UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

DIOGO LIMA BARRETO

**Campos de calibre artificiais em condensados de
Bose-Einstein**

São Carlos
2015

DIOGO LIMA BARRETO

Campos de calibre artificiais em condensados de
Bose-Einstein

*Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.*

Área de concentração: Física Básica

*Orientador: Professor Doutor Francisco Ed-
nilson Alves dos Santos*

Versão corrigida

São Carlos

2015

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTES-
TE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO,
PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação IFSC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Barreto, Diogo Lima

Campos de calibre artificiais em condensados de Bose-Einstein / Diogo Lima Barreto; orientador Francisco Ednilson Alves dos Santos — versão corrigida — São Carlos, 2015.

58 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2015.

1. Condensação de Bose-Einstein. 2. Campo de calibre artificial. 3. Junção Josephson bosônica. 4. Condensados de Bose de duas componentes. I. Santos, Francisco Ednilson Alves dos, orient. II. Título.

AGRADECIMENTOS

Gostaria primeiramente de agradecer meus pais, minha avó e meus irmãos por terem me apoiado incondicionalmente durante este longo e árduo caminho que decidi trilhar.

Agradeço também meus grandes amigos: Danilo, Gustavo, Guilherme, Felipe e Luiz Henrique que, mesmo sem saber, me deram força e motivação para continuar minha jornada na vida acadêmica.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas do IFSC que serviram de fonte de inspiração e alívio cômico para mim em vários momentos ao longo desta difícil e pesada tarefa que é se tornar um cientista.

Por último gostaria de agradecer a minha namorada Jessica Dipold que esteve ao meu lado em momentos de tristeza e alegria, sempre pronta para me receber em nossa casa com um sorriso e um beijo. Espero poder compartilhar ainda muitos momentos ao lado dela.

“Nós contemplamos continuamente o mundo e ele se torna opaco às nossas percepções. No entanto, encarado de um novo ponto de vista, ainda pode nos tirar o fôlego. ”

Alan Moore, Watchmen

RESUMO

BARRETO, D.L. **Campos de calibre artificiais em condensados de Bose-Einstein.** 2015. 58 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2015.

Nesta dissertação nós revisamos a teoria básica que descreve a junção Josephson bosônica para uma e duas espécies partindo do modelo de Bose-Hubbard. Em seguida explicamos como é possível gerar campos de calibre artificiais em um sistema de átomos neutros, como é o caso do condensado de Bose-Einstein. Finalmente, utilizando os conhecimentos teóricos desenvolvidos anteriormente nós buscamos os estados estacionários de um sistema de pseudospin $1/2$ submetido a um campo de calibre não-Abeliano artificial, que torna a dinâmica da junção muito mais complexa e rica. Nós também exploramos um novo desbalanceamento de população que surge no sistema, devido a presença do campo de calibre, com características similares as do *Macroscopic Quantum Self-Trapping*.

Palavras-chave: *Condensação de Bose-Einstein. Campo de calibre artificial. Junção Josephson bosônica. Condensados de Bose de duas componentes.*

ABSTRACT

BARRETO, D.L. **Artificial gauge fields on Bose-Einstein condensates**. 2015. 58 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2015.

In this dissertation we review the basic theory that describes the bosonic Josephson junction for one and two species using the Bose-Hubbard model. Afterwards, we explain how it is possible to generate artificial gauge fields for neutral atoms, like a Bose-Einstein condensate. Finally, using this theoretical background we search for stationary states of a pseudospin $1/2$ system subject to a non-Abelian artificial gauge field which turns the dynamic of the junction much more complex and rich. We also explore a possible new populational imbalance that appears on the system due to the presence of the gauge field, with similar features as the Macroscopic Quantum Self-Trapping.

Keywords: *Bose-Einstein condensation. Artificial gauge field. Bosonic Josephson junction. Two-component Bose condensates*

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Retrato de fase $(z, \phi/\pi)$ para cinco condições iniciais distintas, representadas em cores diferentes, e quatro valores de Λ . Conforme aumentamos a interação entre partículas notamos o aparecimento de oscilações anarmônicas e de órbitas cujas médias em z são não nulas. Além disso, para valores acima do valor crítico, o sistema começa a apresentar oscilações em que a fase ϕ aumenta ou diminui indefinidamente.	28
Figura 2.2 - Gráficos de evolução temporal da diferença de populações e espaço de fase de ambas as espécies. Transição das oscilações Josephson (imagem de cima com $\Lambda = 1.6$) para o MQST (imagem de baixo com $\Lambda = 1.8$) no modo zero. As espécies são distinguidas por cores diferentes.	29
Figura 2.3 - Transição para o MQST no modo π . $\Lambda = 0.6$ (em cima) e $\Lambda = 0.8$ (embaixo) descrevem, respectivamente a pequena amplitude de oscilações no modo π e MQST no modo π	30
Figura 3.1 - Esquema para gerar uma fase geométrica através do acoplamento de átomos com um feixe de laser: (a) Átomos são confinados no plano xy e iluminado por um laser. (b) A diferença energética entre os dois estados internos acoplados com o campo do laser variam linearmente em x . (c) Energia dos autovalores do acoplamento laser-átomo na aproximação de onda girante.	33
Figura 3.2 - A configuração múltipé. Um estado atômico $ e\rangle$ é acoplado a N diferentes estados $ g_j\rangle$ ($j = 1, \dots, N$) através de N feixes de laser ressonantes com frequências κ_j	39
Figura 4.1 - As figuras abaixo mostram o efeito de desbalancamento das populações z_a e z_b com a presença de um campo de calibre não-Abeliano. (a) Vemos a evolução temporal das diferenças de população z_a (vermelho) e z_b (azul) com média não nula, de forma similar ao MQST. (b) O espaço de fase mostra as órbitas para as duas espécies. Vemos que ambas as espécies apresentam oscilações anarmônicas centradas em $z > 0$	49
Figura 4.2 - Evolução temporal da população total das partículas N_a e N_b . A população inicial é de 10^4 para ambas.	50

SUMÁRIO

1	Introdução	15
2	Dinâmica da junção Josephson bosônica	17
2.1	Condensação de Bose-Einstein	17
2.1.1	O gás de bósons fracamente interagente	18
2.2	Modelo de Bose-Hubbard	20
2.2.1	Aproximação de campo médio - um análogo mecânico	21
2.2.2	Análise linear e estabilidade	23
2.3	Junção Josephson bosônica com duas espécies	24
2.3.1	Dinâmica clássica do sistema	24
3	Potenciais de calibre artificiais em átomos neutros	31
3.1	Gerando campos de calibre artificiais	32
3.1.1	Rotação do sistema	32
3.1.2	Fases geométricas	33
3.2	Campos de calibre não-Abelianos	36
3.2.1	Definição de um campo de calibre não-Abeliano	36
3.2.2	Gerando potenciais de calibre não-Abelianos	37
3.2.3	Esquema múltiplo	38
4	Efeito de um potencial de calibre não-Abeliano na junção Josephson bosônica	41
4.1	Modelo	42
4.1.1	Eliminando o campo de calibre	42
4.1.2	Soluções estacionárias	45

5	Conclusão e perspectivas	51
	REFERÊNCIAS	53
	Apêndice A – Estados Coerentes	57

CAPÍTULO 1

Introdução

Desde que a mecânica quântica foi formalmente aceita pelo meio científico, os físicos buscam uma maneira de explorar e simular sistemas quânticos em laboratório satisfatoriamente. Com o aperfeiçoamento de técnicas para resfriamento utilizando lasers e campos magnéticos, os pesquisadores encontraram nos sistemas com átomos ultra-frios o grande simulador quântico que procuravam.

Um destes sistemas, o condensado de Bose-Einstein, previsto por Albert Einstein, só foi gerado em laboratório em 1995, 71 anos após sua previsão. Desde então este interessante estado da matéria vem sendo amplamente explorado devido a sua grande versatilidade e do fácil controle de parâmetros relevantes em laboratório.

Apesar de ser majoritariamente utilizado para o estudo de física básica, o condensado de Bose-Einstein também encontrou aplicação na interferometria atômica. Átomos ultra-frios podem ser utilizados em experimentos de interferometria gerando alto grau de precisão. Isto ocorre pois o comprimento de onda atômico é menor do que o de elétrons e nêutrons. Nos primeiros interferômetros atômicos um feixe de átomos frios ou moléculas era usado e os padrões de interferência eram construídos ponto após ponto, devido a interferência de cada partícula com ela mesma. Como em um condensado de Bose-Einstein todas as partículas ocupam o mesmo estado mecânico quântico, elas são fontes coerentes de ondas de matéria, de forma análoga ao laser para a luz. A interferência dessas ondas de matéria coerente pode ser obtida ao misturarmos dois pacotes de onda que foram inicialmente separados em uma armadilha de poço duplo. A primeira observação de dois condensados de Bose-Einstein independentes ocorreu em 1997 e foi posteriormente investigada tanto no aspecto teórico como no experimental.

A alta coerência dos condensados de Bose-Einstein torna-os candidatos naturais para sensores de alta precisão. Tais sensores podem ser gerados, por exemplo, aprisionando-se dois condensados de Bose-Einstein em um potencial de poço duplo e investigando a evolução de sua fase relativa na presença de perturbações externas. Entretanto, se os dois condensados forem desacoplados entre si, pequenas perturbações irão levá-los a perda de coerência, devido a suas energias extremamente baixas, tornando a sua aplicação difícil. Se fizermos um acoplamento controlado entre os dois condensados de Bose-Einstein a

sensibilidade à essas perturbações externas podem ser ajustadas dentro de um intervalo satisfatório.

Esse é o caso se dois condensados de Bose-Einstein não forem completamente separados, mas sim configurados de forma que haja uma probabilidade finita de suas partículas tunelarem de um poço para outro. Com isso, o acoplamento coerente é implementado dando origem a uma escala de energia adicional que é facilmente controlável. Ajustando esta energia para ser comparável as escalas de energia externas, e.g, a escala de energia térmica do gás de fundo, a diferença de fase entre os dois condensados de Bose-Einstein será sensível as perturbações externas. Monitorando então a evolução da fase relativa ou suas flutuações, tais perturbações podem ser investigadas com alta precisão.

De um ponto de vista fundamental, o estudo da dinâmica do tunelamento e da evolução temporal da fase relativa do condensado em um potencial de poço duplo é idêntico ao de uma junção Josephson supercondutora. Isto levou os cientistas a explorar as chamadas junções Josephson bosônicas utilizando o condensado de Bose-Einstein, durante a última década. Mais recentemente, com o avanço na geração dos chamados campos de calibre artificiais, diversos trabalhos passaram a explorar como a presença de campos elétricos e magnéticos podem influenciar este tunelamento e as configurações de equilíbrio deste sistema.

Nesta dissertação exploraremos a dinâmica básica da junção Josephson bosônica de uma e duas espécies atômicas e também explicaremos como é possível inserir campos de calibre artificiais neste sistema específico e em uma rede ou cadeia óptica com N sítios. No Capítulo 2 introduziremos a teoria necessária para o entendimento da dinâmica da junção Josephson bosônica. O Capítulo 3 é destinado a explicar como é possível gerar campos de calibre artificiais em um sistema de átomos neutros. No Capítulo 4 explicamos o problema central desta dissertação, explicitando cálculos realizados e nossos resultados. Finalmente, no Capítulo 5, concluímos o trabalho com algumas sugestões de novas abordagens, assim como uma apreciação dos resultados frente ao encontrado na literatura.

