UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Petrus Henrique Ribeiro dos Anjos

**Espectro de Excitação Para Modelos de Teorias
Quânticas de campo na Rede:
Modelos Puramente Fermiônicos e Modelos de Cromodinâmica
Quântica**

SÃO CARLOS

2008

Petrus Henrique Ribeiro dos Anjos

**Espectro de Excitação Para Modelos de Teorias
Quânticas de campo na Rede:
Modelos Puramente Fermiônicos e Modelos de Cromodinâmica
Quântica**

*Tese apresentada ao Programa de Pós-
Graduação do Instituto de Física de São
Carlos da Universidade de São Paulo, para
obtenção do Título de Doutor em Ciências*

*Área de Concentração: Física Básica
Orientador: Prof. Dr. Paulo Afonso Faria da
Veiga*

SÃO CARLOS

2008

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação IFSC/USP.

Anjos, Petrus Henrique Ribeiro dos.

Espectro de excitação para Modelos de Teorias Quânticas de campo na Rede: Modelos puramente fermiônicos e modelos de Cromodinâmica Quântica./ Petrus Henrique Ribeiro dos Anjos; orientador Paulo Afonso Faria da Veiga.–São Carlos, 2008.

203 p.

Tese (Doutorado em Ciências - Área de Concentração: Física Básica)
- Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo.

1. Espectro de Excitação. 2. Modelo de Quatro-Férmions 3. Modelo de QCD 4.Estados Ligados 5.Pentaquarks 6.Equação de Bethe-Salpeter. I. Título.

IFSC UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO
Instituto de Física de São Carlos

Caixa Postal 369
13560-970 São Carlos, SP
Av. Trabalhador São-carlense, 400
13566-590 - São Carlos, SP

Fone/Fax: (16) 3373. 9777
www.ifsc.usp.br
svposgrad@ifsc.usp.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Petrus Henrique Ribeiro dos Anjos

Tese apresentada ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências. Área de Concentração: Física Básica.

Aprovado em: 19/12/2008

Comissão Julgadora

Prof. Dr. Paulo Afonso faria da Veiga

Instituição: ICMC/USP

Assinatura

Prof. Dr. João Carlos Alves Barata

Instituição: IF/USP

Assinatura

Prof. Dr. Attilio Cucchieri

Instituição: IFSC/USP

Assinatura

Prof. Dr. Pedro Paulo de Magalhães Rios

Instituição: ICMC/USP

Assinatura

Prof. Dr. Gastão de Almeida Braga

Instituição: UFMG

Assinatura

À vida, ao universo e tudo mais.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Eu sou uma pessoa de sorte. Esta tese é o resultado de uma jornada que começou muito antes de ter sua primeira linha escrita. O caminho percorrido para realiza-la começou antes mesmo da primeira vez que entrei em um instituto de física. Nesta jornada, me perdi diversas vezes até que alguém me indicou o caminho. Neste caminho, tropecei diversas vezes, em muitas delas cai. Quando cai alguém me estendeu a mão e me levantou. Muitas vezes pensei caminhar sozinho e pensei em parar até sentir a mão de um companheiro em meu ombro e ouvir suas palavras que me fizeram seguir em frente. Por vezes, encontrei estradas que acreditava não terem saída. Por vezes, encontrei rios que julguei não poder atravessar. Por vezes, me encontrei no fundo de um abismo sem nenhuma corda para me tirar dali. Em todas estas vezes, alguém me encontrou e me ajudou. Muitas pessoas me ajudaram nesta jornada, muitas pessoas caminharam comigo, muitas pessoas me ampararam quando precisei. Foi um caminho longo e sem dúvida é uma lista grande de grandes pessoas. Eu sou uma pessoa de sorte.

Como toda jornada tem um início, eu começo por agradecer as pessoas que me prepararam para ela. Especialmente, gostaria de agradecer aos meus pais pela saudade que sentiram, pelos telefonemas semanais e tudo mais. Junto a eles agradeço a toda minha família pelo carinho e atenção que me dispensaram.

Devo agradecer aos funcionários e professores do Instituto de Física de São Carlos que conviveram comigo por 10 anos e me ajudaram a suplantar incontáveis problemas. Com eles vivi minha graduação, meu mestrado e meu doutorado, e por isso agradeço a todos. Nestes mesmos 10 anos, minhas horas na universidade em grande parte foram passadas no Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação.

Ali realizei minha iniciação científica, com orientação do Prof. Daniel Levcovitz, ao qual dedico sinceros agradecimentos, os quais estendo aos funcionários e professores do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. Olhando para trás, só penso que estes 10 anos não foram suficientemente longos.

Agradeço também a amizade e o carinho dos vários amigos que fiz durante os anos de dedicados a este trabalho. Ao Paulo Alexandre de Castro pela ajuda com os problemas que os computadores me deram, com a burocracia da universidade e pelas outras tantas discussões úteis e (principalmente) inúteis. Ao Bernardo Paschoarelli, pelas horas que conversamos sobre matemática e ciências. Ao Lucas Céleri, por todos os problemas físicos que discutimos. E a todos os amigos que acompanharam a execução deste trabalho.

O esforço para percorrer este caminho certamente não foi só meu. Às pessoas que deram seu tempo e energia a realização desta tese, eu dou o meu muito obrigado. Ao Prof. Luiz Agostinho, sem o qual eu não teria os meios para me dedicar a este trabalho. Ao Antônio Francisco Neto pela colaboração e amizade. Ao Prof. Michael O'Carroll pelo entusiasmo, pela dedicação e por todas as várias idéias. Ao Prof. Paulo da Veiga, meu orientador, por me mostrar o caminho todas as vezes que me perdi.

Umas poucas linhas nunca serão suficientes para expressar nossa gratidão a algumas pessoas especiais. Se eu pudesse, dedicaria todas as linhas para agradecer à Thais, a minha Thais, por ter transformado os dias bons em dias ótimos e por ter me feito esquecer o que são dias ruins.

Para ser justo, eu deveria agradecer a todos que me ajudaram de alguma forma. No entanto, o espaço para tanto é diminuto e minha memória é falha, e como disse, a lista é longa. Assim, se você foi alguém que me ajudou no caminho para realizar este trabalho, deixo meus sinceros agradecimentos, mesmo que seu nome tenha escapado a minha lista.

Resumo

Nesta tese obtemos, de um ponto de vista matematicamente rigoroso, a parte inferior do espectro de energia-momento de dois modelos de teorias quânticas de campo com tempo imaginário em redes de dimensão $d + 1$ (resultados explícitos para o caso $d = 3$ e matrizes de Dirac) que contém férmions: um modelo puramente fermiônico com interação quártica nos campos fermiônicos de N componentes (modelo de Quatro-Férmions) e um modelo de cromodinâmica quântica. Para o modelo de Quatro-Férmions, κ é o parâmetro de hopping, M_0 é a massa bare dos férmions e λ é o parâmetro de interação. Uma expansão de polímeros garante a existência das funções de correlação no limite termodinâmico, na região onde $|\frac{\kappa}{M_0}|$ é pequeno. A análise do espectro é baseada em representações espectrais para funções de correlação de dois e quatro férmions. A análise das funções de correlação adequadas é simplificada pelo uso de simetrias, em particular, de uma *nova* simetria de Reflexão Temporal que aparece no nível das funções de correlação. A determinação do espectro é executada através de um estudo detalhado das taxas de decaimento das funções de correlação. Até próximo ao limiar de três partículas, o espectro de energia e momento exibe curvas de dispersão isoladas que são identificadas com partículas e estados ligados de duas partículas. No subespaço de uma partícula, o espectro consiste em uma curva de dispersão isolada. A massa da partícula é de ordem $-\ln \kappa$. O espectro de duas partículas aparece como soluções de uma equação de Bethe-Salpeter, resolvida primeiro em uma aproximação em escada. O espectro de duas partículas contém uma banda de duas partículas livres de largura finita. A existência de estados ligados acima ou abaixo da banda de duas partículas depende do fato do modelo apresentar ou não dominação gaussiana. Um parâmetro $\aleph$ é dado para medir a dominação gaussiana. Para $\aleph = 0$, nenhum estado ligado ocorre. Para $\aleph > 0$, o estado ligado ocorre abaixo da banda de duas partículas. Para $\aleph < 0$, o estado ligado aparecem acima desta banda. Os resultados obtidos nesta aproximação em escada podem ser estendidos para o modelo completo através

de um controle rigoroso das contribuições que diferenciam essas duas situações. Em uma segunda parte, idéias análogas são aplicadas para analisar o espectro do modelo de cromodinâmica quântica. Em particular, nós mostramos a existência dos pentaquarks no regime de acoplamento forte (acoplamento entre as plaquetas $0 < \beta = \frac{1}{g_0^2} \ll \kappa$). O modelo possui simetria de calibre $SU(3)_c$ e de sabor $SU(2)_f$. Os pentaquark revelados são superposições de estados ligados de mésons e bárions. Apenas estados com um número ímpar de férmions e abaixo do limiar de energia meson-bárion são considerados. O pentaquark é determinado usando uma aproximação em escada para uma equação Bethe-Salpeter. Na ordem dominante em β , a massa deste estado é aproximadamente $-5 \ln \kappa$ e sua energia de ligação é de ordem $O(\kappa^2)$. O estado mais fortemente ligado tem isospin $I = \frac{1}{2}$. Para $I = \frac{5}{2}$ não há estados ligados. Estes resultados mostram uma dependência nos spins dos méson e bárion. Esta análise mostra que um potencial de troca de quark-anti-quark de $O(\kappa^2)$ é a interação dominante, mas não há uma interpretação de troca de mésons.

Palavras-Chave: *Espectro de Excitação, Modelo de Quatro-Férmions, Modelo de QCD, Estados Ligados, Pentaquark, Equação de Bethe-Salpeter.*

Abstract

In this thesis, we obtain, from a mathematically rigorous point of view, the low-lying energy-momentum spectrum of two $3 + 1$ dimensional imaginary time lattice quantum field theory with fermion fields (we give explicit results for the case $d = 3$ and Dirac matrices): a pure fermionic model with quartic interaction in the N -component fermion field and a quantum chromodynamics model. For the Four-Fermion model, κ denotes the hopping parameter, M_0 the fermion bare mass and λ the interaction parameter. A polymer expansion shows the existence of the model correlation functions in the thermodynamic limit, in the region where $|\frac{\kappa}{M_0}|$ is small enough. The analysis of the spectrum is based on spectral representations of two- and four- point correlation functions. The analysis of such adequate correlation functions is simplified by the help of symmetries, in particular, by a *new* Time Reflection symmetry, which appears in the level of correlation functions. The exact determination of the spectrum is done using a detailed study of the decay rates of the correlations. Up to near the 3 particle threshold, the energy-momentum spectrum exhibits isolated dispersion curves that are identified as particles and bound states. In the one-particle subspace, the spectrum consists in just a isolated dispersion curve. The mass of the associated particle is of order $-\ln \kappa$. The two-particle spectrum shows up as solutions of a Bethe-Salpeter equation, which is solved first in a ladder approximation. The two-particle spectrum contains a two free particles band of finite width. The existence of bound states above or below the band depends on whether the model Gaussian domination holds. A parameter $\aleph$ is given to measure the Gaussian domination. For $\aleph = 0$, no bound state occurs. For $\aleph > 0$, a bound state appears below the two-particles band. For $\aleph < 0$, the bound state appears above this band. The result obtained in this ladder approximation can be extended to the full model by a rigorous control of the contributions that differ these two cases. In a second part, analog ideas are applied to analyze the spectrum of a quantum chromodynamics model. In particular, we show the existence of pentaquarks

in the strong coupling regime (plaquette coupling $0 < \beta = \frac{1}{g_0^2} \ll \kappa$). The model has a $SU(3)_c$ gauge symmetry and a $SU(2)_f$ flavor symmetry. The revealed pentaquarks are superpositions of meson-baryon bound states. Only states with an odd number of fermions and below the meson-baryon threshold are considered. The pentaquarks are determined using a ladder approximation to the Bethe-Salpeter equation. In the dominant order in β , the bound state mass is $\approx -5 \ln \kappa$ and the binding energy is of order $O(\kappa^2)$. The most strongly bounded bound state has isospin $I = \frac{1}{2}$. For $I = \frac{5}{2}$, there is no bound state. These results show a dependence in the spins of the meson and baryon. This analysis shows that a $O(\kappa^2)$ quark-anti-quark exchange potential is the dominant interaction, although there is not a meson exchange interpretation.

Keywords: *Excitation Spectrum, Four-Fermion Model, QCD Model, Bound States, Pentaquark, Bethe-Salpeter Equation.*

Sumário

0	Introdução e Organização	15
I	Modelos Puramente Fermiônicos	19
1	Preliminares	21
1.1	Introdução e Resultados	21
1.2	Positividade Física	32
1.2.1	Conseqüências da Positividade de Osterwalder-Schrader	37
1.3	Limite Termodinâmico	39
1.3.1	Polímeros e o modelo de Quatro Fermions	41
1.3.2	Convergência da Energia Livre	44
1.4	Funções de Correlação e Representações Espectrais	46
1.5	Simetrias	54
2	Espectro de Uma Partícula	61
2.1	Decaimento e Analiticidade da Função de Dois-Pontos	62
2.2	Massa e curva de dispersão de uma partícula	71
3	O Espectro de Duas Partículas	79
3.1	Operadores de Schrödinger para Dois Corpos	80
3.2	Equação de Bethe-Salpeter	84
3.2.1	Decaimento do Núcleo de Bethe-Salpeter	88
3.2.2	O Espectro de duas partículas na Aproximação em Escada	93
3.3	Da Aproximação em Escada ao Modelo Completo	102
3.3.1	Existência dos Estados Ligados	102

3.3.2	Ausência do Espectro de Massa	109
4	Modelo de Quatro-Férmions: Considerações Finais	121
II	Modelos de Cromodinâmica Quântica na Rede	125
1	Pentaquarks na Rede	127
1.1	Introdução e Resultados	127
1.2	O modelo da cromodinâmica quântica na rede	134
1.3	Pentaquarks: estados ligados méson-bárion	144
1.3.1	Detecção de estados ligados méson-bárion: Aproximação em Es- cada para a Equação de Bethe Salpeter	145
1.3.2	Estados ligados méson-bárion	153
2	QCD na Rede: Considerações Finais	155
	Referências	157
A	Polímeros e Funções de Correlação	163
B	Eq. de Bethe-Salpeter e Coord. Relativas na Rede	167
C	Pentaquark: Decaimentos e Derivadas	171
C.1	Correlações e desacoplamento de hiperplanos.	171
C.2	Propriedades de Decaimento do Núcleo de Bethe-Salpeter	176
C.3	Aproximação em Escada	177
D	Pentaquark: Análise dos Potenciais	183
D.1	Potenciais Dependentes da Energia	186
D.1.1	Pontos Coincidentes	186
D.1.2	Potencial Distância temporal 1.	190
D.2	Potencial de Troca	193
E	Permanentes e Determinantes de Matrizes-(0,1)	199
E.1	Matrizes-(0,1) e Grafos Bipartidos	200
E.2	Identities para Permanentes e Determinantes	200

Capítulo 0

Introdução e Organização

A determinação das propriedades espectrais de qualquer teoria de campos é um dos problemas centrais da física. Nesta tese, obtemos, de um ponto de vista matematicamente rigoroso, a parte inferior do espectro de energia-momento de dois modelos de teorias quânticas de campo com tempo imaginário em redes de dimensão $d + 1$ que contém férmions: um modelo puramente fermiônico e um modelo de cromodinâmica quântica.

Nossa escolha do espaço-tempo euclidiano é devida ao fato de que até o momento esta é a única formulação da teoria quântica de campos que é matematicamente justificada e o teorema de reconstrução de Osterwalder-Schrader garante uma maneira de recuperarmos a teoria de campos com as propriedades físicas desejáveis em espaço de Minkowski quando as propriedades equivalentes valerem no caso euclidiano.

Para obtermos o espectro dos modelos de teoria quântica de campos tratados aqui, nós exploramos a correspondência entre a teoria quântica de campos no espaço tempo euclidiano e a mecânica estatística, dois dos campos de maior interesse da física. Do ponto de vista matemático, ambas as teorias podem ser formuladas como teorias de medida em espaços de variáveis aleatórias, i.e. espaços de processos aleatórios generalizados. A grosso modo, esta construção começa por considerar medidas definidas em espaços de dimensão (in)finita (com cutoff). A Física está interessada nas propriedades da medida no limite de dimensão infinita (sem cutoff). Neste contexto os casos limites de maior interesse são o limite ultravioleta (ou do continuum) e o limite infravermelho (ou limite termodinâmico). Tais limites muitas vezes se mostram objetos difíceis de

serem construídos, e dificuldades também emergem quando tentamos estabelecer as propriedades satisfeitas pelas medidas resultantes destes limites e pelas suas funções de correlação. Nesta tese, nós nos restringiremos a modelos definidos na rede de forma que o problema do limite ultravioleta não nos interessa. Nós tratamos o problema do limite infravermelho com o uso das chamadas expansões em polímeros, o que nós permite construir as medidas no limite termodinâmico.

Nossa análise do espectro é baseada na obtenção de representações espectrais para funções de correlação de dois e quatro pontos, um requerimento fundamental que muitas vezes é negligenciado em outros tratamentos. Nossa análise das funções de correlação adequadas é simplificado pelo uso extensivo de várias simetrias dos modelos. Em particular, mostramos que uma *nova* simetria de Reflexão Temporal que aparece no nível das funções de correlação é bastante útil para esta tarefa. A determinação do espectro é executada através de um estudo detalhado das taxas de decaimento das funções de correlação. Nossa análise mostra que até próximo ao limiar de três partículas, o espectro de energia e momento, dos modelos tratados aqui, exhibe curvas de dispersão isoladas que são identificadas com partículas e estados ligados de duas partículas.

Nesta tese, o tratamento do espectro de duas partículas é feito pelo uso de uma equação de Bethe-Salpeter. As representações espectrais obtidas para as funções de correlação nos permitem associar as soluções desta equação de Bethe-Salpeter aos pontos no espectro de energia-momento. Em um primeiro momento esta equação de Bethe-Salpeter é resolvida em uma aproximação em escada. O nome desta aproximação emerge do fato que nela apenas grafos de Feynman do tipo escada são considerados. Em cada um dos modelos tratados aqui, nossa análise revela que o espectro de massa de duas partículas contém uma banda de duas partículas livres de largura finita e pontos isolados correspondentes às massas de estados ligados.

Na Parte I, tratamos a formulação integral funcional de um modelo puramente fermiônico com interação quártica nos campos de fermions de N componentes e tempo imaginário, chamado modelo de Quatro-Férmions. Os resultados exibidos aqui correspondem aos nossos resultados exibidos nas Refs. ANJOS E VEIGA [2007, 2008a]. O modelo de Quatro-Férmions é tratado em detalhes, e as idéias desenvolvidas para ele serão aproveitadas para a segunda parte do trabalho. A Parte I da tese, referente ao modelo de Quatro-Férmions, está dividida em 4 capítulos. O primeiro capítulo trata

de tópicos preliminares necessários para a determinação do espectro do modelo. É no Capítulo 1 que descrevemos o modelo. Ainda no Capítulo 1, nós tratamos o problema do limite termodinâmico e mostramos como as funções de correlação do modelo permitem construir uma teoria quântica de campos com tempo imaginário. Continuando no Capítulo 1, nós exibimos representações espectrais para funções de correlação de dois e quatro pontos e também discutimos as simetrias do modelo. No Capítulo 2, tratamos o espectro de uma partícula. No Capítulo 3, tratamos o espectro de duas partículas. A equação de Bethe-Salpter que usamos para determinar os estados ligados de duas partículas é resolvida primeiro na aproximação em escada. Os resultados obtidos nesta aproximação em escada podem ser estendidos para o modelo completo através de um controle rigoroso das contribuições que diferenciam essas duas situações. O Capítulo 4 é destinado a algumas considerações finais para o modelo de Quatro-Férmions. Os resultados principais em cada um destes capítulos está destacado e indicado na forma de proposições, as demonstrações destas proposições, em geral, também se encontram destacadas. Os principais resultados usados nestas demonstrações estão indicados na forma de lemas. Com o objetivo de tornar o texto mais auto-consistente, resultados matemáticos gerais e observações relevantes foram inseridas na forma de notas de rodapé. Outras observações importantes estão destacadas e indicadas na forma de Notas. Aspectos técnicos desta Parte I, que poderiam comprometer a fluidez textual, foram acomodados nos apêndices A e B.

Na Parte II, idéias análogas são aplicadas para analisar o espectro do modelo de cromodinâmica quântica de $3 + 1$ dimensões, com tempo imaginário e simetria de calibre $SU(3)_c$ e de sabor $SU(2)_f$, no regime de acoplamento forte. Em particular, nós mostramos a existência de pentaquarks, i.e. estados ligados de cinco quarks. Os resultados desta parte da tese correspondem aos resultados exibidos nas Refs. VEIGA ET AL. [2008a,b]. A Parte II é dividida em 2 capítulos. No capítulo 1, descrevemos o modelo de cromodinâmica quântica utilizado e determinamos os estados ligados de pentaquarks. Aspectos técnicos desta Parte II, que poderiam comprometer a fluidez do texto, foram acomodados nos apêndices C e D. No Apêndice E, nos apresentamos identidades de permanentes e determinantes de matrizes- $(0,1)$, que são utilizado na Parte II para obter relações importantes entre as funções de correlações. Este resultado corresponde a nossa Ref. ANJOS E VEIGA [2008b].

Parte I

Modelos Puramente Fermiônicos

Capítulo 1

Preliminares

“Don’t Panic!”

Douglas Noel Adams

1.1 Introdução e Resultados

A existência de teorias quânticas de campo e a determinação de suas propriedades espectrais despontam como problemas fundamentais na física. Nesta parte da tese, nós obtemos o espectro de energia-momento do modelo de Quatro Fermions, uma teoria quântica de campos com campos fermiônicos com N -componentes em uma rede de $d+1$ dimensões, com uma auto-interação quártica invariante pelo grupo $U(N)$. Visto que este é um modelo puramente fermiônico, e levando-se em consideração que campos de férmions são descritos por operadores limitados, nota-se que este modelo se encontra em uma posição especial para o uso de técnicas perturbativas e não-perturbativas na busca de um controle rigoroso de algumas de suas propriedades, de forma que os resultados possam ir além de algumas simples ordens de perturbação, como por exemplo o feito nas Refs. FELDMAN ET AL. [1985, 1986], GAWEDZKI E KUPIAINEN [1985].

Dois pontos dão a dimensão do interesse neste modelo. Por um lado, este

modelo, mesmo que em algum sentido possa ser apontado como meramente acadêmico, possui uma física muito rica e apresenta um comportamento não-trivial. Entre suas características, relembramos que, em $d = 2$ e $N \geq 2$, este é o aclamado modelo de Gross-Neveu (veja a Ref. GROSS E NEVEU [1974]), e sabe-se que ele é renormalizável e assintoticamente livre no regime ultravioleta. Note ainda que para $N > 1$; este modelo apresenta quebra dinâmica de simetria com geração de massa (veja a Ref. GROSS E NEVEU [1974]) e transmutação dimensional (como mostrado na Ref. KOPPER, MAGNEN E RIVASSEAU [1995]). A completeza assintótica, outro resultado importante, foi verificado até o limiar da região de duas partículas (como visto na Ref. IAGOLNITZER E MAGNEN [1987]). Por outro lado, este modelo se mostra suficientemente simples a ponto de ser, em princípio, acessível a técnicas analíticas (veja exemplos disto nas Refs. ANDREI E LOWENSTEIN [1979], DASHEN, HASSLACHER E NEVEU [1974]). Em vista disto, este modelo tem sido usado como um “laboratório teórico” para o teste de propriedades de modelos de teorias de quânticas campos mais complexas, como a cromodinâmica quântica (veja por exemplo a Ref. THIES E URLICH [2005]). Mais ainda, sua importância ultrapassa a área de teoria de campos, exercendo um papel importante na descrição de outros fenômenos físicos relevantes como por exemplo a supercondutividade (como visto na Ref. OHSAKU [2004] para se citar um exemplo).

Neste trabalho, nós analisamos o espectro desta teoria de campos puramente fermiônica de um ponto de vista não-perturbativo. A estratégia geral para esta empreitada segue a estrutura introduzida e estabelecida nas Refs. ANJOS, VEIGA E O’CARROLL [2005], VEIGA ET AL. [2001], SCHOR E O’CARROLL [2000a,b, 2002], VEIGA, O’CARROLL E SCHOR [2003a,b, 2004], no contexto dos modelos de spins, da cromodinâmica quântica e do modelo de Ginzburg-Landau estocástico, todos definidos na rede.

O primeiro passo neste processo, consiste em regularizar a teoria através da introdução de *cutoffs*¹, para se estudar em seguida as propriedades no limite onde

¹A grosso modo em física, chama-se *cutoff* os valores máximos ou mínimos de valores como a energia, distância e momento entre outros, de forma que objetos como valores maiores (ou menores) que essas quantidades físicas sejam ignorados. Por exemplo, o *cutoff* infravermelho (ou *cutoff* de grandes distâncias) é o menor valor positivo de energia (e portanto, de maneira equivalente, o maior comprimento de onda) considerado. De outro lado, o *cutoff* ultravioleta (ou de distâncias curtas) é o maior valor permitido para a energia (novamente, ou o menor comprimento de onda). Quando alguma quantidade física é dada por integrais das energias ou alguma outra quantidade física, tais *cutoffs* impõe os limites de integração. A rigor os *cutoffs* descritos acima são os chamados *cutoffs sharp*, e de maneira mais geral um *cutoff* é uma suavização ou regularização imposto ao argumento das integrais.

os *cutoffs* são removidos. (In)felizmente a introdução dos *cutoffs* usualmente destrói algumas das simetrias dos modelos, sendo necessária a recuperação destas simetrias no processo de remoção dos *cutoffs*. O uso de redes regulares, ao invés do espaço contínuo, é vantajoso nesse aspecto por preservar a positividade da métrica do espaço de Hilbert (bem como a invariância de calibre em modelos de cromodinâmica quântica; veja a Ref. WILSON [1974]). Em contra partida, na rede perdemos a invariância por rotações contínuas, tendo somente rotações discretas de $\frac{\pi}{2}$ e π .

Nós trabalharemos em uma rede hipercúbica de dimensão $d+1$, e espaçamento fixo 1, denotada por

$$\Lambda \subset \mathbb{Z}_o^{d+1} \equiv \mathbb{Z}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{Z}^d \quad (\mathbb{Z}_{\frac{1}{2}} = \{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \dots\}, d \geq 1).$$

Por razões técnicas (veja nota abaixo) tomamos Λ simétrica em relação ao eixo da coordenada 0, ao qual chamaremos de eixo do tempo, com nenhum ponto de Λ neste eixo. Desta forma, um ponto arbitrário $x \in \Lambda$ é da forma $x = (x^0, \dots, x^d)$, com

$$x^0 \in \{(n + \frac{1}{2}) | n \in \mathbb{Z}, |(n + \frac{1}{2})| < L_0\}, \quad \vec{x} \in \mathbb{Z}^d,$$

onde $x^i \in \{n | n \in \mathbb{Z}, |n| < L_i\}, i = 1, \dots, d$. Os valores L_i determinam o tamanho de Λ . Denotaremos Λ_∞ para a rede infinita, $L_\mu \rightarrow \infty, \mu = 0, \dots, d$. Denotaremos por e^μ o versor da μ -ésima direção. Aos pares ordenados $(x, x + e^\mu)$ de pontos da rede chamamos de elos diretos e dizemos que o elo $(x, x + e^\mu)$ está na rede Λ se x e $x + e^\mu$ são pontos da rede Λ .

Nota I.1.a *Campos bosônicos euclidianos em tempo zero (i.e. com coordenada $x^0 = 0$) podem ser naturalmente identificados com os seus campos relativísticos correspondentes em tempo zero. Contudo, no caso fermiônico o mesmo não é verdade. Enquanto os cam-*

Em alguns casos, estes *cutoffs* estão relacionados com a resolução do aparato experimental envolvido no estudo do problema ou com as dimensões do sistema estudado (que quase nunca é infinito), por exemplo no caso dos *cutoffs* infravermelhos e ultravioleta, podemos associá-los ao maior e ao menor comprimento de onda visível pelo olho humano. Em geral, essas situações implicam em problemas de fronteira (como nos casos onde os sistemas estudados são finitos) que são difíceis de serem tratados. Nestes casos os físicos estão interessados nos valores limites onde os *cutoff* são removidos, por exemplo no caso dos *cutoffs sharp* com os valores máximos e mínimos indo para infinito ou zero. Contudo, este processo limite pode resultar em integrais divergentes, de forma que, nestes casos os *cutoffs* são imprescindíveis. A dependência de uma quantidade no *cutoff* escolhido é o foco principal de estudo da teoria do grupo de renormalização.

pos definidos neste trabalho ($\psi_{\alpha a}(0, \vec{x})$ e $\bar{\psi}_{\alpha a}(0, \vec{x})$) sempre anticomutam, o mesmo não pode ser dito de seus equivalentes relativísticos², de forma que não podemos acomodar os limites temporais dos campos fermiônicos. No caso do contínuo, geralmente é apontado que este não é um problema real, uma vez que campos fermiônicos euclidianos são extremamente singulares para existirem em pequenos intervalos de tempo. Claramente, este argumento perde o efeito em teorias definidas na rede. Assim, para contornar este problema, nós definimos a rede de forma que esta não tenha pontos com $x^0 = 0$.

Afim de definir campos fermiônicos na rede Λ , nós introduzimos uma álgebra de Grassmann, cujos geradores são $\bar{\psi}_{\alpha}(x)$ e $\psi_{\alpha}(x)$, onde $\alpha = 1, \dots, s$ (s = graus de liberdade de spin) e $x \in \Lambda$. Mais precisamente, a cada ponto $x \in \Lambda$ associamos um espaço vetorial complexo V_x , que pode ser decomposto em uma soma direta $V_x = V_x^1 \oplus V_x^2$, cada um dos quais sendo s -dimensional. Em V_x^1 , tomamos uma base denotada por $\bar{\psi}_{\alpha}(x)$, $\alpha = 1, \dots, s$, já em V_x^2 tomamos uma base denotada por $\psi_{\alpha}(x)$, $\alpha = 1, \dots, s$. Em modelos fermiônicos com graus de liberdade internos (como o modelo de Quatro-Férmions tratado aqui), V_x^i , $i = 1, 2$ é tomado como o produto tensorial $V_x^i = (V_x^i)_{spin} \otimes (V_x^i)_{int}$, onde $(V_x^i)_{int}$ são os graus de liberdade internos, possivelmente relacionados a simetrias internas locais ou globais, e $N = \dim(V_x^i)_{int}$. Com isto, tomamos, como base para V_x^1 , os vetores $\bar{\psi}_{\alpha a}(x)$, $\alpha = 1, \dots, s$ e $a = 1, \dots, N$ e procedemos de maneira análoga para V_x^2 . Denotamos por $\mathcal{A}_{\Lambda}$ a álgebra de Grassmann sobre o espaço vetorial $V_{\Lambda} = \oplus_{x \in \Lambda} V_x$.

A ação euclideana para o modelo com fermions livres é dada por

$$S_{\Lambda}^F(\bar{\psi}, \psi) = \frac{\kappa}{2} \sum_{\substack{x, \alpha, \beta \\ a, \epsilon, \mu}} \bar{\psi}_{\alpha, a}(x) \Upsilon_{\alpha\beta}^{\epsilon e^{\mu}} \psi_{\beta, a}(x + \epsilon e^{\mu}) - M(\bar{m}, \kappa) \sum_{x, \alpha, a} \bar{\psi}_{\alpha, a}(x) \psi_{\alpha, a}(x). \quad (\text{I.1.1.1})$$

onde temos $M(\bar{m}, \kappa) = (\bar{m} + 2\kappa)$. Por simplicidade, para $\kappa \geq 0$ fixo, tomamos, sem perda de generalidade, $\bar{m}$ tal que $M(\bar{m}, \kappa)$ é igual a uma constante positiva M_0 . Temos também as matrizes de spin $\Upsilon^{\pm e^{\mu}} = -I \pm \gamma^{\mu}$, onde γ^{μ} ($\mu = 0, \dots, d$) satisfazem a álgebra de anticomutação $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\delta_{\mu\nu}$. Afim de obtermos alguns resultados explícitos será necessário em alguns pontos fixarmos a dimensão d do espaço e o conjunto de matrizes γ_{μ} 's. Nestes casos, usamos $d + 1 = 3$ e γ^{μ} como sendo as matrizes hermitianas e de

²De fato, um campo fermiônico relativístico ψ_1 apenas anticomuta com um campo fermiônico ψ_2 , quando ψ_2 está no cone de luz de ψ_1 .

traço nulo de Pauli

$$\gamma^0 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

ou alternativamente tomaremos $d + 1 = 4$ e usaremos para γ_μ as matrizes de Dirac, um conjunto de matrizes hermitianas 4×4 , anticomutantes e de traço nulo, explicitamente

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^j \\ -i\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.1.2})$$

onde I_2 é a matriz identidade 2×2 e σ^j , $j = 1, 2, 3$, são as matrizes de Pauli acima. Na ação livre, dada na Eq. (I.1.1.1), termos envolvendo pontos não contidos em Λ são ignorados nas somas do lado direito da Eq. (I.1.1.1) (condições de contorno livres). O parâmetro κ é denominado parâmetro de acoplamento³ e $\bar{m}$ é a massa *bare* (ou massa nua) dos férmions. A princípio, estes parâmetros podem assumir qualquer valor real incluindo zero, contudo como veremos nas seções seguintes, nós precisamos restringir κ a valores não-negativos afim de mostrar a positividade física do modelo, de outro lado o limite termodinâmico não pode ser construído para $\bar{m} = 0$ ou para todo κ arbitrariamente grande. Por fim notaremos também que a condição $\bar{m} > 0$ garante que a curva de dispersão de energia-momento para uma partícula fermiônica livre seja monotonicamente crescente com os momentos. A Eq. (I.1.1.1) é claramente uma versão na rede da expressão formal no contínuo

$$S^F(\bar{\psi}, \psi) = \int \bar{\psi}(x)(M_0 - \kappa \gamma^\mu \partial_\mu) \psi(x) d^4x,$$

na expressão acima os graus de liberdade interno e de spin foram suprimidos.

³Em inglês o parâmetro κ é chamado de *hopping parameter*, enquanto o termo acoplamento (*coupling*) é usado para descrever o parâmetro de interação entre os campos. Aqui usamos o termo acoplamento afim de remeter a idéia de que estamos “acoplando” campos em dois pontos distintos. A palavra inglesa *hopping* é um adjetivo usado para descrever a propriedade de se ir de um lugar ou situação para outra de características similares. Talvez a escolha feita aqui tenha sido infeliz, por gerar confusão com a denominação inglesa mais difundida, no entanto outras designações, como por exemplo transmissão, também teriam problemas.

Agora incluiremos a interação mais simples possível entre férmions,

$$S_{\Lambda}^I(\bar{\psi}, \psi) = -\frac{\lambda}{N} \sum_x \left(\sum_{\alpha, a} \bar{\psi}_{\alpha, a}(x) \psi_{\alpha, a}(x) \right)^2. \quad (\text{I.1.1.3})$$

A equação acima descreve uma interação local (i.e. onde a interação ocorre em um mesmo ponto do espaço-tempo) entre quatro campos fermiônicos. Interações deste tipo são comuns na teoria quântica de campos. Entre alguns exemplos, temos o modelo de Gross-Neveu e suas variantes (dadas por exemplo pela presença da simetria quiral), o modelo de Thirring (onde a interação entre os campos fermiônicos é dada pelo acoplamento vetorial $(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)(\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi)$) e o modelo de Nambu-Jona-Lasinio (onde a interação é dada por $(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\psi) - (\bar{\psi}\gamma^5\psi)(\bar{\psi}\gamma^5\psi)$). Interações de quatro férmions também aparecem em outros contextos, como na teoria de Fermi para as interações fracas, no modelo de Hubbard e também no líquido de Luttinger. Mais ainda, lembramos que na teoria *Bardeen-Cooper-Schrieffer* da supercondutividade, após as integrações nos fótons, observamos que a interações entre os elétrons renormalizados ocorre via o termo de contato, e portanto pode ser descrita por interações análogas a interação acima (veja a Ref. OHSAKU [2004]).

Com a interação proposta pela Eq. (I.1.1.3), a ação total é dada por

$$\begin{aligned} S(\bar{\psi}, \psi) = & \sum_{\substack{x, \alpha, \beta \\ a, \epsilon, \mu}} \frac{\kappa}{2} \bar{\psi}_{\alpha, a}(x) \Upsilon_{\alpha\beta}^{\epsilon e^{\mu}} \psi_{\beta, a}(x + \epsilon e^{\mu}) - M_0 \sum_{x, \alpha, a} \bar{\psi}_{\alpha, a}(x) \psi_{\alpha, a}(x) \\ & - \frac{\lambda}{N} \sum_x \left(\sum_{\alpha, a} \bar{\psi}_{\alpha, a}(x) \psi_{\alpha, a}(x) \right)^2, \end{aligned} \quad (\text{I.1.1.4})$$

onde $\bar{\psi}_{\alpha, a}(x) \psi_{\beta, b}(y)$ são variáveis de Grassmann, $x \in \Lambda$ é um ponto da rede, $\alpha, \beta \in \mathcal{S} = \{1, 2, \dots, s\}$ são índices de spin, $a, b \in \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ denotam índices de sabor ou isospin (que usaremos como a simetria interna), $\epsilon = \pm 1$ e $\mu = 0, \dots, d$. Lembramos que e^{μ} é o vetor unitário de $\mathbb{Z}^{d+1}$ apontado na direção μ no sentido positivo. Nos referiremos ao sistema definido por esta ação como modelo de Quatro-Férmions na rede euclideana.

As chamadas integrais fermiônicas de Berezin (veja a Ref. BEREZIN [1976] para detalhes), nos permitem definir um funcional linear em $\mathcal{A}_{\Lambda}$, com o qual construiremos

uma medida de probabilidade. Mais explicitamente temos

$$\int \bigwedge_{\alpha a} (\bar{\psi}_{\alpha a}(x) \wedge \psi_{\alpha a}(x)) \bigwedge_{\alpha a} d\bar{\psi}_{\alpha a}(x) d\psi_{\alpha a}(x) = 1$$

e

$$\int (\text{monômios em } \bar{\psi}_{\alpha a}(x) \text{ e } \psi_{\alpha a}(x) \text{ de grau não maximal}) \bigwedge_{\alpha a} d\bar{\psi}_{\alpha a}(x) d\psi_{\alpha a}(x) = 0,$$

onde o símbolo $\wedge$ denota produto exterior e será suprimido no que se segue. A definição da integral acima pode ser estendida para toda a álgebra $\mathcal{A}_\Lambda$ por linearidade.

Usando as integrais fermiônicas acima, definimos os valores esperados normalizados para uma função arbitrária dos campos e anti-campos,

$$\langle F(\bar{\psi}, \psi) \rangle_\Lambda = \frac{1}{Z_\Lambda} \int F(\bar{\psi}, \psi) e^{-S(\bar{\psi}, \psi)} \prod_{x, \alpha, a} d\bar{\psi}_{\alpha, a}(x) d\psi_{\alpha, a}(x), \quad (\text{I.1.1.5})$$

onde

$$Z_\Lambda = \int e^{-S(\bar{\psi}, \psi)} \prod_{x, \alpha, a} d\bar{\psi}_{\alpha, a}(x) d\psi_{\alpha, a}(x). \quad (\text{I.1.1.6})$$

As técnicas de expansão em polímeros, nos permitem demonstrar, como feito na Seção I.1.3, a existência do limite termodinâmico, i.e. o limite $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}_o^{d+1} = \mathbb{Z}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{Z}^d$ e $|\frac{\kappa}{M_0}|$ suficientemente pequeno. Mais precisamente, mostramos que, no limite da rede com volume infinito, as funções de correlação resultantes, denotadas $\langle \cdot \rangle$, são bem comportadas, invariantes por translações da rede e conjuntamente analíticas nos parâmetros κ e λ e $|\frac{\kappa}{M_0}|$ suficientemente pequeno. Como consequência deste resultado temos que, as funções de correlação truncadas tem decaimento exponencial em árvore, com taxa de decaimento de pelo menos $-(1 - \varepsilon)|\ln(const \cdot \kappa)|$, onde $\varepsilon \rightarrow 0$ quando $\kappa \rightarrow 0$. No decorrer deste texto, *const* denota um parâmetro positivo independente de κ , uniforme nos parâmetros λ e M_0 .

Na Seção I.1.2 mostramos que para $\kappa \geq 0$ a ação dada pela Eq. (I.1.1.4) satisfaz o axioma de positividade de Osterwalder-Schrader, e portanto as funções de correlação podem ser continuadas analiticamente para uma teoria quântica de campos no espaço de Minkowski (veja as Refs. OSTERWALDER E SCHRADER [1973, 1975]). Em particular, podemos tomar restrições na álgebra $\mathcal{A}_\Lambda$ de forma que as funções de correlação, definidas

na Eq. (I.1.1.5) definem via fórmulas de Feynman-Kac, uma teoria de campos na rede com tempo imaginário discreto associada ao modelo de Quatro-Férmions (como mostrado para outros modelos nas Refs. OSTERWALDER E SCHRADER [1973, 1975], SEILER [1982]). Esta construção nos municia com um espaço de Hilbert (i.e. a um espaço de medida positiva para os estados quânticos) $\mathcal{H}$ cujo produto interno $(F, G)_{\mathcal{H}}$ definido a partir dos valores esperados normalizados (I.1.1.5). Uma consequência imediata desta construção é a caracterização da matriz de transferência T_0 do modelo no limite de volume infinito através do operador de translação temporal dos campos. Com essa construção T_0 é um operador de contração bem definido em $\mathcal{H}$. Analogamente, podemos definir um operador unitário $\vec{T} = (T_1, T_2, \dots, T_d)$ em $\mathcal{H}$ usando os operadores de translação espacial. Com isto, podemos construir operadores auto-adjuntos de energia e momento que comutam entre si, denotados $H \geq 0$ e $\vec{P} = (P_1, P_2, \dots, P_d)$, tais que $T_0 = e^{-H}$ e $T_i = e^{P_i}$, $i = 1, 2, \dots, d$. Assim, pelo teorema espectral, H e $\vec{P}$ podem ser diagonalizados em uma mesma base, de forma que os pontos espectrais de H podem ser escritos como funções dos pontos no espectro de $\vec{P}$.

A vigia mestra de nosso método para a detecção de partículas e estados ligados na região inferior do espectro de energia-momento, consiste em se obter representações espectrais (veja a Ref. REED E SIMON [1972]) apropriadas para as funções de correlação convenientes, no nosso caso funções de correlação de dois e quatro pontos, que permitam relacionar singularidades em valores imaginários de momento com pontos no espectro de energia-momento. Estas representações espectrais podem ser obtidas pelo uso sistemático das fórmulas de Feynman-Kac. É importante deixar claro que sem representações espectrais, a análise das taxas de decaimento das funções de correlação adequadas não leva a identificação de partículas, antipartículas e estados ligados. Os supostos resultados espectrais obtidos em análises que carecem de representação espectral não possuem, em princípio, sentido algum e os valores encontrados podem ter desvios significativos, especialmente nos casos onde simetrias são levemente quebradas e os estados possuam pequenas separações espectrais. O fato é que partículas são curvas de dispersão isoladas no espectro de energia-momento, enquanto as taxas de decaimento podem também estar relacionadas, por exemplo, ao início de bandas espectrais. Portanto é essencial estabelecer representações espectrais. Ainda, é importante destacar que as representações espectrais estabelecidas aqui, dependem

fundamentalmente da existência do limite de volume infinito e portanto, a princípio, elas não podem ser exportadas para análises do modelo em regiões dos parâmetros externas aquelas fornecidas pela expansão em polímeros.

Em relação ao espectro de energia-momento, apenas indicaremos os resultados referentes a partículas, uma vez que o setor de antipartículas pode ser obtido destes resultados através da simetria de conjugação de carga (veja detalhes na Seção I.1.5 e na Ref. ANJOS E VEIGA [2008a]). Na Seção I.2.1, introduziremos o método de desacoplamento de hiperplanos (veja a Ref. SPENCER [1975]), que nos permitirá estudar o decaimento da função de correlação de dois pontos. Seja $\tilde{f}(p) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x)e^{-ipx}$ a transformada da função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, com isto a transformada inversa é dada por $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(p)e^{ipx} dp$. Graças ao teorema de Paley-Wiener⁴ podemos relacionar este decaimento às faixas de analiticidade da transformada de Fourier da função de dois pontos e com isto mostrar a existência de um ponto espectral na região de uma partícula (lacuna espectral inferior), de multiplicidade N , caracterizada por uma curva de dispersão isolada. A massa assintótica de uma partícula (i.e. o inverso do comprimento de correlação) é da ordem $-\ln(const \cdot \kappa)$. Acima do espectro de uma partícula, mostramos a existência de bandas de duas, três ou mais partículas. Estas bandas possuem largura finita (como veremos, da ordem κ), e é possível que estas bandas se superponham quando o número de partículas é grande. A análise do espectro de uma partícula do modelo, também, permite mostrar que não existe nenhum outro ponto no espectro de massa até $-(2 - \varepsilon(\kappa)) \ln(const \cdot \kappa)$, com $\varepsilon(\kappa) > 0$, e $\varepsilon(\kappa) \rightarrow 0$ quando $\kappa \rightarrow 0$. Mais ainda, mostramos que a transformada de Fourier função de correlação de dois pontos é analítica para energias até próximo ao limiar de 3 partículas $-(3 - \varepsilon(\kappa)) \ln(const \cdot \kappa)$. De forma que além da lacuna inferior de massa, também temos a chamada lacuna superior de massa.

Nossa análise da existência de estados ligados, baseia-se numa versão para a rede da equação de Bethe-Salpeter desenvolvida para este modelo. Em um primeiro momento, a análise é conduzida para uma aproximação em escada do operador de Bethe-Salpeter e posteriormente, estendemos o resultado obtido na aproximação em escada, através de um rigoroso controle de perturbações a esta aproximação, para o

⁴**Teorema de Paley-Wiener:** Se a função $h(x)$ é tal que $|h(x)| \leq C(\epsilon)e^{-(a-\epsilon)|x|}$ para todo $\epsilon > 0$, então $\tilde{h}(p) = \sum_x h(x)e^{-ix}$, a transformada de Fourier de $h(x)$, é analítica em $\{p \mid \text{Im } p < a\}$. Reciprocamente, se $\tilde{h}$ restrita a $\{p \mid \text{Im } p < a\}$ é analítica então $|h(x)| \leq C(\epsilon)e^{-(a-\epsilon)|x|}$.

modelo completo. Estes resultados podem ser compreendidos por uma analogia com operadores de Schrödinger. A grosso modo a equação de Bethe-Salpeter corresponde à equação de Schrödinger em $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ na forma resolvente dada por

$$(H - z)^{-1} = (H_0 - z)^{-1} - (H - z)^{-1}V(H_0 - z)^{-1}$$

onde $H_0 \approx -\frac{\kappa}{2}\Delta$, e Δ o laplaciano na rede. O potencial de interação é $V = \lambda\delta + W$, com δ denotando a função delta de Dirac, e $\lambda > 0$, de forma que temos um potencial repulsivo do tipo esfera dura. O termo W é não local, mas possui decaimento exponencial e é da ordem κ^2 . Tomemos $H' = H_0 + \lambda\delta$, a resolvente $(H' - z)^{-1}$ pode ser obtida explicitamente, sendo que seu valor não explode quando $\text{Re } z \rightarrow 0$. Assim, tomando $(H' - z)^{-1}$ como a resolvente não perturbada temos

$$(H' - z)^{-1} = (H_0 - z)^{-1} - (H' - z)^{-1}\delta(H_0 - z)^{-1},$$

e podemos mostrar que $(f, (H - z)^{-1}f)$, $f \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ possui uma representação em série de Neumann, uniformemente convergente, para $\text{Re } z < 0$ para todo f em um subconjunto denso de $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. No caso atrativo, ou seja ($\lambda < 0$), encontramos um ponto espectral isolado correspondente a um auto-valor $z = z_b < 0$ com um raio de isolamento b de forma que a série de Neumann ainda converge para $z_b + b < z < 0$.

Com a análise das propriedades de analiticidade da equação de Bethe-Salpeter, mostramos que a existência de estados ligados de duas partículas próximos a banda de duas partículas é vinculada ao parâmetro

$$\aleph \equiv \frac{1}{2\mathcal{G}_4} - \frac{1}{2\mathcal{G}_2^2},$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2 &= \langle \bar{\psi}_{\alpha a}(x) \psi_{\alpha a}(x) \rangle \big|_{\kappa=0} \\ \mathcal{G}_4 &= \langle \bar{\psi}_{\alpha a}(x) \bar{\psi}_{\beta a}(x) \psi_{\alpha a}(x) \psi_{\beta a}(x) \rangle \big|_{\kappa=0} \end{aligned} \tag{I.1.1.7}$$

Note que quando a interação é “removida” (i.e. fazemos $\lambda = 0$), temos $\aleph = 0$ e o teorema de Wick se aplica de onde não temos estados ligados. Para $\aleph \neq 0$, surge

Figura I.1.1. Espectro de Energia-Momento do Modelo de Quatro-Férmions.

um estado ligado $\frac{sN(sN-1)}{2}$ vezes degenerado. No caso $\aleph > 0$ (que denominamos de *subjugação gaussiana*), o estado ligado se encontra abaixo da banda de duas partículas. Já no caso $\aleph < 0$ (*dominação gaussiana*), o estado ligado ocorre acima da banda de duas partículas. Em ambos os casos, a energia de ligação calculada é de $\mathcal{O}(1)$ (veja Figura I.1.1 e portanto pequena quando comparada a massa da partícula (que é de ordem $|\ln \kappa|$). Uma análise detalhada do decaimento do núcleo de Bethe-Salpeter é o ingrediente chave para a extensão dos resultados obtidos na aproximação em escada para o modelo sem aproximações. A análise do espectro de duas partículas é feita no Capítulo I.3.

Qualitativamente, tais resultados concordam em alto grau com os padrões espectrais obtidos para o modelo de Gross-Neveu em duas dimensões, no caso do contínuo e para $\bar{m} = 0$, por vários métodos, entre os quais as técnicas semi-clássicas no limite de N grande das Refs. ANDREI E LOWENSTEIN [1979], DASHEN, HASSLACHER E NEVEU [1974].

Essa parte da tese é organizada como se segue. Na Seção I.1.2, nós demonstramos a positividade de Osterwalder-Schrader e mostramos como construir uma matriz de transferência autoadjunta. Na Seção I.1.3, nós desenvolvemos uma expansão em polímeros para o modelo e a usamos para demonstrar a existência do limite de volume infinito. Na Seção I.1.4, nós derivamos representações espectrais para funções de correlação de dois- e quatro- pontos adequadas e mostramos que como suas singularidades complexas estão associadas a pontos no espectro de energia-momento. A Seção I.1.5 é dedicada a análise de algumas simetrias do modelo, que são usadas afim de simplificar as funções de correlação, em especial nós apresentamos e usamos uma nova simetria denominada *Reflexão Temporal* que existe no nível de funções de correlação. Os resultados referentes ao espectro de uma partícula estão contidos no Capítulo I.2. Na Seção I.2.1, é analisado o decaimento da função de dois-pontos e a analiticidade de sua transformada de Fourier. No Capítulo I.3, obtemos os estados ligados de duas partículas. Na Seção I.3.1, a correspondência entre o método utilizado e os operadores de Schrödinger na rede é explorada afim de se obter alguma intuição sobre os resultados espectrais. Na Seção I.3.2 o decaimento do núcleo de Bethe-Salpeter é obtido, e este é usado para se determinar uma aproximação em escada, na qual obtemos estados ligados. Na Seção I.3.3 é feita uma análise detalhada do decaimento do núcleo de Bethe-Salpeter e usando essa análise os resultados obtidos na aproximação em escada são validados para o modelo completo. Nossa discussão do modelo de Quatro-Férmions é concluída no Capítulo I.4, onde fazemos uma breve discussão dos resultados apresentados, fazemos conexões destes resultados com os apresentados em outros modelos e apontamos alguns problemas em aberto. Dois apêndices complementam os resultados mostrados na Parte I. No Apêndice A mostramos como estender os resultados obtidos na Seção I.1.3 para demonstrar propriedades de analiticidade das funções de correlação no limite termodinâmico. No Apêndice B escrevemos a equação de Bethe-Salpeter em coordenadas relativas.

1.2 Positividade Física

Nessa Seção, nós mostraremos como usar os valores esperados $\langle \cdot \rangle$, definidos na Seção anterior, para definir um espaço de Hilbert de medida positiva $\mathcal{H}$, o espaço de

estados físicos.

Considere a direção determinada por e^0 em nossa rede. A essa direção damos o nome de “direção temporal”. Na rede Λ , definimos duas subredes

$$\Lambda_+ = \{x \in \Lambda | x^0 > 0\},$$

$$\Lambda_- = \{x \in \Lambda | x^0 < 0\}.$$

Uma vez que a rede Λ é simétrica por reflexões no hiperplano $x^0 = 0$, temos a decomposição natural

$$\Lambda_+ \cup \Lambda_- = \Lambda, \quad \Lambda_+ \cap \Lambda_- = \emptyset.$$

Como feito anteriormente, definimos $\mathcal{A}_{\Lambda_+}$ uma álgebra de Grassmann sobre Λ_+ , analogamente, definimos uma álgebra de Grassmann $\mathcal{A}_{\Lambda_-}$ sobre Λ_- . Com isso podemos definir um mapa anti-linear $\Theta : \mathcal{A}_{\Lambda_+} \rightarrow \mathcal{A}_{\Lambda_-}$. A ação de Θ em $\mathcal{A}_{\Lambda_+}$ é dada por (veja a Figura I.1.2

$$\Theta(zAB + wCD) = \bar{z}\Theta(B)\Theta(A) + \bar{w}\Theta(D)\Theta(C), \quad (\text{I.1.2.1})$$

$$\Theta(\bar{\psi}_{\alpha a}(x)) = \sum_{\beta} \gamma_{\alpha\beta}^0 \psi_{\beta a}(rx), \quad (\text{I.1.2.2})$$

$$\Theta(\psi_{\alpha a}(x)) = \sum_{\beta} \bar{\psi}_{\beta a}(rx) \gamma_{\beta\alpha}^0, \quad (\text{I.1.2.3})$$

onde $r : \Lambda_{\pm} \rightarrow \Lambda_{\mp}$ é dado por $r(x^0, x^1, \dots, x^d) = (-x^0, x^1, \dots, x^d)$. É fácil ver que as equações I.1.2.1 a I.1.2.3 definem Θ de maneira única como um mapeamento anti-linear de $\mathcal{A}_{\Lambda}$ em $\mathcal{A}_{\Lambda}$ (com a propriedade adicional $\Theta|_{\mathcal{A}_{\Lambda_{\pm}}} = \mathcal{A}_{\Lambda_{\mp}}$). Com essa notação podemos formular o resultado principal dessa Seção, dado na proposição a seguir.

Proposição I.1.1 (Positividade de Osterwalder-Schrader) *Para $\langle \cdot \rangle$ definido na Eq. (I.1.1.5), Θ definido acima e $\kappa \geq 0$ e $F \in \mathcal{A}_{\Lambda_+}$, temos*

$$\langle F [\Theta F] \rangle_{\Lambda} \geq 0 \quad (\text{I.1.2.4})$$

Figura I.1.2. A ação do Operador Θ .

Demonstração - Em primeiro lugar, note que fixando $\kappa = 0$ na Eq. (I.1.1.4) temos

$$\langle F\Theta F \rangle_{\Lambda, \kappa=0} = \langle F \rangle_{\Lambda_+, \kappa=0} \langle \Theta F \rangle_{\Lambda_-, \kappa=0} = |\langle F \rangle_{\Lambda_+, \kappa=0}|^2 \geq 0.$$

Tome $c_i \geq 0$, $i \in \mathbb{N}$, é fácil ver que

$$\left\langle \sum_{i=1}^n c_i (F_i \Theta F_i) \right\rangle_{\Lambda, \kappa=0} \geq 0.$$

Por outro lado, observe que a ação, dada na Eq. (I.1.1.4), pode ser decomposta em

$$S = S_{\Lambda_+} + S_{\Lambda_-} + S_M \quad (\text{I.1.2.5})$$

onde S_{Λ_+} (respectivamente S_{Λ_-}) reúne todos os termos que envolvem apenas campos em $\mathcal{A}_{\Lambda_+}$ (respectivamente $\mathcal{A}_{\Lambda_-}$). Em outras palavras $S_{\Lambda_+} \in \mathcal{A}_{\Lambda_+}$ e $S_{\Lambda_-} \in \mathcal{A}_{\Lambda_-}$, os termos restantes, ou seja aqueles que conectam pontos de Λ_+ e Λ_- estão contidos em

$$S_M = \frac{\kappa}{2} \sum_{\vec{x}, l, u, a} \left\{ \bar{\psi}_{\alpha, a}(-\frac{1}{2}, \vec{x}) \Upsilon_{\alpha\beta}^{+e_0} \psi_{\beta, a}(+\frac{1}{2}, \vec{x}) + \bar{\psi}_{\alpha, a}(+\frac{1}{2}, \vec{x}) \Upsilon_{\alpha\beta}^{-e_0} \psi_{\beta, a}(-\frac{1}{2}, \vec{x}) \right\}.$$

Usando

$$\Upsilon^{+e^0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2I \end{pmatrix} \quad e \quad \Upsilon^{-e^0} = \begin{pmatrix} -2I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

S_M pode ser simplificado para

$$S_M = -\kappa \sum_{\vec{x}, l, u, a} \left\{ \bar{\psi}_{l,a}(-\frac{1}{2}, \vec{x}) \psi_{l,a}(\frac{1}{2}, \vec{x}) + \bar{\psi}_{u,a}(\frac{1}{2}, \vec{x}) \psi_{u,a}(-\frac{1}{2}, \vec{x}) \right\},$$

onde temos os índices $u = 1, \dots, \frac{s}{2}$ e $l = \frac{s}{2} + 1, \dots, s$, com s denotando o número de graus de liberdade de spin. Finalmente, com o uso do operador Θ , temos

$$\Theta \bar{\psi}_{l,a}(\frac{1}{2}, \vec{x}) = -\psi_{l,a}(-\frac{1}{2}, \vec{x}) \quad e \quad \Theta \psi_{u,a}(\frac{1}{2}, \vec{x}) = \bar{\psi}_{u,a}(-\frac{1}{2}, \vec{x}).$$

Com isso, temos que S_M pode ser reescrito como

$$S_M = \kappa \sum_{\vec{x}, l, u, a} \left\{ \left(\Theta \psi_{l,a}(\frac{1}{2}, \vec{x}) \right) \psi_{l,a}(\frac{1}{2}, \vec{x}) - \bar{\psi}_{u,a}(\frac{1}{2}, \vec{x}) \left(\Theta \bar{\psi}_{u,a}(\frac{1}{2}, \vec{x}) \right) \right\}.$$

É um exercício algébrico simples, mostrar que

$$\Theta S_{\Lambda_-} = S_{\Lambda_+},$$

e com isto mostrar que

$$e^{\Theta S_{\Lambda_-}} = \Theta e^{S_{\Lambda_+}},$$

e portanto a ação (I.1.1.4) pode ser colocada na forma

$$S = S_{\Lambda_+} + \Theta S_{\Lambda_+} + S_M$$

de onde, temos

$$e^{-S} = e^{-S_{\Lambda_+}} e^{-\Theta S_{\Lambda_+}} e^{-S_M}.$$

Assim, podemos reescrever a equação (I.1.2.4) na forma $\langle (F e^{-S_{\Lambda_+}}) \Theta (F e^{-S_{\Lambda_+}}) e^{-S_M} \rangle_{\Lambda, \kappa=0}$.

Seja $\tilde{F} = F e^{-S_{\Lambda_+}}$. Uma expansão de Taylor de e^{-S_M} em torno de $\kappa = 0$ nos fornece

$$\langle \tilde{F} \Theta \tilde{F} e^{-S_M} \rangle_{\Lambda, \kappa=0} = \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(-1)^c}{c!} \langle \tilde{F} \Theta \tilde{F} S_M^c \rangle_{\Lambda, \kappa=0},$$

de onde temos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{F} \Theta \tilde{F} e^{-S_M} \rangle_{\Lambda, \kappa=0} &= \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{\sum \bar{n} + n = c} \frac{(-\kappa)^c}{\bar{n}! n!} \langle \tilde{F} \Theta \tilde{F} (\sum_{l, \vec{x}, a} \Theta \psi_{la}(\frac{1}{2}, \vec{x}) \psi_{la}(\frac{1}{2}, \vec{x}))^n \\ &\quad \times (-\sum_{u, \vec{y}, b} \bar{\psi}_{ub}(\frac{1}{2}, \vec{y}) \Theta \bar{\psi}_{ub}(\frac{1}{2}, \vec{y}))^{\bar{n}} \rangle_{\Lambda, \kappa=0}. \end{aligned}$$

Aplicando o teorema multinomial⁵, temos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{F} \Theta \tilde{F} e^{-S_M} \rangle_{\Lambda} &= \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{\sum \bar{n} + n = c} \sum^* \sum^{**} \kappa^c (-1)^n \langle \tilde{F} \Theta \tilde{F} \prod_{i=1}^n \Theta \psi_{la}(\frac{1}{2}, \vec{x}) \psi_{la}(\frac{1}{2}, \vec{x}) \\ &\quad \prod_{j=1}^{\bar{n}} \bar{\psi}_{ub}(\frac{1}{2}, \vec{y}) \Theta \bar{\psi}_{ub}(\frac{1}{2}, \vec{y}) \rangle_{\Lambda, \kappa=0}, \end{aligned}$$

onde a soma $\sum^*$ é feita sobre todos as n trincas da forma $(\vec{x}, l, a)$, enquanto a soma $\sum^{**}$ é feita sobre todas as $\bar{n}$ trincas da forma $(\vec{y}, u, b)$. Com isso, reordenado os campos, encontramos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{F} \Theta \tilde{F} e^{-S_M} \rangle_{\Lambda} &= \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{\sum \bar{n} + n = c} \sum^* \sum^{**} \kappa^c \langle \tilde{F} [\Theta \tilde{F}] (\prod_{i=1}^n \psi_{la}(\frac{1}{2}, \vec{x})) (\prod_{j=1}^{\bar{n}} \bar{\psi}_{ub}(\frac{1}{2}, \vec{y})) \\ &\quad \Theta [(\prod_{j=1}^{\bar{n}} \bar{\psi}_{ub}(\frac{1}{2}, \vec{y}))] \rangle_{\Lambda, \kappa=0}. \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{F} \Theta \tilde{F} e^{-S_M} \rangle_{\Lambda} &= \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{\sum \bar{n} + n = c} \sum^* \sum^{**} \kappa^c \langle \tilde{F} (\prod_{i=1}^n \psi_{la}(\frac{1}{2}, \vec{x})) (\prod_{j=1}^{\bar{n}} \bar{\psi}_{ub}(\frac{1}{2}, \vec{y})) \\ &\quad \Theta [\tilde{F} (\prod_{i=1}^n \psi_{la}(\frac{1}{2}, \vec{x})) (\prod_{j=1}^{\bar{n}} \bar{\psi}_{ub}(\frac{1}{2}, \vec{y}))] \rangle_{\Lambda, \kappa=0}. \end{aligned}$$

⁵**Teorema Multinomial** $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\sum_{i=1}^m k_i = n} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$

Portanto para $\kappa \geq 0$, temos $\langle F[\Theta F] \rangle_\Lambda$ é uma soma de termos positivos e portanto $\langle F[\Theta F] \rangle_\Lambda \geq 0$.

