apertado” ou “preciso”. Assim, um dado QSL é mais *tight* que outro se fornece o menor tempo mínimo de evolução de um sistema quântico. Na ausência de uma palavra em português que expresse adequadamente esta idéia, adotaremos nesta tese a mesma notação da literatura especializada, isto é, o termo *tight*.

algébricas envolvendo a fidelidade de Uhlmann-Jozsa e a afinidade quântica.

No Capítulo 6 discutimos o QSL geométrico generalizado considerando evoluções não-unitárias específicas de estados mistos de um único q-bit. Neste contexto, ilustramos a técnica desenvolvida no Capítulo 4 aplicada à evolução de sistemas quânticos abertos dada pelos canais de atenuação de fase – o qual engloba os regimes de atenuação paralela e transversal – e atenuação de amplitude. Apesar da evolução unitária, na dinâmica não-unitária tanto as populações do estado evoluído quanto as coerências de sua variação temporal contribuem ao QSL. Em ambos casos, mostramos regimes em que a métrica de Wigner-Yanase fornece um limite inferior mais *tight* no tempo de evolução do sistema quântico que aquele associado à métrica de Fisher quântica. De fato, além de um dos principais resultados da tese, este fato se apresenta como um contra-exemplo inédito à totalidade de resultados acerca de QSLs na literatura que advoga em favor da informação de Fisher.

No Capítulo 7 apresentamos as conclusões deste trabalho e enumeramos possíveis propostas de sua continuidade corroboradas pelos resultados obtidos até o presente momento. Os Apêndices A, B, C, D e E contêm detalhes técnicos omitidos no texto principal da tese.

Abaixo listamos os artigos ligados diretamente ao projeto de pesquisa. O primeiro artigo contém os resultados gerais inclusos nesta tese acerca de *quantum speed limits*. O segundo contém uma discussão da relação entre medidas de coerência e geometria de estados quânticos. Estes trabalhos decorrem do esforço conjunto entre pesquisadores do Instituto de Física de São Carlos (D. P. Pires e D. O. Soares-Pinto), Universidade Federal de Goiás (L. C. Céleri) e University of Nottingham/Università degli Studi di Salerno (M. Cianciaruso e G. Adesso).

- PIRES, D. P.; CIANCARUSO, M.; CÉLERI, L. C.; ADESSO, G.; SOARES-PINTO, D. O. Generalized geometric quantum speed limits. **Physical Review X**, v. 6, n. 2, p. 021031, 2016. doi: [10.1103/PhysRevX.6.021031](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.6.021031)
- PIRES, D. P.; CÉLERI, L. C.; SOARES-PINTO, D. O. Geometric lower bound for a quantum coherence measure. **Physical Review A**, v. 91, n. 4, p. 042330, 2015. doi: [10.1103/PhysRevA.91.042330](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.042330).

A publicação abaixo lista o artigo referente a uma colaboração científica entre pesquisa-

dores do Instituto de Física de São Carlos (O. S. Duarte, D. P. Pires e D. O. Soares-Pinto) e da Universidade Federal Fluminense (C. S. Castro e M. S. Reis) que decorreu em paralelo ao projeto de pesquisa principal.

- CASTRO, C. S.; DUARTE, O. S.; PIRES, D. P.; SOARES-PINTO, D. O.; REIS, M. S. Thermal entanglement and teleportation in a dipolar interacting system. **Physics Letters A**, v. 380, n. 18–19, p. 1571–1576, 2016. doi: [10.1016/j.physleta.2016.03.002](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2016.03.002).

Capítulo 2

Noções gerais sobre o QSL

Neste capítulo introduziremos a idéia do limite quântico de velocidade ou *quantum speed limit* (QSL) e tentaremos traçar um panorama geral de seu estado da arte na literatura. Embora tenhamos a pretensão de descrever o fenômeno de forma abrangente, esta tarefa se torna inviável dada a vasta quantidade de artigos que tratam direta ou indiretamente do assunto. Neste sentido, nos limitaremos a reportar os resultados centrais da área. Na Seção 2.1 discutimos as interpretações da natureza e do papel do tempo na Mecânica Quântica, em particular no que se refere ao chamado teorema de Pauli. Na Seção 2.2 apresentamos uma visão do estado da arte acerca de QSLs na literatura. Em especial, designamos ao Apêndice B os detalhes de cálculo dos principais resultados sobre QSLs no intuito de tornar esta introdução mais clara e objetiva. Por fim, na Seção 2.3 pontuamos os objetivos deste trabalho.

2.1 Prelúdio: o tempo na mecânica quântica

Antes de iniciar nosso passeio pelo conjunto de idéias que sustentam grande parte do que conhecemos hoje a respeito das interpretações quânticas do tempo, é pertinente esclarecer previamente um ponto importante. Em geral, a discussão que promoveremos está aquém de teorias relativísticas e, a priori, lida com escalas de energia que não têm qualquer relação direta com aquelas envolvidas, por exemplo, no problema da gravitação quântica. Em outras palavras, estaremos interessados na mecânica quântica não-relativística tradicional.

A partir deste adendo, resta esclarecer que as próximas subseções pretendem contextu-

alizar a discussão acerca do conceito de tempo e seu papel na mecânica quântica e estão integralmente baseadas nos trabalhos de Busch (43) e Pashby. (40) Estes textos têm um profundo valor histórico e nos atentaremos aqui a uma apresentação sucinta de seus pontos centrais. Neste sentido, Heisenberg, Schrödinger, Pauli e Dirac são atores importantes deste vívido período na história da Mecânica Quântica. Além disso, tentaremos discorrer sobre a evolução do debate de idéias envolvendo o entendimento do controverso princípio de incerteza energia-tempo ao longo dos anos iniciais da teoria.

2.1.1 O tempo e suas interpretações na mecânica quântica

Afinal, qual é a interpretação adequada do tempo na mecânica quântica? O tempo se comporta como um simples parâmetro da teoria ou tem status de operador? A raiz de grande parte desta confusão remonta ao significado plural do tempo no contexto quântico. A princípio, o tempo representa um parâmetro na equação de Schrödinger e, em geral, pode ser medido por um relógio usual. Esta quantidade, chamada tempo externo, corresponde à coordenada t associada a dimensão temporal de um sistema de coordenadas (x, y, z, t) que parametriza as equações de movimento de um dado sistema físico. A medida do tempo externo é realizada por relógios desvinculados sobremaneira das características do próprio experimento. Os dados desta medida caracterizam, portanto, parâmetros da teoria que especifica tal sistema. Este é o caso, por exemplo, do intervalo de tempo entre a preparação de um experimento e o instante em que ocorre a medição de algum de seus observáveis.

O tempo também pode ser caracterizado através do comportamento dinâmico de um objeto quântico. O tempo pode ser definido e medido por meio da evolução de sistemas físicos, por exemplo, a trajetória descrita por uma partícula livre ou mesmo o período de oscilação de partículas em um relógio atômico. Desta forma, é razoável esperar que qualquer variável dinâmica de um sistema físico registre a passagem do tempo e quantifique intervalos de tempo entre eventos ainda que sob algum regime de aproximação.

Por fim, o tempo também pode ser concebido como um observável, isto é, um operador hermitiano com autovalores reais. Este caso, entretanto, entra em conflito direto com o chamado teorema de Pauli (41, 42) que apresenta argumentos contra a existência de tal operador. A despeito da assertiva de Pauli, alguns resultados recentes apresentam formulações alternativas nas quais o tempo enquanto operador da teoria está em acordo

com todas as regras da mecânica quântica usual. (40, 43) Este é o caso, por exemplo, da Ref. (44) mencionada no Capítulo 1 que introduz o operador tempo no contexto do mecanismo de Page e Wootters. (45) Na próxima subseção analisaremos em detalhes o argumento de Pauli e suas devidas consequências.

2.1.2 Uma breve estória do tempo: sobre ombros de gigantes

Por volta de 1927, Heisenberg se debruçava nas idéias que sustentavam o modelo atômico de Bohr segundo o qual os possíveis estados de um sistema atômico seriam quantizados em um conjunto discreto de órbitas ou estados estacionários, cada qual associado a uma dada energia do sistema. Nesta mesma época, a correspondência entre as soluções da equação de Schrödinger independente do tempo e os estados estacionários da teoria de Bohr foi devidamente elucidada. Por um lado, havia o consenso de que um sistema quântico fechado seria caracterizado por um estado estacionário em qualquer instante. Por outro lado, pairavam dúvidas acerca de qual estado descreveria o sistema em um dado instante e também o intervalo de tempo envolvido na transição entre estados estacionários. Na verdade, a compreensão atual deste problema afirma que um sistema quântico não está restrito a um autoestado de energia e , de fato, seu estado instantâneo será dado pela superposição destes autoestados. Assim, um sistema que se encontra no estado estacionário permanecerá neste autoestado de energia indefinidamente.

A interpretação de Heisenberg do princípio de incerteza energia-tempo é resumida em essência nas linhas (48)

According to the physical interpretation of quantum theory aimed at here, the time of transitions or “quantum jumps” must be as concrete and determinable by measurement as, say, energies in stationary states. The spread within which such an instant is specifiable is given according to $[\mathbf{E}t - t\mathbf{E} = -i\hbar]$ by $\hbar/\Delta E$, if ΔE designates the change of energy in a quantum jump.

A formulação teórica argumentando em favor da existência de operadores $\mathbf{t}$ e $\mathbf{E}$ abria caminho para uma relação de incerteza nos mesmos moldes daquela que Heisenberg obteve para posição e momentum. Esta interpretação exigiria, portanto, que o tempo representasse um observável. Dentre os adeptos da idéia de que o tempo de um evento

seria uma quantidade observável da teoria quântica – inclusive Heisenberg e Jordan, ambos fundadores da mecânica quântica matricial – vigorava o entendimento de que as transições do sistema entre órbitas estacionárias eram mediadas por “saltos” instantâneos. Esta proposta não era totalmente original pois carregava resquícios da idéia de transições entre orbitais eletrônicos do modelo atômico de Bohr.

Neste caso, como interpretar a hipótese de “saltos quânticos” à luz dos conceitos de estados e órbitas estacionárias oriundos da formulação de Bohr? Conforme discutido por Palsby, estes saltos equivaleriam a trocas de energia entre sistemas interagentes e, a priori, seriam inteiramente responsáveis pela percepção do tempo e da passagem do tempo que, por sua vez, define uma propriedade emergente a nível macroscópico. (40) Em face do pré-requisito equivocado de que um sistema quântico fechado não assume valores definidos de energia, a interpretação do princípio de incerteza energia-tempo via saltos quânticos caiu por terra.

Afinal, qual o significado da relação de incerteza energia-tempo? Inserindo este debate no contexto de referenciais inerciais, Schrödinger trouxe à tona a discussão do processo de sincronização de relógios defendido por Einstein no qual uma uniformização da medida do tempo exigiria um tipo de *ensemble* de relógios separados espacialmente emitindo sinais de luz entre si. (40) De acordo com Schrödinger, a relação de incerteza conduziria, em princípio, a limitações na precisão com que esse procedimento seria realizado. (49) Este conflito o levou a argumentar em favor de uma releitura das transformações de Lorentz reinterpretando tempo e coordenadas espaciais como operadores. O erro no raciocínio está no fato de que a mudança de paradigma clássico-quântico requer a quantização de variáveis posição e não sistemas de coordenadas espaço-temporais.

Schrödinger também investigou o conceito de um relógio quântico ideal (50), isto é, um sistema que evolui através de uma sucessão de estados instantâneos distinguíveis $\{|\psi_j\rangle\}_{j=1,2,\dots}$ que simulam o papel dos valores $\{t_j\}_{j=1,2,\dots}$ do tempo externo registrados pelos ponteiros de um relógio. (40, 43) Por sua vez, se o relógio é ideal, um estado instantâneo $|\psi_j\rangle$ deveria ser perfeitamente distinguível de todos os demais estados $|\psi_l\rangle \forall j \neq l$ e, portanto, estados sucessivos $|\psi_j\rangle$ e $|\psi_{j+1}\rangle$ do sistema seriam mutuamente ortogonais com resolução dada por $\delta t = t_{j+1} - t_j$. Entretanto, devido a relação entre energia e tempo, esta condição implicaria que qualquer valor de energia no intervalo $]-\infty, +\infty[$ seria igualmente

provável. (43)

Este aspecto revela o problema central do relógio quântico ideal: a partir de seu espectro ilimitado, Schrödinger conclui que esta formulação estaria em desacordo com os fundamentos da teoria quântica. A exemplo do oscilador harmônico quântico cujo espectro é limitado inferiormente pela energia de ponto zero, sistemas quânticos em geral dispõem de um estado fundamental, isto é, um estado de mínima energia. O relógio ideal, entretanto, tem um espectro cujas energias podem assumir qualquer valor positivo ou negativo. De fato, há um argumento baseado na violação do princípio de conservação de energia que depõe contra a plausibilidade deste relógio. Imagine um sistema quântico cujo espectro não tem um valor mínimo e extraia dele uma quantidade arbitrária de energia. Em essência, perceba que não importa quanta energia será extraída dada a disponibilidade infinita deste recurso e, portanto, o sistema pode ser usado como fonte inesgotável de energia. Esta análise traz à tona a impossibilidade de atribuir ou quantificar a quantidade de energia associada ao sistema. (40)

Esta argumentação, além de colocar o relógio ideal sob suspeição, revela ainda que este sistema tem um valor completamente incerto na energia. Isto significa que a interação com outro sistema induzirá a troca de uma quantidade de energia arbitrariamente grande, ainda que positiva ou negativa. De fato, este sistema não seria fisicamente possível aos olhos da atual compreensão da teoria quântica. A condição de espectro requer que hamiltonianos físicos tenham um limite inferior no espectro, isto é, um valor mínimo para a energia que o sistema pode assumir.

A era moderna na busca pela compreensão da natureza do tempo e seu verdadeiro papel na Mecânica Quântica é inaugurada por volta de 1933 com o histórico par de notas de rodapé de Wolfgang Pauli inclusas na segunda edição de seu artigo *Encyclopedia of Physics*. (41, 42) A despeito da classificação de “teorema” à memorável nota de Pauli dirigida à questão do tempo na teoria quântica, a releitura crítica deste resultado faria justiça ao enquadrá-lo como um argumento ligeiramente formal devido a ausência de precisão técnica em sua formulação original. Este raciocínio é corroborado, por exemplo, pelo silêncio do próprio autor acerca das propriedades algébricas dos operadores T e H em questão.

A primeira nota de Pauli (41, 42) se refere ao problema do relógio ideal de Schrödinger,

In this connection, it is stressed that an ideal clock, i.e. one which gives the time exactly, will possess an infinitely large uncertainty in energy and hence also an infinite energy. According to us, this does *not* mean that the use of the usual time concept contradicts quantum mechanics, since such an ideal clock can be approximated arbitrarily.

Nestas linhas Pauli traça um paralelo entre o problema de Schrödinger e seu argumento prévio acerca da incerteza na posição de uma partícula massiva e aquilo que se pode convencionar como um “ponteiro quântico ideal”. (40) Neste caso, observe que as expressões “incerteza infinita na energia” e “energia infinita” são distintas no contexto quântico e apontam diferenças entre o relógio ideal e o ponteiro quântico ideal. Por um lado, ao afirmar que um sistema quântico possui energia infinita, dizemos que o valor esperado do hamiltoniano deste sistema é infinito. Por outro lado, uma incerteza infinita na energia não é equivalente a uma energia infinita, mas sim em dispor de uma incerteza na energia.

A segunda nota rodapé de Pauli apresenta uma argumentação contra a concepção do tempo como um observável no regime quântico. A idéia é dada nas linhas (41,42)

In the old literature on quantum mechanics we often find the operator equation

$$HT - TH = -i\hbar \mathbb{I}$$

which arises from $[\frac{\hbar}{i}\dot{F} = HF - FH]$ by substituting T for F . It is generally not possible, however, to construct a Hermitean operator (e.g. as a function of p e q) which satisfies this equation. This is so because, from the C.R. [Commutation Relation] written above, it follows that H possesses continuously all eigenvalues from $-\infty$ to $+\infty$ (cf. Dirac, Quantum Mechanics, First edition (1930), 34 and 56) whereas on the other hand, discrete eigenvalues of H can be present. *We, therefore, conclude that the introduction of an operator T is basically forbidden and the time T must necessarily be considered as an ordinary number (“c-number”) in Quantum Mechanics* (cf. for this Schrödinger 1931).

O raciocínio de Pauli pode ser demonstrado via conceitos introdutórios da Mecânica Quântica, em geral desprovidos de aspectos técnicos formais profundos. Considere um sistema quântico cujo hamiltoniano H possui espectro discreto limitado inferiormente, isto é, disponha de um estado fundamental ou estado de mínima energia. Este é o caso, por

exemplo, do oscilador harmônico quântico de frequência ω_0 cujo espectro $E_n = (n+1/2)\hbar\omega_0$ discreto tem como valor mínimo a energia de ponto zero $E_0 = \hbar\omega_0/2$. Por hipótese, admita a existência de um observável tempo T , isto é, um operador hermitiano canonicamente conjugado ao hamiltoniano H do sistema quântico. A partir desta suposição, o par de observáveis T e H obedeceria a relação de comutação canônica

$$[T, H] = i\hbar \mathbb{I} . \quad (2.1)$$

Já que $T = T^\dagger$ é hermitiano, então para qualquer $w \in \mathbb{R}$ o operador

$$U_w = e^{-iwT/\hbar} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-iw)^s}{\hbar^s s!} T^s \quad (2.2)$$

é unitário, isto é, satisfaz as igualdades

$$U_w^\dagger U_w = U_w U_w^\dagger = \mathbb{I} . \quad (2.3)$$

A partir da identidade algébrica $[H, T^s] = -i\hbar s T^{s-1} \forall s \in \mathbb{N}/\{0\}$, é possível verificar as seguintes relações de comutação

$$[H, U_w] = -wU_w \quad \text{e} \quad [H, U_w^\dagger] = wU_w^\dagger . \quad (2.4)$$

Através destas expressões, ambos operadores H e U_w obedecem a chamada relação de covariância

$$U_w H U_w^\dagger = H + w\mathbb{I} . \quad (2.5)$$

A Eq. (2.5) implica que T é o gerador do grupo de translações no espectro de energia do sistema quântico. Este resultado indica também que H e $H + w\mathbb{I}$ são operadores equivalentes a menos de uma transformação unitária. Além disso, se $|\phi_n\rangle$ é autoestado de H com autovalor E_n , isto é, $H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$, então segue que

$$H U_w |\phi_n\rangle = U_w H |\phi_n\rangle + [H, U_w] |\phi_n\rangle = (E_n - w) U_w |\phi_n\rangle \quad (2.6)$$

e, portanto, conclui-se que $U_w |\phi_n\rangle$ é autoestado de H com autovalor $E_n - w$. Já que $w \in \mathbb{R}$ pode assumir qualquer valor real, a Eq. (2.6) implica que o espectro do hamiltoniano é real. Entretanto, este resultado confronta diretamente a hipótese inicial de que o hamiltoniano H tem um espectro discreto e, possivelmente, limitado inferiormente. Isto prova, em essência, o teorema de Pauli.

É pertinente pontuar aqui a ligeira falta de clareza, talvez proposital e visando evitar

conflitos desnecessários à época, acerca do uso da condição de limitação no espectro na asserção de Pauli. Isto porque o teorema de Pauli veio à tona simultaneamente ao surgimento da teoria relativística de Dirac que, dentre outras previsões, inaugurava a idéia de antipartículas. Nesta formulação, também conhecida como “teoria de buracos”, o espectro do hamiltoniano não possui um limite inferior e inclui, portanto, energias positivas e negativas. O conjunto de estados de energia negativa é totalmente preenchido por elétrons e define o chamado “mar de Fermi”. A excitação de um destes elétrons ao conjunto de estados de energia positiva deixa uma vacância ou “buraco” no mar de Fermi que, contrariamente aos demais elétrons, se comporta como uma partícula de carga positiva. Este tipo de excitação no mar de Fermi foi posteriormente interpretada como o pósitron, a antipartícula do elétron.

À luz de discussões recentes, o teorema de Pauli é posto em xeque dada a existência de certos contra-exemplos que podem invalidá-lo sobremaneira. (44,51,52) Estes, por sua vez, emergem das brechas e imprecisões técnicas inclusas em sua própria asserção. A princípio, seria razoável presumir a validade integral do teorema apostando na robustez da condição do espectro discreto do hamiltoniano e abrindo mão da hipótese de um mínimo de energia. Entretanto, existem pares de operadores H e T que satisfazem a relação de comutação na Eq. (2.1) ainda que H se enquadre neste pré-requisito. Por exemplo, Garrison e Wong (53) forneceram contra-exemplos baseados em hamiltonianos semi-limitados e de espectro discreto. Galapon (51,52), por sua vez, apresentou um contra-exemplo no qual um hamiltoniano H auto-adjunto com espectro discreto e semi-limitado corrobora um operador conjugado T que é periódico, limitado, hermitiano e, portanto, auto-adjunto. Outros casos incluem contra-exemplos nos quais T é um operador hermitiano de espectro ilimitado, embora não auto-adjunto. (54) Na prática, todos os contra-exemplos citados se baseiam em medidas a valores em operadores positivos, ou seja, POVMs¹, que respeitam a relação de covariância temporal. (40)

Afinal, qual a relevância de POVMs e a quais situações experimentais, se de fato existem, esta formulação corresponde fisicamente? A medida de um observável associa um resultado ao instante de tempo da própria medida. Por um lado, um instante de

¹POVM, do inglês *Positive Operator Valued Measure*, define uma medida projetiva generalizada no espaço de Hilbert. A tradução “medidas a valores em operadores positivos” faz menção à Ref. (55). Consulte a Seção A.2 do Apêndice A para maiores detalhes.

medida presume que a interação entre o objeto medido e o aparato de medida é idealmente instantânea. Por outro lado, a medida de tempo de um evento é extensa no próprio tempo, isto é, o detector leva um certo tempo até acusar a detecção do evento em si. Wigner (56), por exemplo, interpreta estas medidas discutindo a localização de partículas. Neste caso, a primeira medição quantifica a medida da posição em um dado instante e, por sua vez, a segunda medida acusa o instante de tempo no qual a partícula se encontra em um ponto do espaço. Existem diversos experimentos nos quais a ocorrência de eventos em instantes aleatoriamente distribuídos é registrada, por exemplo, via relógios usuais. Neste caso, POVMs representam a ferramenta mais adequada no tratamento da estatística temporal destas medidas. A Ref. (43) discute exemplos envolvendo o uso de POVMs na descrição do tempo enquanto um operador, além de tentar esclarecer sua relação de incerteza com o hamiltoniano do sistema neste contexto.

Por fim, as premissas e consequências do teorema de Pauli podem adquirir maior robustez com a ajuda do chamado teorema de Stone-von Neumann. Em linhas gerais, creditar a existência do par de observáveis conjugados H e T ao possível espectro real de H definido no intervalo $] -\infty, +\infty[$ é consequência da hipótese de que estes mesmos operadores caracterizam um par conjugado de Weyl. Esta abordagem, entretanto, envolve técnicas e discussões que estão muito além do escopo desta tese e da análise despretensiosa desta seção. Assim, recomendamos ao leitor verificar o Capítulo 4, Seção 4.1, da Ref. (40) para maiores detalhes acerca do teorema de Stone-von Neumann e pares de Weyl.

2.2 QSL: estado da arte

A compreensão do papel do tempo no cenário quântico remonta à gênese da própria teoria quântica. (41) As últimas décadas testemunharam intensa atividade de pesquisa voltada à elucidação desta lacuna conceitual que, por sua vez, instigou uma série de discussões adjacentes. De fato, problemas como a seta do tempo (57) e o efeito Zeno quânticos (58) e a proposição de relações de incerteza energia-tempo (59) vinculam-se intrinsecamente a este assunto e têm significados físicos que desafiam uma percepção meramente clássica da Natureza.

Algumas destas questões desencadearam progressos significativos na busca por novas

tecnologias quânticas. Dentre estes avanços destacam-se aqueles voltados à rapidez na execução de um dado processo físico e que decorrem diretamente do chamado limite quântico de velocidade (QSL), isto é, um limite imposto pela Mecânica Quântica no tempo mínimo de evolução entre dois estados de um sistema quântico. (46, 47, 60–100)

Atualmente, QSLs têm sido amplamente investigados sob o escopo da ciência da informação quântica já que a compreensão deste mecanismo está ligada ao desenvolvimento de dispositivos de processamento de informação mais rápidos e eficientes. Este fato tem atraído crescente interesse das áreas de otimização e controle quânticos (101), metrologia quântica (102), computação quântica (6) e termodinâmica quântica. (103) Buscando evidenciar as nuances do limite quântico de velocidade em face da evolução de um dado sistema quântico, neste ponto vamos dividir a discussão sobre QSLs em duas partes: dinâmica unitária e dinâmica não-unitária.

2.2.1 Dinâmica unitária

O interesse por QSLs se confunde historicamente com a tentativa controversa de escrever relações de incerteza energia-tempo consistentes com a teoria quântica. Embora a terminologia *quantum speed limit* seja recente, o resultado seminal relativo ao tema foi reportado por Mandelstam e Tamm (MT) (46) há cerca de 70 anos. Considerando um sistema quântico cuja dinâmica unitária é governada pelo hamiltoniano independente do tempo H , os autores mostraram que o limite inferior no tempo de evolução τ entre dois estados não-ortogonais $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_\tau\rangle = e^{-itH/\hbar}|\psi_0\rangle$, é dado por²

$$\tau \geq \frac{\hbar}{\Delta E} \arccos(|\langle\psi_\tau|\psi_0\rangle|) , \quad (2.7)$$

em que

$$\Delta E = \sqrt{\langle\psi_0|H^2|\psi_0\rangle - \langle\psi_0|H|\psi_0\rangle^2} \quad (2.8)$$

é a variância de H . Note que ΔE assume um valor constante já que o hamiltoniano é independente do tempo. Além disso, é possível atribuir uma solução analítica e/ou numérica para esta desigualdade via conhecimento prévio exclusivo do estado inicial do sistema e do hamiltoniano que rege sua dinâmica. Esta é uma característica peculiar a todo QSL: o limite em τ depende fortemente do processo físico sob análise. Em particular,

²Veja a Seção B.1 do Apêndice B acerca da derivação deste resultado.

se a condição de ortogonalidade $\langle \psi_0 | \psi_\tau \rangle = 0$ se aplica entre os estados inicial e final da dinâmica, então $\arccos(|\langle \psi_0 | \psi_\tau \rangle|) = \pi/2$ e o QSL na Eq. (2.7) se reduz a

$$\tau \geq \frac{\hbar\pi}{2\Delta E} . \quad (2.9)$$

A dependência do limite inferior no inverso da variância ΔE tem duas implicações imediatas. Se o estado inicial do sistema é um autoestado de H , isto é, $H|\psi_0\rangle = E_0|\psi_0\rangle$ tal que $\Delta E = 0$, então a desigualdade $\tau \geq \infty$ indica que não haverá evolução entre os estados $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_\tau\rangle$. Em outras palavras, se $|\psi_0\rangle$ é incoerente na base de autoestados do hamiltoniano H , então ΔE não possui qualquer informação acerca da velocidade de evolução do sistema quântico. Por outro lado, a evolução entre os estados inicial e final pode ser suficientemente rápida ainda que ΔE tenha um valor finito, ou seja, o QSL é arbitrariamente pequeno.

O QSL de MT foi rederivado cerca de meio século mais tarde por Bhattacharyya (61), Vaidman (65) e Uffink. (66) Fleming (60) forneceu um tempo mínimo de evolução à la MT recorrendo à equação funcional de Ersak que descreve a evolução de estados não-estacionários associados ao decaimento de partículas instáveis.

Anandan e Aharonov (AA) (62) estenderam o resultado de MT para sistemas físicos cuja dinâmica é descrita por hamiltonianos dependentes do tempo por meio de uma abordagem que esclareceu a natureza geométrica do QSL. Nesta formulação, o estado puro $|\psi_t\rangle$ evolui no espaço de Hilbert projetivo sob a dinâmica unitária gerada pelo hamiltoniano dependente do tempo H_t no intervalo $0 \leq t \leq \tau$. Em termos geométricos, esta evolução descreve uma curva cujo comprimento $\ell_{\text{FS}} = \int ds_{\text{FS}}$ é calculado via a métrica de Fubini-Study que emerge da estrutura de produto interno intrínseca ao espaço projetivo, isto é,

$$ds_{\text{FS}}^2 = 1 - |\langle \psi_t | \psi_{t+dt} \rangle|^2 = \frac{dt^2}{\hbar^2} \Delta E_t^2 \quad (2.10)$$

e

$$\Delta E_t = \sqrt{\langle \psi_t | H_t^2 | \psi_t \rangle - \langle \psi_t | H_t | \psi_t \rangle^2} . \quad (2.11)$$

Assim, o QSL de Anandan e Aharonov é obtido recorrendo ao fato de que a distância geodésica $\arccos(|\langle \psi_\tau | \psi_0 \rangle|)$ relativa à métrica de Fubini-Study representa um limite inferior ao comprimento ℓ_{FS} da trajetória que conecta os estados puros $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_\tau\rangle$ no espaço

projetivo, a saber³,

$$\arccos(|\langle \psi_\tau | \psi_0 \rangle|) \leq \frac{1}{\hbar} \int_0^\tau dt \Delta E_t . \quad (2.12)$$

A abordagem geométrica atribui um significado claro à saturação do QSL. Em resumo, esta quantidade é saturada quando o sistema evolui ao longo da geodésica que conecta os estados inicial e final no espaço de estados quânticos. Observe que a Eq. (2.12) tem como caso particular o resultado de MT dado na Eq. (2.7) se o hamiltoniano é independente do tempo, isto é, $H_t = H$ tal que $\Delta E_t = \Delta E$.

Pati (63) mostrou que a distância ℓ_{FS} está relacionada à fase geométrica decorrente da evolução cíclica e unitária entre estados puros no espaço de Hilbert projetivo. Uhlmann (64) generalizou o resultado de AA mostrando que a evolução unitária entre dois estados mistos descreve uma trajetória no espaço de estados limitada inferiormente pelo ângulo de Bures, isto é, uma generalização para estados mistos da distância geodésica associada a métrica de Fubini-Study. Pfeifer (67) rederivou o QSL de Aharonov e Anandan a despeito de qualquer argumentação geométrica. De fato, a derivação deste QSL seguiu passos análogos àqueles envolvidos na idéia do trabalho original de MT. Além disso, este resultado foi posteriormente generalizado por Pfeifer e Fröhlich (68) para incluir a evolução de estados mistos arbitrários.

Por volta de meio século após o resultado de MT, Margolus e Levitin (ML) (47) reportaram um QSL sem precedentes descrevendo o tempo de evolução de um sistema quântico fechado entre dois estados puros ortogonais $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_\tau\rangle = e^{-itH/\hbar}|\psi_0\rangle$ cuja dinâmica é governada pelo hamiltoniano independente do tempo H . Este limite inferior é dado por⁴

$$\tau \geq \frac{\pi \hbar}{2E} , \quad (2.13)$$

em que

$$E := \langle H \rangle = \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle \quad (2.14)$$

é a média do hamiltoniano H em relação ao estado $|\psi_0\rangle$, e independe do inverso da variância do hamiltoniano do sistema. Por hipótese, os autores admitem que o estado fundamental do sistema tem energia nula. Vale ressaltar que o QSL de ML não recobra aquele devido a MT e vice-versa, ou seja, os resultados de ML e MT são independentes

³Veja a Seção B.2 do Apêndice B acerca da derivação deste resultado.

⁴Consulte a Seção B.3 do Apêndice B acerca da derivação deste resultado.

entre si e representam famílias de QSLs com propriedades físicas diferentes. De fato, as desigualdades nas Eqs. (2.9) e (2.13) são simultaneamente satisfeitas apenas para um estado quântico $|\psi_0\rangle$ tal que $\Delta E = E$, isto é, se⁵ $\alpha = 1$, com

$$\alpha := \frac{\Delta E}{E} . \quad (2.15)$$

Mas o que acontece no regime $\alpha \neq 1$? Em outras palavras, seria possível obter um QSL que generalize os resultados anteriores e recobre as desigualdades de MT e ML como limites assintóticos? Esta discussão ganhou novos contornos através do trabalho de Levitin e Toffoli (LT) (77) cerca de uma década após o resultado de ML. Por um lado, os QSLs nas Eqs. (2.9) e (2.13) são saturados apenas para estados da forma

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_0\rangle + e^{i\vartheta}|\phi_n\rangle) , \quad (2.16)$$

em que $|\phi_0\rangle$ e $|\phi_n\rangle$ são autoestados não-degenerados de H com $H|\phi_n\rangle = \delta_{n,0}E_n|\phi_n\rangle$, e $\vartheta \in \mathbb{R}$ define uma fase arbitrária. Em outras palavras, ambos tempos de ortogonalização de MT e ML requerem estados iniciais dados em termos da superposição coerente de apenas dois autoestados do hamiltoniano gerador da dinâmica unitária. No que concerne à saturação do QSL de MT, vale destacar que Pati (71) já havia apresentado conclusões análogas a estas cerca de uma década antes do trabalho de Levitin e Toffoli. Por outro lado, LT provaram que um QSL unificado restrito à evolução unitária de estados puros ortogonais é obtido combinando ambos resultados de MT e ML na forma⁶

$$\tau_{\min} = \max \left\{ \frac{\pi \hbar}{2\Delta E}, \frac{\pi \hbar}{2E} \right\} . \quad (2.17)$$

Assim, se $\Delta E < E$, ou seja, $\alpha < 1$, então $\tau_{\min} = \pi \hbar / (2\Delta E)$. Por outro lado, se $E < \Delta E$, ou seja, $\alpha > 1$, então $\tau_{\min} = \pi \hbar / (2E)$. Em especial, LT também concluíram que o QSL na Eq. (2.17) não pode ser satisfeito por quaisquer estados mistos

$$\rho_0 = \sum_j p_j |j_0\rangle \langle j_0| , \quad \rho_\tau = U_\tau \rho_0 U_\tau^\dagger = \sum_j p_j |j_\tau\rangle \langle j_\tau| , \quad |j_\tau\rangle := U_\tau |j_0\rangle , \quad (2.18)$$

em que $0 < p_j < 1$ e $\sum_j p_j = 1$, a matriz U_τ define uma evolução unitária, $U_\tau U_\tau^\dagger = U_\tau^\dagger U_\tau = \mathbb{I}$, e

$$\langle j_0 | l_0 \rangle = \delta_{jl} , \quad \langle j_\tau | l_\tau \rangle = \langle j_0 | U_\tau^\dagger U_\tau | l_0 \rangle = \delta_{jl} . \quad (2.19)$$

⁵Consulte a Seção B.4 do Apêndice B para maiores detalhes acerca do parâmetro α .

⁶Veja a Seção B.4 do Apêndice B acerca da derivação deste resultado.

Isto porque os estados mistos ρ_0 e ρ_τ não obedecem ao vínculo de ortogonalidade característico do QSL de MT e ML, isto é, a projeção

$$\text{Tr}(\rho_0 \rho_\tau) = \sum_{j,l} p_j p_l |\langle j_0 | l_\tau \rangle|^2 \neq 0 \quad (2.20)$$

é diferente de zero mesmo quando os estados $|j_0\rangle$ e $|j_\tau\rangle$ são escritos em termos de combinações lineares da família de estados indicada na Eq. (2.16) que, por sua vez, corroboram o limite inferior na Eq. (2.17). Em outras palavras, o valor de τ na Eq. (2.17) e, portanto, estados $|\psi_0\rangle$ na Eq. (2.16), não implica a nulidade completa do produto $\text{Tr}(\rho_0 \rho_\tau)$. Neste caso, estados mistos na Eq. (2.18) não obedecem o QSL unificado de LT.

Giovannetti, Lloyd e Maccone (73) (GLM) estenderam o QSL de ML ao caso de estados mistos arbitrários e também mostraram que emaranhamento pode acelerar a evolução dinâmica de um sistema quântico fechado multipartido. Neste caso, considere um sistema quântico descrito pelo estado misto ρ_0 que evolui sob a dinâmica unitária governada pelo hamiltoniano H independente do tempo. Assim, fixando a fidelidade de Uhlmann-Jozsa⁷ $F(\rho_0, \rho_\tau) = \epsilon$, com $0 \leq \epsilon \leq 1$, o QSL associado à evolução entre os estados inicial ρ_0 e final $\rho_\tau = e^{-itH/\hbar} \rho_0 e^{itH/\hbar}$ é dado por

$$\tau_\epsilon(E, \Delta E) \equiv \max \left\{ \alpha(\epsilon) \frac{\pi \hbar}{2 \Delta E}, \beta(\epsilon) \frac{\pi \hbar}{2 E} \right\}, \quad (2.21)$$

com

$$\alpha(\epsilon) = \min_{\theta} \left[\min_q \left(1 - \sqrt{\epsilon} (\cos \theta - q \sin \theta) \right) \frac{2}{\pi a} \right], \quad \beta(\epsilon) = \frac{2}{\pi} \arccos(\sqrt{\epsilon}), \quad (2.22)$$

em que $q \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$ são parâmetros nos quais $\alpha(\epsilon)$ é minimizada, e a é uma função de q e vice-versa definida implicitamente

$$a = \frac{y + \sqrt{y^2(1+q^2) + q^2}}{1+y^2}, \quad \sin y = \frac{a(1-xy) + q}{1+q^2}, \quad (2.23)$$

com $y \in [\pi - \arctan(1/q), \pi + \arctan q]$. O leitor interessado pode conferir a demonstração nada trivial destes resultados nos Apêndices da Ref. (73). Note que se $\epsilon = 0$, isto é, os estados inicial ρ_0 e final ρ_τ são ortogonais entre si, então segue que $\alpha(0) = \beta(0) = 1$ e o QSL de GLM se reduz àquele obtido previamente por Levitin e Toffoli para o caso de estados puros.

⁷A fidelidade de Uhlmann-Jozsa é dada por $F(\rho_0, \rho_\tau) = \left(\text{Tr} \left[\sqrt{\sqrt{\rho_0} \rho_\tau \sqrt{\rho_0}} \right] \right)^2$.

Ainda no âmbito da dinâmica unitária, Jones e Kok (79) forneceram uma derivação de ambos limites de MT e ML para estados mistos arbitrários segundo uma formulação geométrica baseada no ângulo de Bures como medida de distância no espaço de estados. Entretanto, a derivação da desigualdade de ML neste trabalho apresentava um sério equívoco algébrico e foi corrigida mais tarde por Zwierz (104) que propôs também um novo tipo de QSL à la ML para estados puros. Explorando a conexão geométrica entre o ângulo de Bures e a informação de Fisher, Deffner e Lutz (80) forneceram uma derivação do tempo mínimo de evolução à la MT e ML para um sistema evoluindo entre estados mistos arbitrários e cuja dinâmica unitária é governada por um hamiltoniano dependente do tempo.

Explorando a teoria de recurso de assimetria como ferramenta na caracterização de propriedades decorrentes da quebra de simetrias em estados quânticos, Marvian, Spekkens e Zanardi (MSZ) (105) mostraram que o QSL corrobora o conceito de coerência quântica como uma medida da assimetria. Seja $\mathcal{D}(\rho_0, \rho_t)$ uma medida de distinguibilidade entre os estados $\rho_0, \rho_t \in \mathcal{S}$, em que $\mathcal{S}$ define o espaço de estados quânticos. Embora arbitrária, esta escolha é restrita à classe de funcionais satisfazendo

- (i) $\mathcal{D}(\rho_1, \rho_2) \geq 0 \ \forall \ \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}$ e $\mathcal{D}(\rho_1, \rho_2) = 0$ se, e somente, se $\rho_1 = \rho_2$;
- (ii) $\mathcal{D}(\mathcal{E}(\rho_1), \mathcal{E}(\rho_2)) \leq \mathcal{D}(\rho_1, \rho_2) \ \forall \ \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}$, isto é, $\mathcal{D}(\bullet, \bullet)$ é contrativo sob a ação do mapa completamente positivo que preserva traço $\mathcal{E}(\bullet)$;
- (iii) $\mathcal{D}(p\rho_1 + (1-p)\rho_2, p\rho_3 + (1-p)\rho_4) \leq \max\{\mathcal{D}(\rho_1, \rho_2), \mathcal{D}(\rho_3, \rho_4)\}$, em que $0 \leq p \leq 1$ e $\{\rho_j\}_{j=1,\dots,4} \in \mathcal{S}$.

Dado $\epsilon > 0$, seja $\tau_\epsilon^{\mathcal{D}}(\rho_0)$ o tempo mínimo associado à evolução do estado ρ_0 ao estado $\rho_t = e^{-itH}\rho_0 e^{itH}$ sob ação do hamiltoniano H independente do tempo⁸. Por hipótese, o estado ρ_t será ϵ -distinguível de ρ_0 via o funcional $\mathcal{D}(\rho_t, \rho_0)$, isto é, $\mathcal{D}(\rho_t, \rho_0) \geq \epsilon$. Se esta condição não é satisfeita para um dado $t > 0$, então $\tau_\epsilon^{\mathcal{D}}(\rho_0) \rightarrow \infty$. Escrevendo algebricamente, dispomos do QSL de MSZ na forma

$$\tau_\epsilon^{\mathcal{D}}(\rho_0) = \begin{cases} \infty, & \text{se } \mathcal{D}(\rho_0, \rho_t) < \epsilon \text{ para todo } t \geq 0, \\ \min_{t>0}\{t : \mathcal{D}(\rho_0, \rho_t) \geq \epsilon\}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.24)$$

⁸Nestas linhas seguiremos a mesma notação adotada por MSZ (105) na qual $\hbar = 1$.

Neste sentido, para todo $\epsilon > 0$ e um funcional arbitrário $\mathcal{D}(\rho_0, \rho_t)$, os autores mostraram que a quantidade $1/\tau_\epsilon^{\mathcal{D}}(\rho_0)$, além de caracterizar a velocidade média de evolução do sistema quântico, também define uma medida de assimetria do estado ρ_0 em relação ao grupo de translações temporais geradas pelo hamiltoniano H .

Para entender esta propriedade, seja $H = \sum_n E_n |n\rangle\langle n|$ a decomposição espectral do hamiltoniano e $\varrho_0 = \sum_n p_n |n\rangle\langle n|$ um estado incoerente na base de autoestados de H . Naturalmente, dado que $[\varrho_0, H] = 0$, então

$$\varrho_t = e^{-itH} \varrho_0 e^{itH} = \varrho_0 , \quad (2.25)$$

isto é, ϱ_0 permanece invariante sob a evolução gerada pelo hamiltoniano e define um estado translacionalmente invariante (TI). Neste caso, segue que

$$\mathcal{D}(\varrho_0, \varrho_t) = \mathcal{D}(\varrho_0, \varrho_0) = 0 . \quad (2.26)$$

Assim, dado $\forall \epsilon > 0$, então $\mathcal{D}(\varrho_0, \varrho_t) < \epsilon$ e, via a Eq. (2.24), temos $\tau_\epsilon^{\mathcal{D}}(\varrho_0) = \infty$, isto é, a velocidade $1/\tau_\epsilon^{\mathcal{D}}(\varrho_0)$ será nula. Portanto, a existência de uma velocidade de evolução finita e não-nula está ligada ao caráter coerente de ϱ_0 na base de autoestados de H ou ainda à quebra de simetria do estado quântico em relação à translação temporal. Em consequência, um funcional arbitrário escolhido como figura de mérito na caracterização do QSL será contrativo sob operações TI⁹, ou seja,

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\text{TI}}(\rho_0), \mathcal{E}_{\text{TI}}(\rho_t)) \leq \mathcal{D}(\rho_0, \rho_t) , \quad (2.27)$$

e consequentemente representará uma medida de assimetria de translações temporais. De fato, ambos QSLs de MT e ML satisfazem esta propriedade para estados puros. Além disso, os autores derivaram generalizações do QSL de MT baseadas, por exemplo, na informação de Wigner-Yanase,

$$\tau_\epsilon^{\text{WY}} \geq \sqrt{\frac{1 - e^{-\epsilon/2}}{\mathcal{I}(\rho_0, H)}} , \quad \text{com} \quad \mathcal{I}(\rho_0, H) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left([\sqrt{\rho_0}, H]^2 \right) , \quad (2.28)$$

e também via a norma- ℓ_1 ,

$$\tau_\epsilon^{\ell_1} \geq \frac{\epsilon}{\|[H, \rho_0]\|_1} , \quad (2.29)$$

⁹Uma operação quântica $\mathcal{E}(\bullet)$, isto é, um mapa completamente positivo que preserva traço (CPTP), é translacionalmente invariante (TI) se $e^{-itH} \mathcal{E}(\rho) e^{itH} = \mathcal{E}(e^{-itH} \rho e^{itH})$, $\forall t \geq 0$.

em que a norma

$$\|\mathcal{O}\|_1 = \sum_j s_j(\mathcal{O}) \quad (2.30)$$

é dada em termos da soma dos valores singulares $s_j(\bullet)$ do operador $\mathcal{O}$. Recomendamos ao leitor consultar a Ref. (105) para maiores detalhes técnicos e discussões adicionais. O leitor interessado também pode encontrar outras extensões e discussões adicionais acerca de QSLs para processos unitários nas Refs. (63, 69, 70, 72, 74–76, 81, 90–92, 98–100).

2.2.2 Dinâmica não-unitária

A procura por tecnologias quânticas mais rápidas no processamento de informação vai de encontro a um fenômeno intrínseco a qualquer dispositivo realístico: a decoerência. Em linhas gerais, o sistema físico perde coerência quântica devido ao acoplamento com graus de liberdade do ambiente que o cerca. Embora a descrição de alguns processos físicos despreze este efeito sob alguma aproximação, sua onipresença na descrição mais realística dos fenômenos quânticos exigiu a investigação do QSL também para dinâmicas não-unitárias.

Taddei et al. (82) foram pioneiros ao estender o resultado de MT para processos físicos unitários e não-unitários. Explorando a técnica de purificação de estados quânticos, os autores generalizaram a abordagem geométrica da Ref. (62) reportando um QSL no qual a distância geodésica que conecta os estados inicial e final da dinâmica no espaço de estados é limitada superiormente por uma quantidade dependente da informação de Fisher do estado evoluído. Em síntese, considere o estado misto ρ_t de um sistema S e espaço de Hilbert $\mathcal{H}_S$ evoluindo sob uma dinâmica não-unitária entre os instantes $t = 0$ e $t = \tau$. Através do lema de purificação, a dinâmica não-unitária de $\rho_t \in \mathcal{H}_S$ é equivalente à evolução unitária de um estado puro $|\psi_t^{\text{SE}}\rangle = U_t^{\text{SE}}|\psi_0^{\text{SE}}\rangle$ no espaço de Hilbert estendido $\mathcal{H}_{\text{SE}} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$, onde $\mathcal{H}_E$ é um espaço de Hilbert auxiliar e $U_t^{\text{SE}} \in \mathcal{H}_{\text{SE}}$ define um operador unitário, tal que

$$\rho_t = \text{Tr}_E \left(|\psi_t^{\text{SE}}\rangle \langle \psi_t^{\text{SE}}| \right) = \text{Tr}_E \left(U_t^{\text{SE}} |\psi_0^{\text{SE}}\rangle \langle \psi_0^{\text{SE}}| U_t^{\text{SE}\dagger} \right). \quad (2.31)$$

Neste caso, o hamiltoniano que governa a evolução do estado puro $|\psi_t^{\text{SE}}\rangle$ é dado por

$$H_t^{\text{SE}} = -i\hbar U_t^{\text{SE}} \left(\frac{d}{dt} U_t^{\text{SE}\dagger} \right). \quad (2.32)$$

Os autores mostraram que o limite inferior no tempo de evolução é da forma¹⁰

$$\arccos \left[\sqrt{F(\rho_0, \rho_\tau)} \right] \leq \frac{1}{\hbar} \int_0^\tau dt \sqrt{\min_{\text{pur}} (\Delta H_t^{\text{SE}})^2}, \quad (2.33)$$

em que $F(\rho_0, \rho_\tau)$ é a fidelidade de Uhlmann-Jozsa relativa aos estados $\rho_0, \rho_\tau \in \mathcal{H}_S$ e

$$\Delta H_t^{\text{SE}} := \sqrt{\langle \psi_t^{\text{SE}} | (H_t^{\text{SE}})^2 | \psi_t^{\text{SE}} \rangle - \langle \psi_t^{\text{SE}} | H_t^{\text{SE}} | \psi_t^{\text{SE}} \rangle^2} \quad (2.34)$$

é a variância do hamiltoniano $H_t^{\text{SE}} \in \mathcal{H}_{\text{SE}}$ a qual, na dinâmica de estados puros, é igual à informação de Fisher quântica de $|\psi_t^{\text{SE}}\rangle$, e que deve ser minimizada sobre todas as possíveis purificações deste estado no espaço $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$. Vale ressaltar que a escolha da purificação tem impacto direto na saturação do QSL.

Simultaneamente, del Campo et al. (84) reportaram QSLs à la MT para processos físicos não-unitários cuja descrição se baseia na figura de mérito dada pela pureza relativa

$$f(t) = \frac{\text{Tr}(\rho_0 \rho_t)}{\text{Tr}(\rho_0^2)} \quad (2.35)$$

entre o estado inicial ρ_0 e o estado evoluído ρ_t do sistema. A derivação deste QSL segue duas vertentes complementares entre si e têm em comum o uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz¹¹. Por um lado, o tempo mínimo é obtido considerando a dinâmica de semigrupos no qual a evolução do sistema quântico aberto é governada por uma equação mestra Markoviana $\dot{\rho}_t = \mathcal{L}(\rho_t)$, em que $\mathcal{L}(\bullet)$ representa o super-operador de Lindblad gerador da dinâmica de semi-grupo. Neste caso, o QSL é dado pela desigualdade

$$\tau_\theta \geq \frac{4\theta^2 \text{Tr}(\rho_0^2)}{\pi^2 \sqrt{\text{Tr}[(\mathcal{L}^\dagger(\rho_0))^2]}}, \quad (2.36)$$

em que $\theta = \arccos[f(t)] \in [0, \pi/2]$ descreve a parametrização da pureza relativa. Em face da evolução não-unitária, o denominador na Eq. (2.36) indica que o super-operador $\mathcal{L}(\bullet)$ associado à dinâmica de semigrupo desempenha o papel análogo à variância da energia – quantidade típica em QSLs para sistemas fechados via MT. Como caso particular, este QSL recobra o resultado de MT para evoluções unitárias entre estados puros ρ_0 e ρ_τ ortogonais entre si com um fator $1/\sqrt{2}$ de diferença, isto é, escolhendo $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ tal

¹⁰O leitor interessado pode encontrar a derivação deste resultado no Material Suplementar da Ref. (82). Além disso, recomendamos a Ref. (83) para uma maior riqueza de detalhes técnicos.

¹¹Verifique a Seção B.5 do Apêndice B para detalhes acerca da derivação destes resultados.

que $\text{Tr}(\rho_0^2) = 1$, $\theta = \pi/2$ e $\mathcal{L}^\dagger(\rho_0) = (i/\hbar)[H, \rho_0]$, então obtém-se

$$\tau_{\pi/2} \geq \frac{\hbar}{\sqrt{2} \Delta E} . \quad (2.37)$$

Por outro lado, os autores também forneceram um QSL via pureza relativa que decorre do uso de canais quânticos para descrever sistemas quânticos abertos e que vai além da aproximação Markoviana. Assim, dados os estados mistos ρ_0 e ρ_t , com

$$\rho_t = \sum_{\alpha} K_{\alpha} \rho_0 K_{\alpha}^{\dagger} , \quad (2.38)$$

o QSL resulta

$$\tau_{\theta} \geq \frac{2\theta^2}{\pi^2} \frac{\|\rho_0\|_2}{\sum_{\alpha} \|K_{\alpha} \rho_0 \dot{K}_{\alpha}^{\dagger}\|_2} , \quad (2.39)$$

em que $\{K_{\alpha}\} \equiv \{K_{\alpha}(t)\}$ representa o conjunto de operadores de Kraus que descrevem o canal quântico não-unitário, $\overline{\mathcal{O}} = (1/\tau_{\theta}) \int_0^{\tau_{\theta}} dt \mathcal{O}$ e

$$\|\mathcal{O}\|_2^2 := \text{Tr}(\mathcal{O}^{\dagger} \mathcal{O}) \quad (2.40)$$

define a norma de Hilbert-Schmidt do operador $\mathcal{O}$.

Deffner e Lutz (85) (DL) estenderam o resultado de MT e ML para sistemas quânticos abertos adotando um tratamento geométrico baseado no ângulo de Bures, na norma

$$\|\mathcal{O}\|_{\infty} = s_1(\mathcal{O}) , \quad (2.41)$$

em que $s_1(\mathcal{O})$ define o maior valor singular do operador $\mathcal{O}$, e normas de Schatten¹²

$$\|\mathcal{O}\|_p = \left[\text{Tr}(\mathcal{O}^{\dagger} \mathcal{O})^{p/2} \right]^{1/p} , \quad (2.42)$$

particularmente as normas de traço ($p = 1$) e Hilbert-Schmidt ($p = 2$). Em resumo, seja um sistema quântico aberto descrito pelo estado puro ρ_0 cuja dinâmica não-unitária é caracterizada pela equação mestra $\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_t(\rho_t)$, em que $\mathcal{L}_t(\bullet)$ é o super-operador de Lindblad dependente do tempo. Neste caso, o QSL referente à evolução de ρ_t no intervalo $t \in [0, \tau]$ é dado por¹³

$$\tau_{\text{QSL}} = \max \left\{ \frac{1}{\Lambda_{\infty}}, \frac{1}{\Lambda_1}, \frac{1}{\Lambda_2} \right\} \sin^2 [\mathcal{L}(\rho_0, \rho_{\tau})] , \quad (2.43)$$

¹²O leitor interessado pode encontrar maiores detalhes acerca de normas de operadores na Seção A.1 do Apêndice A.

¹³Consulte a Seção B.6 do Apêndice B acerca da derivação deste resultado.

em que

$$\Lambda_q := \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \|\mathcal{L}_t \rho_t\|_q \quad (2.44)$$

e $q = 1, 2, \infty$. Observe que a contribuição ao QSL dependente da norma de Hilbert-Schmidt na Eq. (2.43) é equivalente àquela derivada por del Campo et al. no regime em que a fidelidade de Uhlmann é equivalente à pureza relativa, ou seja, desde que ρ_0 seja um estado puro em ambos os casos. Além disso, os autores mostraram que efeitos de memória do ambiente podem acelerar a evolução de um sistema quântico inicialmente no estado puro $|0\rangle\langle 0|$ e descrito pelo modelo de Jaynes-Cummings, ou seja, o QSL é menor devido ao comportamento não-Markoviano da dinâmica.

Alguns outros trabalhos também forneceram QSLs via pureza relativa que englobam desde fenômenos de termalização (86,87) até efeitos relativísticos. (88,95) Outros desenvolvimentos incluem o papel do emaranhamento no QSL relativo a dinâmica não-unitária. (93) Em relação a comunicação quântica, QSLs desempenham um papel proeminente no chamado efeito de transferência unidimensional de estados quânticos (QST)¹⁴. (106) Além disso, foi recentemente destacada uma sutil conexão entre QSLs e o limite de Lieb-Robinson, isto é, a velocidade de propagação de sinais em sistemas quânticos de spin interagentes. (78)

2.3 Poslúdio: propostas e objetivos

Após esta breve digressão acerca da pletora de trabalhos na literatura a respeito de limites quânticos de velocidade, é razoável questionar a relevância e o mérito de mais um estudo do assunto. Explicitamente, por que mais um QSL? O que há a acrescentar sobre um tema já repleto de resultados bem estabelecidos, particularmente após a Ref. (82) que unificou diversos trabalhos precedentes? O que podemos adiantar ao leitor é que ainda há muito a ser feito a respeito de QSLs, particularmente no que concerne ao florescente campo da geometria da informação.

Este projeto tem como objetivo central a derivação de um QSL com raízes geométricas válido para evoluções unitárias e não-unitárias que generaliza sobremaneira os resultados reportados até o momento. A idéia consiste em explorar a conexão sutil entre medidas de distinguibilidade de estados quânticos, a geometria do espaço de estados e processos físicos

¹⁴QST, do inglês *one-dimensional perfect quantum state transfer*.

governados por dinâmicas arbitrárias com o intuito de fornecer uma família infinita de QSLs. Conforme mostraremos adiante, o imenso jardim de quantificadores de distinguibilidade intrínseco ao espaço de estados garantirá a robustez e a infinita variedade de QSLs.

Neste trabalho vamos construir uma família de QSLs com origens geométricas e que tenha uma correspondência injetiva com a família de métricas caracterizadas pelo teorema de Morozova-Čencov-Petz (MCP). Em especial, mostraremos como a não-unicidade da medida de distinguibilidade definida no espaço de estados quânticos influi em cada QSL e pode ser explorada na busca por tempos de evolução mais *tights*. Nossa abordagem geral fornecerá um panorama unificado que inclui ambas dinâmicas unitária e não-unitária. Por outro lado, é operacionalmente simples já que seu cálculo requer exclusivamente a decomposição espectral do estado evoluído. Esta família de QSLs torna explícitas as contribuições das populações do estado evoluído e das coerências de sua variação temporal, esclarecendo pela primeira vez na literatura o papel desempenhado por estas quantidades no QSL. Além disso, mostraremos alguns exemplos de QSLs escolhendo métricas de Fisher e Wigner-Yanase – a qual fornece um QSL mais *tight* do que a métrica de Fisher para certos processos físicos. Estes resultados fornecem um tratamento geral para QSLs com potencial impacto na caracterização e controle de tecnologias quânticas.

Capítulo 3

Medidas geométricas de distinguibilidade

Neste capítulo vamos estabelecer o arcabouço técnico necessário ao desenvolvimento dos resultados centrais da tese. De forma geral, este conjunto de ferramentas fornece sustentação ao paralelo que traçaremos entre medidas de distinguibilidade de estados e a estrutura geométrica do espaço de estados quânticos. A Seção 3.1 apresenta um panorama do estado da arte e aponta motivações deste estudo. Na Seção 3.2 discutimos o teorema de Morozova, Čencov e Petz (MCP), elemento central na caracterização de medidas de distinguibilidade de estados via métricas Riemannianas. Por fim, a Seção 3.3 apresenta exemplos de quantificadores de informação relevantes ao nosso estudo sob a ótica do teorema MCP.

3.1 Informação e geometria de estados quânticos

As recentes tecnologias quânticas voltadas, por exemplo, à comunicação e computação, têm como agentes fundamentais os estados quânticos do sistema físico que caracteriza estes dispositivos. A manipulação adequada destes “portadores” através de operações quânticas pode levar, entre outras vantagens, à redução do tempo de computação ou mesmo aceleração da transmissão de dados. Em geral, operações quânticas representam processos físicos que codificam informação no estado do sistema quântico. Assim, o processamento da informação requer algum procedimento para discriminar o estado resultante da operação

quântica e inferir a informação nele codificada. Uma alternativa a solução desta tarefa consiste na análise da distinguibilidade entre os estados do sistema antes e após a aplicação da operação. Por um lado, estados ortogonais são maximamente distinguíveis e podem ser discriminados com eficiência via medidas de von Neumann. (1, 107) Entretanto, a caracterização de estados não-ortogonais é mais complexa e requer o uso de quantificadores apropriados.

A distinção entre estados de sistemas descritos por modelos probabilísticos representa uma tarefa emblemática da teoria da informação. Nas últimas décadas diversos quantificadores de distinguibilidade interpretados à luz de medidas de distância no espaço de estados surgiram na literatura. Exemplos incluem a distância traço, a distância de Bures, a distância de Hilbert-Schmidt e a entropia relativa, entre outros. (1, 108) Apenas para esclarecer, dado o conjunto de pontos $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$, a distância $d(a_i, a_j)$, $\forall a_i, a_j \in \mathcal{A}$, satisfaz (i) positividade $d(a_i, a_j) \geq 0$; (ii) simetria $d(a_i, a_j) = d(a_j, a_i)$ e (iii) desigualdade triangular $d(a_i, a_k) \leq d(a_i, a_j) + d(a_j, a_k)$. A princípio, o par de condições (ii) e (iii) pode ser relaxado. Isto quer dizer que embora um funcional $d'(a_i, a_j)$ não obedeça imediatamente estes axiomas, a forma simetrizada *ad hoc* $d_S(a_i, a_j) = (1/2)[d'(a_i, a_j) + d'(a_j, a_i)]$ pode caracterizar uma medida de distância ao redefinir $\tilde{d}(a_i, a_j) = \sqrt{d_S(a_i, a_j)}$.

Na década de 80, Wootters (109) lançou as bases das primeiras investigações acerca da conexão entre medidas de distinguibilidade e o conceito de distância estatística no espaço de probabilidades. Alguns anos mais tarde, Braunstein e Caves (110) reportaram a geometrização deste problema caracterizando a distinguibilidade estatística por meio de uma métrica Riemanniana. A despeito de sua originalidade, este trabalho requer o uso de técnicas complicadas como a otimização da informação de Fisher em relação a POVMs¹ adequados.

Desde então, o apelo à interpretações geométricas ganhou fôlego e culminou na chamada geometria da informação, uma área do conhecimento que aplica métodos da geometria diferencial na solução de problemas no âmbito da ciência da informação. (111) As décadas de 70, 80 e 90 testemunharam o profícuo florescimento desta descrição através dos trabalhos de Weinhold (112–118), Ruppeiner (119–124), Diósi et al. (125, 126), Salamon et al. (127–130) e Gilmore et al. (118, 131) dedicados à compreensão de transições de fase líquido-gás

¹POVM, do inglês *Positive Operator Valued Measure*, define uma medida projetiva generalizada no espaço de Hilbert. Consulte a Seção A.2 do Apêndice A para maiores detalhes.

e fenômenos críticos em sistemas clássicos à temperatura finita sob a perspectiva da chamada geometria termodinâmica. Grande parte destes trabalhos tem como motivação compreender o vínculo entre flutuações termodinâmicas e o comportamento da curvatura escalar do espaço de estados termodinâmicos associado a cada sistema físico. Além disso, este formalismo tem recebido destaque relevante na literatura recente graças a sua robustez e versatilidade na solução de problemas no escopo da teoria da informação quântica e suas interfaces com a física da matéria condensada (2–4), ciência da computação (5,6) e, recentemente, física de altas energias. (7,8)

Na formulação da geometria da informação, ambos conjuntos de estados clássicos – as distribuições de probabilidade sobre o espaço de fase do sistema – e quânticos – o conjunto dos operadores densidade sobre o espaço de Hilbert do sistema – definem variedades diferenciáveis equipadas com uma estrutura de produto interno que caracteriza distâncias entre seus elementos. Resumidamente, uma variedade diferenciável define um espaço topológico localmente Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Em outras palavras, uma variedade diferenciável pode ser entendida em termos de um conjunto de pontos conectados entre si de forma contínua e suave (isto é, mapas de classe C^∞ contínuos e infinitamente diferenciáveis) tal que a vizinhança de cada ponto tem as mesmas propriedades e/ou estrutura de um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, a esfera é uma variedade bidimensional; o conjunto das matrizes reais de dimensão $n \times n$ cujos elementos são funções reais de classe C^∞ é uma variedade de dimensão n^2 em que seus pontos são dados pelas matrizes $n \times n$. (132)

No caso clássico, o teorema de Čencov afirma que a informação de Fisher é a única métrica no espaço das distribuições de probabilidade que é contrativa sob mapas estocásticos. (133) Considerando o vetor $\vec{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_d\}$ definido no espaço de probabilidades $\mathcal{P}$ de dimensão $d = \dim \mathcal{P}$, com $\sum_{j=1}^d p_j = 1$ e $0 \leq p_j \leq 1$, a distinguibilidade entre os vetores $\vec{p}$ e $\vec{p} + d\vec{p}$ neste espaço é caracterizada de modo unívoco pela métrica de Fisher-Rao dada por (108)

$$\mathbf{g}_{\vec{p}}(\vec{p}, \vec{p} + d\vec{p}) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^d \frac{(dp_j)^2}{p_j}, \quad (3.1)$$

em que $d\vec{p} = \{dp_1, dp_2, \dots, dp_d\}$ define um vetor pertencente ao espaço tangente $\mathcal{TP}$. Por outro lado, no caso quântico esta identificação não é trivial e existe uma família infinita de medidas de distância contrativas no espaço de estados quânticos cuja caracterização foi iniciada por Morozova e Čencov (134) e anos mais tarde complementada por Petz (135)

através do chamado teorema MCP.