CAPÍTULO 2

Dinâmica da junção Josephson bosônica

Uma junção Josephson bosônica consiste de um *acoplamento fraco* entre duas funções de onda macroscópicas de matéria. Um método para se obter essa versão bosônica da junção Josephson é através do confinamento de um condensado de Bose-Einstein em um poço de potencial duplo. Essa configuração divide a função de onda dos átomos condensados em dois pacotes de onda localizados e conectados entre si através do tunelamento de partículas por uma barreira.(1)

Neste capítulo discutiremos os conceitos teóricos fundamentais para o entendimento da física por trás da junção Josephson bosônica, começando pelas noções básicas sobre gases quânticos degenerados e seguido pela introdução ao modelo de dois modos, que é a descrição formal do acoplamento fraco. Também iremos mostrar como a dinâmica do sistema pode ser descrita de uma forma mais simples, onde podemos tratá-la de maneira análoga a um sistema clássico, compreendendo de modo direto e intuitivo seu comportamento. Por fim, iremos discutir brevemente a respeito da dinâmica da junção Josephson bosônica com duas espécies, o que é um dos pontos centrais dessa dissertação.

2.1 Condensação de Bose-Einstein

Consideremos um sistema com N bósons indistinguíveis (i.e, partículas com spin inteiro) confinados em uma caixa ou em um potencial harmônico. Tal sistema pode ser descrito através de uma função de onda simétrica pela troca de duas partículas quaisquer. Bósons seguem a estatística de Bose-Einstein (2, 3) e sua distribuição para partículas não-interagentes, à temperatura finita, é dada pela distribuição de Bose-Einstein

$$N_i(E_i, T) = \left[\exp \left(\frac{E_i - \mu}{k_B T} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (2.1)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann, N_i e E_i são, respectivamente, a população e a energia do i -ésimo autoestado, T é a temperatura e μ é o potencial químico definido pela condição de normalização para o número total de partículas $N = \sum_i N_i(\mu)$. Para uma grande quantidade de partículas em baixas temperaturas, o potencial químico é comparável a energia do estado fundamental e a condição de normalização pode ser reescrita como

$$N = N_0 + \sum_{i>0} N_i(T) = N_0 + \sum_{i>0} \left[\exp \left(\frac{E_i - E_0}{k_B T} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (2.2)$$

onde E_0 é a energia do estado fundamental. A equação (2.2) nos diz que, em um sistema à temperatura finita, apenas um número finito de partículas poderá permanecer em níveis mais energéticos que o estado fundamental. Se aumentarmos o número de partículas ou diminuirmos a temperatura, essa restrição só será satisfeita se as partículas adicionais estiverem localizadas no estado fundamental. Dessa forma, dependendo do potencial externo e dos parâmetros experimentais, poderemos definir uma temperatura crítica, T_c , em que o estado fundamental se tornará macroscopicamente ocupado $N_0 \gg N_{i>0}$.

A ocupação macroscópica de partículas no estado fundamental é chamada de condensação de Bose-Einstein e a população de partículas ocupando este estado é chamada de condensado de Bose-Einstein.

2.1.1 O gás de bósons fracamente interagente

Vamos inicialmente considerar o operador Hamiltoniano que descreve um gás de N bósons, fracamente interagentes, submetido a um potencial externo $V(\mathbf{r}, t)$

$$\hat{H} = \sum_i \left[\frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \hat{V}(\mathbf{r}_i, t) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \hat{U}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \quad (2.3)$$

onde i corresponde a i -ésima partícula e $\hat{U}$ representa o termo de interação entre pares de átomos. Os operadores da equação (2.3) podem ser reescritos, utilizando segunda quantização, em termos de operadores de campo bosônicos:

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \quad (2.4)$$

onde o operador de campo é definido como $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \Psi_n(\mathbf{r}, t) \hat{a}_n$, ou seja, uma combinação dos n estados de uma partícula e seus respectivos operadores de aniquilação.

Para temperatura e densidade baixas, as únicas interações relevantes são colisões de dois corpos pouco energéticas. Aproximamos então a interação interatômica por uma função delta, ou seja, $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rightarrow g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ com $g = 4\pi\hbar^2 a/m$, onde a é o comprimento de espalhamento de onda-s. Essa aproximação é válida se o alcance das interações for muito menor que os comprimentos de onda dos átomos.

No caso em que consideramos um número grande de átomos em um mesmo estado quântico, se as flutuações quânticas forem desprezíveis ($\langle N_0^2 \rangle - \langle N_0 \rangle^2 \ll \langle N_0 \rangle^2$), podemos aplicar a aproximação de Bogoliubov. Escrevemos então $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{N_0}\Phi(\mathbf{r}, t) + \hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t)$ sendo $\Phi(\mathbf{r}, t)$ um campo clássico complexo e $\hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t)$ um operador de flutuação. Com as condições já citadas acima teremos $\langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle = \sqrt{N_0}\Phi(\mathbf{r}, t)$. Utilizando então a equação de Heisenberg para o valor médio do operador de campo teremos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) + gN_0 |\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.5)$$

onde $\int |\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} = 1$. A Eq. (2.5) é conhecida como equação de Gross-Pitaevskii (GPE), uma equação de Schrodinger não linear que descreve a evolução temporal da função de onda do BEC em $T = 0$.

É necessário ter cuidado uma vez que a GPE não descreve uma única partícula nas vizinhanças de outras partículas, mas sim a evolução do valor esperado do operador de campo. Dessa forma, a energia associada a GPE é o potencial químico μ e não a energia por partícula E_0 , i.e

$$\mu = \int \Psi^*(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + gN_0 |\Psi(\mathbf{r})|^2 \right) \Psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.6)$$

$$E_0 = \int \Psi^*(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + g\frac{N_0}{2} |\Psi(\mathbf{r})|^2 \right) \Psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (2.7)$$

As duas quantidades só serão iguais caso a interação entre partículas seja desprezível. A discrepância entre os dois valores pode ser entendida se considerarmos que a energia de interação no potencial químico resulta da interação de uma partícula com todas as outras partículas, nos dando uma energia $g(N_0 - 1) \approx gN_0$ para um grande número de átomos. Entretanto, para a energia de interação total, o número de pares possíveis tem que ser levado em conta e nos dará $gN_0(N_0 - 1)/2 \approx gN_0^2/2$. Dividindo pelo número de partículas isso nos leva a expressão para energia por partícula acima.

2.2 Modelo de Bose-Hubbard

Para se criar uma junção Josephson bosônica é necessária a presença do chamado acoplamento fraco. O acoplamento fraco se manifesta quando a diferença energética entre os dois primeiros autoestados de uma partícula é muito menor que a diferença dos demais estados energéticos da mesma. Podemos obter essa configuração utilizando o potencial de poço duplo que consiste basicamente de um confinamento harmônico com uma barreira em seu centro. Se a altura dessa barreira for comparável ao potencial químico dos átomos, os dois primeiros níveis de uma partícula serão quasi-degenerados e, para excitações de baixas energias, apenas esses dois estados são relevantes.

Quando a escala de energia do sistema for muito menor que a energia necessária para transferir uma população macroscópica para estados excitados, podemos usar aproximação de dois modos e o modelo de dois modos resultante para investigar propriedades de estado estacionário da junção bosônica. Caso o sistema não possa ser descrito de maneira eficaz pelo modelo de dois modos em geral utilizam-se as teorias multi-orbitais como as discutidas em (4, 5).

O modelo de dois modos pode ser encontrado a partir do modelo de Bose-Hubbard e vice-versa, bastando para isso reescrevermos a função de onda em uma base conveniente que descreve as partículas no poço direito e no poço esquerdo. (6)

O modelo de Bose-Hubbard fornece uma descrição aproximada de bósons interagentes em uma cadeia com N sítios e é dado por

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{U}{2} (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - 1)) - J \sum_{i=1}^N (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_{i+1} + \hat{a}_{i+1}^\dagger \hat{a}_i) \quad (2.8)$$

onde U é energia de interação entre partículas no mesmo sítio e J é a amplitude de tunelamento ou hopping. Para o poço duplo, basta assumirmos $N = 2$ em (2.8). Devemos notar que esse modelo não leva em consideração uma possível assimetria no potencial de poço duplo. Uma análise para isso pode ser feita partindo-se de princípios variacionais como os propostos em (7) ou adicionando termos no Hamiltoniano de modo a corrigir as diferenças energéticas entre os poços. (8) Nessa dissertação abordaremos o caso mais simples com o potencial de poço duplo simétrico.

2.2.1 Aproximação de campo médio - um análogo mecânico

Partindo do modelo de Bose-Hubbard da seção anterior, podemos usar uma aproximação clássica para reescrever o Hamiltoniano do sistema a fim de obter uma descrição intuitiva da dinâmica do mesmo. Para fazer isso, devemos descrever o condensado utilizando estados coerentes $|\psi_k\rangle$ com $k = R, L$, sendo R o sítio direito e L o sítio esquerdo. Assim, reescrevemos a equação (2.8), com apenas dois sítios, da seguinte forma

$$\hat{H} = \frac{U}{2}(\hat{a}_R^\dagger \hat{a}_R(\hat{a}_R^\dagger \hat{a}_R - 1) + \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_L(\hat{a}_L^\dagger \hat{a}_L - 1)) - J(\hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L + \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_R). \quad (2.9)$$

Calculando o valor médio de $\hat{H}$ nos estados coerentes $|\psi_R, \psi_L\rangle$ obtemos

$$H = \frac{U}{2}(|\psi_R|^4 + |\psi_L|^4) - J(\psi_R^* \psi_L + \psi_L^* \psi_R) \quad (2.10)$$

lembrando que $\hat{a}_k|\psi_k\rangle = \psi_k|\psi_k\rangle$. A partir disso, reescrevemos esses autovalores em termos da população nos poços e de suas respectivas fases $\psi_k = \sqrt{N_k}e^{i\phi_k}$. Dessa forma o Hamiltoniano fica escrito como

$$H = \frac{U}{2}(N_R^2 + N_L^2) - 2J\sqrt{N_R N_L} \cos(\phi_R - \phi_L). \quad (2.11)$$

e, com isso, conseguimos mapear nosso problema em um sistema similar a um pêndulo clássico. Dessa forma, podemos explorar a dinâmica de um sistema quântico do mesmo modo que faríamos com um modelo clássico.

Usando as equações de Hamilton, dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_k &= \frac{d\phi_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial N_k} \\ \dot{N}_k &= \frac{dN_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \phi_k} \end{aligned} \quad (2.12)$$

obtemos um sistema de quatro equações não lineares acopladas

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_L &= UN_L - \frac{J}{2}\sqrt{\frac{N_R}{N_L}} \cos(\phi_R - \phi_L) \\ \dot{\phi}_R &= UN_R - \frac{J}{2}\sqrt{\frac{N_L}{N_R}} \cos(\phi_R - \phi_L) \\ \dot{N}_L &= J\sqrt{N_L N_R} \sin(\phi_R - \phi_L) \\ \dot{N}_R &= -J\sqrt{N_L N_R} \sin(\phi_R - \phi_L). \end{aligned}$$

Esse sistema de equações pode ser simplificado se considerarmos que o número de partículas se conserva, ou seja, $N_R(t) + N_L(t) = N$. Definimos a diferença de população normalizada entre os poços direito e esquerdo como $z(t) = (N_R(t) - N_L(t))/N$ e a diferença de fases $\phi_R(t) - \phi_L(t) = \phi(t)$. Isso nos permite reduzir o sistema de equações a

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \left(\Lambda + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \cos \phi \right) z \\ \dot{z} &= -\sqrt{1-z^2} \sin \phi\end{aligned}\tag{2.13}$$

onde adimensionalizamos o sistema substituindo $t = \tau/(NJ)$ e $\Lambda = U/J$. A partir disso podemos construir o retrato de fase desse sistema e observar sua dinâmica de maneira qualitativa. Na figura (??) vemos o retrato de fase $(z, \phi/\pi)$ com 5 condições iniciais distintas e diferentes valores para Λ .