□

Nota I.1.b *Seja F um monômio composto de n_F campos e $\bar{n}_F$ anti-campos e assumamos que $n_F \leq \bar{n}_F$. É fácil ver que na demonstração acima*

$$c = (n_F + \bar{n}_F) + 2p,$$

$$\bar{n} = (n_F + \bar{n}_F) + p,$$

$$n = p.$$

Isso implica, por exemplo, que se F contém um número par (respectivamente ímpar) de variáveis de Grassmann então c , o número de “campos introduzidos por derivação” é par (respectivamente ímpar).

1.2.1 Conseqüências da Positividade de Osterwalder-Schrader

Uma conseqüência direta da Proposição I.1.1 é a existência do espaço de Hilbert da mecânica quântica $\mathcal{H}_\Lambda$. Seja $\mathcal{N} = \{F \in \mathcal{A}_{\Lambda+} | \langle F\Theta F \rangle = 0\}$. A álgebra naturalmente definida no espaço quociente (i.e. das classes de equivalência) $\frac{\mathcal{A}_{\Lambda+}}{\mathcal{N}}$ carrega um produto interno definido por $\langle F[\Theta F] \rangle$. O espaço de Hilbert físico $\mathcal{H}_\Lambda$ é definido como sendo $\overline{\left(\frac{\mathcal{A}_{\Lambda+}}{\mathcal{N}}\right)}$, onde o fecho de $\frac{\mathcal{A}_{\Lambda+}}{\mathcal{N}}$ é tomado em relação a topologia induzida pela norma $\|F\|^2 = \langle F\Theta F \rangle$. Essa construção induz naturalmente um mapeamento W de $\mathcal{A}_{\Lambda+}$ em $\mathcal{H}_\Lambda$. Logo, para $F, G \in \mathcal{A}_{\Lambda+}$, temos

$$(WF, WG)_{\mathcal{H}_\Lambda} = \langle F\Theta G \rangle_{\Lambda+}$$

onde $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_\Lambda}$ é o produto escalar em $\mathcal{H}_\Lambda$. É claro que o mapeamento inverso W^{-1} não possui significado, mas por outro lado qualquer $F \in \mathcal{A}_{\Lambda+}$ é da forma $F = G + N$, onde $N \in \mathcal{N}$ e G é ortogonal a $\mathcal{N}$, i.e. $\langle G\Theta G \rangle \neq 0$. Portanto, nós podemos definir $\bar{W}$ inversa de W no subespaço ortogonal a $\mathcal{N}$.

Outra conseqüência imediata da Proposição I.1.1 é a existência de uma matrix de transferência auto-adjunta positiva. No restante desta Seção, mostraremos como

construir essa matriz de transferência e como usá-la para definir um operador hamiltoniano. Analogamente mostraremos como definir operadores de momento, partindo dos operadores de translação espacial.

Vamos assumir que seja possível construir o limite de volume infinito (construiremos esse limite na Seção 1.3). Denotemos por $\tilde{T}F$ a função $F \in \mathcal{A}_+$ transladada em 2 unidades na direção espacial positiva (aqui escolhemos uma translação de duas unidades, pois não somos capazes de construir uma matriz de transferência positiva com translações de uma unidade, veja também a Nota I.1.c e SEILER [1982] para os detalhes). Com isso, podemos definir em $\mathcal{H}$ (a ausência do índice Λ indica o limite termodinâmico) o operador dado por

$$\tilde{T}_{\mathcal{H}} = W\tilde{T}\bar{W}. \quad (\text{I.1.2.6})$$

Com essa notação, podemos estabelecer o resultado principal desta Seção:

Proposição I.1.2 *$\tilde{T}_{\mathcal{H}}$ é um operador auto-adjunto positivo de norma menor que 1.*

Demonstração - Claramente, $\langle \tilde{T}^N F \Theta F \rangle$ é uniformemente limitado em N . Da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle \tilde{T} F \Theta F \rangle| \leq \langle \tilde{T}^2 F \Theta F \rangle^{\frac{1}{2}} \langle F \Theta F \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \langle (\tilde{T}^{2^n} F) \Theta F \rangle^{\frac{1}{2^n}} \langle F \Theta F \rangle^{1 - \frac{1}{2^n}}.$$

Quando $n \rightarrow \infty$, o primeiro fator à direita vai para 1, de forma que obtemos

$$|\langle \tilde{T} F \Theta F \rangle| \leq \langle F \Theta F \rangle.$$

Assim $\tilde{T}$ induz uma contração bem definida $\tilde{T}_{\mathcal{H}}$ em $\mathcal{H}$.

Seja TF a função F deslocada de uma unidade na direção temporal positiva. É evidente que $\tilde{T} = T^2$, de forma que temos $\tilde{T} \geq 0$ e portanto $0 \leq T \leq 1$ em $\mathcal{H}$. Ainda, uma vez que

$$\langle \tilde{T} F \Theta G \rangle = \langle F \Theta \tilde{T} G \rangle$$

e

$$(\tilde{T}_{\mathcal{H}} W F, W G)_{\mathcal{H}} = (W F, \tilde{T}_{\mathcal{H}}^{\dagger} W G)_{\mathcal{H}},$$

então $\tilde{T}_{\mathcal{H}}^\dagger = \tilde{T}_{\mathcal{H}}$.

□

Em virtude da Proposição I.1.2, podemos escrever $\tilde{T}_{\mathcal{H}} = e^{-2H}$, onde $H = H^\dagger \geq 0$ é o hamiltoniano e e^{-H} é a matriz de transferência.

Nota I.1.c *O raciocínio acima guarda uma hipótese importante: nele assumimos que zero não é um auto-valor de $\tilde{T}$. No limite do contínuo isso é uma consequência simples da continuidade de T^x quando $x \rightarrow 0$, o que não temos na rede. É importante ressaltar, que o método desenvolvido na Ref. FREDENHAGEN [1985] para campos de calibre e campos bosônicos em redes euclidianas não se aplica aqui (ao menos no formato atual) devido as complicações introduzidas pelos campos fermiônicos.*

Operadores de momentum podem ser construídos de maneira similar. Denote por $T_j F$ ($j = 1, \dots, d$) a função $F \in \mathcal{A}_+$ deslocada por uma unidade na j -ésima direção espacial. Por argumentos similares aos da proposição I.1.2, é claro que para $T_j \mathcal{H} = WT_j \bar{W}$, temos $\|T_j \mathcal{H}\| = 1$. Portanto, podemos tomar $T_j = e^{-iP_j}$, com P_j um operador auto-adjunto. Uma vez que $T_j T_\nu = T_\nu T_j$, temos que os operadores P_j comutam entre si e como $\tilde{T} T_j = T_j \tilde{T}$ vemos que P_j comuta com o hamiltoniano. Com isso os operadores H e P_j podem ser diagonalizados em uma mesma base, e podemos escrever cada um dos autovalores de H como funções $E(\vec{p})$ onde p_j , a j -ésima componente do vetor $\vec{p}$, é um autovalor de P_j .

1.3 Limite Termodinâmico

Nesta Seção, demonstraremos a existência das funções de correlação do modelo de Quatro-Fermions no limite termodinâmico. A peça chave para tanto é a demonstração da existência do limite de volume infinito da energia livre

$$f = \frac{1}{|\Lambda|} \ln Z, \quad (\text{I.1.3.1})$$

sempre que a condição

$$\left| \frac{k}{M_0} \right| \leq \frac{e^{-5}}{4d s N} \quad (\text{I.1.3.2})$$

estiver satisfeita. Mostraremos, ainda, que nesta região dos parâmetros, a energia livre e as funções de correlação podem ser continuadas analiticamente para o plano complexo, assumindo valores limitados nesta região.

A ferramenta usada para a demonstração desta propriedade é a chamada expansão em polímeros. A expansão em polímeros consiste em exibir uma identidade algébrica entre a função de partição e seu logaritmo. Esta técnica condensa vários aspectos das populares expansões de cluster (veja as Refs. GLIMM E JAFFE [1986], GRUBER E KUNZ [1971], SEILER [1982], SIMON [1994]). O grande interesse nesta expansão é sua capacidade de sistematizar um processo para o controle da energia livre e para se estabelecer o decaimento exponencial em árvore das funções de correlação conexas.

A idéia central da expansão em polímeros é definir um conjunto $\mathcal{P}$ de objetos γ chamados de polímeros. O nome surge devido a alguns casos (como a expansão apresentada aqui), onde os objetos γ podem ser identificados como conjuntos conexos de ligações de pontos de uma rede (um modelo bem simplificado de uma cadeia de polímeros químicos). A característica essencial destes polímeros é o fato deles possuírem uma noção de intersecção: Cada par $\gamma_i, \gamma_j \in \mathcal{P}$ é tal que

$$\gamma_i \cap \gamma_j \neq \emptyset \quad (\text{eles se interseccionam}),$$

ou

$$\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset \quad (\text{eles são disjuntos}).$$

Em geral, a noção de suporte dos polímeros está associada ao suporte desses polímeros no espaço onde eles vivem.

Além da propriedade de intersecção, nós temos definida a função $z(\gamma)$, a atividade de de um polímero γ , uma função de $\mathcal{P}$ nos números complexos. Nosso objetivo é estabelecer estas noções primitivas (um conjunto de polímeros apropriado, e a função atividade) para um dado modelo, de forma que nós possamos reescrever a função de partição na forma

$$Z = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in D_n} z(\gamma_1) \dots z(\gamma_n), \quad (\text{I.1.3.3})$$

onde D_n é o conjunto de todas as coleções de n polímeros disjuntos. Em cada elemento de D_n um polímero aparece somente uma vez, e portanto se $\mathcal{P}$ é um conjunto finito (como ocorre em nosso caso para uma rede finita), então a Eq. (I.1.3.3) é majorada por uma soma de um número finito de exponenciais e portanto converge.

A Eq. (I.1.3.3) permite escrever $\ln Z$ como uma série de potências das atividades, explicitamente temos

$$\ln Z = \sum_k \frac{1}{k!} \sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in C_k} n(\gamma_1, \dots, \gamma_n) z(\gamma_1) \dots z(\gamma_n), \quad (\text{I.1.3.4})$$

onde C_k é o conjunto de todas as coleções de k polímeros conexos (em um elemento de C_k podem haver repetições dos polímeros), $n(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, o índice de $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, é dado por

$$n(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_{G \subset (\gamma_1, \dots, \gamma_n)} (-1)^{l(G)},$$

onde G é um subgrafo conexo de $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, e $l(G)$ é o número de linhas em G (veja a Ref. GLIMM E JAFFE [1986]).

Como uma propriedade geral, tem-se que a expansão de $\ln Z$ dada pela Eq. (I.1.3.4) converge absolutamente (enquanto série de potências em $z(\gamma)$) sempre que o número de polímeros que passam por um certo ponto (algumas vezes chamado fator de entropia) e a magnitude das atividades (por vezes chamada fator de energia) são limitadas por números positivos c e E e estes números satisfazem a condição $E \geq c + 5$ (veja a Ref. GLIMM E JAFFE [1986]). As noções de energia e entropia da expansão em polímeros tem o seu correspondente no formalismo de contornos de Peierls.

1.3.1 Polímeros e o modelo de Quatro Fermions

Nos concentraremos agora em construir um sistema de polímeros para o modelo de Quatro-Férmions, mais explicitamente devemos exhibir quem são os polímeros γ , qual é a noção de intersecção destes objetos e definir a atividade destes polímeros. Uma expansão de Taylor da função de partição dada pela Eq. (I.1.1.4) em κ nos fornece a equação

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\kappa}{2} \right)^n \int \left(\sum_{\substack{x, \alpha, \beta \\ a, \epsilon, \mu}} \bar{\psi}_{\alpha,a}(x) \Upsilon_{\alpha\beta}^{\epsilon e^\mu} \psi_{\beta,a}(x + \epsilon e^\mu) \right)^n \times e^{\frac{\lambda}{N} \sum_x \left(\sum_{\alpha, a} \bar{\psi}_{\alpha,a}(x) \psi_{\alpha,a}(x) \right)^2} d\mu_{M_0}, \quad (\text{I.1.3.5})$$

onde temos a medida livre

$$d\mu_{M_0} = e^{\sum_{x, \alpha, a}^{M_0} \bar{\psi}_{\alpha,a}(x) \psi_{\alpha,a}(x)} \prod_{x, \alpha, a} d\bar{\psi}_{\alpha,a}(x) d\psi_{\alpha,a}(x). \quad (\text{I.1.3.6})$$

Aplicando o teorema multinomial ao termo $(\sum \bar{\psi} \Upsilon \psi)^n$ na Eq. (I.1.3.5) e usando o fato de que para variáveis de Grassmann $(\bar{\psi}_{\alpha,a}(x))^2 = 0, (\psi_{\alpha,a}(x))^2 = 0$, temos

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\kappa}{2} \right)^n \sum_P \int \prod_{\substack{x, \alpha, \beta \\ a, \epsilon, \mu}} \bar{\psi}_{\alpha,a}(x) \Upsilon_{\alpha\beta}^{\epsilon e^\mu} \psi_{\beta,a}(x + \epsilon e^\mu) \right)^{n(x, \alpha, \beta, a, \epsilon, \mu)} \times e^{\frac{\lambda}{N} \sum_x \left(\sum_{\alpha, a} \bar{\psi}_{\alpha,a}(x) \psi_{\alpha,a}(x) \right)^2} d\mu_{M_0}, \quad (\text{I.1.3.7})$$

onde

$$P = \{n(x, \alpha, \beta, a, \epsilon, \mu) \in \mathbb{N} \mid \sum n(x, \alpha, \beta, a, \epsilon, \mu) = n, n(x, \alpha, \beta, a, \epsilon, \mu) = 0 \text{ ou } 1\}, .$$

Em outras palavras, a soma $\sum_P$ é efetuada sobre todos os n fatores distintos do tipo $\bar{\psi}_{\alpha,a}(x) \Upsilon_{\alpha\beta}^{\epsilon e^\mu} \psi_{\beta,a}(x + \epsilon e^\mu)$. Uma vez que a medida livre $d\mu_{M_0}$ tem uma covariância completamente diagonal (ou seja sua covariância é diagonal nas coordenadas da rede,

nos índices de spin e sabor) e visto que o termo

$$e^{\frac{\lambda}{N} \sum_x \left(\sum_{\alpha, a} \bar{\psi}_{\alpha, a}(x) \psi_{\alpha, a}(x) \right)^2}$$

é local, é fácil ver que após as integrações fermiônicas apenas produtos que correspondam a caminhos fechados de mesmo sabor resultarão em contribuições não nulas.

A cada fator $\bar{\psi}_{\alpha, a}(x) \Upsilon_{\alpha\beta}^{\epsilon e^\mu} \psi_{\beta, a}(x + \epsilon e^\mu)$ associamos o objeto

$$b_a \in \mathcal{B} = \{(a, x, \alpha, y, \beta) \in \mathcal{N} \otimes (\Lambda \otimes \mathcal{S})^2 \mid |x - y| = 1\}.$$

Denominamos b_a uma *ligação orientada* de sabor a . Um caminho orientado de sabor a é um conjunto de ligações de sabor a , que são conexas no sentido de $(\Lambda \otimes \mathcal{S})^2$. Caminhos de sabor distintos são considerados desconexos. Seja $\Upsilon_n \subset \mathcal{B}$ o conjunto de todas as coleções de n caminhos fechados desconexos formados por n ligações. Com estas noções, podemos reescrever a Eq. (I.1.3.7) na forma

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\kappa}{2} \right)^n \sum_{\{\gamma \in \Upsilon_n \mid |\gamma| = n\}} \int C(\gamma) e^{\frac{\lambda}{N} \sum_x \left(\sum_{\alpha, a} \bar{\psi}_{\alpha, a}(x) \psi_{\alpha, a}(x) \right)^2} d\mu_{M_0}, \quad (\text{I.1.3.8})$$

onde $|\gamma|$ é o número de ligações de γ , e

$$C(\gamma) = \prod_{(a, x, \alpha, x + \epsilon e^\mu, \beta) \in \gamma} \bar{\psi}_{\alpha, a}(x) \Upsilon_{\alpha\beta}^{\epsilon e^\mu} \psi_{\beta, a}(x + \epsilon e^\mu)$$

A exponencial no argumento da integral na Eq. (I.1.3.8) pode ser expandida como

$$e^{\frac{\lambda}{N} \sum_x \left(\sum_{\alpha, a} \bar{\psi}_{\alpha, a}(x) \psi_{\alpha, a}(x) \right)^2} = \prod_{x \notin \gamma} e^{\frac{\lambda}{N} \left(\sum_{\alpha, a} \bar{\psi}_{\alpha, a}(x) \psi_{\alpha, a}(x) \right)^2} \times \prod_{x \in \gamma} e^{\frac{\lambda}{N} \left(\sum_{\alpha, a} \bar{\psi}_{\alpha, a}(x) \psi_{\alpha, a}(x) \right)^2},$$

o último termo após as integrações fermiônicas contribui com $\prod_{x \in \gamma} \left(1 + \frac{\lambda}{N}\right)$. Portanto, a função de partição dada na Eq. (I.1.3.8) pode ser reescrita na forma

$$Z = \left(1 + \frac{2\lambda}{NM_0^2}\right)^{\frac{sN}{2}(sN-1)|\Lambda|} \tilde{Z}, \quad (\text{I.1.3.9})$$

onde

$$\tilde{Z} = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in D_n} z(\gamma_1) \dots z(\gamma_n), \quad (\text{I.1.3.10})$$

onde D_n é uma coleção de n polímeros disjuntos e $z : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função do conjunto dos polímeros nos números complexos. A quantidade $z(\gamma)$ é chamada de atividade do polímero γ , ela é dada por

$$z(\gamma) = \left(\frac{-\kappa}{2}\right)^{|\gamma|} \left(1 + \frac{2\lambda}{NM_0^2}\right)^{-(sN-1)|\gamma|} \int C(\gamma) d\mu_{M_0}. \quad (\text{I.1.3.11})$$

Note também que z pode ser fatorada em suas partes conexas, em outras palavras, temos a propriedade desejada:

$$z(\gamma_1 \cup \gamma_2) = z(\gamma_1)z(\gamma_2),$$

para todos γ_1 e γ_2 disjuntos.

1.3.2 Convergência da Energia Livre

Nesta Subseção mostramos a convergência da energia livre (ou pressão) do modelo de Quarto-Fermions. Substituindo a Eq. (I.1.3.9) em Eq. (I.1.3.1), temos

$$\frac{1}{|\Lambda|} \ln Z = \frac{1}{|\Lambda|} \ln \tilde{Z} + \frac{sN}{2}(sN-1) \ln \left(1 + \frac{2\lambda}{NM_0^2}\right). \quad (\text{I.1.3.12})$$

Para $\lambda \geq 0$, $\ln \left(1 + \frac{2\lambda}{NM_0^2}\right)$ existe no limite de volume infinito, então apenas precisamos mostrar que $\frac{1}{|\Lambda|} \ln \tilde{Z}$ também existe no mesmo limite. Uma vez que nós escrevemos $\tilde{Z}$ como uma série de potências das atividades, estamos em posição de aplicarmos os teoremas de convergência de expansões em polímeros. Para tanto, primeiramente iremos

determinar limites superiores em duas quantidades, a saber, o número de polímeros que passam por um ponto (fator de entropia) e a magnitude das atividades (fator de energia).

Seja $N(x, |\gamma|)$ o número de polímeros de volume $|\gamma|$ que passam pelo ponto x . Com esta notação, temos

Proposição I.1.3 (*Estimativa de Entropia*) *Existe uma constante $c > 0$, uniforme nos parâmetros κ e λ do modelo, tal que*

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}_o^{d+1}} N(x, |\gamma|) \leq e^{c|\gamma|}. \quad (\text{I.1.3.13})$$

Demonstração - Esta é uma consequência direta do fato que um polímero que passa pelo ponto x da rede, pode ser construído adicionando-se uma ligação orientada por vez. Para cada ponto da rede, temos $2d + 2$ primeiros vizinhos, duas orientações e s possíveis spins, portanto existe um total de $4(d + 1)s$ ligações possíveis em cada ponto. Uma vez que o número de sabores possíveis para cada caminho é N temos que

$$N(x, |\gamma|) \leq N(4(d + 1)s)^{|\gamma|} = e^{\ln N + |\gamma| \ln(4ds)} \leq e^{|\gamma| \ln(4(d+1)Ns)}. \quad (\text{I.1.3.14})$$

Assim, tomamos $c = \ln(4(d + 1)Ns)$, o que completa a prova. □

A proposição a seguir lida com uma estimativa para a atividade dos polímeros, **Proposição I.1.4** (*Estimativa de Energia*) *Para $\lambda \geq 0$ fixo, e $0 < \|\kappa/M_0\| < 1$, existe uma constante positiva E tal que para todo $\gamma \in \mathcal{P}$*

$$|z(\gamma)| \leq e^{-E|\gamma|}. \quad (\text{I.1.3.15})$$

Demonstração - Este limite segue diretamente da Eq. (I.1.3.11). De fato

$$\begin{aligned} |z(\gamma)| &\leq \left| \frac{-\kappa}{2} \left(1 + \frac{2\lambda}{Nm^2} \right)^{-(sN-1)} \right|^{|\gamma|} \left| \int C(\gamma) d\mu_{M_0} \right| \\ &\leq \left| \frac{\kappa}{2M_0} \left(1 + \frac{2\lambda}{Nm^2} \right)^{-(sN-1)} \right|^{|\gamma|} \leq \left| \frac{\kappa}{2M_0} \right|^{|\gamma|} = e^{-E|\gamma|}, \end{aligned} \quad (\text{I.1.3.16})$$

onde $E = -\ln \left| \frac{\kappa}{2M_0} \right|$.

□

Assim a expansão em polímeros para a energia livre modificada $|\Lambda|^{-1} \ln \tilde{Z}$ converge absolutamente, como uma série de potências em $z(\gamma)$, quando $E \geq c + 5$, e portanto Eq. I.1.3.12, converge sempre que

$$\ln \left| \frac{\kappa}{2M_0} \right| \leq -\ln(4(d+1)sN) - 5.$$

Logo é suficiente que exijamos

$$\left| \frac{\kappa}{M_0} \right| \leq \frac{e^{-5}}{2(d+1)sN} \quad (\text{I.1.3.17})$$

A cota acima de maneira alguma é muito refinada, como pode ser visto das aproximações feitas na Eq. (I.1.3.14) e na Eq. (I.1.3.16) (que se tornam muito pior quando $|\gamma|$ cresce). Da Eq. (I.1.3.14) é fácil ampliar ligeiramente a cota da razão $|\frac{\kappa}{M_0}|$ de maneira a obter

$$\left| \frac{\kappa}{M_0} \right| \leq \frac{e^{-5}}{4(d+1)sN} \left\| \left(1 + \frac{2\lambda}{NM_0^2} \right) \right\|^{-(sN-1)}.$$

No Apêndice A, nós discutimos como a expansão de polímeros apresentada aqui implica na existência das funções de correlação bem comportadas no limite termodinâmico.

1.4 Funções de Correlação e Representações Espectrais

Partículas e estados ligados são entendidos como curvas de dispersão isoladas no espectro conjunto dos operadores auto-adjuntos H e $\vec{P}$ (como visto na Seção I.1.2). Assim, é fundamental para qualquer método que se proponha a detectar as partículas ou os estados ligados de um modelo físico estabelecer conexões entre os objetos relevantes

nesse modelo (como as funções de correlação) e o espectro dos operadores associados a esses objetos, nesse caso dos operadores de energia e momento.

De maneira usual, para se determinar o espectro de um operador é suficiente consideramos os produtos internos (veja a Ref. GLIMM E JAFFE [1986])

$$\left(\hat{\Phi}, \hat{T}_0^{|x^0|} \hat{T}^{\vec{x}} \hat{\Psi} \right)_{\mathcal{H}},$$

onde $x = (x^0, \vec{x}) \in \mathbb{Z}_o^{d+1}$, $T_0 = e^{-H}$ e $\vec{T}^{\vec{x}} = e^{i\vec{P} \cdot \vec{x}}$. Ainda, $\hat{\Phi}$ e $\hat{\Psi}$ são vetores de um subespaço denso do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Para $\hat{\Phi}$ e $\hat{\Psi}$ com suporte finito em $x^0 \geq \frac{1}{2}$ temos a fórmula de Feynman-Kac

$$\left(\hat{\Phi}, \hat{T}_0^{|x^0|-1} \hat{T}^{\vec{x}} \hat{\Psi} \right)_{\mathcal{H}} = \langle (T^{|x^0|-1} \vec{T}^{\vec{x}} \Psi) \Theta \Phi \rangle \quad (\text{I.1.4.1})$$

onde

$$\begin{aligned} \Theta \psi_{\alpha a}(x^0, \vec{x}) &= \sum_{\beta} \gamma_{\alpha \beta}^0 \bar{\psi}_{\beta a}(-x^0, \vec{x}) = \gamma_{\alpha \alpha}^0 \bar{\psi}_{\alpha a}(-x^0, \vec{x}) \\ \Theta \bar{\psi}_{\alpha a}(x^0, \vec{x}) &= \sum_{\beta} \psi_{\beta a}(-x^0, \vec{x}) \gamma_{\beta \alpha}^0 = \psi_{\alpha a}(-x^0, \vec{x}) \gamma_{\alpha \alpha}^0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.4.2})$$

Denotando por $\Xi(\omega)$ a translação de Ξ por ω , e tomando $x^0 = u^0 - v^0$, a fórmula de Feynman-Kac, para Φ e Ψ com suporte em $x^0 = \frac{1}{2}$, fica (* indica conjugação complexa)

$$\left(\hat{\Phi}, \hat{T}_0^{|x^0|-1} \hat{T}^{\vec{x}} \hat{\Psi} \right)_{\mathcal{H}} = \begin{cases} \left\langle \Psi(u_0, \vec{x}) \left(\Theta \Phi(v_0, \vec{0}) \right) \right\rangle & \text{se } u^0 < v^0 \\ - \left\langle (\Theta \Psi(u_0, \vec{x})) \Phi(v_0, \vec{0}) \right\rangle^* & \text{se } v^0 < u^0 \end{cases} \quad (\text{I.1.4.3})$$

Para estudar o espectro de uma partícula, i.e. o espectro associado ao subespaço gerado por vetores da forma $\bar{\psi}_{\alpha a}(x)\Omega$, onde Ω é o vetor de vácuo, somos levados à análise da função de dois-pontos

$$G_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) = \chi_{y^0 \geq x^0} \langle \bar{\psi}_{\alpha a}(x) \psi_{\beta b}(y) \rangle - \chi_{x^0 > y^0} \langle \psi_{\alpha a}(x) \bar{\psi}_{\beta b}(y) \rangle^*. \quad (\text{I.1.4.4})$$

onde $\chi(x)$ é a função de Heaviside, dada por

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Na equação acima restringimos os indicies de spin aos índices correspondentes a partículas e portanto $\alpha = l = \frac{s}{2} + 1, \dots, s$.

Pelo uso da fórmula de Feynman-Kac, Eq. (I.1.4.3), e das representações espectrais

$$\hat{T}^{|x^0|-1} \hat{T}^{\vec{x}} = \int_{-1}^1 \int_{T_d} \lambda_0^{|x^0|-1} e^{i\vec{\lambda}\vec{x}} d\mathcal{E}(\lambda), \quad (\text{I.1.4.5})$$

onde $\mathcal{E}(\lambda)$, $(\lambda = (\lambda_0, \vec{\lambda}))$ é a família espectral conjunta de $\hat{T}_0$ e $\vec{P}$ e $T_d = (\pi, \pi]^d$. Notando, também, que a fórmula não tem sentido para $x^0 = y^0$, estabelecemos um dos resultados centrais deste Capítulo na proposição abaixo (para uma análise similar para o modelo $O(N)$, veja a Ref. ANJOS, VEIGA E O'CARROLL [2005]).

Proposição I.1.5 *No limite termodinâmico e para $x^0 \neq y^0$, $G_{\alpha\beta}^{ab}(x, y)$ como na Eq. (I.1.4.4) e denotando $\bar{\psi}_{\alpha a} = \bar{\psi}_{\alpha a}(\frac{1}{2}, \vec{0})$ (analogamente $\psi_{\alpha a} = \psi_{\alpha a}(\frac{1}{2}, \vec{0})$), vale que*

$$G_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) = \int_{-1}^1 \int_{T_d} \lambda_0^{|x^0-y^0|-1} e^{i\vec{\lambda}(\vec{x}-\vec{y})} d(\bar{\psi}_{\beta a}, \mathcal{E}(\lambda) \bar{\psi}_{\alpha b}). \quad (\text{I.1.4.6})$$

Ainda, $\tilde{G}_{\alpha\beta}^{ab}(p)$, a transformada de Fourier de $G_{\alpha\beta}^{ab}(x - y) \equiv G_{\alpha\beta}^{ab}(x, y)$ é dada por

$$\tilde{G}_{\alpha\beta}^{ab}(p) = \tilde{G}(0, \vec{p}) + \lambda_0^{-1} \int_{-1}^1 \int_{T_d} \delta(\vec{p} - \vec{\lambda}) \left[\frac{1}{e^{ip_0} - \lambda_0} + \frac{1}{e^{-ip_0} - \lambda_0} \right] d(\bar{\psi}_{\alpha a}, \mathcal{E}(\lambda) \bar{\psi}_{\beta b}), \quad (\text{I.1.4.7})$$

Portanto para $\vec{p}$ fixo, pólos em p^0 puramente imaginário são pontos no espectro de energia-momento associados ao subespaço de $\mathcal{H}$ gerado por vetores do tipo $\bar{\psi}_{\alpha a}(x)\Omega$, onde Ω é o vetor de vácuo.

Demonstração - Seja $x^0 < y^0$, então $G_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) = \langle \bar{\psi}_{\alpha a}(x) \psi_{\beta b}(y) \rangle$, e claramente

$$G_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) = \left\langle \left[T_0^{x^0-\frac{1}{2}} \vec{T}^{\vec{x}} \bar{\psi}_{\alpha a} \right] \left[T_0^{y^0+\frac{1}{2}} \vec{T}^{\vec{y}} \psi_{\beta b}(-\frac{1}{2}, \vec{0}) \right] \right\rangle.$$

Devido a invariância translacional, temos

$$G_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) = \left\langle \left[T_0^{|y^0-x^0|-1} \vec{T}^{\vec{y}-\vec{x}} \bar{\psi}_{\alpha a} \right] \psi_{\beta b} \left(-\frac{1}{2}, \vec{0} \right) \right\rangle.$$

Pela Eq. (I.1.4.2), vemos que

$$G_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) = \left\langle \left[T_0^{|y^0-x^0|-1} \vec{T}^{\vec{y}-\vec{x}} \bar{\psi}_{\alpha a} \right] [\Theta \bar{\psi}_{\beta b}] \right\rangle,$$

de onde o resultado segue, através da aplicação da fórmula de Feynman-Kac, dada na Eq. (I.1.4.3). Mais explicitamente,

$$G_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) = \left(\bar{\psi}_{\beta b} \Omega, \left[\hat{T}_0^{|x^0-y^0|-1} \hat{\vec{T}}^{\vec{y}-\vec{x}} \bar{\psi}_{\alpha a} \right] \Omega \right)_{\mathcal{H}}.$$

Para $x^0 > y^0$, temos $G_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) = -\langle \psi_{\alpha a}(x) \bar{\psi}_{\beta b}(y) \rangle^*$, portanto $G_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) = \langle \bar{\psi}_{\beta b}(y) \psi_{\alpha a}(x) \rangle^*$, analogamente para $x^0 < y^0$, temos

$$G_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) = \left\langle \left[T_0^{|x^0-y^0|-1} \vec{T}^{\vec{y}-\vec{x}} \bar{\psi}_{\beta a} \right] [\Theta \bar{\psi}_{\alpha a}] \right\rangle^*,$$

e pela fórmula de Feynman-Kac (Eq. (I.1.4.1)), temos

$$G_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) = \left(\bar{\psi}_{\alpha a} \Omega, \left[\hat{T}_0^{|x^0-y^0|-1} \hat{\vec{T}}^{\vec{y}-\vec{x}} \bar{\psi}_{\beta b} \right] \Omega \right)_{\mathcal{H}}^*,$$

uma vez que $\hat{T}_0$ e $\hat{\vec{T}}$ são operadores auto-adjuntos,

$$G_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) = \left(\bar{\psi}_{\beta b} \Omega, \left[\hat{T}_0^{|x^0-y^0|-1} \hat{\vec{T}}^{\vec{y}-\vec{x}} \bar{\psi}_{\alpha a} \right] \Omega \right)_{\mathcal{H}}.$$

E com isto obtemos a Eq. (I.1.4.6).

Agora, seja $\tilde{f}(p) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^{d+1}} f(x) e^{-ipx}$, a transformada de Fourier de $f(x)$. Por

invariância translacional (e algum abuso de notação), $G_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) \equiv G_{\alpha\beta}^{ab}(x - y)$. Logo

$$\tilde{G}(p) = \sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^d} G(0, \vec{x}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \sum_{\substack{x^0 > 0, \\ \vec{x} \in \mathbb{Z}^d}} \left(G(x^0, \vec{x}) e^{-ip^0 x^0} + G(-x^0, \vec{x}) e^{ip^0 x^0} \right) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}.$$

Substituindo o núcleo de G , dado na Eq. (I.1.4.6), na equação acima, temos o resultado desejado. Portanto, as singularidades (em p^0 complexo) da transformada de Fourier do operador a valores matriciais (dado na Eq. (I.1.4.4)) e o espectro de energia-momento associado ao subespaço de uma partícula coincidem.

□

Afim de estudar o espectro de duas partículas, i.e. o espectro associado ao subespaço de $\mathcal{H}$ gerado por vetores do tipo $\bar{\psi}_{\alpha_1 a_1}(x_1 = (x_0, \vec{x}_1)) \bar{\psi}_{\alpha_2 a_2}(x_2 = (x_0, \vec{x}_2)) \Omega$, somos conduzidos a análise da função de quatro-pontos

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_1, y_2) = & \chi_{y_1^0 \leq x_1^0} \langle \bar{\psi}_{\alpha_1 a_1}(x_1) \bar{\psi}_{\alpha_2 a_2}(x_2) \psi_{\beta_1 b_1}(y_1) \psi_{\beta_2 b_2}(y_2) \rangle \\ & - \chi_{x_1^0 < y_1^0} \langle \psi_{\alpha_1 a_1}(x_1) \psi_{\alpha_2 a_2}(x_2) \bar{\psi}_{\beta_1 b_1}(y_1) \bar{\psi}_{\beta_2 b_2}(y_2) \rangle^* . \end{aligned} \quad (\text{I.1.4.8})$$

onde, por economia de notação, ab (respectivamente $\alpha\beta$) significa $a_1 a_2 b_1 b_2$ (respectivamente $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2$) e tomamos a chamada representação de tempos iguais, i.e. $x_1^0 = x_2^0$ e $y_1^0 = y_2^0$.

Vamos introduzir agora as coordenadas relativas na rede, que são o análogo para a rede do centro de massa e das coordenadas relativas usadas no contínuo, veja a Ref. VEIGA ET AL. [2001] .

Fazendo (veja também a Figura I.1.3 abaixo),

$$\vec{\xi} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \quad \tau = y_1 - x_2 \quad \eta = \vec{y}_2 - \vec{y}_1, \quad (\text{I.1.4.9})$$

com isto, a Eq. (I.1.4.8) se torna

Figura I.1.3. Coordenadas Relativas na rede.

$$\begin{aligned}
D_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_1, y_2) &\equiv D_{\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau) \\
&= \chi_{\tau_0 \leq 0} \left\langle \bar{\psi}_{\alpha_1 a_1}(\tfrac{1}{2}, \vec{0}) \bar{\psi}_{\alpha_2 a_2}(\tfrac{1}{2}, \vec{\xi}) \psi_{\beta_1 b_1}(\tau_0 + \tfrac{1}{2}, \vec{\tau} + \vec{\xi}) \right. \\
&\quad \times \left. \psi_{\beta_2 b_2}(\tau_0 + \tfrac{1}{2}, \vec{\tau} + \vec{\xi} + \vec{\eta}) \right\rangle - \chi_{\tau_0 > 0} \left\langle \psi_{\alpha_1 a_1}(\tfrac{1}{2}, \vec{0}) \psi_{\alpha_2 a_2}(\tfrac{1}{2}, \vec{\xi}) \right. \\
&\quad \times \left. \bar{\psi}_{\beta_1 b_1}(\tau_0, \vec{\tau} + \vec{\xi}) \bar{\psi}_{\beta_2 b_2}(\tau_0, \vec{\tau} + \vec{\xi} + \vec{\eta}) \right\rangle^*.
\end{aligned}$$

Por abuso de notação, denotamos da mesma forma a função de quatro pontos nas coordenadas da rede e em coordenadas relativas. Note que, de acordo com a fórmula Feynman-Kac da Eq. (I.1.4.3), não há necessidade de removermos as contribuições espectrais do vácuo, uma vez que estas são nulas em virtude da repulsão de Pauli (ou seja devido ao desbalanceamento de ψ e $\bar{\psi}$ nas médias), portanto D possui decaimento temporal em τ_0 .

Usando novamente a fórmula Feynman-Kac e notando que a fórmula perde o efeito quando $x_0^i = y_0^i$, $i=1,2$, obtemos uma representação espectral para D e o resultado final desta Seção:

Proposição I.1.6 *No limite termodinâmico e tomando $x^0 = x_1^0 = x_2^0 \neq y_1^0 = y_2^0 = y^0$, $D_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_{1,2})$ definido como na Eq. (I.1.4.8) e denotando $\bar{\psi}_{\alpha a} = \bar{\psi}_{\alpha a}(\tfrac{1}{2}, \vec{0})$, a temos*

$$D_{\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau) = \int_{-1}^1 \int_{T_d} \lambda_0^{|\tau_0|-1} e^{i\vec{\lambda}(\vec{\xi}+\vec{\eta}+\vec{\tau})} d(\phi_{\beta_2\beta_1}^{b_2b_1}(-\eta), \mathcal{E}(\lambda)\phi_{\alpha_1\alpha_2}^{a_1a_2}(\xi)), \quad (\text{I.1.4.10})$$

onde $\phi_{\alpha_1\alpha_2}^{a_1a_2}(\vec{x}) = \bar{\psi}_{\alpha_1 a_1} \hat{T}^{\vec{x}} \bar{\psi}_{\alpha_2 a_2}$. Mais ainda, $\tilde{D}_{\alpha\beta}^{ab}(p, q, \theta_0, \vec{\tau})$ a transformada de Fourier de $D_{\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau)$ obedece

$$\begin{aligned} \int d^3p d^3\vec{q} \tilde{f}(\vec{p}) \tilde{f}(\vec{q}) \tilde{D}_{\alpha\beta}^{ab}(\vec{p}, \vec{q}, \theta) = & \tilde{D}_{\alpha\beta}^{ab}(\vec{p}, \vec{q}, (0, \vec{\tau})) + \int \left[\frac{1}{e^{i\theta_0} - \lambda_0} + \frac{1}{e^{-i\theta_0} - \lambda_0} \right] \delta(\vec{\lambda}_1 - \vec{p}) \\ & \times \delta(\vec{\lambda}_2 - \vec{q}) \delta(\vec{\lambda}_3 - \vec{\theta}) d(\phi_{\beta_2\beta_1}^{b_2b_1}(f), \mathcal{E}(\lambda) \phi_{\alpha_1\alpha_2}^{a_1a_2}(f)) \end{aligned} \quad (\text{I.1.4.11})$$

onde $\phi_{\alpha\beta}^{ab}(f) = \sum_{\vec{x}} f(\vec{x}) \phi_{\alpha\beta}^{ab}(\vec{x})$. Desta forma, para $\vec{p}$ fixo, pólos em p^0 puramente imaginário são pontos no espectro de energia-momento correspondente ao subespaço e $\mathcal{H}$ gerado por vetores do tipo $\bar{\psi}_{\alpha a}(x) \bar{\psi}_{\beta b}(y) \Omega$.

Demonstração - Considere $x^0 > y^0$, temos

$$D_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \langle \bar{\psi}_{\alpha_1 a_1}(x_1) \bar{\psi}_{\alpha_2 a_2}(x_2) \psi_{\beta_1 b_1}(y_1) \psi_{\beta_2 b_2}(y_2) \rangle,$$

de onde

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_1, y_2) = & \left\langle T_0^{x^0 - \frac{1}{2}} \left[\vec{T}^{\vec{x}_1} \bar{\psi}_{\alpha_1 a_1} \vec{T}^{\vec{x}_2} \bar{\psi}_{\alpha_2 a_2} \right] T_0^{y^0 + \frac{1}{2}} \right. \\ & \left. \times \left[\vec{T}^{\vec{y}_1} \psi_{\beta_1 b_1}(-\frac{1}{2}, \vec{0}) \vec{T}^{\vec{y}_2} \psi_{\beta_2 b_2}(-\frac{1}{2}, \vec{0}) \right] \right\rangle. \end{aligned}$$

Por invariância por translação, temos

$$D_{\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau) = \left\langle T_0^{-\tau_0 - 1} \left[\bar{\psi}_{\alpha_1 a_1} \vec{T}^{\vec{\xi}} \bar{\psi}_{\alpha_2 a_2} \right] \vec{T}^{\vec{\xi} + \tau} \psi_{\beta_1 b_1}(-\frac{1}{2}, \vec{0}) \vec{T}^{\vec{\xi} + \vec{\eta} + \tau} \psi_{\beta_2 b_2}(-\frac{1}{2}, \vec{0}) \right\rangle,$$

onde introduzimos as coordenadas relativas.

Da Eq. (I.1.4.2), vemos que

$$D_{\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau) = \left\langle \left[T_0^{\tau_0 - 1} \bar{\psi}_{\alpha_1 a_1} \vec{T}^{\vec{\xi}} \bar{\psi}_{\alpha_2 a_2} \right] \left[\Theta \vec{T}^{\vec{\xi} + \vec{\eta} + \tau} \bar{\psi}_{\beta_2 b_2} \vec{T}^{\vec{\xi} + \tau} \bar{\psi}_{\beta_1 b_1} \right] \right\rangle,$$

de onde segue o resultado pela aplicação da fórmula de Feynman-Kac (dada na Eq. (I.1.4.3)). Mais explicitamente,

$$D_{\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau) = \left(\vec{T}^{\vec{y}_2} \bar{\psi}_{\beta_2 b_2} \vec{T}^{\vec{y}_2} \bar{\psi}_{\beta_1 b_1} \Omega, \hat{T}_0^{|y_0 - x_0| - 1} \left[\vec{T}^{-\vec{x}_1} \bar{\psi}_{\alpha a_1} \vec{T}^{-\vec{x}_2} \bar{\psi}_{\alpha_2 a_2} \right] \Omega \right)_{\mathcal{H}}.$$

Para $x^0 < y^0$, a demonstração é similar.

A Eq. (I.1.4.11) segue diretamente da Eq. (I.1.4.10). Portanto as transformadas de Fourier da Eq. (I.1.4.6) e da Eq. (I.1.4.8) estão relacionadas, e desta maneira, as singularidades (em p^0 complexo) da transformada de Fourier dos operadores com valores matriciais são as mesmas. Segue com isto, que estes pólos e os pontos do espectro de energia-momento restritos ao subespaço de duas partículas coincidem.

□

O estabelecimento de quais são as funções de correlação adequadas à análise do espectro é um *passo fundamental* em qualquer análise do conteúdo espectral de uma teoria. Em nosso caso, sistematizamos um método para a escolha destas funções de correlação. Como visto, as funções de correlação dadas na Eq. (I.1.4.4) e na Eq. (I.1.4.8) podem ser escritas em termos do espectro dos operadores de energia e momento. Estas funções de correlação tem uma *interpretação física* simples em termos dos tradicionais operadores de criação e destruição atuando no vetor de vácuo Ω ⁶. Mais ainda, juntas as Proposições I.1.5 e I.1.6 mostram que os espectro dos operadores de energia e momento, quando restritos aos subespaços de uma e duas partículas, é dado pelos pólos das transformadas de Fourier das funções de dois e quatro pontos, dadas na Eq. (I.1.4.4) e na Eq. (I.1.4.8) respectivamente (Veja a Ref. BARATA E FREDENHAGEN [1991] para a correspondência entre o desenvolvido aqui e a teoria de espalhamento). Assim, se $\tilde{G}$ da Eq. (I.1.5) for analítica para todo $(p_0, \vec{p})$, nenhum vetor da forma $\bar{\psi}(x)\Omega$ é autovetor de H (e portanto de $\vec{P}$). Em particular, se os pólos de $\tilde{G}$ forem dados por um conjunto de curvas isoladas do tipo $p_0(\vec{p})$, dizemos que H e $\vec{P}$ tem espectro de partículas, onde cada partícula está associada a uma destas curvas. Novamente, caso mostremos que as singularidades de $\tilde{D}$, dadas na Eq. (I.1.4.11), sejam dada por curvas isoladas como no caso anterior, dizemos que temos estados ligados de duas partículas. É claro que pode ocorrer de não encontrarmos espectro associado ao subespaço de uma partícula e encontrarmos em subespaços associados a duas ou mais partículas, e o que ocorre, por exemplo, no caso da cromodinâmica quântica, onde devido a restrições impostas pela simetria de calibre não-abeliana não temos nenhum espectro associado

⁶Nesta interpretação, dizemos que no instante x_0 , o operador $\psi_{\alpha a}(x_0, \vec{x})$ cria uma partícula de spin α e sabor a na posição $\vec{x}$, enquanto dizemos que $\bar{\psi}_{\beta b}(y_0, \vec{y})$ destrói uma partícula de spin β e sabor b na posição $\vec{y}$ no instante y_0 . Mais ainda $\psi_{\alpha a}(x_0, \vec{x})\psi_{\alpha a}(x_0, \vec{x}) = 0$ tentamos criar duas partículas idênticas em um mesmo estado, e então o princípio de exclusão de Pauli atua fazendo com que o produto seja nulo.

a uma partícula básica (os quarks e anti-quarks não confinados), ao passo que temos toda uma riqueza espectral constituída de partículas compostas tais como os bárions, os mésons, os pentaquarks e tudo mais (veja a Ref. VEIGA ET AL. [2008a]).

1.5 Simetrias

Nossa meta nesse ponto é investigar as simetrias do modelo de Quatro-Férmions e entender como essas podem ser utilizadas para simplificar a estrutura das funções de correlação. Para tanto seguimos a cenário geral esboçado em VEIGA, O'CARROLL E SCHOR [2004]. Uma operação de simetria $\mathbb{Y}$ definida na álgebra de Grassmann $\mathcal{A}$ é uma aplicação de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$ tal que

$$\begin{aligned}\mathbb{Y}\psi_{\alpha a}(x) &= \mathfrak{A}_{\alpha\beta}^{ab}\tilde{\psi}_{\beta b}(\mathcal{Y}x), \\ \mathbb{Y}\bar{\psi}_{\alpha a}(x) &= \tilde{\bar{\psi}}_{\beta b}(\mathcal{Y}x)\mathfrak{B}_{\beta\alpha}^{ba}\end{aligned}$$

onde $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são matrizes $s \times s$ de entradas complexas e $\mathcal{Y}$ é um mapeamento linear bijetivo de $\mathbb{Z}_{\frac{1}{2}} \times \mathbb{Z}^d$ nele mesmo. O símbolo $\sim$ indica uma das possibilidades

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{\psi} \\ \psi \end{pmatrix}.$$

Agindo em monômios de Grassmann M_1 e M_2 , diz-se que a operação de simetria $\mathbb{Y}$ preserva a ordem (homomorfismo) quando

$$\mathbb{Y}(M_1 M_2) = \mathbb{Y}(M_1)\mathbb{Y}(M_2).$$

Dizemos que $\mathbb{Y}$ reverte a ordem (anti-homomorfismo) quando $\mathbb{Y}(M_1 M_2) = \mathbb{Y}(M_2)\mathbb{Y}(M_1)$. Uma vez definida sobre os monômios da álgebra de Grassmann $\mathcal{A}$, a simetria pode ser estendida para toda a álgebra $\mathcal{A}$ por linearidade ou anti-linearidade.

Uma simetria do modelo é uma operação de simetria que deixa invariante a ação, dada pela Eq. (I.1.1.4), e mais ainda que verifica

$$\langle \mathbb{Y}F \rangle = \langle F \rangle^\#$$

onde F é uma função arbitrária dos campos e $\langle F \rangle^\#$ denota $\langle F \rangle$ ou $\langle F \rangle^*$.

Nosso próximo resultado apresenta algumas simetrias úteis do modelo de Quatro-Férmions em $3 + 1$ dimensões e matrizes de Dirac 4×4 . Na demonstração dessa proposição, usaremos uma fórmula para mudança de variáveis para transformações lineares, no caso que ψ não se mistura com $\bar{\psi}$ ou para o caso onde a transformação linear troca ψ e $\bar{\psi}$. Mais precisamente, usamos variações da fórmula:

$$\int F(\psi, \bar{\psi}) \prod_{k=1}^n d\psi_k \bar{\psi}_k = \det U \det V \int F(V^{-1}\tilde{\psi}', U^{-1}\tilde{\bar{\psi}}') \prod_{k=1}^n d\psi'_k \bar{\psi}'_k, \quad (\text{I.1.5.1})$$

onde $\psi = V^{-1}\tilde{\psi}'$ e $\bar{\psi} = U^{-1}\tilde{\bar{\psi}}'$. A fórmula acima resulta do fato que a integral no lado esquerdo tem como resultado o coeficiente do monômio grassmaniano de mais alto grau em F , escrito na ordem $\bar{\psi}\psi$. Escrevendo esse monômio em termos dos $\tilde{\psi}'$, basta reordenarmos os termos, se necessário, e identificar os coeficientes de grau máximo para obtermos Eq. (I.1.5.1).

Figura I.1.4. Situação dos pontos antes de aplicarmos as simetrias

Proposição I.1.7 *Cada uma das operações de simetria abaixo é uma simetria do modelo de Quatro-Férmions em $d + 1 = 3$ e matrizes de Dirac 4×4 .*

1. *Rotações espaciais:*

a) *Rotações de $\frac{\pi}{2}$ em relação ao eixo coordenado:*

$$e_1: \mathcal{Y}(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^1, x^3, -x^2) \text{ e } \mathfrak{A} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(1 - \gamma^2\gamma^3)\mathbb{I}_N.$$

$$e_2: \mathcal{Y}(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^3, x^2, -x^1) \text{ e } \mathfrak{A} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(1 - \gamma^3\gamma^1)\mathbb{I}_N.$$

$$e_3: \mathcal{Y}(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^2, -x_1, x^3) \text{ e } \mathfrak{A} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(1 - \gamma^1\gamma^2)\mathbb{I}_N.$$

Figura I.1.5. Rotações de $\frac{\pi}{2}$ em relação aos eixos coordenados.

b) Rotações de π em relação ao eixo coordenado:

$$e_1: \mathcal{Y}(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^1, -x^2, -x^3) \text{ e } \mathfrak{A} = -i\gamma^2\gamma^3\mathbb{I}_N.$$

$$e_2: \mathcal{Y}(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, -x^1, x^2, -x^3) \text{ e } \mathfrak{A} = -i\gamma^3\gamma^1\mathbb{I}_N.$$

$$e_3: \mathcal{Y}(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, -x^1, -x^2, x^3) \text{ e } \mathfrak{A} = -i\gamma^1\gamma^2\mathbb{I}_N.$$

Figura I.1.6. Rotações de π em relação aos eixos coordenados.

2. Reflexão das coordenadas espaciais:

a) a coordenada e^1 : $\mathcal{Y}(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, -x^1, x^2, x^3) \text{ e } \mathfrak{A} = i\gamma^0\gamma^2\gamma^3\mathbb{I}_N.$

b) a coordenada e^2 : $\mathcal{Y}(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^1, -x^2, x^3) \text{ e } \mathfrak{A} = i\gamma^0\gamma^1\gamma^3\mathbb{I}_N.$

c) a coordenada e^3 : $\mathcal{Y}(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^1, x^2, -x^3) \text{ e } \mathfrak{A} = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\mathbb{I}_N.$

3. Paridade $\mathcal{P}$: $\mathcal{Y}(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \text{ e } \mathfrak{A} = \gamma^0\mathbb{I}_N.$

4. Conjugação de Carga $\mathcal{C}$: $\sim$ denota $\psi \leftrightarrow \bar{\psi}$ e $\mathfrak{A} = \gamma^2\gamma^0\mathbb{I}_N.$

5. Reversão Temporal $\mathcal{T}$: $\sim$ denota $\psi \leftrightarrow \bar{\psi}$, $\mathcal{Y}(x^0, x^1, x^2, x^3) = (-x^0, x^1, x^2, x^3) \text{ e } \mathfrak{A} = \gamma^0\mathbb{I}_N.$

Figura I.1.7. Reflexões dos Eixos Coordenados

Figura I.1.8. Conjugação de Carga e Paridade

6. *Reflexão Temporal* $\mathcal{T}$: $\mathcal{Y}(x^0, x^1, x^2, x^3) = (-x^0, x^1, x^2, x^3)$ e $\mathfrak{A} = i \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{I}_N$
7. *Sabor* $\mathcal{U}$: $\mathcal{Y}(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ e $\mathfrak{A} = \mathbb{I}_S U_N$, onde U_N é uma matriz de grupo unitário, ou seja $U_N U_N^\dagger = \mathbb{I}_N$.

As operações de simetria 1, 2, 3, 6 e 7 preservam a ordem, enquanto 4 e 5 revertem a ordem. As operações 1, 2, 3, 4, 6 e 7 são lineares, enquanto 5 é anti-linear. Mais ainda, as operações de simetria 1 a 5 e a operação 7 podem ser implementadas no espaço de Hilbert da mecânica quântica $\mathcal{H}$ via operadores unitários (ou anti-unitários no caso de 5) que estabilizam o espaço nulo $\mathcal{N}$, i.e. $F \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \mathbb{Y}F \in \mathcal{N}$.

Demonstração - Para mostrar que $\langle \mathbb{Y}F \rangle = \langle F \rangle^\sharp$ é suficiente estabelecer que a operação $\mathbb{Y}$ deixa a ação (I.1.1.4) invariante e que $\langle \mathbb{Y}F \rangle_{S=0} = \langle F \rangle_{S=0}$, onde $\langle \cdot \rangle_{S=0}$ denota o valor esperado normalizado com a ação tomada como zero. Aqui apenas apresentaremos a prova para a conjugação de carga (item I.1.7 da Proposição), uma vez que para os demais casos a demonstração é uma simples variação da prova apresentada aqui.

Figura I.1.9. Reflexão e Reversão temporal

Em primeiro lugar, vamos mostrar que a ação, dada na Eq. (I.1.1.4), é invariante por $\mathcal{C}$. Temos

$$\mathcal{C} [\bar{\psi}_{\alpha,a}(x) \Upsilon_{\alpha\beta}^{e^\mu} \psi_{\beta,a}(x + e^\mu)] = \bar{\psi}_{\gamma,a}(x + e^\mu) \mathfrak{A}_{\gamma\alpha} \Upsilon_{\alpha\beta}^{e^\mu} \mathfrak{B}_{\beta\rho} \psi_{\rho,a}(x)$$

o que corresponde ao termo da ação $\bar{\psi}_{\alpha,a}(x) \Upsilon_{\alpha\beta}^{\epsilon - e^\mu} \psi_{\beta,a}(x - e^\mu)$ se valer a condição

$$\mathfrak{A} (\Upsilon^{e^\mu})^t \mathfrak{B} = \Upsilon^{-e^\mu},$$

onde t denota a matriz transposta. Para tanto, precisamos de $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = I$ e $\mathfrak{A}(\gamma^\mu)^t = -\gamma^\mu$. Uma vez que $(\gamma^{0,2})^t = \gamma^{0,2}$ e $(\gamma^{1,3})^t = -\gamma^{1,3}$, das propriedades de anti-comutação das matrizes de Dirac, encontramos que $\mathfrak{A} = \gamma^0\gamma^2$, e $\mathfrak{B} = \gamma^2\gamma^0$.

A identidade $\langle \mathcal{C}F \rangle_{S=0} = \langle F \rangle_{S=0}$ é uma consequência direta da fórmula de mudança de variáveis estabelecida na Eq. (I.1.5.1). Portanto, $\mathcal{C}$ age nas funções de correlação como uma simetria linear que preserva a ordem.

Vamos mostrar agora que a simetria $\mathcal{C}$ pode ser implementada em todo o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Vemos que $\mathcal{C}\Theta\tilde{\psi} = -\Theta\tilde{\psi}$. Então, para um monômio de grau ímpar F , temos $\mathcal{C}\Theta F = -\Theta\bar{F}$; já para um monômio F de grau par vemos $\mathcal{C}\Theta F = \Theta\bar{F}$. Considere agora um monômio F , com suporte em $x \geq 0$. Temos que

$$\langle \mathcal{C}F\Theta\mathcal{C}F e^{-S} \rangle_{S=0} = (-1)^\sigma \langle \Theta F F e^{-S} \rangle_{S=0} = \langle F\Theta F \rangle$$

onde $\sigma = 1$ se F tem grau ímpar ímpar e $\sigma = 0$ se F tem grau par. Para uma função arbitrária F decompomos F na forma $F = F_o + F_e$, onde F_o possui apenas monômios de grau ímpar e F_e apenas monômios de grau par. Assim, uma vez que $\langle CF_e \Theta CF_o e^{-S} \rangle_{S=0} = \langle F_e \Theta F_o \rangle = 0$, obtemos $\langle CF \Theta CF e^{-S} \rangle_{S=0} = \langle F \Theta F \rangle$. Logo, se $F \in \mathcal{N}$ então $CF \in \mathcal{N}$ e C pode ser expresso no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ por uma transformação anti-unitária tal que $C^2 = -I$.

□

Nota I.1.d Para todas as simetrias na Proposição I.1.7, exceto pelas rotações e pela reflexão temporal, as matrizes de transformação das variáveis de Grassmann são diagonais ou anti-diagonais (i.e. diagonais ao longo da diagonal secundária), a matriz de transformação da Reflexão Temporal é anti-diagonal em blocos (i.e. diagonal em blocos segundo a diagonal secundária), de forma que a fórmula de mudança de variáveis da Eq. (I.1.5.1) pode ser facilmente aplicada.

Mais ainda, é fácil ver que da definição da Reflexão temporal que $\neg$ é tal que $F \in \mathcal{N} \Rightarrow \neg F \notin \mathcal{N}$. E, portanto, não pode ser implementada no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

As simetrias 1 a 5 e a simetria 7 são simetrias usuais na teoria quântica de campos tradicional. Já a simetria 6, a Reflexão Temporal, é nitidamente uma característica da teoria em espaços euclidianos. Essa simetria foi originalmente desenvolvida por nós no contexto desse modelo (tendo sido aplicada em paralelo ao modelo de cromodinâmica na Ref. VEIGA, O'CARROLL E SCHOR [2004]) afim de mostrar que a função de dois pontos (dada na Eq. (I.1.4.4) é diagonal.

Para concluir essa Seção, mostraremos que a função de correlação de dois pontos (dada na Eq. I.1.4.4) é diagonal, e mais ainda, que o espectro da região de partículas e anti-partículas são idêntico. Pela definição dada na Proposição I.1.7, C transforma os $\tilde{\psi}$'s na forma (retendo apenas os índices de spin): $\psi_{+\frac{1}{2}}^u \mapsto -\bar{\psi}_{-\frac{1}{2}}^l, \psi_{-\frac{1}{2}}^u \mapsto \bar{\psi}_{+\frac{1}{2}}^l, \psi_{+\frac{1}{2}}^l \mapsto -\bar{\psi}_{-\frac{1}{2}}^u, \psi_{-\frac{1}{2}}^l \mapsto -\bar{\psi}_{+\frac{1}{2}}^u$, e o mesmo substituindo os ψ 's com barra e sem barra. Logo, obtemos $\langle \bar{\psi}_s^u \psi_{s'}^u \rangle = \pm \langle \psi_{-s}^l \bar{\psi}_{-s'}^l \rangle$, onde o sinal - denota $s = s'$, e o sinal + denota os demais casos. Seja S a transformação linear que leva os ψ_s^l 's nos ψ_s^u 's. Explicitamente, S tem entradas não nulas apenas na diagonal secundária e $S_{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = -S_{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} = 1$. É fácil verificar que $SS^T = I$ e $S^2 = -I$. Logo

$$G_{ss'}^l(x, y) = S_{sj} G_{jk}^u(x, y) S_{ks'}^t,$$

a mesma transformação vale para $\Gamma^u = (G^u)^{-1}$, i.e. $\Gamma^l = S\Gamma^u S^t$. Logo $\det \Gamma^l = \det \Gamma^u$, o que implica que as propriedades espectrais para partículas e anti-partículas são idênticas.

Agora, aplicando a simetria $\mathcal{PC}\overline{\mathbb{I}}$, encontramos a seguinte relação, após fazermos um deslocamento de meia unidade na coordenada temporal da rede

$$G_{+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^l(u, v) = G_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}^l(u, v) = 0 \text{ e } G_{+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}^l(u, v) = G_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^l(u, v).$$

Portanto G^l (e, pela discussão do parágrafo anterior, G^u) é múltiplo da identidade.

Como pode ser observado, as simetrias são dependentes da dimensão d do modelo. Para $d = 2$, por exemplo, obviamente não teremos rotações em torno dos eixos e_1 e e_2 e claro também não temos reflexões do eixo e_3 . As demais simetrias podem ser implementadas no nesse caso, mas a forma da matriz $\mathfrak{A}$ pode mudar. Novamente, para a conjugação de carga em $d = 2$ temos $\mathfrak{A} = \gamma^1$.

Capítulo 2

Espectro de Uma Partícula

“Can we call something with which the concepts of position and motion cannot be associated in the usual way, a thing, or a particle? And if not, what is the reality which our theory has been invented to describe? The answer to this is no longer physics, but philosophy.

... ”

Max Born

Na teoria quântica de campos partículas e seus estados ligados são descritas pelo comportamento coletivo dos campos. Deste ponto de vista, a descrição do comportamento de uma partícula é equivalente a descrição da propagação de uma perturbação (ou seja de uma excitação de um campo) no tempo e no espaço. Ao contrário da mecânica quântica tradicional, no caso euclidiano, onde temos tempo imaginário, uma partícula livre não se propaga no tempo como uma onda plana e^{-iEt} , mas sim decai como e^{-Et} . A rigor isto significa que a probabilidade de encontrarmos uma partícula criada em $t = 0$ em um instante $t > 0$ diminui exponencialmente com uma taxa que depende da energia da partícula. Da relatividade, a menor taxa de

decaimento deve ocorrer quando a partícula tiver momento zero ($\vec{p} = 0$), uma vez que usualmente tem-se $E = \vec{p}^2 + m$ (onde fixamos a velocidade da luz $c = 1$), e é ao valor $E(\vec{p} = \vec{0})$, a energia de repouso da partícula, que denominamos massa da partícula.

Neste Capítulo, mostraremos como determinar o espectro de energia-momento associado ao subespaço de uma partícula. Para tanto como mostrado na Proposição I.1.5, devemos localizar os pólos em p^0 puramente imaginário da transformada de Fourier da função de dois-pontos, definida na Eq. (I.1.4.4). Graças ao teorema de *Paley-Wiener* (para detalhes veja Ref. REED E SIMON [1978a]), a identificação destes pólos pode ser feita por meio de um estudo detalhado do decaimento da função de dois-pontos, definida na Eq. (I.1.4.4), este será o procedimento adotado na Seção seguinte.

2.1 Decaimento e Analiticidade da Função de Dois-Pontos

Antes de começarmos a análise do decaimento da função de dois-pontos, vamos coloca-la numa forma mais conveniente para a tarefa. Em primeiro lugar, as funções de correlação dadas na Seção I.1.4 são invariantes por translação de forma que podemos escrever (com algum abuso de notação) $G_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) = G_{\alpha\beta}^{ab}(x - y, 0) \equiv G_{\alpha\beta}^{ab}(x - y)$. Mais ainda, é fácil ver que as funções correlação de dois-pontos normalizadas é múltipla da identidade nos índices de sabor, de forma que podemos tomar

$$G_{\alpha\beta}^{ab}(x - y) = \delta_{ab} G_{\alpha\beta}^{ab}(x - y) \equiv \delta_{ab} G_{\alpha\beta}(x - y).$$

Ainda pela discussão feita na Seção I.1.5, $G_{\alpha\beta}(x - y)$ é diagonal no índice de spin, logo podemos tomar $G_{\alpha\beta}^{ab}(x - y) = \delta_{ab} \delta_{\alpha\beta} G_{\alpha\alpha}(x - y) \equiv \delta_{ab} \delta_{\alpha\beta} G_{\alpha}(x - y)$, sendo que quando nos restringimos aos índices de spin de partícula (upper) G é múltipla da identidade.