É natural, portanto, recorrer a qualquer uma das possíveis medidas de distância definidas nos conjuntos de estados clássicos e quânticos para distinguir quaisquer dois de seus pontos. Além disso, é comum requerer que uma medida de distinguibilidade entre dois estados seja contrativa (monotônica) sob mapas estocásticos² – caso clássico – e mapas completamente positivos que preservam traço (CPTP)³ – caso quântico. De fato, este é um critério que define a escolha e/ou unicidade de medidas de distinguibilidade em ambos cenários. No que segue, traçaremos um panorama geral do teorema MCP que representa a espinha dorsal na derivação dos principais resultados desta tese.

3.2 O teorema de Morozova, Čencov e Petz

Nesta seção discutiremos o teorema de Morozova, Čencov e Petz (MCP) em toda sua essência. Embora pouco conhecido na literatura de física, a robustez deste teorema lhe atribui um caráter universal no que tange ao estudo de diversos tópicos de interesse da ciência da informação. Além disso, também pode exercer papel preponderante na solução de problemas envolvendo a interface entre teoria da informação quântica, física da matéria condensada e altas energias.

Através do teorema MCP, por exemplo, Bény e Osborne (136, 137) propuseram uma releitura do grupo de renormalização (RG)⁴ sob uma perspectiva geométrica. Estes estudos permitiram quantificar a perda de informação ao longo do fluxo do RG em termos da distinguibilidade de estados térmicos de modelos de rede efetivos em uma dada teoria quântica de campos. Recentemente, Shitara e Ueda (138) mostraram que o teorema MCP corrobora uma família de teoremas de flutuação-dissipação por meio da relação entre a teoria de resposta linear e o cálculo de covariâncias generalizadas. Além do impacto teórico, este trabalho pode permitir, por exemplo, o acesso experimental à informação de Fisher via quantidades mensuráveis como susceptibilidades e fatores de estrutura dinâmicos.

Na Subseção 3.2.1 introduziremos as idéias gerais do teorema. A proposta consiste em

²Consulte a Seção A.3 do Apêndice A para maiores detalhes.

³CPTP, do inglês *Completely Positive and Trace Preserving*. Consulte a Seção A.4 do Apêndice A para maiores detalhes.

⁴RG, do inglês *Renormalization Group*.

discutir as principais nuances desta ferramenta no escopo da geometria da informação. Neste sentido, reservamos à Subseção 3.2.2 uma demonstração alternativa à prova original do teorema MCP em que exploramos propriedades do cálculo funcional. Se preferir, o leitor pode suprimir a leitura da referida subseção sem maiores prejuízos à compreensão dos resultados da tese.

3.2.1 Visão geral

Seja o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensão finita $d = \dim \mathcal{H}$ e $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ o conjunto convexo⁵ de operadores densidade ρ satisfazendo $\rho = \rho^\dagger$, $\rho \geq 0$ e $\text{Tr}(\rho) = 1$ que constitui o chamado espaço de estados. Este conjunto define uma variedade diferenciável $\mathcal{M}$ dotada de um espaço tangente $\mathcal{T}_\rho \mathcal{M}$ relativo a cada um de seus pontos. O espaço tangente $\mathcal{T}_\rho \mathcal{M}$ é formado pela coleção de vetores tangentes a cada ponto $\rho \in \mathcal{M}$. Intuitivamente, a variedade diferenciável pode ser visualizada como uma superfície curva e o espaço tangente imaginado como um plano que toca esta superfície em um de seus pontos. A Fig. 3.1 exibe a representação esquemática da variedade diferenciável $\mathcal{M}$ e do respectivo espaço tangente $\mathcal{T}_\rho \mathcal{M}$.

O vetor tangente $d\rho \in \mathcal{T}_\rho \mathcal{M}$ define um operador hermitiano, $d\rho = (d\rho)^\dagger$, e de traço nulo, $\text{Tr}(d\rho) = d \text{Tr}(\rho) = 0$. (132) Por sua vez, o espaço tangente é equipado com uma estrutura de produto interno que define uma métrica na variedade diferenciável e permite quantificar a distância entre seus pontos. Em termos geométricos, este produto interno atribui a norma $\|d\rho\|$ do operador de traço nulo $d\rho$ pertencente ao espaço tangente $\mathcal{T}_\rho \mathcal{M}$ relativo ao ponto ρ da variedade diferenciável $\mathcal{M}$ definida pelo espaço de estados.

O teorema MCP afirma que a distância entre os operadores densidade vizinhos ρ e $\rho + d\rho$ no espaço de estados é dada pela forma diferencial quadrática (135)

$$ds^2 := \mathbf{g}_\rho^f(d\rho, d\rho) , \quad (3.2)$$

com

$$\mathbf{g}_\rho^f(A, B) = \frac{1}{4} \text{Tr}[A c_f(\mathbf{L}_\rho, \mathbf{R}_\rho) B] \quad (3.3)$$

⁵O conjunto $\mathcal{S}$ é convexo se, dados $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}$ e $0 \leq \chi \leq 1$, então $\chi\rho_1 + (1 - \chi)\rho_2 \in \mathcal{S}$. (108)

Figura 3.1 – Representação pictórica da variedade diferenciável $\mathcal{M}$ e do plano tangente $\mathcal{T}_\rho \mathcal{M}$. A curva vermelha define a trajetória descrita pela evolução do operador densidade ρ no espaço de estados quânticos. Observe que a cada ponto na variedade $\mathcal{M}$ é possível construir um plano tangente $\mathcal{T}_\rho \mathcal{M}$. Em particular, a figura mostra o plano tangente definido a partir do vetor tangente $d\rho$ ao estado ρ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

e

$$c_f(x, y) := \frac{1}{yf(x/y)} , \quad (3.4)$$

em que $f(u)$ pertence à classe de funções de Morozova-Čencov (MC), A e B são operadores hermitianos de traço nulo, e $\mathbf{L}_\rho, \mathbf{R}_\rho : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ são operadores lineares cuja ação é dada por

$$\mathbf{L}_\rho A = \rho A , \quad \mathbf{R}_\rho A = A \rho . \quad (3.5)$$

Apenas para esclarecer, note que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ representa o espaço dos operadores lineares atuando no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. O produto interno na Eq. (3.3) define uma métrica Riemanniana $\mathbf{g}_\rho^f : \mathcal{T}_\rho \mathcal{M} \times \mathcal{T}_\rho \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ na variedade diferenciável $\mathcal{M}$ formada pelo conjunto de operadores densidade. Esta métrica atribui um produto interno (132, 135)

(a) positivo,

$$\mathbf{g}_\rho^f(A, B) \geq 0 \quad \forall A, B \in \mathcal{T}_\rho \mathcal{M} ; \quad (3.6)$$

(b) simétrico,

$$\mathbf{g}_\rho^f(A, B) = \mathbf{g}_\rho^f(B, A) \quad \forall A, B \in \mathcal{T}_\rho \mathcal{M} ; \quad (3.7)$$

(c) invariante por transformações unitárias,

$$\mathbf{g}_\rho^f(A, B) = \mathbf{g}_\rho^f(UAU^\dagger, UBU^\dagger) \quad \forall A, B \in \mathcal{T}_\rho\mathcal{M} \quad \text{e} \quad \forall U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}); \quad (3.8)$$

(d) suave, isto é, o mapa abaixo define uma função diferenciável de classe C^∞ , a saber

$$\rho \longrightarrow \mathbf{g}_\rho^f(A, B) \quad \forall \rho \in \mathcal{M} \quad \text{e} \quad A, B \in \mathcal{T}_\rho\mathcal{M}. \quad (3.9)$$

Além disso, a métrica é monótona sobre $\mathcal{S}$ pois é contrativa sob a ação de mapas $\mathcal{E}(\bullet)$ CPTP, isto é, satisfaz

$$\mathbf{g}_\rho^f(\mathcal{E}(A), \mathcal{E}(B)) \leq \mathbf{g}_\rho^f(A, B) \quad \forall A, B \in \mathcal{T}_\rho\mathcal{M}. \quad (3.10)$$

A contratividade da métrica Riemanniana na Eq. (3.10) desempenha um papel fisicamente importante. De fato, lembre que a métrica atribui a distinguibilidade entre estados quânticos e, no contexto de sistemas quânticos abertos, o mapa CPTP representa a realização do ruído. Neste caso, é intuitivo imaginar que o efeito de decoerência induzido pela ação do ambiente diminui a distinguibilidade entre dois estados, e não o contrário. É adequado, portanto, identificar este processo com medidas de distinguibilidade que contraem sob a ação de mapas CPTP. Vale mencionar também que $\mathbf{g}_\rho^f$ é arbitrária a menos de um fator de escala constante. De fato, o fator $1/4$ na Eq. (3.3) é adotado propositalmente pela Ref. (108) com o intuito de reduzi-la à métrica de Fisher clássica quando ρ e $d\rho$ comutam.

A essência do teorema MCP está no mapeamento injetivo entre o produto interno $\mathbf{g}_\rho^f(A, B)$ e as funções de MC, isto é, qualquer função $f(u) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sendo

(i) monótona, ou seja, para quaisquer operadores densidade ϱ e σ tais que $\varrho \leq \sigma$, então

$$f(\varrho) \leq f(\sigma);$$

(ii) auto-inversiva, isto é, satisfaz a equação funcional $f(u) = uf(1/u)$;

(iii) normalizada, isto é, $f(1) = 1$.

A última propriedade listada reflete o fato de que as correspondentes métricas contrativas são regulares no estado maximamente misturado $\rho_* = \mathbb{I}/d$. Em razão das propriedades (i) e (ii), a função $c_f(x, y)$ é simétrica, $c_f(x, y) = c_f(y, x)$, e satisfaz a lei de escala

$c_f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-1} c_f(x, y)$. De fato, a não-unicidade de medidas de distinguibilidade no espaço de estados surge justamente devido a este mapeamento.

A despeito do trabalho original de Morozova-Čencov, os méritos do trabalho de Petz residem em uma derivação um pouco mais geral deste resultado e na classificação das funções de MC. Como ilustrado na Fig. 3.2, dentre todas as funções de MC existe uma função mínima,

$$f_{\min}(u) = \frac{2u}{1+u}, \quad (3.11)$$

e uma função máxima,

$$f_{\max}(u) = \frac{1+u}{2}, \quad (3.12)$$

tal que uma função de MC arbitrária $f(u)$ deve satisfazer a hierarquia (139)

$$f_{\min}(u) \leq f(u) \leq f_{\max}(u). \quad (3.13)$$

É interessante mencionar que a função de MC máxima é aquela correspondente a chamada informação de Fisher. Dentre a vasta quantidade de funções MC arbitrárias satisfazendo a Eq. (3.13), estaremos interessados em particular na função

$$f_{\text{WY}}(u) = \frac{1}{4}(\sqrt{u} + 1)^2 \quad (3.14)$$

que define a chamada métrica de Wigner-Yanase. Na seção 3.3 discutiremos algumas características das métricas associadas às funções de MC $f_{\max}(u)$ e $f_{\text{WY}}(u)$.

A classe de funções de MC não tem uma estrutura totalmente arbitrária. Recentemente, Hansen (141, 142) mostrou que a função $f(u)$ possui a representação canônica

$$f(u) = \frac{(1+u)e^{\vartheta}}{\sqrt{2}} \exp \left(\int_0^1 dv \frac{(v^2-1)(1+u^2)h(v)}{(v^2+1)(v+u)(1+vu)} \right) \quad (3.15)$$

e, consequentemente,

$$c_f(x, y) = \frac{\sqrt{2}e^{-\vartheta}}{x+y} \exp \left(\int_0^1 dv \frac{(1-v^2)(x^2+y^2)h(v)}{(v^2+1)(x+vy)(vx+y)} \right). \quad (3.16)$$

Em ambos casos, a função $h(v) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ e a constante $\vartheta \in \mathbb{R}$ são determinadas de modo unívoco via as propriedades (i), (ii) e (iii) satisfeitas pela função $f(u)$ de MC. Em especial, se $h(v) = q$ e $\vartheta = (q - 1/2) \ln 2$, com $0 \leq q \leq 1$, então é possível mostrar que as Eqs. (3.15) e (3.16) se reduzem a

$$f(u) = u^q \left(\frac{1+u}{2} \right)^{1-2q}, \quad c_f(x, y) = (xy)^{-q} \left(\frac{x+y}{2} \right)^{2q-1}. \quad (3.17)$$

Figura 3.2 – Ilustração da família de funções de MC. Esta classe de funções é limitada superiormente por uma função máxima, $f_{\max}(u) = (1 + u)/2$ (métrica de Fisher, linha vermelha contínua), e limitada inferiormente por uma função mínima, $f_{\min}(u) = 2u/(1 + u)$ (linha roxa pontilhada). Note que qualquer função $f(u)$ de MC satisfaz $f_{\min}(u) \leq f(u) \leq f_{\max}(u)$, isto é, sua curva deve recair na área sombreada, como mostrado no caso particular da função $f_{\text{WY}}(u) = (1/4)(\sqrt{u} + 1)^2$ correspondendo à métrica de Wigner-Yanase (linha azul tracejada).

Fonte: Adaptada de PIRES et al. (140)

Neste caso, as funções $f_{\min}(u)$ e $f_{\max}(u)$ correspondem, respectivamente, a $q = 1$ e $q = 0$.

Por outro lado, a métrica de Wigner-Yanase corresponde às escolhas

$$h(v) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{2\sqrt{v}}{1-v} \right), \quad \vartheta = \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{4(\sqrt{2}-1)} \right). \quad (3.18)$$

Além disso, Hansen verificou que família de funções de MC também pode ser representada na forma

$$c_f(x, y) = \int_0^1 d\mu(v) \left[\frac{(1+v)}{2} \left(\frac{1}{x+vy} + \frac{1}{vx+y} \right) \right], \quad (3.19)$$

em que $\mu(v)$ define uma medida de Borel com suporte compacto no intervalo $[0, 1]$ determinada pela função $f(u)$ de MC. Em geral, as representações nas Eqs. (3.15), (3.16) e (3.19) são provadas explorando a solução da equação funcional $f(u) = uf(1/u)$ e também com a ajuda do teorema de Loewner. (143)

É possível atribuir uma interpretação mais clara ao teorema MCP se considerarmos o caso em que $\rho \in \mathcal{M}$ é diagonal. Assim, seja $\rho = \sum_{j=1}^d p_j |j\rangle\langle j|$ a decomposição espectral do estado misto ρ na base de estados $\{|j\rangle\}_{j=1,\dots,d}$, com $0 < p_j < 1$ e $\sum_{j=1}^d p_j = 1$. Sob esta

condição, é possível mostrar que (135)

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left[\sum_{j=1}^d \frac{|d\rho_{jj}|^2}{p_j} + 2 \sum_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^d c_f(p_j, p_l) |d\rho_{jl}|^2 \right], \quad (3.20)$$

em que

$$d\rho_{jl} := \langle j | d\rho | l \rangle. \quad (3.21)$$

A Eq (3.20) identifica claramente duas contribuições distintas a qualquer métrica Riemanniana contrativa. O primeiro termo, que é comum a toda a família de métricas e depende somente das populações p_j do estado ρ , representa a métrica Fisher clássica para a distribuição de probabilidade p_j . O segundo termo, que por sua vez é responsável pela não-unicidade da métrica no espaço de estados quânticos, é devido unicamente às coerências de $d\rho$ em relação a base de autoestados de ρ . Em outras palavras, esta é uma contribuição puramente quântica que expressa a natureza não-comutativa dos operadores ρ e $\rho + d\rho$.

A restrição a estados mistos pode ser justificada conforme a seguir. Por simplicidade, vamos pensar no caso $d = 2$, isto é, o sistema quântico é descrito pelo estado de um q-bit $\rho = \sum_{j=1}^2 p_j |j\rangle\langle j|$. Se $p_1 = 1$ ($p_1 = 0$), então $p_2 = 0$ ($p_2 = 1$) já que $p_1 + p_2 = 1$ e, portanto, o estado ρ é puro. Imagine agora o caso $d = 3$ com $\rho = \sum_{j=1}^3 p_j |j\rangle\langle j|$. Por um lado, se $p_1 = 1$ então $p_2 = p_3 = 0$ e o estado é novamente puro. Por outro lado, se $p_1 = 0$, existe uma escolha na qual $p_2 = p_3 = 1/2$, ou seja, o espectro do operador densidade é degenerado. Formulando em termos gerais, o caso d -dimensional contempla os cenários (i) $p_d = 1$ e $p_j = 0 \ \forall j \neq d$ e, por exemplo, (ii) $p_d = 0$ e $p_j = 1/(d-1) \ \forall j \neq d$ tal que $\sum_{j=1}^{d-1} p_j = 1$. A priori, a exclusão de estados puros pode então eliminar a possibilidade de degenerescências no espectro do operador densidade. Isto é necessário pois algumas funções de MC na Eq. (3.20) têm a forma $c_f(p_j, p_l) \sim (p_j - p_l)^{-s}$, $s \in \mathbb{Z}$, a qual possui comportamento singular se $p_j = p_l$. Em termos topológicos, o estado misto $\rho = \sum_{j=1}^d p_j |j\rangle\langle j|$, com $0 < p_j < 1$ e $\sum_{j=1}^d p_j = 1$, descreve uma bola aberta de dimensão $d^2 - 1$ na representação de Bloch.

Embora a Eq (3.20) esteja restrita ao caso em que ρ é um estado misto, o MCP pode ser estendido para estados puros sob algumas restrições. Este procedimento, altamente não-trivial, é conhecido na literatura como extensão radial (144) e requer a regularidade da função de MC, isto é, $f(0) \neq 0$. Neste contexto, a pureza do estado é responsável pelo

colapso de todas as métricas contrativas na chamada métrica de Fubini-Study, a métrica natural do espaço projetivo definido por estados puros. (108) Além das dificuldades técnicas mencionadas, estados puros são pouco interessantes pois impossibilitariam acrescentar contribuições relevantes às discussões que promoveremos nos próximos capítulos. Em geral, o uso destes estados permitiria apenas recobrar resultados já outorgados na literatura corrente.

Conforme discutimos nesta seção, medidas de distinguibilidade entre estados podem ser interpretadas como distâncias e/ou métricas. É natural, portanto, que cada uma destas quantidades tenha associada a si uma distância geodésica $\mathcal{L}^f(\bullet, \bullet)$, ou seja, a menor distância entre dois pontos no espaço de estados. Este argumento é corroborado pela Ref. (145) que, embora forneça um protocolo para o cálculo de $\mathcal{L}^f(\bullet, \bullet)$ relativa a uma métrica arbitrária, esclarece que esta é uma tarefa árdua e praticamente inviável. De fato, expressões analíticas são conhecidas apenas para a distância geodésica relacionada a métrica de Fisher (146) e à métrica de Wigner-Yanase. (147) Nas Subseções 3.3.1 e 3.3.2 apresentaremos maiores detalhes destas quantidades. Como ficará claro mais adiante, a distância geodésica desempenha um papel crucial na nossa derivação do QSL generalizado.

3.2.2 Aspectos técnicos

Nesta seção forneceremos uma demonstração alternativa ao teorema de Morozova, Čencov e Petz (MCPT). Em particular, partindo da definição da métrica $\mathbf{g}_\rho^f(A, B)$ na Eq. (3.3), vamos nos especializar aqui a prova da Eq. (3.20) para o caso de estados mistos. A análise da métrica $\mathbf{g}_\rho^f(A, B)$ apresentada nesta subseção exigirá algumas ferramentas do cálculo funcional, especialmente àquelas desenvolvidas por Riesz-Dunford (148, 149) que descrevem uma extensão da fórmula integral de Cauchy para operadores limitados.

É essencial destacar que a prova de que uma função monótona arbitrária $f(u)$ origina uma métrica Riemanniana no espaço de estados quânticos foge do escopo desta seção e, portanto, dedicaremos apenas alguns comentários acerca de suas propriedades. Recomendamos ao leitor interessado a prova completa do teorema discutida por Petz na Ref. (135). Notadamente, a demonstração de Petz inclui uma profunda discussão acerca das condições exigidas a uma métrica monotônica, além de sua completa caracterização via uma vasta família de funções monotônicas e médias de operadores.

Dada a função $c_f(x, y)$ definida na Eq. (3.4), seja

$$c_f(\mathbf{L}_\rho, \mathbf{R}_\rho) = [\mathbf{R}_\rho f(\Delta_\rho)]^{-1} \quad (3.22)$$

em que $\Delta_\rho : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ representa o super-operador linear

$$\Delta_\rho \mathcal{O} = \mathbf{L}_\rho \mathbf{R}_\rho^{-1} \mathcal{O} = \rho \mathcal{O} \rho^{-1} \quad (3.23)$$

com espectro $\text{spec}(\Delta_\rho) \subset D$, em que $D \subset \mathbb{C}$ define um subconjunto aberto dos números complexos. O super-operador Δ_ρ tem origens que remontam ao início do estudo das álgebras de von Neumann, exercendo um papel fundamental na investigação de quasi-entropias. (150–153) Considerando o espectro $\text{spec}(\Delta_\rho) \subseteq \Gamma$, onde Γ é uma curva de Jordan fechada, seja $f(u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica no subconjunto aberto D que contém $\text{spec}(\Delta_\rho)$. Na verdade, segundo o teorema de Loewner (143), a função monótona $f(u)$ é infinitamente diferenciável e tem uma continuidade analítica nos semi-planos complexos superior e inferior. Portanto, o operador $f(\Delta_\rho)$ pode ser escrito em termos da representação integral (148, 149)

$$f(\Delta_\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d\zeta f(\zeta) (\zeta \mathbb{I} - \Delta_\rho)^{-1} . \quad (3.24)$$

Já que os operadores $\mathbf{L}_\rho$ e $\mathbf{R}_\rho$ comutam entre si, é imediato verificar que

$$\mathbf{R}_\rho (\zeta \mathbb{I} - \Delta_\rho)^{-1} = [(\zeta \mathbb{I} - \Delta_\rho) \mathbf{R}_\rho^{-1}]^{-1} = [\mathbf{R}_\rho^{-1} (\zeta \mathbb{I} - \Delta_\rho)]^{-1} = (\zeta \mathbb{I} - \Delta_\rho)^{-1} \mathbf{R}_\rho . \quad (3.25)$$

Combinando as Eqs. (3.24) e (3.25) concluímos que

$$\mathbf{R}_\rho f(\Delta_\rho) = f(\Delta_\rho) \mathbf{R}_\rho . \quad (3.26)$$

O resultado anterior implica diretamente a expressão

$$c_f(\mathbf{L}_\rho, \mathbf{R}_\rho) = J_f^{-1} , \quad (3.27)$$

em que definimos o operador

$$J_f := f(\Delta_\rho) \mathbf{R}_\rho . \quad (3.28)$$

Substituindo a Eq. (3.27) na Eq. (3.3), a métrica monótona pode ser escrita como

$$\mathbf{g}_\rho^f(A, B) = \frac{1}{4} \text{Tr}(A J_f^{-1} B) . \quad (3.29)$$

Observe que o cálculo explícito da métrica monótona está vinculado agora ao cálculo do operador J_f^{-1} . Na verdade, esta tarefa será relativamente mais simples levando em

conta a decomposição espectral deste operador na mesma base de estados $\{|j\rangle\}_{j=1,\dots,d}$ na qual o operador densidade ρ é diagonal.

Estados mistos

Teorema (Morozova, Čencov e Petz). *Considere um operador densidade ρ misto no espaço de estados quânticos e A um operador hermitiano de traço nulo, i.e., $\text{Tr}(A) = 0$. Seja $\mathbf{g}_\rho^f(A, A)$ o produto interno que garante uma correspondência bijetiva entre métricas Riemannianas contrativas e a família de funções monótonas $f(u)$ de Morozova-Čencov. Em especial, fixando a base de estados $\{|j\rangle\}_{j=1,\dots,d}$ relativa à decomposição espectral $\rho = \sum_{j=1}^d p_j |j\rangle\langle j|$ do operador densidade, então a métrica Riemanniana contrativa no espaço de estados é dada pela fórmula*

$$\mathbf{g}_\rho^f(A, A) = \frac{1}{4} \left[\sum_{j=1}^d \frac{|\langle j|A|j\rangle|^2}{p_j} + 2 \sum_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^d c_f(p_j, p_l) |\langle j|A|l\rangle|^2 \right]. \quad (3.30)$$

Prova. Para provar a Eq. (3.30) vamos partir da Eq. (3.29) e, por simplicidade, determinar inicialmente o comportamento de $J_f B$ em detrimento do cálculo de $J_f^{-1} B$. Neste sentido, considere a projeção do operador $J_f B$ na base de estados $\{|j\rangle\}_{j=1,\dots,d}$ relativa à decomposição espectral do operador densidade, a saber,

$$J_f B = \sum_{j,l=1}^d p_l \langle j|f(\Delta_\rho)B|l\rangle |j\rangle\langle l|. \quad (3.31)$$

Para calcular o elemento de matriz $\langle j|f(\Delta_\rho)B|l\rangle$, recorreremos à técnicas do cálculo funcional de Riez-Dunford introduzidas no início desta seção. Em outras palavras, dada a fórmula integral de Cauchy para o operador $f(\Delta_\rho)$ introduzida na Eq. (3.24), obtemos

$$\langle j|f(\Delta_\rho)B|l\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d\zeta f(\zeta) \langle j|(\zeta \mathbb{I} - \Delta_\rho)^{-1} B|l\rangle. \quad (3.32)$$

O cálculo desta integral requer o uso explícito da definição do operador Δ_ρ apresentada na Eq. (3.23). Assim, é imediato verificar a relação

$$\langle j|(\zeta \mathbb{I} - \Delta_\rho)\mathcal{O}|l\rangle = \langle j|\zeta \mathcal{O} - \rho \mathcal{O} \rho^{-1}|l\rangle = \left(\zeta - \frac{p_j}{p_l} \right) \langle j|\mathcal{O}|l\rangle. \quad (3.33)$$

Em particular, escolhendo $\mathcal{O} = (\zeta \mathbb{I} - \Delta_\rho)^{-1} B$, dispomos da seguinte identidade algébrica

$$\langle j|(\zeta \mathbb{I} - \Delta_\rho)^{-1} B|l\rangle = \frac{\langle j|B|l\rangle}{\zeta - p_j/p_l}. \quad (3.34)$$

Em virtude do comportamento singular do denominador nesta equação em $\zeta = p_j/p_l$, a combinação das Eqs. (3.34) e (3.32) conduzirá à integral no plano complexo da função analítica $f(\zeta)/(\zeta - p_j/p_l)$ com pólo simples neste ponto. Assim, utilizando o teorema dos Resíduos, segue que

$$\begin{aligned}\langle j|f(\Delta_\rho)B|l\rangle &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - p_j/p_l} \langle j|B|l\rangle \\ &= f(p_j/p_l) \langle j|B|l\rangle .\end{aligned}\tag{3.35}$$

Substituindo este resultado na Eq. (3.31), obtemos

$$J_f B = \sum_{j,l=1}^d p_l f(p_j/p_l) \langle j|B|l\rangle |j\rangle \langle l| .\tag{3.36}$$

Dada a Eq. (3.36), podemos agora determinar a ação da inversa $J_f^{-1}B$ de forma simples. De fato, analisando cuidadosamente a equação anterior, parece razoável propor que

$$J_f^{-1}B = \sum_{j,l=1}^d \frac{\langle j|B|l\rangle}{p_l f(p_j/p_l)} |j\rangle \langle l| .\tag{3.37}$$

A veracidade e consistência desta hipótese pode ser testada verificando se a relação $J_f^{-1}J_f = J_f J_f^{-1} = \mathbb{I}$ é devidamente satisfeita. Neste sentido, combinando as Eqs. (3.36) e (3.37), é possível concluir que

$$J_f^{-1}(J_f B) = \sum_{j,l=1}^d \frac{\langle j|J_f B|l\rangle}{p_l f(p_j/p_l)} |j\rangle \langle l| = \sum_{j,l=1}^d \langle j|B|l\rangle |j\rangle \langle l| = B\tag{3.38}$$

e também

$$J_f(J_f^{-1}B) = \sum_{j,l=1}^d p_l f(p_j/p_l) \langle j|J_f^{-1}B|l\rangle |j\rangle \langle l| = \sum_{j,l=1}^d \langle j|B|l\rangle |j\rangle \langle l| = B .\tag{3.39}$$

Finalmente, substituindo a Eq. (3.37) na Eq. (3.29), a métrica monótona assume a forma

$$\mathbf{g}_\rho^f(A, B) = \frac{1}{4} \sum_{j,l=1}^d \frac{\langle j|B|l\rangle \langle j|A|l\rangle^*}{p_l f(p_j/p_l)} .\tag{3.40}$$

A Eq. (3.40) se aplica a qualquer par de operadores hermitianos A e B de traço nulo. Entretanto, estabelecendo $A = B$ e, em seguida, simetrizando a soma no par de índices

$\{j, l\}$, encontramos o resultado

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\rho^f(A, A) &= \frac{1}{8} \sum_{j,l=1}^d \left(\frac{1}{p_l f(p_j/p_l)} + \frac{1}{p_j f(p_l/p_j)} \right) |\langle j|A|l \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j,l=1}^d c_f(p_j, p_l) |\langle j|A|l \rangle|^2, \end{aligned} \quad (3.41)$$

em que definimos

$$c_f(x, y) := \frac{yf(x/y) + xf(y/x)}{2xyf(x/y)f(y/x)}. \quad (3.42)$$

Dado que a função monótona $f(u)$ é auto-inversiva, $f(u) = uf(1/u)$, então a Eq. (3.42) torna-se

$$c_f(x, y) = \frac{1}{yf(x/y)}. \quad (3.43)$$

Além disso, a Eq. (3.42) indica que a função $c_f(x, y)$ é simétrica, ou seja,

$$c_f(x, y) = c_f(y, x), \quad (3.44)$$

obedece a propriedade de escala

$$c_f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-1} c_f(x, y), \quad (3.45)$$

e, para $x = y$, reduz-se a

$$c_f(x, x) = \frac{1}{xf(1)}. \quad (3.46)$$

Embora $f(1)$ defina uma constante de valor arbitrário, Bengtsson e Życzkowski (108) advogam em favor da normalização $f(1) = 1$ no intuito de evitar a singularidade cônica na métrica dado o estado maximamente misturado $\rho_* = \mathbb{I}/d$. Em outras palavras, esta escolha garante a regularidade de $\mathbf{g}_\rho^f(A, A)$ na origem $r = 0$ da esfera de Bloch de dimensão $d^2 - 1$ que representa o estado do sistema quântico. Assim, substituindo $f(1) = 1$ na Eq. (3.41), obtemos finalmente a expressão

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\rho^f(A, A) &= \frac{1}{4} \left[\sum_{j=1}^d c_f(p_j, p_j) |\langle j|A|j \rangle|^2 + 2 \sum_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^d c_f(p_j, p_l) |\langle j|A|l \rangle|^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\sum_{j=1}^d \frac{|\langle j|A|j \rangle|^2}{p_j} + 2 \sum_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^d c_f(p_j, p_l) |\langle j|A|l \rangle|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

■

3.3 Funções de Morozova-Čencov

Nesta seção vamos apresentar algumas funções de Morozova-Čencov (MC) e elencar suas características mais relevantes. Em especial, nos concentraremos nas funções de MC que originam as métricas de Fisher, Wigner-Yanase, média harmônica e o produto interno de Kubo-Mori. As métricas de Fisher e Wigner-Yanase representam quantidades com atual interesse no contexto da teoria da informação quântica e, de fato, há vários esforços voltados à sua compreensão e aplicações relevantes. Além do ponto de vista físico, a forma algébrica simples destes quantificadores também é um fator que motiva sua investigação. Estas funções, portanto, vão pautar grande parte das discussões nesta tese. A média harmônica, por sua vez, ainda possui pequena visibilidade na literatura em face da pouca clareza acerca de suas aplicações físicas. Embora pouco explorado, o produto interno de Kubo-Mori tem se mostrado útil na solução de problemas envolvendo a evolução de sistemas quânticos a temperatura finita e teoria de resposta linear.

3.3.1 Métrica de Fisher

À luz do teorema MCP, a métrica de Fisher corresponde à escolha da função de Morozova-Čencov máxima

$$f(u) = \frac{1+u}{2} \quad (3.48)$$

ou, analogamente,

$$c_f(x, y) = \frac{2}{x+y} . \quad (3.49)$$

Neste caso, a métrica $\mathbf{g}_\rho^f(A, A)$ dada na Eq. (3.47) se escreve na forma

$$\mathbf{g}_\rho^f(A, A) = \frac{1}{4} \left[\sum_{j=1}^d \frac{|\langle j|A|j\rangle|^2}{p_j} + 4 \sum_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^d \frac{|\langle j|A|l\rangle|^2}{p_j + p_l} \right] . \quad (3.50)$$

A Eq. (3.50) também é chamada de informação de Fisher ou métrica de Bures. Embora esta representação seja muito útil, vale ressaltar que a informação de Fisher é popularmente conhecida na literatura por meio de sua dependência com o operador derivada logarítmica simétrica. (154–156) Esta caracterização emerge naturalmente de cálculos que realizamos

no decorrer do texto. Para verificar como isso acontece, note a partir da Eq. (3.48) que

$$p_l f(p_j/p_l) = \frac{p_j + p_l}{2} \quad (3.51)$$

e, portanto, via Eq. (3.36) encontramos a expressão

$$\begin{aligned} J_f A &= \sum_{j,l=1}^d p_l f(p_j/p_l) \langle j|A|l\rangle |j\rangle \langle l| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^d (p_j + p_l) \langle j|A|l\rangle |j\rangle \langle l| \\ &= \frac{1}{2} (\rho A + A \rho) . \end{aligned} \quad (3.52)$$

Por outro lado, observe também que

$$\frac{1}{p_l f(p_j/p_l)} = \frac{2}{p_j + p_l} = \int_0^\infty dw e^{-\frac{w}{2}(p_j + p_l)} , \quad (3.53)$$

e, via Eq. (3.37), verifica-se a relação a seguir

$$\begin{aligned} J_f^{-1} A &= \sum_{j,l=1}^d \frac{\langle j|A|l\rangle}{p_l f(p_j/p_l)} |j\rangle \langle l| \\ &= \int_0^\infty dw \left(\sum_{j=1}^d e^{-\frac{w}{2} p_j} |j\rangle \langle j| \right) A \left(\sum_{l=1}^d e^{-\frac{w}{2} p_l} |l\rangle \langle l| \right) \\ &= \int_0^\infty dw \exp\left(-\frac{w}{2} \rho\right) A \exp\left(-\frac{w}{2} \rho\right) . \end{aligned} \quad (3.54)$$

Naturalmente, considerando a identidade algébrica

$$J_f^{-1}(J_f A) = J_f(J_f^{-1} A) = A , \quad (3.55)$$

é possível mostrar a partir das Eqs. (3.52) e (3.54) que o operador $J_f^{-1} A$ satisfaz a equação matricial de Lyapunov, a saber,

$$\rho(J_f^{-1} A) + (J_f^{-1} A)\rho = 2A . \quad (3.56)$$

O operador $J_f^{-1} A$, também conhecido como derivada logarítmica simétrica (SLD)⁶, foi introduzido por Helstrom (157, 158) na formulação da versão quântica da desigualdade de Cramér-Rao. Combinando as Eqs. (3.29) e (3.54), a informação de Fisher é dada pela métrica

$$\mathbf{g}_\rho^f(A, A) = \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\rho (J_f^{-1} A)^2 \right] . \quad (3.57)$$

Em especial, vide Refs. (159–161) para maiores detalhes acerca da informação de Fisher.

⁶SLD, do inglês *Symmetric Logarithmic Derivative*.

A minimização da métrica de Fisher fornece um funcional que atribui a distância geodésica entre operadores densidade no espaço de estados quânticos. Este procedimento está discutido em detalhes na Ref. (145) e, a princípio, envolve técnicas que fogem do escopo desta tese. Bengtsson e Życzkowski (108) apresentaram uma versão alternativa destes cálculos explorando a decomposição do fibrado do espaço tangente da variedade de estados puros em termos de vetores verticais e horizontais. A distância geodésica associada à métrica de Fisher, conhecida como ângulo de Bures, é dada por

$$\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_1, \rho_2) = \arccos \left[\sqrt{F(\rho_1, \rho_2)} \right] , \quad (3.58)$$

em que

$$F(\rho_1, \rho_2) := \|\sqrt{\rho_1}\sqrt{\rho_2}\|_1^2 = \left(\text{Tr} \left[\sqrt{\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1}} \right] \right)^2 \quad (3.59)$$

representa a fidelidade de Uhlmann-Jozsa. (146, 162) Em geral, a fidelidade satisfaz as propriedades

- (a) $F(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_2, \rho_1) \forall \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}$, isto é, a fidelidade é uma função simétrica em ambas entradas;
- (b) $0 \leq F(\rho_1, \rho_2) \leq 1 \forall \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}$, com $F(\rho_1, \rho_2) = 0$ se ρ_1 e ρ_2 têm suportes ortogonais, e $F(\rho_1, \rho_2) = 1$ se, e somente se, $\rho_1 = \rho_2$;
- (c) $F(\rho_1, \rho_2) = |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2$ se $\rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ e $\rho_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ são estados puros;
- (d) $F(V\rho_1V^\dagger, V\rho_2V^\dagger) = F(\rho_1, \rho_2) \forall V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $V^\dagger = V^{-1}$, isto é, a fidelidade é invariante sob transformações unitárias em ambas entradas;
- (e) $F(\rho_1, \rho_2) = \max_V \text{Tr} \left(V \sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_2} \right) \forall V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $V^\dagger = V^{-1}$ é uma matriz unitária;
- (f) $F(\mathcal{E}(\rho_1), \mathcal{E}(\rho_2)) \geq F(\rho_1, \rho_2)$, ou seja, a fidelidade é monotônica sob ação de um mapa $\mathcal{E}(\bullet)$ CPTP em ambas entradas.

O leitor pode conferir a demonstração em detalhes destas e outras propriedades no capítulo 3, Seção 3.3, da tese de C. A. Fuchs. (163)

A métrica de Fisher desempenha um papel crucial na metrologia quântica, cujo objetivo se resume à busca de estratégias ótimas na estimativa de parâmetros codificados em estados quânticos. Por exemplo, Banchi, Giorda e Zanardi (164) derivaram uma fórmula para a

métrica de Bures associada à dinâmica não-unitária markoviana de estados gaussianos fermiônicos em um sistema de muitos corpos. Os autores traçaram um paralelo entre transições de fase no modelo fermiônico e o comportamento de escala da métrica. Esta abordagem é interessante pois estende métodos tipicamente utilizados no estudo de sistemas de equilíbrio ao regime de estados de não-equilíbrio de um sistema interagente de muitas partículas. Através de uma abordagem similar, Banchi, Braunstein e Pirandola (165) calcularam expressões analíticas para a fidelidade de Uhlmann-Jozsa e o ângulo de Bures aplicados a estados gaussianos bosônicos multimodais. Em linhas gerais, estas quantidades dependem dos momentos da distribuição estatística e de invariantes simpléticos do modelo bosônico.

A métrica de Fisher também desempenha um papel importante na caracterização de correlações quânticas além de emaranhamento. Considere um sistema quântico bipartido descrito pelo estado ρ_{AB} definido no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ e que sofre uma evolução unitária gerada pelo observável local $H_A \otimes \mathbb{I}_B$. Esta evolução codifica uma fase φ neste estado cuja estimativa pode ser obtida via métrica de Fisher. De fato, introduzindo o chamado poder de interferometria, do inglês *Interferometric Power* (IP), dado por

$$\mathcal{P}(\rho_{AB}) = \min_{H_A} \mathbf{g}_{\rho_{AB}}^f(H_A, H_A) , \quad (3.60)$$

a Ref. (166) mostra que esta estimativa define também a medida de um tipo de correlação quântica denominada discórdia quântica neste sistema. A minimização na Eq. (3.60) é calculada sobre todos os observáveis H_A no subespaço de Hilbert $\mathcal{H}_A$. Em geral, especificando a Eq. (3.60) no regime de estados ρ_{AB} de um sistema q-bit–q-dit definido no espaço $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^d$, é possível mostrar que o IP assume a expressão analítica (vide material suplementar da Ref. (166))

$$\mathcal{P}(\rho_{AB}) = \lambda_{\min}[M] \quad (3.61)$$

em que $\lambda_{\min}$ é o menor autovalor da matriz real M de dimensão 3×3 cujos elementos são dados por

$$M_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,l=1 \\ p_j+p_l \neq 0}}^d \frac{(p_j - p_l)^2}{p_j + p_l} \langle j | \sigma_{mA} \otimes \mathbb{I}_B | l \rangle \langle l | \sigma_{nA} \otimes \mathbb{I}_B | j \rangle , \quad (3.62)$$

com $m, n = 1, 2, 3$ e σ_m são as matrizes de Pauli.

A métrica de Fisher também tem aplicação no contexto de teorias quânticas de

campo em espaços curvos. Recentemente, Lashkari e Van Raamsdonk mostraram que a informação de Fisher relativa ao operador densidade do estado de vácuo de uma teoria de campos conforme (CFT) holográfica é dual à energia canônica associada a perturbações nas coordenadas de Rindler do respectivo espaço Anti-de-Sitter (AdS). (8) Já que a informação de Fisher representa um caso particular na hierarquia dos possíveis quantificadores de informação no espaço de estados, o resultado destes autores sugere investigar vínculos fundamentais entre esta dualidade e a classe de generalidade das medidas de distinguibilidade de estados quânticos descrita pelo teorema de MCP.

3.3.2 Métrica de Wigner-Yanase

A métrica de Wigner-Yanase ou *Wigner-Yanase skew information* (WYSI) está associada à função de Morozova-Čencov

$$f_{\text{WY}}(u) = \frac{1}{4}(\sqrt{u} + 1)^2 \quad (3.63)$$

ou, equivalentemente,

$$c_f(x, y) = \frac{4}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} . \quad (3.64)$$

A partir desta escolha da função de MC, a métrica $\mathbf{g}_\rho^f(A, A)$ na Eq. (3.47) se escreve na forma

$$\mathbf{g}_\rho^f(A, A) = \frac{1}{4} \left[\sum_{j=1}^d \frac{|\langle j|A|j\rangle|^2}{p_j} + 8 \sum_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^d \frac{|\langle j|A|l\rangle|^2}{(\sqrt{p_j} + \sqrt{p_l})^2} \right] . \quad (3.65)$$

Note a partir da Eq. (3.63) que

$$p_l f(p_j/p_l) = \frac{1}{4}(\sqrt{p_j} + \sqrt{p_l})^2 \quad (3.66)$$

e, portanto, via Eq. (3.36) encontramos a expressão

$$\begin{aligned} J_f A &= \sum_{j,l=1}^d p_l f(p_j/p_l) \langle j|A|l\rangle |j\rangle \langle l| \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j,l=1}^d (p_j + 2\sqrt{p_j p_l} + p_l) \langle j|A|l\rangle |j\rangle \langle l| \\ &= \frac{1}{4} (\rho A + 2\sqrt{\rho} A \sqrt{\rho} + A \rho) \\ &= \frac{1}{4} \{ \sqrt{\rho}, \{ \sqrt{\rho}, A \} \} . \end{aligned} \quad (3.67)$$

Por outro lado, observe também que

$$\frac{1}{p_l f(p_j/p_l)} = \frac{4}{(\sqrt{p_j} + \sqrt{p_l})^2} = \int_0^\infty dw w e^{-\frac{w}{2}(\sqrt{p_j} + \sqrt{p_l})} , \quad (3.68)$$

e, via Eq. (3.37), verifica-se a relação a seguir

$$\begin{aligned} J_f^{-1} A &= \sum_{j,l=1}^d \frac{\langle j|A|l\rangle}{p_l f(p_j/p_l)} |j\rangle\langle l| \\ &= \int_0^\infty dw w \left(\sum_{j=1}^d e^{-\frac{w}{2}\sqrt{p_j}} |j\rangle\langle j| \right) A \left(\sum_{l=1}^d e^{-\frac{w}{2}\sqrt{p_l}} |l\rangle\langle l| \right) \\ &= \int_0^\infty dw w \exp\left(-\frac{w}{2}\sqrt{\rho}\right) A \exp\left(-\frac{w}{2}\sqrt{\rho}\right) . \end{aligned} \quad (3.69)$$

A WYSI foi introduzida por Wigner e Yanase (167, 168) há pouco mais de meio século e descreve uma medida convexa e positiva da não-comutatividade entre o estado ρ e o observável A . É possível mostrar que a Eq. (3.65) é análoga a seguinte expressão

$$\mathbf{g}_\rho^f(A, A) := \mathcal{I}(\rho, A) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left([\sqrt{\rho}, A]^2 \right) . \quad (3.70)$$

No contexto da evolução de sistemas quânticos fechados em que o operador A representa uma quantidade conservada, isto é, comuta com o hamiltoniano gerador da dinâmica unitária do sistema, a WYSI descreve uma constante de movimento. (169) Além disso, a WYSI é (i) não-negativa; (ii) convexa

$$\mathcal{I}(p\rho_1 + (1-p)\rho_2, A) \leq p\mathcal{I}(\rho_1, A) + (1-p)\mathcal{I}(\rho_2, A) , \quad (3.71)$$

em que $\{\rho_j = \rho_j^\dagger\}_{j=1,2}$, $\{\text{Tr}(\rho_j) = 1\}_{j=1,2}$ e $0 \leq p \leq 1$; e (iii) identicamente nula se, e somente se, ambos estado ρ e observável A comutam entre si. (170) Luo (171) mostrou que a WYSI é limitada pela variância de A , a saber,

$$\mathcal{I}(\rho, A) \leq \text{Tr}(\rho A^2) - [\text{Tr}(\rho A)]^2 , \quad (3.72)$$

percebendo também que esta desigualdade é saturada se ρ é um estado puro. Alguns anos mais tarde, a métrica de Wigner-Yanase foi generalizada por Dyson via introdução do parâmetro $0 < s < 1$ conduzindo à seguinte relação

$$\mathcal{I}_s(\rho, A) := -\frac{1}{2} \text{Tr} \left([\rho^s, A][\rho^{1-s}, A] \right) . \quad (3.73)$$

A convexidade deste quantificador, chamado a posteriori Wigner-Yanase-Dyson *skew information* (WYDSI), foi provada por Lieb. (172, 173)

A minimização da métrica de Wigner-Yanase atribui uma distância geodésica entre estados quânticos no espaço de estados cuja fórmula analítica também é conhecida na literatura. (147) Além do protocolo discutido por Jenčová (145), este funcional também pode ser obtido seguindo a análise de Gibilisco e Isola (147,174), e é dado por

$$\mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_1, \rho_2) = \arccos [A(\rho_1, \rho_2)] \quad , \quad (3.74)$$

em que

$$A(\rho_1, \rho_2) := \text{Tr} (\sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_2}) \quad (3.75)$$

é chamada afinidade quântica. (175) A exemplo da fidelidade de Uhlmann-Jozsa, a afinidade quântica satisfaz as propriedades

- (a) $A(\rho_1, \rho_2) = A(\rho_2, \rho_1) \forall \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}$, isto é, a afinidade é uma função simétrica em ambas entradas;
- (b) $0 \leq A(\rho_1, \rho_2) \leq 1 \forall \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}$, com $A(\rho_1, \rho_2) = 0$ se ρ_1 e ρ_2 têm suportes ortogonais, e $A(\rho_1, \rho_2) = 1$ se, e somente se, $\rho_1 = \rho_2$;
- (c) $A(\rho_1, \rho_2) = |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2$ se $\rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ e $\rho_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ são estados puros;
- (d) $A(V\rho_1V^\dagger, V\rho_2V^\dagger) = A(\rho_1, \rho_2) \forall V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $V^\dagger = V^{-1}$, isto é, a afinidade é invariante sob transformações unitárias em ambas entradas.
- (e) $A(\rho_1, \rho_2) \leq \sqrt{F(\rho_1, \rho_2)}$, ou seja, a afinidade é limitada superiormente pela raiz quadrada da fidelidade de Uhlmann-Jozsa.

Além destas propriedades, a afinidade quântica também possui um paralelo estreito com o chamado limite quântico de Chernoff, do inglês *Quantum Chernoff Bound* (QCB). (176,177)

Há várias interpretações físicas da WYSI, cada qual relacionada a um ponto de vista particular do comportamento quântico. Na verdade, a interpretação original discute esta quantidade em termos da incerteza na medida de observáveis não-comutantes com uma quantidade conservada do sistema físico – basicamente, a idéia central do teorema de Wigner-Yanase-Araki. (178) Analogamente, a WYSI também dá origem a um novo tipo de relação de incerteza de Heisenberg (179,180) e tem aplicação na metrologia quântica e no estudo de referenciais quânticos. (181) É possível também detectar estados emaranhados através de uma desigualdade do tipo-Bell obtida diretamente da WYSI. (182)

A WYSI define uma medida genuína da incerteza quântica de um observável em relação a um dado estado quântico, isto é, permanece invariante sob misturas clássicas deste estado. Em face desta propriedade, a Ref. (183) define a chamada incerteza quântica local (LQU)⁷ de um estado bipartido $\rho_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ em relação a um dado observável $K_A \in \mathcal{H}_A$ como o valor mínimo da WYSI via uma medida local, a saber

$$\mathcal{U}_A(\rho_{AB}) = \min_{K_A} \mathcal{I}(\rho_{AB}, K_A \otimes \mathbb{I}_B) , \quad (3.76)$$

em que a minimização é calculada sobre todos os observáveis K_A de espectro não-degenerado, sendo $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$ espaços de Hilbert de dimensões, respectivamente, $d_A = \dim \mathcal{H}_A$ e $d_B = \dim \mathcal{H}_B$. Em geral, especificando a Eq. (3.76) no regime de estados ρ_{AB} de um sistema q-bit–q-dit definido no espaço de Hilbert $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^d$, é possível mostrar que a LQU assume a expressão analítica (vide material suplementar da Ref. (183))

$$\mathcal{U}_A(\rho_{AB}) = 1 - \lambda_{\max} [W_{AB}] , \quad (3.77)$$

em que $\lambda_{\max}$ indica o autovalor máximo da matriz W_{AB} de dimensão 3×3 cujos elementos são dados por

$$(W_{AB})_{jl} = \text{Tr} [\sqrt{\rho_{AB}}(\sigma_{jA} \otimes \mathbb{I}_B) \sqrt{\rho_{AB}}(\sigma_{lB} \otimes \mathbb{I}_B)] . \quad (3.78)$$

Ambas WYSI e LQU têm se mostrado úteis na caracterização de incertezas, coerência e correlações quânticas em modelos de spin à temperatura zero e temperatura finita. Em especial, analisando a criticalidade e a fatorização do estado fundamental do modelo XY anisotrópico em um campo magnético transversal, as Refs. (184,185) mostram que o comportamento singular da WYSI e LQU pode revelar assinaturas dos pontos de transição de fase deste modelo. Entretanto, discussões mais recentes sugerem que as singularidades nestes quantificadores podem estar relacionadas na verdade a pontos de alta simetria da cadeia de spin. (186)

WYSI também é uma medida de assimetria, isto é, quantifica a quebra de simetria de um dado estado sob um conjunto de operações quânticas. (187) Este é um tema frutífero no escopo da informação quântica que encontra respaldo na teoria de assimetria e classifica coerência quântica como um recurso. (188) Neste contexto, o teorema de Noether se apresenta como uma poderosa ferramenta na caracterização de leis de conservação que

⁷LQU, do inglês *Local Quantum Uncertainty*.

emergem de simetrias em sistemas quânticos fechados pois cada medida de assimetria é uma quantidade conservada. Embora esforços recentes tenham contribuído para elucidar algumas propriedades de assimetria de estados puros sob a ação de canais quânticos (189, 190), o caso de estados mistos é bem mais sutil e ainda pouco explorado. Isto acontece porque quando lidamos com estados mistos devemos buscar por leis de conservação que não são capturadas em sua essência pelo teorema de Noether. (191) Conforme recentemente advogado por Marvian e Spekkens (192), uma medida de assimetria baseada na WYSI poderia preencher esta lacuna conceitual inaugurando uma nova forma de compreender as nuances mais complexas de quantidades conservadas.

3.3.3 Métrica mínima (média harmônica)

A métrica mínima ou média harmônica está associada à função de Morozova-Čencov

$$f_{\min}(u) = \frac{2u}{1+u} , \quad (3.79)$$

ou, equivalentemente,

$$c_f(x, y) = \frac{x+y}{2xy} . \quad (3.80)$$

A partir desta escolha da função de MC, a métrica $\mathbf{g}_\rho^f(A, A)$ na Eq. (3.47) se escreve na forma

$$\mathbf{g}_\rho^f(A, A) = \frac{1}{4} \left[\sum_{j=1}^d \frac{|\langle j|A|j\rangle|^2}{p_j} + \sum_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^d \frac{(p_j + p_l)}{p_j p_l} |\langle j|A|l\rangle|^2 \right] . \quad (3.81)$$

Note a partir da Eq. (3.79) que

$$p_l f(p_j/p_l) = \frac{2p_j p_l}{p_j + p_l} = \frac{2}{1/p_j + 1/p_l} = \int_0^\infty dw e^{-\frac{w}{2}(p_j^{-1} + p_l^{-1})} \quad (3.82)$$

e, portanto, via Eq. (3.36) encontramos a expressão

$$\begin{aligned} J_f A &= \sum_{j,l=1}^d p_l f(p_j/p_l) \langle j|A|l\rangle |j\rangle \langle l| \\ &= \int_0^\infty dw \left(\sum_{j=1}^d e^{-\frac{w}{2} p_j^{-1}} |j\rangle \langle j| \right) A \left(\sum_{l=1}^d e^{-\frac{w}{2} p_l^{-1}} |l\rangle \langle l| \right) \\ &= \int_0^\infty dw \exp\left(-\frac{w}{2} \rho^{-1}\right) A \exp\left(-\frac{w}{2} \rho^{-1}\right) . \end{aligned} \quad (3.83)$$

Por outro lado, observe também que

$$\frac{1}{p_l f(p_j/p_l)} = \frac{p_j + p_l}{2p_j p_l} = \frac{1}{2} (p_j^{-1} + p_l^{-1}) , \quad (3.84)$$

e, via Eq. (3.37), verifica-se a relação a seguir

$$\begin{aligned} J_f^{-1} A &= \sum_{j,l=1}^d \frac{\langle j|A|l\rangle}{p_l f(p_j/p_l)} |j\rangle\langle l| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^d (p_j^{-1} + p_l^{-1}) \langle j|A|l\rangle |j\rangle\langle l| \\ &= \frac{1}{2} (\rho^{-1} A + A \rho^{-1}) . \end{aligned} \quad (3.85)$$

Combinando as Eqs. (3.29) e (3.85), a métrica mínima pode ser escrita na forma

$$\mathbf{g}_\rho^f(A, A) = \frac{1}{4} \text{Tr} (\rho^{-1} A^2) . \quad (3.86)$$

É importante mencionar que a Eq. (3.86) pode ser obtida combinando diretamente ambas Eqs. (3.81) e (3.84).

Ao contrário do que acontece com ambas métricas de Fisher e Wigner-Yanase, até o momento não há registros na literatura de uma expressão fechada para a distância geodésica associada a métrica mínima. Por este motivo, as discussões que porventura envolvem este quantificador nos próximos capítulos vão se limitar ao cálculo das Eqs. (3.81) ou (3.86). Além disso, reconhecemos também que esta métrica carece ainda de um estudo visando esclarecer suas possíveis aplicações físicas no contexto da teoria da informação quântica.

3.3.4 Métrica de Bogoliubov

A métrica de Bogoliubov ou produto interno de Kubo-Mori está associada à função de Morozova-Čencov

$$f(u) = \frac{u - 1}{\ln u} , \quad (3.87)$$

ou, conseqüentemente,

$$c_f(x, y) = \frac{\ln x - \ln y}{x - y} . \quad (3.88)$$

A partir desta escolha da função de MC, a métrica $\mathbf{g}_\rho^f(A, A)$ na Eq. (3.47) se escreve na forma

$$\mathbf{g}_\rho^f(A, A) = \frac{1}{4} \left[\sum_{j=1}^d \frac{|\langle j|A|j\rangle|^2}{p_j} + 2 \sum_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^d \left(\frac{\ln p_j - \ln p_l}{p_j - p_l} \right) |\langle j|A|l\rangle|^2 \right]. \quad (3.89)$$

Note a partir da Eq. (3.87) que

$$p_l f(p_j/p_l) = \frac{p_j - p_l}{\ln p_j - \ln p_l} = \int_0^1 dw p_j^w p_l^{1-w} \quad (3.90)$$

e, portanto, via Eq. (3.36) encontramos a expressão

$$\begin{aligned} J_f A &= \sum_{j,l=1}^d p_l f(p_j/p_l) \langle j|A|l\rangle |j\rangle \langle l| \\ &= \int_0^1 dw \left(\sum_{j=1}^d p_j^w |j\rangle \langle j| \right) A \left(\sum_{l=1}^d p_l^{1-w} |l\rangle \langle l| \right) \\ &= \int_0^1 dw \rho^w A \rho^{1-w}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Por outro lado, observe também que

$$\frac{1}{p_l f(p_j/p_l)} = \frac{\ln p_j - \ln p_l}{p_j - p_l} = \int_0^\infty \frac{dw}{(p_j + w)(p_l + w)}, \quad (3.92)$$

e, via Eq. (3.37), verifica-se a relação a seguir

$$\begin{aligned} J_f^{-1} A &= \sum_{j,l=1}^d \frac{\langle j|A|l\rangle}{p_l f(p_j/p_l)} |j\rangle \langle l| \\ &= \int_0^\infty dw \left(\sum_{j=1}^d (p_j + w)^{-1} |j\rangle \langle j| \right) A \left(\sum_{l=1}^d (p_l + w)^{-1} |l\rangle \langle l| \right) \\ &= \int_0^\infty dw (\rho + w\mathbb{I})^{-1} A (\rho + w\mathbb{I})^{-1}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

A partir da Eq. (3.93), a métrica na Eq. (3.29) assume a forma

$$\mathbf{g}_\rho^f(A, A) = \frac{1}{4} \int_0^\infty dw \operatorname{Tr} \left[A(\rho + w\mathbb{I})^{-1} A(\rho + w\mathbb{I})^{-1} \right]. \quad (3.94)$$

Esta expressão define o produto interno de Kubo-Mori, também conhecido como produto escalar de Bogoliubov ou função de Duhamel de dois pontos. (193,194) Em especial, note que após algumas manipulações algébricas pode-se mostrar que ambas Eqs. (3.89) e (3.94) são equivalentes.

O produto interno de Kubo-Mori também tem uma interpretação útil no contexto da física da matéria condensada, em particular no que se refere a teoria da resposta linear.

De fato, a métrica Riemanniana na Eq. (3.94) emerge em termos da entropia relativa de Umegaki

$$S(\rho_1||\rho_2) = \text{Tr} [\rho_1(\ln \rho_1 - \ln \rho_2)] . \quad (3.95)$$

Para verificar esta afirmação, seja a representação integral deste funcional dada por (108)

$$S(\rho_1||\rho_2) = \int_0^\infty dw \text{Tr} [\rho_1(\rho_2 + w\mathbb{I})^{-1}(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 + w\mathbb{I})^{-1}] . \quad (3.96)$$

A partir desta expressão, é possível verificar que (194)

$$\mathbf{g}_\rho^f(A, A) = -\frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2}{\partial v_1 \partial v_2} S(\rho + v_1 A || \rho + v_2 A) \right]_{v_1=v_2=0} . \quad (3.97)$$

A Eq. (3.97) revela que a métrica de Kubo-Mori é determinada através da matriz Hessiana do funcional entropia relativa. A monotonicidade da métrica está vinculada à contratividade da entropia relativa sob ação de mapas CPTP.

A representação da métrica em termos da matriz Hessiana da entropia relativa não é uma característica exclusiva do produto interno de Kubo-Mori. De fato, é possível mostrar que toda métrica monótona pode ser escrita em termos da matriz Hessiana de uma família de entropias relativas que satisfazem a condição de monotonicidade. Recomendamos ao leitor a consulta dos trabalhos de Lesniewski e Ruskai (195) e Jenčová (196) para maiores detalhes. Neste sentido, a Eq. (3.97) não é unívoca, isto é, a métrica de Kubo-Mori pode ser descrita em termos de outras entropias no contexto da teoria da informação. Por exemplo, escolhendo a entropia de von Neumann

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho) , \quad (3.98)$$

a métrica $\mathbf{g}_\rho^f(A, A)$ também é dada pela matriz Hessiana

$$\mathbf{g}_\rho^f(A, A) = -\frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2}{\partial v_1 \partial v_2} S(\rho + (v_1 + v_2)A) \right]_{v_1=v_2=0} . \quad (3.99)$$

A conexão entre a entropia relativa de Umegaki e a métrica de Kubo-Mori dada na Eq. (3.97) pode ser muito útil no estudo da relação entre a entropia de emaranhamento de uma teoria de campos conforme (CFT) e a estrutura geométrica do espaço-tempo mediada pela chamada fórmula de Ryu-Takayanagi. (197) Considerando uma CFT n -dimensional cujo estado de vácuo com dual no espaço anti-de Sitter, a Ref. (7) mostra que a integral da densidade de energia da CFT depende de derivadas da entropia relativa do estado

de vácuo e o estado excitado da teoria. Neste caso, é instrutivo imaginar que a matriz Hessiana na Eq. (3.97) estabeleceria a ponte entre o produto interno de Kubo-Mori e esta densidade de energia. Os autores deste trabalho seminal também interpretaram o resultado mencionado à luz de medidas de distinguibilidade expandindo a entropia relativa entre estados perturbados do modelo holográfico. Assim, além de generalizar este resultado, a métrica de Kubo-Mori e seu vínculo com a entropia relativa pode, a princípio e de forma audaciosa, fornecer pistas e indicar novos caminhos em busca da formulação quântica de teorias gravitacionais.