Vemos que as interações entre os átomos alteram e enriquecem a dinâmica do sistema. Quando temos $\Lambda = 0$ na figura (2.1(a)) temos um comportamento similar ao de um pêndulo clássico com oscilações harmônicas ao redor de $\phi = 0$ e $\phi = \pi$. Já em (2.1(b)), com $\Lambda > 0$, observamos uma deformação das órbitas no espaço de fase, indicando o surgimento de oscilações anarmônicas. Na (2.1(c)) as órbitas ao redor de π se separam e passam a formar novas órbitas no espaço de fase cuja média $\langle z \rangle$ é diferente de zero, o que são indícios de um possível ponto de equilíbrio do sistema em que a diferença de população é não nula. Finalmente na figura (2.1(d)) surge um novo tipo de comportamento em que uma das soluções (cor púrpura) passa a oscilar apenas em z com a fase diminuindo indefinidamente.

Com as equações (2.13), podemos escrever um Hamiltoniano em termos de z e ϕ dado por

$$H = \frac{\Lambda}{2} z^2 - \sqrt{1-z^2} \cos \phi.\tag{2.14}$$

Uma vez que H é uma grandeza que se conserva no sistema, pois não depende explicitamente do tempo, podemos utilizá-lo para determinar o valor crítico de Λ em função das condições iniciais $(z(0), \phi(0))$. Esse valor crítico é caracterizado como sendo o valor máximo de Λ que ainda permite soluções com $z(t) = 0$ e é dado por

$$\Lambda_c = 2 \left(\frac{1 + \sqrt{1-z(0)^2} \cos \phi(0)}{z(0)^2} \right).\tag{2.15}$$

Caso $\Lambda > \Lambda_c$, o sistema não pode ter mais soluções com $z(t) = 0$. De fato, calculando Λ_c para $z(0) = -0.6$ e $\phi = 0.81\pi$ (condição inicial em púrpura na figura (??)), obtemos $\Lambda_c \approx 1.87$, que é consistente com o que observamos no espaço de fase.

2.2.2 Análise linear e estabilidade

O estudo da estabilidade de um sistema é fundamental para o entendimento da dinâmica do mesmo. Em particular, se queremos entender como exatamente a interação entre partículas afeta a dinâmica das equações (2.13), esse estudo se torna uma ferramenta extremamente útil até mesmo para sistemas mais complicados e possuindo mais de dois poços. (9)

Primeiro precisamos encontrar os pontos fixos desse sistema de equações, i.e, o conjunto de valores (z, ϕ) que faz com que $\dot{z}(t) = 0$ e $\dot{\phi}(t) = 0$ para qualquer valor de t . Impondo as condições de derivada temporal nula nas equações (2.13) teremos

$$0 = \left(\Lambda + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \cos \phi \right) z \quad (2.16)$$

$$0 = -\sqrt{1-z^2} \sin \phi \quad (2.17)$$

onde vemos que a (2.17) é nula, para qualquer valor de z , caso ϕ seja múltiplo inteiro de π . Isso deixa a equação (2.16) da seguinte forma

$$0 = \left(\Lambda + \frac{(-1)^n}{\sqrt{1-z^2}} \right) z \quad (2.18)$$

onde $n \in \mathbb{Z}$. Independente do valor de n , $z_0 = 0$ sempre é solução. Porém, para valores ímpares de n , podemos ter $z_0 = \pm(1 - 1/\Lambda^2)^{1/2}$, que justifica a presença das órbitas com $\langle z \rangle_t \neq 0$ da figura (2.2(c)). Podemos verificar a estabilidade desses pontos facilmente através de uma análise linear. Para isso, basta considerarmos pequenas perturbações δz e $\delta \phi$ ao redor dos pontos de equilíbrio

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 + \delta z(t) \\ \phi(t) &= \phi_0 + \delta \phi(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

substituindo nas equações (2.16) e (2.17) e expandindo até a primeira ordem em δz e $\delta \phi$ e substituindo ϕ_0 por $n\pi$ ficamos apenas com

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{\phi} \\ \delta \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda + \frac{(-1)^n}{(1-z_0^2)^{3/2}} \\ -(-1)^n \sqrt{1-z_0^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \phi \\ \delta z \end{pmatrix}.$$

Calculando as frequências para n par e $z_0 = 0$ teremos

$$\omega_0^2 = 1 + \Lambda \quad (2.20)$$

que é conhecida como *frequência de plasma*. Esse regime oscilatório é estável para qualquer valor de Λ . Para o caso em que n for ímpar e $z_0 = 0$ teremos

$$\omega_\pi^2 = 1 - \Lambda. \quad (2.21)$$

Essa é a frequência das chamadas *oscilações* π , que são estáveis apenas quando $\Lambda < 1$. Quando temos $z_0 \neq 0$ a frequência encontrada é dada por

$$\omega_{ST}^2 = \Lambda^2 - 1 \quad (2.22)$$

que apresenta estabilidade apenas quando $\Lambda > 1$.

A configuração de equilíbrio estável nos pontos $(\pm(1 - 1/\Lambda^2)^{1/2}, (2n + 1)\pi)$ é conhecida como *Macroscopic Quantum Self Trapping* (MQST). Esse efeito se origina devido a interação interatômica (o termo não linear na equação de Gross-Pitaevskii) e possui natureza quântica, envolvendo a coerência de um número macroscópico de átomos. Foi previsto já em 1997 (10) mas apenas em 2005 foi observado em laboratório. (11, 12)

2.3 Junção Josephson bosônica com duas espécies

2.3.1 Dinâmica clássica do sistema

Diversos estudos foram realizados em cima da junção Josephson bosônica com apenas uma espécie atômica. Uma evolução natural do estudo dos efeitos não lineares no potencial de poço duplo é a inserção de uma segunda espécie no sistema (13), algo que torna a dinâmica do sistema bem mais complexo, chegando até a apresentar comportamento caótico como apontado em (14, 15).

O modelo de Bose-Hubbard para duas espécies atômicas é uma extensão natural do modelo para uma espécie, só é necessário adicionarmos a possibilidade de haver interação entre espécies diferentes e amplitudes de hopping distintas. Dessa forma o Hamiltoniano é dado por

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{i=1}^N \left(\frac{U^{aa}}{2} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - 1) + \frac{U^{bb}}{2} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i (\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i - 1) + U^{ab} \hat{b}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i \hat{a}_i \right) \\ & - J^a \sum_{i=1}^N (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_{i+1} + \hat{a}_{i+1}^\dagger \hat{a}_i) - J^b \sum_{i=1}^N (\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_{i+1} + \hat{b}_{i+1}^\dagger \hat{b}_i) \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde U^{ab} é a energia de interação interespecífica e J^x , $x = a, b$, é a amplitude de tunelamento de cada uma das espécies atômicas.

Para o potencial de poço duplo, novamente escolhemos $N = 2$ e identificamos os poços como direito (R) e esquerdo (L). Seguindo passos similares ao da seção anterior, escrevemos o Hamiltoniano em termos de valores médios de estados coerentes com autovalores $\psi_k^x = \sqrt{N_k^x} e^{i\phi_k^x}$, obtendo

$$\begin{aligned} H = & \frac{U^{aa}}{2} ((N_R^a)^2 + (N_L^a)^2) + \frac{U^{bb}}{2} ((N_R^b)^2 + (N_L^b)^2) + U^{ab} (N_R^a N_R^b + N_L^a N_L^b) \\ & - J^a \sqrt{N_R^a N_L^a} \cos(\phi_R^a - \phi_L^a) - J^b \sqrt{N_R^b N_L^b} \cos(\phi_R^b - \phi_L^b). \end{aligned} \quad (2.24)$$

A partir disso, podemos encontrar as oito equações de movimento e reduzi-las a apenas quatro equações usando as populações totais $N_R^x + N_L^x = N_x$, as diferenças de populações normalizadas entre os poços $z_x = (N_R^x - N_L^x)/N_x$ e as diferenças de fases $\phi_x = \phi_R^x - \phi_L^x$

$$\begin{aligned} \dot{z}_a = & N_b U^{ab} z_b + \left(N_a U^{aa} + \frac{J^a}{N_a \sqrt{1 - z_a^2}} \cos \phi_a \right) z_a \\ \dot{\phi}_a = & - N_a J^a \sqrt{1 - z_a^2} \sin \phi_a \\ \dot{z}_b = & N_a U^{ab} z_a + \left(N_b U^{bb} + \frac{J^b}{N_b \sqrt{1 - z_b^2}} \cos \phi_b \right) z_b \\ \dot{\phi}_b = & - N_b J^b \sqrt{1 - z_b^2} \sin \phi_b. \end{aligned}$$

Afim de fazer uma análise simples da dinâmica desse sistema assumimos $J^a = J^b = J$, $U^{aa} = U^{bb} = U$ e $N_a = N_b = N$. Fazendo $t = \tau/(NJ)$, $\Lambda = U/J$ e $\Lambda_{ab} = U^{ab}/J$, podemos

reescrever as equações dinâmicas como

$$\dot{z}_a = \Lambda_{ab} z_b + \left(\Lambda + \frac{1}{\sqrt{1-z_a^2}} \cos \phi_a \right) z_a \quad (2.25)$$

$$\dot{\phi}_a = -\sqrt{1-z_a^2} \sin \phi_a \quad (2.26)$$

$$\dot{z}_b = \Lambda_{ab} z_a + \left(\Lambda + \frac{1}{\sqrt{1-z_b^2}} \cos \phi_b \right) z_b \quad (2.27)$$

$$\dot{\phi}_b = -\sqrt{1-z_b^2} \sin \phi_b. \quad (2.28)$$

que claramente só diferem das equações (2.13) pelos termos de acoplamento proporcionais a Λ_{ab} .

Usando o mesmo procedimento que utilizamos para encontrar os pontos fixos no caso com apenas uma espécie, encontramos primeiramente $\phi_a = n\pi$ e $\phi_b = k\pi$, com $n, k \in \mathbb{Z}$

- Se n e k forem pares ficamos com

$$\begin{cases} z_a = z_b = 0 \\ z_a = z_b = \pm \left(1 - \left(\frac{1}{\Lambda_{ab} - \Lambda} \right)^2 \right)^{1/2} \end{cases} \quad (2.29)$$

- Quando n e k forem ímpares teremos

$$\begin{cases} z_a = z_b = 0 \\ z_a = -z_b = \pm \left(1 - \left(\frac{1}{\Lambda_{ab} + \Lambda} \right)^2 \right)^{1/2} \end{cases} \quad (2.30)$$

- No caso em que n for par e k for ímpar ou vice-versa, temos $z_a = z_b = 0$ como única solução.

As pequenas oscilações ao redor do ponto fixo ($z = 0, \phi = 0$) são chamadas de oscilações de modo zero enquanto as oscilações ao redor de ($z = 0, \phi = \pi$) são as oscilações de modo π .