Nosso objetivo agora consistirá em estudar $G_{\alpha}(x - y)$ e as singularidades de sua transformada de Fourier. Para tal fim, usaremos o *método de desacoplamento de hiperplanos* (veja a Ref. SPENCER [1975]). Para utilizar este método, nós introduzimos uma família de variáveis extras z_{a_i} , onde $a_0 \in \mathbb{Z}_{\frac{1}{2}}$ para $i = 0$, e $a_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 1, \dots, d$, modificando as constantes de acoplamento de κ para z_{a_i} , para todos os termos da ação

que atravessam o hiperplano (chamado hiperplano a_i) que se situa entre todos os pares da forma $(x, x + e^i)$ e $(x + e^i, x)$ onde $x^i = a$. O efeito obtido é que igualar uma variável z_{a_i} a zero corresponde a separar o modelo em duas regiões em cujos campos não estão correlacionados, cuja a fronteira é este hiperplano a_i . Dizemos que o hiperplano a_i separa os pontos da rede x e y , quando o hiperplano a_i se situa entre estes pontos (i.e. $x^i \leq a_i < y^i$ ou $y^i \leq a_i < x^i$). É importante notar que a expansão em polímeros da Seção I.1.3 é controlável mesmo com a introdução de acoplamentos distintos em cada elo, sendo necessário apenas que a magnitude de cada um destes acoplamentos esteja dentro da região de convergência dada na Eq. (I.1.3.2), logo precisamos apenas que $\max | \frac{z_{a_i}}{M_0} | \leq | \frac{\kappa}{M_0} |$ para estabelecermos a proposição seguinte

Figura I.2.1. O parâmetro de acoplamento κ foi substituído pelas variáveis de hiperplano z_{a_i} . Em destaque o hiperplano z_{y_3} separando os pontos escuros dos pontos claros.

Proposição I.2.1 - *Seja I uma coleção arbitrária de pares (a, i) , $a \in \Lambda$, $i = 0, 1, \dots, d$ e $G_\alpha(x, y, \{z_{a_i}\}_{a_i \in I}, \kappa)_\Lambda$, a função de correlação de dois-pontos normalizada no volume finito Λ dada na Eq. (I.1.4.4) com acoplamento z_{a_i} no hiperplano a_i para todo $(a, i) \in I$ e κ nos demais. Para $M_0 \neq 0$, $\lambda > 0$, N fixos, existem constantes positivas B_0 e C_0 tais que para qualquer I finito, temos*

1. $G_\alpha(x, y, \{z_{a_i}\}_{a_i \in I}, \kappa) = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}_{\frac{1}{2}} \times \mathbb{Z}^d} G(x, y, \{z_{a_i}\}_{a_i \in I}, \kappa)_\Lambda$ existe na região $|\kappa| \leq B_0$ e todo $z_{a_i} \in [-B_0, B_0]$.
2. $G(x, y, \{z_{a_i}\}_{a_i \in I}, \kappa)$ pode ser continuada analiticamente para a região $\kappa \in \mathbb{C}$ e $z_{a_i} \in \mathbb{C}$ onde $|\kappa| \leq B_0$ e todo $|z_{a_i}| \leq B_0$.
3. Nesta região, $|G(x, y, \{z_{a_i}\}_{a_i \in I}, \kappa)| \leq C_0$.

Demonstração - É uma consequência imediata das conclusões da Seção I.1.3.

□

Nota I.2.a Deve ser enfatizado que as constantes B_0 e C_0 são independentes da escolha das variáveis de hiperplano z_{a_i} , no entanto, por outro lado estas constantes são dependentes dos parâmetros que delimitam a região de analiticidade como λ, M_0, N, s e d . A constante B_0 é dada na Seção I.1.3.

A introdução das variáveis de hiperplano, nos permite realizar um controle *muito* mais fino do que o que seria obtido apenas com expansões em séries de potência de κ , mesmo tirando vantagem do modelo ser fermiônico. De fato, uma expansão de Taylor em κ nos fornece

$$G_\alpha^a(x, y) = \langle \bar{\psi}_\alpha^a(x) \psi_\alpha^a(y) \rangle_{\kappa=0} + \int_0^\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa'} \langle \bar{\psi}_\alpha^a(x) \psi_\alpha^a(y) \rangle_{\kappa'} d\kappa'$$

e portanto a cada truncamento da série temos apenas informações locais restritas a uns poucos pontos da rede. Já uma expansão em séries de potência de uma variável de hiperplano z_{a_i} nos fornece

$$G_\alpha^a(x, y; \kappa, z_{a_i}) = \langle \bar{\psi}_\alpha^a(x) \psi_\alpha^a(y) \rangle_{\kappa, z_{a_i}=0} + \int_0^{z_{a_i}} \frac{\partial}{\partial z_{a_i}'} \langle \bar{\psi}_\alpha^a(x) \psi_\alpha^a(y) \rangle_{\kappa, z_{a_i}'} dz_{a_i}',$$

e a cada truncamento guardamos informações sobre a correlação de toda uma região da rede.

Como dito anteriormente, fazendo um dos $z_{a_i} = 0$, o sistema se quebra em dois pedaços e temos o

Lema I.2.1.A *Se o hiperplano $b_i \in I$ separa os pontos x e y , então $G_\alpha^a(x, y, \{z_{a_i}\}_{a_i \in I}, \kappa) = 0$ quando $z_{b_i} = 0$.*

Demonstração - A prova em volume finito é trivial, uma vez que a rede Λ se separa em duas redes disjuntas Λ_1 e Λ_2 , e portanto a função de dois-pontos $\langle \bar{\psi}_{\alpha a}(x) \psi_{\beta b}(y) \rangle_\Lambda$ se decompõe no produto $\langle \bar{\psi}_{\alpha a}(x) \rangle_{\Lambda_1} \langle \psi_{\beta b}(y) \rangle_{\Lambda_2} = 0$, onde $x^i \leq a \leq y^i$ ou $y^i \leq a \leq x^i$, uma conclusão análoga vale para $\langle \psi_{\alpha a}(x) \bar{\psi}_{\beta b}(y) \rangle_\Lambda^*$. A igualdade em volume infinito é obtida pelo uso da Proposição I.2.1.

□

Usando o Lema I.2.1.A e fazendo uma estimativa de Cauchy, temos

$$|G_\alpha^a(x, y)| \leq C_0 \left| \frac{\kappa}{B_0} \right|^{|x-y|}, \quad (\text{I.2.1.1})$$

onde $|x| = \sum_{i=0}^{d+1} |x^i|$. Então pelo teorema de *Paley-Wiener* (veja a Ref. REED E SIMON [1978a]), $\tilde{G}_\alpha^a$, a transformada de Fourier de G_α^a , é analítica para p_i na faixa $\|\text{Im } p_i\| < \ln |\frac{\kappa}{B_0}|^{-1}$, $i = 0, 1, \dots, d$. Essa região é inadequada para estudar as singularidades de $\tilde{G}$, uma vez que ela não inclui estas singularidades. Portanto, nós precisaremos de uma extensão meromórfica de $\tilde{G}$, em uma região maior que inclua pelo menos os pontos $p_i = \ln |\frac{\kappa}{B_0}|^{-1}$, onde ocorrem as singularidades mais baixas de $\tilde{G}$ em $(p_0, \vec{p})$. Nossa estratégia é mostrar que G é inversível, e usar a função $\Gamma(x)$, inversa de G na região dada pela Proposição I.2.1, de forma que $\tilde{\Gamma}(p) = [\tilde{G}(p)]^{-1}$, e mostrar que $\tilde{\Gamma}$ é analítica em uma região suficientemente maior que a região de analiticidade de $\tilde{G}$. Para estabelecermos este fato, iremos evocar novamente o método de desacoplamento de hiperplanos e portanto precisaremos de uma definição para Γ na situação onde a invariância translacional não está presente (uma vez que esta propriedade deixa de valer quando introduzimos acoplamentos diferentes para alguns hiperplanos). Para tanto, temos 0

Lema I.2.1.B *Para $M_0, \lambda \neq 0$, existem constantes $B_1 \leq B_0$ (onde B_0 é dado na Proposição I.2.1) e C_1 tais que para qualquer número fixo de pares (a, i) , $G_{z_{ai}}$ (com núcleo $G_\alpha(x, y, \{z_{ai}\}, \kappa)$) define um operador limitado em $\ell^2(A)$ (onde $A = \mathbb{Z}_{\frac{1}{2}}^d \times \mathcal{S} \times \mathcal{N}$)*

na região $|\kappa| \leq B_1$ e todos $|z_{ai}| \leq B_1$. O operador inverso Γ é analítico nesta região e obedece à desigualdade

$$\sup_{|\kappa|, |z_{ai}| \leq B_1, x, y \in \mathbb{Z}^{\frac{d+1}{2}}} |\Gamma_{\alpha\beta}(x, y)| \leq C_1.$$

Mais ainda, fazendo todos os $z_{ai} = \kappa$, $\Gamma_{\alpha\beta}^{ab}(x, y, \kappa)$ é invariante por translação e as transformadas de Fourier de Γ e G satisfazem

$$\tilde{\Gamma}(p, \kappa) \tilde{G}(p, \kappa) = 1_{\ell^2(A)}.$$

Demonstração - Seja

$$G(x - y) = \delta(x - y)G_c + \delta G(x, y),$$

onde G_c contém somente as contribuições locais para G e δG as contribuições restantes. Pelo Lema I.2.1.A, δG obedece, na região definida pela proposição,

$$|\delta G_{\alpha,\beta}^{ab}(x, y)| \leq C_0 \left| \frac{B_1}{B_0} \right|^{|x-y|}.$$

Pelo Lema de Holmgren¹ (veja a Ref. SIMON [1994] para os detalhes), δG define um operador limitado em $\ell^2(A)$ com norma

$$\|G_c^{-1} \delta G\| \leq C' B_1,$$

onde C' calculado pelo Lema de Holmgren. Assim, para B_1 pequeno o suficiente, $\|\delta G\| < 1$. Então $G^{-1} = G_c^{-1}(1 + G_c^{-1} \delta G)^{-1}$ existe se $G_c \neq 0$.

Tomamos $\langle \bar{\psi}_{\alpha a}(x) \psi_{\alpha a}(x) \rangle = \mathcal{G}_2 + O(\kappa^2)$. O termo $\mathcal{G}_2$ pode ser calculado

¹**Lema de Holmgren:** Seja A um operador em $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ tal que

$$\sup_x \left| \sum_y A_{xy} \right| = B, \quad \sup_x \left| \sum_y A_{xy} \right| = C,$$

com B e C finitos. Então A é um operador limitado em $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ tal que $\|A\| \leq B^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}$.

explicitamente, e temos

$$\mathcal{G}_2 = \frac{1}{M_0} \frac{\sum_{k=0}^{\frac{sN}{2}-1} F_k}{\sum_{k=0}^{\frac{sN}{2}} F_k} = \frac{1}{M_0} \left[1 - \frac{F_{\frac{sN}{2}}}{\sum_{k=0}^{\frac{sN}{2}-1} F_k} \right],$$

onde $F_n = \frac{(2n)!}{n!} M_0^{2n} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^n$. Para $M_0, \lambda \neq 0$, podemos encontrar $\mathcal{G}_2 \neq 0$ e portanto por continuidade $G_c \neq 0$ em toda uma vizinhança de $\kappa = 0$. Logo, a inversa de G existe e é dada por

$$\Gamma(x, y, z_{ai}, \kappa) = \delta_{xy} \delta_{ab} \delta_{\alpha\beta} G_c^{-1} + \delta \Gamma_{\alpha, \beta}^{ab}(x, y, z_{ai}, \kappa)$$

(índices de spin e sabor não são mostrados por economia, uma vez que ambos os operadores são diagonais nestes índices), e $\delta \Gamma$ dado pela série de Neumann

$$\delta \Gamma(x, y, z_{ai}, \kappa) = \delta G(x, y) + \cdots + (-1)^P \sum_{z_1, \dots, z_P} \delta G(x, z_1) \cdots \delta G(z_P, y) + \cdots$$

Fazendo todos os $z_{ai} = \kappa$, G comuta com operadores de translação, e portanto, Γ também comuta com estes operadores. De onde

$$\sum_{z, \rho, c} \Gamma_{\alpha\rho}^{ac}(x-z) G_{\rho\beta}^{cb}(z-y) = \delta_{ab} \delta_{\alpha\beta} \delta_{x-y}. \quad (\text{I.2.1.2})$$

tomando a transformada de Fourier da Eq. (I.2.1.2), temos

$$\tilde{\Gamma}(p) G(p) = 1_{s \times s} \quad (\text{I.2.1.3})$$

□

Uma vez definido Γ , nosso próximo passo é mostrar que Γ decai mais rapidamente que G . Como visto, isto implica que sua transformada de Fourier $\tilde{\Gamma}$ é analítica numa faixa mais larga que a faixa de analiticidade de $\tilde{G}$. Novamente, permitimos as variáveis de hiperplanos fazerem seu trabalho, e obtemos o

Lema I.2.1.C *Se o hiperplano a_i , $i = 1, \dots, d$, separa os pontos x e y então para*

$x^0 \leq y^0$, temos

$$\left. \frac{\partial G_\alpha}{\partial z_{ai}} \right|_{z_{ai}=0} (x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} +\frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha', \beta', \\ \{g|g_i=a\}}} \langle \bar{\psi}_{\alpha a}(x) \psi_{\beta' a}(g) \rangle \Upsilon_{\alpha' \beta'}^{-e^i} \langle \bar{\psi}_{\alpha' a}(g+e^i) \psi_{\alpha a}(y) \rangle, \\ \\ se \ x^i \leq a < y^i, \\ \\ +\frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha', \beta', \\ \{g|g_i=a\}}} \langle \bar{\psi}_{\alpha a}(x) \psi_{\beta' a}(g+e^i) \rangle \Upsilon_{\alpha' \beta'}^{+e^i} \langle \bar{\psi}_{\alpha' a}(z) \psi_{\alpha a}(y) \rangle, \\ \\ se \ x^i \geq a > y^i, \end{array} \right.$$

se $x^0 > y^0$, então temos

$$\left. \frac{\partial G_\alpha}{\partial z_{ai}} \right|_{z_{ai}=0} (x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} +\frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha', \beta', \\ \{g|g_i=a\}}} \langle \psi_{\alpha a}(x) \bar{\psi}_{\alpha' a}(g) \rangle^* \bar{\Upsilon}_{\alpha' \beta'}^{+e^i} \langle \psi_{\beta' a}(g+e^i) \bar{\psi}_{\alpha a}(y) \rangle^*, \\ \\ se \ x^i \leq a < y^i, \\ \\ +\frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha', \beta', \\ \{g|g_i=a\}}} \langle \psi_{\alpha a}(x) \bar{\psi}_{\alpha' a}(g+e^i) \rangle^* \bar{\Upsilon}_{\alpha' \beta'}^{-e^i} \langle \psi_{\beta' a}(g) \bar{\psi}_{\alpha a}(y) \rangle^*, \\ \\ se \ x^i \geq a > y^i, \end{array} \right.$$

para $i = 0$, temos

$$\left. \frac{\partial G_\alpha}{\partial z_{a0}} \right|_{z_{a0}=0} (x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} +\frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha', \beta', \\ \{g|g_0=a\}}} \langle \bar{\psi}_{\alpha a}(x) \psi_{\beta' a}(g) \rangle \Upsilon_{\alpha' \beta'}^{-e^0} \langle \bar{\psi}_{\alpha' a}(g+e^0) \psi_{\alpha a}(y) \rangle, \\ \\ se \ x^0 \leq a < y^0 \\ \\ +\frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha', \beta', \\ \{g|g_0=a\}}} \langle \psi_{\alpha a}(x) \bar{\psi}_{\alpha' a}(g+e^0) \rangle^* \bar{\Upsilon}_{\alpha' \beta'}^{-e^0} \langle \psi_{\beta' a}(g) \bar{\psi}_{\alpha a}(y) \rangle^*, \\ \\ se \ x^0 \leq a < y^0 \end{array} \right.$$

Demonstração - Suponha que $i \neq 0$, e $x^0 \leq y^0$. Então $G_\alpha^{ab}(x, y) = \langle \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\alpha(y) \rangle$. Assim,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G_{\alpha\alpha}^a}{\partial z_{ai}} \right|_{z_{a0}=0}(x, y) = & -\frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha', \beta', \\ \{g|g_i=a\}}} \int \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\alpha(y) \left(\bar{\psi}_{\alpha'b}(g) \Upsilon_{\alpha'\beta'}^{+e^i} \psi_{\beta'b}(g + e^i) \right. \\ & \left. + \bar{\psi}_{\alpha'a}(g + e^i) \Upsilon_{\alpha'\beta'}^{-e^i} \psi_{\beta'a}(g) \right) d\bar{\psi} d\psi. \end{aligned}$$

Para o caso $x^i < y^i$, o primeiro termo no lado direito da equação se anula, enquanto para $x^i > y^i$ o segundo termo se anula. Reordenando os campos fermiônicos temos o resultado para este caso. A prova para os demais casos é similar.

□

Lema I.2.1.D Suponhamos que $\lambda, M_0 > 0$ sejam fixos, $|\kappa|$ e todos os $|z_{ai}|$ são menores que B_1 (dado na Proposição I.2.1.B). Se o hiperplano a_i separa os pontos x e y , então

- i. $\Gamma_{\alpha\beta}^{ab}(x, y, z_{ai} = 0, \{z_{bi}\}, \kappa) = 0$
- ii. $\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{ab}}{\partial z_{ai}}(x, y, z_{ai} = 0, \{z_{bi}\}, \kappa) = 0$, if $|x - y| > 1$.
- iii. $\frac{\partial^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{ab}}{\partial z_{ai}^2}(x, y, z_{ai} = 0, \{z_{bi}\}, \kappa) = 0$

Demonstração -

- i. Fazendo $z_{ai} = 0$, o espaço $\ell^2(A)$ se quebra na soma direta $\ell^2(A) = \ell^2(A_+) \oplus \ell^2(A_-)$, onde $A_- = \{A|x^i \leq a\}$ and $A_+ = \{A|x^i > a\}$. Pelo Lema I.2.1.A, $G = G_{A_+} \oplus G_{A_-}$, logo $\Gamma = \Gamma_{A_+} \oplus \Gamma_{A_-}$, o que conclui a demonstração de i.
- ii. Usando $\Gamma G = 1$, é fácil ver que $G \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{ai}} + \frac{\partial G}{\partial z_{ai}} \Gamma = 0$. De forma que temos $\frac{\partial \Gamma}{\partial z_{ai}} = -\Gamma \frac{\partial G}{\partial z_{ai}} \Gamma$, ou expresso em termos dos núcleos

$$\left. \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}}{\partial z_{ai}} \right|_{z_{ai}=0}(x, y) = - \sum_{\substack{z_i \leq a, \\ w_i > a, \\ \rho_1, \rho_2}} \Gamma_{\alpha\rho_1}(x, z) \left. \frac{\partial G_{\rho_1\rho_2}}{\partial z_{ai}} \right|_{z_{ai}=0}(z, w) \Gamma_{\rho_2\beta}(w, y). \quad (\text{I.2.1.4})$$

Seja $i = 0$. Da Eq. (I.2.1.4) e do Lema I.2.1.C, temos (índices de sabor não estão exibidos)

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}}{\partial z_{a0}} \right|_{z_{ai}=0} (x, y) &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{z_i \leq a, \\ w_i > a, \\ \rho_1, \rho_2}} \Gamma_{\alpha\rho_1}(x, z) \\
&\quad \left(\sum_{\substack{\alpha', \beta', \\ \{g|g_0=a\}}} \chi_{z_0 \leq w_0} \langle \bar{\psi}_{\rho_1 a}(z) \psi_{\beta' a}(g) \rangle \Upsilon_{\alpha' \beta'}^{-e^0} \langle \bar{\psi}_{\alpha' a}(g + e^0) \psi_{\rho_2 a}(w) \rangle \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{\alpha', \beta', \\ \{g|g_0=a\}}} \chi_{z_0 > w_0} \langle \psi_{\rho_1 a}(z) \bar{\psi}_{\alpha' a}(g + e^0) \rangle^* \bar{\Upsilon}_{\alpha' \beta'}^{-e^0} \langle \psi_{\beta' a}(g) \psi_{\rho_2 a}(w) \rangle^* \right) \\
&\quad \times \Gamma_{\rho_2 \beta}(w, y) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{z_i \leq a, \\ w_i > a, \\ \rho_1, \rho_2}} \sum_{\alpha', \beta', \{g|g_0=a\}} \Gamma_{\alpha\rho_1}(x, z) \left(\chi_{z_0 \leq w_0} G_{\rho_1 \beta'}(z, g) \Upsilon_{\alpha' \beta'}^{-e^0} G_{\alpha' \rho_2}(g + e^0, w) \right. \\
&\quad \left. + \chi_{z_0 > w_0} G_{\rho_1 \alpha'}(z, g + e^0) \bar{\Upsilon}_{\alpha' \beta'}^{-e^0} G_{\beta' \rho_2}(g, w) \right) \Gamma_{\rho_2 \beta}(w, y) \\
&= -\frac{1}{2} (\delta(x + e^0, y) \Upsilon_{\beta\alpha}^{-e^0} + \delta(x - e^0, y) \bar{\Upsilon}_{\alpha\beta}^{-e^0}) \\
&= \delta(x^0 - y^0, e^0) \delta(\vec{x}, \vec{y}) \delta_{\alpha\beta} (\delta_{\alpha 1} + \delta_{\alpha 2}).
\end{aligned} \tag{I.2.1.5}$$

A demonstração para os demais casos é análoga, o que demonstra ii.

iii. Para se demonstrar iii, podemos utilizar a mesma idéia utilizada em ii. No entanto, alternativamente usaremos um argumento de simetria. Seja $U : \Lambda \rightarrow \{-1, 1\}$,

dada por

$$U(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Lambda_+ \\ -1 & \text{se } x \in \Lambda_- , \end{cases}$$

onde os conjuntos Λ_+ e Λ_- são dados na prova do item i. Uma vez que medidas em volume-finito são invariantes pela transformação

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow U(x)\bar{\psi}(x)$$

$$z_{a_i} \rightarrow -z_{a_i} ,$$

isto implica que $G(x, y, \{z_{a_i}\}, \kappa) = U(x)U(y)G(x, y, \{z_{a_i}\}, \kappa)$. De onde vemos, que U define uma matrix diagonal e $U^2 = 1$, portanto $\Gamma(\{z_{a_i}\}) = U\Gamma(\{-z_{a_i}\})U$. Logo o núcleo $\Gamma(x, y, \{z_{a_i}\})$ é uma função ímpar dos z_{a_i} , e portanto todas suas derivadas pares se anulam em $z_{a_i} = 0$. O que conclui a demonstração do item iii.

□

Da proposição acima e, como feito para G , usando uma estimativa de Cauchy, mostramos que, para $|\kappa| \leq B_1$ e $|x - y| > 1$, temos

$$|\Gamma_{\alpha\beta}^{ab}(x, y, \kappa)| \leq C_1 \left| \frac{\kappa}{B_1} \right|^{3|x-y|}. \quad (\text{I.2.1.6})$$

Com isto, em distâncias suficientemente grandes, Γ decai três vezes mais rápido que G , e portanto sua transformada de Fourier $\tilde{\Gamma}$ é analítica em uma faixa três vezes mais larga que a de $\tilde{G}$, ou seja temos analiticidade até próximo do limiar de três partículas. Este resultado encerra esta Seção.

2.2 Massa e curva de dispersão de uma partícula

É evidente que os pólos de $\tilde{G}$ (e, portanto, o espectro de uma partícula) coincidem com os zeros de $\tilde{\Gamma}$ (a rigor deveríamos falar nos zeros de $\det \tilde{\Gamma}$, mas uma vez que $\tilde{G}$ é um múltiplo da identidade no spin e sabor os casos coincidem. Nesta Seção,

estudaremos os zeros de $\Gamma_{\alpha\beta}^{ab}(x, y)$, e finalmente obteremos explicitamente o espectro de uma partícula do modelo de Quatro-Fermions.

A estratégia adotada para o estudo dos zeros de $\tilde{\Gamma}$, consiste em separar a parte dominante Γ_0 de Γ , determinar os zeros de Γ_0 , para em seguida usar o rápido decaimento de Γ para controlar as modificação nos zeros de Γ_0 quando consideramos todas as contribuições para Γ . Os termos dominantes em G são

$$G(x) = \mathcal{G}_2 \delta(x, 0) - \frac{\kappa}{2} \mathcal{G}_2^2 \sum_{\substack{\mu=0 \\ \epsilon=\pm 1}}^d \delta(x, \epsilon e^\mu) + O(\kappa^2), \quad (\text{I.2.2.1})$$

onde $\mathcal{G}_2$ é dado na Eq.(I.1.1.7). De forma que temos,

$$\Gamma(x) = \mathcal{G}_2^{-1} \delta(x) - \kappa (\delta(|x_0 - e^0|) \delta(\vec{x}) + \frac{1}{2} \delta(x^0) \delta(|\vec{x}| - 1)) + \Omega(x), \quad (\text{I.2.2.2})$$

com $|\Omega(x)| \leq C_1 \left| \frac{\kappa}{B_1} \right|^{3|x|}$.

As soluções de $\det \tilde{\Gamma}(p^0, \vec{p}) = 0$ com p^0 puramente imaginário (i.e. os pontos no espectro de uma partícula) são as raízes da equação

$$\tilde{\Gamma}_\alpha^a(p^0, \vec{p}) + \tilde{\Omega}_\alpha^a(p^0, \vec{p}) = 0.$$

Na expressão acima, α e a indicam os índices de spin e sabor que foram fixados. A proposição a seguir estabelece as propriedades estas raízes.

Lema I.2.2.A *Existe uma constante $B_2 > 0$ tal que para $|\kappa| \leq B_2$ (com λ, M_0 fixos) e para todo $\vec{p} \in (-\pi, \pi]^d$, $\tilde{\Gamma}(p^0, \vec{p})$ é analítica em $z = e^{ip_0}$ na coroa circular*

$$A_0 = \left\{ z \in \mathbb{C} \left| \left| \frac{\kappa}{B_1} \right|^3 \leq |z| \leq \left| \frac{B_1}{\kappa} \right|^3 \right. \right\}$$

e na região

$$A_1 = \{ z \mid |\kappa|^2 \leq |z| \leq |\kappa|^{-2} \},$$

$\tilde{\Gamma}(p^0, \vec{p})$ possui exatamente um zero, $z = z_0(\vec{p}) \equiv {}_-0(\vec{p}, \kappa)$. Esse zero é duas vezes

degenerado e obedece as propriedades

1. z_0 é analítica no disco, perfurado na origem, $0 < |\kappa| \leq B_2$ e analítica real em $\vec{p}$.
2. $z_0 = \mathcal{G}_2^{-1} \kappa^{-1} - \sum_{\mu=1}^3 \cos p^\mu + O(\kappa)$.
3. para $0 < \kappa < B_2$, $z_0(\vec{p}, \kappa)$ tem um mínimo global em $\vec{p} = \vec{0}$ e nesta região $\frac{\partial^2 z_0}{\partial p^\mu \partial p^\nu}$ é estritamente positiva. Em palavras, a curva de dispersão $z(\vec{p}) = e^{-\omega(\vec{p})}$ é convexa para $|\vec{p}|$ pequeno.

Demonstração - Escrevamos $C(z, \vec{p})$ para denotar $\tilde{\Gamma}_\alpha^a(p^0, \vec{p}) + \tilde{\Omega}_\alpha^a(p^0, \vec{p}) = C_\alpha^a(e^{ip_0}, \vec{p})$. Da Eq. (I.2.2.2), temos que

$$C(z, \vec{p}) = \mathcal{G}_2^{-1} - \kappa z - \kappa \sum_{\mu=1}^3 \cos p^\mu + C_s(z, \vec{p}), \quad (\text{I.2.2.3})$$

onde C_s é analítica real em $\vec{p}$ e analítica em z na coroa circular A_0 . Ainda em A_0 , vale que

$$|C_s(z, \vec{p})| \leq C_1 \left(\frac{2 \left| \frac{\kappa}{B_1} \right|^3}{1 - \left| \frac{\kappa}{B_1} \right|^3} \right) \times \left(\frac{|z| \left| \frac{\kappa}{B_1} \right|^3}{1 - |z| \left| \frac{\kappa}{B_1} \right|^3} + \frac{|z|^{-1} \left| \frac{\kappa}{B_1} \right|^3}{1 - |z|^{-1} \left| \frac{\kappa}{B_1} \right|^2} \right). \quad (\text{I.2.2.4})$$

Seja $C_0 = C - C_s$. Usando a estimativa da Eq. (I.2.2.4) e o teorema de Rouché,² (veja a Figura I.2.2 vemos que C_0 e C tem o mesmo número de zeros em A_1 , estes zeros obedecem $z_0(\vec{p}, \kappa) = \mathcal{G}_2^{-1} \kappa^{-1} - \sum_{\mu=1}^3 \cos p^\mu + O(\kappa)$. Do teorema da função analítica implícita³, a função z_0 é analítica na região dada no item 1. Uma vez que a estimativa

²**Teorema de Rouché:** Dadas as funções h e f analíticas em $A \subseteq \mathbb{C}$ e um caminho fechado γ contido em A , homotópico a um ponto de A , então se $|f(z)| > |h(z) - f(z)|$ então f e h possuem o mesmo número de zeros no interior de γ .

Para entender a idéia por trás deste enunciado, imagine um cãozinho preso por uma coleira empunhada pelo seu dono. O cachorrinho e o dono dão voltas em uma árvore. Se o comprimento da guia da coleira for maior que a distância da árvore até o dono então o cãozinho pode correr e enrolar a guia em volta da árvore. De outro lado, se o tamanho da guia for insuficiente para o cão chegar a árvore, então o dono e o cão dão o mesmo número de voltas na árvore.

³**Teorema da Função analítica implícita:** Seja $F(x, y)$ uma função continuamente diferenciável, definida em um aberto S . Se existe $P = (a, b) \in S$, tal que $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ em P então existe uma vizinhança V de a e uma função analítica $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x, g(x)) = 0$ para todo $x \in V$.

Figura I.2.2. Intuição geométrica por trás do teorema de Rouché. Como a distância $g(z)$ entre as curvas é menor que a distância entre as curvas e a origem, então $h(z) = f(z) + g(z)$ e $f(z)$ dão o mesmo número de voltas em torno da origem.

dada no item 2 é válida para $\vec{p}$ com uma pequena parte imaginária, uma estimativa de Cauchy mostra que

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial p^i \partial p^j} = \delta_{ij} + O(\kappa).$$

Como z_0 dado no item 2 é uma função par dos p^μ 's, então $\frac{\partial z_0}{\partial p^i} = 0$. Mais ainda, a afirmação do item 2 implica que este mínimo é global para $|\vec{p}|$ pequeno.

□

Nota I.2.b Se $\eta(\vec{p})$ é o valor de $|\text{Im } p^0|$ para a singularidade de $\tilde{G}(p^0, \vec{p})$, então $\eta(\vec{p})$ é minimizado em $\vec{p} = \vec{0}$. A positividade de $G(x)$, implica que $\hat{G}(x^0, \vec{p})$, a transformada de Fourier em $\vec{x}$, satisfaz à desigualdade $|\hat{G}(x^0, \vec{p})| \leq \hat{G}(x^0, \vec{0})$, de forma que a menor taxa de decaimento ocorre em $\vec{p} = \vec{0}$. Uma vez que $\eta(\vec{p})$ determina este decaimento, temos $\eta(\vec{p}) \geq \eta(\vec{0})$. Como $z_0 = e^\eta$, vemos que a afirmação do item 3 do Lema I.2.2.A é geral (contudo isto não garante que este mínimo é estrito e não degenerado).

Com isto, podemos demonstrar o resultado principal deste Capítulo:

Proposição I.2.2 Existe uma função $m(\kappa, \mathcal{G}_2)$ analítica no disco cortado $\{\kappa : 0 < |\kappa| < B_2, \arg \kappa \neq \pi\}$ tal que

$$G((x_0, \vec{0})) = C|x^0|^{-\frac{3}{2}}e^{-m|x^0|}[1 + O(|x_0|^{-1+\delta})] + O(e^{-m'|x^0|}), \quad (\text{I.2.2.5})$$

onde a constante $C > 0$ é dada na Eq.I.2.1.1, $\delta > 0$ é arbitrário e $m' > m > 0$. Mais ainda,

$$m(\kappa, \mathcal{G}_2) = \ln \mathcal{G}_2^{-1} \kappa^{-1} - 3\mathcal{G}_2 \kappa + O(\kappa). \quad (\text{I.2.2.6})$$

Demonstração - Da Lema I.2.2.A, temos que

$$z_0(\vec{p}, \kappa) = \mathcal{G}_2^{-1} \kappa^{-1} - \sum_{\mu=1}^3 \cos p^\mu + O(\kappa).$$

Portanto, temos que $z_0(\kappa, \vec{p}) = e^{-\omega(\kappa, \mathcal{G}_2, \vec{p})}$, onde $\omega(\kappa, \mathcal{G}_2, \vec{p})$ é a curva de dispersão de energia-momento (lembramos que definimos $\hat{T}_0 = e^{-H}$). Então,

$$\omega(\kappa, \mathcal{G}_2, \vec{p}) = -\ln z_0, \quad (\text{I.2.2.7})$$

separando o termo $\mathcal{G}_2 \kappa^{-1}$ e usando uma expansão de Taylor de em torno de $\kappa = 0$

$$\omega(\kappa, \mathcal{G}_2, \vec{p}) = \ln(\mathcal{G}_2 \kappa) - \mathcal{G}_2 \kappa \sum_{\mu=1}^3 \cos p^\mu + O(\kappa^2), \quad (\text{I.2.2.8})$$

de onde concluímos que $m(\kappa, \mathcal{G}_2) \equiv \omega(\kappa, \mathcal{G}_2, \vec{0}) = \ln(\mathcal{G}_2 \kappa) - 3\mathcal{G}_2 \kappa + O(\kappa^2)$. É conveniente escrevermos

$$\omega(\kappa, \vec{p}) = m(\kappa, \mathcal{G}_2) + \varrho(\kappa, \mathcal{G}_2, \vec{p}) = m(\kappa, \mathcal{G}_2) + \mathcal{G}_2 \kappa \sum_{\mu=1}^3 (1 - \cos p^\mu) + O(\kappa^2).$$

De forma que apenas precisamos demonstrar a validade da Eq. (I.2.2.5).

Do Lema I.2.2.A, para κ suficientemente pequeno, $\tilde{G}((p^0, \vec{p}))$ é uma função meromórfica na região $\{(p^0, \vec{p}) | \text{Im } p^0 < -3 \ln \kappa\}$. As singularidades de $G((p^0, \vec{p}))$, na região $\{p | |\text{Im } p^0| < 3 \ln \kappa, |\text{Re } p^\mu| < \pi, \mu = 1, 2, 3\}$, são dois pólos, localizados em $p^0 = \mp i\omega(\kappa, \vec{p})$. Seja $\mp ir_0(\vec{p})$ o resíduo de cada um destes pólos. Mostraremos que

$$|G((x^0, \vec{x})) - r_0(\vec{p})e^{\omega(\kappa, \vec{p})|x|}| < C_\epsilon e^{-3|x|(\ln \kappa - \epsilon)}. \quad (\text{I.2.2.9})$$

Façamos $\tilde{G}((p^0, \vec{p})) = r_0(\vec{p})P(p) + R(p)$, onde

$$P(p) = \left\{ \frac{1}{1 - e^{-\omega(\kappa, \vec{p}) + ip_0}} + \frac{1}{1 + e^{-\omega(\kappa, \vec{p}) - ip_0}} \right\}.$$

Notemos que $\tilde{G}((p^0, \vec{p}))$ e $P(p)$ têm os mesmos resíduos nos pontos $\pm i\omega(\kappa, \vec{p})$. Portanto $R(p)$ é analítica em $\{(p^0, \vec{p}) \mid |\operatorname{Im} p^0| < -3 \ln \kappa\}$, uma vez que P e $\tilde{G}((p^0, \vec{p}))$ são periódicas em $p^i \rightarrow p^i + 2\pi$. Finalmente, é fácil ver que a transformada de Fourier inversa de $P(p)$ é dada por $\delta(x) + e^{-\omega(\kappa, \vec{p})|x|}$, o que demonstra a Eq. (I.2.2.9).

Seja $F((x^0, \vec{p}))$ a transformada de Fourier parcial de $G_\alpha^a((x^0, \vec{x}))$. Esta função satisfaz

$$F((x^0, \vec{p})) = r(\vec{p})e^{-\omega(\kappa, \vec{p})|x^0|} + O(e^{(3-\epsilon) \ln \kappa}). \quad (\text{I.2.2.10})$$

Fixando κ e escrevendo $\omega(\kappa, \vec{p}) = m(\kappa) + \rho(\kappa, \vec{p})$, onde $\omega(\kappa, \vec{0}) = m(\kappa)$ obtemos

$$G((x^0, \vec{0})) = \frac{e^{-m|x^0|}}{(2\pi^d)} \int_{T_d} r(\vec{p})e^{-\rho(\kappa, \vec{p})|x^0|} \prod_{\mu=1}^d dp^\mu + O(e^{(3-\epsilon) \ln \kappa}). \quad (\text{I.2.2.11})$$

Seja $G((x^0, \vec{0})) = g((x^0, \vec{0}))e^{-m|x^0|}$. Então reescalando a Eq. (I.2.2.11) encontramos

$$g((x^0, \vec{0})) = |x^0|^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{(2\pi^3)} \int_{T'_d} r(|x^0|^{\frac{-1}{2}} \vec{p})e^{-\rho(\kappa, |x^0|^{\frac{-1}{2}} \vec{p})|x^0|} \prod_{\mu=1}^3 dp^\mu + O(e^{(3-\epsilon) \ln \kappa}), \quad (\text{I.2.2.12})$$

onde $T_d = -(\pi, \pi]$ and $T'_d = -(\pi|x^0|^{\frac{-1}{2}}, \pi|x^0|^{\frac{-1}{2}}]$. Do item 3 do Lema I.2.2.A, temos que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\rho(a\vec{p})}{a^2}$$

existe e é igual a uma função quadrática $\varrho(\vec{p})$. Mais ainda, $r(\vec{p}) \leq C|\vec{p}|$ e $\varrho(\vec{p}) \geq C|\vec{p}|^2$ para alguma constante C . Com isto, o teorema da convergência dominada implica que

$$|x^0|^{\frac{3}{2}} g((x^0, \vec{0})) \rightarrow \int r(0)e^{-\varrho(\vec{p})} \frac{\prod_{\mu=1}^3 dp^\mu}{(2\pi^3)}.$$

Isto completa a demonstração.

□

Nota I.2.c É possível refinar a análise da Eq. (I.2.2.12), obtendo uma série assintótica convergente (como $C_0 + C_1|x^0| + C_2|x^0|^2 + \dots$) ao invés de apenas o fator dominante (veja a Ref. O'CARROL [1984]). Em outras palavras, podemos controlar nossa expansão em todas ordens. Note que um resultado análogo não pode ser obtido por métodos como os de campo médio.

A proposição acima estabelece a existência da curva de dispersão e da massa de uma partícula do modelo de Quatro-Fermions. Mais ainda, a Eq. (I.2.2.5) tem comportamento do tipo *Ornstein-Zernike* (de fato, para o caso de dimensão espacial d , obtemos o expoente $|x_0|^{-\frac{d}{2}}$. Em palavras, a função de correlação decai mais rapidamente quanto maior for a dimensão, uma vez que a partícula associada pode evoluir em mais direções, para os detalhes veja a Ref. PAES-LEME [1978].). A proposição seguinte estabelece propriedades de analiticidade da massa da partícula, mostrando que a única singularidade presente é a de $\ln \kappa$.

Proposição I.2.3 *Existe uma constante positiva B_3 e uma função $\tilde{\omega}(\kappa, \mathcal{G}_2, \vec{p})$ conjuntamente analítica em $\{\kappa \mid |\kappa| < B_3\}$ e $\vec{p} \in T_d$, tais que a relação de dispersão de energia-momento $\omega(\kappa, \mathcal{G}_2, \vec{p})$ obedece para $\kappa > 0$:*

$$\omega(\kappa, \mathcal{G}_2, \vec{p}) = -\ln \kappa + \tilde{\omega}(\kappa, \mathcal{G}_2, \vec{p}). \quad (\text{I.2.2.13})$$

Demonstração - Sabemos que $\omega(\kappa, \mathcal{G}_2, \vec{p}) = -\ln z$, onde $\omega(\kappa, \mathcal{G}_2, \vec{p})$ é o zero de $C(\kappa, \vec{p}, z)$ localizado na vizinhança de κ^{-1} . Retornando à Eq. (I.2.2.3) temos

$$C(z, \vec{p}) = \mathcal{G}_2^{-1} - \kappa(z + z^{-1}) - \kappa \sum_{\mu=1}^3 \cos p^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\kappa, \vec{p})(z^n + z^{-n})$$

onde

$$|a_n(\kappa, \vec{p})| \leq C_1 \left(\frac{|\kappa|}{B_1} \right)^{3n} \left(\frac{1 + \left(\frac{|\kappa|}{B_1} \right)^3}{1 - \left(\frac{|\kappa|}{B_1} \right)^3} \right). \quad (\text{I.2.2.14})$$

Façamos uma mudança de variáveis de z, κ para y, κ onde $y = z\kappa - \mathcal{G}_2^{-1}$. Então com esta mudança de variáveis, temos

$$H(\kappa, y, \vec{p}) \equiv C(\kappa, \vec{p}, \frac{y - \mathcal{G}_2^{-1}}{\kappa}) = -y - \frac{\kappa^2}{1+y} - \kappa \sum_{\mu=1}^3 \cos p^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\kappa, \vec{p})}{\kappa^n} (\mathcal{G}_2^{-1} + y)^n \\ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\kappa, \vec{p}) \kappa^n (\mathcal{G}_2^{-1} + y)^{-n}$$

Utilizando o limite dado na Eq. (I.2.2.14), fica claro que a série acima converge absolutamente na região $\vec{p} \in T_d$, $|y| < \frac{\mathcal{G}_2^{-1}}{2}$ e $|\kappa| < B_3 = \min \left\{ \left(\frac{2}{3} \mathcal{G}_2^{-1} B_1 \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{2} \mathcal{G}_2^{-1} B_1 \right)^{\frac{1}{4}} \right\}$. Assim, os termos individuais são conjuntamente analíticos em y , κ e $\vec{p}$ nesta região, $H(\kappa, y, \vec{p})$ também é conjuntamente analítica nesta região. Do teorema da função analítica implícita e do fato de que $\frac{\partial H}{\partial y}(y = 0) = -1 (\neq 0)$, concluímos que existe uma função $y_0(\kappa, \vec{p})$ tal que $H(\kappa, y(\kappa, \vec{p}), \vec{p}) = 0$ e $y_0(\kappa, \vec{p}) = \kappa \sum_{\mu=1}^3 \cos p^\mu + O(\kappa^2)$. Assim, tomando $z = \kappa^{-1}(\mathcal{G}_2^{-1} + y_0)$, obtemos

$$\tilde{\omega}(\kappa, \mathcal{G}_2, \vec{p}) = \ln(\mathcal{G}_2^{-1} + y_0(\kappa, \vec{p}))$$

que é analítica em um disco $|\kappa| < B_3$ para qualquer $\vec{p}$.

□

Os resultados deste Capítulo serão fundamentais para a obtenção do espectro de duas-partículas. Um dos resultados principais, neste sentido, é a existência de uma banda de duas partículas não ligadas, que começa no limiar de duas partículas $-2 \ln \mathcal{G}_2 \kappa$. Uma vez que o momento espacial de cada partícula é limitado, a largura desta banda é finita. Tomando $\vec{\pi} = (\pi, \dots, \pi)$, a largura da banda é dada por $W = 2[w(\vec{\pi}) - w(\vec{0})] = 24\kappa\mathcal{G}_2 + O(\kappa^2)$. O Capítulo seguinte será dedicado a obtenção dos estados *ligados* de duas partículas. Como veremos, estes estados aparecem próximos a esta banda de duas partículas livres.

Capítulo 3

O Espectro de Duas Partículas

“We used to think that if we knew one, we knew two, because one and one are two. We are finding that we must learn a great deal more about “and”.”

Sir Arthur Stanley Eddington

Em física, um estado ligado é um estado físico constituído de duas ou mais unidades fundamentais (partículas ou corpos) que se comportam como um único objeto. No contexto da mecânica quântica, onde o número de partículas é conservado, esses estados ligados correspondem a vetores do espaço de Hilbert correspondente a duas ou mais partículas cuja energia de interação é negativa. Portanto, estas partículas não podem ser separadas sem que haja algum gasto de energia. Ainda nesse contexto, o espectro de energia de um estado ligado é discreto, diferente do espectro de partículas isoladas que é contínuo (mesmo em nossa rede discreta, como vemos pela presença da banda de duas partículas livres). Nesse sentido, é possível o aparecimento de estados ligados instáveis com uma energia de ligação positiva, nos casos onde há uma “barreira de energia” que precisaria ser tunelada afim de que o estado ligado decaia em partículas não-ligadas, como ocorre por exemplo em alguns núcleos radioativos.

Retornando ao nosso caso, o mecanismo de atração induzido pela ação (Eq. (I.1.1.4)), não se dá pela interação direta das partículas mas sim por meio de um

mecanismo de polarização do vácuo. Em palavras, a polarização dos campos induzida pela Eq. (I.1.1.3), tendem a alinhar os campos da configuração de vácuo, gerando uma *interação efetiva* entre as partículas (veja a Ref. DASHEN, HASSLACHER E NEVEU [1974]). Os resultados desta Seção mostram que a magnitude do potencial de interação entre as partículas depende do parâmetro $\aleph$. Este parâmetro $\aleph$, em algum sentido, mede a polarização do vácuo, ou em outras palavras nos informa em quanto e como nosso caso desvia do caso de partículas livres (o caso gaussiano).

Neste Capítulo nos dedicaremos à análise da região de duas partículas do espectro. Parte deste trabalho foi iniciado no encerramento do Capítulo anterior quando discutimos a existência de uma banda de duas partículas de largura finita. Neste Capítulo, continuaremos esta análise para mostrar a existência de estados ligados de duas partículas. Estes estados ligados aparecem acima ou abaixo desta banda dependendo do sinal de $\aleph$.

3.1 Operadores de Schrödinger para Dois Corpos

Antes de mais nada, vamos desenvolver alguma intuição para os nossos resultados de estados ligados de duas partículas e para o método da demonstração no contexto de operadores de Schrödinger na rede. Para tanto, consideremos o hamiltoniano de duas partículas de massas iguais em $(\ell^2(\mathbb{Z}^d) \times \ell^2(\mathbb{Z}^d))$, dado por

$$H_2 = -\frac{1}{2m}(\Delta_1 + \Delta_2) + v_{12}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \equiv H_0 + V_2, \quad (\text{I.3.1.1})$$

sendo $\Delta_1 = \Delta \otimes I$ e $\Delta_2 = I \otimes \Delta$, denotamos por m a massa das partículas, $\vec{x} \in \mathbb{Z}^d$ e $-\Delta$ o laplaciano na rede. A ação do laplaciano $-\Delta$ em vetores $f \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ é dada por

$$-\Delta f(\vec{x}) = 2df(\vec{x}) - \sum_{i=1}^d [f(\vec{x} + e^i) + f(\vec{x} - e^i)]. \quad (\text{I.3.1.2})$$

O potencial de interação $v_{12}(x-y)$ em que estamos interessados tem a forma $v_{12}(x-y) = \lambda\delta(x-y) + W_{12}(x-y)$. Com isto, para $\lambda > 0$, temos um potencial repulsivo do tipo esfera dura. O termo W é não local, mas possui decaimento exponencial e é da ordem m^{-2} . Note que na Eq. (I.3.1.1), temos apenas coordenadas espaciais e não coordenadas

temporais. O hamiltoniano de uma partícula agindo em $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ é

$$H_1 = -\frac{\Delta}{2m} + v(\vec{x}), \quad (\text{I.3.1.3})$$

onde $v(\vec{x})$ é um potencial externo tal que $\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}|^{1+\nu} v(\vec{x}) = 0$, $\nu > 0$ e $v(\vec{x}) = v(-\vec{x})$.

Consideremos agora as translações unitárias na rede. Escrevendo $T^{\vec{a}} f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x} - \vec{a}, \vec{y} - \vec{a})$, onde $\vec{a} \in \mathbb{Z}^d$, podemos escrever $T^{\vec{a}} = e^{i\vec{P} \cdot \vec{a}}$, o que define os operadores auto-adjuntos de momento. Mais ainda, como $T^{e^i} T^{e^j} = T^{e^j} T^{e^i}$, temos que $[P^i, P^j] = 0$, $i, j = 1, \dots, d$. Uma vez que $[H_2, T^{\vec{a}}] = 0$, temos $[H_2, \vec{P}] = 0$, de forma que podemos determinar o espectro conjunto de $(H_2, \vec{P})$.

Vamos agora obter representações espectrais para o hamiltoniano H_2 . Note que, no caso mais geral onde temos massas distintas para as partículas, H_2 não é separável nas coordenadas do centro de massa e nas coordenadas relativas (como ocorre no contínuo), ainda assim H_2 comuta com as translações, o que nos leva a buscar uma representação espectral a partir de expansões de $f(x, y) \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ nas funções ϱ não pertencentes a ℓ^2 dadas por

$$\varrho(x, y, \vec{p}, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}(\vec{x}+\vec{y})} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}.$$

Em um espaço de Schwarz apropriado, as funções ϱ são auto-funções do operador de momento $\vec{P}$, cujo autovalor é $2\vec{k}$. Neste mesmo espaço, ϱ também é uma autofunção do hamiltoniano não-interagente H_0 , com autovalor

$$\begin{aligned} K(\vec{p}, \vec{k}) &\equiv -\frac{1}{2m} \left(\tilde{\Delta}(\vec{p} + \vec{k}) + \tilde{\Delta}(\vec{p} - \vec{k}) \right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^d [2 - \cos(p^i + k^i) - \cos(p^i - k^i)] \\ &= \frac{2}{m} \sum_{i=1}^d [1 - \cos(p^i) \cos(k^i)]. \end{aligned}$$

Note que o operador H_0 é um operador multiplicativo. O mesmo continua válido quando temos massas distintas e $K(\vec{p}, \vec{q})$ não pode ser separado nas contribuições da energia cinética do centro de massa e da energia cinética relativa. Seu espectro consiste em uma banda espectral finita, que se inicia em 0 ($\vec{p} = \vec{k} = \vec{0}$ ou $\vec{p} = \vec{k} = \vec{\pi} = (\pi, \dots, \pi)$) e tem como ponto mais alto o valor de energia $\frac{4d}{m}$ associado ao maior momento possível

para o sistema $\vec{p} + \vec{k} = \vec{\pi}$. É uma tarefa simples mostrar que nossas funções ϱ obedecem às relações de completeza e de ortogonalidade

$$\sum_{\vec{x}, \vec{y}} \varrho(\vec{x}, \vec{y}, \vec{p}_1, \vec{k}_1) \varrho^*(\vec{x}, \vec{y}, \vec{p}_2, \vec{k}_2) = \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2),$$

$$\int_{T_d} \int_{T_d} \varrho(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{p}, \vec{k}) \varrho^*(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{p}, \vec{k}) d\vec{p} d\vec{k} = \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \delta(\vec{y}_1 - \vec{y}_2).$$

As soluções da equação de Schrödinger dependente do tempo $i \frac{\partial \rho}{\partial t} = H_2 \rho$, são dadas por

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T_d} a(\vec{k}) \phi(\vec{x}, \vec{y}, \vec{k}) e^{-iE(\vec{k})} d\vec{k},$$

onde $H_2 \phi = E(\vec{k}) \phi$, de forma que $\phi(\vec{x}, \vec{y}, \vec{k}) = e^{i\vec{k}(\vec{x} + \vec{y})} \chi(\vec{x} - \vec{y}, \vec{k})$, e $\chi(\vec{x}, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T_d} b(\vec{p}, \vec{k}) e^{i\vec{p}\vec{x}} d\vec{p}$. Substituindo ϕ em $H_2 \phi = E(\vec{k}) \phi$, e tomando a transformada de Fourier na coordenada relativa $\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$, temos que

$$\left[K(\vec{p}, \vec{k}) - E(\vec{k}) \right] b(\vec{p}, \vec{k}) + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T_d} \tilde{V}_2(\vec{p} - \vec{p}') b(\vec{p}', \vec{k}) d\vec{p}' = 0.$$

Em nosso caso $V_2 = \lambda \delta + W$, de forma que considerando apenas a contribuição dominante da equação acima, temos

$$\left[K(\vec{p}, \vec{k}) - E(\vec{k}) \right] b(\vec{p}, \vec{k}) + \frac{\lambda}{(2\pi)^d} \int_{T_d} \tilde{b}(\vec{p}, \vec{k}) d\vec{p} = 0.$$

Multiplicando a equação acima por $(K - E)^{-1}$ e integrando em $\vec{p}$ temos a equação de auto valor

$$\frac{\lambda}{(2\pi)^d} \int_{T_d} \frac{d\vec{p}}{K(\vec{p}, \vec{k}) - E(\vec{k})} = -1. \quad (\text{I.3.1.4})$$

Assim, substituindo $K(\vec{p}, \vec{k})$ na equação acima, encontramos

$$1 + \frac{\lambda}{(2\pi)^d} \int_{T_d} \frac{d\vec{p}}{\sum_{i=1}^d [1 - \cos(p^i) \cos(k^i)] - E(\vec{k})} = 0.$$

Resolvendo a equação de autovalor acima para $E(\vec{k})$, encontramos um autovalor abaixo

da banda para $\lambda < 0$, de forma que temos aí realmente um caso atrativo. Enquanto para $\lambda > 0$ encontramos um autovalor acima da banda, ou seja temos um caso repulsivo, que pode ser entendido como um anti-estado ligado ou um estado ligado de buracos.

Estes resultados espectrais podem ser entendidos de maneira mais detalhada em termos da resolvente $(H_2 - z)^{-1}$. A equação de Schrödinger na forma resolvente é dada por

$$(H_2 - z)^{-1} = (H_0)^{-1} - (H_0 - z)^{-1}V_2(H_2 - z)^{-1}. \quad (\text{I.3.1.5})$$

A Eq.(I.3.1.5) é análoga a uma equação do tipo Bethe-Salpeter $D = D_0 + D_0 K D$, onde D corresponde à resolvente interagente $(H - z)^{-1}$, D_0 a resolvente livre $(H_0 - z)^{-1}$ e K a $-V_2$. Usando a decomposição de V_2 dada acima, temos

$$(H_2 - z)^{-1} = (H_l - z)^{-1} - (H_l - z)^{-1}W(H_2 - z)^{-1}, \quad (\text{I.3.1.6})$$

$$(H_l - z)^{-1} = (H_0 - z)^{-1} - (H_0 - z)^{-1}L(H_l - z)^{-1}, \quad (\text{I.3.1.7})$$

sendo $L(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda \delta(\vec{x} - \vec{y})$. Novamente, restringindo nossa atenção à parte dominante do potencial, vamos determinar as propriedades espectrais de $H_l = H_0 + \lambda \delta$. Se z não pertence ao espectro de H_l e H_0 , então a Eq. (I.3.1.7) resulta em

$$(H_l - z)^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) = (H_0 - z)^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) - \frac{\lambda(H_0 - z)^{-1}(\vec{x}, \vec{0})(H_l - z)^{-1}(\vec{x}, \vec{0})}{1 - \lambda(H_0 - z)^{-1}(\vec{0}, \vec{0})} \quad (\text{I.3.1.8})$$

Para $z \notin [0, 4d]$, o espectro de H_l coincide com as singularidades em z da Eq. (I.3.1.7), i.e. dos zero do denominador da Eq. (I.3.1.8). Assim, fazendo $\vec{k} = \vec{0}$, temos a equação para os estados ligados

$$\lambda(H_0 + E_b)^{-1}(\vec{0}, \vec{0}) = \frac{\lambda}{(2\pi)^d} \int_{T_d} \frac{d\vec{p}}{-\tilde{\Delta}(\vec{p}) + E_b} = -1 \quad (\text{I.3.1.9})$$

Fixemos nossa atenção no caso atrativo $\lambda < 0$. Uma vez que, para momentos pequenos, $-\tilde{\Delta}(\vec{p}) \approx |\vec{p}|^2$, se $d = 1, 2$, a integral da Eq. (I.3.1.9) diverge de forma que para todo $\lambda < 0$ podemos encontrar um estado ligado. Para $d \geq 3$, a integral da Eq. (I.3.1.9) converge para $E_b = 0$, de forma que existe um valor crítico $\lambda_c < 0$ para a ocorrência do estado ligado (veja os limites de Birman-Schwinger na Ref. REED E

SIMON [1972]). Com este resultado a Eq. (I.3.1.6) pode ser usada para se mostrar que as singularidades de $(H_2 - z)^{-1}$ não estão muito distantes das singularidades de $(H_l - z)^{-1}$. Nas seções seguinte, realizaremos uma análise similar à feita aqui para a função de quatro-pontos D . Nós iremos escrever uma equação de Bethe-Salpeter para D , e com ela determinar a existência e propriedades de decaimento do núcleo de Bethe-Salpeter K que fará o papel do potencial V_2 em nosso modelo. Usaremos as propriedades de K para estabelecer uma aproximação em escada L para K , iremos resolver a equação de Bethe-Salpeter e obter os estados ligados nesta aproximação em escada, de maneira análoga ao que fizemos para a Eq. (I.3.1.7). E finalmente usaremos uma estrutura análoga a da Eq. (I.3.1.6) para validar os resultados obtidos na aproximação em escada para o modelo completo.

3.2 Equação de Bethe-Salpeter

Pela Proposição I.1.6, precisamos de propriedades analíticas da transformada de Fourier da Eq. (I.1.4.10). Para obter tais propriedades, usaremos uma versão para a rede da equação de Bethe-Salpeter

$$D = D_0 + DKD_0, \quad (\text{I.3.2.1})$$

onde D , D_0 e K são operadores matriciais agindo em $al_2(A')$ o subespaço anti-simétrico de $\ell_2(A')$, onde $A' = \{A \otimes A | x_1^0 = x_2^0\}$, com A dado no Lema I.2.1.B. Notamos que usamos aqui representação de tempos iguais. O operador D_0 é dado por

$$D_0 = D - D^T \quad (\text{I.3.2.2})$$

onde D^T é a função de quatro-pontos completamente truncada (conexa). Como não há nenhum truncamento dentro do clusters dos ψ 's e dos $\bar{\psi}$'s, D não tem nenhum truncamento parcial, devido a repulsão de Pauli, e portanto D_0 é o truncamento completo de D . Em modelos mais gerais isso não ocorre. Nestes casos tomamos um D com um truncamento parcial, de forma que D_0 contém somente a parte do truncamento que conecta os clusters dos pontos x e dos pontos y . Da Eq. (I.3.2.2), o núcleo de D_0

é dado por

$$D_{0\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}^{a_1a_2b_1b_2}(x_1, x_2, y_1, y_2) = G_{\alpha_1\beta_2}^{a_1b_2}(x_1, y_2)G_{\alpha_2\beta_1}^{a_2b_1}(x_2, y_1) - G_{\alpha_1\beta_1}^{a_1b_1}(x_1, y_1)G_{\alpha_2\beta_2}^{a_2b_2}(x_2, y_2) \quad (\text{I.3.2.3})$$

Uma vez que a função de dois pontos é múltipla da identidade nos spins e sabores temos

$$\begin{aligned} D_{0\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= I_{\alpha\beta}^{ab}(G(x_1, y_2)G(x_2, y_1) - G(x_1, y_1)G(x_2, y_2)) \\ &= I_{\alpha\beta}^{ab}D_0(x_1, x_2, y_1, y_2), \end{aligned}$$

onde $I_{\alpha\beta}^{ab} = (\delta_{\alpha_1\beta_1}\delta_{\alpha_2\beta_2}\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2} - \delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\alpha_2\beta_1}\delta_{a_1b_2}\delta_{a_2b_1})$ é a identidade na componente anti-simétrica de $(\mathcal{S} \times \mathcal{N})$. Com estas definições, a Eq. (I.3.2.1) define o operador de Bethe-Salpeter

$$K = D_0^{-1} - D^{-1}.$$

Em termos de seus operadores, a equação de Bethe-Salpeter implica formalmente em

$$D = (1 - KD_0)^{-1}D_0.$$

Denotando por z o parâmetro espectral, nosso interesse, no restante deste Capítulo, é atingir uma situação onde possamos aplicar o Teorema Analítico de Fredholm¹ para $K(z)D_0(z)$, de forma a mostrar que $(I - K(z)D_0(z))^{-1}$ existe, para z em uma vizinhança adequada, exceto para um conjunto discreto de valores de z .

Para um operador matricial $M_{\alpha\beta}^{ab}(x, y)$ em $\ell^2(A')$, a norma de operadores de $\ell^2(A')$ é denotada por $|M|$. Como visto no visto no capítulo I.2, o Lema de Holmgren

¹**Teorema Analítico de Fredholm** Seja G um aberto conexo de $\mathbb{C}$, $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $\text{Lin}(\mathcal{H})$ o conjunto dos operadores lineares limitados de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$ e I a identidade em $\mathcal{H}$. Seja $B : G \rightarrow \mathcal{H}$ um mapeamento analítico (no sentido de que o limite $\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} (B(\mu) - B(\mu_0))$ existe para todo $\mu_0 \in G$) tal que $B(\mu)$ é um operador compacto para todo $\mu \in G$ então uma das alternativas ocorre

- $(I - B(\mu))^{-1}$ existe para todo $\mu \in G$;
- $(I - B(\mu))^{-1}$ existe para todo $\mu \in G$, exceto para um conjunto discreto S (i.e S não tem pontos de acumulação em G). Em palavras, a função $\mu \rightarrow (I - B(\mu))^{-1}$ é analítica em $\mu \in G \setminus S$. Para $\mu \in S$, a equação $B(\mu)v = v$ tem uma família de soluções de dimensão finita.

garante que esta norma é limitada, por

$$\left\{ \sup_{y, \beta, b} \left[\sum_{x, \alpha, a} |M_{\alpha\beta}^{ab}(x, y)| \right] \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \sup_{x, \alpha, a} \left[\sum_{y, \beta, b} |M_{\alpha\beta}^{ab}(x, y)| \right] \right\}^{1/2}.$$

Tomando D e D_0 como operadores em $\mathcal{al}_2(A')$, temos a proposição abaixo.

Proposição I.3.1 D , D_0 , D^{-1} , D_0^{-1} e K são operadores limitados em $\mathcal{al}^2(A')$.

Demonstração - Em primeiro lugar, usando o decaimento exponencial da função de dois-pontos G , vemos que D_0 possui norma finita. De outro lado, da Eq. (I.3.2.2), $D = D_0 + D^T$ e uma vez que D^T tem decaimento exponencial em árvore, em virtude da expansão em polímeros, então D também possui norma finita.