Capítulo 4

QSLs geométricos generalizados

Neste capítulo estabeleceremos uma família geral de limites quânticos de velocidade a partir da hierarquia infinita de métricas no espaço de estados quânticos, unificando e estendendo resultados anteriores sob o tratamento da geometria da informação. Na Seção 4.1 vamos descrever geometricamente a evolução de um estado quântico ao longo do espaço de estados sob ação de dinâmicas arbitrárias. Nossa análise explora o vínculo entre medidas de distinguibilidade e distâncias no espaço de estados e será guiada pelo teorema de Morozova, Čencov e Petz (MCP) discutido no Capítulo 3. Em resumo, a distinguibilidade entre os estados inicial e final da dinâmica será função de um tensor métrico intrínseco à geometria do espaço de estados. A não-unicidade de métricas Riemannianas contrativas garantida pelo teorema MCP atribuirá uma multiplicidade a estas quantidades frente à hierarquia de funções de Morozova-Čencov. Esta característica será o cerne da derivação de uma família infinita de QSLs válidos a processos físicos arbitrários que apresentaremos na Seção 4.2. Ao final, discutiremos como a liberdade na escolha de funções de MC influencia na precisão do limite inferior no tempo de evolução do sistema. Explorando a saturação deste limite, introduziremos uma figura de mérito cuja otimização no conjunto de métricas Riemannianas indicará o QSL mais *tight* para uma dada dinâmica.

4.1 Estados quânticos, dinâmicas e o teorema MCP

Considere um sistema quântico descrito inicialmente pelo estado misto ρ_0 e que evolui para o estado arbitrário ρ_λ via a transformação

$$\rho_\lambda = \mathcal{E}_\lambda(\rho_0) . \quad (4.1)$$

Esta operação quântica, unitária ou não-unitária, é definida em termos de uma família de mapas dinâmicos $\mathcal{E}_\lambda(\bullet)$ rotulada pelo conjunto de parâmetros $\lambda = \{\lambda_\mu\}_{\mu=1,\dots,r}$. Cada elemento $\lambda_\mu \in \lambda$ é, por hipótese, dependente do tempo t e pode ser identificado apropriadamente com os parâmetros envolvidos no processo físico de interesse. Além disso, tanto o estado final ρ_λ quanto a transformação $\mathcal{E}_\lambda(\bullet)$ dependem de forma analítica e contínua nos parâmetros do conjunto λ .

Para um sistema quântico fechado cuja evolução é unitária, o mapa dinâmico é dado por

$$\mathcal{E}_\lambda(\rho_0) = U_\lambda \rho_0 U_\lambda^\dagger , \quad (4.2)$$

em que U_λ define uma família de operadores unitários e satisfaz

$$U_\lambda U_\lambda^\dagger = U_\lambda^\dagger U_\lambda = \mathbb{I} . \quad (4.3)$$

Neste caso, os observáveis

$$H_\mu^\lambda = -i\hbar U_\lambda \partial_\mu U_\lambda^\dagger \quad (4.4)$$

são os geradores da dinâmica em questão, com $\partial_\mu := \partial/\partial\lambda_\mu$. Por outro lado, a dinâmica não-unitária que descreve a evolução de um sistema quântico aberto pode ser representada pelo mapa completamente positivo que preserva traço (CPTP)¹

$$\mathcal{E}_\lambda(\rho_0) = \sum_j K_j^\lambda \rho_0 K_j^{\lambda\dagger} , \quad (4.5)$$

em que $\{K_j^\lambda\}$ define um conjunto de operadores de Kraus satisfazendo a condição

$$\sum_j K_j^{\lambda\dagger} K_j^\lambda = \mathbb{I} . \quad (4.6)$$

Seja a evolução de ρ_λ no espaço de estados quânticos em resposta à variação contínua do conjunto de parâmetros λ entre as configurações inicial λ_I e final λ_F . Em outras palavras,

¹Consulte a seção A.4 do Apêndice A para maiores detalhes acerca de mapas CPTP.

estamos interessados no caso em que a dinâmica do sistema quântico é caracterizada pelos estados inicial $\rho_0 \equiv \rho_{\lambda_I}$ e final ρ_{λ_F} . A evolução de ρ_λ ao longo do espaço de estados descreve uma curva γ de comprimento $\ell_\gamma(\rho_{\lambda_I}, \rho_{\lambda_F})$ que conecta ρ_{λ_I} e ρ_{λ_F} . Este comprimento define a distância entre os estados inicial e final da dinâmica e, conforme explicamos no Capítulo 3, pode ser calculado por meio de algum quantificador de distinguibilidade apropriado. A Fig. 4.1 ilustra a evolução de ρ_λ no espaço de estados quânticos discutida anteriormente. Observe que γ representa uma trajetória arbitrária dentre todas aquelas ligando os estados ρ_{λ_I} e ρ_{λ_F} sob uma dada dinâmica.

Figura 4.1 – Representação pictórica da variedade diferenciável $\mathcal{M}$ e do plano tangente $\mathcal{T}_\rho \mathcal{M}$. A curva vermelha define a trajetória γ descrita pela evolução do estado ρ_λ no espaço de estados quânticos entre os estados inicial ρ_{λ_I} e final ρ_{λ_F} . Observe que a cada ponto da variedade diferenciável $\mathcal{S}$ é possível construir um plano tangente $\mathcal{T}\mathcal{M}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A despeito da caracterização geométrica da evolução do sistema quântico, ainda não sabemos como calcular explicitamente o comprimento $\ell_\gamma(\rho_{\lambda_I}, \rho_{\lambda_F})$. Entretanto, a interpretação desta quantidade em termos de medidas de distinguibilidade entre estados quânticos indica uma conexão com o teorema de Morozova, Čencov e Petz (MCP) discutido no Capítulo 3. Esta ligação pode proporcionar, a princípio, uma maneira efetiva de calcular este comprimento. Buscando compreender esta afirmação, considere a evolução entre os estados ρ_λ e $\rho_{\lambda+d\lambda} := \rho_\lambda + d\rho_\lambda$ em resposta à variação infinitesimal entre as configurações λ e $\lambda + d\lambda$ do conjunto de parâmetros, em que

$$d\rho_\lambda = \sum_{\mu=1}^r \partial_\mu \rho_\lambda d\lambda_\mu \quad (4.7)$$

é um operador hermitiano de traço nulo, isto é, $\text{Tr}(d\rho_\lambda) = d\text{Tr}(\rho_\lambda) = 0$, que corresponde à diferencial de ρ_λ em relação a λ . Estes estados definem pontos vizinhos no espaço de estados quânticos separados por uma distância infinitesimal

$$ds := \|d\rho_\lambda\| \quad (4.8)$$

dada em termos da norma de $d\rho_\lambda$. Conforme discutimos no Capítulo 3, ao contrário do caso clássico, no cenário quântico a norma $\|\bullet\|$ não é determinada de modo unívoco. De fato, o teorema de Morozova, Čencov e Petz garante a existência de uma miríade de normas $\|\bullet\|$ em face da família infinita de métricas Riemannianas definidas no espaço de estados quântico. Neste caso, o cálculo do elemento linha ds será mediado pela Eq. (3.2), a saber,

$$ds = \|d\rho_\lambda\| = \sqrt{\mathbf{g}_{\rho_\lambda}^f(d\rho_\lambda, d\rho_\lambda)} . \quad (4.9)$$

Analisando a evolução global de ρ_λ no espaço de estados após sucessivas variações infinitesimais de λ no intervalo $\lambda \in [\lambda_I, \lambda_F]$, o comprimento $\ell_\gamma(\rho_{\lambda_I}, \rho_{\lambda_F})$ da trajetória que conecta ambos estados inicial e final da dinâmica é obtido integrando a forma diferencial ds ao longo da curva γ ,

$$\ell_\gamma(\rho_{\lambda_I}, \rho_{\lambda_F}) = \int_\gamma ds . \quad (4.10)$$

A Eq. (4.10) revela o vínculo entre medidas de distinguibilidade e a geometria do espaço de estados que mencionamos previamente. Através das Eqs. (3.20) e (4.9), a forma diferencial ds pode ser calculada por meio do teorema MCP que garante ainda a não-unicidade desta quantidade por meio das possíveis escolhas para a função $c_f(x, y)$ de MC. Neste caso, é possível associar diversos comprimentos ℓ_γ para uma dada dinâmica devido à liberdade de escolha da função de MC. Desta forma, é razoável definir $\ell_\gamma(\rho_{\lambda_I}, \rho_{\lambda_F}) := \ell_\gamma^f(\rho_{\lambda_I}, \rho_{\lambda_F})$.

O cálculo explícito do elemento infinitesimal ds via o teorema MCP dado na Eq. (3.20) requer o estado ρ_λ na forma diagonal. Assim, seja

$$\rho_\lambda = \sum_{j=1}^d p_j |j\rangle\langle j| \quad (4.11)$$

a decomposição espectral de ρ_λ na base de estados $\{|j\rangle\}_{j=1,\dots,d}$, com $0 < p_j < 1$, $\sum_{j=1}^d p_j = 1$ e $\langle j|l\rangle = \delta_{jl}$. Por hipótese, ambos autovalores p_j e autoestados $|j\rangle$ de ρ_λ podem depender do conjunto de parâmetros λ , ou seja, $p_j \equiv p_j(\lambda)$ e $|j\rangle \equiv |j(\lambda)\rangle$. Desta forma, é possível

verificar que

$$\partial_\mu \rho_\lambda = \sum_{j=1}^d \{ (\partial_\mu p_j) |j\rangle \langle j| + p_j [(\partial_\mu |j\rangle) \langle j| + |j\rangle (\partial_\mu \langle j|)] \} \quad (4.12)$$

e, então

$$\langle j | \partial_\mu \rho_\lambda | l \rangle = \delta_{jl} \partial_\mu p_j + (p_l - p_j) \langle j | \partial_\mu | l \rangle , \quad (4.13)$$

onde utilizamos a relação $(\partial_\mu \langle j |) | l \rangle = -\langle j | \partial_\mu | l \rangle$ que decorre da relação de ortonormalidade $\langle j | l \rangle = \delta_{jl}$. Combinando as Eqs. (4.7) e (4.13) obtemos

$$\langle j | d\rho_\lambda | l \rangle = \sum_{\mu=1}^r [\delta_{jl} \partial_\mu p_j + i(p_j - p_l) \mathcal{A}_{jl}^\mu] d\lambda_\mu , \quad (4.14)$$

em que adotamos a definição

$$\mathcal{A}_{jl}^\mu := i \langle j | \partial_\mu | l \rangle . \quad (4.15)$$

Observe que a Eq. (4.15) define um tipo de conexão de Berry entre os autoestados $|j\rangle$ e $|l\rangle$ do estado evoluído do sistema. (198) Em geral, o termo $\mathcal{A}_{jl}^\mu$ pode ser interpretado como o elemento de matriz do potencial de *gauge* $\mathcal{A}^\mu = i\partial_\mu$ responsável por translações no espaço de parâmetros definidos pelo conjunto λ ou mesmo pelo vetor de base do espaço tangente associado ao espaço de estados. (108, 199) Por meio da Eq. (4.14), no caso $j = l$ encontramos

$$|\langle j | d\rho_\lambda | j \rangle|^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^r \partial_\mu p_j \partial_\nu p_j d\lambda_\mu d\lambda_\nu , \quad (4.16)$$

enquanto para o caso $j \neq l$ obtemos o resultado

$$|\langle j | d\rho_\lambda | l \rangle|^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^r (p_j - p_l)^2 \mathcal{A}_{jl}^\mu \mathcal{A}_{lj}^\nu d\lambda_\mu d\lambda_\nu . \quad (4.17)$$

Finalmente, substituindo as Eqs. (4.16) e (4.17) na Eq. (3.20), o comprimento infinitesimal ds^2 entre ρ_λ e $\rho_\lambda + d\rho_\lambda$ é reescrito na forma

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^r g_{\mu\nu}^f d\lambda_\mu d\lambda_\nu , \quad (4.18)$$

em que

$$g_{\mu\nu}^f = \mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{Q}_{\mu\nu}^f \quad (4.19)$$

representa o elemento de um tensor métrico, com

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^d \frac{\partial_\mu p_j \partial_\nu p_j}{p_j} \quad (4.20)$$

e

$$\mathcal{Q}_{\mu\nu}^f = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^d c_f(p_j, p_l) (p_j - p_l)^2 \mathcal{A}_{jl}^\mu \mathcal{A}_{lj}^\nu . \quad (4.21)$$

Note que $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ refere-se à contribuição das populações de ρ_λ , enquanto $\mathcal{Q}_{\mu\nu}^f$ representa um termo puramente quântico devido às coerências de $d\rho_\lambda$. A separação explícita nestas contribuições é inédita na literatura e atribui um caráter robusto ao nosso resultado. O elemento linha ds^2 na Eq. (4.18) será a base de nossa derivação do *quantum speed limit* associado à dinâmica de estados mistos. Embasados pelos argumentos apresentados no capítulo 3, nossa análise do QSL não vai contemplar a evolução de estados puros. Isto porque se ρ_λ é um estado puro, então a métrica contrativa $g_{\mu\nu}^f$ e, portanto, a forma diferencial ds^2 , colapsam diretamente na métrica de Fubini-Study. Em contrapartida, este seria um aspecto desinteressante e pouco inovador a este trabalho tendo em vista que há diversos resultados sobre QSLs via a métrica de Fubini-Study na literatura. (61, 62, 99) Esta é a principal motivação pela qual apenas estados mistos serão relevantes em nossa análise, cujo objetivo maior está na investigação da relação entre QSLs e a liberdade na escolha de diferentes medidas de distinguibilidade entre estados quânticos.

A partir da forma diferencial na Eq. (4.18), o comprimento da trajetória γ dado na Eq. (4.10) será função do tensor métrico $g_{\mu\nu}^f$ e, portanto, de ambas contribuições $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ e $\mathcal{Q}_{\mu\nu}^f$. Em especial, a não-unicidade de $\mathcal{Q}_{\mu\nu}^f$ frente à família de funções $c_f(x, y)$ de Morozova-Čencov será responsável pela multiplicidade de comprimentos $\ell_\gamma^f(\rho_{\lambda_I}, \rho_{\lambda_F})$ das possíveis trajetórias $\gamma \equiv \gamma^f$ ao longo do espaço de estados. Motivados pela busca do QSL geométrico que discutiremos na próxima seção, será interessante aqui fornecer uma expressão analítica em que esteja explícita a dependência no tempo de cada um destes comprimentos. Conforme mencionado no início desta seção, o conjunto de parâmetros $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ é, por hipótese dependente do tempo, ou seja, $\lambda_\mu \equiv \lambda_\mu(t)$ com $\mu = 1, \dots, r$. Neste caso, considere a parametrização $t \in [0, \tau] \longrightarrow \lambda(t)$ tal que

$$\lambda_I = \lambda(0) , \quad \lambda_F = \lambda(\tau) , \quad (4.22)$$

em que τ é o tempo de evolução do sistema quântico, e também

$$\rho_\lambda := \rho_t , \quad \rho_{\lambda_I} := \rho_0 , \quad \rho_{\lambda_F} := \rho_\tau , \quad \ell_\gamma^f(\rho_{\lambda_I}, \rho_{\lambda_F}) := \ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau) . \quad (4.23)$$

Assim, combinando as Eqs. (4.10) e (4.18) à luz da parametrização indicada e da notação

estabelecida nas linhas acima, o comprimento $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ é dado por

$$\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau) := \int_0^\tau dt \left(\frac{ds}{dt} \right) = \int_0^\tau dt \sqrt{\sum_{\mu, \nu=1}^r g_{\mu\nu}^f \frac{d\lambda_\mu}{dt} \frac{d\lambda_\nu}{dt}}. \quad (4.24)$$

4.2 QSL generalizado

A Eq. (4.24) permite relacionar os conceitos de distinguibilidade e distâncias no espaço de estados à propriedades tais como populações e coerências do estado do sistema quântico. Nesta seção, usaremos esta informação para estabelecer um limite inferior no tempo de evolução deste sistema sob ação de uma dinâmica arbitrária, isto é, em favor do cálculo do *quantum speed limit*.

Figura 4.2 – Representação pictórica da evolução do estado ρ_t no espaço de estados quânticos. A curva tracejada em azul, com comprimento $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$, indica a trajetória γ descrita pela evolução de ρ_t entre os estados inicial ρ_0 e final ρ_τ da dinâmica. A curva contínua vermelha, cujo comprimento é dado por $\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)$, representa a geodésica que conecta estes mesmos estados.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Buscando compreender a origem do limite inferior no tempo de evolução do sistema, na Fig. 4.2 fornecemos uma visão pictórica da dinâmica de ρ_t ao longo do espaço de estados. A curva tracejada em azul atribui a trajetória $\gamma \equiv \gamma_t$ parametrizada pelo tempo $t \in [0, \tau]$ representando a evolução entre os estados inicial ρ_0 e final ρ_τ . A partir de uma métrica $g_{\mu\nu}^f$ no espaço de estados quânticos relativa à escolha da função $c_f(x, y)$ de Morozova-Čencov, o comprimento desta trajetória é dado por $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$. A curva vermelha sólida, cujo comprimento é dado por $\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)$, denota a geodésica conectando ρ_0 e ρ_τ , isto

é, a curva de menor distância entre estes estados. Em analogia a discussão da seção 4.1, a não-unicidade da contribuição $\mathcal{Q}_{\mu\nu}^f$ no tensor métrico $g_{\mu\nu}^f$ também se reflete na curva geodésica, ou seja, a cada função de MC está relacionada uma distância geodésica distinta no espaço de estados.

Em geral, o comprimento da curva γ não coincidirá necessariamente com aquele da curva geodésica. De fato, o comprimento $\ell_\gamma(\rho_0, \rho_\tau)$ da trajetória seguida pelo estado ρ_t é limitado inferiormente pela distância geodésica $\mathcal{L}(\rho_0, \rho_\tau)$, ou seja,

$$\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau) \leq \ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau) . \quad (4.25)$$

Inspirados pelo trabalho original de Anandan e Aharonov (62), a Eq. (4.25) caracteriza geometricamente o limite inferior no tempo de evolução de ρ_t ao longo do espaço de estados no intervalo $0 \leq t \leq \tau$. Em resumo, o limite quântico de velocidade geométrico se origina do fato que a geodésica constitui a trajetória de menor comprimento dentre todas as evoluções físicas entre os estados inicial e final da dinâmica. A estimativa do tempo de evolução τ é obtida a partir da solução da desigualdade na Eq. (4.25). Em geral, a saturação desta desigualdade fornece um limite inferior na estimativa deste parâmetro. Neste caso, ambos comprimentos $\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)$ e $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ são equivalentes já que o estado ρ_t evolui de fato ao longo da geodésica.

A conjunção das Eqs. (4.24) e (4.25) define uma família infinita de limites quânticos de velocidade com origens geométricas, a qual representa um dos resultados centrais deste trabalho. Em outras palavras, a solução da desigualdade na Eq. (4.25) permite determinar o tempo mínimo de evolução entre os estados inicial e final da dinâmica. Através da métrica $g_{\mu\nu}^f$ dada na Eq. (4.18), esta família de QSLs torna explícitas as contribuições das populações do estado evoluído ρ_t e das coerências de sua variação temporal $d\rho_t$, além de esclarecer pela primeira vez na literatura o papel desempenhado por estas quantidades no QSL. Nossa abordagem é geral e fornece um panorama unificado que engloba ambas dinâmicas unitária e não-unitária. Além disso, esta interpretação fornece um critério claro para a saturação do limite inferior no tempo de evolução que ocorre quando $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ coincide com a distância geodésica $\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)$. O comprimento $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ é calculado via Eq. (4.24) obtida na seção anterior e, dada uma função $c_f(x, y)$ arbitrária, requer essencialmente a decomposição espectral do estado evoluído do sistema. Por outro lado, o comprimento $\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)$ da curva geodésica dispõe de algumas complicações que vão além

de um mero detalhe de cálculo. Conforme discutido no Capítulo 3, a despeito de quase duas décadas após a formulação do teorema MCP e de diversos trabalhos relacionados ao assunto publicados na literatura especializada, apenas as métricas de Fisher e Wigner-Yanase dispõem de fórmulas analíticas catalogadas para os respectivos funcionais $\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)$ e $\mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau)$.

Note que qualquer métrica Riemanniana contrativa no espaço de estados e, portanto, qualquer quantificador de distinguibilidade entre estados quânticos, origina um QSL diferente. Mais precisamente, tanto a distância geodésica no lado esquerdo quanto a quantidade $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ no lado direito da Eq. (4.25) dependem diretamente da função de MC escolhida. Em particular, quando nos restringimos à função de MC que origina a versão quântica da informação de Fisher, recobramos exatamente o QSL introduzido na Ref. (82). Além disso, o QSL apresentado aqui é operacionalmente mais simples se comparado àquele reportado por Taddei et al.: enquanto o cálculo dos termos na Eq. (4.25) requer exclusivamente a decomposição espectral do estado evoluído, o QSL na Ref. (82) faz o uso da técnica de purificação seguida de otimizações em um conjunto adequado de observáveis.

Em geral, ambos comprimentos $\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)$ e $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ têm dependência funcional não-trivial no tempo τ de evolução. Isto implica que a solução da desigualdade na Eq. (4.25) em termos de τ pode se tornar inviável para certas classes de dinâmicas e estados quânticos. Entretanto, a partir da escolha de uma dada métrica $g_{\mu\nu}^f$ associada à função $c_f(x, y)$ de Morozova-Čencov, a busca pelo limite inferior no tempo de evolução τ coincide com a saturação da desigualdade indicada na Eq. (4.25). Assim, no intuito de quantificar a saturação dos QSLs que decorrem da escolha destas métricas, ou seja, o quanto um limite quântico de velocidade é *tight*, adotaremos a diferença relativa

$$\delta_\gamma^f \equiv \frac{\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau) - \mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)}{\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)} \quad (4.26)$$

como figura de mérito que quantifica o quanto o comprimento $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ da curva γ descrita pela evolução do operador densidade difere da distância geodésica $\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)$ relativa a métrica analisada. Neste sentido, a métrica cuja distância geodésica $\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)$ é mais próxima do comprimento $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ será aquela cujo limite inferior no tempo de evolução do estado ρ_t é mais *tight* durante a dinâmica. Assim, a minimização da quantidade δ_γ^f $\forall \gamma$ sobre o conjunto de métricas Riemannianas contrativas, isto é, na família de funções

$c_f(x, y)$, fornecerá um critério permitindo identificar o QSL geométrico mais *tight*. Em termos técnicos, designando f_γ^* a métrica “ótima” para uma dada dinâmica, o limite inferior mais *tight* no tempo de evolução é definido por

$$\mathcal{L}^{f_\gamma^*}(\rho_0, \rho_\tau) \leq \ell_\gamma^{f_\gamma^*}(\rho_0, \rho_\tau) , \quad \text{com } f_\gamma^* \text{ tal que } \inf_f \delta_\gamma^f \equiv \delta_\gamma^{f_\gamma^*} , \quad (4.27)$$

em que a minimização é calculada sobre todas as funções de Morozova-Čencov.

A minimização constitui um problema não-trivial e, em geral, ainda mais complexo pela ausência de expressões analíticas para comprimentos $\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)$ associados a funções de MC arbitrárias. Em outras palavras, o cálculo da Eq. (4.27) para uma dada função f_γ é prejudicado sobremaneira já que as métricas de Fisher e Wigner-Yanase são as únicas métricas Riemannianas contrativas cujos respectivos comprimentos $\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)$ e $\mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau)$ da curva geodésica são analiticamente conhecidos na literatura.

Nos Capítulos 5 e 6 discutiremos o *quantum speed limit* no contexto das dinâmicas unitária e não-unitária, respectivamente. Em razão das dificuldades mencionadas no parágrafo anterior, restringiremos a minimização na Eq. (4.27) e a discussão do QSL mais *tight* ao par de métricas de Fisher e Wigner-Yanase. Embora ubíqua fisicamente e utilizada em larga escala na caracterização do QSL, mostraremos que a métrica de Fisher nem sempre atribui o QSL mais *tight* para o caso de evoluções não-unitárias.

Capítulo 5

QSL na dinâmica unitária

A dinâmica unitária caracteriza a evolução de sistemas quânticos fechados, ou seja, sistemas físicos isolados alheios a quaisquer efeitos de interação com o restante do universo. Esta é uma concepção idealizada do que de fato acontece na prática, já que todo sistema físico real está sujeito à ação de graus de liberdade externos que implicam, por exemplo, em dissipação de energia. Entretanto, esta abordagem pode fornecer uma aproximação razoável na descrição de fenômenos microscópicos nos quais a escala de tempo relativa a perda de coerência do sistema quântico é muito maior que aquela envolvida na evolução unitária.

Neste capítulo, vamos nos restringir a exemplos de métricas contrativas e processos físicos unitários visando ilustrar como uma particular escolha da medida geométrica de distinguibilidade no espaço de estados quânticos influencia diretamente no QSL. Na Seção 5.1 discutimos a evolução unitária de um estado misto arbitrário e o comportamento da métrica $g_{\mu\nu}$ neste regime. A partir desta análise, dedicamos as Seções 5.2 e 5.3 a apresentação dos nossos resultados para o QSL relativo a escolha das métricas de Fisher e Wigner-Yanase, respectivamente. Por fim, nas Seções 5.4 e 5.5 mostramos que a métrica de Fisher atribui um limite inferior ao tempo de evolução mais *tight* que aquele associado à métrica de Wigner-Yanase na dinâmica unitária.

5.1 Dinâmica unitária

Considere um sistema quântico fechado descrito inicialmente pelo estado misto ρ_0 que evolui unitariamente segundo a transformação

$$\rho_\lambda = U_\lambda \rho_0 U_\lambda^\dagger, \quad (5.1)$$

onde U_λ caracteriza uma família de operadores unitários que depende continuamente do conjunto de parâmetros $\lambda = \{\lambda_\mu\}_{\mu=1,\dots,r}$ e satisfaz a condição

$$U_\lambda U_\lambda^\dagger = U_\lambda^\dagger U_\lambda = \mathbb{I}. \quad (5.2)$$

Conforme discutido no capítulo anterior, estamos interessados na evolução de ρ_λ na qual λ varia analiticamente entre as configurações inicial λ_I e final λ_F . Como consequência, a evolução de ρ_λ descreve uma trajetória arbitrária γ no espaço de estados quânticos conectando os estados ρ_{λ_I} e ρ_{λ_F} cujo comprimento é dado por $\ell_\gamma(\rho_{\lambda_I}, \rho_{\lambda_F})$. Em termos locais, a variação infinitesimal entre as configurações λ e $\lambda + d\lambda$ se reflete na evolução entre os estados ρ_λ e $\rho_{\lambda+d\lambda} := \rho_\lambda + d\rho_\lambda$, onde

$$d\rho_\lambda = \sum_{\mu=1}^r \partial_\mu \rho_\lambda d\lambda_\mu. \quad (5.3)$$

A partir da Eq. (5.1), pode-se mostrar que o estado ρ_λ satisfaz a equação de von Neumann

$$\partial_\mu \rho_\lambda = -\frac{i}{\hbar} [H_\mu^\lambda, \rho_\lambda] = -\frac{i}{\hbar} [\Delta H_\mu^\lambda, \rho_\lambda], \quad (5.4)$$

em que definimos

$$\Delta H_\mu^\lambda := H_\mu^\lambda - \langle H_\mu^\lambda \rangle \mathbb{I}, \quad H_\mu^\lambda := -i\hbar U_\lambda \partial_\mu U_\lambda^\dagger, \quad \langle H_\mu^\lambda \rangle := \text{Tr}(\rho_\lambda H_\mu^\lambda). \quad (5.5)$$

Note que o conjunto de operadores $\{H_\mu^\lambda\}_{\mu=1,\dots,r}$ está associado ao conjunto de observáveis geradores da dinâmica do sistema. Além disso, H_μ^λ é dependente do tempo via o conjunto de parâmetros λ que rotula cada um destes operadores.

Contextualizado o cenário unitário, vamos nos concentrar agora no cálculo da métrica

$$g_{\mu\nu}^f = \mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{Q}_{\mu\nu}^f. \quad (5.6)$$

Essencialmente, a evolução unitária codifica o conjunto de parâmetros λ no estado de prova sem alterar sua pureza, isto é, se ρ_0 é um estado misto então ρ_λ também será misto¹.

¹Logicamente, o mesmo raciocínio se aplica ao caso em que o estado inicial ρ_0 é puro. Entretanto,

Para verificar esta afirmação, seja a base de estados $\{|j_0\rangle\}_{j=1,\dots,d}$ na qual

$$\rho_0 = \sum_{j=1}^d p_j |j_0\rangle\langle j_0| \quad (5.7)$$

é diagonal, onde as probabilidades p_j e os autoestados $|j_0\rangle$ independem do conjunto de parâmetros λ , isto é,

$$\partial_\mu p_j = \partial_\nu p_j = 0 \quad (5.8)$$

e

$$\partial_\mu |j_0\rangle = \partial_\nu |j_0\rangle = 0 . \quad (5.9)$$

Assim,

$$\rho_\lambda = U_\lambda \rho_0 U_\lambda^\dagger = \sum_{j=1}^d p_j U_\lambda |j_0\rangle\langle j_0| U_\lambda^\dagger = \sum_{j=1}^d p_j |j\rangle\langle j| , \quad (5.10)$$

com

$$|j\rangle := U_\lambda |j_0\rangle , \quad (5.11)$$

e portanto ambos estados inicial e final compartilham do mesmo conjunto de autovalores.

Esta propriedade implica que a métrica $g_{\mu\nu}$ exibirá contribuições exclusivamente devidas às coerências do estado $d\rho_\lambda$, ou seja, via Eq. (5.8) segue que

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial_\mu p_j \partial_\nu p_j}{4p_j} = 0 \quad (5.12)$$

e então a métrica na Eq. (5.6) se reduz a

$$g_{\mu\nu}^f = \mathcal{Q}_{\mu\nu}^f \quad (5.13)$$

ao longo da curva γ descrita por ρ_λ no espaço de estados quânticos. Em outras palavras, apenas as coerências de $d\rho_\lambda$ conduzem a evolução do sistema quântico fechado, enquanto as populações de ρ_λ não desempenham papel proeminente neste processo. A contribuição $\mathcal{Q}_{\mu\nu}^f$, por sua vez, será calculada explicitamente através da Eq. (4.21). Antes, porém, note que diferenciando ambos os lados da identidade algébrica $U_\lambda^\dagger U_\lambda = \mathbb{I}$ em relação ao parâmetro λ_μ obtemos a relação

$$U_\lambda^\dagger (\partial_\mu U_\lambda) = -(\partial_\mu U_\lambda^\dagger) U_\lambda = -\frac{i}{\hbar} U_\lambda^\dagger H_\mu^\lambda U_\lambda \quad (5.14)$$

em que, apenas para relembrar a Eq. (5.5), $H_\mu^\lambda := -i\hbar U_\lambda \partial_\mu U_\lambda^\dagger$. Neste caso, utilizando a

nossa análise do *quantum speed limit* na dinâmica unitária não contempla este caso.

Eq. (5.11) que descreve o vínculo entre as bases $\{|j_0\rangle\}_{j=1,\dots,d}$ e $\{|j\rangle\}_{j=1,\dots,d}$ via o operador unitário U_λ , então

$$\langle j|\partial_\mu|l\rangle = \langle j_0|U_\lambda^\dagger(\partial_\mu U_\lambda)|l_0\rangle = -\frac{i}{\hbar}\langle j_0|U_\lambda^\dagger H_\mu^\lambda U_\lambda|l_0\rangle = -\frac{i}{\hbar}\langle j|H_\mu^\lambda|l\rangle. \quad (5.15)$$

Repare que se $j \neq l$ (ou mesmo a condição $j < l$ indicada na soma sobre os índices $\{j, l\}$ na Eq. (4.21)), então pela Eq. (5.5) temos $\langle j|H_\mu^\lambda|l\rangle = \langle j|\Delta H_\mu^\lambda|l\rangle$. Portanto, via Eq. (5.15) a conexão $\mathcal{A}_{jl}^\mu$ definida na Eq. (4.15) é reescrita na forma

$$\mathcal{A}_{jl}^\mu = i\langle j|\partial_\mu|l\rangle = \frac{1}{\hbar}\langle j|H_\mu^\lambda|l\rangle = \frac{1}{\hbar}\langle j|\Delta H_\mu^\lambda|l\rangle. \quad (5.16)$$

Assim, combinando as Eq. (4.21) e (5.16), a métrica $g_{\mu\nu}$ é dada pela expressão

$$g_{\mu\nu}^f = \frac{1}{2\hbar^2} \sum_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^d c_f(p_j, p_l)(p_j - p_l)^2 \langle j|\Delta H_\mu^\lambda|l\rangle \langle l|\Delta H_\nu^\lambda|j\rangle. \quad (5.17)$$

A generalidade deste resultado está baseada em alguns aspectos. Em primeiro lugar, tendo em vista que não particularizamos uma escolha para os observáveis que governam a dinâmica, a Eq. (5.17) se aplica a qualquer família de evoluções unitárias caracterizadas pelo operador U_λ . Vale ressaltar que esta conclusão tem respaldo numa das características centrais do *quantum speed limit*: diferentes escolhas de U_λ levam a diferentes limites mínimos no tempo de evolução, ou seja, o QSL depende do processo físico analisado. Em segundo lugar, embora o caráter misto do estado inicial ρ_0 seja um pré-requisito importante na derivação de $g_{\mu\nu}$ via o teorema MCP, nada foi mencionado a respeito da dimensão, ainda que finita, deste estado. Assim, a Eq. (5.17) pode ser estendida ao contexto no qual ρ_0 representa um estado misto de N q-bits ou um q-dit.

Por fim, repare que a métrica $g_{\mu\nu}^f$ é caracterizada pela família infinita de funções de MC e uma análise explícita depende de escolhas específicas para $c_f(x, y)$. Esta liberdade atribui um caráter geral a $g_{\mu\nu}^f$ e garante uma característica adicional ao *quantum speed limit* na Eq. (4.25): diferentes funções de MC implicam diferentes tempos de evolução e, inevitavelmente, uma escolha apropriada de $c_f(x, y)$ fornecerá um QSL mais *tight*. No que segue, vamos dedicar especial atenção às funções de MC relativas às métricas de Fisher e Wigner-Yanase. A motivação que justifica esta escolha tem respaldo na ausência de expressões analíticas para a distância geodésica associada às demais métricas no espaço de estados. Por este motivo, QSLs envolvendo métricas fora deste escopo terão significado

operacional comprometido pelo simples desconhecimento de todos os elementos envolvidos na desigualdade na Eq. (4.25) cuja solução atribui o tempo mínimo de evolução do sistema físico.

5.2 Métrica de Fisher (QF)

Nesta seção forneceremos explicitamente o *quantum speed limit* para a dinâmica unitária segundo a informação de Fisher quântica. Na formulação do teorema MCP, a métrica de Fisher corresponde à escolha da função de MC

$$c_f(x, y) = \frac{2}{x + y} \quad (5.18)$$

tal que a Eq. (5.17) assume a forma

$$g_{\mu\nu}^{\text{QF}} = \frac{1}{2\hbar^2} \sum_{j,l=1}^d \frac{(p_j - p_l)^2}{p_j + p_l} \langle j | \Delta H_\mu^\lambda | l \rangle \langle l | \Delta H_\nu^\lambda | j \rangle . \quad (5.19)$$

Se combinada com a Eq. (4.25), esta expressão já forneceria um QSL para a dinâmica unitária via a métrica de Fisher. Entretanto, no intuito de tornar nosso resultado um pouco mais atraente e/ou competitivo com QSLs reportados na literatura, sobretudo àqueles derivados no espírito do *quantum speed limit* de Mandelstam-Tamm, seria interessante reconhecer na Eq. (5.19) uma quantidade análoga à variância dos observáveis H_μ^λ que governam a dinâmica do sistema. De fato, usando a desigualdade

$$\frac{(p_j - p_l)^2}{p_j + p_l} = p_j + p_l - \frac{2p_j p_l}{p_j + p_l} \leq p_j + p_l \quad (5.20)$$

é possível reescrever $g_{\mu\nu}$ na forma

$$g_{\mu\nu}^{\text{QF}} \leq \frac{1}{2\hbar^2} \sum_{j,l=1}^d (p_j + p_l) \langle j | \Delta H_\mu^\lambda | l \rangle \langle l | \Delta H_\nu^\lambda | j \rangle . \quad (5.21)$$

Analisando as somas nos índices $\{j, l\}$ no lado direito da desigualdade anterior, é possível reconhecer a soma de traços de produtos envolvendo os operadores ρ_λ , ΔH_μ^λ e ΔH_ν^λ . Desta forma, após cálculos simples obtemos

$$g_{\mu\nu}^{\text{QF}} \leq \frac{1}{\hbar^2} \mathcal{C}(\Delta H_\mu^\lambda, \Delta H_\nu^\lambda) , \quad (5.22)$$

onde

$$\mathcal{C}(\Delta H_\mu^\lambda, \Delta H_\nu^\lambda) := \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\rho_\lambda \{ \Delta H_\mu^\lambda, \Delta H_\nu^\lambda \} \right) \quad (5.23)$$

é a covariância simetrizada entre ΔH_μ^λ e ΔH_ν^λ em relação ao estado evoluído e $\{X_1, X_2\} := X_1X_2 + X_2X_1$ é o anti-comutador. Em particular, esta quantidade se reduz à variância do operador H_μ^λ quando $\mu = \nu$, ou seja,

$$\mathcal{C}(\Delta H_\mu^\lambda, \Delta H_\mu^\lambda) = \text{Tr}[\rho_\lambda(\Delta H_\mu^\lambda)^2] = \langle (H_\mu^\lambda)^2 \rangle - \langle H_\mu^\lambda \rangle^2. \quad (5.24)$$

Substituindo a Eq. (5.22) na Eq. (4.25), o limite inferior no tempo de evolução do sistema é obtido via solução da desigualdade

$$\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) \leq \frac{1}{\hbar} \int_0^\tau dt \sqrt{\sum_{\mu, \nu=1}^r \mathcal{C}(\Delta H_\mu^\lambda, \Delta H_\nu^\lambda) \frac{d\lambda_\mu}{dt} \frac{d\lambda_\nu}{dt}}, \quad (5.25)$$

onde

$$\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) = \arccos \left[\sqrt{F(\rho_0, \rho_\tau)} \right] \quad (5.26)$$

é o ângulo de Bures, isto é, a distância geodésica correspondente a métrica de Fisher, e

$$F(\rho_0, \rho_\tau) := \left(\text{Tr} \left[\sqrt{\sqrt{\rho_0} \rho_\tau \sqrt{\rho_0}} \right] \right)^2 \quad (5.27)$$

é a fidelidade de Uhlmann-Jozsa cujas propriedades foram discutidas no Capítulo 3.

O QSL na Eq. (5.25) refere-se ao caso r -dimensional $\lambda = \{\lambda_\mu\}_{\mu=1, \dots, r}$ cuja arbitrariedade impede tecer maiores conclusões. Assim, por simplicidade, até o final desta seção focaremos nossa análise ao caso uniparamétrico onde $r = 1$ e $\lambda = t$. Isto permitirá traçar uma comparação mais clara entre nosso QSL e aqueles reportados na literatura. Estabelecendo a notação

$$H_\mu^\lambda \rightarrow H_t = -i\hbar U_t \partial_t U_t^\dagger, \quad (5.28)$$

note que a covariância simetrizada se reduz à variância $\langle H_t^2 \rangle - \langle H_t \rangle^2$ do hamiltoniano H_t que rege a dinâmica do sistema. Sob estas condições, a desigualdade em (5.25) se simplifica drasticamente na forma

$$\tau^{-1} \mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) \leq \frac{\overline{\Delta E}}{\hbar}, \quad (5.29)$$

onde

$$\overline{\Delta E} := \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \sqrt{\langle H_t^2 \rangle - \langle H_t \rangle^2} \quad (5.30)$$

é a média temporal da variância do gerador H_t , e obtemos o QSL

$$\tau \geq \frac{\hbar}{\overline{\Delta E}} \mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau). \quad (5.31)$$

Esta expressão coincide exatamente com aquela reportada por Deffner e Lutz (80), além de estender naturalmente os QSLs obtidos por Anandan-Aharonov (AA) (62) e Mandelstam-Tamm (MT) (46) ao caso descrito pela evolução unitária entre dois estados mistos ρ_0 e ρ_τ cuja dinâmica é promovida pelo gerador dependente do tempo H_t . O QSL é inversamente proporcional a $\overline{\Delta E}$, assinatura típica de QSLs análogos a formulação de MT embora o resultado original fornecido por aqueles autores tenha incluído a variância de um gerador independente do tempo. Esta característica reforça novamente o fato de que o QSL depende fortemente do processo físico retratado pela evolução unitária. Note que a evolução entre ρ_0 e ρ_τ será tão mais rápida quão menor o ângulo de Bures relativo a estes estados, ou seja, o tempo de evolução é menor em resposta ao aumento na indistinguibilidade dos estados. Geometricamente, a indistinguibilidade se reflete na proximidade entre ρ_0 e ρ_τ no espaço de estados quânticos e, portanto, é natural esperar que a evolução entre estes estados requer um tempo menor. Como um caso particular, se $H_t = H$ é independente do tempo, então

$$\overline{\Delta E} = \Delta E = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2} \quad (5.32)$$

e a desigualdade na Eq. (5.31) é reescrita na forma

$$\tau \geq \frac{\hbar}{\Delta E} \mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) . \quad (5.33)$$

5.3 Métrica de Wigner-Yanase (WY)

Na formulação de Morozova-Čencov-Petz, a métrica de Wigner-Yanase corresponde à função de MC

$$c_f(x, y) = \frac{4}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} . \quad (5.34)$$

Neste caso, a Eq. (5.17) torna-se

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^{\text{WY}} &= \frac{2}{\hbar^2} \sum_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^d \left(\frac{p_j - p_l}{\sqrt{p_j} + \sqrt{p_l}} \right)^2 \langle j | \Delta H_\mu^\lambda | l \rangle \langle l | \Delta H_\nu^\lambda | j \rangle \\ &= \frac{2}{\hbar^2} \sum_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^d (\sqrt{p_j} - \sqrt{p_l})^2 \langle j | \Delta H_\mu^\lambda | l \rangle \langle l | \Delta H_\nu^\lambda | j \rangle \\ &= \frac{4}{\hbar^2} \sum_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^d (p_j - \sqrt{p_j p_l}) \langle j | \Delta H_\mu^\lambda | l \rangle \langle l | \Delta H_\nu^\lambda | j \rangle . \end{aligned} \quad (5.35)$$

Utilizando a identidade $\sum_{j,l} = 2\sum_{j<l}$ no lado direito da Eq. (5.35), obtemos o resultado

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^{\text{WY}} &= \frac{2}{\hbar^2} \sum_{j,l=1}^d (p_j - \sqrt{p_j p_l}) \langle j | \Delta H_\mu^\lambda | l \rangle \langle l | \Delta H_\nu^\lambda | j \rangle \\ &= \frac{2}{\hbar^2} \mathcal{C}(\Delta H_\mu^\lambda, \Delta H_\nu^\lambda) \end{aligned} \quad (5.36)$$

em que definimos

$$\mathcal{C}(\Delta H_\mu^\lambda, \Delta H_\nu^\lambda) := -\frac{1}{2} \text{Tr} \left([\sqrt{\rho_\lambda}, \Delta H_\mu^\lambda] [\sqrt{\rho_\lambda}, \Delta H_\nu^\lambda] \right). \quad (5.37)$$

Em particular, a função $\mathcal{C}$ se reduz à informação de Wigner-Yanase (200) entre o estado ρ_λ e ΔH_μ^λ para $\mu = \nu$, isto é,

$$\mathcal{C}(\Delta H_\mu^\lambda, \Delta H_\mu^\lambda) := \mathcal{I}(\rho_\lambda, \Delta H_\mu^\lambda) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left([\sqrt{\rho_\lambda}, \Delta H_\mu^\lambda]^2 \right). \quad (5.38)$$

Inserindo a Eq. (5.36) na desigualdade em (4.25), obtemos a expressão

$$\mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau) \leq \frac{\sqrt{2}}{\hbar} \int_0^\tau dt \sqrt{\sum_{\mu,\nu=1}^r \mathcal{C}(\Delta H_\mu^\lambda, \Delta H_\nu^\lambda) \frac{d\lambda_\mu}{dt} \frac{d\lambda_\nu}{dt}}, \quad (5.39)$$

onde

$$\mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau) = \arccos[A(\rho_0, \rho_\tau)] \quad (5.40)$$

é o ângulo de Hellinger, ou seja, a distância geodésica relativa a métrica de Wigner-Yanase, e

$$A(\rho_0, \rho_\tau) := \text{Tr}(\sqrt{\rho_0} \sqrt{\rho_\tau}) \quad (5.41)$$

define a chamada afinidade quântica introduzida no Capítulo 3.

Em analogia a discussão da seção anterior, a solução da Eq. (5.39) fornece o tempo mínimo de evolução entre ρ_0 e ρ_τ no contexto multiparamétrico $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$. Por simplicidade, vamos focar novamente nossa análise ao caso uniparamétrico $r = 1$ em que $\lambda = t$, onde $H_\mu^\lambda \rightarrow H_t = -i\hbar U_t \partial_t U_t^\dagger$ e a função $\mathcal{C}(\bullet, \bullet)$ recobra a informação de Wigner-Yanase $\mathcal{I}(\rho_0, H_t)$ entre o estado ρ_t e o observável H_t que gera a dinâmica do sistema. Sob estas condições, a Eq. (5.39) assume a forma

$$\tau^{-1} \mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau) \leq \frac{\sqrt{2}}{\hbar} \sqrt{\overline{\mathcal{I}}}, \quad (5.42)$$

onde definimos

$$\overline{\mathcal{I}} := \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \sqrt{\mathcal{I}(\rho_t, H_t)} \quad (5.43)$$

como a média temporal da informação de Wigner-Yanase. Rearranjando a desigualdade em (5.42) obtemos a expressão

$$\tau \geq \frac{\hbar}{\sqrt{2} \sqrt{\mathcal{I}}} \mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau) . \quad (5.44)$$

Note que esta desigualdade é função do ângulo de Hellinger $\mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau)$ cujo cálculo é algebricamente mais simples se comparado ao ângulo de Bures. Por outro lado, o tempo mínimo de evolução é inversamente proporcional à média $\sqrt{\mathcal{I}}$, uma característica nova frente aos QSLs cujas raízes remontam ao trabalho original de Mandelstam-Tamm.

De fato, seria possível comparar de forma clara as desigualdades nas Eqs. (5.31) e (5.44) e concluir qual delas é mais *tight*? Na Seção 5.4 promoveremos esta discussão para o caso da dinâmica unitária de um estado misto de um q-bit. Por fim, na Seção 5.5 mostraremos como a análise pode ser generalizada para o caso de estados mistos de N q-bits ou mesmo um q-dit.

5.4 QF e WY: QSL *tighter* no caso de um q-bit

Considere um sistema quântico fechado descrito em $t = 0$ pelo estado misto de um q-bit na representação de Bloch

$$\rho_0 = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{r}_0 \cdot \vec{\sigma}) , \quad (5.45)$$

em que $\vec{r}_0 = r_0 \{\sin \theta_0 \cos \phi_0, \sin \theta_0 \sin \phi_0, \cos \theta_0\}$ é o vetor da esfera de Bloch, com $0 < r_0 < 1$, $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ e $0 \leq \phi_0 < 2\pi$, e $\vec{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ é um vetor cujas componentes são dadas pelas matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (5.46)$$

O estado misto ρ_0 tem traço $\text{Tr}(\rho_0) = 1$ e pureza dada por $\text{Tr}(\rho_0^2) = (1/2)(1 + |\vec{r}_0|^2)$. Além desta representação, o estado inicial também pode ser reescrito em função de sua decomposição espectral, a saber,

$$\rho_0 = \sum_{j=\pm} p_j |\theta_0, \phi_0\rangle_j \langle \theta_0, \phi_0|_j , \quad (5.47)$$

com

$$p_{\pm} = \frac{1 \pm r_0}{2}, \quad |\theta_0, \phi_0\rangle_{\pm} = \frac{1}{N_{\pm}} \left[(\cos \theta_0 \pm 1)|0\rangle + e^{i\phi_0} \sin \theta_0 |1\rangle \right]. \quad (5.48)$$

Observe que $\{|n\rangle\}_{n=0,1}$ são autoestados do operador σ_z , isto é, $\sigma_z|n\rangle = (\delta_{n0} - \delta_{n1})|n\rangle$, e os autoestados $\{|\theta_0, \phi_0\rangle_j\}_{j=\pm}$ do operador densidade ρ_0 definem um conjunto ortonormal completo de estados no espaço de Hilbert. Dado o operador unitário U_t arbitrário, com $U_t U_t^\dagger = U_t^\dagger U_t = \mathbb{I}$, o estado inicial sofre a evolução $U_t \rho_0 U_t^\dagger$ e, após um instante de tempo t , o sistema quântico é representado pelo estado

$$\rho_t = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{r}_t \cdot \vec{\sigma}) \quad (5.49)$$

que, por sua vez, também pode ser escrito em termos da decomposição espectral

$$\rho_t = \sum_{j=\pm} p_j |\theta_t, \phi_t\rangle_j \langle \theta_t, \phi_t|_j, \quad |\theta_t, \phi_t\rangle_{\pm} = U_t |\theta_0, \phi_0\rangle_{\pm}. \quad (5.50)$$

Dada a evolução unitária do estado ρ_t no intervalo $0 \leq t \leq \tau$, desejamos mostrar nesta seção que, para qualquer operador unitário U_t e, portanto, qualquer curva γ conectando ρ_0 e ρ_τ no espaço de estados, o QSL decorrente da métrica de Fisher é mais *tight* que aquele associado à métrica de Wigner-Yanase, ou que o QSL decorrente da métrica de Wigner-Yanase é mais *tight* que aquele associado à métrica de Fisher. Por hipótese, vamos admitir que o primeiro caso seja verdadeiro. Algebricamente, esta condição é formulada através da desigualdade

$$\delta^{\text{QF}} \leq \delta^{\text{WY}}, \quad (5.51)$$

em que δ^f representa a figura de mérito definida na Eq. (4.26) correspondente à métrica Riemanniana contrativa $g_{\mu\nu}^f$ e função $c_f(x, y)$ de MC via o teorema MCP. Observe que se a hipótese é verdadeira, a desigualdade na Eq. (5.51) será satisfeita para qualquer operador unitário U_t e estado inicial ρ_0 de um q-bit. Caso contrário, verificaremos ao final que esta desigualdade é violada. Reescrevendo a desigualdade em termos de ℓ_γ^f e $\mathcal{L}^f$, devemos demonstrar que

$$\frac{\ell_\gamma^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)}{\ell_\gamma^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau)} \leq \frac{\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)}{\mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau)}, \quad (5.52)$$

sendo $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ o comprimento da curva descrita pela evolução unitária de ρ_t no espaço de estados no intervalo $0 \leq t \leq \tau$, e $\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)$ o comprimento da geodésica conectando ambos estados inicial ρ_0 e final ρ_τ da dinâmica.

Para verificar a consistência da desigualdade na Eq. (5.52) devemos calcular explicitamente ℓ_γ^f e $\mathcal{L}^f$ para ambas métricas de Fisher e Wigner-Yanase. Este cálculo, naturalmente, será desenvolvido com a ajuda da decomposição espectral de ρ_t dada na Eq. (5.50). Neste caso, utilizando a Eq. (4.24) no contexto uniparamétrico em que $r = 1$, isto é, $\lambda = t$, o comprimento ℓ_γ^f da curva descrita pela evolução de ρ_t no espaço de estados é dado por

$$\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau) = \int_0^\tau dt \sqrt{\mathcal{F}_t + \mathcal{Q}_t^f}, \quad (5.53)$$

com

$$\mathcal{F}_t = \frac{1}{4} \sum_{j=+,-} \frac{1}{p_j} \left(\frac{dp_j}{dt} \right)^2, \quad \mathcal{Q}_t^f = \frac{1}{2} c_f(p_+, p_-) (p_+ - p_-)^2 \mathcal{A}_{+-} \mathcal{A}_{-+} \quad (5.54)$$

e

$$\mathcal{A}_{jl} = i \langle \theta_t, \phi_t |_j \frac{d}{dt} | \theta_t, \phi_t \rangle_l = i \langle \theta_0, \phi_0 |_j \left(U_t^\dagger \frac{dU_t}{dt} \right) | \theta_0, \phi_0 \rangle_l. \quad (5.55)$$

Conforme discutido na Seção 5.1, a contribuição $\mathcal{F}_t$ associada às populações é identicamente nula já que os autovalores $p_\pm$ são independentes do tempo, isto é, $dp_\pm/dt = 0$. Assim, dado que $p_+ - p_- = r_0$, a Eq. (5.53) é reescrita na forma

$$\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau) = \frac{r_0}{\sqrt{2}} \sqrt{c_f(p_+, p_-)} \int_0^\tau dt \sqrt{\mathcal{A}_{-+} \mathcal{A}_{+-}}, \quad (5.56)$$

em que

$$c_{\text{QF}}(p_+, p_-) = \frac{2}{p_+ + p_-} = 2 \quad (5.57)$$

e

$$c_{\text{WY}}(p_+, p_-) = \frac{4}{(\sqrt{p_+} + \sqrt{p_-})^2} = \frac{4}{1 + \sqrt{1 - r_0^2}} \quad (5.58)$$

definem funções independentes do tempo. Especificando a Eq. (5.56) para as métricas de Fisher e Wigner-Yanase, a razão entre os comprimentos ℓ_γ^{QF} e ℓ_γ^{WY} é dada por

$$\frac{\ell_\gamma^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)}{\ell_\gamma^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau)} = \sqrt{\frac{c_{\text{QF}}(p_+, p_-)}{c_{\text{WY}}(p_+, p_-)}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - r_0^2}}{2}}. \quad (5.59)$$

Por outro lado, através das Eqs. (5.26) e (5.40) a razão entre os comprimentos $\mathcal{L}^{\text{QF}}$ e $\mathcal{L}^{\text{WY}}$ das geodésicas associadas às métricas de Fisher e Wigner-Yanase se escreve

$$\frac{\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)}{\mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau)} = \frac{\arccos \left[\sqrt{F(\rho_0, \rho_\tau)} \right]}{\arccos [A(\rho_0, \rho_\tau)]}. \quad (5.60)$$

Baseados nas Refs. (94, 162, 201), mostramos nas Seções C.5 e C.6 do Apêndice C que as

fórmulas analíticas da fidelidade de Uhlmann-Jozsa $F(\rho_0, \rho_\tau)$ e afinidade quântica $A(\rho_0, \rho_\tau)$ para qualquer par de estados de um q-bit ρ_0 e ρ_τ são dadas por

$$F(\rho_0, \rho_\tau) = \frac{1}{2} \left[1 + \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_\tau + \sqrt{(1 - |\vec{r}_0|^2)(1 - |\vec{r}_\tau|^2)} \right] \quad (5.61)$$

e

$$A(\rho_0, \rho_\tau) = \frac{1}{4} \left[\epsilon_0^+ \epsilon_\tau^+ + \epsilon_0^- \epsilon_\tau^- \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_\tau}{|\vec{r}_0| |\vec{r}_\tau|} \right], \quad (5.62)$$

com

$$\epsilon_a^\pm = \sqrt{1 + |\vec{r}_a|} \pm \sqrt{1 - |\vec{r}_a|}, \quad a = 0, \tau. \quad (5.63)$$

Conforme discutido na Seção 5.1 e indicado explicitamente através das Eqs. (5.10) e (5.50), a evolução unitária não modifica o espectro do estado inicial ρ_0 . Em termos da representação de Bloch do estado de um q-bit, isto significa que o módulo $|\vec{r}_0|$ do raio da esfera de Bloch do estado inicial permanecerá invariante sob a ação da transformação unitária, isto é, $|\vec{r}_0| = |\vec{r}_t|$. Neste caso, escrevemos

$$|\vec{r}_0| = |\vec{r}_\tau| = r_0, \quad \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_\tau = |\vec{r}_0| |\vec{r}_\tau| \cos(\varphi_{0,\tau}) = r_0^2 \cos(\varphi_{0,\tau}) \quad (5.64)$$

em que $\varphi_{0,\tau}$ define o ângulo entre os vetores $\vec{r}_0$ e $\vec{r}_\tau$. Assim, combinando estes vínculos às Eqs. (5.60) e (5.62), obtemos

$$\frac{\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)}{\mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau)} = \frac{\arccos \sqrt{\frac{1}{2}(2 - r_0^2 + r_0^2 \cos(\varphi_{0,\tau}))}}{\arccos \left\{ \frac{1}{2} \left[\cos(\varphi_{0,\tau}) \left(1 - \sqrt{1 - r_0^2} \right) + 1 + \sqrt{1 - r_0^2} \right] \right\}}. \quad (5.65)$$

Finalmente, combinando as Eqs. (5.52), (5.59) e (5.65), dispomos da seguinte desigualdade

$$\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - r_0^2}}{2}} \leq \frac{\arccos \sqrt{\frac{1}{2}(2 - r_0^2 + r_0^2 \cos(\varphi_{0,\tau}))}}{\arccos \left\{ \frac{1}{2} \left[\cos(\varphi_{0,\tau}) \left(1 - \sqrt{1 - r_0^2} \right) + 1 + \sqrt{1 - r_0^2} \right] \right\}}. \quad (5.66)$$

A Fig. 5.1 indica a diferença entre os lados direito e esquerdo da desigualdade na Eq. (5.66) em função da pureza $r_0 \in [0, 1[$ e do ângulo relativo $\varphi_{0,\tau} \in]0, \pi]$. Note que esta diferença é sempre não-negativa, ou seja, a desigualdade mencionada é sempre satisfeita. Em particular, a diferença é nula quando $r_0 = 0$ ou ainda $\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_\tau = r_0^2$, isto é, no limite² em

²Veja Eq. (5.64).

Figura 5.1 – Diferença entre os lados direito e esquerdo da desigualdade na Eq. (5.66) em função da pureza r_0 e do ângulo relativo $\varphi_{0,\tau}$.

Fonte: Adaptada de PIRES et al. (140)

que $\varphi_{0,\tau} = 0$, o que pode ser provado imediatamente verificando que

$$\lim_{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_\tau \rightarrow r_0^2} \frac{\arccos \sqrt{\frac{1}{2}(2 - r_0^2 + \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_\tau)}}{\arccos \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_\tau}{r_0^2} \left(1 - \sqrt{1 - r_0^2} \right) + 1 + \sqrt{1 - r_0^2} \right] \right\}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - r_0^2}}{2}}. \quad (5.67)$$

Assim, dada a dinâmica unitária de um estado misto de um q-bit, a métrica de Fisher fornece um limite inferior ao tempo de evolução mais *tight* se comparado ao QSL associado à métrica de Wigner-Yanase. Esta conclusão abre caminho a seguinte pergunta: a partir da hierarquia $f_{\min}(u) \leq f(u) \leq f_{\max}(u)$ entre as funções de MC que logicamente se reflete no ordenamento das funções $c_f(x, y)$ via Eq. (3.4), seria possível concluir que na dinâmica unitária a informação de Fisher implica o QSL mais *tight* dentre todas as métricas Riemannianas contrativas no espaço de estados? Em outras palavras, a função $c_{\text{QF}}(x, y)$ de MC atribui a métrica que resolve o problema de minimização indicado na Eq. (4.27) para evoluções unitárias? Embora os cálculos desta seção corroborem intuitivamente em favor da resposta positiva, esta conjectura ainda carece de demonstração que permita comprová-la ou falseá-la rigorosamente.

Observe que a Eq. (5.59) pode ser generalizada de forma a incluir qualquer par de

métricas Riemannianas contrativas, por exemplo, $\mathbf{g}^f$ e $\mathbf{g}^h$, a saber,

$$\frac{\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)}{\ell_\gamma^h(\rho_0, \rho_\tau)} = \sqrt{\frac{c^f(p_1, p_2)}{c^h(p_1, p_2)}}. \quad (5.68)$$

Entretanto, esta discussão se restringe novamente ao caso de famílias de evoluções unitárias de estados mistos de um q-bit. De fato, esta análise é bem mais complexa se o espaço de Hilbert associado ao sistema quântico tem dimensão $d = \dim \mathcal{H} > 2$. Em linhas gerais, via Eq. (4.21) percebe-se neste caso que o termo $\mathcal{Q}_t^f$ incluirá somas não-triviais que acoplam o conjunto de autovalores $\{p_j\}_{j=1,\dots,d}$ e funções $c_f(p_j, p_l)$ de MC, ambos independentes do tempo, às conexões $\mathcal{A}_{jl} \equiv \mathcal{A}_{jl}(t)$ dependentes do tempo. Deste modo, os coeficientes $c_f(p_j, p_l)$ não poderão ser extraídos da integral na variável t como indicado na Eq. (5.56). Além disso, a extensão da Eq. (5.65) à outras métricas Riemannianas contrativas não é imediata pois desconhecemos as expressões analíticas relacionadas aos comprimentos das curvas geodésicas associadas a cada métrica.

5.5 QF e WY: QSL *tighter* no caso geral

Agora vamos tentar estender a conclusão da Seção 5.4 ao caso $d = \dim \mathcal{H} = N$, com $N \geq 2$. Entretanto, vale destacar que aqui seguiremos uma abordagem diferente daquela apresentada previamente. Em linhas gerais, ao invés de recorrer ao vínculo $\delta^{\text{QF}} \leq \delta^{\text{WY}}$ entre os erros relativos e desenvolver cálculos explícitos que dependam da decomposição espectral do estado evoluído ρ_t de N q-bits, agora buscaremos relacionar diretamente as Eqs. (5.31) e (5.44) por meio de desigualdades algébricas envolvendo as médias $\sqrt{\mathcal{I}}$ e $\overline{\Delta E}$ e os ângulos de Bures e Hellinger.