Os pontos fixos não triviais ($z \neq 0$) resultam em soluções com população desbalanceada e levam a uma dinâmica de tunelamento com MQST. A presença de pontos fixos com sinais opostos ($z_a = -z_b$) no modo zero sugere que, no regime de Self-Trapping, as espécies tendem a ficar em poços de potencial diferentes, como podemos ver na figura (2.2). Em contraste a isso o modo π mostra que as espécies podem coexistir no mesmo poço de potencial ($z_a = -z_b$). Dessa forma, as equações de ponto fixo sugerem que no modo π ocorre uma espécie de interação atrativa entre as espécies. A figura (2.3) ilustra esse efeito na dinâmica do sistema.

Ressaltamos que a dinâmica da junção com duas espécies é muito complexa e o que apre-

sentamos aqui é apenas parte do que pode ser explorado nesse sistema. Alguns trabalhos (16) exploram mais a fundo a dinâmica desse sistema e também sugerem métodos para realizar estes experimentos em laboratório.

Os tópicos abordados neste capítulo visaram apenas dar uma introdução a um dos métodos utilizados para o estudo da dinâmica destes sistemas bosônicos através de uma abordagem clássica intuitiva. Existem outras abordagens e análises possíveis porém, isto está além do escopo desta dissertação e não será discutido neste capítulo.

Figura 2.1 – Retrato de fase $(z, \phi/\pi)$ para cinco condições iniciais distintas, representadas em cores diferentes, e quatro valores de Λ . Conforme aumentamos a interação entre partículas notamos o aparecimento de oscilações anarmônicas e de órbitas cujas médias em z são não nulas. Além disso, para valores acima do valor crítico, o sistema começa a apresentar oscilações em que a fase ϕ aumenta ou diminui indefinidamente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.2 – Gráficos de evolução temporal da diferença de populações e espaço de fase de ambas as espécies. Transição das oscilações Josephson (imagem de cima com $\Lambda = 1.6$) para o MQST (imagem de baixo com $\Lambda = 1.8$) no modo zero. As espécies são distinguidas por cores diferentes.

Fonte: SATIJA et al. (16)

Figura 2.3 – Transição para o MQST no modo π . $\Lambda = 0.6$ (em cima) e $\Lambda = 0.8$ (embaixo) descrevem, respectivamente a pequena amplitude de oscilações no modo π e MQST no modo π .

Fonte: SATIJA et al. (16)

CAPÍTULO 3

Potenciais de calibre artificiais em átomos neutros

No capítulo anterior apresentamos aspectos fundamentais do condensado de Bose-Einstein, provavelmente o sistema quântico mais versátil já criado em laboratório, e uma configuração, conhecida como junção Josephson bosônica, que nos permite estudar fenômenos quânticos, como tunelamento de partículas, em escala macroscópica. Neste capítulo iremos apresentar uma segunda ferramenta que vem sendo utilizada na última década e permite a adição de efeitos de campos elétricos e magnéticos em átomos neutros: os campos de calibre artificiais ou sintéticos.

Em 1982 Feynman introduziu o conceito de um simulador quântico como uma possibilidade de contornar as dificuldades de simular sistemas quânticos usando computadores clássicos. (17) A sua idéia, baseada na universalidade da mecânica quântica, era utilizar um dispositivo controlável para simular outros sistemas de interesse. Hoje em dia a idéia de Feynman começa a ser implementada por diversas frentes de pesquisa em física e entre elas átomos frios possuem um papel central. (18)

Utilizando bósons, férmions ou até mesmo uma mistura de ambos, submetidos a potenciais gerados por feixes de laser controlados, os cientistas já possuem uma vasto leque de sistemas para serem explorados com seus simuladores quânticos. Entretanto, por serem naturalmente neutros, os átomos frios precisavam de um ingrediente a mais para se tornarem simuladores completos: algo equivalente ao magnetismo orbital, o que permitiria a simulação de fenômenos como o efeito Hall. Uma saída encontrada pelos físicos foi utilizar a interação entre luz e átomos para gerar potenciais de calibre artificiais.

Apresentaremos neste capítulo algumas propostas para a geração de campos de calibre em um sistema com átomos neutros.

3.1 Gerando campos de calibre artificiais

3.1.1 Rotação do sistema

Conceitualmente uma das formas mais simples de se gerar um campo magnético é girar um sistema. O efeito de um campo magnético constante em uma partícula carregada é a força de Lorentz $\mathbf{F} \propto \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ perpendicular à velocidade v da partícula. Lembrando das leis de transformação da mecânica clássica, vemos que, quando vamos para um referencial girante, as forças inerciais imitam a força de Lorentz.

Se uma partícula se move com velocidade v em um referencial girante, ela sentirá a força de Coriolis $\mathbf{F} \propto \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}_{rot}$ que, exceto por constantes de proporcionalidade, é uma força que imita exatamente a força de Lorentz se $\boldsymbol{\Omega}_{rot}$ for paralelo a $\mathbf{B}$.

Formalmente podemos escrever o Hamiltoniano de um gás em uma armadilha harmônica com simetria axial e frequências $\omega_{\perp}$ no plano xy e $\omega_{\parallel}$ no eixo z (19)

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathbf{p}_i^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega_{\perp}^2 (x_i^2 + y_i^2) + \frac{1}{2} M \omega_{\parallel}^2 z_i^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{ij} V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j). \quad (3.1)$$

Em um potencial girando ao redor do eixo z com velocidade angular constante $\boldsymbol{\Omega}_{rot} = \Omega_{rot} \mathbf{e}_z$, o Hamiltoniano se transforma como $H_{rot} = H - \boldsymbol{\Omega}_{rot} \cdot \mathbf{L}$, com $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ e pode ser reescrito como

$$H_{rot} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{(\mathbf{p}_i - M \boldsymbol{\Omega}_{rot} \times \mathbf{r}_i)^2}{2M} + \frac{1}{2} M (\omega_{\perp}^2 - \Omega_{rot}^2) (x_i^2 + y_i^2) + \frac{1}{2} M \omega_{\parallel}^2 z_i^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{ij} V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j), \quad (3.2)$$

que é equivalente ao Hamiltoniano de N partículas com carga q em um campo magnético $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, se escolhermos $qB = 2M\Omega_{rot}$. Vemos que o segundo termo da equação, onde aparece a força centrífuga, reduz a frequência de aprisionamento em xy . Isso significa que o sistema se torna instável conforme Ω_{rot} se aproxima de $\omega_{\perp}$. O que é um problema uma vez que apenas nesse limite é possível criar estados altamente correlacionados. (20–22)

3.1.2 Fases geométricas

Uma alternativa ao método apresentado na seção anterior é a geração de campos de calibre através do acoplamento de níveis de energia atômicos com feixes de laser. Há uma variedade de propostas para a geração desses campos como apontado em (23). Iremos focar em um caso mais simples, que envolve apenas dois níveis atômicos e um único laser. A idéia central consiste em utilizar *estados vestidos* e a equivalência matemática entre potenciais de calibre e curvaturas de Berry, dando origem a fases geométricas. (24) Uma fase de Berry, $e^{i\gamma(C)}$, é adquirida por uma partícula em uma trajetória C devido a topologia do espaço em que ela se movimenta. Um campo magnético é capaz de adicionar uma fase de Berry à função de onda pois, uma partícula com carga q sujeita a um potencial vetor magnético $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ adquire uma fase $e^{iq \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}}$ ao se mover ao longo do circuito C . Desta forma, para imitar o efeito de um campo de calibre agindo em partículas neutras, devemos pensar em um mecanismo que afeta a fase da função de onda da partícula, da mesma forma que o potencial vetor magnético faria se a partícula fosse carregada. Mostraremos que isso é possível através do acoplamento entre átomos e fótons.

Seja uma nuvem atômica sujeita a um confinamento harmônico, com intensidade tão

Figura 3.1 – Esquema para gerar uma fase geométrica através do acoplamento de átomos com um feixe de laser: (a) Átomos são confinados no plano xy e iluminado por um laser. (b) A diferença energética entre os dois estados internos acoplados com o campo do laser variam linearmente em x . (c) Energia dos autovalores do acoplamento laser-átomo na aproximação de onda girante.

Fonte: JÚLIA-DÍAZ et al.(25)

grande na direção z de forma que o sistema é efetivamente bidimensional. Iluminamos essa nuvem com um único feixe de laser com número de onda k e frequência ω_L se propagando na direção y . Vamos supor que a frequência desse feixe está muito próxima a ressonância de transição entre os dois estados atômicos internos, $|g\rangle$ e $|e\rangle$, $\omega_L = \omega_A$, veja também

a figura (3.1a). A interação entre o campo elétrico do laser e o dipolo elétrico induzido é modelado pelo Hamiltoniano de interação laser-átomo, que na aproximação de onda girante e na representação de Dirac é dado por

$$H_{LM} = E_g|g\rangle\langle g| + (E_e - \hbar\omega_L)|e\rangle\langle e| + \frac{\hbar\Omega_0}{2}e^{iky}|e\rangle\langle g| + \frac{\hbar\Omega_0}{2}e^{-iky}|g\rangle\langle e| \quad (3.3)$$

onde E_g e E_e são as energias dos estados fundamentais e excitado, e Ω_0 é a frequência de Rabi, que é proporcional a intensidade do laser.

Ao invés de descrevermos a dinâmica externa do sistema em termos dos estados atômicos, podemos agora descrevê-la em termos dos autoestados do acoplamento laser-átomo, os chamados estados vestidos. Uma vez que estes novos estados “internos” dependentes da posição do átomo, o movimento do centro de massa vem acompanhado de uma evolução bem definida do estado interno. Isto é uma pista que pode nos permitir imitar campos magnéticos através de fases geométricas.

Para gerarmos potenciais de calibre não triviais, devemos introduzir uma dependência espacial no acoplamento. Isso pode ser implementado com um campo magnético real que, através do efeito Zeeman, faz com que os níveis de energia internos variem linearmente com x , como vemos na figura (3.1b). Introduzindo um parâmetro w , que define a escala do *shift*, teremos

$$E_g = -\frac{\hbar\Omega_0}{2}\frac{x}{w}, \quad E_e = \hbar\omega_A + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\frac{x}{w}. \quad (3.4)$$

Assim, o Hamiltoniano de uma partícula é dado por

$$H_p = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2}M(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) + \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{i\phi} \sin\theta \\ e^{-i\phi} \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

onde o terceiro termo é o Hamiltoniano de laser-átomo representado na base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$. Aqui M é a massa atômica, $\Omega = \Omega_0\sqrt{1 + x^2/w^2}$, $\sin\theta = w/\sqrt{w^2 + x^2}$, $\cos\theta = x/\sqrt{w^2 + x^2}$ e $\phi = ky$.