Consideremos agora os operadores inversos de D e D_0 . Denotando por M o operador D ou D_0 , usamos a decomposição $M = M_d + M_n$, onde M_d é diagonal e M_n é o resto. A matrix inversa de M é definida pela série de Neumann $M^{-1} = M_d^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [M_n M_d^{-1}]^k$. Expandindo M_d em potências de κ , vemos que D_{0d} e D_d são invertíveis com as cotas

$$|D_{0d}|^{-1} \leq \mathcal{G}_2^{-2}, \quad |D_d|^{-1} \leq \max\{\mathcal{G}_4, \mathcal{G}_2^{-2}\},$$

onde $\mathcal{G}_4 = \langle \bar{\psi}_{\alpha a}(x) \bar{\psi}_{\beta a}(x) \psi_{\alpha a}(x) \psi_{\beta a}(x) \rangle|_{\kappa=0}$ dado na introdução, Eq. (I.1.1.7), pode ser calculado explicitamente, resultando em

$$\mathcal{G}_4 = \frac{1}{M_0^2} \frac{\sum_{k=0}^{\frac{sN}{2}-2} F_k}{\sum_{k=0}^{\frac{sN}{2}} F_k}$$

onde $F_n = \frac{(2n)!}{n!} M_0^{2n} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^n$.

Da cota do Lema de Holmgren, $|D_{0n}| \leq c\kappa$ e $|D_n| \leq c\kappa^{\frac{1}{2}}$, de onde vemos que as séries de Neumann para D_0^{-1} e D^{-1} convergem. Portanto estes operadores são operadores limitados de $\mathcal{al}^2(A')$. Logo $K = D_0^{-1} - D^{-1}$ também é um operador limitado.

□

Afim de analisar o espectro da equação de Bethe-Salpeter, precisamos de uma representação espectral para D_0 , que pode ser derivada usando a representação espectral de G . Desta forma, usando a análise da função de dois-pontos feita no Capítulo anterior, temos o lema seguinte.

Lema I.3.2.A $\tilde{G}$, a transformada de Fourier de G satisfaz

$$\tilde{G}^2(k_0, \vec{0}) = 2(2\pi)^d \int_{T_d} \frac{\sinh(2\omega(\vec{p})) [Z(\vec{p}, \kappa)]^2}{\cosh(2\omega(\vec{p})) - \cos(k_0)} d\vec{p} + O(\kappa),$$

onde $Z(\vec{p}, \kappa) \approx (2\pi)^{-d} \mathcal{G}_2 + O(\kappa)$ e a relação de dispersão $\omega(\vec{p})$ é dada na Eq. (I.2.2.8).

Demonstração - Segue diretamente de

$$G(x) = \int_0^\infty \int_{T_d} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - E|x_0|} d\sigma_{\vec{p}}(E) d\vec{p}, \quad (\text{I.3.2.4})$$

onde temos a decomposição, isolando a contribuição de uma partícula,

$$d\sigma_{\vec{p}}(E) = Z(\vec{p}, \kappa) \delta(E - \omega(\vec{p})) dE + d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E),$$

e o jacobiano $Z(\vec{p}, \kappa) = \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \chi}(p^0 = i\chi, \vec{p})|_{\chi=\omega(\vec{p})}$, onde $\tilde{\Gamma}(p) = [\tilde{G}(p)]^{-1}$.

□

Nota I.3.a A decomposição da medida $d\sigma_{\vec{p}}(E)$ fornece uma separação em contribuições de uma partícula e três ou mais partículas (relacionadas na medida $d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E)$). Tanto $d\sigma_{\vec{p}}(E)$ quanto $d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E)$ são medidas espectrais positivas. $d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E)$ tem suporte em (m, ∞) , onde $m \approx -3 \ln \kappa$ é um limite superior para a parte inicial do espectro de três partículas. Assim, a função $Z(\vec{p}, \kappa)$ é positiva para qualquer $\vec{p}$ e para todo $0 < \kappa < B_0$.

Da proposição acima, fica clara a existência de uma banda de duas partículas, associada aos valores onde D_0 não é analítico. Como discutido anteriormente, para um momento $\vec{p}$ fixo, a banda é dada pelos valores de $\omega(\vec{p}_1) + \omega(\vec{p}_2)$, com $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$. Fazendo $\vec{p} = 0$, temos a largura da banda de duas partículas

$$W_2 = 2[w(\vec{\pi}) - w(\vec{0})] = 8\kappa \mathcal{G}_2 + O(\kappa^2), \quad (\text{I.3.2.5})$$

com $\vec{\pi} = (\pi, \dots, \pi)$, e portanto para $\vec{p} = \vec{0}$ a banda se estende do limiar de duas partículas $2m$ até $2m + W_2$. A largura da banda de duas partículas é da ordem κ , portanto é finita e muito pequena. De maneira mais geral, também existirão bandas de $n > 2$ partículas livres. A grosso modo, a largura W_n destas banda será dada por

$$W_n = 2 \left[\sup_{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{0}} \left(\sum_{i=1}^n \omega(\vec{p}_i) \right) - \inf_{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{0}} \left(\sum_{i=1}^n \omega(\vec{p}_i) \right) \right],$$

de forma que a largura das bandas deve continuar a ser de ordem κ , e portanto para n finito as bandas de n e $n + 1$ partículas não devem se sobrepor. Isto contudo não foi demonstrado até o momento e podem existir outros efeitos que invalidem a conjectura acima (onde, por exemplo, não incluímos na análise a presença de estados ligados nas bandas de mais partículas).

Nosso objetivo no restante deste capítulo, é mostrar que o espectro de massa de duas partículas ligadas consiste somente nesta banda espectral e de um único ponto espectral (degenerado) isolado localizado acima ou abaixo da banda dependendo unicamente dos parâmetros do modelo.

3.2.1 Decaimento do Núcleo de Bethe-Salpeter

Nesta Seção, usaremos o método de desacoplamento de hiperplanos, apresentado no capítulo anterior, para analisar o decaimento do núcleo de Bethe-Salpeter $K(x_1, x_2, y_1, y_2)$.

Primeiramente, vamos considerar o decaimento de $K(x_1, x_2, y_1, y_2)$ na direção temporal. Usando a notação do capítulo anterior, precisaremos das primeiras derivadas de D e D_0 , na variável de hiperplano z_{a_0} . Estas derivadas são sumarizadas no lema abaixo.

Lema I.3.2.B *Se o hiperplano a_0 , separa os pontos x_1^0 e y_1^0 , então*

a)

$$D_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_1, y_2) \Big|_{z_{a_0}=0} = 0,$$

b)

$$\frac{\partial}{\partial z_{a_0}} D_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_1, y_2) \Big|_{z_{a_0}=0} = 0,$$

c)

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{a_0}^2} D_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_1, y_2) = -\left\{ \sum_{w_1^0=w_2^0=q} \sum_{\alpha', \beta', a', b'} D_{\alpha\alpha'}^{aa'}(x_1, x_2, w_1, w_2) \Xi_{\alpha'\beta'}^{a'b'} \right. \\ \left. \times D_{\beta'\beta}^{b'b}(x_1, x_2, w_1 + e_1, w_2 + e_2) \right\} \Big|_{z_{a_0}=0},$$

$$\text{onde } \Xi_{\alpha\beta} = \left(\chi_{x_1^0 \geq y_1^0} \Upsilon_{\alpha_1\beta_1}^{-0} \Upsilon_{\alpha_2\beta_2}^{-0} - \chi_{x_1^0 < y_1^0} \Gamma_{\alpha_1\beta_1}^{+0} \Upsilon_{\alpha_2\beta_2}^{+0} \right),$$

d)

$$\frac{\partial^3}{\partial z_{a_0}^3} D_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_1, y_2) \Big|_{z_{a_0}=0} = 0.$$

O mesmo vale para $D_{0,\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ no substituindo $D_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ acima.

Demonstração - A prova é direta uma vez que estamos na representação de tempos iguais ($x_1^0 = x_2^0$ e $y_1^0 = y_2^0$), a idéia segue a demonstração do Lema I.2.1.D.

□

A expressão acima mostra que D possui a chamada estrutura de produto na segunda derivada. Essa estrutura é fundamental para a obtenção de um decaimento adequado para o operador de Bethe-Salpeter K . De maneira geral, a ação de um operador M em vetores de $\mathcal{al}_2(A')$ é dada por

$$[Mf]_{\alpha_1\alpha_2}^{a_1a_2}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \sum_{y_1, y_2, \beta_1, \beta_2, b_1, b_2} M_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}^{a_1a_2b_1b_2}(x_1, x_2, y_1, y_2) f_{\beta_1\beta_2}^{b_1b_2}(y_1, y_2).$$

Seja $H_1^a \subset \mathcal{al}^2(A')$ o subespaço gerado por $\{e_{x,y} \times \mathcal{S} \times \mathcal{N} \mid x_0 = y_0 \leq a\}$ e H_2^a o subespaço gerado por $\{e_{x,y} \otimes \mathcal{S} \mid x_0 = y_0 > a\}$, onde $e_{x,y} = (e_x, e_y)$. Estes subespaços são tais que $\mathcal{al}^2(A) = H_1^a \oplus H_2^a$. Do lema acima, em $a_0 = 0$ tanto D quanto D_0 deixam H_i^a , $i = 1, 2$, invariantes e portanto o mesmo vale para D^{-1} e D_0^{-1} . No que diz respeito às derivadas de K em z_{a_0} temos o lema abaixo (veja a Ref. SCHOR E O'CARROLL [2000b] para resultados análogos para um sistema de spins).

Lema I.3.2.C *Se o hiperplano temporal a_0 , separa os pontos x_1 e y_1 (lembre-se que temos $x_1^0 = x_2^0$ e $y_1^0 = y_2^0$). Portanto se um hiperplano temporal separa x_1 e y_1 , ele separa todo o cluster x_1, x_2 do cluster y_1, y_2), então*

$$a) \quad K_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_1, y_2) \Big|_{z_{a_0}=0} = 0$$

$$b) \quad \frac{\partial}{\partial z_{a_0}} K_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_1, y_2) \Big|_{z_{a_0}=0} = 0$$

$$c) \quad \frac{\partial^2}{\partial z_{a_0}^2} K_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_1, y_2) \Big|_{z_{a_0}=0} = 0$$

$$d) \quad \frac{\partial^3}{\partial z_{a_0}^3} K_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_1, y_2) \Big|_{z_{a_0}=0} = 0$$

Demonstração - Na demonstração denotamos $\partial^n F = \frac{\partial^n F}{\partial z_{a_0}^n} \Big|_{z_{a_0}=0}$.

a) Uma vez que, em $a_0 = 0$, D^{-1} e D_0^{-1} deixam H_1^a e H_2^a invariantes, o mesmo ocorre para K de onde segue o resultado.

b) Como $\partial K = -D_0^{-1} \partial D_0 D_0^{-1} + D^{-1} \partial D D^{-1}$ e o resultado decorre da aplicação do Lema I.3.2.B.

c) Façamos $\partial^2 K = 2D_0^{-1} \partial D_0 D_0^{-1} \partial D_0 D_0^{-1} - 2D^{-1} \partial D D^{-1} \partial D D^{-1} - D_0^{-1} \partial^2 D_0 \partial D_0^{-1} + D^{-1} \partial^2 D \partial D^{-1} = k_2 + k_2 + k_3 + k_4$. Em $a_0 = 0$, k_1 e k_2 deixam H_1^a e H_2^a invariantes e portanto são nulos. Aplicando o Lema I.3.2.B para $\partial^2 D_0$ e $\partial^2 D$ em $a_0 = 0$, vemos que $k_3 + k_4 = 0$.

d) O argumento é análogo à prova do item c).

□

Procedendo de maneira similar a feita acima, notamos que $\frac{\partial^4 K}{\partial z_{a_0}} \neq 0$, quando o hiperplano a_{a_0} separa o cluster das coordenadas x do cluster das coordenadas y . Do lema acima, da analiticidade conjunta de K nas variáveis de hiperplano $\{z_{a_0}\}$ e por meio de estimativas de Cauchy para as derivadas de K em z_{a_0} , temos

$$|K_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_1, y_2)| \leq C_4 \left| \frac{\kappa}{B_4} \right|^{4|x_1^0 - y_1^0|}. \quad (\text{I.3.2.6})$$

Passamos agora a analisar o decaimento nas direções espaciais. Como não temos para as coordenadas espaciais uma propriedade equivalente a de tempos iguais, os hiperplanos espaciais não separam necessariamente o cluster x do cluster y . Isso implica em um decaimento menor nas direções espaciais do que o que foi obtido para

a direção temporal. Pelo uso da simetria de rotação, podemos analisar cada uma das direções de maneira independente e a mesma análise se aplicará todas as demais direções espaciais. Portanto, sem perda de generalidade iremos considerar apenas a direção 1. Com isto, existem 48 regiões a serem consideradas, uma para cada ordenamento possível de x_1, x_2, y_1, y_2 , seguida da escolha da ordem temporal, i.e. $x_1^0 \leq y_1^0$ ou $x_1^0 > y_1^0$. Do uso da simetria de Reflexão Temporal da Proposição I.1.7, podemos fixar $x_1^0 \geq y_1^0$ e a mesma análise vale para a ordem $x_1^0 < y_1^0$. Restam então 24 regiões a serem analisadas. Considere, agora, as seguintes invariâncias de $K(x_1, x_2, y_1, y_2)$:

$$(\vec{x}_1 \leftrightarrow \vec{x}_2 \quad , \quad \vec{y}_1 \leftrightarrow \vec{y}_2,)$$

$$(\vec{x}_1 \leftrightarrow \vec{y}_2 \quad , \quad \vec{x}_2 \leftrightarrow \vec{y}_1)$$

com isto as 24 regiões, podem ser separadas em 3 grupos cada um com 8 regiões, como na tabela abaixo

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
$x_1 \leq x_2 \leq y_1 \leq y_2$	$x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2$	$x_1 \leq y_2 \leq y_1 \leq x_2$
$x_2 \leq x_1 \leq y_1 \leq y_2$	$y_1 \leq x_1 \leq x_2 \leq y_2$	$x_1 \leq y_2 \leq x_2 \leq y_1$
$x_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq y_1$	$x_1 \leq y_1 \leq y_2 \leq x_2$	$y_2 \leq x_1 \leq x_2 \leq y_1$
$x_2 \leq x_1 \leq y_2 \leq y_1$	$y_1 \leq x_1 \leq y_2 \leq x_2$	$y_2 \leq x_1 \leq x_2 \leq y_1$
$y_1 \leq y_2 \leq x_1 \leq x_2$	$x_2 \leq y_2 \leq x_1 \leq y_1$	$y_1 \leq x_2 \leq x_1 \leq y_2$
$y_2 \leq y_1 \leq x_1 \leq x_2$	$y_2 \leq x_2 \leq x_1 \leq y_1$	$x_2 \leq y_1 \leq x_1 \leq y_2$
$y_1 \leq y_2 \leq x_2 \leq x_1$	$x_2 \leq y_2 \leq y_1 \leq x_1$	$y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq x_1$
$y_2 \leq y_1 \leq x_2 \leq x_1$	$y_2 \leq x_2 \leq y_1 \leq x_1$	$x_2 \leq y_1 \leq y_2 \leq x_1$

Chamemos

$$L_1^p = \text{espaço gerado por } \{e_{x,y} | x^1, y^1 \leq p\}$$

$$L_2^p = \text{espaço gerado por } \{e_{x,y} | x^1 \leq p < y^1 \text{ ou } y^1 \leq p < x^1\}$$

$$L_3^p = \text{espaço gerado por } \{e_{x,y} | x^1, y^1 > p\}$$

Começemos pelas regiões do Grupo 1 (veja a tabela acima), consideremos $x_1 \leq$

$x_2 \leq y_1 \leq y_2$, e lembremos que estamos considerando apenas a direção 1. Se $x_1 \leq p < x_2 \leq y_1 \leq y_2$ ou $x_1 \leq x_2 \leq p < y_1 \leq y_2$ então para $z_p = 0$, temos $D_0 = D = 0$. Logo, quando $z_p = 0$, D e D_0 deixam L_3^p invariante. Da mesma forma, se $x_1 \leq x_2 \leq y_1 \leq p < y_2$, então $D_0 = D = 0$ em $z_p = 0$. Isto implica que $(f, D_0|_{z_p=0}g) = 0$ para todo $f \in L_1^p$ e $g \in L_2^p$. Se $f \in L_3^p$ então, como $D_0|_{z_p=0}$ é simétrica,

$$(f, D_0|_{z_p=0}g) = (\bar{D}_0|_{z_p=0}f, g) = 0.$$

Segue que $D_0|_{z_p=0}$ deixa L_1^p invariante. As mesmas conclusões valem para $D|_{z_p=0}$ e portanto também valem para $D_0^{-1}|_{z_p=0}$ e $D^{-1}|_{z_p=0}$. Assim, $K|_{z_p=0} = 0$ deixa invariante cada um dos L_i^p 's, de forma que para $x_1 \leq x_2 \leq y_1 \leq y_2$ isto implica na desigualdade

$$|K(x_1, x_2, y_1, y_2)_{\alpha\beta}^{ab}| \leq C_4 |\kappa/B_4|^{(x_2-x_1)+(y_1-x_2)+(y_2-x_3)}.$$

Na equação acima, os módulos nas diferenças das coordenadas espaciais são desnecessários, uma vez que tomamos $x_1 \leq x_2 \leq y_1 \leq y_2$. Uma vez que vale a desigualdade

$$1/2|x_1 + x_2 - y_1 - y_2| + 1/2|x_2 - x_1| + 1/2|y_2 - y_1| \leq |x_2 - x_1| + |y_1 - x_2| + |y_2 - y_1|$$

temos a cota para K dada por

$$|K(x_1, x_2, y_1, y_2)| \leq c_4 |\kappa/B_4|^{1/2[|x_1+x_2-y_1-y_2|+|x_2-x_1|+|y_2-y_1|]} \quad (\text{I.3.2.7})$$

o que também vale nas regiões simetricamente relacionadas do grupo 1.

Para as regiões do Grupo 2, consideremos $x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2$, se $x_1 \leq p < y_1 \leq x_2 \leq y_2$ então $K(x_1, x_2, y_1, y_2)|_{z_p=0} = 0$ com $e_{(x_1, x_2)} \in L_2^p$ e $e_{(y_1, y_2)} \in L_3^p$. Se $x_1 \leq y_1 \leq p < x_2 \leq y_2$ então, para $x_1^0 \geq y_1^0$,

$$D_0|_{z_p=0} = \langle \bar{\psi}(x_1)\psi(y_1) \rangle \langle \bar{\psi}(x_2)\psi(y_2) \rangle = D|_{z_p=0}$$

o que significa que na restrição a L_2^p , $K|_{z_p=0} = 0$. Se $x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq p < y_2$ então $K|_{z_p=0} = 0$ para $e_{(x_1, x_2)} \in L_1^p$ e $e_{(y_1, y_2)} \in L_2^p$. Estas considerações levam estabelecer a

cota

$$|K(x_1, x_2, y_1, y_2)| \leq C_4 \left| \frac{\kappa}{B_4} \right|^{(y_1-x_1)+(x_2-y_1)+(y_2-x_2)}$$

e uma vez que $1/2|x_1 + x_2 - y_1 - y_2| + 1/2|x_2 - x_1| + 1/2|y_2 - y_1| \leq |y_1 - x_1| + |x_2 - y_1| + |y_2 - x_2|$ novamente temos a Eq. (I.3.2.7) que se estende para as outras 7 do Grupo 2. Finalmente, as regiões do Grupo 3, consideremos o caso $x_1 \leq y_2 \leq y_1 \leq x_2$, que pode ser tratado de maneira similar as regiões do primeiro grupo, resultando em

$$|K(x_1, x_2, y_1, y_2)| \leq C_4 \left| \frac{\kappa}{B_4} \right|^{(y_1-x_1)+(y_2-x_3)+(x_2-y_2)}$$

e uma vez que $1/2|x_1 + x_2 - y_1 - y_2| + 1/2|x_2 - x_1| + 1/2|y_2 - y_1| \leq |y_1 - x_1| + |y_2 - y_1| + |x_2 - x_1|$ a Eq. (I.3.2.7) é válida e se estende para as outras 7 regiões do Grupo 3.

Estendendo a análise do parágrafo anterior para as demais direções espaciais, e adicionando o decaimento temporal de K , obtemos o decaimento de K , que em coordenadas relativas nos dá a

Proposição I.3.2 *Existem constantes B_4 e C_4 tais que para $|\kappa| < B_4$,*

$$\left| K_{\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau) \right| \leq C_4 \left| \frac{\kappa}{B_4} \right|^{4|\tau_0| + \frac{1}{2}(\|\vec{\xi} + \vec{\eta} + 2\vec{\tau}\| + \|\vec{\xi}\| + \|\vec{\eta}\|)} \quad (\text{I.3.2.8})$$

Na Seção seguinte, determinaremos o espectro de duas partículas do Modelo de Quatro-Férmions na aproximação em escada. Em seguida, veremos que o decaimento acima é também fundamental para controlar as contribuições de K que não entram na aproximação em escada, afim de estender os resultados espectrais para o modelo completo.

3.2.2 O Espectro de duas partículas na Aproximação em Escada

Para determinar estados ligados de duas partículas, em um primeiro passo, usaremos a chamada aproximação em escada. Para tanto o operador K é decomposto em $K = L + W$, onde L é um operador (local) independente de κ . Já o operador W é não local. O operador W depende de κ , porém pelo decaimento de K , da Eq. (I.3.2.8), seu núcleo é integrável. A idéia é que o operador L , que chamamos de aproximação em escada para K , seja dominante em relação ao operador W . Nosso objetivo nos próximos parágrafos é obter esta aproximação.

A aproximação em escada L , o termo dominante de K , é obtido expandindo-se $D_0^{-1} - D^{-1}$ em potências de κ e restando-se apenas o termo constante. Para tal finalidade, usamos o fato que $D = D^0 + D^T$, e lembramos que D^T é a função correlação de quatro pontos conexa (completamente truncada), e portanto, em $\kappa = 0$, D^T se anula para pontos não coincidentes (veja a Ref. ANJOS, VEIGA E O'CARROLL [2005]), como pode ser visto escrevendo-se D^T como derivada nas fontes do logaritmo da função geratriz. Usando uma expansão de Taylor em $\kappa = 0$, encontramos

$$D_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) = -2\mathcal{G}_4 P_{xy} (1 - S_{\alpha\beta}^{ab}) \mathbb{I}_{a\ell^2(A')} - 2\mathcal{G}_2^2 (1 - P_{xy}) \mathbb{I}_{a\ell^2(A')} + O(\kappa),$$

$$D_{0,\alpha\beta}^{ab}(x, y) = -2\mathcal{G}_2^2 \mathbb{I}_{a\ell^2(A')} + O(\kappa),$$

onde, $P_{xy} = \delta_{x_1 x_2} \delta_{y_1 y_2} \delta_{y_1 x_2}$, $S_{\alpha\beta}^{ab} = \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\beta_1 \beta_2} \delta_{\beta_1 \alpha_2} \delta_{a_1 a_2} \delta_{b_1 b_2} \delta_{b_1 a_2}$, $\mathbb{I}_{a\ell^2(A')}$ é a identidade no subespaço anti-simétrico de $\ell^2(A')$, onde $\mathcal{G}_4$, dada na Eq. (I.1.1.7), é uma função de M_0, λ, N dada por

$$\mathcal{G}_4 = \langle \bar{\psi}_{\alpha a}(x) \bar{\psi}_{\beta a}(x) \psi_{\alpha a}(x) \psi_{\beta a}(x) \rangle |_{\kappa=0}$$

Retendo apenas o termo constante na expansão em potências de κ , obtemos

$$L_{\alpha\beta}^{ab}(x, y1) = - \left[\frac{1}{2\mathcal{G}_2^2} - \frac{1}{2\mathcal{G}_4} \right] P_{xy} [\mathbb{I}_{\alpha\beta}^{ab} - S_{\alpha\beta}^{ab}] \equiv -\aleph P_{xy} [\mathbb{I}_{\alpha\beta}^{ab} - S_{\alpha\beta}^{ab}], \quad (\text{I.3.2.9})$$

com $\mathbb{I}$ denotando a matrix identidade $(sN)^2 \times (sN)^2$. Chamamos L de aproximação em escada de K .

Com a decomposição $K = L + W$, podemos reescrever a equação de Bethe-Salpeter na forma

$$D = D_L (\mathbb{I}_{a\ell^2(A')} - W D_L)^{-1}, \quad (\text{I.3.2.10})$$

onde

$$D_L = D_0 [\mathbb{I}_{a\ell^2(A')} - L D_0]^{-1}. \quad (\text{I.3.2.11})$$

Cada uma das equações acima é novamente uma equação do tipo Bethe-Salpeter. Notamos que a diferença mais evidente entre elas, é que a Eq. (I.3.2.11) introduz um novo operador D_L , que é dado como uma modificação do operador D_0 pela

ação do operador L . Em palavras, a Eq. (I.3.2.11) nada mais é que a equação de Bethe-Salpeter escrita na aproximação em escada. De outro lado, a Eq. (I.3.2.10) mostra que o operador D é uma perturbação de D_L , uma vez que W é pequeno. Como, a menos de uma pequena perturbação, D_L é essencialmente o operador D , as singularidades das respectivas transformadas de Fourier $\tilde{D}_L$ e $\tilde{D}$ devem estar próximas. E portanto, pela representação espectral de D , as singularidades complexas de D_L devem ficar próximas aos pontos no espectro de duas partículas. No restante desta Seção, vamos nos concentrar apenas na aproximação em escada. Em outras palavras, vamos esquecer, por hora a Eq. (I.3.2.10), e nos concentrar em obter as singularidades de D_L .

Seja $\hat{F}$ a transformada de Fourier de F apenas na variável τ . A Eq. (I.3.2.11) pode ser explicitamente resolvida para o núcleo $\hat{D}_L$ resultando em (veja o Apêndice B)

$$\hat{D}_L(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k) = \tilde{D}_0(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k) + \hat{D}_0(\vec{\xi}, \vec{0}, k) \left(\mathbb{I} + \aleph [\mathbb{I} - S] \hat{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, k) \right) \hat{D}_0(\vec{0}, \vec{\eta}, k). \quad (\text{I.3.2.12})$$

Portanto, a solução D_L da equação de Bethe-Salpeter na aproximação em escada é

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{L\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k) = & \tilde{D}_{0,\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k) + \sum_{c,d,\zeta,\epsilon} \tilde{D}_{0,\alpha\zeta}^{ac}(\vec{\xi}, \vec{0}, k) \\ & \times \left(\mathbb{I} + \aleph [\mathbb{I} - S] \tilde{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, k) \right)_{\zeta,\epsilon}^{-1,cd} \tilde{D}_{0,\epsilon\beta}^{db}(\vec{0}, \vec{\eta}, k). \end{aligned} \quad (\text{I.3.2.13})$$

Tomando $k = (k_0, \vec{0})$, e usando a análise da função de dois-pontos, feita no capítulo anterior, $\tilde{D}_{0,\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k)$ é analítica em k em toda região fora da banda de duas partículas até pelo menos próximo ao limiar de três partículas, i.e. $\tilde{D}_0$ é analítica em $k \in [m(\kappa), 2m(\kappa)) \cup (2m(\kappa) + W_2, 3m)$, onde $m(\kappa)$ é a massa de uma partícula dada na Eq. (I.2.2.6) e $W_2 = 2[w(\vec{\pi}) - w(\vec{0})] = 24\kappa\mathcal{G}_2 + O(\kappa^2)$ é a largura da banda de duas partículas. É fácil ver que, para $\aleph = 0$ nenhum estado ligado ocorre uma vez que $\tilde{D}_L = \tilde{D}_0$. Este caso ocorre, por exemplo, quando $\lambda = 0$, ou seja para férmions massivos livres (caso gaussiano).

Pela Eq. (I.3.2.13), vemos que singularidades de $\tilde{D}_L$ ocorrem somente como soluções da equação

$$\det \left(\mathbb{I} + \aleph [\mathbb{I} - S] \tilde{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, k) \right) = 0, \quad (\text{I.3.2.14})$$

de forma estes estados ligados estão associados a um autovalor nulo do operador

$(\mathbb{I} + \aleph [\mathbb{I} - S] \tilde{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, k))$. Na ordem dominante em κ , um cálculo imediato fornece $D_0(\vec{0}, \vec{0}, \tau) = -2G^2(\vec{0}, \tau)(\mathbb{I} - S)$, de forma que precisamos apenas verificar os autovalores de $\mathbb{I} - 2\aleph \tilde{G}^2(\vec{0}, k_0)(\mathbb{I} - S)$. Existem $(sN)^2$ autovalores, que são dados abaixo

- $\lambda_1 = 1, \frac{sN(sN+1)}{2}$ vezes degenerado e associado a autovetores no subespaço simétrico de $\mathbb{R}^{(sN)^2}$. Pela Eq. (I.3.2.14), não temos estados ligados associados a estes autovalores.
- $\lambda_2 = 1 - 2\aleph \tilde{G}^2(k_0, \vec{0}), \frac{sN(sN+1)}{2}$ vezes degenerado e associado a autovetores no subespaço anti-simétrico de $\mathbb{R}^{(sN)^2}$. Para estes autovalores, podemos encontrar estados ligados, se existirem $\aleph$ e k_0 tais que $\lambda_2 = 0$.

Das conclusões acima vemos que a condição para a existência de estados ligados é dada por

$$\tilde{G}^2(k_0, \vec{0}) = \frac{1}{2\aleph}, \quad (\text{I.3.2.15})$$

onde, $\tilde{G}^2(k_0, \vec{0})$ é dada no Lema I.3.2.A. Como discutimos anteriormente, para $\aleph = 0$, não temos estados ligados. Mais ainda, podemos distinguir dois casos dependendo do sinal de $\aleph$. Para $\aleph > 0$, estados ligados podem ocorrer para valores de k_0 , tais que $\tilde{G}^2(\vec{0}, k_0) > 0$ e, analogamente, para $\aleph < 0$ precisamos de valores de k_0 onde $\tilde{G}^2(\vec{0}, k_0) < 0$. Do Lema I.3.2.A, é fácil verificar que para $m < \mathcal{I}m(k_0) < 2m$ (i.e. abaixo da banda de duas partículas, mas acima da massa de uma partícula) temos $\tilde{G}^2(k_0) > 0$, e portanto não há nenhum estado ligado para $\aleph < 0$ (caso da *Dominação Gaussiana*). Já para $2m + W < \mathcal{I}m(k_0) < 3m$, temos $\tilde{G}^2(k_0) < 0$ e portanto nenhum estado ligado para $\aleph > 0$ (caso da *Subjulgção Gaussiana*).

Em cada um dos casos ($\aleph > 0$ e $\aleph < 0$), onde podemos encontrar estados ligados precisamos obter os valores de k_0 que satisfazem a Eq. (I.3.2.15) para um valor de $\aleph$ fixo. Desta forma procuramos as soluções da equação

$$2\aleph \sum_{\tau} G^2(0, \tau) e^{2m\tau_0} e^{-\Delta\varepsilon\tau_0} = 1, \quad (\text{I.3.2.16})$$

onde tomamos $\mathcal{I}m(k_0) \in (m, 2m) \cup (2m + W, 3m)$, $-ik_0 = 2m - \Delta\varepsilon$, m é a massa de uma partícula e $\Delta\varepsilon$ é a energia do estado ligado medida em relação ao limiar de duas partículas.

Podemos obter as soluções da Eq. (I.3.2.16), através de um argumento intuitivo baseado no comportamento de $\langle \bar{\psi}_{1a}(\frac{1}{2})\psi_{1a}(\tau + \frac{1}{2}) \rangle$. Um argumento rigoroso usando convolução no espaço de momentos da condição acima e a representação espectral da função de dois pontos pode ser construído. Nosso objetivo é encontrar os valores de $\Delta\varepsilon$ que satisfazem a Eq. (I.3.2.16). Expandindo $\langle \bar{\psi}_{1a}(0)\psi_{1a}(x) \rangle$ até a ordem dominante em κ , obtemos $\langle \bar{\psi}_{1a}(\frac{1}{2})\psi_{1a}(\tau_0 + \frac{1}{2}) \rangle \approx \kappa^{|\tau_0|}\mathcal{G}_2^{|\tau_0|+1}$. O comportamento dominante segue da expansão em κ do numerador da função de dois pontos, dado por $\int \bar{\psi}(\frac{1}{2})\psi(\tau_0 + \frac{1}{2})e^{-S}d\bar{\psi}\psi$. Se as integrais Fermiônicas forem não nulas, então existe uma cadeia de conexão de elos do tipo $\bar{\psi}\Upsilon\psi$ conectando os dois pontos. Tomando a cadeia de menor comprimento resulta no termo dominante exibido acima. Para se controlar rigorosamente todas as contribuições, uma expansão em polímeros pode ser usada. Ainda, usando $m(\kappa)$ da Eq. (I.2.2.6), obtemos uma condição para estado ligados na ordem dominante em κ ,

$$2\mathcal{G}_2^2\aleph(1 - e^{-\Delta\varepsilon}) = 1, \quad (\text{I.3.2.17})$$

Seja ε^A a energia de ligação para o caso $\aleph > 0$. Como discutimos, este ponto espectral aparece abaixo da banda de duas partículas. Com isto, a Eq. (I.3.2.17) implica em

$$\varepsilon_0^A = -\ln(1 - \gamma)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{2\aleph\mathcal{G}_2^2}. \quad (\text{I.3.2.18})$$

Nesta condição $\mathcal{G}_4 > \mathcal{G}_2^2$, de onde vem o nome *Subjugação Gaussiana* e como salientado acima o ponto espectral aparece abaixo da banda de duas partículas. Em outras palavras a energia de ligação é positiva, i.e. a energia do estado ligado é menor que a energia de duas partículas livres, o que justifica chamarmos este caso de *atrativo*. Para $\aleph < 0$, a energia de ligação é dada por

$$\varepsilon_0^R = +\ln(1 - \gamma) + W.$$

Aqui temos a *Dominação Gaussiana*, ($\mathcal{G}_4 < \mathcal{G}_2^2$). Esta solução da equação de Bethe-Salpeter aparece acima da banda de duas partículas, de forma que nos referimos a este caso como caso repulsivo. Veja a Ref. ANJOS E VEIGA [2007] para uma outra

apresentação destes resultados.

Vamos agora dar uma demonstração rigorosa para a existência dos estados ligados na aproximação em escada mostrados acima. Consideraremos apenas o caso atrativo, i.e. vamos nos limitar a analisar o que acontece abaixo da banda de duas partículas. Portanto, fixamos $\aleph > 0$ e buscamos pontos espectrais abaixo e próximos do limiar de duas partículas. No que se segue iremos suprimir os índice A na energia de ligação do caso atrativo, que denotaremos apenas por ε_0 . Nossa estratégia consiste em mostrar que nesta região existe uma única solução ε , para a equação $\hat{L}(k_0)\hat{D}_0(k_0)f = f$, com $-ik_0 = 2m - \varepsilon$. A idéia que usaremos para fazer isso consiste em usar a decomposição de medida espectral $d\sigma_{\vec{p}}(E)$ para separar as contribuições em $\hat{L}(k_0)\hat{D}_0(k_0)$. O argumento intuitivo que usamos no parágrafo acima, mostra que $\aleph H_1(k_0)$, a contribuição dominante de $\hat{L}(k_0)\hat{D}_0(k_0)$ fornece sozinha um autovalor próximo de 1, para ε suficientemente próximo de ε_0 . Assim, após separarmos as contribuições em $\hat{L}(k_0)\hat{D}_0(k_0)$, precisamos mostrar que de fato $\aleph H_1$ fica próximo de 1 e que as contribuições restantes são suficientemente pequenas. O caso repulsivo pode ser tratado de maneira análoga, com pequenas alterações para as cotas do operador obtidas para o operador $\hat{L}\hat{D}_0$. A transformação de staggering das Refs. ANJOS, VEIGA E O'CARROLL [2005], VEIGA, IORIATTI E O'CARROLL [2002] pode ser útil para esta, estabelecendo uma correspondência entre as propriedades espectrais nos casos atrativo e repulsivo.

Seguindo a estratégia delineada acima, vamos separar as contribuições de duas e três ou mais partículas para $\hat{L}\hat{D}_0$. Usando o Lema I.3.2.A, obtemos uma representação espectral para a transformada de Fourier na variável $\tau, \vec{\tau} = \vec{0}$ de $\hat{D}_0$, que é dada por

$$2(2\pi)^d \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{T_d} \frac{\sinh(E + E')}{\cosh(E + E') - \cosh(2m - \varepsilon)} \cos \vec{p} \cdot \vec{\eta} \cos \vec{p} \cdot \vec{\xi} d\sigma_{\vec{p}}(E) d\sigma_{\vec{p}}(E') d\vec{p}. \quad (\text{I.3.2.19})$$

A transformada de Fourier de $\hat{L}\hat{D}_0 f = f$ é $-\aleph \int_{T_d} H(\vec{p}, \varepsilon) \tilde{f}(\vec{p}) d\vec{p} = \tilde{f}(\vec{p})$, com

$$H(\varepsilon, \vec{p}) = 2(2\pi)^d \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sinh(E + E')}{\cosh(E + E') - \cosh(2m - \varepsilon)} d\sigma_{\vec{p}}(E) d\sigma_{\vec{p}}(E'). \quad (\text{I.3.2.20})$$

Usando a decomposição da medida $d\sigma_{\vec{p}}(E)$, escrevemos $H(\kappa, \varepsilon) = H_1 + H_2 + H_3$, onde

$H_i(\kappa, \varepsilon) = \int H_i(\vec{p}, \varepsilon) d\vec{p}$, com

$$H_1(\kappa, \varepsilon) = 2(2\pi)^d \int_{T_d} \frac{\sinh(2\omega(p))}{\cosh(2\omega(p)) - \cosh(2m - \varepsilon)} d\vec{p},$$

$$H_2(\kappa, \varepsilon) = 2(2\pi)^d \int_0^\infty \int_{T_d} \frac{\sinh(E + \omega(\vec{p}))}{\cosh(E + \omega(\vec{p})) - \cosh(2m - \varepsilon)} d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E) d\vec{p},$$

$$H_3(\kappa, \varepsilon) = 2(2\pi)^d \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sinh(E + E')}{\cosh(E + E') - \cosh(2m - \varepsilon)} d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E) d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E') d\vec{p}$$

e para $\hat{f}(\vec{p}) = \text{constante}$, estamos interessado no caso $-\aleph H(\kappa, \varepsilon) = 1$. Tendo separado as contribuições para $\hat{L}\hat{D}_0$, podemos passar para o problema de controlar a magnitude de cada uma destas contribuições. Afim de controlarmos as contribuições de três ou mais partículas de H_2 e H_3 , precisaremos de cotas superiores para a medida $d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E)$, esta cota é estabelecida no lema abaixo.

Lema I.3.2.D *A medida $d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E)$ satisfaz*

$$\hat{\sigma}_{\vec{p}}(\mathbb{R}^+) = \int_0^\infty d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E) = O(\kappa).$$

Demonstração - Da Proposição I.1.5, temos uma representação espectral para $G(x_0 = 0, \vec{x})$ e tomando a Transformada de Fourier nas coordenadas espaciais

$$\begin{aligned} \tilde{G}(x_0 = 0, \vec{x}) &= G(0, \vec{0}) + \sum_{|\vec{x}| > 1} G(x_0 = 0, \vec{x}) e^{-i\vec{q}\vec{x}} \\ &= (2\pi)^{-d} \int_0^\infty d\sigma_{\vec{q}}(E) \\ &= (2\pi)^{-d} Z(\vec{q}, \kappa) + (2\pi)^{-d} \int_0^\infty d\hat{\sigma}_{\vec{q}}(E) \end{aligned}$$

Como $G(x = 0) = \mathcal{G}_2 + O(\kappa^2)$, $|G(0, \vec{x})| \leq C \left| \frac{\kappa}{B} \right|^{|\vec{x}|}$ e $Z(\vec{q}, \kappa) = (2\pi)^{-d} \mathcal{G}_2 + O(\kappa)$ segue o resultado.

□

Com o resultado acima, podemos estabelecer cotas para as contribuições de três ou mais partículas $H_2(\varepsilon)$ e $H_3(\varepsilon)$ e mostrar que essas contribuições são pequenas quando ε está próxima da energia de ligação $\varepsilon_0 = -\ln(1 - \gamma)$, $\gamma = \frac{1}{2\aleph\mathcal{G}_2}$. Também precisamos mostrar que a contribuição dominante $\aleph H_1$ é próxima de 1 para ε suficientemente

próximo de ε_0 , de forma que $\hat{L}(\varepsilon)\hat{D}_0(\varepsilon)$ esteja proximo da unidade (veja Ref. SCHOR E O'CARROLL [2000a] para resultados análogos para o modelo de spins).

Lema I.3.2.E *Existem $\delta > 0$ e $\kappa_0 > 0$ suficientemente pequenos, tais que H_1 admite extensão analítica para a região $|\varepsilon - \varepsilon_0| < 2\delta\gamma$, e, nesta região, temos*

$$|\Re H_1 - 1| < \delta\gamma, \quad \Re \frac{\partial H_1}{\partial \varepsilon} = -\frac{1-\gamma}{\gamma}[1 + O(\delta)] + O(\kappa).$$

Mais ainda, H_2 e H_3 admitem extensões analíticas em ε para a região do plano complexo onde $|\varepsilon - \varepsilon_0| < \delta\gamma$, para $|\kappa| < \kappa_0$. Nesta região, vale

$$|\Re H_i| \leq c_i \kappa, \quad i = 2, 3 \text{ e } \left| \Re \frac{\partial H_2}{\partial \varepsilon} \right| \leq \kappa^2 \gamma, \quad \left| \Re \frac{\partial H_3}{\partial \varepsilon} \right| \leq \kappa^4 \gamma.$$

Demonstração - Reescrevemos a contribuição H_1 na forma

$$H_1(\kappa, \varepsilon) = 2(2\pi)^d \int_{T_d} \frac{(1 - e^{-\omega})Z(\vec{p}, \kappa)^2}{1 - e^{2(m-\omega)-\varepsilon} - e^{-2(m+\omega)+\varepsilon} + e^{-4\omega}} d\vec{p} \quad (I.3.2.21)$$

Da Proposição I.2.3, $\omega = -\ln \kappa + \tilde{\omega}(\kappa, \vec{p})$ onde $\tilde{\omega}(\kappa, \vec{p})$ é analítica e

$$m - \omega = \tilde{\omega}(\kappa, \vec{0}) - \tilde{\omega}(\kappa, \vec{p}) = O(\kappa),$$

portanto as exponenciais, no lado direito da Eq. (I.3.2.21), são analíticas em κ . Escrevendo $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$, nós temos $1 - e^{-\varepsilon} = \gamma + (1 - \gamma)(e^{-\Delta\varepsilon} - 1)$ e por hipótese $|\Delta\varepsilon| < \delta\gamma$. O primeiro termo no denominador do lado direito da Eq. (I.3.2.21), $D = 1 - e^{2(m-\omega)-\varepsilon} - e^{-2(m+\omega)+\varepsilon} + e^{-4\omega}$, pode ser reescrito como

$$1 - e^{-\varepsilon} + 2e^{-\varepsilon}(\omega - m) \int_0^1 e^{-2x(\omega-m)} dx.$$

Desta forma, o denominador da Eq. (I.3.2.21) é dado por

$$D = \gamma \left[1 + O\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)|\Delta\varepsilon|e^{|\Delta\varepsilon|} + \frac{2\kappa}{\gamma(1-\gamma)}e^{|\Delta\varepsilon|} + O(\kappa^2) \right] \equiv \gamma(1 + r_d).$$

O jacobiano $Z(\vec{p}, \kappa)^2$ pode ser aproximado, como $Z(\vec{p}, \kappa)^2 = Z_0^2 + \Delta N$ onde $Z_0 = \frac{\mathcal{G}_2}{(2\pi)^d}$

e $|\Delta N| \leq c_5 |\kappa|$. Portanto

$$\aleph H_1 = 1 + \frac{2(2\pi)^d}{\gamma} \aleph Z_0^2 \int \frac{r_d}{1+r_d} d\vec{p} + \frac{2(2\pi)^d}{\gamma} \aleph Z_0^2 \int \frac{|\Delta N|}{1+r_d} d\vec{p}.$$

Escolhemos κ_0 como o maior $|\kappa|$ satisfazendo

$$|\kappa| < \frac{\delta\gamma^2}{8}, \quad |\kappa| < \frac{\gamma(1-\gamma)}{4}, \quad c_5 |\kappa| < \frac{\delta\gamma\mathcal{G}_2^2}{4},$$

obtemos a cota superior $|\aleph H_1(k_0, \varepsilon) - 1| < 2\delta\gamma$, para ε suficientemente próximo de ε_0 . Os integrandos de H_2 e H_3 podem ser cotados usando $\int_0^\infty \int_{T_d} d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E) d\vec{p} \leq c|\kappa|$. As cotas para $\frac{\partial H_i}{\partial \varepsilon}$ seguem de maneira similar.

□

As propriedades mostradas no Lema I.3.2.E, nos permitem mostrar que fixado um κ suficientemente pequeno (a rigor menor que o κ_0 dado no Lema I.3.2.E), existe uma única solução ε próxima de ε_0 para a equação $\hat{L}(\varepsilon)\hat{D}_0(\varepsilon)f = f$. Para fazermos isto, tomamos $Y = \aleph H$ e

$$Y_i = \aleph H_i, \tag{I.3.2.22}$$

com $i = 1, 2, 3$. Para $\aleph > 0$ (e portanto estados ligados abaixo da banda de duas partículas), mostraremos que existe uma única solução ε para a equação $Y(\kappa, \varepsilon) = 1$, com κ pequeno o suficiente e ε próximo de ε_0 . A esta solução chamaremos $\varepsilon_L(\kappa)$. Quando tivermos mostrado isto, teremos demonstrado que existe, na aproximação em escada, um estado ligado de massa $m_L \equiv 2m - \varepsilon_L$, e pelo discutido acima este estado ligado se encontra abaixo da banda de duas partículas.

Para estudarmos as soluções da equação $Y(\kappa, \varepsilon) = 1$, notemos inicialmente que $Y(0, \varepsilon) = \frac{\gamma}{(1-e^{-\varepsilon})}$ e $Y(0, \varepsilon_0) = 1$, de forma que, para $|\Delta\varepsilon| < \delta\gamma$, podemos escrever

$$\begin{aligned} Y(\kappa, \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon) - 1 &= Y_1(0, \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon) - Y_1(0, \varepsilon_0) + R(\kappa, \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon) \\ &\equiv \Delta Y_1(0, \varepsilon_0) + R(\kappa, \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon) \end{aligned}$$

onde

$$\Delta Y_1(0, \Delta\varepsilon) = -(1-\gamma)(1-e^{-\Delta\varepsilon})(1-(1-\gamma)e^{-\Delta\varepsilon})^{-1}$$

e $R(\kappa, \varepsilon) = Y_i(\kappa, \varepsilon) - Y_1(0, \varepsilon) + Y_2(\kappa, \varepsilon) + Y_3(\kappa, \varepsilon)$. Por inspeção, verificamos que o denominador de $\Delta Y_1(0, \varepsilon_0)$ é positivo para $|\Delta\varepsilon| < \gamma$, de forma que $\Delta Y_1 < 0$ para $\Delta\varepsilon > 0$ e de outro lado para $\Delta\varepsilon < 0$ implica em $\Delta Y_1 > 0$. Usando as cotas para H_2 e H_3 dada no Lema I.3.2.E, temos $|Y_i(\kappa, \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon)| \leq c|\kappa|$, $i = 2, 3$, e de outro lado $Y_1(\kappa, \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon)$ é contínua em $\kappa = 0$ e portanto, fixado κ pequeno o suficiente, vemos que $Y(\kappa, \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon) - 1 < 0$ para $\Delta\varepsilon > 0$, enquanto $Y(\kappa, \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon) - 1 > 0$ para $\Delta\varepsilon < 0$. O comportamento das derivadas de H_i , $i = 1, 2, 3$, em ε dado no Lema I.3.2.E, mostra que $Y(\kappa, \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon) - 1$ é uma função analítica monotonicamente decrescente de ε , de onde concluímos que existe uma única solução $\varepsilon = \varepsilon_l$ tal que $Y(\kappa, \varepsilon_l) = 1$. E portanto, para um dado κ suficientemente pequeno, temos, na aproximação em escada, um estado ligado degenerado abaixo da banda de duas partículas para $\aleph > 0$. A energia de ligação ε_L deste estado ligado está próxima do valor $\varepsilon_0 = -\ln\left(1 - \frac{1}{2\aleph\mathcal{G}_2}\right)$.

Para encerrarmos esta Seção vamos discutir brevemente quão próximos estão os valores ε e ε_0 . Façamos $\varepsilon = \varepsilon_0 + z$, com $|z| < \delta\gamma$ (de forma que, tomando κ pequeno o suficiente, ε está na região definida no Lema I.3.2.E) e denotemos $f_\kappa(z) \equiv Y(\kappa, \varepsilon_0 + z) - 1$. É fácil ver que $f_\kappa(z)$ é analítica em z , de modo que as soluções z_L de $f_\kappa(z_L) = 0$, são dadas pela integral de Cauchy

$$z_l = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{z}{f_\kappa(z)} \frac{df_\kappa(z)}{dz} dz,$$

onde R é uma constante positiva arbitrária ligeiramente menor que $\delta\gamma$. A inspeção da integral acima, nos leva a estimativa $z_l = O(\kappa)$. Com isso, a massa do estado ligado é dada por

$$m_L = 2m - (\varepsilon_0 + z_l) = 2m - |\ln(1 - \gamma)| + O(\kappa).$$

3.3 Da Aproximação em Escada ao Modelo Completo

3.3.1 Existência dos Estados Ligados

Nesta Seção demonstraremos a existência do estado ligado no modelo completo, i.e. vamos mostrar que as conclusões sobre a existência dos estados ligados continuam valendo fora da aproximação em escada. Novamente, nos limitaremos ao caso atrativo,

onde os estados ligados aparecem abaixo da banda, e portanto tomamos $\aleph > 0$. A idéia consistem em “perturbar” a solução encontrada na aproximação em escada. A perturbação é pequena devido ao decaimento de K . Assim nossa estratégia é mostrar que os estados ligados encontrados na Seção anterior (na aproximação em escada) continuam existindo, tendo apenas sido “ligeiramente” deslocados. Mais precisamente mostramos a proposição abaixo.

Proposição I.3.3 *Para $\kappa > 0$ suficientemente pequeno o primeiro ponto no espectro de massa acima da massa $m(\kappa)$ de uma partícula é isolado, $\frac{sN(sN-1)}{2}$ vezes degenerado e obedece $m_b = 2m - |\ln(1 - \gamma)| + O(\kappa)$. Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, m_b é o único ponto do espectro de massa no intervalo $(m, m_b + \delta\gamma)$.*

Nossa estratégia para demonstrar a proposição acima, consiste em considerar a família de operadores

$$T_\kappa(\nu, \varepsilon) \equiv \hat{L}\hat{D}_0 + \nu\hat{M}'\hat{D}_0, \quad (\text{I.3.3.1})$$

para $\nu \in \mathbb{C}$, tal que $|\nu| < \nu_0$, com ν_0 suficientemente pequeno. É o operador $\nu\hat{M}'\hat{D}_0$ que desempenha o papel de pequena perturbação ao operador da aproximação em escada $\hat{L}\hat{D}_0$. Escolhemos o operador $\hat{M}'$ tal que $\kappa\hat{M}' = \hat{M}$, de forma que o parâmetro ν “controla a intensidade da perturbação”, assim $T_\kappa(\kappa, \varepsilon) = \hat{K}\hat{D}_0$, i.e. estamos considerando o modelo completo, ao passo que $T_\kappa(0, \varepsilon) = \hat{L}$, ou seja estamos na aproximação em escada. Nosso objetivo, é construir um cenário onde possamos aplicar o Teorema Analítico de Fredholm para $\hat{K}(\varepsilon)\hat{D}_0(\varepsilon)$. Supondo que possamos mostrar que o Teorema Analítico de Fredholm se aplica, então garantimos que $(1 - \hat{K}(\varepsilon)\hat{D}_0(\varepsilon))^{-1}$ existe para todo ε a menos de um *possível* conjunto de valores discretos. Se mostrarmos que existe um ε para o qual o operador $(1 - \hat{K}(\varepsilon)\hat{D}_0(\varepsilon))^{-1}$ não existe, então a equação $\hat{K}(\varepsilon)\hat{D}_0(\varepsilon)f = f$ tem uma família de soluções de dimensão finita. Para aplicarmos o Teorema Analítico de Fredholm, precisamos mostrar que, para ε próximo de ε_l e $\kappa = \nu$ suficientemente pequenos, o operador $T_\kappa(\nu, \varepsilon)$ é compacto e analítico. Por um lado, já sabemos que os operadores $\hat{L}$ e $\hat{M}$ são compactos e analíticos, uma vez que $\hat{L}$ tem domínio finito e $\hat{M}$ é um operador de classe Hilbert-Schmidt (veja a Ref. REED E SIMON [1978b]). Mais ainda, conhecemos cotas superiores para estes operadores dadas por $\|\hat{L}\| = \aleph$ e $\|\hat{M}\| = c\kappa$. Portanto, precisamos estabelecer uma cota superior para $\hat{D}_0$, para podermos tratar o operador $T_\kappa(\nu, \varepsilon)$. O operador $\hat{D}_0$ no espaço dos momentos

é o operador de multiplicação $H(\vec{p}, \varepsilon)$ dado pela Eq. (I.3.2.20), e para a norma de $\hat{D}_0$ temos $\|\hat{D}_0\| = (2\pi)^{d_1} \sup_{\vec{p} \in T_d} |H|$. De forma que o problema de determinar cotas para $\hat{D}_0$ pode ser atacado através da obtenção de cotas para os H_i 's. Para tratar este problema temos o lema abaixo:

Lema I.3.3.A *Para $\kappa > 0$ suficientemente pequeno*

a) e para $\varepsilon \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon \leq 2m, i = 1, 2, 3$, temos $H_i(\vec{p}, \varepsilon) > 0, \frac{\partial H_i}{\partial \varepsilon}(\vec{p}, \varepsilon) < 0$;

b) e para $0 < \mathcal{Re} \varepsilon \leq 2m, i = 1, 2, 3$, temos $|H_i(\vec{p}, \varepsilon)| \leq H_i(\vec{p}, \mathcal{Re} \varepsilon) \geq 0$;

c) e para $\varepsilon_0 - \delta\gamma < \mathcal{Re} \varepsilon \leq \varepsilon_0 + \ln 2$, temos

i)

$$\begin{aligned} H_1(\vec{p}, \varepsilon) &= \frac{2}{(2\pi)^d} \frac{\mathcal{G}_2^2}{1-e^\varepsilon} [1 + O(\delta)] + O(\kappa) \\ \frac{\partial H_1}{\partial \varepsilon}(\vec{p}, \varepsilon) &= \frac{2}{(2\pi)^d} \frac{\mathcal{G}_2^2 e^{-\varepsilon}}{1-e^\varepsilon} [1 + O(\delta)] + O(\kappa) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} H_2(\vec{p}, \varepsilon) &= 4\mathcal{G}_2 \int d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E) (1 + O(\kappa)) = O(\kappa) \\ \frac{\partial H_2}{\partial \varepsilon}(\vec{p}, \varepsilon) &= 4\mathcal{G}_2 O(\kappa^2) e^{-\varepsilon} \int d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E) \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} H_3(\vec{p}, \varepsilon) &= 2(2\pi)^d (\int d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E))^2 (1 + O(\kappa)) = O(\kappa^2) \\ \frac{\partial H_3}{\partial \varepsilon}(\vec{p}, \varepsilon) &= 2(2\pi)^d O(\kappa^2) e^{-\varepsilon} (\int d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E))^2 \end{aligned}$$

Demonstração -

- a) Segue diretamente do cálculo da expansão de $H_i, i = 1, 2, 3$, em potências de κ .
- b) O problema aqui é considerarmos ε com uma parte imaginária. Seja D_i o denominador de $H_i, i = 1, 2, 3$, assim $D_i(\chi + i\psi) = \cosh(u) - \cosh(\chi + i\psi)$, onde $\chi + i\psi = 2m - \varepsilon$ e $u = E + E'$. É suficiente mostrar que, para χ, ψ reais, $|D_i(\chi + i\psi)| \geq D_i(\chi)$. Temos que

$$|D_i(\chi + i\psi)| = |\cosh u - \cosh(\chi + i\psi)| \geq \cosh u - \max_{\psi} |\cosh(\chi + i\psi)|.$$

Uma vez que $|\cosh(\chi + i\psi)|^2 = \cosh^2 \chi - \sinh^2 \psi$, temos $|D_i(\chi + i\psi)| \geq \cosh u - \cosh \chi = D_i(\chi)$. De onde segue o resultado.

c) É uma consequência do Lema I.3.2.E.

□

Agora vamos usar o lema acima para estabelecermos cotas superiores para consideremos o estabelecimento de cotas superiores para $\hat{K}\hat{D}_0$, de forma a mostrar que $\hat{K}\hat{D}_0$ é compacto. Temos o seguinte resultado.

Lema I.3.3.B Para $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon = \ln 2$ e κ suficientemente pequeno, temos $|\hat{K}(\varepsilon)\hat{D}_0(\varepsilon)| < 1$

Demonstração - Da desigualdade triangular, segue que $|\hat{K}\hat{D}_0| \leq |\hat{L}\hat{D}_0| + |\hat{M}\hat{D}_0|$, de outro lado temos $|\hat{L}| = \aleph$ e $|\hat{M}| \leq \kappa$. Pelo Lema I.3.3.A, as contribuições H_2 e H_3 para $|\hat{D}_0|$ são de ordem $O(\kappa)$. Para levarmos em conta as contribuições de H_1 , notamos que $(2\pi)^d \sup_{\vec{p}} H_1(\vec{p}, \varepsilon) \leq 2\mathcal{G}_2^2(1 - e^{-\varepsilon})^{-1} + O(\kappa)$. Por outro lado

$$(1 - e^{-\varepsilon})^{-1} = (\gamma + (1 - \gamma)(1 - e^{-\Delta\varepsilon}))^{-1} = \frac{2}{1 + \gamma}.$$

Assim, temos $\hat{D}_0 = \frac{4\mathcal{G}_2^2}{(1+\gamma)} + O(\kappa)$ e

$$|\hat{L}\hat{D}_0| \leq |\hat{L}||\hat{D}_0| \leq \frac{2\gamma}{1 + \gamma} + O(\kappa).$$

Lembramos que $\gamma = \frac{1}{2\aleph\mathcal{G}_2^2}$, e portanto $\gamma = 1 - \frac{\mathcal{G}_2^2}{\mathcal{G}_\Delta}$, de outro lado a restrição $\aleph > 0$ implica que $\mathcal{G}_2^2 < \mathcal{G}_\Delta$. De onde temos $\gamma < 1$ e portanto $|\hat{L}\hat{D}_0| < 1$, de onde segue o resultado.

□

Nota I.3.b Do Lema I.3.3.A (especificamente dos itens a e b) e do Lema I.3.3.B, podemos ver facilmente que, para $2m \geq \mathcal{R}\varepsilon > \varepsilon_0 + \ln 2$ e κ suficientemente pequeno, temos $|\hat{K}(\varepsilon)\hat{D}_0(\varepsilon)| < 1$. Então usando o Lema I.3.3.B e o item c do Lema I.3.3.A, vemos que $(1 - \hat{K}\hat{D}_0)^{-1}$ existe em $\varepsilon + \delta\gamma < \mathcal{R}\varepsilon < \varepsilon + \ln 2$, para δ suficientemente pequeno.

O resultado acima mostra uma região onde $\hat{K}\hat{D}_0$ são compactos. Seguindo nossa estratégia, agora precisamos mostrar que existe um ε para o qual $(1 - \hat{K}\hat{D}_0)^{-1}$ seja singular. Para isto, vamos retornar a análise do operador $T_\kappa(\nu, \varepsilon)$ da Eq. (I.3.3.1). Vamos tratar $T_\kappa(\nu, \varepsilon)$ como sendo o resultado de uma “perturbação” aplicada ao operador $T_\kappa(0, \varepsilon_L)$. Em outras palavras, escrevemos $T_\kappa(\nu, \varepsilon) = T_\kappa(0, \varepsilon_L) + \delta T_\kappa(\nu, \varepsilon)$, onde temos a “perturbação” dada por $\delta T_\kappa(\nu, \varepsilon) = T_\kappa(\nu, \varepsilon) - T_\kappa(0, \varepsilon) + T_\kappa(0, \varepsilon) - T_\kappa(0, \varepsilon_L)$. Então nosso primeiro passo para analisar o espectro de $T_\kappa(\nu, \varepsilon)$ é estabelecermos o espectro de $T_\kappa(0, \varepsilon_L)$. O espectro de $T_\kappa(0, \varepsilon_L)$ nada mais é que o espectro de $\hat{K}(\varepsilon)\hat{D}_0(\varepsilon)$ na aproximação em escada que foi estabelecido na Seção anterior. Seja $\sigma(B)$ o espectro do operador B , com essa notação temos o lema:

Lema I.3.3.C *Para κ suficientemente pequeno, vale que $\sigma(T_\kappa(0, \varepsilon_L)) \subset \{0, 1\}$*

Demonstração - Decompondo $\tilde{f}(\vec{p}) = \tilde{f}_0 + \tilde{f}_1(\vec{p})$, onde $\tilde{f}_0$ é uma função constante e $\tilde{f}_1(\vec{p})$ é uma função ortogonal as constantes. Na Seção anterior, mostramos na aproximação em escada que $\hat{L}(\varepsilon_L)\hat{D}_0(\varepsilon_L)\tilde{f}_0 = \tilde{f}_0$. Considerando agora também as funções não constantes, podemos escrever

$$(\tilde{g}, T_\kappa(0, \varepsilon_L)\tilde{f}) = (\tilde{g}_0, \tilde{g}_1) \begin{pmatrix} 1 & A_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_0 \\ \tilde{f}_1 \end{pmatrix},$$

onde $(\tilde{g}_0, A_0\tilde{f}_1) = \tilde{g}_0 \int_{T_d} H(\vec{p}, \varepsilon) \tilde{f}_1(\vec{p}) d\vec{p}$, com $\tilde{g}_0$ denotando o complexo conjugado de $\tilde{g}_0$. Para $\kappa = 0$, a contribuição do produto de contribuições de uma partícula é zero. Do princípio do módulo máximo em $|\kappa| < \kappa_0$ (veja Ref. REED E SIMON [1972]) e do item c do Lema I.3.3.A, temos a cota superior $|A_0| < c'\kappa$. Agora, notamos que o operador inverso $(T_\kappa(0, \varepsilon_L) - \lambda)^{-1}$ é dado por

$$(T_\kappa(0, \varepsilon_L) - \lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} (1 - \lambda)^{-1} & \lambda^{-1}(1 - \lambda)^{-1}A_0 \\ 0 & -\lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

de onde vemos que o espectro é dado por $\{0, 1\}$.

□

Quando “ligamos” a perturbação o espectro de $T_\kappa(\nu, \varepsilon)$, encontrado acima vai se modificar. Precisamos então de uma estimativa de quão grande será essa modificação, essa estimativa é dada no lema abaixo.