Luo e Zhang (175) mostraram que a afinidade quântica é sempre limitada superiormente pela raiz quadrada da fidelidade de Uhlmann-Jozsa³,

$$A(\rho_0, \rho_\tau) \leq \sqrt{F(\rho_0, \rho_\tau)}. \quad (5.69)$$

Como caso particular, observe que esta desigualdade é saturada, isto é, $A(\rho_0, \rho_\tau) = \sqrt{F(\rho_0, \rho_\tau)}$, se os operadores ρ_0 e ρ_τ comutam entre si, o que implica neste caso que os

³Consulte a Seção 3.3.1 do Capítulo 3 para maiores detalhes. A Ref. (175) segue uma definição da fidelidade de Uhlmann-Jozsa na qual $\tilde{F}(\rho_0, \rho_\tau) = \text{Tr} \left[\sqrt{\sqrt{\rho_0} \rho_\tau \sqrt{\rho_0}} \right]$. Neste caso, a desigualdade na Eq. (5.69) se reescreve $A(\rho_0, \rho_\tau) \leq \tilde{F}(\rho_0, \rho_\tau)$.

ângulos de Bures e Hellinger são iguais. De maneira geral, dado que $\arccos x \geq \arccos y$ para $x \leq y$, com $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$, então é possível concluir

$$\mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau) \geq \mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) \quad (5.70)$$

já que

$$\arccos [A(\rho_0, \rho_\tau)] \geq \arccos \left[\sqrt{F(\rho_0, \rho_\tau)} \right] . \quad (5.71)$$

Por outro lado, Luo (171) verificou que $\mathcal{I}(\rho_t, H_t)$ representa um limite inferior para a variância do gerador H_t da dinâmica, isto é,

$$\mathcal{I}(\rho_t, H_t) \leq \langle H_t^2 \rangle - \langle H_t \rangle^2 \quad (5.72)$$

em que ρ_t é um estado misto, com $\mathcal{I}(\rho_t, H_t) \geq 0$ e $\langle H_t^2 \rangle - \langle H_t \rangle^2 \geq 0$. Em especial, esta desigualdade é saturada quando ρ_t é um estado puro. Voltando ao caso geral, note que é possível escrever $\sqrt{\mathcal{I}(\rho_t, H_t)} \leq \sqrt{\langle H_t^2 \rangle - \langle H_t \rangle^2}$ se escolhermos o ramo positivo de cada raiz quadrada em ambos lados da desigualdade. Por fim, integrando esta relação na variável t no intervalo $0 \leq t \leq \tau$, obtemos

$$\overline{\sqrt{\mathcal{I}}} \leq \overline{\Delta E} \quad (5.73)$$

com $\overline{\sqrt{\mathcal{I}}}$ e $\overline{\Delta E}$ definidos, respectivamente, nas Eqs. (5.30) e (5.43).

Finalmente, combinando as Eqs. (5.70) e (5.73), estabelecemos a seguinte hierarquia entre os QSLs decorrentes das métricas de Fisher e Wigner-Yanase

$$\frac{\hbar}{\overline{\sqrt{\mathcal{I}}}} \mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau) \geq \frac{\hbar}{\overline{\Delta E}} \mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) . \quad (5.74)$$

A Eq. (5.74) indica que a métrica de Fisher fornece o QSL mais *tight* do que aquele associado à métrica de Wigner-Yanase no caso geral de um estado de N q-bits. Além disso, relembrando do resultado indicado na Eq. (5.44), percebemos que ambos QSLs diferem entre si por um fator $1/\sqrt{2}$, a saber,

$$\tau \geq \frac{\hbar}{\sqrt{2} \overline{\sqrt{\mathcal{I}}}} \mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau) \geq \frac{\hbar}{\sqrt{2} \overline{\Delta E}} \mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) . \quad (5.75)$$

É importante ressaltar que uma análise similar a esta foi recentemente reportada por Mondal et al. (99) Neste artigo os autores investigam o papel desempenhado pelas coerências no QSL referente a evolução unitária de um estado quântico misto via uma generalização adequada da métrica de Fubini-Study neste cenário.

Capítulo 6

QSL na dinâmica não-unitária

Neste capítulo nos restringiremos a exemplos de processos físicos não-unitários na tentativa de ilustrar como a escolha da medida geométrica de distinguibilidade no espaço de estados quânticos influencia o limite quântico de velocidade. Ao final, mostraremos também como a liberdade nesta escolha pode fornecer limites mais precisos. Na Seção 6.1 motivamos o uso de canais quânticos na descrição de sistemas quânticos abertos e discutimos a ação de um canal arbitrário no estado de um q-bit. Nas Seções 6.2 e 6.3 apresentamos nossos resultados para o QSL relativo aos canais de atenuação de fase e amplitude, respectivamente. Buscando uma concatenação clara das idéias, separamos em ambas seções a análise do QSL para as métricas de Fisher, Wigner-Yanase e média harmônica (métrica mínima) e ao final concluímos a discussão com um estudo comparativo entre cada umas destas quantidades.

6.1 Dinâmica não-unitária: breve digressão

Embora a ideia de sistemas quânticos fechados ofereça um leque de possibilidades na análise de alguns processos físicos, sua concepção retrata um visão idealizada do que acontece na prática. Um sistema físico realístico está inevitavelmente sujeito a ação do ambiente, ou seja, de outros sistemas físicos que o cerca, e sua interpretação requer uma mudança de paradigma da descrição unitária em favor de uma dinâmica não-unitária. O acoplamento do sistema quântico de interesse aos graus de liberdade do ambiente desencadeia um fenômeno conhecido como decoerência, isto é, a perda de coerência

quântica. (202) Este efeito está ligado, por exemplo, à ineficiência de tecnologias quânticas no processamento de informação (1) e também pela emergência da natureza clássica em sistemas quânticos. (203)

Como então descrever de modo eficiente a dinâmica de um sistema quântico aberto caracterizado por um sistema principal S que interage com os graus de liberdade do ambiente E ? A abordagem tradicional baseia-se no uso de equações mestras em que a evolução é dada pela solução de uma equação de movimento para a matriz densidade reduzida relativa ao sistema S . Baseada em um conjunto de hipóteses acerca da natureza da interação sistema-ambiente, esta técnica inaugurou uma vertente teórica pioneira na compreensão do fenômeno de decoerência em sistemas quânticos abertos. (204) A ciência da informação quântica introduziu novos conceitos e ferramentas matemáticas que permitiram analisar esta questão sob uma perspectiva um pouco diferente. Exemplos incluem a dinâmica de semigrupos, equações diferenciais estocásticas e canais quânticos¹. No que segue, promoveremos um breve apanhado dos conceitos centrais envolvendo equações mestras e canais quânticos que serão úteis posteriormente à análise do *quantum speed limit* na dinâmica não-unitária.

6.1.1 Equações mestras

Seja o sistema S e o ambiente E definidos, respectivamente, em termos dos espaços de Hilbert $\mathcal{H}_S$ e $\mathcal{H}_E$. Estaremos interessados no caso em que estes espaços vetoriais têm dimensão finita $d_S = \dim \mathcal{H}_S$ e $d_E = \dim \mathcal{H}_E$, respectivamente, sendo $\{|j\rangle_E\}_{j=1,\dots,d_E}$ uma base de estados fixa em $\mathcal{H}_E$. A motivação para tomar d_E finita está baseada no argumento de que se o estado inicial do ambiente é puro, então é suficiente adotar um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_E$ com dimensão $d_E \leq d_S^2$, onde d_S^2 é o número máximo de operadores de Kraus necessários à caracterização da dinâmica do sistema S . (1, 108) O espaço de Hilbert do sistema quântico total $S + E$ é dado pelo produto tensorial $\mathcal{H}_{SE} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ e tem dimensão finita $d_{SE} = d_S d_E$.

Por simplicidade, consideraremos que o ambiente E seja inicialmente descrito pelo estado puro $\rho_0^E = |j_0\rangle_E \langle j_0|_E$, enquanto o estado inicial do sistema S é dado pelo estado

¹Canais quânticos são também conhecidos como mapas estocásticos ou operações quânticas. O leitor pode encontrar maiores detalhes do assunto nas Refs. (1, 205) e na Seção A.4 do Apêndice A.

misto ρ_0 . Além disso, S e E são por hipótese inicialmente descorrelacionados, isto é, o estado inicial do sistema global S + E é dado pelo produto

$$\rho_0^{\text{SE}} = \rho_0 \otimes |j_0\rangle_{\text{E}} \langle j_0|_{\text{E}} . \quad (6.1)$$

A composição S + E define um sistema quântico fechado e, portanto, tem sua evolução unitária governada pela transformação

$$\rho_{\lambda}^{\text{SE}} = U_{\lambda}^{\text{SE}} \rho_0^{\text{SE}} U_{\lambda}^{\text{SE}\dagger} = U_{\lambda}^{\text{SE}} (\rho_0 \otimes |j_0\rangle_{\text{E}} \langle j_0|_{\text{E}}) U_{\lambda}^{\text{SE}\dagger} , \quad (6.2)$$

em que U_{λ}^{SE} é um operador unitário satisfazendo as relações

$$U_{\lambda}^{\text{SE}} U_{\lambda}^{\text{SE}\dagger} = U_{\lambda}^{\text{SE}\dagger} U_{\lambda}^{\text{SE}} = \mathbb{I}_{\text{SE}} \quad (6.3)$$

e $\mathbb{I}_{\text{SE}}$ é a matriz identidade de dimensão $d_{\text{SE}} \times d_{\text{SE}}$ no espaço $\mathcal{H}_{\text{SE}}$. A transformação unitária codifica o conjunto de parâmetros $\lambda = \{\lambda_{\mu}\}_{\mu=1,\dots,r}$ no estado inicial do sistema. Por hipótese, cada parâmetro deste conjunto é função do tempo t , isto é, $\lambda_{\mu} \equiv \lambda_{\mu}(t)$. A partir da Eq. (6.2), o estado ρ_{λ} do sistema S pode ser obtido traçando parcialmente $\rho_{\lambda}^{\text{SE}}$ sobre os graus de liberdade do ambiente, a saber,

$$\rho_{\lambda} = \text{Tr}_{\text{E}} \left[U_{\lambda}^{\text{SE}} (\rho_0 \otimes |j_0\rangle_{\text{E}} \langle j_0|_{\text{E}}) U_{\lambda}^{\text{SE}\dagger} \right] . \quad (6.4)$$

O operador densidade ρ_{λ} é positivo semi-definido, isto é, $\rho_{\lambda} \geq 0$, e tem traço $\text{Tr}(\rho_{\lambda}) = 1$ em qualquer configuração do conjunto de parâmetros λ dependente do tempo. Por sua vez, este estado satisfaz a equação de von Neumann

$$\frac{d}{dt} \rho_{\lambda} = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_{\text{E}} \left([H_{\lambda}^{\text{SE}}, \rho_{\lambda}^{\text{SE}}] \right) , \quad (6.5)$$

em que definimos

$$H_{\lambda}^{\text{SE}} := -i\hbar U_{\lambda}^{\text{SE}} \left(\frac{d}{dt} U_{\lambda}^{\text{SE}\dagger} \right) . \quad (6.6)$$

A derivação da equação mestra que governa a dinâmica do sistema reduzido S pode ser obtida por meio da formulação de Gorini, Kossakowski, Sudarshan e Lindblad. (204,206,207) Neste caso, suponha que a transformação que descreve a evolução do sistema reduzido na Eq. (6.4) seja determinada de maneira equivalente pela ação do gerador de semigrupo dinâmico $\Phi_t = e^{tL}$, com $\Phi_t \in \mathcal{H}_{\text{S}}$, conforme indicado a seguir

$$\rho_{\lambda} = \Phi_t \rho_0 , \quad \text{Tr}(\rho_{\lambda}) = \text{Tr}(\Phi_t \rho_0) = 1 , \quad \rho_{\lambda} \geq 0 . \quad (6.7)$$

A representação de Φ_t por meio do mapa exponencial implica as condições $\Phi_0 = \mathbb{I}_S$ e $\Phi_s \Phi_t = \Phi_{s+t}$. Além disso, o gerador Φ_t é completamente positivo, isto é, a composição deste mapa com a identidade $\mathbb{I}_E$ define um operador $(\Phi_t \otimes \mathbb{I}_E)[\bullet] \geq 0$ positivo semi-definido. Neste caso, é possível mostrar que a equação mestra que caracteriza a evolução do estado ρ_λ é dada por (206, 207)

$$\frac{d}{dt}\rho_\lambda = L(\rho_\lambda) := \mathcal{H}(\rho_\lambda) + \mathcal{L}(\rho_\lambda) , \quad (6.8)$$

em que

$$\mathcal{H}(\bullet) = -\frac{i}{\hbar} [H, \bullet] \quad (6.9)$$

descreve a evolução unitária regida pelo hamiltoniano H do sistema e $\mathcal{L}(\bullet)$ define chamado super-operador de Liouville responsável pela parte dissipativa da dinâmica induzida pelo ambiente. Gorini, Kossakowski e Sudarshan (208) e, posteriormente, Lindblad (209), demonstraram que o super-operador de Liouville possui a estrutura

$$\mathcal{L}(\bullet) = \sum_{j=1}^{d_S^2-1} \gamma_j \left(A_j \bullet A_j^\dagger - \frac{1}{2} A_j^\dagger A_j \bullet - \frac{1}{2} \bullet A_j^\dagger A_j \right) , \quad (6.10)$$

em que $\gamma_j \geq 0$ são as taxas de decaimento envolvidas no mecanismo de decoerência, d_S é a dimensão do espaço de Hilbert do sistema S e A_j definem os operadores de Lindblad. Por hipótese, o super-operador de Liouville é independente do tempo, ou seja, a Eq. (6.8) representa uma equação mestra Markoviana. Neste caso, a informação transferida do sistema S ao ambiente E é rapidamente distribuída entre seus graus de liberdade internos e, portanto, não retorna ao sistema. (210) Entretanto, em certas situações uma parcela desta informação pode fluir novamente ao sistema, geralmente incluindo efeitos das correlações do ambiente. (211) Este regime é responsável pela emergência de uma dinâmica não-Markoviana na qual o super-operador de Liouville é dependente do tempo. (212)

A equação mestra na Eq. (6.8) também pode ser obtida através da teoria de perturbação usual. Neste caso, a idéia consiste em partir da Eq. (6.5) e considerar o hamiltoniano $H_\lambda^{\text{SE}} = H^S \otimes \mathbb{I}_E + \mathbb{I}_S \otimes H^E + \alpha V_\lambda^{\text{SE}}$ sob a aproximação de Born em que o parâmetro adimensional α é tomado muito pequeno sob alguma escala de comparação, ou seja, o acoplamento entre sistema S e ambiente E é dito fraco. Assim, a equação mestra na Eq. (6.8) é obtida através de um processo de iteração perturbativo até segunda ordem de aproximação em α . Além disso, a derivação microscópica da equação mestra parte da

hipótese de que excitações no ambiente devido a interação com o sistema decaem numa escala de tempo desprezível se comparada àquela que caracteriza a evolução do próprio sistema aberto. (206, 207) Esta condição, conhecida como aproximação de Markov, se traduz na desigualdade $\tau_E \leq \tau_S$, em que τ_E é a escala de tempo de decaimento das funções de correlação do ambiente E e τ_S é o tempo de relaxação do sistema. A forma de Lindblad da equação mestra também leva em conta a chamada aproximação de onda girante. Neste caso, termos não-seculares na derivação microscópica são desprezados já que oscilam rapidamente na escala de tempo τ_S em que o estado do sistema varia apreciavelmente.

6.1.2 Canais quânticos e mapas CPTP

Em termos algébricos, um canal quântico é definido por um mapa linear $\mathcal{E}_\lambda(\bullet)$ completamente positivo que preserva traço (CPTP)² e aqui codifica o conjunto de parâmetros $\lambda = \{\lambda_\mu\}_{\mu=1,\dots,r}$ no estado inicial do sistema. Este formalismo captura a essência da evolução do sistema S em resposta a algum processo físico independentemente do conhecimento de aspectos particulares do ambiente E. Conforme mostraremos abaixo, a caracterização completa da dinâmica em S dependerá exclusivamente de um conjunto de operadores não-hermitianos conhecidos como operadores de Kraus.

Em face da evolução unitária do sistema total S + E, a dinâmica em S é obtida tomando o traço parcial sobre os graus de liberdade do ambiente E nesta expressão, a saber

$$\rho_\lambda = \mathcal{E}_\lambda(\rho_0) = \text{Tr}_E \left[U_\lambda^{\text{SE}} (\rho_0 \otimes |j_0\rangle_E \langle j_0|_E) U_\lambda^{\text{SE}\dagger} \right] = \sum_{j=1}^{d_E} K_j^\lambda \rho_0 K_j^{\lambda\dagger}, \quad (6.11)$$

em que

$$K_j^\lambda := \langle j|_E U_\lambda^{\text{SE}} |j_0\rangle_E \quad (6.12)$$

define o conjunto de operadores de Kraus atuando em $\mathcal{H}_S$. Estes operadores satisfazem a relação de completude

$$\sum_{j=1}^{d_E} K_j^{\lambda\dagger} K_j^\lambda = \sum_{j=1}^{d_E} \langle j|_E U_\lambda^{\text{SE}} |j_0\rangle_E \langle j_0|_E U_\lambda^{\text{SE}\dagger} |j\rangle_E = \langle j_0|_E U_\lambda^{\text{SE}\dagger} U_\lambda^{\text{SE}} |j_0\rangle_E = \mathbb{I}_S, \quad (6.13)$$

em que $\mathbb{I}_S$ é a matriz identidade de dimensão $d_S \times d_S$ no espaço $\mathcal{H}_S$. A última expressão

²CPTP, do inglês *Completely Positive and Trace Preserving*. Consulte a Seção A.4 do Apêndice A para maiores detalhes.

no lado direito da Eq. (6.11) é conhecida como representação operador-soma (OSR)³ de um mapa CPTP ou forma de Stinespring. (108)

A representação operador-soma não determina os operadores K_j^λ de maneira unívoca, isto é, um dado canal quântico pode ser eventualmente descrito por diferentes conjuntos de operadores de Kraus. (108, 205) Esta propriedade é conhecida como liberdade unitária na representação operador-soma já que dois conjuntos distintos de operadores de Kraus ligados por uma dada transformação unitária originam a mesma OSR. Este é o caso, por exemplo, dos canais quânticos de atenuação de fase e inversão de fase. A descrição da dinâmica não-unitária via mapas CPTPs também pode ser obtida por meio da equação mestra na Eq. (6.8) utilizando os resultados de Andersson, Cresser e Hall. (213) Recomendamos ao leitor a Seção E.1 do Apêndice E em que discutimos de forma sucinta esta técnica.

Canais quânticos e estados de um q-bit

Em particular, a partir de agora estaremos interessados na evolução de estados de um único q-bit na representação de Bloch escolhendo $d_S = \dim \mathcal{H}_S = 2$. Neste caso, seja o estado inicial misto

$$\rho_0 = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{r}_0 \cdot \vec{\sigma}) \quad (6.14)$$

em que $\vec{r}_0 = r_0\{\sin \theta_0 \cos \phi_0, \sin \theta_0 \sin \phi_0, \cos \theta_0\}$ é o vetor da esfera de Bloch, com $r_0 \in]0, 1[$, $\theta_0 \in [0, \pi]$ e $\phi_0 \in [0, 2\pi[$, enquanto $\mathbb{I}$ é a matriz identidade de dimensão 2×2 e $\vec{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ é um vetor cujas componentes são dadas pelas matrizes de Pauli

$$\sigma_0 := \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Por hipótese, este estado evolui sob a ação do canal quântico

$$\mathcal{E}_\lambda(\bullet) = \sum_{j=0}^1 K_j^\lambda \bullet K_j^{\lambda\dagger}, \quad (6.16)$$

em que $\{K_j\}_{j=0,1}$ define o conjunto de operadores de Kraus. Por sua vez, no regime em que $d_S = \dim \mathcal{H}_S = 2$, é possível mostrar (1) que estes operadores se escrevem em termos de uma combinação linear das matrizes de Pauli dadas na Eq. (6.15), a saber,

$$K_j^\lambda = \sum_{l=0}^3 a_{jl}^\lambda \sigma_l \quad \text{com} \quad a_{jl}^\lambda = \frac{1}{2} \text{Tr}(K_j^\lambda \sigma_l). \quad (6.17)$$

³OSR, do inglês *Operator Sum Representation*.

Através desta representação é possível verificar que todo canal binário é um mapa afim, ou seja, mapeia a esfera de Bloch sobre si mesma, tal que o estado evoluído ρ_λ difere do estado inicial através do novo vetor $\vec{r}_\lambda$ que é caracterizado pela evolução não-unitária

$$\rho_\lambda = \mathcal{E}_\lambda(\rho_0) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{r}_\lambda \cdot \vec{\sigma}) , \quad (6.18)$$

em que

$$\vec{r}_\lambda = \eta_\lambda \vec{r}_0 + \vec{\kappa}_\lambda . \quad (6.19)$$

Na Eq. (6.19) o termo η define uma matriz real de dimensão 3×3 com elementos

$$(\eta_\lambda)_{jl} = \frac{1}{2} \text{Tr}[\mathcal{E}_\lambda(\sigma_j) \sigma_l] \quad (6.20)$$

e $\vec{\kappa}_\lambda$ é um vetor de translação tridimensional com⁴

$$(\vec{\kappa}_\lambda)_j = 2i \sum_{s=1}^2 \sum_{p,r=1}^3 \epsilon_{rpl} a_{sr}^\lambda a_{sp}^{\lambda*} = \frac{1}{2} \text{Tr}[\mathcal{E}_\lambda(\mathbb{I}) \sigma_j] . \quad (6.21)$$

Repare que se o canal quântico é unital, isto é, $\mathcal{E}_\lambda(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$, então $(\vec{\kappa}_\lambda)_j = 0$ e o vetor de translação é identicamente nulo.

Nas próximas seções vamos analisar o QSL relativo aos processos físicos não-unitários de atenuação de fase e atenuação de amplitude por meio das Eqs. (4.25) e (4.24). Em especial, nos restringiremos ao caso em que o conjunto λ tem como único parâmetro ($r = 1$) o tempo t envolvido na dinâmica do operador densidade, ou seja, $\lambda = t$. É importante mencionar ainda que grande parte de nosso desafio consistirá no cálculo do comprimento $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ da curva γ descrita pela evolução do estado ρ_t no espaço de estados, com $0 \leq t \leq \tau$.

6.2 Atenuação de fase

O canal de atenuação de fase descreve processos quânticos sujeitos a efeitos de decoerência sem que ocorra dissipação de energia no sistema físico. Além disso, pode ter um vínculo estreito com a supressão da interferência quântica a nível macroscópico devido à perda da superposição coerente promovida pelo processo de decoerência. (205) O mecanismo de atenuação de fase pode ser visualizado, por exemplo, através do espalhamento elástico de fótons por centros atômicos ou da interação perturbativa entre estados eletrônicos e

⁴Para maiores detalhes, consulte o Apêndice D.

cargas elétricas distantes. (1)

Como no processo de atenuação de fase o sistema quântico sofre perda de coerência quântica sem que ocorra dissipação de energia, as populações do estado do sistema permanecem intactas enquanto as coerências são gradualmente suprimidas durante a evolução temporal. Em geral, este efeito pode ser modelado por meio do reservatório de fase no qual os operadores de Lindblad na Eq. (6.10) são escolhidos tais que $A_j = \sigma_j$ e $\gamma_j = \Gamma\alpha_j/2$. Neste caso, a equação mestra que governa a evolução do sistema de dois níveis é dada por

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{H}(\rho_t) + \mathcal{L}(\rho_t) \quad (6.22)$$

em que

$$\mathcal{H}(\rho_t) = -i\frac{\omega_0}{2}[\sigma_3, \rho_t] \quad (6.23)$$

descreve a evolução unitária regida pelo hamiltoniano $H = (\omega_0/2)\sigma_3$ e

$$\mathcal{L}(\rho_t) = -\frac{\Gamma}{2} \left(\rho_t - \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sigma_j \rho_t \sigma_j \right) \quad (6.24)$$

representa o super-operador de Liouville, com $\alpha_j \geq 0 \ \forall j = (1, 2, 3)$ e

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j = 1. \quad (6.25)$$

A partir do vínculo entre os coeficientes α_j na Eq. (6.25), a equação mestra inclui diferentes regimes da ação do ruído na evolução do q-bit. Em cada modalidade, a base de estados que caracteriza o ambiente apresenta um comportamento particular em relação àquela $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ relativa ao sistema de dois níveis cujo hamiltoniano descreve a evolução unitária. (214, 215) Na chamada atenuação de fase paralela, isto é, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 1$, a base do reservatório de fase é $\{|0\rangle_E, |1\rangle_E\}$. No caso $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ (similarmente, $\alpha_2 = 1$ e $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$) correspondente à atenuação de fase perpendicular, o ruído de fase tem a base $\{|+\rangle_E, |-\rangle_E\}$, com $|\pm\rangle_E = (1/\sqrt{2})(|0\rangle_E \pm |1\rangle_E)$.

A dinâmica do q-bit também pode ser descrita pela ação de um canal quântico. Em especial, através da técnica desenvolvida por Andersson, Cresser e Hall (213), a evolução do sistema quântico governada pela equação mestra na Eq. (6.22) pode ser representada

por meio de um mapa CPTP⁵. Neste caso,

$$\mathcal{E}_t(\bullet) = \frac{1}{2} \sum_{j,l=0}^3 S_{jl}(t) \sigma_j \bullet \sigma_l, \quad (6.26)$$

em que S define uma matriz hermiteana de dimensão 4×4 cujos elementos $S_{jl}(t)$ não-nulos são dados por

$$S_{00}(t) = a_t + b_t, \quad S_{33}(t) = a_t - b_t, \quad S_{03}(t) = 2i\beta c_t, \quad S_{30}(t) = -2i\beta c_t, \quad (6.27)$$

$$S_{11}(t) = 1 - a_t + (\alpha_1 - \alpha_2)c_t, \quad S_{22}(t) = 1 - a_t - (\alpha_1 - \alpha_2)c_t, \quad (6.28)$$

com

$$\beta = \frac{\omega_0}{\Gamma}, \quad \sum_{j=0}^3 S_{jj}(t) = 2 \quad (6.29)$$

e

$$a_t = \frac{1}{2} \left(1 + e^{\Gamma t(\alpha_1 + \alpha_2)} \right) e^{-\Gamma t(1 - \alpha_3)}, \quad (6.30)$$

$$b_t = e^{-\frac{\Gamma t}{2}(1 + \alpha_3)} \cosh \left(\frac{\Gamma t}{2} \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - 4\beta^2} \right), \quad (6.31)$$

$$c_t = \frac{e^{-\frac{\Gamma t}{2}(1 + \alpha_3)}}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - 4\beta^2}} \sinh \left(\frac{\Gamma t}{2} \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - 4\beta^2} \right). \quad (6.32)$$

Analisando a estrutura dos elementos de matriz $S_{jl}(t)$ nas Eqs. (6.27) e (6.28), é possível verificar que $S_{jl}(t) = \delta_{jl}S_{jj}(t) + (\delta_{j0}\delta_{l3} - \delta_{j3}\delta_{l0})S_{03}(t)$. Neste caso, o mapa não-unitário na Eq. (6.26) assume a forma

$$\mathcal{E}_t(\bullet) = \frac{1}{2} \left(S_{03}(t)[\bullet, \sigma_3] + \sum_{j=0}^3 S_{jj}(t) \sigma_j \bullet \sigma_j \right). \quad (6.33)$$

Através desta expressão concluímos que $\mathcal{E}_t(\bullet)$ é unital, isto é, o estado maximamente misturado permanece invariante sob a ação desse mapa CPTP. Isto porque utilizando que $[\mathbb{I}, \sigma_3] = 0$, $\sigma_j^2 = \mathbb{I}$ e também o vínculo $\sum_{j=0}^3 S_{jj}(t) = 2$ dado na Eq. (6.29), então segue que $\mathcal{E}_t(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$. Em geral, observe que estados incoerentes na base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ permanecem invariantes sob esta operação quântica, ou seja, dado $\varrho = \sum_{s=0,1} c_s |s\rangle\langle s|$, com $0 \leq c_s \leq 1$, segue que $\mathcal{E}_t(\varrho) = \varrho$.

Nas subseções seguintes discutiremos em detalhes o cálculo do *quantum speed limit*

⁵Na Seção E.1 do Apêndice E apresentamos a prova desta afirmação seguindo os mesmos passos da Ref. (213). Além disso, na Subseção E.1.1 discutimos o processo de atenuação de fase como um exemplo prático da técnica.

relativo aos canais de atenuação de fase paralela e perpendicular. Em cada caso, buscaremos identificar a função de Morozova-Čencov que atribui o QSL mais *tight* em resposta ao processo de decoerência induzido pela evolução não-unitária de um estado misto de um q-bit.

6.2.1 Atenuação de fase paralela

A partir da equação mestra na Eq. (6.22), o mecanismo de atenuação de fase paralela corresponde ao regime $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 1$. Assim,

$$S_{00}(t) = 1 + b_t, \quad S_{33}(t) = 1 - b_t, \quad S_{03}(t) = S_{30}^*(t) = 2i\beta c_t, \quad S_{11}(t) = S_{22}(t) = 0, \quad (6.34)$$

com

$$b_t = e^{-\Gamma t} \cos(\omega_0 t), \quad c_t = \frac{e^{-\Gamma t}}{2\beta} \sin(\omega_0 t). \quad (6.35)$$

Neste caso, é possível mostrar que o canal de atenuação de fase dado na Eq. (6.26) pode ser descrito em termos da representação de operador-soma⁶

$$\mathcal{E}_t(\bullet) = \sum_{j=0}^1 K_j \bullet K_j^\dagger \quad (6.36)$$

em que $\{K_j\}_{j=0,1}$ são os operadores de Kraus

$$K_0 = \sqrt{q_+} \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_0 t/2} \end{pmatrix}, \quad K_1 = \sqrt{q_-} \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t/2} & 0 \\ 0 & -e^{i\omega_0 t/2} \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

com

$$\sum_{j=0}^1 K_j^\dagger K_j = \sum_{j=0}^1 K_j K_j^\dagger = \mathbb{I} \quad (6.38)$$

e

$$q_{\pm} = \frac{1 \pm q_t}{2}, \quad q_t = e^{-\Gamma t}, \quad q_+ + q_- = 1. \quad (6.39)$$

O parâmetro q_t define a taxa de decoerência e Γ é a taxa de atenuação de fase. Além disso, existe uma matriz unitária que conecta os operadores de Kraus na Eq. (6.37) àqueles que caracterizam o canal de inversão de fase, ou seja, ambas operações quânticas fornecem a mesma OSR. (1)

⁶O leitor interessado pode consultar a Seção E.2 do Apêndice E para maiores detalhes acerca desta afirmação.

Considerando o estado inicial $\rho_0 = (1/2)(\mathbb{I} + \vec{r}_0 \cdot \vec{\sigma})$, o estado evoluído decorrente da ação deste canal é dado por

$$\rho_t = \mathcal{E}_t(\rho_0) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{r}_t \cdot \vec{\sigma}) \quad (6.40)$$

em que

$$\vec{r}_t = \eta \vec{r}_0 + \kappa_t, \quad (6.41)$$

com η sendo uma matriz de dimensão 3×3 cujos elementos são dados por

$$\eta_{11} = \eta_{22} = q_t \cos(\omega_0 t), \quad \eta_{21} = -\eta_{12} = q_t \sin(\omega_0 t), \quad \eta_{33} = 1, \quad (6.42)$$

$$\eta_{13} = \eta_{31} = 0, \quad \eta_{23} = \eta_{32} = 0 \quad \text{e} \quad \kappa_t = 0. \quad (6.43)$$

Analisando este estado, repare que as populações do estado inicial permanecem invariantes

Figura 6.1 – Representação da ação do canal de atenuação de fase paralela no estado de um q-bit. Observe que o canal quântico comprime a esfera de Bloch indicada em azul claro em direção ao eixo $\hat{z}$. O estado final do sistema é determinado geometricamente pelo elipsóide indicado em vermelho.

Fonte: Elaborada pelo autor.

ao canal quântico, ou seja, $\langle s | \rho_0 | s \rangle = \langle s | \rho_t | s \rangle$ ($s = 0, 1$), embora as coerências $\langle s | \rho_t | s' \rangle$ ($s, s' = 0, 1$ e $s \neq s'$) do estado evoluído exibam agora um decaimento exponencial. No regime assintótico $t \rightarrow \infty$, segue $\vec{r}_\infty = \{0, 0, r_0 \cos \theta_0\}$ e o estado do sistema se encontra na mistura incoerente $\rho_\infty = z_+ |0\rangle\langle 0| + z_- |1\rangle\langle 1|$, com $z_\pm = (1/2)(1 \pm r_0 \cos \theta_0)$. A Fig. 6.1 ilustra de modo esquemático a ação do canal de atenuação de fase paralela sobre o estado de

um q-bit representado pela esfera de Bloch. Em termos geométricos, a operação quântica mapeia a esfera de Bloch (azul claro) em um elipsóide (vermelho) encolhendo-a em direção o eixo z onde se encontram os estados diagonais na base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ que são deixados invariantes na evolução.

É possível verificar que o estado ρ_t na Eq. (6.40) tem a seguinte decomposição espectral

$$\rho_t = \sum_{j=\pm} p_j |\theta_t, \phi_t\rangle_j \langle \theta_t, \phi_t|_j , \quad (6.44)$$

em que

$$p_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm r_0 \xi_t) , \quad |\theta_t, \phi_t\rangle_{\pm} = \frac{1}{N_{\pm}} \left[(\cos \theta_0 \pm \xi_t) |0\rangle + e^{i(\omega_0 t + \phi_0)} q_t \sin \theta_0 |1\rangle \right] , \quad (6.45)$$

com

$$\xi_t = \sqrt{\cos^2 \theta_0 + q_t^2 \sin^2 \theta_0} , \quad N_{\pm} = \sqrt{(\cos \theta_0 \pm \xi_t)^2 + q_t^2 \sin^2 \theta_0} . \quad (6.46)$$

Inserindo os resultados anteriores nas Eqs. (4.20) e (4.21) obtemos, respectivamente,

$$\mathcal{F}_t = \frac{r_0^2 q_t^2 \sin^4 \theta_0}{4 \xi_t^2 (1 - r_0^2 \xi_t^2)} \left(\frac{dq_t}{dt} \right)^2 \quad (6.47)$$

e

$$\mathcal{Q}_t^f = \frac{1}{8 \xi_t^2} \left[\omega_0^2 \xi_t^2 q_t^2 + \cos^2 \theta_0 \left(\frac{dq_t}{dt} \right)^2 \right] r_0^2 \sin^2 \theta_0 c_f(p_+, p_-) . \quad (6.48)$$

A Eq. (6.47), comum a todas as métricas Riemannianas contrativas já que independe de escolhas para a função de Morozova-Čencov, é nula para estados iniciais tais que $\theta_0 = 0$ ou $\theta_0 = \pi$, isto é, para todos os estados incoerentes que se encontram ao longo do eixo z na esfera de Bloch e que de fato permanecem invariantes pela dinâmica do canal de atenuação de fase. Embora este termo seja função da pureza r_0 do estado inicial e do tempo t , note que $\mathcal{F}_t$ é independente do ângulo azimutal ϕ_0 já que os autovalores p_j do estado evoluído ρ_t independem deste parâmetro.

A Eq. (6.48) descreve a verdadeira contribuição quântica à métrica g_t e depende da escolha específica das funções de Morozova-Čencov. Repare que $\mathcal{Q}_t^f$ é nula para todos os estados iniciais incoerentes tais que $\theta_0 = 0$ ou $\theta_0 = \pi$. Por outro lado, se $\theta_0 = \pi/2$, ou seja, escolhendo estados iniciais pertencentes ao plano equatorial xy , então $\mathcal{Q}_t^f$ é diferente de zero apenas quando a frequência ω_0 é também não-nula. A contribuição $\mathcal{Q}_t$ é função da pureza r_0 e independe do ângulo azimutal inicial ϕ_0 , embora a caracterização dos autoestados de ρ_t dependa deste parâmetro. A partir desta análise, o comprimento $\ell_{\gamma}^f(\rho_0, \rho_{\tau})$ será nulo

para estados ao longo do eixo z já que permanecem invariantes sob ação da operação quântica. Além disso, o QSL tem sua origem unicamente devido às populações de ρ_t se $\omega_0 = 0$ e a dinâmica se inicie com um estado ρ_0 localizado no plano equatorial xy da esfera de Bloch.

Através das Eqs. (6.47) e (6.48) é possível escrever $g_t^f = \mathcal{F}_t + \mathcal{Q}_t^f$. Por outro lado, também podemos escrever esta expressão na forma

$$g_t^f = g_t^{\text{QF}} + \tilde{g}_t^f, \quad (6.49)$$

em que

$$g_t^{\text{QF}} = \frac{r_0^2 \sin^2 \theta_0}{4\xi_t^2} \left[\omega_0^2 \xi_t^2 q_t^2 + \left(\frac{q_t^2 \sin^2 \theta_0}{1 - r_0^2 \xi_t^2} + \cos^2 \theta_0 \right) \left(\frac{dq_t}{dt} \right)^2 \right] \quad (6.50)$$

e

$$\tilde{g}_t^f = \frac{r_0^2 \sin^2 \theta_0}{8\xi_t^2} \left[\omega_0^2 \xi_t^2 q_t^2 + \cos^2 \theta_0 \left(\frac{dq_t}{dt} \right)^2 \right] [c_f(p_+, p_-) - 2]. \quad (6.51)$$

Esta separação é conveniente pois permite distinguir claramente a contribuição à g_t^f devido a escolha da função de MC $c_f(x, y) = 2/(x + y)$ que caracteriza a métrica de Fisher quântica (QF) frente todas as demais. Em termos algébricos, dada a normalização $\text{Tr}(\rho_t) = p_+ + p_- = 1$, segue que $c_f(p_+, p_-) = 2$ para a QF e, neste caso, a contribuição $\tilde{g}_t^f$ é identicamente nula e o *quantum speed limit* será função exclusivamente do termo g_t^{QF} . Para as demais funções de MC, g_t^f será função de g_t^{QF} e $\tilde{g}_t^f$ já que $c_f(p_+, p_-) \neq 2$. Como ficará mais claro nas próximas subseções, esta separação também é motivada em parte pela simplicidade no cálculo analítico do comprimento $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ quando escolhemos a função de MC relativa a métrica de Fisher quântica.

Métrica de Fisher

A métrica de Fisher é caracterizada pela função $c_f(x, y) = 2/(x + y)$ de MC que, dado o vínculo de normalização $\text{Tr}(\rho_t) = p_+ + p_- = 1$, reduz-se a

$$c_f(p_+, p_-) = 2. \quad (6.52)$$

Neste caso, via Eq. (6.51) temos $\tilde{g}_t^f = 0$ e $g_t^f = g_t^{\text{QF}}$, onde

$$g_t^{\text{QF}} = \frac{\Gamma^2}{4} e^{-2\Gamma t} (1 + \beta^2) r_0^2 \sin^2 \theta_0 \left(\frac{1 - \kappa^2 \alpha^2 e^{-2\Gamma t}}{1 - \alpha^2 e^{-2\Gamma t}} \right), \quad (6.53)$$

com

$$\alpha^2 = 1 - \frac{1 - r_0^2}{\langle \Delta \hat{Z} \rangle}, \quad \beta = \frac{\omega_0}{\Gamma}, \quad \kappa^2 = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}, \quad (6.54)$$

e

$$\langle \Delta \hat{Z} \rangle = \text{Tr}(\rho_t \sigma_3^2) - [\text{Tr}(\rho_t \sigma_3)]^2 = 1 - r_0^2 \cos^2 \theta_0 \quad (6.55)$$

representa a variância da matriz de Pauli σ_3 . A partir desta expressão, o comprimento $\ell_\gamma^f = \int_0^\tau dt \sqrt{g_t^f}$ da trajetória γ descrita pela evolução do estado ρ_t no espaço de estados é dado por⁷

$$\ell_\gamma^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \beta^2) \langle \Delta \hat{Z} \rangle} \left[E \left(\arcsin \alpha, \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \right) - E \left(\arcsin(\alpha e^{-\Gamma \tau}), \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \right) \right], \quad (6.56)$$

onde

$$E(y, \kappa^2) = \int_0^y dy' \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 y'} \quad (6.57)$$

é a integral elíptica de segunda espécie. (216, 217) Conforme mostramos no Capítulo 2, o tempo mínimo de evolução neste processo é então determinado a partir da solução da desigualdade

$$\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) \leq \ell_\gamma^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau), \quad (6.58)$$

em que $\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)$ é o ângulo de Bures que representa a distância geodésica associada a métrica de Fisher dado pela expressão⁸

$$\cos^2[\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)] = \frac{1}{2} \left[1 + \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_\tau + \sqrt{(1 - |\vec{r}_0|^2)(1 - |\vec{r}_\tau|^2)} \right], \quad (6.59)$$

onde

$$|\vec{r}_\tau| = r_0 \xi_\tau, \quad \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_\tau = r_0^2 \left[\cos^2 \theta_0 + q_\tau \sin^2 \theta_0 \cos(\omega_0 \tau) \right]. \quad (6.60)$$

É importante ressaltar que a Eq. (6.56) generaliza o resultado fornecido pela Ref. (82) para o caso em que ρ_0 é um estado misto evoluindo via o canal de atenuação de fase. O resultado destes autores é recobrado tomando $r_0 = 1$ tal que $\alpha = 1$. No limite da dinâmica de tempos longos $\tau \rightarrow \infty$, a Eq. (6.56) assume a forma assintótica

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \ell_\gamma^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \beta^2) \langle \Delta \hat{Z} \rangle} E(\arcsin \alpha, \kappa^2). \quad (6.61)$$

⁷A Eq. (6.56) é obtida reescrevendo a integral $\int_0^\tau dt \sqrt{g_t^f}$ em termos da parametrização $\sin \Phi = \alpha e^{-u}$, com $d\Phi = -\alpha du / \sqrt{e^{2u} - \alpha^2}$, $u = \Gamma t$ e a função $g_t^f = g_t^{\text{QF}}$ dada na Eq. (6.53).

⁸Consulte a Seção C.5 do Apêndice C para detalhes sobre a derivação do ângulo de Bures associado a estados mistos ρ_0 e ρ_τ .

Em particular, considerando a atenuação de fase pura na qual $\omega_0 = 0$, isto é, $\beta = 0$ e $\kappa = 0$, o comprimento da trajetória na Eq. (6.56) assume a forma

$$\left[\ell_\gamma^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)\right]_{\beta=0} = \frac{1}{2}\sqrt{\langle\Delta\hat{Z}\rangle} \left[\arcsin \alpha - \arcsin(\alpha e^{-\Gamma\tau})\right]. \quad (6.62)$$

Por outro lado, no limite $\Gamma \rightarrow 0$ em que a atenuação de fase é nula e o sistema obedece uma dinâmica unitária, dispomos do resultado

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \ell_\gamma^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) = \frac{\omega_0 \tau \alpha}{2} \langle\Delta\hat{Z}\rangle \quad (6.63)$$

e o tempo mínimo de evolução do sistema quântico é obtido resolvendo a desigualdade

$$\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) \leq \frac{\omega_0 \tau \alpha}{2} \langle\Delta\hat{Z}\rangle, \quad (6.64)$$

onde $\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)$ é dado pela Eq. (6.59).

Métrica de Wigner-Yanase

Considerando os autovalores $p_\pm = (1/2)(1 \pm r_0 \xi_t)$ do operador densidade ρ_t apresentados na Eq. (6.45), a função de MC que descreve a métrica de Wigner-Yanase se reduz a

$$c_f(p_+, p_-) - 2 = \frac{2r_0^2 \xi_t^2}{\left(1 + \sqrt{1 - r_0^2 \xi_t^2}\right)^2}. \quad (6.65)$$

Neste caso, a métrica $g_t^f = g_t^{\text{QF}} + \tilde{g}_t^f$ exibirá a contribuição g_t^{QF} dada pela Eq. (6.53) e também

$$\tilde{g}_t^f = \frac{\Gamma^2}{4} e^{-2\Gamma t} (1 + \beta^2) r_0^2 \sin^2 \theta_0 \left[\frac{1 - \kappa^2 \alpha^2 e^{-2\Gamma t}}{1 - \alpha^2 e^{-2\Gamma t}} + \frac{r_0^2 (\cos^2 \theta_0 + e^{-2\Gamma t} \kappa^2 \sin^2 \theta_0)}{\left(1 + \sqrt{(1 - r_0^2 \cos^2 \theta_0)(1 - \alpha^2 e^{-2\Gamma t})}\right)^2} \right]. \quad (6.66)$$

A partir de ambos resultados, o comprimento $\ell_\gamma^f = \int_0^\tau dt \sqrt{g_t^f}$ da trajetória γ descrita pela evolução do estado ρ_t no espaço de estados é escrito na forma

$$\ell_\gamma^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau) = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \beta^2) \langle\Delta\hat{Z}\rangle} \int_0^{\Gamma\tau} du \alpha e^{-u} \Psi_u(r_0, \theta_0, \kappa), \quad (6.67)$$

onde

$$\Psi_u(r_0, \theta_0, \kappa) = \sqrt{\Omega_u(r_0, \theta_0, \kappa) + \frac{1 - \kappa^2 \alpha^2 e^{-2u}}{1 - \alpha^2 e^{-2u}}} \quad (6.68)$$

e

$$\Omega_u(r_0, \theta_0, \kappa) = \frac{r_0^2(\cos^2\theta_0 + e^{-2u}\kappa^2\sin^2\theta_0)}{\left[1 + \sqrt{(1 - r_0^2\cos^2\theta_0)(1 - \alpha^2e^{-2u})}\right]^2}. \quad (6.69)$$

A partir destes resultados, o tempo mínimo de evolução entre os estados inicial e final da dinâmica é obtido resolvendo a desigualdade

$$\mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau) \leq \ell_\gamma^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau), \quad (6.70)$$

onde $\mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau)$ é o ângulo de Hellinger que representa a distância geodésica associada a métrica de Wigner-Yanase cuja expressão analítica é dada por⁹

$$\cos[\mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau)] = \frac{1}{4} \left[\epsilon_0^+ \epsilon_\tau^+ + \epsilon_0^- \epsilon_\tau^- \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_\tau}{|\vec{r}_0||\vec{r}_\tau|} \right], \quad (6.71)$$

onde

$$\epsilon_a^\pm = \sqrt{1 + |\vec{r}_a|} \pm \sqrt{1 - |\vec{r}_a|}, \quad (6.72)$$

com $a = \{0, \tau\}$, e o produto escalar $\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_\tau$ entre os vetores $\vec{r}_0$ e $\vec{r}_\tau$ é calculado via Eq. (6.60).

Métrica mínima (média harmônica)

Dada a evolução de ρ_t no espaço de estados, a função de MC que caracteriza a métrica mínima se reduz a $c_f(p_+, p_-) = 1/(2p_+p_-)$ já que $p_+ + p_- = 1$. Neste caso, segue que

$$c_f(p_+, p_-) - 2 = \frac{2\xi_t^2}{1 - \xi_t^2} \quad (6.73)$$

e o termo $\tilde{g}_t^f$ dado na Eq. (6.51) se escreve

$$\tilde{g}_t^f = \frac{\Gamma^2}{4}(1 + \beta^2)\alpha^2 e^{-2\Gamma t} \frac{[1 - (1 - \kappa^2\alpha^2 e^{-2\Gamma t})(1 - r_0^2\cos^2\theta_0)]}{1 - \alpha^2 e^{-2\Gamma t}}. \quad (6.74)$$

Combinando este resultado com a contribuição g_t^{QF} dada na Eq. (6.53), obtemos

$$g_t^f = \frac{\Gamma^2}{4}(1 + \beta^2) \frac{\alpha^2 e^{-2\Gamma t}}{1 - \alpha^2 e^{-2\Gamma t}}. \quad (6.75)$$

⁹Consulte a Seção C.6 do Apêndice C para detalhes sobre a derivação do ângulo de Hellinger associado a estados mistos ρ_0 e ρ_τ .

A partir desta expressão, o comprimento $\ell_\gamma^f = \int_0^\tau dt \sqrt{g_t^f}$ da trajetória descrita pela evolução do estado ρ_t no espaço de estados é¹⁰

$$\ell_\gamma^{\min}(\rho_0, \rho_\tau) = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \beta^2} \left[\arcsin \alpha - \arcsin \left(\alpha e^{-\Gamma\tau} \right) \right]. \quad (6.76)$$

Infelizmente, nossa análise do limite quântico de velocidade para a métrica mínima ficará incompleta devido a ausência de resultados analíticos para a distância geodésica associada a esta métrica. Entretanto, na próxima subseção tentaremos traçar um panorama do comportamento da função $\ell_\gamma^{\min}(\rho_0, \rho_\tau)$ dada na Eq. (6.76) em comparação àquele devido às métricas de Fisher e Wigner-Yanase.

Análise do QSL

Para concluir o estudo do *quantum speed limit* na evolução de um estado sob ação do canal de atenuação de fase, promoveremos uma análise gráfica do comprimento ℓ_γ que decorre da escolha de cada função de MC. Na Fig. 6.2 comparamos os comprimentos $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ para as trajetórias dadas nas Eqs. (6.56), (6.67) e (6.76) que correspondem aos três exemplos de métricas Riemannianas contrativas: métrica de Fisher e Wigner-Yanase e a métrica correspondendo a função de MC mínima, respectivamente.

Por um lado, escolhendo $\beta = 8$, as Figs. 6.2(a) e 6.2(b) mostram que fixando o ângulo polar θ_0 do estado inicial, o comprimento $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ aumenta à medida que a pureza r_0 aumenta. Analogamente, no regime de atenuação de fase pura com $\beta = 0$, fixando a pureza r_0 do estado inicial, as Figs. 6.2(c) e 6.2(d) indicam que $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ aumenta à medida que o ângulo polar θ_0 aumenta. Neste caso, comparando o par de Figs. 6.2(a) e 6.2(b) e o par de Figs. 6.2(c) e 6.2(d) no intervalo $0 \leq \Gamma\tau \leq 10$, quanto mais distante o estado inicial está em relação ao eixo z , mais rápido pode ser a evolução correspondente. É importante destacar que este comportamento persiste mesmo no caso $\beta \neq 0$ onde surgem as oscilações observadas nas Figs. 6.3(a) e 6.3(b).

Por outro lado, a Fig. 6.2(d) revela em particular a assinatura das populações do estado evoluído ρ_t na velocidade de evolução. De fato, de acordo com a Eq. (6.48), a contribuição puramente quântica $\mathcal{Q}_t^f$ à métrica é igual a zero para $\theta_0 = \pi/2$ e $\omega_0 = 0$ ($\beta = 0$). Assim,

¹⁰A Eq. (6.76) é obtida reescrevendo a integral $\int_0^\tau dt \sqrt{g_t^f}$, com g_t^f dada na Eq. (6.75), em termos da parametrização $\sin \Phi = \alpha e^{-u}$, onde $d\Phi = -\tan \Phi du$ e $u = \Gamma t$.

Figura 6.2 – Comprimento $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ da trajetória descrita pela evolução do estado inicial ρ_0 considerando as métricas correspondentes às funções de MC: $f_{\text{QF}}(u) = f_{\max}(u)$ (linha sólida vermelha), $f_{\text{WY}}(u)$ (linha tracejada em azul) e $f_{\min}(u)$ (linha roxa pontilhada) para **(a)** $r_0 = 1/4$, $\theta_0 = \pi/4$, $\beta = 8$ **(b)** $r_0 = 3/4$, $\theta_0 = \pi/4$, $\beta = 8$ **(c)** $r_0 = 1/2$, $\theta_0 = \pi/4$, $\beta = 0$ e **(d)** $r_0 = 1/2$, $\theta_0 = \pi/2$, $\beta = 0$.

Fonte: Adaptada de PIRES et al. (140)

a métrica g_t é descrita exclusivamente por $\mathcal{F}_t$ dado na Eq. (6.47) que surge devido às populações do estado. Neste caso, o comprimento $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ permanece invariante para qualquer métrica Riemanniana contrativa já que a contribuição $\mathcal{F}_t$ é comum a todas elas e independe de uma escolha específica para a função $c_f(x, y)$ de MC. Observe, entretanto, que este termo ainda é susceptível a variações na pureza r_0 e no tempo de evolução.

Vamos investigar o *quantum speed limit* considerando a métrica de Fisher e a métrica de Wigner-Yanase cujas distâncias geodésicas têm formas analíticas conhecidas. Na Fig. 6.3 comparamos as quantidades δ_γ^f adotando as métricas de Fisher e Wigner-Yanase. Analisando as Figs. 6.3(a) e 6.3(b) em que $\beta = 8$, note que a dinâmica não satura o limite para quaisquer das duas métricas, embora a métrica de Fisher forneça um QSL

Figura 6.3 – Diferença relativa δ_γ^f para o canal de atenuação de fase paralela considerando a métrica relativa a informação de Fisher (linha sólida vermelha) e a métrica de Wigner-Yanase (linha tracejada azul) para (a) $r_0 = 1/4, \theta_0 = \pi/4, \beta = 8$ (b) $r_0 = 3/4, \theta_0 = \pi/4, \beta = 8$ (c) $r_0 = 1/2, \theta_0 = \pi/4, \beta = 0$ e (d) $r_0 = 1/2, \theta_0 = \pi/2, \beta = 0$.

Fonte: Adaptada de PIRES et al. (140)

ligeiramente mais preciso. Por outro lado, a Fig. 6.3(c) mostra que, para $\beta = 0$ e $\theta_0 = \pi/4$, a métrica de Wigner-Yanase fornece o QSL um pouco mais preciso se comparado ao resultado que decorre da métrica de Fisher. Observe que este resultado revela a primeira assinatura de que a métrica de Fisher nem sempre está vinculada ao QSL mais *tight*. Entretanto, este comportamento requer uma análise um pouco mais profunda. Isto porque a Fig. 6.3(c) contempla o caso em que $\beta = 0$, ou seja, $\omega_0 = 0$, que suprime o termo unitário da dinâmica na Eq. (6.23) e descreve unicamente a evolução do reservatório de fase. Assim, será importante analisar o caso em que ω_0 possui valor finito e não-nulo, ainda que no regime de baixas frequências ($\omega_0 \approx 0$). Finalmente, dada a Fig. 6.3(d) em que $\beta = 0$ e $\theta_0 = \pi/2$, o QSL é saturado para ambas métricas.

Levando em conta ambas figuras de mérito $\delta_\gamma^{\text{QF}}$ e $\delta_\gamma^{\text{WY}}$ associadas, respectivamente, às

Figura 6.4 – Diferença $\Delta\delta_\gamma \equiv \delta_\gamma^{\text{QF}} - \delta_\gamma^{\text{WY}}$ entre as figuras de mérito vinculadas às métricas de Fisher e Wigner-Yanase, respectivamente, para o canal de atenuação de fase paralela em função de r_0 e θ_0 , para (a) $\Gamma\tau = 10$, $\omega_0 = 10$, e (b) $\Gamma\tau = 10$, $\omega_0 = 0.1$.

Fonte: Adaptada de PIRES et al. (140)

métricas de Fisher e Wigner-Yanase, vamos definir a diferença

$$\Delta\delta_\gamma = \delta_\gamma^{\text{QF}} - \delta_\gamma^{\text{WY}}. \quad (6.77)$$

Por construção, observe que se o QSL decorrente da métrica de Fisher é mais *tight* que aquele vinculado à métrica de Wigner-Yanase, ou seja, $\delta_\gamma^{\text{QF}} \leq \delta_\gamma^{\text{WY}}$, então via Eq. (6.77) temos $\Delta\delta_\gamma \leq 0$. Em caso contrário, isto é, $\delta_\gamma^{\text{WY}} \leq \delta_\gamma^{\text{QF}}$, segue que $\Delta\delta_\gamma \geq 0$. A Fig. 6.4 apresenta a quantidade $\Delta\delta_\gamma$ em função da pureza r_0 , do ângulo polar θ_0 e da frequência ω_0 , tomando o parâmetro adimensional $\Gamma\tau = 10$ fixo. Analisando a Fig. 6.4(a), observe que $\Delta\delta_\gamma \leq 0$ em praticamente todo o plano (r_0, θ_0) para $\omega_0 = 10$. Em oposição, a Fig. 6.4(b) indica que $\Delta\delta_\gamma \geq 0$ em quase todo o espaço de parâmetros (r_0, θ_0) para $\omega_0 = 0.1$. Assim, pode-se concluir que a métrica de Wigner-Yanase corrobora um QSL mais *tight* no regime em que a frequência ω_0 é suficientemente pequena. Este comportamento está em contraste com aquele observado no contexto da dinâmica unitária de estados de um q-bit discutido no Capítulo 5, em que a métrica de Fisher sempre atribui um limite inferior mais *tight*. Este aspecto constitui, portanto o primeiro indício da robustez e versatilidade da abordagem acerca de *quantum speed limits* generalizados introduzida nesta tese no que se refere à busca de QSLs mais *tights*.

6.2.2 Atenuação de fase transversal

A partir da equação mestra na Eq. (6.22), o mecanismo de atenuação de fase transversal corresponde ao regime $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Neste caso,

$$S_{00}(t) = a_t + b_t, \quad S_{33}(t) = a_t - b_t, \quad S_{03}(t) = S_{30}^*(t) = 2i\beta c_t, \quad (6.78)$$

$$S_{11}(t) = 1 - a_t + c_t, \quad S_{22}(t) = 1 - a_t - c_t, \quad (6.79)$$

em que

$$a_t = \frac{1}{2}(1 + e^{-\Gamma t}), \quad b_t = e^{-\frac{\Gamma t}{2}} \cosh\left(\frac{\Gamma t}{2} \sqrt{1 - 4\beta^2}\right), \quad (6.80)$$

$$c_t = \frac{e^{-\frac{\Gamma t}{2}}}{\sqrt{1 - 4\beta^2}} \sinh\left(\frac{\Gamma t}{2} \sqrt{1 - 4\beta^2}\right). \quad (6.81)$$

Conforme mostrado por Chaves et al. (214,215), este canal possui propriedades interessantes no que se refere ao contexto da metrologia quântica sob ação de ruído externo. Em especial, o mecanismo de atenuação de fase transversal descreve uma situação relevante pois a estimativa do parâmetro ω_0 escala com uma precisão no número de q-bits. Enquanto esta precisão é suprimida no caso da atenuação de fase paralela, este comportamento é observado mesmo que o ruído seja aplicado individualmente em cada q-bit. Ainda no cenário metrológico, a ação deste canal é análoga ao processo de magnetometria atômica de radio-frequência discutido na Ref. (218) que se baseia na medida da rotação da polarização da luz transmitida através de um *ensemble* de átomos sujeitos a um campo magnético externo. O campo magnético estimado é dirigido perpendicularmente ao pulso de radio-frequência que induz o mecanismo de atenuação de fase com o tempo de decoerência de spin.

Considerando o estado inicial $\rho_0 = (1/2)(\mathbb{I} + \vec{r}_0 \cdot \vec{\sigma})$, o estado evoluído decorrente da ação deste canal é dado por

$$\rho_t = \mathcal{E}_t(\rho_0) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{r}_t \cdot \vec{\sigma}) \quad (6.82)$$

em que

$$\vec{r}_t = \eta \vec{r}_0 + \kappa_t, \quad (6.83)$$

com η sendo uma matriz de dimensão 3×3 cujos elementos são dados por

$$\eta_{11} = b_t + c_t, \quad \eta_{22} = b_t - c_t, \quad \eta_{21} = -\eta_{12} = 2\beta c_t, \quad (6.84)$$

$$\eta_{33} = 2a_t - 1, \quad \eta_{13} = \eta_{31} = 0, \quad \eta_{23} = \eta_{32} = 0 \quad \text{e} \quad \kappa_t = 0. \quad (6.85)$$

O estado ρ_t na Eq. (6.82) tem a seguinte decomposição espectral

$$\rho_t = \sum_{j=\pm} p_j |\theta_t, \phi_t\rangle_j \langle \theta_t, \phi_t|_j, \quad (6.86)$$

em que

$$p_{\pm} = \frac{1}{2}(1 + r_0 \tilde{\xi}_t) \quad (6.87)$$

e

$$|\theta_t, \phi_t\rangle_{\pm} = \frac{1}{N_{\pm}} \left[[(2a_t - 1) \cos \theta_0 \pm \tilde{\xi}_t] |0\rangle + [(b_t + 2i\beta c_t) e^{i\phi_0} + c_t e^{-i\phi_0}] \sin \theta_0 |1\rangle \right], \quad (6.88)$$

com

$$N_{\pm} = \sqrt{[(2a_t - 1) \cos \theta_0 \pm \tilde{\xi}_t]^2 + \tilde{\xi}_t^2 \sin^2 \theta_0}, \quad \tilde{\xi}_t = \sqrt{(2a_t - 1)^2 \cos^2 \theta_0 + \tilde{\xi}_t \sin^2 \theta_0} \quad (6.89)$$

e

$$\tilde{\xi}_t = b_t^2 + (1 + 4\beta^2) c_t^2 + 2c_t [b_t \cos(2\phi_0) - 2\beta c_t \sin(2\phi_0)], \quad (6.90)$$

Em face da generalidade do estado inicial, a decomposição espectral do estado evoluído ρ_t na Eq. (6.86) corrobora na inviabilidade de expressões analíticas para ambas contribuições $\mathcal{F}_t$ e $\mathcal{Q}_t^f$ dadas, respectivamente, nas Eqs. (4.20) and (4.21). Logicamente, o mesmo acontece com o comprimento $\ell_{\gamma}^f(\rho_0, \rho_{\tau})$ referente a cada métrica contrativa. Entretanto, esta dificuldade pode ser contornada ao escolhermos um estado inicial mais simples. Em particular, considerando o estado inicial $\rho_0 = |+\rangle\langle +|$, com $|+\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle)$, obtemos as seguintes expressões

$$\mathcal{F}_t = \frac{\beta^4 e^{-\Gamma t}}{(1 - \beta^2)^2 (1 - e^{-\Gamma t} \mathcal{G}_t) \mathcal{G}_t} \sinh^2 \left(\frac{\Gamma t}{2} \sqrt{1 - 4\beta^2} \right) \quad (6.91)$$

e

$$\mathcal{Q}_t^f = \frac{\beta^2}{8\mathcal{G}_t} e^{-\Gamma t} c_f(p_+, p_-), \quad (6.92)$$

com

$$\mathcal{G}_t = \frac{1}{(1 - 4\beta^2)} \left[\cosh \left(\Gamma t \sqrt{1 - 4\beta^2} \right) + \sqrt{1 - 4\beta^2} \sinh \left(\Gamma t \sqrt{1 - 4\beta^2} \right) - 4\beta^2 \right]. \quad (6.93)$$

Além da simplicidade algébrica nos cálculos, a motivação física para esta escolha está baseada no fato de que $|+\rangle$ representa o estado ótimo na estimativa do parâmetro ω_0 no contexto metrológico. Ademais, é importante pontuar que a escolha do estado inicial

$\rho_0 = |+\rangle\langle+|$ está em pleno acordo com o teorema de Morozova, Čencov e Petz (MCP). Isto porque, embora ρ_0 seja puro, o estado $\rho_t = \mathcal{E}_t(\rho_0)$ será em geral misto, ou seja, a condição primordial de validade do teorema MCP discutida no Capítulo 3 está assegurada.