Devemos agora sair da representação com os estados atômicos puros para os estados vestidos. Os níveis de energia dos estados vestidos são mostrados na figura (3.1). Escrevemos então, no ponto $\mathbf{r}$, os autoestados da matriz de interação laser-átomo como

$$|\chi_1\rangle = e^{-iG} \begin{pmatrix} Ce^{i\phi/2} \\ Se^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad |\chi_2\rangle = e^{iG} \begin{pmatrix} -Se^{i\phi/2} \\ Ce^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

na base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$, onde $C = \cos\theta/2$, $S = \sin\theta/2$ e $G = \frac{kxy}{4w}$. Dessa forma, o estado atômico pode ser expresso como

$$|\Psi(\mathbf{r})\rangle = a_1(\mathbf{r}) \otimes |\chi_1\rangle + a_2(\mathbf{r}) \otimes |\chi_2\rangle \quad (3.7)$$

onde a_i contém informação sobre a dinâmica externa e $|\chi_i\rangle$ representa os graus de liberdade “internos”. O Hamiltoniano de uma partícula nessa nova base fica então expresso como

$$H_p = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

cujos elementos da diagonal podem ser escritos de forma conveniente se definirmos um potencial vetor

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \hbar k \left(\frac{y}{4w}, \frac{x}{4w} - \frac{x}{2\sqrt{x^2 + w^2}}, 0 \right) \quad (3.9)$$

e um potencial escalar

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2 w^2}{8M(x^2 + w^2)} \left(k^2 + \frac{1}{x^2 + w^2} \right). \quad (3.10)$$

Com isso escrevemos

$$H_{11} = \frac{[\mathbf{p} - \mathbf{A}(\mathbf{r})]^2}{2M} + U(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) + \frac{\hbar\Omega(r)}{2}, \quad (3.11)$$

e

$$H_{22} = \frac{[\mathbf{p} + \mathbf{A}(\mathbf{r})]^2}{2M} + U(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) - \frac{\hbar\Omega(r)}{2}. \quad (3.12)$$

que são os Hamiltonianos que regem a evolução da dinâmica externa dos átomos com estado interno $|\chi_1\rangle$ e $|\chi_2\rangle$, respectivamente. Se expandirmos H_{ij} até a segunda ordem em x e y , o que é justificado encolhendo-se w maior que a extensão da nuvem atômica, encontraremos que a distância energética entre os autovalores é de $\hbar\Omega_0$.

Os termos H_{12} e H_{21} possuem valor esperado da ordem da energia de recuo $E_R = \frac{\hbar^2 k^2}{2M}$ que dá a escala para a energia cinética do centro de massa quando ocorre absorção ou emissão de um fóton. Se considerarmos $\hbar\Omega_0 \gg E_R$, podemos desprezar este acoplamento. Tal limite é conhecido como *aproximação adiabática*, já que a dinâmica interna é rápida o suficiente para acompanhar o movimento do centro de massa adiabaticamente. Isto implica que, uma vez que o átomo foi preparado no estado $|\chi_2\rangle$, ele nunca estará no estado excitado $|\chi_1\rangle$.

O potencial vetor $\mathbf{A}$ e o potencial escalar U são chamados de potenciais geométricos. Esse nome vem do fato de dependerem de coordenadas espaciais, isto é, da geometria do acoplamento entre $|g\rangle$ e $|e\rangle$, mas não da força Ω entre esse acoplamento.

3.2 Campos de calibre não-Abelianos

3.2.1 Definição de um campo de calibre não-Abeliano

De um ponto de vista matemático, um campo magnético é um campo de calibre $U(1)$, o que significa que o potencial de calibre se acopla à um grau de liberdade $U(1)$, i.e, a fase da partícula. Para mostrar isso vamos considerar a seguinte equação de Schrodinger

$$H\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2M}(\mathbf{p} + \mathbf{A})^2\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}) \quad (3.13)$$

cuja solução é alguma função complexa $\Psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$. Esta equação é invariante pela transformação de calibre

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\Lambda(\mathbf{r}) \quad (3.14)$$

$$\Psi(\mathbf{r}) \rightarrow \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\Lambda(\mathbf{r})\right]\Psi(\mathbf{r}), \quad (3.15)$$

que localmente muda a fase da função de onda Ψ . Aqui, a função de calibre Λ e todos os elementos do potencial de calibre $\mathbf{A}$ são funções que mapeiam o espaço real $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}$.

Para espaços de Hilbert mais complicados, podemos pensar em outras transformações de calibre. Consideremos o estado $|\Psi\rangle$ como um n -spinor $\Psi(\mathbf{r}) = (\Psi^1(\mathbf{r}), \dots, \Psi^n(\mathbf{r}))^T$ com cada componente Ψ^i mapeando $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{C}$.

Além de rotações de fase podemos também fazer rotações de spin descritas por matrizes R do grupo $SU(n)$, $\Psi \rightarrow R\Psi$. Por simplicidade vamos assumir que R é uma matriz constante. Os elementos de $\mathbf{A}$ podem ser matrizes $n \times n$ Hermitianas que não necessariamente comutam com R . Mesmo assim, podemos obter uma forma invariante para (3.13) usando a transformação de calibre

$$A_i \rightarrow RA_iR^{-1} \quad (3.16)$$

$$\Psi \rightarrow R\Psi. \quad (3.17)$$

Potenciais A_i que resultam de transformações de calibre cujos elementos pertencem a um grupo não-comutativo como $SU(n)$, com $n > 1$, são chamados de potenciais de calibre

não-Abelianos e obedecem à propriedade

$$[A_i, A_j] = A_i A_j - A_j A_i \neq 0. \quad (3.18)$$

Dessa forma se torna necessário reescrevermos a definição do campo magnético $\mathbf{B}$ de forma mais geral:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} + i \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} A_i A_j \hat{e}_k \quad (3.19)$$

com ϵ_{ijk} sendo o símbolo de Levi-Civita. Caso $\mathbf{A}$ seja Abeliano o segundo termo desaparecerá e a equação (3.19) fica reduzida a forma conhecida da eletrodinâmica. Por outro lado, caso tenhamos um campo de calibre não-Abeliano constante, apenas o primeiro termo desaparecerá.

Nessa dissertação focaremos em campos de calibre não-Abelianos constantes e pertencentes ao grupo $SU(2)$, que é um dos grupos mais importantes na física, uma vez que descreve a rotação de spin $1/2$.

3.2.2 Gerando potenciais de calibre não-Abelianos

A idéia de se gerar potenciais geométricos não-Abelianos surgiu com o trabalho de Wilczek e Zee. (26) Eles propuseram uma generalização do teorema adiabático para o caso em que o Hamiltoniano do sistema possui um grupo de autoestados que se mantém degenerados (ou quasidegenerados) e bem separados de outros níveis energéticos ao longo do tempo. Essa idéia foi explorada em diversos trabalhos (23) e até mesmo a possibilidade de gerar monopólos magnéticos não-Abelianos foi demonstrada com moléculas diatômicas. Nesta seção mostraremos uma maneira geral para se criar potenciais de calibre não-Abelianos e, em seguida, apresentaremos o *esquema múltipé* que é um método para se implementar campos de calibre $SU(n)$.

Vamos considerar átomos possuindo $N + 1$ níveis internos, que são acoplados através de um campo de luz. Assumimos que a interação laser-átomo pode ser escrita utilizando-se o Hamiltoniano

$$H = \left(\frac{p^2}{2M} + V \right) \hat{I} + U \quad (3.20)$$

onde $\hat{I}$ é a matriz identidade e $U(\mathbf{r})$ é uma matriz $(N+1) \times (N+1)$ independente do tempo. Para um $\mathbf{r}$ fixo, podemos diagonalizar $U(\mathbf{r})$ e obter um conjunto de $N+1$ autoestados vestidos $|\chi(\mathbf{r})\rangle$, com autovalores $\epsilon_n(\mathbf{r})$ ($n = 1, \dots, N+1$). Assumimos também que os q primeiros estados formam um subespaço degenerado $\mathcal{E}_q$ e estão bem separados dos demais estados.

O estado atômico, que descreve tanto os graus de liberdade internos como os espaciais, pode ser escrito como $|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^{N+1} a_n(\mathbf{r})|\chi_n(\mathbf{r})\rangle$, seguindo a idéia do que já apresentamos na anteriormente. Supondo então que o sistema é inicialmente preparado em $\mathcal{E}_q$ e desprezando transições para estados fora deste subespaço, projetamos a equação de Schrodinger completa em $\mathcal{E}_q$ e obtemos para o vetor coluna reduzido $\tilde{\Psi} = (a_1, \dots, a_q)^T$ a equação

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi} = \left[\frac{(\mathbf{P} - \mathbf{A})^2}{2M} + V\hat{I}_q + \epsilon + W \right] \tilde{\Psi} \quad (3.21)$$

onde $\hat{I}_q$ é a matriz identidade em $\mathcal{E}_q$ e $\epsilon(\mathbf{r})$ é uma matriz diagonal de autoenergias $\epsilon_n(\mathbf{r})$ ($n = 1, \dots, q$). $\mathbf{A}$ e W são matrizes $q \times q$ cujos elementos são

$$\mathbf{A}_{n,m} = i\hbar \langle \chi_n(\mathbf{r}) | \nabla \chi_m(\mathbf{r}) \rangle \quad (3.22)$$

$$W_{n,m} = \frac{1}{2M} \sum_{l=q+1}^{N+1} \mathbf{A}_{n,l} \cdot \mathbf{A}_{l,m}, \quad (3.23)$$

com $n, m \in (1, \dots, q)$. O potencial vetor efetivo $\mathbf{A}$ é chamado de conexão de Mead-Berry e, para $q \geq 2$, existe a possibilidade de se gerar potenciais não-Abelianos.

3.2.2.1 O esquema múltipé

Um método genérico para se obter um subespaço degenerado nas interações laser-átomo é através da configuração apresentada na figura (). Temos um único nível que chamamos de $|e\rangle$ acoplado com N níveis $|g_j\rangle$ ($j = 1, \dots, N$), com frequências de Rabi κ_j . A matriz de acoplamento laser-átomo é

$$U = \sum_{j=1}^N \frac{\hbar \kappa_j(\mathbf{r})}{2} |e\rangle \langle g_j| + \text{H.c} \quad (3.24)$$

Figura 3.2 – A configuração multipé. Um estado atômico $|e\rangle$ é acoplado a N diferentes estados $|g_j\rangle$ ($j = 1, \dots, N$) através de N feixes de laser ressonantes com frequências κ_j

Fonte DALIBARD et al. (23)

e pode ser reescrita como

$$U = \frac{\hbar\kappa(\mathbf{r})}{2}(|e\rangle\langle B(\mathbf{r})| + |B(\mathbf{r})\rangle\langle e|) \quad (3.25)$$

onde $|B\rangle = \sum_{j=1}^N \kappa_j^* |g_j\rangle / \kappa$ é chamado de “bright state” e κ é a frequência de Rabi total $\kappa^2 = \sum_{j=1}^N |\kappa_j|^2$.

Diagonalizando então U teremos dois autoestados que surgem devido ao acoplamento de $|B\rangle$ e $|e\rangle$, e são dados por $|\pm\rangle = (|e\rangle \pm |B\rangle) / \sqrt{2}$ com energias $\pm \hbar\kappa/2$. Nos resta então um subespaço formado por $N - 1$ autoestados de U , conhecidos como “dark states”, cuja energia associada é $\epsilon = 0$. Dessa forma, conseguimos gerar o subespaço $\mathcal{E}_q$ com $q = N - 1$, necessário para produzir potenciais não-Abelianos, conforme discutimos anteriormente.

O esquema multipé é capaz de gerar potenciais não-Abelianos $SU(N)$. Em particular, utilizaremos o chamado *esquema tripé* que gera potenciais $SU(2)$, como os propostos para a geração de monopólos magnéticos, conforme pode ser visto em (27).

CAPÍTULO 4

Efeito de um potencial de calibre não-Abeliano na junção Josephson bosônica

Nos capítulos anteriores revisamos o conteúdo necessário tanto para o entendimento da Junção Josephson Bosônica, como para a geração de campos de calibre artificiais em átomos neutros. Iremos agora mesclar estes dois conhecimentos a fim de estudar um sistema mais complexo.

Neste trabalho nós consideramos inicialmente um sistema constituído por um condensado bosônico em uma rede com N sítios, com seus átomos separados em dois níveis Zeeman distintos, criando assim um grau de liberdade equivalente a um *sabor* na teoria não-Abeliana e que só pode assumir dois valores. Distinguiremos as partículas, e seus operadores bosônicos, pertencentes a cada *sabor* nomeando-as a e b . Com essa notação a similaridade deste sistema com uma Junção Josephson Bosônica de duas espécies fica muito mais clara.