Lema I.3.3.D *Para κ, ν_0 e δ suficientemente pequenos, e para ν, ε tais que $|\nu| < \nu_0$ e $|\varepsilon - \varepsilon_0| < 2\delta\gamma$, temos*

$$\sigma(T_\kappa(\nu, \varepsilon)) \subset \{\lambda \mid |\lambda - 1| < \frac{1}{4} \text{ ou } |\lambda| < \frac{1}{4}\}.$$

Demonstração - Iremos mostrar que para λ fora da região acima, o operador $(T_\kappa - \lambda)^{-1}$ é limitado e portanto, o espectro de T_κ não pode estar fora do conjunto $|\lambda - 1| < \frac{1}{4}$ ou $|\lambda| < \frac{1}{4}$. Então consideramos a expansão de $(T_\kappa(\nu, \varepsilon) - \lambda)^{-1}$ em uma série de Neumann. Mais precisamente, vemos que a série de Neumann de

$$(T_\kappa(\nu, \varepsilon) - \lambda)^{-1} = (T_\kappa(0, \varepsilon_L) - \lambda)^{-1}(1 + (T_\kappa(0, \varepsilon_L) - \lambda)^{-1}\delta T_\kappa(\nu, \varepsilon),$$

converge para $(T_\kappa(0, \varepsilon_L) - \lambda)^{-1}\delta T_\kappa(\nu, \varepsilon) < 1$, uma vez que $(T_\kappa(0, \varepsilon_L) - \lambda)^{-1}$ existe para $\lambda \notin \{0, 1\}$. Da demonstração do Lema I.3.3.C, para $|\lambda| > \frac{1}{4}$ e $|\lambda - 1| < \frac{1}{4}$, temos

$$|(T_\kappa(0, \varepsilon_L) - \lambda)^{-1}| \leq \max\{|\lambda|^{-1}, |1 - \lambda|^{-1}, |\lambda|^{-1}|1 - \lambda|^{-1}|A_0|\} \leq 16$$

Uma uma expansão de Taylor de $\hat{L}\hat{D}_0$ em torno de $\varepsilon = \varepsilon_L$, mostra que

$$|\hat{L}\hat{D}_0(\kappa, \varepsilon) - \hat{L}\hat{D}_0(\kappa, \varepsilon_L)| \leq \frac{1-\gamma}{\gamma}|\varepsilon - \varepsilon_L| + 2\gamma\kappa^2|\varepsilon - \varepsilon_L| + O(\kappa)|\varepsilon - \varepsilon_L|.$$

Notamos também que $|\hat{D}_0| \leq \left(\frac{g_2^2}{\gamma}(1 + 2\delta) + O(\kappa)\right)$ e $|\hat{M}'| < c'$, $|\nu\hat{M}'\hat{D}_0(\kappa, \varepsilon)| \leq 2c|\nu|$. Então $|\delta T_\kappa(\nu, \varepsilon)| \leq \frac{1-\gamma}{\gamma}|\varepsilon - \varepsilon_L| + 2\gamma\kappa^2|\varepsilon - \varepsilon_L| + 2|\nu|c'$ de forma que a série de Neumann de $(T_\kappa(\nu, \varepsilon) - \lambda)^{-1}$ converge para κ pequeno o suficiente.

□

Nota I.3.c *Vamos tomar κ e δ suficientemente pequenos, e ν e ε tais que $|\nu| < \nu_0$ e $|\varepsilon - \varepsilon_0| < 2\delta\gamma$. Da teoria de perturbações analíticas (e da multiplicidade dos autovalores na aproximação em escada), vemos que o espectro de $T_\kappa(\nu, \varepsilon)$ consiste em um único*

autovalor $\lambda_\kappa(\nu, \varepsilon)$, $\frac{sN(sN-1)}{2}$ vezes degenerado, tal que $|\lambda_\kappa(\nu, \varepsilon) - 1| < \frac{1}{4}$, com λ_κ analítico em γ e ε . Ainda para $\nu, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $T_\kappa(\nu, \varepsilon)$ comuta com conjugações complexas. Portanto tanto λ_κ quanto $\bar{\lambda}_\kappa$ são autovalores de $T_\kappa(\nu, \varepsilon)$, de onde λ_κ é real.

Finalmente, iremos mostrar que existe um valor $\varepsilon_1(\nu)$, tal que o autovalor $\lambda_\kappa(\nu, \varepsilon_1(\nu)) = 1$. Tendo feito isto podemos tomar $\nu = \kappa$ e estabelecer a existência de um $\varepsilon_b = \varepsilon_1(\kappa)$ tal que $\lambda_\kappa(\kappa, \varepsilon_b) = 1$. Nossa estratégia para mostrar a existência de $\varepsilon_1(\nu)$, com as propriedades acima, vai explorar a analiticidade conjunta de $\lambda_\kappa(\nu, \varepsilon)$ nas variáveis ν e ε , afim de usar estimativas de Cauchy para o controle das magnitudes das derivadas de $\lambda_\kappa(\nu, \varepsilon)$. Com este controle, usaremos a continuidade de $\lambda_\kappa(\nu, \varepsilon)$ em ε para mostrar a existência de uma raiz para $\lambda_\kappa(\nu, \varepsilon) - 1$. Mais precisamente, temos a proposição abaixo:

Proposição I.3.4 *Para κ e δ suficientemente pequenos e para $|\nu| < 2\kappa$, existe um único $\varepsilon_1(\nu)$, satisfazendo $|\varepsilon_1(\nu) - \varepsilon_0| \leq \delta^3 \gamma$, tal que o autovalor de $T_\kappa(\nu, \varepsilon)$, $\lambda_\kappa(\kappa, \varepsilon_1) = 1$.*

Demonstração - Conforme a estratégia traçada acima, vamos usar estimativas de Cauchy para determinar cotas superiores para as derivadas de λ_κ nas variáveis ν e ε . Para estas estimativas usamos discos de raios $|\nu| = \nu_0$ e $|\varepsilon - \varepsilon_0| = 2\delta\gamma$, e tomamos ν e ε na região dada por $|\nu| < 2\kappa$, $|\varepsilon - \varepsilon_0| < \delta^3 \gamma$. Neste domínio, encontramos

$$\left| \frac{\partial \lambda_\kappa}{\partial \nu}(\nu, \varepsilon) \right| < \frac{5}{4} \frac{1}{\nu_0}, \quad \frac{\partial^2 \lambda_\kappa}{\partial \nu \partial \varepsilon}(\nu, \varepsilon) = \frac{5}{4} \frac{1}{\nu_0} \frac{1}{\delta \gamma}.$$

Com isso, expandindo λ_κ em potências de ν e usando as estimativas de Cauchy acima, obtemos $|\lambda_\kappa(\nu, \varepsilon) - \lambda_\kappa(0, \varepsilon)| \leq \frac{5}{2} \frac{\kappa}{\nu_0}$. Tomando $\varepsilon = \varepsilon_L(\kappa)$, o temos $\lambda_\kappa(0, \varepsilon) = 1$, uma vez que estamos na aproximação em escada. Com isso, $|\lambda_\kappa(\nu, \varepsilon_L) - 1| \leq \frac{5}{2} \frac{\kappa}{\nu_0}$. Para $\varepsilon > 0$, temos

$$\frac{\partial \lambda_\kappa}{\partial \varepsilon}(\nu, \varepsilon) = \frac{\partial \lambda_\kappa}{\partial \varepsilon}(0, \varepsilon) + \int_0^\nu \frac{\partial^2 \lambda_\kappa}{\partial \nu' \partial \varepsilon}(\nu', \varepsilon) d\nu' \quad (I.3.3.2)$$

onde

$$\frac{\partial \lambda_\kappa}{\partial \varepsilon}(0, \varepsilon) \leq -\frac{(1-\gamma)}{\gamma} + O(\kappa^2). \quad (I.3.3.3)$$

O segundo termo no lado direito da Eq. (I.3.3.2) é limitado superiormente por $5 \frac{\kappa}{\delta \gamma \nu_0^2}$. Da Eq. (I.3.3.3), vemos que para κ pequeno o suficiente, vale que $\frac{\partial \lambda_\kappa}{\partial \varepsilon}(\nu, \varepsilon) \leq -\frac{(1-\gamma)}{\gamma}$.

Portanto

$$\begin{aligned}\lambda_\kappa(\nu, \varepsilon_0 + \delta\gamma) &= \lambda_\kappa(\nu, \varepsilon_0) + \frac{\partial \lambda_\kappa}{\partial \varepsilon}(\nu, \varepsilon_0) \delta^3\gamma + \int_0^\varepsilon \int_0^{\varepsilon'} \frac{\partial^2 \lambda_\kappa}{\partial \varepsilon'^2}(\nu, \varepsilon'') d\varepsilon'' d\varepsilon' \\ &\leq 1 - \frac{(1-\gamma)}{\gamma} \delta^3 + O(\kappa) + O(\delta^4)\end{aligned}$$

Logo, temos que $\lambda_\kappa(\nu, \varepsilon_0 + \delta^3\gamma) < 1$, para κ suficientemente pequeno. Analogamente, $\lambda_\kappa(\nu, \varepsilon_0 - \delta^3\gamma) > 1$, para κ pequeno. Por continuidade, existe (pelo menos um) $\varepsilon_1(\nu)$ entre $\varepsilon_0 + \delta^3\gamma$ e $\varepsilon_0 - \delta^3\gamma$ tal que $\lambda_\kappa(\nu, \varepsilon_1(\nu)) = 1$.

□

Tomando $\nu = \kappa$ e $\varepsilon_1(\kappa) = \varepsilon_b$ na Proposição acima, temos um estado ligado com massa $2m - \varepsilon_b = 2m - |\ln(1 - \gamma)| + O(\kappa)$ o que completa a prova da Proposição I.3.3. Mais ainda, se mostrarmos que a derivada de $\lambda_\kappa(\nu, \varepsilon)$ em ε for não nula para algum par (ν, ε) então o teorema da função analítica implícita garante que $\varepsilon(\nu)$ é uma função analítica de ν , e portanto ε_b é analítica em κ .

Em resumo, mostramos, *sem aproximações*, que no caso atrativo, o espectro de massa de duas partículas do modelo de quatro férmions, contém um ponto espectral isolado, com massa m_b ligeiramente menor do que a massa de duas partículas livres. Este é o primeiro ponto espectral, no espectro de massa, acima da massa de uma partícula. De forma que podemos associar este ponto espectral a um estado ligado de duas partículas. Mais ainda, note que as propriedades deste estado ligado são, em *boa aproximação*, determinadas pela aproximação em escada. Estas propriedades foram exibidas mostrando que o ponto espectral correspondente ao estado ligado de duas partículas é *isolado* e damos um raio de isolamento da ordem de $\delta^3\gamma$. Por outro lado, as contribuições não consideradas na aproximação em escada não destroem a banda espectral contínua de duas partículas, que continua tendo seu início do limiar de duas partículas $2m$. Na próxima Seção, mostraremos que para $\aleph > 0$ nenhum outro ponto espectral é encontrado entre $2m - \varepsilon_b + \delta^3\gamma$ e $2m$.

3.3.2 Ausência do Espectro de Massa

Nesta Seção provaremos que fixado $\aleph > 0$, o espectro de massa em $(m, 2m)$ consiste do ponto espectral degenerado $2m - \varepsilon_b = 2m - |\ln(1 - \gamma)| + O(\kappa)$. Mais

precisamente, temos a proposição:

Proposição I.3.5 *Para $\kappa > 0$ suficientemente pequeno e no subespaço de duas partículas, valem as seguintes propriedades espectrais:*

- (a) *Fixado $\aleph \leq 0$, não há espectro de massa em $(m, 2m)$.*
- (b) *Fixado $\aleph > 0$, o espectro de massa em $(m, 2m)$ consiste em um único ponto espectral degenerado dado por $m_b = 2m - \varepsilon_b = 2m - |\ln(1 - \gamma)| + O(\kappa)$.*

Na Seção I.3.2, mostramos que a existência de estados ligados abaixo do limiar de duas partículas depende do sinal de $\aleph$. No caso $\aleph > 0$, onde mostramos que existe um estado ligado abaixo da banda de duas partículas. O ponto espectral m_b , associado a este estado ligado, é o único ponto espectral no subespaço de duas-partículas em $(0, m_b + \gamma\delta^3)$, com delta suficientemente pequeno. Nesta mesma região, para $\aleph \leq 0$ não há nenhum estado ligado. A idéia aqui é mostrar que, para $\aleph \leq 0$, o parâmetro δ pode ser tomado grande o suficiente desde que $m_b + \delta\gamma$ não atinja o limiar de duas partículas, o que demonstraria o item (a) da proposição acima. Em seguida, usaremos argumentos análogos, ligeiramente modificados, para excluir a existência de espectro de massa no subespaço de duas partículas em $(m_b + \gamma\delta, 2m)$ para o caso $\aleph > 0$, demonstrando assim o item b.

No que se segue, nos restringiremos a $\aleph \leq 0$ e apenas estaremos interessados em estados ligados abaixo da banda de duas partículas.

A idéia é considerarmos $a\ell_\delta$, o subespaço anti-simétrico do espaço ℓ_2 com peso (veja a Ref. REED E SIMON [1978b] para os detalhes)

$$\ell_\delta = \{f : A \rightarrow \mathbb{C} \mid \int \sum_{\alpha\alpha} |f_\alpha^a(x)|^2 e^{\delta|x|} dx < \infty, \delta = \frac{m}{8}\}.$$

Trataremos $\hat{D}_0$ e $\hat{D}_L$ como mapas $\ell_\delta \rightarrow \ell_{-\delta}$. Portanto $\hat{K}$ e $\hat{L}$ são tomados como operadores de $\ell_{-\delta} \rightarrow \ell_\delta$, de forma que ao lado esquerdo da Eq. (I.1.4.11) pode ser reescrita na forma $\langle f, \hat{D}_L f \rangle$, esta expressão denota, em palavras, a ação do funcional linear $\hat{D}_L f \in \ell_{-\delta}$ agindo em vetores $f \in \ell_\delta$. A norma ℓ_δ de $\hat{D}_L$ é a norma ℓ^2 de $(\hat{D}_L)_\delta$, onde $(\hat{D}_L)_\delta$ tem núcleo dado por

$$e^{-\delta|\vec{\xi}|} \hat{D}_L(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k) e^{-\delta|\vec{\eta}|}.$$

A idéia é mostrarmos, para $|\kappa|$ suficientemente pequeno e para $\chi \in (0, 2m)$, que o operador $\hat{D} : \ell_\delta \rightarrow \ell_{-\delta}$, dado por

$$\hat{D} = \hat{D}_L(1 - \hat{M}\hat{D}_L)^{-1} \quad (\text{I.3.3.4})$$

existe e portanto não há estados ligados abaixo da banda de duas partículas para $\aleph \leq 0$. Notamos inicialmente que a análise da Seção I.3.2 garante que, nesta situação, a norma de $\hat{D}_L$ limitada (uma vez que para $\aleph \leq 0$ não temos nenhum ponto no espectro de massa entre a massa de uma partícula e a banda de duas partículas livres). A existência de $(1 - \hat{M}\hat{D}_L)^{-1}$, pode ser mostrada utilizando uma série de Neumann. Assim, precisamos mostrar que a norma ℓ_δ de $\hat{M}\hat{D}_L$ é menor que 1 e de onde temos a convergência da série de Neumann para $(1 - \hat{M}\hat{D}_L)^{-1}$. Como veremos, as cotas superiores para a norma do operador $\hat{M}\hat{D}_L$ dependem de cotas superiores do operador $\hat{D}_L$ e de limites superiores refinados em M para distâncias pequenas.

Para obtermos, as cotas de $|\hat{D}_L|$, vamos separar algumas contribuições de D_L . Vamos decompor o operador $\hat{D}_L$ na forma

$$\hat{D}_{L\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0) = \hat{D}_{A\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0) + \hat{D}_{B\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0),$$

onde

$$\hat{D}_{A\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0) = (1 - \aleph \hat{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\vec{0}, \vec{0}, k^0))^{-1} \hat{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{D}_{B\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0) = & -\aleph(1 - \aleph \hat{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\vec{0}, \vec{0}, k^0))^{-1} [\hat{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0) \hat{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\vec{0}, \vec{0}, k^0) \\ & - \hat{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{0}, k^0) \hat{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\vec{0}, \vec{\eta}, k^0)]. \end{aligned}$$

O lema abaixo fornece cotas superiores para cada uma das contribuições $\hat{D}_A$ e $\hat{D}_B$. Além disso, o lema abaixo também nos dá uma cota superior para a norma de $\hat{D}_L$ em ℓ_δ .

Lema I.3.3.E *Para κ suficientemente pequeno e para $-ik_0 = \chi \in (0, 2m)$, vale que*

$$(a) \quad |\hat{D}_{A\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)| < |\aleph|^{-1}$$

$$(b) \quad |\hat{D}_{B\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)| < O(1)[1 + \delta(\vec{\eta})][1 + \delta(\vec{\xi})][1 + \kappa^{-1}|\eta|^2]$$

$$(c) \quad \|(\hat{D}_{L\alpha\beta}^{ab})_\delta\|_2 < c\kappa^{-1}$$

Demonstração -

(a) Da Eq. (I.3.2.19) temos que $|\hat{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)| < \hat{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\vec{0}, \vec{0}, k^0)$. Portanto,

$$|\hat{D}_{A\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)| < \frac{x}{1 - \aleph x},$$

onde $x = \hat{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\vec{0}, \vec{0}, k^0)$. Para $\aleph < 0$, a função $\frac{x}{1 - \aleph x}$ é monotonicamente crescente e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 - \aleph x} = \frac{1}{|\aleph|}$, de onde segue o resultado.

(b) Seja $D_{B\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0) = -\aleph(1 - \aleph \hat{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\vec{0}, \vec{0}, k^0))^{-1} \Phi_{\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)$, onde $\Phi_{\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0) = [\hat{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0) \hat{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\vec{0}, \vec{0}, k^0) - \hat{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{0}, k^0) \hat{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\vec{0}, \vec{\eta}, k^0)]$. Usando a Eq. (I.3.2.19), obtemos

$$|\Phi_{\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)| \leq 4(2\pi)^d \int \cdots \int \left[\frac{\sinh(E_1 + E_2)}{\cosh(E_1 + E_2) - \cosh(\chi)} \right] \left[\frac{\sinh(E_3 + E_4)}{\cosh(E_3 + E_4) - \cosh(\chi)} \right] \\ \times |\cos(\vec{p} \cdot \vec{\eta}) - \cos(\vec{q} \cdot \vec{\eta})| d\sigma_{\vec{p}}(E_1) d\sigma_{\vec{p}}(E_2) d\sigma_{\vec{q}}(E_3) d\sigma_{\vec{q}}(E_4) d\vec{p} d\vec{q}.$$

Por outro lado, notamos que

$$\cos \theta - \cos \phi = -2 \sin \left(\frac{\theta + \phi}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta - \phi}{2} \right),$$

como

$$\sin \left(\frac{\theta \pm \phi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\phi}{2} \right) \pm \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right),$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \cos \theta - \cos \phi &= -2 \left[\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ &= -2 \left[(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}) \cos^2 \frac{\phi}{2} - (1 - \cos^2 \frac{\phi}{2}) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ &= -2 \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\phi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Uma vez que $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$, temos que $\cos \theta - \cos \phi = (1 + \cos \theta) - (1 + \cos \phi)$. Assim da desigualdade triangular temos $|\cos \theta - \cos \phi| \leq (1 + \cos \theta) + (1 + \cos \phi)$.

Logo $|\cos(\vec{p} \cdot \vec{\eta}) - \cos(\vec{q} \cdot \vec{\eta})| \leq (1 - \cos(\vec{p} \cdot \vec{\eta})) + (1 - \cos(\vec{q} \cdot \vec{\eta}))$. Integrando em $\vec{q}$, encontramos

$$|\Phi_{\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)| \leq 4(2\pi)^d \hat{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\vec{0}, \vec{0}, k^0) \int \cdots \int \left[\frac{\sinh(E_1 + E_2)}{\cosh(E_1 + E_2) - \cosh(\chi)} \right] \times (1 - \cos(\vec{p} \cdot \vec{\eta})) d\sigma_{\vec{p}}(E_1) d\sigma_{\vec{p}}(E_2) d\vec{p}.$$

Da demonstração do item anterior, temos $|\aleph(1 - \aleph \hat{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\vec{0}, \vec{0}, k^0))^{-1} \hat{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\vec{0}, \vec{0}, k^0)| < 1$. E portanto, temos que

$$|D_{B\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)| \leq 4(2\pi)^d \int \cdots \int \left[\frac{\sinh(E_1 + E_2)}{\cosh(E_1 + E_2) - \cosh(\chi)} \right] (1 - \cos(\vec{p} \cdot \vec{\eta})) d\sigma_{\vec{p}}(E_1) d\sigma_{\vec{p}}(E_2) d\vec{p}.$$

Usando a decomposição da medida $d\sigma_{\vec{p}}(E)$, dada no Lema I.3.2.A, e relembrando que as contribuições das integrais com $d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E)$ são de $O(1)$, temos que

$$|\hat{D}_{B\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)| < 4(2\pi)^d \left[O(1) + \int \frac{\sinh(2\omega(\vec{p}))}{\cosh(2\omega(\vec{p})) - \cosh(\chi)} (1 - \cos(\vec{p} \cdot \vec{\eta})) Z^2(\vec{p}) d\vec{p} \right].$$

Como $Z(\vec{p}) = \frac{\mathcal{G}_2}{(2\pi)^d} + O(\kappa)$ a última integral é limitada superiormente por $c\kappa^{-1}|\vec{\eta}|^2$

(c) Segue dos itens (a) e (b) acima, uma vez que

$$\|(\hat{D}_L)_\delta\|_2 < \sup_{\vec{\xi}} \left[e^{-\delta|\vec{\xi}|} \sum_{\vec{\eta}} |\hat{D}_{L\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)| e^{-\delta|\vec{\eta}|} \right]$$

□

Agora, passamos à tarefa de determinar cotas para $\hat{M}$. Para estabelecer as cotas adequadas precisamos de cotas em $\hat{K}$ para pequenas distâncias. Para isto, usaremos o lema abaixo,

Lema I.3.3.F Para κ suficientemente pequeno e para $\chi \in (0, 2m)$

$$a) \hat{M}(0, 0, k_0) = O(\kappa^{\frac{1}{2}})$$

$$b) K(\vec{e}_1, -\vec{e}_1, 0) = K(\vec{e}_1, \vec{e}_1, -\vec{e}_1) = O(\kappa^2)$$

Demonstração -

- (a) Da Eq. (I.3.2.8) temos que $|K(\vec{0}, \vec{0}, \tau)| \leq c_4 \left| \frac{\kappa}{B_4} \right|^{4|\tau_0|+|\vec{\tau}|}$ e uma vez que $M(\vec{0}, \vec{0}, 0) = O(\kappa)$ temos o resultado.
- (b) Em primeiro lugar, notemos que a coordenada relativa $(\vec{e}_1, -\vec{e}_1, 0)$ equivale em coordenadas da rede a $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_1, 0)$ e $(\vec{e}_1, \vec{e}_1, -\vec{e}_1)$ equivale a $(0, e_1, 0, \vec{e}_1)$. Ambos os casos, descrevem uma situação onde o cluster dos x coincide com o cluster dos y e dentro de cada cluster os campos distam de uma unidade. Então, basta mostramos a segunda igualdade. Precisamos estimar a ordem de $K(\vec{e}_1, \vec{e}_1, -\vec{e}_1)$. Usando $DD^{-1} = \mathbb{I}$ e notando que $D(\vec{0}, \vec{e}_1, \vec{0}, \vec{e}_1) = 2\mathcal{G}_2^2 I_S + O(\kappa^2)$, temos $D^{-1}(\vec{0}, \vec{e}_1, \vec{0}, \vec{e}_1) = \frac{1}{2}\mathcal{G}_2^{-2} I_S + O(\kappa^2)$. Analogamente, $D_0^{-1}(\vec{0}, \vec{e}_1, \vec{0}, \vec{e}_1) = \frac{1}{2}\mathcal{G}_2^{-2} I_S + O(\kappa^2)$, de onde segue o resultado.

□

Seja B um operador em ℓ_δ cujo núcleo é dado por $B(\vec{\xi}, \vec{\eta})$. A norma Hilbert-Schmidt do operador B é definida como

$$\|B\|_{HS} \equiv \left(\int e^{2\delta|\vec{\xi}|} |B(\vec{\xi}, \vec{\eta})|^2 e^{-2\delta|\vec{\eta}|} d\vec{\xi} d\vec{\eta} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Uma vez que $\hat{M}$ é Hilbert-Schmidt (i.e. tem norma Hilbert-Schmidt finita), convém usarmos esta norma para estabelecermos limites superiores para $\hat{M}D_L$. Para tal fim, estabeleceremos cotas para as normas Hilbert-Schmidt de $\hat{M}\hat{D}_A$ e $\hat{M}\hat{D}_B$. Para a norma de $\hat{M}\hat{D}_A$, estabelecemos o lema abaixo.

Lema I.3.3.G $\|\hat{M}\hat{D}_A\|_{HS} < O(\kappa^{\frac{1}{4}})$ uniformemente em $-ik^0 = \chi \in (0, 2m)$

Demonstração - Consideremos $f(\vec{\xi}, k^0) = \sum_{\vec{\eta}} |\hat{M}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)|$. Da Eq. (I.3.2.8) e do Lema I.3.3.F, vale que

$$f(\vec{\xi}, k^0) = \begin{cases} O(\kappa^{\frac{1}{2}}) & \text{se } \vec{\xi} = \vec{0} \\ O(\kappa^{\frac{1}{4}})[e^{-\frac{1}{4}(m-O(1))|\vec{\xi}|}] & \text{se } \vec{\xi} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Portanto a estimativa $f(\vec{\xi}, k^0) = O(\kappa^{\frac{1}{2}})[e^{-\frac{1}{4}(m-O(1))|\vec{\xi}|}]$ vale para todo $\vec{\xi} \in \mathbb{Z}^d$ e é uniforme em k_0 para $\chi \in (0, 2m)$. Do item a do Lema I.3.3.E, temos $|\hat{D}_{A\alpha\beta}^{ab}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)| < |\aleph|^{-1}$, de onde vemos que

$$|\hat{M}\hat{D}_A(\vec{\xi}, \vec{\eta})| \leq O(1) \sum_{\vec{\eta}} |\hat{M}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)| \leq O(\kappa^{\frac{1}{8}})[e^{-1/4(m-O(1))|\vec{\xi}|}]$$

que nos mostra que $\|\hat{M}\hat{D}_A\|_{HS} \leq O(\kappa^{\frac{1}{4}})$, se $\delta \in (0, \frac{m}{8})$

□

Para determinarmos uma cota superior para $\|\hat{M}(k^0)\hat{D}_L\|_{HS}$, nos falta determinar uma cota $\|\hat{M}(k^0)\hat{D}_{LB}\|_{HS}$. Do Lema I.3.3.E (item b), vemos que

$$|\hat{M}(k^0)\hat{D}_B(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{k}^0)| \leq O(1)\kappa^{-1} \sum_{\vec{\eta} \neq \vec{0}} |\hat{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)|(1 - \delta(\vec{\eta}))|\vec{\eta}|^2.$$

Esta é uma situação problemática, o fator κ^{-1} é grande e, a primeira vista, $|\hat{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)|$ não fornece nenhuma forma de compensá-lo em distâncias pequenas. Para controlarmos $|\hat{M}\hat{D}_B|_{\delta HS}$, precisamos de algum controle em $|\hat{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)|$ para pequenas distâncias. Usando o Lema I.3.3.F (item b), vamos estabelecer um controle para as contribuições de distância pequena para $|\hat{M}D_B|_{\delta HS}$ no lema abaixo.

Lema I.3.3.H Para $|\vec{\xi}| = 0, 1$, κ suficientemente pequeno e $\chi \in (0, 2m)$ temos a estimativa

$$\sum_{|\vec{\eta}|=1} \sum_{\vec{\tau}} |K(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau)| \leq O(\kappa)[e^{-\frac{1}{2}(m-O(1))|\vec{\xi}|}].$$

Demonstração - Da Eq. I.3.2.8,

$$|\hat{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)| \leq \sum_{\vec{\tau}} |K(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\tau})| + O(\kappa)[e^{-\frac{1}{2}(m-O(1))(|\vec{\xi}|+|\vec{\eta}|)}],$$

para $\chi \in (0, 2m)$. Seja $N \equiv \sum_{\vec{\eta} \neq \vec{0}} \sum_{\vec{\tau}} |K(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau)|$. Com isso,

$$N \leq \sum_{\vec{\eta} \neq \vec{0}} \sum_{\vec{\tau}} |K(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\tau})| + O(\kappa^2)[e^{-\frac{1}{2}(m-O(1))|\vec{\xi}|}].$$

Por outro lado, temos que $\sum_{|\vec{\eta}| \geq 2} \sum_{\vec{\tau}} |K(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau)| \leq O(\kappa)[e^{-\frac{1}{2}(m-O(1))|\vec{\xi}|}]$, de forma que

$$N \leq \sum_{|\vec{\eta}|=1} \sum_{\vec{\tau}} |K(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau)| + O(\kappa)[e^{-\frac{1}{2}(m-O(1))|\vec{\xi}|}].$$

Uma vez que $\min_{\vec{\tau}} |2\vec{\tau} + \vec{\eta}| = 1$ para $|\vec{\eta}| = 1$, temos que

$$\sum_{|\vec{\eta}|=1} \sum_{\vec{\tau}} |K(x_1, x_2; x_3, x_4)(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau)| \leq O(\kappa).$$

De maneira similar, se $|\vec{\eta}| = |\vec{\xi}| = 1$ e $\vec{\xi} \neq \pm \vec{\eta}$, temos que

$$\sum_{\vec{\tau}} |K(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau)| \leq O(\kappa)[e^{-\frac{1}{2}(m-O(1))}].$$

Agora, consideremos o caso $|\vec{\eta}| = |\vec{\xi}| = 1$ e $\vec{\xi} = -\vec{\eta}$. Podemos tomar $\vec{\xi} = -\vec{\eta} = \vec{e}_1$. Então temos $\sum_{\vec{\tau}} |K(\vec{e}_1, -\vec{e}_1, \tau)| \leq |K(\vec{e}_1, -\vec{e}_1, 0)| + O(\kappa^2)[e^{-\frac{1}{2}(m-O(1))}]$, e pelo item b do Lema I.3.3.E, vemos que

$$\sum_{\vec{\tau}} |K(\vec{e}_1, -\vec{e}_1, \tau)| \leq O(\kappa^2)[e^{-\frac{1}{2}(m-O(1))}].$$

Finalmente, consideremos o caso $|\vec{\eta}| = |\vec{\xi}| = 1$ e $\vec{\xi} = \vec{\eta}$. Tomando $\vec{\xi} = \vec{\eta} = \vec{e}_1$, obtemos $\sum_{\vec{\tau}} |K(\vec{e}_1, \vec{e}_1, \tau)| \leq |K(\vec{e}_1, \vec{e}_1, -\vec{e}_1)| + O(\kappa^2)[e^{-\frac{1}{2}(m-O(1))}]$, e novamente usando o Lema I.3.3.E temos

$$\sum_{\vec{\tau}} |K(\vec{e}_1, \vec{e}_1, \tau)| \leq O(\kappa^2)[e^{-1/2(m-O(1))}].$$

Assim $\sum_{|\vec{\eta}|=1} \sum_{\vec{\tau}} |K(x_1, x_2; x_3, x_4)(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau)| \leq O(\kappa)[e^{-1/2(m-O(1))|\vec{\xi}|}]$, para $|\vec{\xi}| = 0, 1$.

□

Contornado o problema das distâncias pequenas, podemos mostrar que $\hat{M}\hat{D}_B$ é tipo Hilbert-Schmidt, o que é estabelecido no lema abaixo.

Lema I.3.3.I $\|\hat{M}\hat{D}_B\|_{HS} < O(\kappa^{\frac{1}{8}})$ uniformemente para $\chi \in (0, 2m)$

Demonstração - Do lema I.3.3.H, temos

$$\begin{aligned} |\hat{M}(k^0)\hat{D}_B|_{\delta HS}^2 &\leq O(1) \sum_{\vec{\xi}, \vec{\zeta}} e^{2(|\vec{\xi}| - |\vec{\eta}|)} \left(\sum_{\vec{\eta} \neq \vec{0}} |\hat{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)|^2 (1 - \delta(\vec{\eta})) |\vec{\eta}|^4 \right) \\ &\leq O(1) \kappa^2 e^{2\delta} \sum_{\vec{\xi}} e^{2|\vec{\xi}|} \left(\sum_{|\vec{\eta}|=1} \sum_{\tau} |K(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau)| \right)^2 \\ &\quad + O(1) e^{2\delta} \sum_{\vec{\xi}} e^{-(m-O(1)-2\delta)|\vec{\xi}|}. \end{aligned}$$

O último termo da inequação acima é majorado por $O(1)e^{-2\delta}$, já o primeiro termo do lado direito é limitado superiormente por

$$O(1) \kappa^{-2} e^{-2\delta} \sum_{\vec{\xi}} e^{2|\vec{\xi}|} \left(\sum_{|\vec{\eta}|=1} \sum_{\tau} |K(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau)| \right)^2 \leq R,$$

onde

$$R \equiv O(1) \kappa^2 e^{2\delta} \left\{ \sum_{|\vec{\xi}|=0,1} O(\kappa^2) [e^{-(m-O(1)-2\delta)|\vec{\xi}|}] + \sum_{|\vec{\xi}| \geq 2} O(\kappa) [e^{-(m-O(1)-2\delta)|\vec{\xi}|}] \right\}.$$

Mais ainda, vemos que $R \leq O(1)e^{-2\delta}[1 + O(1)e^{-1/2(m-O(1))}] \leq O(1)e^{-2\delta}$. Logo, das cotas acima, temos que $|\hat{M}(k^0)\hat{D}_B(k^0)|_{\delta HS} < O(\kappa^{\frac{1}{8}})$ uniformemente em $-ik^0 = \chi \in (0, 2m)$.

□

Dos lemas I.3.3.G e I.3.3.I, para $\aleph < 0$ temos $|\hat{M}\hat{D}_L| < |\hat{M}\hat{D}_A| + |\hat{D}_B| < O(\kappa^{\frac{1}{4}}) + O(\kappa^{\frac{1}{8}}) < 1$. Como discutimos no início desta Subseção, isto garante a convergência da série de Neumann para $(1 - \hat{M}\hat{D}_L)^{-1}$, que por sua vez implica na existência de $\hat{D}(\chi)$ para $\chi \in (m, 2m)$. Isso completa a parte *a* da Proposição I.3.5, uma vez que não temos estados ligados para $\aleph = 0$.

Agora passaremos a demonstração da parte *b* da Proposição I.3.5. A idéia é análoga a implementada para demonstrar o item parte *a* da proposição, exceto pelas cotas obtidas no Lema I.3.3.E. O lema abaixo modifica estas cotas, e fornece uma maneira natural para modificar os Lemas I.3.3.G e I.3.3.I, para o caso $\aleph > 0$.

Lema I.3.3.J *Para κ suficientemente pequeno e para $\chi \in [m_b + \delta\gamma, 2m)$, existe uma constante positiva c tal que*

$$a) \quad |\hat{D}_A(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k_0)| < \aleph^{-1}(1 + c^{-1})$$

$$b) \quad |\hat{D}_B(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k_0)| < O(1)(1 + c^{-1})[1 - \delta(\vec{\xi})][1 - \delta(\vec{\eta})][1 + \beta^{-1}|\vec{\eta}|^2]$$

Demonstração -

(a) Novamente, da Eq. I.3.2.19 vemos que $|\hat{D}_0(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \chi)| \leq \hat{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, \chi)$. Mais ainda temos que $\hat{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, \chi)$ é positiva e monotonicamente crescente. Chamemos I o intervalo $[m_b + \delta\gamma, 2m)$, então $\inf_{\chi \in I} (\aleph \hat{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, \chi) - 1) = \aleph \hat{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, m_b + \delta\gamma) - 1 \equiv c_6$, uma vez que $D_0(\vec{0}, \vec{0}, \chi)$ é crescente para χ abaixo da banda de duas partículas, e escolhemos algum $c < c_6$. Por enquanto, vamos supor que $c > 0$. Com esta hipótese temos

$$|\hat{D}_A(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \chi)| \leq (\aleph \hat{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, \chi) - 1)^{-1} \hat{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, \chi) \leq \aleph^{-1}(1 + c^{-1}),$$

onde, para estabelecer a última desigualdade, usamos $\hat{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, \chi) = \aleph^{-1}((\aleph \hat{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, \chi) - 1) + 1) < c_6$.

(b) Da demonstração do item b do Lema I.3.3.E, temos que

$$\hat{D}_B(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k_0) = -\aleph(1 - \aleph \hat{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, k^0))^{-1} \hat{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, k^0) B(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0),$$

onde $B(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0) \equiv \hat{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, k^0) \Phi(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)$ e $|B(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)| \leq O(1)[1 + \beta^{-1}|\vec{\eta}|^2]$. Assim,

$$\begin{aligned} |\hat{D}_{Ra}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k_0)| &\leq (1 - \aleph \hat{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, k^0))^{-1} (1 - 1 + \aleph \hat{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, k^0)) |B(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)| \\ &\leq (1 + c^{-1}) |B(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)|. \end{aligned}$$

Para concluir a demonstração, resta demonstrar que de fato podemos tomar $c > 0$. Pra isso tomamos $\chi = 2m - \varepsilon$ e reescrevemos $\aleph \hat{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, k^0)$, substituindo a decomposição da medida espectral $d\sigma_{\vec{p}}(E)$, dada no Lema I.3.2.A, na Eq. (I.3.2.19), de maneira análoga ao feito na Subseção I.3.2.2. Com este procedimento, obtemos $\aleph \hat{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, k^0) \equiv Y_1(\kappa, \varepsilon) + Y_2(\kappa, \varepsilon) + Y_3(\kappa, \varepsilon)$, onde $Y_i(\kappa, \varepsilon)$, $i = 1, 2, 3$ são as contribuições

de duas ou mais partículas, dadas na Eq. (I.3.2.22). Do Lema I.3.3.A, temos que $Y_i(\kappa, \varepsilon) > 0$, e por outro lado $\aleph \hat{D}_0(\vec{0}, \vec{0}, k^0) > Y_i(\kappa, \varepsilon)$. Como discutido na Seção I.3.2 a contribuição dominante $Y_1(\kappa, \varepsilon)$, referente ao produto de duas contribuições de uma partícula, é monotonicamente decrescente em ε e conjuntamente analítica nas variáveis κ e ε . Temos ainda, $Y_1(0, \varepsilon) = \frac{\gamma}{(1-e^{-\varepsilon})}$, $Y_1(0, \varepsilon_0) = 1$. Assim,

$$c_6 > Y_1(0, \varepsilon_0 - \delta\gamma + O(\kappa)) - 1 = Y_1(0, \varepsilon_0 - \delta\gamma) - Y_1(0, \varepsilon_0) + O(\kappa) = -\Delta Y_1(0, \Delta\varepsilon) + O(\kappa) \equiv c,$$

onde $\Delta Y_1(0, \delta\gamma) = -(1-\gamma)(1-e^{\delta\gamma})(1-(1-\gamma)e^{\delta\gamma})^{-1} > 0$, logo $c > 0$ o que conclui a demonstração.

□

Capítulo 4

Modelo de Quatro-Férmions: Considerações Finais

*“I may not have gone where I intended to go, but I
think I have ended up where I needed to be. ”*

Douglas Adams

Nesta primeira parte do trabalho, nós determinamos *exatamente* a parte inferior do espectro de energia-momento do modelo de Quatro-Férmions. Mostramos que o espectro de excitação deste modelo, contém, na região estudada, curvas de dispersão que são identificadas como partículas e estados ligados. Para tanto, desenvolvemos uma expansão em polímeros para o modelo e a usamos para se mostrar a existência das funções de correlação, e suas propriedades de analiticidade, no limite de volume infinito. De outro lado, mostramos que as funções de correlação do modelo obedecem a chamada positividade de Osterwalder-Schrader e como consequência existe uma teoria quântica de campos com tempo imaginário associada a este modelo. Em seqüência, usamos essa construção para definir o operador hamiltoniano e operadores de momento espacial, que comutam entre si, partindo, respectivamente, dos operadores de translação temporal e espacial na rede. Obtendo representações espectrais para funções de correlação dois e

quatro pontos adequadas, mostramos que a parte inferior do espectro destes operadores está relacionado as singularidades complexas destas funções de correlação. As funções de correlação do modelo são invariantes por várias transformações de simetria usuais da teoria quântica de campos e construímos, também uma transformação de *Reflexão Temporal* que se revela uma nova simetria do modelo. O uso destas simetrias implica em diversas propriedades espectrais para o modelo. Entre outras propriedades, com a simetria de conjugação de carga mostramos que o espectro da região de partículas e de anti-partículas é o mesmo. Mais ainda, com uma combinação de conjugação de carga, paridade e Reflexão Temporal mostramos que as propriedades espectrais associadas a partículas de spin $+\frac{1}{2}$ são as mesmas encontradas para partículas de spin $-\frac{1}{2}$. Nesse sentido, também é claro que as propriedades espectrais independem do isospin das partículas.

As singularidades das funções de correlação são obtidas por meio de um estudo detalhado das taxas de decaimento das funções de correlação. No subespaço de uma partícula, mostramos a existência de várias partículas de massa $\approx -\ln \kappa$. Já no subespaço de duas partículas encontramos diversos estados ligados próximos a banda de duas partículas livres, com energias de ligação de ordem 1. A existência destes estados ligados está associado ao sinal do parâmetro $\aleph$ que indica a ocorrência de dominação Gaussiana no modelo. Para $\aleph = 0$ nenhum estado ligado é encontrado. Para $\aleph > 0$ (Subjugação Gaussiana), os estados ligados aparecem abaixo da banda de duas partículas, de modo que temos um caso atrativo. Para $\aleph < 0$ (Dominação Gaussiana), os estados ligados aparecem acima da banda. O método utilizado para a detecção destes estados ligados é o desenvolvido para a análise da equação de Bethe-Salpeter na rede, que resolvemos em um primeiro momento em uma aproximação em escada para em seguida, através de um rigoroso controle de todas as contribuições do modelo, validar os resultados no modelo completo. Por fim, mostramos que estes resultados podem ser compreendidos no contexto de operadores de Schrödinger na rede.

Os resultados acima estendem para o caso puramente fermiônico os métodos desenvolvidos para o modelo de spins em SCHOR E O'CARROLL [2000b,a] e ANJOS, VEIGA E O'CARROLL [2005]. Aqui, devido ao fato dos campos fermiônicos serem operadores limitados, obtemos extensões meromórficas em regiões maiores do que as obtidas no caso bosônico (em particular no modelo de spins). Essa característica coloca

o modelo de Quatro-Férmions em uma posição especial para o desenvolvimento de novas ferramentas para a determinação de propriedades espectrais de modelos de teoria quântica de campos euclidianas na rede.

Nesse ponto existem várias questões que carecem de respostas claras. Em primeiro lugar, métodos para a obtenção de propriedades espectrais para regiões com mais partículas podem ser desenvolvidos. O conhecimento destas regiões do espectro de excitação do modelo de Quatro-Férmions, especialmente nas regiões de três, quatro, cinco e seis partículas, pode ampliar nossa intuição sobre o espectro de partículas para modelos de teoria quântica de campo mais complexas, como é o caso da cromodinâmica quântica. De outro lado, expansões mais refinadas que a expansão de polímeros vêm sendo desenvolvidas (veja a Ref. ABDESSELAN E RIVASSEAU [1998]) e podem permitir a construção de métodos para estender nossos resultados para uma região maior dos parâmetros e quem sabe abrir caminho para o estudo do espectro de energia-momento no limite da rede indo para o continuum. Finalmente, os métodos desenvolvidos aqui podem servir de base para se considerar a obtenção do espectro de excitação em modelos de teoria quântica de campos em espaços curvos localmente euclidianos, seguindo o caminho aberto nas Refs. JAFFE E RITER [2007a,b].

Parte II

Modelos de Cromodinâmica Quântica na Rede

Capítulo 1

Pentaquarks na Rede

“The story so far: In the beginning the Universe was created. This has made a lot of people very angry and has been widely regarded as a bad move.”

Douglas Noel Adams

1.1 Introdução e Resultados

Um dos problemas mais fundamentais da física atual é determinar o espectro das partículas presentes na cromodinâmica quântica. Atualmente, este modelo é o melhor candidato para um modelo de teoria quântica de campos para as interações fortes. Enquanto a descrição do espectro de um hádron (mésons e bárions) feita pela cromodinâmica quântica produz resultados bastante satisfatórios, a situação é muito menos aceitável quando falamos de estados ligados de dois ou mais hádrons. Em particular, nós não sabemos se a existência de estados de compostos de 5 quarks e/ou antiquarks, os chamados pentaquarks, é predita pela cromodinâmica quântica. Mais ainda, nós não sabemos se esses pentaquarks existem na natureza e como poderíamos detectá-los. O mesmo cenário incerto existe a respeito de outras supostas partículas

compostas, como por exemplo as glueballs. No momento, esses são alguns dos grandes desafios da física de partícula.

Figura II.1.1. Definição bárions e mésons

Vários trabalhos tem atacado a questão da existência dos pentaquark, tanto do ponto de vista teórico quanto experimental. Em particular, após os primeiros anúncios de detecção da partícula Θ^+ (composta pelos quarks $uudd\bar{s}$) (veja a Ref. KLEMPET E ZAITSEV [2007]), foi proposta, na Ref. BIJKER, GIANNINI E SANTOPINTO [2004], uma classificação completa dos estados de cinco quarks em termos de representações do grupo de sabor. Mais ainda, várias estruturas espaciais e de cor para os pentaquarks foram teoricamente preditas (veja as Figuras II.1.1 e II.1.1), como visto nas Refs. HUANG ET AL. [2008], entre estas estruturas estão o anti-triplete de cor e diquarks ($qq - qq - \bar{q}$), diquark-triquark ($qq - qq\bar{q}$), moléculas hadrônicas ($q\bar{q} - q^3$) (veja a Ref. PING ET AL. [2008] para um estudo sistemático deste caso), etc.

Figura II.1.2. Estruturas para os estados pentaquark

Ainda que as evidências experimentais para existência dos pentaquarks sejam

controversas, uma grande atenção tem sido devotada a sistemas compostos por múltiplos quarks. Por exemplo, um estado composto de 5 quarks parece ser necessário para um entendimento mais claro do spin nuclear do próton no contexto do modelo de seus quarks constituintes (como observado nas Ref. QING, CHEN E WANG [1998a,b]). Mais ainda, um estado composto de 5 quarks pode ser responsável pelo momento magnético de estranheza positiva do próton (como mostrado na Ref. ZOU E RISKA [2005]). De outro lado, em um nível mais fundamental, moléculas “hadrônicas” como os tetraquarks, pentaquarks, e hexaquarks e outros estados mais gerais de multiquark são interessantes uma vez que estes fornecem informações importantes sobre os mecanismos de interação presentes nos limites de baixa energia da cromodinâmica quântica.

Uma das maneiras de formular a cromodinâmica quântica é usar a aproximação de rede para o espaço-tempo contínuo. Nesta aproximação, muito progresso foi feito em busca de uma compreensão maior do espectro inferior de energia-momento. Por exemplo, na aproximação de rede, o espectro de energia-momento de um hádron foi determinado perturbativamente no regime de acoplamento forte (veja por exemplo a Ref. BANKS ET AL. [1977]). Em termos de simulações numéricas, também existe um grande leque de resultados, por exemplo na Ref. FIEBIG ET AL. [1997] os potenciais de atração entre mésons são determinados numericamente, e os resultados sugerem que este potencial seja atrativo e de curto alcance. Na Ref. STEWART E KONIUK [1998] as energias de ligação do estado méson-méson são obtidas para o caso de simetria de calibre $SU(2)_c$. Para os bárions simulações de Monte Carlo permitiram explorar o potencial no caso $SU(3)_c$ como feito na Ref. TAKAHASHI ET AL. [2001, 2002]. Mais ainda trabalhos como o da Ref. FORCRAND E KIM [2007] permitiram determinar, em alguns casos a massa destes bárions.

No mesmo contexto que estes modelos na rede, nosso trabalho se insere em um ambicioso programa para a determinação *rigorosa* da região inferior do espectro de energia-momento de diversos modelos de cromodinâmica quântica na rede partindo de primeiros princípios, i.e. partindo da cromodinâmica quântica definida pela dinâmica dada pela ação melhorada de Wilson, mostrada nas Refs. CREUTZ [1983], MONTVAY E MÜNSTER [1997], WILSON [1974], no regime de acoplamento forte (i.e., com parâmetro de hopping $\kappa > 0$ e e acoplamento de calibre puro ou plaqueta $\beta \equiv \frac{1}{g_0^2}$ tal que $0 < \beta \ll \kappa \ll 1$). Neste programa consideramos uma formulação integral funcional do

modelo de cromodinâmica quântica com tempo imaginário no regime de acoplamento forte. Este regime pode ser uma limitação, que distancia nossos resultados da realidade física, mas lembramos que este regime nos fornece condições para um tratamento analítico explícito que, até o momento, é o único capaz de obter resultados espectrais. Além disso, salientamos que propriedades importantes da cromodinâmica, como o esperado confinamento de quarks, já foram obtidos neste regime. Neste programa, foram considerados vários casos com $2 + 1$ e $3 + 1$ dimensões, matrizes de Pauli 2×2 e matrizes de Dirac Euclidianas 4×4 e simetria global de sabor $SU(2)_f$ e $SU(3)_f$ (os resultados para o espectro de uma e duas partículas para cada um desses casos podem ser conferidos nas Refs. FRANCISCO NETO, O'CARROLL E VEIGA [2008a,b], VEIGA E O'CARROLL [2008]).

Aqui, damos um novo passo nesse programa, consideramos o caso com 3 dimensões espaciais e 1 dimensão temporal, matrizes de spin de Dirac 4×4 , simetria de calibre $SU(3)_c$ e dois sabores. Nós realizamos a análise do subespaço $\mathcal{H}_o$ do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ associado ao modelo, onde $\mathcal{H}_o$ é o espaço dos estados com um número *ímpar* de quarks e antiquarks, e mostramos a existência de estados de pentaquarks com quatro quarks e um antiquark (molécula hadrônica), como uma superposição de estados de um méson e de um bárion. Por simplicidade, nesse texto, nós nos concentraremos na análise apenas do setor de paridade par de $\mathcal{H}_o$. As modificações que devem ser feitas a esta análise, afim de tratar o setor de paridade ímpar de $\mathcal{H}_o$, também serão discutidas.

Os pentaquarks que encontramos são rigorosamente detectados como pontos no espectro de energia-momento do modelo, situados abaixo do limiar de energia de um meson e um bárion livres ($\approx -5 \ln \kappa$). Como feito na Parte I, para modelo de Quatro-Férmions, o método consiste em estabelecer uma fórmula de Feynman-Kac, e usando representações espectrais para os operadores de momento $\vec{P}$ e energia H em $\mathcal{H}$, nós obtemos representações espectrais para funções de correlação de dois e quatro pontos envolvendo os campos compostos de mésons e bárions. São essas representações espectrais que nos permitem identificar os hádrons e os estados ligados hádron-hádron como singularidades das funções de correlação para momentos imaginários.

Quando discutimos o Modelo de Quatro-Férmions, nós salientamos que as representações espectrais para as funções de correlação são imprescindíveis para determinarmos o espectro de energia e momento. Vamos novamente *ênfatizar* este ponto:

Nenhuma alegação de um resultado espectral derivado das funções de correlação sem representações espectrais é confiável. Uma relação entre estas funções de correlação e o espectro de energia-momento deve ser estabelecida em primeiro lugar. Este é um requerimento *básico*, e não meramente formal, que nem sempre é satisfeito. Apenas a determinação do decaimento exponencial das funções de correlação, em princípio, não nos diz nada sobre espectro de energia-momento do modelo considerado. Mais ainda, mesmo na situação onde a taxa de decaimento de uma função de correlação está no espectro, não temos informação nenhuma sobre o espectro acima deste ponto, bem como não temos nenhuma informação sobre a natureza deste ponto espectral. Lembramos que é um *ponto isolado* no espectro de massa que nós permite caracterizar partículas ou estados ligados. Notamos também que este problema não pode ser resolvido simplesmente com a “importação” das representações espectrais desenvolvidas em outros trabalhos, como por exemplo as que derivamos aqui. Por exemplo, as representações espectrais usadas neste trabalho dependem da existência do limite de volume infinito e, portanto, são válidas apenas na região dos parâmetros determinada pela expansão em polímeros.

O método para a detecção dos estados ligados segue o tratamento feito na Parte I, e os estados ligados de méson-bárion são determinados numa aproximação em escada para uma equação de Bethe-Salpeter na rede para momento espacial zero para a ordem dominante em κ e β . Para $\beta = 0$, mésons e bárions tem massa assintótica $\approx -2 \ln \kappa$ e $\approx -3 \ln \kappa$, respectivamente. Os estados ligados méson-bárion encontrados possuem massa de aproximadamente $\approx -5 \ln \kappa - \epsilon$, com energia de ligação $\epsilon > 0$ de ordem κ^2 . Pela simetria de sabor, podemos tratar cada um dos setores de isospin separadamente. Aqui, nós analisamos todos os setores de isospin total ($I = 1/2$, $I = 3/2$ e $I = 5/2$). Existem vários estados ligados nos setores $I = 1/2, 3/2$ e nenhum estado está presente no setor $I = 5/2$. O estado mais ligado tem isospin total $I = 1/2$ e é uma superposição dos estados de um méson isovetorial e bárions tipo Δ . Esses resultados mostram uma dependência forte da energia de ligação com o spin do méson e do bárion que constituem o estado. Esse método revela que a contribuição dominante para a atração entre as partículas advém de uma interação de ordem $\mathcal{O}(\kappa^2)$, entendida como um potencial de troca $q - \bar{q}$. No entanto, não corresponde a uma interpretação de troca de partículas mesônicas para esse potencial como no potencial fenomenológico de Yukawa. Um efeito

subdominante surge da integração de 5 ligações de calibre superpostas e levam a um potencial atrativo de alcance espacial zero e dependente da energia.

A ausência de pentaquarks para o canal $I = 5/2$, onde o isospin dos 5 quarks está fixo em apenas um valor, é devida a um potencial repulsivo que observamos nesse caso. Esse potencial repulsivo, de fato, ocorre para todos os setores de isospin, no caso de um sabor e matrizes 4×4 (i.e., no caso com spin, mas sem isospin), e estende os resultados para $2 + 1$ dimensões, dois sabores e matrizes de spin de Pauli mostrados na Ref. FRANCISCO NETO [2004]. Quando as matrizes de spin de Pauli 2×2 são usadas no lugar das matrizes de Dirac, nós temos uma distinção entre férmions e antiférmions, mas o spin não é uma grau de liberdade efetivo.

Além disso, como visto nas Refs. FRANCISCO NETO, O'CARROLL E VEIGA [2008a,b] e VEIGA E O'CARROLL [2008], nosso método pode ser usado para se analisar a existência de estados ligados méson-méson e bárion-bárion, e para se analisar este modelo como mais sabores. De outro lado, com procedimentos análogos aos adotados na Seção I.3.3 para o modelo de Quatro-Férmions, ou ainda para o modelo de Ginzburg-Landau estocástico (analisados na Ref. VEIGA ET AL. [2001]) ou para modelos ferromagnéticos de spins $O(N)$ clássicos (na Ref. SCHOR E O'CARROLL [2000b]), nós esperamos que os resultados obtidos aqui na aproximação em escada sejam validados para todas as ordens de (κ, β) usando o rápido decaimento do núcleo de Bethe-Salpeter K dado na Eq. (C.16).

De maneira similar ao mostrado na Seção I.3.1, nós mostramos (veja a nossa Ref. VEIGA ET AL. [2008a]) que a equação de Bethe-Salpeter empregada corresponde a uma equação resolvente de Schrödinger para uma partícula na rede. Denotando por H_0 a energia cinética, o hamiltoniano da rede correspondente é dado por

$$H = H_0 - \frac{W}{6} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{j=1}^2 \delta(\vec{x} - \sigma e^j) - \frac{W_3}{6} \sum_{\sigma=\pm 1} \delta(\vec{x} - \sigma e^3). \quad (\text{II.1.1.1})$$

H age em funções $f_s(x)$, onde s é um índice coletivo que especifica os spins dos quarks individuais dos estados méson-bárion de isospin total I . As matrizes W e W_3 são reais e autoadjuntas. Estas matrizes descrevem a interação nos spins e temos que o espectro de W coincide com o espectro de W_3 . Seus elementos são etiquetados pelos índices coletivos de spin. No espaço de Fourier, H_0 é $p_\ell^2/2 \equiv \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p^i)$, onde

$\vec{p} = (p^1, p^2, p^3) \in \mathbb{T}^3$, $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$, é a variável dual. O autovalor de energia negativa λ de H está relacionado à energia de ligação ϵ do estado méson-bárion por $|\lambda|\kappa^2 = 2\epsilon$.

Vamos considerar inicialmente o caso esfericamente simétrico onde $W_3 = W$. Passando para a base de spin onde a matriz W é diagonal, H é decomposta em hamiltonianos da forma $H' = H_0 - (\mu/6) \sum_{\sigma,j} \delta(\vec{x} - \sigma e^j)$, onde μ é um autovalor de W . Uma nova decomposição é obtida pelo uso do grupo octaedral O , que é um grupo de simetria do hamiltoniano H . Assim, as autofunções de H se decompõem em representações irredutíveis O ; apenas a identidade unidimensional A_1 , o vetor tridimensional F_1 e a representação bidimensional E ocorrem, de maneira análoga aos estados $\ell = 0, 1, 2$ que aparecem para um potencial radial, no caso do contínuo, onde uma barreira centrífuga faz com que a energia de ligação decresça com ℓ . Para esse hamiltoniano em três dimensões um valor crítico de $\mu > 0$ é necessário para a produção de um estado ligado. Para o hamiltoniano na rede H , os acoplamentos críticos são $\mu = 5.8, 14.3, 16.2$, para os análogos às representações com $\ell = 0, 1, 2$. O efeito da interação dos spins é bastante interessante. Em primeiro lugar, consideremos o caso de dimensão $2 + 1$ e mésons e bárions sem spin como o tratado na Ref. FRANCISCO NETO [2004]. Nesse caso, estados ligados são encontrados para $I = 1/2$ e $3/2$ mas não para o caso $I = 5/2$. Estendendo esses resultados para dimensão $3 + 1$, encontramos $\mu = W = 5, 2, -3$ para $I = 1/2, 3/2, 5/2$, respectivamente. O potencial encontrado é atrativo para $I = 1/2, 3/2$, ao passo que para $I = 5/2$ ele é repulsivo. Apesar da força de atração crescer com o decréscimo de I , ela ainda não é forte o suficiente para produzir um estado ligado mesmo para o caso de isospin total $I = 1/2$. Aqui, nós mostramos que o potencial é dado por uma matriz 32×32 (40×40) de Rank = 30 e Ker = 2 (36 e 4) para o caso $I = 1/2$ ($I = 3/2$), e os seguintes autovalores positivos (multiplicidades)

$$\begin{aligned}\mu_{I=\frac{1}{2}} &= 7(6), 4(2, \nexists), 1(16, \nexists), \\ \mu_{I=\frac{3}{2}} &= 7(2), 4(4, \nexists), 1(18, \nexists).\end{aligned}$$

O símbolo $\nexists$ denota que não existe estado ligado uma vez que estamos abaixo do limiar crítico. Para $I = 5/2$, apenas autovalores negativos ou nulos ocorrem. A função de onda associada aos estados ligados são superposição de todos os estados de spin do produto dos mésons e dos bárions. Este modo de coletivo de spin também é típico dos demais

estados ligados. Para o caso, $W \neq W_3$ (que é o que ocorre realmente, devido ao fato de escolhermos a direção e^3 para medir o spin e o isospin), no setor de isospin $I = I_3 = \frac{1}{2}$ encontramos numericamente um único estado ligado com energia de ligação $0,00135\kappa^2$

Esta parte do trabalho é organizado como se segue. Na Seção II.1.2, nos introduzimos o modelo da cromodinâmica na rede, os operadores de energia-momento no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e discutimos brevemente os resultados sobre a existência de mésons e bárions (para os detalhes veja as Refs. FRANCISCO NETO, O'CARROLL E VEIGA [2008a,b], VEIGA E O'CARROLL [2008]). Na Seção II.1.3, nós mostramos como nossos estados ligados do tipo pentaquark são obtidos para o setor de paridade para de $\mathcal{H}_o \subset \mathcal{H}$. Comentários finais são feitos no Capítulo II.2. Os detalhes técnicos são deixados para 3 apêndices. No Apêndice C, nós obtemos o decaimento do núcleo de Bethe-Salpeter K ; como visto no modelo de Quatro-Férmions, esse resultado tem um papel central em nosso método baseado em propriedades analíticas. No Apêndice D, nós apresentamos em detalhes os potenciais de ligação. No Apêndice E, demonstramos uma identidade para permanentes de matrizes- $(0,1)$ que é usada para determinar propriedades para as funções de correlação.

1.2 O modelo da cromodinâmica quântica na rede

Neste trabalho, nós consideramos uma versão de dois sabores do modelo em $3+1$ dimensões e três cores, considerado nas Refs. FRANCISCO NETO, O'CARROLL E VEIGA [2008a,b], VEIGA E O'CARROLL [2008]. Este é um modelo de Cromodinâmica Quântica com simetria global $SU(2)_f$ e simetria de calibre local $SU(3)_c$, cuja função de partição é dada formalmente por

$$Z = \int e^{-\mathcal{S}(\psi, \bar{\psi}, g)} d\psi d\bar{\psi} d\mu(g),$$

e para a função $F(\psi, \bar{\psi}, g)$, as correlações normalizadas são

$$\langle F \rangle = \frac{1}{Z} \int F(\psi, \bar{\psi}, g) e^{-\mathcal{S}(\psi, \bar{\psi}, g)} d\psi d\bar{\psi} d\mu(g).$$

A ação do modelo $\mathcal{S}(\psi, \bar{\psi}, g)$ é a chamada ação de Wilson apresentada nas Refs. CREUTZ

[1983], MONTVAY E MÜNSTER [1997], WILSON [1974] dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \frac{\kappa}{2} \sum \bar{\psi}_{a,\alpha,f}(u) \Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon e^\rho} U(g_{u,v})_{ab} \psi_{b,\beta,f}(u + \sigma e^\rho) \\ & + \sum_{u \in \mathbb{Z}_o^4} \bar{\psi}_{a,\alpha,f}(u) M_{\alpha\beta} \psi_{a,\beta,f}(u) - \frac{1}{g_0^2} \sum_p \chi(g_p), \end{aligned} \quad (\text{II.1.2.1})$$

onde, além da soma sobre índices repetidos $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ (spin), $a = 1, 2, 3$ (cor) e $f = +1/2, -1/2 \equiv +, -$ (isospin), a primeira soma é tomada sobre todos os vetores $u = (u^0, \vec{u}) = (u^0, u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{Z}_o^4 \equiv \{\pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \dots\} \times \mathbb{Z}^3$, $\sigma = \pm 1$ e $\mu = 0, 1, 2, 3$. Como na Parte I, aqui adotamos o índice 0 para a direção temporal e e^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, denota o versor da rede para a direção μ . Nós relembramos, que a escolha de uma rede deslocada de meia unidade na direção temporal, excluindo-se a coordenada de tempo zero, é tal que no limite do contínuo os limites das correlações de campos de quark em tempos iguais possa ser acomodado (veja a Nota I.1.a). Como no modelo de Quatro-Férmions, em cada sítio da rede $u \in \mathbb{Z}_o^4$, existem campos fermiônicos grassmannianos $\psi_{a\alpha f}(u)$, associados com um quark, e campos $\bar{\psi}_{a\alpha f}(u)$, associados com um anti-quark. Estes campos carregam um índice de spin de Dirac α , um índice a de cor de $SU(3)$ e um índice de isospin f de $SU(2)_f$. Nós nos referimos a $\alpha = 1, 2$ como índices de spin *upper* e a $\alpha = 3, 4$, como índices de spin *lower*. A grande novidade em relação ao modelo de Quatro-Férmions, está no fato de que para cada ligação orientada entre primeiros vizinhos da rede $\langle u, u \pm e^\mu \rangle$ existe uma matriz $U(g_{u,u \pm e^\mu})$ de $SU(3)_c$, parametrizada pelo elemento do grupo de calibre $g_{u,u \pm e^\mu}$, satisfazendo $U(g_{u,u+e^\mu})^{-1} = U(g_{u+e^\mu,u})$. Associado a cada plaqueta orientada da rede p , existe uma variável de plaqueta $\chi(U(g_p))$ onde $U(g_p)$ é um produto ordenado, segundo a orientação, das matrizes de $SU(3)_c$ associadas às ligações orientadas que constituem a plaqueta, e χ denota o traço da matriz. Por economia de notação, muitas vezes iremos suprimir o U em $U(g)$. Em relação aos parâmetros, temos o parâmetro de hopping $\kappa > 0$, $\beta \equiv (1/g_0^2) > 0$ o acoplamento nas plaquetas e $M \equiv M(m, \kappa) = (m + 2\kappa)\mathbb{I}_4$, $\mathbb{I}_n$ sendo a matriz identidade $n \times n$. Fixado κ , por simplicidade e sem perda de generalidade, a massa nua dos quarks $m > 0$ é escolhida de forma que $M_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, ou seja tomamos $m + 2\kappa = 1$. Aqui nós consideraremos o regime de acoplamento forte $0 < \beta \ll \kappa \ll 1$. As matrizes de spin são tomadas como no modelo de Quatro-Férmions, ou seja $\Gamma^{\pm e^\mu} = -\mathbb{I}_4 \pm \gamma^\mu$, onde os γ_μ 's, satisfazem $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}\mathbb{I}_4$, são as matrizes Euclidianas de Dirac, dadas na

Eq. (I.1.1.2). A medida $d\mu(g)$ é a medida produto sobre ligações não-orientadas de medidas de Haar normalizadas de $SU(3)$ (veja a Ref. SIMON [1996]). Há somente uma variável de integração para cada ligação, e portanto g_{uv} e g_{vu}^{-1} não precisam ser tratadas como variáveis de integração distintas. As integrais sobre as variáveis de Grassmann são, como no modelo de Quatro-Férmions, integrais fermiônicas de Berezin. Na Eq. (II.1.2.1), $d\psi d\bar{\psi}$ denota $\prod_{u,\ell} d\psi_\ell(u) d\bar{\psi}_\ell(u)$ tal que, com a normalização $\mathcal{N}_1 = \langle 1 \rangle$, temos que $\langle \psi_{\ell_1}(x) \bar{\psi}_{\ell_2}(y) \rangle = (1/\mathcal{N}_1) \int \psi_{\ell_1}(x) \bar{\psi}_{\ell_2}(y) e^{-\sum_{u,\ell_3,\ell_4} \bar{\psi}_{\ell_3}(u) \mathcal{O}_{\ell_3\ell_4} \psi_{\ell_4}(u)} d\psi d\bar{\psi} = \mathcal{O}_{\alpha_1,\alpha_2}^{-1} \delta_{a_1 a_2} \delta_{f_1 f_2} \delta(x - y)$, com deltas de Kronecker para as coordenadas de espaço-tempo, e onde $\mathcal{O}$ é uma matriz diagonal nos índices de cor e isospin.