A despeito do estado inicial da dinâmica, as Eqs. (6.91) e (6.92) têm dependências não triviais no tempo t e nos parâmetros ω_0 e Γ . Isto dificulta sobremaneira o cálculo analítico do comprimento $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$, o que nos restringe a um estudo puramente numérico desta quantidade e, consequentemente, da figura de mérito δ_γ^f . Na próxima subseção vamos analisar o comportamento do erro relativo δ_γ^f definido na Eq. (4.26) para ambas métricas de Fisher e Wigner-Yanase em função dos parâmetros ω_0 e Γ .

Análise do QSL

Agora analizaremos o comportamento dos QSLs na Eq. (4.25) correspondentes às métricas de Fisher e Wigner-Yanase no contexto da dinâmica não-unitária induzida pelo canal de atenuação de fase transversal. Na Fig. 6.5 comparamos a figura de mérito δ_γ^f associada a escolha destas métricas Riemannianas contrativas tomando $\rho_0 = |+\rangle\langle+|$, com $|+\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle)$, como o estado inicial da dinâmica.

As Figs. 6.5(a) e 6.5(b) indicam que, dada a frequência ω_0 fixa, então $\delta_\gamma^{\text{WY}} \leq \delta_\gamma^{\text{QF}}$ em resposta ao aumento na taxa de decoerência Γ do processo de atenuação de fase. Por sua vez, as Figs. 6.5(b) e 6.5(c) revelam que este comportamento também é válido na situação complementar, isto é, fixando a taxa de decoerência Γ e aumentando a frequência ω_0 . Entretanto, a Fig. 6.5(c) ilustra um cenário no qual a desigualdade $\delta_\gamma^{\text{WY}} \leq \delta_\gamma^{\text{QF}}$ pode ser violada a partir de um dado instante de tempo. Neste caso, pode-se concluir que a métrica de Wigner-Yanase fornece um QSL mais *tight* frente aquele decorrente da métrica de Fisher no regime de tempos curtos. Por fim, a Fig. 6.5(d) revela o comportamento $\delta_\gamma^{\text{WY}} \geq \delta_\gamma^{\text{QF}}$ escolhendo $\Gamma = \omega_0 = 1$, isto é, $\beta = 1$, tal que neste caso o QSL via métrica de Fisher é mais *tight* que aquele via Wigner-Yanase. Em resumo, a análise do QSL relativo ao processo de atenuação de fase transversal revela situações em que o limite inferior no tempo de evolução do sistema quântico via a métrica de Wigner-Yanase é mais *tight* a despeito daquele associado à métrica de Fisher.

Figura 6.5 – Diferença relativa δ_γ^f , Eq. (4.26), para o canal de atenuação de fase transversal a partir das métricas de Fisher (linha sólida vermelha) e Wigner-Yanase (linha tracejada azul) para (a) $\Gamma = 0.1$ e $\omega_0 = 0.01$; (b) $\Gamma = 0.25$ e $\omega_0 = 0.01$; (c) $\Gamma = 0.25$ e $\omega_0 = 0.033$; (d) $\Gamma = 1$ e $\omega_0 = 1$. Em geral, o QSL associado à cada métrica é tão mais *tight* quanto menor a figura de mérito δ_γ^f . O estado inicial da dinâmica é dado pelo estado puro de um q-bit $\rho_0 = |+\rangle\langle +|$.

Fonte: Adaptada de PIRES et al. (140)

6.3 Atenuação de amplitude

O canal de atenuação de amplitude retrata o comportamento de sistemas quânticos envolvendo dissipação de energia. Este é o caso, por exemplo, do espalhamento de fótons em cavidades atômicas de dispositivos ópticos ou ainda do processo de relaxação de sistemas de spins a altas temperaturas sob ação de graus de liberdade externos comum ao aparato experimental de Ressonância Nuclear Magnética. (1) Em especial, descreve com boa aproximação um modelo para o processo de decaimento do estado excitado de um sistema de dois níveis devido a emissão de um fóton. (205)

A troca de energia entre o sistema e o reservatório no mecanismo de atenuação de

amplitude pode ser modelada escolhendo $\gamma_j = \delta_{j1}\Gamma$ e os super-operadores de Lindblad $A_j = \delta_{j1}\sigma_-$ e $A_j^\dagger = \delta_{j1}\sigma_+$ na Eq. (6.10), com

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = |0\rangle\langle 1|, \quad \sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = |1\rangle\langle 0|. \quad (6.94)$$

Neste caso, a equação mestra que governa a dinâmica do sistema de dois níveis na representação de interação é dada por

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \Gamma \left(\sigma_- \rho_t \sigma_+ - \frac{1}{2} \{ \sigma_+ \sigma_-, \rho_t \} \right), \quad (6.95)$$

em que Γ é a taxa de decoerência do q-bit em relação ao reservatório de atenuação de amplitude. Observe que a equação mestra descreve a transição $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ associada ao mecanismo de emissão espontânea induzido pelo efeito dissipativo do reservatório no sistema de dois níveis.

Por meio da técnica desenvolvida por Andersson, Cresser e Hall (213), a ação do canal de atenuação de amplitude pode ser descrita em termos da representação de operador-soma

$$\mathcal{E}_t(\bullet) = \sum_{j=0}^1 \tilde{K}_j \bullet \tilde{K}_j^\dagger, \quad (6.96)$$

em que $\mathcal{E}_t(\bullet)$ define um mapa CPTP não-unital e $\{\tilde{K}_j\}_{j=0,1}$ são os operadores de Kraus

$$\tilde{K}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda_t} \end{pmatrix}, \quad \tilde{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\lambda_t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.97)$$

com

$$\sum_j \tilde{K}_j^\dagger \tilde{K}_j = \mathbb{I}. \quad (6.98)$$

O parâmetro $\lambda_t = 1 - e^{-\Gamma t}$ define a probabilidade de decaimento e $1/\Gamma$ é o tempo característico deste processo. O operador $\tilde{K}_1$ promove a transição entre os estados excitado $|1\rangle$ e fundamental $|0\rangle$ com probabilidade λ_t , ou seja, $\tilde{K}_1|1\rangle = \sqrt{\lambda_t}|0\rangle$ e $\tilde{K}_1|0\rangle = 0$. Por sua vez, $\tilde{K}_0$ reduz a taxa de ocupação do estado excitado por um fator $\sqrt{1-\lambda_t}$ em relação ao estado fundamental, ou seja, $\tilde{K}_0|1\rangle = \sqrt{1-\lambda_t}|1\rangle$, enquanto $\tilde{K}_0|0\rangle = |0\rangle$. A partir desta análise, note que o estado $|0\rangle\langle 0|$ permanece invariante sob ação desta operação quântica, isto é, $\mathcal{E}_t(|0\rangle\langle 0|) = |0\rangle\langle 0|$.

Considerando o estado misto inicial de um q-bit $\rho_0 = (1/2)(\mathbb{I} + \vec{r}_0 \cdot \vec{\sigma})$ na representação de Bloch $\vec{r}_0 = r_0\{\sin\theta_0 \cos\phi_0, \sin\theta_0 \sin\phi_0, \cos\theta_0\}$, o estado evoluído sob ação deste canal

é dado por

$$\rho_t = \mathcal{E}_t(\rho_0) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{r}_t \cdot \vec{\sigma}) , \quad (6.99)$$

com

$$\vec{r}_t = \eta_t \vec{r}_0 + \kappa_t , \quad \eta_t = \text{diag} \left(\sqrt{1 - \lambda_t}, \sqrt{1 - \lambda_t}, 1 - \lambda_t \right) , \quad \kappa_t = \{0, 0, \lambda_t\} . \quad (6.100)$$

Na visão geométrica, enquanto a matriz η_t mapeia a esfera de Bloch em um elipsóide, o vetor de translação κ_t desloca seu centro ao longo do eixo z em direção ao estado $|0\rangle$ que permanece fixo durante a operação. Este processo está esquematizado na Fig. 6.6 em que o estado de um q-bit na representação de Bloch é indicado pela esfera em azul claro. Em linhas gerais, o mapa encolhe a esfera de Bloch em direção ao seu pólo norte onde se encontra o estado $|0\rangle$. O estado após a ação do canal de atenuação de amplitude é caracterizado pelo elipsóide em vermelho nesta figura. No regime assintótico $t \rightarrow \infty$ segue $\vec{r}_\infty = \{0, 0, 1\}$, ou seja, as coerências do operador densidade evoluído tendem a zero e apenas o estado fundamental $|0\rangle\langle 0|$ tem ocupação não-nula.

Figura 6.6 – Representação da ação do canal de atenuação de amplitude no estado de um q-bit. O canal quântico comprime a esfera de Bloch indicada em azul claro em direção ao seu pólo norte em que se encontra o estado $|0\rangle$. Ao final, o estado do sistema após a ação deste mapa CPTP é determinado geometricamente pelo elipsóide indicado em vermelho.

Fonte: Elaborada pelo autor.

É possível verificar que o estado ρ_t tem a seguinte decomposição espectral

$$\rho_t = \sum_{j=\pm} p_j |\theta_t, \phi_t\rangle_j \langle \theta_t, \phi_t|_j , \quad (6.101)$$

em que

$$p_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \vartheta_t) , \quad |\theta_t, \phi_t\rangle_{\pm} = \frac{1}{N_{\pm}} \left[(\varsigma_t \pm \vartheta_t) |0\rangle + e^{i\phi_0} r_0 \sqrt{1 - \lambda_t \sin \theta_0} |1\rangle \right] , \quad (6.102)$$

com

$$\vartheta_t = \sqrt{1 - \varsigma_t(1 - \lambda_t)} , \quad \varsigma_t = 1 - r_0^2 + \lambda_t(1 - r_0 \cos \theta_0)^2 , \quad \varsigma_t = \lambda_t + r_0(1 - \lambda_t) \cos \theta_0 \quad (6.103)$$

e

$$N_{\pm} = \sqrt{(\varsigma_t \pm \vartheta_t)^2 + r_0^2(1 - \lambda_t) \sin^2 \theta_0} . \quad (6.104)$$

A partir destas expressões podemos determinar a métrica $g_t^f = \mathcal{F}_t + \mathcal{Q}_t^f$ e, conseqüentemente, o *quantum speed limit* decorrente deste mapa dinâmico via Eq. (4.25). Inserindo os resultados acima nas Eqs. (4.20) e (4.21), obtemos

$$\mathcal{F}_t = \frac{[\varsigma_t - (1 - \lambda_t)(1 - r_0 \cos \theta_0)^2]^2}{16\vartheta_t^2 \varsigma_t(1 - \lambda_t)} \quad (6.105)$$

e

$$\mathcal{Q}_t^f = \frac{r_0^2 \sin^2 \theta_0 (2 - \varsigma_t)^2 c_f(p_+, p_-)}{32\vartheta_t^2(1 - \lambda_t)} . \quad (6.106)$$

Analogamente ao canal de atenuação de fase, ambas contribuições $\mathcal{F}_t$ e $\mathcal{Q}_t^f$ independem do ângulo azimutal inicial ϕ_0 . Em relação ao ângulo polar θ_0 , repare que a contribuição quântica $\mathcal{Q}_t^f$ proveniente das coerências do estado $d\rho_t$ anula-se nos casos $\theta_0 = 0$ e $\theta_0 = \pi$ independentemente da pureza r_0 do estado de inicial ρ_0 . Por sua vez, o termo $\mathcal{F}_t$ relativo às populações do estado ρ_t é igual a zero se $\theta_0 = 0$ e $r_0 = 1$, e não-nulo se (i) $\theta_0 = 0$ e $0 < r_0 < 1$; (ii) $\theta_0 = \pi$, $\pi/2$ e $0 < r_0 \leq 1$.

Em resumo, fixando $\theta_0 = 0$ e $r_0 = 1$, ou seja, escolhendo $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$, segue que $\mathcal{F}_t = \mathcal{Q}_t^f = 0$. Neste caso, obtemos $g_t^f = 0$ e, portanto, o limite quântico de velocidade será identicamente nulo. Este resultado é razoável já que, conforme comentamos algumas linhas acima, o estado $|0\rangle\langle 0|$ permanece invariante sob ação do canal de atenuação de amplitude. Embora nos demais casos tenhamos $\mathcal{Q}_t^f = 0$, o limite quântico de velocidade será diferente de zero pois a contribuição $\mathcal{F}_t$ assume um valor finito não-nulo. Note que este comportamento está em consonância com o fato de que o canal quântico promove a

evolução de todos os estados ao longo do eixo z da esfera de Bloch em direção a seu pólo norte onde encontra-se o estado invariante $|0\rangle$.

A métrica é dada por $g_t^f = g_t^{\text{QF}} + \tilde{g}_t^f$, onde definimos

$$g_t^{\text{QF}} = \frac{[\zeta_t - (1 - \lambda_t)(1 - r_0 \cos \theta_0)^2]^2 + r_0^2 \sin^2 \theta_0 (2 - \varsigma_t)^2 \zeta_t}{16 \vartheta_t^2 \zeta_t (1 - \lambda_t)} \quad (6.107)$$

e

$$\tilde{g}_t^f = \frac{r_0^2 \sin^2 \theta_0 (2 - \varsigma_t)^2 [c_f(p_+, p_-) - 2]}{32 \vartheta_t^2 (1 - \lambda_t)}. \quad (6.108)$$

No que segue analisaremos o *quantum speed limit* decorrente das três funções de MC $c_f(x, y) = 2/(x+y)$, $c_f(x, y) = 4/(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$ e $c_f(x, y) = (x+y)/(2xy)$ que correspondem, respectivamente, às métricas de Fisher, Wigner-Yanase e média harmônica. Ao final, estabeleceremos uma comparação entre os resultados na tentativa de fornecer um QSL mais *tight* associado a dinâmica do canal de atenuação de amplitude.

6.3.1 Métrica de Fisher

A métrica de Fisher é caracterizada pela função $c_f(x, y) = 2/(x+y)$ de MC que, dado o vínculo de normalização $\text{Tr}(\rho_t) = p_+ + p_- = 1$, implica que

$$c_f(p_+, p_-) = 2. \quad (6.109)$$

Neste caso, via Eq. (6.108) temos $\tilde{g}_t^f = 0$ e a métrica g_t^f se reduz ao caso trivial $g_t^f = g_t^{\text{QF}}$, onde

$$g_t^{\text{QF}} = \frac{e^{\Gamma t} (1 - r_0 \cos \theta_0) (1 - \varepsilon^2 \varpi^2 e^{-\Gamma t})}{8(1 - \varpi^2 e^{-\Gamma t})}, \quad (6.110)$$

com

$$\varepsilon^2 = \frac{r_0^2 \sin^2 \theta_0}{2(1 - r_0 \cos \theta_0)}, \quad \varpi^2 = \frac{1 - r_0 \cos \theta_0}{2(1 - \varepsilon^2)}. \quad (6.111)$$

A partir desta expressão, o comprimento $\ell_\gamma^{\text{QF}} = \int_0^\tau dt \sqrt{g_t^f} |d\lambda_t/dt|$ da trajetória γ descrita pela evolução do estado ρ_t no espaço de estados é dada por¹¹

$$\ell_\gamma^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \left[E(\arcsin \varpi, \varepsilon^2) - E(\arcsin(\varpi e^{-\Gamma \tau/2}), \varepsilon^2) \right], \quad (6.112)$$

¹¹A Eq. (6.112) é obtida reescrevendo a integral $\int_0^\tau dt \sqrt{g_t^f} |d\lambda_t/dt|$ em termos da parametrização $\sin \Phi = \varpi e^{-u/2}$, onde $d\Phi = -\varpi du / (2\sqrt{e^u - \varpi^2})$, $u = \Gamma t$, $\lambda_t = 1 - e^{-\Gamma t}$ e a função g dada na Eq. (6.110).

onde $E(y, \kappa^2)$ representa a integral elíptica de segunda espécie definida na Eq. (6.57). Conforme mostramos no Capítulo 2, o tempo mínimo de evolução neste processo é então determinado a partir da solução da desigualdade

$$\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) \leq \ell_\gamma^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) , \quad (6.113)$$

em que $\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)$ é o ângulo de Bures que representa a distância geodésica associada a métrica de Fisher dado na Eq. (6.59), com

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_\tau = r_0 \left\{ [\lambda_\tau + (1 - \lambda_\tau)r_0 \cos \theta_0] \cos \theta_0 + \sqrt{1 - \lambda_\tau} r_0 \sin^2 \theta_0 \right\} . \quad (6.114)$$

Em particular, focando na dinâmica de tempos longos na qual $\tau \rightarrow \infty$, então a Eq. (6.112) fornece o limite assintótico

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \ell_\gamma^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) = \sqrt{1 - \varepsilon^2} E(\arcsin \varpi, \varepsilon^2) . \quad (6.115)$$

Por outro lado, observe que adotando um estado inicial puro, isto é, $r_0 = 1$, obtemos $\varepsilon^2 = \cos^2(\theta_0/2)$ e $\varpi = 1$, e então a Eq. (6.112) assume a forma

$$\left[\ell_\gamma^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) \right]_{r_0=1} = |\sin(\theta_0/2)| \left[E\left(\frac{\pi}{2}, \cos^2(\theta_0/2)\right) - E\left(\arcsin(e^{-\Gamma\tau/2}), \cos^2(\theta_0/2)\right) \right] . \quad (6.116)$$

Além disso, caso $r_0 = 1$ e $\theta_0 = \pi$, ou seja, a dinâmica parte de um estado inicial puro $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$, a Eq. (6.116) se reduz a

$$\left[\ell_\gamma^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) \right]_{r_0=1, \theta_0=\pi} = \frac{\pi}{2} - \arcsin(e^{-\Gamma\tau/2}) = \arccos(e^{-\Gamma\tau/2}) . \quad (6.117)$$

Relembrando a desigualdade original na Eq. (6.113) e dado que $\cos a \geq \cos b$ para $a \leq b$ ($a, b \in [0, \pi]$), então recobramos o resultado

$$\tau \geq \frac{2}{\Gamma} \ln \left[\sec \left(\frac{\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)}{\sqrt{\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle}} \right) \right] \quad (6.118)$$

obtido por Taddei et al. (82), com $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle = \sin^2(\pi/2) = 1$.

6.3.2 Métrica de Wigner-Yanase

Considerando os autovalores $p_{\pm} = (1/2)(1 \pm r_0 \xi_t)$ do operador densidade, a função de MC que descreve a métrica de Wigner-Yanase se reduz a

$$c_f(p_+, p_-) - 2 = \frac{2\vartheta_t^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \vartheta_t^2}\right)^2} \quad (6.119)$$

e, através da Eq. (6.108), obtemos

$$\tilde{g}_t^f = \frac{\varepsilon^2 e^{\Gamma t} [1 + 2(1 - \varepsilon^2) \varpi^2 e^{-\Gamma t}]^2 (1 - r_0 \cos \theta_0)}{8 [1 + 2(1 - \varepsilon^2) \varpi e^{-\Gamma t/2} \sqrt{1 - \varpi^2 e^{-\Gamma t}}]^2} . \quad (6.120)$$

Combinando este resultado com g_t^{QF} dado na Eq. (6.110), a métrica $g_t^f = g_t^{\text{QF}} + \tilde{g}_t^f$ finalmente se escreve

$$g_t^f = \frac{e^{\Gamma t} (1 - r_0 \cos \theta_0)}{8} \left[\frac{1 - \varepsilon^2 \varpi^2 e^{-\Gamma t}}{1 - \varpi^2 e^{-\Gamma t}} + \frac{\varepsilon^2 [1 + 2(1 - \varepsilon^2) \varpi^2 e^{-\Gamma t}]^2}{\left(1 + 2(1 - \varepsilon^2) \varpi e^{-\Gamma t/2} \sqrt{1 - \varpi^2 e^{-\Gamma t}}\right)^2} \right] . \quad (6.121)$$

A partir de ambos resultados, o comprimento $\ell_\gamma^{\text{WY}} = \int_0^\tau dt \sqrt{g_t^f} |d\lambda_t/dt|$ da trajetória γ descrita pela evolução do estado ρ_t no espaço de estados é escrito como

$$\ell_\gamma^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau) = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \varepsilon^2} \int_0^{\Gamma\tau} du \varpi e^{-u/2} \tilde{\Psi}_u(r_0, \theta_0, \varepsilon) , \quad (6.122)$$

onde definimos

$$\tilde{\Psi}_u(r_0, \theta_0, \varepsilon) = \sqrt{\tilde{\Omega}_u(r_0, \theta_0, \varepsilon) + \frac{1 - \varepsilon^2 \varpi^2 e^{-u}}{1 - \varpi^2 e^{-u}}} \quad (6.123)$$

e

$$\tilde{\Omega}_u(r_0, \theta_0, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 [1 + 2(1 - \varepsilon^2) \varpi^2 e^{-u}]^2}{\left[1 + 2(1 - \varepsilon^2) \varpi e^{-u/2} \sqrt{1 - \varpi^2 e^{-u}}\right]^2} . \quad (6.124)$$

O tempo mínimo de evolução da dinâmica é obtido resolvendo a desigualdade

$$\mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau) \leq \ell_\gamma^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau) , \quad (6.125)$$

em que $\mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_\tau)$ é o ângulo de Hellinger, ou seja, a distância geodésica associada a métrica de Wigner-Yanase dada na Eq. (6.71) e cujo cálculo analítico requer o produto escalar na Eq. (6.114).

6.3.3 Métrica mínima (média harmônica)

Dada a evolução de ρ_t no espaço de estados, a função de MC que caracteriza a métrica mínima se reduz a $c_f(p_+, p_-) = 1/(2p_+p_-)$ já que $p_+ + p_- = 1$. Neste caso, segue que

$$c_f(p_+, p_-) - 2 = \frac{2\vartheta_t^2}{1 - \vartheta_t^2} \quad (6.126)$$

e o termo $\tilde{g}_t^f$ dado na Eq. (6.108) se escreve

$$\tilde{g}_t^f = \frac{\varepsilon^2 e^{2\Gamma t} [1 + 2\varpi^2(1 - \varepsilon^2)e^{-\Gamma t}]^2}{16(1 - \varepsilon^2)(1 - \varpi^2 e^{-\Gamma t})} . \quad (6.127)$$

Combinando este resultado com a contribuição g_t^{QF} dada na Eq. (6.110), obtemos

$$g_t^f = \frac{e^{2\Gamma t} [\varepsilon^2 + 4\varpi^2 e^{-\Gamma t}(1 - \varepsilon^2)]}{16(1 - \varepsilon^2)(1 - \varpi^2 e^{-\Gamma t})} . \quad (6.128)$$

A partir desta expressão, o comprimento $\ell_\gamma^{\min} = \int_0^\tau dt \sqrt{g_t^f} |d\lambda_t/dt|$ da trajetória descrita pela evolução do estado ρ_t no espaço de estados é¹²

$$\ell_\gamma^{\min}(\rho_0, \rho_\tau) = \Theta(\Phi_\tau) - \Theta(\Phi_0) , \quad (6.129)$$

com

$$\Phi_u = \arcsin(\varpi e^{-\Gamma u/2}) , \quad \Delta^2 = \frac{\varepsilon^2}{4(1 - \varepsilon^2)} \quad (6.130)$$

e definimos a função

$$\begin{aligned} \Theta(x) = & \arctan\left(\frac{\cos x}{\sqrt{\Delta^2 + \sin^2 x}}\right) + \Delta \operatorname{arctanh}(\cos x) \\ & + \frac{\Delta}{2} \ln \left[1 - \frac{2 \cos x}{2 \cos^2(x/2) + \Delta (\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \sin^2 x})} \right] . \end{aligned} \quad (6.131)$$

Infelizmente, nossa análise do limite quântico de velocidade para a métrica mínima ficará incompleta devido a ausência de resultados analíticos para a distância geodésica associada a esta métrica. Entretanto, na próxima subseção analisaremos graficamente o comportamento da função $\ell_\gamma^{\min}(\rho_0, \rho_\tau)$ dada na Eq. (6.129) em comparação àquele devido às métricas de Fisher e Wigner-Yanase.

¹²A Eq. (6.129) é obtida reescrevendo a integral $\int_0^\tau dt \sqrt{g_t^f} |d\lambda_t/dt|$, com g_t^f dada na Eq. (6.128), em termos da parametrização $\sin \Phi = \varpi e^{-u/2}$, onde $d\Phi = -(1/2) \tan \Phi du$ e $u = \Gamma t$.

6.3.4 Análise do QSL

Na Fig. 6.7 comparamos os comprimentos $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ para as trajetórias dadas nas Eqs. (6.112), (6.122) e (6.129) que correspondem aos três exemplos de métricas Riemannianas contrativas: métrica de Fisher e Wigner-Yanase e a métrica associada à função de MC mínima, respectivamente. Analisando as Figs. 6.7(a) e 6.7(b), note que fixando o ângulo polar θ_0 do estado inicial, o comprimento $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ da trajetória γ descrita pelo estado ρ_t aumenta à medida que a pureza r_0 aumenta. Analogamente, as Figs. 6.7(c) e 6.7(d) mostram que fixando a pureza r_0 do estado inicial, então $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ aumenta à medida que o ângulo polar θ_0 aumenta. As Figs. 6.7(e) e 6.7(f) mostram que, fixando o ângulo polar inicial $\theta_0 = 0$, a contribuição puramente quântica $\mathcal{Q}_t^f$ se anula tal que o comprimento $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ da trajetória γ na Eq. (4.25) se torna independente da escolha da função $c_f(x, y)$ de MC, ou seja, cada $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ relativo às três métricas analisadas colapsa em uma única curva. A contribuição não-trivial ao comprimento $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ é neste caso exclusivamente devida ao termo $\mathcal{F}_t$, o qual agora depende unicamente das populações p_j do estado evoluído. Além disso, repare que a amplitude de $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ decresce à medida que aumentamos a pureza inicial r_0 , isto é, $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau) \approx 0$ quando $\theta_0 = 0$ e $r_0 \rightarrow 1$ tal que o estado do sistema se aproxima cada vez mais de $|0\rangle\langle 0|$. Esta característica destaca o fato de que o estado $|0\rangle$ no pólo norte da esfera de Bloch permanece invariante sob a ação do canal de atenuação de amplitude.

Vamos analisar agora o comportamento do QSL na Eq. (4.25) adotando as métricas de Fisher e Wigner-Yanase já que dispomos de expressões analíticas para suas respectivas distâncias geodésicas no espaço de estados. Na Fig. 6.8, comparamos as diferenças relativas δ_γ^f (vide Eq. (4.26)) para ambas métricas no contexto do canal de atenuação de amplitude. Por um lado, nas Figs. 6.8(a) e 6.8(b), fixando o ângulo polar θ_0 , note que a intensidade de δ_γ^f aumenta em resposta ao aumento da pureza r_0 . Por outro lado, nas Figs. 6.8(c) e 6.8(d), fixando a pureza r_0 , note que a intensidade de δ_γ^f aumenta em resposta ao aumento do ângulo polar θ_0 . Repare que a métrica de Wigner-Yanase fornece um QSL com maior grau de saturação comparativamente ao limite quântico de velocidade que decorre da métrica de Fisher. Analisando as Figs. 6.8(a), 6.8(b), 6.8(c) e 6.8(d), este comportamento é mais nítido se nos restringirmos à dinâmica de tempos curtos. Em particular, quando $\theta_0 = 0$, as Figs. 6.8(e) e 6.8(f) mostram que os QSLs para ambas métricas se saturam com a

mesma uniformidade. A exemplo da discussão envolvendo os canais de atenuação de fase paralela e transversal, este resultado revela de forma clara como é possível obter um limite quântico de velocidade mais *tight* na evolução de estados quânticos ao considerarmos uma abordagem além daquela já tradicional que se baseia na métrica de Fisher.

Na Fig. 6.9(a) ilustramos a figura de mérito $\delta_\gamma^{\text{WY}}$ em função da pureza r_0 e do ângulo polar θ_0 para $\Gamma\tau = 10$ fixo. Observe que $\delta_\gamma^{\text{WY}} \approx 0$ em praticamente todo o plano (r_0, θ_0) . Em outras palavras, o QSL tem saturação aproximadamente global tal que a métrica de Wigner-Yanase representa a escolha ótima no processo de minimização da Eq. (4.27) discutido no Capítulo 4. A Fig. 6.9(b) apresenta a diferença $\Delta\delta_\gamma = \delta_\gamma^{\text{QF}} - \delta_\gamma^{\text{WY}}$ (vide Eq. (6.77) na Subseção 6.2.1) em função da pureza r_0 e do ângulo polar θ_0 , tomando $\Gamma\tau = 10$ fixo. Analisando a porção inferior direita da figura, observe que existe um conjunto de estados com $r_0 \approx 1$ e $\theta_0 \approx 0$ nas imediações do estado $|0\rangle\langle 0|$ para os quais $\Delta\delta_\gamma \approx 0$. Conforme explicamos nos parágrafos anteriores, no limite $r_0 = 1$ e $\theta_0 = 0$ a contribuição quântica $\mathcal{Q}_t^f$ é identicamente nula para qualquer métrica contrativa e, portanto, $g_t^f = \mathcal{F}_t$. Neste caso, segue que $\ell_\gamma^f = \int_0^\tau dt \sqrt{\mathcal{F}_t} \forall f$, isto é, $\delta_\gamma^{\text{QF}} = \delta_\gamma^{\text{WY}}$, e $\Delta\delta_\gamma = 0$. Em face deste raciocínio, obtém-se que $\Delta\delta_\gamma \approx 0$ à medida que $r_0 \approx 1$ e $\theta_0 \approx 0$. À exceção deste caso, observe que $\Delta\delta_\gamma > 0$, ou seja, $\delta_\gamma^{\text{QF}} > \delta_\gamma^{\text{WY}}$, em praticamente todo o espaço de parâmetros (r_0, θ_0) e, portanto, o QSL associado à métrica de Wigner-Yanase é mais *tight*.

Figura 6.7 – Comprimento $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$ da trajetória descrita pela evolução do estado inicial ρ_0 considerando as métricas correspondentes às funções de MC: $f_{QF}(u) = f_{\max}(u)$ (linha sólida vermelha), $f_{WY}(u)$ (linha tracejada em azul) e $f_{\min}(u)$ (linha roxa pontilhada) para (a) $r_0 = 1/2, \theta_0 = \pi/2$, (b) $r_0 = 3/4, \theta_0 = \pi/2$, (c) $r_0 = 1/4, \theta_0 = \pi/4$, (d) $r_0 = 1/4, \theta_0 = \pi/2$, (e) $r_0 = 1/4, \theta_0 = 0$ e (f) $r_0 = 1/2, \theta_0 = 0$.

Fonte: Adaptada de PIRES et al. (140)

Figura 6.8 – Diferença relativa δ_γ^f para o canal de atenuação de amplitude considerando a métrica de Fisher (linha vermelha contínua) e a métrica de Wigner-Yanase (linha azul tracejada) para (a) $r_0 = 1/2, \theta_0 = \pi/2$, (b) $r_0 = 3/4, \theta_0 = \pi/2$, (c) $r_0 = 1/4, \theta_0 = \pi/4$, (d) $r_0 = 1/4, \theta_0 = \pi/2$, (e) $r_0 = 1/4, \theta_0 = 0$ e (f) $r_0 = 1/2, \theta_0 = 0$.

Fonte: Adaptada de PIRES et al. (140)

Figura 6.9 – Gráfico (a) da figura de mérito $\delta_\gamma^{\text{WY}}$ relativa à métrica de Wigner-Yanase, e (b) da diferença $\Delta\delta_\gamma \equiv \delta_\gamma^{\text{QF}} - \delta_\gamma^{\text{WY}}$ entre as figuras de mérito correspondentes às métricas de Fisher e Wigner-Yanase, respectivamente, em função de r_0 e θ_0 , no canal de atenuação de amplitude. Em ambos casos, $\Gamma\tau = 10$.

Fonte: Adaptada de PIRES et al. (140)

Capítulo 7

Conclusões

Nesta tese exploramos a não-unicidade de métricas Riemannianas no espaço de estados quânticos com o intuito de introduzir uma família infinita de limites quânticos de velocidade ou *quantum speed limits* (QSLs). Esta abordagem está fortemente baseada na conexão fundamental entre geometria de estados quânticos e medidas de distinguibilidade estatística traduzida matematicamente através do teorema de Morozova-Čencov-Petz (MCP). Neste sentido, cada medida geométrica de distinguibilidade entre os estados quânticos envolvidos na dinâmica proporciona um QSL distinto. Por exemplo, o trabalho de Taddei et al. (82) representa um caso particular onde esta medida de distinguibilidade é dada pela informação de Fisher.

Nosso tratamento fornece uma interpretação unificada que inclui processos físicos arbitrários cuja evolução é governada por dinâmicas unitárias ou não-unitárias, ou seja, permite avaliar o QSL para sistemas quânticos fechados e abertos. É interessante notar que o cálculo do QSL requer essencialmente a decomposição espectral do estado evoluído sob a dinâmica que governa o processo físico analisado. Este aspecto torna nossa abordagem muito mais atraente se comparada à pletora de demais resultados já reportados na literatura cujo cálculo pode exigir, por exemplo, o uso de técnicas de otimização ou a solução de equações mestras para o operador densidade reduzido.

Além disso, nossos resultados elucidam de forma inédita e clara o papel desempenhado no QSL pelas contribuições devidas às populações do estado evoluído e às coerências de sua variação temporal. Esta característica pode contribuir potencialmente no desenvolvimento de tecnologias quânticas mais rápidas no processamento da informação onde as coerências

do estado que descreve o sistema físico aceleram sua evolução. É importante ressaltar ainda que nosso tratamento incorpora diversas abordagens já reportadas na literatura e abre caminho para novas idéias e compreensões acerca de QSLs.

Investigando exemplos de processos físicos unitários e não-unitários e recorrendo a algumas métricas Riemannianas contrativas, verificamos de fato como a escolha da informação de Fisher – a métrica no espaço de estados que corresponde à função de Morozova-Čencov máxima – representa apenas um caso especial, embora robusto, que nem sempre fornece o QSL mais *tight*. Em especial, dada a dinâmica relativa ao canal de atenuação de amplitude, mostramos como definir um QSL mais *tight* via a métrica de Wigner-Yanase se comparado àquele decorrente da métrica de Fisher. A função de Wigner-Yanase define uma métrica contrativa que, embora reconhecidamente uma medida da incerteza de observáveis locais que caracteriza correlações não-clássicas (183) e também um quantificador de assimetria de estados quânticos (187), ainda recebe pouca atenção na literatura especializada.

Este trabalho sugere explorar como a não-unicidade de uma métrica Riemanniana contrativa no espaço de estados quânticos influencia também em outros cenários de relevância no processamento da informação quântica. Em vários destes cenários nos quais a informação de Fisher foi adotada e devidamente privilegiada, nossa abordagem poderia levar a uma investigação baseada na geometria da informação. Por exemplo, considerando o problema de estimativa de parâmetros que representa um dos grandes desafios da metrologia quântica, o inverso da informação de Fisher define um limite inferior para o desvio quadrático médio de qualquer estimador de precisão de parâmetros por meio do chamado limite de Cramér-Rao. (110,156) Assim, explorando a hierarquia dentre as métricas Riemannianas contrativas, seria possível através de nossos resultados fornecer limites mais gerais na sensibilidade de estados quânticos às classes de evoluções que codificam parâmetros desconhecidos. A desigualdade de Cramér-Rao pode ser saturada assintoticamente no limite de um grande número de repetições da estimativa e sob um processo de otimização da informação de Fisher. (156) No caso realístico de um número finito de repetições, a estimativa fornece resultados mais *tights* ao se introduzir uma série de correções a este limite inferior. (219) Motivados pelos recentes trabalhos de Brody (220,221) nos quais a métrica de Wigner-Yanase está associada a velocidade de evolução de um estado quântico misto, podemos utilizar os resultados do presente trabalho para investigar

correções finitas à desigualdade de Cramér-Rao proveniente da métrica de Wigner-Yanase procurando por limites inferiores mais *tights*, sobretudo no que concerne à estimativa de parâmetros codificados na dinâmica não-unitária.

A idéia de métricas contrativas e geometria de estados quânticos também se estende, por exemplo, aos domínios da física da matéria condensada. Em especial, uma descrição geométrica baseada na fidelidade de Uhlmann, ou seja, na métrica relativa a informação de Fisher quântica, provou ser frutífera no estudo da criticalidade quântica em sistemas de spin. (3) A essência deste trabalho está na relação entre transições de fase e o comportamento da curvatura escalar de um espaço de parâmetros termodinâmicos obtida via a métrica de Fubini-Study – uma particularização da métrica de Fisher para estados puros no espaço projetivo. Neste sentido, o formalismo da família de métricas contrativas e a evolução de estados mistos poderia generalizar os resultados precedentes e contribuir na busca por novos *insights* e identificações mais claras de fenômenos críticos quânticos.

Uma aplicação interessante destes resultados se refere ao efervescente campo da termodinâmica quântica. Em resumo, nossa abordagem forneceria uma generalização e clara interpretação no cenário quântico ao comprimento termodinâmico (222), um conceito originalmente baseado na informação de Fisher que define a única métrica Riemanniana contrativa no espaço de probabilidades clássicas. Ainda no contexto da termodinâmica quântica, devido ao estreito paralelo entre geometria e entropia (111), seria interessante investigar o papel desempenhado pela não-unicidade das métricas contrativas na existência de possíveis novas interpretações para a segunda lei da termodinâmica. (223, 224)

Um passo natural em direção à continuidade deste trabalho se refere a análise do papel das correlações quânticas no QSL. Esta proposta vai de encontro ao resultado recentemente reportado por del Campo et al. (84) em que o emaranhamento pode contribuir à rapidez na evolução de um estado quântico. Além disso, seria importante estender nossa investigação acerca de sistemas quânticos abertos cuja evolução é governada por uma dinâmica não-Markoviana. A motivação desta proposta está alinhada com o trabalho de Deffner e Lutz (85) que aponta para uma aceleração no QSL devido a efeitos de memória do sistema quântico.

Por fim, seria oportuno promover uma investigação experimental de nossos resultados para ambos sistemas quânticos fechado e aberto via técnicas experimentais de Ressonância

Magnética Nuclear. De fato, os canais de atenuação de fase e atenuação de amplitude são fontes de decoerência naturais nestas implementações experimentais e nossos resultados podem ser acessados via medidas de *ensemble* de spins. (225, 226)

Referências

- 1 NIELSEN, M.; CHUANG, I. L. **Quantum computation and quantum information**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- 2 ZANARDI, P.; VENUTI, L. C.; GIORDA, P. Bures metric over thermal state manifolds and quantum criticality. **Physical Review A**, v. 76, n. 6, p. 062318, 2007. doi: [10.1103/PhysRevA.76.062318](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.062318).
- 3 ZANARDI, P.; GIORDA, P.; COZZINI, M. Information-theoretic differential geometry of quantum phase transitions. **Physical Review Letters**, v. 99, n. 10, p. 100603, 2007. doi: [10.1103/PhysRevLett.99.100603](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.100603).
- 4 ZANARDI, P.; PARIS, M. G. A.; VENUTI, L. C. Quantum criticality as a resource for quantum estimation. **Physical Review A**, v. 78, n. 4, p. 042105, 2008. doi: [10.1103/PhysRevA.78.042105](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.042105).
- 5 LLOYD, S. Ultimate physical limits to computation. **Nature**, v. 406, n. 6799, p. 1047, 2000. doi: [10.1038/35023282](https://doi.org/10.1038/35023282).
- 6 _____. Computational capacity of the universe. **Physical Review Letters**, v. 88, n. 23, p. 237901, 2002. doi: [10.1103/PhysRevLett.88.237901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.237901).
- 7 LIN, J.; MARCOLLI, M.; OOGURI, H.; STOICA, B. Locality of gravitational systems from entanglement of conformal field theories. **Physical Review Letters**, v. 114, n. 22, p. 221601, 2015. doi: [10.1103/PhysRevLett.114.221601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.221601).
- 8 LASHKARI, N.; RAAMSDONK, M. V. Canonical energy is quantum Fisher information. **Journal of High Energy Physics**, v. 2016, n. 4, p. 1–26, 2016. doi: [10.1007/JHEP04\(2016\)153](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2016)153).
- 9 LANGE, G. et al. de. Realization of microwave quantum circuits using hybrid superconducting-semiconducting nanowire Josephson elements. **Physical Review Letters**, v. 115, n. 12, p. 127002, 2015. doi: [10.1103/PhysRevLett.115.127002](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.127002).
- 10 DIVINCENZO, D. P. Spins for quantum information processing. In: AWSCHALOM, D. D.; LOSS, D.; SAMARTH, N. (Ed.). **Semiconductor spintronics and quantum computation**. Berlin: Springer-Verlag, 2002. p. 221–227.
- 11 LANYON, B. P. et al. Measurement-based quantum computation with trapped ions. **Physical Review Letters**, v. 111, n. 21, p. 210501, 2013. doi: [10.1103/PhysRevLett.111.210501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.210501).
- 12 SCHINDLER, P. et al. A quantum information processor with trapped ions. **New Journal of Physics**, v. 15, n. 12, p. 123012, 2013. doi: [10.1088/1367-2630/15/12/123012](https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/12/123012).

- 13 SLODIČKA, L. et al. Atom-atom entanglement by single-photon detection. **Physical Review Letters**, v. 110, n. 8, p. 083603, 2013. doi: [10.1103/PhysRevLett.110.083603](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.083603).
- 14 STUTE, A. et al. Quantum-state transfer from an ion to a photon. **Nature Photonics**, v. 7, n. 3, p. 219–222, 2013. doi: [10.1038/nphoton.2012.358](https://doi.org/10.1038/nphoton.2012.358).
- 15 MONROE, C. et al. Demonstration of a fundamental quantum logic gate. **Physical Review Letters**, v. 75, n. 25, p. 4714–4717, 1995. doi: [10.1103/PhysRevLett.75.4714](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.4714).
- 16 BRUNE, M. et al. Observing the progressive decoherence of the “meter” in a quantum measurement. **Physical Review Letters**, v. 77, n. 24, p. 4887–4890, 1996. doi: [10.1103/PhysRevLett.77.4887](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.4887).
- 17 COMMITTEE on Science and Committee on Homeland and National Security of the National Science and Technology Council. **Advancing quantum information science: national challenges and opportunities**. 2016. Disponível em: https://www.whitehouse.gov/sites/whitehouse.gov/files/images/Quantum_Info_Sci_Report_2016_07_22%20final.pdf. Acesso em: 20 jan. 2017.
- 18 DE TOUZALIN, A. et al. **Quantum manifesto**. 2016. Disponível em: http://quope.eu/system/files/u7/93056_Quantum%20Manifesto_WEB.pdf. Acesso em: 20 jan. 2017.
- 19 OSBORNE, T. J.; NIELSEN, M. A. Entanglement in a simple quantum phase transition. **Physical Review A**, v. 66, n. 3, p. 032110, 2002. doi: [10.1103/PhysRevA.66.032110](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.66.032110).
- 20 WU, L.-A.; SARANDY, M. S.; LIDAR, D. A. Quantum phase transitions and bipartite entanglement. **Physical Review Letters**, v. 93, n. 25, p. 250404, 2004. doi: [10.1103/PhysRevLett.93.250404](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.250404).
- 21 DILLENSCHNEIDER, R. Quantum discord and quantum phase transition in spin chains. **Physical Review B**, v. 78, n. 22, p. 224413, 2008. doi: [10.1103/PhysRevB.78.224413](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.78.224413).
- 22 MÜLLER, M. et al. Simulating open quantum systems: from many-body interactions to stabilizer pumping. **New Journal of Physics**, v. 13, n. 8, p. 085007, 2011. doi: [10.1088/1367-2630/13/8/085007](https://doi.org/10.1088/1367-2630/13/8/085007).
- 23 LIDAR, D. A.; CHUANG, I. L.; WHALEY, K. B. Decoherence-free subspaces for quantum computation. **Physical Review Letters**, v. 81, n. 12, p. 2594–2597, 1998. doi: [10.1103/PhysRevLett.81.2594](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.2594).
- 24 AOLITA, L. et al. Universal quantum computation in decoherence-free subspaces with hot trapped ions. **Physical Review A**, v. 75, n. 5, p. 052337, 2007. doi: [10.1103/PhysRevA.75.052337](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.75.052337).
- 25 MARTÍN-MARTÍNEZ, E. **Relativistic quantum information: developments in quantum information in general relativistic scenarios**. 2011. 287 p. Tese (Doutorado em Física) – Universidad Complutense de Madrid (UCM), Madrid, 2011. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1106.0280>. Acesso em: 20 jan. 2017.

- 26 FUENTES-SCHULLER, I.; MANN, R. B. Alice falls into a black hole: entanglement in noninertial frames. **Physical Review Letters**, v. 95, n. 12, p. 120404, 2005. doi: [10.1103/PhysRevLett.95.120404](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.120404).
- 27 ALSING, P. M.; FUENTES-SCHULLER, I.; MANN, R. B.; TESSIER, T. E. Entanglement of Dirac fields in noninertial frames. **Physical Review A**, v. 74, n. 3, p. 032326, 2006. doi: [10.1103/PhysRevA.74.032326](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.74.032326).
- 28 BALL, J. L.; FUENTES-SCHULLER, I.; SCHULLER, F. P. Entanglement in an expanding spacetime. **Physics Letters A**, v. 359, n. 6, p. 550, 2006. doi: [10.1016/j.physleta.2006.07.028](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.07.028).
- 29 STEEG, G. V.; MENICUCCI, N. C. Entangling power of an expanding universe. **Physical Review D**, v. 79, n. 4, p. 044027, 2009. doi: [10.1103/PhysRevD.79.044027](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.044027).
- 30 TERASHIMA, H.; UEDA, M. Spin decoherence by spacetime curvature. **Journal of Physics A: mathematical and general**, v. 38, n. 9, p. 2029, 2005. doi: [10.1088/0305-4470/38/9/013](https://doi.org/10.1088/0305-4470/38/9/013).
- 31 PAN, Q.; JING, J. Hawking radiation, entanglement, and teleportation in the background of an asymptotically flat static black hole. **Physical Review D**, v. 78, n. 6, p. 065015, 2008. doi: [10.1103/PhysRevD.78.065015](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.065015).
- 32 MARTÍN-MARTÍNEZ, E.; SMITH, A. R. H.; TERNO, D. R. Spacetime structure and vacuum entanglement. **Physical Review D**, v. 93, n. 4, p. 044001, 2016. doi: [10.1103/PhysRevD.93.044001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.044001).
- 33 SIMONS FOUNDATION. **It from Qubit**: Simons collaboration on quantum fields, gravity, and information. 2016. Disponível em: <https://www.simonsfoundation.org/mathematics-and-physical-science/it-from-qubit-simons-collaboration-on-quantum-fields-gravity-and-information/>. Acesso em: 20 jan. 2017.
- 34 IT FROM QUBIT SUMMER SCHOOL, 2016, Waterloo. Perimeter Institute for Theoretical Physics. Disponível em: <http://www.perimeterinstitute.ca/conferences/it-qubit-summer-school>. Acesso em: 20 jan. 2017.
- 35 ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Physical Review Letters**, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016. doi: [10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102).
- 36 IBM. **IBM Quantum Experience**. 2016. Disponível em: <http://www.research.ibm.com/quantum/>. Acesso em: 20 jan. 2017.
- 37 ALSINA, D.; LATORRE, J. I. Experimental test of Mermin inequalities on a five-qubit quantum computer. **Physical Review A**, v. 94, n. 1, p. 012314, 2016. doi: [10.1103/PhysRevA.94.012314](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.94.012314).
- 38 DEVITT, S. J. Performing quantum computing experiments in the cloud. **Physical Review A**, v. 94, n. 3, p. 032329, 2016. doi: [10.1103/PhysRevA.94.032329](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.94.032329).
- 39 MICROSOFT Research. **Station Q**. 2016. Disponível em: <https://stationq.microsoft.com>. Acesso em: 20 jan. 2017.

- 40 PASHBY, T. **Time and the foundations of quantum mechanics**. 2014. 209 p. Tese (Doutorado em Física) – Department of History and Philosophy of Science, University of Pittsburgh, Pittsburgh, 2014. Disponível em: <<http://philsci-archive.pitt.edu/10723/>>. Acesso em: 20 jan. 2017.
- 41 PAULI, W. Die allgemeinen prinzipien der wellenmechanik. In: **Handbuch der Physik**. Berlin: Springer, 1933. v. 24, p. 83–272.
- 42 _____. **General principles of quantum mechanics**. Berlin: Springer, 1958.
- 43 BUSCH, P. The time-energy uncertainty relation. In: MUGA, G.; MAYATO, R. S.; EGUSQUIZA, I. n. (Ed.). **Time in quantum mechanics**. 2nd. ed. Berlin: Springer, 2008. v. 1, p. 73–105. (Lecture notes in physics, 734).
- 44 GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Quantum time. **Physical Review D**, v. 92, n. 4, p. 045033, 2015. doi: [10.1103/PhysRevD.92.045033](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.045033).
- 45 PAGE, D. N.; WOOTTERS, W. K. Evolution without evolution: dynamics described by stationary observables. **Physical Review D**, v. 27, n. 12, p. 2885–2892, 1983. doi: [10.1103/PhysRevD.27.2885](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.27.2885).
- 46 MANDELSTAM, L.; TAMM, I. The uncertainty relation between energy and time in non-relativistic quantum mechanics. **Journal of Physics URSS**, v. 9, n. 4, p. 249, 1945.
- 47 MARGOLUS, N.; LEVITIN, L. B. The maximum speed of dynamical evolution. **Physica D**, v. 120, n. 1–2, p. 188, 1998. doi: [10.1016/S0167-2789\(98\)00054-2](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(98)00054-2).
- 48 HEISENBERG, W. Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik. **Zeitschrift für Physik**, v. 43, n. 3, p. 172–198, 1927. doi: [10.1007/BF01397280](https://doi.org/10.1007/BF01397280).
- 49 SCHRÖDINGER, E. Zur quantendynamik des elektrons. **Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften**, v. 3, p. 63–72, 1931.
- 50 _____. Spezielle relativitätstheorie und quantenmechanik. **Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften**, v. 3, p. 238–247, 1931.
- 51 GALAPON, E. A. Self-adjoint time operator is the rule for discrete semi-bounded Hamiltonians. **Proceedings of the Royal Society of London A: mathematical, physical and engineering sciences**, v. 458, n. 2027, p. 2671–2689, 2002. doi: [10.1098/rspa.2002.0992](https://doi.org/10.1098/rspa.2002.0992).
- 52 GALAPON, E. Pauli’s theorem and quantum canonical pairs: the consistency of a bounded, self-adjoint time operator canonically conjugate to a hamiltonian with non-empty point spectrum. **Proceedings of the Royal Society of London A: mathematical, physical and engineering sciences**, v. 458, n. 2018, p. 451–472, 2002. doi: [10.1098/rspa.2001.0874](https://doi.org/10.1098/rspa.2001.0874).
- 53 GARRISON, J. C.; WONG, J. J. Canonically conjugate pairs, uncertainty relations, and phase operators. **Journal of Mathematical Physics**, v. 11, n. 8, p. 2242–2249, 1970. doi: [10.1063/1.1665388](https://doi.org/10.1063/1.1665388).

- 54 HEGERFELDT, G. C.; MUGA, J. G. Symmetries and time operators. **Journal of Physics A: mathematical and theoretical**, v. 43, n. 50, p. 505303, 2010. doi: [10.1088/1751-8113/43/50/505303](https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/50/505303).
- 55 AMARAL, B.; BARAVIEIRA, A. T.; TERRA CUNHA, M. O. Mecânica quântica para matemáticos em formação. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 28., 2011. Rio de Janeiro. **Resumos ...** Rio de Janeiro: IMPA, 2011. p. 210.
- 56 WIGNER, E. P. On the time-energy uncertainty relation. In: SALAM, A.; WIGNER, E. P. (Ed.). **Aspects of quantum theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 1972. p. 237–247.
- 57 SCHULMAN, L. S. **Time's arrows and quantum measurement**. United Kingdom: Cambridge University Press, 1997.
- 58 MISRA, B.; SUDARSHAN, E. C. G. The Zeno's paradox in quantum theory. **Journal of Mathematical Physics**, v. 18, n. 4, p. 756–763, 1977. doi: [10.1063/1.523304](https://doi.org/10.1063/1.523304).
- 59 AHARONOV, Y.; BOHM, D. Time in the quantum theory and the uncertainty relation for time and energy. **Physical Review**, v. 122, n. 5, p. 1649–1658, 1961. doi: [10.1103/PhysRev.122.1649](https://doi.org/10.1103/PhysRev.122.1649).
- 60 FLEMING, G. A unitarity bound on the evolution of nonstationary states. **Il Nuovo Cimento A**, v. 16, n. 2, p. 232–240, 1973. doi: [10.1007/BF02819419](https://doi.org/10.1007/BF02819419).
- 61 BHATTACHARYYA, K. Quantum decay and the Mandelstam-Tamm time-energy inequality. **Journal of Physics A: mathematical and general**, v. 16, n. 13, p. 2993, 1983. doi: [10.1088/0305-4470/16/13/021](https://doi.org/10.1088/0305-4470/16/13/021).
- 62 ANANDAN, J.; AHARONOV, Y. Geometry of quantum evolution. **Physical Review Letters**, v. 65, n. 14, p. 1697, 1990. doi: [10.1103/PhysRevLett.65.1697](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.65.1697).
- 63 PATI, A. K. Relation between “phases” and “distance” in quantum evolution. **Physics Letters A**, v. 159, n. 3, p. 105, 1991. doi: [10.1016/0375-9601\(91\)90255-7](https://doi.org/10.1016/0375-9601(91)90255-7).
- 64 UHLMANN, A. An energy dispersion estimate. **Physics Letters A**, v. 161, n. 4, p. 329, 1992. doi: [10.1016/0375-9601\(92\)90555-Z](https://doi.org/10.1016/0375-9601(92)90555-Z).
- 65 VAIDMAN, L. Minimum time for the evolution to an orthogonal quantum state. **American Journal of Physics**, v. 60, n. 2, p. 182–183, 1992. doi: [10.1119/1.16940](https://doi.org/10.1119/1.16940).
- 66 UFFINK, J. The rate of evolution of a quantum state. **American Journal of Physics**, v. 61, n. 10, p. 935–936, 1993. doi: [10.1119/1.17368](https://doi.org/10.1119/1.17368).
- 67 PFEIFER, P. How fast can a quantum state change with time? **Physical Review Letters**, v. 70, n. 22, p. 3365, 1993. doi: [10.1103/PhysRevLett.70.3365](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.3365).
- 68 PFEIFER, P.; FRÖHLICH, J. Generalized time-energy uncertainty relations and bounds on lifetimes of resonances. **Reviews of Modern Physics**, v. 67, n. 4, p. 759–779, 1995. doi: [10.1103/RevModPhys.67.759](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.67.759).
- 69 PATI, A. K. Geometric aspects of noncyclic quantum evolutions. **Physical Review A**, v. 52, n. 4, p. 2576, 1995. doi: [10.1103/PhysRevA.52.2576](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.52.2576).

- 70 ANANDAN, J. S.; PATI, A. K. Geometry of the Josephson effect. **Physics Letters A**, v. 231, n. 1–2, p. 29, 1997. doi: [10.1016/S0375-9601\(97\)00290-9](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(97)00290-9).
- 71 PATI, A. K. Uncertainty relation of Anandan-Aharonov and intelligent states. **Physics Letters A**, v. 262, n. 4–5, p. 296, 1999. doi: [10.1016/S0375-9601\(99\)00701-X](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(99)00701-X).
- 72 BRODY, D. C. Elementary derivation for passage times. **Journal of Physics A: mathematical and general**, v. 36, n. 20, p. 5587, 2003. doi: [10.1088/0305-4470/36/20/314](https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/20/314).
- 73 GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Quantum limits to dynamical evolution. **Physical Review A**, v. 67, n. 5, p. 052109, 2003. doi: [10.1103/PhysRevA.67.052109](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.67.052109).
- 74 LUO, S. How fast can a quantum state evolve into a target state? **Physica D: nonlinear phenomena**, v. 189, n. 1-2, p. 1–7, 2004. doi: [10.1016/j.physd.2003.10.001](https://doi.org/10.1016/j.physd.2003.10.001).
- 75 _____. On survival probability of quantum states. **Journal of Physics A: mathematical and general**, v. 38, n. 13, p. 2991, 2005. doi: [10.1088/0305-4470/38/13/012](https://doi.org/10.1088/0305-4470/38/13/012).
- 76 KOSIŃSKI, P.; ZYCH, M. Elementary proof of the bound on the speed of quantum evolution. **Physical Review A**, v. 73, n. 2, p. 024303, 2006. doi: [10.1103/PhysRevA.73.024303](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.024303).
- 77 LEVITIN, L. B.; TOFFOLI, T. Fundamental limit on the rate of quantum dynamics: the unified bound is tight. **Physical Review Letters**, v. 103, n. 16, p. 160502, 2009. doi: [10.1103/PhysRevLett.103.160502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.160502).
- 78 HAMMA, A. et al. Lieb-Robinson bounds and the speed of light from topological order. **Physical Review Letters**, v. 102, n. 1, p. 017204, 2009. doi: [10.1103/PhysRevLett.102.017204](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.017204).
- 79 JONES, P. J.; KOK, P. Geometric derivation of the quantum speed limit. **Physical Review A**, v. 82, n. 2, p. 022107, 2010. doi: [10.1103/PhysRevA.82.022107](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.022107).
- 80 DEFFNER, S.; LUTZ, E. Energy-time uncertainty relation for driven quantum systems. **Journal of Physics A: mathematical and theoretical**, v. 46, n. 33, p. 335302, 2013. doi: [10.1088/1751-8113/46/33/335302](https://doi.org/10.1088/1751-8113/46/33/335302).
- 81 HEGERFELDT, G. C. Driving at the quantum speed limit: optimal control of a two-level system. **Physical Review Letters**, v. 111, n. 26, p. 260501, 2013. doi: [10.1103/PhysRevLett.111.260501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.260501).
- 82 TADDEI, M. M. et al. Quantum speed limit for physical processes. **Physical Review Letters**, v. 110, n. 5, p. 050402, 2013. doi: [10.1103/PhysRevLett.110.050402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.050402).
- 83 TADDEI, M. M. **Quantum speed limits for general physical processes**. 2014. 115 p. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1407.4343>. Acesso em: 20 jan. 2017.
- 84 DEL CAMPO, A. et al. Quantum speed limits in open system dynamics. **Physical Review Letters**, v. 110, n. 5, p. 050403, 2013. doi: [10.1103/PhysRevLett.110.050403](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.050403).

- 85 DEFFNER, S.; LUTZ, E. Quantum speed limit for non-Markovian dynamics. **Physical Review Letters**, v. 111, n. 1, p. 010402, 2013. doi: [10.1103/PhysRevLett.111.010402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.010402).
- 86 UZDIN, R.; LUTZ, E.; KOSLOFF, R. **Purity and entropy evolution speed limits for open quantum systems**. 2014. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1408.1227>. Acesso em: 20 jan. 2017.
- 87 UZDIN, R.; KOSLOFF, R. Speed limits in Liouville space for open quantum systems. **Europhysics Letters**, v. 115, n. 4, p. 40003, 2016. doi: [10.1209/0295-5075/115/40003](https://doi.org/10.1209/0295-5075/115/40003).
- 88 ZHANG, Y.-J. et al. Quantum speed limit for arbitrary initial states. **Scientific Reports**, v. 4, n. 4890, p. 1–6, 2014. doi: [10.1038/srep04890](https://doi.org/10.1038/srep04890).
- 89 XU, Z.-Y. et al. Quantum speedup in a memory environment. **Physical Review A**, v. 89, n. 1, p. 012307, 2014. doi: [10.1103/PhysRevA.89.012307](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.012307).
- 90 HEGERFELDT, G. C. High-speed driving of a two-level system. **Physical Review A**, v. 90, n. 3, p. 032110, 2014. doi: [10.1103/PhysRevA.90.032110](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.032110).
- 91 RUSSELL, B.; STEPNEY, S. Zermelo navigation and a speed limit to quantum information processing. **Physical Review A**, v. 90, n. 1, p. 012303, 2014. doi: [10.1103/PhysRevA.90.012303](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.012303).
- 92 ANDERSSON, O.; HEYDARI, H. Quantum speed limits and optimal Hamiltonians for driven systems in mixed states. **Journal of Physics A: mathematical and theoretical**, v. 47, n. 21, p. 215301, 2014. doi: [10.1088/1751-8113/47/21/215301](https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/21/215301).
- 93 LIU, C.; XU, Z.-Y.; ZHU, S. Quantum-speed-limit time for multiqubit open systems. **Physical Review A**, v. 91, n. 2, p. 022102, 2015. doi: [10.1103/PhysRevA.91.022102](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.022102).
- 94 PIRES, D. P.; CÉLERI, L. C.; SOARES-PINTO, D. O. Geometric lower bound for a quantum coherence measure. **Physical Review A**, v. 91, n. 4, p. 042330, 2015. doi: [10.1103/PhysRevA.91.042330](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.042330).
- 95 VILLAMIZAR, D. V.; DUZZIONI, E. I. Quantum speed limit for a relativistic electron in a uniform magnetic field. **Physical Review A**, v. 92, n. 4, p. 042106, 2015. doi: [10.1103/PhysRevA.92.042106](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.92.042106).
- 96 WU, S.-X. et al. The initial-state dependence of the quantum speed limit. **Journal of Physics A: mathematical and theoretical**, v. 48, n. 4, p. 045301, 2015. doi: [10.1088/1751-8113/48/4/045301](https://doi.org/10.1088/1751-8113/48/4/045301).
- 97 MARVIAN, I.; LIDAR, D. A. Quantum speed limits for leakage and decoherence. **Physical Review Letters**, v. 115, n. 21, p. 210402, 2015. doi: [10.1103/PhysRevLett.115.210402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.210402).
- 98 MONDAL, D.; PATI, A. K. Quantum speed limit for mixed states using an experimentally realizable metric. **Physics Letters A**, v. 380, n. 16, p. 1395, 2016. doi: [10.1016/j.physleta.2016.02.018](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2016.02.018).
- 99 MONDAL, D.; DATTA, C.; SAZIM, S. Quantum coherence sets the quantum speed limit for mixed states. **Physics Letters A**, v. 380, n. 5-6, p. 689, 2016. doi: [10.1016/j.physleta.2015.12.015](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2015.12.015).