Utilizando o *esquema tripé*, apresentado no Capítulo 3, geramos um campo de calibre artificial, não-abeliano e constante. Este campo permite que os átomos do condensado possam transitar entre os dois níveis Zeeman ao mesmo tempo que tunelam entre os sítios da rede. Criamos assim um sistema com um comportamento dinâmico rico e parâmetros facilmente controláveis em laboratório, que pode ser utilizado para estudar sistemas de muitos corpos, transições de fases e até mesmo dinâmica caótica.

Neste capítulo iremos apresentar o modelo que utilizamos para o nosso estudo e mostraremos como o nosso problema pode ser mapeado em um problema livre da presença de um campo de calibre. Após isso, buscaremos soluções estacionárias do sistema e analisaremos as diferenças que decorrem unicamente da presença de um campo de calibre no sistema.

4.1 Modelo

O modelo que utilizamos em nosso trabalho é construído a partir do modelo de Bose-Hubbard para duas espécies em uma rede óptica com N sítios. Separamos o Hamiltoniano em duas partes, uma contendo os termos de interação do sistema definida como

$$\hat{H}_I \equiv \sum_{k=1}^N \left(\frac{U^{aa}}{2} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - 1) + \frac{U^{bb}}{2} \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k (\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k - 1) + U^{ab} \hat{b}_k^\dagger \hat{a}_k^\dagger \hat{b}_k \hat{a}_k \right) \quad (4.1)$$

e a outra com os termos cinéticos dada por

$$\hat{H}_J \equiv - \sum_{k,j} \begin{pmatrix} \hat{a}_k^\dagger & \hat{b}_k^\dagger \end{pmatrix} J_{kj} \begin{pmatrix} \hat{a}_j \\ \hat{b}_j \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

onde o operador de *hopping* J_{kj} é

$$J_{kj} = \delta_{\langle kj \rangle} J e^{-i(\mathbf{A}_j \cdot \mathbf{r}_j - \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{r}_k)}. \quad (4.3)$$

e $\delta_{\langle kj \rangle}$ é a função delta para primeiros vizinhos. Dessa forma escrevemos o Hamiltoniano completo como $\hat{H} = \hat{H}_I + \hat{H}_J$. Escolhemos um campo de calibre constante com a seguinte forma

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma} + f(\mathbf{r})\mathbf{I}, \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma} + g(\mathbf{r})\mathbf{I}, 0). \quad (4.4)$$

que é a forma mais geral possível de um campo gerado com o *esquema tripé*. Por simplicidade consideraremos $\hbar = 1$ ao longo de todo o capítulo.

4.1.1 Eliminando o campo de calibre

A partir da Eq. (4.2) definimos um vetor coluna, em função dos operadores de aniquilação, dado por

$$\Psi_k = \begin{pmatrix} \hat{a}_k \\ \hat{b}_k \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

e $\Psi_k^\dagger$ com forma similar, de modo que $\Psi_k^\dagger \Psi_k = \hat{n}_k^a + \hat{n}_k^b$. Reescrevemos então $\hat{n}_k^a$ e $\hat{n}_k^b$ em termos de Ψ_k e $\Psi_k^\dagger$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}\hat{n}_k^a &= \frac{1}{2} \left(\Psi_k^\dagger \Psi_k + \Psi_k^\dagger \sigma_z \Psi_k \right) \\ \hat{n}_k^b &= \frac{1}{2} \left(\Psi_k^\dagger \Psi_k - \Psi_k^\dagger \sigma_z \Psi_k \right)\end{aligned}$$

onde σ_z é a matriz de Pauli dada por

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

A partir disso definimos dois operadores

$$\hat{\Omega}_\pm \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{I} \pm \sigma_z) \quad (4.7)$$

com $\mathbf{I}$ sendo a matriz identidade. Note que estes operadores obedecem a seguinte propriedade

$$\Psi_k^\dagger (\hat{\Omega}_+ + \hat{\Omega}_-) \Psi_k = \Psi_k^\dagger \Psi_k. \quad (4.8)$$

Com isso reescrevemos o Hamiltoniano completo $\hat{H} = \hat{H}_I + \hat{H}_J$ como

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_{k=1}^N \left[\frac{U^{aa}}{2} \Psi_k^\dagger \hat{\Omega}_+ \Psi_k (\Psi_k^\dagger \hat{\Omega}_+ \Psi_k - 1) + \frac{U^{bb}}{2} \Psi_k^\dagger \hat{\Omega}_- \Psi_k (\Psi_k^\dagger \hat{\Omega}_- \Psi_k - 1) \right. \\ &\quad \left. + U^{ab} \left(\Psi_k^\dagger \hat{\Omega}_+ \Psi_k \right) \left(\Psi_k^\dagger \hat{\Omega}_- \Psi_k \right) - \sum_j \Psi_k^\dagger J_{kj} \Psi_j \right].\end{aligned} \quad (4.9)$$

Para o caso unidimensional (eixo x) e assumindo $f(\mathbf{r}) = 0$ e $g(\mathbf{r}) = 0$ na (4.4), podemos escrever o operador (4.3) como $J_{kj} = \delta_{\langle kj \rangle} J e^{-i(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma})(x_j - x_k)} = \delta_{\langle kj \rangle} J e^{i(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma})x_k} e^{-i(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma})x_j}$ pois $[\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}] = 0$. A partir disso, definimos a transformação

$$\Psi_k = e^{i(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma})x_k} \Phi_k \quad (4.10)$$

com

$$\Phi_k = \begin{pmatrix} \hat{c}_k \\ \hat{d}_k \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

onde definimos duas novas quasipartículas c e d que podem ser escritas como combinação das partículas a e b , da representação com o campo de calibre, e vice-versa. Assim, a Eq. (4.10) deixa a (4.2) independent e da forma de J_{kj} . Notemos que $\Psi_k^\dagger \Psi_k = \Phi_k^\dagger \Phi_k$, ou seja, o número de partículas em cada sítio da rede independe da representação utilizada.

Se fizermos $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \hat{\mathbf{n}}$ na transformação (4.10), podemos reescrever a exponencial da

seguinte forma

$$\begin{aligned}
e^{\pm i(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \alpha x_k} &= \left(\sum_n \frac{(\pm i(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \alpha x_k)^{2n}}{(2n)!} + \sum_n \frac{(\pm i(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \alpha x_k)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \mathbf{I} \\
&= \left(\sum_n \frac{(-1)^n (\alpha x_k)^{2n}}{(2n)!} \pm i(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sum_n \frac{(-1)^n (\alpha x_k)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \mathbf{I} \\
&= (\cos(\alpha x_k) \pm i(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin(\alpha x_k)) \mathbf{I}.
\end{aligned}$$

Omitiremos a matriz identidade para os cálculos feitos a seguir. Utilizando a transformação sugerida no Hamiltoniano (4.9) ficaremos com

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \sum_{k=1}^N \left[\frac{U^{aa}}{2} \Phi_k^\dagger \hat{\Gamma}_+ \Phi_k (\Phi_k^\dagger \hat{\Gamma}_+ \Phi_k - 1) + \frac{U^{bb}}{2} \Phi_k^\dagger \hat{\Gamma}_- \Phi_k (\Phi_k^\dagger \hat{\Gamma}_- \Phi_k - 1) \right. \\
&\quad \left. + U^{ab} \left(\Phi_k^\dagger \hat{\Gamma}_+ \Phi_k \right) \left(\Phi_k^\dagger \hat{\Gamma}_- \Phi_k \right) - J \sum_{\langle k,j \rangle} \Phi_k^\dagger \Phi_j \right]
\end{aligned} \tag{4.12}$$

onde definimos os operadores $\Gamma_\pm$ com a seguinte forma

$$\begin{aligned}
\Gamma_\pm &= e^{-i\alpha(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) x_k} \hat{\Omega}_\pm e^{i\alpha(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) x_k} \\
&= \frac{1}{2} [\cos(\alpha x_k) - i(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin(\alpha x_k)] \\
&\quad \times (\mathbf{I} \pm \sigma_z) [\cos(\alpha x_k) + i(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin(\alpha x_k)] \\
&= \frac{1}{2} \left\{ [\cos^2(\alpha x_k) + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 \sin^2(\alpha x_k)] \pm \sigma_z \cos^2(\alpha x_k) \right. \\
&\quad \left. \pm (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sigma_z (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin^2(\alpha x_k) \right\} \\
&= \pm i [\sigma_z (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sigma_z] \sin(\alpha x_k) \cos(\alpha x_k).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Podemos simplificar a (4.13) se utilizarmos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 &= 1 \\
(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sigma_z (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) &= (\sigma_z + [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \sigma_z] (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})) \\
\sigma_z (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sigma_z &= -[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \sigma_z]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

de forma que ficamos com

$$\begin{aligned}
\Gamma_\pm &= e^{-i\alpha(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) x_k} \hat{\Omega}_\pm e^{i\alpha(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) x_k} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} \pm \sigma_z) \\
&\quad \mp \frac{i}{2} [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \sigma_z] \sin(\alpha x_k) [\cos(\alpha x_k) + i(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin(\alpha x_k)] \\
&= \hat{\Omega}_\pm \mp \frac{i}{2} [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \sigma_z] e^{i\alpha(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) x_k} \sin(\alpha x_k).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Se reescrevermos este comutador como um produto misto

$$[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \sigma_z] = 2i(n_y \sigma_x - n_x \sigma_y) = 2i(n_y \hat{\mathbf{e}}_x - n_x \hat{\mathbf{e}}_y) \cdot \boldsymbol{\sigma} = 2i(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{e}}_z) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (4.16)$$

teremos finalmente

$$\Gamma_{\pm} = \hat{\Omega}_{\pm} \pm [(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{e}}_z) \cdot \boldsymbol{\sigma}] e^{i\alpha(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})x_k} \sin(\alpha x_k). \quad (4.17)$$

Assim, para quaisquer valores de U^{aa} , U^{ab} e U^{bb} , no Hamiltoniano (4.9), se $\Gamma_{\pm}$ for igual a $\Omega_{\pm}$ o sistema se comporta como se estivesse livre da influência de um campo de calibre. Isso ocorre se $\alpha = m\pi/x_k$, com $m \in \mathbb{Z}$, ou se $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_z$. Entretanto, podemos escolher valores para os parâmetros de interação em H_I de forma a desprezar o campo de calibre para quaisquer valores de α e $\hat{\mathbf{n}}$. Para verificar isso basta assumir que $U^{aa} = U^{bb} = U$. Dessa forma, a Eq. (4.9) se reduz a

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^N \left[\frac{U}{2} \left((\Psi_k^\dagger \Psi_k)^2 - \Psi_k^\dagger \Psi_k \right) + (U^{ab} - U) \left(\Psi_k^\dagger \hat{\Omega}_+ \Psi_k \right) \left(\Psi_k^\dagger \hat{\Omega}_- \Psi_k \right) - \sum_j \Psi_k^\dagger J_{kj} \Psi_j \right].$$

Escolhendo então $U^{ab} = U$ e utilizando a transformação (4.10), teremos

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{U}{2} \left((\Phi_k^\dagger \Phi_k)^2 - \Phi_k^\dagger \Phi_k \right) - J \sum_{\langle k,j \rangle} \Phi_k^\dagger \Phi_j \right] \quad (4.18)$$

que é matematicamente idêntico ao modelo de Bose-Hubbard para uma nuvem atômica de duas espécies em uma rede com N sítios, livre da presença de um campo de calibre. Apesar desta representação ser limitada ao caso de interações com mesma intensidade U , ela reduz o problema a uma simples transformação no vetor Φ_k , cuja dinâmica já foi amplamente explorada em trabalhos anteriores.