É importante notarmos que a ação dada na Eq. (II.1.2.1) é invariante pelas transformações de calibre

$$\begin{aligned} \psi(x) &\mapsto h(x)\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\mapsto \bar{\psi}(x)[h(x)]^{-1}, \\ U(g_{x+e^\mu,x}) &\mapsto [h(x+e^\mu)]^{-1}U(g_{x+e^\mu,x})h(x), \end{aligned} \tag{II.1.2.2}$$

onde $x \in \mathbb{Z}_o^{3+1}$ e $h(x) \in SU(3)_c$. Outras simetrias da ação, Eq. (II.1.2.1), podem ser adaptadas da Proposição I.1.7, através da adição da ação da operação de simetria nos elementos do grupo de calibre. Por exemplo, para a conjugação de carga $\mathcal{C}$ a Proposição I.1.7, nos dá a transformação

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\psi_{\alpha a}(x) &= (\gamma^2 \gamma^0)_{\alpha\beta} \bar{\psi}_{\beta b}(x), \\ \mathcal{C}\bar{\psi}_{\alpha a}(x) &= \psi_{\beta b}(x) (\gamma^0 \gamma^2)_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Incluindo em $\mathcal{C}$, a transformação $g_{xy} \mapsto g_{xy}^*$, temos a simetria de Conjugação de Carga para nosso modelo de cromodinâmica quântica. Veja as Refs. VEIGA, O'CARROLL E SCHOR [2003b, 2004], VEIGA, O'CARROLL E FRANCISCO NETO [2004, 2005], VEIGA E O'CARROLL [2005, 2006, 2007] para uma listagem completa das simetrias do modelo de cromodinâmica quântica tratado aqui.

No regime de acoplamento forte, métodos de expansão em polímeros (veja a Ref. SEILER [1982] e a Seção I.1.3) garantem a existência do limite de volume infinito das funções de correlação e, mais ainda, que as funções de correlação truncadas apresentam

decaimento exponencial em árvore. Neste limite, as funções de correlação são invariantes por translação e podem ser estendidas para funções analíticas em κ e β complexos (mas suficientemente pequenos em módulo).

Associado ao nosso modelo, existe um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ (a construção desse espaço de Hilbert é feita com detalhes em Ref. SEILER [1982], o método usado é análogo ao que usamos na Seção I.1.2). Por essa construção, uma conexão é estabelecida entre os valores esperados $\langle \cdot \rangle$ e os produtos internos em $\mathcal{H}$ pela fórmula de Feynman-Kac que se segue. Para F e G dependendo apenas de coordenadas da rede com $u^0 = 1/2$ e para $x^0 > 0$, temos

$$(G, \check{T}_0^{x^0} \check{T}_1^{x^1} \check{T}_2^{x^2} \check{T}_3^{x^3} F)_{\mathcal{H}} = \langle [T_0^{x^0} \vec{T}^{\vec{x}} F] \Theta G \rangle, \quad (\text{II.1.2.3})$$

onde $T^{x^0 \neq 0}$ é a translação no tempo por x^0 , $\vec{T}^{\vec{x}} = T_1^{x^1} T_2^{x^2} T_3^{x^3}$ é a translação no espaço por $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$, o símbolo $\check{}$ denota operadores em $\mathcal{H}$ e Θ é um operador anti-linear relacionado a reflexão temporal (análogo ao operador Θ dado na Seção I.1.2). Como feito para o modelo de Quatro-Férmions, tomando a transformada de Fourier da fórmula de Feynman-Kac, estabelece-se uma correspondência entre o espectro conjunto dos operadores auto-adjuntos de energia e momento, $H \geq 0$ e $P^{i=1,2,3}$, e as singularidades das funções de correlação para momento imaginário puro. Esses operadores são definidos pelas relações $\check{T}_0^2 = e^{-2H}$ e $\check{T}_j = e^{iP^j}$. Seja $\mathcal{E}(\lambda^0, \vec{\lambda})$ o produto das famílias espectrais dos operadores $\check{T}_0$, $\check{T}_1$, $\check{T}_2$ e $\check{T}_3$, pelo teorema espectral (veja a Ref. REED E SIMON [1972]), temos

$$\check{T}_0 = \int_{-1}^1 \lambda^0 dE_0(\lambda^0) \quad , \quad \check{T}_{j=1,2,3} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda^j} dF_j(\lambda^j), \quad (\text{II.1.2.4})$$

tal que $\mathcal{E}(\lambda^0, \vec{\lambda}) = E_0(\lambda^0) \prod_1^3 F_j(\lambda^j)$.

Os campos invariantes de calibre, que criam uma partícula mesônica ou uma partícula bariônica, são dados por composições dos campos básicos não normalizados

$$\bar{M}_{\vec{\beta}_m \vec{h}} = \bar{\psi}_{a\beta^\ell h_1} \psi_{a\beta^u h_2} \quad , \quad \bar{B}_{\vec{\beta}_b \vec{g}} = \epsilon_{abc} \bar{\psi}_{a\beta_1^\ell g_1} \bar{\psi}_{b\beta_2^\ell g_2} \bar{\psi}_{c\beta_3^\ell g_3},$$

onde $\vec{h} = (h_1, h_2)$, $\vec{g} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$, com $g_i, h_j = 1, 2 = u, d$, $\vec{\beta}_m = (\beta^\ell, \beta^u)$, $\vec{\beta}_b = (\beta_1^\ell, \beta_2^\ell, \beta_3^\ell)$ e ϵ denota o tensor de Levi-Civita. Apenas índices de spin *lower* ($\beta_i^\ell = 3, 4$) entram nos campos bariônicos enquanto ambos os índices *lower* e *upper* ($\beta_i^u = 1, 2$) estão

envolvidos nos campos mesônicos. Os campos não normalizados de méson e bárions de isospin total I e com terceira componente de isospin I_3 , são combinações lineares de Clebsch-Gordan dos campos $\bar{M}$'s e $\bar{B}$'s, as quais denotamos por $\bar{\chi}_{I^k, I_3^k, \vec{\beta}_k}^k$, onde $k = m, b$ (m denotando méson, b para o bárion). Nós também introduzimos os campos auxiliares χ substituindo os campos barra (sem barra) em $\bar{\chi}$ por campos sem barra (barra). A normalização é escolhida de modo que, para $\kappa = 0 = \beta$, $\langle \bar{\chi}(x) \chi(x) \rangle$ é a identidade.

Para o caso mésonico, os campos $\bar{\chi}_{I^k, I_3^k, \vec{\beta}_k}^k$ são

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathcal{M}}_{\vec{\alpha}}^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{\psi}_{a, \alpha_\ell, u} \psi_{a, \alpha_u, u} + \bar{\psi}_{a, \alpha_\ell, d} \psi_{a, \alpha_u, d}) \\ \bar{\mathcal{M}}_{\vec{\alpha}}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{\psi}_{a, \alpha_\ell, u} \psi_{a, \alpha_u, u} - \bar{\psi}_{a, \alpha_\ell, d} \psi_{a, \alpha_u, d}) \\ \bar{\mathcal{M}}_{\vec{\alpha}}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{\psi}_{a, \alpha_\ell, u} \psi_{a, \alpha_u, d} \\ \bar{\mathcal{M}}_{\vec{\alpha}}^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{\psi}_{a, \alpha_\ell, d} \psi_{a, \alpha_u, u} . \end{array} \right. \quad (\text{II.1.2.5})$$

Usando a simetria de conjugação de carga ou paridade para este modelo (veja a Ref. VEIGA, O'CARROLL E SCHOR [2004] para a aplicação de outras simetrias), temos

$$\langle \bar{\mathcal{M}}_{\vec{\alpha}}^\ell(u) \rangle = 0 \quad ; \quad \ell = 0, 1, 2, 3. \quad (\text{II.1.2.6})$$

A ação da simetria de conjugação de carga $\mathcal{C}$ nos campos $\bar{\mathcal{M}}_{\vec{\alpha}}^\ell$, $\ell = 0, 1, 2, 3$, é tal que

$$\mathcal{C} \bar{\mathcal{M}}_{\vec{\alpha}}^{0,3} = -\bar{\mathcal{M}}_{\vec{\alpha}}^{0,3} \text{ e } \mathcal{C} \bar{\mathcal{M}}_{\vec{\alpha}}^{1,2} = -\bar{\mathcal{M}}_{\vec{\alpha}}^{2,1},$$

e o mesmo vale para seus campos auxiliares χ^m , de forma que o conjunto (e suas propriedades espectrais) de mésons e anti-mésons coincidem. Com as definições acima e usando a simetria global de sabor $\text{SU}(2)_f$ da ação, os campos mesônicos compostos $\bar{\mathcal{M}}_{\vec{\alpha}}^{\ell=1,2,3,4}$ podem ser identificados com estados $(I, I_z) = (0, 0), (1, 1), (1, -1), (1, 0)$, respectivamente.

De maneira análoga, podemos considerar os campos bariônicos. Para os bárions $\bar{B}$ em $\bar{\chi}^b$, os campos $\bar{B}$ são tomados entre os campos abaixo. Os campos de nêutrons n

e prótons p tem isospin total $I = 1/2$ são dados por

$$\begin{cases} p_{\pm} = \frac{\epsilon_{abc}}{3\sqrt{2}} (\bar{\psi}_{a+u}\bar{\psi}_{b-d} - \bar{\psi}_{a+d}\bar{\psi}_{b-u})\bar{\psi}_{c\pm u}, \\ n_{\pm} = \frac{\epsilon_{abc}}{3\sqrt{2}} (\bar{\psi}_{a+u}\bar{\psi}_{b-d} - \bar{\psi}_{a+d}\bar{\psi}_{b-u})\bar{\psi}_{c\pm d}, \end{cases} \quad (\text{II.1.2.7})$$

Os campos dos bárions Δ tem isospin total $3/2$. Os campos das partículas Δ^+ são dados por

$$\begin{cases} \Delta_{\frac{\pm 1}{2}}^+ = \frac{\epsilon_{abc}}{6} (\bar{\psi}_{a\pm u}\bar{\psi}_{b\pm u}\bar{\psi}_{c\mp d} + 2\bar{\psi}_{a\pm u}\bar{\psi}_{b\mp u}\bar{\psi}_{c\pm d}), \\ \Delta_{\frac{\pm 3}{2}}^+ = \frac{\epsilon_{abc}}{2\sqrt{3}} \bar{\psi}_{a\pm u}\bar{\psi}_{b\pm u}\bar{\psi}_{c\pm d}. \end{cases} \quad (\text{II.1.2.8})$$

Os campos das partículas Δ^0 são dados por

$$\begin{cases} \Delta_{\frac{\pm 1}{2}}^0 = \frac{\epsilon_{abc}}{6} (2\bar{\psi}_{a\pm u}\bar{\psi}_{b\pm d}\bar{\psi}_{c\mp d} + \bar{\psi}_{a\mp u}\bar{\psi}_{b\pm d}\bar{\psi}_{c\pm d}), \\ \Delta_{\frac{\pm 3}{2}}^0 = \frac{\epsilon_{abc}}{2\sqrt{3}} \bar{\psi}_{a\pm u}\bar{\psi}_{b\pm d}\bar{\psi}_{c\pm d}. \end{cases} \quad (\text{II.1.2.9})$$

Os campos das partículas Δ^- são dados por

$$\begin{cases} \Delta_{\frac{\pm 1}{2}}^- = \frac{\epsilon_{abc}}{2\sqrt{3}} \bar{\psi}_{a\pm d}\bar{\psi}_{b\pm d}\bar{\psi}_{c\mp d}, \\ \Delta_{\frac{\pm 3}{2}}^- = \frac{\epsilon_{abc}}{6} \bar{\psi}_{a\pm d}\bar{\psi}_{b\pm d}\bar{\psi}_{c\pm d}. \end{cases} \quad (\text{II.1.2.10})$$

Os campos das partículas Δ^{++} são dados por

$$\begin{cases} \Delta_{\frac{\pm 1}{2}}^{++} = \frac{\epsilon_{abc}}{2\sqrt{3}} \bar{\psi}_{a\pm u}\bar{\psi}_{b\pm u}\bar{\psi}_{c\mp u}, \\ \Delta_{\frac{\pm 3}{2}}^{++} = \frac{\epsilon_{abc}}{6} \bar{\psi}_{a\pm u}\bar{\psi}_{b\pm u}\bar{\psi}_{c\pm u} \dots \end{cases} \quad (\text{II.1.2.11})$$

Na lista acima, os subíndices $\pm$ denotam $J_z = \pm\frac{1}{2}$ a componente z do spin total J . É possível mostrar que os estados correspondentes do espaço de Hilbert possuem os números quânticos usuais de isospin e hipercarga das partículas associadas. Notamos também, que nos campos p e n os isospins dos primeiros dois campos básicos individuais são acoplados de forma a termos isospin total zero, quando restrito apenas a esses dois campos. Pela ação da conjugação de carga $\mathcal{C}$, os bárions são mapeados em antibárions

e a invariância da ação Eq. (II.1.2.1) por esta transformação implica que bárions e antibárions têm propriedades espectrais idênticas.

Nas Refs. FRANCISCO NETO, O'CARROLL E VEIGA [2008a,b], VEIGA E O'CARROLL [2008], as funções de correlação de dois pontos para campos mesônicos e bariônicos $G^k(u, v)$, $k = m, b$ são definidas, estas funções tem representações espectrais para $x^0 \neq 0$, $x = u - v$. A função de dois-pontos para mésons $G_{\ell\ell'}^m(u, v) \equiv G_{\ell\ell'}^m(x = u - v \in \mathbb{Z}^4)$ é dada por

$$G_{\ell\ell'}^m(x) = \langle \mathcal{M}_\ell(u) \bar{\mathcal{M}}_{\ell'}(v) \rangle \theta_{u^0 \leq v^0} + \langle \bar{\mathcal{M}}_\ell(u) \mathcal{M}_{\ell'}(v) \rangle^* \theta_{u^0 > v^0}, \quad (\text{II.1.2.12})$$

onde os subíndices $\ell = (\vec{\alpha}, \vec{f})$ e $\ell' = (\vec{\beta}, \vec{h})$ são índices coletivos e $\theta_{\mathcal{S}}$ é a função característica ou indicador do conjunto $\mathcal{S}$. Devido à Eq. (II.1.2.6), a função de correlação de dois mésons, Eq. (II.1.2.12), já é naturalmente truncada.

Já para as funções bariônicas de dois-pontos, tomando a correlação para $u^0 < v^0$ para se estender o resultado para $u^0 = v^0$, temos

$$G_{\ell_1\ell_2}^b(u, v) = \langle \bar{B}_{\ell_1}(u) B_{\ell_2} \rangle \theta_{u^0 \leq v^0} - \langle B_{\ell_1}(u) \bar{B}_{\ell_2} \rangle^* \theta_{u^0 > v^0}, \quad (\text{II.1.2.13})$$

onde os subíndices ℓ_1 e ℓ_2 são índices coletivos, e o índice referente ao subespaço de spins lower foi suprimido. As funções de correlação de dois bárions, Eq. (II.1.2.13), também é naturalmente truncada, uma vez que os campos compostos de bárions são constituídos por três quarks e a média sobre um número ímpar de férmions é nula.

A estratégia para a obtenção do espectro de um hádron (veja as Refs. FRANCISCO NETO, O'CARROLL E VEIGA [2008a,b], VEIGA E O'CARROLL [2008]) é análoga a usada para a determinação do espectro de uma partícula no modelo de Quatro-Férmions. Por completeza, vamos discutir brevemente essas idéias. Vamos nos concentrar no caso do méson, sendo que o caso bariônico é similar.

Tomemos a Eq. (II.1.2.12), partindo das representações espectrais para os operadores de translação $\tilde{T}_0^{x^0}$ e $\vec{T}^{\vec{x}}$ dadas na Eq. (II.1.2.4), obtemos a representação espectral, para $x^0 \neq 0$,

$$G_{\ell_1\ell_2}^m(x) = \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{T}^4} \lambda_0^{|x^0|-1} e^{i\vec{\lambda} \cdot \vec{x}} d_\lambda (\bar{\mathcal{M}}_{\ell_1}(1/2), \mathcal{E}(\lambda_0, \vec{\lambda}) \bar{\mathcal{M}}_{\ell_2}(1/2))_{\mathcal{H}}. \quad (\text{II.1.2.14})$$

A função $G_{\ell_1 \ell_2}^m(x)$ é uma função par dos $\vec{x}$ (simetria de paridade) e na equação acima $d_\lambda \equiv d_{\lambda^0} d\alpha_{\vec{\lambda}, \ell_1 \ell_2}$ denota a medida espectral.

Da representação espectral para a função de dois-pontos mesônica, Eq. (II.1.2.14), notamos que os campos $\bar{\mathcal{M}}$ criam partículas mesônicas. Os campos $\mathcal{M}$, que entram na definição da função de dois pontos da Eq. (II.1.2.12), são campos auxiliares .

Tomando a transformada de Fourier da Eq. (II.1.2.14), i.e.

$$\tilde{G}_{\ell_1 \ell_2}^m(p) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_0^4} G_{\ell_1 \ell_2}^m(x) e^{-ip \cdot x},$$

e separando as contribuições para tempos iguais, obtemos

$$\tilde{G}_{\ell_2 \ell_2}^m(p) = \tilde{G}_{\ell_1 \ell_2}^m(\vec{p}) + (2\pi)^3 \int_{-1}^1 f(p^0, \lambda^0) d_{\lambda^0} d\alpha_{\vec{p}, \ell_1 \ell_2}^m(\lambda^0) \quad (\text{II.1.2.15})$$

onde $f(x, y) = (e^{ix} - y)^{-1} + (e^{-ix} - y)^{-1}$, a medida $d\alpha_{\vec{p}, \ell_1 \ell_2}^m(\lambda^0)$ é dada por

$$d\alpha_{\vec{p}, \ell_1 \ell_2}^m(\lambda^0) = \int_{\mathbb{T}^3} \delta(\vec{p} - \vec{\lambda}) d_{\lambda^0} d_{\vec{\lambda}}(\bar{\mathcal{M}}_{\ell_1}, \mathcal{E}(\lambda^0, \vec{\lambda}) \bar{\mathcal{M}}_{\ell_2})_{\mathcal{H}}, \quad (\text{II.1.2.16})$$

e tomamos $\tilde{G}(\vec{p}) = \sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^3} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} G(x^0 = 0, \vec{x})$ para as contribuições com $x^0 = 0$. A Eq. (II.1.2.15) revela que pontos no espectro de energia-momento do nosso modelo são detectados como singularidades de $\tilde{G}_{\ell_1 \ell_2}^m(p)$ em $\mathcal{I}m p^0$. Estas singularidades são dadas pelas raízes $w_m(\vec{p})$ da Eq. (II.1.2.19) dada abaixo. Para determinar estas singularidades, nós definimos o inverso por convolução Γ^m . Na base de spins e isospins individuais, Γ^m é dado pela série de Neumann

$$\Gamma^m = (1 + G_d^{-1} G_n)^{-1} G_d^{-1} = \sum_i (-1)^i [G_d^{-1} G_n]^i G_d^{-1}, \quad (\text{II.1.2.17})$$

onde G_d é a parte diagonal de G^m , logo

$$G_{d, \ell_1 \ell_2}(u, v) = G_{\ell_1 \ell_2}(u, u) \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{u, v}$$

e $G^m = G_d + G_n$. O operador Γ^m , análogo ao apresentado no modelo de Quatro-

Férmions, é introduzido devido ao decaimento mais rápido de seu núcleo em comparação ao decaimento do núcleo de G^m . Portanto, a transformada de Fourier $\tilde{\Gamma}^m(p)$, que satisfaz $\tilde{G}^m(p)\tilde{\Gamma}^m(p) = 1$, possui uma faixa de analiticidade em p^0 mais larga que a faixa de analiticidade $\tilde{G}^m(p)$ (veja a Ref. REED E SIMON [1978a]). De fato, a faixa de analiticidade de $\tilde{G}^m(p)$ é dada por $|\text{Im } p^0| < -(2 - \epsilon) \ln \kappa$, enquanto a faixa de analiticidade de $\tilde{\Gamma}^m(p)$ é dada por $|\text{Im } p^0| < -(4 - \epsilon) \ln \kappa$. Logo, o operador

$$[\tilde{\Gamma}^m]^{-1}(p) = [\text{cof } \tilde{\Gamma}^m(p)]^t / \det[\tilde{\Gamma}^m(p)], \quad (\text{II.1.2.18})$$

nos fornece uma extensão meromórfica de $\tilde{G}^m(p)$. As singularidades de $[\tilde{\Gamma}^m]^{-1}(p)$ são as raízes $w(\vec{p})$ da equação

$$\det[\tilde{\Gamma}(p^0 = iw(\vec{p}), \vec{p})] = 0. \quad (\text{II.1.2.19})$$

As soluções $w(\vec{p})$ são as curvas de dispersão dos mésons e as massas m_m correspondem a $w(\vec{p} = \vec{0})$.

Este método também pode ser implementado para a função de correlação dois-bárions $G_{\ell_1 \ell_2}^b(u, v)$. Nesse caso, a largura da faixa de analiticidade da função $\tilde{G}$ é modificada de $-(2 - \epsilon) \ln \kappa$ para $-(3 - \epsilon) \ln \kappa$ e a largura da faixa de analiticidade de $\tilde{\Gamma}$ de $-(4 - \epsilon) \ln \kappa$ para $-(5 - \epsilon) \ln \kappa$. Equações análogas as Eqs.(II.1.2.18) e (II.1.2.19) acima podem ser escritas para o caso de bárions. Para relacionar os pontos do espectro de energia-momento as singularidades da função $\tilde{G}_{\ell_1 \ell_2}^b(\vec{p})$, nós usamos a representação espectral

$$\begin{aligned} G_{\ell_1 \ell_2}^b(x) &= -(\bar{B}_{\ell_1}, \tilde{T}^{|x^0|} \tilde{T}^{\vec{x}} \bar{B}_{\ell_2})_{\mathcal{H}} \\ &= -\int_{-1}^1 \int_{\mathbb{T}^3} (\lambda^0)^{|x^0|-1} e^{-i\vec{\lambda} \cdot \vec{x}} d_{\lambda}(\bar{B}_{\ell_1}, \mathcal{E}(\lambda^0, \vec{\lambda}) \bar{B}_{\ell_2})_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.2.20})$$

onde $\bar{B}_{\ell} \equiv \bar{B}_{\ell}(1/2, \vec{0})$, $x = v - u$, $x \in \mathbb{Z}^4$ e $x^0 \neq 0$. A simetria de paridade garante que $G_{\ell_1 \ell_2}^b(x)$ é uma função par de $\vec{x}$. Tomando a transformada de Fourier de $G_{\ell_1 \ell_2}^b(x)$ temos

$$\tilde{G}_{\ell_1 \ell_2}^b(p) = \tilde{G}_{\ell_1 \ell_2}^b(\vec{p}) - (2\pi)^3 \int_{-1}^1 f(p^0, \lambda^0) d_{\lambda^0} \alpha_{\vec{p}, \ell_1 \ell_2}^b(\lambda^0), \quad (\text{II.1.2.21})$$

onde separamos as contribuições para $x^0 = 0$. Na equação acima, a medida espectral

$d\alpha_{\vec{p},\ell\ell'}^b(\lambda^0)$ é diferente da medida dada na Eq. (II.1.2.16), explicitamente ela é

$$d\alpha_{\vec{p},\ell\ell'}^b(\lambda^0) = \int_{\mathbb{T}^3} \delta(\vec{p} - \vec{\lambda}) d_{\lambda^0} d_{\vec{\lambda}} (\bar{\mathcal{B}}_{\ell_1}, \mathcal{E}(\lambda^0, \vec{\lambda}) \bar{\mathcal{B}}_{\ell_2})_{\mathcal{H}}. \quad (\text{II.1.2.22})$$

Para pontos coincidentes, as funções de correlação de bárions em $\kappa = \beta = 0$, indicadas por $\langle \cdot \rangle^{(0)}$, são tais que

$$\langle \bar{B}_{\vec{\alpha}\vec{f}} B_{\vec{\beta}\vec{h}} \rangle^{(0)} = -6 \text{ per}(\delta_{\vec{\alpha}\vec{\beta}} \delta_{\vec{f}\vec{h}}), \quad (\text{II.1.2.23})$$

onde empregamos a notação usual de Cayley para determinantes, a matriz $\delta_{\vec{\alpha}\vec{\beta}} \delta_{\vec{f}\vec{h}}$ é uma matriz de Kronecker 3×3 cujos elementos são dados por $\delta_{\alpha_i \beta_j} \delta_{f_i h_j}$ e $\text{per}(A)$ é o permanente da matriz quadrada A . O permanente de uma matriz é definido de maneira idêntica ao determinante, exceto pelo fato de que todos os termos tem sinal positivo, independentemente da paridade da permutação a qual ele está relacionado (veja detalhes no Apêndice E e na Ref. ANJOS E VEIGA [2008b]). A propriedade dos permanentes da Eq. (II.1.2.23) é estendida para valores esperados (médias) de campos bariônicos mais gerais em $\kappa = 0 = \beta$, tal que temos

$$\langle \bar{B}_{\vec{\alpha}_1 \vec{f}_1} \dots \bar{B}_{\vec{\alpha}_k \vec{f}_k} B_{\vec{\beta}_1 \vec{h}_1} \dots B_{\vec{\beta}_\ell \vec{h}_\ell} \rangle^{(0)} = -6 \delta_{k\ell} \text{ per}(\delta_{\vec{\alpha}_i \vec{\beta}_j} \delta_{\vec{f}_i \vec{h}_j}), \quad (\text{II.1.2.24})$$

com um permanente de uma matriz de Kronecker $\ell \times \ell$ no lado direito da equação acima.

As soluções da Eq. (II.1.2.19) podem ser obtidas de maneira análoga ao procedimento adotado na demonstração do Lema I.2.2.A, usando o teorema da função analítica implícita e o teorema de Rouché. Com este método, o espectro de energia-momento de um hádron é determinado exatamente até próximo ao limiar de dois mésons no subespaço par $\mathcal{H}_e$, para os mésons, e até as proximidades do limiar méson-bárion em $\mathcal{H}_o$, para os bárions. Nestas regiões o espectro de energia-momento consiste somente em curvas de dispersão *isoladas* $w_k(\vec{p})$, implicando na existência de partículas e da lacuna superior de massa. Além disso, este resultado implica em uma *demonstração para o confinamento dos quarks* até próximo ao limiar de dois mésons, uma vez que os estados de mésons e bárions são invariantes de calibre e são os únicos estados no espectro de

massa até próximo ao limiar de dois mésons livres (De fato isso não é tão simples assim, visto que é necessário um método de subtração das funções de correlação afim de estender os resultados espectrais dos subespaços gerados por vetores de um méson e um bárion a todos os subespaços $\mathcal{H}_e$ e $\mathcal{H}_o$, respectivamente.). As curvas de dispersão $w_k(\vec{p})$ encontradas são as curvas de dispersão para os mésons isovetoriais e isoescalares e para as partículas Δ^{++} , Δ^+ , Δ^0 , Δ^- , p , n e tem a forma

$$\begin{aligned} w_m(\vec{p}) &= -2 \ln \kappa - 3 \frac{\kappa^2}{2} + p_\ell^2 \kappa^2 + O(\kappa^4), \\ w_b(\vec{p}) &= -3 \ln \kappa - 3 \frac{\kappa^3}{4} + p_\ell^2 \frac{\kappa^3}{8} + O(\kappa^6). \end{aligned}$$

As massas do hádrons são $w_k(\vec{p}=\vec{0})=m_k(\kappa, \beta)$ e onde $m_k(\kappa, \beta) = s_k(\kappa) + r_k(\kappa, \beta)$, com $s_m(k)=-2 \ln \kappa$ e $s_b(\kappa)=-3 \ln \kappa$, e a função $r_k(\kappa, \beta)$ é conjuntamente analítica em κ e β . Em $\beta = 0$, uma abertura de massa de $O(\kappa^4)$ é determinada entre o méson isovetorial e o méson isoescalar. Já para os bárions, em $\beta = 0$, uma abertura de massa de $O(\kappa^6)$ é encontrada entre os bárions com spin total $J = 1/2$ (prótons e neutróns) e $J = 3/2$ (bárions Δ). Estas diferenças de massa persistem para $\beta \neq 0$ uma vez que as massas são dadas por expansões convergentes em β .

Vamos encerrar esta Seção resumindo as propriedades analíticas de $\tilde{G}^k(p)$, $k = m, b$. Suprimindo os índices $\ell_1 \ell_2$, temos que

$$\tilde{G}^k(p) = \tilde{G}^k(\vec{p}) + Z^k(\vec{p}) \left[\left(e^{ip^0} - e^{-w_k(\vec{p})} \right)^{-1} + \left(e^{-ip^0} - e^{-w_k(\vec{p})} \right)^{-1} \right] + \tilde{\mathcal{G}}^k(p),$$

onde $Z^k(\vec{p})^{-1} = -(2\pi)^3 e^{w_k(\vec{p})} \frac{\partial \tilde{\Gamma}^k}{\partial \chi}(p^0 = i\chi, \vec{p})|_{\chi=w_k(\vec{p})}$ é tal que $Z^k(\vec{p}) \simeq (2\pi)^{-3} \exp[-w_k(\vec{p})]$ e $\tilde{\mathcal{G}}^k(p)$ é analítica em p^0 para $|\text{Im } p^0| < -(\vartheta_k - \epsilon) \ln \kappa$, com $\vartheta_m = 4$ e $\vartheta_b = 5$. O último termo $\tilde{\mathcal{G}}^k(p)$ no lado direito da equação acima contabiliza as contribuições dos setores com duas ou mais partículas para a função de correlação de dois pontos.

1.3 Pentaquarks: estados ligados méson-bárion

Nesta Seção mostramos como detectar estados de pentaquark como estados ligados de mésons e bárions no espectro de energia-momento na aproximação em escada. A primeira Subseção é dedicada a descrever a base do nosso método e as ferramentas

usadas. A grosso modo, a estratégia segue a apresentada na Seção I.3.2, ela é baseada no uso de representações espectrais para as funções de correlações de dois e quatro pontos e no uso de uma equação de Bethe-Salpeter em uma aproximação em escada. Na segunda Subseção, resolvemos esta equação de Bethe-Salpeter e determinamos os estados ligados.

1.3.1 Detecção de estados ligados méson-bárion: Aproximação em Escada para a Equação de Bethe Salpeter

Para encontrar os pentaquarks, nós restringimos nossa atenção ao subespaço de $\mathcal{H}_o$ gerado por estados méson-bárion. Graças à simetria de sabor, cada um dos setores (I, I_3) pode ser tratado separadamente de maneira similar. Aqui, consideraremos somente o tratamento explícito para o setor $I = I_3 = 1/2$. A análise para os demais setores segue o mesmo padrão. Em primeiro lugar, nós fixamos $\beta = 0$ e tomamos $0 < \kappa \ll 1$. As combinações lineares spinoriais (de Clebsch-Gordan) dos campos de mésons e bárions é dada por (suprimindo os índices de spin)

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda}_1(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\chi}_{1,1}^m(x)\bar{\chi}_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}^b(y) - \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\chi}_{1,0}^m(x)\bar{\chi}_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}^b(y) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\chi}_{1,-1}^m(x)\bar{\chi}_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}^b(y), \\ \bar{\Lambda}_2(x, y) &= \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\chi}_{1,1}^m(x)\bar{\chi}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^b(y) - \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\chi}_{1,0}^m(x)\bar{\chi}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^b(y), \\ \bar{\Lambda}_3(x, y) &= \bar{\chi}_{0,0}^m(x)\bar{\chi}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^b(y).\end{aligned}\tag{II.1.3.1}$$

O campo $\bar{\Lambda}_1$ surge do acoplamento entre mésons isovetoriais e bárions de isospin $3/2$, o campo $\bar{\Lambda}_2$ do acoplamento entre mésons isovetoriais e o próton ou o nêutron, e $\bar{\Lambda}_3$ do méson isoescalar e o próton. Com isso, nós temos, respectivamente, 16, 8 e 8 estados de spins individuais.

Essa base de spins individuais é ordenada da seguinte maneira: as primeiras 16 componentes (associadas aos campos $\bar{\Lambda}_1$) são agrupadas em quatro conjuntos de quatro elementos. Cada um destes conjuntos é distinguido pelo par formado pelo índice de spin lower do campo $\bar{\psi}$ e pelo índice de spin upper do campo ψ no campo de méson, e portanto temos os conjuntos $\vec{\alpha}_m = (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)$. Para cada $\vec{\alpha}_m$, os índices

$\vec{\beta}_b$ de spin lower do campo de bárion $\epsilon\psi_\ell^3$ assumem os possíveis valores $(3, 3, 3)$, $(3, 3, 4)$, $(3, 4, 4)$ e $(4, 4, 4)$. Para as componentes 17 a 24 (associadas aos campos $\bar{\Lambda}_2$), existem novamente quatro conjuntos rotulados pelo índice $\vec{\alpha}_m$ do méson, onde cada um desses conjuntos tem dois elementos distinguidos pelo índice $\vec{\beta}_b$ de spin lower do campo de bárion, que pode assumir os valores $(3, 4, 3)$ e $(3, 4, 4)$; o mesmo ordenamento é tomado para as componentes 25 até 32 (associadas ao campo $\bar{\Lambda}_3$).

Não sabemos *a priori* quais combinações de mésons e bárions descrevem os estados ligados de pentaquarks, nós devemos analisar *todas* as combinações. Assim, para $I = I_3 = \frac{1}{2}$ devemos analisar a matriz 32×32 D , das correlações de quatro pontos, com blocos ij dados abaixo. Fixada a condição de tempos iguais $x_1^0 = x_2^0$, $x_3^0 = x_4^0$, temos

$$D_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\langle \Lambda_i(x_1, x_2) \bar{\Lambda}_j(x_3, x_4) \rangle \theta_{x_1^0 \leq x_3^0} - \langle \bar{\Lambda}_i(x_1, x_2) \Lambda_j(x_3, x_4) \rangle^* \theta_{x_1^0 > x_3^0}. \quad (\text{II.1.3.2})$$

Da mesma maneira que fizemos nos casos anteriores, podemos obter representações espectrais para a função de correlação de quatro pontos D . O ponto de partida para isso é o uso da fórmula de Feynman-Kac, para $x^0 \neq 0$ e com $x = (x^0 = v^0 - u^0, \vec{x}) \in \mathbb{Z}^4$,

$$\left(\bar{\Lambda}_i((1/2, \vec{u}_1), (1/2, \vec{u}_2)), (\check{T}_0)^{|x^0|-1} \vec{T}^{\vec{x}} \bar{\Lambda}_j((1/2, \vec{u}_3), (1/2, \vec{u}_4)) \right)_{\mathcal{H}} = -D_{ij}(x),$$

onde, para os D_{ij} da Eq. (II.1.3.2), denotamos $D_{ij}(x) \equiv D_{ij}(u_1, u_2, u_3 + \vec{x}, u_4 + \vec{x})$. Tomando $u_1^0 = u_2^0 = u^0$ e $u_3^0 = u_4^0 = v^0$, temos, a representação espectral para a transformada de Fourier de D na variável x ,

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4}(k) &= \tilde{D}_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4}(\vec{k}) - (2\pi)^3 \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{T}^3} f(k^0, \lambda^0) \delta(\vec{k} - \vec{\lambda}) \\ &\quad \times d_{\lambda^0} d_{\vec{\lambda}} \left(\bar{\Lambda}_i((1/2, \vec{u}_1), (1/2, \vec{u}_2)), \right. \\ &\quad \left. \times \mathcal{E}(\lambda^0, \vec{\lambda}) \bar{\Lambda}_j((1/2, \vec{u}_3), (1/2, \vec{u}_4)) \right)_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.3.3})$$

onde $\tilde{D}_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4}(\vec{k}) = \sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^3} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} D_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4}(x^0 = 0, \vec{x})$. As singularidades de $\tilde{D}_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4}(k)$, para $k = (k^0 = i\chi, \vec{k} = 0)$ e $e^{\pm\chi} \leq 1$, são pontos no espectro de massa. Assim, as singularidades situadas acima da massa dos bárions ($\approx -3 \ln \kappa$) e abaixo do limiar de massa de mésons e bárions não ligados ($\approx -5 \ln \kappa$) são as massas dos estados ligados

méson-bárion.

De maneira análoga ao procedimento da Seção II.3.2, escrevemos uma equação de Bethe-Salpeter

$$D = D_0 + D_0 K D. \quad (\text{II.1.3.4})$$

Aqui, as entradas do operador D_0 são dadas pelas correlações obtidas pela aplicação errônea do teorema de Wick aos campos χ que entram na definição dos campos Λ em D . Dessa forma D_0 é o produto de funções de dois-pontos de méson e bárion na rede. Note também que D_0 admite uma representação espectral similar a da Eq. (II.1.3.3), que é facilmente obtida das representações espectrais para as funções de correlação de dois mésons G^m e dois bárions G^b , dadas na Eq. (II.1.2.14) e na Eq. (II.1.2.20) respectivamente.

O operador de Bethe-Salpeter K , definido na Eq. (II.1.3.4), é dado por

$$K \equiv (D_0)^{-1} - D^{-1}. \quad (\text{II.1.3.5})$$

Formalmente, K pode ser escrito como uma série de Neumann da forma

$$K = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \left[(D_0^{(0)})^{-1} \delta D_0 \right]^n (D_0^{(0)})^{-1} - \left[(D^{(0)})^{-1} \delta D \right]^n (D^{(0)})^{-1} \right\}, \quad (\text{II.1.3.6})$$

onde $A^{(\ell)}$ é o coeficiente de κ^ℓ na expansão em série de potências de κ para A , com $\beta = 0$, ao passo que $\delta D = D - D^{(0)}$ e $\delta D_0 = D_0 - D_0^{(0)}$.

Como veremos, os campos $\Lambda_i(x, y)$ em pontos coincidentes $x = y$ não são linearmente independentes. Portanto, os operadores D e D_0 precisam ser definidos em um espaço A que exclua o espaço nulo desses operadores. Nesse espaço, mostrando que $D^{(0)}(0) \neq 0$, a invertibilidade de $D^{(0)}(0)$ implica na invertibilidade de $D^{(0)}$, que por sua vez implica na invertibilidade de D . (É claro, que como no caso do Modelo de Quatro-Férmions, esse argumento se baseia no fato que, $D - D^{(0)}$, o resto da ordem zero da expansão de Taylor em torno de $\kappa = 0$ para D (e para D_0 respectivamente) é limitado.). Para isto, consideramos agora para a matriz $D^{(0)}(0)$. Cujo bloco ij é

$$D_{ij}^{(0)}(0) = -F_i C_{ij} F_j = -\langle \Lambda_i \Lambda_j \rangle^{(0)}, \quad (\text{II.1.3.7})$$

onde

$$C_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b \vec{g}} = \langle M_{\vec{\alpha}_m \vec{k}}^u B_{\vec{\alpha}_b \vec{f}}^u \bar{M}_{\vec{\beta}_m \vec{h}}^u \bar{B}_{\vec{\beta}_b \vec{g}}^u \rangle^{(0)}, \quad (\text{II.1.3.8})$$

e os F_i incorporam os coeficientes de Clebsch-Gordan das combinações lineares da Eq. (II.1.3.1). Os índices acima tomados na lista seguinte:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_m &= (\alpha^l, \alpha^u), \quad \alpha^l = 3, 4 (+, -), \alpha^u = 1, 2 (+, -), \\ \vec{\beta}_m &= (\beta^l, \beta^u), \quad \beta^l = 3, 4 (+, -), \beta^u = 1, 2 (+, -), \\ \vec{\alpha}_b &= (\alpha_1^l, \alpha_2^l, \alpha_3^l), \quad \alpha_i^l = 3, 4 (+, -), i = 1, 2, 3, \\ \vec{\beta}_b &= (\beta_1^l, \beta_2^l, \beta_3^l), \quad \beta_i^l = 3, 4 (+, -), i = 1, 2, 3, \\ \vec{k} &= (k_1, k_2), \quad k_i = 1, 2 (+, -), i = 1, 2, \\ \vec{h} &= (h_1, h_2), \quad h_i = 1, 2 (+, -), i = 1, 2, \\ \vec{f} &= (f_1, f_2, f_3), \quad f_i = 1, 2 (+, -), i = 1, 2, 3, \\ \vec{g} &= (g_1, g_2, g_3), \quad g_i = 1, 2 (+, -), i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

onde usamos a notação + para os índices de spin 1, 3 e - para os índices de spin 2, 4. Com isso, os F 's da Eq.(II.1.3.7) são dados nas expressões abaixo:

$$\begin{aligned} F_1^{\vec{\beta}_m, \vec{h}, \vec{\beta}_b, \vec{g}} &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \delta_{\vec{h}(-+)} \delta_{\vec{g}(+++)} \left[\frac{1}{6} (\delta_{\vec{\beta}_b(++++)} + \delta_{\vec{\beta}_b(----)}) + \frac{1}{2\sqrt{3}} (\delta_{\vec{\beta}_b(++++)} + \delta_{\vec{\beta}_b(+-)}) \right] \\ &\quad - \frac{1}{3\sqrt{2}} \left[\delta_{\vec{h}(-)} - \delta_{\vec{h}(++)} \right] \left[\frac{1}{2\sqrt{3}} (\delta_{\vec{\beta}_b(++++)} + \delta_{\vec{\beta}_b(----)}) \delta_{\vec{g}(+++)} + \frac{1}{6} (\delta_{\vec{\beta}_b(++++)} \right. \\ &\quad \times \delta_{\vec{g}(+++)} + 2\delta_{\vec{\beta}_b(++++)} \delta_{\vec{g}(+-)} + \delta_{\vec{\beta}_b(+-)} \delta_{\vec{g}(---)} + 2\delta_{\vec{\beta}_b(+-)} \delta_{\vec{g}(+-)}) \\ &\quad \left. + \frac{1}{3\sqrt{2}} \delta_{\vec{h}(+-)} \left[\frac{1}{2\sqrt{3}} (\delta_{\vec{\beta}_b(++++)} + \delta_{\vec{\beta}_b(----)}) \delta_{\vec{g}(+-)} + \frac{1}{6} (2\delta_{\vec{\beta}_b(++++)} \delta_{\vec{g}(+-)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta_{\vec{\beta}_b(+-)} \delta_{\vec{g}(---)} + 2\delta_{\vec{\beta}_b(+-)} \delta_{\vec{g}(---)} + \delta_{\vec{\beta}_b(+-)} \delta_{\vec{g}(+-)}) \right] \right], \end{aligned} \quad (\text{II.1.3.9})$$

$$\begin{aligned} F_2^{\vec{\beta}_m, \vec{h}, \vec{\beta}_b, \vec{g}} &= \frac{1}{9} \delta_{\vec{h}(-+)} (\delta_{\vec{\beta}_b(+-)} + \delta_{\vec{\beta}_b(+-)}) (\delta_{\vec{g}(+-)} - \delta_{\vec{g}(---)}) - \frac{1}{18} (\delta_{\vec{h}(-)} \\ &\quad - \delta_{\vec{h}(++)}) (\delta_{\vec{\beta}_b(++++)} + \delta_{\vec{\beta}_b(+-)}) (\delta_{\vec{g}(+-)} - \delta_{\vec{g}(+-)}), \end{aligned} \quad (\text{II.1.3.10})$$

$$F_3^{\vec{\beta}_m, \vec{h}, \vec{\beta}_b, \vec{g}} = \frac{1}{6\sqrt{3}} (\delta_{\vec{h}(-)} + \delta_{\vec{h}(++)}) (\delta_{\vec{\beta}_b(+-)} + \delta_{\vec{\beta}_b(+-)}) (\delta_{\vec{g}(+-)} - \delta_{\vec{g}(---)}). \quad (\text{II.1.3.11})$$

O valor esperado na Eq. (II.1.3.8) é calculado usando o teorema de Wick. O

campo fermiônico com um índice de spin upper do méson M é forçado a se contrair com o campo correspondente no campo $\bar{M}$ (lembramos que bárions são compostos de campos apenas com índices lower). Se o campo com índice lower em M é contraído com o campo de spin lower em $\bar{M}$, então os campos no bárion B se contraem de forma a obtermos um permanente para o valor esperado dos bárions na forma da Eq. (II.1.2.24) e a soma sobre os índices de cor dá um fator 3. Por outro lado, se o campo com um índice de spin lower em M é contraído com um campo do bárion, após somarmos sobre os índices de cor, os campos restantes podem ser contraídos de forma a reobtermos um permanente, análogo ao da Eq. (II.1.2.24), e a média total resulta em

$$\begin{aligned}
C_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b \vec{g}} = & -18 \delta_{\alpha^\ell \beta^\ell} \delta_{\alpha^u \beta^u} \delta_{k_1 h_1} \delta_{k_2 h_2} \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b \vec{\beta}_b} \delta_{\vec{f} \vec{g}} \right) + 6 \delta_{\alpha^\ell \beta_1^\ell} \delta_{\alpha^u \beta^u} \delta_{k_1 g_1} \delta_{k_2 h_2} \\
& \times \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b (\beta_1^\ell, \beta_2^\ell, \beta_3^\ell)} \delta_{\vec{f} (h_1, g_2, g_3)} \right) + 6 \delta_{\alpha^\ell \beta_2^\ell} \delta_{\alpha^u \beta^u} \delta_{k_1 g_2} \delta_{k_2 h_2} \\
& \times \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b (\beta_1^\ell, \beta_2^\ell, \beta_3^\ell)} \delta_{\vec{f} (g_1, h_1, g_3)} \right) + 6 \delta_{\alpha^\ell \beta_3^\ell} \delta_{\alpha^u \beta^u} \delta_{k_1 g_3} \delta_{k_2 h_2} \\
& \times \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b (\beta_1^\ell, \beta_2^\ell, \beta_3^\ell)} \delta_{\vec{f} (g_1, g_2, h_1)} \right) .
\end{aligned} \tag{II.1.3.12}$$

A matriz $D^{(0)}$ é dada explicitamente no Apêndice D, bem como uma lista de seus autovalores e autovetores. Os autovalores de $D^{(0)}$ são 0 (8), $-4/3$ (24), onde entre parênteses são dadas as respectivas multiplicidades. Denotamos o autovetor associado ao autovalor zero por M_i , $i = 1, 2, \dots, 8$. Seja P o operador de projeção ortogonal no espaço nulo gerado por estes oito vetores. A equação de autovalor correspondente ao autovalor zero (onde s_1 e s_2 são índices coletivos de spin escritos segundo a ordem estabelecida no início desta Seção)

$$\langle \Lambda_{s_1} \Lambda_{s_2} \rangle^{(0)} M_{js_2} = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, 8,$$

sugere uma relação de dependência linear ponto a ponto $M_{js} \Lambda_s = 0$ dos vetores na álgebra de Grassmann subjacente ao nosso modelo. De fato, no Apêndice D, mostramos que essa relação é verdadeira. Esta relação de dependência linear é válida sem qualquer restrição especial nos parâmetros κ e β , i.e., para $j = 1, \dots, 8$, temos

$$\langle \Lambda_{s_1} \Lambda_{s_2} \rangle M_{js_2} = 0 \quad , \quad \kappa, \beta > 0.$$

As considerações acima são passos necessários para se fixar o espaço onde D e D_0 agem como operadores matriciais. Para que as inversas de D e D_0 estejam bem definidas, tomamos D e D_0 como operadores matriciais agindo no espaço $\ell_2(\mathbb{A})$, onde $\mathbb{A} = \{(x_1, x_2, j) \in \mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}^4 \times (1, 2, \dots, 32) \mid x_1^0 = x_2^0, \vec{x}_1 \neq \vec{x}_2\}$ ou $\mathbb{A} = \{(x_1, x_2, k) \in \mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}^4 \times (1, 2, \dots, 24) \mid x_1^0 = x_2^0, \vec{x}_1 = \vec{x}_2\}$, i.e. escolhemos espaços distintos para os casos de coordenadas coincidentes e não coincidentes, uma vez que o espaço nulo não é trivial para o caso de pontos coincidentes. Notemos também que não existe uma relação de dependência linear se os pontos não coincidem. Isto pode ser visto da definição de D na Eq. (II.1.3.2) uma vez que campos de mésons e bárions em pontos distintos são campos independentes, e todos os campos de mésons, bem como os campos de bárions, são linearmente independentes. Com isto, pela Eq. (II.1.3.5), o operador de Bethe-Salpeter K é bem definido em $\ell_2(\mathbb{A})$.

A idéia para resolver a equação de Bethe-Salpeter é usar as Eqs. (II.1.3.5) e (II.1.3.6) para calcular a transformada de Fourier do núcleo de Bethe-Salpeter $K(y_1, y_2, y_3, y_4)$ retendo apenas a *primeira ordem não nula* em κ , para $\beta = 0$. O termo retido é chamado de aproximação em escada para K . Nesta *aproximação em escada* $K \equiv L$, podemos resolver a equação de Bethe-Salpeter, para D . As singularidades de D , no espaço de Fourier, corresponderão aos estados ligados méson-bárion, como mostrado pela representação espectral da Eq. (II.1.3.3).

Aqui, trataremos apenas com a equação de Bethe-Salpeter na aproximação em escada. Com os métodos desenvolvidos nas Refs. ANJOS E VEIGA [2008a], SCHOR E O'CARROLL [2000b], VEIGA ET AL. [2001] e na Seção I.3.3, esperamos ser capazes de validar os resultados obtidos nesta aproximação em escada para o modelo completo. O ingrediente fundamental para isto é a demonstração de um decaimento suficientemente rápido para o núcleo de Bethe-Salpeter $K(y_1, y_2, y_3, y_4)$. No Apêndice C, nós usamos o método de desacoplamento de hiperplanos para obter um decaimento que, em princípio, é suficiente para isto.

Para determinar a aproximação em escada para o operador de Bethe-Salpeter, iniciaremos agora a análise dos operadores D e D_0 em $\beta = 0$. Em $\beta = 0$ e $\kappa = 0$, temos

$$D^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = D^{(0)}(0) \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3), \delta(x_2 - x_4) + [1 - \delta(x_1 - x_2)] \delta(x_1 - x_3) \delta(x_2 - x_4),$$

e

$$D_0^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \delta(x_1 - x_3) \delta(x_2 - x_4),$$

é o núcleo do operador identidade. Assim, $D^{(0)}$ and $D_0^{(0)}$ são o mesmo o mesmo operador, exceto para pontos coincidentes $x_1 = x_2$ ou $x_3 = x_4$. Mais ainda, $D^{(0)}$ possui um espaço nulo de dimensão 8 e representação espectral $D^{(0)} = (4/3) Q$, onde $Q = 1 - P$, com P sendo o projetor definido acima, é o operador de projeção no complemento ortogonal de P .

Em $\mathbb{A}$, para pontos coincidentes $x_1 = x_2$, seja k o índice que rotula a base para o domínio $R(Q)$ do complemento ortogonal do espaço nulo de D . Assim, temos, em $\ell_2(\mathbb{A})$,

$$\begin{aligned} (D^{(0)})^{-1}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{3}{4} Q \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \\ &\quad \times \delta(x_2 - x_4) + [1 - \delta(x_1 - x_2)] \\ &\quad \times \delta(x_1 - x_3) \delta(x_2 - x_4), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (D_0^{(0)})^{-1}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= Q \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \\ &\quad \times \delta(x_2 - x_4) + [1 - \delta(x_1 - x_2)] \\ &\quad \times \delta(x_1 - x_3) \delta(x_2 - x_4), \end{aligned}$$

de forma que

$$K(x_1, x_2, x_3, x_4) = K^{(0)} \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \delta(x_2 - x_4),$$

onde $K^{(0)} = (1 - 3/4)Q = (1/4)Q$.

Afim de analisarmos a equação de Bethe-Salpeter, lançamos mão novamente das coordenadas relativas na rede, $\vec{\xi} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$, $\vec{\eta} = \vec{x}_4 - \vec{x}_3$ e $\tau = x_3 - x_2$, que foram introduzidas na Eq. (I.1.4.9). Aqui, como no modelo de Quatro-Férmions, a coordenada τ *separa* o cluster x_1, x_2 do outro cluster de variáveis externas x_3, x_4 . Como vimos na Seção I.3.2, essa variável tem um papel central em nosso método para o problema de determinação dos estados ligados. De fato, a transformada de Fourier de Eq. (II.1.3.3) pode ser vista como sendo tomada *apenas* na variável τ .

Passando para coordenadas relativas e tomando a transformada de Fourier

na variável τ , a equação de Bethe-Salpeter pode ser tratada de maneira análoga ao procedimento adotado no Apêndice B, resultando em

$$\begin{aligned} \hat{D}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k) = & \hat{D}_0(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k) + \int \hat{D}_0(\vec{\xi}, \vec{\xi}', k) \\ & \times \hat{K}(-\vec{\xi}', -\vec{\eta}', k) \hat{D}(\vec{\eta}', \vec{\eta}, k) d\vec{\xi}' d\vec{\eta}'. \end{aligned} \quad (\text{II.1.3.13})$$

Lembramos que D e D_0 admitem representações espectrais e além disso, tomando $\vec{k} = \vec{0}$, as singularidades de D em $\text{Im } k^0$ acima da massa de um bárion e abaixo do limiar de méson-bárion não ligados são as massas dos estados ligados, ou seja dos pentaquarks.

Daremos agora nossa aproximação em escada para K . A interação dominante é uma interação de ordem κ^2 que atua em distância espacial 1, envolvendo a troca $q\bar{q}$. Isto ocorre, devido a um cancelamento das contribuições na ordem κ^0 , veja mais detalhes no Apêndice C. A origem da contribuição dominante em ordem κ^2 é o fator $[D^{(0)}]^{-1} \kappa^2 D^{(2)} [D^{(0)}]^{-1}$ na expansão em potências de κ de D nos pontos $x_1 = x_3$, $x_2 = x_1 + \sigma e^k$, $x_4 = x_3 + \sigma e^k$, $\sigma = \pm 1$. Para estes pontos, $[D^{(0)}]^{-1}$ age como o operador identidade. Usando a invariância translacional D , o elemento ij do núcleo do operador D é dado pelo produto de $\Gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\sigma e^k} \Gamma_{\alpha_2\beta_2}^{-\sigma e^k} \int g_{a_1b_1} g_{a_2b_2}^{-1} d\mu(g)$ por

$$\sum_{\substack{\sigma = \pm 1 \\ k = 1, 2, 3}} \frac{\kappa}{4} W_{ij}^k \delta(x_1 - x_2 - \sigma e^k) \delta(x_4 - x_3 - \sigma e^k) \delta(x_1 - x_3),$$

O termo W_{ij}^k é independente de σ , é dado explicitamente pela expressão

$$\langle \bar{\psi}_{a_1\alpha_1 f_1}(0) \psi_{b_1\beta_1 f_1}(e^k) \Lambda_i(0, e^1) \bar{\psi}_{a_2\alpha_2 f_2}(e^k) \psi_{b_2\beta_2 f_2}(0) \times \bar{\Lambda}_j(0, e^k) \rangle^{(0)}.$$

O resultado da integral de calibre na média acima é $(1/3) \delta_{a_1b_2} \delta_{a_2b_1}$, e as contrações dos campos de férmions resultam em $\delta_{\alpha_1\beta_2}$ e $\delta_{\alpha_2\beta_1}$, e portanto são nulas, uma vez que $\Gamma^{\sigma e^k} \Gamma^{-\sigma e^k} = 0$. Mais ainda, β_1 e α_2 são índices lower, pois estes são os únicos índices de spin que aparecem nos campos de bárions que entram nos campos Λ_i e $\bar{\Lambda}_j$.

A contribuição W_{ij}^k é dada por

$$W_{ij}^k = \sum_{\vec{k}, \vec{f}, \vec{h}, \vec{g}} F_i^{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b \vec{f}} W_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b \vec{f}}^{k \vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b \vec{g}} F_j^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b \vec{g}}, \quad (\text{II.1.3.14})$$

e $W_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b \vec{f}}^{k \vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b \vec{g}}$ possui representação em termos de permanentes, dada explicitamente no Apêndice D, onde também exibimos a matriz de potencial W . Em especial, notamos que W_{11} tem o valor 5 na diagonal, o que também ocorre no caso sem spin. No entanto, aqui a matriz W não é esparsa de forma que autovalores muito maiores aparecem.

1.3.2 Estados ligados méson-bárion

Usaremos agora nossa aproximação para o núcleo de Bethe-Salpeter, além de novas aproximações para D_0 , para determinar a existência de estados ligados abaixo do limiar méson-bárion.

Reescalando os operadores D e D_0 para $\hat{R} = \frac{\kappa^2}{2} \hat{D}$, $\hat{R}_0 = \frac{\kappa^2}{2} \hat{D}_0$, podemos resolver a Eq. (II.1.3.13) tomando sucessivamente $\vec{\xi} = \pm e^1, \pm e^2, \pm e^3$ e obtendo $\hat{R}$ para estes valores de $\vec{\xi}$. Seja A a matriz (32×6) , cujos elementos são dados por $A_{s_1 s_2}(\sigma_1 e^i, \sigma_2 e^j) = \delta_{s_1 s_2} \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \delta_{ij} - (1/6) W_{s_1 s_3} \hat{R}_{0, s_3 s_2}(\sigma_1 e^i, \sigma_2 e^j)$, onde s_1, s_2 são índices coletivos de spin. Temos que a equação de Bethe-Salpeter resulta em

$$\hat{R}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \hat{R}_0(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + \sum_{\vec{\xi}' = e^{j=1,2,3}} \hat{R}_0(\vec{\eta}, \vec{\xi}') \frac{W^{\xi'}}{6} \hat{R}(\vec{\xi}', \vec{\eta}).$$

Como $\hat{R}_0$ é analítica para $\text{Im } k^0$ abaixo do limiar de massa de méson-bárion, a massa dos estados ligados são zeros de $\det A$. Seja $k^0 = i(m_m + m_b - \epsilon)$, onde m_m e m_b são, aqui, respectivamente, as menores massas do méson e do bárion e $\epsilon > 0$ é a energia de ligação. Retendo apenas as contribuições de uma partícula para as correlações de dois-pontos em $\hat{R}_0$, vemos que $\hat{R}_0$ pode ser aproximado pelas contribuições diagonais no spin, que resultam em

$$\hat{R}_0(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k) = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\Xi(\vec{p}, \vec{\xi}, \vec{\eta})}{\varrho(\vec{p}, b)} d\vec{p},$$

onde $\Xi(\vec{p}, \vec{\xi}, \vec{\eta}) = \cos \vec{p} \cdot \vec{\xi} \cos \vec{p} \cdot \vec{\eta} + \sin \vec{p} \cdot \vec{\xi} \sin \vec{p} \cdot \vec{\eta}$ e $\varrho(\vec{p}, b) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p^i) + 2b$, para $b = (e^\epsilon - 1)/\kappa^2$. Assim, vemos que $\hat{R}$ corresponde à resolvente $(H - z)^{-1}$, onde $H = p_\ell^2/2 - W \sum_{j,\sigma} \delta(x - \sigma e^j)$ e $z = -2b$ (veja a Eq. (II.1.1.1)). E da solução da equação de Bethe-Salpeter temos, que os estados ligados são as raízes da equação

$$\det(I - A) = 0 \quad (\text{II.1.3.15})$$

, onde A é a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\hat{R}_0(e^1, e^1)W_1 & \frac{1}{3}\hat{R}_0(e^1, e^2)W_1 & \frac{1}{3}\hat{R}_0(e^1, e^2)W_3 \\ \frac{1}{3}\hat{R}_0(e^1, e^2)W_1 & \frac{1}{3}\hat{R}_0(e^1, e^1)W_1 & \frac{1}{3}\hat{R}_0(e^1, e^2)W_3 \\ \frac{1}{3}\hat{R}_0(e^1, e^2)W_1 & \frac{1}{3}\hat{R}_0(e^1, e^2)W_1 & \frac{1}{3}\hat{R}_0(e^1, e^1)W_3 \end{pmatrix}.$$

Denotando $c = WR_0(1, 1)/3$, $d = WR_0(1, 2)/3$, $g = W_3R_0(1, 2)/3$, $h = W_3R_0(1, 1)/3$. Podemos fazer operações nas linhas e colunas de $I - A$ de forma que a fórmula de determinante de blocos se aplica e obtemos

$$\det(I - A) = \det(1 - c + d) \det((1 - c - d)(1 - h) - 2dg).$$

O segundo determinante no lado esquerdo da equação¹ é $\det((I - WR_0(1, 1)/3 - WR_0(1, 2)/3)(1 - W_3R_0(1, 1)/3) - 2WW_3R_0(1, 2)^2)$. A quantidade $2b$ e, portanto, a energia de ligação ϵ pode ser determinada numericamente como soluções da Eq. (II.1.3.15), de onde encontramos um único estado ligado com energia de ligação $e_l \approx 0,00135\kappa^2$.

¹Para o caso $W = W_3$ temos $g = d$ e $h = c$ e o segundo determinante pode ser fatorado em $\det(1 - c + d) \det(1 - c - 2d)$.

Capítulo 2

QCD na Rede: Considerações Finais

“It is a mistake to think you can solve any major problems just with potatoes. ”

Douglas Noel Adams

Nesta segunda parte desta tese, nós encontramos estados ligados de mésons e bárions, com isospin total $I = 1/2$ e $I = 3/2$, com energias de ligação de ordem κ^2 , no regime de acoplamento forte da cromodinâmica quântica com dois sabores e matrizes de spin de Dirac, na rede de dimensão $3+1$. O método utilizado para a detecção destes estados ligados é o desenvolvido para a análise da equação de Bethe-Salpeter na rede. Uma interação efetiva de ordem κ^2 criada pela troca de partículas $q\bar{q}$ é a contribuição dominante para a atração entre os mésons e bárions. Esta atração é mais forte no setor de isospin total mínimo $I = 1/2$, mais fraca no setor $I = 3/2$, e não há nenhuma atração no setor de isospin máximo $I = 5/2$. Essa interação atrativa é maximizada devido à interação dos spins dos quarks que constituem o méson com os spin dos quarks que constituem os bárions. Os estados ligados são superposições de estados meson-bárion onde o meson envolvido pode ser tanto um méson isovetorial ou um méson isoescalar, enquanto os bárions podem ser o prótons, o neutron ou partículas delta. Assim, os estados ligados que encontramos são de fato modos coletivos do sistema.