- 100 RUSSELL, B.; STEPNEY, S. **The geometry of speed limiting resources in physical models of computation**. 2016. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1611.09220>>. Acesso em: 20 jan. 2017.
- 101 CANEVA, T. et al. Optimal control at the quantum speed limit. **Physical Review Letters**, v. 103, n. 24, p. 240501, 2009. doi: [10.1103/PhysRevLett.103.240501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.240501).
- 102 GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Quantum metrology. **Physical Review Letters**, v. 96, n. 1, p. 010401, 2006. doi: [10.1103/PhysRevLett.96.010401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.010401).
- 103 DEFFNER, S.; LUTZ, E. Generalized Clausius inequality for nonequilibrium quantum processes. **Physical Review Letters**, v. 105, n. 17, p. 170402, 2010. doi: [10.1103/PhysRevLett.105.170402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.170402).
- 104 ZWIERZ, M. Comment on “Geometric derivation of the quantum speed limit”. **Physical Review A**, v. 86, n. 1, p. 016101, 2012. doi: [10.1103/PhysRevA.86.016101](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.016101).
- 105 MARVIAN, I.; SPEKKENS, R. W.; ZANARDI, P. Quantum speed limits, coherence, and asymmetry. **Physical Review A**, v. 93, n. 5, p. 052331, 2016. doi: [10.1103/PhysRevA.93.052331](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.052331).
- 106 YUNG, M.-H. Quantum speed limit for perfect state transfer in one dimension. **Physical Review A**, v. 74, n. 3, p. 030303, 2006. doi: [10.1103/PhysRevA.74.030303](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.74.030303).
- 107 NEUMANN, J. von. **Mathematical foundations of quantum mechanics**. New Jersey: Princeton University Press, 1995.
- 108 BENGTSSON, I.; ŻYCZKOWSKI, K. **Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement**. England: Cambridge University Press, 2006.
- 109 WOOTTERS, W. K. Statistical distance and Hilbert space. **Physical Review D**, v. 23, n. 2, p. 357, 1981. doi: [10.1103/PhysRevD.23.357](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.357).
- 110 BRAUNSTEIN, S. L.; CAVES, C. M. Statistical distance and the geometry of quantum states. **Physical Review Letters**, v. 72, n. 22, p. 3439, 1994. doi: [10.1103/PhysRevLett.72.3439](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.3439).
- 111 AMARI, S.; NAGAOKA, H. **Methods of information geometry**. Rhode Island: Oxford University Press, 2000. v. 191.
- 112 WEINHOLD, F. Metric geometry of equilibrium thermodynamics. **Journal of Chemical Physics**, v. 63, n. 6, p. 2479, 1975. doi: [10.1063/1.431689](https://doi.org/10.1063/1.431689).
- 113 _____. Metric geometry of equilibrium thermodynamics. II. scaling, homogeneity, and generalized Gibbs-Duhem relation. **Journal of Chemical Physics**, v. 63, n. 6, p. 2484, 1975. doi: [10.1063/1.431635](https://doi.org/10.1063/1.431635).
- 114 _____. Metric geometry of equilibrium thermodynamics. III. elementary formal structure of a vector-algebraic representation of equilibrium thermodynamics. **Journal of Chemical Physics**, v. 63, n. 6, p. 2488, 1975. doi: [10.1063/1.431636](https://doi.org/10.1063/1.431636).
- 115 _____. Metric geometry of equilibrium thermodynamics. IV. vector-algebraic evaluation of thermodynamic derivative. **Journal of Chemical Physics**, v. 63, n. 6, p. 2496, 1975. doi: [10.1063/1.431637](https://doi.org/10.1063/1.431637).

- 116 _____. Metric geometry of equilibrium thermodynamics. V. aspects of heterogeneous equilibrium. **Journal of Chemical Physics**, v. 65, n. 2, p. 559, 1975. doi: [10.1063/1.433136](https://doi.org/10.1063/1.433136).
- 117 _____. Thermodynamics and geometry. **Physics Today**, v. 29, n. 3, p. 23, 1976. doi: [10.1063/1.3023366](https://doi.org/10.1063/1.3023366).
- 118 GILMORE, R. Length and curvature in the geometry of thermodynamics. **Physical Review A**, v. 30, n. 4, p. 1994–1997, 1984. doi: [10.1103/PhysRevA.30.1994](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.30.1994).
- 119 RUPPEINER, G. Thermodynamics: a Riemannian geometric model. **Physical Review A**, v. 20, n. 4, p. 1608, 1979. doi: [10.1103/PhysRevA.20.1608](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.20.1608).
- 120 _____. Application of Riemannian geometry to the thermodynamics of a simple fluctuating magnetic system. **Physical Review A**, v. 24, n. 1, p. 488, 1981. doi: [10.1103/PhysRevA.24.488](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.24.488).
- 121 _____. Thermodynamic critical fluctuation theory? **Physical Review Letters**, v. 50, n. 5, p. 287, 1983. doi: [10.1103/PhysRevLett.50.287](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.50.287).
- 122 _____. Riemannian geometric theory of critical phenomena. **Physical Review A**, v. 44, n. 6, p. 3583, 1991. doi: [10.1103/PhysRevA.44.3583](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.44.3583).
- 123 _____. Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory. **Review of Modern Physics**, v. 67, n. 3, p. 605, 1995. doi: [10.1103/RevModPhys.67.605](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.67.605).
- 124 _____. Riemannian geometric approach to critical point: general theory. **Physical Review E**, v. 57, n. 5, p. 5135, 1998. doi: [10.1103/PhysRevE.57.5135](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.57.5135).
- 125 DIÓSI, L.; LUKÁCS, B. Covariant evolution equation for the thermodynamic fluctuations. **Physical Review A**, v. 31, n. 5, p. 3415, 1985. doi: [10.1103/PhysRevA.31.3415](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.31.3415).
- 126 DIÓSI, L. et al. Thermodynamic length, time, speed, and optimum path to minimize entropy production. **Journal of Chemical Physics**, v. 105, n. 24, p. 11220, 1996. doi: [10.1063/1.472897](https://doi.org/10.1063/1.472897).
- 127 ANDRESEN, B.; SALAMON, P.; BERRY, R. S. Thermodynamics in finite time. **Physics Today**, v. 37, n. 9, p. 62, 1984. doi: [10.1063/1.2916405](https://doi.org/10.1063/1.2916405).
- 128 SALAMON, P.; NULTON, J. D.; BERRY, R. S. Length in statistical thermodynamics. **Journal of Chemical Physics**, v. 82, n. 5, p. 2433, 1985. doi: [10.1063/1.448337](https://doi.org/10.1063/1.448337).
- 129 NULTON, J. et al. Quasistatic processes as step equilibrations. **Journal of Chemical Physics**, v. 83, n. 1, p. 334, 1985. doi: [10.1063/1.449774](https://doi.org/10.1063/1.449774).
- 130 FELDMANN, T.; LEVINE, R. D.; SALAMON, P. A geometrical measure for entropy changes. **Journal of Statistical Physics**, v. 42, n. 5–6, p. 1127, 1986. doi: [10.1007/BF01010466](https://doi.org/10.1007/BF01010466).
- 131 ANDRESEN, B. et al. Thermodynamic geometry and the metrics of Weinhold and Gilmore. **Physical Review A**, v. 37, n. 3, p. 845, 1988. doi: [10.1103/PhysRevA.37.845](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.37.845).
- 132 NAKAHARA, M. **Geometry, topology and physics**. 2nd ed. New York: Taylor & Francis, 2003.

- 133 ČENCŮV, N. N. **Statistical decision rules and optimal inference**. Providence: American Mathematical Society, 1982. (Translations of mathematical monographs, v. 53).
- 134 MOROZOVA, E. A.; ČENCŮV, N. N. Markov invariant geometry on state manifolds. **Journal of Soviet Mathematics**, v. 56, n. 5, p. 2648–2669, 1991. doi: [10.1007/BF01095975](https://doi.org/10.1007/BF01095975).
- 135 PETZ, D. Monotone metrics on matrix spaces. **Linear Algebra and its Applications**, v. 244, p. 81–96, 1996. doi: [10.1016/0024-3795\(94\)00211-8](https://doi.org/10.1016/0024-3795(94)00211-8).
- 136 BÉNY, C.; OSBORNE, T. J. Information-geometric approach to the renormalization group. **Physical Review A**, v. 92, n. 2, p. 022330, 2015. doi: [10.1103/PhysRevA.92.022330](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.92.022330).
- 137 _____. The renormalization group via statistical inference. **New Journal of Physics**, v. 17, n. 8, p. 083005, 2015. doi: [10.1088/1367-2630/17/8/083005](https://doi.org/10.1088/1367-2630/17/8/083005).
- 138 SHITARA, T.; UEDA, M. Determining the continuous family of quantum Fisher information from linear-response theory. **Physical Review A**, v. 94, n. 6, p. 062316, 2016. doi: [10.1103/PhysRevA.94.062316](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.94.062316).
- 139 KUBO, F.; ANDO, T. Means of positive linear operators. **Mathematische Annalen**, v. 246, n. 3, p. 205–224, 1980. doi: [10.1007/BF01371042](https://doi.org/10.1007/BF01371042).
- 140 PIRES, D. P. et al. Generalized geometric quantum speed limits. **Physical Review X**, v. 6, n. 2, p. 021031, 2016. doi: [10.1103/PhysRevX.6.021031](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.6.021031).
- 141 HANSEN, F. Characterization of symmetric monotone metrics on the state space of quantum systems. **Quantum Information and Computation**, v. 6, n. 6, p. 597, 2006.
- 142 _____. Metric adjusted skew information. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 105, n. 29, p. 9909–9916, 2008. doi: [10.1073/pnas.0803323105](https://doi.org/10.1073/pnas.0803323105).
- 143 BATHIA, R. **Matrix analysis**. New York: Springer-Verlag, 1997.
- 144 PETZ, D.; SUDÁR, C. Geometries of quantum states. **Journal of Mathematical Physics**, v. 37, n. 6, p. 2662, 1996. doi: [10.1063/1.531535](https://doi.org/10.1063/1.531535).
- 145 JENČOVÁ, A. Geodesic distances on density matrices. **Journal of Mathematical Physics**, v. 45, n. 5, p. 1787–1794, 2004. doi: [10.1063/1.1689000](https://doi.org/10.1063/1.1689000).
- 146 UHLMANN, A. Density operators as an arena for differential geometry. **Reports on Mathematical Physics**, v. 33, n. 1-2, p. 253–263, 1993. doi: [10.1016/0034-4877\(93\)90060-R](https://doi.org/10.1016/0034-4877(93)90060-R).
- 147 GIBILISCO, P.; ISOLA, T. Wigner-Yanase information on quantum state space: the geometric approach. **Journal of Mathematical Physics**, v. 44, n. 9, p. 3752, 2003. doi: [10.1063/1.1598279](https://doi.org/10.1063/1.1598279).
- 148 DUNFORD, N.; SCHWARTZ, J. T. **Linear operators**. New York: Wiley, 1988. v. 1.

- 149 COLOMBO, F.; SABADINI, I.; STRUPPA, D. C. **Noncommutative functional calculus**. Heidelberg: Springer, 2011. (Progress in mathematics, v. 289). doi: [10.1007/978-3-0348-0110-2](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0110-2).
- 150 PETZ, D. Quasi-entropies for states of a von Neumann algebra. **Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences**, v. 21, n. 4, p. 787–800, 1985. doi: [10.2977/prims/1195178929](https://doi.org/10.2977/prims/1195178929).
- 151 _____. Quasi-entropies for finite quantum systems. **Reports on Mathematical Physics**, v. 23, n. 1, p. 57–65, 1986. doi: [10.1016/0034-4877\(86\)90067-4](https://doi.org/10.1016/0034-4877(86)90067-4).
- 152 OHYA, M.; PETZ, D. **Quantum entropy and its use**. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- 153 ARAKI, H. Relative entropy of states of von Neumann algebras. **Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences**, v. 9, n. 3, p. 809–833, 1975. doi: [10.2977/prims/1195191148](https://doi.org/10.2977/prims/1195191148).
- 154 PETZ, D.; SUDÁR, C. Extending the Fisher metric to density matrices. In: BARNDORFF-NIELSEN, O. E.; VEDEL-JENSEN, E. B. (Ed.). **Geometry in present days science**. Denmark: World Scientific, 1999. p. 21–34.
- 155 HIAI, F.; PETZ, D. Riemannian metrics on positive definite matrices related to means. **Linear Algebra and its Applications**, v. 430, n. 11, p. 3105–3130, 2009. doi: [10.1016/j.laa.2009.01.025](https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.01.025).
- 156 PARIS, M. G. A. Quantum estimation for quantum technology. **International Journal of Quantum Information**, v. 07, n. supp01, p. 125, 2009. doi: [10.1142/S02197499090004839](https://doi.org/10.1142/S02197499090004839).
- 157 HELSTROM, C. W. Minimum mean-squared error of estimates in quantum statistics. **Physics Letters A**, v. 25, n. 2, p. 101–102, 1967. doi: [10.1016/0375-9601\(67\)90366-0](https://doi.org/10.1016/0375-9601(67)90366-0).
- 158 _____. Estimation of a displacement parameter of a quantum system. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 11, p. 357, 1974. doi: [10.1007/BF01809715](https://doi.org/10.1007/BF01809715).
- 159 HOLEVO, A. S. **Probabilistic and statistical aspects of quantum theory**. Amsterdam: North-Holland, 1982.
- 160 FRIEDEN, B. R. **Physics from Fisher information**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- 161 PETZ, D.; GHINEA, C. **Introduction to quantum Fisher information**. 2010. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1008.2417>. Acesso em: 20 jan. 2017.
- 162 JOZSA, R. Fidelity for mixed quantum states. **Journal of Modern Optics**, v. 41, n. 12, p. 2315–2323, 1994. doi: [10.1080/09500349414552171](https://doi.org/10.1080/09500349414552171).
- 163 FUCHS, C. A. **Distinguishability and accessible information in quantum theory**. 1996. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/quant-ph/9601020>. Acesso em: 20 jan. 2017.

- 164 BANCHI, L.; GIORDA, P.; ZANARDI, P. Quantum information-geometry of dissipative quantum phase transitions. **Physical Review E**, v. 89, n. 2, p. 022102, 2014. doi: [10.1103/PhysRevE.89.022102](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.022102).
- 165 BANCHI, L.; BRAUNSTEIN, S. L.; PIRANDOLA, S. Quantum fidelity for arbitrary gaussian states. **Physical Review Letters**, v. 115, n. 26, p. 260501, 2015. doi: [10.1103/PhysRevLett.115.260501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.260501).
- 166 GIROLAMI, D. et al. Quantum discord determines the interferometric power of quantum states. **Physical Review Letters**, v. 112, n. 21, p. 210401, 2014. doi: [10.1103/PhysRevLett.112.210401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.210401).
- 167 WIGNER, E. P.; YANASE, M. M. Information contents of distributions. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 49, n. 6, p. 910, 1963. doi: [10.1073/pnas.49.6.910](https://doi.org/10.1073/pnas.49.6.910).
- 168 _____. On the positive semidefinite nature of certain matrix expressions. **Canadian Journal of Mathematics**, v. 16, p. 397–406, 1964. doi: [10.4153/CJM-1964-041-x](https://doi.org/10.4153/CJM-1964-041-x).
- 169 LUO, S. Wigner-Yanase skew information and uncertainty relations. **Physical Review Letters**, v. 91, n. 18, p. 180403, 2003. doi: [10.1103/PhysRevLett.91.180403](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.180403).
- 170 LUO, S.; ZHANG, Q. On skew information. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 50, n. 8, p. 1778, 2004. doi: [10.1109/TIT.2004.831853](https://doi.org/10.1109/TIT.2004.831853).
- 171 LUO, S. Quantum uncertainty of mixed states based on skew information. **Physical Review A**, v. 73, n. 2, p. 022324, 2006. doi: [10.1103/PhysRevA.73.022324](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.022324).
- 172 LIEB, E. H. Convex trace functions and the Wigner-Yanase-Dyson conjecture. **Advances in Mathematics**, v. 11, n. 3, p. 267, 1973. doi: [10.1016/0001-8708\(73\)90011-X](https://doi.org/10.1016/0001-8708(73)90011-X).
- 173 LIEB, E. H.; RUSKAI, M. M. A fundamental property of quantum-mechanical entropy. **Physical Review Letters**, v. 30, n. 10, p. 434–436, 1973. doi: [10.1103/PhysRevLett.30.434](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.434).
- 174 GIBILISCO, P.; ISOLA, T. A characterization of Wigner-Yanase information among statistically monotone metrics. **Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics**, v. 4, n. 4, p. 553, 2001. doi: [10.1142/S0219025701000644](https://doi.org/10.1142/S0219025701000644).
- 175 LUO, S.; ZHANG, Q. Informational distance on quantum-state space. **Physical Review A**, v. 69, n. 3, p. 032106, 2004. doi: [10.1103/PhysRevA.69.032106](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.69.032106).
- 176 AUDENAERT, K. M. R. et al. Discriminating states: the quantum Chernoff bound. **Physical Review Letters**, v. 98, n. 16, p. 160501, 2007. doi: [10.1103/PhysRevLett.98.160501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.160501).
- 177 FARACE, A. et al. Discriminating strength: a bona fide measure of non-classical correlations. **New Journal of Physics**, v. 16, n. 7, p. 073010, 2014. doi: [10.1088/1367-2630/16/7/073010](https://doi.org/10.1088/1367-2630/16/7/073010).
- 178 ARAKI, H.; YANASE, M. Measurement of quantum mechanical operators. **Physical Review**, v. 120, n. 2, p. 622–626, 1960. doi: [10.1103/PhysRev.120.622](https://doi.org/10.1103/PhysRev.120.622).

- 179 LUO, S. Heisenberg uncertainty relation for mixed states. **Physical Review A**, v. 72, n. 4, p. 042110, 2005. doi: [10.1103/PhysRevA.72.042110](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.72.042110).
- 180 _____. Brukner-Zeilinger invariant information. **Theoretical and Mathematical Physics**, v. 151, n. 2, p. 693–699, 2007. doi: [10.1007/s11232-007-0054-8](https://doi.org/10.1007/s11232-007-0054-8).
- 181 BARTLETT, S.; RUDOLPH, T.; SPEKKENS, R. Reference frames, superselection rules, and quantum information. **Review of Modern Physics**, v. 79, n. 2, p. 555–609, 2007. doi: [10.1103/RevModPhys.79.555](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.79.555).
- 182 CHEN, Z. Wigner-Yanase skew information as tests for quantum entanglement. **Physical Review A**, v. 71, n. 18, p. 052302, 2005. doi: [10.1103/PhysRevA.71.052302](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.052302).
- 183 GIROLAMI, D.; TUFARELLI, T.; ADESSO, G. Characterizing nonclassical correlations via local quantum uncertainty. **Physical Review Letters**, v. 110, n. 24, p. 240402, 2013. doi: [10.1103/PhysRevLett.110.240402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.240402).
- 184 KARPAT, G.; ÇAKMAK, B.; FANCHINI, F. F. Quantum coherence and uncertainty in the anisotropic XY chain. **Physical Review B**, v. 90, n. 10, p. 104431, 2014. doi: [10.1103/PhysRevB.90.104431](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.90.104431).
- 185 CHENG, W. W.; LI, J. X.; SHAN, C. J.; GONG, L. Y.; ZHAO, S. M. Criticality, factorization and Wigner-Yanase skew information in quantum spin chains. **Quantum Information Processing**, v. 14, n. 7, p. 2535, 2015. doi: [10.1007/s11128-015-1009-x](https://doi.org/10.1007/s11128-015-1009-x).
- 186 MALVEZZI, A. L. et al. Quantum correlations and coherence in spin-1 Heisenberg chains. **Physical Review B**, v. 93, n. 18, p. 184428, 2016. doi: [10.1103/PhysRevB.93.184428](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.93.184428).
- 187 MARVIAN, I.; SPEKKENS, R. W. Asymmetry properties of pure quantum states. **Physical Review A**, v. 90, n. 1, p. 014102, 2014. doi: [10.1103/PhysRevA.90.014102](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.014102).
- 188 MARVIAN, I.; SPEKKENS, R. The theory of manipulations of pure state asymmetry: I. basic tools, equivalence classes and single copy transformations. **New Journal of Physics**, v. 15, n. 3, p. 033001, 2013. doi: [10.1088/1367-2630/15/3/033001](https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/3/033001).
- 189 GOUR, G.; SPEKKENS, R. W. The resource theory of quantum reference frames: manipulations and monotones. **New Journal of Physics**, v. 10, n. 3, p. 033023, 2008. doi: [10.1088/1367-2630/10/3/033023](https://doi.org/10.1088/1367-2630/10/3/033023).
- 190 GOUR, G.; MARVIAN, I.; SPEKKENS, R. Measuring the quality of a quantum reference frame: the relative entropy of frameness. **Physical Review A**, v. 80, n. 1, p. 012307, 2009. doi: [10.1103/PhysRevA.80.012307](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.012307).
- 191 MARVIAN, I.; SPEKKENS, R. W. Modes of asymmetry: the application of harmonic analysis to symmetric quantum dynamics and quantum reference frames. **Physical Review A**, v. 90, n. 6, p. 062110, 2014. doi: [10.1103/PhysRevA.90.062110](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.062110).
- 192 _____. Extending Noether’s theorem by quantifying the asymmetry of quantum states. **Nature Communications**, v. 5, n. 3821, p. 1, 2014. doi: [10.1038/ncomms4821](https://doi.org/10.1038/ncomms4821).
- 193 PETZ, D.; TOTH, G. The Bogoliubov inner product in quantum statistics. **Letters in Mathematical Physics**, v. 27, n. 3, p. 205–216, 1993. doi: [10.1007/BF00739578](https://doi.org/10.1007/BF00739578).

- 194 PETZ, D. Geometry of canonical correlation on the state space of a quantum system. **Journal of Mathematical Physics**, v. 35, n. 2, p. 780–795, 1994. doi: [10.1063/1.530611](https://doi.org/10.1063/1.530611).
- 195 LESNIEWSKI, A.; RUSKAI, M. B. Monotone Riemannian metrics and relative entropy on noncommutative probability spaces. **Journal of Mathematical Physics**, v. 40, n. 11, p. 5702–5724, 1999. doi: [10.1063/1.533053](https://doi.org/10.1063/1.533053).
- 196 JENČOVÁ, A. Generalized relative entropies as contrast functionals on density matrices. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 43, n. 7, p. 1635–1649, 2004. doi: [10.1023/B:IJTP.0000048809.54756.84](https://doi.org/10.1023/B:IJTP.0000048809.54756.84).
- 197 RYU, S.; TAKAYANAGI, T. Holographic derivation of entanglement entropy from the anti-de Sitter space/conformal field theory correspondence. **Physical Review Letters**, v. 96, n. 18, p. 181602, 2006. doi: [10.1103/PhysRevLett.96.181602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.181602).
- 198 BERRY, M. V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. **Proceedings of the Royal Society of London A: mathematical, physical and engineering sciences**, v. 392, n. 1802, p. 45–57, 1984. doi: [10.1098/rspa.1984.0023](https://doi.org/10.1098/rspa.1984.0023).
- 199 KOLODRUBETZ, M.; GRITSEV, V.; POLKOVNIKOV, A. Classifying and measuring geometry of a quantum ground state manifold. **Physical Review B**, v. 88, n. 6, p. 064304, 2013. doi: [10.1103/PhysRevB.88.064304](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.88.064304).
- 200 GIBILISCO, P.; ISOLA, T. Uncertainty principle and quantum Fisher information. **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**, v. 59, n. 1, p. 147–159, 2007. doi: [10.1007/s10463-006-0103-3](https://doi.org/10.1007/s10463-006-0103-3).
- 201 HÜBNER, M. Explicit computation of the Bures distance for density matrices. **Physics Letters A**, v. 163, n. 4, p. 239, 1992. doi: [10.1016/0375-9601\(92\)91004-B](https://doi.org/10.1016/0375-9601(92)91004-B).
- 202 SCHLOSSHAUER, M. **Decoherence and the quantum-to-classical transition**. Heidelberg: Springer, 2008.
- 203 ZUREK, W. H. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. **Reviews of Modern Physics**, v. 75, n. 3, p. 715–775, 2003. doi: [10.1103/RevModPhys.75.715](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.715).
- 204 BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. **The theory of open quantum systems**. Oxford: Oxford University Press, 2002.
- 205 WILDE, M. M. **Quantum information theory**. New York: Cambridge University Press, 2013.
- 206 DAVIES, E. B. Markovian master equations. **Communications in Mathematical Physics**, v. 39, n. 2, p. 91–110, 1974. doi: [10.1007/BF01608389](https://doi.org/10.1007/BF01608389).
- 207 _____. Markovian master equations. II. **Mathematische Annalen**, v. 219, n. 2, p. 147–158, 1976. doi: [10.1007/BF01351898](https://doi.org/10.1007/BF01351898).
- 208 GORINI, V.; KOSSAKOWSKI, A.; SUDARSHAN, E. C. G. Completely positive dynamical semigroups of N-level systems. **Journal of Mathematical Physics**, v. 17, n. 5, p. 821–825, 1976. doi: [10.1063/1.522979](https://doi.org/10.1063/1.522979).

- 209 LINDBLAD, G. On the generators of quantum dynamical semigroups. **Communications in Mathematical Physics**, v. 48, n. 2, p. 119–130, 1976. doi: [10.1007/BF01608499](https://doi.org/10.1007/BF01608499).
- 210 ADDIS, C. et al. Comparative study of non-Markovianity measures in exactly solvable one- and two-qubit models. **Physical Review A**, v. 90, n. 5, p. 052103, 2014. doi: [10.1103/PhysRevA.90.052103](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.052103).
- 211 RIVAS, A.; HUELGA, S. F.; PLENIO, M. B. Quantum non-Markovianity: characterization, quantification and detection. **Reports on Progress in Physics**, v. 77, n. 9, p. 094001, 2014. doi: [10.1088/0034-4885/77/9/094001](https://doi.org/10.1088/0034-4885/77/9/094001).
- 212 CHRUŚCIŃSKI, D.; KOSSAKOWSKI, A. Non-Markovian quantum dynamics: local versus nonlocal. **Physical Review Letters**, v. 104, n. 7, p. 070406, 2010. doi: [10.1103/PhysRevLett.104.070406](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.070406).
- 213 ANDERSSON, E.; CRESSER, J. D.; HALL, M. J. W. Finding the Kraus decomposition from a master equation and vice versa. **Journal of Modern Optics**, v. 54, n. 12, p. 1695–1716, 2007. doi: [10.1080/09500340701352581](https://doi.org/10.1080/09500340701352581).
- 214 CHAVES, R. et al. Noisy metrology beyond the standard quantum limit. **Physical Review Letters**, v. 111, n. 12, p. 120401, 2013. doi: [10.1103/PhysRevLett.111.120401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.120401).
- 215 BRASK, J. B.; CHAVES, R.; KOŁODYŃSKI, J. Improved quantum magnetometry beyond the standard quantum limit. **Physical Review X**, v. 5, n. 3, p. 031010, 2015. doi: [10.1103/PhysRevX.5.031010](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.5.031010).
- 216 GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of integrals, series and products**. 7th ed. London: Elsevier Academic Press, 2007.
- 217 MCKEAN, H.; MOLL, V. **Elliptic curves: function theory, geometry, arithmetic**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- 218 WASILEWSKI, W. et al. Quantum noise limited and entanglement-assisted magnetometry. **Physical Review Letters**, v. 104, n. 13, p. 133601, 2010. doi: [10.1103/PhysRevLett.104.133601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.133601).
- 219 BRODY, D. C.; HUGHSTON, L. P. Geometry of quantum statistical inference. **Physical Review Letters**, v. 77, n. 14, p. 2851–2854, 1996. doi: [10.1103/PhysRevLett.77.2851](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.2851).
- 220 BRODY, D. C. Information geometry of density matrices and state estimation. **Journal of Physics A: mathematical and theoretical**, v. 44, n. 25, p. 252002, 2011. doi: [10.1088/1751-8113/44/25/252002](https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/25/252002).
- 221 BRODY, D. C.; GRAEFE, E.-M. Mixed-state evolution in the presence of gain and loss. **Physical Review Letters**, v. 109, n. 23, p. 230405, 2012. doi: [10.1103/PhysRevLett.109.230405](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.230405).
- 222 CROOKS, G. E. Measuring thermodynamic length. **Physical Review Letters**, v. 99, n. 10, p. 100602, 2007. doi: [10.1103/PhysRevLett.99.100602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.100602).

- 223 BRANDÃO, F. et al. The second laws of quantum thermodynamics. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 112, n. 11, p. 3275–3279, 2015. doi: [10.1073/pnas.1411728112](https://doi.org/10.1073/pnas.1411728112).
- 224 LOSTAGLIO, M.; JENNINGS, D.; RUDOLPH, T. Description of quantum coherence in thermodynamic processes requires constraints beyond free energy. **Nature Communications**, v. 6, n. 6383, p. 1, 2015. doi: [10.1038/ncomms7383](https://doi.org/10.1038/ncomms7383).
- 225 OLIVEIRA, I. S. et al. **NMR quantum information processing**. Amsterdam: Elsevier, 2007.
- 226 SILVA, I. A. et al. Measuring bipartite quantum correlations of an unknown state. **Physical Review Letters**, v. 110, n. 14, p. 140501, 2013. doi: [10.1103/PhysRevLett.110.140501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.140501).
- 227 RENES, J. M. et al. Symmetric informationally complete quantum measurements. **Journal of Mathematical Physics**, v. 45, n. 6, p. 2171–2180, 2004. doi: [10.1063/1.1737053](https://doi.org/10.1063/1.1737053).
- 228 AHNERT, S. E.; PAYNE, M. C. General implementation of all possible positive-operator-value measurements of single-photon polarization states. **Physical Review A**, v. 71, n. 1, p. 012330, 2005. doi: [10.1103/PhysRevA.71.012330](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.012330).
- 229 HOLEVO, A. S. **Statistical structure of quantum theory**. Amsterdam: Springer, 2001.
- 230 JAUCH, J. M.; PIRON, C. Generalized localizability. **Helvetica Physica Acta**, v. 40, n. 5, p. 559–570, 1967. Disponível em: <http://www.e-periodica.ch/digbib/view?pid=hpa-001:1967:40#561>>. Acesso em: 20 jan. 2017.
- 231 DAVIES, E. B. **Quantum theory of open systems**. London: Academic Press, 1976.
- 232 ROBERTSON, H. P. The uncertainty principle. **Physical Review**, v. 34, n. 1, p. 163, 1929. doi: [10.1103/PhysRev.34.163](https://doi.org/10.1103/PhysRev.34.163).
- 233 ZHANG, L.; FEI, S.-M. Quantum fidelity and relative entropy between unitary orbits. **Journal of Physics A: mathematical and theoretical**, v. 47, n. 5, p. 055301, 2014. doi: [10.1088/1751-8113/47/5/055301](https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/5/055301).
- 234 CAMPBELL, S.; JR., C. D. M. **Generalized inverses of linear transformations**. New York: Dover, 1991.
- 235 PENROSE, R. A generalized inverse for matrices. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 51, n. 3, p. 406–413, 1955. doi: [10.1017/S0305004100030401](https://doi.org/10.1017/S0305004100030401).

Apêndice A

Revisão de conceitos básicos

A.1 Definições gerais

Nesta seção vamos estabelecer algumas definições que podem ser úteis na compreensão de alguns dos pontos discutidos no texto principal da tese. Este apanhado de informações técnicas está baseado, por exemplo, no livro de Nielsen e Chuang. (1) Em especial, recomendamos ao leitor a consulta desta referência em busca de tópicos não discutidos neste texto.

Seja o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensão finita $d = \dim \mathcal{H}$ e seu respectivo espaço dual $\mathcal{H}^*$, isto é, o espaço dos mapas lineares de $\mathcal{H}$ sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$. Em particular, no contexto de dimensão finita o teorema da Representação de Fréchet-Riesz afirma que os espaços $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^*$ são isomorfos entre si. A álgebra de matrizes complexas na mecânica quântica é caracterizada via o espaço de Hilbert-Schmidt $\mathcal{B}(\mathcal{H}) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, isto é, o espaço de dimensão $d^2 = \dim \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dos operadores lineares atuando em $\mathcal{H}$. Dados $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, o espaço de Hilbert-Schmidt é equipado com a seguinte estrutura de produto interno

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^\dagger B) . \quad (\text{A.1})$$

Definição (Operador hermitiano). *Um operador X é hermitiano se $X = X^\dagger$ e anti-hermitiano se $X = -X^\dagger$.*

Definição (Operador unitário). *Um operador X é unitário se $XX^\dagger = X^\dagger X = I$, ou seja, $X^\dagger = X^{-1}$.*

Definição (Operador normal). Um operador X é chamado normal se $XX^\dagger = X^\dagger X$, isto é, $[X, X^\dagger] = 0$. Note que operadores hermitianos e unitários são exemplos de operadores normais.

Um operador normal é hermitiano se, e somente se, possui autovalores reais. Através do teorema espectral, um operador é normal se, e somente se, é diagonalizável. Neste caso, o operador normal $X \in \mathcal{H}$ definido no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensão $d = \dim \mathcal{H}$ possui a decomposição espectral

$$X = \sum_{j=1}^d \lambda_j |j\rangle\langle j|, \quad (\text{A.2})$$

em que $\{\lambda_j\}_{j=1,\dots,d}$ são os autovalores de X e $\{|j\rangle\}_{j=1,\dots,d}$ caracteriza uma base de estados em $\mathcal{H}$. Observe que o operador $P_j = |j\rangle\langle j|$ define um projetor no subespaço correspondendo ao autovalor λ_j , isto é, dado $|j\rangle \in P_j \mathcal{H}$, então $X|j\rangle = \lambda_j |j\rangle$.

Os autoestados $|j\rangle$ associados a autovalores λ_j identicamente nulos, isto é, $X|j\rangle = 0$, geram o subespaço vetorial $\text{kern}(X)$ chamado *kernel*. O subespaço ortogonal $\text{supp}(X)$, chamado suporte, consiste do conjunto de autoestados $|j\rangle$ relativos a autovalores não-nulos, ou seja, $X|j\rangle = \lambda_j |j\rangle$ com $\lambda_j \neq 0$. Em geral, o espaço de Hilbert pode ser representado em termos da soma direta entre estes subespaços, $\mathcal{H} = \text{kern}(X) \oplus \text{supp}(X)$.

Definição (Operador positivo definido). Um operador X é positivo definido ou estritamente positivo se $\langle \psi | X | \psi \rangle > 0$ para qualquer $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ não-nulo. Se X é positivo definido ou estritamente positivo escrevemos $X > 0$.

Definição (Operador positivo semi-definido). Um operador X é positivo ou positivo semi-definido se $\langle \psi | X | \psi \rangle \geq 0$ para qualquer $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ não-nulo. Se X é positivo ou positivo semi-definido escrevemos $X \geq 0$.

Note que um operador positivo é estritamente positivo se, e somente se, é inversível. Além disso, dados os operadores hermitianos A e B , dizemos que $A \geq B$ se $A - B \geq 0$ é positivo semi-definido.

Em especial, se $X \geq 0$, então a raiz quadrada $\sqrt{X}$ é única e satisfaz

$$(\sqrt{X})^2 = X. \quad (\text{A.3})$$

Por outro lado, dado um operador Y arbitrário, não necessariamente hermitiano, é possível

definir o valor absoluto

$$|Y| := \sqrt{YY^\dagger} , \quad (\text{A.4})$$

em que $YY^\dagger$ é um operador positivo. Além disso, qualquer operador linear Y pode ser escrito em termos da decomposição polar

$$Y = |Y|U = \sqrt{YY^\dagger}U , \quad (\text{A.5})$$

sendo U uma matriz unitária que é única se Y é inversível. Os autovalores do operador positivo $|Y|$ definem os valores singulares $\{s_j(Y)\}_{j=1,\dots,d}$ do operador Y .

Definição (Norma $\|\bullet\|_\infty$). A norma $\|\bullet\|_\infty$ de um operador $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é definida por

$$\|X\|_\infty = \sup_{\|\psi\|=1} \|X|\psi\rangle\| , \quad (\text{A.6})$$

em que $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ e $\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$.

Por outro lado, também é possível escrever $\|\bullet\|_\infty$ na forma

$$\|X\|_\infty = s_1(X) , \quad (\text{A.7})$$

sendo $s_1(X)$ o maior valor singular do operador X . Em particular, se X é um operador normal, então

$$\|X\|_\infty = \max\{|\lambda_j| : \lambda_j \text{ é autovalor de } X\} . \quad (\text{A.8})$$

Definição (Operador contrativo). Um operador X é contrativo ou define uma contração se $\|X\|_\infty \leq 1$. Além disso, um operador positivo X é contrativo se, e somente se, $X \leq \mathbb{I}$, isto é, $\mathbb{I} - X \geq 0$.

Definição (Norma Schatten ou norma L_p). Dado $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $p > 0$, a norma Schatten ou norma L_p é definida em termos da expressão

$$\|X\|_p = (\text{Tr}|X|^p)^{1/p} , \quad |X| = \sqrt{XX^\dagger} , \quad (\text{A.9})$$

em que $1 \leq p \leq \infty$.

Em especial, o caso $p = 1$ define a norma traço

$$\|X\|_1 = \text{Tr} \left(\sqrt{XX^\dagger} \right) , \quad (\text{A.10})$$

enquanto o caso $p = 2$ define a norma de Hilbert-Schmidt

$$\|X\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(XX^\dagger)} . \quad (\text{A.11})$$

A norma Schatten também pode ser escrita na forma

$$\|X\|_p = \left\{ \sum_{j=1}^d [s_j(X)]^p \right\}^{1/p} \quad (\text{A.12})$$

em que $s_1(X) \geq s_2(X) \geq \dots \geq s_d(X)$ são os valores singulares do operador X , isto é, os autovalores do operador $|X| = \sqrt{X^\dagger X}$, dispostos em ordem decrescente. (143) Em geral, a tríade de normas $\|\bullet\|_\infty$, $\|\bullet\|_1$ e $\|\bullet\|_2$ obedece a seguinte hierarquia

$$\|\bullet\|_\infty \leq \|\bullet\|_1 \leq \|\bullet\|_2 . \quad (\text{A.13})$$

Dados os naturais p e q tais que $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$ satisfazendo $1/p + 1/q = 1$, então a norma L_p obedece a desigualdade

$$\|XY\|_1 \leq \|X\|_p \|Y\|_q . \quad (\text{A.14})$$

Por um lado, se $1 \leq p \leq \infty$ o funcional $\|\bullet\|_p$ define uma norma e, portanto, satisfaz a desigualdade triangular, a qual no contexto de normas L_p é chamada desigualdade de Minkowski

$$\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p . \quad (\text{A.15})$$

No intervalo $1 \leq p \leq \infty$ a norma $\|\bullet\|_p$ também satisfaz a desigualdade

$$\|X\|_p^p + \|Y\|_p^p \leq \|X + Y\|_p^p . \quad (\text{A.16})$$

Por outro lado, se $0 < p < 1$, o funcional $\|\bullet\|_p$ obedece a desigualdade de McCarthy

$$\|X + Y\|_p^p \leq \|X\|_p^p + \|Y\|_p^p \quad (\text{A.17})$$

ao invés da desigualdade de Minkowski. Por este motivo, $\|\bullet\|_p$ é chamada quasi-norma neste intervalo.

A.2 Breve digressão sobre medidas

Nesta seção discutiremos rapidamente o conceito de medidas projetivas e medidas a valores em operadores positivos ou POVMs, do inglês *Positive Operator Valued Measures*, seguindo as Refs. (1, 108). Por hipótese, considere um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensão $d = \dim \mathcal{H}$ e $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ o conjunto convexo de operadores densidade ρ satisfazendo $\rho = \rho^\dagger$, $\rho \geq 0$ e $\text{Tr}(\rho) = 1$ que define o espaço de estados quânticos.

A dinâmica de um sistema quântico isolado é descrita em termos de transformações unitárias. Neste caso, a evolução do estado ρ é governada pela equação de von Neumann

$$\frac{d}{dt}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] , \quad (\text{A.18})$$

em que H representa o hamiltoniano do sistema quântico. Em geral, sistemas isolados constituem uma idealização com improvável respaldo prático mesmo em situações experimentais otimizadas. A interação entre o sistema e aparatos de medidas ou graus de liberdade adjacentes que induzem efeitos de decoerência exige uma descrição não-unitária que contemple o aspecto irreversível desta classe de dinâmica. A literatura recente se beneficia de diversos trabalhos buscando compreender melhor este fenômeno. (203, 227, 228)

A despeito desta vasta possibilidade de interpretações, a descrição ortodoxa do papel da medida na mecânica quântica é dada pelo postulado da medida. (1, 159, 229) De acordo com este postulado, a medida é caracterizada pela ação de um conjunto de operadores no espaço de estados quânticos. Seja o espaço k -dimensional dos possíveis resultados de medida relativos aos operadores de medida $\{A_j\}_{j=1,\dots,k}$ que satisfazem a relação de completude

$$\sum_{j=1}^k A_j^\dagger A_j = \mathbb{I}_d . \quad (\text{A.19})$$

A medida quântica realizada no estado inicial ρ produz o j -ésimo resultado com probabilidade p_j e transforma ρ em ρ_j de acordo com a relação

$$\rho \longrightarrow \rho_j = \frac{A_j \rho A_j^\dagger}{p_j} , \quad (\text{A.20})$$

em que

$$p_j = \text{Tr}(A_j \rho A_j^\dagger) , \quad p_j \geq 0 \quad (\text{A.21})$$

e

$$\sum_{j=1}^k p_j = \text{Tr} \left[\left(\sum_{j=1}^k A_j^\dagger A_j \right) \rho \right] = \text{Tr}(\rho) = 1 . \quad (\text{A.22})$$

Em uma medida projetiva os operadores de medida são dados por projetores ortogonais, isto é, $A_j = A_j^\dagger = P_j$ e $P_j P_l = \delta_{jl} P_j$ para $j, l = 1, \dots, d$. Uma medida projetiva é descrita por um observável, isto é, um operador hermitiano $\mathcal{O}$. Os possíveis resultados da medida são classificados pelos autovalores deste observável, em geral não-degenerados. Através da decomposição espectral

$$\mathcal{O} = \sum_{j=1}^d \lambda_j P_j , \quad (\text{A.23})$$

obtemos um conjunto de operadores de medida ortogonais $P_j = |j\rangle\langle j|$ que satisfaz a relação de completude

$$\sum_{j=1}^d P_j^\dagger P_j = \sum_{j=1}^d P_j = \mathbb{I}_d . \quad (\text{A.24})$$

Medidas projetivas são divididas em não-seletivas e seletivas. Por um lado, em uma medida projetiva não-seletiva o estado inicial ρ do sistema é transformado na mistura

$$\rho \longrightarrow \rho' = \sum_{j=1}^d P_j \rho P_j . \quad (\text{A.25})$$

Note que esta transformação implica que o estado ρ' comuta com o observável $\mathcal{O}$ na Eq. (A.24), a saber,

$$[\rho', \mathcal{O}] = \sum_{j,l=1}^d [P_j \rho P_j, P_l] = \sum_{j,l=1}^d \delta_{jl} (P_j \rho P_j - P_j \rho P_j) = 0 . \quad (\text{A.26})$$

Por outro lado, na medida projetiva seletiva o resultado rotulado pelo autovalor λ_j ocorre com probabilidade p_j e o estado inicial ρ do sistema é transformado na forma

$$\rho \longrightarrow \rho_j = \frac{P_j \rho P_j}{p_j} , \quad (\text{A.27})$$

em que

$$p_j = \text{Tr}(P_j \rho P_j) = \text{Tr}(\rho P_j) . \quad (\text{A.28})$$

Neste caso, o valor esperado do observável $\mathcal{O}$ é dado por

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \text{Tr}(\rho \mathcal{O}) = \sum_{j=1}^d \lambda_j \text{Tr}(\rho P_j) = \sum_{j=1}^d p_j \lambda_j . \quad (\text{A.29})$$

A assinatura de uma medida projetiva está em sua repetibilidade, isto é, o fato de que pode

ser repetida em um número indefinido de vezes sem alterar o resultado da própria medida. Em outras palavras, a medida projetiva é repetível no sentido de que se realizarmos a medida uma vez obtendo um dado resultado, ao repetir a medida obteremos sempre o mesmo resultado sem alterar o estado ρ_j do sistema.

Na prática, muitas medidas não podem ser repetidas e, portanto, sua descrição deve ir além do conceito de medidas projetivas. Neste caso, o formalismo algébrico contorna esta dificuldade relaxando o vínculo de ortogonalidade entre os operadores de medida. Este tratamento introduz a chamada medida a valores em operadores positivos ou POVM, do inglês *Positive Operator Valued Measures*. Esta técnica foi introduzida por Jauch e Piron (230) e mais tarde analisada em profundidade por Davies (231) e Holevo. (159) Em termos técnicos, um POVM é definido pela partição do operador identidade em um conjunto de k operadores positivos não-comutantes $\{E_j\}_{j=1,\dots,k}$ atuando em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensão $d = \dim \mathcal{H}$ que satisfazem (108)

$$E_j \geq 0, \quad E_j = E_j^\dagger, \quad \sum_{j=1}^k E_j = \mathbb{I}_d. \quad (\text{A.30})$$

A probabilidade de obter o j -ésimo resultado na medida de um sistema quântico preparado no estado ρ a partir de um POVM arbitrário é dada por $p_j = \text{Tr}(\rho E_j)$. Em geral, POVMs podem oferecer uma descrição adequada do postulado da medida já que podemos escolher $A_j = \sqrt{E_j}$ satisfazendo $E_j = A_j^\dagger A_j$ tal que

$$\sum_{j=1}^k A_j^\dagger A_j = \sum_{j=1}^k E_j = \mathbb{I}_d. \quad (\text{A.31})$$

Neste caso, a probabilidade de obter o j -ésimo resultado é $p_j = \text{Tr}(A_j \rho A_j^\dagger)$ e o estado do sistema após a medição é dado por

$$\rho_j = \frac{A_j \rho A_j^\dagger}{p_j}. \quad (\text{A.32})$$

Entretanto, um POVM não determina de forma unívoca os operadores de medida, à exceção do caso especial de uma medida projetiva. Isto porque, dada a matriz unitária V_j tal que $V_j V_j^\dagger = V_j^\dagger V_j = \mathbb{I}_d$, o operador de medida $\tilde{A}_j = V_j \sqrt{E_j}$ também satisfaz

$$\sum_{j=1}^k \tilde{A}_j^\dagger \tilde{A}_j = \sum_{j=1}^k \sqrt{E_j} V_j^\dagger V_j \sqrt{E_j} = \sum_{j=1}^k E_j = \mathbb{I}_d. \quad (\text{A.33})$$

Esta ambiguidade permite concluir que o comportamento do estado do sistema após a

medida dependerá da forma como o POVM é implementado na prática. O conhecimento do POVM permite obter as probabilidades dos possíveis resultados posteriores, mas não permite definir o estado do sistema após a medição.

No intuito de tornar as idéias acerca de POVMs um pouco mais claras, vamos analisar o exemplo da Ref. (1). Considerando o caso $d = \dim \mathcal{H} = 2$, sejam os estados não-ortogonais

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle, \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad (\text{A.34})$$

em que $\{|j\rangle\}_{j=0,1}$ são autoestados do operador σ_3 , isto é, $\sigma_3|j\rangle = (\delta_{j0} - \delta_{j1})|j\rangle$. Embora estes estados não sejam maximamente distinguíveis, a Ref. (1) advoga em favor da possibilidade de se propor uma medida que consiga distinguir estes estados com êxito em um certo número de vezes. Neste caso, considere um POVM formado pelos elementos

$$E_1 := \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}|1\rangle\langle 1|, \quad E_2 := \frac{1}{2 + \sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|), \quad E_3 := \mathbb{I}_2 - E_1 - E_2. \quad (\text{A.35})$$

Por construção, este conjunto de operadores caracteriza um POVM legítimo já que a relação de completude $\sum_{j=1}^3 E_j = \mathbb{I}_2$ é satisfeita. Além disso, segue que

$$\langle \psi_1 | E_j | \psi_1 \rangle = \frac{\delta_{j2}}{2 + \sqrt{2}} + \frac{\delta_{j3}}{\sqrt{2}}, \quad \langle \psi_2 | E_j | \psi_2 \rangle = \frac{\delta_{j1}}{2 + \sqrt{2}} + \frac{\delta_{j3}}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.36})$$

Imagine, por hipótese, que um dado observador receba o estado $|\psi_1\rangle = |0\rangle$. Por um lado, já que $\langle \psi_1 | E_1 | \psi_1 \rangle = 0$, então a probabilidade de observar E_1 será nula. Assim, caso o resultado da medida de E_1 seja diferente de zero, então conclui-se que o estado recebido pelo observador é na verdade $|\psi_2\rangle$. Por outro lado, se a medida de E_2 é não-nula, então o estado do observador é de fato $|\psi_1\rangle$ já que $\langle \psi_2 | E_2 | \psi_2 \rangle = 0$. Além disso, uma medida de E_3 está condicionada ao desconhecimento da identidade do estado recebido pelo observador pois $\langle \psi_1 | E_3 | \psi_1 \rangle = \langle \psi_2 | E_3 | \psi_2 \rangle = 1/\sqrt{2}$. Este fato corrobora o argumento de que a medida nem sempre é conclusiva acerca do estado recebido e, portanto, implica um erro no reconhecimento deste estado.

Na verdade POVMs podem ser entendidos como um caso particular de medidas projetivas. Em particular, um POVM é puro se cada operador E_j tem posto igual à unidade, isto é, existe um estado puro $|\phi_j\rangle$ tal que E_j é proporcional a $|\phi_j\rangle\langle\phi_j|$. Dado qualquer POVM puro com k elementos e um estado ρ definido no espaço de Hilbert de dimensão $d = \dim \mathcal{H}$, é possível encontrar um estado $\rho \otimes \varrho$ em um espaço de Hilbert estendido $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ de tal forma que a estatística do POVM original seja reproduzida fielmente

pela medida projetiva de $\rho \otimes \varrho$. Esta afirmação é uma consequência do chamado teorema de Naimark. (108)

A.3 Mapas estocásticos

No cenário clássico, o mapa estocástico pode ser representado por uma matriz B de N linhas e N colunas¹ satisfazendo (i) $B_{jl} \geq 0$ e (ii) $\sum_{j=1}^N B_{jl} = 1$. Uma matriz duplamente estocástica obedece ainda o vínculo (iii) $\sum_{l=1}^N B_{jl} = 1$. Mapas estocásticos são lineares, isto é, dados $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, as matrizes estocásticas B_1 e B_2 , e o vetor de probabilidades $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, então segue que

$$(a_1 B_1 + a_2 B_2) \vec{x} = a_1 B_1 \vec{x} + a_2 B_2 \vec{x} . \quad (\text{A.37})$$

A linearidade desta operação permite concluir que matrizes duplamente estocásticas definem um conjunto convexo no espaço vetorial de probabilidades. (108)

A condição (i) significa que B é uma matriz positiva semi-definida. A condição (ii) indica que a soma de todos os elementos em uma dada coluna da matriz B é igual a unidade. Em especial, dado o vetor de probabilidades $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ positivo, esta condição implica que a ação da matriz B preserva a norma $\|\vec{x}\|_1 = \text{Tr}(\sqrt{\vec{x} \vec{x}^T})$ deste vetor, a saber,

$$\|B\vec{x}\|_1 = \text{Tr}(\sqrt{(B\vec{x})(B\vec{x})^T}) = \sum_{l=1}^N \left(\sum_{j=1}^N B_{jl} \right) x_l = \sum_{l=1}^N x_l = \|\vec{x}\|_1 . \quad (\text{A.38})$$

A condição (iii) indica que a matriz estocástica é unital, isto é, o vetor de probabilidades $\vec{x}_N = (1/N, 1/N, \dots, 1/N)$ permanece invariante sob a ação desta matriz, a saber,

$$(B\vec{x}_N)_j = \sum_{l=1}^N B_{jl} (\vec{x}_N)_l = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N B_{jl} = \frac{1}{N} = (\vec{x}_N)_j . \quad (\text{A.39})$$

Mapas estocásticos são também chamados mapas de Markov. Uma cadeia de Markov é uma sequência de mapas de Markov e descreve a evolução temporal de distribuições de probabilidade. Dados os vetores de probabilidades $\vec{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ e $\vec{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$,

¹Em geral, a matriz estocástica não precisa ter dimensão $N \times N$. Entretanto, vamos escolher por simplicidade o caso de matrizes quadradas.

um quantificador de distinguibilidade $d(\bullet, \bullet)$ é contrativo sob o mapa estocástico B se (108)

$$d(B\vec{p}, B\vec{q}) \leq d(\vec{p}, \vec{q}) . \quad (\text{A.40})$$

A.4 Mapas CPTP

Nesta seção discutiremos brevemente o conceito de mapas completamente positivos que preservam traço, isto é, mapas CPTP. É importante destacar que esta análise não tem qualquer pretensão de profundidade ou completude e será baseada integralmente no texto original de Wilde. (205) Além desta referência, o leitor pode encontrar outros excelentes textos sobre o assunto na literatura, por exemplo, Nielsen e Chuang (1) e Bengtsson e Życzkowski. (108) Inspirados por Bengtsson e Życzkowski (108), a Ref. (55) oferece um panorama ligeiramente distinto deste tópico por meio do estudo das propriedades da matriz dinâmica associada ao canal quântico não-unitário.

Considere um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_S$ de dimensão $d_S = \dim \mathcal{H}_S$ e $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ o conjunto dos operadores atuando neste espaço. Por hipótese, seja $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}_S$ o conjunto convexo de operadores densidade ϱ satisfazendo $\varrho = \varrho^\dagger$, $\varrho \geq 0$ e $\text{Tr}(\varrho) = 1$ que define o espaço de estados quânticos. No que segue, introduziremos critérios necessários à caracterização de mapas CPTP.

Seja $\mathcal{E} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ um operador hermitiano que mapeia operadores densidade em operadores densidade. Em geral, esta propriedade denota a primeira exigência a um mapa que caracteriza evoluções físicas, isto é, se $\varrho \in \mathcal{H}_S$, então $\mathcal{E}(\varrho) \in \mathcal{H}_S$.

Critério 1 (Mapa linear). *Um canal quântico $\mathcal{E} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ é um mapa linear se*

$$\mathcal{E}(p\rho_1 + (1-p)\rho_2) = p\mathcal{E}(\rho_1) + (1-p)\mathcal{E}(\rho_2) , \quad (\text{A.41})$$

em que $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{H}$ e $0 \leq p \leq 1$.

Evoluções fisicamente permitidas ou relevantes devem mapear operadores densidade em operadores densidade. Aliando esta propriedade ao vínculo de linearidade, o canal quântico $\mathcal{E} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ deve portanto preservar a classe de operadores densidade positivos semi-definidos. Em outras palavras, dado $\varrho \geq 0$, então $\mathcal{E}(\varrho) \geq 0$.

Definição (Mapa positivo). *Um canal quântico $\mathcal{E} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ é um mapa positivo*

se $\mathcal{E}(\varrho) \geq 0$, isto é, $\mathcal{E}(\varrho)$ é positivo semi-definido $\forall \varrho \geq 0$.

No caso de sistemas clássicos, a positividade do mapa estocástico é suficiente na descrição de evoluções físicas neste regime. Entretanto, no caso quântico a positividade não é uma condição suficiente para garantir que o mapa linear descreva uma evolução física. Para entender esta afirmação, considere $\mathcal{H}_S$ como um subespaço de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{SE} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$, em que $\mathcal{H}_E$ descreve um subespaço auxiliar de dimensão $d_E = \dim \mathcal{H}_E$. Neste caso, seria interessante que uma evolução física não apenas estabelecesse um mapa entre operadores densidade do sistema $\mathcal{H}_S$, mas também entre estados associados à evolução do sistema global $\mathcal{H}_{SE}$. Assim, além da positividade do mapa $\mathcal{E} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$, qualquer composição $\mathcal{E} \otimes \text{id}_E : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{SE}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_{SE})$ também deve ser positiva, em que id_E é o superoperador identidade no subespaço $\mathcal{H}_E$.

Mas como descrever algebricamente a evolução do sistema estendido em termos da operação $\mathcal{E} \otimes \text{id}_E$? Seja $X_{SE} \in \mathcal{H}_{SE}$ um operador arbitrário e $\{|j\rangle_E\}_{j=1,\dots,d_E}$ a base de estados do subespaço auxiliar $\mathcal{H}_E$. Escrevendo o operador X_{SE} em termos desta base, temos

$$\begin{aligned} X_{SE} &= \sum_{j,l=1}^{d_E} \sum_{j',l'=1}^{d_S} (\langle j'|_S \otimes \langle j|_E) \mathcal{O}_{SE}(|l'\rangle_S \otimes |l\rangle_E) |j'\rangle_S \langle l'|_S \otimes |j\rangle_E \langle l|_E \\ &= \sum_{j,l=1}^{d_E} \sum_{j',l'=1}^{d_S} [\langle j'|_S (\mathbb{I}_S \otimes \langle j|_E) \mathcal{O}_{SE}(\mathbb{I}_S \otimes |l\rangle_E) |l'\rangle_S] |j'\rangle_S \langle l'|_S \otimes |j\rangle_E \langle l|_E \\ &= \sum_{j,l=1}^{d_E} x_S^{jl} \otimes |j\rangle_E \langle l|_E, \end{aligned} \tag{A.42}$$

em que o operador $x_S^{jl} \in \mathcal{H}_S$ é definido como segue

$$x_S^{jl} := \sum_{j',l'=1}^{d_S} [\langle j'|_S (\mathbb{I}_S \otimes \langle j|_E) \mathcal{O}_{SE}(\mathbb{I}_S \otimes |l\rangle_E) |l'\rangle_S] |j'\rangle_S \langle l'|_S. \tag{A.43}$$

A partir da Eq. (A.42), a ação de $\mathcal{E} \otimes \text{id}_E$ é dada por

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{E} \otimes \text{id}_E)(X_{SE}) &= (\mathcal{E} \otimes \text{id}_E) \left(\sum_{j,l=1}^{d_E} x_S^{jl} \otimes |j\rangle_E \langle l|_E \right) \\
 &= \sum_{j,l=1}^{d_E} (\mathcal{E} \otimes \text{id}_E) (x_S^{jl} \otimes |j\rangle_E \langle l|_E) \\
 &= \sum_{j,l=1}^{d_E} \mathcal{E} (x_S^{jl}) \otimes \text{id}_E(|j\rangle_E \langle l|_E) \\
 &= \sum_{j,l=1}^{d_E} \mathcal{E} (x_S^{jl}) \otimes |j\rangle_E \langle l|_E .
 \end{aligned} \tag{A.44}$$

A Eq. (A.44) mostra que o sistema auxiliar se comporta como um mero expectador à medida que o super-operador identidade id_E atua de forma trivial. Neste caso, a positividade do mapa $\mathcal{E}$ deve ser estendida também ao mapa $\mathcal{E} \otimes \text{id}_E$ se estamos interessados em evoluções físicas. Esta condição implica naturalmente a noção de mapas lineares completamente positivos e caracteriza o próximo critério.

Critério 2 (Mapa completamente positivo). *Um canal quântico $\mathcal{E} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ é um mapa completamente positivo (CP) se a composição $\mathcal{E} \otimes \text{id}_E$ é um mapa positivo para qualquer subsistema $\mathcal{H}_E$ de dimensão $d_E = \dim \mathcal{H}_E$.*

A partir deste critério, a positividade completa do mapa linear também pode ser avaliada por meio do chamado operador de Choi.

Definição (Operador de Choi). *Sejam os espaços de Hilbert $\mathcal{H}_S$ e $\mathcal{H}_E$ de dimensões $d_S = \dim \mathcal{H}_S$ e $d_E = \dim \mathcal{H}_E$, respectivamente. Além disso, considere as bases de estados $\{|j\rangle_S\}_{j=1,\dots,d_S}$ e $\{|j\rangle_E\}_{j=1,\dots,d_E}$ respectivas a ambos espaços, nesta ordem. O operador de Choi correspondente ao mapa $\mathcal{E} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ é definido por*

$$(\mathcal{E} \otimes \text{id}_E)(|\Omega\rangle_{SE} \langle \Omega|_{SE}) = \sum_{j,l=1}^{d_S} \mathcal{E}(|j\rangle_S \langle l|_S) \otimes |j\rangle_E \langle l|_E , \tag{A.45}$$

em que $|\Omega\rangle_{SE}$ representa o estado maximamente emaranhado

$$|\Omega\rangle_{SE} = \sum_{j=1}^{d_S} |j\rangle_S \otimes |j\rangle_E . \tag{A.46}$$

Note que se o mapa $\mathcal{E} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ é completamente positivo então o operador de Choi é positivo semi-definido, isto é, $(\mathcal{E} \otimes \text{id}_E)(|\Omega\rangle_{SE} \langle \Omega|_{SE}) \geq 0$. Isto porque o estado maximamente emaranhado define um operador densidade puro que é positivo semi-definido.

O critério 2 sugere a princípio verificar a ação do mapa $(\mathcal{E} \otimes \text{id}_E)(\bullet)$ sobre um vasto número de estados para julgar sua positividade completa. Entretanto, através da definição anterior, é suficiente analisar se o operador de Choi é positivo semi-definido. Esta é a essência da técnica da matriz dinâmica discutida nas Refs. (55, 108) a respeito de mapas CPTP.

Há uma última condição, conhecida como preservação de traço, que também é exigida a evoluções físicas. Novamente, este vínculo se baseia no fato de que canais quânticos representam mapas afins, isto é, mapeiam operadores densidades em operadores densidade. Neste caso, dado o operador densidade arbitrário $\varrho \in \mathcal{H}_S$ satisfazendo $\text{Tr}(\varrho) = 1$, a ação do mapa $\mathcal{E} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ também deve satisfazer $\text{Tr}[\mathcal{E}(\varrho)] = 1$.

Critério 3 (Preservação de traço). *Um canal quântico $\mathcal{E} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ é um mapa que preserva traço se $\text{Tr}[\mathcal{E}(\varrho)] = \text{Tr}(\varrho) = 1 \ \forall \varrho \in \mathcal{H}$.*

A união dos critérios 1, 2 e 3 implica naturalmente no conjunto de características necessárias a canais quânticos definindo mapas completamente positivos que preservam traço.

Definição (Canal quântico e mapas CPTP). *Um canal quântico $\mathcal{E} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ correspondendo a uma dada evolução física define um mapa CPTP se é linear, preserva traço e é completamente positivo.*

A tríade de critérios 1, 2 e 3 define também a pedra fundamental do chamado teorema da representação de Choi-Kraus dado a seguir.

Teorema (Choi-Kraus). *Um canal quântico $\mathcal{E} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ é linear, completamente positivo e preserva traço se, e somente se, tem a seguinte decomposição de Choi-Kraus*

$$\mathcal{E}(\varrho) = \sum_{j=1}^d K_j \varrho K_j^\dagger, \quad (\text{A.47})$$

em que $\varrho \in \mathcal{H}_S$, $d \leq d_S d_E$ e $K_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$, com

$$\sum_{j=1}^d K_j^\dagger K_j = \mathbb{I}_S. \quad (\text{A.48})$$

O leitor pode conferir a demonstração deste teorema na Ref. (205). A prova contempla as partes “se”, a mais simples, e “somente se”, um pouco mais sutil e elaborada já que explora propriedades espectrais do operador de Choi.