4.1.2 Soluções estacionárias

Podemos utilizar a representação sem o campo de calibre encontrada na seção anterior para analisar uma forma particular do Hamiltoniano (4.9) em que as interações interespecífica e intraespecífica possuem mesma magnitude. Como um exemplo de aplicação, iremos determinar estados estacionários do sistema de uma forma bem simples.

Para isso reescrevemos a Eq. (4.18) em termos dos operadores de criação e aniquilação e consideramos o caso apenas com dois sítios, que chamaremos de L (esquerda) e R (direita). Com isso obtemos, através das equações de Hamilton, quatro equações para os operadores $\hat{c}_k(t)$ e $\hat{d}_k(t)$

$$\begin{aligned} i\dot{\hat{c}}_L &= U(\hat{c}_L^\dagger \hat{c}_L + \hat{d}_L^\dagger \hat{d}_L)\hat{c}_L - J\hat{c}_R \\ i\dot{\hat{c}}_R &= U(\hat{c}_R^\dagger \hat{c}_R + \hat{d}_R^\dagger \hat{d}_R)\hat{c}_R - J\hat{c}_L \\ i\dot{\hat{d}}_L &= U(\hat{c}_L^\dagger \hat{c}_L + \hat{d}_L^\dagger \hat{d}_L)\hat{d}_L - J\hat{d}_R \\ i\dot{\hat{d}}_R &= U(\hat{c}_R^\dagger \hat{c}_R + \hat{d}_R^\dagger \hat{d}_R)\hat{d}_R - J\hat{d}_L \end{aligned} \quad (4.19)$$

Para um grande número de partículas condensadas, que é o nosso caso, podemos usar uma aproximação de campo médio e substituir os operadores por seus autovalores, i.e., $\hat{c}_k = \psi_k^c$ e $\hat{d}_k = \psi_k^d$, onde k é igual a L ou R . A fim de determinar as soluções estacionárias do sistema escrevemos estes autovalores como

$$\begin{pmatrix} \psi_k^c \\ \psi_k^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_k^c e^{-i\mu_c t} \\ \phi_k^d e^{-i\mu_d t} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

e usando a (4.10), voltamos para a representação com o campo de calibre, escrevendo $e^{i(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma})x_k}$ na sua forma matricial

$$\begin{pmatrix} \psi_k^a \\ \psi_k^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha x_k) + in_z \sin(\alpha x_k) & i(n_x - in_y) \sin(\alpha x_k) \\ i(n_x + in_y) \sin(\alpha x_k) & \cos(\alpha x_k) - in_z \sin(\alpha x_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_k^c e^{-i\mu_c t} \\ \phi_k^d e^{-i\mu_d t} \end{pmatrix}$$

onde usamos $\hat{\mathbf{n}} = (n_x, n_y, n_z)$. No caso em que $\mu_d = \mu_c = \mu$ o sistema permanece em um estado estacionário mesmo na representação com o campo de calibre. Para $\mu_c \neq \mu_d$ é possível que isso não seja verdade.

Para determinar a forma dos potenciais químicos, substituímos a (4.20) na Eq. (4.19), obtendo

$$\begin{aligned} \phi_L^c \mu_c &= U(|\phi_L^c|^2 + |\phi_L^d|^2)\phi_L^c - J\phi_R^c \\ \phi_R^c \mu_c &= U(|\phi_R^c|^2 + |\phi_R^d|^2)\phi_R^c - J\phi_L^c \\ \phi_L^d \mu_d &= U(|\phi_L^c|^2 + |\phi_L^d|^2)\phi_L^d - J\phi_R^d \\ \phi_R^d \mu_d &= U(|\phi_R^c|^2 + |\phi_R^d|^2)\phi_R^d - J\phi_L^d. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Podemos assumir que $\phi_k^s = \sqrt{N_k^s} e^{i\theta_k^s}$, onde s é c ou d , seguindo a idéia do que já fizemos no Capítulo 2 para o tratamento clássico do problema. Daí os valores de μ_c e μ_d são facilmente calculados, bastando para isso encontrar os θ_k^s e N_k^s que satisfazem o sistema de equações (4.21).

No Capítulo 2 nós encontramos os pontos de equilíbrio estáveis para o poço duplo simétrico com duas espécies. Podemos evitar cálculos desnecessários se notarmos que esses valores,

no caso em que $U^{aa} = U^{bb} = U^{ab} = U$, satisfazem as Eqs. (4.21).

Por simplicidade consideraremos que a população de espécies distintas é a mesma, ou seja, $N_L^c + N_R^c = N_L^d + N_R^d = N$.

- (i) No primeiro caso temos um ponto de equilíbrio em que a diferença de populações z_s , de ambas as espécies, é nula e a diferença de fase θ_s é um múltiplo inteiro de π . Para simplificar as contas assumiremos $N_L^c = N_L^d = N_R^c = N_R^d = N/2$, $\theta_R^c - \theta_L^c = k\pi$ e $\theta_R^d - \theta_L^d = n\pi$. Assim, as (4.21) se reduzem a

$$\begin{aligned}\mu_c &= NU - (-1)^k J \\ \mu_d &= NU - (-1)^n J\end{aligned}\tag{4.22}$$

e portanto, se k for ímpar e n for par ou vice-versa, teremos $\mu_c \neq \mu_d$. Nesse caso é possível que, na representação com o campo de calibre, não mais estejamos em um estado estacionário. Para verificar isso basta utilizarmos a (4.10)

$$\begin{pmatrix} \psi_L^a \\ \psi_L^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(n_x - in_y) \sin(\alpha) e^{i(\theta_L^d - \mu_d t)} + (\cos(\alpha) + in_z \sin(\alpha)) e^{i(\theta_L^c - \mu_c t)} \\ i(n_x + in_y) \sin(\alpha) e^{i(\theta_L^c - \mu_c t)} + (\cos(\alpha) - in_z \sin(\alpha)) e^{i(\theta_L^d - \mu_d t)} \end{pmatrix} \sqrt{\frac{N}{2}}$$

onde consideramos um poço duplo simétrico, i.e, $-x_L = x_R = 1$ e fizemos $k = 1$ e $n = 0$. Equações idênticas podem ser encontradas para ψ_R^a e ψ_R^b .

Podemos determinar então a diferença de população das partículas a , entre os dois sítios, definida como $z_a = (|\psi_R^a|^2 - |\psi_L^a|^2)/N$. Isso nos dará

$$z_a = 2n_z \sin^2(\alpha) [n_y \sin(\theta_L^c - \theta_L^d + (\mu_d - \mu_c)t) - n_x \cos(\theta_L^c - \theta_L^d + (\mu_d - \mu_c)t)] \tag{4.23}$$

que será diferente de zero caso $n_z \neq 0$ e α não seja múltiplo inteiro de π . Além disso, fica claro que as médias temporais $\langle z_a \rangle_t$ e $\langle z_b \rangle_t$ também poderão ser não nulas. Com a dependência temporal, este é um caso em que não estamos trabalhando com estados estacionários na representação com campo de calibre.

Para o caso em que k e n são simultaneamente ímpares ou pares, teremos $\mu_c = \mu_d$ e a diferença de população entre os dois sítios terá a forma

$$z_a = \sin(2\alpha) [n_y \cos(\theta_L^c - \theta_L^d) + n_x \sin(\theta_L^c - \theta_L^d)] \tag{4.24}$$

que, como esperado, é constante no tempo e não nula se n_x ou n_y forem diferentes de zero e caso 2α não seja múltiplo inteiro de π .

Independente dos valores de k e n , é sempre possível que tenhamos médias temporais $\langle z_s \rangle \neq 0$. Isso é uma das características do fenômeno de *Self-Trapping* que já discutimos no Capítulo 2. Entretanto, devemos notar que agora temos um fenômeno

que é independente das interações atômicas, o que pode ser facilmente verificado fazendo-se $U = 0$ nas Eqs. (4.22).

- (ii) O segundo ponto equilíbrio consiste de uma das configurações estável de *Self-Trapping* do poço duplo simétrico com duas espécies. Nesse caso as soluções com z_x não nulo só existem se k e n forem simultaneamente ímpares de forma que teremos

$$\begin{aligned} N_R^c &= N\sqrt{1 - (J/NU)^2} + N_L^c \\ N_R^d &= -N\sqrt{1 - (J/NU)^2} + N_L^d \end{aligned}$$

que, diferente do caso anterior, não é mais independente de U . Voltando para as Eqs. (4.21) obteremos equações similares as (4.22) mas com $k = n = 1$, implicando em $\mu_c = \mu_d$, ou seja, sempre teremos um estado estacionário mesmo com a presença do campo de calibre. A diferença de população, em sua forma mais geral quando $k = n = 1$, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} z_a &= \frac{1}{N} \left[(\sqrt{N_L^d N_L^c} + \sqrt{N_R^d N_R^c}) \sin(2\alpha) (n_y \cos(\theta_L^c - \theta_L^d) + n_x \sin(\theta_L^c - \theta_L^d)) \right. \\ &\quad + \sin^2(\alpha) \left((N_R^d - N_L^d)(n_x^2 + n_y^2) + (N_R^c - N_L^c)n_z^2 \right. \\ &\quad \left. \left. - 2(\sqrt{N_L^d N_L^c} - \sqrt{N_R^d N_R^c})n_z(n_x \cos(\theta_L^c - \theta_L^d) - n_y \sin(\theta_L^c - \theta_L^d)) \right) \right. \\ &\quad \left. + (N_R^d - N_L^d) \cos^2(\alpha) \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

basta substituírmos os valores de N_R^c e N_R^d nesta equação para encontrarmos a dependência de z_a com U e J .

O método utilizado nesta seção é elegante e capaz de dar algumas noções sobre o comportamento do sistema quando submetido ao campo de calibre não-abeliano sem exigir cálculos muito longos. Um estudo qualitativo da dinâmica do sistema pode ser feito utilizando-se a mesma análise clássica de estabilidade que apresentamos no Capítulo 2, porém isto foge do escopo desta dissertação.

Para visualizarmos os resultados discutidos anteriormente, fizemos simulações para o caso em que $U = 0$ partindo da equação (4.9). As figuras (4.1(a)) e (4.1(b)) mostram o comportamento similar ao Self-Trapping que surge em ambas as espécies devido à presença do campo de calibre artificial. Este efeito ocorre devido ao fato das populações das espécies a e b variarem no tempo como podemos ver nas figuras (4.2(a)) e (4.2(b)), se isso não ocorresse teríamos apenas oscilações harmônicas (ou nenhuma oscilação), de maneira

Figura 4.1 – As figuras abaixo mostram o efeito de desbalancamento das populações z_a e z_b com a presença de um campo de calibre não-Abeliano. (a) Vemos a evolução temporal das diferenças de população z_a (vermelho) e z_b (azul) com média não nula, de forma similar ao MQST. (b) O espaço de fase mostra as órbitas para as duas espécies. Vemos que ambas as espécies apresentam oscilações anarmônicas centradas em $z > 0$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

similar ao caso em que não há campo de calibre aplicado no sistema.