Mais ainda, nós estabelecemos a correspondência entre o estado ligado meson-

bárion e operadores de Schrödinger para uma partícula na rede com um potencial de alcance espacial 1. As energias de ligação encontradas dependem do “momento angular” na rede. Por de trás disso, está o fato das funções de onda dos estados ligados formarem uma base para representações do grupo octaedral. Essas energias de ligação decrescem conforme vamos do “momento angular” $\ell = 0$ para $\ell = 2$.

Ainda vimos que existe uma interação atrativa subdominante que advém da combinação do potencial para pontos coincidentes e do potencial dependente da energia, de distância temporal 1 e coordenadas espaciais coincidentes. A origem deste último vem dos efeitos de correlação impostos pela simetria de calibre, envolvendo 5 elos do campo de calibre superpostos.

Esta trabalho abre caminho para a busca de respostas para algumas questões. Em primeiro lugar, temos a questão da existência de estados ligados no modelo com três sabores e com a presença dos chamados quarks estranhos. Temos também a questão da existência de outros pontos espectrais abaixo do limiar méson-bárion, associados a excitações de um número ímpar de quarks. Aparentemente, este último problema está distante de qualquer tratamento atual, e mais ainda nós não vemos nenhum método disponível que seja suficientemente poderoso para selecionar satisfatoriamente um domínio “mais físico” para os parâmetros κ e β que o regime de acoplamento forte que utilizamos aqui. Com isso, nos encerramos texto, destacando que o método utilizado aqui é capaz de validar o esquema do *eightfold way* obtendo o espectro exato para um hádron no modelo com três sabores, $3 + 1$ dimensões e no acoplamento forte. Mais ainda, nessa mesma situação, o confinamento foi mostrado até próximo ao limiar de méson-bárion.

Referências

- ABDESSELAM, A.; RIVASSEAU, V. *Explicit fermionic tree expansion. Letters in Mathematical Physics*, v.44, n.1, p. 77, 1998.
- ALGACY, R.L. *Generalized Kronecker and permanent deltas, their spinor and tensor equivalents and applications. Journal of Mathematical Physics*, v.40, n.4 ,p. 2055-2063, 1999.
- ANDREI, N.; LOWENSTEIN, J.H. *Diagonalization of the chiral-invariant Gross-Neveu Hamiltonian. Physical Review Letters*, v. 43, n.23, p. 1698, 1979.
- ANJOS, P.H.R. DOS; VEIGA, P.A.F. DA; O'CARROLL, M. *Transfer matrix spectrum for $O(N)$ high temperature lattice classical ferromagnetic spin systems and staggering transformation. Physica Scripta*, v.77, n.4, p. 329-335, 2005.
- ANJOS, P.H.R. DOS; VEIGA, P.A.F. DA *The low-lying energy-momentum spectrum for the four-Fermi model on a lattice*. Disponível em <arXiv:hep-th/0701251>, 2007.
- ANJOS, P.H.R. DOS; VEIGA, P.A.F. DA. *On the energy-momentum spectrum for the four-fermi model on a lattice*. Em preparação, 2008.
- ANJOS, P.H.R. DOS; VEIGA, P.A.F. DA. *Identities for permanents and determinants of $(0,1)$ -matrices. Submetido para Linear and Multilinear Algebra* , 11/2008.
- BANKS, T. ET AL. *Strong-coupling calculations of the hadron spectrum of quantum chromodynamics. Physical Review D*, v.15, n.4 ,p. 1111, 1977.
- BARATA, J.C.; FREDENHAGEN, K. *Particle scattering in Euclidean lattice field theories, Communications in Mathematical Physics*, v. 138, n.3 ,p. 507, 1991.
- BEREZIN, F. *The method of second quantization*, New York: Academic Press, 1976.
- BIJKER, R.; GIANNINI, M.M.; SANTOPINTO, E. *Spectroscopy of pentaquark states. European Physical Journal A*, v. 22, n.2, p. 319, 2004.

- BROSS, J. T.; YELLEN, J. *Graph theory and its applications*. Boca Raton: CRC Press, 1999.
- BRUALDI, R.A. *Combinatorial matrix classes*. New York: Cambridge University Press, 2006. (Encyclopedia of mathematics and its applications, n. 108).
- CREUTZ, M. *Quarks, gluons and lattices*. New York: Cambridge University Press, 1983.
- CREUTZ, M. *Lattice gauge theory: A retrospective*. *Nuclear Physics B: Proceedings Supplements*, v.94, n.1-3, p. 219-226, 2001.
- DASHEN, R.F.; HASSLACHER, B.; NEVEU, A. *Semiclassical bound states in an asymptotically free theory*. *Physical Review D*, v.12, n.8 , p. 2443 - 2458, 1974.
- FELDMAN, J. ; MAGNEN, J., RIVASSEAU, V.; SÉNÉOR, R. *Massive Gross-Neveu model: a rigorous perturbative construction*. *Physical Review Letters*, v. 54, n.14 ,p. 1479, 1985.
- FELDMAN, J.; MAGNEN, J.; RIVASSEAU, V.; SÉNÉOR, R. *A renormalizable field theory: the massive Gross-Neveu model in two dimensions*. *Communications in Mathematical Physics*, v.103, n.1, p. 67, 1986.
- FIEBIG, H.R.; MARKUM, H.; MIHÁLY, A.; RABITSCH, K. *Forces between composite particles in QCD*. *Nuclear Physics B: Proceedings Supplements*, v.53, p. 804, 1997.
- FORCRAND, PH. DE; KIM, S. *The spectrum of lattice QCD with staggered fermions at strong coupling*. *Physics Letters B*, v.645, n.4, p. 339, 2007.
- FRANCISCO NETO, A.; VEIGA, P.A.F. DA; O'CARROLL, M. *Existence of mesons and mass splitting in strong coupling lattice QCD*. *Journal of Mathematical Physics*, v.45, n.2, p. 628, 2004.
- FRANCISCO NETO, A. *Meson-Baryon Bound States in a (2+1)-dimensional Strongly coupled lattice QCD model*. *Physical Review D*, v.70, n.3, p. 037502, 2004.
- FRANCISCO NETO, A. *A meson-baryon bound state in a 2+1 lattice QCD model with two flavours and strong coupling*. *Physica Scripta*, v.75, n.4, p. 484, 2007.
- FRANCISCO NETO, A.; O'CARROLL, M.; VEIGA, P.A.F. DA. *Dynamical eightfold way mesons in strongly coupled lattice QCD*. *Physical Review D*, v.77, n.5, p. 054503, 2008.

FRANCISCO NETO, A.; O'CARROLL, M.; VEIGA, P.A.F. DA. *Mesonic eightfold way from dynamics and confinement in strongly coupled lattice quantum chromodynamics. Journal of Mathematical Physics*, v.49, n.7, p. 072301, 2008.

FREDENHAGEN, K. *On the existence of the real time evolution in Euclidean lattice gauge theories. Communications in Mathematical Physics*, v.101, n.4, p. 579, 1985.

FRÖHLICH, J.; KING, C. *Meson masses and the $U(1)$ problem in lattice QCD. Nuclear Physics B*, v.290, p.157, 1987.

GAWEDZKI, K.; KUPIAINEN, A. *Gross-Neveu model through convergent perturbation expansions. Communications in Mathematical Physics*, v.102, n.1, p. 1-30, 1985.

GLIMM, J.; JAFFE, A. *Quantum physics: A functional integral point of view*, New York: Spriger Verlag, 1986.

GROSS, D.; NEVEU, A. *Dynamical symmetry breaking in asymptotically free field theories. Physical Review D*, v.10, n.10, p.3235, 1974.

GRUBER, C.; KUNZ, C. *General properties of polymer systems. Communications in Mathematical Physics*, v.22, n.2, p. 133-161, 1971.

HARARY, F. *Determinants, permanents and bipartite graphs. Mathematics Magazine*, v.42, n.3, p. 146-148, 1969.

HARARY, F. *The determinant of the adjacency matrix of a graph. SIAM Reviews*, v.4, n.4, p. 202-210, 1962.

HILLE, E. *Analytic function theory*, New York: Blaisdell Publishing Co., 1959. (Introductions to higher mathematics, v.1).

HUANG, H.; DENG, C.; PING, J.; WANG, F.; GOLDMAN, T. *Systematic study of multi-quark states: A $qq - qq - \bar{q}$ [over Z] configuration. Physical Review C*, v.77, n.2, p.025201, 2008.

IAGOLNITZER, D.; MAGNEN, J. *Asymptotic completeness and multiparticle structure in field theories. Communications in Mathematical Physics*, v.111, n.1, p.81-100, 1987.

JAFFE, A.; RITTER, G. *Quantum field theory on curved backgrounds I: The Euclidean functional integral. Communications in Mathematical Physics*, v.270, n.2, p. 545-572, 2007.

JAFFE, A.; RITTER, G. *QUANTUM FIELD THEORY ON CURVED BACKGROUNDS II: Spacetime symmetries. Disponível em <arXiv:0704.0052>*, 2007.

KLEMP, E.; ZAITSEV, A. *Glueballs, hybrids, multiquarks: Experimental facts versus QCD inspired concepts. Physics Reports*, v. 454, p.1, 2007.

KOPPER, C.; MAGNEN, J.; RIVASSEAU, V. *Mass generation in the large N Gross-Neveu model. Communications in Mathematical Physics*, v. 169, n.1, p. 121-180, 1995.

Montvay, I.; Münster, G. *Quantum fields on a lattice*, Cambridge: Cambridge University Press , 1997. (Cambridge monographs on mathematical physics)

O'CARROLL, M. *Analytic properties and a convergent expansion for the inverse correlation length of the high temperature d -dimensional Ising model. Journal of Statistical Physics*, v. 34, n. 3-4, 1984.

OHSAKU, T. *Relativistic model of two-band superconductivity in $(2 + 1)$ -dimension. International Journal of Modern Physics B*, v. 18, n. 12, p. 1771-1794, 2004.

OSTERWALDER, K.; SCHRADER, R. *Axioms for Euclidean Green's functions. Communications in Mathematical Physics*, v. 31, n.2, p. 83-112, 1973.

OSTERWALDER, K.; SCHRADER, R. *Axioms for Euclidean Green's functions II. Communications in Mathematical Physics*, v.42, n.3, p.281-305, 1975.

PAES-LEME, P.J. *Orstein-Zernike and analyticity properties for classical lattice spins systems. Annals of Physics*, v. 115, n. 2, p. 117-387, 1978.

PING, J.; HUANG, H.; DENG, C.; WANG, F.; GOLDMAN, T. *Systematic study of pentaquark states: $qqq - q\bar{q}$ configuration*. Disponível em <arXiv:0802.2891>.

QING, D.; CHEN, X.S.; WANG, F. *Is nucleon spin structure inconsistent with the constituent quark model? Physical Review D* v.58, n.11, p. 114032, 1998.

QING, D.; CHEN, X.S.; WANG, F. *Spin content of the nucleon in a valence and sea quark mixing model. Physical Review C* v. 57, n.1 ,p. R31, 1998.

REED, M.; SIMON, B. *Functional analysis*. New York: Academic Press , 1972. (Modern Methods of Mathematical Physics, v.1)

REED, M.; SIMON, B. *Fourier analysis, self-adjointness*. New York: Academic Press, 1978. (Modern Methods of Mathematical Physics, v.2)

REED, M.; SIMON, B. *Analysis of operators*. New York: Academic Press, 1978. (Modern Methods of Mathematical Physics, v.4)

SCHEFFE, H. *The analysis of variance*. New Jersey: Wiley-Interscience , 1999.

Schor, R.; O'Carroll, M. Transfer matrix spectrum and bound states for lattice classical ferromagnetic spin systems at high temperature. *Journal of Statistical Physics*, v.99, n. 5/6, p. 1207-1235, 2000.

SCHOR, R.; O'CARROLL, M. Decay of the Bethe–Salpeter kernel and bound states for lattice classical ferromagnetic spin systems at high Temperature. *Journal of Statistical Physics*, v.99, n.5/6, p. 1265-1279, 2000.

SCHOR, R. E O'CARROLL, M. Transfer matrix spectrum for lattice classical $O(N)$ ferromagnetic spin Systems at high temperature. *Journal of Statistical Physics*, v.109, n.1/2, p. 279-288, 2002.

SEILER, E. *Gauge theories as a problem of constructive quantum field theory*. New York: Spriger Verlag, 1982. (Lecture Notes on Physics, v.159)

SIMON, B. *Statistical Mechanics of Lattice Gases*. Princeton: Princeton University Press, 1994.

SIMON, B. *Representations of Finite and Compact Groups*. Providence: American Mathematical Society, 1996.

SPENCER, T., The decay of Bethe-Salpeter kernel in $P(\phi)_2$ quantum fields models. *Communications in Mathematical Physics* v.44, n.2, p.143-164, 1975.

STEWART, C. E KONIUK, R.. Hadronic molecules in lattice QCD. *Physical Review D* v. 57, n.9, p.5581, 1998.

Takahashi, T.T.; Matsufuru, H.; Nemoto, Y. e Suganuma, H.. Three-Quark Potential in $SU(3)$ Lattice QCD. *Physical Review Letters* v. 86, n.1 , p.18, 2001;

Takahashi, T.T., Suganuma, H.; Nemoto, Y. e Matsufuru, H.. Detailed analysis of the three-quark potential in $SU(3)$ lattice QCD. *Physical Review D* v. 65, n.11, p. 114509, 2002.

THIES, M. E URLICHS, K. Baryons in Massive Gross-Neveu Model, disponível em <arXiv:hep-th/0502210>, 2005.

VEIGA, P.A.F. DA; O'CARROLL, M.; PEREIRA, E.; SCHOR, R. Spectral analysis of weakly coupled stochastic lattice Landau-Ginzburg type models. *Communications in Mathematical Physics*, v. 220, n.2, p. 377-402, 2001.

VEIGA, P.A.F. DA; O'CARROLL, M.; ANJOS, P.H.R. DOS; FRANCISCO NETO, A. Pentaquarks from dynamics in strongly coupled lattice QCD. *Submetido para Physical Review Letters*, 2008.

VEIGA, P.A.F. DA; O'CARROLL, M.; ANJOS, P.H.R. DOS; FRANCISCO NETO, A. *Pentaquarks from dynamics in $3 + 1$ dimensional strongly coupled lattice QCD with two flavors. Em preparação.*, 2008.

VEIGA, P.A.F. DA; IORIATTI, L.; O'CARROLL, M. *Energy-Momentum Spectrum of Some Two-Particle Lattice Schrödinger Hamiltonians. Physical Review E*, v. 66, n.1, p.016130-016139, 2002.

VEIGA, P.A.F. DA; O'CARROLL, M. E SCHOR, R. *Understanding Baryons From First Principles. Physical Review D*, v. 67, n.1, p. 017501, 2003.

VEIGA , P.A.F. DA; O'CARROLL, M. E SCHOR, R. *Baryon-baryon bound states in a $(2+1)$ -dimensional lattice QCD model. Physical Review D*, v. 68, n.3, p. 037501, 2003.

VEIGA, P.A.F. DA; O'CARROLL, M. E SCHOR, R. *Existence of baryons, baryon spectrum and mass splitting in strong coupling lattice QCD. Communications in Mathematical Physics*, v. 245, n.2, p. 383, 2004.

VEIGA, P.A.F. DA; O'CARROLL, M. E FRANCISCO NETO, A. *Meson-meson bound states in a $(2 + 1)$ -dimensional strong coupled lattice QCD model. Physical Review D*, v.69, n.9 ,p. 097501, 2004.

VEIGA, P.A.F. DA; O'CARROLL, M.; FRANCISCO NETO, A. *A meson-meson bound state in a $2+1$ lattice QCD model with two flavors and strong coupling. Physical Review D*, v. 72, n.3, p.034507, 2005.

VEIGA, P.A.F. DA; O'CARROLL, M. *A baryon-baryon bound state in a $2 + 1$ lattice QCD model with two flavors and strong Coupling. Physical Review D*, v. 71, n.1, p.017503, 2005.

VEIGA , P.A.F. DA; O'CARROLL, M. *Baryon-baryon bound states from first principles in $3 + 1$ lattice QCD with two flavors and strong coupling. Physics Letters B*, v.643, p.109, 2006.

VEIGA , P.A.F. DA; O'CARROLL, M. *Baryon-baryon bound states in strongly coupled lattice QCD. Physical Review D*, v.75, n.7, p.074503, 2007.

VEIGA, P.A.F. DA; O'CARROLL, M. *Dynamical eightfold way in strongly coupled lattice QCD. Journal of Mathematical Physics*, v.49, n.4, p.042303, 2008.

WILSON, K.G. *Confinement of quarks. Physical Review D*, v. 10, n.8, p.2445, 1974.

ZOU, B.S.; RISKA, D.O.. *$s\bar{s}$ component of the proton and the strangeness magnetic moment. Physical Review Letters*, v.95, n.7, p. 072001, 2005.

Apêndice A

Polímeros e Funções de Correlação

*“Mathematics is the art of giving the same name to
different things.”*

Jules Henri Poincaré

O método de expansão em polímeros usado na Seção 1.3 é uma das técnicas mais amplamente usadas em mecânica estatística e teoria quântica de campos. A idéia é usada para se obter expansões para os valores esperados de um observável A no regime de “altas temperaturas”, onde o acoplamento entre sítios diferentes da rede é fraco. Nesta região é aceitável, escrever

$$e^{\kappa\bar{\psi}(x)\Upsilon\psi(y)} = 1 + \rho_{<xy>},$$

onde x e y são primeiros vizinhos e $\rho_{<xy>}$ é uma quantidade que cuja contribuição para as médias é pequena. É em torno deste valor pequeno, que podemos expandir o valor esperado do observável A (os demais termos da ação dada na Eq. (I.1.1.4) são locais e portanto não alteram esta análise). Com isto, o valor esperado do observável A tem forma

$$\langle A \prod_{<xy>\in\gamma} \rho_{<xy>} \rangle_{\Lambda, \kappa=0},$$

onde γ é nosso conjunto de elos. Portanto, o valor esperado $\langle AB \rangle_{\Lambda, \kappa=0}$ pode ser fatorado no produto $\langle A \rangle_{\Lambda, \kappa=0} \langle B \rangle_{\Lambda, \kappa=0}$ sempre que A e B dependerem de conjuntos disjuntos de variáveis. Isto difere do objeto de nossa expansão no texto, onde consideramos “apenas” valores esperados de $\langle 1e^{-S} \rangle_{\kappa=0}$.

Iremos descrever agora como obter as expansões dos valores esperados das funções de correlação usando o formalismo introduzido no texto. O procedimento geral segue o exposto no parágrafo acima. Vamos, agora, descrevê-lo com um pouco mais de detalhes.

Em primeiro lugar, note que o valor esperado de A pode ser escrito como

$$\langle A \rangle_{\Lambda} = \frac{d}{dz} \log \langle (1 + zA)e^{-S} \rangle_{\Lambda} \Big|_{z=0}. \quad (\text{A.1})$$

Funções de correlação truncadas podem ser expressas de maneira similar. De fato

$$\langle A; B \rangle_{\Lambda} \equiv \langle AB \rangle_{\Lambda} - \langle A \rangle_{\Lambda} \langle B \rangle_{\Lambda} = \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \log \langle (1 + z_1 A + z_2 B)e^{-S} \rangle_{\Lambda} \Big|_{z_1=z_2=0}, \quad (\text{A.2})$$

de forma que é suficiente, estudarmos a função de partição modificada

$$Z_{\Lambda}(A) = \langle Ae^{-S} \rangle_{\Lambda, \kappa=0}. \quad (\text{A.3})$$

Como explicado acima, e^{-S} tem a forma $\prod_{b \in \mathcal{B}_{\Lambda}} (1 + \rho_b)$, onde $\mathcal{B}_{\Lambda}$ é o conjunto dos elos orientados na rede. Expandindo o produto acima obtemos

$$\prod_{b \in \mathcal{B}_{\Lambda}} (1 + \rho_b) = \sum_{\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_{\Lambda}} \prod_{b \in \mathcal{B}} \rho_b.$$

Cada um dos produtos na expressão acima pode ser fatorado em fatores “conexos”, que correspondentem aos polímeros γ . Estes polímeros distinguem-se dos polímeros usados na expansão para a função de partição não-modificada. De fato, estes “novos” polímeros dependem do suporte de A , uma vez que existem contribuições não-nulas destes fatores para a média dada na Eq. (A.3), que são originárias de cadeias de elos que conectam pontos distintos de A . A expressão para a “função de partição modificada” pode ser escrita como

$$Z_{\Lambda}(A) = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in D_n} \prod_{i=1}^n \langle A^{n(\gamma_i)} \prod_{b \in \gamma_i} \rho_b \rangle_{\Lambda, \kappa=0}, \quad (\text{A.4})$$

onde D_n é o conjunto de todas as seqüências ordenadas de n polímeros disjuntos e

$$n(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{se } \gamma \text{ está conectado ao suporte de } A \\ 0 & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

É evidente que existirá pelo menos um γ no conjunto de polímeros $\mathcal{P}$ que é compatível, se definirmos dois polímeros incompatíveis γ e γ' , sempre que eles tiverem qualquer variável em comum com A . Tomando

$$Z_A(\gamma) = \langle A^{n(\gamma_i)} \prod_{b \in \gamma_i} \rho_b \rangle_{\Lambda, \kappa=0}, \quad (\text{A.5})$$

como a atividade modificada do polímero γ , reconhecemos a expressão geral dada na Eq. (A.4). Assim, pelo mesmo mecanismo usado na expansão da Seção I.1.3 temos que o logaritmo da “função de partição modificada” satisfaz

$$\ln Z_\Lambda(A) = \sum_k \frac{1}{k!} \sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in C_k} n(\gamma_1, \dots, \gamma_k) z_A(\gamma_1) \dots z_A(\gamma_k), \quad (\text{A.6})$$

onde C_n é o conjunto de todas as seqüências ordenadas de n polímeros conexos. A equação acima é análoga a expressão para o logaritmo da função de partição dada na Eq. (I.1.3.4). A convergência da série pode ser mostrada usando cotas similares às cotas dadas nas Proposições I.1.4 e I.1.3. Substituindo a Eq. (A.6) na Eq. (A.1) e na Eq. (A.2), temos as expressões desejadas.

Apêndice B

Eq. de Bethe-Salpeter e Coord.

Relativas na Rede

*“In mathematics you don’t understand things. You just
get used to them. ”*

John Von Neumann

Neste Apêndice determinaremos a transformada de Fourier da equação de Bethe-Salpeter, dada na Eq. (I.3.2.11). Nós usaremos, as variáveis relativas e as coordenadas conjugadas

$$\xi = x_2 - x_1 \mapsto p, \quad \eta = y_2 - y_1 \mapsto q, \quad \tau = y_2 - x_2 \mapsto k$$

onde devido a representação de tempos iguais temos $\xi^0 = \eta^0 = 0$. Usando notação de integral para representar somas nas coordenadas da rede, a equação de Bethe-Salpeter fica na forma

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_1, y_2) = & D_{0\alpha\beta}^{ab}(x_1, x_2, y_1, y_2) + \int \sum_{c,d,\gamma,\rho} \delta(w_2^0 - w_1^0) \delta(z_2^0 - z_1^0) D_{\alpha\gamma}^{ac}(x_1, x_2, z_1, z_2) \\ & \times K_{\gamma\rho}^{cd}(z_1, z_2, w_1, w_2) D_{0\rho\beta}^{db}(w_1, w_2, y_1, y_2) dw_1 dw_2 dz_1 dz_2 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

No volume infinito, os núcleos de D e D_0 são invariantes por translação. Logo o mesmo vale para o núcleo de K . Assim, em coordenadas relativas definimos

$$\check{M}(\xi, \eta, \tau) \equiv M(0, \xi = x_2 - x_1, \xi + \tau = y_1 - x_1, \xi + \eta + \tau = y_2 - x_1),$$

onde M denota D , D_0 ou K . Assim a Eq. (B.1) fica

$$\begin{aligned} \check{D}_{\alpha\beta}^{ab}(\xi, \eta, \tau) = \check{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\xi, \eta, \tau) + \int \sum_{c,d,\gamma,\rho} \check{D}_{\alpha\gamma}^{ac}(\xi, \xi_1, \tau_1) \check{K}_{\gamma\rho}^{cd}(\xi_1, \eta_1, \tau - \tau_1 - \tau_2 - \xi_1 - \eta_1) \\ \times \check{D}_{0\rho\beta}^{db}(\eta_1, \eta, \tau_2) \delta(\eta_1^0) \delta(\xi_1^0) d\xi_1 d\eta_1 d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

Reordenando os campos em D e D_0 , vemos que K é invariante pela transformação

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \leftrightarrow x_2, x_1, y_2, y_1$$

o que equivale em coordenadas relativas a transformação $\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau \leftrightarrow -\vec{\xi}, -\vec{\eta}, \tau + \vec{\xi} + \vec{\eta}$. Denotando por $\bar{M}$ a transformada de Fourier de M na variável τ , encontramos

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\alpha\beta}^{ab}(\xi, \eta, k) = \bar{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\xi, \eta, \tau) + \int \sum_{c,d,\gamma,\rho} e^{-ik\tau} \bar{D}_{\alpha\gamma}^{ac}(\vec{\xi}, \vec{\xi}_1, k_1) e^{ik_1\tau_1} \bar{K}_{\gamma\rho}^{cd}(\vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1, k_3) e^{ik_3(\tau - \tau_1 - \tau_2)} \\ \times \bar{D}_{0\rho\beta}^{db}(\eta_1, \eta, k_2) e^{ik_2\tau_2} d\xi_1 d\eta_1 d\tau_1 d\tau_2 d\tau dk_1 dk_2 dk_3 \end{aligned}$$

Integrando em τ, τ_1 e τ_2 , vemos o aparecimento dos fatores $\delta(k - k_3) \delta(k_3 - k_1) \delta(k_3 - k_2)$. De forma que integrando em k_1, k_2 e k_3 temos

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\alpha\beta}^{ab}(\xi, \eta, k) = \bar{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\xi, \eta, \tau) + \int \sum_{c,d,\gamma,\rho} \bar{D}_{\alpha\gamma}^{ac}(\vec{\xi}, \vec{\xi}_1, k) \bar{K}_{\gamma\rho}^{cd}(-\vec{\xi}_1, -\vec{\eta}_1, k) \\ \times \bar{D}_{0\rho\beta}^{db}(\eta_1, \eta, k) d\xi_1 d\eta_1 \end{aligned}$$

Restringindo nossa atenção a $k = (k_0, \vec{0})$, da aplicação da simetria de reflexão das coordenadas espaciais temos $\vec{\xi}, \vec{\eta} \leftrightarrow -\vec{\xi}, -\vec{\eta}$, finalmente obtemos

$$\bar{D}_{\alpha\beta}^{ab}(\xi, \eta, k) = \bar{D}_{0\alpha\beta}^{ab}(\xi, \eta, \tau) + \int \sum_{c,d,\gamma,\rho} \bar{D}_{\alpha\gamma}^{ac}(\vec{\xi}, \vec{\xi}_1, k) \bar{K}_{\gamma\rho}^{cd}(\vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1, k) \bar{D}_{\rho\beta}^{db}(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}, k) d\xi_1 d\vec{\eta}_1.$$

Na aproximação em escada, temos $K_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) = L_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) = -\aleph P_{xy} [\mathbb{I}_{\alpha\beta}^{ab} - S_{\alpha\beta}^{ab}]$, onde, $P_{xy} = \delta_{x_1x_2}\delta_{y_1y_2}\delta_{y_1x_2}$, $S_{\alpha\beta}^{ab} = \delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\beta_1\beta_2}\delta_{\beta_1\alpha_2}\delta_{a_1a_2}\delta_{b_1b_2}\delta_{b_1a_2}$, $\mathbb{I}_{\ell^2(A')}$ é a identidade no subespaço anti-simétrico de $\ell^2(A')$ (veja a Eq.I.3.2.12). Nesta aproximação a expressão acima resulta em

$$\bar{D}_l(\xi, \eta, k) = \bar{D}_0(\xi, \eta, \tau) + \aleph \bar{D}(\vec{\xi}, \vec{0}, k) \mathcal{S} \bar{D}_0(\vec{0}, \vec{\eta}, k) d\vec{\xi}_1 d\vec{\eta}_1.$$

Apêndice C

Pentaquark: Decaimentos e Derivadas

“An idea which can be used once is a trick. If it can be used more than once it becomes a method ”

George Polya and Gabor Szego

C.1 Correlações e desacoplamento de hiperplanos.

Nosso objetivo, nesse Apêndice é usar o método de desacoplamento de hiperplanos para revelar quais as composições de campos que precisam aparecer nas funções de correlação de dois e quatro pontos. Em palavras, mostraremos como escolher as funções de correlação adequadas em cada caso. Esses campos são escolhidos de forma que as funções de dois e quatro pontos tenham uma estrutura de produto, análoga a estrutura de produto mostrada no Lema I.2.1.D e no Lema I.3.2.B, o que é instrumental para se mostrar a existência de um decaimento suficientemente rápido para o núcleo de Bethe-Salpeter K e para os operadores de convolução inversa Γ^k , $k = m, b$ da Eq.(II.1.2.17). Esse resultado *sistematiza* um método para a escolha destes campos compostos, que podem ser escolhidos sem nenhuma hipótese inicial.

Consideremos inicialmente a direção temporal. Como visto na Seção I.2.1, o método de desacoplamento de hiperplanos consiste em substituir o parâmetro de hopping κ no numerador $\mathcal{N}$ e no denominador $\mathcal{D}$ da função de correlação $\langle FH \rangle$ com

campos arbitrários $F, H \in \mathcal{H}_o$ em toda a ligação conectando os pontos $u_0 + 1/2 \leq p < v_0 + 1/2$, i.e. em todo elo que atravessa um hiperplano temporal p , pelo parâmetro complexo κ_p . Nosso objetivo é determinar a forma dos campos externos F e H , para que a n -ésima derivada de $\langle F(u)H(v) \rangle$ em $\kappa_p = 0$, denotada $\langle F(u)H(v) \rangle^{(n)}$, tenha uma estrutura de produto e derivadas de ordem inferior se anulem em $\kappa_p = 0$. Para $n = 3$, temos

$$\langle F(u)H(v) \rangle^{(3)} = \sum_{\vec{w}} \langle F(u)\bar{Q}(p, \vec{w}) \rangle^{(0)} \langle Q(p+1, \vec{w})H(v) \rangle^{(0)}. \quad (\text{C.1})$$

Ao passo que para $n = 0, 1, 2$, o termo $\langle F(u)H(v) \rangle^{(n)}$ se anula, uma vez que devido ao desbalanço no número dos campos fermiônicos, ou devido as integrações nos campos de calibre, ou ainda pelas propriedades das matrizes $\Gamma^{\pm e^0}$ encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}^{(m)}}{\mathcal{D}^{(0)}} &= 0 \quad (m < 8) \\ \frac{\mathcal{N}^{(m)}}{\mathcal{D}^{(0)}} &= 0 \quad (m = 0, 1, 2, 4). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Os campos $\bar{Q}$, e Q , na Eq. (C.1), são denominados campos intermediários ($\bar{Q}$ pode ser obtido de Q pela troca de ψ 's por $\bar{\psi}$'s). A estrutura de produto da Eq. (C.1) é obtida tomando-se $F = Q$ and $H = \bar{Q}$. Em particular, escolhendo $F \equiv B$ e $H \equiv \bar{B}$, nós obtemos a chamada estrutura de produto para a função de correlação de dois pontos para bárions, da Eq. (II.1.2.13). Como visto na Ref. VEIGA E O'CARROLL [2008], esta estrutura de produto é condição suficiente para que a taxa de decaimento de Γ^b , a inversa por convolução de G^b , seja maior que a taxa de decaimento de G^b . O próximo coeficiente não nulo é encontrado para $n = 5$, onde temos

$$\langle F(u)H(v) \rangle^{(5)} = \sum_{\vec{w}_1, \vec{w}_2} \langle F(u)\bar{P}(p, \vec{w}_1)\bar{Q}(p, \vec{w}_2) \rangle^{(0)} \langle P(p+1, \vec{w}_1)Q(p+1, \vec{w}_2)H(v) \rangle^{(0)}. \quad (\text{C.3})$$

A análise da Eq. (C.3), com $F \equiv B$ e $H \equiv \bar{B}$, leva à demonstração da existência de uma diferença de ordem κ^6 entre as massas dos bárions com spin total $J = 1/2$ e $J = 3/2$.

A estrutura de produto da Eq. (C.3), implica em um decaimento melhorado para o núcleo de Bethe-Salpeter dos estados méson-bárion $K(x_1, x_2, x_3, x_4)$ que é o ingrediente chave para uma análise rigorosa do modelo além da aproximação em escada.

Para obtermos a função de quatro-pontos de méson-bárion adequada, conside-

ramos $\mathcal{N}^{(5)}/\mathcal{D}^{(0)}$, que resulta em

$$\frac{\mathcal{N}^{(5)}}{\mathcal{D}^{(0)}} = \frac{1}{5!} \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \frac{1}{\mathcal{D}^{(0)}} \int F(u)H(v) \prod_{i=1}^5 \sum_{\vec{w}} (A_i^+ + A_i^-) e^{S^+ + S^-} d\psi d\bar{\psi} d\mu(g) \quad (\text{C.4})$$

onde $A_i^\pm \equiv A_i^\pm(w)$ é dado por

$$\begin{aligned} A^+(w) &= \bar{\psi}_{a\alpha f}(w) \Gamma_{\alpha\beta}^{e^0} g(w, w + e^0)_{ab} \psi_{b\beta f}(w + e^0), \\ A^-(w) &= \bar{\psi}_{a\alpha f}(w + e^0) \Gamma_{\alpha\beta}^{-e^0} g(w + e^0, w)_{ab} \psi_{b\beta f}(w). \end{aligned}$$

Na expressão acima devido as configurações de calibre que resultam em contribuições não nulas, nós temos a duas possibilidades:

- Para pontos não-coincidentes, por exemplo $w_1 = w_2 = w_3 \neq w_4 = w_5$, temos configurações de campos de calibre constituídas de três elos superpostos com a mesma orientação em w_1 e dois elos superpostos com orientação oposta em w_4 . Da análise das integrais de calibre correspondentes a esta configuração temos

$$\int (A_1^+)^2 (A_2^+)^3 d\mu(g) = 0$$

uma vez que

$$\int (A_1^+)^2 d\mu(g) = F(\bar{\psi}, \psi) \int g_{a_1 b_1} g_{a_2 b_2} d\mu(g) = 0$$

onde $F(\bar{\psi}, \psi)$ são os campos fermiônicos em $(A_1^+)^2$. De onde,

$$\begin{aligned} \int \prod_{i=1}^5 (A_i^+ + A_i^-) d\mu(g) &= 10 \int (A_1^+ + A_1^-)^2 (A_2^+ + A_2^-)^3 d\mu(g) \\ &= 20 \int \left[A_1^+ A_1^- (A_2^+)^3 + A_1^+ A_1^- (A_2^-)^3 \right] d\mu(g). \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Na equação acima o fator 10, provém das possíveis escolhas dos 2 entre os 5 elos que serão tomados com orientação oposta. (ou de maneira equivalente dos 3 entre os 5 elos a serem tomados com a mesma orientação).

- Cinco elos superpostos sendo quatro com uma mesma orientação e um com

orientação oposta, de forma que temos a contribuição

$$\begin{aligned}
\int \prod_{i=1}^5 (A_i^+ + A_i^-) d\mu(g) &= \int \left[(A_1^+)^5 + 5 (A_1^+)^4 A_1^- + 10 (A_1^+)^3 (A_1^-)^2 \right. \\
&\quad \left. + 10 (A_1^+)^2 (A_1^-)^3 + 5 A_1^+ (A_1^-)^4 + (A_1^-)^5 \right] \\
&= \int \left[(A_1^+)^4 A_1^- + A_1^+ (A_1^-)^4 \right] d\mu(g)
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Contabilizando as contribuições acima temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{N}^{(5)}}{\mathcal{D}^{(0)}} &= \frac{1}{5!} \left(-\frac{1}{2} \right)^5 \frac{1}{\mathcal{D}^{(0)}} \int F(u) H(v) \left\{ 20 \sum \left[A_1^+ A_1^- (A_2^+)^3 + A_1^+ A_1^- (A_2^-)^3 \right] \right. \\
&\quad \left. + 5 \sum \left[(A_1^+)^4 A_1^- + (A_1^-)^4 A_1^+ \right] \right\} e^{S^+ + S^-} d\psi d\bar{\psi} d\mu(g).
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Portanto, para obtermos o valor da Eq. (C.7), precisamos da integral de calibre de 5 campos $\mathcal{I}_5$. Para tanto usamos a fórmula de Creutz (veja as Refs. CREUTZ [1983, 2001])

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n [D(J)]^n = \int d\mu(g) \exp [\text{Tr} (Jg)] \tag{C.8}$$

onde $a_n = \frac{2}{n!(n+1)!(n+2)!}$ e

$$D(J) \equiv \det J = \frac{1}{6} \epsilon_{a_1 a_2 a_3} \epsilon_{b_1 b_2 b_3} J_{a_1 b_1} J_{a_2 b_2} J_{a_3 b_3}.$$

Em palavras, para obtermos a integral de calibre desejada, tomamos, para cada fator $g_{a_i b_i}$ no argumento da integral de calibre, $\frac{\partial}{\partial J_{a_i b_i}}$ de ambos os lados da Eq. (C.8) e para $g_{a_i b_i}^{-1}$, usamos a identidade

$$g_{a_i b_i}^{-1} = \frac{1}{\det g} (\text{cof } g)_{a_i b_i} = \frac{1}{2!} \epsilon_{b_i a_1 a_2} \epsilon_{a_i b_1 b_2} g_{a_1 b_1} g_{a_2 b_2}$$

e tomamos as derivadas da Eq. (C.8) como acima. Com este processo podemos determinar diversas integrais de calibre úteis. Para dois campos de calibre temos

$$\mathcal{I}_2 = \int g_{a_1 b_1} g_{a_2 b_2}^{-1} d\mu(g) = \frac{1}{3} \delta_{a_1 b_2} \delta_{a_2 b_1}, \tag{C.9}$$

Para três campos de calibre, temos

$$\mathcal{I}_3 \equiv \int g_{a_1 b_1} g_{a_2 b_2} g_{a_3 b_3} d\mu(g) = \frac{1}{6} \epsilon_{123}^a \epsilon_{123}, \quad (\text{C.10})$$

onde $\epsilon_{ijk}^a = \epsilon_{a_i a_j a_k}$. Para quatro campos de calibre, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_4 &\equiv \int g_{a_1 b_1} g_{a_2 b_2}^{-1} g_{a_3 b_3} g_{a_4 b_4}^{-1} d\mu(g) \\ &= \frac{1}{8} [\Delta_{22}^1 \Delta_{44}^3 + \Delta_{44}^1 \Delta_{22}^3] - \frac{1}{24} [\Delta_{42}^1 \Delta_{24}^3 + \Delta_{42}^1 \Delta_{24}^3], \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

onde $\Delta_{ij}^k = \delta_{a_i b_k} \delta_{a_k b_j}$. E com as notações acima, temos $\mathcal{I}_5$ a integral de 5 campos de calibre

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_5 &\equiv \int \prod_{i=1}^4 g_{a_i b_i} g_{a_5 b_5}^{-1} d\mu(g) \\ &= \frac{1}{3!4!} [7 (\epsilon_{123}^a \epsilon_{123}^b \Delta_{44}^5 + \epsilon_{124}^a \epsilon_{124}^b \Delta_{33}^5 + \epsilon_{134}^a \epsilon_{134}^b \Delta_{22}^5 + \epsilon_{234}^a \epsilon_{234}^b \Delta_{11}^5) \\ &\quad - \epsilon_{342}^a \epsilon_{341}^b \Delta_{12}^5 - \epsilon_{341}^a \epsilon_{342}^b \Delta_{21}^5 - \epsilon_{124}^a \epsilon_{123}^b \Delta_{34}^5 - \epsilon_{123}^a \epsilon_{124}^b \Delta_{43}^5 \\ &\quad - \epsilon_{243}^a \epsilon_{241}^b \Delta_{13}^5 - \epsilon_{241}^a \epsilon_{243}^b \Delta_{31}^5 - \epsilon_{312}^a \epsilon_{314}^b \Delta_{42}^5 - \epsilon_{314}^a \epsilon_{312}^b \Delta_{24}^5 \\ &\quad - \epsilon_{324}^a \epsilon_{321}^b \Delta_{14}^5 - \epsilon_{321}^a \epsilon_{324}^b \Delta_{41}^5 - \epsilon_{142}^a \epsilon_{143}^b \Delta_{32}^5 - \epsilon_{143}^a \epsilon_{142}^b \Delta_{23}^5]]. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Da Eq. (C.12) e rearranjando os ψ 's e $\bar{\psi}$ nos fatores A_i^+ and A_i^- na Eq. (C.7), temos que

$$\frac{\mathcal{N}^{(5)}}{\mathcal{D}^{(0)}} = \sum_{\vec{w}_1 \neq \vec{w}_2} \mathfrak{A} - \frac{5}{5!} \frac{2}{144} \sum_{\vec{w}_1} (14\mathfrak{B} + 6\mathfrak{C} + 6\mathfrak{D}), \quad (\text{C.13})$$

onde

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \left\langle F(u) \bar{M}_{\vec{\beta}_m \vec{g}_1}(w_1) \bar{B}_{\vec{\beta}_b^{\ell} \vec{g}_2}(w_2) \right\rangle^{(0)} \left\langle M_{\vec{\beta}_m \vec{g}_1}(w_1 + e^0) B_{\vec{\beta}_b^{\ell} \vec{g}_2}(w_2 + e^0) H(v) \right\rangle^{(0)} \\ &\quad + \left\langle F(u) \bar{M}_{\vec{\beta}_m \vec{g}_1}(w_1) B_{\vec{\beta}_b^u \vec{g}_2}(w_2) \right\rangle^{(0)} \left\langle M_{\vec{\beta}_m \vec{g}_1}(w_1 + e^0) \bar{B}_{\vec{\beta}_b^u \vec{g}_2}(w_2 + e^0) H(v) \right\rangle^{(0)}, \\ \mathfrak{B} &= \left[\left\langle F(u) \bar{M}_{\vec{\beta}_m \vec{g}_1}(w_1) \bar{B}_{\vec{\beta}_b^{\ell} \vec{g}_2}(w_2) \right\rangle^{(0)} \left\langle M_{\vec{\beta}_m \vec{g}_1}(w_1 + e^0) B_{\vec{\beta}_b^{\ell} \vec{g}_2}(w_2 + e^0) H(v) \right\rangle^{(0)} \right. \\ &\quad \left. - \left\langle F(u) \bar{M}_{\vec{\beta}_m \vec{g}_1}(w_1) B_{\vec{\beta}_b^u \vec{g}_2}(w_2) \right\rangle^{(0)} \left\langle M_{\vec{\beta}_m \vec{g}_1}(w_1 + e^0) \bar{B}_{\vec{\beta}_b^u \vec{g}_2}(w_2 + e^0) H(v) \right\rangle^{(0)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C} &= \left[\left\langle F(u) \bar{\psi}_{a_1 \alpha_1^\ell f_1} \psi_{a_1 \alpha_5^u f_5} \epsilon_{a_3 a_4 a_2} \bar{\psi}_{a_3 \alpha_3^\ell f_3} \bar{\psi}_{a_4 \alpha_4^\ell f_4} \bar{\psi}_{a_2 \alpha_2^\ell f_2}(w_1) \right\rangle^{(0)} \right. \\
&\quad \times \left. \left\langle \bar{\psi}_{b_2 \alpha_2^\ell f_2} \psi_{b_2 \alpha_5^u f_5} \epsilon_{b_3 b_4 b_1} \bar{\psi}_{b_3 \alpha_3^\ell f_3} \bar{\psi}_{b_4 \alpha_4^\ell f_4} \bar{\psi}_{b_1 \alpha_1^\ell f_1}(w_1 + e^0) H(v) \right\rangle^{(0)} \right] \\
\mathfrak{D} &= \left[\left\langle F(u) \bar{\psi}_{b_2 \alpha_5^\ell f_5} \psi_{b_2 \alpha_2^u f_2} \epsilon_{b_3 b_4 b_1} \bar{\psi}_{b_3 \alpha_3^u f_3} \bar{\psi}_{b_4 \alpha_4^u f_4} \bar{\psi}_{b_1 \alpha_2^u f_2}(w_1) \right\rangle^{(0)} \right. \\
&\quad \times \left. \left\langle \bar{\psi}_{a_1 \alpha_5^\ell f_5} \psi_{a_1 \alpha_1^u f_1} \epsilon_{a_3 a_4 a_2} \bar{\psi}_{a_3 \alpha_3^u f_3} \bar{\psi}_{a_4 \alpha_4^u f_4} \bar{\psi}_{a_2 \alpha_2^u f_2}(w_1 + e^0) H(v) \right\rangle^{(0)} \right].
\end{aligned}$$

A estrutura de produto da Eq. (C.13) é obtida tomando $F \equiv MB$ e $H \equiv \bar{M}\bar{B}$ (onde suprimimos os todos os índices) e usamos o desbalanço do número de $\bar{\psi}$'s e ψ 's nos valores esperados que contém campos $\bar{M}B$ para chegar na função de quatro-pontos de méson-bárion. De maneira similar, tomando $F \equiv M\bar{B}$ e $H \equiv \bar{M}B$, temos a função de quatro-pontos de méson-anti-bárion.

Desta forma, os campos compostos tomados na definição das funções de dois e quatro pontos são escolhidos sistematicamente, sem nenhum tipo de escolha arbitrária. As combinações lineares destes campos, que resultam nos campos Λ da Eq. (II.1.3.1), são obtidas pela restrição da nossa análise a um dado setor de isospin. É suficiente considerarmos os setores $I = I_3 = \frac{1}{2}$, $I = I_3 = \frac{3}{2}$ e $I = I_3 = \frac{5}{2}$. Os demais casos podem ser obtidos dos casos acima pela invariância da isospin total das funções de correlação e da aplicação de operadores de levantamento e abaixamento de isospin.

C.2 Propriedades de Decaimento do Núcleo de Bethe-Salpeter

Aqui, nós apresentaremos as propriedades de decaimento do núcleo de Bethe-Salpeter. Consideramos a função de quatro-pontos subtraída, para os setores de isospin total $I = 1/2, 3/2, 5/2$, dada por

$$D^I(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathcal{G}_{MB, MB}^I(x_1, x_2, x_3, x_4) - \mathcal{G}_{MB, B}^I(x_1, x_2, y_1) \Gamma_b(y_1, y_2) \mathcal{G}_{MB, B}^I(y_2, x_3, x_4) \quad (\text{C.14})$$

onde Γ^b é a inversa por convolução da função de correlação de dois-pontos para bárions. Como mencionado na Seção II.1.1, esta função de quatro pontos subtraída fornece um decaimento temporal mais rápido, uma vez que nela as contribuições de um bárion são eliminadas, como veremos a seguir.

Nesse contexto, o operador D_0 , obtido pela “aplicação incorreta” do teorema

de Wick aos campos compostos de mésons e bárions, é dado por

$$D_0^I = \mathcal{G}_{M,M}^I(x_1, x_3) \mathcal{G}_{B,B}^I(x_2, x_4). \quad (\text{C.15})$$

Quando restringimos nossa atenção ao setor de isospin total $5/2$, $\mathcal{G}_{MB,B}^{5/2}$, a parte subtraída da função de quatro-pontos na Eq. (C.14), se anula. Portanto, para este setor de isospin, a análise segue a do caso anterior.

Nossa estratégia para obter o decaimento espacial de $K = D_0^{-1} - D^{-1}$ é análoga ao procedimento realizado na Seção I.3.2. A idéia é fixarmos uma direção espacial, e fixarmos a ordenação dos pontos da rede x_1, x_2, x_3, x_4 . Como no caso do modelo de Quatro-Férmions, temos um total de 24 regiões a serem consideradas. No entanto, aqui, ao contrário do que acontece no modelo de Quatro-Férmions, os campos em cada ponto da Eq. (C.14) tem forma distinta e portanto as simetrias usadas na Seção II.3.2 não se aplicam.

Restringindo nossa análise a um setor particular de isospin total, nossa estratégia consiste em determinar as derivadas da K em uma variáveis de hiperplano espacial $\kappa_p = 0$. Vamos considerar inicialmente $K^{(0)}$. Se o hiperplano separa os pontos x_1 e x_3 dos pontos x_2 e x_4 , temos $D_0^{(0)} = D^{(0)}$ o que resulta em $K^{(0)} = 0$. Nos demais casos a igualdade $K^{(0)} = 0$ segue da simetria de paridade ou por desbalanço de férmions. Para $K^{(1)}$, a integral de calibre implica em $K^{(1)} = - \left(D_0^{(0)}\right)^{-1} D_0^{(1)} \left(D_0^{(0)}\right)^{-1} + \left(D^{(0)}\right)^{-1} D^{(1)} \left(D^{(0)}\right)^{-1} = 0$.

Combinando o resultado acima com o decaimento temporal da Seção anterior, temos

$$K(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} \kappa^5 |x_3^0 - x_1^0| + |\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_3 - \vec{x}_4| + |\vec{x}_2 - \vec{x}_1| + |\vec{x}_4 - \vec{x}_3|, & |\tau_0| < 2, \\ \kappa^5 \kappa^7 (|x_3^0 - x_1^0| - 1) + |\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_3 - \vec{x}_4| + |\vec{x}_2 - \vec{x}_1| + |\vec{x}_4 - \vec{x}_3|, & |\tau_0| \geq 2. \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

C.3 Aproximação em Escada

Mostraremos, agora, como determinar a aproximação em escada L para o núcleo de Bethe-Salpeter K . O ingrediente fundamental para isto é o decaimento de K dado na Eq. (C.16). Fundamentalmente, a idéia é calcularmos as contribuições não-nulas de ordem mais baixa para

$$\hat{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0) = \sum_{\tau} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau) e^{-ik^0 \tau^0}, \quad (\text{C.17})$$

a transformada de Fourier de $K(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau)$ em τ , com $k = (k_0, \vec{0})$. Por um lado, o decaimento de K fornece uma estimativa da contribuição de $K(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau)$ para a Eq. (C.17). Por outro, vemos que o fator dependente da energia e^{-ik^0} , pode ser reescrito em termos das massas dos mésons ($m_m(\kappa) = -2 \ln \kappa - (3/2)\kappa^2 + O(\kappa^4)$) e bárions ($m_b = -3 \ln \kappa + O(\kappa^3)$), de forma que obtemos $e^{-ik^0} = e^{m_m+m_b-\epsilon} = e^{-[\epsilon+(3/2)\kappa^2]}/\kappa^5$. Como este fator depende de κ^{-5} precisamos verificar a existência de possíveis compensações no produto $K(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau)e^{-ik^0\tau_0}$, que resultarão na ordem dominante de $\hat{K}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)$.

Das considerações das seções anteriores, vemos que a menor ordem possível para K é κ^2 e, portanto, são contribuições desta ordem em que estamos interessados. Nos parágrafos seguintes, vamos então analisar cada uma das possíveis contribuições.

Para contribuições de distância temporal zero, temos $\tau^0 = 0 \Rightarrow x_3^0 = x_2^0$, de onde $e^{-ik^0\tau^0} = 1$. Logo do decaimento de K , dado na Eq. (C.16), precisamos considerar o caso

$$|\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_3 - \vec{x}_4| + |\vec{x}_2 - \vec{x}_1| + |\vec{x}_4 - \vec{x}_3| = 2.$$

Sejam $r_1 \equiv |\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_3 - \vec{x}_4|$, $r_2 \equiv |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$ e $r_3 \equiv |\vec{x}_4 - \vec{x}_3|$ e, portanto, precisamos considerar os casos $(r_1, r_2, r_3) = (2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$.

Para $(r_1, r_2, r_3) = (2, 0, 0)$, temos $r_2 = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1| = 0 \Rightarrow x_2^i = x_1^i$ e $|\vec{x}_4 - \vec{x}_3| = 0 \Rightarrow x_4^i = x_3^i$, com $(i = 1, 2, 3)$. Logo, $r_1 = 2|\vec{x}_1 - \vec{x}_3| = 2$, de onde temos

$$\sum_i |x_1 - x_3| = 1.$$

Em outras palavras, os clusters $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ e $\vec{x}_3 = \vec{x}_4$ são primeiros vizinhos espaciais. Da invariância translacional na rede, as contribuições para esse caso são dada por vetores da forma $(0, 0, \pm e^i, \pm e^i)$. Estas contribuições dão origem ao potencial de troca $q\bar{q}$.

Para $(r_1, r_2, r_3) = (0, 2, 0)$ e $(r_1, r_2, r_3) = (0, 0, 2)$, a análise é similar. Considerando o caso $(r_1, r_2, r_3) = (0, 2, 0)$ e usando novamente a invariância translacional, temos $\vec{x}_1 = 0$, $r_2 = |\vec{x}_2| = 2$ e $r_3 = |\vec{x}_4 - \vec{x}_3| = 0 \Rightarrow x_4^i = x_3^i$, com $(i = 1, 2, 3)$. Logo

$$r_1 = |\vec{x}_2 - 2\vec{x}_3| = 0.$$

Com isso, $\vec{x}_2 = \pm e^i + \pm e^j$, com $i \neq j$, ou $\vec{x}_2 = \pm 2e^i$. No primeiro caso, temos $2\vec{x}_3 = \pm e^i + \pm e^j$, $i \neq j$, de forma que $\vec{x}_3$ não pertence à rede. Logo, podemos descartar esta contribuição. No segundo caso, temos $\vec{x}_3 = \pm e^i$, e as contribuições são do tipo $(\vec{0}, \pm 2e^i, \pm e^i, \pm e^i)$, $(i = 1, 2, 3)$. A configuração dos campos correspondente a este estado é $M(0)[\leftarrow 1, \rightarrow 1]MB(\epsilon e^i)[\leftarrow 3, \rightarrow 0]B(2\epsilon e^i)$, onde $F(0)[\leftarrow n, \rightarrow m]H(\epsilon e^\mu)$ denota a configuração com n ligações de calibre conectando os pontos 0 e ϵe^μ e

outras m ligações conectando os pontos ϵe^μ e 0. Assim, vemos que esta contribuição é subdominante, i.e. $O(\kappa^5)$. Mais ainda, para as contribuições de D_0 , vemos

$$D_0(0, 2\epsilon e^i, \epsilon e^i, \epsilon e^i) = \langle M(0)\bar{M}(\epsilon e^i) \rangle \langle B(2\epsilon e^i)\bar{B}(\epsilon e^i) \rangle = O(\kappa^2)O(\kappa^3) = O(\kappa^5),$$

que também é de ordem subdominante.

Para $(r_1, r_2, r_3) = (1, 1, 0)$ e tomando $\vec{x}_1 = 0$ (invariância translacional), temos $r_2 = |\vec{x}_2| = 1 \Rightarrow \vec{x}_2 = \epsilon e^i$, $r_3 = |\vec{x}_4 - \vec{x}_3| = 0 \Rightarrow x_4^i = x_3^i$, com $(i = 1, 2, 3)$ e $\epsilon = \pm 1$. Logo, $r_1 = |\vec{x}_2 - 2\vec{x}_3| \Rightarrow 2\vec{x}_3 = \vec{x}_2 - \epsilon' e^j = \epsilon e^i - \epsilon' e^j$, $\epsilon' = \pm 1$. Tomando $i \neq j$, $\vec{x}_3$ não pertence à rede, de forma que nos resta o caso $i = j$. Se $\epsilon = \epsilon'$, temos $\vec{x}_3 = 0$ e para $\epsilon = -\epsilon'$, temos $\vec{x}_3 = \vec{x}_2 = \epsilon e^i$. Assim, as contribuições são do tipo $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, \epsilon e^i, 0, 0)$ e $(0, \epsilon e^i, \epsilon e^i, \epsilon e^i)$. As configurações dos campos correspondem a $MB\bar{M}(0)[\leftarrow 0, \rightarrow 3]\bar{B}(\epsilon e^i)$ e a $\bar{M}(0)[\leftarrow 1, \rightarrow 1]MB\bar{B}(\epsilon e^i)$, respectivamente. A primeira contribuição é de ordem κ^3 e portanto subdominante. A segunda contribuição é $O(\kappa^2)$, mas se cancela com as contribuições de D_0 . O caso $(r_1, r_2, r_3) = (1, 0, 1)$, pode ser tratado de maneira similar.

Para $(r_1, r_2, r_3) = (0, 1, 1)$ e tomando $\vec{x}_1 = 0$, temos $r_2 = |\vec{x}_2| = 1 \Rightarrow \vec{x}_2 = \epsilon e^i$ e $r_3 = |\vec{x}_3 - \vec{x}_4| = 1 \Rightarrow x_3 = \vec{x}_4 + \epsilon' e^j$. Com isso, temos $r_1 = |\vec{x}_2 - (\vec{x}_3 + \vec{x}_4)| = 0$ e, portanto, $\vec{x}_2 = \vec{x}_3 + \vec{x}_4$. Logo, temos $2\vec{x}_4 = \epsilon e^i - \epsilon' e^j$. Novamente para $i \neq j$, $\vec{x}_4$ não pertence à rede. Assim, restam as contribuições de $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, \epsilon e^i, \epsilon e^i, 0)$, $\epsilon = \epsilon'$, e $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, \epsilon e^i, 0, \epsilon e^i)$, $\epsilon = -\epsilon'$. Como nos casos acima, estas contribuições são subdominantes.

Vamos considerar agora as contribuições de distância temporal 1. Neste caso temos $|\tau^0| = 1 \Rightarrow x_3^0 - x_2^0 = 1$ e $e^{-[\epsilon + (3/2)\kappa^2]}/\kappa^5$. Logo, neste caso precisamos considerar contribuições de mais alta ordem, uma vez que graças ao fator e^{ik_0} as contribuições $O(\kappa^7)$ efetivamente contribuem para a ordem $O(\kappa^5)$ na transformada de Fourier de K . Por este motivo, precisamos contabilizar mais termos nas séries de Neumann de D e D_0 . Nas séries de Neumann, os termos relevantes são $\delta D^{(7)}$, dado por $-\sum_{\vec{u}_2} \delta D^{(y_1)} \delta D^{(y_2)}$ e $\sum_{\vec{u}_3} \delta D^{(y_1)} \delta D^{(y_2)} \delta D^{(y_3)}$, onde suprimimos os fatores $(D^{(0)})^{-1}$ e denotamos $\vec{u}_n = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, o vetor de n componentes, tais que $\sum_{i=1}^n y_i = 7$. Os mesmos termos na série para D_0^{-1} devem ser considerados. As contribuições relevantes para nossa análise são as mesmas do caso de distância temporal zero, uma vez que do decaimento de K , em coordenadas relativas, temos

$$|K| \leq \frac{1}{\kappa^5} e^{-[\epsilon + (3/2)\kappa^2]} \kappa^{5|\tau^0|} \kappa^{2\vec{\tau} + \vec{\xi} + \vec{\eta} + |\vec{\xi}| + |\vec{\eta}|}.$$

Portanto, temos de considerar novamente $|2\vec{\tau} + \vec{\xi} + \vec{\eta}| + |\vec{\xi}| + |\vec{\eta}| = 2$. Assim, mais

uma vez consideramos os casos $(r_1, r_2, r_3) = (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$. A representação em coordenadas da rede de cada um destes casos foi obtida acima, no caso de distância temporal 0. Agora, com distância temporal um vamos analisar a contribuição de cada um deles.

Para $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, e^0 + \epsilon e^i, e^0 + \epsilon e^i)$, a configuração correspondente é $MB(0)[\leftarrow 4, \rightarrow 1](e^0)[\leftarrow 0, \rightarrow 3]\bar{M}\bar{B}(e^0 + \epsilon e^i)$. À primeira vista, esta configuração resulta em uma contribuição efetiva de $O(\kappa^3)$. No entanto, graças aos produtos das matrizes Γ (propriedade do “vai e vem”), a contribuição é zero. Por outro lado, $D_0 = (0, 0, e^0 + \epsilon e^i, e^0 + \epsilon e^i) = O(\kappa^{10})$.

O caso $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2\epsilon e^i, e^0 + \epsilon e^i, e^0 + \epsilon e^i)$ corresponde à configuração $M(0)[\leftarrow 1, \rightarrow 1](\epsilon e^i)[\leftarrow 3, \rightarrow 0]B(2\epsilon e^i)(\epsilon e^i)[\leftarrow 1, \rightarrow 5]\bar{M}\bar{B}(e^0 + \epsilon e^i)$ que é de $O(\kappa^{12})$ e portanto pode ser desprezada. Note também que $D_0(0, 2\epsilon e^i, e^0 + \epsilon e^i, e^0 + \epsilon e^i) = O(\kappa^{10})$.

O caso $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, e^0 - \epsilon e^i, e^0 + \epsilon e^i)$, corresponde à configuração $\bar{M}(e^0 - \epsilon e^i)[\leftarrow 1, \rightarrow 1](e^0)[\leftarrow 0, \rightarrow 3]\bar{B}(e^0 + \epsilon e^i)(e^0)[\leftarrow 1, \rightarrow 5]MB(0)$. A contribuição correspondente é de ordem κ^{10} , enquanto para D_0 temos $D_0(0, 0, e^0 - \epsilon e^i, e^0 + \epsilon e^i) = O(\kappa^{10})$.

Os casos $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, \epsilon e^i, e^0, e^0), (0, \epsilon e^i, e^0 + \epsilon e^i, e^0 + \epsilon e^i)$ correspondem respectivamente a $\bar{M}\bar{B}(e^0)[\leftarrow 1, \rightarrow 4]M(0)[\leftarrow 3, \rightarrow 0]B(\epsilon e^i)$ e $M(0)[\leftarrow 1, \rightarrow 1]B(\epsilon e^i)[\leftarrow 1, \rightarrow 4]\bar{M}\bar{B}(e^0 + \epsilon e^i)$. A primeira contribuição é de ordem κ^8 portanto, subdominante. A segunda contribuição é $O(\kappa^7)$, mas no entanto ela é cancelada pelos demais termos na série de Neumann de D^{-1} . Por outro lado, $D_0(0, \epsilon e^i, e^0, e^0) = O(\kappa^8)$.

O caso $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, e^0, e^0 + \epsilon e^i)$, corresponde a $MB(0)[\leftarrow 1, \rightarrow 4]\bar{M}(e^0)[\leftarrow 0, \rightarrow 3]\bar{B}(e^0 + \epsilon e^i)$, que é de ordem κ^8 e pode ser desprezado. Por outro lado, $D_0(0, 0, e^0, e^0 + \epsilon e^i) = O(\kappa^2)O(\kappa^6) = O(\kappa^8)$. A contribuição de $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, e^0 + \epsilon e^i, e^0)$, corresponde à configuração $MB(0)[\leftarrow 1, \rightarrow 4]\bar{B}(e^0)[\leftarrow 1, \rightarrow 1]\bar{M}(e^0 + \epsilon e^i)$, que é de ordem $O(\kappa^7)$ e também é cancelada por termos da série de Neumann.

Os casos $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, \epsilon e^i, e^0, e^0 + \epsilon e^i)$ e $(0, \epsilon e^i, e^0 + \epsilon e^i, e^0)$ correspondem, respectivamente, a $M(0)[\leftarrow 1, \rightarrow 1]\bar{M}(e^0)[\leftarrow 1, \rightarrow 1]\bar{B}(e^0 + \epsilon e^i)[\leftarrow 0, \rightarrow 3]B(\epsilon e^i)$ e $\bar{M}(e^0)[\leftarrow 1, \rightarrow 1]M(0)[\leftarrow 1, \rightarrow 1]B(\epsilon e^i)[\leftarrow 0, \rightarrow 3]\bar{B}(e^0 + \epsilon e^i)$. A primeira contribuição é de $O(\kappa^7)$ e se cancela com os termos restantes da série de Neumann. A contribuição $(0, \epsilon e^i, e^0 + \epsilon e^i, e^0)$ é desprezível por ser de ordem κ^8 . Mais ainda, temos $D_0(0, \epsilon e^i, e^0 + \epsilon e^i, e^0) = O(\kappa^{10})$.