Apêndice B

QSLs na literatura

Neste apêndice reunimos alguns dos principais resultados acerca de *quantum speed limits* (QSLs) presentes na literatura. Além de discutir os conceitos envolvidos em cada QSL, a idéia aqui consiste em apresentar explicitamente os detalhes técnicos necessários à derivação de cada limite inferior.

B.1 Mandelstam-Tamm (MT)

Seja um sistema quântico fechado descrito inicialmente pelo estado normalizado $|\psi_0\rangle$ ($t = 0$) cuja dinâmica é regida pelo hamiltoniano independente do tempo H . A evolução do estado é dada em termos do operador unitário $U_t = e^{-itH/\hbar}$ e, após um instate de tempo t , o sistema é descrito pelo estado $|\psi_t\rangle = U_t|\psi_0\rangle$. Considerando $\mathcal{O}$ um observável arbitrário independente do tempo deste sistema quântico, a relação de incerteza de Robertson (232) estabelece que o produto das variâncias relativas aos observáveis H e $\mathcal{O}$ é limitado inferiormente pela média do comutador entre estes operadores, isto é,

$$\Delta H \Delta \mathcal{O} \geq \frac{1}{2} |\langle [H, \mathcal{O}] \rangle|, \quad (\text{B.1})$$

onde $\langle A \rangle = \langle \psi_t | A | \psi_t \rangle$ e $(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ é a variância do operador A em relação ao estado evoluído $|\psi_t\rangle$. Note que a variância ΔH é independente do tempo já que

$$\langle \psi_t | H | \psi_t \rangle = \langle \psi_0 | U_t^\dagger H U_t | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle. \quad (\text{B.2})$$

De acordo com o teorema de Ehrenfest, o valor esperado do comutador $[H, \mathcal{O}]$ se conecta diretamente à variação temporal da média do observável $\mathcal{O}$ segundo a equação

$$\frac{d}{dt}\langle\mathcal{O}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[H, \mathcal{O}]\rangle. \quad (\text{B.3})$$

Substituindo esta identidade na relação de incerteza dada na Eq. (B.1), obtemos

$$\Delta H \Delta \mathcal{O} \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d}{dt}\langle\mathcal{O}\rangle \right|. \quad (\text{B.4})$$

Por simplicidade, seja $\mathcal{O} = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ o projetor relativo ao estado inicial $|\psi_0\rangle$ do sistema. Dado que este operador é idempotente, isto é, $\mathcal{O}^2 = \mathcal{O}$, então segue que $\langle\mathcal{O}^2\rangle = \langle\mathcal{O}\rangle$ e

$$\Delta \mathcal{O} = \sqrt{\langle\mathcal{O}\rangle - \langle\mathcal{O}\rangle^2}. \quad (\text{B.5})$$

Neste caso, combinando as Eqs. (B.4) e (B.5), é possível escrever

$$\Delta H \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d\langle\mathcal{O}\rangle/dt}{\sqrt{\langle\mathcal{O}\rangle - \langle\mathcal{O}\rangle^2}} \right| = \hbar \left| \frac{d}{dt} \arccos(|\langle\psi_0|\psi_t\rangle|) \right|. \quad (\text{B.6})$$

Repare que a última expressão no lado direito da Eq. (B.6) segue da propriedade $\langle\mathcal{O}\rangle = |\langle\psi_0|\psi_t\rangle|^2$, ou seja, o valor esperado $\langle\mathcal{O}\rangle$ se reduz ao módulo quadrado da projeção entre os estados envolvidos na dinâmica. Considerando a evolução entre os estados inicial $|\psi_0\rangle$ e final $|\psi_\tau\rangle$, o QSL de MT decorre diretamente da integração da Eq. (B.6) na variável t em relação ao intervalo $t \in [0, \tau]$ e subsequente aplicação da desigualdade $\int_a^b dx |f(x)| \geq \left| \int_a^b dx f(x) \right|$, tal que

$$\tau \geq \frac{\hbar}{\Delta E} \arccos(|\langle\psi_0|\psi_\tau\rangle|), \quad (\text{B.7})$$

onde definimos

$$\Delta E := \Delta H = \sqrt{\langle\psi_0|H^2|\psi_0\rangle - \langle\psi_0|H|\psi_0\rangle^2}. \quad (\text{B.8})$$

Note que este resultado se refere ao caso geral em que os estados $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_\tau\rangle$ são não-ortogonais. Entretanto, se a condição de ortogonalidade $\langle\psi_0|\psi_\tau\rangle = 0$ se aplica, então $\arccos(|\langle\psi_0|\psi_\tau\rangle|) = \pi/2$ e o QSL na Eq. (B.7) se reduz ao caso particular

$$\tau \geq \frac{\hbar\pi}{2\Delta E}. \quad (\text{B.9})$$

O resultado de Mandelstam e Tamm também pode ser interpretado como uma relação de incerteza energia-tempo via variação de algum observável físico do sistema quântico. Para tentar compreender este aspecto, considere novamente a desigualdade dada na

Eq. (B.4). Seja

$$\tau_{\mathcal{O}} := \frac{\Delta\mathcal{O}}{|d\langle\mathcal{O}\rangle/dt|} \quad (\text{B.10})$$

o tempo mínimo relativo a taxa de variação de $\langle\mathcal{O}\rangle$ em escalas de $\Delta\mathcal{O}$. Assim, escrevemos a incerteza

$$\tau_{\mathcal{O}}\Delta H \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (\text{B.11})$$

É possível verificar esta expressão de outra maneira, em especial seguindo a derivação original de MT. Integrando a Eq. (B.4) em relação ao tempo no intervalo $t \in [\tau, \tau + \Delta\tau]$ e recorrendo novamente a desigualdade $\int_a^b dx |f(x)| \geq \left| \int_a^b dx f(x) \right|$, obtemos

$$\Delta\tau\Delta H \geq \frac{\hbar}{2} \frac{|\delta\langle\mathcal{O}\rangle|}{\Delta\mathcal{O}}, \quad (\text{B.12})$$

em que

$$\delta\langle\mathcal{O}\rangle := \langle\psi_{\tau+\Delta\tau}|\mathcal{O}|\psi_{\tau+\Delta\tau}\rangle - \langle\psi_{\tau}|\mathcal{O}|\psi_{\tau}\rangle \quad (\text{B.13})$$

e

$$\overline{\Delta\mathcal{O}} := \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} dt \Delta\mathcal{O} \quad (\text{B.14})$$

define a média temporal da variância $\Delta\mathcal{O}$. Comparando as Eqs. (B.12) e (B.11), conclui-se que $\tau_{\mathcal{O}}$ é o valor mínimo de $\Delta\tau$ segundo o qual o valor médio $\langle\mathcal{O}\rangle$ sofre uma variação igual à média temporal $\overline{\Delta\mathcal{O}}$ do observável $\mathcal{O}$, ou seja, $\tau_{\mathcal{O}} = \Delta\tau$ tal que $|\delta\langle\mathcal{O}\rangle| = \overline{\Delta\mathcal{O}}$.

B.2 Aharonov-Anandan (AA)

Seja um sistema quântico descrito pelo estado puro $|\psi_t\rangle$ e cuja dinâmica unitária no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensão $d = \dim \mathcal{H}$ é governada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_t\rangle = H_t |\psi_t\rangle, \quad (\text{B.15})$$

em que $\langle\psi_t|\psi_t\rangle = 1 \forall t \in [0, \tau]$, e H_t é o hamiltoniano do sistema. Observe que a evolução unitária não modifica a pureza do estado inicial $|\psi_0\rangle$, isto é, $|\psi_t\rangle$ é um estado puro $\forall t \in [0, \tau]$. Estados puros, por sua vez, correspondem a vetores no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Neste caso, a menos de um fator de fase, vetores colineares pertencem à mesma classe de equivalência e representam o mesmo estado quântico. (108) Em outras palavras, ambos estados $|\psi_t\rangle$ e $e^{i\vartheta}|\psi_t\rangle$, $\forall \vartheta \in \mathbb{R}$, são fisicamente equivalentes e definem retas complexas

passando pela origem de $\mathcal{H}$. O conjunto dessas retas define o chamado espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^{d-1}$ de dimensão $d - 1 = \dim \mathbb{CP}^{d-1}$. A partir desta identificação, o espaço $\mathbb{CP}^{d-1}$ será tomado como guia na análise da evolução e propriedades físicas do sistema.

O estado $|\psi_t\rangle$ evolui no espaço projetivo ao longo de uma curva γ que conecta ambos estados inicial $|\psi_0\rangle$ e final $|\psi_\tau\rangle$ da dinâmica. Estabelecendo a parametrização $\gamma \equiv \gamma_t$, o comprimento desta curva é dado por

$$\ell(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle) = \int ds_{\text{FS}} = \int_0^\tau dt \frac{ds_{\text{FS}}}{dt} , \quad (\text{B.16})$$

em que

$$ds_{\text{FS}}^2 = 1 - |\langle \psi_t | \psi_{t+dt} \rangle|^2 \quad (\text{B.17})$$

representa a chamada métrica de Fubini-Study que emerge naturalmente da estrutura de produto interno intrínseca ao espaço projetivo $\mathbb{CP}^{d-1}$. Em síntese, a métrica de Fubini-Study pode ser construída a partir da projeção entre os estados $|\psi_{t+dt}\rangle$ e

$$|\psi_{t+dt}^\perp\rangle = (\mathbb{I} - |\psi_t\rangle\langle\psi_t|)|\psi_{t+dt}\rangle , \quad (\text{B.18})$$

onde $|\psi_{t+dt}^\perp\rangle$ é dado pela diferença entre $|\psi_{t+dt}\rangle$ e sua projeção no estado $|\psi_t\rangle$.

Dentre todas as possíveis trajetórias γ_t descritas pela evolução de $|\psi_t\rangle$ no intervalo $0 \leq t \leq \tau$ em $\mathbb{CP}^{d-1}$, a curva geodésica $\gamma^* := \{\min_t \gamma_t, \forall t > 0\}$ define aquela aquela com menor comprimento. Assim, dados $\ell(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle)$ e $\mathcal{L}(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle)$ os comprimentos, respectivamente, de γ_t e γ^* , dispomos da desigualdade abaixo

$$\mathcal{L}(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle) \leq \ell(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle) . \quad (\text{B.19})$$

É possível mostrar que o comprimento da geodésica que conecta os estados $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_\tau\rangle$ no espaço projetivo é dado por (62, 108)

$$\mathcal{L}(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle) = \arccos(|\langle \psi_\tau | \psi_0 \rangle|) . \quad (\text{B.20})$$

Observe que esta quantidade define naturalmente uma medida de distinguibilidade entre os estados puros do sistema quântico em analogia à distância estatística de Wootters. (109) Em especial, se $\mathcal{L}(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle) = \pi/2$, então $\langle \psi_\tau | \psi_0 \rangle = 0$ e os estados $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_\tau\rangle$ são ortogonais, isto é, completamente distinguíveis.

O limite inferior no tempo de evolução proposto por Aharonov e Anandan é obtido

a partir da Eq. (B.19). Esta desigualdade pode ser simplificada se reescrevermos o comprimento $\mathcal{L}(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle)$ na Eq. (B.16) em termos de elementos de matriz envolvendo o hamiltoniano H_t e o estado $|\psi_t\rangle$. Neste sentido, considere a expansão do estado $|\psi_{t+dt}\rangle$ em série de Taylor

$$|\psi_{t+dt}\rangle = |\psi_t\rangle + dt \frac{d}{dt} |\psi_t\rangle + \frac{dt^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} |\psi_t\rangle + \mathcal{O}(dt^3) , \quad (\text{B.21})$$

em que truncamos a expansão em segunda ordem de aproximação considerando a escala de tempos $dt/\tau \ll 1$. Através da evolução unitária de $|\psi_t\rangle$ descrita pela Eq. (B.15), obtemos

$$\frac{d^2}{dt^2} |\psi_t\rangle = -\frac{i}{\hbar} \frac{d}{dt} (H_t |\psi_t\rangle) = -\frac{1}{\hbar} \left(i \frac{dH_t}{dt} |\psi_t\rangle + \frac{1}{\hbar} H_t^2 |\psi_t\rangle \right) . \quad (\text{B.22})$$

Combinando as Eqs. (B.21) e (B.22), a projeção entre os estados $|\psi_t\rangle$ e $|\psi_{t+dt}\rangle$ assume a forma

$$\langle \psi_t | \psi_{t+dt} \rangle = 1 - i \frac{dt}{\hbar} \langle \psi_t | H_t | \psi_t \rangle - \frac{dt^2}{2\hbar} \left(i \langle \psi_t | \frac{dH_t}{dt} | \psi_t \rangle + \frac{1}{\hbar} \langle \psi_t | H_t^2 | \psi_t \rangle \right) + \mathcal{O}(dt^3) , \quad (\text{B.23})$$

onde utilizamos a normalização $\langle \psi_t | \psi_t \rangle = 1$, $\forall t > 0$, do estado evoluído. A partir deste resultado, segue que

$$|\langle \psi_t | \psi_{t+dt} \rangle|^2 = 1 - \frac{dt^2}{\hbar^2} \Delta E_t^2 + \mathcal{O}(dt^3) \quad (\text{B.24})$$

com

$$\Delta E_t = \sqrt{\langle \psi_t | H_t^2 | \psi_t \rangle - \langle \psi_t | H_t | \psi_t \rangle^2} , \quad (\text{B.25})$$

e a métrica de Fubini-Study na Eq. (B.17) assume a forma

$$ds_{\text{FS}}^2 = \frac{dt^2}{\hbar^2} \Delta E_t^2 . \quad (\text{B.26})$$

Analisando a Eq. (B.26), Aharonov e Anandan atribuem um significado geométrico para a incerteza ΔE_t na energia em relação ao estado quântico $|\psi_t\rangle$. Em linhas gerais, a quantidade $ds_{\text{FS}}/dt = \Delta E_t/\hbar$ descreve a magnitude da velocidade do sistema quântico ao longo de sua evolução no espaço projetivo. Além disso, a evolução do estado em $\mathbb{CP}^{d-1}$ determina completamente a dispersão ΔE_t .

Finalmente, combinando as Eqs. (B.16), (B.20) e (B.26), o limite inferior no tempo de evolução proposto por Aharonov e Anandan é dado pela desigualdade

$$\arccos(|\langle \psi_\tau | \psi_0 \rangle|) \leq \frac{1}{\hbar} \int_0^\tau dt \Delta E_t . \quad (\text{B.27})$$

Em especial, se $H_t = H$ é independente do tempo, então

$$\Delta E_t = \Delta E = \sqrt{\langle \psi_0 | H^2 | \psi_0 \rangle - \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle^2} \quad (\text{B.28})$$

e o QSL de Aharonov e Anandan recobra o resultado de Mandelstam e Tamm, atribuindo-lhe também o devido significado geométrico.

B.3 Margolus-Levitin (ML)

Considere um sistema quântico descrito inicialmente pelo estado normalizado $|\psi_0\rangle$ ($t = 0$) cuja dinâmica é governada pelo hamiltoniano independente do tempo $H = \sum_n E_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$, onde $E_n > 0 \forall n > 0$, $E_0 = 0$ e $\{|\phi_n\rangle\}$ é o conjunto ortonormal completo de autoestados do hamiltoniano. Note que $|\psi_0\rangle$ pode ser escrito em termos da combinação linear dos autoestados de H na forma

$$|\psi_0\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle, \quad (\text{B.29})$$

com $c_n = \langle \phi_n | \psi_0 \rangle$ e $\sum_n |c_n|^2 = 1$. Este estado evolui unitariamente segundo o operador $U_t = e^{-itH/\hbar}$ e, após um instante de tempo arbitrário τ , o sistema é descrito pelo estado

$$|\psi_\tau\rangle = \sum_n c_n e^{-i\tau E_n/\hbar} |\phi_n\rangle. \quad (\text{B.30})$$

Seja agora a projeção

$$\mathbf{p}_\tau := \langle \psi_0 | \psi_\tau \rangle = \sum_n |c_n|^2 e^{-i\tau E_n/\hbar} \quad (\text{B.31})$$

entre ambos estados inicial $|\psi_0\rangle$ e final $|\psi_\tau\rangle$. Repare que $\mathbf{p}_\tau$ é um número complexo cujas partes real $\text{Re}(\mathbf{p}_\tau)$ e imaginária $\text{Im}(\mathbf{p}_\tau)$ se escrevem, respectivamente,

$$\text{Re}(\mathbf{p}_\tau) = \sum_n |c_n|^2 \cos\left(\frac{E_n \tau}{\hbar}\right), \quad \text{Im}(\mathbf{p}_\tau) = \sum_n |c_n|^2 \sin\left(\frac{E_n \tau}{\hbar}\right). \quad (\text{B.32})$$

O QSL reportado por Margolus e Levitin é obtido impondo duas condições sob a Eq. (B.32). Em primeiro lugar, a derivação requer o uso da desigualdade $\cos x \geq 1 - (2/\pi)(x + \sin x)$ válida para todo $x \geq 0$ e cuja saturação ocorre nos casos $x = 0$ e $x = \pi$ (veja Fig. B.1). De fato, dada a positividade dos autovalores do hamiltoniano H , isto é, $E_n \geq 0$, é possível

Figura B.1 – Gráfico das funções $\cos x$ (linha sólida vermelha) e $1 - (2/\pi)(x + \sin x)$ (linha tracejada azul). Embora o gráfico esteja restrito ao intervalo $x \in [0, 2\pi]$, a desigualdade $\cos x \geq 1 - (2/\pi)(x + \sin x)$ é válida para todo $x \geq 0$. Note que a saturação $\cos x = 1 - (2/\pi)(x + \sin x)$ ocorre para $x = 0$ e $x = \pi$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

escolher $x = E_n \tau / \hbar \geq 0$ e

$$\begin{aligned} \text{Re}(\mathbf{p}_\tau) &\geq \sum_n |c_n|^2 \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \left[\frac{E_n \tau}{\hbar} + \sin \left(\frac{E_n \tau}{\hbar} \right) \right] \right\} \\ &\geq 1 - \frac{2\langle H \rangle}{\pi \hbar} \tau + \frac{2}{\pi} \text{Im}(\mathbf{p}_\tau) , \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

em que

$$\langle H \rangle = \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle = \sum_n |c_n|^2 E_n \quad (\text{B.34})$$

é a média do hamiltoniano em relação ao estado inicial do sistema. Em segundo lugar, o *quantum speed limit* de ML se refere ao tempo mínimo segundo o qual o estado inicial $|\psi_0\rangle$ evolui para um estado ortogonal $|\psi_\tau\rangle$. Este vínculo de ortogonalidade implica $\langle \psi_0 | \psi_\tau \rangle = 0$ e, portanto, tendo em vista que $\mathbf{p}_\tau$ é um número complexo, ambas igualdades $\text{Re}(\mathbf{p}_\tau) = 0$ e $\text{Im}(\mathbf{p}_\tau) = 0$ devem ser simultaneamente satisfeitas. Substituindo estas expressões na Eq. (B.33), decorre imediatamente que o QSL obtido por Margolus-Levitin é dado por

$$\tau \geq \frac{\pi \hbar}{2\langle H \rangle} . \quad (\text{B.35})$$

B.4 Levitin-Toffoli (LT)

B.4.1 Estados iniciais e o QSL de MT

Levitin e Toffoli (77) discutiram a existência de estados quânticos que satisfazem o limite inferior no tempo de evolução obtido por Mandelstam-Tamm. Em síntese, os autores mostraram que a desigualdade $\tau \geq \pi\hbar/(2\Delta E)$ é saturada por estados $|\psi_0\rangle = (1/\sqrt{2})(|\phi_0\rangle + |\phi_n\rangle)$ dados pela superposição coerente de dois autoestados do hamiltoniano gerador da dinâmica. Abaixo segue a demonstração em detalhes deste resultado.

Considere um sistema quântico descrito em $t = 0$ pelo estado $|\psi_0\rangle$ e cuja dinâmica unitária é governada pelo hamiltoniano independente do tempo $H = \sum_{n=0}^{\infty} E_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$. Por hipótese, $E_n > 0 \forall n > 0$ com $E_0 = 0$, isto é, o estado fundamental do sistema tem energia nula, e os autoestados $\{|\phi_n\rangle\}$ de H formam um conjunto ortonormal completo. Em termos desta base de autoestados, segue que $|\psi_0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\phi_n\rangle$, com $c_n = \langle\phi_n|\psi_0\rangle$ e $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1$, e o estado evoluído $|\psi_t\rangle$ do sistema é dado por

$$|\psi_t\rangle = e^{-itH/\hbar} |\psi_0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-itE_n/\hbar} |\phi_n\rangle \quad (\text{B.36})$$

A projeção entre os estados $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_t\rangle$ resulta

$$\mathfrak{p}_t := \langle\psi_0|\psi_t\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 e^{-itE_n/\hbar} \quad (\text{B.37})$$

e, então,

$$\begin{aligned} |\mathfrak{p}_t|^2 &= \sum_{n,n'=0}^{\infty} |c_n|^2 |c_{n'}|^2 e^{-it(E_n - E_{n'})/\hbar} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n,n'=0}^{\infty} |c_n|^2 |c_{n'}|^2 \left(e^{-it(E_n - E_{n'})/\hbar} + e^{-it(E_{n'} - E_n)/\hbar} \right) \\ &= \sum_{n,n'=0}^{\infty} |c_n|^2 |c_{n'}|^2 \cos \left[\frac{(E_n - E_{n'})t}{\hbar} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

em que simetizamos a soma no par de índices $\{n, n'\}$ e reescrevemos a soma de exponenciais em termos da função cosseno.

É possível estabelecer um limite inferior para o lado direito da Eq. (B.38). Para tanto, utilizaremos a desigualdade trigonométrica

$$\cos x \geq 1 - \frac{2}{\pi^2} (2x \sin x + x^2) \quad (\text{B.39})$$

Figura B.2 – Gráfico das funções $\cos x$ (linha sólida vermelha) e $1 - (2/\pi^2)(2x \sin x + x^2)$ (linha tracejada azul). Note que a saturação $\cos x = 1 - (2/\pi^2)(2x \sin x + x^2)$ ocorre para $x = 0$ e $x = \pm\pi$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

válida para $\forall x \in \mathbb{R}$. Em especial, esta desigualdade é saturada para $x = 0$ e $x = \pm\pi$ (veja detalhes na Fig. B.2). Assim, combinando as Eqs. (B.38) e (B.39), encontramos a desigualdade

$$|\mathbf{p}_t|^2 \geq 1 - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n,n'=0}^{\infty} |c_n|^2 |c_{n'}|^2 (2x_{nn'} \sin x_{nn'} + x_{nn'}^2), \quad (\text{B.40})$$

em que definimos

$$x_{nn'} := \frac{(E_n - E_{n'})t}{\hbar}. \quad (\text{B.41})$$

Entretanto, analisando a Eq. (B.38), é possível escrever

$$t \frac{d}{dt} |\mathbf{p}_t|^2 = - \sum_{n,n'=0}^{\infty} |c_n|^2 |c_{n'}|^2 x_{nn'} \sin x_{nn'}. \quad (\text{B.42})$$

Por outro lado, partindo da variância $(\Delta E)^2 = \langle \psi_0 | H^2 | \psi_0 \rangle - \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle^2$ e utilizando que $\sum_{n'=0}^{\infty} |c_{n'}|^2 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} (\Delta E)^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 E_n^2 - \sum_{n,n'=0}^{\infty} |c_n|^2 |c_{n'}|^2 E_n E_{n'} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n,n'=0}^{\infty} |c_n|^2 |c_{n'}|^2 (E_n^2 - 2E_n E_{n'} + E_{n'}^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n,n'=0}^{\infty} |c_n|^2 |c_{n'}|^2 (E_n - E_{n'})^2 \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

em que simetrizamos a soma nos índices $\{n, n'\}$ e, portanto,

$$\frac{2t^2}{\hbar^2}(\Delta E)^2 = \sum_{n, n'=0}^{\infty} |c_n|^2 |c_{n'}|^2 x_{nn'}^2. \quad (\text{B.44})$$

Assim, combinando as Eqs. (B.40), (B.42) e (B.44), o módulo quadrado $|\mathbf{p}_t|^2$ da projeção entre os estados inicial e final da dinâmica satisfaz a desigualdade

$$|\mathbf{p}_t|^2 \geq 1 + \frac{4t}{\pi^2} \frac{d}{dt} |\mathbf{p}_t|^2 - \frac{4t^2}{\hbar\pi^2} (\Delta E)^2. \quad (\text{B.45})$$

O módulo quadrado da projeção $\mathbf{p}_t$ é positivo, isto é, $|\mathbf{p}_t|^2 \geq 0 \forall t > 0$. Em particular, especificando a Eq. (B.45) no instante $t = \tau$, obtemos

$$|\mathbf{p}_\tau|^2 \geq 1 + \frac{4\tau}{\pi^2} \left(\frac{d}{dt} |\mathbf{p}_t|^2 \right)_{t=\tau} - \frac{4\tau^2}{\hbar\pi^2} (\Delta E)^2. \quad (\text{B.46})$$

A taxa de variação $(d|\mathbf{p}_t|^2/dt)_{t=\tau}$ será nula se $|\mathbf{p}_\tau|^2 = 0$. Neste caso, considerando $t = \tau$ o instante de tempo no qual os estados $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_\tau\rangle$ são ortogonais, isto é, $|\mathbf{p}_\tau| = 0$, então a Eq. (B.46) implica que

$$0 \geq 1 - \frac{4\tau^2}{\hbar\pi^2} (\Delta E)^2 \quad (\text{B.47})$$

e, portanto, rearranjando este resultado, o limite de Mandelstam-Tamm no tempo de evolução do sistema será

$$\tau \geq \frac{\pi\hbar}{2\Delta E}. \quad (\text{B.48})$$

Observe que, a partir da desigualdade na Eq. (B.39), a desigualdade na Eq. (B.48) é saturado para $x_{nn'} = 0$ e $x_{nn'} = \pm\pi$. Em relação ao primeiro caso, note que a condição

$$x_{nn'} = \frac{(E_n - E_{n'})t}{\hbar} = 0 \quad (\text{B.49})$$

para $\forall n, n' \in \mathbb{N}$, é satisfeita sob duas possibilidades: (i) caso trivial $n = n'$; (ii) caso não-trivial $n \neq n'$. Em ambos cenários, o sistema quântico dispõe de um único nível de energia. Por outro lado, a condição

$$x_{nn'} = \frac{(E_n - E_{n'})t}{\hbar} = \pm\pi \quad (\text{B.50})$$

para $\forall n, n' \in \mathbb{N}$ e $n \neq n'$, é satisfeita sob duas possibilidades: (i) caso trivial $n' = n + 1$, isto é, os níveis de energia são consecutivos e igualmente espaçados; (ii) caso não-trivial $n' = n + r$, com $r \in \mathbb{N}$, isto é, os níveis de energia são não-consecutivos mas ainda têm o mesmo *gap* de separação energética. Em outras palavras, este caso implica que, para

$\forall n, n', r \in \mathbb{N}$ o sistema quântico tem apenas dois níveis de energia, por exemplo, o estado fundamental $|\phi_0\rangle$ para $n = 0$ e um outro estado $|\phi_n\rangle$ para $n \in \mathbb{N}$, e é dado por

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_0\rangle + |\phi_n\rangle) . \quad (\text{B.51})$$

Este estado representa um caso particular, por exemplo, da família de estados

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_0\rangle + e^{i\vartheta}|\phi_n\rangle) \quad (\text{B.52})$$

parametrizados pela fase real $\vartheta \in \mathbb{R}$, com $\langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1$, e que também saturam o QSL de Mandelstam-Tamm.

B.4.2 O QSL unificado

Em face das características distintas de cada limite inferior, os QSLs de MT, $\tau \geq \pi\hbar/(2\Delta E)$, e ML, $\tau \geq \pi\hbar/(2E)$, são simultaneamente satisfeitos apenas por estados quânticos tais que $\Delta E = E$. Diante desse impasse, Levitin e Toffoli (77) investigaram a existência de um limite inferior unificado, no qual $\Delta E \neq E$, que recobre os resultados de MT e ML como casos assintóticos. Em linhas gerais, os autores advogaram rigorosamente em favor do QSL

$$\tau_{\min} = \max \left\{ \frac{\pi\hbar}{2\Delta E}, \frac{\pi\hbar}{2E} \right\} = \frac{\pi\hbar}{4(E + \Delta E - |E - \Delta E|)} \quad (\text{B.53})$$

que já havia sido cogitado na literatura sem qualquer tipo de prova formal. A idéia consiste em provar a existência de uma família de estados iniciais $|\psi_0\rangle$ do sistema quântico cujo limite inferior no tempo de evolução se comporte o mais próximo possível da Eq. (B.53) que, por sua vez, é reescrita convenientemente na forma

$$\tau_{\min} = \frac{\hbar\pi(1 + e^{|\ln \alpha|})}{2E(1 + \alpha)} , \quad (\text{B.54})$$

em que definimos

$$\alpha := \frac{\Delta E}{E} . \quad (\text{B.55})$$

Considerando o contexto físico introduzido na Subseção B.4.1, enunciamos o teorema seguinte.

Teorema. *Dado $\alpha = \Delta E/E \neq 1$ e $\varepsilon > 0$, existe um estado $|\psi_0\rangle$ tal que $\langle\psi_0|\psi_\tau\rangle = 0$ no*

instante

$$\tau \leq \frac{\hbar\pi(1 + e^{|\ln \alpha|})}{2E(1 + \alpha)}(1 + \varepsilon) . \quad (\text{B.56})$$

Prova. Vamos iniciar a demonstração pelo caso $\alpha < 1$. Por hipótese, seja

$$|\psi_0\rangle = c_0|\phi_0\rangle + c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle \quad (\text{B.57})$$

o estado inicial do sistema, com $H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$ para $n = 0, 1, 2$ e $E_0 = 0$. O vínculo de normalização $\langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1$ fornece a identidade

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1 \quad (\text{B.58})$$

com

$$p_n := |c_n|^2 . \quad (\text{B.59})$$

A evolução unitária de $|\psi_0\rangle$ é mediada pelo operador $U_t = e^{-itH/\hbar}$ e, após um instante de tempo arbitrário $t = \tau$, o sistema é descrito pelo estado

$$|\psi_\tau\rangle = \sum_{n=0}^2 c_n e^{-i\tau E_n/\hbar} |\phi_n\rangle = \sum_{n=0}^2 c_n e^{-ix_n} |\phi_n\rangle , \quad (\text{B.60})$$

em que introduzimos as variáveis adimensionais

$$x_n = x_n(\tau) = \frac{\tau E_n}{\hbar} . \quad (\text{B.61})$$

Estabelecidas as notações nas Eqs. (B.59) e (B.61), faz-se pertinente verificar como o valor médio $\langle H \rangle$ e a variância $\Delta H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}$ do hamiltoniano H se comportam em termos das variáveis $\{p_j, x_j\}_{j=1,2}$. Após cálculos simples¹, o valor médio é dado por

$$E := \langle H \rangle = \frac{\hbar}{\tau} \langle x \rangle \quad (\text{B.62})$$

em que

$$\langle x \rangle := p_1 x_1 + p_2 x_2 , \quad (\text{B.63})$$

e a variância resulta

$$\Delta E := \Delta H = \frac{\hbar}{\tau} \Delta x \quad (\text{B.64})$$

¹Note que $\forall a \in \mathbb{N}$, temos

$$\langle H^a \rangle = \sum_{n=0}^2 |c_n|^2 E_n^a = (\hbar/\tau)^a (p_1 x_1^a + p_2 x_2^a) .$$

com

$$\Delta x := \sqrt{p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 - (p_1 x_1 + p_2 x_2)^2} . \quad (\text{B.65})$$

Em especial, note que as Eqs. (B.62) e (B.64) implicam, respectivamente, em $\tau = \hbar(\langle x \rangle / E)$ e $\tau = \hbar(\Delta x / \Delta E)$.

Considere novamente a projeção entre os estados inicial $|\psi_0\rangle$ e final $|\psi_\tau\rangle$ dado por

$$\mathbf{p}_\tau := \langle \psi_0 | \psi_\tau \rangle = \sum_{n=0}^2 |c_n|^2 e^{-i\tau E_n / \hbar} = \sum_{n=0}^2 p_n e^{-ix_n} \quad (\text{B.66})$$

No regime em que estes estados são mutuamente ortogonais, isto é, $\mathbf{p}_\tau = 0$, a condição $\text{Re}(\mathbf{p}_\tau) = 0$ implica que

$$p_0 + p_1 \cos x_1 + p_2 \cos x_2 = 0 , \quad (\text{B.67})$$

enquanto $\text{Im}(\mathbf{p}_\tau) = 0$ permite concluir

$$p_1 \sin x_1 + p_2 \sin x_2 = 0 . \quad (\text{B.68})$$

Em especial, combinando as Eqs. (B.58) e (B.67) dispomos da nova expressão

$$p_1(1 - \cos x_1) + p_2(1 - \cos x_2) = 1 . \quad (\text{B.69})$$

Através do conjunto de parâmetros $\{p_j\}_{j=0,1,2}$ e $\{x_j\}_{j=1,2}$ determinado pela solução do sistema formado pelas Eqs. (B.58), (B.67) e (B.68), é possível reescrever as expressões $\tau = \hbar(\langle x \rangle / E)$ e $\tau = \hbar(\Delta x / \Delta E)$ de forma mais simples. Entretanto, já que dispomos de um número maior de incógnitas do que equações algébricas, devemos nos valer de algum tipo de *ansatz*. Por hipótese, seja² $x_2 = \pi + x_1 - 2\phi$. Neste caso, resolvendo o sistema linear nas variáveis p_1 e p_2 formado pelas Eqs. (B.68) e (B.69), conclui-se que

$$p_1 = \frac{1}{2} - \frac{(1 + \cos x_1)}{2 \sin x_1} \tan \phi \quad (\text{B.70})$$

e

$$p_2 = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \phi) \left[1 + \frac{(1 - \cos x_1)}{\sin x_1} \tan \phi \right]^{-1} . \quad (\text{B.71})$$

Analisando cuidadosamente estas expressões, é possível entender de forma um pouco

²Para entender esta proposta, note que se $p_0 = 0$ pode-se mostrar que as Eqs. (B.67) e (B.68) são satisfeitas com $x_2 = \pi + x_1$. Entretanto, este caso não é relevante já que implicaria numa redefinição da ocupação e da energia do estado fundamental do sistema. Assim, no caso geral em que $p_0 \neq 0$, incluímos a diferença de fase ϕ em $x_2 = \pi + x_1 - 2\phi$ como uma correção ao caso mencionado.

mais clara a razão para o valor da fase ϕ no *ansatz* $x_2 = \pi + x_1 - 2\phi$ mencionada na Ref. (77). Vamos escolher $\phi = (\delta/2) \sin x_1$, com $\delta \ll 1$, tal que $x_2 = x_1 + \pi - \delta \sin x_1$ e $\tan \phi \approx (\delta/2) \sin x_1 + \mathcal{O}(\delta^2)$. Neste caso, mantendo a aproximação em primeira ordem no parâmetro δ , as Eqs. (B.70) e (B.71) conduzem a

$$p_1 \approx \frac{1}{2} - \frac{\delta}{4}(1 + \cos x_1) + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (\text{B.72})$$

e

$$p_2 \approx \frac{1}{2} - \frac{\delta}{4}(1 - \cos x_1) + \mathcal{O}(\delta^2) . \quad (\text{B.73})$$

A partir destes resultados, a Eq. (B.58) implica que

$$p_0 \approx \frac{\delta}{2} + \mathcal{O}(\delta^2) . \quad (\text{B.74})$$

Desta forma, substituindo Eqs. (B.72) e (B.73) nas Eqs. (B.63) e (B.65), reescrevemos $\langle x \rangle$ e $\langle \Delta x \rangle$ como segue

$$\langle x \rangle \approx \frac{\pi}{2} + x_1 - \frac{\delta}{4} [2x_1 - 2 \sin x_1 + \pi(1 - \cos x_1)] + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (\text{B.75})$$

e

$$\Delta x \approx \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2\pi} [x_1(\pi + x_1) - \pi \sin x_1] + \mathcal{O}(\delta^2) . \quad (\text{B.76})$$

A partir destas expressões, a razão $\Delta x / \langle x \rangle$ em ordem linear de aproximação no parâmetro δ fornece

$$\frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \approx \frac{\pi}{\pi + 2x_1} + \mathcal{O}(\delta) . \quad (\text{B.77})$$

Dado que $\alpha = \Delta E / E = \Delta x / \langle x \rangle$, dispomos enfim de uma aproximação para x_1 , a saber,

$$x_1 \approx \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) + \mathcal{O}(\delta) . \quad (\text{B.78})$$

Substituindo a Eq. (B.78) na Eq. (B.76) e levando em conta que $p_0 \approx \delta/2 + \mathcal{O}(\delta^2)$, conclui-se que

$$\Delta x \approx \frac{\pi}{2} + \frac{\pi p_0}{4} \left\{ \frac{1}{\alpha^2} - 1 - \frac{4}{\pi} \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \right] \right\} + \mathcal{O}(p_0^2) . \quad (\text{B.79})$$

Por outro lado, sabendo que $\Delta E = (\hbar/\tau)\Delta x$, obtemos

$$\tau = \frac{\hbar \Delta x}{\Delta E} \approx \frac{\hbar \pi}{2 \Delta E} \left[1 + \frac{p_0}{2} \ell(\alpha) + \mathcal{O}(p_0^2) \right] \quad (\text{B.80})$$

onde

$$\ell(\alpha) := \frac{1}{\alpha^2} - 1 - \frac{4}{\pi} \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \right] . \quad (\text{B.81})$$

Dado que $p_0 \neq 0$ e $\alpha < 1$, isto é, $\ell(\alpha) \neq 0$, então a Eq. (B.80) permite concluir que $\tau > \hbar\pi/(2\Delta E)$. Por outro lado, escolhendo $p_0\ell(\alpha) < 2\varepsilon$ para $\varepsilon > 0$, então $\tau \leq \hbar\pi(1+\varepsilon)/(2\Delta E)$. Desta forma, concluímos que

$$\frac{\hbar\pi}{2\Delta E} < \tau \leq \frac{\hbar\pi}{2\Delta E}(1+\varepsilon) . \quad (\text{B.82})$$

Para concluir a demonstração, analisaremos agora o caso $\alpha > 1$. Considere o estado inicial³

$$|\psi_0\rangle = c_0|\phi_0\rangle + c_1|\phi_1\rangle + c_{2k+1}|\phi_{2k+1}\rangle \quad (\text{B.83})$$

em que $k \in \mathbb{N}/\{0\}$, $E_{2k+1} = (2k+1)E_1$ e

$$p_0 := |c_0|^2 = \frac{1}{2} , \quad p_1 := |c_1|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{k^2} \right) , \quad p_{2k+1} := |c_{2k+1}|^2 = \frac{\beta}{2k^2} . \quad (\text{B.84})$$

Observe, neste caso, que a positividade da probabilidade p_1 é garantida pela condição $\beta \leq k^2$. Além disso, a normalização $\langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1$ é satisfeita já que $p_0 + p_1 + p_{2k+1} = 1$. Através das variáveis adimensionais introduzidas na Eq. (B.61), temos

$$x_1 = \frac{\tau E_1}{\hbar} , \quad x_{2k+1} = \frac{\tau E_{2k+1}}{\hbar} = (2k+1) \frac{\tau E_1}{\hbar} = (2k+1)x_1 . \quad (\text{B.85})$$

Neste caso, o valor médio do hamiltoniano é dado por $E := \langle H \rangle = (\hbar/\tau)\langle x \rangle$, onde definimos

$$\langle x \rangle := p_1 x_1 + p_{2k+1} x_{2k+1} = \frac{x_1}{2} \left(1 + \frac{2\beta}{k} \right) , \quad (\text{B.86})$$

e a variância $\Delta E := \Delta H = (\hbar/\tau)\Delta x$, em que

$$\begin{aligned} \Delta x &:= \sqrt{p_1 x_1^2 + p_{2k+1} x_{2k+1}^2 - (p_1 x_1 + p_{2k+1} x_{2k+1})^2} \\ &= \frac{x_1}{2} \left[1 + 4\beta + \frac{4\beta}{k} \left(1 - \frac{\beta}{k} \right) \right]^{1/2} . \end{aligned} \quad (\text{B.87})$$

Partindo novamente da projeção $\mathbf{p}_\tau := \langle\psi_0|\psi_\tau\rangle$ definido na Eq. (B.66), a ortogonalidade entre os estados inicial $|\psi_0\rangle$ e final $|\psi_\tau\rangle$ implica agora que

$$p_0 + p_1 \cos x_1 + p_{2k+1} \cos x_{2k+1} = 0 , \quad p_1 \sin x_1 + p_{2k+1} \sin x_{2k+1} = 0 . \quad (\text{B.88})$$

³A Ref. (77) não esclarece as motivações para a escolha deste estado e tampouco para as probabilidades p_0 , p_1 e p_{2k+1} .

Combinando as Eqs. (B.84), (B.85) e (B.88) encontramos as expressões

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{k^2}\right) \cos x_1 + \frac{\beta}{2k^2} \cos[(2k+1)x_1] = 0 , \quad (\text{B.89})$$

e

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{k^2}\right) \sin x_1 + \frac{\beta}{2k^2} \sin[(2k+1)x_1] = 0 . \quad (\text{B.90})$$

Assim, é possível mostrar⁴ que as expressões anteriores implicam a seguinte equação

$$1 + \cos x_1 + \frac{2\beta}{m^2} [\cos(mx_1) - 1] = 0 , \quad (\text{B.91})$$

onde $m = 2k$, que admite a solução $x_1 = \pi$. Neste caso, segue que $x_{2k+1} = (2k+1)x_1 = (2k+1)\pi$ e as Eqs. (B.86) e (B.87) assumem a forma

$$\langle x \rangle = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{2\beta}{k}\right) , \quad (\text{B.92})$$

e

$$\Delta x = \frac{\pi}{2} \left[1 + 4\beta + \frac{4\beta}{k} \left(1 - \frac{\beta}{k}\right)\right]^{1/2} \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + 4\beta + \frac{2\beta}{k}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) , \quad (\text{B.93})$$

onde reescrevemos o lado direito da Eq. (B.93) em termos da série de Taylor no parâmetro $1/k$ e truncamos a expansão até a primeira ordem de aproximação. Dado que $\alpha = \Delta E/E = \Delta x/\langle x \rangle$, segue que

$$\beta = \frac{\alpha - 1}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) . \quad (\text{B.94})$$

Por outro lado, sabendo que $E = (\hbar/\tau)\langle x \rangle$, podemos escrever

$$\tau = \frac{\hbar\langle x \rangle}{E} = \frac{\hbar\pi}{2E} \left[1 + \frac{\alpha - 1}{2k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right] . \quad (\text{B.95})$$

Dado que $\alpha > 1$, então a Eq. (B.95) permite concluir que $\tau > \hbar\pi/(2E)$. Por outro lado, escolhendo $\alpha - 1 \leq 2k\varepsilon$ para $\varepsilon > 0$, então $\tau \leq \hbar\pi(1 + \varepsilon)/(2E)$. Desta forma, concluímos que

$$\frac{\hbar\pi}{2E} < \tau \leq \frac{\hbar\pi}{2E}(1 + \varepsilon) . \quad (\text{B.96})$$

■

⁴Multiplique a Eq. (B.89) por $\cos x_1$ e a Eq. (B.90) por $\sin x_1$ e some ambas equações resultantes. Após algumas manipulações algébricas, obtemos a Eq. (B.91).

B.5 del Campo-Egusquiza-Plenio-Huelga (CEPH)

Considere um sistema quântico S e um ambiente E definidos, respectivamente, em termos dos espaços de Hilbert $\mathcal{H}_S$ e $\mathcal{H}_E$ de dimensão $d = \dim \mathcal{H}_S$ e $d_E = \dim \mathcal{H}_E$. O sistema quântico total $S+E$ tem espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{SE} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ de dimensão $d_{SE} = \dim \mathcal{H}_{SE}$. Por hipótese, $S+E$ é fracamente acoplado e, em $t=0$, é descrito pelo estado descorrelacionado $\rho_0^{SE} = \rho_0 \otimes \rho_0^E$, em que ρ_0 e ρ_0^E são, respectivamente, os estados iniciais do sistema e ambiente. A evolução do conjunto global $S+E$ é governada pela transformação unitária $U_t \rho_0^{SE} U_t^\dagger$, com $U_t U_t^\dagger = U_t^\dagger U_t = \mathbb{I}^{SE}$, e a dinâmica reduzida do sistema é obtida traçando-se os graus de liberdade do ambiente, isto é,

$$\rho_t = \text{Tr}_E \left[U_t (\rho_0 \otimes \rho_0^E) U_t^\dagger \right] . \quad (\text{B.97})$$

É possível mostrar que esta evolução é equivalente à ação do mapa dinâmico $\mathcal{V}_t$, $\forall t \geq 0$, na forma

$$\rho_t = \mathcal{V}_t \rho_0 = e^{t\mathcal{L}} \rho_0 . \quad (\text{B.98})$$

Por sua vez, esta representação satisfaz a seguinte equação mestra Markoviana

$$\dot{\rho}_t = \mathcal{L}(\rho_t) , \quad (\text{B.99})$$

em que $\mathcal{L}$ representa o super-operador de Lindblad gerador da dinâmica de semi-grupo

$$\mathcal{L}(\rho_t) = -\frac{i}{\hbar} [H_t, \rho_t] + \sum_{j=1}^{d^2-1} \gamma_j \left(F_j \rho_t F_j^\dagger - \frac{1}{2} F_j^\dagger F_j \rho_t - \frac{1}{2} \rho_t F_j^\dagger F_j \right) \quad (\text{B.100})$$

com F_j os operadores de Lindblad e γ_j representa a taxa de decaimento associada ao processo de decoerência.

Ao contrário dos resultados discutidos até agora, a caracterização da distinguibilidade entre os estados ρ_0 e ρ_t no QSL de CEPH tem como figura de mérito a pureza relativa

$$f(t) = \frac{\text{Tr}[\rho_0 \rho_t]}{\|\rho_0\|_2^2} \quad (\text{B.101})$$

em que

$$\|\mathcal{O}\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O})} . \quad (\text{B.102})$$

Note que $f(0) = 1$ e $0 \leq f(t) \leq 1$. Além disso, se ρ_0 é um estado puro, por exemplo, $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, então $\|\rho_0\|_2^2 = \text{Tr}(\rho_0^2) = 1$ e a pureza relativa se reduz ao elemento de matriz

$f(t) = \langle \psi_0 | \rho_t | \psi_0 \rangle$. Entretanto, nas linhas adiante ρ_0 descreverá por hipótese um estado misto com $\|\rho_0\|_2^2 = \text{Tr}(\rho_0^2) \leq 1$.

Buscando obter o limite inferior no tempo de evolução do sistema via a dinâmica não-unitária, seja a taxa de variação da pureza relativa

$$\dot{f}(t) := \frac{df(t)}{dt} = \frac{\text{Tr}[\rho_0 \dot{\rho}_t]}{\|\rho_0\|_2^2} . \quad (\text{B.103})$$

O super-operador de Lindblad $\mathcal{L}$ e sua respectiva adjunta $\mathcal{L}^\dagger$ satisfazem a identidade (204)

$$\text{Tr}[\rho_0 \mathcal{L}(\rho_t)] = \text{Tr}[\mathcal{L}^\dagger(\rho_0) \rho_t] , \quad (\text{B.104})$$

em que

$$\mathcal{L}^\dagger(\rho_0) = \frac{i}{\hbar} [H_t, \rho_t] + \sum_{j=1}^{d^2-1} \gamma_j \left(F_j^\dagger \rho_0 F_j - \frac{1}{2} F_j^\dagger F_j \rho_0 - \frac{1}{2} \rho_0 F_j^\dagger F_j \right) . \quad (\text{B.105})$$

Combinando as Eqs. (B.103) e (B.104), o módulo da taxa de variação é reescrito na forma

$$|\dot{f}(t)| = \frac{|\text{Tr}[\mathcal{L}^\dagger(\rho_0) \rho_t]|}{\|\rho_0\|_2^2} . \quad (\text{B.106})$$

O QSL de CEPH decorre da proposição de um limite superior ao lado direito da Eq. (B.106). Em geral, isto pode ser feito explorando as diversas desigualdades de traço que envolvem normas de operadores. (143) A despeito desta miríade de possibilidades, os autores adotam a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|\text{Tr}(\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2)|^2 \leq \|\mathcal{O}_1\|_2^2 \|\mathcal{O}_2\|_2^2 . \quad (\text{B.107})$$

Neste caso, aplicando esta desigualdade ao lado direito da Eq. (B.106), obtemos

$$\dot{f}(t) \leq \frac{\|\mathcal{L}^\dagger(\rho_0)\|_2 \|\rho_t\|_2}{\|\rho_0\|_2^2} \leq \frac{\|\mathcal{L}^\dagger(\rho_0)\|_2}{\|\rho_0\|_2^2} \quad (\text{B.108})$$

em que utilizamos o vínculo de pureza $\|\rho_t\|_2^2 = \text{Tr}(\rho_t^2) \leq 1$, pois ρ_t é um estado misto. É importante mencionar que a escolha pela desigualdade de Cauchy-Schwarz não é totalmente ocasional. De fato, por meio dela CEPH fornecem um QSL que remonta ao resultado de Mandelstam-Tamm por meio de sua dependência no inverso da variância do gerador da dinâmica. Assim, integrando ambos os lados da Eq. (B.108) na variável t no intervalo $t \in [0, \tau]$ e utilizando a relação $\left| \int_0^\tau dt \dot{f}(t) \right| \leq \int_0^\tau dt |\dot{f}(t)|$, segue que

$$|f(\tau) - 1| \leq \tau \frac{\|\mathcal{L}^\dagger(\rho_0)\|_2}{\|\rho_0\|_2^2} . \quad (\text{B.109})$$

Visando compreender melhor esta relação, considere a parametrização $f(t) = \cos \theta$, ou

Figura B.3 – Gráfico das funções $|\cos \theta - 1|$ (linha sólida vermelha) e $4\theta^2/\pi^2$ (linha tracejada azul) no intervalo $\theta \in [0, \pi/2]$. Note que a saturação $|\cos \theta - 1| = 4\theta^2/\pi^2$ ocorre para $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

seja, $\theta \equiv \theta_t = \arccos[f(t)]$, onde $\theta \in [0, \pi/2]$. Neste caso, rearranjando a Eq. (B.109) dispomos da expressão

$$\tau \geq \frac{|\cos \theta - 1| \|\rho_0\|_2^2}{\|\mathcal{L}^\dagger(\rho_0)\|_2}. \quad (\text{B.110})$$

Por fim, sabendo que $|\cos \theta - 1| \geq 4\theta^2/\pi^2$ para $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (veja Fig. B.3), o QSL de CEPH relativo à dinâmica não-unitária é caracterizado pela desigualdade

$$\tau \geq \frac{4\theta^2 \|\rho_0\|_2^2}{\pi^2 \|\mathcal{L}^\dagger(\rho_0)\|_2}. \quad (\text{B.111})$$

Conforme mencionado por CEPH, é possível generalizar este resultado para o caso em que o super-operador de Lindblad é dependente do tempo, isto é, $\mathcal{L}(\bullet) \equiv \mathcal{L}_t(\bullet)$. Assim, partindo da Eq. (B.108) e repetindo as mesmas passagens algébricas que conduziram à Eq. (B.111), o limite inferior no tempo de evolução é dado por

$$\tau \geq \frac{4\theta^2 \|\rho_0\|_2^2}{\pi^2 \overline{\|\mathcal{L}_t^\dagger(\rho_0)\|_2}}, \quad (\text{B.112})$$

em que definimos

$$\overline{\|\mathcal{L}_t^\dagger(\rho_0)\|_2} := \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \|\mathcal{L}_t^\dagger(\rho_0)\|_2. \quad (\text{B.113})$$

Para concluir, mostraremos como o limite inferior no tempo de evolução pode ser

obtido se considerarmos a evolução do estado inicial ρ_0 do sistema sob a ação de canais quânticos. Em outras palavras, a partir da descrição da dinâmica reduzida do sistema S em termos da representação operador-soma, o estado evoluído do sistema após um instante de tempo t é dado por

$$\rho_t = \sum_{\alpha} K_{\alpha} \rho_0 K_{\alpha}^{\dagger} , \quad (\text{B.114})$$

em que $\{K_{\alpha}\} \equiv \{K_{\alpha}(t)\}$ descreve o conjunto de operadores de Kraus. A partir deste estado, é possível escrever o módulo da taxa de variação da pureza relativa dada na Eq. (B.103) da seguinte maneira

$$|\dot{f}(t)| = \frac{1}{\|\rho_0\|_2^2} \left| \sum_{\alpha} \text{Tr} \left[\rho_0 \left(\dot{K}_{\alpha} \rho_0 K_{\alpha}^{\dagger} + K_{\alpha} \rho_0 \dot{K}_{\alpha}^{\dagger} \right) \right] \right| . \quad (\text{B.115})$$

O primeiro passo em direção ao limite inferior no tempo de evolução consiste em estabelecer um limite superior ao lado direito da Eq. (B.115) via a desigualdade triangular $|\sum_{\alpha} c_{\alpha}| \leq \sum_{\alpha} |c_{\alpha}|$, a saber,

$$|\dot{f}(t)| \leq \frac{1}{\|\rho_0\|_2^2} \sum_{\alpha} \left[\left| \text{Tr} \left(\rho_0 \dot{K}_{\alpha} \rho_0 K_{\alpha}^{\dagger} \right) \right| + \left| \text{Tr} \left(\rho_0 K_{\alpha} \rho_0 \dot{K}_{\alpha}^{\dagger} \right) \right| \right] . \quad (\text{B.116})$$

Em analogia à formulação anterior, neste caso o QSL de CEPH também decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz dada na Eq. (B.107). Neste caso, a Eq. (B.116) implica a nova relação

$$|\dot{f}(t)| \leq \frac{1}{\|\rho_0\|_2} \sum_{\alpha} \left[\|\dot{K}_{\alpha} \rho_0 K_{\alpha}^{\dagger}\|_2 + \|K_{\alpha} \rho_0 \dot{K}_{\alpha}^{\dagger}\|_2 \right] . \quad (\text{B.117})$$

Dado que $\|\mathcal{O}\|_2 = \|\mathcal{O}^{\dagger}\|_2$ e reescrevendo $\dot{K}_{\alpha} \rho_0 K_{\alpha}^{\dagger} = \left(K_{\alpha} \rho_0 \dot{K}_{\alpha}^{\dagger} \right)^{\dagger}$, então obtemos

$$|\dot{f}(t)| \leq \frac{2}{\|\rho_0\|_2} \sum_{\alpha} \|K_{\alpha} \rho_0 \dot{K}_{\alpha}^{\dagger}\|_2 . \quad (\text{B.118})$$

Integrando ambos os lados desta desigualdade no tempo para $t \in [0, \tau]$ e considerando que $\left| \int_0^{\tau} dt \dot{f}(t) \right| \leq \int_0^{\tau} dt |\dot{f}(t)|$, temos

$$|f(\tau) - 1| \leq \frac{2\tau}{\|\rho_0\|_2} \sum_{\alpha} \overline{\|K_{\alpha} \rho_0 \dot{K}_{\alpha}^{\dagger}\|_2} , \quad (\text{B.119})$$

em que definimos

$$\overline{u(t)} := \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt u(t) . \quad (\text{B.120})$$

Rearranjando esta desigualdade, então

$$\tau \geq \frac{|f(\tau) - 1|}{2} \frac{\|\rho_0\|_2}{\sum_{\alpha} \overline{\|K_{\alpha} \rho_0 \dot{K}_{\alpha}^{\dagger}\|_2}} . \quad (\text{B.121})$$

Novamente, adotando a parametrização $f(t) = \cos \theta$, com $\theta \in [0, \pi/2]$, e utilizando a desigualdade $|\cos \theta - 1| \geq 4\theta^2/\pi^2$, encontramos o resultado

$$\tau \geq \frac{2\theta^2}{\pi^2} \frac{\|\rho_0\|_2}{\sum_{\alpha} \|K_{\alpha}\rho_0\dot{K}_{\alpha}^{\dagger}\|_2} . \quad (\text{B.122})$$

B.6 Deffner-Lutz (DL)

Considere um sistema quântico cuja dinâmica é governada pelo hamiltoniano dependente do tempo H_t . Por hipótese, o estado inicial ($t = 0$) é dado pelo estado puro $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$. Após um instante de tempo t , o sistema é descrito pelo estado ρ_t cuja pureza está condicionada à dinâmica sob a qual o sistema está sujeito. Em outras palavras, dado que ρ_0 é puro, o estado ρ_t será puro para evoluções unitárias ou misto para evoluções não-unitárias.

A figura de mérito adotada para caracterizar a distinguibilidade entre os estados ρ_0 e ρ_t é dada pelo ângulo de Bures

$$\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_t) = \arccos \left[\sqrt{F(\rho_0, \rho_t)} \right] , \quad (\text{B.123})$$

em que

$$F(\rho_0, \rho_t) = \langle \psi_0 | \rho_t | \psi_0 \rangle = \text{Tr}(\rho_0 \rho_t) \quad (\text{B.124})$$

é a fidelidade de Uhlmann. Em face da pureza de ρ_0 , isto é, $\text{Tr}(\rho_0^2) = \|\rho_0\|_2^2 = 1$, observe que a fidelidade de Uhlmann é igual à pureza relativa $f(t)$ definida na Eq. (B.101) e utilizada como figura de mérito na derivação do *quantum speed limit* por CEPH na Ref. (84).

Por simplicidade, vamos definir o funcional $g(t)$ do ângulo de Bures conforme abaixo

$$g(t) := \sin^2 \left[\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_t) \right] = 1 - \text{Tr}(\rho_0 \rho_t) , \quad (\text{B.125})$$

com $g(0) = 0$. Neste caso, tomando o módulo da derivada temporal $\dot{g}(t) := dg(t)/dt$, temos

$$|\dot{g}(t)| = |\text{Tr}(\rho_0 \dot{\rho}_t)| . \quad (\text{B.126})$$

A Eq. (B.126) será o ponto de partida na derivação do QSL de Deffner e Lutz para sistemas quânticos fechados e abertos. No caso não-unitário, ambas versões dos limites inferiores de Margolus-Levitin (ML) e Mandelstam-Tamm (MT) são verificadas. Entretanto, os autores

se restringem apenas ao QSL à la ML no caso unitário. É importante destacar, porém, que Defner e Lutz discutem a versão do resultado de MT para evoluções unitárias na Ref. (80).