Figura 4.2 – Evolução temporal da população total das partículas N_a e N_b . A população inicial é de 10^4 para ambas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

CAPÍTULO 5

Conclusão e perspectivas

Nesta dissertação nós exploramos os efeitos dinâmicos que um campo de calibre não-Abeliano produz em uma junção Josephson bosônica unidimensional. Devemos ressaltar que este sistema ainda não foi muito explorado em seu aspecto dinâmico, mas já se compreende o papel que os campos de calibre artificiais podem ter em uma transição de fase. (28)

Também é possível utilizar o tratamento clássico apresentado no Capítulo 2 porém, os novos acoplamentos que surgem no sistema de equações tornam inviável reduzi-lo a um sistema de quatro equações, de forma que é necessário trabalhar com um sistema não linear e acoplado de oito equações. Se por um lado o trabalho numérico pode ser simples, uma abordagem analítica do sistema torna-se muito mais complicada e, por conta disso, optamos por deixar este tipo de análise para posteriori.

Com relação aos resultados obtidos neste trabalho, destaca-se o efeito similar ao *Macroscopic Quantum Self-Trapping* que surge devido a variação das populações em níveis Zeeman distintos. O grande diferencial deste novo efeito é o fato deste ser independente da presença das interações interespecífica e intraespecífica que, em geral, são responsáveis por uma vasta gama de fenômenos interessantes nos sistemas bosônicos. É possível, utilizando abordagem similar, explorar os casos bidimensionais e tridimensionais, que possivelmente podem levar a novas configurações estacionárias e talvez a uma dinâmica ainda mais complexa. Optamos entretanto por utilizar uma abordagem mais fundamental, uma vez que o trabalho já apresenta resultados inéditos na literatura especializada.

Finalmente, uma possível extensão deste trabalho pode ser feita incluindo-se novos termos no campo de calibre aplicado como, por exemplo, incluir uma dependência com a posição dos sítios ou uma dependência com a densidade de população.

REFERÊNCIAS

- 1 JAVANAINEN, J. Oscillatory exchange of atoms between traps containing Bose condensates. *Physical Review Letters*, v. 57, n. 25, p. 3164-3166, 1986.
- 2 BOSE, S. N. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Zeitschrift fur Physik*, v. 26, n. 1, p. 178-181, 1924.
- 3 EINSTEIN, A. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases (Zweite Abhandlung). *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 1925.
- 4 STRELTISOV, A.; ALON, O.; CEDERBAUM, L. General variational many-body theory with complete self-consistency for trapped bosonic systems. *Physical Review A*, v. 73, n. 6, p. 063626, 2006.
- 5 MASIELLO, D.; MCKAGAN, S.; REINHARDT, W. Multiconfigurational hartreefock theory for identical bosons in a double well. *Physical Review A*, v. 72, n. 6, p. 063624, 2005.
- 6 GATI, R.; OBERTHALER, M. K. A bosonic Josephson junction. *Journal of Physics B: atomic, molecular and optical physics*, v. 40, n. 10, p. R61, 2007.
- 7 PÉREZ-GARCÍA, V.; MICHINEL, H.; CIRAC, J.; LEWENSTEIN, M.; ZOLLER, P. Dynamics of Bose-Einstein condensates: variational solutions of the Gross-Pitaevskii equations. *Physical Review A*, v. 56, n. 2, p. 1424–1432, 1997.
- 8 SMERZI, A.; FANTONI, S.; GIOVANAZZI, S.; SHENOY, S. Quantum coherent atomic tunneling between two trapped Bose-Einstein condensates. *Physical Review Letters*, v. 79, n. 25, p. 4950–4953, 1997.
- 9 SACCHETTI, A. Stationary solutions to the multi-dimensional Gross-Pitaevskii equation with double-well potential. *Nonlinearity*, v. 27, n. 11, p. 2643, 2014.
- 10 MILBURN, G. J.; CORNEY, J.; WRIGHT, E. M.; WALLS, D. F. Quantum dynamics of an atomic Bose-Einstein condensate in a double-well potential. *Physical Review A*, v. 55, n. 6, p. 4318–4324, 1997.
- 11 GATI, R.; ALBIEZ, M.; FÖLLING, J.; HEMMERLING, B.; OBERTHALER, M. Realization of a single Josephson junction for Bose-Einstein condensates. *Applied Physics B*, v. 82, n. 2, p. 207–210, 2006.

- 12 ALBIEZ, M.; GATI, R.; FÖLLING, J.; HUNSMANN, S.; CRISTIANI, M.; OBERTHALER, M. Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic Josephson junction. *Physical Review Letters*, v. 95, n. 1, p. 010402, 2005.
- 13 QIU, H.; TIAN, J.; FU, L.-B. Collective dynamics of two-species Bose-Einstein condensate mixtures in a double-well potential. *Physical Review A*, v. 81, n. 4, p. 043613, 2010.
- 14 FANG, J.; HAI, W.; CHONG, G.; XIE, Q. Chaotic Josephson effects in two-coupled Bose-Einstein condensates. *Physica A: statistical mechanics and its applications*, v.349, n. 1, p. 133–142, 2005.
- 15 NAETHER, U.; GARCÍA-RIPOLL, J. J.; MAZO, J. J.; ZUECO, D. Quantum chaos in an ultrastrongly coupled bosonic junction. *Physical Review Letters*, v. 112, n. 7, p. 074101, 2014.
- 16 SATIJA, I.; BALAKRISHNAN, R.; NAUDUS, P.; HEWARD, J.; EDWARDS, M.; CLARK, C. Symmetry-breaking and symmetry-restoring dynamics of a mixture of Bose-Einstein condensates in a double well. *Physical Review A*, v. 79, n. 3, p. 033616, 2009.
- 17 FEYNMAN, R. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 21, n. 6-7, p. 467–488, 1982.
- 18 LEWENSTEIN, M.; SANPERA, A.; AHUFINGER, V. *Ultracold atoms in optical lattices*. Oxford: Oxford University Press, 2012.
- 19 COOPER, N. Rapidly rotating atomic gases. *Advances in Physics*, 2009. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/0810.4398>>. Acesso em: 06 dez. 2014.
- 20 POPP, M.; PAREDES, B.; CIRAC, J. I. Adiabatic path to fractional quantum hall states of a few bosonic atoms. *Physical Review A*, v. 70, n. 5, p. 053612, 2004.
- 21 COOPER, N. R.; WILKIN, N. K.; GUNN, J. M. F. Quantum phases of vortices in rotating Bose-Einstein condensates. *Physical Review Letters*, v. 87, n. 12, p. 120405, 2001.
- 22 WILKIN, N. K.; GUNN, J. M. F. Condensation of “composite bosons” in a rotating BEC. *Physical Review Letters*, v. 84, n. 1, p. 6–9, 2000.
- 23 DALIBARD, J.; GERBIER, F.; JUZELIUNAS, G.; ÖHBERG, P. Colloquium: artificial gauge potentials for neutral atoms. *Reviews of Modern Physics*, v. 83, n. 4, p. 1523–1543, 2011.
- 24 BERRY, M. V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London A: mathematical, physical and engineering sciences*, v. 392, n. 1802, p. 45–57, 1984.

-
- 25 JULIÁ-DÍAZ, B.; DAGNINO, D.; GÜNTER, K. J.; GRAß, T.; BARBERÁN, N.; LEWENSTEIN, M.; DALIBARD, J. Strongly correlated states of a small cold-atom cloud from geometric gauge fields. *Physical Review A*, v. 84, n. 5, p. 053605, 2011.
- 26 WILCZEK, F.; ZEE, A. Appearance of gauge structure in simple dynamical systems. *Physical Review Letters*, v. 52, n. 24, p. 2111–2114, 1984.
- 27 RUSECKAS, J.; JUZELIUNAS, G.; ÖHBERG, P.; FLEISCHHAUER, M. Non-abelian gauge potentials for ultracold atoms with degenerate dark states. *Physical Review Letters*, v. 95, n. 1, p. 010404, 2005.
- 28 GRAß, T.; SAHA, K.; SENGUPTA, K.; LEWENSTEIN, M. Quantum phase transition of ultracold bosons in the presence of a non-abelian synthetic gauge field. *Physical Review A*, v. 84, n. 5, p. 053632, 2011.

APÊNDICE A

Estados Coerentes

Em mecânica quântica, podemos considerar um oscilador harmônico quântico qualquer sistema que esteja sob a ação de um potencial do tipo $V = kx^2/2$. O Hamiltoniano desse sistema é dado por:

$$H = \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + \frac{P^2}{2m}. \quad (\text{A.1})$$

Podemos usar a representação de segunda quantização e trabalhar com esse sistema na base de Fock em que os auto-estados são determinados pelo operador número. Nessa representação consideramos os operadores de criação e aniquilação, $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$, e dessa forma $X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ e $P = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2i}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$. O Hamiltoniano pode então ser reescrito como:

$$H = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.2})$$

A relação de incerteza de Heisenberg $\Delta X \Delta P \geq 2$ é obedecida por qualquer estado do oscilador, e no caso do estado fundamental ela é mínima:

$$\Delta X = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad (\text{A.3})$$

e

$$\Delta P = \sqrt{\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \quad (\text{A.4})$$

Portanto $\Delta X \Delta P = \hbar/2$ fazendo do estado fundamental um estado de mínima incerteza. Quando o oscilador se encontra em qualquer outro auto-estado além do fundamental, a relação de incerteza já não é mais mínima.

Podemos sugerir um estado dado por $|\alpha\rangle$, com a seguinte forma:

$$|\alpha\rangle = N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (\text{A.5})$$

onde α é um número complexo, n é o n -ésimo autoestado do oscilador harmônico. N é uma constante de normalização que pode ser determinada se fizermos

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = N^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = 1 \quad (\text{A.6})$$

que nos leva a

$$N = e^{-|\alpha|^2/2}. \quad (\text{A.7})$$

Analisando algumas propriedades desse estado, podemos constatar o seguinte comportamento ao aplicar o operador de aniquilação $\hat{a}$:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \left[\frac{\alpha^0}{\sqrt{0!}} \hat{a}|0\rangle + \frac{\alpha^1}{\sqrt{1!}} \hat{a}|1\rangle + \dots \right] \quad (\text{A.8})$$

o primeiro termo do somatório se anula dado que $\hat{a}$ é aplicado ao estado fundamental $|0\rangle$. Assim o somatório se torna:

$$\left[\frac{\alpha^1}{\sqrt{1!}} \sqrt{1}|0\rangle + \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}} \sqrt{2}|1\rangle + \frac{\alpha^3}{\sqrt{3!}} \sqrt{3}|2\rangle \dots \right]. \quad (\text{A.9})$$

Vendo que $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n!}} = \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}}$ e colocando α em evidência, concluímos que $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. Portanto esse estado α que definimos é auto-estado do operador de aniquilação $\hat{a}$ com auto-valor α e é conhecido como *estado coerente*.

Essa idéia de estados coerentes em sua primeira formulação buscava estabelecer uma conexão entre a mecânica quântica e a mecânica clássica tentando produzir um estado quântico que possuísse características clássicas.

No caso do oscilador harmônico simples, um estado coerente realmente apresenta comportamento dinâmico clássico, sendo representado no espaço de fase por uma distribuição Gaussiana que não se dispersa com a evolução temporal. Dessa forma o estado coerente evolui sob a dinâmica do oscilador exatamente como um estado clássico faria.

Esse conceito teve grande repercussão na ótica quântica em que os campos eletromagnéticos de lasers não são muito bem representados pela base de Fock. Os estados desses campos são auto-estados do operador de aniquilação e portanto uma base formada pelos estados coerentes, apesar de não ser ortogonal, é completa e ideal para representar esse tipo de campo.