Para distâncias temporais maiores ou iguais a dois, o decaimento melhorado de K , passa a realizar o seu trabalho e temos

$$|K| \leq \kappa^5 \kappa^{7(|\tau^0|-1)} e^{\chi|\tau^0|} \kappa^{|2\vec{\tau}+\vec{\xi}+\vec{\eta}|+|\vec{\xi}|+|\vec{\eta}|} = \kappa^2 e^{-2[\epsilon+(3/2)\kappa^2]} \kappa^{|2\vec{\tau}+\vec{\xi}+\vec{\eta}|+|\vec{\xi}|+|\vec{\eta}|},$$

de onde devemos considerar o caso $|2\vec{\tau} + \vec{\xi} + \vec{\eta}| + |\vec{\xi}| + |\vec{\eta}| = 0$. Logo a única contribuição possível vem de $(r_1, r_2, r_3) = (0, 0, 0)$, de onde temos $\vec{x}_1 = \vec{x}_2 = \vec{x}_3 = \vec{x}_4$. Logo, a única contribuição possível neste caso é $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 2e^0, 2e^0)$, que corresponde à configuração $MB(0)[\leftarrow 1, \rightarrow 4](e^0)[\leftarrow 2, \rightarrow 5]\bar{M}\bar{B}(2e^0)$, a qual resulta em zero graças a propriedades da matriz $\Gamma^{\pm e^0}$ (a propriedade do “vai e vem”).

Para $|\tau^0| > 2$, temos

$$|K| \leq \kappa^5 \kappa^{7(|\tau^0|-1)} e^{\chi|\tau^0|} = \kappa^{2(|\tau^0|-1)} < \kappa^2,$$

e portanto apenas contribuições subdominantes.

No Apêndice seguinte, nós calcularemos explicitamente estas contribuições.

Apêndice D

Pentaquark: Análise dos Potenciais

“The Feynman Problem-Solving Algorithm: (1) write down the problem; (2) think very hard; (3) write down the answer.”

Murray Gell-Mann

Neste Apêndice, nós obtemos a expressão para os potenciais envolvidos na aproximação em escada usados na Parte II. Em primeiro lugar, lembremos que esses potenciais são dados por matrizes 32×32 simétricas, cujos elementos dados por

$$V_{ij, \vec{\beta}_m, \vec{\beta}_b}^{\vec{\alpha}_m, \vec{\alpha}_b} = \sum_{\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}, \vec{k}} F_i^{\vec{\alpha}_m, \vec{k}, \vec{\alpha}_b, \vec{f}} X_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b \vec{g}} F_i^{\vec{\beta}_m, \vec{h}, \vec{\beta}_b, \vec{g}} \quad (\text{D.1})$$

são ordenados como na Seção II.1.3. Na expressão acima o núcleo X denota W da Eq.(II.1.3.14), no caso do potencial de troca (distância espacial 1), denota C da Eq.(II.1.3.12) para o caso de pontos coincidentes, e T para as contribuições de distância temporal 1. Os F_i ’s são os coeficientes dos produtos de combinações lineares de Clebesh-Gordan dos Campos dados na Eq. (II.1.3.1). Fórmulas explícitas para os coeficientes F_i são dadas nas Eq. (II.1.3.9) a Eq. (II.1.3.11).

Como mostrado na Seção II.1.3, a matriz V acima pode ser decomposta em blocos V_{ij} , de forma que temos

V_{11}	V_{12}	V_{13}
V_{21}	V_{22}	V_{23}
V_{31}	V_{32}	V_{33}

Nos blocos fora da diagonal, temos duas matrizes retangulares 8×16 , $V_{12} = V_{21}^T$ e $V_{13} = V_{31}^T$, e uma matriz quadrada 8×8 , $V_{23} = V_{32}^T$. Já os blocos na diagonal consistem em 3 matrizes quadradas simétricas, sendo que V_{11} é uma matriz simétrica 16×16 , ao passo que V_{22} e V_{33} são matrizes simétricas 8×8 . Cada uma dessas matrizes V_{ij} pode ser vista como decomposta em sub-matrizes $V_{ij \vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}$, resultando em

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} V_{ij(++)}^{(++)} & V_{ij(+-)}^{(++)} & V_{ij(-+)}^{(++)} & V_{ij(--)}^{(++)} \\ V_{ij(++)}^{(+)} & V_{ij(+-)}^{(+)} & V_{ij(-+)}^{(+)} & V_{ij(--)}^{(+)} \\ V_{ij(++)}^{(-)} & V_{ij(+-)}^{(-)} & V_{ij(-+)}^{(-)} & V_{ij(--)}^{(-)} \\ V_{ij(++)}^{(---)} & V_{ij(+-)}^{(---)} & V_{ij(-+)}^{(---)} & V_{ij(--)}^{(---)} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

Vamos analisar a estrutura de cada uma das sub-matrizes $V_{ij \vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}$. As sub-matrizes $V_{11 \vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}$ são matrizes simétricas 4×4 , tais que

$$V_{11 \vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m} = \begin{pmatrix} \bar{V}_{(++++)}^{(++++)} & \bar{V}_{(++++)}^{(+++-)} & \bar{V}_{(++++)}^{(+-+-)} & \bar{V}_{(++++)}^{(----)} \\ \bar{V}_{(++++)}^{(+++-)} & \bar{V}_{(++++)}^{(++--)} & \bar{V}_{(++++)}^{(+-)} & \bar{V}_{(++++)}^{(---)} \\ \bar{V}_{(++++)}^{(+-+-)} & \bar{V}_{(++++)}^{(+-)} & \bar{V}_{(++++)}^{(---)} & \bar{V}_{(++++)}^{(---)} \\ \bar{V}_{(++++)}^{(----)} & \bar{V}_{(++++)}^{(---)} & \bar{V}_{(++++)}^{(---)} & \bar{V}_{(++++)}^{(---)} \end{pmatrix},$$

onde $\bar{V}_{\vec{\beta}_b}^{\vec{\alpha}_b} = V_{11 \vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}$. As sub-matrizes $V_{22 \vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}$ e $V_{33 \vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}$ são matrizes simétricas 2×2 , da forma

$$V_{22 \vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m} = \begin{pmatrix} \tilde{V}_{+-+}^{+-+} & \tilde{V}_{+-+}^{+-+} \\ \tilde{V}_{+-+}^{+-+} & \tilde{V}_{+-+}^{+-+} \end{pmatrix},$$

onde $\tilde{V}_{\vec{\beta}_b}^{\vec{\alpha}_b} = V_{22\vec{\beta}_m\vec{\beta}_b}^{\vec{\alpha}_m\vec{\alpha}_b}$. Um resultado análogo vale para $V_{33\vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}$. Os elementos dos blocos fora da diagonal (V_{12}, V_{13}, V_{23} , etc...) podem ser ordenados naturalmente usando o mesmo esquema usado para os blocos na diagonal e a ordem global imposta pela Eq. (D.2). Assim, para a sub-matriz $V_{12\vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}$, vemos que

$$V_{12\vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m} = \begin{pmatrix} V_{12\vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}(+++)&V_{12\vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}(++-)\\ V_{12\vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}(++-)&V_{12\vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}(+-+)\\ V_{12\vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}(+-+)&V_{12\vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}(---)\\ V_{12\vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}(---)&V_{12\vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}(--+)& \end{pmatrix},$$

para V_{21} o fato de V ser simétrica leva ao resultado apropriado. Claramente, um resultado análogo vale para a sub-matriz $V_{13}(\vec{\alpha}_m, \vec{\beta}_m)$. A matriz $V_{23\vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}$ (e portanto a matriz $V_{32\vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}$) podem ser ordenadas de maneira análoga a matriz $V_{22\vec{\beta}_m}^{\vec{\alpha}_m}$.

No que se segue, iremos desenvolver cada um dos casos $X = W, C, T$. Em primeiro momento, nós tomaremos X na Eq. (D.1) como sendo C , dado na Eq. (II.1.3.8), de forma que temos o caso de pontos coincidentes. Para esse caso, daremos explicitamente a matrix

$$\mathfrak{C} = \sum_{\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}, \vec{k}} F_i^{\vec{\alpha}_m, \vec{k}, \vec{\alpha}_b, \vec{f}} C_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b \vec{g}} F_i^{\vec{\beta}_m, \vec{h}, \vec{\beta}_b, \vec{g}},$$

seus autovalores, seus autovetores. Como visto, o fato de $\mathfrak{C}$ ter autovalores não nulos e, portanto, ser inversível em algum subespaço apropriado de $\ell^2(A)$ é fundamental para nosso método de detecção de pentaquarks. Mais ainda, mostraremos a relação de dependência linear usada na Seção I.1.3. Após encerrarmos a análise do caso de pontos coincidentes, tomamos X na Eq. (D.1) como sendo T , o que corresponde ao caso de distância temporal 1. Para esse caso, após determinarmos uma expressão compacta para o núcleo T , mostraremos que a matriz

$$\mathfrak{T} = \sum_{\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}, \vec{k}} F_i^{\vec{\alpha}_m, \vec{k}, \vec{\alpha}_b, \vec{f}} T_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b \vec{g}} F_i^{\vec{\beta}_m, \vec{h}, \vec{\beta}_b, \vec{g}}$$

coincide com a matriz $\mathfrak{C}$. Com isso a interação dominante entre mésons e bárions é a dada pela troca de $q\bar{q}$, dada pela contribuição de distância espacial 1. Tomando X

como W na Eq. (D.1), tratamos este potencial de troca. Para isto, fornecemos a matriz

$$\mathfrak{W} = \sum_{\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}, \vec{k}} F_i^{\vec{\alpha}_m, \vec{k}, \vec{\alpha}_b, \vec{f}} W_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b \vec{g}} F_i^{\vec{\beta}_m, \vec{h}, \vec{\beta}_b, \vec{g}},$$

e damos seus autovalores e autovetores correspondentes. Para encerrar, escrevemos as matrizes $\mathfrak{C}, \mathfrak{W}$ para o caso $I = \frac{3}{2}$ e $I = \frac{5}{2}$.

D.1 Potenciais Dependentes da Energia

D.1.1 Pontos Coincidentes

Para analisarmos o potencial de pontos coincidentes $\mathfrak{C}$, devemos estudar o elemento de matrix $C_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b \vec{g}}$ com

$$\begin{aligned} C_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b \vec{g}} &= \left\langle M_{\vec{\alpha}_m \vec{k}}^u B_{\vec{\alpha}_b \vec{f}}^u \bar{M}_{\vec{\beta}_m \vec{h}}^u \bar{B}_{\vec{\beta}_b \vec{g}}^u(0) \right\rangle^{(0)} \\ &= \epsilon_{\vec{c}} \epsilon_{\vec{d}} \left\langle \psi_{a\alpha k_1} \bar{\psi}_{a\alpha^u k_2} \psi_{\vec{c}\vec{\alpha}_b \vec{f}}^3 \bar{\psi}_{b\beta h_1} \psi_{b\beta^u h_2} \psi_{\vec{d}\vec{\beta}_b \vec{g}}^3(0) \right\rangle^{(0)} \\ &= \epsilon_{\vec{c}} \epsilon_{\vec{d}} \left\langle \psi_{a\alpha^\ell k_1} \psi_{b\beta^u h_2} \psi_{c_1 \alpha_1^\ell f_1} \psi_{c_2 \alpha_2^\ell f_2} \psi_{c_3 \alpha_3^\ell f_3} \right. \\ &\quad \times \left. \bar{\psi}_{a\alpha^u k_2} \bar{\psi}_{b\beta^\ell h_1} \bar{\psi}_{d_1 \beta_1^\ell g_1} \bar{\psi}_{d_2 \beta_2^\ell g_2} \bar{\psi}_{d_3 \beta_3^\ell g_3}(0) \right\rangle^{(0)}. \end{aligned}$$

Fazendo as contrações apropriadas na média acima e retraindo os termos $\left\langle \epsilon_{\vec{c}} \psi_{\vec{c}\vec{\alpha}_b \vec{f}}^3 \epsilon_{\vec{d}} \bar{\psi}_{\vec{d}\vec{\beta}_b \vec{g}}^3 \right\rangle = -6 \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b \vec{\beta}_b}^\ell \delta_{\vec{f} \vec{h}} \right)$, obtemos a Eq. (II.1.3.12), (que repetimos aqui por comodidade)

$$\begin{aligned} C_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b \vec{g}} &= -18 \delta_{\alpha^\ell \beta^\ell} \delta_{\alpha^u \beta^u} \delta_{k_1 h_1} \delta_{k_2 h_2} \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b \vec{\beta}_b} \delta_{\vec{f} \vec{g}} \right) + 6 \delta_{\alpha^\ell \beta_1^\ell} \delta_{\alpha^u \beta^u} \\ &\quad \times \delta_{k_1 g_1} \delta_{k_2 h_2} \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b (\beta_1^\ell, \beta_2^\ell, \beta_3^\ell)} \delta_{\vec{f} (h_1, g_2, g_3)} \right) + 6 \delta_{\alpha^\ell \beta_2^\ell} \delta_{\alpha^u \beta^u} \\ &\quad \times \delta_{k_1 g_2} \delta_{k_2 h_2} \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b (\beta_1^\ell, \beta_2^\ell, \beta_3^\ell)} \delta_{\vec{f} (g_1, h_1, g_3)} \right) + 6 \delta_{\alpha^\ell \beta_3^\ell} \delta_{\alpha^u \beta^u} \\ &\quad \times \delta_{k_1 g_3} \delta_{k_2 h_2} \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b (\beta_1^\ell, \beta_2^\ell, \beta_3^\ell)} \delta_{\vec{f} (g_1, g_2, h_1)} \right). \end{aligned} \tag{D.3}$$

Na expressão acima, no primeiro fator o campo fermiônico com um índice de spin lower $\mathcal{M}$ é contraído com o campo correspondente em $\bar{\mathcal{M}}$. Em cada um dos outros

fatores, este campo fermiônico (de índice de spin lower) é contraído com um campo correspondente no campo de bárion.

A expressão acima mostra que cada bloco ij da matriz $\mathfrak{C}$ tem a forma

$$\begin{pmatrix} V_{++}^{++} & 0 & V_{+-}^{++} & 0 \\ 0 & V_{+-}^{+-} & 0 & V_{--}^{+-} \\ V_{++}^{-+} & 0 & V_{+-}^{-+} & 0 \\ 0 & V_{+-}^{--} & 0 & V_{--}^{--} \end{pmatrix}.$$

Em particular, denotando por $\vec{\alpha}^\pm$ a transformação $+\leftrightarrow -$ do vetor $\vec{\alpha}$, na expressão de FCF vemos que, nos elementos diagonais temos $\mathfrak{C}_{ij\vec{\alpha}_m\vec{\alpha}_b}^{\vec{\alpha}_m\vec{\alpha}_b} = \mathfrak{C}_{ij\vec{\alpha}_m^\pm\vec{\alpha}_b^\pm}^{\vec{\alpha}_m^\pm\vec{\alpha}_b^\pm}$. Em palavras, isso implica que $\text{diag } V_{ii}^{++} = \text{diag } V_{ii}^{+-}$ e $\text{diag } V_{ii}^{--} = \text{diag } V_{ii}^{-+}$, onde $V_{ii}^{\alpha_m} = V_{ii\vec{\alpha}_m}^{\vec{\alpha}_m}$ e $\text{diag } A$ denota a diagonal da matriz A . Mais ainda a expressão acima implica que os elementos de $\text{diag } V_{ii}^{--}$ são os mesmo elementos de $\text{diag } V_{ii}^{++}$ apenas escritos em ordem revertida. Com isto, cada um dos blocos é dado por

$$V_{11++}^{++} = V_{11+-}^{+-} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$V_{11--}^{--} = V_{11-+}^{-+} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

$$V_{11++}^{-+} = V_{11+-}^{--} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{9} & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_{22^{++}}^{++} = V_{22^{+-}}^{+-} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{13}{18} \end{pmatrix}, V_{22^{--}}^{--} = V_{22^{-+}}^{-+} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{10}{9} \end{pmatrix}, V_{22^{++}}^{--} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-7}{18} & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_{33^{++}}^{++} = V_{33^{+-}}^{+-} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}, V_{33^{--}}^{--} = V_{33^{-+}}^{-+} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, V_{33^{++}}^{--} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Os sub-blocos dos blocos ij fora da diagonal são dados por

$$V_{12^{++}}^{++} = V_{12^{+-}}^{+-} = -V_{12^{-+}}^{-+} = -V_{12^{--}}^{--} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{9} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{9} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_{12^{-+}}^{++} = V_{12^{+-}}^{-+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{9} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{9} \end{pmatrix}, V_{12^{-+}}^{--} = V_{12^{+-}}^{--} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{9} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_{13^{++}}^{++} = V_{13^{+-}}^{+-} = -V_{13^{-+}}^{-+} = -V_{13^{--}}^{--} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{9} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{9} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_{13^{-+}}^{++} = V_{13^{+-}}^{-+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{9} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}, V_{13^{-+}}^{--} = V_{13^{+-}}^{--} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{9} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_{23^{++}}^{++} = V_{23^{+-}}^{+-} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{18} \end{pmatrix}, V_{23^{--}}^{--} = V_{23^{-+}}^{-+} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{18} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}}{9} \end{pmatrix}, V_{23^{++}}^{--} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{5\sqrt{3}}{18} & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz $\mathfrak{C}$, definida pelos blocos acima, possui um espaço nulo de dimensão 8 que é gerado pelos vetores (autovetores com autovalor 0)

$$\begin{aligned}
\vartheta_1^0 &= \left(\vec{0}_5, \frac{\sqrt{3}}{6}, \vec{0}_6, -\frac{1}{2}, \vec{0}_5, \frac{\sqrt{6}}{6}, \vec{0}_7, \frac{\sqrt{2}}{2}, \vec{0}_5 \right), \\
\vartheta_2^0 &= \left(\vec{0}_7, \frac{1}{2}, \vec{0}_6, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \vec{0}_8, \frac{\sqrt{6}}{6}, \vec{0}_7, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \\
\vartheta_3^0 &= \left(\vec{0}_6, \frac{\sqrt{2}}{6}, \vec{0}_6, -\frac{\sqrt{2}}{6}, \vec{0}_5, \frac{2}{3}, \vec{0}_2, -\frac{1}{3}, \vec{0}_7, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right), \\
\vartheta_4^0 &= \left(\vec{0}_3, \frac{1}{2}, \vec{0}_6, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \vec{0}_{10}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \vec{0}_7, \frac{\sqrt{2}}{2}, \vec{0}_2 \right), \\
\vartheta_5^0 &= \left(\vec{0}_2, \frac{\sqrt{2}}{6}, \vec{0}_6, -\frac{\sqrt{2}}{6}, \vec{0}_7, \frac{2}{3}, \vec{0}_2, -\frac{1}{3}, \vec{0}_7, \frac{\sqrt{3}}{3}, \vec{0}_3 \right), \\
\vartheta_6^0 &= \left(\vec{0}_6, \frac{\sqrt{2}}{6}, \vec{0}_6, -\frac{\sqrt{2}}{6}, \vec{0}_5, -\frac{1}{3}, \vec{0}_2, \frac{2}{3}, \vec{0}_4, \frac{\sqrt{3}}{3}, \vec{0}_4 \right), \\
\vartheta_7^0 &= \left(\vec{0}_2, \frac{\sqrt{2}}{6}, \vec{0}_6, -\frac{\sqrt{2}}{6}, \vec{0}_7, -\frac{1}{3}, \vec{0}_2, \frac{2}{3}, \vec{0}_4, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \vec{0}_6 \right), \\
\vartheta_8^0 &= \left(0, \frac{\sqrt{3}}{6}, \vec{0}_6, -\frac{1}{2}, \vec{0}_7, \frac{\sqrt{6}}{6}, \vec{0}_7, \frac{\sqrt{2}}{2}, \vec{0}_7 \right),
\end{aligned}$$

onde usamos $\vec{0}_n$ para denotar o vetor de n componentes $(0, 0, \dots, 0)$.

O único autovalor não nulo de $\mathfrak{C}$ é $-\frac{4}{3}$, que é 24 vezes degenerado, e os autovetores correspondentes são:

$$\begin{aligned}
\vartheta_1^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_5, -\frac{\sqrt{42}}{7}, \vec{0}_{20}, \frac{\sqrt{7}}{7}, \vec{0}_5 \right), \\
\vartheta_2^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_6, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \vec{0}_{12}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \vec{0}_7, \frac{1}{2}, \vec{0}_4 \right), \\
\vartheta_3^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_6, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \vec{0}_{12}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \vec{0}_{10}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \\
\vartheta_4^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_4, 1, \vec{0}_{27} \right), \\
\vartheta_5^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_2, \frac{\sqrt{2}}{2}, \vec{0}_6, \frac{\sqrt{2}}{2}, \vec{0}_{22} \right), \\
\vartheta_6^{-\frac{4}{3}} &= \left(1, \vec{0}_{31} \right), \\
\vartheta_7^{-\frac{4}{3}} &= \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \vec{0}_6, \frac{1}{2}, \vec{0}_{23} \right), \\
\vartheta_8^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_6, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \vec{0}_{12}, \frac{1}{2}, \vec{0}_2, \frac{1}{2}, \vec{0}_9 \right), \\
\vartheta_9^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_{11}, 1, \vec{0}_{20} \right), \\
\vartheta_{10}^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_3, \frac{1}{2}, \vec{0}_6, \frac{\sqrt{3}}{2}, \vec{0}_{21} \right), \\
\vartheta_{11}^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_3, -\frac{\sqrt{10}}{5}, \vec{0}_{17}, \frac{\sqrt{15}}{5}, \vec{0}_{10} \right), \\
\vartheta_{12}^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_7, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \vec{0}_{23}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_{13}^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_3, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \vec{0}_{26}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \vec{0}_2 \right), \\
\vartheta_{14}^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_2, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \vec{0}_{14}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \vec{0}_{10}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \vec{0}_3 \right), \\
\vartheta_{15}^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_7, -\frac{\sqrt{10}}{5}, \vec{0}_{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}, \vec{0}_8 \right), \\
\vartheta_{16}^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_2, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \vec{0}_{14}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \vec{0}_7, \frac{1}{2}, \vec{0}_6 \right), \\
\\
\vartheta_{17}^{-\frac{4}{3}} &= \left(0, -\frac{\sqrt{42}}{7}, \vec{0}_{22}, \frac{\sqrt{7}}{7}, \vec{0}_7 \right), \\
\vartheta_{18}^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_2, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \vec{0}_{14}, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \vec{0}_{11} \right), \\
\vartheta_{19}^{-\frac{4}{3}} &= \left(0, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \vec{0}_{14}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \vec{0}_{15} \right), \\
\vartheta_{20}^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_5, -\frac{\sqrt{6}}{3} \vec{0}_{12}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \vec{0}_{13} \right), \\
\\
\vartheta_{21}^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_{15}, 1, \vec{0}_{16} \right), \\
\vartheta_{22}^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_7, \frac{1}{2}, \vec{0}_6, \frac{\sqrt{3}}{2}, \vec{0}_{17} \right), \\
\vartheta_{23}^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_5, \frac{\sqrt{3}}{2}, \vec{0}_6, \frac{1}{2}, \vec{0}_{19} \right), \\
\vartheta_{24}^{-\frac{4}{3}} &= \left(\vec{0}_6, \frac{\sqrt{2}}{2}, \vec{0}_6, \frac{\sqrt{2}}{2}, \vec{0}_{18} \right),
\end{aligned}$$

D.1.2 Potencial Distância temporal 1.

Partindo da expressão geral dada na Eq. (C.13) vamos obter uma expressão compacta para $T_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b^\ell \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b^\ell \vec{g}}$. De fato, temos que

$$T_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b^\ell \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b^\ell \vec{g}} = \left\langle M_{\vec{\alpha}_m \vec{k}}^u B_{\vec{\alpha}_b^\ell \vec{f}}^u(0) \bar{M}_{\vec{\beta}_m \vec{h}}^u \bar{B}_{\vec{\beta}_b^\ell \vec{g}}^u(e^0) \right\rangle^{(5)}. \quad (\text{D.4})$$

Nós iremos mostrar que $T_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b^\ell \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b^\ell \vec{g}}$ é dado por

$$T_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b^\ell \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b^\ell \vec{g}} = -3(a_{00} - a_{01}) \quad (\text{D.5})$$

onde

$$a_{00} = \delta_{\alpha^\ell \beta^\ell} \delta_{\alpha^u \beta^u} \delta_{k_1 h_1} \delta_{k_2 h_2} \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b^\ell (\gamma_1^\ell \gamma_2^\ell \gamma_3^\ell)} \delta_{\vec{f} (r_1 r_2 r_3)} \right) \text{perm} \left(\delta_{\vec{\beta}_b^\ell (\gamma_1^\ell \gamma_2^\ell \gamma_3^\ell)} \delta_{\vec{g} (r_{e1} r_2 r_3)} \right)$$

e

$$a_{01} = \delta_{\alpha^u \beta^u} \delta_{k_2 h_2} \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b^\ell (\beta^\ell \gamma_2^\ell \gamma_3^\ell)} \delta_{\vec{f} (h_1 r_2 r_3)} \right) \text{perm} \left(\delta_{\vec{\beta}_b^\ell (\alpha^\ell \gamma_2^\ell \gamma_3^\ell)} \delta_{\vec{g} (k_1 r_2 r_3)} \right).$$

Consideremos a Eq. (C.13) para $\mathcal{N}^{(5)}/\mathcal{D}^{(0)}$, chamamos o primeiro termo nessa expressão de contribuições sem mistura e os de mais termos de contribuições de mistura. Tomando o primeiro termo da Eq. (C.13) com $F \equiv \psi_{a\alpha^\ell k_1} \bar{\psi}_{a\alpha^u k_2} \epsilon_{\vec{c}} \psi_{\vec{c}\vec{\alpha}_b^\ell \vec{f}}^3$ em $x = (0, \vec{0})$ e $H \equiv \bar{\psi}_{b\beta^\ell h_1} \psi_{b\beta^u h_2} \epsilon_{\vec{d}} \bar{\psi}_{\vec{d}\vec{\beta}_b^\ell \vec{g}}^3$ em $x = (e^0, \vec{0})$, nós obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{5}{5!} \frac{28}{144} \left\langle \psi_{a\alpha^\ell k_1} \bar{\psi}_{a\alpha^u k_2} \epsilon_{\vec{c}} \psi_{c_1 \alpha_1^\ell f_1} \psi_{c_2 \alpha_2^\ell f_2} \psi_{c_3 \alpha_3^\ell f_3} \bar{\psi}_{p\gamma_4^\ell r_4} \psi_{p\gamma_5^u r_5} \epsilon_{\vec{a}} \bar{\psi}_{a_1 \gamma_1^\ell r_1} \bar{\psi}_{a_2 \gamma_2^\ell r_2} \bar{\psi}_{a_3 \gamma_3^\ell r_3} \right\rangle^{(0)} \\ & \times \left\langle \psi_{q\gamma_4^\ell r_4} \bar{\psi}_{q\gamma_5^u r_5} \epsilon_{\vec{b}} \psi_{b_1 \gamma_1^\ell r_1} \psi_{b_2 \gamma_2^\ell r_2} \psi_{b_3 \gamma_3^\ell r_3} \bar{\psi}_{b\beta^\ell h_1} \psi_{b\beta^u h_2} \epsilon_{\vec{d}} \bar{\psi}_{d_1 \beta_1^\ell g_1} \bar{\psi}_{d_2 \beta_2^\ell g_2} \bar{\psi}_{d_3 \beta_3^\ell g_3} \right\rangle^{(0)}. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Chamemos A a primeira média acima. A média A pode ser reescrita, movendo os primeiros dois $\bar{\psi}$'s para junto do termo $\bar{\psi}_{a_1 \gamma_1^\ell r_1}$, de forma a obtermos

$$\begin{aligned} & A(\alpha^\ell \alpha^u, k_1 k_2, \alpha_1^\ell \alpha_2^\ell \alpha_3^\ell, f_1 f_2 f_3; \gamma_1^\ell r_1, \gamma_2^\ell r_2, \gamma_3^\ell r_3, \gamma_4^\ell r_4, \gamma_5^u r_5) \\ & = (-1) \left\langle \psi_{a\alpha^\ell k_2} \epsilon_{\vec{c}} \psi_{c_1 \alpha_1^\ell f_1} \psi_{c_2 \alpha_2^\ell f_2} \psi_{c_3 \alpha_3^\ell f_3} \psi_{p\gamma^u r_5} \bar{\psi}_{a\alpha^u k_2} \bar{\psi}_{p\gamma_4^\ell r_4} \epsilon_{\vec{a}} \bar{\psi}_{a_1 \gamma_1^\ell r_1} \bar{\psi}_{a_2 \gamma_2^\ell r_2} \bar{\psi}_{a_3 \gamma_3^\ell r_3} \right\rangle^{(0)}. \end{aligned}$$

Fazendo as contrações apropriadas, temos

$$\begin{aligned} & A(\vec{\alpha}_m, \vec{k}, \vec{\alpha}_b, \vec{f}; \gamma_1^\ell r_1, \gamma_2^\ell r_2, \gamma_3^\ell r_3, \gamma_4^\ell r_4, \gamma_5^u r_5) \\ & = -18 \delta_{\alpha^\ell \gamma_4^\ell} \delta_{k_1 r_4} \delta_{\gamma_5^u \alpha^u} \delta_{r_5 k_2} \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b^\ell (\gamma_1^\ell \gamma_2^\ell \gamma_3^\ell)} \delta_{\vec{f} (r_1 r_2 r_3)} \right) \\ & + 6 \delta_{\alpha^\ell \gamma_1^\ell} \delta_{k_1 r_1} \delta_{\gamma_5^u \alpha^u} \delta_{r_5 k_2} \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b^\ell (\gamma_4^\ell \gamma_2^\ell \gamma_3^\ell)} \delta_{\vec{f} (r_4 r_2 r_3)} \right) \\ & + 6 \delta_{\alpha^\ell \gamma_2^\ell} \delta_{k_1 r_2} \delta_{\gamma_5^u \alpha^u} \delta_{r_5 k_2} \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b^\ell (\gamma_1^\ell \gamma_4^\ell \gamma_3^\ell)} \delta_{\vec{f} (r_1 r_4 r_3)} \right) \\ & + 6 \delta_{\alpha^\ell \gamma_3^\ell} \delta_{k_1 r_3} \delta_{\gamma_5^u \alpha^u} \delta_{r_5 k_2} \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b^\ell (\gamma_1^\ell \gamma_2^\ell \gamma_4^\ell)} \delta_{\vec{f} (r_1 r_2 r_4)} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Denotamos o primeiro termo na equação acima por A_0 e os demais por A_1, A_2, A_3 respectivamente. A segunda média na Eq. (D.6), pode ser tratada da mesma maneira, usando simetria de conjugação de carga ($\psi(\bar{\psi}) \Rightarrow \bar{\psi}(\psi)$, $\alpha^\ell \alpha^u \rightarrow \beta^\ell \beta^u$, $k_1 k_2 \rightarrow h_1 h_2$, $\alpha_1^\ell \alpha_2^\ell \alpha_3^\ell \rightarrow \alpha_1^\ell \alpha_2^\ell \alpha_3^\ell$, $f_1 f_2 f_3 \rightarrow g_1 g_2 g_3$). Com isso, o primeiro termo da Eq. (C.13) resulta em

$$\begin{aligned} & -\frac{5}{5!} \frac{28}{144} \sum A(\vec{\alpha}_m, \vec{k}, \vec{\alpha}_b, \vec{f}; \gamma_1^\ell r_1, \gamma_2^\ell r_2, \gamma_3^\ell r_3, \gamma_4^\ell r_4, \gamma_5^u r_5) \\ & \times A(\vec{\beta}_m, \vec{h}, \vec{\beta}_b, \vec{g}; \gamma_1^\ell r_1, \gamma_2^\ell r_2, \gamma_3^\ell r_3, \gamma_4^\ell r_4, \gamma_5^u r_5). \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Na expressão acima, o somatório é tomado sobre todos os índices $\gamma_i^\ell r_i$, $i = 1, \dots, 4$ e $\gamma_5^u r_u$.

As contribuições de misturas da Eq.(C.13) podem ser tratadas de maneira similar ao feito acima, isolando estas contribuições na Eq. (C.13), temos

$$\begin{aligned}
& -\frac{5}{5!} \frac{12}{144} \left\langle \psi_{a\alpha^\ell k_1} \bar{\psi}_{a\alpha^u k_2} \epsilon \bar{c} \psi_{c_1 \alpha_1^\ell f_1} \psi_{c_2 \alpha_2^\ell f_2} \psi_{c_3 \alpha_3^\ell f_3} \bar{\psi}_{p\gamma_4^\ell r_4} \psi_{p\gamma_5^u r_5} \epsilon \bar{a} \bar{\psi}_{a_1 \gamma_1^\ell r_1} \bar{\psi}_{a_2 \gamma_2^\ell r_2} \bar{\psi}_{a_3 \gamma_3^\ell r_3} \right\rangle^{(0)} \\
& \times \left\langle \psi_{q\gamma_3^\ell r_3} \bar{\psi}_{q\gamma_5^u r_5} \epsilon \bar{b} \psi_{b_1 \gamma_1^\ell r_1} \psi_{b_2 \gamma_2^\ell r_2} \psi_{b_3 \gamma_4^\ell r_4} \bar{\psi}_{b\beta^\ell h_1} \psi_{b\beta^u h_2} \epsilon \bar{d} \bar{\psi}_{d_1 \beta_1^\ell g_1} \bar{\psi}_{d_2 \beta_2^\ell g_2} \bar{\psi}_{d_3 \beta_3^\ell g_3} \right\rangle^{(0)}.
\end{aligned} \tag{D.9}$$

Denotamos a primeira média na expressão acima por

$$U(\vec{\alpha}_m, \vec{k}, \vec{\alpha}_b^\ell, \vec{f}; \gamma_1^\ell r_1, \gamma_2^\ell r_2, \gamma_3^\ell r_3, \gamma_4^\ell r_4, \gamma_5^u r_5) \equiv U_0 + U_1 + U_2 + U_3,$$

a segunda média difere da primeira apenas pela substituição $(\gamma_3^\ell r_3) \rightarrow (\gamma_4^\ell r_4)$. A média U é dado pela mesma expressão da média A dada na Eq. (D.7), a distinção na notação é *útil* para diferenciarmos as contribuições originadas de termos de mistura U e termos sem misturas A . Como no caso sem mistura tratado na Eq.(D.8), as contribuições de mistura resultam em

$$\begin{aligned}
& -\frac{5}{5!} \frac{12}{144} \sum U(\vec{\alpha}_m, \vec{k}, \vec{\alpha}_b^\ell, \vec{f}; \gamma_1^\ell r_1, \gamma_2^\ell r_2, \gamma_3^\ell r_3, \gamma_4^\ell r_4, \gamma_5^u r_5) \\
& U(\vec{\beta}_m, \vec{h}, \vec{\beta}_b^\ell, \vec{g}; \gamma_1^\ell r_1, \gamma_2^\ell r_2, \gamma_4^\ell r_4, \gamma_3^\ell r_3, \gamma_5^u r_5).
\end{aligned}$$

Portanto, precisamos apenas considerar as

- Contribuições Originadas de Termos sem Mistura ($\mathcal{A}$):

$$\mathcal{A} \equiv -\frac{5}{5!} \frac{28}{144} (A_0 + A_1 + A_2 + A_3) (A'_0 + A'_1 + A'_2 + A'_3),$$

onde os termos A'_i , $i = 0, 1, 2, 3$ denotam as contribuições para segunda média na Eq.(D.6).

- Contribuições Originadas de Termos com Misturas ($\mathcal{U}$):

$$\mathcal{U} \equiv -\frac{5}{5!} \frac{12}{144} (U_0 + U_1 + U_2 + U_3) (U'_0 + U'_1 + U'_2 + U'_3),$$

onde os termos U'_i , $i = 0, 1, 2, 3$ denotam as contribuições para segunda média na Eq.(D.9).

Vamos então determinar os 16 fatores nas expressões de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{U}$. Para $\mathcal{A}$, temos

$$\begin{aligned}
A_0 A'_0 &= 3(-6)\delta_{\alpha^\ell \gamma_4^\ell} \delta_{k_1 r_4} \delta_{\gamma_5^u \alpha^u} \delta_{r_5 k_2} \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b^\ell (\gamma_1^\ell \gamma_2^\ell \gamma_3^\ell)} \delta_{\vec{f}(r_1 r_2 r_3)} \right) \\
&\quad \times 3(-6)\delta_{\beta^\ell \gamma_4^\ell} \delta_{h_1 r_4} \delta_{\gamma_5^u \beta^u} \delta_{r_5 h_2} \text{perm} \left(\delta_{\vec{\beta}_b^\ell (\gamma_1^\ell \gamma_2^\ell \gamma_3^\ell)} \delta_{\vec{g}(r_1 r_2 r_3)} \right) \\
&= (3.6)^2 \delta_{\alpha^\ell \beta^\ell} \delta_{\alpha^u \beta^u} \delta_{k_1 h_1} \delta_{k_2 h_2} \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b^\ell (\gamma_1^\ell \gamma_2^\ell \gamma_3^\ell)} \delta_{\vec{f}(r_1 r_2 r_3)} \right) \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b^\ell (\gamma_1^\ell \gamma_2^\ell \gamma_3^\ell)} \delta_{\vec{g}(r_1 r_2 r_3)} \right) \\
&= (3.6)^2 a_{00}.
\end{aligned}$$

De maneira similar, temos $A_0 A'_1 = -3.6^2 a_{01}$. Todas as demais contrações se reduzem a múltiplos de a_{00} ou a_{01} . De maneira geral, temos $A_0 A'_j = -3.6^2 a_{01}$, $j = 1, 2, 3$; $A_j A'_j = 6^2 a_{00}$, $j = 1, 2, 3$ para $i < j = 1, 2, 3$ e $A_i A'_j = 6^2 a_{01}$ e $j > i = 1, 2, 3$. Contabilizando todas as contribuições de termos sem mistura temos, $\mathcal{A} = -(7/2)(a_{00} - a_{01})$.

Analogamente, para os termos de mistura $\mathcal{U}$, nós temos $U_0 U'_0 = (3.6)^2 a_{01}$. Analogamente ao caso anterior, $U_0 U'_j = -3.6^2 a_{01}$, $j = 1, 2, 3$ e $U_i U'_j = 6^2 a_{01}$, $i \neq j$. Temos também, $U_1 U'_1 = 6^2 a_{00}$. Com o mesmo resultado valendo para $U_2 U'_2$ e $U_3 U'_3$. Contabilizando todas as contribuições originadas de termos com misturas obtemos $\mathcal{U} = (1/2)(a_{00} - a_{01})$. Finalmente, somando as contribuições de mistura e sem mistura temos $T \equiv \mathcal{A} + \mathcal{U} = -3(a_{00} - a_{01})$ de onde segue a Eq. (D.5).

A matriz do potencial para distância temporal 1 $\mathfrak{T}$ é obtida pela contração de $T_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b^\ell \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b^\ell \vec{g}}$ com os coeficientes F_i e F_j . Os resultados do Apêndice E e da Ref. ANJOS E VEIGA [2008b] podem ser usados para demonstrar que as matrizes para o caso de distancia espacial 1 e do caso de pontos coincidentes são as mesmas.

D.2 Potencial de Troca

Vamos considerar explicitamente apenas o caso da direção e^1 , os outros casos são similares e podem ser obtidos com o uso de simetrias de rotação. Após executarmos a integral de calibre $\mathcal{I}_2$, dada na Eq.(C.9), a contribuição de ordem $\mathcal{O}(\kappa^2)$ ao operador matricial D é dada por,

$$W_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b^\ell \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b^\ell \vec{g}} = \left\langle M_{\vec{\alpha}_m \vec{k}}^u(0) B_{\vec{\alpha}_b^\ell \vec{f}}^u(e^1) \bar{M}_{\vec{\beta}_m \vec{h}}^u(0) \bar{B}_{\vec{\beta}_b^\ell \vec{g}}^u(e^1) \right\rangle^{(2)}, \quad (\text{D.10})$$

de onde obtemos

$$W_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b \vec{g}} = \left\langle \psi_{a_1 \beta_2 r_2} \psi_{a \alpha^\ell k_1} \psi_{b \beta^u h_2} \bar{\psi}_{a_1 \alpha_1 r_1} \bar{\psi}_{a \alpha^u k_2} \bar{\psi}_{b \beta^\ell h_1}(0) \right\rangle^{(0)} \Gamma_{\alpha_1 \beta_1}^{e^1} \Gamma_{\alpha_2 \beta_2}^{-e^1} \\ \times \left\langle \psi_{b_1 \beta_1 r_1} \epsilon_{\vec{c} \vec{\alpha}_b \vec{f}} \bar{\psi}_{b_1 \alpha_2 r_2} \epsilon_{\vec{d} \vec{\beta}_b \vec{g}} \bar{\psi}_{\vec{d} \vec{\beta}_b \vec{g}}(e^1) \right\rangle^{(0)} = \mathcal{F}_1 \Gamma_{\alpha_1 \beta_1}^{e^1} \Gamma_{\alpha_2 \beta_2}^{-e^1} \mathcal{F}_2.$$

Na expressão acima W é fatorizado em dois fatores multiplicativos $\mathcal{F}_1 = \langle \psi_{a_1 \beta_2 r_2} \psi_{a \alpha^\ell k_1} \times \psi_{b \beta^u h_2} \bar{\psi}_{a_1 \alpha_1 r_1} \bar{\psi}_{a \alpha^u k_2} \bar{\psi}_{b \beta^\ell h_1}(0) \rangle^{(0)}$ e $\mathcal{F}_2 = \left\langle \psi_{b_1 \beta_1 r_1} \epsilon_{\vec{c} \vec{\alpha}_b \vec{f}} \bar{\psi}_{b_1 \alpha_2 r_2} \epsilon_{\vec{d} \vec{\beta}_b \vec{g}} \bar{\psi}_{\vec{d} \vec{\beta}_b \vec{g}}(e^1) \right\rangle^{(0)}$. Suprimindo os fatores $(-1/3)(-\kappa/2)^2$ (oriundo da integração na variável de calibre) e $(-\kappa/2)$ (o pré-fator que multiplica cada termo não local na ação S) e tomando as contrações apropriadas na Eq. (D.10), obtemos

$$\mathcal{F}_1 = 3 \left(\delta_{\beta_2 \alpha^u} \delta_{\alpha^1 \beta^u} \delta_{\alpha^\ell \beta^\ell} \delta_{r_2 k_2} \delta_{k_1 h_1} \delta_{h_2 r_1} + \delta_{\alpha^\ell \alpha_1} \delta_{\beta^u \alpha^u} \delta_{\beta_2 \beta^\ell} \delta_{k_1 r_1} \delta_{h_2 k_2} \delta_{r_2 h_1} \right) \equiv \mathcal{F}_1^{(1)} + \mathcal{F}_1^{(2)}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 &= -\delta_{b_1 d_1} \delta_{\beta_1 \beta_1^\ell} \delta_{r_1 g_1} \left\langle \epsilon_{\vec{c} \vec{\alpha}_b \vec{f}} \bar{\psi}_{b_1 \alpha_2 r_2} \epsilon_{\vec{d} \vec{\beta}_b \vec{g}} \bar{\psi}_{d_2 \beta_2^\ell g_2} \bar{\psi}_{d_3 \beta_3^\ell g_3} \right\rangle \\ &\quad + \delta_{b_1 d_2} \delta_{\beta_1 \beta_2^\ell} \delta_{r_1 g_2} \left\langle \epsilon_{\vec{c} \vec{\alpha}_b \vec{f}} \bar{\psi}_{b_1 \alpha_2 r_2} \epsilon_{\vec{d} \vec{\beta}_b \vec{g}} \bar{\psi}_{d_1 \beta_1^\ell g_1} \bar{\psi}_{d_3 \beta_3^\ell g_3} \right\rangle \\ &\quad - \delta_{b_1 d_3} \delta_{\beta_1 \beta_3^\ell} \delta_{r_1 g_3} \left\langle \epsilon_{\vec{c} \vec{\alpha}_b \vec{f}} \bar{\psi}_{b_1 \alpha_2 r_2} \epsilon_{\vec{d} \vec{\beta}_b \vec{g}} \bar{\psi}_{d_1 \beta_1^\ell g_1} \bar{\psi}_{d_2 \beta_2^\ell g_2} \right\rangle \\ &\equiv \mathcal{F}_2^{(1)} + \mathcal{F}_2^{(2)} + \mathcal{F}_2^{(3)}. \end{aligned} \tag{D.11}$$

Para $\alpha_2 \neq 3, 4$, a Eq. (D.11) se anula. Para $\mathcal{F}_1^{(1)} \mathcal{F}_2^{(1,2,3)}$, contribuições não nulas apenas ocorrem quando $\Gamma_{\beta^u \beta}^{e^1} \Gamma_{\alpha_2 \alpha^u}^{-e^1} = -1$. Já para $\mathcal{F}_1^{(2)} \mathcal{F}_2^{(1,2,3)}$, as contribuições não nulas ocorrem quando $\Gamma_{\alpha^\ell \beta}^{e^1} \Gamma_{\alpha_2 \beta^\ell}^{-e^1} = 1$. Pela simetria de rotação, este resultado também pode ser adaptado para os demais casos $-e^1$, $\pm e^2$ e $\pm e^3$. Novamente, usando $\left\langle \epsilon_{\vec{c} \vec{\alpha}_b \vec{f}} \bar{\psi}_{\vec{c} \vec{\alpha}_b \vec{f}} \epsilon_{\vec{d} \vec{\beta}_b \vec{g}} \bar{\psi}_{\vec{d} \vec{\beta}_b \vec{g}} \right\rangle = -6 \text{perm} \left(\delta_{\vec{\alpha}_b \vec{\beta}_b} \delta_{\vec{f} \vec{h}} \right)$ obtemos

$$W_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b \vec{g}} = 18 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=\pm 1} A_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b \vec{g}}(i, j), \tag{D.12}$$

onde

$$A_{\vec{\alpha}_m \vec{k} \vec{\alpha}_b \vec{f}}^{\vec{\beta}_m \vec{h} \vec{\beta}_b \vec{g}}(i, j) = \begin{cases} -\delta_{\alpha^i \beta^i} \delta_{k_1 h_1} \delta_{g_i k_1} \sum_{v=3,4} f_1(i) \text{perm}(\delta_{\vec{\alpha}_b \vec{t}_v}(\vec{\beta}_b) \delta_{\vec{f} \vec{t}_{h_1}}(\vec{g})) & \text{se } j = +1, \\ \delta_{\alpha^u \beta^u} \delta_{k_2 h_2} \delta_{g_i k_1} \sum_{v=3,4} g_1(i) \text{perm}(\delta_{\vec{\alpha}_b \vec{t}_v}(\vec{\beta}_b) \delta_{\vec{f} \vec{t}_{h_1}}(\vec{g})) & \text{se } j = -1, \end{cases}$$

com $i = 1, 2, 3$ e $\vec{t}_x^i(\vec{v})$, denotando o vetor $\vec{v}$, com a i -ésima componente v_i substituída por x , de forma que $\vec{t}_x^1(\vec{v}) = (x, v_2, v_3)$, $\vec{t}_x^2(\vec{v}) = (v_1, x, v_3)$ e $\vec{t}_x^3(\vec{v}) = (v_1, v_2, x)$. E onde

$$\begin{aligned} f_1(i) &= \delta_{\vec{b}_j^m,1} \delta_{\vec{a}_j^m,1} \delta_{\vec{b}_i^u,4} \delta_{a,4} + \delta_{\vec{b}_j^m,1} \delta_{\vec{a}_j^m,2} \delta_{\vec{b}_i^u,4} \delta_{a,3} + \\ &\quad \delta_{\vec{b}_j^m,2} \delta_{\vec{a}_j^m,1} \delta_{\vec{b}_i^u,3} \delta_{a,4} + \delta_{\vec{b}_j^m,2} \delta_{\vec{a}_j^m,2} \delta_{\vec{b}_i^u,3} \delta_{a,3} \\ g_1(i) &= \delta_{\vec{a}_j^m,4} \delta_{\vec{b}_j^m,4} \delta_{\vec{b}_i^u,4} \delta_{a,4} + \delta_{\vec{a}_j^m,3} \delta_{\vec{b}_j^m,4} \delta_{\vec{b}_i^u,3} \delta_{a,4} + \\ &\quad \delta_{\vec{a}_j^m,4} \delta_{\vec{b}_j^m,3} \delta_{\vec{b}_i^u,4} \delta_{a,3} + \delta_{\vec{a}_j^m,3} \delta_{\vec{b}_j^m,3} \delta_{\vec{b}_i^u,3} \delta_{a,3} \end{aligned}$$

Das equações acima, vemos que cada bloco $V_{ij\beta_m}^{\vec{\alpha}_m}$ na diagonal secundária é um bloco nulo, uma vez que nas diagonais secundárias $\delta_{\alpha^u\beta^u} = \delta_{\alpha^l\beta^l} = 0$. Portanto todo $A_{\vec{\alpha}_m\vec{k}\vec{\alpha}_b\vec{f}}^{\vec{\beta}_m\vec{h}\vec{\beta}_b\vec{g}}(i, j)$ é zero nas diagonais secundárias. A matriz do potencial de troca é dada por

$$\mathbf{W} := \begin{bmatrix} M11 & M12 & M13 & M14 \\ M21 & M22 & M23 & M24 \\ M31 & M32 & M33 & M34 \\ M41 & M42 & M43 & M44 \end{bmatrix},$$

onde os blocos M_{ij} são

$$M11 := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & \frac{-8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-8}{3} & 0 & 0 & \frac{-10}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & \frac{-5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M12 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$M13 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

$$M14 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$M22 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-5}{3} & 0 & 0 & -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-10}{3} & 0 & 0 & \frac{-8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-8}{3} & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M23 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M24 := \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M33 := \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-13}{6} & 0 & \frac{-7}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-13}{6} & \frac{-8}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{-7}{6} & 0 \\ 0 & \frac{-7}{6} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-8}{3} & \frac{-13}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-7}{6} & 0 & \frac{-13}{6} & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M_{34} &:= \begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5\sqrt{3}}{6} & -\frac{5\sqrt{3}}{6} & 0 & \frac{5\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5\sqrt{3}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{5\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5\sqrt{3}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5\sqrt{3}}{6} & 0 & -\frac{5\sqrt{3}}{6} & -\frac{5\sqrt{3}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} \\
M_{44} &:= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Lembramos que a matrix W é auto-adjunta e portanto o bloco M_{ij} pode ser obtido do bloco M_{ji} .

Apêndice E

Permanentes e Determinantes de Matrizes- $(0, 1)$

*“A mathematician is a device for turning coffee into
theorems. ”*

Paul Erdős

Uma matrix- $(0, 1)$ ou uma matriz binária $n \times m$ é uma matriz B cujos elementos $B_{ij} \in \{0, 1\}$, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. O conjunto das matrizes- $(0, 1)$ é denotado por $\mathbb{B}(n, m)$. Este tipo de matrizes aparece com frequência em várias aplicações e requer uma atenção especial. Por exemplo, matrizes- $(0, 1)$ com uma soma constante dos elementos de uma linha aparecem na estatística, com o nome de *matriz de design*, como uma das principais ferramentas do método de Análise das Variâncias (ANOVA) (veja por exemplo a Ref. SCHEFFE [1999]). Mais ainda, matrizes- $(0, 1)$ aparecem em diversos modelos físicos, como por exemplo os modelos de teoria quântica de campos na rede tratados no Capítulo II.1.

Aqui, usaremos a correspondência entre matrizes- $(0, 1)$ e grafos bipartidos afim de estabelecer identidades para o permanente e o determinante destas matrizes. Estas novas identidades diferem das expansão de Binet-Cauchy para permanentes e determinantes (veja a Ref. ANJOS E VEIGA [2008b]) e são usadas para estabelecer

relações entre as funções de correlação na Cromodinâmica Quântica na rede na Seção II.1.2

E.1 Matrizes-(0, 1) e Grafos Bipartidos

A correspondência entre matrizes e grafos tem um longa e frutífera história, onde várias propriedades de matrizes e grafos têm sido exploradas. Em particular, a relação entre uma matriz-(0, 1) e grafos diretos bipartidos provou ser útil, por exemplo para o cálculo do determinante de matrizes de inteiros não-negativos usando o grafo bipartido correspondente como mostrado na Ref. HARARY [1969].

Sabemos também que uma matriz-(0, 1) quadrada $B \in \mathbb{B}(n, n) \equiv \mathbb{B}(n)$ pode ser tomada como a matriz de adjacência de um grafo direto (veja a Ref. HARARY [1962] para mais detalhes). De maneira geral, é fácil ver que o conjunto $\mathbb{B}(n, m)$ das matrizes-(0, 1) apresenta uma correspondência um-a-um com o conjunto dos Grafos Bipartidos (veja a Figura E.1). Mais precisamente, temos:

Definição E.1 *O grafo $\mathcal{G}(B)$ de uma matriz-(0, 1) $B \in \mathbb{B}(n, m)$, é o grafo bipartido não-orientado obtido desenhando-se e indexando-se n vértices pretos em uma coluna a esquerda, m vértices brancos em uma coluna a direita, e conectando o i -ésimo vértice preto ao j -ésimo vértice branco se e somente se $B_{ij} = 1$.*

A definição acima é um caso especial de uma matriz de biadjacência de um grafo bipartido finito G com vértices brancos e pretos. Neste caso mais geral, uma correspondência um-a-um agora existe entre os grafos bipartidos e as matrizes de inteiros não-negativos (veja, por exemplo, a Ref. BRUALDI [2006] para mais detalhes).

Os grafos bipartidos possuem outras propriedades interessante. Entre elas está o fato que a soma e o produto de grafos pode ser naturalmente definida de forma que o grafo correspondente a soma (produto) de duas matrizes-(0, 1) é a soma (produto) dos grafos das duas matrizes binárias.

E.2 Identidades para Permanentes e Determinantes

Relembramos que o permanente de uma matriz $n \times n$ A é definido por

$$\text{perm } A = \sum_{\sigma \in S_n} A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{n\sigma(n)}, \quad (\text{E.1})$$

onde $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ pertence ao grupo S_n das permutações de $\{1, 2, \dots, n\}$. Seguindo as conclusões da Ref. HARARY [1969], o permanente de uma matriz pode ser expresso em termos da estrutura do grafo direto $D(A)$ da matriz de adjacência de A . Um subgrafo linear de um grafo direto D é um subgrafo que recobre D , e no qual todo vértice tem grau de entrada e saída iguais a 1, isto é todo vértice está ligado por um e apenas um elo (veja a Ref. BROSS E YELLEN [1999]). Assim, a Eq. (E.1) estabelece que $\text{perm } A$ é dado pelo número de subgrafos lineares distintos de $D(A)$.

Apesar de ser pouco explorado na literatura, é um fato notável que o permanente de uma matrix- $(0, 1)$ quadrada B possa ser expresso em termos dos 1-fatores do grafo de B . Um 1-fator ou, simplesmente, um fator F de um grafo bipartido indireto $\mathcal{G}$ é um subgrafo que recobre $\mathcal{G}$, no qual todo o vértice tem grau 1. Precisamente, temos:

Definição E.2 Um fator $F(B)$ de $B \in \mathbb{B}(n)$ é um subgrafo de $\mathcal{G}(B)$ com n elos, tal que todo vértice tem um e somente um elo ligado a ele. O conjunto de todos os fatores de B é denotado por $\mathcal{F}(B)$ (veja a Figura E.1). O conjunto de todos os fatores de todas matrizes- $(0, 1)$ $n \times n$ é denotado por $\mathcal{F}_n$. Logo, é claro que temos $\mathcal{F}_n = \bigcup_{B \in \mathbb{B}(n)} \mathcal{F}(B)$.

Figura E.1. Uma matriz quadrada A , seu grafo bipartido $\mathcal{G}(A)$, e seus fatores $F(A)$.

Da discussão acima, vemos que todo elemento de $\mathcal{F}_n$ representa um elemento de S_n , tal que $i \rightarrow j$ quando o elo conecta o i -ésimo vértice preto e o j -ésimo vértice branco. Assim, para uma matrix- $(0, 1)$ B , cada elemento no conjunto $\mathcal{F}(B)$ dos fatores de B corresponde a uma contribuição não nula no somatório do lado direito da Eq. (E.1). Cada fator de B contribui com o valor 1 para o somatório da Eq. (E.1). Portanto, em palavras, $\text{perm } B$ é dado pelo número de fatores distintos $F(B)$ de B . Portanto temos o seguinte resultado:

Lema E.2.A Para $B \in \mathbb{B}(n)$, $\text{perm } B = \|\mathcal{F}(B)\|$, onde $\|\cdot\|$ denota cardinalidade do conjunto.

Como um Corolário imediato do Lema E.2.A, temos:

Corolário E.a Os subgrafos lineares do grafo direto $D(B)$ estão em correspondência um-a-um com os fatores $F(B)$ em $\mathcal{F}(B)$.

Seja $\boxtimes \in \mathcal{F}_n$. Para $B \in \mathbb{B}(n)$, definimos

$$\chi^B(\boxtimes) = \begin{cases} 1, & \text{se } \boxtimes \in \mathcal{F}(B) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A seguir, definamos $\text{sgn}(\boxtimes) = +1$ ($\text{sgn}(\boxtimes) = -1$) se $\boxtimes$ é associado a uma permutação par (ímpar) de S_n . Com estas definições, o Lema E.2.A pode ser reescrito como se segue e, mais ainda, pode ser estendido naturalmente para contabilizar os sinais no determinante. Com isto, temos:

Lema E.2.B *Seja $B \in \mathbb{B}(n)$. Temos que*

$$\text{perm } B = \sum_{\boxtimes \in \mathcal{F}_n} \chi^B(\boxtimes), \quad \det B = \sum_{\boxtimes \in \mathcal{F}_n} \text{sgn}(\boxtimes) \chi^B(\boxtimes).$$

Agora consideremos as matrizes delta de Kronecker (matrizes δ_{nm}^p , por economia) definidas por:

Definição E.3 *Dados p vetores $\alpha^k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k) \in \{0, 1\}^n$, $k = 1, \dots, p$, e p vetores $\beta^\ell = (\beta_1^\ell, \beta_2^\ell, \dots, \beta_m^\ell) \in \{0, 1\}^m$, $\ell = 1, \dots, p$, a matriz $n \times m$ A , com entradas dadas pelos deltas de Kronecker da forma $A_{ij} = \prod_{k=1}^p \delta_{\alpha_i^k \beta_j^k}$, é chamada uma matriz δ_{nm}^p .*

Claramente, o conjunto Δ_{nm}^p de todas as matrizes δ_{nm}^p é um subconjunto de $\mathbb{B}(n, m)$. Mais ainda, é claro que, se o número p de vetores na definição das matrizes Δ_{nm}^p for grande o suficiente, então os fatores de Δ_{nm}^p contêm todos os fatores de $\mathcal{F}_n$. Assim, usando o *teorema do casamento*¹ (veja a Ref. BROSS E YELLEN [1999]), estabelecemos o lema seguinte:

Lema E.2.C *$\mathcal{F}_n$ está contido no conjunto de todos os fatores de $\Delta_{nn}^p \Leftrightarrow 2^p \geq n$.*

¹Seja $S = \{S_1, S_2, \dots\}$ uma coleção (não necessariamente contável) de subconjuntos finitos de um conjunto M . Um sistema de representantes distintos de S é um conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ de elementos distintos de M , tal que $|X| = |S|$ e, para todo i $x_i \in S_i$. O teorema do casamento estabelece que um sistema de representantes distintos de S pode ser exibido se e somente se para todas as subcoleções $T = \{T_i\}$ de S , $|\bigcup T_i| \geq |T|$.

A condição em S é chamada de condição do casamento. O nome do teorema vem da situação, um tanto implausível, na qual o teorema é popularmente descrito. Nessa descrição, se assume o caso onde temos um conjunto de n mulheres e m homens todos solteiros. A i -ésima mulher deseja se casar com algum homem do conjunto M_i e de outro lado todos os homens ficariam felizes em se casar com uma mulher que deseje se casar com eles. Então o teorema do casamento estabelece que toda mulher poderá se casar com um homem que deseje somente se a coleção $\{M_i\}$ satisfizer a condição do casamento.

Seja B o conjunto de matrizes δ_{nn}^p quadradas dadas por $B_{ij} = \prod_{k=0}^p \delta_{\alpha_i^k \beta_j^k}$. Então, com esta notação, temos $\chi^B(\boxtimes) = \prod_{i=1}^n \prod_{k=0}^p \delta_{\alpha_i^k \beta_{\sigma(i)}^k}$, onde σ é a permutação de S_n associada com $\boxtimes$. Seja B uma matriz δ_{nn}^p , definida pelos vetores $\alpha^k, \beta^k, k = 1, 2, \dots, p$, os elementos de B são denotados por $\delta_{\tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j} \equiv \prod_{k=0}^p \delta_{\alpha_i^k \beta_j^k}$. Portanto, temos $\chi_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(\boxtimes) \equiv \chi^B(\boxtimes) = \prod_{i=1}^n \delta_{\tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_{\sigma(i)}}$. Com isto, para $\boxtimes$ e $\boxplus$ em $\mathcal{F}_n$, obtemos $\sum_{\tilde{\gamma}} \chi_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}(\boxtimes) \chi_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}}(\boxplus) = \prod_{i=1}^n \delta_{\tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_{\sigma_1 \circ \sigma_2(j)}} \Rightarrow \sum_{\tilde{\gamma}} \chi_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}(\boxtimes) \chi_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}}(\boxplus) \in \mathcal{F}_n$, onde $\sigma_1 \in S_n$ é associado com $\boxtimes$ e $\sigma_2 \in S_n$ é associado com $\boxplus$. De outro lado, para todo $\sigma \in S_n$ e $\circ$ denotando a composição em S_n , temos que $\{\sigma \circ p \mid p \in S_n\} = S_n$. Assim, podemos estabelecer as seguintes identidades envolvendo permanentes e determinantes de matrizes- δ_{nn}^p :

Proposição E.1 *Sejam $\delta_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}, \delta_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}}$ e $\delta_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}$ matrizes- δ_{nn}^p quadradas. para $2^p \geq n$, temos*

$$\det \delta_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = \frac{1}{n!} \sum_{\tilde{\gamma}} \det \delta_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} \det \delta_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} = \frac{1}{n!} \sum_{\tilde{\gamma}} \det(\delta_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} \delta_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}}), \quad (\text{E.2})$$

$$\sum_{\tilde{\gamma}} \text{perm} \delta_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} \det \delta_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} = 0, \quad (\text{E.3})$$

$$\text{perm} \delta_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = \frac{1}{n!} \sum_{\tilde{\gamma}} \text{perm} \delta_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} \text{perm} \delta_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}}. \quad (\text{E.4})$$

As Eqs. (E.2) e (E.3) expressam um resultado, de alguma forma, trivial, enquanto a Eq. (E.4) não é trivial uma vez que $\text{perm} AB \neq (\text{perm} A)(\text{perm} B)$. Para o modelo de QCD tratado na nossa Ref. VEIGA ET AL. [2008a] e no Capítulo II.1, onde matrizes do tipo δ_{nn}^p aparecem, a Eq. (E.4) fornece relações importantes entre as funções de correlação dos campos.

Para encerrar, apontamos que nossas identidades (bem como o método usado para obtê-las) podem ser adaptadas para analisar os chamados deltas de Kronecker generalizados e os deltas Permanente generalizados. Os resultados estabelecidos aqui, podem assim, ser usados afim de se obter relações combinatoriais entre spinors e tensores (sugerimos a Ref. ALGACY [1999] para uma breve introdução as relações entre os deltas de Kronecker generalizados, deltas Permanente generalizados, equivalentes tensoriais e spinorias).