B.6.1 Dinâmica unitária

No contexto da dinâmica unitária, a evolução do sistema quântico fechado é governada pela equação de von Neumann

$$\dot{\rho}_t = -\frac{i}{\hbar}[H_t, \rho_t] = -\frac{i}{\hbar}((H_t \rho_t) - (H_t \rho_t)^\dagger) . \quad (\text{B.127})$$

Neste caso, combinando as Eqs. (B.126) e (B.127) obtemos

$$|\dot{g}(t)| = \frac{1}{\hbar} |\text{Tr}(H_t \rho_t \rho_0) - \text{Tr}((H_t \rho_t)^\dagger \rho_0)| . \quad (\text{B.128})$$

Através da desigualdade triangular $|a + b| \leq |a| + |b|$, é possível estabelecer um limite superior para o lado direito da Eq. (B.128), a saber,

$$|\dot{g}(t)| \leq \frac{1}{\hbar} \{ |\text{Tr}(H_t \rho_t \rho_0)| + |\text{Tr}((H_t \rho_t)^\dagger \rho_0)| \} . \quad (\text{B.129})$$

Seja a desigualdade de traço de von Neumann

$$|\text{Tr}(\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2)| \leq \sum_{j=1}^n s_j(\mathcal{O}_1) s_j(\mathcal{O}_2) , \quad (\text{B.130})$$

em que $s_1(\mathcal{O}_l) \geq s_2(\mathcal{O}_l) \geq \dots \geq s_n(\mathcal{O}_l)$ são os valores singulares do operador $\mathcal{O}_l$ ($l = 1, 2$), isto é, os autovalores do operador $\sqrt{\mathcal{O}_l^\dagger \mathcal{O}_l}$, dispostos em ordem decrescente. (143) Em especial, se o operador é hermitiano, isto é, $\mathcal{O}_l = \mathcal{O}_l^\dagger$, então os valores singulares de $\mathcal{O}_l$ são dados em termos do valor absoluto de seus próprios autovalores. Além disso, vale destacar que

$$\|\mathcal{O}_l\|_\infty \leq \|\mathcal{O}_l\|_1 \quad (\text{B.131})$$

com

$$\|\mathcal{O}_l\|_\infty := s_1(\mathcal{O}_l) , \quad \|\mathcal{O}_l\|_1 := \sum_{j=1}^n s_j(\mathcal{O}_l) . \quad (\text{B.132})$$

Aplicando a desigualdade de traço de von Neumann à ambos os termos no lado direito da Eq. (B.129), encontramos

$$|\dot{g}(t)| \leq \frac{2}{\hbar} \sum_{j=1}^n s_j(\rho_0) s_j(H_t \rho_t) \quad (\text{B.133})$$

em que utilizamos a identidade $s_j(H_t \rho_t) = s_j((H_t \rho_t)^\dagger)$ relativa aos valores singulares de ambos operadores $H_t \rho_t$ e $(H_t \rho_t)^\dagger$. Para o estado puro ρ_0 segue que $s_j(\rho_0) = \delta_{j1}$, isto é, todos os demais valores singulares à exceção de $s_1(\rho_0) = 1$ são identicamente nulos. Assim, utilizando a identidade algébrica

$$\sum_{j=1}^n s_j(\rho_0) s_j(H_t \rho_t) = \sum_{j=1}^n \delta_{j1} s_j(H_t \rho_t) = s_1(H_t \rho_t) \quad (\text{B.134})$$

a Eq. (B.133) é reescrita na forma

$$|\dot{g}(t)| \leq \frac{2}{\hbar} s_1(\rho_t H_t) , \quad (\text{B.135})$$

Por fim, através da desigualdade na Eq. (B.131), a Eq. (B.135) implica a seguinte sequência de desigualdades

$$|\dot{g}(t)| \leq \frac{2}{\hbar} \|H_t \rho_t\|_\infty \leq \frac{2}{\hbar} \|H_t \rho_t\|_1 . \quad (\text{B.136})$$

A Eq. (B.136) representa a essência do QSL à la Margolus-Levitin de Deffner e Lutz para a dinâmica unitária. Em linhas gerais, o módulo da taxa de variação de um funcional do ângulo de Bures (extremo esquerdo da desigualdade), ou seja, a medida de distinguibilidade entre os estados ρ_0 e ρ_t , é limitado superiormente por normas envolvendo o estado evoluído ρ_t e o gerador H_t da dinâmica unitária (meio e extremo direito da desigualdade). O limite inferior no tempo de evolução é obtido via integração da Eq. (B.136) no intervalo $t \in [0, \tau]$ e utilizando a relação $|\int_0^\tau dt \dot{g}(t)| \leq \int_0^\tau dt |\dot{g}(t)|$. Portanto, obtemos

$$|g(\tau) - g(0)| \leq \frac{2\tau}{\hbar} \Xi_\infty \leq \frac{2\tau}{\hbar} \Xi_1 , \quad (\text{B.137})$$

em que definimos

$$\Xi_q := \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \|H_t \rho_t\|_q , \quad q = 1, 2, \infty . \quad (\text{B.138})$$

Dado que $g(0) = 0$ e $g(\tau) = \sin^2 [\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)]$, a Eq. (B.137) assume a forma

$$\frac{\hbar}{2} \sin^2 [\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)] \leq \tau \Xi_\infty \leq \tau \Xi_1 . \quad (\text{B.139})$$

Neste caso, é possível escrever separadamente os limites inferiores

$$\tau \geq \frac{\hbar}{2 \Xi_\infty} \sin^2 [\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)] \quad (\text{B.140})$$

e

$$\tau \geq \frac{\hbar}{2 \Xi_1} \sin^2 [\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)] . \quad (\text{B.141})$$

B.6.2 Dinâmica não-unitária

Agora vamos considerar a dinâmica não-unitária onde a evolução do sistema reduzido é governada pela equação mestra

$$\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_t(\rho_t) , \quad (\text{B.142})$$

em que $\mathcal{L}_t(\bullet)$ representa o super-operador de Lindblad⁵

$$\mathcal{L}_t(\rho_t) = \sum_{j=1}^{d^2-1} \gamma_j \left(A_j \rho_t A_j^\dagger - \frac{1}{2} A_j^\dagger A_j \rho_t - \frac{1}{2} \rho_t A_j^\dagger A_j \right) \quad (\text{B.143})$$

com $d = \dim \mathcal{H}_S$ a dimensão do espaço de Hilbert do sistema, $A_j \equiv A_j(t)$ os operadores de Lindblad dependentes do tempo e $\gamma_j \equiv \gamma_j(t)$ representa a taxa de decaimento associada ao processo de decoerência. Assim, a Eq. (B.126) assume a forma

$$|\dot{g}(t)| = |\text{Tr}(\rho_0 \mathcal{L}_t(\rho_t))| . \quad (\text{B.144})$$

Vamos começar a análise do *quantum speed limit* na dinâmica não-unitária obtendo o QSL à la Mandelstam-Tamm. Neste caso, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz $|\text{Tr}(AB)|^2 \leq \|A\|_2^2 \|B\|_2^2$, obtemos o resultado

$$|\dot{g}(t)| \leq \|\mathcal{L}_t(\rho_t)\|_2 , \quad (\text{B.145})$$

em que escolhemos $A = \dot{\rho}_t = \mathcal{L}_t(\rho_t)$ e $B = \rho_0$ e utilizamos $\|\rho_0\|_2^2 = 1$. A Eq. (B.145) é a chave central do QSL à la MT de Deffner e Lutz para a dinâmica não-unitária. Em síntese, o módulo da taxa de variação do funcional $g(t)$ do ângulo de Bures (extremo esquerdo da desigualdade), ou seja, a medida de distinguibilidade entre os estados ρ_0 e ρ_t , é limitado superiormente pela norma de Hilbert-Schmidt do super-operador de Lindblad $\mathcal{L}_t$ (extremo direito da desigualdade). Integrando ambos os lados desta desigualdade no tempo para $t \in [0, \tau]$ e considerando que $|\int_0^\tau dt \dot{g}(t)| \leq \int_0^\tau dt |\dot{g}(t)|$, temos

$$|g(\tau) - g(0)| \leq \tau \Lambda_2 \quad (\text{B.146})$$

com

$$\Lambda_q := \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \|\mathcal{L}_t(\rho_t)\|_q , \quad q = 1, 2, \infty . \quad (\text{B.147})$$

⁵Analisando a Ref. (85), a equação mestra $\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_t(\rho_t)$ é dada em termos da representação de interação e, portanto, o super-operador de Lindblad $\mathcal{L}_t(\bullet)$ não inclui a parte unitária da dinâmica $(i/\hbar)[\rho_t, H_t]$.

Dado que $g(0) = 0$ e $g(\tau) = \sin^2 [\mathcal{L}_t(\rho_0, \rho_\tau)]$, a Eq. (B.147) se reescreve na forma

$$\tau \geq \frac{1}{\Lambda_2} \sin^2 [\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)] . \quad (\text{B.148})$$

Por fim, resta demonstrar o QSL *a la* Margolus-Levitin segundo a abordagem de Deffner e Lutz. Em geral, os cálculos envolvendo este tipo de limite inferior no tempo de evolução seguirão passos análogos àqueles desenvolvidos na evolução unitária. Considerando novamente a desigualdade de traço de von Neumann dada na Eq. (B.130), então a Eq. (B.144) implica

$$|\dot{g}(t)| \leq \sum_{j=1}^n s_j(\rho_0) s_j(\mathcal{L}_t(\rho_t)) . \quad (\text{B.149})$$

Através do mesmo raciocínio desenvolvido no caso unitário, isto é, já que todos os valores singulares de ρ_0 à exceção de $s_1(\rho_0) = 1$ são identicamente nulos, segue que

$$\sum_{j=1}^n s_j(\rho_0) s_j(\mathcal{L}_t(\rho_t)) = \sum_{j=1}^n \delta_{j1} s_j(\mathcal{L}_t(\rho_t)) = s_1(\mathcal{L}_t(\rho_t)) \quad (\text{B.150})$$

e, portanto, obtemos a desigualdade

$$|\dot{g}(t)| \leq s_1(\mathcal{L}_t(\rho_t)) . \quad (\text{B.151})$$

Através da desigualdade na Eq. (B.131), a Eq. (B.151) implica a sequência de desigualdades

$$|\dot{g}(t)| \leq \|\mathcal{L}_t(\rho_t)\|_\infty \leq \|\mathcal{L}_t(\rho_t)\|_1 . \quad (\text{B.152})$$

Integrando ambos os lados da Eq. (B.151) na variável t no intervalo $t \in [0, \tau]$ e considerando que $|\int_0^\tau dt \dot{g}(t)| \leq \int_0^\tau dt |\dot{g}(t)|$, temos

$$|g(\tau) - g(0)| \leq \tau \Lambda_\infty(\tau) \leq \tau \Lambda_1(\tau) , \quad (\text{B.153})$$

em que Λ_∞ e Λ_1 são determinados via a Eq. (B.147). Dado que $g(0) = 0$ e $g(\tau) = \sin^2 [\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)]$, o resultado anterior fornece os limites inferiores

$$\tau \geq \frac{1}{\Lambda_\infty} \sin^2 [\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)] \quad (\text{B.154})$$

e

$$\tau \geq \frac{1}{\Lambda_1} \sin^2 [\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau)] . \quad (\text{B.155})$$

Finalmente, combinando as Eqs. (B.148), (B.154) e (B.155), os autores advogam que

o QSL na dinâmica não-unitária é dado através da maximização

$$\tau_{\text{QSL}} = \max \left\{ \frac{1}{\Lambda_\infty}, \frac{1}{\Lambda_1}, \frac{1}{\Lambda_2} \right\} \sin^2 \left[\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_\tau) \right]. \quad (\text{B.156})$$

Este resultado, entretanto, é passível de algumas críticas. Em primeiro lugar, ao contrário do que acontece com o resultado seminal de Levitin e Toffoli (77) discutido na Subseção B.4, a Eq. (B.156) é proposta sem qualquer demonstração formal. Em segundo, há uma contradição entre a Eq. (B.156) e a dependência funcional no tempo τ nas Eqs. (B.148), (B.154) e (B.155). Em outras palavras, dado que ambos lados direito e esquerdo das desigualdades mencionadas são funções de τ , então τ_{QSL} seria encontrado através da solução, analítica e/ou numérica, destas expressões.

Apêndice C

Breves digressões algébricas sobre o operador densidade

Neste apêndice apresentaremos explicitamente os cálculos para a fidelidade de Uhlmann-Jozsa, afinidade quântica, ângulo de Bures e ângulo de Hellinger relativos a estados mistos de um q-bit. Neste sentido, obteremos previamente expressões analíticas para a matriz inversa, o determinante e a raiz quadrada destes estados.

C.1 Potências matriciais

Seja $\Lambda \geq 0$ um operador positivo semi-definido, V um operador unitário, isto é, $V^\dagger = V^{-1}$, e considere a transformação $V\Lambda V^\dagger$. Dado $s \in \mathbb{N}$ e utilizando a relação $VV^\dagger = V^\dagger V = \mathbb{I}$, é imediato verificar a identidade algébrica

$$(V\Lambda V^\dagger)^s = V\Lambda^s V^\dagger. \quad (\text{C.1})$$

Motivados pela simplicidade deste resultado, seria possível verificar que a igualdade permanece válida mesmo no caso em que $s \in \mathbb{Q}^+/\{0\}$, isto é, s é um número racional positivo? Embora pareça intuitivo concluir afirmativamente, a resposta não é trivial e requer uma análise mais sóbria. Em particular, nesta seção mostraremos que a Eq. (C.1) também é válida para $s \in (0, 1)$.

Considere a função monótona $f(a) = a^s$, com $a \in \mathbb{R}^+/\{0\}$ e $s \in (0, 1)$. A Fig. C.1 mostra o gráfico desta função para algumas escolhas do parâmetro s . Note que o ponto

vazio na coordenada $(0, 0)$ do gráfico representa a exclusão de $a = 0$ no domínio de validade da função monótona $f(a)$. É possível demonstrar que $f(a)$ admite a seguinte representação

Figura C.1 – Gráfico da função monótona $f(a) = a^s$ para $s = 1/4$ (linha tracejada azul), $s = 1/3$ (linha pontilhada preta), $s = 1/2$ (linha traço dois pontos em magenta) e $s = 3/4$ (linha contínua vermelha).

Fonte: Elaborada pelo autor.

integral (143)

$$a^s = \frac{\sin(\pi s)}{\pi s} \int_0^\infty d\mu(x) \frac{a}{a+x}, \quad (\text{C.2})$$

em que $\mu(x) = x^s$ representa uma medida positiva definida no intervalo aberto $x \in (0, \infty)$ e $d\mu(x) = s x^{s-1} dx$. Esta relação pode ser extendida para o caso em que o operador positivo definido Λ é não-singular, isto é, inversível. Neste caso, segue que (233)

$$\Lambda^s = \frac{\sin(\pi s)}{\pi s} \int_0^\infty d\mu(x) \Lambda(\Lambda + x\mathbb{I})^{-1}. \quad (\text{C.3})$$

Vale ressaltar que a última condição pode ser relaxada se o operador Λ tem posto completo ou se considerarmos que a operação inversa é calculada em seu suporte, isto é, o subespaço vetorial gerado pelos autoestados de Λ com autovalores não-nulos. (234) Considerando a transformação $V\Lambda V^\dagger$, obtemos

$$\begin{aligned} (V\Lambda V^\dagger + x\mathbb{I})^{-1} &= [V(\Lambda + x\mathbb{I})V^\dagger]^{-1} \\ &= V(\Lambda + x\mathbb{I})^{-1}V^\dagger. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Portanto, combinando as Eqs. (C.3) e (C.4), demonstramos o resultado

$$\begin{aligned}
 (V\Lambda V^\dagger)^s &= \frac{\sin(\pi s)}{\pi s} \int_0^\infty d\mu(x) V\Lambda V^\dagger (V\Lambda V^\dagger + x\mathbb{I})^{-1} \\
 &= V \frac{\sin(\pi s)}{\pi s} \int_0^\infty d\mu(x) \Lambda(\Lambda + x\mathbb{I})^{-1} V^\dagger \\
 &= V\Lambda^s V^\dagger .
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

O resultado que demonstramos na Eq. (C.5) se aplica a qualquer matriz Λ positiva semi-definida e operador V unitário, ambos de dimensão finita. Por exemplo, a matriz densidade $\rho \in \mathcal{S}$ pertencente ao espaço de estados $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$, em que $\mathcal{H}$ define um espaço de Hilbert de dimensão $d = \dim \mathcal{H}$, satisfaz a Eq. (C.5) já que $\rho \geq 0$. Em especial, considerando o par de estados ρ_1 e ρ_2 e tomando o caso $s = 1/2$, então a Eq. (C.5) permite então verificar as relações

$$\sqrt{V\rho_1 V^\dagger} = V\sqrt{\rho_1} V^\dagger , \quad \sqrt{V\rho_2 V^\dagger} = V\sqrt{\rho_2} V^\dagger \tag{C.6}$$

e

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\sqrt{V\rho_1 V^\dagger} V\rho_2 V^\dagger \sqrt{V\rho_1 V^\dagger}} &= \sqrt{V\sqrt{\rho_1} V^\dagger V\rho_2 V^\dagger V\sqrt{\rho_1} V^\dagger} \\
 &= V\sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}} V^\dagger .
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

Estas identidades permitem verificar, por exemplo, a invariância de ambas afinidade quântica e fidelidade de Uhlmann-Jozsa sob transformações unitárias em ambas entradas, ou seja,

$$\begin{aligned}
 A(V\rho_1 V^\dagger, V\rho_2 V^\dagger) &= \text{Tr} \left(\sqrt{V\rho_1 V^\dagger} \sqrt{V\rho_2 V^\dagger} \right) \\
 &= \text{Tr} \left(V\sqrt{\rho_1} V^\dagger V\sqrt{\rho_2} V^\dagger \right) \\
 &= A(\rho_1, \rho_2)
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

e

$$\begin{aligned}
 F(V\rho_1 V^\dagger, V\rho_2 V^\dagger) &= \left(\text{Tr} \left[\sqrt{\sqrt{V\rho_1 V^\dagger} V\rho_2 V^\dagger \sqrt{V\rho_1 V^\dagger}} \right] \right)^2 \\
 &= \left(\text{Tr} \left[V\sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}} V^\dagger \right] \right)^2 \\
 &= F(\rho_1, \rho_2) .
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

C.2 Matriz inversa

Considere o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensão finita $d = \dim \mathcal{H}$ e $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ o conjunto de operadores lineares atuando em $\mathcal{H}$. Seja $\Pi \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador hermitiano definindo uma contração, i.e.,

$$\|\Pi\|_\infty < 1, \quad (\text{C.10})$$

com

$$\|\Pi\|_\infty = \sup_{\|\psi\rangle=1} \|\Pi|\psi\rangle\| = s_1(\Pi), \quad (\text{C.11})$$

em que $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, $\|\psi\rangle = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$ e $s_1(\Pi)$ define o maior valor singular de Π . Neste caso, é possível mostrar que o operador $\mathbb{I} + \Pi$ é inversível e que sua respectiva inversa

$$\begin{aligned} (\mathbb{I} + \Pi)^{-1} &= \mathbb{I} - \Pi + \Pi^2 - \Pi^3 + \dots \\ &= (\mathbb{I} - \Pi)(\mathbb{I} + \Pi^2 + \Pi^4 + \dots) \\ &= (\mathbb{I} - \Pi)(\mathbb{I} - \Pi^2)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

define uma série de potências convergente chamada *série de Neumann*. (143)

A despeito do resultado geral indicado pela Eq. (C.12), considere agora o caso $d = \dim \mathcal{H} = 2$ e o estado misto de um q-bit

$$\rho_u = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{r}_u \cdot \vec{\sigma}) \quad (\text{C.13})$$

em que $\vec{r}_u$ é um vetor tridimensional tal que $|\vec{r}_u|^2 < 1$ e $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Por hipótese, seja $\Pi = \vec{r}_u \cdot \vec{\sigma}$. Recorrendo à identidade vetorial

$$(\vec{a}_1 \cdot \vec{\sigma})(\vec{a}_2 \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)\mathbb{I} + i(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{\sigma}, \quad (\text{C.14})$$

é possível verificar que

$$\Pi^k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2n + 1, \\ |\vec{r}_u|^{2k} \mathbb{I} & \text{se } k = 2n \end{cases}, \quad \text{Tr}(\Pi^k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2n + 1, \\ 2|\vec{r}_u|^{2k} & \text{se } k = 2n, \end{cases}, \quad (\text{C.15})$$

em que $n \in \mathbb{N}/\{0\}$. Além disso, dado que $\|\Pi\|_\infty = \|\Pi\|$, com

$$|\Pi| = \sqrt{\Pi^\dagger \Pi} = |\vec{r}_u| \mathbb{I}, \quad (\text{C.16})$$

obtemos que a norma $\|\Pi\|_\infty$ é limitada inferiormente conforme indicado a seguir

$$\|\Pi\|_\infty = |\vec{r}_u| \|\mathbb{I}\|_\infty = |\vec{r}_u| < 1 \quad (\text{C.17})$$

e, segundo a Eq. (C.12), obtemos

$$\rho_u^{-1} = 2(\mathbb{I} + \vec{r}_u \cdot \vec{\sigma})^{-1} = \frac{2}{1 - |\vec{r}_u|^2} (\mathbb{I} - \vec{r}_u \cdot \vec{\sigma}) . \quad (\text{C.18})$$

Em particular, note que o resultado anterior seria singular caso adotássemos um estado puro, i.e., se $|\vec{r}_u| = 1$. De fato, este caso é mais sutil e requer o cálculo da operação inversa através de uma abordagem conhecida como inversa generalizada ou inversa de Moore-Penrose. (235)

C.3 Determinante

Em geral, o determinante do estado ρ_u de um q-bit na Eq. (C.13) pode ser calculado partindo da identidade algébrica

$$\det(\mathbb{I} + \Pi) = \exp\{\text{Tr}[\ln(\mathbb{I} + \Pi)]\} . \quad (\text{C.19})$$

De fato, dado que $\|\Pi\| < 1$ e tomando a expansão em série de Taylor para a função logaritmo¹, obtemos

$$\text{Tr}[\ln(\mathbb{I} + \Pi)] = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \text{Tr}(\Pi^k) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\vec{r}_u|^{2k}}{k} = \ln(1 - |\vec{r}_u|^2) , \quad (\text{C.20})$$

em que coletamos separadamente as contribuições pares e ímpares na soma infinita. Portanto,

$$\det(\mathbb{I} + \vec{r}_u \cdot \vec{\sigma}) = 1 - |\vec{r}_u|^2 \quad (\text{C.21})$$

e o determinante da matriz densidade relativa ao estado misto de um q-bit é dado por

$$\det(\rho_u) = \frac{1 - |\vec{r}_u|^2}{4} . \quad (\text{C.22})$$

¹Note que, dado $|x| < 1$, então

$$\ln(1 + x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} .$$

C.4 Raiz quadrada

Para calcular a raiz quadrada do operador densidade ρ_u de um q-bit na Eq. (C.13) é conveniente relembrar a representação integral apresentada na Eq. (C.3). Neste caso, escolhendo $\Lambda = \rho_u$ e $s = 1/2$ segue que

$$\sqrt{\rho_u} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \rho_u (\rho_u + x\mathbb{I})^{-1}. \quad (\text{C.23})$$

A partir da Eq. (C.18) pode-se verificar que

$$(\rho_u + x\mathbb{I})^{-1} = \frac{2}{1+2x} (\mathbb{I} + \vec{v}_u \cdot \vec{\sigma})^{-1} = \frac{2[(1+2x)\mathbb{I} - \vec{r}_u \cdot \vec{\sigma}]}{(1+2x)^2 - |\vec{r}_u|^2}, \quad (\text{C.24})$$

com $\vec{r}_u := (1+2x)\vec{v}_u$ e, conseqüentemente, obtemos

$$\rho_u (\rho_u + x\mathbb{I})^{-1} = \frac{1+2x - |\vec{r}_u|^2}{(1+2x)^2 - |\vec{r}_u|^2} \mathbb{I} + \frac{2x}{(1+2x)^2 - |\vec{r}_u|^2} (\vec{r}_u \cdot \vec{\sigma}). \quad (\text{C.25})$$

Combinando as Eqs. (C.23) e (C.25) e calculando as integrais na variável $x \in [0, \infty[$ analiticamente, segue que a raiz quadrada do estado misto de um q-bit na Eq. (C.13) é dada por

$$\sqrt{\rho_u} = \frac{1}{2\sqrt{2}} [\epsilon_u^+ \mathbb{I} + \epsilon_u^- (\hat{r}_u \cdot \vec{\sigma})], \quad (\text{C.26})$$

em que definimos o parâmetro

$$\epsilon_u^\pm := \sqrt{1 + |\vec{r}_u|} \pm \sqrt{1 - |\vec{r}_u|}. \quad (\text{C.27})$$

C.5 Fidelidade de Uhlmann-Jozsa e ângulo de Bures

Nesta seção forneceremos expressões analíticas para a fidelidade de Uhlmann-Jozsa

$$F(\rho_0, \rho_\varphi) = \left(\text{Tr} \left[\sqrt{\sqrt{\rho_0} \rho_u \sqrt{\rho_0}} \right] \right)^2 \quad (\text{C.28})$$

e o ângulo de Bures

$$\mathcal{L}^{\text{QF}}(\rho_0, \rho_u) = \arccos \left[\sqrt{F(\rho_0, \rho_u)} \right] \quad (\text{C.29})$$

envolvendo os estados mistos de um q-bit

$$\rho_0 = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \vec{r}_0 \cdot \vec{\sigma}), \quad \rho_u = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \vec{r}_u \cdot \vec{\sigma}), \quad (\text{C.30})$$

com $0 < |\vec{r}_0|^2 < 1$, $0 < |\vec{r}_u|^2 < 1$ e $\vec{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ é um vetor cujas componentes são dadas pelas matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.31})$$

Nas linhas a seguir apresentaremos o cálculo da fidelidade de Uhlmann-Jozsa para operadores densidade de um q-bit seguindo a derivação original proposta por Jozsa. (162) Seja $\mathbb{M}$ uma matriz hermiteana positiva semi-definida, isto é, $\mathbb{M} = \mathbb{M}^\dagger$ e $\mathbb{M} \geq 0$, definida no espaço de Hilbert de dimensão $d = \dim \mathcal{H} = 2$. Considerando a decomposição espectral

$$\mathbb{M} = \sum_{j=1}^2 m_j |j\rangle\langle j|, \quad (\text{C.32})$$

em que $\{m_j\}_{j=1,2}$ e $\{|j\rangle\}_{j=1,2}$ são, respectivamente, autovalores e autoestados da matriz $\mathbb{M}$, note que podemos escrever

$$\left[\text{Tr}(\sqrt{\mathbb{M}}) \right]^2 = \text{Tr}(\mathbb{M}) + 2\sqrt{\det(\mathbb{M})}, \quad (\text{C.33})$$

em que

$$\text{Tr}(\sqrt{\mathbb{M}}) = \sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}, \quad \det(\mathbb{M}) = m_1 m_2. \quad (\text{C.34})$$

Por hipótese, escolha a matriz

$$\mathbb{M} := \sqrt{\rho_0} \rho_u \sqrt{\rho_0} \quad (\text{C.35})$$

tal que a fidelidade de Uhlmann-Jozsa na Eq. (C.28) se reescreva na forma

$$F(\rho_0, \rho_u) = \left[\text{Tr}(\sqrt{\mathbb{M}}) \right]^2 = \text{Tr}(\mathbb{M}) + 2\sqrt{\det(\mathbb{M})}. \quad (\text{C.36})$$

A partir da Eq. (C.35) é possível verificar a relação

$$\text{Tr}(\mathbb{M}) = \text{Tr}(\sqrt{\rho_0} \rho_u \sqrt{\rho_0}) = \text{Tr}(\rho_0 \rho_u), \quad (\text{C.37})$$

em que utilizamos a propriedade cíclica do traço $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB)$, e também

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{M}) &= \det(\sqrt{\rho_0} \rho_u \sqrt{\rho_0}) \\ &= \det(\sqrt{\rho_0}) \det(\rho_u) \det(\sqrt{\rho_0}) \\ &= \det(\rho_0) \det(\rho_u), \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

na qual reescrevemos o determinante do produto em termos do produto de determinantes,

a saber,

$$\det(ABC) = \det(A) \det(B) \det(C) = \det(AC) \det(B) . \quad (\text{C.39})$$

Assim, combinando as Eqs. (C.36), (C.37) e (C.38), segue que

$$F(\rho_0, \rho_u) = \text{Tr}(\rho_0 \rho_u) + 2\sqrt{\det(\rho_0) \det(\rho_u)} . \quad (\text{C.40})$$

A partir da forma explícita dos estados mistos de um q-bit ρ_0 e ρ_u apresentada na Eq. (C.30), é possível verificar o produto

$$\rho_0 \rho_u = \frac{1}{4} \{ (1 + \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_u) \mathbb{I} + [\vec{r}_0 + \vec{r}_u + i(\vec{r}_0 \times \vec{r}_u)] \cdot \vec{\sigma} \} , \quad (\text{C.41})$$

e, tomando o traço da Eq. (C.41), obtemos

$$\text{Tr}(\rho_0 \rho_u) = \frac{1}{2} (1 + \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_u) . \quad (\text{C.42})$$

Por meio da Eq. (C.21), sabemos também que

$$\det(\rho_0) = \frac{1 - |\vec{r}_0|^2}{4} , \quad \det(\rho_u) = \frac{1 - |\vec{r}_u|^2}{4} \quad (\text{C.43})$$

e, portanto,

$$\det(\rho_0) \det(\rho_u) = \frac{1}{16} (1 - |\vec{r}_0|^2)(1 - |\vec{r}_u|^2) . \quad (\text{C.44})$$

Por fim, combinando as Eqs. (C.40), (C.42) e (C.44) a fidelidade de Uhlmann-Jozsa para estados de um q-bit é dada por

$$F(\rho_0, \rho_u) = \frac{1}{2} \left[1 + \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_u + \sqrt{(1 - |\vec{r}_0|^2)(1 - |\vec{r}_u|^2)} \right] . \quad (\text{C.45})$$

É importante destacar que este resultado se aplica a qualquer par de estados mistos de um q-bit. Neste caso, por exemplo, a Eq. (C.45) é válida se a evolução entre os estados ρ_0 e ρ_u é unitária ou não-unitária.

C.6 Afinidade quântica e ângulo de Hellinger

O ângulo de Hellinger é determinado pela relação

$$\mathcal{L}^{\text{WY}}(\rho_0, \rho_u) = \arccos[A(\rho_0, \rho_u)] , \quad (\text{C.46})$$

em que

$$A(\rho_0, \rho_u) = \text{Tr}(\sqrt{\rho_0}\sqrt{\rho_u}) \quad (\text{C.47})$$

define a afinidade quântica. Assim, partindo do resultado indicado na Eq. (C.26), é possível escrever

$$\sqrt{\rho_0}\sqrt{\rho_u} = \frac{1}{8} \left\{ \left[\epsilon_0^+ \epsilon_u^+ + \epsilon_0^- \epsilon_u^- (\hat{r}_0 \cdot \hat{r}_u) \right] \mathbb{I} + \left[\epsilon_0^- \epsilon_u^+ \hat{r}_0 + \epsilon_0^+ \epsilon_u^- \hat{r}_u + i \epsilon_0^- \epsilon_u^- (\hat{r}_0 \times \hat{r}_u) \right] \cdot \vec{\sigma} \right\} \quad (\text{C.48})$$

e, portanto, concluímos que

$$A(\rho_0, \rho_u) = \frac{1}{4} \left[\epsilon_0^+ \epsilon_u^+ + \epsilon_0^- \epsilon_u^- \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_u}{|\vec{r}_0| |\vec{r}_u|} \right] . \quad (\text{C.49})$$

O resultado na Eq. (C.49) é geral e se aplica a estados mistos de um q-bit ρ_0 e ρ_u arbitrários. Em particular, se a evolução entre estes estados é mediada por uma transformação unitária, isto é, o valor absoluto $|\vec{r}_u| = |\vec{r}_0| = r_0$ do raio da esfera de Bloch permanece invariante, então $\epsilon_u^\pm = \epsilon_0^\pm$ e a afinidade pode ser reescrita na forma

$$A(\rho_0, \rho_u) = \frac{1}{2r_0^2} \left[r_0^2 \xi_+ + \xi_- (\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_u) \right] , \quad (\text{C.50})$$

com

$$\xi_\pm := 1 \pm \sqrt{1 - r_0^2} . \quad (\text{C.51})$$

Apêndice D

Mapas afins

Neste apêndice mostraremos algumas propriedades de canais quânticos que definem mapas afins quanto sua ação sobre o estado de um q-bit, isto é, mapas CPTP que mapeiam a esfera de Bloch sobre si mesma. Na representação de Bloch, o estado de um q-bit que descreve o sistema quântico é escrito na forma

$$\rho_0 = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{r}_0 \cdot \vec{\sigma}) , \quad (\text{D.1})$$

em que $\vec{r}_0$ é um vetor real tridimensional¹, $\mathbb{I}$ é a matriz identidade de dimensão 2×2 e $\vec{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ é um vetor cujas componentes são dadas pelas matrizes de Pauli

$$\sigma_0 := \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (\text{D.2})$$

A operação quântica

$$\mathcal{E}_\lambda(\bullet) = \sum_{s=1}^2 K_s^{\lambda \bullet} K_s^{\lambda \dagger} \quad (\text{D.3})$$

define um mapa linear, i.e.,

$$\mathcal{E}_\lambda(c_1 \varrho_1 + c_2 \varrho_2) = c_1 \mathcal{E}_\lambda(\varrho_1) + c_2 \mathcal{E}_\lambda(\varrho_2) , \quad (\text{D.4})$$

em que $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são constantes reais e ϱ_1, ϱ_2 são operadores densidade, isto é, matrizes hermiteanas, $\{\varrho_j = \varrho_j^\dagger\}_{j=1,2}$, positivo semi-definidas, $\{\varrho_j \geq 0\}_{j=1,2}$, e de traço igual à

¹Por questões de simplicidade e simetria, o vetor $\vec{r}_0$ é frequentemente parametrizado em termos de coordenadas esféricas.

unidade, $\{\text{Tr}(\varrho_j) = 1\}_{j=1,2}$. Desta forma, dado o estado na Eq. (D.1), segue que

$$\mathcal{E}_\lambda(\rho_0) = \sum_{s=1}^2 K_s^\lambda \rho_0 K_s^{\lambda\dagger} = \frac{1}{2} \left[\mathcal{E}_\lambda(\mathbb{I}) + \sum_{j=1}^3 (\vec{r}_0)_j \mathcal{E}_\lambda(\sigma_j) \right] . \quad (\text{D.5})$$

Por hipótese, os operadores de Kraus K_s gerando a operação quântica podem sempre ser escritos na forma (1)

$$K_s^\lambda = \sum_{l=0}^3 a_{sl}^\lambda \sigma_l . \quad (\text{D.6})$$

Devido ao vínculo imposto pela relação de completude

$$\sum_{s=1}^2 K_s^{\lambda\dagger} K_s^\lambda = \mathbb{I} \quad (\text{D.7})$$

ao conjunto de operadores de Kraus, é possível mostrar que os coeficientes a_{sl}^λ satisfazem as equações

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{l=0}^3 |a_{sl}^\lambda|^2 = 1 \quad (\text{D.8})$$

e

$$\sum_{l=1}^3 \left[2 \sum_{s=1}^2 \text{Re}(a_{s0}^\lambda a_{sl}^{\lambda*}) - \sum_{k,p=1}^3 \sum_{s=1}^2 \epsilon_{kpl} \text{Im}(a_{sp}^\lambda a_{sk}^{\lambda*}) \right] \sigma_l = 0 , \quad (\text{D.9})$$

em que utilizamos as relações

$$\{\sigma_j, \sigma_r\} = \sigma_j \sigma_r + \sigma_r \sigma_j = 2\delta_{jr} , \quad [\sigma_j, \sigma_r] = \sigma_j \sigma_r - \sigma_r \sigma_j = 2i \sum_{u=1}^3 \epsilon_{jru} \sigma_u . \quad (\text{D.10})$$

A partir da Eq. (D.6) podemos mostrar a expressão

$$\mathcal{E}_\lambda(\sigma_j) = \sum_{s=1}^2 K_s^\lambda \sigma_j K_s^{\lambda\dagger} = \sum_{l=1}^3 (\eta_\lambda)_{lj} \sigma_l , \quad (\text{D.11})$$

onde

$$(\eta_\lambda)_{lj} = \sum_{s=1}^2 \left[2 \text{Re}(a_{sl}^\lambda a_{sj}^{\lambda*}) + \left(|a_{s0}^\lambda|^2 - \sum_{p=1}^3 |a_{sp}^\lambda|^2 \right) \delta_{lj} - 2 \sum_{p=1}^3 \epsilon_{ljp} \text{Im}(a_{s0}^\lambda a_{sp}^{\lambda*}) \right] . \quad (\text{D.12})$$

Observe que através da Eq. (D.11) o coeficiente $(\eta_\lambda)_{lj}$ também pode ser escrito na forma

$$(\eta_\lambda)_{lj} = \frac{1}{2} \text{Tr}[\mathcal{E}_\lambda(\sigma_j) \sigma_l] . \quad (\text{D.13})$$

Por outro lado, segue também que

$$\mathcal{E}_\lambda(\mathbb{I}) = \sum_{s=1}^2 K_s^\lambda K_s^{\lambda\dagger} = \sum_{s=1}^2 \left(K_s^{\lambda\dagger} K_s^\lambda + [K_s^\lambda, K_s^{\lambda\dagger}] \right) = \mathbb{I} + \sum_{l=1}^3 (\vec{\kappa}_\lambda)_l \sigma_l , \quad (\text{D.14})$$

em que

$$(\vec{\kappa}_\lambda)_l = 2i \sum_{s=1}^2 \sum_{p,r=1}^3 \epsilon_{rpl} a_{sr}^\lambda a_{sp}^{\lambda*} \quad (\text{D.15})$$

e utilizamos a relação de completude na Eq. (D.7). Por meio da Eq. (D.14) o elemento $(\vec{\kappa}_\lambda)_l$ também tem a forma

$$(\vec{\kappa}_\lambda)_l = \frac{1}{2} \text{Tr}[\mathcal{E}_\lambda(\mathbb{I})\sigma_j] . \quad (\text{D.16})$$

Por fim, combinando as Eqs. (D.5), (D.11) e (D.14), o estado evoluído resulta

$$\mathcal{E}_\lambda(\rho_0) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{r}_\lambda \cdot \vec{\sigma}) , \quad (\text{D.17})$$

com

$$(\vec{r}_\lambda)_l = \sum_{j=1}^3 (\eta_\lambda)_{lj} (\vec{r}_0)_j + (\vec{\kappa}_\lambda)_l . \quad (\text{D.18})$$

Apêndice E

Equações mestras e representação de Kraus

Neste apêndice discutiremos o resultado central obtido por Andersson, Cresser e Hall (213) acerca da relação entre mapas dinâmicos completamente positivos que preservam traço (CPTP) e equações mestras. Em especial, a Seção E.1 apresenta a demonstração deste resultado e, ao final, inclui um exemplo na Subseção E.1.1 para ilustrar a aplicabilidade da teoria. Por fim, a Seção E.2 discute a equivalência na representação do mapa não-unitário CPTP que descreve o processo de atenuação de fase paralela.

E.1 Mapas CPTP e equações mestras

Seja o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensão $d = \dim \mathcal{H}$ equipado com a estrutura de produto interno $(\bullet, \bullet)_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$(|\alpha\rangle, |\beta\rangle)_{\mathcal{H}} := \langle \alpha | \beta \rangle \quad \forall |\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H} . \quad (\text{E.1})$$

Considere agora o espaço $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dos operadores lineares atuando em $\mathcal{H}$ cujo produto interno $(\bullet, \bullet)_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ entre seus elementos é dado em termos da norma Hilbert-Schmidt

$$(A, B)_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} := \text{Tr}(A^{\dagger}B) \quad \forall A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) . \quad (\text{E.2})$$

Por hipótese, seja $\{\mathbb{G}_j\}_{j=0,\dots,d^2-1}$ a base do espaço $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ formada pelo conjunto ortonormal de operadores hermitianos $\mathbb{G}_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, isto é,

$$\mathbb{G}_j^\dagger = \mathbb{G}_j, \quad \text{Tr}(\mathbb{G}_j^\dagger \mathbb{G}_l) = \text{Tr}(\mathbb{G}_j \mathbb{G}_l) = \delta_{jl}. \quad (\text{E.3})$$

Neste caso, um dado operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pode ser escrito através da combinação linear

$$A = \sum_{j=1}^{d^2-1} a_j \mathbb{G}_j, \quad a_j := \text{Tr}(\mathbb{G}_j A). \quad (\text{E.4})$$

Seja o operador densidade evoluído

$$\rho_t = \mathcal{E}_t(\rho_0) \quad (\text{E.5})$$

obtido pela ação do mapa linear $\mathcal{E}_t(\bullet)$ completamente positivo que preserva traço (CPTP) no estado inicial ρ_0 . Através da Eq. (E.4), segue que

$$\rho_0 = \sum_{l=0}^{d^2-1} a_l \mathbb{G}_l, \quad a_l := \text{Tr}(\mathbb{G}_l \rho_0). \quad (\text{E.6})$$

Em face da linearidade do mapa $\mathcal{E}_t(\bullet)$, é possível escrever

$$\mathcal{E}_t(\rho_0) = \mathcal{E}_t\left(\sum_{l=0}^{d^2-1} a_l \mathbb{G}_l\right) = \sum_{l=0}^{d^2-1} a_l \mathcal{E}_t(\mathbb{G}_l). \quad (\text{E.7})$$

Entretanto, via Eq. (E.4) o mapa $\mathcal{E}_t(\bullet)$ também assume a forma

$$\mathcal{E}_t(\rho_0) = \sum_{k=0}^{d^2-1} \text{Tr}[\mathbb{G}_k \mathcal{E}_t(\rho_0)] \mathbb{G}_k. \quad (\text{E.8})$$

Assim, combinando ambas Eqs. (E.7) e (E.8), obtemos

$$\mathcal{E}_t(\rho_0) = \sum_{k=0}^{d^2-1} \text{Tr}\left[\mathbb{G}_k \left(\sum_{l=0}^{d^2-1} a_l \mathcal{E}_t(\mathbb{G}_l)\right)\right] \mathbb{G}_k = \sum_{k,l=0}^{d^2-1} \text{Tr}[\mathbb{G}_k \mathcal{E}_t(\mathbb{G}_l)] \text{Tr}(\mathbb{G}_l \rho_0) \mathbb{G}_k. \quad (\text{E.9})$$

Observe que esta expressão pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{E}_t(\rho_0) = [\mathbb{F}(t) \mathbb{B}(0)]^T \mathbb{G}, \quad (\text{E.10})$$

em que

$$\mathbb{F}_{kl}(t) := \text{Tr}[\mathbb{G}_k \mathcal{E}_t(\mathbb{G}_l)] \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_l(t) := \text{Tr}(\mathbb{G}_l \rho_t). \quad (\text{E.11})$$

Por outro lado

$$\dot{\rho}_t = \dot{\mathcal{E}}_t(\rho_0) = [\dot{\mathbb{F}}(t) \mathbb{B}(0)]^T \mathbb{G}. \quad (\text{E.12})$$

Vamos supor agora que a evolução do estado ρ_t é governada pela equação mestra

$$\dot{\rho}_t = \tilde{\mathcal{L}}_t(\rho_t) , \quad (\text{E.13})$$

em que $\tilde{\mathcal{L}}_t(\bullet)$ define o super-operador de Lindblad. Por hipótese, $\tilde{\mathcal{L}}_t(\bullet)$ é dependente do tempo e a Eq. (E.13) pode representar uma equação mestra não-Markoviana. Observe que a condição de normalização $\text{Tr}(\rho_t) = 1, \forall t > 0$, implica que $\text{Tr}[\tilde{\mathcal{L}}_t(\rho_t)] = 0$. Além disso, vale destacar que o super-operador de Lindblad é linear, isto é, dado o operador densidade

$$\rho_t = \sum_{l=0}^{d^2-1} \text{Tr}(\mathbb{G}_l \rho_t) \mathbb{G}_l , \quad (\text{E.14})$$

então

$$\tilde{\mathcal{L}}_t(\rho_t) = \tilde{\mathcal{L}}_t \left(\sum_{l=0}^{d^2-1} \text{Tr}(\mathbb{G}_l \rho_t) \mathbb{G}_l \right) = \sum_{l=0}^{d^2-1} \text{Tr}(\mathbb{G}_l \rho_t) \tilde{\mathcal{L}}_t(\mathbb{G}_l) . \quad (\text{E.15})$$

Desta forma, reescrevendo $\tilde{\mathcal{L}}_t(\bullet)$ em termos da combinação linear dos elementos da base $\{\mathbb{G}_j\}_{j=0,\dots,d^2-1}$ e utilizando em seguida a Eq. (E.15), segue que

$$\tilde{\mathcal{L}}_t(\rho_t) = \sum_{k=0}^{d^2-1} \text{Tr}[\mathbb{G}_k \tilde{\mathcal{L}}_t(\rho_t)] \mathbb{G}_k = \sum_{k,l=0}^{d^2-1} \text{Tr}[\mathbb{G}_k \tilde{\mathcal{L}}_t(\mathbb{G}_l)] \text{Tr}(\mathbb{G}_l \rho_t) \mathbb{G}_k . \quad (\text{E.16})$$

Portanto, combinando ambas Eqs. (E.13) e (E.16), dispomos do resultado

$$\dot{\rho}_t = [\mathbb{L}(t)\mathbb{B}(t)]^T \mathbb{G} \quad (\text{E.17})$$

em que definimos

$$\mathbb{L}_{kl}(t) := \text{Tr}[\mathbb{G}_k \tilde{\mathcal{L}}_t(\mathbb{G}_l)] . \quad (\text{E.18})$$

Comparando as Eqs. (E.12) e (E.18), temos

$$\dot{\mathbb{F}}(t)\mathbb{B}(0) = \mathbb{L}(t)\mathbb{B}(t) . \quad (\text{E.19})$$

Entretanto, via Eq. (E.11) é possível escrever

$$\mathbb{B}_l(t) = \text{Tr}[\mathbb{G}_l \mathcal{E}_t(\rho_0)] = \sum_{s=0}^{d^2-1} \text{Tr}[\mathbb{G}_l \mathcal{E}_t(\mathbb{G}_s)] \text{Tr}(\mathbb{G}_s \rho_0) = \sum_{s=0}^{d^2-1} \mathbb{F}_{ls}(t) \mathbb{B}_s(0) \quad (\text{E.20})$$

e, portanto,

$$\mathbb{B}(t) = \mathbb{F}(t)\mathbb{B}(0) . \quad (\text{E.21})$$

Substituindo a Eq. (E.21) na Eq. (E.19), dispomos da seguinte equação diferencial matricial

$$\dot{\mathbb{F}}(t) = \mathbb{L}(t)\mathbb{F}(t) . \quad (\text{E.22})$$

Dada a condição de contorno $\mathbb{F}(0) = \mathbb{I}$, a solução desta equação é dada por

$$\mathbb{F}(t) = \mathcal{T} \exp \left[\int_0^t ds \mathbb{L}(s) \right] . \quad (\text{E.23})$$

Este resultado requer um comentário especial. Observe que a idéia inicial desta seção consiste em construir o mapa $\mathcal{E}_t(\bullet)$ CPTP vinculado a uma dada equação mestra caracterizada pelo super-operador $\tilde{\mathcal{L}}_t(\bullet)$. E se, porventura, fizermos o contrário, ou seja, a partir de $\mathcal{E}_t(\bullet)$ construir $\tilde{\mathcal{L}}_t(\bullet)$? Neste caso, por meio do mapa $\mathcal{E}_t(\bullet)$ obteremos a matriz $\mathbb{F}(t)$ a qual, através da Eq. (E.22), permitirá construir $\mathbb{L}(t)$ via a relação $\mathbb{L}(t) = \dot{\mathbb{F}}(t)[\mathbb{F}(t)]^{-1}$. Entretanto, esta operação requer que a matriz $\mathbb{F}(t)$ seja inversível e, de fato, problemas técnicos podem surgir se esta condição é violada. Em última instância, este problema pode ser contornado, ainda que parcialmente, utilizando a chamada inversa generalizada de Moore-Penrose. (235) Confira maiores detalhes na Ref. (213).

Seja $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha=0,\dots,d-1}$ a base do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ formada pelo conjunto ortonormal de estados $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$. Recorrendo à projeção do estado inicial ρ_0 nos estados da base $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha=1,\dots,d}$, note que

$$\rho_0 = \sum_{\alpha_2, \beta_2=0}^{d-1} \langle \alpha_2 | \rho_0 | \beta_2 \rangle |\alpha_2\rangle \langle \beta_2| . \quad (\text{E.24})$$

Em razão da linearidade do mapa $\mathcal{E}_t(\bullet)$, é possível escrever

$$\mathcal{E}_t(\rho_0) = \mathcal{E}_t \left(\sum_{\alpha_2, \beta_2=0}^{d-1} \langle \alpha_2 | \rho_0 | \beta_2 \rangle |\alpha_2\rangle \langle \beta_2| \right) = \sum_{\alpha_2, \beta_2=0}^{d-1} \langle \alpha_2 | \rho_0 | \beta_2 \rangle \mathcal{E}_t(|\alpha_2\rangle \langle \beta_2|) . \quad (\text{E.25})$$

Neste caso, reescrevendo $\mathcal{E}_t(\rho_0)$ via projeção nos elementos da base do espaço de Hilbert e utilizando a Eq. (E.25), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t(\rho_0) &= \sum_{\alpha_1, \beta_1=0}^{d-1} \langle \alpha_1 | \mathcal{E}_t(\rho_0) | \beta_1 \rangle |\alpha_1\rangle \langle \beta_1| \\ &= \sum_{\alpha_1, \beta_1=0}^{d-1} \sum_{\alpha_2, \beta_2=0}^{d-1} \langle \alpha_1 | \mathcal{E}_t(|\alpha_2\rangle \langle \beta_2|) | \beta_1 \rangle \langle \alpha_2 | \rho_0 | \beta_2 \rangle |\alpha_1\rangle \langle \beta_1| \\ &= \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{d-1} \sum_{\beta_1, \beta_2=0}^{d-1} \langle \alpha_1 | \mathcal{E}_t(|\alpha_2\rangle \langle \beta_2|) | \beta_1 \rangle |\alpha_1\rangle \langle \alpha_2 | \rho_0 | \beta_2 \rangle \langle \beta_1| . \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

A expressão anterior assumirá uma forma mais compacta se convertermos as somas nos índices $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ em função de somas nos pares ordenados $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2)$ e $\beta \equiv (\beta_1, \beta_2)$. Para entender esta notação, vamos analisar alguns exemplos a partir da escolha da dimensão $d = \dim \mathcal{H}$ do espaço de Hilbert. Por um lado, se $d = 2$ dispomos dos quatro pares ordenados $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ e $(1,1)$, ou seja, $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$. Por outro lado,

quando $d = 3$ obtemos oito pares ordenados $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ e $(2, 2)$, isto é, $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 8$. Portanto, no caso d -dimensional os novos índices são definidos por $\alpha, \beta = 0, \dots, d^2 - 1$. Por completeza, será útil definir a chamada matriz de Choi

$$\tilde{S}_{\alpha\beta}(t) := \langle \alpha_1 | \mathcal{E}_t(|\alpha_2\rangle\langle\beta_2|) | \beta_1 \rangle \quad (\text{E.27})$$

e também os operadores não-hermitianos

$$\tau_\alpha := |\alpha_1\rangle\langle\alpha_2|, \quad \tau_\beta := |\beta_1\rangle\langle\beta_2|. \quad (\text{E.28})$$

Por exemplo, no caso $d = \dim \mathcal{H} = 2$ em que escolhemos a base $\{|n\rangle\}_{n=0,1}$ de autoestados do operador σ_3 , isto é, $\sigma_3|n\rangle = (\delta_{n0} - \delta_{n1})|n\rangle$, os operadores τ_α e τ_β são dados por $|0\rangle\langle 0|$, $|0\rangle\langle 1|$, $|1\rangle\langle 0|$ e $|1\rangle\langle 1|$. Voltado ao caso geral, temos o resultado

$$\mathcal{E}_t(\rho_0) = \sum_{\alpha, \beta=0}^{d^2-1} \tilde{S}_{\alpha\beta}(t) \tau_\alpha \rho_0 \tau_\beta^\dagger. \quad (\text{E.29})$$

Agora precisamos encontrar a relação entre as matrizes $\tilde{S}(t)$ e $\mathbb{F}(t)$ explorando o vínculo entre as bases de operadores e $\{\mathbb{G}_j\}_{j=0, \dots, d^2-1}$ e $\{\tau_\alpha\}_{\alpha=0, \dots, d^2-1}$. Por um lado, note que

$$|\alpha_2\rangle\langle\beta_2| = \sum_{r=0}^{d^2-1} \text{Tr}(\mathbb{G}_r |\alpha_2\rangle\langle\beta_2|) \mathbb{G}_r = \sum_{r=0}^{d^2-1} \langle\beta_2 | \mathbb{G}_r | \alpha_2 \rangle \mathbb{G}_r \quad (\text{E.30})$$

e, portanto,

$$\mathcal{E}_t(|\alpha_2\rangle\langle\beta_2|) = \sum_{r=0}^{d^2-1} \langle\beta_2 | \mathbb{G}_r | \alpha_2 \rangle \mathcal{E}_t(\mathbb{G}_r). \quad (\text{E.31})$$

Por outro lado,

$$\mathcal{E}_t(\mathbb{G}_r) = \sum_{s=0}^{d^2-1} \text{Tr}[\mathbb{G}_s \mathcal{E}_t(\mathbb{G}_r)] \mathbb{G}_s = \sum_{s=0}^{d^2-1} \mathbb{F}_{sr}(t) \mathbb{G}_s. \quad (\text{E.32})$$

Combinando ambas Eqs. (E.31) e (E.32), segue que

$$\mathcal{E}_t(|\alpha_2\rangle\langle\beta_2|) = \sum_{r,s=0}^{d^2-1} \mathbb{F}_{sr}(t) \langle\beta_2 | \mathbb{G}_r | \alpha_2 \rangle \mathbb{G}_s. \quad (\text{E.33})$$

Assim, a matriz de Choi pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\alpha\beta}(t) &= \langle \alpha_1 | \mathcal{E}_t(|\alpha_2\rangle\langle\beta_2|) | \beta_1 \rangle \\ &= \sum_{r,s=0}^{d^2-1} \mathbb{F}_{sr}(t) \langle\beta_2 | \mathbb{G}_r | \alpha_2 \rangle \langle \alpha_1 | \mathbb{G}_s | \beta_1 \rangle \\ &= \sum_{r,s=0}^{d^2-1} \mathbb{F}_{sr}(t) \sum_u \langle u | \mathbb{G}_r | \alpha_2 \rangle \langle \alpha_1 | \mathbb{G}_s | \beta_1 \rangle \langle \beta_2 | u \rangle \end{aligned} \quad (\text{E.34})$$

e, reconhecendo o traço e os operadores τ_α e τ_β na Eq. (E.34), encontramos a expressão

$$\tilde{S}_{\alpha\beta}(t) = \sum_{r,s=0}^{d^2-1} \mathbb{F}_{sr}(t) \text{Tr}(\mathbb{G}_r \tau_\alpha^\dagger \mathbb{G}_s \tau_\beta) . \quad (\text{E.35})$$

Dada a matriz unitária $\mathbb{W}$, considere agora a transformação de similaridade

$$S(t) = \mathbb{W}^\dagger \tilde{S}(t) \mathbb{W} . \quad (\text{E.36})$$

Desta forma, a partir da Eq. (E.35) escrevemos

$$\begin{aligned} S_{jl}(t) &= \sum_{\alpha,\beta=0}^{d^2-1} (\mathbb{W}^\dagger)_{j\alpha} \tilde{S}_{\alpha\beta}(t) \mathbb{W}_{\beta l} \\ &= \sum_{r,s=0}^{d^2-1} \sum_{\alpha,\beta=0}^{d^2-1} \mathbb{F}_{sr}(t) \text{Tr}(\mathbb{G}_r \tau_\alpha^\dagger \mathbb{G}_s \tau_\beta) \mathbb{W}_{\alpha j}^* \mathbb{W}_{\beta l} \\ &= \sum_{r,s=0}^{d^2-1} \sum_{\alpha,\beta=0}^{d^2-1} \mathbb{F}_{sr}(t) \text{Tr}(\mathbb{G}_r \mathbb{W}_{\alpha j}^* \tau_\alpha^\dagger \mathbb{G}_s \mathbb{W}_{\beta l} \tau_\beta) . \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

Definindo o conjunto de operadores

$$H_j := \sum_{\alpha=0}^{d^2-1} \mathbb{W}_{\alpha j} \tau_\alpha \quad \text{com} \quad \mathbb{W}_{\alpha j} := \text{Tr}[H_j \tau_\alpha^\dagger] = \langle \alpha_1 | H_j | \alpha_2 \rangle , \quad (\text{E.38})$$

segue então que

$$S_{jl}(t) = \sum_{r,s=0}^{d^2-1} \mathbb{F}_{sr}(t) \text{Tr}(\mathbb{G}_r H_j^\dagger \mathbb{G}_s H_l) . \quad (\text{E.39})$$

Assim, sabendo que $\tilde{S}(t) = \mathbb{W} S(t) \mathbb{W}^\dagger$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t(\rho_0) &= \sum_{\alpha,\beta=0}^{d^2-1} \sum_{j,l=0}^{d^2-1} \mathbb{W}_{\alpha j} S_{jl}(t) (\mathbb{W}^\dagger)_{l\beta} \tau_\alpha \rho_0 \tau_\beta^\dagger \\ &= \sum_{\alpha,\beta=0}^{d^2-1} \sum_{j,l=0}^{d^2-1} S_{jl}(t) \mathbb{W}_{\alpha j} \tau_\alpha \rho_0 \mathbb{W}_{\beta l}^* \tau_\beta^\dagger , \end{aligned} \quad (\text{E.40})$$

Por fim, reconhecendo os operadores H_j na Eq. (E.40), obtemos a expressão

$$\mathcal{E}_t(\rho_0) = \sum_{j,l=0}^{d^2-1} S_{jl}(t) H_j \rho_0 H_l^\dagger . \quad (\text{E.41})$$

E.1.1 Exemplo: canal de atenuação de fase

Nesta subseção ilustraremos a técnica desenvolvida previamente com um exemplo envolvendo o processo de decoerência induzido pelo mecanismo de atenuação de fase

discutido na Seção 6.2. Considere a equação mestra Markoviana

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \tilde{\mathcal{L}}(\rho_t) \quad (\text{E.42})$$

com

$$\tilde{\mathcal{L}}(\bullet) = -i\frac{\omega_0}{2}[\sigma_3, \bullet] - \frac{\Gamma}{2} \left(\bullet - \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sigma_j \bullet \sigma_j \right) \quad (\text{E.43})$$

em que

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0. \quad (\text{E.44})$$

Por hipótese, seja $H_j = \mathbb{G}_j = \tilde{\sigma}_j$ ($j = 0, \dots, 3$), com

$$\tilde{\sigma}_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_j, \quad \mathbb{G}_j \mathbb{G}_l = \frac{1}{2} \left(\delta_{jl} \mathbb{I} + i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{jlk} \sigma_k \right), \quad \text{Tr}(\mathbb{G}_j \mathbb{G}_l) = \delta_{jl}, \quad (\text{E.45})$$

sendo

$$\sigma_0 := \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.46})$$

e ϵ_{jlk} é o tensor de Levi-Civita. Neste caso, através da Eq. (E.41) o canal de atenuação de fase é dado por

$$\mathcal{E}_t(\rho_0) = \frac{1}{2} \sum_{j,l=0}^3 S_{jl}(t) \sigma_j \rho_0 \sigma_l, \quad (\text{E.47})$$

em que

$$S_{jl}(t) = \frac{1}{4} \sum_{r,s=0}^3 \mathbb{F}_{sr}(t) \text{Tr}(\sigma_r \sigma_j \sigma_s \sigma_l). \quad (\text{E.48})$$

Observe que o super-operador $\tilde{\mathcal{L}}(\bullet)$ é independente do tempo e, neste caso, o mesmo acontece com os elementos de matriz $\mathbb{L}_{jl}(t)$ definidos na Eq. (E.18), a saber

$$\mathbb{L}_{jl}(t) \equiv \mathbb{L}_{jl} = \frac{1}{2} \text{Tr}[\sigma_j \tilde{\mathcal{L}}(\sigma_l)]. \quad (\text{E.49})$$

Já que $\mathbb{L}(s) = \mathbb{L}$, a matriz $\mathbb{F}(t)$ dada na Eq. (E.23) é calculada de forma mais simples e, em geral, seus elementos são determinados pela exponencial matricial a seguir

$$\mathbb{F}(t) = e^{t\mathbb{L}}. \quad (\text{E.50})$$

Após alguns cálculos, é possível mostrar que o elemento de matriz $\mathbb{L}_{jl}$ na Eq. (E.49) tem a forma geral

$$\mathbb{L}_{jl} = (\delta_{j2}\delta_{l1} - \delta_{j1}\delta_{l2})\omega_0 + \Gamma \sum_{s=1}^3 \delta_{js}\delta_{ls}(\alpha_s - 1) \quad (\text{E.51})$$

e, em consequência, via Eq. (E.50) obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{sr}(t) = & \delta_{s0}\delta_{r0} + \delta_{s3}\delta_{r3}(2a_t - 1) + 2(\delta_{s1}\delta_{r2} - \delta_{s2}\delta_{r1})\beta c_t \\ & + (\delta_{s1}\delta_{r1} + \delta_{s2}\delta_{r2})b_t + (\delta_{s1}\delta_{r1} - \delta_{s2}\delta_{r2})(\alpha_1 - \alpha_2)c_t \end{aligned} \quad (\text{E.52})$$

com

$$a_t = \frac{1}{2} \left(1 + e^{\Gamma t(\alpha_1 + \alpha_2)} \right) e^{-\Gamma t(1 - \alpha_3)} , \quad (\text{E.53})$$

$$b_t = e^{-\frac{\Gamma t}{2}(1 + \alpha_3)} \cosh \left(\frac{\Gamma t}{2} \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - 4\beta^2} \right) , \quad (\text{E.54})$$

$$c_t = \frac{e^{-\frac{\Gamma t}{2}(1 + \alpha_3)}}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - 4\beta^2}} \sinh \left(\frac{\Gamma t}{2} \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - 4\beta^2} \right) . \quad (\text{E.55})$$

Por fim, combinando as Eqs. (E.48) e (E.52), a matriz $S(t)$ de dimensão 4×4 possui os únicos coeficientes não-nulos dados por

$$S_{00}(t) = a_t + b_t , \quad S_{33}(t) = a_t - b_t , \quad S_{03}(t) = 2i\beta c_t , \quad S_{30}(t) = -2i\beta c_t , \quad (\text{E.56})$$

$$S_{11}(t) = 1 - a_t + (\alpha_1 - \alpha_2)c_t , \quad S_{22}(t) = 1 - a_t - (\alpha_1 - \alpha_2)c_t . \quad (\text{E.57})$$

E.2 Equivalência entre representações: atenuação de fase paralela

Considerando o canal de atenuação de fase paralela discutido na Seção 6.2.1, nesta seção mostraremos que a representação de operador-soma do mapa não-unitário

$$\mathcal{E}_t(\bullet) = \sum_{s=0}^1 K_s \bullet K_s^\dagger , \quad (\text{E.58})$$

com

$$K_0 = \sqrt{q_+} \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_0 t/2} \end{pmatrix} , \quad K_1 = \sqrt{q_-} \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t/2} & 0 \\ 0 & -e^{i\omega_0 t/2} \end{pmatrix} \quad (\text{E.59})$$

e

$$q_{\pm} = \frac{1 \pm e^{-\Gamma t}}{2} , \quad (\text{E.60})$$

é equivalente à seguinte representação

$$\mathcal{E}_t(\bullet) = \frac{1}{2} \sum_{j,l=0}^3 S_{jl}(t) \sigma_j \bullet \sigma_l , \quad (\text{E.61})$$

em que $\sigma_0 = \mathbb{I}$, $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_z$ e os elementos de matriz $S_{jl}(t)$ são especificados na Eq. (6.34). Essencialmente, as Eqs. (E.58) e (E.61) diferem por uma mudança de base entre os operadores de Kraus $\{K_s\}_{s=0,1}$ e os geradores $\{\sigma_j\}_{j=0,\dots,3}$ da álgebra $\text{su}(2)$.

A princípio, observe que os operadores de Kraus $\{K_s\}_{s=0,1}$ podem ser reescritos através da soma

$$K_s = \sum_{j=0}^3 u_{sj} \sigma_j \quad (\text{E.62})$$

com os coeficientes $u_{sj} \equiv u_{sj}(t)$ determinados pela expressão geral

$$u_{sj} = (\delta_{s0}\delta_{j0}\sqrt{q_+} + \delta_{s1}\delta_{j3}\sqrt{q_-}) \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) - i(\delta_{s0}\delta_{j3}\sqrt{q_+} + \delta_{s1}\delta_{j0}\sqrt{q_-}) \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) . \quad (\text{E.63})$$

Neste caso, o mapa completamente positivo assume a forma

$$\mathcal{E}_t(\bullet) = \sum_{s=0}^1 K_s \bullet K_s^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{j,l=0}^3 S_{jl}(t) \sigma_j \bullet \sigma_l \quad (\text{E.64})$$

em que

$$S_{jl}(t) = 2 \sum_{s=0}^1 u_{sj} u_{sl}^* . \quad (\text{E.65})$$

Assim, a partir das Eqs. (E.63) e (E.65), é possível mostrar que a matriz S de elementos S_{jl} é dada por

$$S(t) = \begin{pmatrix} S_{00}(t) & 0 & 0 & S_{03}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{30}(t) & 0 & 0 & S_{33}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{E.66})$$

com

$$S_{00}(t) = 2(|u_{00}|^2 + |u_{10}|^2) = 1 + e^{-\Gamma t} \cos(\omega_0 t) , \quad (\text{E.67})$$

$$S_{33}(t) = 2(|u_{03}|^2 + |u_{13}|^2) = 1 - e^{-\Gamma t} \cos(\omega_0 t) , \quad (\text{E.68})$$

$$S_{03}(t) = 2(u_{00}u_{03}^* + u_{10}u_{13}^*) = ie^{-\Gamma t} \sin(\omega_0 t) , \quad (\text{E.69})$$

$$S_{30}(t) = 2(u_{03}u_{00}^* + u_{13}u_{10}^*) = -ie^{-\Gamma t} \sin(\omega_0 t) . \quad (\text{E.70})$$